AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Vb 81702.

THÈSE de DOCTORAT
de l'UNIVERSITÉ de METZ

Spécialité

MATHÉMATIQUES

présentée le 15 Juin 1995 par

Ali BAKLOUTI

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Sujet de la thèse :

OPÉRATEURS D'ENTRELACEMENT DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES ET CORTEX DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 19950265
Cote S/M3 95/14
Loc Magasin

COMPOSITION DU JURY:

M. J. P. Anker, Professeur, Nancy

M. D. Arnal, Professeur, Metz

M. M. E. Bekka, Professeur, Metz Rapporteur

M. H. Fujiwara, Professeur, Japon Rapporteur

M. G. Rapporteur

M. J.

M. J.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
022 420525 8

TABLE DE MATIÈRES

INTRODUCTION. 6

CHAPITRE I: OPÉRATEUR D'ENTRELACEMENT DES REPRÉSENTATIONS MONOMIALES. 15

I-1. Généralités. 16
I-2. Désintégration centrale canonique des représentations monomiales. 18
I-3. Construction de l'opérateur d'entrelacement. 26
I-3.1. Construction de polarisations et de bases de Malcev. 26
I-3.2. Le Théorème principal. 27
I-4. L'opérateur d'entrelacement inverse. 31
I-5. Opérateurs différentiels sur les espaces homogènes nilpotents. 40
I-6. Nouvelle désintégration lisse de $L^2(G)$. 45
I-7. Exemples et contre-exemple. 46
I-8. Cas des groupes non nilpotents. 50

CHAPITRE II: DÉSINTÉGRATION DES RESTRICTIONS DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES ET OPÉRATEURS D'ENTRELACEMENT. 52

II-1. Désintégration centrale canonique des restrictions de représentations. 53
II-2. Construction de l'opérateur d'entrelacement. 59
II-2.1. Construction de polarisations et de bases de Malcev. 59
II-2.2. Description de l'opérateur d'entrelacement. 62
II-3. L'opérateur d'entrelacement inverse. 69
II-4. Opérateur d'entrelacement pour le produit tensoriel de représentations. 73
II-5. Exemples et contre-exemples. 78

CHAPITRE III: SUR LE CORTEX DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS. 83

III-1. Généralités. 84
III-2. Cortex des algèbres de Lie de petite dimension. 86
III-3. Sur le cortex de différentes classes de groupes. 88
III-4. Cortex des groupes de Lie de pas 3. 95
III-5. Description du cortex des groupes de Lie de pas 3. 101

CONCLUSION. 109

BIBLIOGRAPHIE. 112

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le problème de la construction et la classification des classes de représentations unitaires et irréductibles de G, c'est-à-dire le problème de la détermination du dual unitaire $\hat{G}$ de G a été entièrement résolue par A. A. Kirillov avec la méthode des orbites. Plus précisément, il a montré qu'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathfrak{g}^\star/Ad^\star(G)$ des orbites de la représentation coadjointe de G dans le dual $\mathfrak{g}^\star$ de $\mathfrak{g}$, et le dual unitaire $\hat{G}$ de G (cf. [25]).

Cette correspondance est très explicite: étant donnée une orbite $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}^\star$, on choisit $\xi_0 \in \mathcal{O}$ et une polarisation $\mathfrak{b}$ en ξ_0 de $\mathfrak{g}$, c'est à dire une sous-algèbre telle que

$$< \xi_0, [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] >= 0$$

et de dimension maximale qui est en fait égale à

$$\dim(\mathfrak{g}) - \frac{1}{2}\dim(\mathcal{O}) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{g}(\xi_0)))$$

où $\mathfrak{g}(\xi_0)$ est le radical de la forme bilinéaire

$$B_{\xi_0}(X,Y) =< \xi_0, [X,Y] > .$$

Comme G est connexe et simplement connexe, l'application exponentielle est un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G. Ainsi $B = \exp(\mathfrak{b})$ est le sous-groupe analytique correspondant à $\mathfrak{b}$, et la formule

$$\chi_0(\exp(X)) = e^{i\xi_0(X)}, \quad (X \in \mathfrak{b})$$

définit un caractère de ce groupe; soit $\pi^{\mathcal{O}} = \operatorname{Ind}_B^G \chi_0$ la représentation induite de B à G qui est irréductible et dont la classe ne dépend que de $\mathcal{O}$. Réciproquement, tout $\pi \in \hat{G}$ est obtenue par ce procédé.

L'application ainsi définie

$$K : \mathfrak{g}^\star/Ad^\star(G) \longrightarrow \hat{G},\ \mathfrak{O} \longmapsto \pi^{\mathfrak{O}}$$

est appellée la bijection de Kirillov. Munissons $\mathfrak{g}^\star/Ad^\star(G)$ et $\hat{G}$ de leurs structures topologiques et boréliennes habituelles c-à-d: $\mathfrak{g}^\star/Ad^\star(G)$ de la topologie quotient, et $\hat{G}$ de la topologie de Fell.

Il est bien connu que K est un homéomorphisme de $\mathfrak{g}^\star/Ad^\star(G)$ sur $\hat{G}$ (cf. [8]). Rappelons encore que des faits similaires se reproduisent dans le cas des groupes de Lie résolubles exponentiels. Le fait que K est un homéomorphisme de $\mathfrak{g}^\star/Ad^\star(G)$ sur $\hat{G}$ a été prouvé antérieurement par J. Ludwig (cf. [26]).

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère la représentation monomiale $\tau = \operatorname{Ind}_H^G \chi$ induite par un caractère unitaire χ d'un sous-groupe analytique H de G. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie correspondant à H, χ s'écrit sous la forme $\chi(\exp X) = e^{if(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$ avec $f \in \mathfrak{h}^\star$. On note $p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathfrak{h}^\star$ la projection canonique et Ω_f l'orbite coadjointe de f. La représentation τ n'est pas irréductible sauf si $\mathfrak{h}$ est une polarisation en f, on la décompose (ou on la désintègre) en intégrale directe d'irréductibles. D'après Corwin et Greenleaf [9] et Lipsman [28], cette désintégration centrale de τ s'obtient comme suit:

$$\tau \simeq \int_{(f+\mathfrak{h}^\perp)/H}^{\oplus} \pi_l d\dot{l},$$

$d\dot{l}$ étant une certaine mesure naturelle sur l'espace $(f+\mathfrak{h}^\perp)/H$ des $H-$orbites. D'autre part, comme dans les travaux de Corwin, Greenleaf et Grélaud [11] et Lipsman [28], la désintégration centrale de τ s'écrit aussi

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi),$$

où la classe de μ est l'image par l'application de Kirillov $\theta : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \hat{G}$ de celle de la mesure de Lebesgue sur $f+\mathfrak{h}^\perp$ et $m(\pi)$ désigne le nombre de $H-$orbites incluses dans $(f+\mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega_f$. (C'est aussi le nombre des composantes connexes dans $(f+\mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega_f$ lorsque presque toutes les multiplicités sont finies).

L'un des problèmes les plus importants dans la théorie de la désintégration des représentations des groupes est de construire explicitement un opérateur qui entrelace τ et sa décomposition centrale. La réponse à cette question peut être vue comme l'un des ingrédients primordiaux pour la résolution de plusieurs problèmes importants, par exemple dans l'étude de la résolubilité des opérateurs différentiels invariants sur l'espace homogène G/H, ou encore dans

le problème de la réciprocité de Frobénius des vecteurs généralisés semi-invariants pour lequel Hidénori Fujiwara a trouvé une solution partielle ([16], [18]).

Dans [29] et [30], Ronald L. Lipsman a déterminé un opérateur d'entrelacement pour la représentation quasi-régulière dans le cas où les multiplicités sont finies. Dans [20] Gérard Grélaud a remarqué que la formule de Plancherel sur les groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes permet d'obtenir explicitement un opérateur d'entrelacement entre la représentation induite et sa décomposition centrale lorsque $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Dans le premier chapitre, on va décrire un opérateur d'entrelacement unitaire entre τ et sa décomposition centrale. La nouveauté dans ce travail par rapport aux cas déja connus, c'est l'obtention d'un tel opérateur d'entrelacement dans le cas général. En d'autre termes nous construisons dans la première partie de cette thèse un opérateur d'entrelacement entre $\operatorname*{Ind}_H^G \chi_f$ et sa décomposition centrale lorsque H est un sous-groupe fermé connexe quelconque, dans le cadre des groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes quelconques.

Dans un premier temps, nous généralisons les résultats de Corwin, Greenleaf et Grélaud [11], Lipsman [28] sur la désintégration des représentations monomiales, nous déterminons de manière précise des sous-espaces affines $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ de $f+\mathfrak{h}^{\perp}$, ainsi qu'une mesure $d\lambda = d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ sur $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ tels que

$$\operatorname*{Ind}_H^G \chi_f \simeq \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_\phi d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi),$$

R désigne une famille $\{R_1, \cdots, R_r\}$ de fonctions affines définies sur $\mathbb{R}^k$, où $k \in \mathbb{N}$ sera précisé par la suite, et $\mathfrak{B}$ est une base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$.

Par la suite, nous choisissons pour tout $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ une polarisation $B(\phi,\mathfrak{h})$ en ϕ construite par J. Ludwig et H. Zahir dans [32], cette polarisation coincide en fait avec celle de M. Vergne. Notre opérateur U sera défini pour tout $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ et ξ dans l'espace de Schwartz $S(G/H)$ satisfaisant à la relation de covariance par rapport à f par:

$$U(\xi)(\phi)(g) = \int_{B(\phi,\mathfrak{h})/B(\phi,\mathfrak{h})\cap H} \xi(gh)\chi_\phi(h) d_{B(\phi,\mathfrak{h}),H}(h),$$

et ceci pour tout $g \in G$. La mesure $d_{B(\phi,\mathfrak{h}),H}$ sur l'espace homogène $B(\phi,\mathfrak{h})/B(\phi,\mathfrak{h})\cap H$ est convenablement normalisée pour que U soit une isométrie.

Ce qui est spécial dans cet opérateur, c'est qu'il ne devient plus un opérateur d'entrelacement si on change la polarisation $B(\phi,\mathfrak{h})$ par une autre (voir l'exemple (I-7.3)).

Nous démontrons par la suite que cet opérateur est inversible, et nous démontrons que son inverse est l'opérateur V défini pour tout $K \in \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$ à support compact et $g \in G$ par

$$V(K)(g) = \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \int_{H/B(\phi,\mathfrak{h})\cap H} K(\phi)(gh)\chi_f(h) d_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}(h) d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

La mesure $d_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}(h)$ sur l'espace homogène $H/B(\phi,\mathfrak{h})\cap H$ est encore convenablement normalisée pour que V soit une isométrie.

Nous examinons ensuite quelques exemples et nous décrivons une nouvelle désintégration (*lisse*) de $L^2(G)$ pour G groupe nilpotent.

Les résultats de ce chapitre sont démontrés pour des représentations monomiales, mais ils restent valables si $\tau = \operatorname*{Ind}_H^G \sigma$, où σ est une représentation unitaire et irréductible de H. En effet σ étant monomiale, on sait que si $\mathfrak{b}$ est une polarisation réelle en un point $\phi \in \Omega_H(\sigma) \subset \mathfrak{h}^\star$, alors elle vérifie la condition de Pukanszky, à savoir que

$$B \cdot \phi = \phi + \mathfrak{b}^\perp$$

avec $B = \exp(\mathfrak{b})$, et σ est induite par un caractère unitaire χ_ϕ défini par $\chi_\phi(\exp X) = e^{i\phi(X)}$ $(X \in \mathfrak{b})$. D'où

$$\operatorname*{Ind}_H^G \sigma \simeq \operatorname*{Ind}_B^G \chi_\phi,$$

et pour déduire le résultat, on raisonne comme dans la section 5 de [31].

Comme autre application de la construction de cet opérateur d'entrelacement, on donne une preuve brève d'un théorème dû à Corwin et à Greenleaf sur la commutativité des opérateurs différentiels sur les espaces homogènes nilpotents. Expliquons brièvement de quoi il s'agit:

soient

$$C^\infty(G,\tau) = \{\xi \in C^\infty(G) : \xi(gh) = \chi(h^{-1})\xi(g),\ g \in G,\ h \in H\}$$

et Diff(G) l'algèbre des opérateurs différentiels qui sont C^∞ et qui laissent $C^\infty(G,\tau)$ invariant. Soit $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ l'ensemble des restrictions $D|C^\infty(G,\tau)$ des $D \in$ Diff(G) qui commutent avec les translations à gauche de G sur $C^\infty(G,\tau)$.

Corwin et Greenleaf ont prouvé que l'algèbre $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ est abélienne lorsque presque toutes les multiplicités sont finies (cf. [12]). En examinant de près cette démonstration et de nombreux exemples, ils ont formulé la conjecture suivante:

Si $m(\pi) < \infty$ presque partout, alors l'algèbre $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales $H-$invariantes sur $f + \mathfrak{h}^\perp$.

Plus récemment, ils ont vérifié cette conjecture sous les hypothèses suivantes:

(i) $m_\pi < \infty$ pour π générique dans Support (τ).

(ii) $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ qui polarise tous les éléments génériques de $\Gamma_f = f + \mathfrak{h}^\perp$ et qui est normalisée par $\mathfrak{h}$.

Dans leur preuve, Corwin et Greenleaf ont pleinement utilisé des coordonnées bien adaptées, des transformations de Malcev-Fourier et des analyses très détaillées des orbites coadjointes.

Nous nous proposons ici de redémontrer leur conjecture sous les mêmes conditions par une méthode plus simple que la leur. Notre outil principal est l'opérateur d'entrelacement construit précédemment, et cette application termine le premier chapitre.

L'étude des représentations unitaires montre qu'il existe un très grand parallélisme entre les formules des multiplicités pour la désintégration de $\tau = \operatorname{Ind}_H^G \sigma$ où $\sigma \in \hat{H}$ et celle pour la désintégration de $\pi|H$ quand $\pi \in \hat{G}$.

Rappelons les principaux résultats connus sur la désintégration des restrictions des représentations unitaires et irréductibles. Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère une représentation unitaire et irréductible π associée à une orbite coadjointe $\Omega_\pi^G = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^\star$ associée à une forme linéaire f et μ_π une mesure finie $G-$invariante sur Ω_π. Si H est un sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, alors d'après Corwin et Greenleaf [9], la désintégration centrale de π/H s'obtient comme suit

$$\pi/H \simeq \int_{\Omega_\pi/H}^{\oplus} \sigma_{p(l)} d\dot{\mu}_\pi(l),$$

où $p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathfrak{h}^\star$ est la projection canonique, $\sigma_{p(l)} \in \hat{H}$ est associé à $p(l) \in \mathfrak{h}^\star$ et $[\dot{\mu}_\pi]$ est la classe de la mesure μ_π sur l'espace-quotient.

L'application de Kirillov-Bernat $\theta_H : \mathfrak{h} \longrightarrow \hat{H}$ induit un isomorphisme borélien de l'espace des orbites $\mathfrak{h}^\star/H$ sur $\hat{H}$. On considère ensuite la mesure $\nu = \nu_H^\pi = (\theta_H \circ p)_\star(\mu_\pi)$, l'image de μ_π par l'application $\theta_H \circ p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \hat{H}$. Pour $\sigma \in \hat{H}$, on désigne par $n_\pi(\sigma)$ le nombre des $H-$orbites contenues dans $\Gamma(\pi, \sigma) = \Omega_\pi^G \cap p^{-1}(\Omega_\sigma^H)$; alors Lipsman [28] a démontré que

$$\pi/H \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_\pi(\sigma)\sigma d\nu(\sigma).$$

La deuxième partie de cette thèse consiste à décrire un opérateur d'entrelacement unitaire entre la restriction d'une représentation unitaire et sa décomposition centrale ainsi qu'un espace de désintégration concret. Comme dans le cas des représentations induites, nous généralisons tout d'abord les résultats de Corwin et Greenleaf [9], sur la désintégration des restrictions des représentations unitaires et irréductibles. Nous construisons à partir d'une base $\mathfrak{B}$ de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ bien construite à partir d'une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ des sous-espaces affines $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ de Ω_f, $H-$invariants ainsi qu'une mesure invariante $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ sur $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ tels que

$$\pi/H \simeq \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

Ici R désigne une famille $R_0, \cdots R_r$ ($r = \operatorname{codim} \mathfrak{h}$) de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}^k$ où $k \in \mathbb{N}$ sera précisé par la suite. Nous construisons ensuite un opérateur d'entrelacement

unitaire: on part d'une base de Jordan-Hölder $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{g}$, nous construisons un algorithme qui nous fournit à partir de $\mathfrak{C}$ une base de Jordan-Hölder $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{h}$ et une base $\mathfrak{B}$ de Malcev relative à $\mathfrak{h}$. On note B la polarisation de Vergne en f pour la base $\mathfrak{C}$ et pour tout $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, $B(\phi)$ la polarisation de Vergne en $\phi|\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$ pour la base $\mathfrak{D}$. L'opérateur d'entrelacement U sera défini pour tout $\xi \in S(G/B)$ et $h \in H$ par

$$U(\xi)(\phi)(h) = \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^{\phi}} \xi(hug_{\phi})\chi_{\phi}(u)d_{B(\phi),B^{\phi}}(u)$$

où g_{ϕ} est l'unique élément de G tel que $\phi = Ad^{\star}(g_{\phi})f$ et $B^{\phi} = g_{\phi} \cdot B \cdot g_{\phi}^{-1}$.

Le choix propice de B et de la base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ sont très importants dans cet opérateur, nous montrerons plus tard dans les exemples (II-5.6) et (II-5.7) que dès qu'on change la polarisation B ou la base $\mathfrak{B}$ on n'obtient plus un opérateur d'entrelacement.

Nous démontrons par la suite que cet opérateur est inversible, nous explicitons son inverse et nous examinons des exemples.

A titre d'application, nous étudions la désintégration du produit tensoriel de deux représentations unitaires: soient $\pi_j (j = 1, 2)$ deux représentations unitaires et irréductibles de G associées à deux formes linéaires f_1, f_2; les orbites coadjointes associées à f_1 et à f_2 seront notées par la suite par Ω_{f_1} et Ω_{f_2}. Le produit de Kronecker extérieur de π_1 et de π_2, noté $\pi_1 \times \pi_2$, correspond à l'orbite $\Omega_{G\times G}(\pi_1 \times \pi_2) = (\Omega_{f_1}, \Omega_{f_2}) \subset \mathfrak{g}^{\star} \oplus \mathfrak{g}^{\star}$. On identifie G au sous-groupe Δ_G de $G \times G$ constitué par les éléments diagonaux.

Soit $p = p(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) : \mathfrak{g}^{\star} \oplus \mathfrak{g}^{\star} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\star}$ et $\nu = (\theta_G \circ p)_{\star}(\mu_{\pi_1 \times \pi_2})$, ($\mu_{\pi_1 \times \pi_2}$ étant la mesure invariante sur l'orbite $(\Omega_{f_1}, \Omega_{f_2}) \subset \mathfrak{g}^{\star} \oplus \mathfrak{g}^{\star}$). Il est clair que

$$(\pi_1 \times \pi_2)|_{\Delta_G} = \pi_1 \otimes \pi_2,$$

et ainsi d'après [13] et [28]

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m_{\pi}\pi d\nu(\pi) \simeq \int_{\Omega_1 \times \Omega_2/\Delta_G}^{\oplus} \sigma_{p(l,k)} d\dot{\mu}(l, k)$$

où $m(\pi)$ est le nombre des $G-$orbites incluses dans $\Omega_1 \times \Omega_2 \cap p^{-1}(\Omega(\pi))$.

Nous donnons une nouvelle désintégration lisse de ce produit tensoriel de représentation, un espace de désintégration concret, ainsi qu'un opérateur d'entrelacement isométrique et encore lisse.

Nous espérons que nos résultats pourront se généraliser à d'autres classes de groupes résolubles.

Dans la dernière partie, nous traitons un problème de nature différente. Il s'agit de comprendre l'espace des orbites $\mathfrak{g}^{\star}/Ad^{\star}(G)$ lorsqu'il est équipé de la topologie-quotient. Cet espace

est loin d'être un espace de Hausdorff. D'une manière plus précise, on se propose de trouver une forme explicite du cortex de $\mathfrak{g}^\star$, $\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$ qui est l'ensemble des orbites coadjointes qui ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff de $\{0\}$. Au niveau de $\hat{G}$, cet ensemble correspond à l'ensemble des représentations unitaires et irréductibles qui ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff de la représentation triviale 1_G de G.

Il est bien connu que le cortex peut avoir une structure très compliquée (cf. [2],[3],[6],[7]), et une description explicite de cet ensemble n'a pas encore été trouvée.

Dans un premier temps, nous calculons le cortex des algèbres de Lie nilpotentes de petite dimension, nous remarquons comme on l'a déjà annoncé, que sa structure peut être incroyablement compliquée, nous avons encore constaté que pour ces algèbres on a l'égalité

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = I\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star),$$

où $I\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$ est l'ensemble des zéros communs des polynômes $G-$invariants sur $\mathfrak{g}^\star$.

D'ailleurs dans [7], Boidol, Müller et Ludwig montrent le même résultat pour des les groupes de Lie nilpotents qui sont de la forme $\mathbb{R}\ltimes\mathbb{R}^n$.

En utilisant ce calcul, nous avons cherché le cortex des algèbres nilpotentes dont la dimension maximale des orbites est deux. La classification de cette famille d'algèbre est donnée dans [1].

D'autre part, Bekka et Kanuith ont trouvé dans [6] une partie dense dans le cortex lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre nilpotente de pas deux, c'est à dire

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est le centre de $\mathfrak{g}$. Plus précisément, il ont prouvé que

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = \overline{\{ad^\star Xl : X \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\}}$$

où $ad^\star$ est la représentation coadjointe sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Nous généralisons également ce résultat en montrant que si $\mathfrak{g}$ est nilpotente de pas r, (c'est à dire que la suite descendante d'ordre r est non nulle et est incluse dans le centre de $\mathfrak{g}$), alors

$$\{ad^\star X_1 \cdots ad^\star X_{r-1} l : X_1,\cdots,X_{r-1} \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\} \subset \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \subset \overline{\{ad^\star Xl : X \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\}}.$$

Nous démontrons ensuite le théorème suivant:

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, telle que toutes les orbites associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés linéaires (ceci est évidemment le cas lorsque $\mathfrak{g}$ est de pas 2), alors

$$Cor(\mathfrak{g}^\star) = \overline{\{ad^\star Xl : X \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\}} = Support\ (\gamma_G),$$

où γ_G est la représentation de conjugaison définie pour tout $\xi \in L^2(G)$ et $g, s \in G$ par

$$\gamma_G(g)\xi(s) = \xi(g^{-1} \cdot s \cdot g).$$

Par la suite, nous exploitons ce théorème pour trouver des résultats concernant le cortex ainsi que des exemples intéressants.

Nous étudions ensuite le cortex des algèbres de Lie nilpotentes de pas 3. Soit S_n le groupe des matrices symétrique $n \times n$, S_n agit de manière naturelle sur le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$, H_n. Le produit semi-direct SH_n de S_n et H_n est un groupe de Lie nilpotent de pas trois dont le centre est unidimensionnel.

Il a été prouvé ([39], section 3) que toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de pas trois dont le centre est de dimension 1 est une sous-algèbre de $\mathfrak{S}H_n$ (l'algèbre de Lie de SH_n) pour un certain n, de telle manière que les orbites génériques des groupes G, SH_n, H_n soient toutes de dimension $2n$.

Les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{S}H_n$ de SH_n s'écrivent de la forme

$$(A, u, v, \lambda),\ A \in S_n,\ u, v \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le crochet dans $\mathfrak{S}H_n$ est défini par

$$[(A, u, v, \lambda), (B, u', v', \lambda')] = (0, 0, Au - Bu', uv' - u'v),$$

pour tout (A, u, v, λ) et (B, u', v', λ') dans $\mathfrak{S}H_n$.

Les éléments de $\mathfrak{S}H_n^\star$ sont de la forme

$$(E, a, b, c),\ E \in \mathfrak{S}_n,\ a, b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}.$$

La dualité entre $\mathfrak{S}H_n$ et $\mathfrak{S}H_n^\star$ est donnée pour tout $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^\star$ et $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$ par

$$[(E, a, b, c), (S, x, y, z)] = E \cdot S + < a, x > + < b, y > + cz,$$

pour tout $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^\star$ et $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$, où

$$E \cdot S = \sum_{i,j} E_{ij} S_{ij} \text{ et } E_{ij}, S_{ij} : i, j = 1, ..., n,$$

sont les coefficients de la matrice de E et de $S \in \mathfrak{S}_n$.

Pour deux vecteurs $a = (a_1, .., a_n)$, $b = (b_1, .., b_n)$, on note $a \otimes b$ la matrice dont les coefficients sont $(a_i b_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Dans un premier temps nous décrivons le cortex de SH_n:

Théorème [3]

Le cortex de $\mathfrak{S}H_n^\star$ *sous son action coadjointe est l'ensemble:*

$$Cor(\mathfrak{S}H_n^\star) = \{(x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0) : x, u, c \in \mathbb{R}^n \}$$

$$= \{ad^\star X ad^\star Y l : X, Y \in \mathfrak{S}H_n , l \in \mathfrak{S}H_n{}^\star \}.$$

Malheuresement, ce théorème ne nous donne pas le cortex de toute algèbre de Lie de pas trois et de centre unidimensionnel quoiqu'elles soient toutes injectées dans des algèbres de type $\mathfrak{S}H_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^\star$, nous établissons alors une correspondance entre le cortex de SH_n et le cortex de tout groupe de Lie G nilpotent de pas trois et de centre unidimensionnel. Des exemples terminent ce chapitre.

Chapitre I

OPERATEUR D'ENTRELACEMENT DES REPRESENTATIONS MONOMIALES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

On part d'un groupe de Lie G nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et une représentation monomiale $\tau = \operatorname{Ind}_H^G \chi$ induite par un caractère unitaire χ d'un sous groupe analytique H de G. En fait $\mathfrak{h}$ étant la sous-algèbre de Lie correspondant à H, χ s'ecrit sous la forme $\chi(\exp X) = e^{if(X)}$ $(X \in \mathfrak{h})$ avec $f \in \mathfrak{h}^\star$. On note $p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathfrak{h}^\star$ la projection canonique. Comme a été dit dans l'introduction, d'après Corwin, Greenleaf [9] et Lipsman [28], la désintégration centrale de τ s'obtient comme suit:

$$\tau \simeq \int_{(f+\mathfrak{h}^\perp)/H}^{\oplus} \pi_l d\dot{l}, \tag{1}$$

$d\dot{l}$ étant une certaine mesure naturelle sur l'espace $(f+\mathfrak{h}^\perp)/H$ des $H-$ orbites. D'autre part, comme dans les travaux de Corwin, Greenleaf, Grélaud [11] et Lipsman [28], la désintégration centrale de τ s'écrit aussi

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi), \tag{2}$$

où μ dénote une mesure finie équivalente à l'image par l'application de Kirillov $\theta : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \hat{G}$ de la mesure de Lebesgue sur $f+\mathfrak{h}^\perp$ et $m(\pi)$ désigne le nombre de $H-$orbites incluses dans $(f+\mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega_f$.

On commence par donner quelques généralités et quelques notions de base qui nous seront utiles dans toute la thèse.

I-1. Généralités.

I-1.1 Notations et rappels.

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En notant exp l'application exponentielle, on écrira $G = \exp\ \mathfrak{g}$. Soient V, W des espaces vectoriels réels de dimension finie tels que $W \subset V$. On note $V^\star$ l'espace vectoriel dual de V et $W^\perp$,l'orthogonal de W dans $V^\star$. Etant donnée $f \in \mathfrak{g}^\star$, le noyau de la forme bilinéaire B_f définie par $B_f(X,Y) = f([X,Y])$ se note $\mathfrak{g}(f)$: $\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}\ ;\ B_f(X,Y) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g}\}$. On dit qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est subordonnée à f si elle est totalement isotrope pour B_f. On note $S(f,\mathfrak{g})$ l'ensemble de telles sous-algèbres et $M(f,\mathfrak{g})$ celui des sous-algèbres qui sont en même temps des sous-espaces totalement isotropes maximaux. Un élément de $M(f,\mathfrak{g})$ sera appelé polarisation (réelle) au point f.

Soit $\mathfrak{h} \in S(f,\mathfrak{g})$. Donnons-nous le caractère χ_f du sous-groupe analytique $H = \exp\ \mathfrak{h}$ correspondant à f par, $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ quel que soit $X \in \mathfrak{h}$.

On construit la représentation induite $\tau = \rho(f,\mathfrak{h},G) = \operatorname{Ind}_H^G \chi_f$ de G. Par définition même d'une représentation induite, τ se réalise par translations à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\tau$ des fonctions ξ sur G vérifiant:

$$\xi(gh) = \chi_f(h^{-1})\xi(g)$$

quels que soient g dans G et h dans H et de carré intégrable sur G/H pour la mesure $G-$invariante. Une telle représentation sera aussi appelée monomiale.

Soit $K : \mathfrak{g}^\star/G \longrightarrow \hat{G}$ la bijection de Kirillov. Pour $\pi \in \hat{G}$, on notera $\Omega(\pi)$ l'orbite correspondante $\Omega(\pi) = K^{-1}(\pi)$. On munit $\mathfrak{g}^\star/G$ et $\hat{G}$ de leurs structures topologiques et boréliennes habituelles. Il est bien connu que K est un isomorphisme borélien, même un homéomorphisme, de $\mathfrak{g}^\star/G$ sur $\hat{G}$ (cf. [8] et [25]). On confondra parfois les classes d'équivalence dans $\hat{G}$ avec leurs représentantes, et la relation d'équivalence entre deux représentations π_1, π_2 se notera $\pi_1 \simeq \pi_2$.

Lorsque g décrit G, on notera $d_G(g)$ ou dg une mesure de Haar sur G et $d\dot{g}$ une mesure invariante sur un espace homogène de G.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ une action unipotente de G sur V. On désigne par

$$(0) = V_n \subset V_{n-1} \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0 = V$$

une suite de Jordan-Hölder pour G et $\mathfrak{B} = (v_1,..,v_n)$ une base de Jordan-Hölder associée $(v_j \in V_{j-1} \setminus V_j)$.

Si $v \in V$ on écrit $\rho(x)v = x \cdot v$ pour tout $x \in G$ et $X \cdot v = \frac{d}{dt}\{\rho(\exp(tX)) \cdot v\}|_{t=0}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

L'ensemble indice $e^{\mathfrak{B}}(v) = \{i_1 < .. < i_d\}$ d'un élément v dans V relatif à $\mathfrak{B}$ est l'ensemble suivant de $\{1, .., n\}$:

$$j \in e^{\mathfrak{B}}(v) \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathfrak{g} \ : \ X \cdot v \in V_{i-1} \setminus V_i.$$

L'entier d, c-à-d le cardinal de $e^{\mathfrak{B}}(v)$ est bien sûr la dimension de la $G-$orbite Ω de v et ne varie pas si v parcourt Ω.

Fixons d dans $\mathbb{N}$. Pour un sous ensemble e de $\{1, .., n\}$ avec cardinal de $e = d$ on note V_e la partie V qui contient tous les éléments v telle que $e^{\mathfrak{B}}(v) = e$. Pour chaque e il existe un polynôme P_e et une relation d'ordre sur l'ensemble des ensembles indice de longueur d tels que $V_e = \{\, v \in \mathfrak{g};\ P_e(v) \neq 0, P_{e'}(v) = 0,$ pour tout $e' > e\,\}$.

La partie de V qui contient tous les éléments v telle que la dimension des $G-$ orbites soit d, est la réunion disjointe des V_e.

Pukanszky a montré dans [38] qu'il existe un système de n fonctions réelles $\{p_1^{\mathfrak{B}}, .., p_n^{\mathfrak{B}}\}$ sur $\mathbb{R}^d \times V_e$ avec les propriétés suivantes:

a) pour $v \in V_e$ fixée, $p_j^{\mathfrak{B}}(z, v)$ est une fonction polynomiale en $z = (z_1, .., z_d)$ et les coefficients sont des fonctions $G-$invariantes sur V_e, $j \in \{1, .., n\}$;

b) $p_{j_k}^{\mathfrak{B}}(z, v) = z_k$ pour $j = j_k \in e, v \in V_e$;

c) si $1 \leq i \leq n$, $i_k \leq i < i_{k+1}$ alors $p_i^{\mathfrak{B}}(z, v)$ ne dépend que de $z_1, .., z_k$;

d) pour tout $v \in V_e$ on a

$$\rho(G)v = \{\ p^{\mathfrak{B}}(z, v) = \sum_{j=1}^{n} p_j^{\mathfrak{B}}(z, v)v_j \ :\ z \in \mathbb{R}^d\}.$$

Prenons par exemple $V = \mathfrak{g}^\star$ et l'action coadjointe. Soit $\mathfrak{B} = (l_1, .., l_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^\star$et soit $\mathfrak{B}_1 = (b_1, .., b_n)$ la base duale dans $\mathfrak{g}$, c-à-d $< l_i, b_j >= \delta_{i,j}$; $1 \leq i, j \leq n$. On note pour tout $j \in \{1, .., n\}$, $\mathfrak{g}_j =< b_1, .., b_j >$; l'ensemble indice $e^{\mathfrak{B}}(f) = \{i_1 < .. < i_d\}$ d'un élément f dans $\mathfrak{g}^\star$ relatif à $\mathfrak{B}$ est aussi l'ensemble suivant de $\{1, .., n\}$:

$$i \in e^{\mathfrak{B}}(f) \Leftrightarrow \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_{j-1} \subsetneq \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_j,$$

où $\mathfrak{g}(f)$ est le radical de la forme $(x, y) \longmapsto < f, [x, y] >$ sur $\mathfrak{g}$.

Soit maintenant l dans $\mathfrak{g}^\star$. On peut obtenir une polarisation au point l par la méthode suivante de M. Vergne [40] .

Soit $\{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 ... \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ une chaine d'idéaux de $\mathfrak{g}$ telle que dim $\mathfrak{g}_j = j$; soit $l_j = l/\mathfrak{g}_j$. Alors

$$\mathfrak{m}_l = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}_j(l_j) \tag{3}$$

est un élément de $M(l, \mathfrak{g})$.

Soit $\mathfrak{k}$ un sous espace de $\mathfrak{g}^\star$, et soit pour chaque $l \in \mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}(l)$ une polarisation en l, nous disons que $\mathfrak{b}(l)$ dépend de façon lisse de l s'il existe pour chaque $\mathfrak{b}(l)$ une base $< b_1(l), b_2(l), .., b_k(l) >$ telle que $l \longrightarrow b_j(l)$ soit une application rationnelle de l pour tout $j \in \{1, ..., k\}$. La proposition suivante est facile à démontrer.

