UNIVERSITÉ DE LORRAINE | BIBLIOTHÈQUES UNIVERSITAIRES

AVERTISSEMENT
DROIT D'AUTEUR

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document. Toute contrefaçon, plagiat ou reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

UNIVERSITÉ DE LORRAINE
34 COURS LÉOPOLD — CS 25233
54052 NANCY CEDEX
TÉL : 03 54 50 54 00
CONTACT@UNIV-LORRAINE.FR
WWW.UNIV-LORRAINE.FR

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

École doctorale IAEM Lorraine

Étude du problème de la réduction de dettes mutuelles dans les réseaux de paiement entre entreprises

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 31 août 2026

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention informatique)

par

Joannès GUICHON

Composition du jury

Président :	Ammar Oulamara	Professeur des universités – Université de Lorraine
Rapporteurs :	Agnieszka Rusinowska	Directrice de recherche CNRS – Université Paris 1
	Jean-Loup Guillaume	Professeur des universités – Université La Rochelle
Examinateurs :	Lionel Tabourier	Professeur des universités – Sorbonne Université
	Yamina Tadjeddine Fourneyron	Professeur des universités – Université de Lorraine
	Annick Vignes	Directrice de recherche INRAE – ENPC
Encadrants :	Sylvain Contassot-Vivier	Professeur des universités – Université de Lorraine
	Nazim Fatès	Chargé de recherche (hdr) – INRIA

Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications — UMR 7503

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

La raison pour laquelle j'ai entrepris cette thèse est assez simple : je crois profondément que nous sommes capables de beaucoup de choses, et que la science peut, à sa manière, contribuer à nous faire progresser, sur certains points, en tant que société et en tant que personnes. Ce travail n'est qu'une petite pierre dans cet édifice, mais il n'aurait jamais vu le jour sans les nombreuses personnes qui ont croisé mon chemin pendant ces années et qui m'ont permis d'avancer pendant des périodes pas forcément toujours simples.

Je souhaite tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, Nazim Fatès et Sylvain Contassot-Vivier. Leur exigence scientifique, notamment lors de la rédaction des articles, m'a beaucoup appris. Mais au-delà de cette exigence, ils ont surtout été une source de soutien tout au long de cette thèse. Je les remercie pour leur confiance et pour l'énergie qu'ils ont investie dans ce projet. Je suis heureux que cette aventure se poursuive avec eux dans l'Inria Startup Studio.

Je souhaite également remercier Massimo Amato, économiste milanais, pour le temps qu'il nous a consacré et pour l'énergie positive qu'il apporte à chaque discussion. Travailler ensemble est toujours un moment stimulant et je me réjouis que cette collaboration continue. La concurrence pour les plus belles chemises doit évidemment se poursuivre.

Je remercie également les deux équipes qui ont constitué mon environnement de travail : MOCQUA et SIMBIOT. Même si je suis devenu quelque peu porté disparu du côté de MOCQUA après avoir migré, il y a deux ans, vers des bureaux *extrêmement lointains*, l'infâme bâtiment C, littéralement à l'autre bout du laboratoire, j'y ai trouvé un environnement scientifique stimulant et des discussions toujours intéressantes.

Du côté de SIMBIOT, je tiens particulièrement à remercier mes collègues du bureau C027. Benjamin et Ikram, avec qui nous avons passé longtemps à discuter, parfois même un peu trop... Mais aussi Matthieu et Ludovic, qui ont largement contribué à faire vivre les pauses de midi. Je remercie également les différents stagiaires qui sont passés par ce bureau et qui ont contribué à son ambiance.

Je souhaite aussi remercier Yuetong, Valéria et Ludmylla. Les projets sur lesquels nous avons travaillé ensemble n'ont finalement pas trouvé leur place dans ce manuscrit, mais ces collaborations m'ont permis de mesurer à quel point se projeter dans ce type de recherche est à la fois exigeant et formateur.

Mes remerciements vont également aux équipes d'Inria et du LORIA, et tout particulièrement à Isabelle, pour ses sourires, ses discussions toujours bienvenues et ses pâtisseries.

Je remercie également ma famille pour son soutien et sa présence tout au long de ces années. Une pensée particulière pour mes grands-parents, chez qui j'ai pu passer une courte mais très efficace semaine de rédaction, tout en étant particulièrement bien choyé, voire un peu trop...

Enfin, merci aux amis, notamment aux anciens de Télécom, qui ont été présents et encourageants tout au long de cette aventure. Une mention particulière pour Florian Gonçalves, qui s'apprête à rejoindre avec nous l'aventure de l'Inria Startup Studio.

Il ne me reste plus qu'à remercier celles et ceux que j'ai *forcément* oubliés dans ces lignes. Cette thèse marque la fin d'un premier chapitre, et le début de nouvelles aventures.

Je dédie cette thèse à ma mère, qui aurait dû connaître l'aboutissement de ce travail,
et à qui je dois ***tellement****.*

Table des matières

Introduction générale **xvii**
1 Motivations xvii
2 Objectifs xix
3 Contributions xxi

Partie I État de l'art **1**

Chapitre 1
Liquidité, réseaux de dettes et mécanismes de compensation inter-entreprises

1.1 Économies monétaires de production et asymétrie temporelle des paiements . 3
1.1.1 La liquidité comme contrainte systémique dans les réseaux de paiements 4
1.1.2 Une lecture réseau et algorithmique des économies de production . . . 5
1.2 Le crédit inter-entreprises comme institution décentralisée de liquidité 5
1.3 Crises financières et reconfiguration des liquidités inter-entreprises 6
1.4 Propagation des tensions de liquidité 8
1.5 Mutualisation des dettes et mécanismes de préservation de la liquidité dans les réseaux B2B 9
1.5.1 Réduction des frictions d'endettement sans mutualisation 10
1.6 Compensation partielle et intégrale : contraintes contractuelles, coordination et complexité 11
1.6.1 Compensation partielle : réduction fractionnée et optimisation continue 11
1.6.2 Compensation intégrale : règlement coordonné, centralisation et complexité combinatoire 12
1.6.3 Méthodes hybrides : applicabilité locale et dépendance à la structure du réseau 14
1.6.4 Comparaison des approches et implications pour les réseaux B2B de grande taille 16
1.7 Dimension dynamique et soutenabilité temporelle des mécanismes de mutualisation 17
1.8 Synthèse des exigences économiques et informatiques 18

Chapitre 2
Réseaux complexes
et optimisation combinatoire

2.1 La théorie des graphes pour modéliser des systèmes complexes 21
2.2 Propriétés et structures des systèmes complexes 22
2.3 Graphes dynamiques et dimension temporelle des réseaux 22
2.4 Structure mésoscopique des réseaux et détection de communautés 24
2.5 Optimisation combinatoire et réseaux complexes distribués 25

Partie II Réseaux de dettes B2B : Formalisme et exploration **27**

Chapitre 3
Modéliser les réseaux de dettes B2B

3.1 Représentation mathématique d'un réseau de dettes B2B 30
3.1.1 Temps discret et périodes d'observation 30
3.1.2 Factures comme événements d'arcs 30
3.1.3 Réseau de dettes : représentation générale 31
3.1.4 Quantités structurelles associées au graphe 31
3.1.5 Décomposition temporelle : graphes d'émission 32
3.2 Compensation d'un réseau de dettes et métriques d'évaluation 32
3.2.1 Métriques d'évaluation 33
3.2.2 Interprétation : le financeur externe 34
3.3 Du graphe d'émission au graphe opérationnel 34
3.3.1 Factures actives et financements actifs 35
3.3.2 Paramètres de persistance temporelle 35

Chapitre 4
Propriétés des réseaux de dettes B2B

4.1 Jeu de données et construction du réseau 37
4.1.1 Origine des données 37
4.1.2 Pré-traitement des données 38
4.1.3 Construction des graphes de factures 38
4.1.4 Limites et biais d'observation 38
4.2 Granularité temporelle et choix d'agrégation 38
4.2.1 Agrégation mensuelle 39
4.2.2 Agrégation hebdomadaire 42
4.2.3 Agrégation journalière 44
4.2.4 Choix de la granularité d'étude 46
4.3 Distributions de degrés et estimation des lois de puissance 46
4.3.1 Analyse en échelle log-log 47
4.3.2 Estimation de l'exposant de loi de puissance 47
4.3.3 Interprétation statistique 48
4.3.4 Asymétrie structurelle 48
4.4 Positionnement par rapport aux familles classiques de réseaux 49
4.4.1 Au-delà de l'interprétation small-world 49
4.4.2 Rapport aux réseaux invariants d'échelle 49
4.4.3 Une structure propre aux réseaux économiques 49
4.5 Exploration mésoscopique et détection de communautés 50

4.5.1 Méthodes explorées 51
4.5.2 k-noyaux 51
4.5.3 Modularité et méthode de Louvain 53
4.6 Synthèse et implications pour les algorithmes de compensation 55

Partie III Algorithme de compensation de dettes sur des graphes statiques 57

Chapitre 5
Construction d'un algorithme de compensation intégrale

5.1 Heuristique de compensation intégrale sur graphe statique 59
5.1.1 Mesures locales de potentiel de propagation 60
5.1.2 Chemins de démarrage et ratio potentiel/coût 60
5.1.3 Description détaillée de l'algorithme des potentiels 61
5.2 Résultats expérimentaux 64
5.2.1 Validation sur petits graphes synthétiques 64
5.2.2 Analyse des performances 65
5.2.3 Temps de calcul et passage à l'échelle 66

Chapitre 6
Passage à l'échelle

6.1 Principe de l'approche diviser pour régner 67
6.2 Division du graphe 68
6.2.1 Définition d'une partition d'arcs 68
6.2.2 Objectifs de la décomposition 68
6.3 Stratégies de division du graphe 68
6.3.1 Division centrée nœuds 69
6.3.2 Division centrée arcs 71
6.4 Recombinaison des sous-solutions et réextension 73
6.4.1 Résumé de l'approche diviser pour régner 73
6.5 Résultats expérimentaux 74
6.5.1 Discussion et choix d'un niveau de division 78

Chapitre 7
Limitation des financements : effets sur la compensation

7.1 Formalisation d'une contrainte de financement 79
7.2 Adaptation de la stratégie de division et de fusion sous contrainte de financement 80
7.2.1 Réduction indépendante des sous-graphes 80
7.2.2 Fusion sous contrainte de financement 81
7.3 Résultats expérimentaux sous contrainte de financement 82
7.3.1 Graphes de taille intermédiaire 83
7.3.2 Grands graphes 83
7.3.3 Discussion 84
7.4 Conclusion 84

Partie IV Intégration du cadre temporel et considérations économiques de la compensation intégrale **87**

Chapitre 8
Mécanisme de compensation temporelle

8.1 Graphes opérationnels : rappel 90
8.2 Déroulement d'une session de compensation 90
8.2.1 Positions nettes des entreprises après réduction 90
8.2.2 Création des financements 90
8.2.3 Remboursement interne des financements 91
8.2.4 Mise à jour itérative des ensembles actifs 91
8.2.5 Interprétation opérationnelle 91
8.2.6 Résumé du processus temporel 92
8.2.7 Mesures temporelles du mécanisme 93
8.3 Application du mécanisme temporel et résultats expérimentaux 93
8.3.1 Paramétrisation du mécanisme 94
8.3.2 Évolution temporelle de la compensation 94
8.3.3 Remboursements et amplification effective du mécanisme temporel . . 96

Chapitre 9
Questions et considérations économiques

9.1 Le rôle et l'exposition du financeur 99
9.1.1 Deux scénarios de recyclage 100
9.1.2 Granularité du portefeuille et risque du financeur 101
9.2 Effets de la compensation pour les entreprises 102
9.2.1 Une réduction largement diffusée 103
9.2.2 L'effet de la taille des factures sur le bénéfice obtenu 104
9.2.3 Interprétation économique 105
9.3 Discussion et limites économiques 105
9.3.1 Apports économiques du mécanisme 106
9.3.2 Limites et conditions d'interprétation 106

Conclusion générale **109**

Annexe A
Exploration par ré-ordonnancement de la matrice d'adjacence

A.1 Principe de la méthode 113
A.2 Illustration sur un graphe à communautés connues 113
A.3 Application à des hommes des cavernes bruités 114
A.4 Limites de l'approche 115
A.5 Conclusion 115

Annexe

Annexe B
Preuve que $\Gamma(C)$ est borné par 1

Annexe C
Calcul et mise à jour des potentiels

C.1 Calcul initial des potentiels 119
C.2 Gestion des dépendances circulaires 119
C.3 Mémoïsation des potentiels 120
C.4 Recalcul après modification de la solution 120

Annexe D
Comparaison avec une sélection gloutonne arc par arc

D.1 Principe de la méthode gloutonne 121
D.2 Exemple illustratif 121
D.3 Analyse 123

Annexe E
Résultats détaillés de l'approche diviser pour régner

Bibliographie **127**

Table des figures

1 Illustration de la dynamique de propagation de stress financier et faillites xviii

1.1 Configurations de compensation partielle sur un réseau de dettes 11
1.2 Configurations de compensation intégrale sur un réseau de dettes 13
1.3 Configurations de compensation hybride sur un réseau de dettes 16

3.1 Illustration de notre modèle théorique de réseau dynamique utilisé dans la thèse, adapté de la modélisation proposée dans la thèse de Vernet [1] 29
3.2 Illustration de la décomposition d'un réseau dynamique G observé sur 2 jours dans sa suite générative de $(G^k)_{k\in\{1,2\}}$. Les arcs du réseau dynamique portent les informations (montant ; date). 33

4.1 Répartition du nombre de nœuds, arcs et volume monétaire par mois. 40
4.2 Évolution hebdomadaire du nombre de nœuds, du nombre d'arcs et du volume monétaire total échangé. 43
4.3 Volume total échangé pour chaque graphe journalier. 45
4.4 Distribution des degrés total, entrant, sortant et rang des degrés (échelles log-log). 47
4.5 Distribution des poids des arcs du mois de janvier. 50
4.6 Visualisation des cinq communautés les plus importantes du mois de janvier, calculées par modularité avec une résolution de 1.5. Le placement des nœuds a été obtenu à l'aide de l'algorithme Force-Atlas 2. 55

5.1 Schéma illustratif de l'heuristique de compensation intégrale sur un exemple simple. Le nœud rouge *Fin* représente ici le financeur temporaire. 63
5.2 Position de la solution produite par l'heuristique dans l'espace des solutions pour un graphe aléatoire de 20 arcs. 64
5.3 Évolution du facteur d'amplification en fonction du gain au cours de l'exécution de l'algorithme pour trois graphes journaliers. La fin d'exécution de l'algorithme est le point présentant le gain le plus élevé. 65
5.4 Influence de la taille du graphe sur la réduction de dette et le temps de calcul. . 66

6.1 Illustration de la division centrée nœuds. Les nœuds sont répartis en deux ensembles tandis que les arcs de frontière sont affectés afin d'équilibrer les sous-graphes. 70
6.2 Illustration de la division centrée arcs. Les arcs sont répartis en deux ensembles quasi équilibrés à l'aide de la médiane des poids. 72
6.3 Illustration du processus complet de division-refusion. 75
6.4 Évolution du temps de calcul et de la qualité en fonction du niveau de division et de la méthode. 76

6.5 Évolution du gain de compensation en fonction du niveau de division. 77

7.1 Facteur d'amplification en fonction du gain de compensation. La couleur représente le financement utilisé (en pourcentage de saturation). Les points noirs correspondent aux solutions de référence sans limitation explicite de financement. . 82

8.1 Schéma du mécanisme de compensation temporelle. 92
8.2 Évolution du volume de dette compensée lors des sessions journalières. 95
8.3 Évolution du facteur d'amplification au cours des sessions journalières. 96
8.4 Dynamique des remboursements et amplification effective du mécanisme temporel. 97

9.1 Évolution cumulée du volume de dette compensée et du capital mobilisé par le financeur selon les deux scénarios de recyclage des financements. 101
9.2 Évolution de l'amplification effective selon le scénario de recyclage des financements. 102
9.3 Répartition des effets du mécanisme de compensation selon le profil des entreprises. 104
9.4 Part du volume total représenté par chaque classe de montants et pourcentage de factures compensées selon leur valeur. 105

A.1 Matrices d'adjacence d'un graphe homme des cavernes avant (gauche) et après ré-ordonnancement (droite). Les blocs diagonaux révèlent clairement les communautés. 114
A.2 Matrices d'adjacence d'un graphe homme des cavernes bruité avant (gauche) et après ré-ordonnancement (droite). 114

D.1 Comparaison entre la méthode gloutonne arc-par-arc (alpha) et la méthode par potentiels, sur le même graphe germé de départ. 122

Liste des tableaux

4.1 Valeurs statistiques décrivant la suite G^k mensuelle des données ainsi que l'agrégation annuelle. GWCC et GSCC représentent respectivement la composante géante faiblement connexe et la composante géante fortement connexe. 41
4.2 Statistiques descriptives sur la suite générative hebdomadaire. 43
4.3 Statistiques sur la suite générative journalière. 45
4.4 Différentes valeurs d'exposant mesurées pour les différents mois. ME est la moyenne et SD est la déviation standard inter-mensuelle. 48
4.5 Valeurs statistiques décrivant différents k-noyaux pour le mois de janvier. 52
4.6 Résultats de la détection de communautés par la méthode de Louvain pour le mois de janvier selon différentes résolutions. 54

9.1 Réduction du besoin de liquidité d'au moins 50 %, par type d'entreprise. 103

E.1 Résultats des expériences de division sur le graphe défini dans la Section 6.5 . . . 126

Table des définitions

3.1 Réseau de dettes (forme générale) . . . 31
3.2 Arcs entrants et sortants . . . 31
3.3 Volume de dette d'un réseau . . . 31
3.4 Flux entrants et sortants . . . 31
3.5 Position nette . . . 31
3.6 Conservation globale des positions nettes . . . 32
3.7 Graphe d'émission en période k . . . 32
3.8 Configuration de compensation . . . 33
3.9 Financement externe . . . 33
3.10 Facteur d'amplification . . . 34
3.11 Taux d'inclusion . . . 34
3.12 Gain . . . 34
3.13 Graphe opérationnel de session . . . 35
4.1 k-noyau . . . 51
5.1 Potentiel sortant . . . 60
5.2 Potentiel entrant . . . 60
5.3 Ensembles optimisants locaux . . . 60
5.4 Potentiel d'un chemin . . . 61
5.5 Ratio potentiel/coût . . . 61
8.1 Facteur d'amplification global théorique . . . 93
8.2 Financement effectif . . . 93
8.3 Amplification effective . . . 93

Introduction générale

1 Motivations

Les économies contemporaines sont souvent décrites comme des systèmes complexes adaptatifs, composés de millions d'agents hétérogènes (entreprises, ménages, institutions financières) interagissant à travers des contrats, des flux d'information et des échanges de biens et de liquidités [1]. Contrairement aux économies idéales de la ***théorie de l'équilibre*** [1] [2, 3], dans lesquelles production, prix et demande s'ajustent instantanément, les systèmes économiques réels reposent fondamentalement sur le temps, le crédit et des réseaux d'obligations interdépendantes. La plupart des entreprises n'attendent pas nécessairement les paiements de leurs produits avant de produire ; elles produisent en s'endettant, en acquérant les intrants nécessaires, dans l'anticipation de la vente future de leurs produits. Cette asymétrie temporelle constitue le cœur de ce que Keynes, Schumpeter et les traditions post-keynésiennes ont qualifié d'économie monétaire de production : une économie dans laquelle la production est financée par la dette et où le système bancaire, en réponse aux besoins de financement des entreprises, crée de la monnaie de manière endogène à partir de la dynamique du crédit [2, 3, 4].

Dans de telles économies, la coordination des paiements devient un enjeu central de la stabilité macroéconomique. La capacité des entreprises à honorer leurs obligations n'est donc pas un simple paramètre financier, mais une condition structurelle de la continuité du processus productif. Le recours au règlement différé permet aux entreprises de disposer du temps nécessaire pour réunir la liquidité indispensable à leur fonctionnement. Toutefois, lorsque la liquidité se raréfie, les entreprises retardent leurs paiements, reportent leurs investissements ou réduisent leur production, ce qui peut déclencher des vagues de tensions financières à l'échelle de chaînes d'approvisionnement entières [5, 6]. De tels mécanismes ont été largement documentés lors des grandes crises financières de l'histoire moderne [7, 8] : la Grande Dépression, la crise des subprimes et, plus récemment, le choc lié à la pandémie de COVID-19. Ces crises ont révélé comment les retards de paiement inter-entreprises peuvent propager les difficultés financières à l'ensemble d'une économie ou d'un secteur. Il ne faut toutefois pas considérer que ces phénomènes de propagation ne se produisent que lors de crises de grande ampleur [9, 10]. En réalité, chaque fois qu'une entreprise est incapable de respecter ses échéances de paiement, elle génère une tension à son propre niveau et peut provoquer un effet domino affectant ses partenaires directs, voire une portion plus large du système.

Une part importante de ces tensions de liquidité provient de l'usage massif du crédit inter-entreprises. Dans la quasi-totalité des pays, les paiements différés entre entreprises constituent la principale forme de financement à court terme, dont le volume est supérieur à la totalité des crédits bancaires [11, 12]. Chaque facture émise et non encore réglée alimente un vaste

1. Ensemble de modèles qui étudient comment, sous certaines conditions, les offres et demandes des agents économiques sont compatibles simultanément, conduisant à un état où aucun agent n'a intérêt à modifier son comportement.

réseau d'obligations, en perpétuelle évolution, reliant les entreprises entre elles [5, 13]. Ce réseau peut être analysé comme un réseau pondéré, dirigé et multi-arêtes, doté de structures propres, de rythmes temporels spécifiques et de comportements différenciés selon les entreprises. Bien que chaque entreprise ne soit directement connectée qu'à une fraction limitée de ce réseau, la structure agrégée du réseau joue un rôle systémique déterminant. Un simple retard de paiement peut se propager le long des chaînes de fournisseurs, de prestataires et de sous-traitants, diffusant des pénuries de liquidité [9, 6, 10], par analogie avec la contagion observée dans les réseaux épidémiologiques. Cette idée de propagation est notamment mise en avant sur la Figure 1, qui représente le mécanisme de contagion financière au sein d'un réseau dirigé d'obligations : un choc de liquidité localisé entraîne un défaut de paiement, lequel se transmet aux créanciers directs et peut générer une dynamique de cascade.

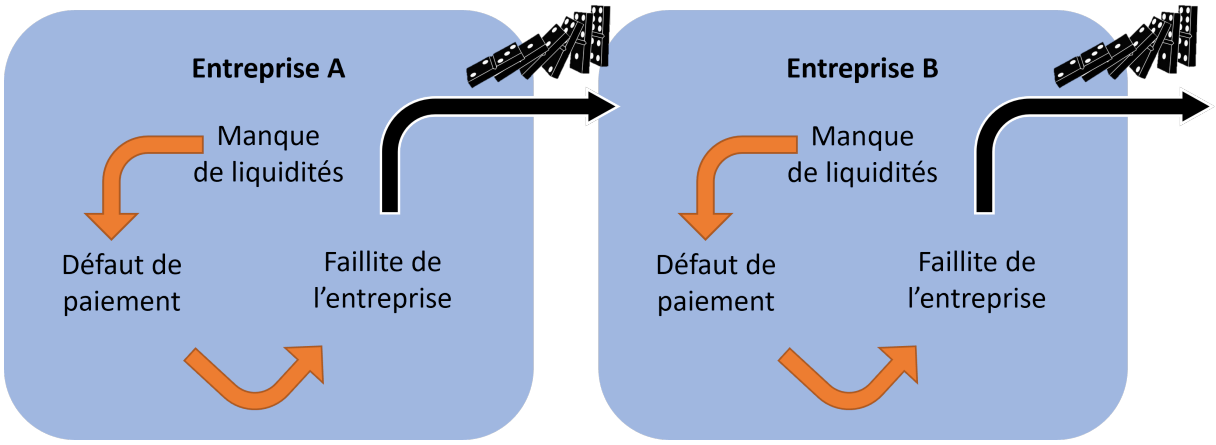


FIGURE 1 – Illustration de la dynamique de propagation de stress financier et faillites

La structuration systémique des obligations est donc clé pour la coordination [2] des paiements et devient ainsi une dimension importante de la stabilité macroéconomique [14, 15].

Ces constats mettent en évidence un problème fondamental de coordination au cœur des systèmes de paiement contemporains. Chaque jour, un grand nombre d'entreprises doivent honorer des obligations aux caractéristiques diverses. Les montants en jeu peuvent varier de quelques euros à plusieurs millions d'euros, les échéances peuvent s'étendre de quelques jours à plusieurs mois et les relations contractuelles peuvent prendre des formes multiples selon les secteurs d'activité, les chaînes d'approvisionnement ou les pratiques commerciales. Certaines entreprises disposent de réserves de liquidité importantes tandis que d'autres dépendent étroitement des paiements qu'elles attendent de leurs partenaires pour ensuite régler leurs propres dettes.

Cette hétérogénéité rend la coordination des paiements particulièrement complexe. Une entreprise connaît en général ses propres obligations et parfois celles de ses partenaires immédiats, mais elle ne dispose quasi jamais d'une vision globale du réseau des paiements dans lequel elle s'insère. Elle ignore quelles entreprises peuvent être sous tension de liquidité, quelles obligations pourraient se compenser indirectement ou encore comment ses décisions de paiement affectent le reste du système. Les paiements sont ainsi réalisés de manière décentralisée, sur la base d'informations locales et incomplètes.