I-1.2 Proposition

Soit $\mathfrak{V}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}^\star$. Soit pour tout $l \in \mathfrak{V}$, $\mathfrak{b}(l)$ la polarisation en l construite suivant la méthode de Vergne, alors $\mathfrak{b}(l)$ est lisse en l.

I-2. Désintégration centrale canonique des représentations monomiales.

I-2.1 Choix des mesures.

Comme plus haut soit $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ et χ_f le caractère du sous-groupe analytique $H = \exp \mathfrak{h}$ correspondant à $\mathfrak{h}$ défini par, quel que soit $X \in \mathfrak{h}$, $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$.

On va décrire maintenant une mesure sur $(f + \mathfrak{h}^\perp)/H$ due à Pukanszky [38] . Soit $\mathfrak{B} = \{(b_1, .., b_n)\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^\star$ vue comme $\mathfrak{h}$ module, et $\{(v_1, .., v_n)\}$ sa base duale, et soit e le plus petit indice tel que $\mathfrak{g}_e^\star \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset$, soit

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{g}_e^\star \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$$

alors $\mathfrak{U}$ est un ouvert de Zariski non vide dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)$.

Nous disons que les éléments de $\mathfrak{U}$ sont en position générale dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)$.

Soit $l \in \mathfrak{U}$ et $\lambda_l = p^{\mathfrak{B}}(0, l)$, alors $l = p^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) = \sum_{j=1}^{n} p_j^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) b_j$ pour un certain $z \in \mathbb{R}^d$. En fait λ_l est l'unique élément de $H \cdot l$ qui vérifie $\lambda_l(v_j) = 0$ pour $j \in e$.

Soit

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \cap \{q \in f + \mathfrak{h}^\perp \ : \ q(bj) = 0, \ \forall j \in \ e\} \tag{4}$$

et

$$\varphi : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{V} \times \mathbb{R}^d$$

qui à l associe le couple (λ_l, z), alors φ est un difféomorphisme, en particulier $q \longrightarrow H \cdot q$ définit une bijection de $\mathfrak{V}$ sur $\mathfrak{U}/H$. Pour toute fonction continue à support compact k sur $f + \mathfrak{h}^{\perp}$ on a que

$$\int_{f+\mathfrak{h}^{\perp}} k(q)dq = \int_{\mathfrak{V} \times \mathbb{R}^d} k \circ \varphi(\lambda, z)|d\varphi(\lambda, z)|d\lambda dz$$

où $|d\varphi(\lambda, z)|$ est le déterminant du jacobien de φ qui vaut identiquement 1 (voir [38]). De cette manière on considère une mesure sur l'espace $(f + \mathfrak{h}^{\perp})/H$ qu'on notera par la suite aussi $d\lambda$: pour toute fonction $\tilde{k}$, continue à support compact sur $(f + \mathfrak{h}^{\perp})/H$ on a

$$\int_{f+\mathfrak{h}^{\perp}/H} \tilde{k}(H \cdot \lambda)d\lambda = \int_{\mathfrak{V}} \tilde{k}(\lambda)d\lambda.$$

Nous fixons maintenant une mesure de Haar dx sur G.

Soit $B = \exp \mathfrak{b}$ un sous-groupe fermé connexe de G et soit $< b_1, b_2, \cdots, b_k >$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{b}$. Alors l'application

$$\psi \ : \mathbb{R}^k \longrightarrow B$$

$$(t_1, \cdots, t_k) \longrightarrow \exp t_1 b_1 \cdots \exp t_k b_k$$

est un difféomorphisme. On choisit une mesure db sur B de la manière suivante: pour toute fonction C^{∞} à support compact h dans B,

$$\int_B h(b)d(b) = \int_{\mathbb{R}^k} h(\exp(t_1 b_1) \cdots \exp(t_k b_k))dt_1 \cdots dt_k.$$

Cette mesure est invariante à gauche, donc une mesure de Haar. D'autre part si nous choisissons une base de Malcev $\{c_1, \cdots, c_d\}$ relative à $\mathfrak{b}$, c.à d. $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\, c_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\, c_d \ \oplus \mathfrak{b}$ et $\sum_{k=j}^{d} \mathbb{R}\, c_k \oplus \mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ pour tout j, alors la mesure $d_{G,B}$ définie sur G/B par

$$\int_{G/B} a(g)d_{G,B}(\dot{g}) = \int_{\mathbb{R}^d} a(\exp(t_1 c_1) \cdots \exp(t_d c_d))dt_1 \cdots dt_d,$$

est aussi invariante à gauche. En renormalisant un des vecteurs c_j, on a que

$$\int_G q(g)dg = \int_{G/B} \int_B q(gb)dbd_{G,B}(\dot{g})$$

pour toute fonction continue à support compact q sur G. Nous choisirons toujours les mesures invariantes $d_{G,B}$ sur les espaces quotients G/B de telle sorte que cette identité soit vraie.

Rappelons maintenant un résultat dû à Lion [27].

Soient $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ deux polarisations au point $\phi \in \mathfrak{g}^\star$, et B_1, B_2 les deux sous groupes associés. On note $S(G/B_i, \phi)$, $i \in \{1,2\}$, l'ensemble des vecteurs C^∞ des espaces des représentations $\underset{B_i}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\chi_\phi$, $i \in \{1,2\}$, qui sont en fait isomorphes tous les deux à l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^{\mathrm{codim}\,(\mathfrak{b}_i)}$.

Dans toute la suite on notera $\pi_{\phi,B}$ la représentation $\underset{B}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\chi_\phi$.

Si $d_{B_2, B_2\cap B_1}$ est une mesure sur $B_2/B_2 \cap B_1$ invariante à gauche pour B_2, alors pour toute fonction k de $S(G/B_1, \phi)$ l'intégrale

$$T_{B_2,B_1}k(g) = \int_{B_2/B_2\cap B_1} k(gb)\chi_\phi(b) d_{B_2/B_2\cap B_1}(b) \tag{5}$$

converge pour tout $g \in G$ et définit un isomorphisme de $S(G/B_1, \phi)$ sur $S(G/B_2, \phi)$ qui se prolonge par continuité en un opérateur d'entrelacement entre π_{ϕ,B_1} et π_{ϕ,B_2}, et si les mesures sur les espaces homogènes G/B_1 et G/B_2 sont convenablement normalisées, T_{B_2,B_1} est une isométrie. On note $\mathcal{H}_\tau$, respectivement $\mathcal{H}_\tau^\infty$, l'espace de la représentation $\tau = \underset{H}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\chi$, respectivement l'espace des vecteurs C^∞ de cette représentation, et on note $S(G/H, \phi)$ l'espace de Schwartz de la représentation τ. Cet espace est tout simplement l'espace des fonctions f qui sont C^∞ sur G, qui vérifient $f(xh) = \chi_\phi(h)^{-1} f(x)$ pour tout x dans G et tout h dans H et dont la restriction à $\exp(\mathfrak{F})$, où $\mathfrak{F}$ est un sous-espace supplémentaire à $\mathfrak{h}$, définit une fonction de Schwartz ordinaire sur $\mathfrak{F}$. L'espace de Fréchet $S(G/H, \phi)$ est évidemment isomorphe à l'espace de Fréchet $S(G/H)$.

Par abus de langage on appellera polarisation la sous-algèbre et aussi le sous-groupe associé. On remarque que l'intégrale

$$T_{B(\phi),H}\xi(g) = \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap H} \xi(gu)\chi_\phi(u) d_{B(\phi),B(\phi)\cap H}(u) \tag{6}$$

existe pour toute fonction de Schwartz ξ de $\mathcal{H}_\tau^\infty$ et g dans G et définit une fonction C^∞ sur G qui vérifie la relation de covariance pour $B(l)$ et le caractère χ_l. On va montrer que $T_{B(\phi),H}\xi$ est en fait un élément de $\mathcal{H}^\infty_{\pi_{\phi,B(\phi)}}$, c'est à dire un vecteur C^∞ de la représentation induite $\pi_{\phi,B(\phi)}$.

I-2.2 Lemme

Soit $\phi \in \mathfrak{V}$ et $B = B(\phi) = \exp \mathfrak{b}$ une polarisation en ϕ. Alors il existe une constante positive C et une semi norme P continue sur l'espace de Schwartz $S(G/H, f)$ telles que pour

tout ξ *dans* $S(G/H,f)$ *on a*

$$\|T_{B,H}\xi\|_{L^2(G/B)} \leq CP(\xi),$$

en particulier $T_{B,H} : S(G/H,f) \longrightarrow S(G/B,\phi)$ *est une application linéaire continue et surjective.*

Preuve

On montre tout d'abord que pour tout ξ dans $S(G/H,f)$ on a que

$$|T_{B,H}\xi|_\infty \leq C_1 P_1(\xi)$$

où C_1 est une constante positive et P_1 une semi-norme continue sur l'espace de Schwartz $S(G/H,f)$.

En effet soit $\mathfrak{B} = (X_1,..,X_p)$ une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{B}$ contienne une base de Malcev $(X_{i_1},\cdots,X_{i_n})$ de $\mathfrak{b}$ relative à $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}$. On a pour tout $g \in G$ que

$$|T_{B(\phi),H}\xi(g)| \leq |\int_{B/B\cap H} \xi(gu)\chi_\phi(u)d_{B,B\cap H}(u)|$$

$$\leq \int_{B/B\cap H} |\xi(gu)|d_{B,B\cap H}(u)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(g\exp(t_1X_{i_1})\cdots\exp(t_nX_{i_n}))|dt_1\cdots dt_n.$$

En écrivant $g\cdot\exp(t_1X_{i_1})\cdots\exp(t_nX_{i_n}) = \exp(a_1X_1)\cdots\exp(a_pX_p)\cdot h$ où $h \in H$ alors les a_i sont des fonctions polynomiales en g et en $t_1,\cdots,t_n$ vérifiant

$a_{i_1} = t_1 + a'_{i_1}$ où a'_{i_1} ne dépend pas de $t_1,\cdots,t_n$, et de manière générale

$a_{i_j} = t_j + a'_{i_j}$ où a'_{i_j} ne dépend pas de $t_j,\cdots,t_n$ pour $j \in \{1,\cdots,n\}$.

On a que

$$|T_{B(\phi),H}\xi(g)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(\exp(a_1X_1)\cdots\exp(a_pXp)\cdot h)|dt_1\cdots dt_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(\exp(b_1X_1)\cdots\exp(t_1X_{i_1})\cdots\exp(t_nX_{i_n})\cdots\exp(b_pX_p))|dt_1\cdots dt_n$$

(pour certaines fonctions polynomiales b_j, $j \notin \{i_1,\cdots,i_n\}$, dans les variables $(t_1,\cdots,t_n)$)

$$\leq P_1(\xi)\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^{n}(1+t_k^2)^{-1}dt_1...dt_n,$$

où $P_1(\xi) = \sup_{\substack{(t_1,\cdots,t_n)\\(s_1,\cdots,s_{p-n})}} \Big(\prod_{i=1}^{n}(1+t_i^2)|\xi(\exp(s_1X_1)\cdots\exp(t_1X_{i_1})\cdots$

$$\exp(t_nX_{i_n})\cdots\exp(s_{p-n}X_p))|\Big).$$

Soit maintenant Q un polynôme sans zéro sur G/B tel que $\frac{1}{Q}$ soit de carré intégrable. On sait d'autre part (voir [25]) que l'image de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ par $d\pi_{B,\phi}$ est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur G/B.

Il en découle qu'il existe $v \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ tel que

$$Q \cdot T_{B(\phi),H}\xi = d\pi_\phi(v)T_{B(\phi),H}(\xi) = T_{B(\phi),H}(d\tau(v)\xi).$$

On obtient que

$$\|T_{B(\phi),H}\xi\|^2_{L^2(G/B)} = \int_{G/B} |Q(g)T_{B(\phi),H}\xi(g)|^2 \frac{1}{Q^2(g)} d_{G,B}(\dot{g})$$

$$= \int_{G/B} |T_{B(\phi),H}(d\tau(v)\xi)(g)|^2 \frac{1}{Q^2(g)} d_{G,B}(\dot{g})$$

$$\leq |T_{B(\phi),H}(d\tau(v)\xi)|^2_\infty \int_{G/B} \frac{1}{Q^2(g)} d_{G,B}(\dot{g})$$

$$\leq C_1^2(P_1(d\tau(v)\xi))^2 \int_{G/B} \frac{1}{Q^2(g)} \leq C^2P^2(\xi) \text{ pour une nouvelle semi norme}$$

de Schwartz et une certaine constante, ce qui achève la preuve.

■

I-2.3 Définition

Comme plus haut on note $\Gamma_f = f + \mathfrak{h}^\perp$. Soit

$$(0) = \mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{g}^{n-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}^j \subset \mathfrak{g}^{j-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$$

une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{C} = \{l_1, \cdots, l_n\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ extraite de cette suite. On tire de $\mathfrak{C}$ une suite de Malcev $\{\mathfrak{g}_j\}$ et une base de Malcev $\{b_r, \cdots, b_1\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ de la façon suivante. Regardons les sous-algèbres $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{g}_j + \mathfrak{h}$, $j = 1, \cdots, n$, de $\mathfrak{g}$. Soit j_1 le plus grand indice tel que $\mathfrak{h}_{j_1} \neq \mathfrak{h}_{j_1+1}$ et posons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_{j_1}$ et $b_1 = l_{j_1}$. De proche en proche, on détermine les indices $j_1, \cdots, j_{k-1}$ et si j_k est le plus grand indice inférieur à j_{k-1} tel que $\mathfrak{h}_{j_k} \neq \mathfrak{h}_{j_k+1}$, alors nous prenons $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{h}_{j_k}, b_k = l_{j_k}$. Posons $G_j = \exp(\mathfrak{g}_j)$, $j = 1, \cdots, r$.

Nous utiliserons cette base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ pour déterminer une mesure G-invariante sur G/H donc pour fixer la norme sur l'espace de l'induite $\operatorname{Ind}_H^G \chi_f$. En prenant la

base duale $\mathfrak{B} =< f_1, \cdots, f_r >$ des b_i, on obtient une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{h}^\perp$ pour l'action de H.

On note $I^H = \{i_1 < i_2 < ... < i_s\} \subset \{1, .., r\}$ l'ensemble indice de Pukanzsky relativement à cette action des éléments en position générale dans Γ_f et J^H le complémentaire de I^H dans $\{1, .., r\}$, on pose

$K^H = \Big\{ j \in J^H /$ presque toutes les $H-$orbites en position générale dans Γ_f ne sont pas saturées par rapport à $\mathfrak{g}_{j-1}$ dans $\mathfrak{g}_j^\star$, mais presque toutes les G_j- orbites le sont $\Big\}$.

Finalement soit

$$L^H = J^H \setminus K^H = \{1, \cdots, r\} \setminus \{I^H \cup K^H\}.$$

Nous allons désintéger la représentation $\operatorname*{Ind}_H^G \chi_f$ sur certains sous-espaces affines $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ de Γ_f qui ont la forme suivante. Ici R désigne une famille $\{R_1, \cdots, R_r\}$ de fonctions affines définies sur $\mathbb{R}^k$, où k dénote le cardinal de (L^H). Nous exigeons aussi des fonctions R_j que pour $j \notin L^H$, $R_j(t_1, \cdots, t_k)$ ne dépend que de $t_1, \cdots, t_{j'}$, où $i_{j'} \leq j < i_{j'+1}$ et que pour tout $i_j \in L^H$, $R_{i_j}(t_1, \cdots, t_k) = t_j$. Alors

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = f + \Big\{ \sum_{i=1}^{r} R_i(T) b_i \, ; \, T \in \mathbb{R}^k \Big\}.$$

Par définition un sous-espace affine $\mathfrak{V}$ de Γ_f est appelé adapté à $(f, \mathfrak{h})$, si $\mathfrak{V}$ est de la forme $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$. Nous prenons sur $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ la mesure de Lebesgue dT que nous noterons $d\lambda = d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$.

Nous seront souvent amenés à faire des changements de base du type

$$l'_j = l_j + \sum_{k>j} c_{j,k} l_k, \; j = 1, \cdots, n.$$

Alors la base de Malcev $\{b_1, \cdots, b_r\}$ est changée en $\{b'_1, \cdots, b'_r\}$, où

$$b'_j = b_j + \sum_{i>j} a_{i,j} b_i \, , \, j = 1, \cdots, r.$$

De même un élément $\phi = \sum_{i=1}^{r} \phi_i f_i$ s écrit dans la nouvelle base $\mathfrak{B}'$ comme

$$\phi = \sum_{i=1}^{r} \phi_i (f'_i + \sum_{k>i} d_{k,i} f'_k), \; d_{k,i} \in \mathbb{R}.$$

Nous trouvons donc une nouvelle famille de fonctions affines R', telle que pour la nouvelle base $\mathfrak{B}'$ les espaces $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{V}^{R',\mathfrak{B}'}$ coincident de même que les mesures $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ et $d\lambda^{R',\mathfrak{B}'}$.

Remarquons que $G \cdot \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \cap \Gamma_f$ contient un ouvert de Zariski de Γ_f. En particulier $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ est en position générale dans Γ_f.

I-2.4 Notation

Dans toute la suite, on fixe une suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset .... \subset \mathfrak{g}_{r-1} \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$$

et $\mathfrak{B}$ une base de Malcev associée.

Prenons $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ comme en (**I-2.3**). Soit $\phi \longrightarrow B(\phi)$, $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ un choix lisse de polarisations en ϕ. On note $(\int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi))_C$ l'ensemble des applications

$$\psi : \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \longrightarrow \bigcup_{\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} L^2(G/B(\phi), \phi)$$

continues et qui vérifient

$$\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|\psi(\phi)\|^2_{L^2(G/B(\phi),\phi)} d\lambda(\phi) \ < \ \infty.$$

On définit $\int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$ comme étant le complété de $(\int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)\ )_C$ pour la norme $\|\ \|_2$.

I-2.5 Théorème

*Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de $\mathfrak{g}$, soit $f \in \mathfrak{g}^\star$ et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f, $H = \exp \mathfrak{h}$ étant le sous groupe fermé connexe de G associé à $\mathfrak{h}$, τ la représentation monomiale induite à partir du caractère unitaire χ_f de H. Soit $\mathfrak{B}$ une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ et soit $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \subset \Gamma_f$ un des sous-espaces affines décrits en (**I-2.3**) et soit $d\lambda = d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ sa mesure, alors la désintégration centrale canonique de τ en irréductibles s'écrit :*

$$\tau \ \simeq \ \int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \pi_\phi d\lambda(\phi). \tag{7}$$

Preuve

On fait une récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Ecrivons

$$\mathfrak{B} = \{b_1, \cdots, b_r\}.$$

Le sous-espace $\mathfrak{g}_0 = \text{vect}\{\mathfrak{h}, b_1, \cdots, b_{r-1}\}$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{B}_0 = \{b_1, \cdots, b_{r-1}\}$ est une base de Malcev de $\mathfrak{g}_0$ relative à $\mathfrak{h}$. On désigne par $\mathfrak{V}_0^{R_0,\mathfrak{B}_0}$ la partie de Γ_{f_0} obtenue par le même procédé comme plus haut relativement à la sous algèbre $\mathfrak{g}_0$. En fait $\mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$ est la restriction de $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ à $\mathfrak{g}_0$.

On sait que $\underset{H}{\overset{G}{\text{Ind}}}\chi_f = \underset{G_0}{\overset{G}{\text{Ind}}}\underset{H}{\overset{G_0}{\text{Ind}}}\chi_f$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence sur G_0 on obtient

$$\underset{H}{\overset{G}{\text{Ind}}}\chi_f \simeq \int_{\mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \underset{G_0}{\overset{G}{\text{Ind}}}\pi_{\phi_0} d\lambda_0(\phi_0),$$

il nous faut donc étudier les trois cas suivants.

(1) Les $H-$ orbites sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$, donc il en est de même pour les $G-$ orbites et $\underset{G_0}{\overset{G}{\text{Ind}}}\pi_{\phi_0}$ est irréductible pour presque tout $\phi_0 \in \mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$. En plus on a que $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$ et la mesure $d\lambda_0$ sur $\mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$ est la même sur $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ d'où le résultat.

(2) Les $H-$ orbites ne sont pas saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$ mais les $G-$ orbites le sont, dans ce cas $r-1 \in K^H$ et par suite on a de nouveau

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}.$$

(3) Les $G-$ orbites ne sont pas saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$, donc les $H-$ orbites non plus. Soit $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$(on peut supposer que $X = b_r$). On a dans ce cas que

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \simeq \{q + sX^\star,\ s \in \mathbb{R}\ ,\ q \in \mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}\},$$

donc la mesure $d\lambda$ est exactement $d\lambda_0 \otimes ds$, où ds est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, d'autre part on a que

$$\underset{G_0}{\overset{G}{\text{Ind}}}\pi_{\phi_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0 + \alpha X^\star} d\alpha,$$

il en résulte que

$$\underset{H}{\overset{G}{\text{Ind}}}\chi_f \simeq \int_{\mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0+\alpha X^\star} d\alpha\right) d\lambda_0(\phi_0) = \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_\phi d\lambda(\phi)$$

ce qui achève la démonstration.

■

I-3. Construction de l'opérateur d'entrelacement .

I-3.1 Construction de polarisations et de bases de Malcev

On reprend la base de Jordan-Hölder $\mathfrak{C} = \{l_1, \cdots, l_n\}$ de $\mathfrak{g}$ et nous construisons une base de Malcev $\{b_r, \cdots b_1\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ comme en **(I-2.3)**.

On va construire maintenant pour $\phi \in f + \mathfrak{h}^\perp$ une polarisation $B(\phi) = \exp(\mathfrak{b}(\phi))$, une base de Malcev $\{X_1(\phi), \cdots, X_l(\phi)\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$ et une base de Malcev $\{Y_1(\phi), \cdots, Y_m(\phi)\}$ de $\mathfrak{b}(\phi)$ relative à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$ et $\{U_1(\phi), \cdots, U_p(\phi)\}$ de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$. Les vecteurs $X_j(\phi)$ vont nous définir la mesure G-invariante sur $G/B(\phi)$, donc la norme de l'espace de π_ϕ, les $Y_j(\phi)$ la mesure G-invariante sur $B(\phi)/H \cap B(\phi)$, donc l'opérateur d'entrelacement infinitésimal $T_{B(\phi),H}$ et les vecteurs $U_j(\phi)$ la mesure sur $H/H \cap B(\phi)$. Avec ces données nous pourrons écrire l'opérateur d'entrelacement cherché. Nous procéderons par récurrence sur dim $\mathfrak{g}+$ dim $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

On part d'une base de Jordan-Hölder $(l_1, .., l_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que l_n soit central. Notons $\mathfrak{a}(\phi)$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{g}(\phi)$. Si $\mathfrak{a}(\phi) \neq \mathfrak{g}$, il existe j dans $\{1, \cdots, n\}$ tel que $Y = l_j$ n'appartienne pas à $\mathfrak{a}(\phi)$ et l_k appartient à $\mathfrak{a}(\phi)$ pour tout $k > j$. Supposons d'abord que $(l_n, \cdots, l_{h-1})$ appartient à $\mathfrak{h}$, mais que l_h n'appartient pas à $\mathfrak{h}$ pour un certain $h > j$. Nous prenons $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_h$. Alors $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre subordonnée à f et l'hypothèse de récurrence nous donne $B(\phi)$, les $Y_i(\phi)$, les $U_i(\phi)$ et les $X_i(\phi)$. Nous ajoutons $Y_m(\phi) = l_h$ à la base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi)$ relative à $\mathfrak{h}' \cap B(\phi)$. Si tous les $l_h, h = n, \cdots, j-1$ sont dans $\mathfrak{h}$, alors $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Et pour $\phi \in f + \mathfrak{h}^\perp$, Y n'appartient pas à $\mathfrak{a}(\phi)$. Soit alors

$$r = \max\{r' : < \phi, [Y, l_{r'}] > \neq 0\}.$$

On pose $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\phi) = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } < f, [Y, u] >= 0\}$.

$\mathfrak{g}_1(\phi)$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. De plus les vecteurs

$$l_k^1 = l_k - \frac{< \phi, [Y, l_k] >}{< \phi, [Y, l_r] >} l_r, \text{ pour } k \in \{1, \cdots, r-1\}$$

$$l_{k-1}^1 = l_k, \text{ pour } k \in \{r+1, \cdots, n\}$$

forment une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_1(\phi)$ (cf.[32]).

Si $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_1(\phi)$ l'hypothèse de récurrence nous donne la polarisation $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi_1)$, où $\phi_1 = \phi_{|\mathfrak{g}_1}$, la base de Malcev $\{X_i(\phi)\}$ de $\mathfrak{g}_1(\phi)$ relative à $\mathfrak{h}$ et la base de Malcev $\{Y_i(\phi)\}$ de $\mathfrak{b}(\phi)$ relative à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$ et les $U_I(\phi)$. Nous prenons le vecteur $X_1 = l_r$ comme premier vecteur de la base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$.

Si $\mathfrak{h}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}_1$, alors $Y \notin \mathfrak{h}$ et nous prenons $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{R}Y$. L'hypothèse de récurrence pour $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{g}_1$ nous donne de nouveau $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi_{|\mathfrak{g}_1})$ et les bases de Malcev $Y_i(\phi), U_i(\phi), X_i(\phi)$. Comme $\mathfrak{b}(\phi)/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}(\phi)$ est isomorphe à $(\mathfrak{b}(\phi)/\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}(\phi)) \oplus \mathbb{R}Y$ il suffit d'ajouter le vecteur $Y_m(\phi) = Y$ aux $Y_i(\phi)$. Pour compléter la base des $X_i(\phi)$, nous prenons un vecteur $X = X_1(\phi)$ de $\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{g}_1$ tel que $\phi[X, Y] = 1$. De même ajoutons $X = U_1(\phi)$ à la base de Malcev de $\mathfrak{h}'$ relative à $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}(\phi)$.

Tous ces choix peuvent être faits de manière lisse en ϕ.

On continue cette construction pour $\mathfrak{g}_1(\phi)$ et $\phi_1 = \phi|\mathfrak{g}_1(\phi)$. On obtient ainsi un processus qui nous permet de construire à partir d'une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_s(\phi)$ un idéal $\mathfrak{g}_{s+1}(\phi)$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_s(\phi)$, une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_{s+1}(\phi)$. Ce processus s'arrête lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathfrak{a}(\phi_d) = \mathfrak{g}_d(\phi).$$

Il a été prouvé qu'alors $\mathfrak{g}_d(\phi)$ est une polarisation en ϕ (cf.[32]), et elle coincide avec celle de Michèle Vergne décrite plus haut en (**I-1.1**) et donc dépend de manière lisse de ϕ.

Dans toute la suite on note $B(\phi, \mathfrak{h})$ le choix lisse de polarisation en $\phi \in f + \mathfrak{h}^{\perp}$ qu'on vient de décrire.

I-3.2 Théorème

*Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de $\mathfrak{g}$, soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f, $H = \exp(\mathfrak{h})$ étant le sous groupe fermé connexe de G associé à $\mathfrak{h}$, τ la représentation monomiale induite à partir du caractère unitaire χ_f de H. Soit $\mathfrak{B}$ une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$, soit $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \subset \Gamma_f$ un des sous-espaces affines décrits en (**I-2.3**) et soit $d\lambda = d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ sa mesure. Soit $\phi \longrightarrow B(\phi, \mathfrak{h})$ le choix lisse de polarisation en $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ décrit en (**I-3.1**). Alors on a que*

$$\tau \simeq \int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \pi_{\phi, B(\phi,\mathfrak{h})} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi). \tag{8}$$

L'application

$$U : S(G/H, f) \longrightarrow \int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \tag{9}$$

définie pour tout $\xi \in S(G/H, f)$ par :

$$U(\xi)(\phi) = T_{B(\phi,\mathfrak{h}),H}\xi$$

est un opérateur linéaire isométrique qui se prolonge par continuité en un opérateur d'entrelacement isométrique de (8)*, lorsque les mesures sur* $G/B(\phi,\mathfrak{h})$ *et sur* $B(\phi,\mathfrak{h})/B(\phi,\mathfrak{h})\cap H$ *sont convenablement normalisées comme dans* (**I-3.1**)*.*

Preuve

Il est clair que l'opérateur U du théorème entrelace formellement τ et l'intégrale $\int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \pi_{\phi,B(\phi,\mathfrak{h})} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$. On raisonne par récurrence sur dim $(G)+$ dim (G/H) et on va prouver que pour le choix lisse de polarisations en ϕ, $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$, décrit plus haut, on a que U est une isométrie.

On garde la base de Jordan-Hölder $(l_1,..,l_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que l_n soit central. On sait qu'il existe j dans $\{1,\cdots,n\}$ tel que $l_j = Y$ n'appartienne pas à $\mathfrak{a}(f)$ et l_k appartient à $\mathfrak{a}(f)$ pour tout $k > j$, on pose alors

$$\mathfrak{g}_1 = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } < f,[Y,u] >= 0\}.$$

Alors $\mathfrak{g}_1$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, et si $Y \in \mathfrak{h}$ alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$. On va étudier les cas possibles suivants.

Cas 1: Il existe $h > j$, tel que $l_i \in \mathfrak{h}$ pour tout $i > h$ et $l_h \notin \mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_h$. Alors d'après la construction des b_j, on a que $l_h = b_1$ et donc $1 \in L^H$. Ainsi nous avons que

$$\Gamma_f = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \Gamma_{f_s}$$

où $f_s = f + sl_h^\star$, où $\Gamma_{f_s} = f_s + \mathfrak{h}'^{\perp} = \{\phi \in \Gamma_f; \phi(l_h) = f(l_h) + s\}$. Soit $\mathfrak{B}' = \{b_2,\cdots,b_r\}$ la base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}'$ et soit pour tout i

$${}_sR_i(t_2,\cdots,t_m) = R_i(s,t_2,\cdots,t_m) \text{ et} R_s = \{{}_sR_i,\ i\}.$$

Alors

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathfrak{V}^{R_s,\mathfrak{B}'}, \tag{10}$$

et $d\lambda^{R,\mathfrak{B}} = \int_{\mathbb{R}} ds\, d\lambda^{R_s,\mathfrak{B}'}$. L'hypothèse de récurrence nous dit maintenant que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$U_s : S(G/H',f_s) \longrightarrow \int^{\oplus}_{\mathfrak{V}^{R_s,\mathfrak{B}'}} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R_s,\mathfrak{B}'}(\phi)$$

est une isométrie. Or pour $\xi \in S(G/H, f)$,

$$\xi^s(u) = \int_{\mathbb{R}} \xi(u \exp(t\, l_h)) e^{-2i\pi ts} dt \tag{11}$$

définit un élément ξ^s de $S(G/H', f_s)$ et

$$\|\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \|\xi^s\|^2 ds$$

d'après le théorème de Plancherel. Donc

$$\begin{aligned}\|\xi\|^2_{L^2(G/H)} &= \int_{\mathbb{R}} \|\xi^s\|^2_{L^2(G/H')} ds = \int_{\mathbb{R}} \|U_s(\xi^s)\|_2^2 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{V}^{R_s,\mathfrak{B}'}} \|T_{B(\phi,\mathfrak{h}'),H'} \xi^s\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}'),\phi)} d\lambda^{R_s,\mathfrak{B}'}(\phi) ds \\ &= \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_{B(\phi,\mathfrak{h}),H} \xi\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi),\end{aligned}$$

puisque pour $\phi \in \mathfrak{V}^{R_s,\mathfrak{B}'}$ on a que

$$B(\phi, \mathfrak{h}) = B(\phi, \mathfrak{h}') \tag{12}$$

et

$$T_{B(\phi,\mathfrak{h}),H} \xi = T_{B(\phi,\mathfrak{h}'),H'} \xi^s. \tag{13}$$

Cas 2 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ et $l_n, \cdots, l_{j+1} \in \mathfrak{h}$.

On reprend la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_r,$$

et la base de Malcev $\mathfrak{B} = (b_1, \cdots, b_r)$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ avec laquelle on a défini $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$.

Remarquons qu'il existe $k \in \{1, \cdots, r\}$ tel que $b_{k+1} = X = l_m \notin \mathfrak{g}_1$, dans les notations de (**I-3.1**). Par suite la base de Jordan-Hölder $\{X, l^1_1, \cdots, l^1_{n-1}\}$ de $\mathfrak{g}$, qui passe par $\mathfrak{g}_1$, nous définit la nouvelle base de Malcev $\mathfrak{B}' = \{X, b^1_{r-1}, \cdots, b^1_1\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{B}_1 = \{b^1_{r-1}, \cdots, b^1_1\}$ de $\mathfrak{g}_1$ relative à $\mathfrak{h}$. Nous avons évidemment que $b^1_j = l^1_{k(j)}$ pour tout j, où $k(j)$ dépend de j. Décrivons maintenant $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ par la nouvelle base $\mathfrak{B}'$. Nous obtenons une nouvelle application affine R' telle que $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \mathfrak{V}^{R',\mathfrak{B}'}$ et pour tout $T \in \mathbb{R}^n$, il existe un $T' \in \mathbb{R}^n$ qui dépend de façon affine de T, tel que

$$\sum_{i=1}^{r} R_i(T) f_i = \sum_{i=1}^{r-1} R_{1,i}(T') f^1_i + R_{1,r}(T') X^\star = R_1(T') + R_{1,r}(T') X^\star.$$

Nous remarquons que l'orbite de f est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_1$ et de même la G_{k+1}-orbite de $f' = f_{|\mathfrak{g}_{k+1}}$ est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_k$. Donc $r \in I^{H,\mathfrak{B}_1}$ et $k+1 \in I^{H,\mathfrak{B}}$. En outre l'espace $\mathfrak{V}^{R_1,\mathfrak{B}_1} \subset \mathfrak{g}_1^\star$ est la restriction de $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ à $\mathfrak{g}_1$.

Tout élément g de G s'écrit de manière unique sous la forme $g = \exp(tX) \cdot g'$, avec $t \in \mathbb{R}$, et $g' \in G_1 = \exp\ \mathfrak{g}_1$. Pour une fonction K sur G, on note K_t la fonction sur G_1 définit par $K_t(g') = K(\exp(tX)g')$ pour tout $g' \in G_1$.

En se referant à la construction du (**I-3.1**) du choix lisse de polarisation $B(\phi, \mathfrak{h})$, on remarque que

$$B(\phi, \mathfrak{h}) = B(\phi_1, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_1 \tag{14}$$

où $\phi_1 = \phi|\mathfrak{g}_1$, on a donc pour tout $\eta \in S(G_1/H)$ via l'hypothèse de récurrence

$$\|\eta\|^2_{L^2(G_1/H)} = \int_{\mathfrak{V}^{R_1,\mathfrak{B}_1}} \|T_{B(\phi',\mathfrak{h}),H}\eta\|^2_{L^2(G_1/B(\phi',\mathfrak{h}),\phi')} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

Pour ce choix de polarisation on a pour tout $\xi \in S(G/H, f)$ que

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|U(\xi)(\phi)\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \\
&= \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_{B(\phi,\mathfrak{h}),H}\xi\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{V}^{R_1,\mathfrak{B}_1}} \|T_{B(\phi_1,\mathfrak{h}),H}\xi_t\|^2_{L^2(G_1/B(\phi_1,\mathfrak{h}),\phi_1)} d\lambda^{R_1,\mathfrak{B}_1}(\phi_1) dt
\end{aligned}$$

(on applique l'hypothèse de récurrence sur G_1)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \|\xi_t\|^2_{L^2(G_1/H)} dt \\
&= \|\xi\|^2_{L^2(G/H)}.
\end{aligned}$$

Cas 3 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$.