2. La notion de coordination est la capacité d'un ensemble d'agents à réaliser leurs paiements de manière cohérente et synchrone.

D'un point de vue théorique, un système pleinement coordonné pourrait organiser les flux sous la forme d'un règlement net, en ne mobilisant de liquidité que pour les agents dont les dépenses sont supérieures à leurs entrées attendues. Un tel règlement net repose toutefois sur un processus de compensation, consistant à faire émerger les positions nettes des entreprises [3] au sein du réseau. Dans un tel cadre, une part importante des paiements pourrait être annulée mutuellement avant même d'être exécutée, réduisant ainsi les besoins de liquidité et limitant les risques de propagation des tensions financières.

Cette observation soulève toutefois plusieurs questions importantes. Dans quelle mesure les difficultés de liquidité observées dans les réseaux inter-entreprises résultent-elles d'un manque effectif de ressources financières ? Dans quelle mesure proviennent-elles d'une coordination imparfaite des paiements ? Les créances et dettes présentes dans le réseau pourraient-elles être compensées de manière à réduire les besoins de financement sans perturber les relations contractuelles existantes des entreprises ? Les structures d'interdépendances observées dans les réseaux sont-elles favorables à des mécanismes de compensation ? Faut-il généraliser ces compensations à toutes les obligations ?

Comme les entreprises ne connaissent le réseau qu'à un niveau local, une compensation globale est-elle faisable dans un réseau dont les propriétés demeurent méconnues ? La présence de circuits ou de dépendances de dettes est-elle suffisamment fréquente pour permettre une compensation significative ? Quels volumes de liquidités pourraient être ainsi économisés ? Quels risques pourraient introduire de tels mécanismes dans notre réseau ?

Répondre à ces questions suppose de dépasser une vision purement comptable des paiements et de se pencher sur une analyse et un traitement des réseaux inter-entreprises comme des systèmes complexes d'obligations en interaction. C'est dans cette perspective que s'inscrit cette thèse même si celle-ci n'apportera sûrement pas de réponses à toutes les questions que nous nous posons sur ces systèmes.

2 Objectifs

Les questions précédentes conduisent à une interrogation centrale : dans quelle mesure les réseaux d'obligations inter-entreprises permettent-ils de réduire les besoins de liquidité grâce à des mécanismes de compensation, et sous quelles conditions une telle réduction peut-elle être réalisée de manière soutenable ?

Si les bénéfices théoriques de la compensation multilatérale [4] en termes d'économie de liquidité sont bien établis [16, 17], sa mise en œuvre effective dans les réseaux inter-entreprises demeure marginale. Cette situation est fréquemment attribuée à des contraintes institutionnelles, juridiques ou informationnelles, telles que l'hétérogénéité des contrats commerciaux, l'absence de chambres de compensation dédiées ou la difficulté à coordonner un grand nombre d'agents décentralisés. Ces explications, bien que pertinentes, laissent ouverte la question de savoir si les limites observées proviennent uniquement de difficultés institutionnelles, ou si elles sont plus profondément ancrées dans la structure et la dynamique mêmes des réseaux de paiements inter-entreprises.

3. La position nette d'une entreprise est la différence entre son montant total des créances et son montant total de dettes.

4. Mécanisme de règlement visant à compenser des obligations au sein d'un réseau afin de réduire les montants à transférer. Voir Section 1.5 pour les détails du fonctionnement.

Une première difficulté tient à la nature des réseaux d'obligations inter-entreprises eux-mêmes. Les travaux en économie des réseaux financiers et en physique économique mettent en évidence des structures fortement hétérogènes, orientées et dynamiques, au sein desquelles les relations de crédit et de dette s'organisent selon des motifs complexes [5, 10, 14]. Dans ce contexte, de nombreux mécanismes de compensation proposés reposent, explicitement ou implicitement, sur l'exploitation de circuits fermés d'obligations, qui permettent une réduction directe des expositions brutes sans mobilisation externe de liquidité [18, 19]. Une première question consiste donc à déterminer dans quelle mesure la fréquence d'apparition de ces structures fermées est suffisante dans les réseaux inter-entreprises réels. En découle aussi directement une interrogation sur leur capacité à soutenir une réduction significative de la liquidité à l'échelle macroéconomique.

La seconde difficulté concerne la conception même des mécanismes de compensation. En effet, les limitations liées aux structures conduisent naturellement à distinguer entre ***compensation partielle*** et ***compensation intégrale***. La compensation *partielle* (voir Sous-section 1.6.1), fondée sur une réduction fractionnée des créances, peut être mise en œuvre sans intervention financière externe, mais elle soulève des difficultés pratiques liées à la modification des obligations initiales, à la traçabilité contractuelle et à la gestion du risque de contrepartie [5]. À l'inverse, la compensation *intégrale* (voir Sous-section 1.6.2), qui consiste à régler intégralement les créances sélectionnées, apparaît plus compatible avec l'architecture contractuelle standard du crédit commercial. Elle implique toutefois une coordination accrue et, dans la plupart des cas, l'intervention d'un acteur capable d'assurer le financement temporaire des positions nettes négatives [17, 20]. D'un point de vue analytique, cette approche transforme la compensation en un problème d'***optimisation sous contraintes***, dans lequel il s'agit d'arbitrer entre volume de dette compensée et financement nécessaire.

Ces difficultés sont renforcées par la dimension temporelle du problème. Les réseaux de facturation inter-entreprises évoluent en continu, au gré de l'émission de nouvelles factures, des règlements effectués et de l'expiration des échéances. Les décisions de compensation prises à un instant donné ne se contentent pas de réduire les obligations existantes : elles modifient aussi la structure du réseau de créances et de dettes en supprimant certains liens financiers entre entreprises. Ces transformations influencent les opportunités de compensation futures ainsi que les besoins de liquidité des acteurs lors des périodes suivantes. Dès lors, l'évaluation d'un mécanisme de compensation ne peut se limiter à une analyse statique ou instantanée : elle doit intégrer la dynamique temporelle des créances, la récurrence des besoins de financement et la capacité du système à atteindre un régime soutenable dans le temps [21].

Enfin, la réduction des besoins de liquidité obtenue par la compensation multilatérale ne saurait être analysée indépendamment du déplacement des risques qu'elle induit. Les recherches sur les systèmes de paiement soulignent que les mécanismes de compensation déplacent les risques de liquidité et de crédit vers les acteurs qui portent la responsabilité du règlement final et des financements [22, 23]. Dans le cas des réseaux inter-entreprises, où les entreprises sont caractérisées par une hétérogénéité de tailles, de bilans et de comportements financiers, mais surtout par un manque de confiance et connaissance envers les autres agents, ce déplacement du risque soulève des enjeux spécifiques de soutenabilité et de stabilité systémique [8, 7, 12]. La question centrale devient alors celle des conditions sous lesquelles un mécanisme de compensation peut réduire durablement la demande de liquidité, tout en maintenant un niveau de risque compatible avec la continuité du processus productif [6].

5. Risque encouru par le financeur d'un crédit.
6. Acceptable par les financeurs.

Pour essayer de répondre à ces interrogations, ce manuscrit de thèse se concentre sur l'étude des réseaux d'échanges inter-entreprises envisagés comme des systèmes dynamiques d'obligations financières et poursuit un double objectif, à la fois de compréhension de ces réseaux et de résolution du problème de liquidités. D'une part, il s'agit de caractériser la structure des réseaux de paiements ***Business-to-Business*** (B2B), en étudiant leur topologie, les dynamiques temporelles et les hétérogénéités qui conditionnent les possibilités de compensation multilatérale et les mécanismes de propagation des tensions de liquidité. D'autre part, la thèse propose et analyse une méthode originale de mutualisation intégrale des dettes inter-entreprises, conçue comme un dispositif hybride entre règlement brut différé et compensation multilatérale centralisée. Cette approche vise à dépasser les limites inhérentes aux mécanismes de compensation partielle traditionnellement mobilisés dans le contexte B2B, tout en étant compatible avec les contraintes contractuelles, informationnelles et opérationnelles propres à ces réseaux.

L'analyse de ce problème ne se limite pas à sa formulation conceptuelle, mais s'attache à en proposer une résolution algorithmique, permettant d'étudier de manière systématique les arbitrages entre volume de dette effectivement compensée et liquidité mobilisée. Elle intègre en outre la dimension dynamique et financière du dispositif, en examinant les conditions de soutenabilité des besoins de liquidité, les effets de la compensation sur la distribution des risques et la stabilité du système proposé dans le temps. En articulant ainsi analyse structurelle des réseaux, conception de mécanismes de règlement et évaluation de leurs implications macroéconomiques, ce manuscrit vise à apporter un cadre cohérent pour l'étude et la mise en œuvre de dispositifs de compensation multilatérale adaptés à des systèmes économiques fondés sur le crédit inter-entreprises.

3 Contributions

Les mécanismes de compensation de dettes et les réseaux financiers inter-entreprises ont fait l'objet de nombreux travaux en économie, en recherche opérationnelle et en science des réseaux. La littérature existante a notamment étudié les propriétés structurelles des réseaux financiers, les mécanismes de compensation multilatérale et certains algorithmes de réduction de dettes. Toutefois, ces approches restent souvent limitées soit à des modèles économiques agrégés, soit à des méthodes algorithmiques conçues pour des structures de taille modérée.

Dans le contexte des réseaux de facturation B2B à grande échelle, plusieurs défis demeurent ouverts : la caractérisation de la structure de ces réseaux, la conception d'algorithmes capables d'identifier efficacement des ensembles de dettes mutualisables dans des graphes larges, ainsi que l'intégration de contraintes réalistes de financement et de dynamique temporelle.

La première partie de ce manuscrit présente un état de l'art de ces différentes approches et introduit, aux Chapitres 1 et 2, le cadre conceptuel utilisé. Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans une progression allant de l'analyse structurelle des réseaux de dettes inter-entreprises à la conception d'algorithmes de compensation applicables à grande échelle, puis à leur extension dans un cadre temporel et économique. La suite des principales contributions est organisée de la façon suivante :

Caractérisation structurelle des réseaux de dettes inter-entreprises : Une première contribution consiste à analyser la structure des réseaux de facturation B2B à l'aide des outils de la science des réseaux. Cette étude met en évidence les propriétés topologiques de ces réseaux, notamment la distribution des degrés, les propriétés d'échelle et l'existence de structures communautaires dans des multigraphes orientés pondérés représentant les relations de facturation.

Ces résultats permettent de situer les réseaux B2B par rapport aux grandes familles de réseaux complexes et d'identifier des structures potentiellement favorables à la compensation de dettes. Ils constituent également la base d'un premier cadre formel pour la mutualisation intégrale B2B et introduisent un indice permettant de guider des heuristiques centrées sur les arcs. Ces travaux sont présentés dans les Chapitres 3 et 4 et ont fait l'objet d'une publication accompagnée d'un poster à la conférence *Complex Networks 2023* [24].

Conception d'une heuristique de compensation intégrale sur graphe statique : La seconde contribution concerne la formalisation algorithmique du problème de mutualisation intégrale de dettes dans un réseau statique, dont la difficulté algorithmique est établie dans la littérature [17, 25]. Une heuristique d'optimisation est proposée afin de sélectionner des ensembles de factures maximisant simultanément le volume de dettes mutualisées et l'efficacité de l'usage de liquidités.

Cette approche introduit plusieurs métriques d'évaluation, notamment le facteur d'amplification du financement, le taux d'inclusion des factures et le gain associé au mécanisme. L'algorithme proposé dans la thèse est évalué sur des graphes synthétiques ainsi que sur un jeu de données réelles de grande ampleur comprenant plus de 22 millions de factures B2B issues du facturateur électronique italien InfoCert (2019). Ces résultats sont présentés dans le Chapitre 5 et ont été partiellement présentés lors d'un atelier à l'Institut des Systèmes Complexes – Paris Île-de-France en 2024 puis à la conférence *FRCCS 2025* [26].

Passage à l'échelle et limitation des financements : Une troisième contribution vise à rendre cette approche applicable à des réseaux de très grande taille. Pour cela, des stratégies de décomposition du graphe de type ***diviser-pour-régner*** (*divide-and-conquer*) sont introduites afin de réduire la complexité computationnelle de l'heuristique.

Les résultats montrent que ces méthodes permettent de réduire significativement les temps de calcul tout en conservant des niveaux comparables de dette mutualisée et d'efficacité de financement. Cette étude est présentée dans le Chapitre 6 et a fait l'objet d'une présentation à la conférence *CSS 2025* [27].

Les contributions précédentes sont ensuite consolidées au Chapitre 7 dans un cadre algorithmique unifié intégrant explicitement des contraintes sur le montant de capital apporté par le financeur. Les résultats montrent qu'il est possible de traiter efficacement des graphes comportant plusieurs millions d'arcs tout en maintenant une efficacité de financement élevée. Ces résultats font actuellement l'objet d'un article en cours d'évaluation dans un journal.

Extension à un cadre temporel et implications économiques : Enfin, le travail présenté au Chapitre 8 consiste à étendre le modèle statique à un cadre dynamique afin de représenter l'évolution temporelle des réseaux de facturation B2B. Le modèle introduit des sessions successives de mutualisation intégrant l'arrivée continue de nouvelles factures, des durées de vie finies pour les dettes et des mécanismes de remboursement progressif du financeur.

Les expérimentations menées pour le Chapitre 9 sur les données InfoCert montrent que, sous des hypothèses réalistes, le capital engagé par le financeur converge vers un régime stationnaire tandis que le volume cumulé de dettes mutualisées continue de croître, suggérant la soutenabilité du mécanisme à long terme. On y discute aussi les implications économiques de ces résultats et les effets potentiels de ce mécanisme de compensation intégrale sur la liquidité et la structure des réseaux de dettes inter-entreprises. Ces résultats font eux aussi l'objet d'un article en cours de relecture, pour un second journal.

Première partie

État de l'art

Chapitre 1 :
Liquidité, réseaux de dettes et mécanismes de compensation inter-entreprises

Sommaire

1.1 Économies monétaires de production et asymétrie temporelle des paiements 3
1.2 Le crédit inter-entreprises comme institution décentralisée de liquidité 5
1.3 Crises financières et reconfiguration des liquidités inter-entreprises 6
1.4 Propagation des tensions de liquidité 8
1.5 Mutualisation des dettes et mécanismes de préservation de la liquidité dans les réseaux B2B 9
1.6 Compensation partielle et intégrale : contraintes contractuelles, coordination et complexité 11
1.7 Dimension dynamique et soutenabilité temporelle des mécanismes de mutualisation 17
1.8 Synthèse des exigences économiques et informatiques 18

Ce chapitre propose un état de l'art ciblé et un cadre conceptuel visant à établir le socle théorique dans lequel s'inscrit l'analyse systémique et algorithmique développée dans cette thèse. Il a également pour objectif de formaliser, dans un langage compatible avec l'informatique et les systèmes complexes, les contraintes économiques qui structurent les réseaux de dettes inter-entreprises (B2B). Le but n'est pas de produire une revue exhaustive de la littérature macroéconomique, mais d'identifier les concepts, mécanismes et résultats expérimentaux indispensables à la modélisation de ces réseaux en tant que systèmes dynamiques complexes. En particulier, ce travail s'inscrit dans le cadre des ***économies monétaires de production***, pour lesquelles la monnaie, le crédit et la liquidité constituent des conditions nécessaires à l'émergence et à la continuité du processus productif, et non de simples instruments neutres facilitant l'échange.

1.1 Économies monétaires de production et asymétrie temporelle des paiements

Contrairement aux représentations walrasiennes de l'économie [28, 29], fondées sur la synchronisation instantanée de la production, de l'échange et du paiement, les économies réelles se caractérisent par une asymétrie temporelle fondamentale entre l'engagement des coûts et la réalisation des revenus. Dans une économie de production, les agents producteurs doivent acquérir

des intrants, rémunérer le travail et engager des dépenses avant que les biens ou services produits ne soient vendus. Graziani souligne que cette structure temporelle implique que la production est nécessairement financée au préalable par du crédit [30] : la monnaie intervient comme condition préalable de l'activité productive, et non comme un simple voile recouvrant les échanges réels [31].

Ce postulat constitue le cœur de la tradition des économies monétaires de production, formalisée notamment par Keynes [2] et Schumpeter [3], puis développée par les approches post-keynésiennes et circuitistes. Moore prolonge cette tradition en montrant que la monnaie est créée de façon endogène par le système financier en réponse aux besoins de financement des entreprises [4] : le niveau d'activité économique dépend de la capacité du système à fournir la liquidité requise au bon moment. L'économie peut alors être vue comme un système dynamique d'engagements financiers. Les entreprises contractent des obligations [7] aujourd'hui pour financer une production dont les revenus seront réalisés plus tard.

1.1.1 La liquidité comme contrainte systémique dans les réseaux de paiements

Cette économie peut être interprétée comme un réseau dynamique d'agents producteurs, reliés par des obligations financières orientées et pondérées, représentant des promesses de paiement différé. La liquidité joue dans ce réseau un rôle analogue à une ressource critique partagée : elle conditionne la capacité des agents à activer les transitions associées au règlement des dettes et à la poursuite de la production. Une insuffisance de liquidité ne se traduit pas uniquement par une perte d'efficacité locale, mais peut engendrer des blocages globaux, des effets de congestion et des cascades de défauts le long des chemins du réseau.

La distinction entre contrainte de liquidité et contrainte de solvabilité est fondamentale : un agent peut être solvable à long terme tout en étant illiquide à court terme, et donc incapable d'honorer ses engagements à l'échéance [32]. Dans un réseau dense d'obligations inter-entreprises, cette distinction est cruciale : Battiston et d'autres scientifiques montrent qu'un retard de paiement local peut propager une pénurie de liquidité à des agents pourtant fondamentalement viables, générant des externalités négatives et amplifiant les fluctuations macroéconomiques [5, 6].

Dans cette perspective, la liquidité ne peut être appréhendée comme une simple variable agrégée, mais doit être analysée comme une propriété du réseau de paiements. La distribution des échéances, la topologie des relations de crédit et les comportements stratégiques des agents influencent conjointement la quantité de liquidité nécessaire au fonctionnement du système. Leinonen montre ainsi que l'économie mobilise un volume de liquidité souvent largement supérieur au minimum théorique requis pour régler les ***positions nettes*** [8] finales, en raison de l'absence de coordination globale et du caractère séquentiel des règlements [33]. L'excès de liquidité mobilisée n'est pas intrinsèquement problématique : dans un système décentralisé sans coordination, c'est un coût nécessaire pour la robustesse et l'autonomie des agents. Il devient cependant problématique lorsque la liquidité est rare, coûteuse ou inégalement distribuée, trois conditions qui, nous le verrons, sont fréquemment réunies dans les réseaux inter-entreprises. C'est précisément dans ce cas que des mécanismes de coordination des paiements, tels que la compensation multilatérale,

7. Une obligation désigne tout engagement de payer une somme déterminée à une échéance fixée, indépendamment de l'instrument qui le matérialise. Une facture est par exemple un type particulier d'obligation des échanges inter-entreprise. On utilisera ces termes de façon interchangeable dans ce manuscrit.

8. Différence entre les entrées et sorties économique d'un agent à un moment donné, indiquant s'il est créancier (position positive) ou débiteur (position négative).

trouvent leur justification économique.

1.1.2 Une lecture réseau et algorithmique des économies de production

Cette lecture réseau-centrée de l'économie conduit naturellement à formuler les problèmes économiques classiques en termes de contraintes de calcul et d'optimisation distribuée. Chaque agent dispose d'une information locale, prend des décisions sous contraintes de liquidité et interagit avec un sous-ensemble limité du réseau, tandis que les propriétés systémiques émergent de l'agrégation de ces interactions. La stabilité macroéconomique dépend alors de la capacité du système à orchestrer les flux de paiements de manière cohérente dans le temps, en minimisant les besoins de liquidité tout en respectant les contraintes contractuelles et informationnelles.

Dans ce contexte, les mécanismes de compensation et de mutualisation des dettes apparaissent comme des dispositifs algorithmiques visant à transformer un réseau d'obligations brutes en un réseau de positions nettes, réduisant ainsi la pression sur les liquidités [22]. Comprendre les conditions économiques sous lesquelles de tels mécanismes peuvent émerger, fonctionner et rester soutenables constitue un préalable indispensable à leur formalisation informatique.

Les sections suivantes de ce chapitre examinent successivement le rôle du crédit inter-entreprises comme institution de liquidité, les mécanismes de propagation des tensions financières dans les réseaux productifs, et les dispositifs de mutualisation et de compensation proposés dans la littérature économique. Cette analyse vise à dégager un ensemble de contraintes que toute méthode algorithmique de mutualisation des dettes inter-entreprises doit satisfaire pour être compatible avec le fonctionnement d'une économie monétaire de production.

1.2 Le crédit inter-entreprises comme institution décentralisée de liquidité

Dans le cadre général des économies monétaires de production décrit précédemment, la question centrale n'est plus de savoir si la liquidité est nécessaire à la continuité du processus productif, mais par quels mécanismes institutionnels elle est effectivement fournie aux entreprises. Parmi ces mécanismes, le crédit inter-entreprises occupe une place singulière. Il constitue, en volume, la principale source de financement à court terme des entreprises, dépassant largement le crédit bancaire dans la majorité des économies développées [11, 12]. Les données issues de la Banque de France en 2019 l'illustrent bien : le montant des crédits inter-entreprises en France dépassait 520 milliards d'euros, soit près de sept fois celui des financements bancaires à court terme, et ce quelle que soit la taille des entreprises [34]. Cette source de financement représentait par ailleurs environ 30 % de l'endettement brut total des entreprises en 2022 [35].

Contrairement au crédit bancaire, le crédit inter-entreprises ne repose ni sur une intermédiation spécialisée, ni sur une coordination centralisée. Il émerge de décisions contractuelles décentralisées, prises au niveau des relations commerciales bilatérales, et s'inscrit dans la continuité du processus productif lui-même. En acceptant un paiement différé, une entreprise transforme une transaction réelle en un engagement financier intertemporel [9], assumant temporairement un rôle de fournisseur de liquidité à son partenaire commercial. Cette fonction financière des entreprises est largement documentée dans la littérature, notamment pour les entreprises disposant d'un accès privilégié au financement externe [9, 12].

9. Un engagement dont l'exécution est répartie dans le temps, créant un lien entre une livraison présente et un règlement futur.

D'un point de vue macroéconomique, cette institution décentralisée assure une redistribution de la liquidité au sein du tissu productif. Elle permet aux entreprises, contraintes sur le plan bancaire, de maintenir leur activité en s'appuyant sur leurs relations commerciales, tout en *transférant une partie du risque* et de la contrainte de liquidité vers leurs fournisseurs. Cette redistribution n'est toutefois ni neutre ni homogène. Elle dépend fortement de la structure des chaînes de valeur, de la taille des entreprises et de leur position dans le réseau des échanges [7].

Cette hétérogénéité se traduit par la formation d'un réseau de créances inter-entreprises, dans lequel certaines entreprises concentrent des volumes significatifs de dettes et de créances. Les travaux en économie des réseaux financiers montrent que ces structures présentent des distributions fortement asymétriques et des motifs récurrents, susceptibles d'amplifier localement les contraintes de liquidité [5, 14]. Le crédit inter-entreprises ne peut donc être analysé uniquement comme une série de relations bilatérales indépendantes, mais comme une institution systémique dont les effets émergent à l'échelle du réseau, dont nous définirons le modèle au Chapitre 3.

Un trait fondamental du crédit inter-entreprises réside dans son comportement autonome et procyclique [10], au sens où son volume et ses conditions co-évoluent avec l'activité économique. En période d'expansion, les entreprises acceptent plus volontiers des ***délais de paiement contractuels*** plus longs et des volumes accrus de crédit commercial, ce qui facilite la production et l'investissement. À l'inverse, lors des phases de contraction ou de rationnement bancaire, les entreprises contraintes ajustent leur trésorerie en accumulant des ***retards de paiement effectifs***, transformant alors le réseau inter-entreprises en principal vecteur de propagation des tensions de liquidité [6, 8]. Ce mécanisme confère au crédit commercial un rôle dual : il agit simultanément comme amortisseur de chocs et comme source potentielle d'instabilité systémique.

Enfin, le problème de l'absence de coordination globale dans l'octroi et le règlement du crédit inter-entreprises implique que les paiements s'effectuent de manière séquentielle et bilatérale. Comme évoqué précédemment, cette organisation conduit le système productif à mobiliser un volume de liquidité largement supérieur à celui qui serait requis pour régler les positions nettes agrégées [33]. Cette inefficience structurelle ne remet pas en cause le rôle économique fondamental du crédit inter-entreprises, mais elle ouvre un espace analytique pour l'étude de mécanismes de mutualisation et de compensation susceptibles d'en améliorer la coordination sans en altérer les fondements institutionnels. La littérature économique souligne que la compensation multilatérale, en rendant possible le règlement des seuls soldes nets, constitue un levier majeur de réduction de la demande de liquidité [22] : l'agrégation des obligations par le biais d'un algorithme de compensation permet ainsi de régler un volume de paiements avec une fraction de la liquidité qui serait normalement nécessaire. Des mécanismes de ce type ont été déployés avec succès par les banques centrales (Banque d'Angleterre, Banque Centrale Européenne) dans les systèmes de paiement interbancaires [37, 38].

1.3 Crises financières et reconfiguration des liquidités inter-entreprises

Les épisodes de crise financière constituent un cadre privilégié pour analyser le fonctionnement effectif des mécanismes de fourniture de liquidité dans les économies monétaires de production. Lorsque les conditions macroéconomiques se détériorent, le système bancaire tend à restreindre l'offre de crédit, soit en raison d'un durcissement des contraintes prudentielles, soit à la suite d'une dégradation de la qualité des bilans et des anticipations [39]. Ce phénomène de

10. On dit d'une variable qu'elle est ***procyclique*** lorsqu'elle évolue dans le même sens que l'activité économique : elle croît en période d'expansion et se contracte en période de récession [36].

rationnement bancaire ne se traduit pas uniquement par une contraction globale du financement, mais par une redistribution asymétrique de l'accès à la liquidité entre les entreprises.

Petersen et Rajan montrent que ce rationnement affecte en priorité les petites et moyennes entreprises, ainsi que les entreprises occupant des positions périphériques dans les chaînes de valeur, tandis que les entreprises de grande taille ou disposant de relations bancaires privilégiées conservent un accès relativement stable au financement externe [12, 7]. Cette hétérogénéité d'accès au crédit bancaire modifie profondément l'équilibre des mécanismes de financement à court terme et accroît la dépendance des entreprises contraintes vis-à-vis du crédit inter-entreprises.

Dans ce contexte, les entreprises ne peuvent plus être considérées comme de simples réceptrices passives de liquidité, mais deviennent des acteurs centraux du jeu de redistribution des ressources financières au sein du système productif. Les entreprises disposant de marges de liquidité suffisantes étendent davantage de crédit commercial, tandis que les entreprises contraintes ajustent leur trésorerie en accumulant des retards de paiement. Ce comportement différencié transforme le réseau inter-entreprises en un substitut partiel au système bancaire, capable d'absorber temporairement les chocs de liquidité, mais au prix d'un transfert accru des tensions financières vers les fournisseurs [8, 9].

Les crises financières récentes ont mis en évidence ce rôle ambivalent des entreprises dans la dynamique des liquidités. Lors de la crise des subprimes et, plus récemment, durant le choc lié à la pandémie de COVID-19, l'allongement des délais effectifs de paiement et la multiplication des retards ont constitué l'un des principaux canaux de transmission des tensions financières à l'intérieur des chaînes d'approvisionnement [7, 8]. Ces phénomènes ne se limitent toutefois pas aux périodes de crise systémique : en régime normal, Direr montre que des chocs locaux de liquidité peuvent se propager à travers le réseau inter-entreprises, affectant des entreprises initialement solvables [9].

D'un point de vue systémique, le rationnement bancaire [11] agit ainsi comme un catalyseur qui révèle et amplifie les fragilités structurelles du réseau productif. En l'absence de mécanismes de coordination globale, les ajustements locaux des entreprises qui se veulent rationnels à l'échelle individuelle peuvent conduire à des dynamiques collectives inefficaces et une instabilité accrue du système [6]. Ce paradoxe souligne que la stabilité macroéconomique ne peut être déduite des seuls comportements optimaux des agents pris isolément.

Cette reconfiguration des liquidités [12] en période de tension met en lumière les limites d'une approche exclusivement bancaire du financement à court terme. Elle invite à considérer les réseaux inter-entreprises comme des objets analytiques à part entière, dans lesquels les entreprises jouent un rôle actif dans la création, la transmission et la transformation des contraintes de liquidité. Comprendre ces mécanismes constitue un préalable essentiel à l'étude des dispositifs de coordination et de mutualisation susceptibles de limiter la propagation des chocs et d'améliorer la résilience du système productif.

11. Le rationnement du crédit désigne la situation dans laquelle les banques refusent d'accorder des prêts à certains emprunteurs, ou n'en accordent qu'un montant inférieur à celui demandé, même lorsque ces derniers seraient disposés à payer un taux d'intérêt plus élevé. Ce phénomène s'explique par l'asymétrie d'information entre prêteurs et emprunteurs : augmenter le taux d'intérêt attire des emprunteurs plus risqués et incite à des projets plus hasardeux, de sorte que la banque préfère rationner les quantités plutôt que d'ajuster le prix du crédit à la hausse [39].

12. On entend ici par ***reconfiguration*** le processus par lequel un choc, comme un épisode de rationnement bancaire, modifie durablement la structure des flux de liquidité inter-entreprises. Il ne s'agit donc pas d'un simple ajustement quantitatif, mais d'une transformation qualitative de l'accès à la liquidité au sein du système.

1.4 Propagation des tensions de liquidité

Les réseaux de dettes inter-entreprises peuvent être analysés comme des ***systèmes complexes***, au sens où leurs propriétés globales résultent de l'agrégation d'un grand nombre d'interactions locales entre agents hétérogènes. L'introduction des outils du cadre des réseaux complexes, développé par Newman [40], et des systèmes dynamiques a permis de dépasser une vision purement agrégée des relations financières, en mettant en évidence le rôle structurant de la topologie des interconnexions dans les phénomènes de propagation et d'amplification des tensions [5, 6]. L'objectif de ces modélisations et études n'est pas de développer une théorie de la stabilité macroéconomique en tant que telle, mais d'identifier les contraintes structurelles et dynamiques des réseaux de paiements. Ce sont ces attributs du réseau qui vont conditionner la conception de mécanismes de règlement et de mutualisation à grande échelle.

Dans le cas des réseaux B2B, chaque facture à paiement différé est représentée par un arc orienté et pondéré, reliant un débiteur à un créancier pour un montant et une échéance donnés. L'ensemble de ces obligations forme un graphe de grande taille, hétérogène et évolutif, caractérisé par des distributions de degrés et de poids fortement asymétriques, ainsi que par la présence de motifs locaux récurrents [14]. De telles structures sont connues, en informatique des réseaux, pour induire des dynamiques non linéaires et des effets émergents qui rendent toute intervention globale sur le réseau non triviale.

Barrat et al. montrent, lors de leur recherche sur la propagation dans les réseaux complexes, que la diffusion d'une perturbation locale dépend de manière critique de la structure du graphe et des règles locales de transition, plutôt que de la seule intensité du choc initial [41, 42]. Dans un réseau de dettes, Bardoscia et al. interprètent un retard de paiement ou un défaut partiel comme une perturbation locale qui se transmet le long des arcs sortants, suivant des trajectoires fortement conditionnées par la topologie et la synchronisation des obligations [10].

Du point de vue des systèmes complexes, les ajustements locaux des agents, comme le report d'un paiement ou la réduction d'un volume de crédit accordé, peuvent être modélisés comme des règles opérant sur les nœuds et les arcs du graphe. Selon la configuration du réseau et l'état du système, ces règles peuvent rester confinées à une portion limitée du graphe ou, au contraire, produire des cascades affectant une part significative du réseau, ce que Watts formalise dans son modèle de cascades [43]. Cette sensibilité structurelle implique que toute modification du réseau, même motivée par des objectifs locaux rationnels, est susceptible d'avoir des effets globaux non anticipés.

Ces propriétés ont des implications directes pour la conception de mécanismes de règlement, de compensation ou de mutualisation des dettes. Dans des réseaux de grande taille et faiblement coordonnés, une transformation naïve des obligations peut altérer la structure du graphe de manière imprévisible, en modifiant les trajectoires de propagation et les besoins de liquidité associés. La littérature souligne ainsi que l'exploitation de certaines structures du réseau, telles que les cycles d'obligations ou les sous-graphes fortement connectés, peut offrir des leviers de réduction des expositions brutes, mais que leur identification et leur traitement posent des défis informatiques importants [5, 10].

Dans ce contexte, la notion de stabilité systémique ne constitue pas un objectif d'analyse en soi, mais une contrainte implicite pesant sur tout dispositif de transformation du réseau de dettes. Un mécanisme de mutualisation ne peut être évalué uniquement par la réduction locale des obligations ou de la liquidité mobilisée. Il doit également être compatible avec les propriétés structurelles et dynamiques du réseau sur lequel il opère. Cette exigence justifie le recours à des modèles explicites et à des algorithmes dédiés, capables de traiter des graphes B2B de grande taille tout en maîtrisant les effets induits par la propagation et sans transformer profondément

les relations de confiance des entreprises.

Ainsi, l'approche par les réseaux complexes fournit le cadre conceptuel dans lequel la mutualisation des dettes inter-entreprises peut être formulée comme un problème de transformation algorithmique de graphes dynamiques. Elle permet de comprendre pourquoi la coordination des règlements dans des réseaux B2B à grande échelle ne peut être réduite à une simple agrégation comptable, et pourquoi elle requiert des méthodes informatiques adaptées aux contraintes structurelles et dynamiques du système.

1.5 Mutualisation des dettes et mécanismes de préservation de la liquidité dans les réseaux B2B

Face aux besoins élevés de liquidité induits par des règlements bilatéraux et séquentiels, la littérature économique et institutionnelle s'est progressivement intéressée aux mécanismes permettant de réduire la mobilisation de liquidités sans interrompre le processus productif. Dans ce contexte, les dispositifs de mutualisation et de compensation des obligations financières apparaissent comme des instruments visant à améliorer la coordination des paiements et à limiter les tensions de trésorerie, en particulier dans les réseaux caractérisés par un volume élevé de transactions à paiement différé.

Le principe général de la mutualisation repose sur l'agrégation d'obligations financières distinctes afin de réduire les expositions brutes et de ne mobiliser de liquidité que pour les positions nettes finales des agents. D'un point de vue économique, cette logique peut être interprétée comme une mise en commun temporaire des contraintes de liquidité individuelles, permettant au système de fonctionner avec une quantité de liquidité inférieure à celle requise par des règlements purement bilatéraux [33]. Le Comité des Systèmes de Paiements documente que des mécanismes de ce type ont démontré leur efficacité dans les systèmes de paiement interbancaires, où la compensation multilatérale constitue un levier central d'économie de liquidité [22].

La transposition de ces principes au contexte des réseaux inter-entreprises soulève toutefois des difficultés spécifiques. Contrairement aux systèmes interbancaires, les réseaux B2B sont caractérisés par une décentralisation extrême, une forte hétérogénéité des agents et une diversité des relations contractuelles. Les obligations inter-entreprises sont intégrées au fonctionnement courant des chaînes de valeur et reposent sur des accords bilatéraux hétérogènes, sans infrastructure de règlement ou de compensation centralisée. Cette absence de standardisation limite la mise en œuvre directe de mécanismes analogues à ceux déployés dans les infrastructures financières de marché [17].

Malgré ces contraintes, plusieurs dispositifs visant à préserver la liquidité des entreprises ont été proposés ou expérimentés. Parmi ceux-ci figurent les plateformes de mutualisation volontaire, les chambres de compensation commerciales [13] et diverses formes de financement de créances permettant de réorganiser les flux de paiements dans le temps. Ces dispositifs partagent un objectif commun : réduire les besoins de liquidité immédiate en exploitant les interdépendances existantes entre les obligations des agents [16]. Leur diffusion demeure toutefois limitée par des contraintes juridiques, informationnelles et opérationnelles, propres aux relations inter-entreprises.

D'un point de vue analytique, la mutualisation peut être interprétée comme une transformation du réseau de dettes inter-entreprises, visant à remplacer un ensemble d'obligations brutes par une configuration équivalente au regard des positions financières finales des agents. Cette transformation modifie les modalités de règlement, la temporalité des flux et la répartition des

13. Les premières agrègent les factures des participants pour identifier des compensations sans interposition juridique, tandis que les secondes garantissent les obligations et organisent le règlement net des soldes.

besoins de liquidité, sans pour autant effacer les relations commerciales sous-jacentes. Dans des réseaux de grande taille, concevoir de tels mécanismes soulève des enjeux de coordination et de mise à l'échelle, qui dépassent les ajustements locaux et bilatéraux traditionnellement observés dans le crédit inter-entreprises.

Par ailleurs, Rochet et Tirole soulignent que les mécanismes de mutualisation déplacent certaines formes de risque. En réduisant les expositions brutes et la liquidité mobilisée, ils impliquent une redistribution des risques de crédit et de liquidité entre les participants, voire vers un acteur chargé d'assurer la coordination ou le financement temporaire des positions nettes [23, 22]. Dans le contexte B2B, marqué par une forte hétérogénéité des entreprises et des relations de confiance limitées, ce déplacement du risque constitue un enjeu central pour la conception de dispositifs compatibles avec les contraintes contractuelles existantes.

1.5.1 Réduction des frictions d'endettement sans mutualisation

Il est utile de distinguer les mécanismes qui ***réduisent la liquidité nécessaire au règlement*** (compensation/mutualisation) de ceux qui ***réduisent le coût ou la fragilité de l'endettement*** sans transformer le réseau de paiements lui-même. Une famille d'approches, plutôt institutionnelle et orientée ***design d'actifs***, vise par exemple à réduire les externalités liées à la dette en modifiant sa structure, sa gouvernance ou son profil de risque, plutôt qu'en opérant une compensation multilatérale des obligations. À titre d'illustration, Amato et al. ont ouvert une discussion sur la création d'un actif sûr européen via une agence de gestion de dette, en mettant l'accent sur la stabilisation des prix et sur la transformation des risques, sans recourir à une mutualisation explicite des dettes souveraines [44].

Même si ce cadre n'est pas directement transposable aux réseaux B2B, il clarifie une frontière conceptuelle importante : l'objectif d'une méthode de mutualisation dans un réseau de dettes inter-entreprises n'est pas simplement de diminuer la dette au sens patrimonial, mais de ***réduire la contrainte de liquidité et les blocages de règlement*** en transformant, sous contraintes contractuelles, la configuration des flux de paiement. Cette distinction est centrale : en quoi la mutualisation intégrale des dettes inter-entreprises permet-elle de *réduire les blocages de règlement* sans se réduire à une simple diminution patrimoniale des obligations ?

Ainsi, l'objectif de cette thèse, est de montrer que la mutualisation des dettes inter-entreprises est une piste prometteuse pour réduire la pression sur les liquidités dans les réseaux B2B, tout en posant des questions spécifiques de coordination, de gouvernance et de soutenabilité.

Il convient toutefois de souligner que, dans le contexte des réseaux inter-entreprises de grande taille, la majorité des dispositifs étudiés (ou mis en œuvre) relèvent de formes de mutualisation ou de compensation dites ***partielles***. Ces mécanismes visent à réduire les expositions brutes entre entreprises sans règlement intégral des obligations et sans mobilisation explicite de liquidité externe. Leur avantage tient notamment à leur compatibilité avec le caractère décentralisé des relations B2B et à l'absence d'un acteur central chargé d'assurer la finalité des règlements. À l'inverse, les dispositifs de mutualisation ***intégrale***, impliquant le règlement complet des créances sélectionnées et, dans la plupart des cas, une coordination centralisée ou un financement temporaire des positions nettes, demeurent largement absents des réseaux B2B larges et restent relativement peu documentés dans la littérature appliquée à ce contexte.

Ces éléments appellent une distinction plus fine entre les différentes formes de compensation envisageables, distinction qui fait l'objet de la section suivante.

1.6 Compensation partielle et intégrale : contraintes contractuelles, coordination et complexité

La littérature sur la réduction des besoins de liquidité dans les réseaux de paiements distingue classiquement deux grandes familles de mécanismes : la ***compensation partielle***, qui autorise une réduction fractionnée des obligations, et la ***compensation intégrale***, qui vise le règlement complet d'un sous-ensemble de créances dans un cadre coordonné. Ces deux approches reposent sur des principes économiques, contractuels et opérationnels profondément différents.

1.6.1 Compensation partielle : réduction fractionnée et optimisation continue

La façon la plus naturelle de procéder est la compensation partielle qui vise à réduire tout ou partie des obligations financières existantes, sans règlement intégral des créances ni mobilisation explicite de liquidité externe. D'un point de vue opérationnel, elle repose sur l'identification de relations de dettes réciproques ou de structures fermées, telles que des cycles d'obligations, permettant de réduire en tout ou partie les expositions brutes tout en conservant les positions nettes finales des agents. La Figure 1.1 présente deux manières possibles d'effectuer la réduction partielle d'un réseau simple. La possibilité *i* présente une économie de liquidités de 6 unités tandis que *ii* réduit 8 unités. On notera cependant que si la possibilité *ii* maximise la réduction de liquidité, elle présente une réduction plus diffuse des montants qui laisse présager certaines limites quant à la compensation partielle. En effet, dans la seconde possibilité, si le volume réduit est plus important, le nombre d'obligations qui ont été acquittées entièrement reste le même et davantage d'arcs ont été modifiés tout en restant actifs. La compensation partielle bute ainsi sur un besoin de choix entre *réduction du volume* et *réduction du nombre d'obligations actives*, ces objectifs pouvant diverger en fonction du réseau et des besoins des acteurs.

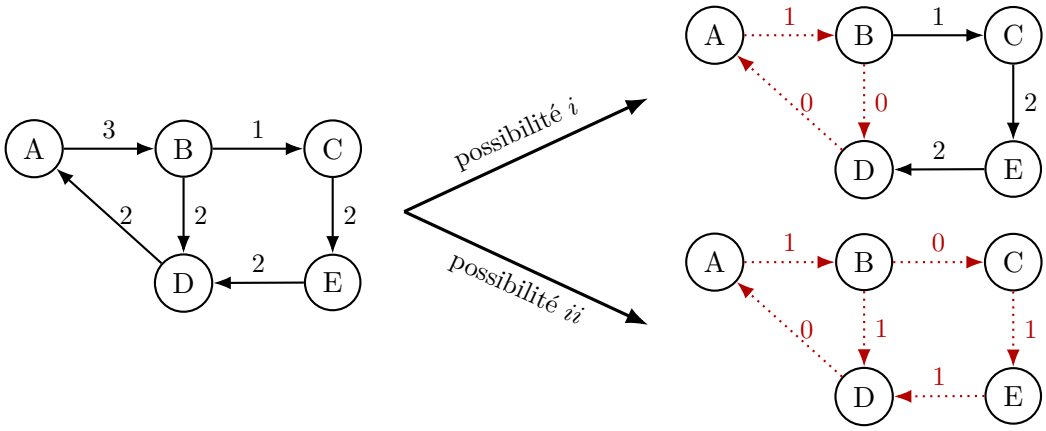


FIGURE 1.1 – Configurations de compensation partielle sur un réseau de dettes

D'un point de vue formel, la compensation partielle peut être modélisée comme un problème continu ou fractionnaire, dans lequel les montants des créances peuvent être réduits de manière partielle et redistribués sur plusieurs relations.

Cette propriété autorise des formulations en termes de flots sur des graphes, de circulation avec demandes ou de programmes linéaires, dans lesquels l'objectif consiste à minimiser les expositions brutes ou la liquidité requise sous contraintes de conservation des flux et de respect des positions nettes, dans un cadre développé notamment par Bertsekas [45] ainsi que Kleinberg et Tardos [46].

Dans le contexte plus précis des réseaux financiers, plusieurs travaux, comme ceux de Battiston, ont montré que des mécanismes de compensation partielle pouvaient être formulés comme des problèmes de flot ou d'optimisation, exploitant la continuité des montants pour obtenir des solutions efficaces [5, 10, 47]. Cette nature continue explique que ces approches soient généralement résolubles en temps polynomial et qu'elles aient fait l'objet d'une littérature abondante, tant du point de vue théorique que pratique.

Dans le contexte B2B spécifiquement, la compensation partielle présente plusieurs avantages : elle peut être mise en œuvre sans intervention d'un acteur central chargé d'assurer la finalité des règlements, et sans nécessité de financement temporaire des positions nettes négatives. Cette absence d'infrastructure centralisée explique pourquoi elle constitue la forme dominante de mutualisation observée ou étudiée dans les réseaux inter-entreprises [5, 10].

Toutefois, cette approche de la réduction de dettes est soumise à des contraintes structurelles fortes. Les possibilités de réduction des expositions dépendent directement de la topologie du réseau et de la présence de motifs spécifiques, tels que des cycles simples ou des sous-graphes fortement connectés. En l'absence de telles structures, les gains potentiels sont limités, voire nuls. Par ailleurs, sur le plan contractuel, la modification fractionnée des créances pose des difficultés de traçabilité, de conformité juridique et de gestion du risque de contrepartie, en particulier lorsque les relations commerciales reposent sur des factures indivisibles et des contrats standards peu flexibles. Si ces dispositifs peuvent être efficaces localement, leur dépendance à des configurations spécifiques du réseau ou à des règles d'adhésion restrictives limite leur capacité à généraliser les effets de compensation à un réseau B2B large et faiblement coordonné.

1.6.2 Compensation intégrale : règlement coordonné, centralisation et complexité combinatoire

L'accessibilité algorithmique de la compensation partielle contraste fortement avec les mécanismes de compensation intégrale, pour lesquels l'***indivisibilité des créances*** interdit toute réduction fractionnée et transforme le problème en une sélection combinatoire d'obligations à régler intégralement, sous contraintes globales de liquidité. D'un point de vue formel, cette indivisibilité exclut les formulations continues et conduit à des problèmes discrets de coordination multilatérale, dont l'espace des solutions croît de manière exponentielle avec la taille du réseau.

La compensation intégrale repose sur des principes fondamentalement différents de ceux de la compensation partielle. Les obligations sélectionnées sont réglées intégralement, mais dans un cadre coordonné permettant de réduire la liquidité mobilisée par rapport à des règlements bilatéraux indépendants. Concrètement, ces mécanismes visent à organiser les paiements de manière multilatérale, de sorte que chaque agent ne règle ou ne reçoive que sa position nette finale vis-à-vis du système [20, 33]. La Figure 1.2 met en avant les forces d'un tel mécanisme. Avec un apport d'une unité externe qui sera ensuite retournée à F, il est possible dans le cas i de réduire 8 unités de dettes au lieu de 6 dans le cas partiel tout en permettant aux entreprises concernées d'être libérées de leurs contraintes mutuelles. Dans le cas ii, on remarque qu'un second apport d'une unité, cette fois-ci à l'entreprise C, permet désormais de débarrasser complètement le réseau (12 unités pour 2 de financement global) de ses dépendances internes tout en ayant créé un volume d'obligations externes inférieur aux besoins d'un système sans processus de réduction intégrale de dettes.

D'un point de vue mathématique et algorithmique, cette organisation peut être formulée comme un problème de sélection d'un ensemble d'arcs satisfaisant simultanément des contraintes de conservation des flux, de liquidité disponible et de règlement intégral des créances. On notera par ailleurs que la compensation intégrale mobilise des structures plus variées que la seule re-

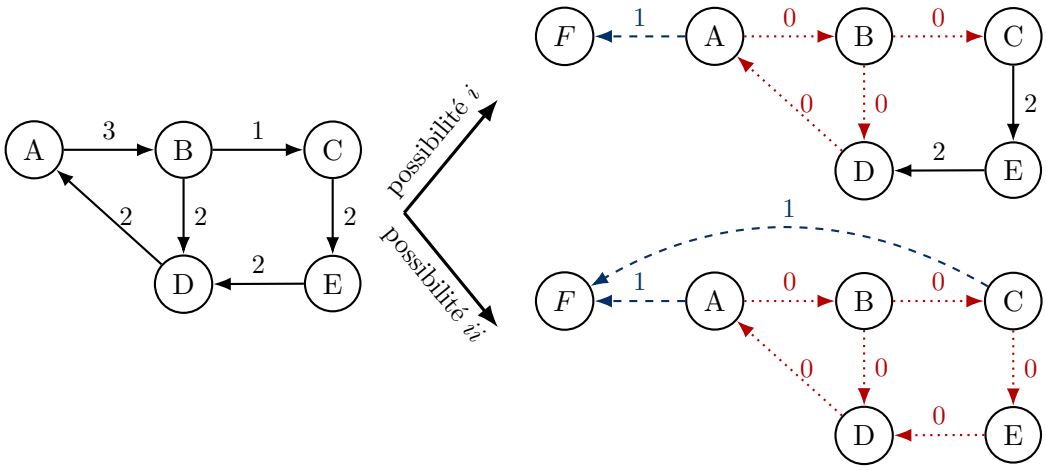


FIGURE 1.2 – Configurations de compensation intégrale sur un réseau de dettes

cherche de cycles : Cui montre qu'elle implique également des chemins et des arbres de dettes [48], qui constituent la part la plus importante de tout réseau B2B et nécessitent la présence d'une contrepartie centrale. L'indivisibilité des créances exclut les formulations continues et conduit à des problèmes discrets dont la complexité a été établie par deux voies indépendantes : par réduction au problème SUBSET-SUM [25], d'une part, et par réduction directe au problème SAT [49], d'autre part. La compensation intégrale multilatérale est donc un problème NP-complet dans le cas général, ce qui implique que toute approche opérationnelle sur des réseaux B2B de grande taille requiert nécessairement le recours à des heuristiques ou des mécanismes d'approximation.

Cette difficulté calculatoire est connue dans le contexte des systèmes de paiement interbancaires, où la recherche de règlements multilatéraux optimaux sous contraintes de liquidité est reconnue comme un problème combinatoire nécessitant le recours à des heuristiques ou à des mécanismes d'approximation [20, 22]. En pratique, les infrastructures de marché contournent cette complexité par des règles institutionnelles, des priorités de paiement ou des mécanismes d'économie de liquidité sous-optimaux.

La mise en œuvre de la compensation intégrale requiert en outre une coordination centralisée et l'intervention d'un acteur capable d'assurer la finalité des règlements, en finançant temporairement les positions nettes négatives. Si de tels dispositifs ont été déployés avec succès dans les systèmes interbancaires [37, 38], leur transposition au contexte des réseaux inter-entreprises de grande taille demeure marginale. L'hétérogénéité des entreprises dans leur gestion et leur taille, l'absence d'infrastructures communes et la taille des graphes considérés accentuent encore la difficulté calculatoire, en rendant inapplicables les approches exhaustives ou gloutonnes.