Dans ce cas $Y \notin \mathfrak{g}_1$, on pose $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus \mathbb{R}Y$ et $H' = \exp\ \mathfrak{h}'$. On sait que les induites $\underset{H}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\chi_f$ et $\underset{H'}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\chi_f$ sont équivalentes. L'opérateur $T_{H',H}$ qui entrelace ces deux induites est définie pour tout $\xi \in S(G/H, f)$ et $g \in G$ par

$$T_{H',H}\xi(g) = \int_{H'/H'\cap H} \xi(gh)d\dot{h} = \int_{\mathbb{R}} \xi(g\exp(tY))dt. \tag{15}$$

Cet opérateur est $|\alpha|$-fois une isométrie, où $\alpha = f([X_r, Y])$, d'après le choix des mesures sur $G/H \simeq G_1/H \cap G_1$ et G/H'. En outre on vérifie facilement que pour tout $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ et tout $\xi \in S(G/H, l)$ on a que

$$T_{B(\phi,\mathfrak{h}),H'} o T_{H',H}\xi = T_{B(\phi,\mathfrak{h}),H}\xi \tag{16}$$

et ceci découle d'un calcul intégral direct.

Comme $Y \notin \mathfrak{h}$, nous avons que $b_1 = Y$. On a évidemment que $1 \in I^H$. En particulier, la première composante de R, la fonction R_1, est constante et $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ est aussi adapté à $(f, \mathfrak{h}')$. En effet, on peut supposer que les vecteurs l_j de la base $\mathfrak{C}$ sont tous dans $\mathfrak{g}_1$ sauf le premier l_1. Et alors $\mathfrak{C}$ définit la base de Malcev $\mathfrak{B} = \{b_r, \cdots, b_1 = Y\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ et la base de Malcev $\mathfrak{B}' = \{l_1, b_r, \cdots, b_2\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}'$.

Toujours en se referant à la construction du **(I-3.1)** du choix lisse de polarisation $B(\phi, \mathfrak{h})$, on remarque que

$$B(\phi, \mathfrak{h}) = B(\phi_1, \mathfrak{h}') \tag{17}$$

où $\phi_1 = \phi/\mathfrak{g}_1$. Nous obtenons donc que

$$\|U(\xi)\|_2^2 = \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|U(\xi)(\phi)\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

$$= \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_{B(\phi,\mathfrak{h}),H}\xi\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

$$= \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} |\alpha| \cdot \|T_{B(\phi,\mathfrak{h}'),H'} \circ T_{H',H}\xi\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}'),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

(on applique le cas 2)

$$= |\alpha| \cdot \|T_{H',H}\xi\|^2_{L^2(G/H',f)}$$

$$= \|\xi\|^2_{L^2(G/H,f)}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

■

Nous verrons plus tard par un exemple qu'on ne peut pas prendre n'importe quel choix lisse de polarisations pour obtenir un opérateur d'entrelacement.

I-4 L'opérateur inverse

Ce paragraphe consiste à démontrer que l'opérateur U est inversible et à décrire explicitement son inverse. Pour cela considérons pour $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ l'opérateur $T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}$ defini sur les éléments

$$K \in (\int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}^{\infty}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi))_C$$

à support compact pour tout $g \in G$ par

$$T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}K(g) = \int_{H/B(\phi,\mathfrak{h})\cap H} K(\phi)(gb)\chi_\phi(b)d_{H,H\cap B(\phi),\mathfrak{h})}(\dot{b}) \tag{18}$$

où $\phi \longrightarrow B(\phi,\mathfrak{h})$ désigne le choix lisse de polarisations en $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ décrit en **(I-3.1)**, et $d_{H,B(\phi,\mathfrak{h})\cap H}$ est la mesure sur $H/B(\phi,\mathfrak{h})\cap H$ décrite en **(I-3.1)**.

Nous démontrons d'abord que l'image de U est dense.

I-4.1 Proposition

Soit

$$\phi \longrightarrow B(\phi,\mathfrak{h}),\ \phi \in \mathfrak{V},$$

le choix lisse de polarisations en ϕ décrit en **(I-3.1)**, *alors l'image de l'opérateur U, qu'on note $im(U) = U(S(G/H,f))$ est dense dans* $\int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}),\phi)d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$.

Preuve

Dans toute la démonstration on garde les mêmes notations que dans le Théorème **(I-3.2)** et sa preuve et on utilise encore une récurrence sur dim $(\mathfrak{g})$ + dim$(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$.

Cas 1 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ et il existe k $> j$, tel que $Z = l_k \notin \mathfrak{h}$, mais $l_{k'} \in \mathfrak{h}$ pour tout $k' > k$.

On regarde toujours $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Z$ et on note $H' = \exp(\mathfrak{h}')$, $f_s = f + sZ^\star$, on a bien que comme dans (10)

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathfrak{V}^{R_s,\mathfrak{B}'}.$$

On rappelle que pour $g \in G$ et $\xi \in S(G/H,f)$, on a que:

$$\begin{aligned} U(\xi)(\phi + sY^\star)(g) &= \int_{B(\phi_s,\mathfrak{h}')/H\cap B(\phi_s,\mathfrak{h}')} \xi(g\cdot b)\chi_{\phi+sZ^\star}(b)d\dot{b} \\ &= \int_{B(\phi_s,\mathfrak{h}')/H'\cap B(\phi_s,\mathfrak{h}')} \int_{\mathbb{R}} \xi(g\cdot \exp(tZ)b_s)\chi_\phi(b_s)e^{-its}d\dot{b}_s dt \\ &= \int_{B(\phi_s,\mathfrak{h}')/H'\cap B(\phi_s,\mathfrak{h}')} \xi^s(g\cdot b_s)\chi_\phi(b_s)d\dot{b}_s, \end{aligned}$$

où ξ^s est la fonction sur G définie pour tout $g \in G$ par

$$\xi^s(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g\cdot\exp(tZ))e^{-its}dt$$

donc finalement $U(\xi)(\phi_s) = U_s(\xi^s)(\phi_s)$ où U_s est l'opérateur $T_{B(\phi_s,\mathfrak{h}'),H'}$, en plus il est facile à vérifier que les fonctions ξ^s possèdent la covariance suivant f_s.

Soit maintenant $K \in \text{im } (U)^{\perp}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{Y}^{R_s,\mathfrak{B}'}} < K(\phi_s), U_s(\xi^s)(\phi_s) >_{L^2(G/B(\phi_s,\mathfrak{h}'))} d\lambda^{R_s,\mathfrak{B}'}(\phi) ds = 0.$$

Soit γ dans l'espace de Schwartz $S(\exp(\mathbb{R}Z))$, alors il est facile à vérifier que

$$(\overset{G}{\underset{H}{\text{Ind}}}(\chi_f)(\gamma)\xi)^s = (\gamma \star \xi)^s = \hat{\gamma}(s)\xi^s$$

où $\star$ désigne le produit de convolution et $\hat{\gamma}(s)$ la transformée de Fourier de la fonction γ calculée au point s. Il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(s) \int_{\mathfrak{Y}^{R_s,\mathfrak{B}'}} < K(\phi, s), U_s(\xi^s)(\phi_s) >_{L^2(G/B(\phi_s,\mathfrak{h}'))} d\lambda^{R_s,\mathfrak{B}'}(\phi) ds = 0$$

pour tout $\gamma \in S(\exp(\mathbb{R}Z))$, et donc pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R_s,\mathfrak{B}'}} < K(\phi, s), U_s(\xi^s)(\phi_s) >_{L^2(G/B(\phi_s,\mathfrak{h}'))} d\lambda^{R_s,\mathfrak{B}'}(\phi) = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut en déduire que $\phi_s \longrightarrow K(\phi_s)$ est nulle pour presque tout $s \in \mathbb{R}$ et donc que $K = 0$.

Cas 2 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ et $l_n, \cdots, l_{j+1} \in \mathfrak{h}$.

Rappelons que

$$\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}|_{\mathfrak{g}_1} = \mathfrak{Y}^{R_1,\mathfrak{B}_1}$$

Soit maintenant $K \in \text{im}(U)^{\perp}$, alors

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} < K(\phi), U(\xi)(\phi) >_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}),\phi)} d\lambda(\phi) = 0$$

donc

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} \int_{G/B(\phi,\mathfrak{h})} \overline{K(\phi)(g)} U(\xi)(\phi)(g) d\dot{g} d\lambda(\phi) = 0$$

ainsi

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} \int_{\mathbb{R}} \int_{G_1/B(\phi,\mathfrak{h})} K(\phi)(\exp tXg_0) \overline{U(\xi)(\phi)(\exp tXg_0)} d\dot{g}_0 dt d\lambda(\phi) = 0$$

et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} \int_{G_1/B(\phi,\mathfrak{h})} K(\phi)_t(g_0)\overline{U(\xi)(\phi)_t(g_0)}d\dot{g}_0 dt d\lambda(\phi) = 0.$$

Soit α une fonction de $S(\exp(\mathbb{R}X))$, on remplace dans l'intégrale ci-dessus ξ par $\alpha\xi$, on a bien $(\alpha\xi)_t = \alpha(t)\xi_t$, il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} \int_{G_1/B(\phi',\mathfrak{h})} K(\phi)_t(g_0)\overline{U(\xi)(\phi)_t(g_0)}dg_0 dt d\lambda(\phi) = 0.$$

pour tout α dans $S(\exp(\mathbb{R}X))$ ainsi

$$\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} \int_{G_1/B(\phi',\mathfrak{h})} K(\phi)_t(g_0)\overline{U(\xi)(\phi)_t(g_0)}dg_0 d\lambda(\phi) = 0,$$

et en faisant appel à l'hypothèse de récurrence on a $K(\phi)_t = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

Cas 3: $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$.

Comme dans le cas 3 du théorème (**I-3.2**) on pose $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus \mathbb{R}Y$ et $H' = \exp \mathfrak{h}'$. Les induites $\overset{G}{\underset{H}{\mathrm{Ind}}}\chi_f$ et $\overset{G}{\underset{H'}{\mathrm{Ind}}}\chi_f$ sont équivalentes. L'opérateur qui entrelace ces deux induites est $T_{H,H'}$ (15), et on a comme dans (16) que

$$U \circ T_{H,H'} = U'$$

où U' est l'opérateur d'entrelacement pour $\tau' = \overset{G}{\underset{H'}{\mathrm{Ind}}}\chi_f$, qui est une isométrie avec image dense d'après le cas précédent. Donc U a aussi une image dense.

■

I-4.2 Théorème

On garde les mêmes hypothèses et les notations que dans le théorème (**I-3.2**). *Alors l'opérateur d'entrelacement U décrit dans ce théorème est inversible. Son inverse U^{-1} est donné pour tout $K \in (\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}^{\infty}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi))_C$ à support compact et $g \in G$ par:*

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}K(\phi)(g)d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi). \tag{19}$$

U^{-1} est alors un nouvel opérateur d'entrelacement isométrique de (8) *lorsque la mesure sur $H/B(\phi,\mathfrak{h}) \cap H$ est correctement normalisée comme dans* (**I-3.1**).

Preuve

Une fois qu'on a prouvé que U est une isométrie (théorème (**I-3.2**)) et vu que son image est dense d'après la proposition (**I-4.1**) qu'on vient de démontrer, on peut déduire qu'il est inversible. Cherchons son inverse, pour cela considérons pour $K \in (\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/B(\phi),\phi)d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi))_C$ à support compact et $g \in G$

$$V(K)(g) = \int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}K(\phi)(g)d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

Il est clair que $V \circ \int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_\phi d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) = \operatorname*{Ind}_H^G(\chi_f) \circ V$ et que $V(K)$ possède la covariance suivant f, on va prouver que pour $K \in (\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/B(\phi),\phi)d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi))_C$ à support compact, $V(K)$ est un élément de $L^2(G/H)$.

On raisonne comme avant par récurrence sur $\dim(G) + \dim(G/H)$ et on garde toutes les notations du théorème (**I-3.2**). Pour cela montrons que

$$\|V(K)\|^2_{L^2(G/H)} = \int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} \|K(\phi)\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}))}d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

Cas 1 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ et il existe $k > j$, tel que $T = l_k \notin \mathfrak{h}$ mais tel que $l_{k'} \in \mathfrak{h}$ pour tout $k' > k$.

On regarde $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}\,T$, on note $H' = \exp(\mathfrak{h}')$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f_s = f + sT^\star$, on a bien comme dans (10) que

$$\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \mathfrak{Y}^{R_s,\mathfrak{B}'}.$$

Alors,

$$\|V(K)\|^2_{L^2(G/H)} = \int_{\mathbb{R}}\int_{G/H'} |V(K)(g_0 \cdot \exp(sT))|^2 d\dot{g}_0 ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{G/H'} |\int_{\mathfrak{Y}^{R,\mathfrak{B}}} T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}K(\phi)(g_0 \cdot \exp(sT))d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)|^2 d\dot{g}_0 ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{G/H'} |\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathfrak{Y}^{R_t,\mathfrak{B}'}} T_{H',B(\phi_t)}K(\phi_t)(g_0)e^{-its}d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}'}(\phi_t)dt|^2 d\dot{g}_0 ds$$

(on utilise la formule de Plancherel)

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{G/H'} | \int_{\mathfrak{V}^{R_s,\mathfrak{B}'}} T_{H',B(\phi_s,\mathfrak{h}')} K(\phi_s)(g_0) d\lambda^{R_s,\mathfrak{B}'}(\phi_s)|^2 d\dot{g}_0 ds$$

(on applique l'hypothèse de récurrence)

$$= \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|K(\phi)\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}))} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

Cas 2: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$.

On a alors que

$$\|V(K)\|^2_{L^2(G/H)} = \int_{\mathbb{R}} \|V(K)_t\|^2_{L^2(G_1/H)} dt$$

on applique l'hypothèse de récurrence

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{V}^{R_1,\mathfrak{B}_1}} \|K(\phi)_t\|^2_{L^2(G_1/B(\phi,\mathfrak{h}))} d\lambda^{R_1,\mathfrak{B}_1}(\phi) dt.$$

$$= \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} \|K(\phi)\|^2_{L^2(G/B(\phi,\mathfrak{h}))} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

Cas 3 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$.

Dans ce cas $Y \notin \mathfrak{g}_1$, on pose $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}') \oplus \mathbb{R}Y$ et $H' = \exp \mathfrak{h}'$. On sait que les induites $\underset{H}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\, \chi_f$ et $\underset{H'}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\, \chi_f$ sont équivalentes. Alors, on a comme dans (16) que

$$T_{H,H'} \circ T_{H',B(\phi,\mathfrak{h}')} = T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})}, \ \phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}},$$

d'où $V = T_{H,H'} \circ V'$, où V' désigne l'opérateur du cas précédent, donc on voit tout de suite que V est isométrique. Ce qui achève la preuve.

En réalité, on a prouvé finalement que V est un opérateur d'entrelacement isométrique, il nous reste finalement à prouver que $U \circ V = Id$. On raisonne encore par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) + \dim(\mathfrak{g})$.

Cas 1: $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$ et $S = l_k \notin \mathfrak{h}$, $l'_k \in \mathfrak{h}$ pour tout $k' > k$.
On regarde $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}S$ et on note $H' = \exp \mathfrak{h}'$, $f_s = f + sS^\star$, etc.

Soit $g \in G$, on a que:

$$U \circ V(K)(\phi_1 + sS^\star)(g) = T_{B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h}),H} V(K)(g)$$

$$= \int_{B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h})/H\cap B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h})} \Big(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{V}^{R_r,\mathfrak{B}'}} T_{H,B(\phi+sS^\star,\mathfrak{h}')} K(\theta_1 + rS^\star)(gb) d\lambda^{R_r,\mathfrak{B}'}(\theta_1) dr \Big) \chi_{\phi_1+sS^\star}(b) d\dot{b}$$

d'après ce qui précède et vu que $H/H\cap B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h}') \simeq H'/H'\cap B(\phi+sS^\star,\mathfrak{h}')$, on obtient que

$$U \circ V(K)(\phi_1 + sS^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h})/H'\cap B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h})} \Big(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{V}^{R_r,\mathfrak{B}'}} T_{H',B(\theta+rS^\star,\mathfrak{h}')} K(\theta + rS^\star)(gb \cdot \exp(tS)) d\lambda^{R_r,\mathfrak{B}'}(\theta) ds \Big) \chi_{\phi_1}(b) d\dot{b} e^{its} dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h})/H'\cap B(\phi_1+sS^\star,\mathfrak{h})} \Big(\int_{\mathfrak{V}^{R_r,\mathfrak{B}'}} T_{H',B(\theta_1+rS^\star,\mathfrak{h}')} K(\theta + rS^\star)(gb) e^{its} e^{-itr} d\lambda^{R_1,\mathfrak{B}_1}(\theta_1) \Big) \chi_{\phi_1}(b) d\dot{b} dt dr$$

(on fait appel à l'hypothèse de récurrence)

$$= \int_{\mathbb{R}^2} K(\phi_1 + rS^\star)(g) e^{its} e^{-itr} dt dr$$

$= K(\phi_1 + sS^\star)(g)$ d'après la formule d'inversion de Fourier.

Cas 2 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$.

Soit $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_1$.

Soit $\phi \in \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ et $g = \exp(tX) \cdot g_1 \in G$, on a que:

$$U \circ V(K)(\phi)(g) = \int_{B(\phi,\mathfrak{h})/H\cap B(\phi,\mathfrak{h})} \Big(\int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}} T_{H,B(\theta,\mathfrak{h})} K(\theta)(gb) d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\theta) \Big) \chi_\phi(b) d\dot{b}$$

$$= \int_{B(\phi)/H\cap B(\phi)} \Big(\int_{\mathfrak{V}^{R_1,\mathfrak{B}_1}} T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})} K_t(\phi)(g_1 b) d\lambda^{R_1,\mathfrak{B}_1}(\phi) \Big) \chi_\phi(b) d\dot{b}$$

(on applique la récurrence)

$= K_t(\phi)(g_0) = K(\phi)(\exp(tX) g_0) = K(\phi)(g)$.

Cas 3: $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}'$.

On rappelle que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{R}Y$, les induites $\underset{H}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}(\chi_f)$ et $\underset{H'}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}(\chi_f)$ sont équivalentes. Soit $T_{H,H'}$ l'opérateur (15) qui les entrelace; on sait encore d'après (16) que

$$T_{H,H'} \circ T_{H',B(\phi,\mathfrak{h})} = T_{H,B(\phi,\mathfrak{h})},$$

d'où $V = T_{H,H'} \circ V'$. D'autre part $U' = U \circ T_{H,H'}$. Alors $U \circ V = U' \circ T_{H',H} \circ T_{H,H'} \circ V' = Id$, selon le choix de nos normalisations.

Ceci achève la démonstration du théorème (**I-4.2**).

■

Une fois qu'on a construit un opérateur d'entrelacement, on va donner une nouvelle caractérisation des espaces $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ et ceci fait l'object de

I-4.3 Proposition.

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \in S(f,\mathfrak{g})$ et H le sous groupe de Lie connexe fermé de G correspondant. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) presque toutes les représentations unitaires et irréductibles qui apparaissent dans la désintégration de $\tau = \underset{H}{\overset{G}{Ind}}\, \chi_f$ sont de multiplicités finies.

ii) $K^H = \emptyset$ et l'espace Γ_f/H des H-orbites dans Γ_f est isomorphe aux espaces $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$.

Preuve

i) $\Longrightarrow$ ii)

On considère une suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}.$$

On va prouver l'assertion suivante: supposons que presque toutes les représentations unitaires et irréductibles qui apparaissent dans la désintégration de $\tau = \underset{H}{\overset{G}{Ind}}\, \chi_f$ sont de multiplicités finies. Si pour un certain $i \in \{1,\cdots,r\}$ les G_i−orbites sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_{i-1}$ dans $\mathfrak{g}_i^\star$, alors il est de même pour les H−orbites.

Supposons donc qu'il existe $i \in \{1,\cdots,r\}$ tel que les G_i−orbites en position générale soient saturées par rapport à $\mathfrak{g}_{i-1}$ dans $\mathfrak{g}_i^\star$, alors que les H−orbites ne le soient pas. Soit $\phi \in \Gamma_f$ et prenons $b_i \in \mathfrak{g}_i^\star \setminus \mathfrak{g}_{i-1}^\star$. On a donc d'une part

$$(\phi + \mathbb{R}b_i^\star) \cap H\phi = \{\phi\}$$

à cause du fait que les H−orbites ne sont pas saturées par rapport à $\mathfrak{g}_{i-1}$ dans $\mathfrak{g}_i^\star$, et d'autre part, vue la saturation des G_i−orbites en position générale par rapport à $\mathfrak{g}_{i-1}$ dans $\mathfrak{g}_i^\star$, on a que

$$\phi + \mathbb{R}b_i^\star \subset \Gamma_f \cap G\phi$$

Il s'ensuit que pour tout $s \neq t \in \mathbb{R}$, $H(\phi + sb_i^\star)$ et $H(\phi + tb_i^\star)$ sont deux $H-$orbites disjointes contenues dans $\Gamma_f \cap G\phi$, ce qui contredit le fait que les multiplicités sont presque partout finies.

ii) $\Longrightarrow$ *i)*

On raisonne par récurrence sur la dimension de G/H, poue cela reprenons la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset ... \subset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}.$$

Posons $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{r-1}$ qui est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$, et $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$.

Cas 1:

supposons que les $G-$orbites ne sont pas saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}^\star$, il en est alors de même pour les $H-$orbites, donc en particulier on a que $K^H = K_0^H = \emptyset$ où K_0^H est le même ensemble défini dans $\mathfrak{g}_0$ et avec la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset ... \subset \mathfrak{g}_{r-1} = \mathfrak{g}_0.$$

Soit par ailleurs $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$, alors on a que

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \simeq \{q + sX^\star,\ s \in \mathbb{R},\ q \in \mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}\ \},$$

où $\mathfrak{B}_0$ est la base de Malcev de $\mathfrak{g}_0$ relative à $\mathfrak{h}$ et R_0 la famille de fonctions définies comme dans le théorème (**I-2.5**).

D'autre part, la mesure $d\lambda$ sur $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$ est exactement $d\lambda_0 \otimes ds$, où ds est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $d\lambda_0$ est la mesure sur $\mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$, on a alors que

$$\operatorname*{Ind}_{G_0}^{G} \pi_{\phi_0} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0 + \alpha X^\star} d\alpha,$$

il en résulte que

$$\operatorname*{Ind}_{H}^{G} \chi_f \simeq \operatorname*{Ind}_{G_0}^{G} \operatorname*{Ind}_{H}^{G_0} \chi_f \simeq \int_{\mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\phi_0+\alpha X^\star} d\alpha\right) d\lambda_0(\phi_0) = \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_\phi d\lambda(\phi)$$

L'hypothèse de récurrence nous informe que les multiplicités des représentatations qui apparaissent dans la désintégration de $\operatorname*{Ind}_{H}^{G_0} \chi_f$ sont finies, et puisque les multiplicités dans ce cas n'augmentent pas, on aura certainement que $\operatorname*{Ind}_{H}^{G} \chi_f$ est de multiplicités finies.

Cas 2:

supposons que les $G-$orbites sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}^\star$, il en est alors de même pour les $H-$orbites car $K^H = \emptyset$, $\underset{G_0}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\,\pi_{\phi_0}$ est irréductible pour presque tout $\phi_0 \in \mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$. En plus on a que $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$ et la mesure $d\lambda_0$ sur $\mathfrak{V}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$ est la même sur $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}$, il est claire dans ce cas qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur G_0 qui nous donne en fait que $\underset{H}{\overset{G_0}{\mathrm{Ind}}}\,\chi_f$ est de multiplicités finies, et par suite d'après [11] et [28] on a que

$$\dim G_0\phi_0 = 2 \dim H\phi_0.$$

D'autre part et vu la saturation des $H-$orbites on a pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star$ tel que $\phi/\mathfrak{g}_0 = \phi_0$ que

$$\dim H\phi = 1 + \dim H\phi_0,$$

et par conséquent on a que

$$\begin{aligned}\dim G\phi &= 2 + \dim G_0\phi_0 \\ &= 2 + 2 \dim H\phi_0 \\ &= 2\,(1 + \dim H\phi_0) \\ &= 2 \dim H\phi.\end{aligned}$$

Il en résulte que les multiplicités de $\underset{H}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\,\chi_f$ sont finies, ce qui achève la preuve.

■

I-5 Opérateurs différentiels sur les espaces homogènes nilpotents.

Notre objet maintenant est d'étudier une certaine algèbre d'opérateurs différentiels: soit

$$C^\infty(G,\tau) = \{\xi \in C^\infty(G) : \xi(gh) = \chi(h^{-1})\xi(g),\ g \in G,\ h \in H\}$$

et Diff(G) l'algèbre des opérarteurs différentiels qui sont C^∞ et qui laisse $C^\infty(G,\tau)$ invariant. On pose $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ l'ensemble des restrictions $D|C^\infty(G,\tau)$ de $D \in$ Diff(G) commutant avec les translations à gauche de G sur $C^\infty(G,\tau)$.

Notons que Corwin et Greenleaf ont prouvé que l'algèbre $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ est abélienne lorsque presque toutes le multiplicités sont finies (cf. [10]). En examinant de près cette démonstration et bien des exemples ils posent la conjecture suivante

Si $m(\pi) < \infty$ presque partout, alors l'algèbre $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales $H-$invariantes sur $f+\mathfrak{h}^\perp$. (20)

Et puis plus récement ils ont des résultats positifs sous une hypothèse assez gênante. Supposons:

(i) $m_\pi < \infty$ pour π générique dans Support (τ).

(ii) $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ qui polarise tous les éléments génériques de $\Gamma_f = f + \mathfrak{h}^\perp$ et qui est normalisée par $\mathfrak{h}$.

Sous ces conditions, ils démontrent leur conjecture (cf. [12]).

Ensuite, suivant [10], [12] (voir aussi [15]), décrivons l'algèbre $\mathfrak{D}_\tau(G/H))$ en termes de l'algèbre enveloppantes $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Pour $g \in G$ ou $A \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g})$, on note R_g ou $R(A)$ (resp. L_g ou $L(A)$) l'action à droite (resp. à gauche). Soient $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}, \tau)$ l'ensemble des $A \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ tels que $R(A)$ laisse $C^\infty(G, \tau)$ stable, $\mathfrak{a}_\tau$ le sous espace vectoriel de $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ engendré par $Y + 2\pi i f(Y)$, Y parcourant $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ l'idéal gauche engendré par $\mathfrak{a}_\tau$. Alors il vient que

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{g}, \tau) = \{A \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g}) : [A, \mathfrak{h}] \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\}$$

et que l'application $A \longmapsto R(A)|C^\infty(G, \tau)$ nous donne un homomorphisme de $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}, \tau)$ sur $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ avec le noyau $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En somme,

$$\mathfrak{D}_\tau(G/H) \simeq \mathfrak{u}(\mathfrak{g}, \tau)/\mathfrak{u}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

De plus, si le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est réductif dans le sens qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, on voit que

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{g}, \tau) = \mathfrak{u}^H(\mathfrak{g}) + \mathfrak{u}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$$

avec $\mathfrak{u}^H(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g}) : [A, Y] = 0, \ \forall\, Y \in \mathfrak{h}\}$. D'où

$$\mathfrak{D}_\tau(G/H) \simeq \mathfrak{u}^H(\mathfrak{g})/\mathfrak{u}^H(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{u}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

Nous donnons ici une démonstration brève de la conjecture (20) sous les conditions (i) et (ii).

Soit alors $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. Soient $f \in \mathfrak{g}^\star$, et soient $\mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Supposons que $\mathfrak{h}$ soit subordonnée à f, c.à.d. $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = (0)$ et que $\mathfrak{b}$ soit une polarisation en ϕ pour tout $f \in \Gamma_f$ et que $\mathfrak{h}$ normalise $\mathfrak{b}$. Soit $G = \exp \mathfrak{g}, H = \exp \mathfrak{h}, B = \exp \mathfrak{b}$. Supposons en plus que la représentation $\tau = \operatorname*{Ind}_H^G \chi_f$ de G se décompose sur $\hat{G}$ avec des multiplicités finies.

On remarque d'abord que $\mathfrak{c} = \mathfrak{h} + \mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, comme $\mathfrak{h}$ normalise $\mathfrak{b}$. Soit $C = \exp(\mathfrak{c})$. Alors $\tau = \operatorname*{Ind}_C^G \tau_0$ où $\tau_0 = \operatorname*{Ind}_H^C \chi_f$ et donc d'après [10, (35)] l'algèbre $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ est

isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{D}_{\tau_0}$. En outre, presque toutes les $H-$orbites dans Γ_f sont saturées par rapport à $\mathfrak{c}$. Donc l'algèbre des fonctions polynomiales $H-$invariantes sur Γ_f est $H-$isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales $H-$invariantes définies sur $f_{|\mathfrak{c}}+\mathfrak{h}^{\perp,\mathfrak{c}} \subset \mathfrak{c}^*$. Nous pouvons donc supposer que $G = C$. En particulier $\mathfrak{b}$ est maintenant un idéal de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{b}$.

I-5.1 Corollaire

La réciprocité de Frobénius s'établie dans ces conditions.

Expliquons un peu ce qu'est cette réciprocité: pour une représentation unitaire π de G, on note $\mathcal{H}_\pi$, $\mathcal{H}_\pi^\infty$ et $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ respectivement l'espace de π, l'espace des vecteurs C^∞ de π et l'antidual de $\mathcal{H}_\pi^\infty$. Pour $a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ et $b \in \mathcal{H}_\pi^\infty$, on note $< a, b >$ l'image de b par a. Et de même $\mathcal{H}_\pi^\infty$ agit sur $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ par

$$< b, a >= \overline{< a, b >}.$$

On pose

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f} = \{a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty} : \pi(h)a = \chi_f(h)a, \text{ pour tout } h \in H\}.$$

Avec ces donnés il y a (cf. [16]) une question concernant une sorte de réciprocité: $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi_f}$ se qualifie -t-elle pour la multiplicité $m(\pi)$ dans la désintégration de $\tau = \operatorname{Ind}_H^G \chi_f$? Dans [18] H. Fujiwara et S. Yamagami ont répondu par oui à cette question lorsque $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ ou que π admet une polarisation distinguée. Dans notre cas, tout $\pi = \pi_\phi = \operatorname{Ind}_B^G(\chi_\phi)$ dans le support de τ admet une polarisation distinguée qui est $\mathfrak{b}$, d'où le résultat.

■

En outre pour presque tout $\phi \in \Gamma_f$, les espaces $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$, $ad^*(\mathfrak{b})\phi$ et $ad^*(\mathfrak{h})\,\phi$ ont même dimension, de même que les espaces $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$.

Soit maintenant $\{l_1, \cdots, l_n\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ passant par $\mathfrak{b}$, c.à.d. $\mathfrak{b} = \text{vect}\{l_k, \cdots, l_n\}$ et $(l_1, \cdots, l_{k-1}) \in \mathfrak{h}$. Nous prenons pour $\mathfrak{V}$ l'espace

$$\Gamma_0 = \{\phi \in \Gamma_f \mid \phi(l_j) = 0, \ \forall \ j \in I^H\}.$$

En appliquant les constructions (**I-3.1**), nous obtenons la base de Malcev

$$(X_1(\phi), \cdots, X_r(\phi)) \subset \mathfrak{h}$$

de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{b}$, et la base de Malcev $\{Y_1, \cdots, Y_r\}$ de $\mathfrak{b}$ relative à $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$, qui est la même pour tout $\phi \in \mathfrak{V}$ et qui est contenue dans $\{l_k, \cdots, l_n\}$. Les vecteurs $X_i(\phi)$ et Y_j ont pour presque

tout ϕ la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \phi([X_i(\phi), Y_j]) &= 0, i < j \\ &= 1, i = j. \end{aligned} \tag{21}$$

Pour presque tout $\phi \in \Gamma_f$, on a que le stabilisateur $\mathfrak{h}(\phi)$ de ϕ dans $\mathfrak{h}$ est égal à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ et ainsi $Ad^\star(H)\phi$ est difféomorphe à $H/H \cap B$. Nous pouvons donc identifier l'espace $S(G/B, \phi) = S(H/H \cap B, \chi_f)$ avec l'espace $S(Ad^\star(H)\phi)$ des fonctions à décroissance rapide C^∞ définies sur $Ad^\star(H)\phi$ par l'application : $\xi \in S(H/B \cap H) \to \tilde{\xi}$, où

$$\tilde{\xi}(Ad^\star(h)\phi) = \chi_f(h)\xi(h), h \in H.$$

De même les espaces $L^2(G/B, \phi), L^2(H/H \cap B)$ et $L^2(Ad^\star(H)\phi)$ sont isométriquement isomorphes. Ce dernier espace est muni de la norme

$$\|\xi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^r} |\xi(\exp t_1 X_1(\phi) \cdots \exp t_r X_r(\phi) \cdot \phi|^2 dt_1 \cdots dt_r.$$

Nous pouvons donc transférer la représentation π_ϕ de G sur $L^2(G/B, \phi)$ à $L^2(Ad^\star(H)\phi)$ et nous obtenons les formules :

$$\pi_\phi(h)\xi(\psi) = \xi(Ad^\star(h^{-1})\psi), \ \psi \in Ad^\star(H)\phi, \ h \in H$$

et

$$\pi_\phi(b)\xi(\psi) = e^{i\psi(b)}\xi(\psi), b \in B.$$

L'application $\mathfrak{V} \times H/H \cap B \to \Gamma_f$:

$$(\phi, h \bmod H/H \cap B) \to Ad^\star(h)\phi$$

définit une bijection rationelle d'un certain ouvert Zariski-dense de $\mathfrak{V} \times H/H \cap B$ sur un ouvert Zariski- dense de Γ_f et la mesure de Lebesgue $d\phi$ sur Γ_f se décompose en une intégrale de mesures orbitales :

$$\int_{f+\mathfrak{h}^\perp} g(\phi)d\phi = \int_{\mathfrak{V}} \int_{\mathbb{R}^r} g(Ad^\star(\exp t_1 X_1(\phi) \cdots \exp t_r X_r(\phi))\phi)dt_1 \cdots dt_r \ d\lambda(\phi),$$

d'après les relations (21). Cette identité nous permet d'identifier l'espace hilbertien $L^2(\Gamma_f)$ avec l'espace

$$L^2(\mathfrak{V} \times H/H \cap B) = \int_{\mathfrak{V}}^{\oplus} L^2(G/B, \phi)d\lambda(\phi).$$

Pour cela, nous écrivons pour une fonction $L \in L^2(\Gamma_f), K(\phi, \dot{h}) = \tilde{L}(\phi, \dot{h}) = L(Ad^*(h)\phi), \phi \in \mathfrak{V}, \dot{h} \in H/H \cap B$. Alors $K \in L^2(\Gamma_f)$ et $\|K\|_2 = \|L\|_2$.