Ainsi, la compensation intégrale dans les réseaux B2B larges se situe à l'intersection de contraintes contractuelles fortes [14] et d'une complexité algorithmique intrinsèque [15]. Cette combinaison explique son intérêt théorique et la rareté de travaux opérationnels dans la littérature existante, et motive le recours à des modèles et des heuristiques dédiés pour traiter ce problème à grande échelle tout en proposant des solutions compatibles avec le cadre économique actuel.

14. On entend par là l'ensemble des restrictions de la méthode : indivisibilité des créances, modification de la temporalité des paiements et exigence de garanties sur la finalité des règlements.

15. Cette complexité émerge du caractère NP-complet du problème et de la taille du réseau B2B qui est bien plus large que les réseaux interbancaires qui peuvent se permettre des approches plus simplistes de par leur taille réduite (millions d'entreprises contre dizaines à centaines de participants seulement).

1.6.3 Méthodes hybrides : applicabilité locale et dépendance à la structure du réseau

Le cas de ***Sardex***, une monnaie complémentaire utilisée dans un réseau régional d'entreprises en Italie, illustre un mécanisme proche de la compensation partielle en contournant le problème du découpage de factures. Dans ce réseau monétaire, les obligations qui n'ont pas été réduites intégralement sont remplacées par des créances virtuelles dans la monnaie du réseau qui permet alors à certaines entreprises de devenir créditrices ou débitrices dans ce réseau, ce qui leur permet ensuite de dépenser ces mêmes créances en interne. Iosifidis et al. montrent, par une analyse de réseau, que les échanges effectués dans cette unité de compte sont caractérisé par une forte densité de cycles transactionnels, favorisant une compensation implicite des créances et des dettes au sein du réseau [50], observation reprise par Amato dans une perspective plus institutionnelle [51]. Cette organisation permet de réduire *localement* la dépendance à la liquidité monétaire externe, sans recourir à une chambre de compensation centralisée ni à un règlement explicite des positions nettes. Toutefois, comme nous allons le voir dans cette partie, ces effets reposent étroitement sur la cohésion du réseau, sur l'acceptation de la monnaie locale et sur un périmètre d'échange limité, ce qui restreint leur transférabilité à des réseaux B2B larges.

Des conclusions analogues émergent de l'étude du système suisse WIR fonctionnant de la même façon. Stodder documente que les crédits WIR contribuent à stabiliser l'activité économique en période de tension, en offrant un canal de règlement alternatif au système bancaire classique [52, 53]. D'un point de vue structurel, le WIR agit comme un sous-réseau de paiement partiellement fermé, au sein duquel les engagements circulent et se compensent dans le temps. Là encore, les gains observés reposent sur une monnaie locale, des règles institutionnelles spécifiques et des contraintes d'adhésion, présentant les mêmes limitations que le Sardex.

Parallèlement à ces dispositifs, Fleischman et al. ont proposé une autre approche et formalisé le concept de ***système de paiement équilibré*** [54, 55], qui s'inspire des mécanismes de mutualisation multilatérale appliqués au marché du crédit commercial et aux systèmes de paiement. Dans ce cadre, un ***sous-système de paiement équilibré*** est défini comme un sous-ensemble d'obligations pouvant être réglé intégralement par circulation interne des flux, sans recours net à des sources externes de liquidité, puis retiré du système global afin de réduire les besoins de financement et lever des blocages de règlement. Cette approche repose sur l'analyse du réseau d'obligations comme un graphe de flux et l'identification des sous-graphes satisfaisant *localement* des contraintes de conservation (égalité entre flux entrants et sortants pour les nœuds concernés). Lorsque ces conditions ne sont pas *naturellement vérifiées*, le modèle introduit un mécanisme de mutualisation ***interne*** jouant le rôle d'un nœud de compensation : celui-ci collecte temporairement de la liquidité auprès de certains acteurs du sous-réseau et la redistribue vers d'autres afin de permettre la circulation des paiements et la fermeture des cycles. Cette redistribution permet de créer ou de renforcer des structures localement équilibrées, éventuellement via l'***ajout de liens de paiement internes***, rendant possible un règlement intégral par compensation au sein du sous-système considéré (un exemple sera présenté plus tard dans la section). Dans un article ultérieur, les auteurs montrent que des méthodes de compensation de dettes, combinées avec des systèmes de crédit mutuel, peuvent conduire à des gains substantiels de liquidité dans le marché du crédit inter-entreprises, parfois doublant l'effet obtenu par la seule mutualisation des obligations [18]. Ces travaux, centrés sur des expériences nationales, notamment l'application continue en Slovénie depuis 1991 [16], illustrent une famille de dispositifs multilatéraux coordonnés

16. Le système a été déployé dès l'indépendance slovène avec des limitations techniques fortes, dans un contexte de pénurie de liquidité et d'absence de monnaie nationale consolidée [55].

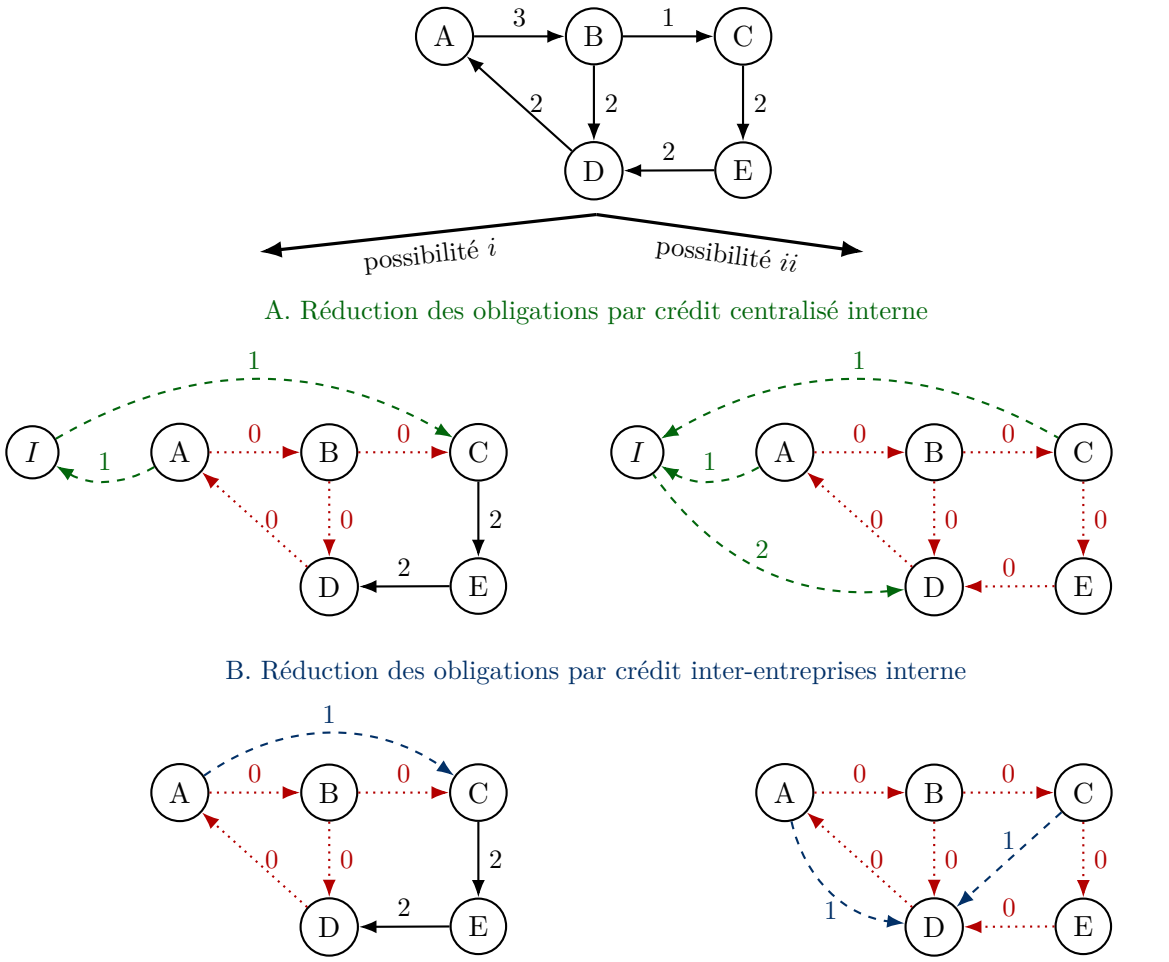
qui exploitent structurellement la topologie des obligations pour économiser de la liquidité et atténuer les tensions financières dans les réseaux de paiements.

Les concepts de système de paiement équilibré enrichissent ainsi le champ des dispositifs de réduction de dettes. En effet, ils proposent des formulations qui visent un règlement intégral des obligations sélectionnées et permettent l'analyse et l'optimisation des économies de liquidité dans des cadres algorithmiques précis, en s'appuyant sur des structures fermées du réseau. Ils constituent un pont entre les pratiques institutionnelles observées et les formalisations mathématiques nécessaires à une compréhension systémique et algorithmique des économies de liquidité dans des réseaux B2B.

Les méthodes telles que l'appui sur des monnaies locales ou les systèmes de paiement équilibrés occupent donc une position intermédiaire entre les approches de compensation partielle et les dispositifs de compensation intégrale pleinement centralisés. Comme les mécanismes de compensation partielle, elles exploitent explicitement la structure du réseau d'obligations et reposent sur l'identification de sous-ensembles équilibrés, souvent associés à des cycles ou à des sous-graphes fermés, permettant un règlement sans mobilisation externe de liquidité. Cette position intermédiaire explique à la fois leur intérêt théorique et les limites de leur applicabilité aux réseaux B2B globaux. La Figure 1.3 présente comment un réseau simple peut être traité de plusieurs façons par ces méthodes. Dans le cas A, la mutualisation est faite par un acteur interne *centralisant* les risques et redistribuant les créances et les dettes comme c'est le cas dans les systèmes du Sardex et du WIR. Le cas B présente quant à lui la mutualisation de façon *décentralisée* en équilibrant le système par de nouveaux crédits inter-entreprises, ce qui est une seconde solution envisagée pour les systèmes de paiement équilibré. Cette seconde solution a l'avantage d'être moins dépendante d'une centralisation forte mais présente le désavantage de créer des dépendances entre des entreprises qui sont potentiellement inconnues. Dans les cas de réseaux fermés comme celui-ci, ces solutions peuvent sembler équivalentes à la mutualisation intégrale. Pour autant, sur des réseaux moins cycliques, les différences d'heuristiques peuvent changer fortement les possibilités de réduction.

En effet, si les méthodes hybrides ont démontré leur efficacité dans des contextes institutionnels spécifiques et à des échelles locales, leur extension à des réseaux plus larges demeure conditionnée à la présence de structures assez denses et cycliques. Dans les grands réseaux, l'identification de telles sous-structures peut devenir coûteuse et réduire les gains de liquidité, laissant subsister des composantes difficilement compensables en interne. Ces limites motivent l'exploration de mécanismes de mutualisation intégrale capables de s'affranchir plus largement des contraintes topologiques, tout en conservant la compatibilité contractuelle propre au crédit inter-entreprises.

Au-delà même des contraintes topologiques et calculatoires, ces dispositifs reposent également sur des mécanismes de mutualisation du risque en interne, qui peuvent conduire à des déséquilibres entre débiteurs et créditeurs du système. Ainsi, dans les systèmes Sardex et WIR, certains nœuds peuvent accumuler des positions durablement créditrices ou débitrices au sein du réseau, alors même que leur situation financière globale demeure équilibrée. En effet, les créances et dettes libellées dans ces monnaies complémentaires ne peuvent être compensées qu'à l'intérieur du système, ce qui limite leur convertibilité avec les flux économiques extérieurs. Cela soulève des enjeux de soutenabilité à long terme qui expliquent le besoin de méthodes s'abstrayant d'un fonctionnement seulement interne. Par ailleurs, ces méthodes posent aussi des questions d'acceptabilité par les entreprises ce qui constitue un point important pour la généralisation d'un tel système.



A. Réduction des obligations par crédit centralisé interne

B. Réduction des obligations par crédit inter-entreprises interne

FIGURE 1.3 – Configurations de compensation hybride sur un réseau de dettes

1.6.4 Comparaison des approches et implications pour les réseaux B2B de grande taille

La distinction entre compensation partielle et compensation intégrale ne se réduit pas à une opposition entre décentralisation et centralisation. Elle renvoie à des compromis structurels entre compatibilité contractuelle, dépendance à la topologie du réseau, besoins de liquidité et complexité opérationnelle.

Dans le cas de la compensation partielle, l'absence de centralisation et de financement externe facilite l'adoption locale, mais limite fortement l'ampleur des gains réalisables dans des réseaux B2B de grande taille et peu réciproques. À l'inverse, la compensation intégrale recherchée permet, en principe, de réduire les besoins de liquidité indépendamment de la présence de cycles fermés, mais au prix d'une coordination accrue et d'un déplacement des risques vers l'entité coordinatrice.

Ces différences expliquent pourquoi la littérature existante sur les réseaux inter-entreprises se concentre majoritairement sur des mécanismes de compensation partielle, tandis que les dispositifs de mutualisation intégrale restent peu explorés dans ce contexte. Elles soulignent également que le choix entre ces deux approches ne relève pas uniquement d'une question technique, mais implique des décisions institutionnelles, contractuelles et organisationnelles.

Dans cette perspective, plusieurs questions se posent : est-il possible de concevoir des mécanismes de compensation intégrale compatibles avec les contraintes de taille des réseaux B2B ? Sous quelles conditions algorithmiques et de soutenabilité peuvent-ils être mis en place ? Dans quelle mesure les gains de liquidité obtenus justifient-ils la complexité de ces approches ? Ce sont notamment ces questions qui vont constituer un fil directeur de cette thèse.

1.7 Dimension dynamique et soutenabilité temporelle des mécanismes de mutualisation

Les analyses précédentes ont principalement considéré les mécanismes de compensation et de mutualisation dans une perspective statique, où le réseau de dettes est supposé fixe à un instant donné. Or, dans les économies réelles fondées sur le crédit inter-entreprises, les obligations financières sont intrinsèquement dynamiques. Les factures sont émises de manière continue, possèdent des échéances finies, peuvent être réglées, reportées ou refinancées, et disparaissent du réseau au fil du temps. Pour avoir une analyse plus complète des mécanismes de mutualisation, il est donc nécessaire d'intégrer explicitement cette dimension temporelle.

Dans un réseau B2B réel, le graphe des dettes inter-entreprises évolue en permanence sous l'effet de trois processus fondamentaux : l'arrivée de nouvelles obligations, le règlement des créances existantes, et l'expiration ou la restructuration des dettes arrivées à échéance. Ces processus induisent une dynamique non stationnaire du réseau, caractérisée par des variations continues de la taille, de la structure et de la distribution des expositions. La mutualisation ne s'insère donc pas dans un système figé, mais dans un flux continu d'obligations financières.

D'un point de vue formel, cette dynamique peut être décrite comme une évolution au fil du temps d'un graphe orienté pondéré, dont les nœuds et les arcs apparaissent, se transforment et disparaissent au cours du temps. La littérature en informatique et en science des réseaux qualifie ce type de structure de ***graphe dynamique*** ou ***réseau temporel***. Nous reviendrons plus en détail sur les réseaux dynamiques et leur définition dans le cadre de cette thèse à l'intérieur du Chapitre 2. Ce qu'il est cependant nécessaire de retenir est que l'introduction du temps modifie profondément les propriétés structurelles et algorithmiques des graphes, notamment en matière de connectivité, de chemins et de propagation [56, 57]. De tels réseaux dynamiques sont connus pour présenter des **propriétés émergentes** spécifiques, qui ne peuvent être déduites de l'analyse de graphes agrégés ou instantanés [58].

Cette dynamique pose des contraintes spécifiques aux mécanismes de mutualisation intégrale. Contrairement à une compensation ponctuelle, une mutualisation répétée dans le temps modifie la configuration future du réseau et influence les possibilités de règlement ultérieures. Chaque décision de mutualisation affecte non seulement les expositions courantes, mais aussi la trajectoire du système, en redistribuant les contraintes de liquidité et en introduisant de nouvelles créances ou relations financières.

La question centrale de la dimension dynamique devient alors celle de la **soutenabilité temporelle** du mécanisme : un dispositif peut-il fonctionner de manière répétée sans accumuler de déséquilibres ou de besoins de liquidité croissants ?

La littérature sur les systèmes de paiement souligne que les mécanismes de compensation déplacent nécessairement les risques de liquidité et de crédit vers les entités chargées d'assurer la finalité des règlements [22, 23]. Dans un cadre dynamique, ce déplacement prend une dimension cumulative. Un acteur central assurant la mutualisation intégrale peut être amené à avancer des fonds de manière répétée pour financer des positions nettes négatives, tout en attendant le

remboursement futur de ses avances. La soutenabilité du mécanisme dépend alors de l'équilibre entre les flux entrants et sortants de liquidité au cours du temps, ainsi que de la capacité du système à éviter une accumulation incontrôlée des engagements du financeur.

Cette problématique est bien documentée dans le contexte interbancaire, où la gestion intra-journalière de la liquidité et les mécanismes d'économie de liquidité sont conçus pour fonctionner de manière répétée sans générer de besoins de financement illimités [20, 37]. Ces systèmes reposent sur des règles strictes de priorisation [17] , de collatéralisation [18] et de plafonnement des expositions, qui garantissent la soutenabilité du dispositif dans le temps. Leur transposition au contexte des réseaux inter-entreprises, dépourvus de collatéral standardisé [19] et de supervision centralisée, soulève toutefois des difficultés spécifiques.

Dans les réseaux B2B, la soutenabilité temporelle d'un mécanisme de mutualisation intégrale ne peut être évaluée uniquement comme une réduction instantanée des besoins de liquidité. Elle dépend également de la capacité du système à atteindre un **régime dynamique stable**, dans lequel le capital engagé par l'acteur central ne croît pas indéfiniment et où les flux de remboursement compensent, en moyenne, les avances de liquidité. Cette exigence impose d'analyser la mutualisation comme un processus itératif, opérant sur des sessions successives, plutôt que comme une opération isolée.

La dimension dynamique renforce en outre la complexité algorithmique du problème. Les algorithmes opérant sur des graphes dynamiques doivent prendre des décisions sous information partielle et s'adapter à des modifications continues de la structure du graphe. Akoglu, Tong et Koutra montrent que des problèmes traitables sur des graphes statiques deviennent significativement plus complexes lorsque la dynamique temporelle est prise en compte, car les décisions présentes influencent les états futurs du réseau [59]. Cette propriété est centrale dans le contexte de la mutualisation intégrale, où chaque session de mutualisation modifie la configuration future du réseau de dettes et conditionne ainsi les possibilités de règlement ultérieures. Néanmoins, dans des réseaux B2B caractérisés par une majorité d'entreprises économiquement viables et par un renouvellement continu des obligations, il est raisonnable d'envisager l'existence de régimes dynamiques dans lesquels les effets inter-temporels [20] des décisions de mutualisation restent bornés et ne compromettent pas la soutenabilité globale du dispositif.

Ces éléments soulignent que la mutualisation intégrale des dettes inter-entreprises doit être pensée comme un dispositif dynamique, dont la viabilité repose sur des équilibres temporels autant que sur des propriétés statiques. L'identification de conditions permettant d'assurer cette soutenabilité temporelle constitue un enjeu central pour toute approche visant à déployer de tels mécanismes à grande échelle dans des réseaux B2B.

1.8 Synthèse des exigences économiques et informatiques

L'analyse des économies monétaires de production, des réseaux inter-entreprises et des mécanismes de compensation met en évidence que la mutualisation intégrale des dettes ne peut être envisagée indépendamment des contraintes économiques et institutionnelles dans lesquelles elle s'insère. La littérature ne fournit pas de solution unifiée applicable aux réseaux B2B de grande

17. Dans les systèmes interbancaires, la priorisation est l'ordre dans lequel les obligations sont traitées lorsque la liquidité est insuffisante pour toutes les régler simultanément. Cet ordre peut être fondé sur l'urgence des échéances ou le montant des obligations. Une mauvaise priorisation peut bloquer l'ensemble du système par effet de file d'attente, même lorsque la liquidité agrégée est suffisante [20].
18. Bien ou actif utilisé comme garantie de prêt.
19. Pas de règle unique pour gérer les collatéraux.
20. Effets entre les sessions successives.

taille, mais elle permet d'identifier un ensemble de conditions récurrentes qui structurent la faisabilité et la pertinence économique de tels dispositifs. Cette section propose une synthèse de ces conditions, envisagées non comme des recommandations, mais bien comme des contraintes fortes, induites par le fonctionnement des réseaux de dettes inter-entreprises.

Une première exigence concerne la **compatibilité** des mécanismes de mutualisation avec l'architecture contractuelle du crédit inter-entreprises. Les relations B2B reposent majoritairement sur des créances indivisibles, juridiquement définies et intégrées à des relations commerciales spécifiques. Comme vu dans notre étude bibliographique, les dispositifs modifiant partiellement les obligations existantes se heurtent rapidement à des difficultés de traçabilité, de conformité contractuelle et d'acceptabilité par les entreprises. À l'inverse, les approches fondées sur le règlement intégral des créances apparaissent plus cohérentes avec les pratiques contractuelles standard, au prix toutefois d'une coordination accrue.

Une deuxième dimension récurrente concerne la **réduction effective**[21] des besoins de liquidité. Les mécanismes de mutualisation sont analysés comme des outils permettant de limiter la mobilisation de liquidité en exploitant la compensation multilatérale des positions. Toutefois, les travaux existants montrent que cette réduction ne peut être évaluée indépendamment de la manière dont elle est obtenue : une diminution ponctuelle des paiements bruts peut s'accompagner d'un déplacement des contraintes vers d'autres agents ou vers des périodes ultérieures, ce qui pourrait ne pas se traduire par un allègement réel pour le système dans son ensemble.

La question du **déplacement des risques** constitue un troisième axe important. Les mécanismes de compensation et de mutualisation, en particulier lorsqu'ils impliquent une coordination centralisée, transfèrent les risques de liquidité et de crédit vers les entités chargées d'assurer la garantie des règlements finaux. La littérature sur les systèmes de paiement souligne que la viabilité de ces dispositifs dépend de la capacité à contenir ce déplacement du risque et à éviter son accumulation dans le temps. Dans le contexte inter-entreprises, marqué par une forte hétérogénéité des agents et l'absence de garanties standardisées, cette question revêt une importance particulière.

L'intégration de la dimension temporelle renforce encore ces exigences. Les réseaux de dettes inter-entreprises évoluent en continu, et les mécanismes de mutualisation opèrent nécessairement sur des configurations transitoires du réseau. Les travaux existants suggèrent que l'évaluation d'un dispositif ne peut se limiter à une analyse statique, mais doit prendre en compte sa capacité à fonctionner de manière répétée sans générer de déséquilibres cumulatifs. La notion de **soutenabilité temporelle** apparaît ainsi comme un critère central, renvoyant à l'existence de régimes dynamiques dans lesquels les flux de remboursement compensent durablement les avances de liquidité.

Enfin, des contributions, comme celles de Güntzer et al. [25] ou Cui [48], soulignent implicitement que la faisabilité économique de la mutualisation est indissociable de sa faisabilité informatique. Les réseaux B2B de grande taille posent des contraintes fortes en termes de passage à l'échelle et de délais de calcul. Les mécanismes théoriquement efficaces mais reposant sur des calculs exhaustifs ou des hypothèses de coordination parfaite apparaissent difficilement transposables à des environnements réels, comme l'illustre la NP-complétude établie pour la compensation intégrale. Cette tension entre efficacité économique et complexité algorithmique constitue l'un des fils directeurs de la recherche à l'interface entre économie, réseaux complexes et informatique.

Dans leur ensemble, ces éléments dessinent un cadre d'analyse dans lequel la mutualisation

21. On parle ici de réduction *effective* pour désigner la diminution réelle des besoins de liquidités, en tenant compte des avances faites par le mécanisme.

intégrale des dettes inter-entreprises apparaît à la fois comme une réponse potentiellement efficace aux contraintes de liquidité et comme un problème intrinsèquement contraint par des considérations contractuelles, dynamiques et informatiques. La compréhension de ces exigences constitue un préalable nécessaire à toute tentative de formalisation et de mise en œuvre de mécanismes de mutualisation adaptés aux réseaux B2B de grande taille.

Chapitre 2 :
Réseaux complexes et optimisation combinatoire

Sommaire

2.1 La théorie des graphes pour modéliser des systèmes complexes 21
2.2 Propriétés et structures des systèmes complexes 22
2.3 Graphes dynamiques et dimension temporelle des réseaux . . . 22
2.4 Structure mésoscopique des réseaux et détection de communautés 24
2.5 Optimisation combinatoire et réseaux complexes distribués . . 25

Ce chapitre présente le cadre scientifique informatique de cette thèse. L'objectif n'est pas d'introduire immédiatement la formalisation spécifique du problème étudié, mais de situer celui-ci dans un ensemble plus large de travaux portant sur l'analyse des réseaux, l'étude des systèmes dynamiques, les structures de graphes, et l'optimisation des structures discrètes complexes.

La théorie des graphes et l'algorithmique associée constituent les méthodes fondamentales pour modéliser des systèmes composés d'entités en interaction. Ces modèles ont été mobilisés dans des domaines aussi variés que les réseaux de communication, les systèmes distribués, les réseaux sociaux, les infrastructures critiques ou les systèmes biologiques. Newman et Barabási ont contribué à unifier ces approches en mettant en évidence des propriétés structurelles et dynamiques communes à de nombreux systèmes réels [40, 60].

Dans ce contexte, les réseaux économiques et financiers peuvent être interprétés comme des systèmes relationnels complexes, dans lesquels les interactions entre agents forment une structure dont les propriétés globales émergent des connexions locales. L'analyse de tels systèmes nécessite de mobiliser des outils issus de plusieurs domaines de l'informatique, notamment l'algorithmique des graphes, l'optimisation combinatoire et l'étude des graphes dynamiques.

2.1 La théorie des graphes pour modéliser des systèmes complexes

La théorie des graphes fournit un cadre abstrait adapté à la représentation de systèmes composés d'entités interconnectées. Elle permet de modéliser explicitement des relations orientées ou non, pondérées ou non, et d'analyser les propriétés structurelles qui en résultent.

Les graphes sont utilisés en informatique pour modéliser de très nombreux systèmes, tels que des systèmes de flux, des dépendances logiques, des réseaux de communication ou encore des interactions sociales. L'algorithmique des graphes a ainsi donné lieu à un vaste panel de

méthodes permettant d'étudier des problèmes tels que la recherche de chemins, la circulation de flux, la décomposition en sous-structures ou l'optimisation sur réseaux [61, 45, 62].

Dans ces contextes, la structure du graphe joue un rôle déterminant dans la difficulté calculatoire des problèmes étudiés et dans la nature des solutions algorithmiques envisageables. Certaines classes de graphes permettent des traitements efficaces, en temps polynomial, tandis que d'autres donnent lieu à des problèmes intrinsèquement difficiles pour lesquels aucune méthode générale optimale n'est connue.

2.2 Propriétés et structures des systèmes complexes

Au-delà de la théorie des graphes classique, l'étude des systèmes complexes s'est développée comme un champ interdisciplinaire visant à comprendre les propriétés structurelles des grands réseaux observés dans le monde réel. Ces travaux ont mis en évidence que de nombreux systèmes naturels et artificiels partagent des caractéristiques communes, telles que l'hétérogénéité des degrés, la présence de nœuds fortement connectés, ou encore l'existence de motifs locaux récurrents [40, 60].

Ces propriétés ont des implications importantes pour l'analyse algorithmique. En particulier, elles influencent la robustesse des réseaux, la propagation des perturbations, et la manière dont certaines structures locales peuvent être exploitées pour résoudre des problèmes combinatoires.

Les processus dynamiques sur les réseaux complexes constituent également un domaine de recherche majeur. Barrat et al. ont par exemple étudié la diffusion d'information ou la propagation épidémique, montrant que des interactions locales peuvent produire des effets globaux fortement non linéaires [41]. Ces résultats ont ouvert un champ de recherche sur les mécanismes d'émergence et les phénomènes collectifs dans les systèmes distribués, en soulevant des questions fondamentales sur les conditions dans lesquelles des interactions locales simples peuvent produire des dynamiques globales complexes et difficilement prédictibles.

2.3 Graphes dynamiques et dimension temporelle des réseaux

Une grande partie des travaux en théorie des graphes s'appuie sur des structures purement statiques. Toutefois, de nombreux systèmes réels évoluent dans le temps, ce qui a conduit à l'émergence d'un champ de recherche dédié à l'étude des ***graphes dynamiques***, également appelés ***graphes temporels***.

Dans ces modèles, les relations entre entités apparaissent, disparaissent ou se transforment au cours du temps. Cette évolution peut être représentée sous différentes formes, notamment comme une suite de graphes statiques indexés par le temps, ou comme un ensemble d'événements horodatés décrivant l'activation des interactions entre les nœuds, des perspectives formalisées notamment par Holme et al. [56] ou encore Casteigts et al. [58].

L'introduction de la dimension temporelle modifie profondément les propriétés des graphes. Des notions classiques telles que la connectivité, l'existence de chemins ou la propagation de l'information doivent être redéfinies en tenant compte de l'ordre temporel des interactions et de l'évolution de la topologie. Holme et al. montrent ainsi que les graphes temporels présentent des propriétés émergentes spécifiques qui ne peuvent être déduites de l'analyse d'un graphe agrégé unique [56].

La littérature consacrée aux graphes dynamiques s'est toutefois développée selon des visions disciplinaires variées, donnant lieu à une multiplicité de terminologies et de formalismes parfois difficiles à comparer directement. Les notions de ***temporal networks***, ***time-varying graphs***,

dynamic graphs ou encore ***stream graphs*** recouvrent ainsi des cadres mathématiques proches mais non équivalents, chacun mettant l'accent sur certains aspects particuliers des interactions temporelles.

La thèse de Vernet [1] propose une synthèse structurante de ces différentes approches en mettant en évidence les relations entre les principaux modèles utilisés pour représenter des réseaux évolutifs. Elle montre notamment que ces formalismes peuvent être interprétés comme des points de vue complémentaires sur un même objet général, différant principalement par le niveau de granularité temporelle considéré et par la nature des opérations analytiques privilégiées. Nous utiliserons notamment la modélisation proposée dans cette thèse afin de structurer notre problème à l'intérieur de ce cadre au Chapitre 3. Dans la suite de ce manuscrit, nous adoptons le terme générique de ***réseaux dynamiques***, pour désigner un système relationnel évoluant dans le temps indépendamment du formalisme précis utilisé pour sa représentation, tel que Vernet a pu le définir, car nous sommes dans un cas fortement applicatif.

Dans les réseaux dynamiques de grande taille, il est souvent difficile d'obtenir une vision exhaustive et instantanée de la structure globale. Plusieurs travaux, notamment ceux de Magnien et Latapy, ont montré que les propriétés observées peuvent dépendre fortement des conditions d'acquisition des données, des méthodes d'échantillonnage ainsi que de la fraction du réseau effectivement observée, introduisant ainsi des biais potentiellement importants dans l'interprétation des mesures structurelles [63, 64, 65, 66].

Dans un contexte temporel, ces effets sont encore accentués : les propriétés mesurées peuvent varier selon la période d'observation, la granularité temporelle retenue ou la manière dont les interactions sont regroupées dans le temps [67, 68]. Ces résultats soulignent que l'analyse des réseaux dynamiques doit être conduite avec une attention particulière portée aux biais d'observation, aux effets d'échantillonnage et à la stabilité des propriétés mesurées dans le temps. Ces travaux ont aussi contribué à mieux comprendre les limites de l'analyse statique des réseaux et ont renforcé l'intérêt pour des approches prenant explicitement en compte l'évolution temporelle des interactions.

Approximation temporelle par suites de graphes statiques : Si les réseaux dynamiques constituent un cadre conceptuel riche, leur exploitation algorithmique directe peut s'avérer difficile, en particulier lorsque l'on cherche à résoudre des problèmes combinatoires sur des structures de grande taille.

Une stratégie couramment adoptée pour faciliter le travail sur les problèmes de combinatoire sur graphes temporels, et celle adoptée dans cette thèse, consiste à représenter le réseau dynamique comme une succession de graphes statiques construits sur des fenêtres temporelles successives. Cette approche permet de conserver une information sur l'évolution du système tout en rendant possible l'application de méthodes issues de l'algorithmique des graphes statiques.

Cette représentation intermédiaire, bien qu'elle sacrifie une partie de la granularité temporelle, constitue un compromis entre fidélité au phénomène temporel et efficacité calculatoire. Elle est largement utilisée dans l'étude des réseaux sociaux, des systèmes de communication et des interactions économiques, notamment lorsque les algorithmes employés reposent sur des structures discrètes définies à un instant donné [56].

Dans ce cadre, l'évolution du réseau est appréhendée comme une suite d'états successifs, chacun pouvant être analysé indépendamment avant d'être replacé dans une perspective temporelle plus globale. Cette approche permet d'étudier les transformations progressives de la structure du réseau tout en conservant la possibilité d'utiliser des méthodes bien établies pour les graphes statiques.

2.4 Structure mésoscopique des réseaux et détection de communautés

Au-delà des propriétés globales telles que la distribution des degrés, la densité ou la connectivité moyenne, les réseaux réels présentent souvent une organisation interne à une échelle intermédiaire, dite ***mésoscopique***. Cette échelle correspond à l'existence de sous-structures caractérisées par une forte densité de liens internes et des interactions plus faibles avec le reste du réseau. L'un des concepts centraux à ce niveau d'analyse est celui de ***communauté***, généralement définie comme un ensemble de nœuds plus densément connectés entre eux qu'avec le reste du graphe.

L'étude des communautés constitue aujourd'hui un domaine majeur de la science des réseaux, car elle permet de révéler des structures organisationnelles sous-jacentes dans des systèmes complexes [69]. Dans de nombreux contextes applicatifs, ces sous-ensembles correspondent à des groupes d'acteurs, des modules fonctionnels ou des sous-systèmes présentant des comportements similaires.

Parmi les contributions fondatrices, les travaux de Newman et Girvan ont introduit la notion de modularité comme critère permettant d'évaluer la qualité d'une partition du réseau en communautés [70]. Cette approche a contribué à formaliser la détection de communautés comme un problème d'optimisation structurelle, dans lequel il s'agit d'identifier une partition maximisant la cohésion interne tout en minimisant les connexions externes. Elle a également mis en évidence que de nombreux réseaux réels présentent une organisation modulaire marquée, traduisant l'existence de structures intermédiaires significatives.

Dans la pratique, l'optimisation de la modularité a donné lieu à plusieurs méthodes efficaces adaptées aux graphes de grande taille. L'une des plus efficaces est la méthode de Louvain [71], qui repose sur une optimisation hiérarchique gloutonne de la modularité. Cette approche permet de détecter rapidement des communautés dans des réseaux de grande dimension en construisant progressivement des agrégations de nœuds et en optimisant localement la structure du graphe. Elle est aujourd'hui largement utilisée dans l'analyse empirique des réseaux complexes en raison de son bon passage à l'échelle et de sa simplicité de mise en œuvre.

Depuis ces travaux, la détection de communautés a donné lieu à un large éventail de méthodes reposant sur des principes variés : optimisation de fonctions globales, approches spectrales, méthodes probabilistes, techniques de propagation locale ou encore modèles génératifs. Ces différentes approches ont fait l'objet de nombreuses études comparatives et synthèses méthodologiques, qui ont mis en évidence la diversité des définitions opérationnelles de la notion de communauté ainsi que la sensibilité des résultats aux choix algorithmiques [72, 73]. Ces méthodes permettent d'explorer la structure interne des réseaux et de caractériser leur organisation à une échelle intermédiaire entre le niveau local (nœuds et liens) et le niveau global.

Dans le cas des graphes dynamiques, l'étude des communautés peut également être étendue dans le temps afin d'observer l'apparition, l'évolution, la fusion ou la disparition de structures cohérentes. Ces analyses offrent un éclairage particulier sur les mécanismes de réorganisation interne des systèmes complexes et sur la stabilité structurelle des interactions [69].

Dans le cadre de cette thèse, une analyse des communautés a été réalisée de manière limitée et principalement dans une perspective descriptive (voir Section 4.5). Des méthodes simples ont été utilisées lors de l'exploration initiale des données afin de mieux appréhender la structure du réseau et d'identifier d'éventuelles régularités dans l'organisation des interactions. Cette phase d'analyse a essayé de confirmer l'existence d'hétérogénéités structurelles et de structures locales plus denses, sans toutefois constituer un axe central du travail. Nous nous posions la question de

savoir s'il existait des communautés dans nos réseaux et si celles-ci pourraient être exploitables par nos algorithmes de compensation.

En conséquence, la détection de communautés n'intervient pas comme une composante méthodologique centrale, mais plutôt comme un outil exploratoire pour essayer de mieux comprendre les propriétés structurelles du réseau étudié. Elle contribue ainsi au positionnement général du problème dans le cadre plus large de la science des réseaux, sans constituer un levier direct pour la construction des méthodes algorithmiques proposées.

2.5 Optimisation combinatoire et réseaux complexes distribués

La compensation intégrale des dettes dans les réseaux B2B soulève une question importante d'un point de vue algorithmique : comment sélectionner, dans un réseau de grande taille, un sous-ensemble d'obligations à régler de manière coordonnée, tout en restant compatible avec la structure distribuée et dynamique du système ? Cette question assez générale s'inscrit dans le cadre encore plus large des problèmes d'optimisation combinatoire, dont nous rappelons ici des résultats pertinents pour notre travail. Cette formulation de problème couvre un large éventail d'applications, allant des réseaux de transport aux systèmes de communication, en passant par les systèmes financiers et les interactions sociales.

Selon la nature des contraintes et des variables de décision, certaines formulations peuvent être résolues efficacement à l'aide de méthodes polynomiales, notamment lorsqu'elles peuvent être exprimées sous forme de problèmes de flot, de circulation ou de programmes linéaires [61]. En revanche, lorsque les décisions portent sur des objets indivisibles et que les contraintes sont globales, les problèmes deviennent généralement combinatoires et peuvent appartenir à des classes de complexité élevées.

L'étude de la complexité calculatoire de ces problèmes constitue un domaine central de l'informatique théorique. Les travaux fondateurs de Garey et Johnson, puis de Papadimitriou, sur la NP-complétude ont montré que de nombreux problèmes de sélection ou d'optimisation sur graphes sont intrinsèquement difficiles, au sens où aucune méthode efficace n'est connue pour les résoudre dans le cas général [74, 75]. Cette difficulté est particulièrement marquée dans les situations où les décisions impliquent des structures discrètes, des contraintes globales et des objectifs combinatoires.

Dans ce contexte, les approches heuristiques occupent une place importante. Elles visent à produire des solutions satisfaisantes en exploitant la structure du problème, sans garantir l'optimalité globale. Ces méthodes sont particulièrement pertinentes lorsque la taille des instances ou la complexité structurelle du graphe rendent les approches exactes inutilisables.

Par ailleurs, Miller et Page montrent que de nombreux systèmes étudiés en informatique peuvent être interprétés comme des systèmes complexes distribués, dans lesquels un grand nombre d'entités interagissent localement sans coordination centrale complète. Les propriétés globales de ces systèmes émergent alors des interactions locales, souvent de manière non linéaire et difficilement prédictible [76].

Cette perspective est particulièrement intéressante pour l'étude des réseaux à grande échelle. Dans ces systèmes, les décisions prises au niveau local peuvent influencer la structure globale du réseau, la propagation de contraintes et les dynamiques d'évolution. L'analyse algorithmique de tels environnements nécessite donc des méthodes capables de traiter simultanément :

— des structures discrètes de grande taille,
— des contraintes globales,
— des interactions locales distribuées,

— et des dynamiques évolutives.

L'optimisation combinatoire sur graphes peut ainsi être interprétée comme un problème d'orchestration globale dans un système distribué, où les décisions locales s'inscrivent dans une structure relationnelle complexe. Cela est encore plus vrai dans des contextes où le graphe représente un système réel composé d'acteurs interconnectés, dont les interactions définissent collectivement les propriétés du système.

Dans cette thèse, les problèmes étudiés relèvent précisément de cette classe : ils combinent sélection discrète d'arcs, contraintes globales et structures relationnelles de grande taille. Cette configuration rend les approches exactes difficilement applicables à grande échelle et justifie le recours à des méthodes heuristiques capables d'exploiter la structure du réseau tout en restant compatibles avec des environnements distribués et dynamiques.

Les chapitres suivants introduisent les définitions formelles et les modèles mathématiques nécessaires à la formulation précise du problème étudié, avant de présenter les méthodes algorithmiques proposées.

Deuxième partie

Réseaux de dettes B2B : Formalisme et exploration

Chapitre 3 :
Modéliser les réseaux de dettes B2B

Sommaire

3.1 Représentation mathématique d'un réseau de dettes B2B . . . 30
3.2 Compensation d'un réseau de dettes et métriques d'évaluation 32
3.3 Du graphe d'émission au graphe opérationnel 34

Le problème de la réduction de dettes mutuelles repose sur une modélisation par des graphes. Il est nécessaire de définir précisément les structures sur lesquelles reposent les méthodes développées dans cette thèse. Dans la section 2.3, nous avons suggéré que les réseaux qui nous intéressent, les réseaux de factures, sont intrinsèquement temporels. Le modèle conceptuel présenté dans la Figure 3.1 décrit notre réseau de dettes comme un réseau évoluant de manière continue [22] dans le temps, dans lequel entreprises et relations financières peuvent apparaître ou disparaître. Toutefois, l'étude algorithmique de tels systèmes nécessite de préciser un niveau d'abstraction compatible avec les méthodes de calcul employées.

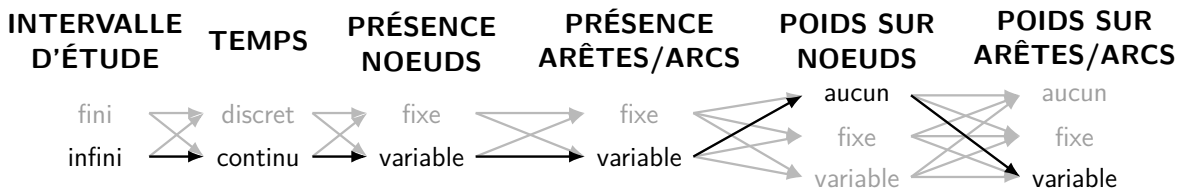


FIGURE 3.1 – Illustration de notre modèle théorique de réseau dynamique utilisé dans la thèse, adapté de la modélisation proposée dans la thèse de Vernet [1]

Dans notre cadre, les nœuds représentent des entreprises. Bien que celles-ci puissent apparaître ou disparaître dans le système économique réel, leur présence peut être interprétée de manière fonctionnelle : une entreprise sans interaction financière active durant une période donnée est équivalente, du point de vue du réseau étudié, à un nœud temporairement inaccessible. Ainsi, l'existence effective d'une entreprise peut être déduite de la présence d'arcs incidents plutôt que d'être modélisée explicitement par un mécanisme d'apparition ou de disparition.

D'un autre côté, une facture est une entité caractérisée notamment par une date d'émission, un montant et une durée de vie dans le système. Elle peut apparaître lors de son émission puis disparaître après règlement ou expiration. De plus, plusieurs factures distinctes peuvent exister simultanément entre une même paire d'entreprises, éventuellement sur des intervalles temporels qui se recouvrent.

22. Le qualificatif *continu* désigne ici le fait que les événements modifiant le réseau ne sont pas supposés se produire à des instants prédéfinis d'une grille temporelle. Il s'agit d'une propriété du modèle conceptuel ; la représentation informatique utilisée par la suite repose quant à elle sur une discrétisation du temps.

L'évolution temporelle du réseau ne peut donc pas être modélisée uniquement par une variation de poids sur des arêtes fixes. Les arcs doivent être considérés comme dynamiques, leur apparition et leur disparition constituant une composante essentielle du modèle. Le réseau étudié relève donc d'un cadre dans lequel les interactions sont décrites par un ensemble d'événements temporels plutôt que par l'activation d'une structure relationnelle permanente.

Cette modélisation décrit le comportement du système au niveau conceptuel. Toutefois, l'exploitation algorithmique d'un tel réseau dynamique nécessite une représentation adaptée aux méthodes de calcul utilisées dans cette thèse. En effet, bien que le temps soit considéré comme une variable continue dans notre modèle conceptuel, sa représentation informatique et son exploitation algorithmique reposent sur une discrétisation cohérente avec la logique événementielle associée aux factures.

Comme discuté dans l'état de l'art, il est courant de remplacer un modèle temporel continu par une représentation discrétisée du temps, permettant l'application d'algorithmes définis sur des structures combinatoires finies [1]. Cette discrétisation ne modifie pas la nature du phénomène étudié, mais fournit une représentation adaptée aux méthodes de calcul utilisées dans cette thèse. L'évolution du réseau est ainsi représentée par une succession de graphes statiques construits sur des fenêtres temporelles successives. Cette représentation permet de conserver l'information temporelle pertinente tout en rendant possible l'application d'algorithmes classiques d'optimisation sur graphes, comme discuté en Section 2.5.

3.1 Représentation mathématique d'un réseau de dettes B2B

Les discussions précédentes, sur la nature des réseaux de factures et sur les choix de modélisation nécessaires à leur étude, conduisent naturellement à rechercher une formalisation mathématique adaptée à la représentation simultanée des interactions financières, de leur directionnalité et de leur évolution temporelle. Le modèle unifié introduit dans cette section constitue donc le cadre formel de référence utilisé dans l'ensemble des chapitres suivants. Les différentes variantes étudiées ultérieurement correspondent à des restrictions, extensions ou contraintes supplémentaires appliquées à cette même structure fondamentale.

3.1.1 Temps discret et périodes d'observation

On considère une discrétisation du temps en périodes indexées par $k \in \mathbb{N}$, de durée $\Delta > 0$ (jour, semaine, mois, ...). On appellera session ou période k cette indexation temporelle. On note $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des instants de début de période, avec $t_{k+1} = t_k + \Delta$. Dans les expériences, on se restreindra à un horizon fini $k \in \{0, \dots, T-1\}$.

3.1.2 Factures comme événements d'arcs

Un arc, représentant une ***facture***, est un élément e d'un ensemble E d'identifiants uniques. À chaque facture $e \in E$ sont associés quatre attributs : le débiteur $s(e) \in V$, le créancier $d(e) \in V$, le montant $w(e) > 0$ et la date (ou période) d'émission $\tau(e)$. Plusieurs factures distinctes peuvent exister entre un même couple (s, d). On les distinguera alors par leurs identifiants respectifs.

3.1.3 Réseau de dettes : représentation générale

Les réseaux de dettes considérés peuvent être décrits comme des structures relationnelles dynamiques dans lesquelles les sommets sont des entreprises et les interactions sont des factures orientées et pondérées. Cette approche s'inscrit dans la continuité de travaux proposant des formalismes graphiques pour les relations de dette, notamment le modèle ***DebtG*** réalisé par Cui [48], tout en intégrant explicitement la dimension temporelle des factures.

Définition 3.1 (Réseau de dettes (forme générale))**.** *Un* ***réseau de dettes*** *est défini par un couple*

$$G = (V, E),$$

où V est un ensemble d'entreprises (sommets) et E est un ensemble de factures (arcs).

Chaque arc $e \in E$ est muni d'un instant d'émission $\tau(e)$, ce qui confère au réseau une topologie temporelle explicite. De plus, le fait que plusieurs factures puissent exister entre une même paire de sommets (u, v) implique que la représentation induite est un ***multi-graphe orienté pondéré dynamique***.

3.1.4 Quantités structurelles associées au graphe

Les objets définis dans cette section décrivent des propriétés du réseau de facturation $G = (V, E)$ introduit précédemment. Ces quantités ne dépendent d'aucune procédure algorithmique et constituent le socle formel utilisé par les mécanismes de compensation étudiés dans la suite du manuscrit. Ces notations restent valides, aussi bien dans un cadre dynamique que dans un cadre statique.

Définition 3.2 (Arcs entrants et sortants)**.** *Soit $v \in V$ une entreprise du réseau. On définit les ensembles d'arcs entrants et sortants de v par*

$$I_G(v) = \{(u, v) \in E\}, \qquad O_G(v) = \{(v, u) \in E\}.$$

Définition 3.3 (Volume de dette d'un réseau)**.** *Le volume total de dettes correspond à la somme des montants des factures du réseau :*

$$D_G = \sum_{e \in E} w(e).$$

Cette quantité sert à mesurer le volume de dette du réseau, mais aussi l'ampleur d'une réduction de dettes.

Définition 3.4 (Flux entrants et sortants)**.** *Dans un graphe $G = (V, E)$, le volume total de créances reçues et de dettes émises par un nœud $v \in V$ est défini respectivement par*

$$in_G(v) = \sum_{i \in I_G(v)} w(i), \qquad out_G(v) = \sum_{o \in O_G(v)} w(o).$$

Définition 3.5 (Position nette)**.** *La position nette d'une entreprise $v \in V$ est définie par*

$$B_G(v) = in_G(v) - out_G(v).$$

Une position nette positive correspond à une entreprise créancière, tandis qu'une position nette négative correspond à une entreprise débitrice.

Définition 3.6 (Conservation globale des positions nettes)**.** *Un réseau de dettes satisfait la propriété de conservation suivante :*

$$\sum_{v \in V} B_G(v) = 0.$$

En effet, chaque facture contribue positivement à la position nette du créancier et négativement à celle du débiteur, menant à un équilibre global du système.

Extension de notation (ensemble d'arcs et sous-graphe de configuration).
Dans toute cette thèse, l'ensemble des sommets V est fixe, contrairement au modèle général théorique de la Figure 3.1 qui autorise des topologies variables. On identifie donc un graphe de dettes avec son ensemble d'arcs. Pour tout $C \subseteq E$, on identifiera cette configuration d'arcs (V, C) au sous-graphe qu'elle représente. Les quantités définies ci-dessus sur les graphes s'appliquent alors directement à C : on s'autorisera à écrire D_C, $B_C(v)$, $in_C(v)$, etc., pour ces quantités évaluées sur (V, C).

3.1.5 Décomposition temporelle : graphes d'émission

À partir de la définition générale précédente, on introduit une décomposition en graphes indexés par le temps, qui sépare le ***processus d'émission*** des factures (données) de la ***construction du graphe opérationnel*** (choix algorithmique).

Définition 3.7 (Graphe d'émission en période k)**.** *Pour chaque période k, on définit le graphe d'émission par le multi-graphe orienté pondéré*

$$G^k = (V, E^k),$$

où $E^k = \{e \in E \mid \tau(e) = k\}$ est l'ensemble des factures ***émises*** *durant la période k, et V l'ensemble de toutes les entreprises. On appellera ces graphes et tous les graphes dans lesquels on ne considère plus la dimension temporelle, des* ***graphes statiques****.*

Cette définition fait de $(G^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite *générative* du réseau : G^k décrit ce qui entre dans le système durant la période k, et permet de découper un réseau dynamique en une série de graphes statiques temporellement indépendants. La Figure 3.2 illustre cette décomposition et les effets que cela peut avoir sur la topologie globale du réseau. En effet, lorsque l'on regarde le réseau dynamique entier, on peut observer la présence de cycles ou d'autres structures remarquables qui n'existent pas lorsque l'on observe les graphes statiques de sa suite générative.