Pour $\phi \in \Gamma_f, h \in H, \xi \in S(G/H, \phi)$ nous avons que

$$\int_{B/B\cap H} \xi(hb)\chi_\phi(b)d_{B,B\cap H}(b) = \int_{B/B\cap H} \xi(b)\chi_\phi(h^{-1}bh)\chi_f(h)d_{B,B\cap H}(b)$$

$$= \overline{\chi_f(h)}\hat{\xi}(Ad^*(h)\phi),$$

où $\hat{\xi}$ dénote la transformée de Fourier usuelle de la fonction $\xi \in S(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b})$. L'opérateur

$$U : L^2(G/H, \chi_f) \to \int_{\mathfrak{V}}^{\oplus} \mathcal{H}_\phi d\lambda(\phi) = L^2(\Gamma_f)$$

est donc simplement donné par :

$$U\xi(\psi) = \hat{\xi}(\psi)$$

et pour l'application réciproque

$$U^{-1} : \int_{\mathfrak{V}}^{\oplus} \mathcal{H}_\phi d\lambda(\phi) = L^2(\Gamma_f) \to L^2(G/H, \chi_f)$$

on obtient pour $b \in B, \psi \in L^2(\Gamma_f)$, que

$$U^{-1}(\eta)(b) = \int_{\mathfrak{V}} \int_{H/H\cap B} \eta(\phi)(bh)\chi_f(h)d_{H,H\cap B}(h)d\lambda(\phi)$$

$$= \int_{\Gamma_f} \eta(\psi)e^{i\psi(b)}d\psi = \hat{\eta}(-b).$$

Donc si D est un élément de $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$, alors D commute à $\tau(b)$ pour tout $b \in B$. En outre D est représenté par un élément de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, donc il s'écrit sur $S(G/H, \chi_f)$ comme un opérateur aux dérivées partielles à coefficients polynômiaux. Soit $D' = U \circ D \circ U^{-1}$ l'opérateur correspondant agissant sur $S(\Gamma_f)$. Alors D' est aussi un opérateur aux dérivées partielles à coefficients polynomiaux et D' commute à la multiplication avec les fonctions $e^{i(\cdot)(b)}, b \in B$ et donc D' est lui-même un opérateur de multiplication avec une fonction polynomiale P_D. Comme D commute aussi à l'action de H, la fonction P_D doit être $H-$invariante. Donc P_D est un polynôme $H-$ invariant sur Γ_f. D'autre-part, si P est un polynôme $H-$invariant sur Γ_f, alors la multiplication avec P définit un opérateur D' sur $S(\Gamma_f)$ qui permute à l'action de G. Donc $D = U^{-1} \circ D' \circ U$ est un élément de $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$. Ainsi nous voyons que $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions polynomiales $H-$invariantes définies sur Γ_f.

I-6 Nouvelle désintégration (lisse) de $L^2(G)$.

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on sait que $\underset{\{e\}}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\, 1$ est la représentation régulière gauche λ_G qui se réalise sur $L^2(G)$ par

$$\lambda_G(s)\xi(x) = \xi(s^{-1}x)$$

pour tout $s, x \in G$ et $\xi \in L^2(G)$.

Soit donc une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset ... \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

à laquelle on associe une base de Jordan-Hölder $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $b_i \in \mathfrak{g}_i \setminus \mathfrak{g}_{i-1}$. De même on considère l'action de G sur $\mathfrak{g}^\star$ (vu comme $G-$module) relativement à cette base, on note I^G l'ensemble indice de Pukanszky pour cette action. Dans ce cas et suivant la définition (**I-2.3**) on a que

$$K^{\{e\}} = \Big\{ j \in \{1, .., n\} \text{ : presque toutes les } G_{j-1}-\text{orbites sont saturées par rapport à } G_j \Big\},$$

il en découle que

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \{\phi \in \Gamma_f \ : \ \phi(b_j) = 0, \ j \in K^{\{e\}}\}.$$

Soit Ω une $G-$orbite et $\phi \in \Omega \subset \mathfrak{g}^\star$, on note $\phi_i = \phi_{|\mathfrak{g}_i}$, soit $B(\phi)$ une polarisation de Vergne en ϕ, on note $\mathfrak{b}(\phi)$ la sous algèbre associée à $B(\phi)$ qui est en fait égale à $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i(\phi_i)$, on sait que

$$Ad^\star(B(\phi))\phi = \phi + \mathfrak{b}(\phi)^\perp = \phi + \sum_{k \in K^{\{e\}}} \mathbb{R}\, b_k^\star,$$

il est clair donc que $Ad^\star(B(\phi))\phi \cap \mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \{\phi\}$.

On peut de même vérifier que $K^{\{e\}} \subset I^G$ et que $\sharp(K^{\{e\}}) = \frac{1}{2}\sharp(I^G)$. Soit μ_G la mesure de Haar sur G, on obtient la désintégration lisse de $L^2(G)$ suivante:

$$\Big(L^2(G), \mu_G\Big) \simeq \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \Big(L^2(G/B(\phi), \phi)\Big) d\lambda(\phi).$$

I-7. Exemples.

I-7.1.

On prend l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{g}$ engendrée par trois générateurs $< X, Y, Z >$ tels que $[X, Y] = Z$, on désigne par G le groupe de Lie associé. Soit $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(X - Y)$ et $H = \exp(\mathfrak{h})$ et $f = 0$. On considère $\tau = \operatorname*{Ind}_H^G 1_H$, prenons comme suite de Jordan-Hölder les vecteurs $\{Z, Y, X\}$. Nous obtenons la suite de Malcev

$$\mathfrak{h} =< X - Y > \subset \mathfrak{g}_1 =< X - Y, Z > \subset \mathfrak{g}.$$

Il s'ensuit dans cet exemple que $\mathfrak{V} = \mathbb{R}Z^\star$ et que pour tout $\phi \in \mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{b}(\phi) =< Y, Z >$ est la polarisation lisse en ϕ. Soit U l'opérateur d'entrelacement décrit dans le théorème (**I-3.2**).

On a pour tout $\xi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $g \in G$

$$U(\xi)(\lambda Z^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \exp(\frac{t}{\lambda} Y) \exp(sZ)) e^{-is\lambda} ds dt.$$

Montrons directement que cet opérateur est isométrique. En effet pour tout $\xi \in S(G/H, 0) \simeq S(\mathbb{R}^2)$ on a que

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{V}} \|U(\xi)(\phi)\|^2_{L^2(G/B(\phi))} d\lambda(\phi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(\frac{a}{\lambda}(X - Y)) \exp(tY) \exp(sZ)) e^{-is\lambda} ds dt|^2 da d\lambda.
\end{aligned}$$

Vu que $\exp(\frac{a}{\lambda}(X - Y)) \exp(tY) = \exp(tY) \exp(\frac{a}{\lambda}(X - Y)) \exp(\frac{a}{\lambda} tZ)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(tY) \exp((s + \frac{ta}{\lambda})Z)) e^{-is\lambda} ds dt|^2 da d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(tY) \exp(sZ)) e^{-is\lambda} e^{-it(-a)} ds dt|^2 da d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\xi}(\exp(-aY) \exp(\lambda Z))|^2 da d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |\xi(\exp(aY) \exp(\lambda Z))|^2 da d\lambda \\
&= \|\xi\|^2_{L^2(G/H)}.
\end{aligned}$$

L'opérateur réciproque $V : \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L^2(G/B, \lambda Z^\star) d\lambda \to L^2(G/H)$ est donné pour tout $g \in G$ par

$$V(K)(g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(\lambda Z^\star)(g \cdot \exp(r \frac{(X - Y)}{\lambda})) dr d\lambda.$$

I-7.2.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre engendrée par quatres générateurs $< X_1, X_2, X_3, X_4 >$ tels que $[X_1, X_2] = X_3$ et $[X_1, X_3] = X_4$. On désigne par G le groupe de Lie associé.

Les orbites en position générale dans $\mathfrak{g}^\star$ peuvent être paramétrisées par $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$. En effet si pour $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $g_{\alpha,\lambda}$ désigne la forme linéaire $g_{\alpha,\lambda} = \alpha X_4^\star + \lambda X_2^\star$, alors la $G-$orbite $\Omega_{\alpha,\lambda}$ correspondante est la partie suivante de de $\mathfrak{g}^\star$

$$\Omega_{\alpha,\lambda} = \{\alpha X_4^\star + tX_3^\star + (\lambda + \frac{t^2}{2\alpha})X_2^\star + sX_1^\star,\ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

A.

Soit $\mathfrak{h} = \text{vect} < X_4 >$ et $H = \exp(\mathfrak{h})$ et $f_\alpha = \alpha X_4^\star$ une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ avec $\alpha \neq 0$. On désire désintégrer $\tau = \underset{H}{\overset{G}{\text{Ind}}}\, \chi_{f_\alpha}$. On choisit une base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ comme dans **(I-3.1)**

$\mathfrak{h} = \text{vect} < X_4 > \subset \mathfrak{g}_1 = \text{vect} < X_3, X_4 > \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} < X_2, X_3, X_4 > \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect} < X_1, X_2, X_3, X$

Pour toute $\phi \in \mathfrak{g}^\star$ en position générale, on obtient la polarisation $B(\phi) = \mathfrak{g}_2$.

Les G-orbites sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_2$, alors que les $H-$orbites ne le sont pas, ainsi $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \{\phi \in f_\alpha + < \mathfrak{h} >^\perp :\ \phi(X_1) = 0\} = \alpha X_4^\star + (\mathbb{R}X_3^\star \oplus \mathbb{R}X_2^\star) \simeq \mathbb{R}^2$, il en résulte que

$$\underset{H}{\overset{G}{\text{Ind}}}\, \chi_{f_\alpha} \simeq \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \pi_\phi d\lambda(\phi).$$

L'opérateur d'entrelacement est donné pour $\xi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ par

$$U(\xi)(\alpha X_4^\star + aX_3^\star + bX_2^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \exp tX_3 \exp sX_2) e^{-ita} e^{-isb} dtds$$

pour tout $g \in G$.

L'opérateur inverse U^{-1} est exprimé pour tout $K \in (\int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/G_2, \phi) d\lambda(\phi))_C$ à support compact et $g \in G$ par

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} K(\alpha X_4^\star + tX_3^\star + sX_2^\star)(g) dtds.$$

B.

Prenons maintenant $\mathfrak{h} = \text{vect} < X_3 >$ et $H = \exp(\mathfrak{h})$ et $f_\beta = \beta X_3^\star, \beta \neq 0$. Alors il est clair que $\Omega_{\lambda,\mu} \cap (f_\beta + \mathfrak{h}^\perp)$ est une seule droite qui est en fait une $H-$orbite. Notre base de Jordan-Hölder nous donne la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \text{vect} < X_3 > \subset \mathfrak{g}_1 = \text{vect} < X_3, X_4 > \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} < X_3, X_4, X_2 > \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect} < X_3, X_4, X_2, J$$

Presque toutes les $H-$orbites en position générale sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_2$, il en est ainsi pour les $G-$orbites, donc

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \beta X_3^\star + < \mathfrak{h} >^\perp \cap \{\phi; \phi(X_1) = 0\} = \beta X_3^\star + (\mathbb{R}X_4^\star \oplus \mathbb{R}X_3^\star) \simeq \mathbb{R}^2$$

et ainsi

$$\operatorname*{Ind}_H^G \chi_{f_\beta} \simeq \int_{\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{\lambda,\mu} d\lambda d\mu.$$

Un opérateur d'entrelacement est donc donné pour tout $\xi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ par

$$U(\xi)(\beta X_3^\star + bX_4^\star + aX_3^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \exp tX_2 \exp sX_4) e^{-ita} e^{-isb} dtds$$

pour tout $g \in G$.

L'opérateur inverse U^{-1} agit sur $K \in (\int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}(G/G_2, \phi,) d\lambda(\phi))_C$ à support compact par

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} K(\beta X_3^\star + sX_2^\star + rX_4^\star)(g) dsdr.$$

C.

Prenons maintenant $\mathfrak{h} = \text{vect} < X_2 >$ et $H = \exp(\mathfrak{h})$ et $f = X_2^\star$. Alors il est clair que $\Omega_{\alpha,\lambda} \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est la réunion de deux $H-$orbites si $\alpha(1-\lambda) > 0$. Nous obtenons la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h} = \text{vect} < X_2 > \subset \mathfrak{g}_1 = \text{vect} < X_2, X_4 > \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} < X_2, X_4, X_3 > \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect}\mathfrak{g}.$$

Presque toutes les $H-$orbites en position générales sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_2$, il est en est ainsi pour les $G-$orbites, donc

$$\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = f + < \mathfrak{h} >^\perp \cap \{\phi; \phi(X_1) = 0\} = X_2^\star + (\mathbb{R}X_4^\star \oplus \mathbb{R}X_3^\star).$$

Un opérateur d'entrelacement est donc donné pour tout $\xi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ par

$$U(\xi)(X_2^\star + aX_3^\star + bX_4^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \exp tX_3 \exp sX_4) e^{-ita} e^{-isb} dtds$$

pour tout $g \in G$.

L'opérateur inverse U^{-1} est donné pour tout $K \in (\int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}(G,\phi,\mathfrak{g}_2)d\lambda(\phi))_C$ à support compact et $g \in G$ par

$$U^{-1}(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} K(X_2^\star + sX_3^\star + rX_4^\star)(g)dsdr.$$

D.

Prenons maintenant $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_1^\star$, $f = 0$. Alors nous obtenons la suite de Malcev

$$\mathfrak{g}_1 = \text{vect} < X_1, X_4 > \subset \mathfrak{g}_2 = \text{vect} < X_1, X_4, X_3, > \subset \mathfrak{g}_3 = \text{vect} < X_1, X_4, X_3, X_2 > \subset \mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}.$$

Ici $L^H = \{1,3\}$ et donc $\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}} = \mathbb{R}X_4^\star \oplus \mathbb{R}X_2^\star$. Ainsi l'opérateur d'entrelacement

$$U : L^2(G/H, f) \to \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/G_2, \phi)d\lambda(\phi)$$

est donné par

$$U(\xi)(aX_4^\star + bX_2^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}^3} \xi(g\exp(tX_2)\exp(sX_3)\exp(rX_4))e^{-i(ar+bt)}drdsdt.$$

L'opérateur inverse V agit sur $K \in \int_{\mathfrak{V}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(G/G_2, \phi)d\lambda(\phi)$ par

$$V(K)(g) = \int_{\mathbb{R}^3} K(sX_4^\star + tX_2^\star)(g\exp(rX_1))dsdtdr$$

et ceci pour tout $g \in G$.

I-7.3 Un contre-exemple.

Montrons ici que le choix des polarisations $B(\phi)$ pour $\phi \in \mathfrak{V}$ est très important. En effet, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs X, P, Y, Q, Z avec les crochets

$$[X,Y] = Z, [P,Q] = Z,$$

soit $\mathfrak{h} =$ vect$(Z, X-P), f = Z^\star$, et soit $\mathfrak{C} = \{X, P, Y, Q, Z\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{B} = \{Q, Y, X\}$ est la base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$. L'ensemble L^H a un seul élément, qui est associé à Y. Prenons $\mathfrak{V} = \mathbb{R}Y^\star$ et $B = B(\phi) =$ vect(Z, X, P) pour tous les $\phi \in \mathfrak{V}$. Cette algèbre B est une polarisation pour toute forme linéaire $\phi \in \mathfrak{g}^\star$ en position générale,

mais n'est pas une polarisation de Vergne pour la base $\mathfrak{C}$. Alors l'opérateur d'entrelacement infinitésimal U définies pour tout $\xi \in S(G/H, f)$ et $g \in G$ par

$$U(\xi)(sY^\star)(g) = T_{B(sY^\star),H}\xi(g) = \int_{B/B\cap H} \xi(gb)\chi_{sY^\star}(b)d_{B,B\cap H}(b) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g\exp(pP))dp$$

ne dépend pas de $s \in \mathbb{R}$, et donc U ne peut pas être isométrique.

I-8 Cas des groupes non nilpotents.

On va construire maintenant des opérateurs d'entrelacement sur des exemples des groupes résolubles exponentiels, commençons par en donner un fondamental qui est souvent rencontré.

A.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de $ax + b$; $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y$, $[X, Y] = Y$. On prend $f = Y^\star$ et $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X \in M(f, \mathfrak{g})$. Le groupe complètement résoluble $G = \exp\mathfrak{g}$ n'a que deux représentations unitaires irréductibles de dimension infinie $\pi_\pm$ associées à deux orbites ouvertes $\pm G \cdot Y^\star$. La représentation monomiale $\tau = \operatorname{Ind}_H^G \chi_f$, $H = \exp\mathfrak{h}$, est équivalente à la somme directe $\pi_+ \oplus \pi_-$.

On réalise $\pi_\pm$ comme $\operatorname{Ind}_B^G \chi_{\pm Y^\star}$ où $B = \exp(\mathbb{R}Y)$ et on identifie $\mathcal{H}_{\pi_\pm}$ à $L^2(\mathbb{R})$ par l'application

$$\xi \longmapsto \tilde{\xi}(t) = \xi(\exp tX),\ (t \in \mathbb{R}).$$

Soit par ailleurs l'opérateur U défini pour un tel ξ et pour un $g \in G$ par

$$U(\xi)(Y^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp(tY)e^{it}dt$$

et

$$U(\xi)(-Y^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp(tY)e^{-it}dt.$$

Lorsque $g = \exp(bX)$ ces expressions deviennent

$$U(\xi)(Y^\star)(\exp(bX)) = \int_{\mathbb{R}} \xi(\exp(tY)e^{ie^b t}e^{\frac{b}{2}}dt = e^{\frac{b}{2}}\hat{\xi}(e^b Y)$$

et

$$U(\xi)(-Y^\star)(\exp(bX)) = \int_{\mathbb{R}} \xi(\exp(tY)e^{-ie^b t}e^{\frac{b}{2}}dt = e^{\frac{b}{2}}\hat{\xi}(-e^b Y).$$

On aura donc

$$\|U(\xi)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{\frac{b}{2}}\hat{\xi}(e^b Y)|^2 db + \int_{\mathbb{R}} |e^{\frac{b}{2}}\hat{\xi}(-e^b Y)|^2 db$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^b |\hat{\xi}(e^b Y)|^2 db + \int_{\mathbb{R}} e^b |\hat{\xi}(-e^b Y)|^2 db$$
$$= \int_0^{+\infty} |\hat{\xi}(bY)|^2 db + \int_{-\infty}^0 |\hat{\xi}(bY)|^2 db$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |\xi(bY)|^2 db = \|\xi\|^2_{L^2(G/H)}.$$

B.

Soit G le groupe de Boidol, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est engendrée par les vecteurs (A, X, Y, Z) tels que $[A, X] = X$, $[A, Y] = -Y$, $[X, Y] = Z$. Soit $H = \exp(\mathfrak{h}) = \exp(\mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}Z)$ le sous-groupe analytique de G. Soit encore $\mathfrak{B} = (A, X, Y, Z)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$, de cette suite on extrait une base $\mathfrak{B}_1 = (X, Y)$ de Malcev relative à $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}X$ et $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$, on regarde

$$\tau = \operatorname*{Ind}_H^G 1 = \operatorname*{Ind}_{G_1}^G \operatorname*{Ind}_H^{G_1} 1.$$

Comme dans l'exemple précédent, on a que $\operatorname*{Ind}_H^{G_1} 1 = \pi_{Y^\star} \oplus \pi_{-Y^\star}$ et donc

$$\tau \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi_{Y^\star + sX^\star} \oplus \pi_{-Y^\star + sX^\star} ds.$$

La polarisation de Vergne en $\pm Y^\star + sX^\star$ relativement à la base $\mathfrak{B}$ est vect(X, Y, Z), l'opérateur d'entrelacement U est défini donc pour ξ à support compact modulo H et pour un $g \in G$ par

$$U(\xi)(\pm Y^\star + sX^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}^2} \xi(g \cdot \exp(tX)\exp(rY)) e^{ir} e^{\pm its} dt dr.$$

Des calculs comme dans l'exemple précédent nous montrent effectivement que U est bien une isométrie.

Chapitre II

DÉSINTÉGRATION DES RESTRICTIONS DE REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS ET OPÉRATEUR D'ENTRELACEMENT

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère une représentation unitaire et irréductible π associée à une orbite coadjointe $\Omega_\pi^G = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^\star$ d'une forme linéaire f. Si H est un sous groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, alors d'après Corwin et Greenleaf [9], la désintégration centrale de $\pi_{|H}$ s'obtient comme suit. Soit μ_π une mesure finie sur Ω_π qui est équivalente à la mesure G-invariante. Alors

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\Omega_\pi/H}^{\oplus} \sigma_{p(l)} d\dot{\mu}_\pi(l), \tag{22}$$

où $p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathfrak{h}^\star$ est la projection canonique et $\sigma_{p(l)} \in \hat{H}$ est associé à $p(l) \in \mathfrak{h}^\star$.

L'application de Kirillov $\theta_H : \mathfrak{h}^\star \longrightarrow \hat{H}$ induit un homéomorphisme de l'espace des orbites $\mathfrak{h}^\star/H$ sur $\hat{H}$. On considère finalement la mesure $\nu = \nu_H^\pi = (\theta_H \circ p)_\star(\mu_\pi)$, l'image de μ_π par l'application $\theta_H \circ p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \hat{H}$. Pour $\sigma \in \hat{H}$, on désigne par $n_\pi(\sigma)$ le nombre des $H-$orbites contenues dans $\Gamma(\pi, \sigma) = \Omega_\pi^G \cap p^{-1}(\Omega_\sigma^H)$ alors

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_\pi(\sigma) \sigma d\nu(\sigma), \tag{23}$$

ce qui a été démontré par Lipsman [28].

Ce même résultat à été généralisé par Ronald L. Lipsman dans le cadre des groupes complètement résolubles (cf. [31]) et par H. Fujiwara pour les groupes résolubles exponentiels (cf. [19]).

Le but de ce chapitre est de présenter un espace de désintégration concret et un opérateur d'entrelacement précis pour $\pi_{|H}$.

II-1. Désintégration centrale canonique des restrictions des représentations unitaires et irréductibles.

II-1.1 Mesure sur les orbites .

Comme plus haut soit un sous-groupe analytique $H = \exp \mathfrak{h}$ de G et une représentation unitaire et irréductible π associée à une orbite coadjointe $\Omega_\pi^G = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^\star$ associée à une forme linéaire f et μ_π une mesure $G-$ invariante sur Ω_π.

On va décrire maintenant une mesure sur Ω_π/H, puis des parties fermées $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ et une mesure $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ sur $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ avec laquelle on va déterminer notre opérateur d'entrelacement.

On regarde $\mathfrak{g}^\star$ comme étant un $H-$module. Soit $\mathfrak{B} = \{(v_1, .., v_n)\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^\star$ sous l'action de $\mathfrak{h}$ et $\{(b_1, .., b_n)\}$ sa base duale. Soit e le plus petit ensemble indice tel que $\mathfrak{W} = \mathfrak{g}_e^\star \cap \Omega_\pi$ soit un ouvert de Zariski non vide dans Ω_π.

Soit $l \in \mathfrak{W}$ et $\lambda_l = p^{\mathfrak{B}}(0, \lambda_l)$, alors $l = p^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) = \sum_{j=1}^n p_j^{\mathfrak{B}}(z, \lambda_l) v_j : z \in \mathbb{R}^d$, en fait λ_l est l'unique élément de $H \cdot l$ qui vérifie $\lambda_l(v_j) = 0$ pour $j \in e$. On regarde

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{W} \cap \{q \in \Omega_\pi \ : \ q(v_j) = 0, \ \forall j \in e\}$$

qui est un fermé de Zariski dans $\mathfrak{W}$. Soit

$$\varphi : \mathfrak{W} \longrightarrow \mathfrak{T} \times \mathbb{R}^d$$

qui à l associe le couple (λ_l, z), alors φ est un difféomorphisme, en particulier l'application $q \longrightarrow H \cdot q$ définie une bijection de $\mathfrak{T}$ dans $\mathfrak{W}/H$ et on a pour toute fonction k, C^∞ a support compact dans $\mathfrak{W}$

$$\int_{\mathfrak{W}} k(q) d\mu_\pi(q) = \int_{\mathfrak{T} \times \mathbb{R}^d} k \circ \varphi^{-1}(\lambda, z) d\lambda dz.$$

De cette manière on considère cette mesure $d\lambda$ sur les H-orbites qu'on notera par la suite λ_π, telle que pour toute fonction $\tilde{k}$ continue à support compact dans Ω_π/H on a

$$\int_{\Omega_\pi/H} \tilde{k}(q) d_\pi(q) = \int_{\mathfrak{T}} \tilde{k}(H \cdot \lambda) d\lambda.$$

Soient g un élément de G, $\phi = Ad^\star(g)f/\mathfrak{h}$ et soit $B(\phi) = \exp(\mathfrak{b}(\phi))$ une polarisation de $\mathfrak{h}$ au point ϕ. On construit une mesure $\nu_{B(\phi), g \cdot B \cdot g^{-1}}$ sur $B(\phi)/B(\phi) \cap g \cdot B \cdot g^{-1}$ comme plus haut. On remarque que l'intégrale

$$T_{B(\phi),g\cdot B\cdot g^{-1}}\xi(h)=\int_{B(\phi)/B(\phi)\cap g\cdot B\cdot g^{-1}}\xi(hug)\chi_\phi(u)d_{B(\phi),g\cdot B\cdot g^{-1}}(u) \tag{24}$$

définie pour toute fonction ξ de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ et h dans H est une fonction C^∞ qui vérifie la relation de covariance pour $B(\phi)$ et le caractère χ_ϕ.

Remarquons par un simple changement de variable que

$$T_{B(\phi),g\cdot B\cdot g^{-1}}\xi(h)=\int_{g^{-1}\cdot B(\phi)\cdot g/g^{-1}\cdot B(\phi)\cdot g\cap B}\xi(hgu)\chi_\phi(u)d_{g^{-1}\cdot B(\phi)\cdot g,B}(u). \tag{25}$$

On va montrer que $T_{B(\phi),g\cdot B\cdot g^{-1}}\xi$ est en fait un élément de $S(H/B(\phi),\phi)$, c'est à dire un vecteur C^∞ de la représentation induite $\underset{B(\phi)}{\overset{H}{\mathrm{Ind}}}\chi_\phi$. Dans toute la suite on note B^g au lieu de $g\cdot B\cdot g^{-1}$.

II-1.2 Proposition

Soit $\phi=Ad^\star(g)f/\mathfrak{h}\in\mathfrak{h}^\star$, $g\in G$ et $B(\phi)$ une polarisation en $\phi/\mathfrak{h}$. Alors il existe une constante positive C et une semi norme continue P sur l'espace de Schwartz $S(G/B,f)$ telles que pour tout ξ dans $S(G/B,f)$ on a

$$\|T_{B(\phi),B^g}\xi\|_{L^2(H/B(\phi))}\leq CP(\xi).$$

En particulier $T_{B(\phi),B^g}:S(G/B,f)\longrightarrow S(H/B(\phi),\phi)$ est une application linéaire continue et surjective.

Preuve

On montre tout d'abord que pour tout ξ dans $S(G/B,f)$ on a que

$$|T_{B(\phi),B^g}\xi|_\infty\leq C_1P_1(\xi)$$

où C_1 est une constante positive et P_1 une semi norme sur l'espace de Schwartz $S(G/B,f)$.

On sait d'après (24) que

$$T_{B(\phi),B^g}\xi(h)=\int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^g}\xi(hug)\chi_\phi(u)d_{B(\phi),B^g}(u).$$

On refait maintenant un raisonnement analogue à celui de Lemme (**I-2.2**) qui est le suivant:

Soit $\mathfrak{B}=(X_1,\cdots,X_p)$ une base de Malcev de $\mathfrak{h}$ relative à $B^g\cap B(\phi)$ telle que $\mathfrak{B}$ contienne une base de Malcev $(X_{i_1},\cdots,X_{i_m})$ de $B(\phi)$ relative à $B(\phi)\cap B^g$. On a pour tout $h\in H$ que

$$|T_{B(\phi),B^g}\xi(h)| = |\int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^g} \xi(hug)\chi_\phi(u)d_{B(\phi),B^g}(u)|$$

$$\leq \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^g} |\xi(hug)|d_{B(\phi),B^g}(u)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} |\xi(h\exp(t_1X_{i_1})\cdots\exp(t_mX_{i_m})g)|dt_1\cdots dt_m.$$

En écrivant $h\cdot\exp(t_1X_{i_1})\cdots\exp(t_mX_{i_m}) = \exp(a_1X_1)\cdots\exp(a_pX_p)\cdot b$ où $b \in B^g\cap B(\phi)$ et les a_i sont des fonctions polynômiales en h et en $t_1,\cdots,t_n$ vérifiant

$a_{i_1} = t_1 + a'_{i_1}$ où a'_{i_1} ne dépend pas de $t_1,\cdots,t_m$, et de manière générale

$a_{i_j} = t_j + a'_{i_j}$ où a'_{i_j} ne dépend pas de $t_j,\cdots,t_m$ pour $j \in \{1,\cdots,n\}$.

On a que

$$|T_{B(\phi),B^g}\xi(h)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} |\xi(\exp(a_1X_1)...\exp(a_pXp)\cdot bg)|dt_1...dt_m$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} |\xi(\exp(b_1X_1)\cdots\exp(t_1X_{i_1})\cdots\exp(t_mX_{i_m})\cdots\exp(b_pX_p)g)|dt_1\cdots dt_m$$

(pour certaines fonctions polynômiales $b_j, j \notin \{i_1,\cdots,i_m\}$ dans les variables $(t_1,\cdots,t_m)$.)

$$\leq P_1(\xi)\int_{\mathbb{R}^m}\prod_{k=1}^m(1+t_k^2)^{-1}dt_1\cdots dt_m$$

où

$$P_1(\xi) = \sup_{t_1,\cdots t_m,s_1,\cdots,s_{p-m}}\Big(\prod_{i=1}^m(1+t_i^2)|\xi(\exp(s_1X_1)\cdots\exp(t_1X_{i_1})$$

$$\cdots\exp(t_mX_{i_m})\cdots\exp(s_{m-p}X_p)g)|\Big).$$

Soit maintenant Q un polynôme sans zéros sur $H/B(\phi)$ telle que $\dfrac{1}{Q}$ soit de carré intégrable.

On sait d'autre part que l'image de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{u}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ par $\pi_\phi = \operatorname*{Ind}_{B(\phi)}^{H}\chi_\phi$ est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur $H/B(\phi)$.

Il en découle qu'il existe $v \in \mathfrak{u}(\mathfrak{h})$ tel que

$$d\pi_\phi(v)T_{B(\phi),B^g}(\xi) = T_{B(\phi),B^g}(d\pi(v)\xi) = Q\cdot T_{B(\phi),B^g}\xi.$$

On a que

$$\|T_{B(\phi),B^g}\xi\|^2_{L^2(H/B(\phi))} = \int_{H/B(\phi)}|Q(h)T_{B(\phi),B^g}\xi(h)|^2\frac{1}{Q^2(h)}d_{H,B(\phi)}(h)$$

$$= \int_{H/B(\phi)} |T_{B(\phi),B^g}(d\pi(v)\xi)(h)|^2 \frac{1}{Q^2(h)} d_{H,B(\phi)}(h)$$

$$\leq |T_{B(\phi),B^g}(d\pi(v)\xi)|^2_\infty \int_{H/B(\phi)} \frac{1}{Q^2(h)} d_{H,B(\phi)}(h)$$

$$\leq C_1' P_1^2((d\pi(v)\xi)) \leq CP^2(\xi)$$

pour une nouvelle semi norme continue P de Schwartz et une constante C, ce qui achève la preuve.

■

II-1.3 Définitions

On note toujours Ω_f l'orbite associée à la forme linéaire f. La paramétrisation de Pukanszky nous définit un difféomorphisme entre Ω_f et $\mathbb{R}^d$ où $d = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ et toute fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}^\star$ définit alors par restriction une fonction polynomiale sur Ω_f.

Soit

$$(0) = \mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{g}^{n-1} \subset .... \subset \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g},$$

une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Nous en extrayons une base $\mathfrak{C} = (l_1, \cdots, l_n)$ de Jordan-Hölder. A partir de $\mathfrak{C}$ nous obtenons une base de Jordan-Hölder $\mathfrak{D} = \{h_1, \cdots, h_p\}$ de $\mathfrak{h}$ et une base de Malcev $\mathfrak{B} = \{b_r, \cdots, b_1\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ de la façon suivante. On regarde $\mathfrak{g}^j + \mathfrak{h}$ par rapport à $\mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$ et on suppose qu'on a déja trouvé tous les vecteurs $h_m, \cdots, h_r$ de la base qui se trouvent dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{j-1}$ et tous les vecteurs $b_1, \cdots, b_s$ qui se trouvent dans $\mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$.

Si $\mathfrak{g}^j + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$, alors il existe h_{r-1} dans $\mathfrak{g}^j \cap \mathfrak{h}$ tel que $h_{r-1} = l_j$ modulo un vecteur dans $\mathfrak{g}^{j-1} \cap \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{g}^j + \mathfrak{h} \supsetneq \mathfrak{g}^{j-1} + \mathfrak{h}$ alors $l_j \notin \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{j-1}$ et nous posons $b_{s+1} = l_j$.

Nous regardons maintenant $\mathfrak{g}^\star$ comme un $\mathfrak{h}$ module et nous prenons comme base de Jordan-Hölder la base duale dans $\mathfrak{g}^\star$ de la base $\{b_r, \cdots, b_1, h_1, \cdots, h_p\}$. Posons

$$\mathfrak{g}_j = \text{vect}(\mathfrak{h}, b_1, \cdots, b_j),\ j = 1, \cdots, r.$$

On note $I^H = \{i_1 < i_2 < ... < i_s\} \subset \{1, .., n\}$ l'ensemble indice de Pukanszky relative à l'action de H des éléments en position générale dans Ω_f et Ω_I l'ensemble des ϕ dans Ω_f qui admettent I^H comme ensemble indice, Ω_I est un ouvert de Zarisky dans Ω_f.