3.2 Compensation d'un réseau de dettes et métriques d'évaluation

Les définitions précédentes décrivent le réseau de dettes lui-même. Les méthodes développées dans cette thèse visent à en réduire le volume par ***compensation multilatérale*** : il s'agit de sélectionner un sous-ensemble de factures pouvant être réglées simultanément, de manière à diminuer les obligations du réseau tout en préservant les positions financières finales des entreprises. Une telle compensation consiste à retenir un sous-ensemble d'arcs de E, dont le règlement intégral et simultané transforme le réseau. Cet ensemble, qu'on appellera la ***configuration de compensation*** C, fait l'objet de la définition suivante.

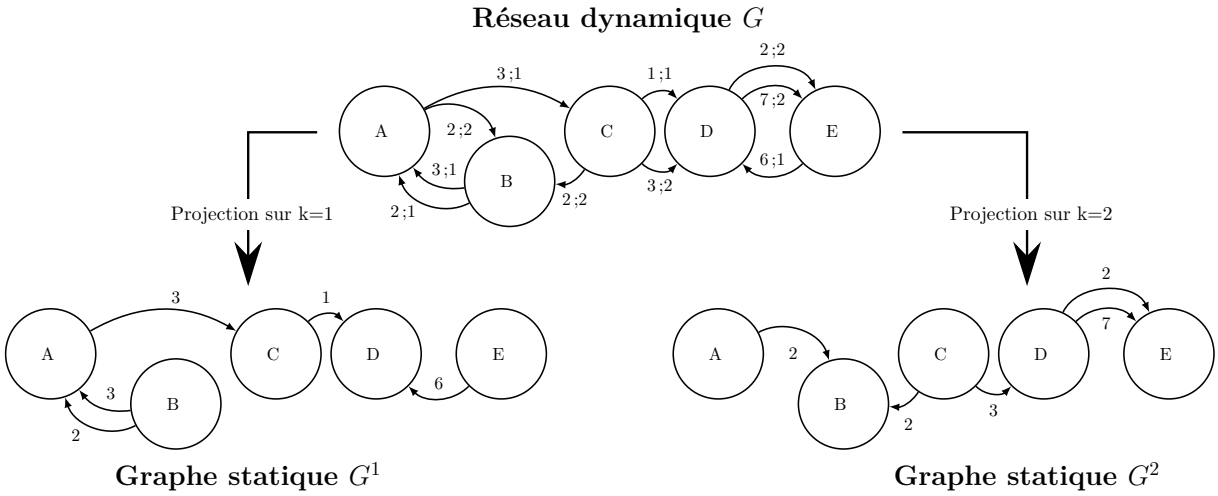


FIGURE 3.2 – Illustration de la décomposition d'un réseau dynamique G observé sur 2 jours dans sa suite générative de $(G^k)_{k\in\{1,2\}}$. Les arcs du réseau dynamique portent les informations (montant ; date).

Définition 3.8 (Configuration de compensation)**.** *Une* ***configuration de compensation*** *est un sous-ensemble d'arcs*

$$C \subseteq E,$$

représentant les factures réglées simultanément lors d'une compensation. Informatiquement, le sous-graphe (V, C) n'est pas reconstruit : une compensation sélectionne une configuration d'arcs au sein de G, sans modifier les sommets ni le reste du réseau.

Les méthodes algorithmiques présentées dans la suite du manuscrit (voir Chapitre 5) construisent une telle configuration C sous différentes contraintes ; les métriques ci-dessous permettent d'en évaluer la qualité indépendamment de la procédure employée.

3.2.1 Métriques d'évaluation

La qualité d'une compensation ne peut être évaluée uniquement à partir de la configuration sélectionnée. Elle dépend à la fois du volume de dettes effectivement réglées et de la quantité de liquidité nécessaire pour rendre cette compensation réalisable. Les métriques introduites ici reposent exclusivement sur les quantités structurelles définies précédemment, appliquées à la configuration C.

La sélection d'une configuration C induit de nouvelles positions nettes $B_C(v)$ pour les entreprises du réseau, données par la Définition 3.5. Ces positions nettes déterminent la répartition finale des besoins de règlement entre participants.

Définition 3.9 (Financement externe)**.** *La compensation intégrale nécessite de financer les entreprises dont la position nette devient négative après sélection des factures. Le financement externe, aussi appelé liquidité totale requise, est définie par*

$$F(C) = \sum_{v\in V} \max\big(0, -B_C(v)\big).$$

Cette quantité représente le montant minimal de liquidité externe nécessaire pour assurer le règlement complet des factures appartenant à C.

Définition 3.10 (Facteur d'amplification)**.** *Afin d'évaluer l'efficacité du mécanisme de compensation, nous introduisons le facteur d'amplification défini par*

$$\alpha(C) = \frac{D_C}{F(C)}, \quad \textit{lorsque } F(C) > 0.$$

Ce ratio mesure la quantité de dette réglée par unité de liquidité mobilisée et constitue un indicateur central de performance systémique.

Définition 3.11 (Taux d'inclusion)**.** *On définit le taux d'inclusion des factures dans la session de compensation :*

$$IF(C) = \frac{D_C}{D_G},$$

où D_C et D_G sont respectivement le volume de dette présent dans la configuration C et dans le graphe de départ G.

Cette métrique permet d'évaluer la couverture structurelle du réseau indépendamment des montants financés.

Définition 3.12 (Gain)**.** *Le gain de compensation mesure l'efficacité relative du mécanisme par rapport au potentiel maximal de réduction de dette du réseau. Il est défini par*

$$\Gamma(C) = \frac{D_C - F(C)}{D_G - F(G)},$$

lorsque $D_G - F(G) > 0$.

Cette métrique compare la réduction effective de dette obtenue, après prise en compte du financement mobilisé, à la réduction maximale théoriquement atteignable dans le réseau initial. Elle fournit une indication plus claire sur la capacité d'un algorithme à sélectionner des factures qui se compensent sans dépenser inutilement. De plus, cette mesure est normalisée (voir Annexe B), afin de pouvoir comparer les configurations de compensation entre elles, quels que soient les graphes réduits.

3.2.2 Interprétation : le financeur externe

Le mécanisme de financement externe peut être interprété concrètement par l'introduction d'un ***financeur externe***, noté v^*, qui fournit temporairement de la liquidité aux entreprises débitrices de C afin de permettre le règlement intégral des factures compensées. Dans une implémentation explicite, ce financement correspond à l'ajout d'obligations vers le financeur que l'on appellera arcs synthétiques : pour tout v tel que $B_C(v) < 0$, on ajoute un arc $(v, v^*, -B_C(v))$ représentant la dette finale de v envers le financeur. Le montant total de ces opérations est exactement le financement externe $F(C)$ (Définition 3.9).

3.3 Du graphe d'émission au graphe opérationnel

La suite générative $(G^k)_{k\in\mathbb{N}}$ décrit uniquement le processus d'émission des factures. Toutefois, les algorithmes de compensation de dettes étudiés dans cette thèse ne seront pas appliqués directement à ces graphes d'émission, mais à des graphes construits à partir des factures encore pertinentes à une période donnée.

En pratique, une facture peut rester active pendant plusieurs périodes après son émission, jusqu'à son règlement ou son expiration. De plus, les sessions de compensation passées peuvent avoir généré des financements encore en cours, représentés par des arcs synthétiques vers le financeur v^*. Le graphe effectivement traité lors d'une session doit donc agréger, à une date donnée, à la fois les factures encore actives et les financements en cours.

3.3.1 Factures actives et financements actifs

On note A_k l'ensemble des factures actives à la période k, qui regroupe :
— les nouvelles factures émises pendant la période k ;
— les factures émises lors de périodes antérieures, non encore compensées et non expirées.

On note également L_k l'ensemble des financements encore actifs à l'issue de la période k. Ces arcs synthétiques présentent les caractéristiques suivantes :
— ils représentent les dettes encore en cours des entreprises envers le financeur ;
— ils ne correspondent pas à des factures : ils sont créés par le mécanisme de compensation lorsqu'une entreprise présente une position nette négative à l'issue d'une session de compensation ;
— ils constituent une mémoire financière [23] du système, distincte de la dynamique d'émission des factures, permettant de rembourser le financeur à l'intérieur du système.

Définition 3.13 (Graphe opérationnel de session)**.** *On appelle* ***graphe opérationnel*** *de la session k le graphe*

$$\widehat{G}^k = (V, \widehat{E}^k), \qquad \textit{avec} \qquad \widehat{E}^k = A_k \cup L_{k-1}.$$

Le graphe opérationnel de la session k contient l'ensemble des obligations effectivement soumises à l'algorithme de compensation : les factures encore actives dans le système et les financements encore en cours. Bien que ces deux ensembles aient des origines distinctes, ils sont formellement représentés par des arcs pondérés de même nature. L'heuristique que nous introduirons au Chapitre 5 pourra donc être appliquée directement à leur union, sans distinction de traitement.

3.3.2 Paramètres de persistance temporelle

Le caractère temporel du modèle repose sur deux paramètres de durée de vie :
— D_{i}, la durée maximale de présence d'une facture commerciale dans le mécanisme ;
— D_{f}, la durée maximale de présence d'un financement dans le mécanisme.

Une facture commerciale non compensée peut donc rester active pendant au plus D_{i} périodes après son émission. De manière analogue, un financement non encore remboursé peut rester dans le système pendant au plus D_{f} périodes après sa création. Lorsqu'une facture ou un financement dépasse cette durée, il sort du mécanisme et doit être réglé hors système.

La construction récursive des ensembles actifs A_k et L_k au fil des sessions dépend des configurations compensées successives produites par l'algorithme ; elle est détaillée avec le mécanisme temporel au Chapitre 8.

23. L'expression ***mémoire financière*** traduit le fait que ces arcs reportent d'une période à la suivante l'état des financements non encore remboursés avec une dépendance à l'historique des compensations passées, et non uniquement des factures émises durant cette période.

Chapitre 4 :
Propriétés des réseaux de dettes B2B

Sommaire

4.1 Jeu de données et construction du réseau 37
4.2 Granularité temporelle et choix d'agrégation 38
4.3 Distributions de degrés et estimation des lois de puissance . . . 46
4.4 Positionnement par rapport aux familles classiques de réseaux 49
4.5 Exploration mésoscopique et détection de communautés 50
4.6 Synthèse et implications pour les algorithmes de compensation 55

Ce chapitre propose une analyse d'un réseau de dettes (tel qu'introduit au Chapitre 3). L'objectif est d'étudier ses propriétés structurelles avant l'introduction des méthodes algorithmiques de réduction de dettes sur ce même jeu de données. Ce chapitre s'appuie en partie sur des travaux publiés dans les proceedings de la conférence *Complex Networks 2023* [24], dont le contenu est détaillé et unifié pour ce manuscrit.

4.1 Jeu de données et construction du réseau

L'analyse présentée dans ce chapitre repose sur un jeu de données réel décrivant les relations de facturation entre entreprises. On s'intéresse dans cette section à l'origine de ces données, aux opérations de pré-traitement effectuées ainsi qu'à la procédure permettant de construire les réseaux de dettes étudiés dans la suite du manuscrit.

4.1.1 Origine des données

Les données utilisées proviennent d'un opérateur de facturation électronique, InfoCert, qui centralise les échanges de factures de ses clients dans le cadre d'activités commerciales inter-entreprises. Chaque enregistrement correspond à l'émission d'une facture entre deux entreprises identifiées de manière anonyme.

Le jeu de données couvre l'année économique 2019 de tous ses clients et contient 22 millions de factures émises entre pas moins de deux millions d'entreprises distinctes. Les identifiants des entreprises ont été anonymisés en amont de l'étude. Cela permet d'assurer qu'aucune information permettant d'identifier directement les acteurs économiques n'est accessible.

Chaque facture contient a minima les informations suivantes :

— un identifiant unique de facture ;
— un identifiant anonymisé du débiteur ;
— un identifiant anonymisé du créancier ;
— une date d'émission ;

— un montant associé à la transaction.

Ces informations correspondent directement aux objets formalisés précédemment, où nous modélisions la facture comme un arc orienté pondéré muni d'une date d'émission. Il est important de noter qu'aucune donnée sur le secteur d'activité ou encore la localisation n'est disponible, restreignant nos informations au strict minimum.

4.1.2 Pré-traitement des données

Plusieurs étapes de pré-traitement ont été nécessaires afin de rendre les données compatibles avec l'analyse en termes de réseaux.

Tout d'abord, les factures incomplètes ou présentant des incohérences structurelles (montant nul, identifiants manquants ou dates invalides) ont été supprimées. Dans la mesure où l'étude porte sur la structure des relations financières dépendante des montants absolus, aucune normalisation monétaire supplémentaire n'a été appliquée aux poids des arcs à ce stade. Les montants sont conservés tels quels afin de préserver l'hétérogénéité intrinsèque des interactions économiques.

Enfin, les dates d'émission sont discrétisées lors de l'utilisation, conformément au modèle introduit au Chapitre 3, permettant d'associer chaque facture à une période temporelle indexée par un entier k.

4.1.3 Construction des graphes de factures

Pour une période donnée k, le graphe d'émission $G^k = (V, E_k)$ est construit en regroupant l'ensemble des factures émises durant cette période, en respectant la Définition 3.7. L'évolution temporelle du système est ainsi représentée par la suite générative $(G^k)_k$.

Selon la granularité temporelle choisie (jour, semaine ou mois), une même base de données peut donc produire différentes représentations du réseau, permettant d'observer la structure des interactions économiques à plusieurs échelles temporelles.

4.1.4 Limites et biais d'observation

Comme tout jeu de données issu d'une plateforme spécifique, les réseaux observés ne constituent pas une représentation exhaustive de l'économie réelle. Ils reflètent uniquement les interactions transitant par l'infrastructure considérée.

Plusieurs biais potentiels doivent ainsi être pris en compte :

— une couverture partielle du tissu économique ;

— une hétérogénéité sectorielle liée à l'adoption variable de la dématérialisation des factures ;

— l'absence d'information sur les transactions réalisées hors plateforme ;

— l'absence d'information sur les transactions directes vers les consommateurs.

Toutefois, la taille du jeu de données et la diversité des entreprises présentes permettent d'observer des propriétés structurelles caractéristiques des réseaux de dettes à grande échelle.

4.2 Granularité temporelle et choix d'agrégation

Après avoir construit notre réseau dynamique à partir de données de facturation, il faut que nous définissions une granularité temporelle d'observation. Le choix de cette granularité influence directement la structure du graphe obtenu, ainsi que les propriétés mesurées. Une agrégation

trop fine peut produire des réseaux extrêmement fragmentés, tandis qu'une agrégation trop large peut masquer la dynamique réelle des interactions économiques.

Dans un réseau de factures, l'agrégation temporelle modifie notamment :

— le nombre de nœuds actifs ;
— la densité du graphe ;
— les volumes financiers observés ;
— la présence de motifs structurels tels que chemins ou cycles.

Afin d'évaluer les effets du paramètre temporel, plusieurs niveaux d'agrégation temporelle ont été étudiés : journalier, hebdomadaire et mensuel. Chaque niveau correspond à une construction distincte de la suite générative $(G^k)_k$, obtenue en regroupant les factures émises au sein des différents intervalles de temps évoqués. Leur comparaison, menée dans les sous-sections suivantes, met en évidence une propriété centrale du réseau : sa structure exploitable n'apparaît pas à un instant donné mais émerge au cours du temps, ce qui motivera certains choix pour la suite de ce manuscrit.

4.2.1 Agrégation mensuelle

L'agrégation mensuelle consiste à regrouper l'ensemble des factures émises au cours d'un même mois calendaire dans un graphe statique G^k. Ce niveau d'observation correspond à une échelle macro-économique intermédiaire : il est suffisamment long pour laisser émerger des structures relationnelles complexes, tout en restant compatible avec les délais usuels de paiement dans les transactions inter-entreprises.

La densité effective du réseau est élevée à cette échelle, ce que l'on discutera à partir du Tableau 4.1, favorisant l'apparition de sommets fortement connectés. De nombreux cycles deviennent observables, certains résultant de groupes de dettes s'étalant sur plusieurs semaines. Cependant, cette agrégation peut fusionner des interactions qui n'auraient pas eu lieu (par exemple, la présence de factures qui auraient déjà été payées lors de l'arrivée d'une autre), ce qui peut conduire à l'apparition de cycles qui ne correspondent pas nécessairement à des opportunités de compensation réelles.

Pour autant, l'étude de cette granularité permet d'analyser la structure globale du réseau de dettes et de déterminer si des propriétés topologiques stables émergent indépendamment des fluctuations mensuelles d'activité.

Évolution mensuelle de l'activité. La Figure 4.1 présente l'évolution mensuelle du nombre de nœuds actifs, du nombre d'arcs et du volume financier total échangé. Ces indicateurs permettent de caractériser l'intensité économique [24] du système indépendamment de sa structure topologique.

On observe une relative stabilité du nombre d'entreprises actives au cours de l'année, avec une diminution marquée durant le mois d'août. Cette baisse correspond aux périodes traditionnelles de fermeture estivale dans le contexte économique italien, ce qui concorde avec le calendrier réel de l'activité économique.

Le nombre d'arcs suit une dynamique similaire, indiquant que la variation d'activité affecte globalement l'ensemble du réseau plutôt qu'un sous-ensemble restreint d'acteurs.

Enfin, le volume financier total présente des fluctuations plus marquées que le nombre d'arcs, ce qui suggère une hétérogénéité des montants facturés d'une période à l'autre, sans effet cependant sur la structure du réseau.

24. Par *intensité économique*, on désigne le niveau global d'activité du réseau. Cette notion se distingue des propriétés *topologiques* qui décrivent l'organisation des relations entre entreprises et non leur volume.

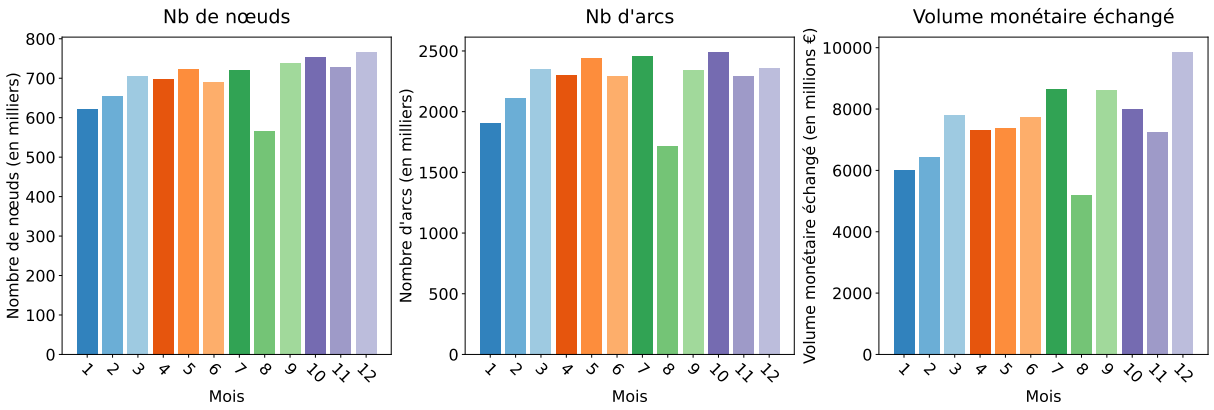


FIGURE 4.1 – Répartition du nombre de nœuds, arcs et volume monétaire par mois.

Caractéristiques structurelles mensuelles du réseau :

Si ces indicateurs décrivent l'intensité de l'activité économique, ils ne permettent pas à eux seuls de caractériser l'organisation interne du réseau. Le Tableau 4.1 présente donc les principales statistiques topologiques des graphes mensuels $(G^k)_k$, ainsi que celles du graphe annuel agrégé, afin d'analyser la structure relationnelle induite par ces flux.

Taille et activité du réseau : Les mesures présentées dans le Tableau 4.1 confirment les tendances visibles sur la Figure 4.1. Le nombre de nœuds actifs varie entre 570 mille et 770 mille entreprises selon les mois. Cela traduit une activité économique globalement stable au cours de l'année malgré des fluctuations saisonnières, notamment bien marquées lors de la période estivale. Le nombre d'arcs suit une dynamique similaire, variant entre 1.7 et 2.5 millions de factures mensuelles.

Le rapport relativement constant entre nombre d'arcs et nombre de nœuds se reflète dans la stabilité du degré moyen, compris entre 3.05 et 3.42. Cette faible variation indique que les changements en volume de l'activité affectent principalement l'ensemble du réseau de manière homogène plutôt qu'un sous-ensemble spécifique d'acteurs économiques, ce qui semble attendu dans une économie stable comme celle de la période étudiée.

Connectivité globale : Une propriété intéressante de notre réseau réside dans la présence systématique d'une composante géante faiblement connexe (GWCC) [25], regroupant plus de 99 % des nœuds et des arcs pour chaque mois. Cette observation montre que, même si les interactions sont locales, le système économique forme un réseau presque entièrement interconnecté lorsque l'on ignore l'orientation des dettes. L'apparition d'une composante géante constitue une propriété classique des réseaux réels de grande taille, observée notamment dans les réseaux technologiques et sociaux [40, 60].

Autrement dit, la quasi-totalité des entreprises de notre jeu de données appartient à un même système relationnel indirect, ce qui constitue une condition structurelle favorable à l'existence de mécanismes de compensation à grande échelle.

25. La composante ***faiblement*** connexe (WCC) d'un graphe orienté est un sous-ensemble maximal de nœuds tel qu'il existe un chemin entre deux nœuds de l'ensemble. La composante ***fortement*** connexe (SCC) impose une condition plus restrictive : deux nœuds quelconques doivent être reliés par un chemin orienté dans les deux sens, c'est-à-dire en respectant l'orientation des dettes. Un graphe peut admettre plusieurs composantes (faiblement ou fortement) connexes. On parle de composante ***géante*** lorsque l'une d'elles regroupe une fraction substantielle des nœuds du graphe, par opposition aux autres composantes de taille négligeable.

TABLEAU 4.1 – Valeurs statistiques décrivant la suite G^k mensuelle des données ainsi que l'agrégation annuelle. GWCC et GSCC représentent respectivement la composante géante faiblement connexe et la composante géante fortement connexe.

Mois	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**Annuel**
Nœuds (10^3)	623	657	707	699	723	691	721	566	740	754	729	767	2057
Arcs (10^3)	1910	2120	2362	2311	2443	2296	2462	1723	2348	2496	2301	2364	27138
Degré moyen	3.07	3.23	3.34	3.31	3.38	3.22	3.42	3.05	3.17	3.31	3.16	3.08	13.19
Coefficient de clustering	0.010	0.007	0.010	0.007	0.007	0.013	0.007	0.008	0.011	0.011	0.007	0.016	0.028
Diamètre	29	29	28	28	31	25	27	32	28	33	31	27	34
Longueur moyenne de chemins	9.57	9.14	9.26	9.52	9.34	9.51	9.24	10.25	9.64	9.31	9.20	9.42	9.37
Nœuds GWCC (%)	99.19	99.20	99.34	99.32	99.36	99.29	99.40	99.07	99.40	99.42	99.40	99.45	99.95
Arcs GWCC (%)	99.80	99.20	99.84	99.84	99.85	99.74	99.85	99.75	99.84	99.85	99.84	99.85	99.97
Nœuds GSCC (%)	7.70	8.58	9.09	8.88	9.35	9.15	9.50	7.01	8.69	9.26	8.77	8.99	11.83
Arcs GSCC (%)	34.87	34.75	36.86	36.42	38.08	36.53	37.87	32.07	33.64	37.14	36.18	36.10	47.34

Structure directionnelle et composante fortement connexe : À l'inverse, la composante géante fortement connexe (GSCC) ne regroupe qu'environ 7 à 9 % des nœuds selon les mois, bien qu'elle contienne plus d'un tiers des arcs du réseau. En effet, la GWCC ignore l'orientation des arcs tandis que la GSCC l'impose, ce qui explique qu'elles ne partitionnent pas le réseau et que leurs tailles ne sont pas complémentaires. Cette asymétrie indique que les cycles de dettes sont concentrés dans une fraction réduite mais dense du réseau, caractéristique typique des réseaux dirigés réels où les structures sont plutôt hiérarchiques [40].

Cette organisation suggère une structure dans laquelle une majorité d'entreprises participe à des chaînes de dettes orientées, tandis qu'un noyau plus restreint concentre les interactions permettant la formation de cycles.

Distances et propriétés de petit monde : Le diamètre du réseau reste compris entre 25 et 33 selon les mois, ce qui traduit l'existence de quelques paires de nœuds excentrées reliées par des chaînes longues. Cette valeur représente le pire cas et n'est pas en soi représentative de la connectivité globale du réseau. La longueur moyenne des chemins [26], en revanche, se stabilise autour de 9.3, ce qui est faible par rapport à la taille du réseau : avec des millions de nœuds et d'arcs, une croissance caractéristique des réseaux de type ***petit monde*** [77] prédirait une distance de l'ordre de $\log(n) \approx 6$, avec n le nombre de nœuds. La valeur observée de 9.3 est donc assez cohérente avec cette propriété : un faible nombre d'intermédiaires suffit généralement pour relier deux entreprises quelconques, malgré la taille très importante du réseau. Cela ne permet pas de conclure sur la caractéristique petit monde de ce réseau, cependant cela implique qu'une perturbation locale ou une opération de compensation peut potentiellement se propager à grande échelle dans le réseau. Cela met aussi en avant que nous avons une connectivité globale qui est grande, mais pour autant, l'organisation locale semble non triviale.