Soit encore

$$L^H_{\mathfrak{B}} = L^H = \Big\{ j \in \{1, \cdots, r\} \,|\, \text{pour presque tout } \phi \in \Omega_f,\ \text{la } G_j - \text{orbite de } \phi_{|\mathfrak{g}_j} \text{ est saturée par rapport à } \mathfrak{g}_{j-1} \Big\}.$$

Nous allons désintégrer la représentation $\pi_{|H}$ sur certaines parties $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ de Ω_f qui ont la forme suivante. Ici R désigne une famille $R_0, R_1, \cdots, R_r$ de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}^k$, où $k =$ cardinal (L^H). Pour $j > 0$, il s'agit de fonctions polynomiales réelles, pour $j = 0$, $R_0(T), T \in \mathbb{R}^k$, est une expression polynomiale en T d'éléments de $\mathfrak{h}$. Nous exigeons des fonctions R_j que pour $j \notin L^H, R_j(t_1, \cdots, t_k)$ ne dépend que de $(t_r, \cdots, t_{j'})$, où $i_{j'} \geq j > i_{j'-1}$ et que pour tout $i_j \in L^H, R_{i_j}(t_1, \cdots, t_k) = t_j$. En outre posons

$$R(T) = R_0(T) \cdot \prod_{i=1}^{r} \exp(R_i(T) b_i),\ T \in \mathbb{R}^k,$$

et

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = \{ Ad^*(R(T))f \,|\, T \in \mathbb{R}^k \}.$$

Nous remarquons que l'application $\mathbb{R}^k \ni T \to Ad^*(R(T))f$ est injective.

Prenons sur $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ la mesure de Lebesgue $dT = dt_1 dt_2 \cdots dt_k$ que nous noterons $d\lambda = d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$.

Nous disons que la famille R est adaptée à $\mathfrak{B}$.

Dans la suite nous serons souvent amenés à faire des changements de base de type

$$b'_j = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} b_i, j = 1, \cdots, k,$$

où $a_{j,j} = 1$. Nous trouverons alors une nouvelle famille de fonctions R', telle que pour la nouvelle base $\mathfrak{B}'$ les espaces $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'}$ coïncident ainsi que leurs mesures.

Soit $\phi \to B(\phi), \phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ un choix lisse de polarisations en ϕ. On note

$$(\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi))_C$$

l'ensemble des fonctions $\psi : \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} \longrightarrow \bigcup_{\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} L^2(H/B(\phi), \phi)$ continues et qui vérifient

$$\|\psi\|_2^2 = \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} \|\psi(\phi)\|^2_{L^2(H/B(\phi))} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) < \infty.$$

On définit $\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$ comme étant le complété de $(\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\pi_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi))_C$ pour la norme $\| \|_2$.

II-1.4 Théorème

*Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. H étant un sous groupe de Lie fermé connexe de G de sous algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, π une représentation unitaire et irréductible de G liée à une forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^\star$, soit Ω_π l'orbite coadjointe associée à f. Etant donnée une base $\mathfrak{B}$ de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ le fermé de Zariski de Ω_π décrit dans (**II-1.1**) relativement à cette base, $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ la mesure sur $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, alors on a*

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \tag{26}$$

où pour $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, σ_ϕ est la représentation unitaire et irréductible associée à $\phi_{|\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^\star$.

Preuve

On fait une récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Soit $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$ où $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{r-1}$. On a que

$$H \subset G_0 \subset G.$$

On désigne par $\mathfrak{B}_0$ la base de Malcev de $\mathfrak{g}_0$ relative à $\mathfrak{h}$. Si $r \in L^H$, on note pour $t \in \mathbb{R}$, R_t la famille de fonctions

$$R_j^t(t_1, \cdots, t_{k-1}) = R_j(t_1, \cdots, t_{k-1}, t),\ j = 1, \cdots, r-1.$$

définies sur $\mathbb{R}^{k-1}$. Il nous faut étudier les deux situations suivantes:

(1) Les $G-$orbites en position générales sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$. Alors on a que $r \in L^H$ et

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{g}_0} = \cup_{t\in\mathbb{R}} \mathfrak{T}^{R^t,\mathfrak{B}_0}$$

par suite la mesure $\lambda^{R,\mathfrak{B}}$ sur $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ coincide avec $\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_0} \otimes dt$ sur $\cup_{t\in\mathbb{R}} \mathfrak{T}^{R^t,\mathfrak{B}_0}$.

D'autre part on sait que, en posant $f_t = Ad^\star(\exp(tb_r))f_{|\mathfrak{g}_0}, t \in \mathbb{R}$,

$$\pi_{|H} = \left(\pi_{|G_0}\right)_{|H};$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence sur G_0 on obtient

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} (\sigma_{f_t})dt \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \int_{\mathfrak{T}^{R^t,\mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \sigma_{\phi_t|\mathfrak{h}} d\lambda^{R^t,\mathfrak{B}_0}(\phi_t)dt$$

$$\simeq \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi).$$

(2) Les $G-$ orbites ne sont pas saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$ et donc $r \notin L^H$. Il en résulte que la dernière composante de la fonction R est constante. Dans ce cas on a que $\pi_{|G_0} = \pi_{f_0} = \pi_0$ et que si $p_0 : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathfrak{g}_0^\star$ est la projection canonique, alors $p_0 : \Omega_f \longrightarrow \Omega_{f_0}$ est un difféomorphisme qui respecte les mesures. En outre

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{T}^{R_0,\mathfrak{B}_0}$$

où $R_0 = \{R_1, \cdots, R_{r-1}\}$ et où $\mathfrak{T}^{R_0,\mathfrak{B}_0} = Ad^\star(R(\mathbb{R}^k))f_0$ avec $f_0 = Ad^\star(\exp(R_r(0)b_r)f)_{|\mathfrak{g}_0}$. On a finalement que

$$\pi_{|H} \simeq \pi_{0|H} \simeq \int_{\mathfrak{T}^{R_0,\mathfrak{B}_0}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R_0,\mathfrak{B}_0}(\phi) \simeq \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

ce qui achève la démonstration. ■

II-2. Construction de l'opérateur d'entrelacement .

II-2.1 Construction de polarisations et de bases de Malcev.

Définitions.

Nous partons comme avant d'une base de Jordan-Hölder $\mathfrak{C} = \{l_1, \cdots, l_n\}$ de $\mathfrak{g}$, ce qui nous donne la base de Jordan-Hölder $\mathfrak{D} = \{h_1, \cdots, h_p\}$ de $\mathfrak{h}$ et la base de Malcev $\mathfrak{B} = \{b_r, \cdots, b_1\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$. On va construire maintenant une polarisation $B = \exp(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ en f, des polarisations $B(\phi) = \exp(\mathfrak{b}(\phi))$, $\mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{h}$ en $\phi_{|\mathfrak{h}}$, $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, et finalement une base de Malcev de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$, ainsi q'une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi)$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$ où $\mathfrak{b}^\phi$ est une polarisation en ϕ qui sera définie correctement plus tard. Ces bases vont nous définir la mesure $H-$invariante sur $H/B(\phi)$, donc la norme de l'espace de la représentation $\underset{B(\phi)}{\overset{H}{\mathrm{Ind}}}\, \chi_{\phi|\mathfrak{h}}$ et aussi l'opérateur infinitésimal d'entrelacement T_ϕ qu'on décrira plus tard.

A.

On va utiliser dans la suite une polarisation B en f construite dans le chapitre I:

Notons $\mathfrak{a}(f)$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{g}(f)$. Si $\mathfrak{a}(f) \neq \mathfrak{g}$, il existe alors un

indice j dans $\{1,\cdots,n\}$ tel que $l_j \notin \mathfrak{a}(f)$ et $l_k \in \mathfrak{a}(f)$ pour tout $k > j$. Soit alors

$$m = \sup\{i \in \{1,\cdots,n\} \text{tel que } < f,[l_j,l_i] > \neq 0\}.$$

Alors l'espace $\mathfrak{g}_1(f) = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } < f,[l_j,u] >= 0\}$, est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. De plus, si on pose

$$l_k^1 = l_k - \frac{< f,[l_j,l_k] >}{< f,[l_j,l_m] >} l_m, \text{ pour } k \in \{1,\cdots,m-1\}$$

$$l_{k-1}^1 = l_k, \text{ pour } k \in \{m+1,\cdots,n\},$$

alors $\mathfrak{C}' = \{l_m, l_1^1,\cdots,l_{n-1}^1\}$ est une nouvelle base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{C}_1 = \{l_1^1,\cdots,l_{n-1}^1\}$ est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_1(f)$ (cf.[32]).

On recommence cette construction pour $\mathfrak{g}_1(f)$ et $f_1 = f|\mathfrak{g}_1(f)$. On obtient ainsi un processus qui nous permet de construire à partir d'une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_s(f)$ un idéal $\mathfrak{g}_{s+1}(f)$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}_s(f)$, une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_{s+1}(f)$. Ce processus s'arrête lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathfrak{a}(f_d) = \mathfrak{g}_d(f).$$

Il a été prouvé qu'alors $\mathfrak{g}_d(f)$ est une polarisation en f (cf.[32]), et elle coïncide avec celle de Michèle Vergne décrite plus haut en **(I-1.2)** pour la base $\mathfrak{C}$ et aussi pour la base $\mathfrak{C}'$.(cf. [4]).

Dans toute la suite on note B la polarisation qu'on vient de décrire .

B.

Pour chaque $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ on note $\mathfrak{b}^\phi$ la sous-algèbre $\mathfrak{b}^\phi = Ad(R(T_\phi))\mathfrak{b}$, où T_ϕ est l'unique élémént de $\mathbb{R}^k$, tel que $Ad^*(R(T_\phi))f = \phi$. Le sous groupe B^ϕ associé à $\mathfrak{b}^\phi$ vérifie

$$B^\phi = R(T_\phi) \cdot B \cdot R(T_\phi)^{-1}.$$

En fait B^ϕ est une polarisation en ϕ. En outre la polarisation $B(\phi)$ sera la polarisation de Vergne en $\phi|\mathfrak{h}$ pour la base de Jordan-Hölder $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{h}$.

Nous allons déterminer toutes nos bases de Malcev $\mathfrak{X}(\phi)$ de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$ et $\mathfrak{Y}(\phi)$ de $\mathfrak{b}(\phi)$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$ par récurrence sur dim $\mathfrak{g}$ + dim $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Posons $Y = l_j$, où comme plus haut, j est le plus grand indice tel que $l_j \notin \mathfrak{a}(f)$.

B-1.

Supposons d'abord que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1 = \{U \in \mathfrak{g} |\ f([U,Y]) = 0\}$. Nous changeons comme en haut la base $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$. Alors $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$ et donc $B(\phi) = B'(\phi) = \exp(\mathfrak{b}'(\phi))$ pour tout $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$.

Il est facile de voir que pour la nouvelle base de Malcev $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ construite à partir de $\mathfrak{C}'$, il existe une famille $R' = (R'_0, \cdots, R'_k)$ d'applications polynomiales, qui est adaptée à l'ensemble indice $L^H_{\mathfrak{B}'}$, telle que $\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'} = \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ et telle que $dT' = dT$. Nous pouvons donc oublier la base $\mathfrak{C}$ et poser $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$. Donc $l_2, \cdots, l_{r-1} \in \mathfrak{g}_1$ et $l_1 \notin \mathfrak{g}_1$. L'indice r est maintenant dans L^H, ainsi

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{g}_1} = \cup_{t\in\mathbb{R}} \mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_1},$$

où $B_1 = \{b_1, \cdots, b_{r-1}\}$ et où $R_t = \Big(R_0(-,\cdots,-,t), \cdots, R_{r-1}(-,\cdots,-,t)\Big), t \in \mathbb{R}$. Nous appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence aux formes linéaires $f_t = Ad^\star(\exp(tl_1))f_{|\mathfrak{g}_1}$, ce qui nous donne les bases $\mathfrak{X}(\phi)$ et $\mathfrak{Y}(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ dans ce cas.

B-2.

Supposons maintenant que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ et qu'il existe $k > j$, tel que $l_k \notin \mathfrak{h}$, mais $l_{k'} \in \mathfrak{h}$ pour $k' > k$. Nous pouvons donc supposer que tous les éléments de $\mathfrak{B}$ se trouvent dans $\mathfrak{g}_1$ en les corrigeant si nécessaire par un élément de $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_k$. Alors $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} \cup \{l_k\}$ et donc

$$B'(\phi) = B(\phi) \cdot \exp(\mathbb{R}l_k),\ B(\phi) = B'(\phi) \cap H.$$

Nous avons par l'hypothèse de récurrence une base de Malcev $\mathfrak{X}'(\phi) = \{X_1(\phi), \cdots\}$ de $\mathfrak{h}'$ relative à $\mathfrak{b}'(\phi)$, une base de Malcev $\mathfrak{Y}'(\phi) = \{Y'_1(\phi), \cdots\}$ de $\mathfrak{b}'(\phi)$ relative à $\mathfrak{b}'(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$ et une base de Malcev $\mathfrak{U}'(\phi) = \{U_1, \cdots\}$ de $\mathfrak{b}^\phi$ relative à $\mathfrak{b}^\phi \cap \mathfrak{b}'(\phi)$, les indices indiquant que les choix ont été faits pour $\mathfrak{h}'$. Nous ajoutons un multiple de l_k à tous les vecteurs $X'_j(\phi)$ pour obtenir des vecteurs $X_j(\phi)$ dans $\mathfrak{h}$ et nous prenons pour $\mathfrak{X}(\phi)$ les vecteurs $\{X_1(\phi), \cdots, l_k\}$. De même, nous changeons les $Y'_j(\phi)$ en $Y_j(\phi) \in \mathfrak{h}$ et comme $l_k \in \mathfrak{b}^\phi \cap \mathfrak{b}'(\phi)$ nous obtenons alors une base de Malcev $\mathfrak{Y}(\phi) = \{Y_1(\phi), \cdots\}$ de $\mathfrak{b}(\phi)$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}^\phi$.

C.

Supposons que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$, et que $Y, l_k \in \mathfrak{h}$ pour tout $k > j$. Nous prenons $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$. Nous remplaçons $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{C}'$ et nous pouvons donc supposer que $l_1 \in \mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{b}(\phi)$ et $\mathfrak{b}$ sont contenus dans $\mathfrak{g}_1$, l'hypothèse de récurrence pour $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{g}_1$ nous procure les bases $\mathfrak{Y}(\phi) = \mathfrak{Y}_1(\phi)$ et $\mathfrak{X}_1(\phi)$. En outre nous prenons pour base $\mathfrak{X}(\phi)$ l'ensemble $\{l_1\} \cup \mathfrak{X}_1(\phi)$. Remarquons que le vecteur $X_1(\phi)$ ne dépend pas de ϕ.

D.

Supposons que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$, que $l_{j+1}, \cdots, l_n \in \mathfrak{a}(f)$ et que $Y \notin \mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$ et $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} \cup \{Y\}$. Alors la polarisation $\mathfrak{b}'(\phi)$ en $\phi_{|\mathfrak{h}'}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_1$ et le stabilisateur de $\phi_{|\mathfrak{h}'}$ est contenu dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$. Donc $\mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{h}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}_1$, car Y n'est pas dans le stabilisateur de $\phi_{|\mathfrak{h}}$. Ainsi

$$B(\phi) = \Big(B'(\phi) \cap H\Big) \cdot \exp(\mathbb{R}X_0(\phi)),$$

où $X_0(\phi)$ est un élément quelconque du stabilisateur de $\phi_{|\mathfrak{h}}$ qui vérifie $\phi([X(\phi),Y]) \neq 0$. En outre nous pouvons supposer que $\mathfrak{X}'(\phi)$ et $\mathfrak{Y}'(\phi) \subset \mathfrak{h}$. En plus nous savons d'après **(II-2.1,B-2)** que $X_1'(\phi)$ de dépend pas de ϕ et que $X_j'(\phi) \in \mathfrak{g}_1$ pour tout $j > 1$. Ceci nous donne la base de Malcev $\mathfrak{X}(\phi) = \{X_2'(\phi), \cdots\}$ de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$.

Soit $Y_1(\phi)$ un vecteur du stabilisateur de $\phi_{|\mathfrak{h}}$ qui vérifie $\phi([Y_1(\phi),Y]) = |\alpha|^{\frac{1}{2}}$, où $\alpha = \phi([X_1'(\phi),Y]) \neq 0$. Comme

$$B(\phi)/B(\phi)\cap B^\phi \simeq \Big(B'(\phi)\cap H/B'(\phi)\cap B^\phi \cap H\Big)\cdot \exp(\mathbb{R}Y_1(\phi))$$

$$\simeq \Big(B'(\phi)/B'(\phi)\cap B^\phi\Big)\cdot \exp(\mathbb{R}Y_1(\phi))$$

nous pouvons prendre comme base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi)$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{b}^\phi$ la base $\mathfrak{Y}(\phi) = \{Y_1(\phi)\}\cup\mathfrak{Y}'(\phi)$.

II-2.2 Description de l'opérateur d'entrelacement

Nous allons décrire maintenant un opérateur d'entrelacement U pour la désintégration centrale de $\pi_{f|H}$. Nous écrivons $\sigma_{\phi,B(\phi)}$ pour la représentation irréductible $\underset{B(\phi)}{\overset{H}{\mathrm{Ind}}}\chi_\phi$ de H ($\phi \in \Omega_f$).

Rappelons que pour $\phi \in \Omega_f$, l'opérateur $T_\phi = T_{B(\phi),B^\phi}$ envoie $S(G/B,f)$ sur $S(H/B(\phi),\phi_{|\mathfrak{h}})$. Pour $\xi \in S(G/B,f)$, la fonction $T_\phi\xi$, qui est définie pour tout $h \in H$ par

$$T_\phi\xi(h) = \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^\phi} \xi(hug_\phi)\chi_\phi(u)d_{B(\phi),B^\phi}(u), \tag{27}$$

où $g_\phi = R(T_\phi)$ et où T_ϕ est l'unique élément de $\mathbb{R}^k$, tel que $\phi = Ad^\star(R(T_\phi)f)$. De façon plus générale, on peut définir pour tout $g \in G$ et $\xi \in S(G/B,f)$ la fonction $T_g\xi$ sur H par

$$T_g\xi(h) = \int_{B(\phi_g)/B(\phi_g)\cap B^g} \xi(hug)\chi_{\phi_g}(u)d_{B(\phi_g),B^g}(u),\ h \in H, \tag{28}$$

où $\phi_g = Ad^\star(g)f$. On vérifie facilement la relation de covariance suivante

$$T_{h_0\cdot g}\xi(h) = T_g(\xi)(h\cdot h_0),\ h,h_0 \in H, g \in G.$$

Enonçons maintenant notre théorème principal:

II-2.3 Théorème

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit H un sous groupe de Lie fermé connexe de G de sous algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Soit π une représentation unitaire et irréductible de G liée à une forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^\star$. Soit $\mathfrak{C} = \{l_1,\cdots,l_n\}$ une base

de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{B}$ *la base de Malcev de* $\mathfrak{g}$ *relative à* $\mathfrak{h}$. *Soit* $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ *la partie fermée de* Ω_f *décrite dans (***II-1.3***) avec sa mesure* $d\lambda^{R,\mathfrak{B}}$.

Si B *désigne l'élément de* $M(f,\mathfrak{g})$ *décrit en (***II-2,A***), et si les mesures sur* $H/B(\phi)$ *et sur* $B(\phi)/B(\phi)\cap B^{\phi}$ *sont normalisées à l'aide des bases constuites dans (***II-2,B***), alors l'application*

$$U : S(G/B,f) \longrightarrow \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\sigma_\phi} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

donnée pour tout ξ *dans* $S(G/B_0,f)$ *par :*

$$U(\xi)(\phi) = T_\phi \xi$$

définit un opérateur linéaire d'entrelacement isométrique de

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} \sigma_{\phi,B(\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi). \tag{29}$$

Preuve

On raisonne par récurrence sur dim G + dim G/H. Notre opérateur U est formellement un opérateur d'entrelacement. Il suffit donc de prouver que U est une isométrie.

On garde la base de Jordan-Hölder $(l_1,..,l_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que l_n soit central. On sait qu'il existe j dans $\{1,\cdots,n\}$ tel que $l_j = Y \notin \mathfrak{a}(f)$ et $l_k \in \mathfrak{a}(f)$ pour tout $k > j$, on pose alors comme avant

$$\mathfrak{g}_1 = \{U \in \mathfrak{g} \text{ tel que } < f,[Y,U] >= 0\},$$

$\mathfrak{g}_1$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Soit $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$. Par définition de B on a que $B \subset G_1$.

Nous allons utiliser les notations du paragraphe (**II-2.1**).

On doit étudier les cas possibles suivants:

Cas 1 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$.

Dans cette situation nous pouvons supposer que presque toutes les $G-$orbites sont saturées par rapport $\mathfrak{g}_1$ et que

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}_{\mathfrak{g}_1} = \cup_{t\in\mathbb{R}} \mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_1}.$$

Posons pour $\xi \in S(G/B,f)$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\xi^t(g_1) = \xi(\exp(tl_1)g_1)$$

et

$$\xi_t(g_1) = \xi(g_1 \exp(tl_1)),$$

$g_1 \in G_1$. En outre soit $f_t = \left(Ad^*(\exp(tl_1))f\right)_{|\mathfrak{g}_1}$, $B_t = \exp(Ad(\exp(tl_1))B)$ et nous écrivons ϕ_t pour les éléments de $\left(Ad^*(R(\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}))f\right)_{|\mathfrak{g}_1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi\|^2 d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_1}} \|T_{\phi_t} \xi_t\|^2_{L^2(H/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_1}(\phi_t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\xi_t\|^2_{L^2(G_1/B_t,f_t)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\xi^t\|^2_{L^2(G_1/B,f)} dt \\
&= \|\xi\|^2_{L^2(G/B,f)}.
\end{aligned}$$

Cas 2 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$ et il existe $k > j$ tel que $l_k \notin \mathfrak{h}, l_{k'} \in \mathfrak{h}$ pour tout $k' > k$.

Soit de nouveau $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_k$. Alors $\mathfrak{B}' = \{b_2, \cdots, b_r\}$ est la base de Malcev relative à $\mathfrak{h}'$; En outre comme $b_1 = l_k$, l'application R est aussi adaptée à $\mathfrak{B}'$. Comme $T_\phi \xi = T'_\phi \xi_{|H}$ pour tout $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, $\xi \in S(G/B, f)$, où T'_ϕ désigne l'opérateur infinitésimal pour H', nous avons que

$$\|T_\phi(\xi)\|^2_{L^2(H/B(\phi),\phi)} = \|T'_\phi(\xi)\|^2_{L^2(H'/B'(\phi),\phi)}$$

où

$$B'(\phi) = B(\phi) \cdot \exp(\mathbb{R}l_k)$$

et l'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi\|^2_{L^2(H/B(\phi),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \\
&= \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}'}} \|T_\phi \xi\|^2_{L^2(H'/B'(\phi),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}'}(\phi) \\
&= \|\xi\|^2_{L^2(G/B)}.
\end{aligned}$$

Cas 3 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$, $Y \in \mathfrak{h}$ et $l_k \in \mathfrak{h}$ pour tout $k > j$.

On pose $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ et $H_1 = \exp(\mathfrak{h}_1)$.

Nous pouvons admettre que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{g}_1$. Soit $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \cup \{X\}$ où $X = l_1 \in \mathfrak{h}$ est le premier vecteur de la base de Jordan-Hölder adaptée à $\mathfrak{g}_1$. Alors $\mathfrak{B}_1$ est une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}_1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la famille $\mathfrak{B}^t$ des vecteurs $b_1^t, \cdots, b_r^t$, où $b_j^t = Ad(\exp(tX))b_j, (j = 1, \cdots, r)$, est une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}^t = Ad(\exp(tX))\mathfrak{h}$. Nous posons

$$R^t(T) = \prod_{j=1}^{r} \exp(R_j(T)b_j^t) = \exp(tX) \cdot R(T) \cdot \exp(-tX),$$

$T \in \mathbb{R}^k$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in S(G/H, f)$, $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ nous avons pour $h_1 \in H_1$ que

$$\begin{aligned} T_\phi(\xi)(\exp(tX)h_1) &= \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^\phi} \xi(\exp(tX)h_1 u g_\phi)\chi_\phi(u) d_{B(\phi),B^\phi}(u) \\ &= \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^\phi} \xi(\exp(tX)h_1 \exp(-tX)\exp(tX)u g_\phi)\chi_\phi(u) d_{B(\phi),B^\phi}(u) \\ &= \int_{B(\phi_t)/B(\phi_t)\cap B^{\phi_t}} \xi_t(\exp(tX)h_1 \exp(-tX)u g_{\phi_t})\chi_{\phi_t}(u) d_{B(\phi_t),B^{\phi_t}}(u), \end{aligned}$$

où pour $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, $\phi_t = Ad^\star(\exp(tX))\phi$ et où $\xi_t(g) = \xi(g\exp(tX))$. Soit aussi $\xi^t(g) = \xi(\exp(tX) \cdot g), g \in G$.

On a donc que

$$\|\xi\|^2_{L^2(G/B)} = \int_{\mathbb{R}} \|\xi_t\|^2_{L^2(G_1/B_t, f_t)} dt$$

on applique l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}_t}} \|T_{\phi_t}\xi_t\|^2_{L^2(H_1^t/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi^t\|^2_{L^2(H_1/B(\phi),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) dt \\ &= \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_\phi \xi\|^2_{L^2(H/B(\phi),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) \\ &= \|U(\xi)\|_2^2. \end{aligned}$$

Cas 4 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$, $Y \notin \mathfrak{h}$ mais $l_k \in \mathfrak{h}$ pour tout $k > j$.

Nous pouvons admettre que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{g}_1$. On pose $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$, $H' = \exp(\mathfrak{h}_1)$.

Comme $b_1 = Y$, les vecteurs $\{b_2, \cdots, b_r\}$ forment la base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}'$. En outre $1 \in L^H$, donc si $R' = (R_2, \cdots, R_k)$, si

$$\mathfrak{T}_s^{R',\mathfrak{B}'} = \prod_{j=2}^{k} \exp(R_j(T'))f_s, s \in \mathbb{R},$$

où $f_s = Ad^\star(\exp(sY))f$, alors

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = \cup_{s\in\mathbb{R}} \mathfrak{T}_s^{R',\mathfrak{B}'}.$$

Ecrivons ϕ_s pour les éléments de $\mathfrak{T}_s^{R',\mathfrak{B}'}$ et $\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'} = \mathfrak{T}_0^{R',\mathfrak{B}'}$. Rappelons que pour tout $\phi \in \Omega_f$,

$$Ad^\star(\exp(sY))\phi = \phi + sX^\star$$

(ici $X^\star$ désigne la forme linéaire qui vaut 0 sur $\mathfrak{g}_1$ et 1 sur un vecteur $X \in \mathfrak{g}$ pour lequel $f([X,Y]) = 1$). Comme pour $s \in \mathbb{R}, \phi_s = Ad^\star(\exp(sY))\phi$ pour un $\phi \in \mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'}$, nous voyons que

$$T_{\phi_s}\xi(h) = \int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi_s)\cap G_1/B(\phi_s)\cap B^{\phi_s}} \xi(h\exp(tY_1(\phi_s))u_1 R(T_{\phi_s}))$$
$$\chi_{\phi_s}(\exp(tY_1(\phi_s))u_1) d_{B(\phi_s),B^{\phi_s}}(u_1)dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi)\cap G_1/B(\phi)\cap B^{\phi}} \xi(h\exp(tY_1(\phi))u_1 R(T_\phi))\chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))u_1) d_{B(\phi),B^{\phi}}(u_1)dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_\phi(\exp(sY))e^{ist\phi([Y_1(\phi),Y])}$$

$$\left(\int_{B(\phi)\cap G_1/B(\phi)\cap B^{\phi}} \xi(h\exp(tY_1(\phi))u_1 R(T_\phi))\chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))u_1) d_{B(\phi),B^{\phi}}(u_1)\right) dt.$$

Alors, d'après Plancherel, comme $Y_1(\phi) = \alpha X_1(\phi)$, où $\alpha = |\phi([X_1(\phi), Y])|^{-\frac{1}{2}}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \|T_{\phi_s}\xi\|^2_{L^2(H/B(\phi_s),\phi_s)} ds = \frac{1}{|\alpha\phi([X_1(\phi),Y])|} \int_{H/B(\phi)} \int_{\mathbb{R}} | \int_{B'(\phi)/B'(\phi)\cap B^{\phi}}$$

$$\xi(h\exp(t\alpha X_1(\phi))u_1 R(T_\phi))\chi_\phi(u_1) d_{B(\phi),B^{\phi}}(\exp(tY_1(\phi))u_1)|^2 dt d_{H,B(\phi)}(h)$$
$$= \frac{1}{|\alpha^2\phi([X_1(\phi),Y])|} \int_{H'/B'(\phi)} |T'_\phi\xi(h')|^2 d_{H',B'(\phi)}(h') = \|T'_\phi\xi\|^2$$

d'après la définition de α. Ainsi

$$\|U(\xi)\|^2 = \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} \|T_\phi\xi\|^2_{L^2(H/B(\phi),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{T}_s^{R',\mathfrak{B}'}} \int_{H/B(\phi_s)} |T_{\phi_s}\xi(h)|^2 d_{H,B(\phi_s)}(h) d\lambda^{R',\mathfrak{B}'}(\phi_s) ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{T}_s^{R',\mathfrak{B}'}} \int_{H'/B'(\phi_s)} \int_{\mathbb{R}} |T_{\phi_s}\xi(h)|^2 d_{H',B'(\phi_s)}(h) dt d\lambda^{R',\mathfrak{B}'}(\phi_s) ds$$

$$= \int_{\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'}} \|T'_\phi \xi\|^2_{L^2(H'/B'(\phi),\phi)} d\lambda^{R',\mathfrak{B}'}(\phi) = \|\xi\|^2_{L^2(G/B,f)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ce qui termine la preuve du théorème **II-2.3**.

■

On va prouver maintenant que l'image de U est dense dans $\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi),\phi) d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$ et ceci fait l'object de:

II-2.4 Proposition

*On garde les hypothèses du théorème (***II-2.3***). L'image de l'opérateur U est dense dans* $\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi),\phi) d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$.

Preuve

On raisonne encore par récurrence sur $\dim G + \dim G/H$. On garde toutes les notations introduites dans le théorème (**II-2.3**) et on note dans toute la suite $\mathrm{im}(U)$ l'image de U.

Soit η un élément de $\mathrm{im}\,(U)^{\perp}$. Nous devons montrer que $\eta = 0$.

On rappelle que

$$\mathfrak{g}_1 = \{u \in \mathfrak{g} \text{ tel que } < f, [Y,u] >= 0\}$$

est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Soit $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$, on va étudier les cas possibles suivants:

Cas 1 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_1$.

On a alors que

$$\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} < T_\phi \xi, \eta(\phi) >_{L^2(H/B(\phi),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) = 0$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_t}} < T_{\phi_t} \xi, \eta(\phi_t) >_{L^2(H/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_t}(\phi_t) dt = 0.$$

Soit $\gamma \in S(\exp(\mathbb{R}X))$, on remplace ξ par $\gamma\xi$, où

$$(\gamma\xi)(\exp(tb_r) \cdot h_1) = \gamma(t)\xi(\exp(tb_r) \cdot g_1).$$

On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(t) \int_{\mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_t}} < T_{\phi_t}\xi_t, \eta(\phi_t) >_{L^2(H/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_t}(\phi_t)dt = 0.$$

Donc pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ on a que

$$\int_{\mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_t}} < T_{\phi_t}\xi_t, \eta(\phi_t) >_{L^2(H/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_t}(\phi_t) = 0$$

et ainsi d'après l'hypothèse de récurrence $\eta(\phi_t) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

Cas 2 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$, il existe $k > j$ tel que $l_{k'} \in \mathfrak{h}$ pour tout $k' > k$, mais $l_k \notin \mathfrak{h}$.

On pose $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}l_k$ et $H' = \exp(\mathfrak{h}')$. Comme $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = \mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'}$, comme $T_\phi\xi = T'_\phi\xi_{|H}$ et comme donc

$$\int^{\oplus}_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} L^2(H/B(\phi),\phi)d\lambda^{R,\mathfrak{B}} = \int^{\oplus}_{\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'}} L^2(H'/B'(\phi),\phi)d\lambda^{R',\mathfrak{B}'},$$

l'hypothèse de récurrence pour H' nous permet de conclure.

Cas 3 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$, $l_k \in \mathfrak{h}, k > j$, et $Y \in \mathfrak{h}$.

On pose $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ et $H_1 = \exp(\mathfrak{h}_1)$. Utilisant toujours les notations de 3.3 Cas 3, nous voyons que

$$\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} < T_\phi\xi, \eta(\phi) >_{L^2(H/B(\phi),\phi)} d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi) = 0$$

pour tout $\xi \in L^2(G/B, f)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_t}} < T_{\phi_t}\xi_t, \eta(\phi_t) >_{L^2(H_1/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_t}(\phi)dt = 0.$$

Soit $\gamma \in S(\exp(\mathbb{R}X))$, on remplace ξ par $\gamma\xi$ et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(t) \int_{\mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_t}} < T_{\phi_t}\xi_t, \eta(\phi_t) >_{L^2(H_1/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_t}(\phi)dt = 0.$$

Donc on a pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ que

$$\int_{\mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_t}} < T_{\phi_t}\xi_t, \eta(\phi_t) >_{L^2(H_1/B(\phi_t),\phi_t)} d\lambda^{R_t,\mathfrak{B}_t}(\phi)dt = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on trouve que $\eta(\phi_t) = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, et donc $\eta = 0$.

Cas 4: $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_1$, $l_k \in \mathfrak{h}, k > j$, et $Y \notin \mathfrak{h}$.

On pose $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$, $H' = \exp(\mathfrak{h}')$. Quite à changer $Y_1(\phi)$ en y ajoutant un élément de $\mathfrak{a}(f)$, nous pouvons supposer que $f(Y_1(\phi)) = 0$. Alors d'après (**II-2.3**), Cas 4,

$$\int_{\mathbb{R}} < T_{\phi_s}\xi, \eta(\phi_s) >_{L^2(H/B(\phi_s),\phi_s)} ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{H/B(\phi)} e^{-ist\alpha\phi([X_1(\phi),Y])} \chi_\phi(\exp(tY_1(\phi)))$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{B(\phi)\cap G_1/B(\phi)\cap B^\phi} \xi(h\exp(tY_1(\phi))u_1 R(T_\phi))\chi_\phi(u_1) d_{B(\phi),B^\phi}(u_1)dt\right)$$

$$\cdot\overline{\eta(\phi_s)(h)} d_{H,B(\phi)}(h)ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{H/B(\phi)} \left(\int_{B(\phi)\cap G_1/B(\phi)\cap B^\phi} \xi(h\exp(tY_1(\phi)u_1 R(T_\phi))\chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))u_1) d_{B(\phi),B^\phi}(u_1)\right)$$

$$\cdot\overline{q(\phi)(h\exp(tY_1(\phi))} d_{H,B(\phi)}(h)dt$$

$$\left(\text{où } q(\phi)(h\exp(tY_1(\phi)) = \int_{\mathbb{R}} \eta(\phi_s)(h)e^{-ist\alpha^2} ds,\ h \in H, t \in \mathbb{R},\right)$$

$$=< T'_\phi\xi, q(\phi) >_{L^2(H'/B'(\phi),\phi)}.$$

Donc pour tout $\xi \in S(G/B, f)$, on a que

$$0 =< U(\xi), \eta >= \int_{\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'}} < T'_\phi\xi, q(\phi) >_{L^2(H'/B'(\phi),\phi)} d\lambda^{R',\mathfrak{B}'}(\phi),$$

nous permet de conclure grâce à l'hypothèse de récurrence que

$$\int^{\oplus}_{\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'}} L^2(H'/B'(\phi),\phi)d\lambda^{R',\mathfrak{B}'} \ni q = 0,$$

et donc aussi que $\eta = 0$.

■

II-3 L'opérateur inverse

Nous allons brièvement indiquer comment on peut décrire l'opérateur inverse V de U. Nous devons utiliser une base coexponentielle $\mathfrak{E} = \{e_1, \cdots, e_c, f_{c+1}, \cdots, f_d\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à B,

c.à d une base telle que l'application

$$\mathbb{R}^d \mapsto G/B; (t_1, \cdots, t_d) \to \exp(t_d f_d) \cdots \exp(t_1 e_1) \cdot B$$

soit un difféomorphisme bipolynomial qui respecte les mesures. En outre $\mathfrak{F}= \{f_{c+1}, \cdots, f_d\}$ est contenu dans $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{E}_1 = \{e_1, \cdots, e_c\}$ est choisie dans $\mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{b} + \mathfrak{h})$.

Nous déterminerons cette base par récurrence sur dim (G) + dim(G/H).

Cas E-1

Soit $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ déterminée par l'hypothèse de récurrence pour $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h})$. Posons $\mathfrak{E} = \{e_1'\} \cup \mathfrak{E}_1$ où $e_1' \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_1$ bien choisi .

Cas E-2

Ici il suffit de prendre $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$, où $\mathfrak{E}'$ est déterminé par l'hypothèse de récurrence pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathbb{R}l_k)$.

Cas E-3

Nous prenons $\mathfrak{E}' = \{e_1, \cdots, e_c, f_{c+2}, \cdots f_d\} \subset \mathfrak{g}_1$, déterminée par l'hypothèse de récurrence pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1)$ et nous y ajoutons $f_{c+1} = l_1 \in \mathfrak{h}$.

Cas E-4

Il suffit de prendre $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$, où $\mathfrak{E}'$ est obtenue pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathbb{R}l_j)$.

Ecrivons pour chaque $T_0 = (t_1, \cdots, t_c) \in \mathbb{R}^c$

$$E(T_0) = \prod_{i=c}^{1} \exp(t_i e_i)$$

et définissons par récurrence sur dim (G) + dim (G/H) pour chaque T_0 une partie fermée $R^0(T_0)$ de G et une mesure $d\lambda^{T_0}$ sur $R^0(T_0)$ telle que

$$R(\mathbb{R}^k) = \dot{\bigcup_{T_0 \in \mathbb{R}^c}} R^0(T_0) \cdot E(T_0)$$

et telle que

$$d\lambda^{R,\mathfrak{B}} = d_{T_0} \otimes d\lambda^{T_0}$$

où d_{T_0} est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^c$

Cas E-1

Nous avons $R(\mathbb{R}^k) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} R_t(\mathbb{R}^k)$. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux R_t pour $T_0^t = (t_2, \cdots, t_c) \in \mathbb{R}^{c-1}$.

Cas E-2

On prend $R^0(T_0)$ e.c. obtenu pour (G, H').

Cas E-3

On prend $R^0(T_0)$ e.c. obtenu pour (G_1, H_1).

Cas E-4

On a que $R(t_1, t_2, \cdots) = \exp(t_1 Y) \cdot R'(t_2, \cdots)$. Nous obtenons pour tout T_0 nos objets $R'^0(T_0)$ et $d\lambda'^{T_0}$ de la façon suivante. Il suffit d'écrire $R^0(T_0) = \exp(\mathbb{R}Y) \cdot R'^0(T_0)$ et $d\lambda^{T_0} = d\lambda'^{T_0} \otimes \beta ds$, où $\beta = (f, [l_1, Y])^{-1}$.

Utilisons la notation suivante. Désignons par

$$S(\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}) = \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} S(H/B(\phi), \phi) d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$$

l'espace des applications continues

$$K : \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} \mapsto \bigcup_{\phi} S(H/B(\phi), \phi); K(\phi) \in S(H/B(\phi), \phi), \forall \phi,$$

qui sont contenues dans $\int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}^{\oplus} L^2(H/B(\phi), \phi) d\lambda^{R,\mathfrak{B}}(\phi)$.
Posons pour $K \in S(\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}), T_0 = (t_1, \cdots, t_c)$,

$$V(K)\Big(\exp(s_d f_d) \cdots \exp(s_{c+1} f_{c+1}) \exp(t_c e_c) \cdots \exp(t_1 e_1) \cdot b\Big)$$

$$= \chi_f(b^{-1}) \int_{R^0(T_0)} K(Ad^\star(S) Ad^\star(E(T_0)) f)(\exp(s_d f_d) \cdots \exp(s_{c+1} f_{c+1})) d\lambda^{T_0}(S), \quad (30)$$

pour tout $t_1, \cdots, t_c, s_{c+1}, \cdots, s_d \in \mathbb{R}, b \in B$.

II-3.2 Proposition

Pour tout $K \in S(\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}), V(K) \in L^2(G/B,f)$ *et* $\|V(K)\|_{L^2(G/B,f)} = \|K\|_2$. *En plus,*

$$V \circ U = Id_{L^2(G/B,f)}.$$

V est alors un nouvel opérateur linéaire d'entrelacement isométrique de (29).

Preuve

Nous démontrons ici seulement l'égalité $V \circ U = Id_{L^2(G/B,f)}$. On en déduit facilement que V est une isométrie.

Nous procédons comme toujours par une récurrence sur $\dim G + \dim G/H$ et nous utiliserons les notations de la preuve de **(II-2.3)**.

Cas E-1

Rappelons que $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}_{|\mathfrak{g}_1} = \cup_t \mathfrak{T}^{R_t,\mathfrak{B}_t}$. En outre pour $\xi \in S(G/B,f), g_1 \in G_1, t \in \mathbb{R}$,

$$V \circ U(\xi)(g_1 \cdot \exp(tl_1)) = V_t \circ U_t(\xi_t)(g_1) = \xi_t(g_1) = \xi(g_1 \cdot \exp(tl_1)),$$

où U_t désigne l'opérateur d'entrelacement défini pour $(G_1, \mathfrak{h})$ et $Ad^*(\exp(tl_1))f|\mathfrak{g}_1$ et où

$$V_t : S(\mathfrak{T}^{R_t,B_t}) \mapsto L^2(G_1/B, f_1)$$

est l'opérateur inverse de U_t d'après l'hypothèse de récurrence.

Cas E-2

Comme $U'(\xi)_{|H} = U(\xi)$ pour $\xi \in S(G/B,f)$, et comme $V(K) = V'(K')$ pour tout $K \in S(\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}), K' \in S(\mathfrak{T}^{R',\mathfrak{B}'})$ tels que $K'(\phi)_{|H} = K(\phi), \phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, on voit que

$$V \circ U = V' \circ U' = Id_{L^2(G/B,f)}.$$

Cas E-3

Soit U_1 l'opérateur défini pour (G_1, H_1). Alors pour $\xi \in S(G/B,f), K \in S(\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}})$ on a que $U(\xi)_t = U_1(\xi_t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et si V_1 désigne l'opérateur inverse de U_1, alors $V_1(K_t) = V(K)_t$. Ici K_t est defini par

$$K_t(\phi)(g_1) = K(\phi)(\exp(tl_1) \cdot g_1),\ g_1 \in G_1, \phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}.$$

Ainsi $V \circ U(\xi)(g_1 \cdot \exp(tl_1)) = V_1 \circ U_1(\xi_t)(g_1) = \xi_t(g_1) = \xi(g_1 \cdot \exp(tl_1))$.

Cas E-4

Comme pour $\xi \in S(G/B, f)$,

$$U(\xi)(\phi_s)(h) = \int_{\mathbb{R}} U'(\xi)(\phi)(h \exp(rY_1(\phi)))\chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))e^{-isr\phi([Y_1(\phi),Y])}dr$$

et comme $V = \int_{\mathbb{R}} V'_s ds$, où V'_s désigne l'opérateur inverse de U'_s associé à (G, H') et ϕ_s, nous voyons que

$$V \circ U(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1) = \int_{\mathbb{R}} V'_s \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-isr\phi([Y_1(\phi),Y])} U'(\phi)(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1 \exp(rY_1(\phi)))\chi_\phi(\exp(tY_1(\phi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} V' \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-isr} U'(\phi)(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1 \exp(rY_1(\phi)))\chi_\phi(\exp(tY_1(\phi))dr \right) ds$$

$$= V' \circ U'(\xi)(\exp(tl_1) \cdot g_1) = \xi(\exp(tl_1) \cdot g_1).$$

Ici U' désigne l'opérateur défini pour (G, H', f).

■

II-4 Opérateur d'entrelacement pour le produit tensoriel de représentations irréductibles.

II-4.1 Désintégration du produit tensoriel

Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent. Soient $\pi_j (j = 1, 2)$ deux représentations unitaires et irréductibles de G associées à deux formes linéaires f_1, f_2. Les orbites coadjointes de f_1 et f_2 seront notées par la suite par Ω_1 et Ω_2. Le produit de Kronecker extérieur de π_1 et de π_2, noté $\pi_1 \times \pi_2$, correspond à la $G^2 = G \times G$ orbite $\Omega(\pi_1 \times \pi_2) = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathfrak{g}^\star \oplus \mathfrak{g}^\star$. On identifie G au sous groupe $\Delta_G = \Delta$ de G^2 constitué par les éléments diagonaux.

L'application de Kirillov-Bernat $\theta_G : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \hat{G}$ induit un isomorphisme topologique de l'espace des orbites $\mathfrak{g}^\star/G$ sur $\hat{G}$.

Soit $p : \mathfrak{g}^\star \oplus \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathfrak{g}^\star$ l'application restriction et $\nu = (\theta_G \circ p)_\star(\mu)$, où μ désigne la mesure G^2 invariante sur l'orbite $\Omega_1 \times \Omega_2$. Alors il est clair que

$$(\pi_1 \times \pi_2)|_{\Delta_G} = \pi_1 \otimes \pi_2,$$

et ainsi d'après [13] et [28]

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m_\pi \pi d\nu(\pi) \simeq \int_{\Omega_1 \times \Omega_2 / \Delta_G}^{\oplus} \sigma_{p(l,k)} d\dot{\mu}(l,k) \tag{31}$$

où $m(\pi)$ est le nombre des $G-$orbites incluses dans $\Omega_1 \times \Omega_2 \cap p^{-1}(\Omega(\pi))$.

II-4.2 Notation et choix des bases:

On pose $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, $\Delta_\mathfrak{g}$ la sous algèbre de $\mathfrak{g}^2$ constituée par les éléments diagonaux. On note $\Pi = \pi_1 \times \pi_2$ et $\Omega_\Pi = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathfrak{g}^\star \oplus \mathfrak{g}^\star$.

On part d'une base de Jordan-Hölder $\mathfrak{D} = (l_1, \cdots, l_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que l_n soit central. L'algèbre de Lie de $\Delta_\mathfrak{g}$ possède comme base les vecteurs

$$\bar{l_1} = (l_1, l_1), \cdots, \bar{l_n} = (l_n, l_n).$$

A partir de la suite de Jordan-Hölder $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}$, on considère la base $\mathfrak{C}$ de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^2$

$$\mathfrak{C} = \Big((0, l_1), (l_1, 0), \cdots, (0, l_n), (l_n, 0)\Big),$$

on fait fonctionner l'algorithme décrit dans le paragraphe **(II-1.3)** pour obtenir à partir de $\mathfrak{C}$ la base de Jordan-Hölder de $\Delta_\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{D} = (\bar{l_1}, \cdots, \bar{l_n}), \tag{32}$$

et la base de Malcev relative à $\Delta_\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{B} = \Big(b_1 = (l_n, 0), \cdots, b_n = (l_1, 0)\Big). \tag{33}$$

On pose alors

$$\Delta_\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_1^2 \subset \mathfrak{g}_2^2 \subset .... \subset \mathfrak{g}_n^2 = \mathfrak{g}^2,$$

où les sous-algèbres $\mathfrak{g}_i^2$ sont construites de la manière suivante: pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ on pose

$$\mathfrak{g}_i^2 = \Delta_\mathfrak{g} \oplus \sum_{k=1}^{i} \mathbb{R} b_k, \tag{34}$$

Soit encore G_i^2 le sous groupe de G^2 associé à la sous-algèbre $\mathfrak{g}_i^2$.

Rappelons que L^{Δ_G} est par définition l'ensemble des i dans $\{1,\cdots,n\}$ tels que la G_i^2-orbite de $(f_1,f_2)_{|\mathfrak{g}_i^2}$ est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_{i-1}^2$. Ainsi $i\in L^{\Delta_G}$ si et seulement s'il existe $U\in\mathfrak{g}_i^2$ tel que $ad^\star(U)(f_1,f_2)=0$ sur $\mathfrak{g}_{i-1}^2$ et $ad^\star(U)(f_1,f_2)(b_i)=1$.

Ecrivons $U=(X+X_i,X)$ avec $X\in\mathfrak{g}$ et $X_i\in\mathfrak{g}_i=\sum_{j=n}^{n-i+1}\mathbb{R}l_j$. Alors si $0<n-i+1<j$ on a que

$$ad^\star(X+X_i)f_1+ad^\star(X)f_2=0 \text{ et } ad^\star(X+X_i)f_1(l_j)=0,$$

et en plus $ad^\star(X+X_i)f_1(l_{n-i+1})=1$. Ainsi

$$L^{\Delta_G}=\left\{i\in\{1,\cdots,n\}\mid ad^\star\left(\mathfrak{g}(f_{|\mathfrak{g}_{i-1}})\setminus\mathfrak{g}(f_{|\mathfrak{g}_i})\right)(f_1+f_2)\cap ad^\star(\mathfrak{g}_i)f_1\neq 0\right\}. \tag{35}$$

Soit $R_0=0, R_j(t_1,\cdots,t_k)=0$ si $j\notin L^{\Delta_G}$ et $R_{j_i}(t_1,\cdots,t_k)=t_i$, si $j_i\in L^{\Delta_G}$,$(j=1,\cdots,k=\text{card}(L^{\Delta_G}))$ et soit

$$R(T)=\Big(\prod_{j=1}^{n}Ad^\star(\exp(R_j(T)b_j))f_1,f_2\Big), T\in\mathbb{R}^k.$$

Alors la partie $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ de Ω_{f_1,f_2} définies dans (**II-1.3**) est ici l'ensemble

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}=\left\{\Big(Ad^\star(R(T))f_1,f_2\Big),\ T\in\mathbb{R}^k\right\}=\Big(Ad^\star(R(\mathbb{R}^k))f_1,f_2\Big). \tag{36}$$

Il nous reste à écrire l'opérateur d'entrelacement, commençons par prouver ce Lemme:

Lemme:

Soient B_1 et B_2 les polarisations de Vergne en f_1 et f_2 relative à la base $\mathfrak{D}$, alors $B=B_1\times B_2$ est la polarisation de Vergne en (f_1,f_2) relative à la base $\mathfrak{C}$.

Preuve :

Ceci découle immédiatement du fait que pour tout $i,j\in\{1,\cdots,n\}$

$$\mathfrak{g}_i(f_{1|\mathfrak{g}_i})\times\mathfrak{g}_j(f_{2|\mathfrak{g}_j})=(\mathfrak{g}_i\times\mathfrak{g}_j)\Big((f_1,f_2)_{|\mathfrak{g}_i\times\mathfrak{g}_j}\Big).$$

■

On sait que l'espace de la représentation $\pi_1\otimes\pi_2$ est l'espace

$$L^2(G/B_1,f_1)\otimes L^2(G/B_2,f_2)=L^2\Big(G\times G/B_1\times B_2,(f_1,f_2)\Big)$$

et donc pour $\phi = (\phi_1, f_2) = (R(T)f_1, f_2) \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ on obtient

$$U(\xi)((\phi_1, f_2))(x) = \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap B^\phi} \xi(xuR(T), xu)\chi_{\phi_1+f_2}(u)d_{B(\phi),B^\phi}(u),\ x \in G.$$

Nous remarquons que le produit tensoriel $\pi_{f_1} \otimes \pi_{f_2}$ se décompose en une intégrale où interviennent seulement les représentations associées aux formes linéaires $\phi_1 + f_2$, où $\phi_1 \in Ad^\star(R(\mathbb{R}^k))f_1$.

II-4.3-Exemples

1)

Prenons d'abord le groupe de Heisenberg $H_1 = \mathbb{R}^3$ avec la multiplication

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)).$$

Soit $\mathfrak{D} = \{X, Y, Z\}$ la base usuelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1$ de H_1, telle que $[X, Y] = Z$.

Alors $\mathfrak{C} = \{(X,0),(0,X),(Y,0),(0,Y),(Z,0),(0,Z)\}$ et $\mathfrak{B} = \{(Z,0),(Y,0),(X,0)\}$. Déterminons L^Δ pour $\pi = \pi_\lambda \otimes \pi_\mu$, où π_λ et π_μ sont les deux représentations irréductibles de H_1 associées aux deux formes linéaires non nulles $\lambda = (0, 0, \lambda)$ et $\mu = (0, 0, \mu)$ de $\mathfrak{h}_1$.

Supposons d'abord que $\lambda + \mu \neq 0$. Nous voyons que 1 n'est pas dans L^Δ, car sinon on devrait avoir $ad^\star(U)\lambda(Z) = 1$, pour un $U \in \mathfrak{h}_1$, ce qui est impossible. Si $2 \in L^\Delta$, il faudrait que $ad^\star(U + \beta Y)(\lambda) + ad^\star(U)(\mu) = 0$ et $ad^\star(U + \beta Y)(\lambda)(Y) = 1$, pour un $\beta \in \mathbb{R}$ et $U \in \mathfrak{h}_1$. Mais alors

$$ad^\star(U)(\lambda + \mu)(Y) = -ad^\star(\beta Y)(\lambda)(Y) = 0$$

et aussi

$$ad^\star(U)(\lambda)(Y) = 1$$

ce qui est impossible, comme $\lambda + \mu \neq 0$. Par contre l'indice 3 est dans L^Δ, il suffit de prendre U et V dans $\mathfrak{h}_1$, tels que

$$ad^\star(U + V)\lambda = X^\star = -ad^\star(U)\mu \quad \text{où } X^\star = (1, 0, 0) \in \mathfrak{h}_1^\star.$$

Ces conditions déterminent U et V de façon unique modulo $\mathbb{R}Z$.

Nous pouvons donc prendre pour $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ la partie

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = \Big(Ad^\star(\exp \mathbb{R}X)\lambda, \mu\Big) = (\lambda + \mathbb{R}Y^\star, \mu),$$

où $Y^\star = (0,1,0) \in \mathfrak{h}_1^\star$. Ceci nous donne pour tout $s \in \mathbb{R}, g \in H_1$, pour tout $\xi \in L^2(\mathbb{R}^2) = \mathcal{H}_{\pi_\lambda \otimes \pi_\mu}$,

$$U(\xi)((\lambda - s\lambda Y^\star, \mu)(g) = \xi(g \exp(sX), g),$$

comme pour tout $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, $B(\phi) = \text{vect}(Y,Z)$ et $B(\phi) \cap B^\phi = B(\phi)$.

Si $\lambda + \mu = 0$, alors 2 et 3 sont dans L^Δ. Alors

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = (\lambda + Z^\perp, -\lambda),$$

et pour tout $\phi \in \mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$, $B(\phi) = \mathfrak{h}_1$. Alors pour $s,t \in \mathbb{R}, g \in H_1$,

$$U\xi(t\lambda X^\star - s\lambda Y^\star)(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp((u+t)X), g \cdot \exp(uX)) e^{i\lambda(s(t-u))} du.$$

2)

Prenons comme deuxième exemple le groupe

$$G = \{ (a_{i,j}) \,|\, a_{i,j} \in \mathbb{R}, a_{i,i} = 1, a_{i,j} = 0, i > j, 1 \leq i,j \leq 5\}$$

des matrices carrées d'ordre 5 triangulaires supérieures. Prenons comme base $\mathfrak{D}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G la partie $\mathfrak{D} = \{E_{i,j} \,|\, i < j\}$ de $\mathfrak{g}$ formée par les matrices élémentaires $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{k,l}$. Identifions l'espace dual de $\mathfrak{g}$ avec l'espace $\mathfrak{T}i$ des matrices carrées d'ordre 5 triangulaires inférieures strictes à l'aide de

$$(A,B) \to tr(A \cdot B)\ , A \in \mathfrak{g}, B \in \mathfrak{T}i.$$

Alors la base duale $\mathfrak{D}^\star$ de $\mathfrak{D}$ est formée par les vecteurs $\mathfrak{D}^\star = \{ E_{i,j} | \, i > j\}$

Prenons maintenant pour formes linéaires $f_1 = E_{5,1}$ et $f_2 = E_{4,2}$. Alors

$$ad^\star(\mathfrak{g})f_1 = \text{vect}\{E_{2,1}, E_{3,1}, E_{4,1}, E_{5,2}, E_{5,3}, E_{5,4}\}$$

et

$$ad^\star(\mathfrak{g})f_2 = \text{vect}\{E_{3,2}, E_{4,3}\}.$$

Ainsi $ad^\star(\mathfrak{g})f_1 \cap ad^\star(\mathfrak{g})f_2 = (0)$ et alors $L^\Delta = \emptyset$, d'après (35). Ainsi $\pi_{f_1} \otimes \pi_{f_2} \simeq \pi_{f_1+f_2}$ est irréductible.

Cet exemple a été suggéré par Corwin et Greenleaf dans [13].

II-5 Exemples .

II-5.1

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension 4 avec la base (X,U,Y,Z) et les crochets non nuls $[X,U]=Y,[X,Y]=Z$. On désigne par G le groupe de Lie associé, on pose $f=Z^\star$ et $\mathfrak{h}$ la sous algèbre de Lie engendrée par (X,Z). Soit $H=\exp(\mathfrak{h})$.

La polarisation B_0 construite suivant le procédé (**II-2.1,A**) en $f=Z^\star$ est dans cet exemple $B_0=(U,Y,Z)$ et la base de Malcev $\mathfrak{B}$ relative à $\mathfrak{h}$ est formée des vecteurs

$$\mathfrak{B}=\{Z,Y,U\}.$$

Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}=\{\exp(tY)f,t\in\mathbb{R}\}=\{Z^\star+tX^\star,t\in\mathbb{R}\}.$$

En outre

$$U(\xi)(\exp(yY)f)(\exp(zZ)\cdot\exp(xX))=e^{-iz}e^{ixy}\hat{\xi}(y)$$

pour tout $\xi\in L^2(G/B_0,f)\simeq L^2(\mathbb{R},f)$.

L'opérateur inverse U^{-1} est donné pour tout $K\in L^2(\mathbb{R})$ et $g_0\in B_0$ par

$$U^{-1}(K)(\exp(xX)g_0)=\chi_f^{-1}(g_0)\int_{\mathbb{R}}K(\exp(yY)f)(e)e^{-ixy}dy.$$

II-5.2

Supposons maintenant que $\mathfrak{h}=(U,Z)$. La base $\mathfrak{B}$ devient alors $\{Y,X\}$ et $L^\Delta=\{2\}$. Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}=\{\exp(tX)f,t\in\mathbb{R}\},$$

et donc

$$U(\xi)(\exp(xX)f)(\exp(zZ)\cdot\exp(uU))=e^{-iz}e^{-i\frac{x^2u}{2}}\xi(\exp(xX)).$$

pour tout $\xi\in L^2(G/B_0,f)\simeq L^2(\mathbb{R},f)$.

L'opérateur inverse U^{-1} est donné pour tout $K\in(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus}\mathbb{C}dt)_C$ et $g_0\in B_0$ par

$$U^{-1}(K)(\exp(xX)g_0)=\chi_f^{-1}(g_0)K(\exp(xX)f)(e).$$

II-5.3

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension 5, donnée par la base $(X_1, \cdots, X_5)$ et les crochets non nuls $[X_5, X_4] = X_3, [X_5, X_3] = X_2, [X_5, X_2] = X_1$. On désigne par G le groupe de Lie associé, on pose $f = X_1^\star$ et $\mathfrak{h}$ la sous algèbre de Lie engendrée par le vecteur (X_2). Soit $H = \exp(\mathfrak{h})$.

La polarisation B_0 construite suivant le procédé (**II-2.1,A**) en $f = Z^\star$ est dans cet exemple $B_0 = (X_1, \cdots, X_4)$ et la base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{B} = \{X_1, X_3, X_4, X_5\}.$$

Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = \{\exp(x_5 X_5)f, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Soit π la représentation correspondante à $X_1^\star$ et χ_λ le caractère de $\hat{H}$ définit par

$$\chi_\lambda(\exp(tX_2)) = e^{2i\pi\lambda t},$$

alors on a que

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_\lambda d\lambda.$$

On a que

$$U(\xi)(\exp(x_5 X_5)f)(\exp(x_2 X_2)) = e^{ix_2x_5}\hat{\xi}(\exp(x_5 X_5))$$

pour tout $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$.

L'opérateur inverse U^{-1} est donné pour tout $K \in (\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}dt)_C$ et $g_0 \in B_0$ par

$$U^{-1}(K)(\exp(x_5 X_5)g_0) = \chi_f^{-1}(g_0)K(\exp(x_5 X_5)f)(e).$$

II-5.4

Supposons maintenant que $\mathfrak{h} = \text{vect}(X_5, X_1)$ et la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \text{vect}(X_1, X_5) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_2) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_2, X_3) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_2, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

On a alors que

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} \simeq \{\exp(x_2 X_2)f, x_2 \in \mathbb{R}\} \simeq \{X_1^\star + x_2 X_5^\star, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

et que

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{X_1^\star + \lambda X_5^\star} d\lambda$$

où $\chi_{X_1^\star+\lambda X_5^\star}$ est le caractère défini sur $\mathfrak{h}$. On a que

$$U(\xi)(\exp(x_2X_2)f)(\exp(x_1X_1)\exp(x_5X_5)) = e^{-ix_1}e^{ix_2x_5}\hat{\xi}(\exp(x_2X_2))$$

pour tout $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$.

L'opérateur inverse U^{-1} est donné pour tout $K \in (\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathbb{C}dt)_C$ et tout $g_0 \in B_0$ par

$$U^{-1}(K)(\exp(x_5X_5)g_0) = \chi_f^{-1}(g_0)\int_{\mathbb{R}} K(\exp(x_2X_2)f)(e)e^{-ix_2x_5}dx_2.$$

II-5.5

Supposons maintenant que $f = X_1^\star + X_3^\star$ et $\mathfrak{h} = (X_5, X_2, X_1)$, soit la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_3) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

Nous voyons que $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = \{f\}$ il en résulte que $\pi_{|H}$ est irréductible. Le théorème (**II-2.3**) nous oblige de prendre la polarisation $B_1 = \text{vect}(X_1, X_2)$ dans $\mathfrak{h}$ en f.

L'opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(f)(\exp(x_1X_1)\exp(x_2X_2)\exp(x_5X_5)) = e^{-ix_1}e^{ix_2x_5}\xi(\exp(x_5X_5))$$

pour tout $\xi \in L^2(G/B_0, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$.

L'opérateur inverse U^{-1} est donné pour tout $K \in L^2(H/B_1)$ et tout $g_0 \in B_0$ par

$$U^{-1}(K)(\exp(x_5X_5)g_0) = \chi_f^{-1}(g_0)K(f)(\exp(x_5X_5)).$$

II-5.6 Contre exemple.

On va montrer finalement dans cet exemple que le choix de la base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ doit être nécessairement comme dans (**II-1.3**). On reprend toujours l'exemple précédent, $\mathfrak{h}$ étant la sous algèbre de Lie engendrée par le vecteur central (X_1). Soit $H = \exp(\mathfrak{h})$.

Prenons la suite suivante de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2, X_3) \subset \text{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

Relativement à cette base, on a que

$$\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}} = \{\exp(tX_2)f, t \in \mathbb{R}\} = \{X_1^\star + tX_5^\star, t \in \mathbb{R}\}.$$

Avec cette base, notre opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(\exp(x_2X_2)f)(\exp(x_1X_1)) = e^{-ix_1}\xi(e)$$

pour tout $\xi \in L^2(G/B_1, f) \simeq L^2(\mathbb{R}, f)$. Donc U ne peut pas être une isométrie.

II-5.7 Contre exemple.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs X, P, Y, Q, Z, A, B avec les crochets

$$[X, Y] = [P, Q] = [A, B] = Z.$$

Soit $\mathfrak{h} = \text{vect}(X, P, Y, Q, Z), f = Z^\star$, et soit $\mathfrak{C} = \{B, A, X, Y, P, Q, Z\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Donc la base de Jordan-Hölder associée à $\mathfrak{h}$ décrit dans l'algorithme (**II-1.3**) est $\mathfrak{C}' = \{X, Y, P, Q, Z\}$ et la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ est $(\mathfrak{h}, \mathbb{R}A, \mathbb{R}B)$. Il est clair que les $G-$orbites en position générale sont saturées par rapport à la sous-algèbre $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}A$, il en résulte que la partie $\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}$ est isomorphe à

$$\{\exp(bB)f,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

La polarisation B_0 construite suivant le procédé (**II-2.1,A**) en $f = Z^\star$ est dans cet exemple $B = \text{vect}(A, Y, Q, Z)$, et la polarisation qu'on doit prendre dans $\mathfrak{h}$ en f est $\text{vect}(Y, Q, Z)$.

Notre opérateur d'entrelacement est alors donné pour tout $\xi \in S(G/B_0, f)$ et $h \in H$ par

$$U(\xi)(\exp(bB)f)(h) = \xi(h\exp(bB)).$$

Vérifions qu'on a bien un opérateur d'entrelacement:

$$\begin{aligned}\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} \int_{H/B(\phi)} |U(\xi)(\exp(bB)f)(h)|^2 d_{H,B(\phi)}(\dot{h}) d\lambda^{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}(\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi(\exp(xX)\exp(pP)\exp(bB))|^2 dx dp db \\ &= \|\xi\|^2_{L^2(G/B)}.\end{aligned}$$

D'autre part, en écrivant $G = \exp(\mathbb{R}B)\cdot\exp(\mathbb{R}X)\cdot\exp(\mathbb{R}P)\cdot B_0$, l'opérateur inverse U^{-1} est donné pour tout $K \in \int^{\oplus}_{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}} L^2(H/B(\phi)) d\lambda^{\mathfrak{T}^{R,\mathfrak{B}}}(\phi)$ et tout $g_0 \in B_0$ par

$$U^{-1}(K)(\exp(bB)\cdot\exp(xX)\cdot\exp(pP)\cdot g_0) = \chi_f^{-1}(g_0)K(\exp(bB)f)(\exp(xX)\cdot\exp(pP)).$$

On va montrer maintenant que le choix de la polarisation B est important. Prenons par exemple la polarisation vect(Y, Q, Z, B) en f, l'opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(\exp(bB)f)(h) = \xi(h\exp(bB)) = \xi(h)$$

pour tout $\xi \in L^2(G/B, f)$ et $h \in H$. Cet opérateur ne dépend pas de b, donc il ne peut pas être une isométrie.

Chapitre III

SUR LE CORTEX DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

Soit G un groupe localement compact et π une représentation continue de G sur un espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{V}$. On dit qu'un point $v \in \mathfrak{V}$ (respectivement sa $G-$orbite $\Omega = \pi(G)v$) est infiniment petit par rapport à l'action de G, s'il ne peut pas exister deux voisinages $G-$invariants disjoints de 0 et de v.

Autrement dit, en terme de l'espace des orbites $\mathfrak{V}/\pi(G)$ sous l'action π de G équipé de la topologie canonique quotient, v est infiniment petit par rapport à l'action de G si $\Omega = \pi(G)v$ et $\Omega_0 = \{0\}$ ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff dans $\mathfrak{V}/\pi(G)$.

L'ensemble des éléments infiniment petits de $\mathfrak{V}$ par rapport à l'action de G s'appelle le $\pi-$cortex de 0, ou plus simplement le $\pi-$cortex, et il se note $\mathrm{Cor}_\pi(\mathfrak{V})$.

Manifestement $v \in \mathrm{Cor}_\pi(\mathfrak{V})$ si et seulement s'il existe des suites $\{v_k\}_k \subset \mathfrak{V}$ et $\{g_k\}_k \subset G$ telles que $\lim v_k = 0$ et $\lim \pi(g_k)v_k = v$.

Si G est un groupe de Lie nilpotent et π est une représentation unipotente de G, on définit le cortex des invariants de π et on le note $I\mathrm{Cor}_\pi(\mathfrak{V})$ l'ensemble

$$\{v \in \mathfrak{V} : \ P(0) = P(v) \text{ pour tout polynôme } G-\text{invariant sur } \mathfrak{V}\}.$$

Il est clair qu'on a toujours

$$\mathrm{Cor}_\pi(\mathfrak{V}) \subset I\mathrm{Cor}_\pi(\mathfrak{V}). \tag{37}$$

Dans la littérature (cf. [41]) le cortex a été défini autrement:

soit G un groupe localement compact et $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréducible de G. $\hat{G}$, équipé de sa topologie usuelle, s'appelle l'espace dual de G (nous allons décrire cette topologie plus tard). En général, $\hat{G}$ est loin d'être un espace de Hausdorff. Le cortex de G, Cor (G), est l'ensemble fermé de toutes les représentations $\pi \in \hat{G}$ qui ne peuvent pas être séparées au sens de Hausdorff de la représentation triviale 1_G of G.

Si G est nilpotent, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'homomorphisme de Kirillov nous permet de dire que les deux définitions ci-dessus coïncident, mais dans le cas général il n'est pas clair que ces deux définitions sont liées.

Il est bien connu que la topologie des voisinages de 1_G est reliée à la structure du groupe G. Vershik et Karpushev [41] ont établi des connections entre la cohomologie de G pour les espaces des représentations unitaires et le cortex. Boidol, Ludwig et Müller [7] ont étudié le cortex des groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexe qui sont un produit semi-direct de la forme $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$. Dans [6] M. Bekka and E. Kaniuth ont étudié cet ensemble pour différentes classes de groupes.