26. Ici, un chemin entre deux nœuds u et v est un chemin non orienté, c'est-à-dire une suite $u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ telle que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ ou $(v_{i+1}, v_i) \in E$ pour tout i. On calcule donc la moyenne de ces chemins sur la GWCC.

Faible clustering et organisation non locale : Le coefficient de clustering [27] demeure très faible (entre 0.007 et 0.016), ce qui distingue nettement ces réseaux des réseaux sociaux classiques [77, 78]. L'absence relative de triangles indique que les relations commerciales de notre réseau ne s'organisent pas principalement autour de groupes fermés d'entreprises, mais plutôt sous forme de chaînes étendues d'échanges. Cela semble cependant cohérent lorsque l'on pense au fait que les interactions suivent des chaînes de production ou de paiement plutôt que des communautés fortement densifiées [5].

Cette structure favorise donc l'apparition de cycles longs plutôt que de motifs locaux courts et compacts, ce qui influence directement la nature de nos stratégies algorithmiques envisageables pour la réduction de dettes.

Effet de l'agrégation annuelle : L'agrégation annuelle renforce ces tendances structurelles : le degré moyen augmente fortement (13.19), le clustering croît, et la GSCC s'élargit sensiblement. Cette évolution confirme que l'agrégation temporelle longue densifie fortement le réseau en fusionnant des interactions non simultanées. De plus, bien que l'agrégation annuelle fournisse une vision globale du système économique, le graphe qui en résulte présente une structure topologique sensiblement différente de celle observée aux échelles plus fines, et doit être interprété avec prudence dans un contexte algorithmique. Il est même inenvisageable de considérer ce réseau pour notre questionnement sur la réduction de dettes car les paiements ne sont pas faits annuellement mais sur des délais plus courts. Pour autant, dans une étude qui s'intéresserait plutôt à l'état d'un système économique en termes d'échanges pour faire des bilans financiers ou comptables, cela semblerait plus pertinent.

4.2.2 Agrégation hebdomadaire

Afin d'analyser plus finement la dynamique des interactions économiques, l'agrégation hebdomadaire des factures a aussi été étudiée : chaque graphe G^k regroupe ici l'ensemble des factures émises au cours d'une semaine civile. Cette échelle intermédiaire permet d'observer des structures temporelles plus proches du rythme réel des échanges économiques tout en conservant une taille de réseau suffisante pour l'analyse structurelle.

La Figure 4.2 illustre l'évolution hebdomadaire du nombre de nœuds actifs, du nombre d'arcs et du volume total échangé au cours de l'année. Contrairement à l'échelle mensuelle, les variations deviennent nettement plus marquées, révélant des fluctuations d'activité à court terme invisibles dans les agrégations plus longues.

Cycles intra-mensuels de l'activité économique. L'analyse de la Figure 4.2 met en évidence une régularité temporelle marquée dans l'activité du réseau. On observe de manière récurrente, pour la majorité des mois, un cycle hebdomadaire caractérisé par une augmentation progressive du nombre de nœuds actifs, du nombre de factures et du volume monétaire échangé au fil des semaines d'un même mois.

Les premières semaines présentent systématiquement une activité plus faible, suivies d'une montée graduelle aboutissant à un pic d'activité lors de la dernière semaine du mois. Ce comportement suggère une concentration des émissions de factures en fin de période comptable, phénomène cohérent avec les pratiques économiques et administratives où la facturation et les régularisations financières sont fréquemment effectuées à l'approche des clôtures mensuelles.

27. Le coefficient de clustering d'un nœud v mesure la proportion de paires de voisins de v qui sont eux-mêmes connectés. Il est calculé sur la version non dirigée du graphe et vaut $c(v) = \frac{t(v)}{k_v(k_v-1)}$, où $t(v)$ est le nombre de triangles passant par v et k_v son degré.

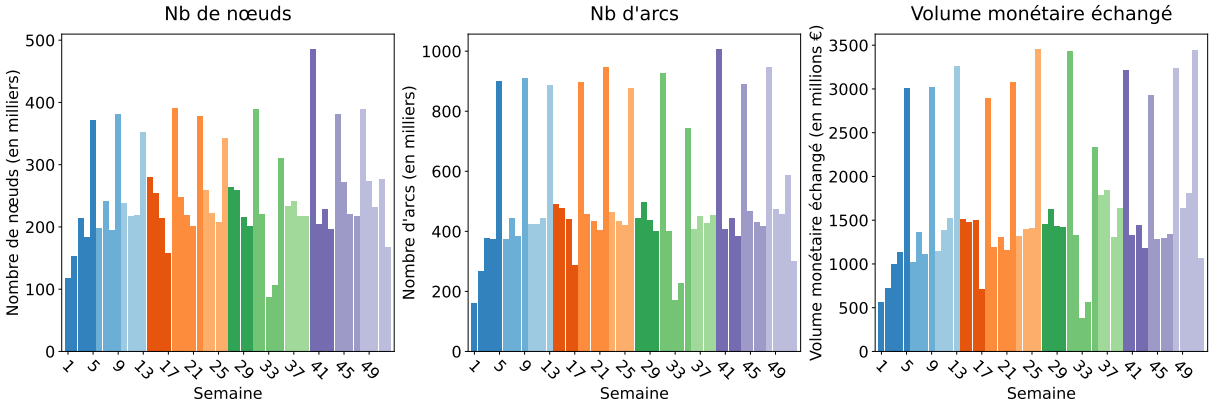


FIGURE 4.2 – Évolution hebdomadaire du nombre de nœuds, du nombre d'arcs et du volume monétaire total échangé.

Cette périodicité apparaît de manière visuellement stable tout au long de l'année, suggérant que la dynamique du réseau est structurée, au moins en partie, par des contraintes calendaires plutôt que par de pures fluctuations aléatoires. Une exception notable cependant concerne le mois de décembre, pour lequel le pic de volume monétaire intervient plus tôt que dans les autres mois. Ce décalage peut être interprété comme un effet saisonnier lié aux congés de fin d'année et à l'anticipation des règlements avant la période de Noël, conduisant les entreprises à avancer leurs opérations de facturation.

Ces observations montrent que la dynamique temporelle du réseau de dettes ne peut être considérée comme stationnaire à l'échelle hebdomadaire. Au contraire, elle présente une structure périodique forte, qu'il pourrait être intéressant de prendre en compte pour les opportunités de compensation et pour la définition de fenêtres temporelles pertinentes dans nos algorithmes.

Variabilité structurelle hebdomadaire :

Le Tableau 4.2 synthétise les principales statistiques observées sur l'ensemble des graphes hebdomadaires. À nouveau, la stabilité observée à l'échelle mensuelle n'existe plus, les indicateurs présentant ici une grande variabilité.

TABLEAU 4.2 – Statistiques descriptives sur la suite générative hebdomadaire.

Statistique	Moyenne	Écart-type	Min	Max
Nœuds (10^3)	249	80	88	485
Arcs (10^3)	512	220	161	1006
Degré moyen	4.00	0.50	2.73	5.11
Diamètre	18	2	13	23
Coefficient de clustering	0.0010	0.0009	0.0002	0.0033
Taille GWCC (%)	94.20	2.49	88.28	98.53
Taille GSCC (%)	3.02	2.01	0.04	7.18

Taille du réseau et fluctuations d'activité : Le nombre moyen de nœuds actifs par semaine s'établit autour de 249 000, avec un écart-type important (80 000), traduisant une forte hétérogénéité hebdomadaire de l'activité économique. Certaines semaines ne mobilisent qu'une fraction limitée du réseau global, tandis que d'autres concentrent une activité nettement plus élevée. Cette variabilité est clairement due au phénomène observé dans la Figure 4.2.

Connectivité globale : À cette échelle, le poids relatif de la composante géante faiblement connexe baisse. Sa taille moyenne atteint environ 94% des nœuds, avec des variations pouvant descendre jusqu'à 88%. Cette fragmentation partielle indique que, sur des fenêtres temporelles courtes, certaines entreprises deviennent temporairement isolées du système relationnel principal. Ce phénomène semble cohérent avec les observations réalisées sur d'autres réseaux dynamiques, où la connectivité globale dépend fortement de la fenêtre temporelle d'observation [56].

Structure directionnelle et cycles : La composante fortement connexe de plus grande taille devient nettement plus réduite à l'échelle hebdomadaire, avec une taille moyenne d'environ 3% des nœuds. Certaines semaines présentent même une quasi-disparition de cette composante. Cela indique que les cycles de dettes, des éléments essentiels pour les mécanismes de compensation actuels, émergent principalement par accumulation temporelle d'interactions. À courte échelle, les chaînes de dettes existent mais ne se ferment pas nécessairement en cycles exploitables pour ces méthodes.

Distances et organisation globale : Le diamètre moyen diminue significativement (valeur moyenne 18 contre environ 30 à l'échelle mensuelle), reflétant la réduction mécanique de la taille effective du réseau. Malgré cette contraction, le degré moyen reste relativement stable (≈ 4), suggérant que la densité locale des interactions demeure comparable.

Clustering et structure locale : Le coefficient de clustering devient extrêmement faible ($\approx 10^{-3}$), soit un ordre de grandeur inférieur à celui observé mensuellement. Cette diminution confirme que les motifs triangulaires nécessitent une accumulation temporelle d'interactions pour apparaître. Ainsi, à l'échelle hebdomadaire, les échanges économiques prennent essentiellement la forme de chaînes directionnelles plutôt que de structures localement fermées.

Comme observé pour la composante fortement connexe, l'agrégation hebdomadaire révèle ainsi une propriété structurelle plus générale de notre réseau : sa cohésion n'est pas instantanée mais résulte d'une intégration temporelle des interactions économiques. Ce constat aura des conséquences sur la conception de nos méthodes algorithmiques : la fenêtre d'observation retenue devra être suffisamment large pour laisser émerger la présence de structures de compensation exploitables, sans quoi les opportunités de compensation resteront sous-estimées.

4.2.3 Agrégation journalière

L'agrégation journalière constitue le niveau d'observation le plus fin considéré dans ce manuscrit. Chaque graphe G^k regroupe ici l'ensemble des factures émises durant une seule journée. Cette échelle permet d'observer la structure instantanée du réseau de dettes, c'est-à-dire l'état du système avant toute intégration temporelle des interactions.

À nouveau, le réseau présente une forte instabilité structurelle. La Figure 4.3 illustre l'évolution du volume monétaire échangé pour chaque graphe journalier au cours de l'année. On observe une variabilité importante d'un jour à l'autre, caractérisée par l'alternance de périodes d'activité modérée et de pics ponctuels d'échanges financiers.

Périodicités temporelles et rythmes d'activité : La Figure 4.3 met également en évidence une organisation temporelle fortement structurée de l'activité économique. On observe tout d'abord la réapparition du cycle mensuel déjà visible à l'échelle hebdomadaire. De plus, une périodicité hebdomadaire nette apparaît également. Les volumes échangés chutent fortement durant les samedis et dimanches, correspondant aux périodes de fermeture de la majorité des

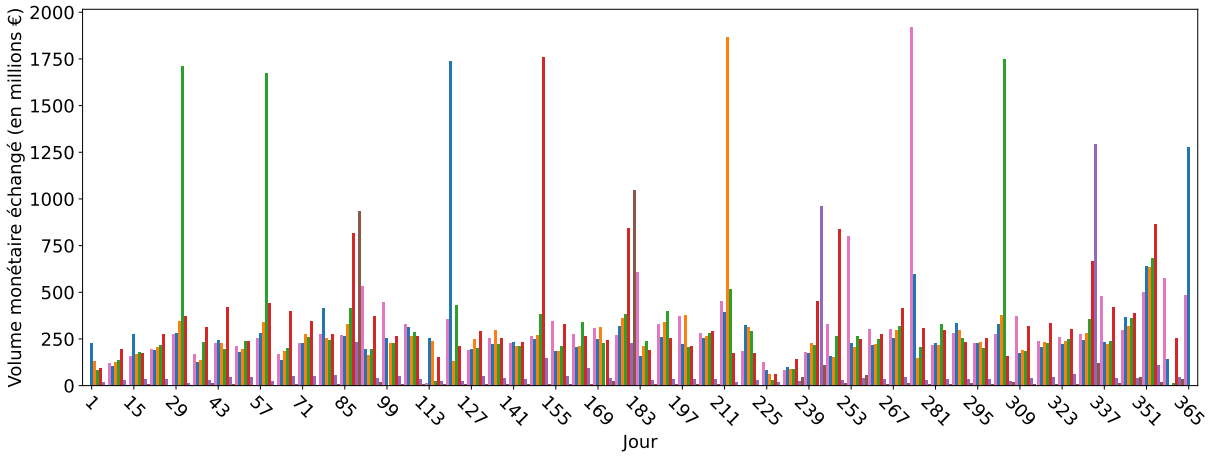


FIGURE 4.3 – Volume total échangé pour chaque graphe journalier.

entreprises. Plusieurs journées présentent ainsi une activité quasi nulle, traduisant l'interruption temporaire des interactions économiques plutôt qu'une modification structurelle du réseau.

Ces deux niveaux de périodicité montrent que la dynamique journalière du réseau est quasi totalement gouvernée par les contraintes calendaires. Le réseau observé ne peut donc être considéré comme une succession d'états indépendants, mais comme un système évoluant selon des rythmes réguliers d'accumulation et de relâchement de l'activité.

Fragmentation structurelle du réseau journalier :

Le Tableau 4.3 synthétise les statistiques descriptives observées sur l'ensemble des graphes journaliers. Les valeurs obtenues mettent en évidence une rupture nette avec les propriétés observées aux échelles temporelles plus longues.

TABLEAU 4.3 – Statistiques sur la suite générative journalière.

Statistique	Moyenne	Écart-type	Min	Max
Nœuds (10^3)	52	37	3	259
Arcs (10^3)	74	72	3	528
Degré moyen	2.69	0.44	2.00	4.55
Diamètre	13	8	2	34
Coefficient de clustering	0.0004	0.0016	0	0.0112
Taille GWCC (%)	69.03	10.30	39.99	98.18
Taille GSCC (%)	0.31	0.74	0.01	5.07

Taille effective du réseau : Le nombre moyen de nœuds actifs est d'environ 52 000 entreprises par jour, avec une variabilité très élevée, confirmant l'observation de la Figure 4.3 (même si celle-ci représente le volume, ces mesures sont intimement liées). Le nombre d'arcs suit une dynamique analogue, avec une moyenne de 74 000 factures journalières mais des variations importantes entre les jours.

Perte de connectivité globale : La composante géante faiblement connexe ne regroupe plus en moyenne que 69% des nœuds, avec des valeurs pouvant descendre jusqu'à 40%. Le réseau journalier apparaît ainsi fortement fragmenté. Cette fragmentation nous fait penser que

l'observation instantanée du système n'est pas suffisante pour travailler sur des groupes d'arcs si on se limite seulement à des jours indépendants.

Disparition des cycles de dettes : La composante fortement connexe devient quasi inexistante à l'échelle journalière, avec une taille moyenne inférieure à 0.4% des nœuds. Certaines journées ne présentent pratiquement aucune structure cyclique. Cela nous pousse encore à penser que pour s'attaquer au problème de la compensation de dettes, il semble assez compliqué d'utiliser les méthodes classiques interbancaires pour le réseau B2B.

Organisation locale et distances : Le coefficient de clustering devient extrêmement faible (4.4×10^{-4} en moyenne), confirmant que les motifs locaux fermés disparaissent presque entièrement lorsque l'on observe le réseau à courte échelle temporelle. Le diamètre moyen diminue également, reflétant la réduction de la taille effective des composantes connectées plutôt qu'une augmentation de l'efficacité structurelle.

Ces observations renforcent l'idée que les opportunités de compensation pertinentes n'émergent pas par observation instantanée, mais par intégration temporelle des interactions économiques. Cela soulève une question méthodologique centrale pour la suite de ce manuscrit : comment concevoir un mécanisme algorithmique capable d'exploiter cette dynamique temporelle, en accumulant les obligations actives sur une fenêtre suffisamment large, afin de faire apparaître des structures de compensation exploitables sans pour autant renoncer à une granularité proche du rythme réel qui pourrait rendre le problème plus compliqué calculatoirement ?

4.2.4 Choix de la granularité d'étude

L'analyse journalière, comparée aux analyses hebdomadaire et mensuelle, nous a permis de mettre en évidence une propriété essentielle de notre réseau : sa structure exploitable n'existe pas à un instant donné mais émerge progressivement au cours du temps.

Comme évoqué dans la Section 3.3, en pratique, une facture ne disparaît pas immédiatement après son émission. Elle reste en suspens pendant une certaine durée jusqu'à son règlement. Le système économique réel correspond donc à une superposition temporelle d'obligations financières issues de plusieurs journées successives.

Cela nous force donc à considérer une représentation hybride dans laquelle les graphes journaliers ne seront pas traités indépendamment lorsqu'il faudra résoudre le problème complet. Ceux-ci contribueront à la construction d'un graphe évolutif cumulatif pour obtenir une fenêtre d'observation plus large. Nous reviendrons plus en détail sur cette décision et le fonctionnement exact de cette méthode dans le Chapitre 8.

4.3 Distributions de degrés et estimation des lois de puissance

Pour caractériser plus précisément la structure du réseau de factures, nous analysons les distributions des degrés entrants et sortants, afin d'évaluer si elles suivent une loi de distribution identifiable.

Pour un nœud v d'un graphe orienté, on note k_v^- son *in-degree* (nombre d'arcs entrants) et k_v^+ son *out-degree* (nombre d'arcs sortants). Le degré total est défini par $k_v = k_v^- + k_v^+$.

4.3.1 Analyse en échelle log-log

La Figure 4.4 présente les distributions du degré total, entrant et sortant en échelle logarithmique, ainsi que le graphique de rang pour le mois de janvier [28]. On note $P(k)$ la distribution mesurée des degrés, estimée sur nos histogrammes normalisés. Le coefficient de détermination r^2 évalue la qualité d'un modèle prédictif : il mesure la part de variance des données capturée par le modèle. Un $r^2 = 1$ indique une prédiction parfaite, tandis qu'un $r^2 = 0$ signifie que le modèle ne fait pas mieux qu'une prédiction constante (la moyenne).

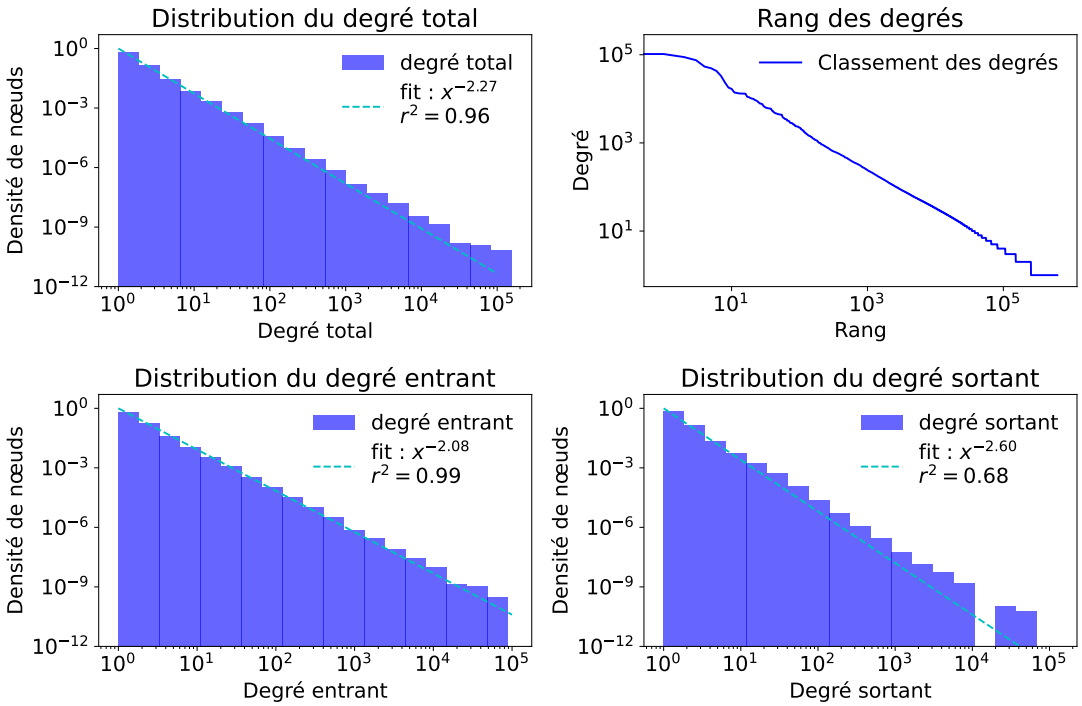


FIGURE 4.4 – Distribution des degrés total, entrant, sortant et rang des degrés (échelles log-log).

La représentation en échelle log-log permet d'examiner la décroissance de la distribution pour les queues (grandes valeurs de degré). On observe :

— une décroissance lente pour les degrés élevés ;
— une large plage de variation des degrés (plusieurs ordres de grandeur) ;
— l'absence d'échelle caractéristique dominante.

Le graphique de classement confirme l'hétérogénéité : le degré décroît de manière régulière avec le rang, mettant en avant l'importance de certains acteurs économiques en terme de connexions. Ces graphiques nous permettent aussi de suggérer une distribution en lois de puissance sur les degrés du réseau de dettes.

4.3.2 Estimation de l'exposant de loi de puissance

Afin d'évaluer la compatibilité réelle avec une loi de puissance pour le mois de janvier, un ajustement de la forme $P(k) \sim k^{-\gamma}$ a été réalisé. Les estimations obtenues sont :

— degré total : $\gamma \approx 2.27$ ($r^2 = 0.96$) ;

28. On ne considère qu'un mois dans l'idée que les variations seront faibles, ce que l'on confirmera dans la sous-section suivante.

— degré entrant : $\gamma_{in} \approx 2.08$ ($r^2 = 0.99$) ;
— degré sortant : $\gamma_{out} \approx 2.60$ ($r^2 = 0.68$).

L'exposant du degré entrant est inférieur à celui du degré sortant, traduisant une concentration plus marquée des factures reçues par un petit nombre d'entreprises créancières.

Le Tableau 4.4 présente les valeurs obtenues pour les autres mois de notre réseau. Comme l'intuition et l'observation simple de l'agrégation mensuelle pouvaient le laisser envisager, les mesures des exposants de lois de puissance sont semblables pour tous les mois, avec une écart-type très faible.

TABLEAU 4.4 – Différentes valeurs d'exposant mesurées pour les différents mois. ME est la moyenne et SD est la déviation standard inter-mensuelle.

Mois	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**ME**	**SD**
γ_{Total}	2.27	2.25	2.21	2.22	2.23	2.22	2.22	2.19	2.23	2.21	2.23	2.23	2.23	0.02
γ_{Out}	2.60	2.62	2.61	2.59	2.54	2.55	2.52	2.51	2.58	2.53	2.55	2.61	2.57	0.04
γ_{In}	2.08	2.06	2.08	2.05	2.05	2.04	2.05	2.01	2.04	2.04	2.05	2.05	2.05	0.02

4.3.3 Interprétation statistique

Un exposant γ compris entre 2 et 3 implique :

— une variance théorique finie mais élevée ;
— une concentration importante des interactions sur un nombre limité d'acteurs ;
— une absence d'échelle caractéristique de connectivité.

La qualité d'ajustement plus faible pour le degré sortant ($r^2 = 0.68$) suggère cependant que la distribution n'est pas parfaitement décrite par une loi de puissance pure. Une loi log-normale ou une loi à coupure exponentielle pourrait fournir un ajustement comparable. Pour autant, le réseau présente une hétérogénéité forte compatible avec une loi de puissance sur une plage significative.

4.3.4 Asymétrie structurelle

La dissymétrie entre degrés entrants et sortants révèle une organisation asymétrique de notre réseau :

— certaines entreprises reçoivent un nombre très élevé de factures ;
— les entreprises émettrices sont plus homogènes en nombre de partenaires.

Cette asymétrie est cohérente avec une tendance générale des relations commerciales : une entreprise a souvent peu de fournisseurs mais peut avoir de nombreux clients. L'une des raisons qui peut expliquer l'asymétrie de notre réseau est aussi liée au fait que nous sommes restreints au B2B. En effet, de nombreuses entreprises font du commerce vers les consommateurs finaux qui n'apparaissent pas dans ce réseau.

Cependant, contrairement aux réseaux sociaux typiques, cette hétérogénéité ne s'accompagne pas d'un fort clustering, ce qui indique que la centralité repose davantage sur des chaînes directionnelles que sur des communautés denses.

4.4 Positionnement par rapport aux familles classiques de réseaux

Les analyses précédentes ont permis de mettre en évidence plusieurs propriétés structurelles du réseau de factures étudié. Cette section vise désormais à situer ces observations par rapport aux grandes familles de réseaux classiquement étudiées en science des réseaux. L'objectif n'est pas de classifier strictement le système dans une catégorie existante, mais d'identifier les analogies et les écarts structurels permettant de mieux comprendre sa nature.