Très récemment, Annette Markfort a étudié le cortex des groupes nilpotents de pas deux qui ne contiennent pas des éléments compacts non-triviaux. En particulier, elle a montré que dans ce cas le cortex coïncide avec le support de la représentation de conjugaison qui sera définie plus tard.

III-1 Généralités

On introduit d'abord quelques notations. Soit G un groupe localement compact et $C^*(G)$ sa C^*-algèbre. On utilise la même notation π pour une représentation unitaire de G et la représentation correspondante de $C^*(G)$, et C^*-Ker(π) est le noyau de π dans $C^*(G)$.

Si σ et τ sont deux représentations unitaires de G, alors σ est faiblement contenue dans τ, $(\sigma \prec \tau)$ si

$$\mathrm{Ker}(\tau) \subset \mathrm{Ker}(\sigma).$$

Pour une représentation unitaire π de G, le support de π est l'ensemble fermé

$$\mathrm{Supp}(\pi) = \{\tau \in \hat{G}; \tau \prec \pi\}.$$

On va décrire la topologie sur $\hat{G}$, pour cela on pose

$$\mathrm{Prim}(C^*(G)) = \{C^*\text{-Ker}(\pi),\ \pi \in \hat{G}\},$$

C^*-Ker (π) est un idéal dans $C^*(G)$, un tel idéal est appellé primitif.

Topologie de Jacobson: elle est définie sur l'opération de fermeture suivante: pour tout $\mathcal{S} \subset \text{Prim}(C^*(G))$, $C^* - \text{Ker}\ (\pi) \in \text{Prim}(C^*(G))$

$$C^* - \text{Ker}\ (\pi) \in \bar{\mathcal{S}} \Longleftrightarrow \bigcap_{C^*\text{-Ker}(\rho)\in\mathcal{S}} C^*\text{-Ker}(\rho) \subset C^* - \text{Ker}\ (\pi).$$

On montre que c'est bien une topologie sur $\text{Prim}(C^*(G))$, cette topologie n'est en général pas séparée.

Soit $\Psi : \hat{G} \longrightarrow \text{Prim}(C^*(G))$, $\Psi(\pi) = C^*\text{-Ker}(\pi)$, $(\pi \in \hat{G})$.

On munit $\hat{G}$ de la topologie image réciproque par Ψ, c-à-d les ouverts dans $\hat{G}$ sont les ensembles $\Psi^{-1}(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert dans $\text{Prim}(C^*(G))$.

La topologie sur $\hat{G}$ peut être décrite autrement.

Topologie de Fell: soit $\pi \in \hat{G}$, $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $\|\xi\| = 1$. Pour tout compact $K \subset G$ et tout $\epsilon > 0$, on pose

$$\mathcal{U}(K,\epsilon) = \Big\{\rho \in \hat{G} : \exists \eta \in \mathcal{H}_\rho,\ \|\eta\| = 1 \text{ tels que } \sup_{g\in K} | < \pi(g)\xi, \xi > - < \rho(g)\eta, \eta > | < \epsilon \Big\},$$

alors $\mathcal{U}(K,\epsilon)$ est un système fondamental de voisinages de $\pi \in \hat{G}$, on a donc que: $\lim \pi_i = \pi$ si et seulement si pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $\|\xi\| = 1$, $\exists \eta_i \in \mathcal{H}_{\pi_i}$, $\|\eta_i\| = 1$ tel que

$$\lim\ < \pi(g)\eta_i, \eta_i > = < \pi(g)\xi, \xi > .$$

Si H est un sous-groupe fermé de G, τ une représentation de H, alors on note $\overset{G}{\underset{H}{\text{Ind}}}\,\tau$ la représentation de G induite de τ, cette représentation est décrite dans le premier chapitre.

Soit maintenant G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit π est une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, si $\mathcal{H}^\infty$ est l'ensemble des vecteurs C^∞ dans $\mathcal{H}$, alors la formule

$$\pi_\infty(X)\xi = \frac{d}{dt}(\pi(\exp(tX)\xi))_{t=0},\ X \in \mathfrak{g},\ \xi \in \mathcal{H}^\infty$$

définit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{H}^\infty$. L'extension de π_∞ à $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante de l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{g}$ sera notée par le même symbole. Si π est irréductible, alors il existe un homomorphisme χ_π du centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{C}$ tel que

$$\pi_\infty(a) = \chi_\pi(a)I, \text{ pour tout } a \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

(cf. [42], 4.4.1.6). χ_π est appellé le caractère infinitésimal de π.

III-1.1 Proposition [6]

Soit G un groupe de Lie connexe et π une représentation dans le cortex de G. Alors π a un caractère infinitésimal trivial, c-à-d $\chi_\pi = \chi_{1_G}$.

Si le groupe G est nilpotent connexe et simplement connexe, on sait qu'il existe un isomorphisme entre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ et l'algèbre $I(\mathfrak{g}^\star)$ de toutes les fonctions polynomiales complexes $G-$invariantes sur $\mathfrak{g}^\star$ (cf. [42]). Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$. Alors on a la formule suivante:

$$\chi_{\pi_f}(a) = a(f),\ a \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}),$$

où a est identifié avec le polynôme correspondant de $I(\mathfrak{g}^\star)$ et $a(f)$ sa valeur en f. Ceci nous permet de calculer les représentations de G avec un caractère infinitésimal. Maintenant, il est clair que pour $f \in \mathfrak{g}^\star$, π_f a un caractère infinitésimal trivial si et seulement si f est un zéro commun de tout $P \in I(\mathfrak{g}^\star)$ avec $P(0) = 0$. Notons

$$I\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = \bigcap_{P \in I(\mathfrak{g}^\star)} P^{-1}\{0\}, \tag{38}$$

on a alors que

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \subset I\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star). \tag{39}$$

III-2 Cortex des algèbres nilpotentes de petite dimension

On suppose dans toute la suite que G est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe. $\mathfrak{g}$ étant l'algèbre de Lie de G, on étudiera le cortex de $\mathfrak{g}^\star$ sous l'action coadjointe, cet ensemble sera noté par la suite par $\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$.

Plusieurs travaux ont été publiés sur le cortex des groupes localement compacts, mais on n'en a pas donné une forme explicite, ceci est dû au fait que sa structure est incroyablement compliquée. Cependant, nous avons calculé dans un premier temps le cortex des groupes de Lie nilpotents de dimension inférieure ou égale à 6 dans l'espoir de comprendre la structure de cet ensemble pour les groupes de Lie nilpotents (cf.[2]). Nous avons prouvé le résultat suivant:

III-2.1 Proposition

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe de dimension inférieure ou égale à six, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, alors on a

$$Cor(\mathfrak{g}^\star) = ICor(\mathfrak{g}^\star). \tag{40}$$

La preuve de cette proposition est basée sur l'étude des classifications des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à six qui sont faites, d'une part par J. Dixmier pour les algèbres de Lie de dimension cinq, et d'autre part par une série d'auteurs pour la dimension six tels que V. V. Morozov (1958), T. Skejelberd et T. Sund (1977), K. A. Umlauf (1891) et M. Vergne (1966).

Nous n'allons pas reproduire tous les calculs du cortex pour ces algèbres, on laisse au lecteur le soin de les consulter dans [2].

Notons de même que Bekka et Kanuith [6] croyaient que pour des groupes de Lie nilpotents de dimension six l'assertion

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = \hat{G/Z}$$

où Z est un certain sous-groupe de G est vraie, mais lors de la preuve de la proposition ci-dessus, nous avons alors prouvé que ce n'est pas le cas.

Application: on utilise maintenant ce calcul pour déterminer le cortex de la classe suivante d'algèbres de Lie nilpotentes.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente telle que toutes les orbites coadjointes sont de dimension maximale plus petite ou égales à deux. La classification de cette classe d'algèbres a été faite par Arnal, Cahen et Ludwig (voir [1]). Ils ont montré que sous cette hypothèse, $\mathfrak{g}$ est l'une des algèbres suivantes:

a)$\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1$ où $\mathfrak{g}_1$ est un idéal abélien de codimension un.

b)$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,15} \oplus U$ où U est un idéal central et $\mathfrak{g}_{6,15}$ est l'algèbre nilpotente de dimension 6 dont une base $(X_j)_{1\leq j\leq 6}$ vérifie

$$[X_1, X_2] = X_4,\ [X_1, X_3] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_5$$

c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4} \oplus U$ où U est un idéal central et $\mathfrak{g}_{5,4}$ est l'algèbre nilpotente de dimension 5 dont une base $(X_j)_{1\leq j\leq 5}$ vérifie

$$[X_1, X_2] = X_3\ ,\ [X_1, X_3] = X_4\ ,\ [X_2, X_3] = X_5.$$

Il en résulte que le cortex de $\mathfrak{g}$ est l'un des ensembles suivants:

a) si $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1$ où $\mathfrak{g}_1$ est un idéal abélien de codimension un, alors Cor $(\mathfrak{g}^\star) = I\mathrm{Cor}\ (\mathfrak{g}^\star)$.

b) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,15} \oplus U$, alors Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ = Cor $(\mathfrak{g}^\star_{6,15})$ = vect $(X_1^\star, X_2^\star, X_3^\star)$.

c) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4} \oplus U$, alors Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ = Cor $(\mathfrak{g}^\star_{5,4})$ = vect $(X_1^\star, X_2^\star)$.

Si $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_1$ où $\mathfrak{g}_1$ est un idéal abélien de codimension un, alors Cor $(\mathfrak{g}^\star) = I\text{Cor}\ (\mathfrak{g}^\star)$ (cf. [7]). Le calcul du cortex dans [2] nous permet de compléter la preuve.

Pour résumer, on a le résultat suivant:

III-2.2 Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente telle que toutes les orbites coadjointes de dimension maximale égales à deux, alors le cortex de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel et on a que

$$Cor\ (\mathfrak{g}^\star) = ICor\ (\mathfrak{g}^\star).$$

III-3 Sur le cortex de différentes classes de groupes.

On va rappeller maintenant quelques notions qui sont déja mentionnées dans le chapitre I.

Soit $\mathfrak{B} = (l_1, .., l_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^\star$ et soit $\mathfrak{B}_1 = (b_1, .., b_n)$ la base duale dans $\mathfrak{g}$, c-à-d. $< l_i, b_j >= \delta_{i,j};\ 1 \leq i, j \leq n$. On note pour tout $j \in \{1, .., n\}$, $\mathfrak{g}_j = \text{vect} < b_1, .., b_j >$; l'ensemble indice $e^{\mathfrak{B}}(f) = \{i_1 < .. < i_d\}$ d'un élément f dans $\mathfrak{g}^\star$ relatif à $\mathfrak{B}$ est aussi l'ensemble suivant de $\{1, .., n\}$:

$$i \in e^{\mathfrak{B}}(f) \Leftrightarrow \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_{j-1} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{g}_j,$$

où $\mathfrak{g}(f)$ est le radical de la forme $(x, y) \longmapsto < f, [x, y] >$ sur $\mathfrak{g}$.

On considère la relation d'ordre sur les ensembles indice définie dans le chapitre I, soit e le plus grand indice pour cette relation d'ordre. Introduisons la fonction polynomiale suivante

$$Q_e^{\mathfrak{B}}(f) \ = \ \det\{< f, [b_i, b_j] >: i, j \in e\}.$$

$Q_e^{\mathfrak{B}}$ est une fonction polynomiale invariante et homogène de degré d sur $\mathfrak{g}^\star$ et dans toute la suite, on dira que f est en position générale si $Q_e^{\mathfrak{B}}(f) \neq 0$.

On notera Xf au lieu de $ad^\star X(f)$ où $ad^\star$ désigne la représentation coadjointe sur l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{g}f$ l'ensemble $\{\ Xf,\ X \in \mathfrak{g}\}$. De la même façon, on notera pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^\star$, XYf au lieu de $ad^\star X ad^\star Y f$

Nous allons prouver ce lemme qui va être considérablement important dans toute la suite.

III-3.1 Lemme

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $f \in Cor\ (\mathfrak{g}^\star)$, alors il existe $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ en position générale et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in G$ tels que

$$f_p \to 0 \text{ et } f = lim\ Ad^\star(x_p) f_p.$$

Preuve

Dans le cas où les formes linéaires f_p ne sont pas en position générale, on peut trouver une suite $q_p \in \mathfrak{g}^\star$ tel que:

$$Q_e^{\mathfrak{B}}(q_p) \neq 0, \quad \text{et } Q_e^{\mathfrak{B}}(f_p + \epsilon_p q_p) \neq 0,$$

où ϵ_p est une suite de nombre réel aussi petit que l'on veut pour que,

$$\lim Ad^\star(\exp(X_p))f_p = \lim Ad^\star(\exp(X_p))(f_p + \epsilon_p q_p).$$

■

La représentation de conjugaison γ_G est définie sur $L^2(G)$ par

$$\gamma_G(x)f(y) = f(x^{-1} \cdot y \cdot x)$$

pour tout $x, y \in G$ et $f \in L^2(G)$. Il est possible de décrire le support of γ_G comme suit (cf. [24]): pour $h \in \mathfrak{g}^\star$ on a

$$\pi_h \in \text{Supp}(\gamma_G) \Longleftrightarrow \exists\ (f_n) \in \mathfrak{g}^\star,\ x_n, y_n \in G \text{ tel que}$$
$$h = \lim\Big(Ad^\star(x_n)f_n - Ad^\star(y_n)f_n\Big)$$
$$\Longleftrightarrow h \in \overline{\{\Omega_f - \Omega_f,\ f \in \mathfrak{g}^\star\}}.$$

En effet, il n'est pas difficile de voir que si Δ_G est le sous-groupe $\{(x,x) : x \in G\}$ de $G \times G$, alors γ_G est la restriction à Δ_G de la représentation $\underset{\Delta_G}{\overset{G\times G}{\text{Ind}}}\, 1_G$. c-à-d

$$\gamma_G = \underset{\Delta_G}{\overset{G\times G}{\text{Ind}}}\, 1_G/\Delta_G.$$

Il a été prouvé dans [24] que le cortex est inclu dans le support de cette représentation pour tous les groupes moyennables, mais l'égalité n'est pas toujours vraie.

Soit maintenant $l \in \mathfrak{g}^\star$ et Ω_l l'orbite coadjointe associée à l. Alors l'orbite Ω_l est dite plate si elle est un sous-espace affine de $\mathfrak{g}^\star$ et ceci est équivalent aux conditions suivantes

1) $\mathfrak{g}(l)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

2) $\Omega_l = l + \mathfrak{g}(l)^\perp$.

Rappelons que Bekka et Kaniuth [6] ont montré que si G est un groupe de Lie nilpotent de pas 2, alors

$$\text{Cor}\,(\mathfrak{g}^\star) = \overline{\{X\ l\ ,\ X \in \mathfrak{g}\ ,\ l \in\ \mathfrak{g}^\star\}}.$$

Nous allons maintenant généraliser ce résultat pour une classe plus grande d'algèbre de Lie.

III-3.2 Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas r (c-à-d la suite centrale descendante d'ordre r est non nulle et est incluse dans le centre de $\mathfrak{g}$), alors:

$$Cor\,(\mathfrak{g}^\star) \subset \overline{\{Xl,\ X \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\}}$$

en plus

$$\{X_1 \cdots X_{r-1} l,\ X_i \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\} \subset Cor\,(\mathfrak{g}^\star).$$

Preuve

Soit $f \in$ Cor $(\mathfrak{g}^\star)$, alors il existe une suite $f_n \in \mathfrak{g}^\star$ *et* $f_n \longrightarrow 0$, une suite X_n de points de $\mathfrak{g}$ telle que:

$$Ad^\star(\exp(X_n))f_n \longrightarrow f.$$

Par suite :

$$f_n + X_n f_n + \ldots + \frac{(X_n)^{r-1}}{(r-1)!} f_n \longrightarrow f$$

donc

$$f \in \overline{\{X[Id + \frac{X}{2!} + \ldots. + \frac{X^{r-2}}{(r-1)!}](l), X \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\}}.$$

L'opérateur

$$Id + \frac{X}{2!} + \ldots\ldots + \frac{X^{r-2}}{(r-1)!}$$

étant inversible, par suite on a

$$\text{Cor}\,(\mathfrak{g}^\star) \subset \overline{\{Xl, X \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\}}.$$

D'autre part, soit $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^\star$, $X_n = nX_1$ et $f_n = \frac{1}{n} X_2 \cdots X_{r-1} \cdot f$, alors:

$$f_n \longrightarrow 0$$

et

$$Ad^{\star}(\exp\,(X_n))f_n \;= f_n \;+ X_1 \cdots X_{r-1} \cdot f$$

donc

$$\{X_1 \cdots X_{r-1} \cdot f,\; X_i \in \mathfrak{g},\; f \in \mathfrak{g}^{\star}\} \subset \text{Cor}\,(\mathfrak{g}^{\star})$$

puisque $X_1 \cdots X_{r-1} \cdot f = \lim Ad^{\star}(\exp(X_n))f_n$.

III-3.3 Théorème

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et supposons que toutes les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^{\star}$ associées aux formes linéaires en position générale sont des variétés affines (ceci est le cas quand G est de pas 2), alors

$$Cor\,(\mathfrak{g}^{\star}) = \overline{\{X\,l\;,\; X \in \mathfrak{g}\;,\; l \in\; \mathfrak{g}^{\star}\}} = Supp(\gamma_G).$$

Preuve

Soit $l \in \mathfrak{g}^{\star}$ en position générale et $l_n = \dfrac{1}{n}\, l,\; n \in \mathbb{N}^{\star}$, alors

$$Ad^{\star}(G)\; l_n = l_n \;+\; \mathfrak{g}(l_n)^{\perp} = l_n \;+\; \mathfrak{g}(l)^{\perp}$$

d'où

$$\mathfrak{g}(l)^{\perp} = \{Xl\;,\; X \in\; \mathfrak{g}\} \subset \quad \text{Cor}\,(\mathfrak{g}^{\star}).$$

Par conséquent $\{Xl\;,\; X \in \bar{}\; \mathfrak{g},\; l \in \mathfrak{g}^{\star}\} \subset$ Cor $(\mathfrak{g}^{\star})$ puisque Cor $(\mathfrak{g}^{\star})$ est un ensemble fermé.

D'autre part, soit $f \in$ Cor $(\mathfrak{g}^{\star})$. Il existe $X_n \in \mathfrak{g}$ et $f_n \in \mathfrak{g}^{\star}$ en position générale tel que $f_n \longrightarrow 0$ et

$$Ad^{\star}(\exp\; X_n)f_n \longrightarrow f$$

alors $Ad^{\star}(\exp\; X_n)f_n \in \Omega_{f_n} = f_n + \mathfrak{g}(f_n)^{\perp} = f_n + \mathfrak{g}f_n$, il en résulte qu'il existe $(Y_n)_{\,n\in\mathbb{N}^{\star}}$ tel que

$$Ad^{\star}(\exp\; X_n)f_n = f_n + Y_n f_n \longrightarrow f$$

et enfin

$$f \in \overline{\{X\;k\;,\; X \in\; \mathfrak{g}\;,\; k \in\; \mathfrak{g}^{\star}\}}.$$

Remarquons que si $l \in \mathfrak{g}^{\star}$ n'est pas en position générale, alors on peut approcher l par une suite de formes linéaires en position générale, finalement on obtient

$$\{X\;l\;,\; X \in \mathfrak{g}\;,\; l \in\; \mathfrak{g}^{\star}\} \subset \text{Cor}\,(\mathfrak{g}^{\star}) \subset \{\,\overline{X\;l\;,\; X \in\; \mathfrak{g}\;,\; l \in \mathfrak{g}^{\star}}\,\}$$

et puisque Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ est un ensemble fermé, on a le résultat.

D'un autre côté, on a que

$$\text{Supp}(\gamma_G) = \{\pi_h \in \hat{G} \ : \ h \in \overline{\{\Omega_f - \Omega_f,\ f \in \mathfrak{g}^\star \text{en position générale}\}}\ \},$$

puisque toutes les orbites en position générales sont des variétés linéaires, donc $\Omega_f = f + \mathfrak{g}(f)^\perp$, et alors

$$\text{Supp}(\gamma_G) = \overline{\{X\ l\ ,\ X \in \mathfrak{g}\ ,\ l \in\ \mathfrak{g}^\star\}} = \text{Cor}\ (\mathfrak{g}^\star).$$

■

D'après (39), on a

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \subset I\text{Cor}(\mathfrak{g}^\star),$$

mais l'égalité (40) n'est pas toujours vraie. En effet, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 8 engendrée par $(X_1, ..., X_6, Z_1, Z_2)$ avec les commutateurs non triviaux suivants:

$$[X_1, X_5] = Z_1,\ [X_2, X_3] = Z_1$$

$$[X_1, X_6] = Z_2,\ [X_2, X_4] = Z_2$$

Il est clair que $\mathfrak{g}$ est nilpotente de pas 2, donc d'après le théorème (**III-3.3**) on a:

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = \overline{\{Xl,\ X \in \mathfrak{g},\ l \in \mathfrak{g}^\star\}},$$

et un simple calcul montre que

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \ = \ \{\sum_{i=1}^{6} t_i X_i^\star, t_i \in \mathbb{R} :\ t_3 t_6 = t_4 t_5\ \}.$$

D'autre part, si $f = x_1 X_1^\star + ... + x_6 X_6^\star + z_1 Z_1^\star + z_2 Z_2^\star$ les uniques polynômes invariants en f sont les suivants:

$P_1(f) \ = \ z_1$

$P_2(f) \ = \ z_2$

$P_3(f) \ = \ x_4 z_1 \ - \ x_3 z_2$

$P_4(f) \ = \ x_6 z_1 \ - \ x_5 z_2.$

Ainsi

$$\text{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \underset{\neq}{\subset} I\text{Cor}(\mathfrak{g}^\star).$$

Cet exemple à été suggéré par Bekka et Kaniuth dans [6].

III-3.4 Proposition

*Soit G comme dans le théorème (**III-3.3**), supposons que Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^\star$, alors*

$$Cor\ (\mathfrak{g}^\star) = ICor\ (\mathfrak{g}^\star) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$$

où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est le centre de $\mathfrak{g}$.

Preuve

Il est clair que Cor $(\mathfrak{g}^\star) \subset$ ICor $(\mathfrak{g}^\star) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$, supposons que la dimension de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est p, alors

$$\dim \text{Cor } (\mathfrak{g}^\star) \leq n - p. \tag{41}$$

Supposons que dim Cor $(\mathfrak{g}^\star) < n - p$. Alors dim Cor $(\mathfrak{g}^\star) = n - p - j$ pour un $j \in \{1, .., n-p\}$. Soit $\mathfrak{B}_1 = (f_1, \cdots, f_{n-p-j})$ une base de Cor $(\mathfrak{g}^\star)$. On l'a complète en une base $\mathfrak{B} = (f_1, \cdots, f_{n-p-j}, l_1, \cdots, l_j, q_1, \cdots, q_p)$ de $\mathfrak{g}^\star$, où $(f_1, \cdots, f_{n-p-j}, l_1, \cdots, l_j)$ est une base de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$.

Soit $\mathfrak{B}' = (F_1, \cdots, F_{n-p-j}, L_1, \cdots, L_j, Q_1, \cdots, Q_p)$ la base duale de $\mathfrak{B}$. Pour $k \in \{1, .., j\}$ on a que $L_k \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Donc il existe $X_k \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ tel que $[L_k, X_k] = Y_k$ et $Y_k \neq 0$. Il s'ensuit qu'il existe $g_k \in \mathfrak{g}^\star$ tel que $X_k g_k = l_k + d_k$ et $d_k(L_k) = 0$, alors

$$X_k g_k = l_k + \sum_{i=1}^{n-p-j} \alpha_i\ f_i + \sum_{p=1,\ p\neq k}^{j} \beta_p\ l_p + \sum_{r=1}^{p} \lambda_r\ q_r$$

où $\alpha_i,\ \beta_p,\ \lambda_r \in \mathbb{R}$.

Puisque $X_k g_k \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$, on aura obligatoirement $d_k \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ et par suite $\lambda_r = 0$ pour tout r. On peut conclure que:

$$l_k + \sum_{p=1,\ p\neq k}^{j} \beta_p\ l_p = X_k g_k - \sum_{i=1}^{n-p-j} \alpha_i\ f_i \in \text{Cor } (\mathfrak{g}^\star)$$

puisque $X_k g_k \in$ Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ (en vertue du théorème (**III-3.3**)) et Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ est additif, donc, on obtient un élément qui est linéairement indépendant avec $(f_1, \cdots, f_{n-p-j})$ et ceci est contradictoire avec (41).

■

III-3.5 Remarque

La condition que toutes les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^\star$ associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés affines est essentielle dans la proposition (**III-3.4**). Cependant, on peut remarquer dans l'exemple suivant que le cortex peut être un sous-espace vectoriel sans que toutes les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^\star$ associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés affines.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}$ =vect $(X_1, ..., X_5)$ avec les crochets non nuls sont

$$[X_1, X_2] = X_3 \ , \ [X_1, X_3] = X_4 \ , \ [X_2, X_3] = X_5.$$

Alors, Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ = vect$(X_1^\star, X_2^\star)$ (voir [2]) mais $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$ = vect$(X_1^\star, X_2^\star, X_3^\star)$, par suite

$$\text{Cor } (\mathfrak{g}^\star) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp.$$

III-3.6 Exemples

1) Soit G comme dans le théorème (**III-3.3**), supposons qu'il existe $f \in \mathfrak{g}^\star$ telle que $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Puisque $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, on a que $\mathfrak{g}f = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$, il en résulte que

$$\mathfrak{g}f = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp \subset \overline{\bigcup_{f \in \mathfrak{g}^\star} \mathfrak{g}f} = \text{Cor } (\mathfrak{g}^\star) \ \subset \ \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$$

et alors Cor $(\mathfrak{g}^\star) \ = \ \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$.

En particulier, s'il existe $f \in \mathfrak{g}^\star$ telle que la représentation associée à f, π_f est de carré integrable modulo le centre de G, alors suivant [37] on a $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

2) Soit encore G comme dans le théorème (**III-3.3**), supposons en plus que pour tout $f, k \in \mathfrak{g}^\star$ on a $\mathfrak{g}f \subset \mathfrak{g}k$ ou $\mathfrak{g}k \subset \mathfrak{g}f$. Nous allons montrer que Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ est un sous-espace vectoriel et en vertu de la proposition (**III-3.4**) il coïncide avec $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\perp$.

En effet, soit $l_1, l_2 \in$ Cor $(\mathfrak{g}^\star)$, alors il existe $x_n, y_n \in G$ et f_n, g_n en position générale tels que

$$l_1 = \lim Ad^\star (x_n) \ f_n, \ f_n \longrightarrow 0$$

$$l_2 = \lim Ad^\star (y_n) \ g_n, \ g_n \longrightarrow 0.$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathfrak{g}(f_n)^\perp$ et $v_n \in \mathfrak{g}(g_n)^\perp$ tels que

$$Ad^\star (x_n) \ f_n = f_n + u_n, \ Ad^\star (y_n) \ g_n = g_n + v_n$$

il s'ensuit que $l_1 + l_2 = \lim (f_n + u_n + g_n + v_n)$ et alors

$l_1 + l_2 \in \overline{\{Xl + Yf,\ X, Y \in \mathfrak{g},\ f, l \in \mathfrak{g}^\star\}}$, et en utilisant le fait que $\mathfrak{g}f \subset \mathfrak{g}l$ ou $\mathfrak{g}l \subset \mathfrak{g}f$ on peut déduire que $l_1 + l_2 \in \text{Cor}\ (\mathfrak{g}^\star)$ et alors le cortex est un ensemble additif, par suite un sous-espace vectoriel.

3) Supposons encore que G est comme dans le théorème **(III-3.3)** et supposons que dim $G \leq 6$. En utilisant la classification des ces groupes de Lie (cf. [2]), on peut conclure dans ce cas que le cortex est encore un sous-espace vectoriel.

III-4 Cortex des groupes de Lie nilpotents de pas 3.

Dans ce paragraphe, on note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme correspondante.

III-4.1 Préliminaires

Soit H_n le groupe de Heisenberg de dimension $(2n+1)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{H}_n$, un élément de $\mathfrak{H}_n$ s'écrit (x, y, z), où $x, y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, avec le crochet

$$[(x,y,z),(x',y',z')] = (0,0,< x,y' > - < x',y >). \tag{42}$$

Soit $\mathfrak{W}$ le sous-espace de $\mathfrak{H}_n$ défini par

$$\mathfrak{W} = \{(x,y,0) : x, y \in \mathbb{R}^n \},$$

alors (42) définit une forme symplectique sur $\mathfrak{W}$. Le groupe d'isométrie SP_{2n} de cette forme agit sur $\mathfrak{H}_n$ par des automorphismes. Si

$$\mathfrak{Y} = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}^n \},$$

alors le sous-groupe S_n de SP_{2n} qui fixe $\mathfrak{Y}$ est un sous-groupe unipotent de SP_{2n}.

Concrètement, S_n est isomorphe au groupe abélien de toutes les matrices carré d'ordre n, symétriques, d'algèbre de Lie $\mathfrak{S}_n$.

Si on forme le produit semi-direct $\mathfrak{S}H_n$ de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{H}_n$, on obtient une algèbre de Lie nilpotente. Un élément de $\mathfrak{S}H_n$ s'écrit (S, x, y, z), où $S \in \mathfrak{S}_n$, $x, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$ et le crochet est

$$[(S,x,y,z),(S',x',y',z')] = (0,0,Sx' - S'x,< x,y' > - < x',y >).$$

III-4.1.1 Théorème [39]

Toute algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de pas 3 dont le centre est de dimension un est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathfrak{S}H_n$ pour un certain n. En particulier il existe une injection $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}H_n$ telle que

$$J(\mathfrak{g}) + \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}H_n.$$

Les éléments de $\mathfrak{S}H_n^\star$ sont de la forme (E, a, b, c), où $E \in \mathfrak{S}_n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

La dualité entre $\mathfrak{S}H_n$ et $\mathfrak{S}H_n^\star$ est donnée pour tout $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^\star$ et $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$ par

$$[(E, a, b, c), (S, x, y, z)] = E \cdot S + < a, x > + < b, y > + cz,$$

pour tout $(E, a, b, c) \in \mathfrak{S}H_n^\star$ et $(S, x, y, z) \in \mathfrak{S}H_n$, where

$$E \cdot S = \sum_{i,j} E_{ij} S_{ij} \text{ et } E_{ij}, S_{ij} : i, j = 1, ..., n,$$

sont les coefficients de la matrice de E et de $S \in \mathfrak{S}_n$.

Pour deux vecteurs $a = (a_1, .., a_n)$, $b = (b_1, .., b_n)$, on note $a \otimes b$ la matrice dont les coefficients sont $(a_i b_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

III-4.1.2 Proposition [39]

Soit $\xi_0 = (A, 0, 0, \lambda) \in \mathfrak{S}H_n^\star$ avec $\lambda \neq 0$, alors l'orbite coadjointe $\mathfrak{O}_{A,\lambda}$ dans $\mathfrak{S}H_n^\star$ de ξ_0 est décrite par:

$$\mathfrak{O}_{A,\lambda} = \{(A - \frac{1}{2\lambda} y \otimes y, x, y, \lambda) : x, y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{43}$$

Remarquons que toute orbite coadjointe $\mathfrak{O}_\xi$ avec $\xi = (E, a, b, \lambda)$ et $\lambda \neq 0$, est égale à $\mathfrak{O}_{\xi_0}$ pour $\xi_0 = (A, 0, 0, \lambda)$, où $A = E + \frac{1}{2\lambda} b \otimes b$.

Finalement, il a été prouvé dans [39] que la restriction de $J^\star$ sur $\mathfrak{O}_{\xi_0}$ est un isomorphisme dans $\mathfrak{O}_{J^\star(\xi_0)}$.

Structure du cortex pour les groupes de Lie nilpotents de pas 3

Notation: soit $i : \mathfrak{H}_n \longrightarrow \mathfrak{S}H_n$ l'injection définie par

$$i(x, y, z) = (0, x, y, z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathfrak{H}_n$ et notons $j : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}H_n$ l'injection définie par $j(S) = (S, 0, 0, 0)$ pour tout $S \in \mathfrak{S}_n$.

Pour deux éléments $K \in \mathfrak{H}_n$ et $S \in \mathfrak{S}_n$, on note dans la suite par $K + S$ l'élément de $\mathfrak{S}H_n$: $i(K) + j(S)$.

III-4.2 Lemme

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et soit $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}H_n = \mathfrak{S}_n \oplus \mathfrak{H}_n$ l'injection de Ratcliff, alors:

$$J(\mathfrak{g}) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{A}$$

où

$\mathfrak{F}$ est un sous-espace de $\mathfrak{S}_n$, c-à-d $\mathfrak{F} = vect(S_1, .., S_p)$, $p \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

$\mathfrak{D} = vect(X_1 + T_1, .., X_l + T_l)$, $X_1, .., X_l \in \mathfrak{H}_n$, $T_1, .., T_l \in \mathfrak{S}_n$.

$\mathfrak{A} = vect(X_{l+1}, .., X_n, Y_1, .., Y_n, Z)$ et $(X_1, .., X_n, Y_1, .., Y_n, Z)$ est une base de $\mathfrak{H}_n$ telle que

$$[X_i, Y_j] = \delta_{i,j} Z.$$

En plus, les matrices $(S_1, .., S_p, T_1, .., T_l)$ sont linéairement indépendants.

Preuve

Ceci est une consequence immédiate du théorème 3.1 dans [39].

■

III-4.3 Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et soit $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}H_n = \mathfrak{S}_n \oplus \mathfrak{H}_n$ l'injection de Ratcliff, $J^\star : \mathfrak{S}H_n^\star \longrightarrow \mathfrak{g}^\star$, alors:

$$J^\star(Cor(\mathfrak{S}H_n^\star)) \subset Cor(\mathfrak{g}^\star).$$

Preuve

Observons tout d'abord que pour un élément $f \in \mathfrak{S}H_n^\star$ en position générale, il existe $\xi_0^f \in \mathfrak{S}H_n^\star$ (voir préliminaires plus haut) tel que

$$Ad^\star(SH_n)f = Ad^\star(\exp(J(\mathfrak{g})))Ad^\star(\exp(\mathfrak{S}_n))\xi_0^f = Ad^\star(\exp(J(\mathfrak{g})))\xi_0^f.$$

Si $f \in \mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star)$, alors il existe $f_p \longrightarrow 0$ et $X_p \in \mathfrak{S}H_n$ tels que:

$$Ad^\star(\exp(X_p))f_p \longrightarrow f.$$

En utilisant le Lemme (**III-3.1**) on peut supposer que f_p est en position générale pour tout $p \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $f = \lim Ad^\star(k_p)\xi_0^p$, où $\xi_0^p = (A_p, 0, 0, \lambda_p)$ et k_p est une suite de SH_n.

$Ad^\star(k_p)\xi_0^p = Ad^\star(\exp(J(Y_p)))\xi_0^p$, $Y_p \in \mathfrak{g}$,
alors

$J^\star(Ad^\star(k_p)\xi_0^p) = J^\star(Ad^\star(\exp(J(Y_p)))\xi_0^p) = Ad^\star(\exp(Y_p))J^\star(\xi_0^p)$,
par suite

$J^\star(f) = \lim Ad^\star(\exp(Y_p))J^\star(\xi_0^p)$ et donc $J^\star(f) \in \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$.

■

De cette proposition, on peut obtenir seulement une partie du cortex de $\mathfrak{g}$. Cependant, le théorème suivant et les remarques qui vont le suivre nous disent que

$$J^\star(\mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star)) \neq \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$$

en général.

III-4.4 Théorème

Le cortex de $\mathfrak{S}H_n^\star$ est l'ensemble suivant:

$$Cor(\mathfrak{S}H_n^\star) = \{(x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0) : x, u, c \in \mathbb{R}^n\}$$

$$= \{ad^\star X ad^\star Y l : X, Y \in \mathfrak{S}H_n, l \in \mathfrak{S}H_n{}^\star\}.$$

Preuve

Prouvons d'abord ce Lemme.

III-4.5 Lemme

1) Si x, y sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice $x \otimes y + y \otimes x$ est non nulle.

2) Si a est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\{Sa, S \in \mathfrak{S}_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Preuve du Lemme

1) Supposons que la matrice $x \otimes y + y \otimes x$ soit nulle, donc tous ces termes diagonaux sont nuls, il s'ensuit que $x \perp y$.

D'autre part, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a $< \xi, y > x = - < \xi, x > y$, donc x et y sont proportionnels et donc $x = 0$ ou $y = 0$. On aboutit alors à une contradiction.

2) C'est une simple construction.

D'après (43), on peut voir que $P(A, a, b, \lambda) = 2\lambda A + b \otimes b$ est un polynôme SH_n-invariant, donc pour tout $(A, a, b, \lambda) \in \mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star)$, on doit avoir $\lambda = 0$ et donc $b = 0$. Par ailleurs

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star) \subset \{(A, u, 0, 0), A \in \mathfrak{S}_n,\ u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Calculons maintenant l'action coadjointe de $\mathfrak{S}H_n$:

$$Ad^\star(\exp(S, x, y, z))(E, a, b, \lambda) = \Big(E + (\tfrac{b}{2} - \tfrac{\lambda x}{4}) \otimes x + x \otimes (\tfrac{b}{2} - \tfrac{\lambda x}{4}),$$
$$a - Sb + \lambda y + \tfrac{1}{2}\lambda Sx, b - \lambda x, \lambda\Big).$$

Soit maintenant $(A, u, 0, 0)$ dans $\mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star)$, alors il existe $(E_m, a_m, b_m, \lambda_m) \in \mathfrak{S}H_n^\star$ qui converge vers 0, et $(S_m, x_m, y_m, z_m) \in \mathfrak{S}H_n$ tels que :

$$Ad^\star(\exp(S_m, x_m, y_m, z_m))(E_m, a_m, b_m, \lambda_m) \longrightarrow (A, u, 0, 0).$$

Posons $h_m = \dfrac{b_m}{2} - \dfrac{\lambda_m x_m}{4}$, puisque $b_m - \lambda_m x_m \longrightarrow 0$, on a que $h_m \longrightarrow 0$ et

$$h_m \otimes x_m + x_m \otimes h_m \longrightarrow A.$$

On écrit maintenant

$$h_m \otimes x_m + x_m \otimes h_m = \|x_m\|\|h_m\|\Big(\frac{h_m}{\|h_m\|} \otimes \frac{x_m}{\|x_m\|} + \frac{x_m}{\|x_m\|} \otimes \frac{h_m}{\|h_m\|}\Big).$$

Suppoons alors quitte à passer à des sous-suites, que $\frac{h_m}{\|h_m\|}$ et $\frac{x_m}{\|x_m\|}$ convergent, notons

$$h_\infty = \lim \frac{h_m}{\|h_m\|},\ x_\infty = \lim \frac{x_m}{\|x_m\|}.$$

Puisque $h_\infty \otimes x_\infty + x_\infty \otimes h_\infty \neq 0$, (1-Lemma 2.5) alors la sous-suite $\|x_m\|\|h_m\|$ converge, soit r sa limite, alors

$$A = r(h_\infty \otimes x_\infty + x_\infty \otimes h_\infty),$$

et donc

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star) \subset \{(x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0) : x, u, c \in \mathbb{R}^n \}.$$

Finalement, il est facile de voir que

$$\lim Ad^\star(\exp(0, nx, \frac{n^2 a}{2}, 0))(0, 0, \frac{c}{n}, \frac{1}{n^2}) = \Big((c - \frac{x}{2}) \otimes \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \otimes (c - \frac{x}{2}), \frac{a}{2}, 0, 0\Big),$$

et donc

$$\{x \otimes c + c \otimes x, u, 0, 0) : x, u, c \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star).$$

Calculons maintenant $\{ad^\star X ad^\star Y l : X, Y \in \mathfrak{S}H_n\ , l \in \mathfrak{S}H_n{}^\star \}$.

Pour $X = (S', a', b', c')$ et $Y = (S, a, b, c)$ et $l = (T, u, v, \lambda)$, on a:

$$ad^\star X ad^\star Y l = \Big(\frac{-\lambda}{2}(a \otimes a' + a' \otimes a), \lambda S' a, 0, 0\Big),$$

et en utilisant (2-Lemme **III-4.5**) on a le résultat.

■

III-4.6 Remarques

1) On n'a pas pour toute algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de pas 3 dont le centre est de dimension un que

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = \{ad^\star X ad^\star Y f : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^\star\},$$

qoique $\mathfrak{g}$ soit injectée dans $\mathfrak{S}H_n$ pour un n bien déterminé. En effet, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,3}$ =vect $(X_1, ..., X_5)$ avec les commutateurs non triviaux

$$[X_1, X_2] = X_4\ ,\ [X_1, X_4] = X_5\ ,\ [X_2, X_3] = X_5.$$

$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = \mathrm{vect}\,(X_1^\star, X_2^\star, X_3^\star, X_4^\star)$ (voir [2]), mais $\{ad^\star X ad^\star Y f : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^\star\} = \mathrm{vect}(X_1^\star, X_2^\star)$. Donc

$$\{ad^\star X ad^\star Y f : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^\star\} \neq \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star).$$

2) Si $\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) = \{ad^\star X ad^\star Y f : X, Y \in \mathfrak{g}, f \in \mathfrak{g}^\star\}$, alors $J^\star(\mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star)) = \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$. En effet, soit $k \in \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$, alors il existe $h \in \mathfrak{S}H_n^\star$ tel que

$$k = ad^\star X ad^\star Y J^\star(h) = J^\star(ad^\star J(X) ad^\star J(Y)(h) \subset J^\star(\mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star)),$$

il en résulte que $\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \subset J^\star(\mathrm{Cor}(\mathfrak{S}H_n^\star))$, et en utilisant la proposition **(III-4.3)**, on a le résultat.

III-5 Description du cortex des groupes de Lie nilpotents de pas 3

Nous allons maintenant regarder de très près le cortex des groupes de Lie de pas trois dont le centre est unidimensionnel. Pour une matrice symetrique S, on note $S/\mathfrak{F}$ la restriction de la forme linéaire $(S, 0, 0, 0)$ au sous-espace $\mathfrak{F}$ de $J(\mathfrak{g})$.

III-5.1 Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et supposons que

$$J(\mathfrak{g}) = vect\,(S_1, .., S_p, X_1, .., X_n, Y_1, .., Y_n, Z) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{h}_n,$$

où $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}H_n$ est l'injection de Ratcliff.

Si $p = 1$ c-à-d $J(\mathfrak{g}) = vect\,(S, X_1, .., X_n, Y_1, .., Y_n, Z)$, alors

$$Cor(\mathfrak{g}^\star) = \{(aS, u, v, 0) : a \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^n, < Sv, v >= 0\}.$$

Si $p \geq 1$, le cortex $Cor(\mathfrak{g}^\star)$ de $\mathfrak{g}$ contient l'ensemble suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\left(w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F}, u, v, 0 \right) \\ u, v, w_i \in \mathbb{R}^n \\ v \otimes v / \mathfrak{F} = 0 \\ \forall r \in \{1, \cdots, k\} : \left(w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) / \mathfrak{F} = 0 \end{array} \right\}.$$

Preuve

Supposons que $p = 1$.

Il est clair d'après (43) que pour $i \in \{1,..,p\}$ le polynôme

$$P(A,u,v,\lambda) = 2\lambda SA + < Sv, v >$$

est invariant, donc :

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \subset \{(\varphi,u,v,0) : u,v \in \mathbb{R}^n,\ < Sv,v >= 0, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Soit

$$l = (\varphi,u,v,0) \in \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star),$$

on doit montrer qu'il existe des suites (A_m,u_m,v_m,λ_m) telles que $A_m \to 0$, $u_m \to u$, $v_m \to v$ et $\lambda_m \to 0$ avec

$$(SA_m - \frac{< Sv_m,v_m >}{2\lambda_m}, u_m, v_m, \lambda_m) \to (\varphi,u,v,0).$$

Si $Sv \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $< Sv,x >= \varphi$ et on peut prendre

$$v_m = v + \frac{x}{m},\ u_m = u,\ \lambda_m = -\frac{1}{m},\ A_m = 0,$$

il s'ensuit que

$$(SA_m - \frac{< Sv_m,v_m >}{2\lambda_m}, u_m, v_m, \lambda_m) = (\varphi + \frac{1}{2m} < Sx,x >, u, v + \frac{x}{m}, -\frac{1}{m}) \to (\varphi,u,v,0).$$

Si $Sv = 0$, on peut trouver $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi =< Sw,w >$ ou $\varphi = - < Sw,w >$, alors si $\varphi =< Sw,w >$, on peut choisir

$$v_m = v + \frac{w}{m},\ u_m = u,\ \lambda_m = -\frac{1}{2m^2},\ A_m = 0.$$

Si $\varphi = - < Sw,w >$, on peut choisir

$$v_m = v + \frac{w}{m},\ u_m = u,\ \lambda_m = \frac{1}{2m^2},\ A_m = 0$$

et on a le résultat, d'où le premier cas.

Supposons maintenant que $p > 1$, on identifie $\mathfrak{F}$ avec $\mathbb{R}^p$ à travers la base $(S_1,\cdots,S_p)$. Remarquons que dès que $p \geq 2$ la structure du cortex va dépendre fortement des matrices symetriques qui engendrent l'algèbre de Lie en question. Soit $\mathfrak{L}_k$ l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\left(w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) /\mathfrak{F}, u, v, 0 \right) \\ u, v, w_i \in \mathbb{R}^n \\ v \otimes v / \mathfrak{F} = 0 \\ \forall r \in \{1, \cdots, n\} : \left(w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) /\mathfrak{F} = 0 \end{array} \right\}$$

On doit prouver que $\mathfrak{L}_k \subset \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$. Pour cela, trouvons des suites $(u_m, v_m, \lambda_m)_m$ telles que

$$\begin{array}{l} v_m \to v \\ \lambda_m \to 0 \\ u_m \to u \\ -\frac{v_m \otimes v_m}{2\lambda_m} /\mathfrak{F} \to \left(w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i \right) /\mathfrak{F}. \end{array}$$

Supposons d'abord que k est pair et prenons

$$v_m = v + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i}{m^i}$$

et

$$\lambda_m = -\frac{1}{2} m^{-k-1}.$$

Pour une matrice symétrique S, on a que

$$\begin{aligned} -\frac{< Sv_m, v_m >}{2\lambda_m} &= m^{k+1} \left\langle S \left(v + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i}{m^i} \right), \left(v + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right) \right\rangle \\ &= m^{k+1} \left\langle 2Sv, \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right\rangle + m^{k+1} \left\langle S(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i}{m^i}), \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right\rangle \\ &= m^{k+1} \left\langle 2Sv, \sum_{j=1}^{k+1} \frac{w_j}{m^j} \right\rangle + 2 \left(\sum_{i,j,\ i \neq j}^{k+1} m^{-(j+i)+k+1} < Sw_i, w_j > \right) \end{aligned}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{k+1} m^{k+1-2i} < Sw_i, w_i >\right).$$

En utilisant les contraintes

$$\forall r \in \{1, \cdots, k\} : \left(w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i\right) /\mathfrak{F} = 0$$

on obtient pour $S \in \mathfrak{F}$ que

$$-\frac{< Sv_m, v_m >}{2\lambda_m} = (2Sv, w_{k+1}) + \sum_{i+j=k+1} (Sw_i, w_j) + \sum_{i+j>k+1} (Sw_i, w_j) m^{-(j+i)+k+1}.$$

Donc si $m \to \infty$, $-\frac{<Sv_m, v_m>}{2\lambda_m}$ tend vers $2(Sv, w_{k+1}) + \sum_{j+i=k+1} (Sw_i, w_j)$.

Si k est impair, les mêmes calculs sont valables et la limite obtenue est

$$2(Sv, w_{k+1}) + 2 \sum_{j+i=k+1} (Sw_i, w_j) + (Sw_{\frac{k+1}{2}}, w_{\frac{k+1}{2}}).$$

Finalement, on a que $\mathfrak{L}_k \subset \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$.

■

III-5.2 Corollaire

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension un, et supposons que

$$J(\mathfrak{g}) = vect\,(S_1, .., S_p, X_1 + T_1, .., X_l + T_l, X_{l+1}, .., X_n, Y_1, .., Y_n, Z) = \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{A}$$

l'écriture de $\mathfrak{g}$ comme dans le lemme **III-4.2**. *Alors, pour tout $k \geq 1$, le cortex $Cor(\mathfrak{g}^\star)$ de $\mathfrak{g}^\star$ contient l'ensemble suivant:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\left(\left(w_{k+1} \otimes v + v \otimes w_{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k+1} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i\right) /\mathfrak{F}, h, u, v, 0\right)\right) \\ v, w_i \in \mathbb{R}^n \\ h \in \mathbb{R}^l,\ u \in \mathbb{R}^{n-l} \\ v \otimes v /\mathfrak{F} = 0 \\ \forall r \in \{1, \cdots, k\} : \left(w_r \otimes v + v \otimes w_r + \frac{1}{2} \sum_{i+j=r} w_i \otimes w_j + w_j \otimes w_i\right) /\mathfrak{F} = 0 \end{array} \right\}.$$

Preuve

Comme dans le Lemme **III-4.2** on a:

$$J(\mathfrak{g}) = \text{vect}(S_1, .., S_p, X_1 + T_1, .., X_l + T_l, X_{l+1}, .., X_n, Y_1, .., Y_n, Z)$$

avec les commutateurs non triviaux suivants:

$[S_i, X_h + T_h] \in \text{vect}(Y_1, .., Y_n),\ i \in \{1, .., p\},\ h \in \{1, .., l\},$

$[X_h + T_h, Y_i] = \delta_{i,h} Z,\ i \in \{1, .., n\},\ h \in \{1, .., l\}.$

$\delta_{i,h}$ est l'indice de Kronecker.

Les variables attachées aux vecteurs de bases $X_1 + T_1, .., X_l + T_l$ sont libres, les indices de ces vecteurs sont dans l'ensembles indice de Pukanszky $e^{\mathfrak{B}}(f)$ pour une forme linéaire f en position générale, en utilisant alors la proposition (**III-5.1**), on obtient le résultat.

■

III-5.3 Exemples

Exemple 1

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,5}$ l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs $(X_1, \cdots, X_6)$, avec les commutateurs non triviaux

$$[X_1, X_2] = X_4\ ,\ [X_1, X_4] = X_6\ ,\ [X_3, X_5] = X_6,\ [X_1, X_3] = X_5.$$

En utilisant le procédé de Ratcliff, on peut voir que $\mathfrak{g}$ s'injecte dans $\mathfrak{S}H_2$, notons

$$\mathfrak{H}_2 = \text{vect}(A_1, A_2, B_1, B_2, Z),\ [A_i, B_j] = \delta_{i,j} Z,$$

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit J l'injection décrite plus haut, alors

$J(X_1) = A_1 + K_{1,2}$
$J(X_2) = E_{1,1}$
$J(X_3) = A_2$
$J(X_4) = B_1$
$J(X_5) = B_2$
$J(X_6) = Z.$
Un calcul facile montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathfrak{L}_k = \{wE^\star_{1,1} + b(A_1 + K_{1,2})^\star + cA^\star_2 + hB^\star_2,\ w, b, c, h \in \mathbb{R}\}.$$

D'autre part, on a que Cor $(\mathfrak{g}^\star)$ = vect $(X^\star_1, X^\star_2, X^\star_3, X^\star_5)$ (voir [2]). Alors

$$\mathfrak{L}_k = \text{Cor } (\mathfrak{g}^\star).$$

Exemple 2

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs $(X_1, \cdots, X_7)$, avec les commutateurs non triviaux

$$[X_1, X_3] = X_5\ ,\ [X_2, X_4] = X_6\ ,\ [X_3, X_5] = X_7,\ [X_4, X_6] = X_7.$$

En utilisant de nouveau le procédé de Ratcliff, on peut voir que $\mathfrak{g}$ s'injecte dans $\mathfrak{S}H_2$, on garde la même notation que dans l'exemple 1, et soit

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Soit J l'injection de Ratcliff, alors
$J(X_1) = E_{1,1}$
$J(X_2) = E_{2,2}$
$J(X_3) = A_1$
$J(X_4) = A_2$
$J(X_5) = B_1$
$J(X_6) = B_2$
$J(X_7) = Z.$
Un calcul analogue à celui de l'exemple 1 montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathfrak{L}_k = \{wE^\star_{1,1} + bE^\star_{2,2} + cA^\star_1 + hA^\star_2,\ w, b, c, h \in \mathbb{R},\ \text{sg}(w) = \text{sg}(b)\}.$$

D'autre part, en utilisant les polynômes invariants on a que

$$\text{Cor } (\mathfrak{g}^\star) \subset \text{vect}(X_1^\star, X_2^\star, X_3^\star, X_4^\star).$$

Posons $f_n = f_n^1 X_1^\star + \cdots + f_n^7 X_7^\star \longrightarrow 0$ et $X_n = x_n^1 X_1 + \cdots + x_n^7 X_7$ tels que

$$Ad^\star(\exp(X_n))f_n \longrightarrow f \in \text{Cor } (\mathfrak{g}^\star),$$

les coordonnées de $Ad^\star(\exp(X_n))f_n$ dans la base $(X_1^\star, \cdots, X_7^\star)$ sont

$f_n^1 + x_n^3 f_n^5 - \frac{1}{2}(x_n^3)^2 f_n^7$
$f_n^2 + x_n^4 f_n^6 - \frac{1}{2}(x_n^4)^2 x_n^6 f_n^7$
$f_n^3 - x_n^1 f_n^5 + x_n^5 f_n^7 + \frac{1}{2} x_n^1 x_n^3 f_n^7$
$f_n^4 + x_n^2 f_n^6 - x_n^6 f_n^7$
$f_n^5 - x_n^3 f_n^7$
$f_n^6 - x_n^4 f_n^7$
f_n^7.

Soit $l = dX_1^\star + c\, X_2^\star + bX_3^\star + a\, X_4^\star \in \text{vect}(X_1^\star, X_2^\star, X_3^\star, X_4^\star)$, alors si on choisit les suites suivantes:

$f_n^6 = f_n^5 = \frac{1}{n^2}$, $f_n^7 = \frac{1}{n^5}$, $x_n^2 = -an^2$, $x_n^4 = +cn^2$, $x_n^3 = +dn^2$, $x_n^1 = -bn^2$ alors

$$Ad^\star(\exp(X_n))f_n \longrightarrow l \in \text{Cor } (\mathfrak{g}^\star),$$

et alors

$$\text{Cor } (\mathfrak{g}^\star) = \text{vect}(X_1^\star, X_2^\star, X_3^\star, X_4^\star),$$

finalement

$$\mathfrak{L}_k \subsetneq \text{Cor } (\mathfrak{g}^\star).$$

III-5.4 Proposition finale

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et supposons que toutes les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^\star$ associées aux formes linéaires en position générale sont des variétés affines (ceci est le cas quand G est de pas 2). Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, le cortex de $\mathfrak{g}$ contient l'ensemble suivant:

$$\Big\{ \sum_{i+j=2p} X_i f_j, \quad X_1, .., X_{2p-1} \in \mathfrak{g}, \quad f_1, .., f_{2p-1} \in \mathfrak{g}^\star,$$

$$\sum_{i+j=r} X_i f_j = 0, \quad r \in \{2, .., 2p-1\} \Big\}.$$

Preuve

Appellons $\mathfrak{J}_p$ l'ensemble: $\{ \sum_{i+j=2p} X_i f_j, \ X_1,..,X_{2p-1} \in \mathfrak{g}, \ f_1,..,f_{2p-1} \in \mathfrak{g}^\star,$

$$\sum_{i+j=r} X_i l_j = 0, \ \ r \in \{2,..,2p-1\} \ \ \}.$$

La preuve consiste à montrer que $\mathfrak{J}_p \subset \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$. En effet, puisque

$$\mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star) \ = \ \overline{\{ad^\star Xl \ : \ X \in \mathfrak{g}, \ l \in \mathfrak{g}^\star \}},$$

on a

$$[\sum_{i=1}^{2p-1} n^{2p-i} X_i][\sum_{j=1}^{2p-1} \frac{f_j}{n^j}] = \sum_{i=1,j=1}^{2p-1} n^{2p-(i+j)} X_i f_j$$

$$= \sum_{i+j>2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j + \sum_{i+j=2p} X_i f_j + \sum_{i+j<2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j.$$

D'autre part, on a que

$$\sum_{i+j<2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j = \sum_{r=2}^{2p-1} n^{2p-r} \sum_{i+j=r} X_i f_j = 0,$$

puisque $\sum_{i+j=r} X_i f_j = 0$ pour $r \in \{2,...,2p-1\}$.

Alors $\lim [\sum_{i=1}^{2p-1} n^{2p-i} X_i][\sum_{j=1}^{2p-1} \frac{f_j}{n^j}] = \sum_{i+j=2p} X_i f_j$ puisque

$$\sum_{i+j>2p} n^{2p-(i+j)} X_i f_j \longrightarrow 0,$$

finalement $\mathfrak{J}_p \subset \mathrm{Cor}(\mathfrak{g}^\star)$.

CONCLUSION

Dans les deux premiers chapitres, nous avons construit des opérateurs d'entrelacement d'une part entre les représentations induites et leurs désintégrations centrales canoniques et d'autre part entre les restrictions des représentations unitaires et leurs désintégrations. Pour cela, nous avons employé la méthode des orbites (cf. [8], [25]). Tous nos résultats ont été établis dans un cadre tout à fait général pour les groupes nilpotents connexes et simplement connexes, la majorité de nos preuves sont basées sur un raisonnement par récurrence sur la dimension du groupe ou d'un espace homogène associé, d'ailleurs c'est le type de raisonnement utilisé dans la littérature dans ce type de problèmes.

Nous pensons actuellement d'étendre ces résultats pour des classes plus grandes de groupes résolubles. La première espèce de groupes résolubles qu'on désire traiter est ce qu'on appelle les groupes résolubles exponentiels dont l'application exponentielle est un difféomorphisme sur leurs algèbres de Lie.

Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un tel groupe, la méthode des orbites dit que le dual unitaire $\hat{G}$ est paramétré par l'espace des orbites coadjointes de G. Plus en détail, pour $f \in \mathfrak{g}^\star$ quelconque il existe une polarisation réelle $\mathfrak{b}$ vérifiant la condition de Pukansky et la représentation monomiale $\rho(f, \mathfrak{b}, G)$ de G, induite par un caractère unitaire χ_f du sous-groupe $B = \exp \mathfrak{b}$ dont la différentielle, $if|\mathfrak{b}$, s'avère irréductible. En plus la classe d'équivalence de $\rho(f, \mathfrak{b}, G)$ ne dépend que de l'orbite coadjointe $G \cdot f$, ce qui nous donne une bijection de l'espace des orbites $\mathfrak{g}^\star/G$ sur $\hat{G}$.

Soit $H = \exp \mathfrak{h}$ un sous-groupe fermé connexe de G, χ_f étant un caractère unitaire de H, alors comme dans [17], la désintégration centrale de $\tau = \underset{H}{\overset{G}{\mathrm{Ind}}}\, \chi_f$ s'écrit:

$$\tau \simeq \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\nu(\pi) \tag{44}$$

où ν est l'image par l'application de Kirillov d'une mesure positive finie sur $f + \mathfrak{h}^\perp$ équivalente à la mesure de Lebesgue, et $m(\pi)$ est le nombre de $H-$orbites contenues dans $(f + \mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega(\pi)$.

La question qu'on se pose ici est la suivante: peut-on construire une isométrie qui entrelace cette désintégration. Dans la littérature cette question n'a pas été encore abordée, notre expérience dans le cas nilpotent nous donne une idée sur l'ordre de difficulté de cette construction dont l'importance est capitale comme on l'a déja remarqué dans le cas des groupes nilpotents.

Soit Δ_G, Δ_H les fonctions modules respectivement de G et de H, la représentation induite agit sur les fonctions $\xi \in L^2(G/H)$ vérifiant

$$\xi(gh) = \xi(g)\chi_f(h^{-1})\Delta_H^{\frac{1}{2}}(h)\Delta_G^{-\frac{1}{2}}(h). \tag{45}$$

Soit U l'opérateur défini sur une telle fonction ξ qui est en plus à support compact modulo H et $g \in G$ par

$$U(\xi)(\phi)(g) = \int_{B(\phi)/B(\phi)\cap H} \xi(gb)\chi_\phi(b)\Delta_{B(\phi)}^{-\frac{1}{2}}(b)\Delta_G^{\frac{1}{2}}(b)d_{B(\phi),H}(b),\ (\phi \in (f+\mathfrak{h}^\perp)/H),$$

$B(\phi)$ étant la polarisation de Vergne en ϕ extraite à partir d'une bonne suite de sous-algèbres et $d_{B(\phi),H}$ une mesure invariante sur l'espace homogène $B(\phi)/B(\phi)\cap H$.

Cet opérateur transforme des fonctions qui vérifient la relation de covariance (45) pour H en des fonctions qui vérifient la même relation pour $B(\phi)$, et il entrelace formellement la formule (44). Il en résulte que cet opérateur peut être un candidat sous réserve de convergence, d'ailleurs les opérateurs des exemples (**I-8,A,B**) sont tirés de la formule de U. Il nous reste à voir si c'est le bon candidat. Il est à noter que la même question se pose pour les restrictions des représentations unitaires des groupes résolubles exponentiels.

Revenons maintenant au cas des groupes nilpotents, rappelons l'algèbre $\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ des opérateurs différentiels qui commutent avec les translations à droite, nous nous sommes intéressé à démontrer ou à contredire la conjecture (21) qui affirme que cette algèbre est en fait isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[f+\mathfrak{h}^\perp]^H$ des fonctions polynomiales $H-$invariantes sur $f+\mathfrak{h}^\perp$. Nous avons étudié des exemples assez compliqués où l'opérateur (9) varie de façon (très rationnelle) en fonction de ϕ, mais malgré ça, tous les éléments de $D_\tau(G/H)$ se diagonalisent polynomialement.

Autre question concernant cette algèbre et suggérée par Corwin et Greenleaf dans [12] est de voir la conjecture suivante pour tous les groupes nilpotents:

$\mathfrak{D}_\tau(G/H)$ est abélienne si et seulement si toutes les multiplicités sont finies dans la désintégration de τ.

Si cette conjecture est correcte, alors elle ne doit pas sortir du cadre des groupes nilpotents, un tel contre-exemple dans le cas des groupes résolubles exponentiels est donné dans [12].

Ajoutons qu'il est intéressant d'obtenir des résultats équivalents sur les opérateurs différentiels dans le cas de la désintégration des restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents.

Enfin, nous comptons revenir sur le problème du cortex évoqué dans le dernier chapitre. Plus précisement, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et supposons que toutes les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^\star$ associées aux formes linéaires en position générale soient des variétés affines (ceci est le cas quand G est de pas 2). La question importante sera la suivante: est-ce que le cortex de $\mathfrak{g}^\star$ est l'ensemble suivant:

$$\Big\{ \sum_{i+j=2p} X_i l_j, \quad X_1,..,X_{2p-1} \in \mathfrak{g}, \quad f_1,..,f_{2p-1} \in \mathfrak{g}^\star, \\ \sum_{i+j=r} X_i l_j = 0, \quad r \in \{2,..,2p-1\} \Big\},$$

pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Si tel est le cas, alors $p \geq 2n+1$ où n est la dimension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il a été prouvé que le cortex est contenu dans l'ensemble ci-dessus (Proposition **III-5.4**) mais pour l'inclusion réciproque nous n'avons pour le moment ni preuve ni contre-exemple. Une analyse plus détaillée de la structure du cortex nous laisse beaucoup d'espoir pour savoir si cette égalité est vraie ou faux. Cependant, malgré les difficultés énormes pour résoudre ce problème dans cette situation spéciale, on peut se demander quelle peut être la forme du cortex pour des algèbres de Lie dont le pas est supérieur à deux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Arnal, M. Cahen and J. Ludwig: Lie groups whose coadjoint orbits are of dimension smaller or equal to two. Letters in Math physics. To appear.

[2] A. Baklouti.: Le Cortex en dimension six. Publication du centre Universitaire de Luxembourg. Fascicule V, 1993.(7 - 45).

[3] A. Baklouti.: On the Cortex of connected Simply connected Nilpotent Lie Groups. Russian Journal of Mathematical Physics. To appear.

[4] A. Baklouti et J. Ludwig., Opérateur d'entrelacement des représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents. Soumis dans Pacific Journal of Mathematics.

[5] A. Baklouti et J. Ludwig, La Désintégration des Restrictions des Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. Soumis dans les annales de l'institut Fourier.

[6] M. Bekka and E. Kanuith: Irreducible representation of loccally compact group that can not be Hausdorff separated from the identity representation. J, Reine Angew, Mat 385(1988)203-220.

[7] J. Boidol, J. Ludwig, and D. Müller. On infinitely small orbits, Studia Mathemathica, T. LXXXVIII. (1988).

[8] I. Brown, dual topology of a nilpotent Lie group, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.6(1973), 407-411.

[9] L. Corwin and F. P. Greenleaf, A canonical approach to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLI,1051-1088(1988) .

[10] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Spectral decomposition of invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces, J. Func. Anal. 108(1992), 374-426.

[11] L. Corwin, F. P. Greenleaf and G. Grelaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. (1988), 601-622 .

[12] L. Corwin and F. P. Greenleaf , Commutativity of Invariant Differential Operators On nilpotent Homogeneous Spaces with finite Multiplicity, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLV, 681-748 (1992).

[13] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Spectrum and Multiplicities for Restrictions of Unitary Representation in Nilpotent Lie Groups. Pacific Journal of Mathematics Vol. 135, No 2,1988.

[14] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[15] M. Duflo, Opérateurs différentiels invariants et homologie des algèbres de Lie (L'appendice du cours à Tunis), 1983.

[16] H. Fujiwara, Représentation monomiales des groupes de Lie nilpotents, Pacific journal of Mathemathics, vol. 127, No. 2,1987.

[17] H. Fujiwara, Représentation monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, dans "The orbit method in representation theory ", Birkhäuser 1990, 61-84.

[18] H. Fujiwara et S. Yamagami, Certaines représentations monomiales des groupes de Lie résolubles exponentiels, Adv. St. Pure Math. 14(1988), 153-190.

[19] H. Fujiwara, Sur les restrictions des représentation unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, Invent. math. 104, 647-654 (1991).

[20] G. Grélaud, Une formule de Plancherel pour les espaces homogènes des groupes de Lie nilpotents. Préprint de l'université de Poitiers.

[21] G. Grélaud, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, thèse.

Université de Poitiers, 1984.

[22] G. Grélaud, On representations of simply connected nilpotent and solvable Lie groups. Prépublication no 76, Univ. de Poitiers, 1993.

[23] G. Grélaud, La formule de Plancherel pour les espaces homogènes des groupes de Heisenberg, J. reine angew. Math. , 398(1989), 92-100.

[24] E. Kaniuth. On the Conjugation Representation of a Locally Compact Group. Math. Z. 202, 275-288(1989)

[25] A. A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Mat. Nauk 17 (4) (1962) 57-110(in Russian).

[26] H. Leptin and J. Ludwig: Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups De Gruyter Expositions In Mathematics 18.

[27] G. Lion, Intégrale d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov, Lect. Notes in Math. ,587(1977), 160-176.

[28] R. Lipsman, Orbital parameters for induced and restricted representation, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), 433-473.

[29] R. Lipsman, The Plancherel formula for homogeneous spaces with polynomial spectrum, Pacific journal of Mathemathics, vol. 159, No. 2,1993.

[30] R. Lipsman, The Penny-Fujiwara Plancherel formula for abelian symmetric space and completely solvable homogeneous spaces, Pacific journal of Mathemathics, vol. 151, No. 2, 1991.

[31] R. Lipsman, Restricting Representations of Completely Solvable Lie Groups, Can. J. Math. Vol. XLII,No.5,1990 pp. 790-824.

[32] J. Ludwig and H. Zahir, On the Nilpotent $\star$- Fourier Transform. Letters in Mathematical Physics 30: 23-34, 1994.

[33] J. Ludwig: On the behaviour of sequences in the dual of a nilpotent Lie group; Math. Ann. 287,239-257(1990).

[34] J. Ludwig, G. Rosenbaum, J. Samuel: The elements of bounded trace in the $C^\star$ algebra of a nilpotent Lie group. Invent. 83.,167-190(1986).

[35] J. Ludwig,: Good ideals in the group algebra of a nilpotent Lie group. Math. Z. 16,195-210 (1978).

[36] J. Ludwig,: On the Hilbert-Schmidt Semi-Norms of L^1 of a nilpotent Lie group. Math. Ann. 273,383-395 (1986).

[37] C. C. Moore and J. A. Wolf., Square integrable representation of nilpotent groups, Trans. Amer. Math. Soc., 185 (1973). 445-462.

[38] L. Pukanszky., Leçons sur les représentations des groupes, Dunod, Paris 1967.

[39] G. Ratcliff, Symbols and Orbits for 3-step nilpotent Lie groups. Journal of functional analysis 62, 38-64 (1985).

[40] M. Vergne,. Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble, *C. R. Acad. Sci* . (Paris) A-B270(1970), A 173-175, A 704-707, pp. 30, 37.

[41] A. M. Vershik and S. I. Karpushev, Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity, and conditionally positive definite functions, Mat. SB .47 (2) (1984).

[42] G. Warner, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I, Berlin-Heidelberg-New York 1972.