4.4.1 Au-delà de l'interprétation small-world

La distance moyenne faible observée précédemment ne suffit pas à conclure à une organisation ***small-world*** [77], qui suppose également un clustering élevé : or celui-ci reste ici extrêmement faible à toutes les échelles. La connectivité efficace du réseau ne résulte donc pas d'une organisation locale dense, mais de la structure directionnelle des longues chaînes de dettes qui le composent. Cette distinction est importante : la faible distance moyenne ne doit pas être interprétée comme la présence d'une organisation small-world au sens strict, mais comme une conséquence de la structure directionnelle des chaînes de dettes.

4.4.2 Rapport aux réseaux invariants d'échelle

De nombreux réseaux réels présentent une forte hétérogénéité des degrés, souvent associée aux réseaux dits ***invariants d'échelle***, caractérisés par des distributions proches de lois de puissance [60]. Les réseaux de factures présentent également une forte asymétrie structurelle : une majorité d'entreprises entretient un nombre limité de relations commerciales, tandis qu'un nombre restreint d'acteurs concentre une part importante des interactions. Cette organisation hiérarchique est cohérente avec la structure des chaînes de production et de distribution économiques.

4.4.3 Une structure propre aux réseaux économiques

Les analyses précédentes montrent que les réseaux de dettes étudiés ne se rattachent pleinement ni aux réseaux sociaux classiques ni aux réseaux technologiques statiques habituellement étudiés. Contrairement aux réseaux sociaux, caractérisés par un fort clustering et l'existence de communautés locales denses, le réseau de factures présente une organisation faiblement triangulaire et dominée par des chaînes directionnelles longues. Les structures de compensation observées à des échelles temporelles agrégées ne résultent donc pas d'une organisation locale préexistante, mais émergent progressivement par accumulation temporelle d'interactions économiques.

Cette dépendance à l'échelle d'observation soulève une question directe : le clustering du réseau est-il fonction de la granularité temporelle retenue ? Les résultats obtenus aux différentes échelles semblent y répondre : le coefficient de clustering croît de façon monotone avec la durée de la fenêtre d'agrégation. De même, la composante fortement connexe géante, quasi inexistante à l'échelle journalière, s'élargit progressivement jusqu'à devenir très importante à l'échelle mensuelle. La cohésion globale du système ne constitue donc pas une propriété instantanée du réseau, mais une propriété qui s'intègre dans le temps : elle dépend explicitement de la fenêtre d'observation choisie, et non d'une organisation locale préexistante.

Par ailleurs, l'analyse des montants associés aux factures révèle une distribution log-normale du poids des arcs. Cette distribution, observable sur la Figure 4.5, est classique dans les systèmes

économiques où les grandeurs résultent de mécanismes de croissance multiplicatifs, conformément à la loi de croissance proportionnelle introduite par Gibrat [79] et largement observée empiriquement dans l'étude des tailles d'entreprises et des flux économiques [40, 80]. De tels mécanismes reflètent notamment l'effet combiné de facteurs indépendants tels que la taille des entreprises, la diversité sectorielle ou l'intensité des échanges commerciaux. Cette hétérogénéité monétaire se combine avec la distribution en loi de puissance des degrés pour produire un réseau simultanément hétérogène du point de vue relationnel et financier.

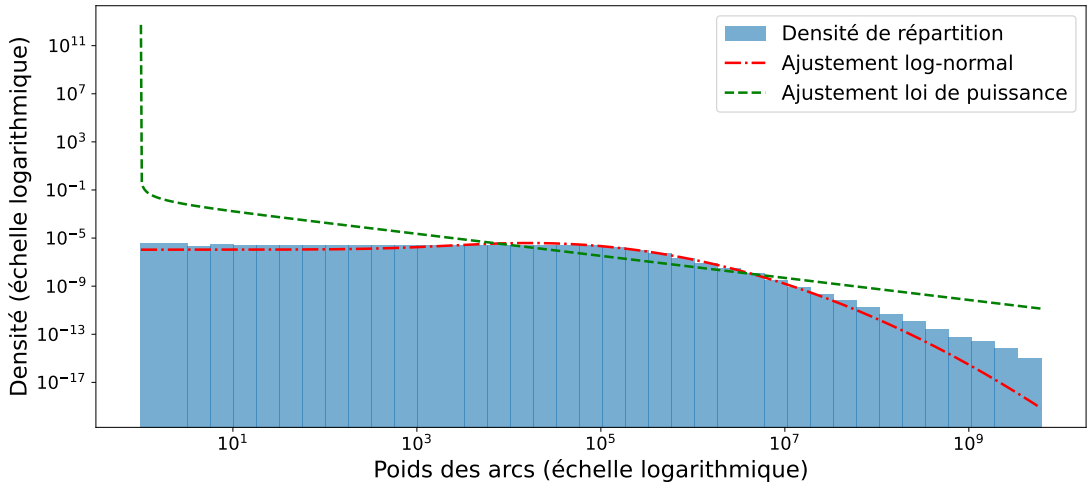


FIGURE 4.5 – Distribution des poids des arcs du mois de janvier.

La structure globale du réseau apparaît comme fortement contrainte par des mécanismes économiques et calendaires : rythmes mensuels de facturation, interruptions hebdomadaires d'activité et effets saisonniers influencent directement la topologie observée. Ces observations positionnent les réseaux de dettes B2B comme des réseaux dirigés dynamiques dont la structure résulte à la fois de contraintes économiques, temporelles et organisationnelles.

4.5 Exploration mésoscopique et détection de communautés

Après avoir caractérisé les propriétés globales du réseau et l'avoir positionné par rapport aux grandes familles de réseaux complexes, il est naturel de s'interroger sur son organisation à une échelle intermédiaire.

Comme discuté dans la Section 2.4, de nombreux réseaux réels présentent une ***structure mésoscopique*** organisée en ***communautés***, c'est-à-dire en sous-ensembles de nœuds plus densément connectés entre eux qu'avec le reste du graphe. Cette organisation peut révéler l'existence de modules fonctionnels ou organisationnels sous-jacents. Dans le cas d'un réseau de dettes inter-entreprises, l'existence éventuelle de communautés pourrait refléter des chaînes de production complètes, des regroupements sectoriels ou des dépendances commerciales privilégiées. Il nous faut donc examiner si le réseau étudié présente des communautés significatives au-delà de son hétérogénéité globale.

L'analyse menée ici s'inscrit dans une démarche exploratoire visant à caractériser cette organisation intermédiaire. Elle ne vise pas à proposer ou évaluer des méthodes de détection de communautés adaptées au problème de compensation, mais à établir un premier pas permettant de mieux situer la structure du réseau avant l'introduction des approches algorithmiques de réduction de dettes.

4.5.1 Méthodes explorées

Plusieurs approches complémentaires ont été considérées afin d'explorer la structure mésoscopique du réseau. Ces méthodes reposent sur des définitions différentes de la cohésion structurelle et permettent d'observer l'organisation interne du graphe selon plusieurs points de vue.

Deux approches classiques ont été étudiées :

— les méthodes fondées sur la cohésion locale, telles que les décompositions en k-noyaux [81], permettant d'identifier des zones fortement interconnectées ;

— les méthodes d'optimisation globale basées sur la modularité [70, 71], visant à partitionner le réseau en communautés structurelles.

Ces méthodes ont été étudiées principalement sur les graphes mensuels, qui constituent le meilleur compromis entre stabilité structurelle et fidélité temporelle pour l'observation de groupes d'entreprises.

Avant d'appliquer des méthodes formelles de détection de communautés, une exploration visuelle du réseau a été envisagée à partir du ré-ordonnancement des matrices d'adjacence. Ce type d'approche permet parfois de faire apparaître des structures bloc-diagonales révélatrices de communautés fortement connectées : les blocs denses se distinguent alors visuellement du reste de la matrice, qui demeure quasiment vide. Dans notre cas, ces visualisations n'ont pas permis d'identifier de structures modulaires nettes : la matrice obtenue ne présente pas de blocs denses clairement séparés, les arcs restant répartis de manière relativement homogène sur l'ensemble de la matrice, y compris sur des graphes possédant une structure communautaire artificiellement forte comme les ***hommes des cavernes*** bruités. De ce fait, nous n'avons pas approfondi cette méthode pour notre réseau. Les détails méthodologiques et des exemples visuels correspondants sont présentés en Annexe A.

4.5.2 k-noyaux

Suite aux limites observées des approches visuelles présentées en Annexe A, une analyse mésoscopique plus robuste a été menée à l'aide de la décomposition en k-noyaux. Contrairement aux méthodes fondées sur une partition explicite du graphe, cette approche ne cherche pas à identifier des communautés mais des niveaux hiérarchiques de cohésion structurelle ; elle ne suppose donc pas, ni dans sa définition ni dans son application, que le réseau présente une organisation en communautés bien séparées.

Définition 4.1 (k-noyau)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté obtenu à partir du réseau de factures en ignorant temporairement l'orientation des arcs. Le k-**noyau** d'un graphe est le sous-graphe maximal dans lequel chaque nœud possède un degré supérieur ou égal à k.*

La décomposition en k-noyaux est obtenue par suppression itérative des sommets de degré strictement inférieur à k jusqu'à stabilisation du graphe [81]. Par construction, le $(k+1)$-noyau est inclus dans le k-noyau : un nœud appartenant au $(k+1)$-noyau appartient donc nécessairement aussi à tous les k-noyaux inférieurs. On définit alors l'***indice de noyau*** d'un nœud comme le plus grand k tel que ce nœud appartienne encore au k-noyau correspondant : au-delà de cette valeur, le nœud est retiré de la décomposition lors de l'étape suivante de l'algorithme. Cet indice fournit ainsi, pour chaque nœud, un unique indice d'importance synthétisant sa position dans la hiérarchie. Cette procédure fournit une description hiérarchique du réseau allant de sa périphérie faiblement connectée vers un noyau structurel dense.

Dans un réseau caractérisé par un faible clustering et l'absence de communautés clairement séparées, la notion de cohésion locale basée sur la densité interne devient moins pertinente. Les

k-noyaux offrent alors une alternative naturelle permettant d'identifier des régions du graphe participant fortement à la connectivité globale sans supposer une organisation modulaire préalable.

Résultats observés : L'application de la décomposition en k-noyaux au réseau mensuel met en évidence une structure hiérarchique. La majorité des entreprises appartient à des couches périphériques de faible importance, tandis qu'un noyau restreint concentre les sommets les plus connectés. Le Tableau 4.5 présente la répartition des nœuds selon leur indice d'importance.

TABLEAU 4.5 – Valeurs statistiques décrivant différents k-noyaux pour le mois de janvier.

k-noyau	Complet	3-noyau	5-noyau	10-noyau	20-noyau	50-noyau	100-noyau	200-noyau
Nœuds	622 941	147 521	74 386	28 066	9 434	2 180	876	355
Arcs (10^3)	1 910	1 334	1 092	803	567	367	282	217
Degré moyen	3.07	9.04	14.30	29.01	60.00	169.20	323.42	612.00
Diamètre	24	21	20	17	14	10	9	9
Nœuds GWCC (%)	99.19	99.73	99.75	99.78	99.84	99.82	100.00	99.44
Arcs GWCC (%)	99.80	99.93	99.93	99.95	99.95	99.96	100.00	99.89
Nœuds GSCC (%)	7.70	27.32	37.25	47.09	57.01	73.30	78.88	82.25
Arcs GSCC (%)	34.87	48.55	54.98	62.95	72.24	81.72	85.56	87.04

Contraction progressive du réseau : La taille du réseau décroît rapidement lorsque k augmente. Alors que le graphe complet contient plus de 620 000 entreprises, le 20-noyau n'en contient plus que 9 434, et le 200-noyau seulement 355.

Cette décroissance rapide indique qu'une large majorité des entreprises occupe une position périphérique avec un faible nombre de relations, tandis qu'un noyau restreint concentre la forte connectivité.

Explosion du degré moyen : Le degré moyen croît de manière spectaculaire : de 3.07 dans le graphe complet à plus de 600 dans le 200-noyau. Cela montre que le noyau profond du réseau ne correspond pas simplement à des entreprises modérément actives, mais à un sous-système extrêmement dense et fortement interconnecté.

Réduction du diamètre : Le diamètre décroît progressivement (de 24 à 9), ce qui traduit une contraction structurelle vers un noyau beaucoup plus compact. La distance moyenne entre entreprises fortement connectées est donc très faible.

Renforcement massif de la composante fortement connexe : L'évolution la plus remarquable concerne la GSCC. Dans le graphe complet, seuls 7.7% des nœuds appartiennent à la composante fortement connexe. Dans le 200-noyau, cette proportion atteint 82.25%. Cela signifie que les cycles de dettes se concentrent presque exclusivement dans le noyau profond du réseau. Plus k augmente, plus la structure devient orientée-cyclique. Autrement dit, la fermeture des chaînes de dettes n'est pas uniformément répartie dans le système mais localisée dans une fraction restreinte et très dense du graphe.

Interprétation économique : Cette organisation est cohérente avec la structure hiérarchique des chaînes de production que nous avons déjà pu évoquer dans l'état de l'art. La majorité des entreprises occupe une position périphérique, avec un faible nombre de relations souvent unidirectionnelles : plus des trois quarts d'entre elles sortent ainsi de la décomposition dès le 3-noyau (Tableau 4.5). Un noyau central, en revanche, correspond probablement à des acteurs intermédiaires majeurs, grossistes, plateformes ou entreprises multi-sectorielles, participant à de nombreuses chaînes croisées. Ce noyau constitue certainement l'espace principal d'émergence des cycles exploitables pour la compensation de dettes.

Conséquences pour les possibilités de compensation de dettes : Ces résultats montrent que les opportunités structurelles de compensation ne sont pas uniformément distribuées lorsque l'on se base seulement sur les méthodes classiques telles que celles basées sur les cycles. Elles sont fortement concentrées dans les ***k-noyaux*** de rang élevé. Cependant, les k-noyaux ne définissent pas des sous-graphes indépendants exploitables directement comme sous-problèmes. Ils décrivent une hiérarchie de cohésion, mais ne produisent pas une décomposition du réseau.

Cette observation renforce l'idée que les méthodes de partitionnement en communautés ne constituent pas une approche évidente pour résoudre le problème de réduction de dettes si on cherche à avoir un effet pour tout le réseau, et justifie l'approche algorithmique que l'on présentera dans le Chapitre 5.

4.5.3 Modularité et méthode de Louvain

Nous avons étudié une seconde méthode de détection de communautés, fondée sur l'optimisation de la modularité. Cette approche est l'une des références classiques en analyse mésoscopique des réseaux complexes et a été introduite par Newman et Girvan [70] (voir Section 2.4). Contrairement aux méthodes précédentes, l'objectif ici n'est plus d'isoler des noyaux fortement connectés mais de partitionner l'ensemble du graphe en groupes de nœuds présentant davantage d'interactions internes que dans un graphe aléatoire équivalent.

Principe de la modularité : La modularité mesure l'écart entre la densité d'arcs observée à l'intérieur d'une partition et celle attendue dans un modèle aléatoire conservant les degrés. Une valeur élevée indique l'existence de sous-ensembles relativement indépendants du reste du réseau. La détection de communautés par modularité consiste alors à rechercher la partition du graphe qui maximise cette quantité. Dans la pratique, cette maximisation étant NP-difficile sur des graphes de grande taille, nous utilisons la méthode de Louvain [71], qui en fournit une approximation efficace grâce à sa complexité quasi-linéaire.

L'algorithme procède itérativement en deux étapes :

1. optimisation locale de la modularité par déplacement de nœuds entre communautés voisines ;
2. agrégation hiérarchique des communautés obtenues en super-nœuds, suivie d'une nouvelle optimisation.

Ce processus produit une décomposition multi-échelle du réseau dépendant d'un paramètre de résolution contrôlant la taille des communautés détectées.

Résultats expérimentaux : Nous avons appliqué la méthode de Louvain aux graphes mensuels, en faisant varier le paramètre de résolution afin d'observer la stabilité des partitions obtenues. Les résultats pour le mois de janvier sont résumés dans le Tableau 4.6.

TABLEAU 4.6 – Résultats de la détection de communautés par la méthode de Louvain pour le mois de janvier selon différentes résolutions.

Mesure	**Rés. 0.5**	**Rés. 1.0**	**Rés. 1.5**
Modularité	0.747	0.749	0.741
Nombre de communautés	2170	2082	2058
Communautés > 5% des nœuds	4	6	9
Plus grande communauté (% nœuds)	6.95	7.43	14.74
Plus grande communauté (% arcs)	3.32	4.92	10.70
Arcs inter-communautés (%)	21.50	19.65	17.93

On remarque premièrement que la modularité reste élevée et relativement stable lorsque la résolution varie, rappelant l'existence d'une certaine hétérogénéité structurelle du réseau. Toutefois, cette stabilité masque une forte fragmentation avec un grand nombre de communautés systématiquement détectées. Deuxièmement, aucune communauté dominante n'apparaît clairement. Même la plus grande communauté ne regroupe qu'une fraction limitée des nœuds (moins de 15%), ce qui contraste avec les réseaux sociaux classiques où émergent souvent quelques groupes structurants majeurs. Troisièmement, une proportion significative d'arcs demeure inter-communautaire (environ 20%), révélant une forte imbrication des interactions économiques entre groupes.

Une représentation du réseau du mois de janvier est observable sur la Figure 4.6. On y distingue deux hubs qui ressortent par leur taille importante. Au centre de la figure, les communautés se confondent en un noyau dense, reflétant les acteurs fortement interconnectés. Autour de ce noyau, les communautés s'organisent en arcs et îlots successifs disposés de manière concentrique : les acteurs périphériques, peu connectés, correspondent aux extrémités des chaînes économiques, tandis que les couches intermédiaires regroupent les acteurs jouant un rôle de relais. Cette organisation, mise en évidence par l'algorithme Force-Atlas 2 [82], évoque la structure hiérarchique d'une chaîne de production : un noyau d'intermédiaires centraux entouré de couches d'acteurs de plus en plus éloignés des points de passage principaux.

Interprétation structurelle : Ces résultats confirment encore que le réseau de factures ne possède pas une organisation modulaire nette. Les communautés détectées correspondent principalement à des regroupements locaux d'acteurs fortement connectés, sans séparation claire du graphe en sous-systèmes quasi indépendants. Ce comportement est cohérent avec les observations précédentes :

— faible coefficient de clustering ;
— organisation des échanges en longues chaînes directionnelles plutôt qu'en motifs locaux fermés ;
— émergence progressive des structures de compensation par intégration temporelle.

Autrement dit, la structure du réseau est davantage ***entrelacée*** que modulaire.

Limites pour la réduction de dettes : Bien que la méthode de Louvain identifie des groupes cohérents de nœuds, elle présente une limitation fondamentale pour la compensation intégrale de dettes.
La décomposition que nous avons appliquée repose exclusivement sur les relations entre entreprises, alors que le problème de compensation de dettes concerne principalement les factures

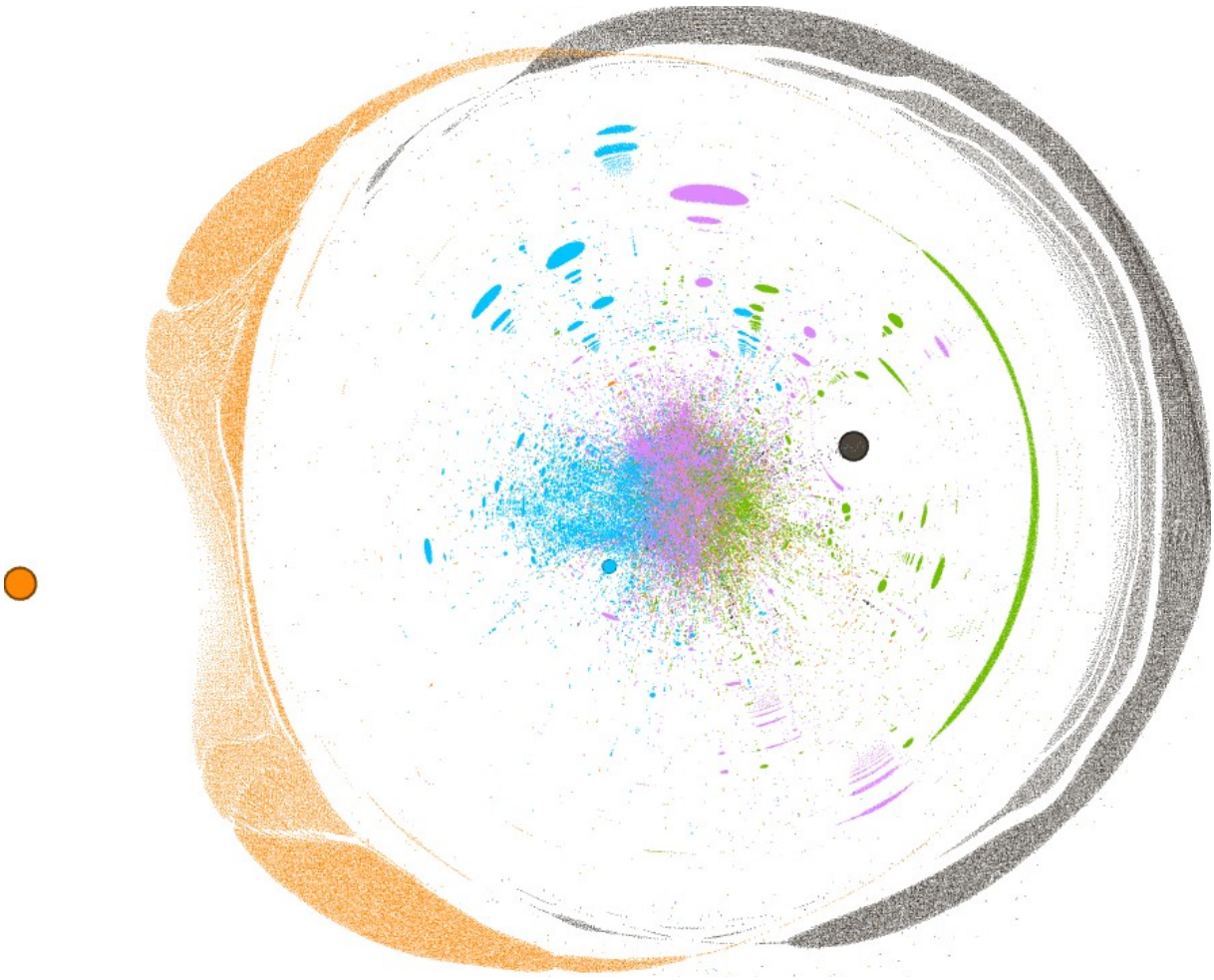


FIGURE 4.6 – Visualisation des cinq communautés les plus importantes du mois de janvier, calculées par modularité avec une résolution de 1.5. Le placement des nœuds a été obtenu à l'aide de l'algorithme Force-Atlas 2.

elles-mêmes, c'est-à-dire les arcs pondérés. Or, deux entreprises appartenant à une même communauté peuvent échanger des factures de montants très différents, rendant les compensations peu intéressantes, tandis que des chaînes de compensation de poids plus proches peuvent traverser plusieurs communautés distinctes. Une partition des nœuds ne fournit donc pas une décomposition opérationnelle adaptée au problème algorithmique étudié.

Cette dernière observation est importante : contrairement à de nombreux réseaux complexes, la structure mésoscopique pertinente des réseaux de dettes B2B ne semble pas être gouvernée principalement par des communautés de nœuds, mais probablement par des structures définies au niveau des flux financiers eux-mêmes et donc des arcs.

4.6 Synthèse et implications pour les algorithmes de compensation

Ce chapitre a permis de caractériser le réseau de dettes issu des données de facturation avant l'introduction des méthodes de compensation de dettes.

Les propriétés pertinentes émergent par intégration temporelle : À l'échelle journalière, le réseau est fortement fragmenté et presque dépourvu de structures, tandis qu'une cohésion globale et des composantes connexes de taille importante n'apparaissent qu'aux échelles hebdomadaire et surtout mensuelle. Cela montre que l'analyse et l'optimisation ne peuvent pas se limiter à des instantanés indépendants au niveau journalier. Cela nous mènera à proposer une méthode opérant à une granularité journalière, mais où les factures actives s'accumulent d'un jour sur l'autre jusqu'à une fenêtre maximale de l'ordre du mois : ce mécanisme cumulatif permet de conserver une résolution temporelle fine, proche du rythme réel des paiements, tout en laissant émerger progressivement les structures exploitables qui n'existent pas à l'échelle d'une seule journée.

Le réseau est fortement hétérogène, à la fois relationnellement et monétairement : Les distributions de degrés présentent des comportements proches de lois de puissance, avec des exposants stables sur l'année, et les degrés entrants sont plus grands que les degrés sortants, indiquant un rôle central de certains créanciers. De plus, les poids des arcs suivent une distribution log-normale, ce qui implique que les flux financiers sont très inégalement répartis entre factures. Cette double hétérogénéité suggère que les stratégies algorithmiques devront tenir compte simultanément de la structure du graphe et des montants.

Les cycles et les opportunités structurelles ne sont pas uniformément distribués : La décomposition en k-noyaux met en évidence un noyau profond très dense dans lequel se concentrent les échanges cycliques, tandis qu'une large périphérie demeure faiblement connectée. Cette observation confirme que les mécanismes fondés uniquement sur la recherche de cycles risquent de ne concerner qu'une fraction restreinte des entreprises.

L'organisation mésoscopique n'est pas modulaire au sens communautaire : Les résultats de la méthode de Louvain produisent un grand nombre de communautés, sans groupes dominants ni séparation nette du graphe en sous-systèmes quasi indépendants, et une part non négligeable d'arcs demeure inter-communautaire.

Cela motive le choix d'un cadre algorithmique reposant sur deux principes. Premièrement, le problème de compensation est porté par les arcs pondérés, *i.e.* les factures, et non par les nœuds : une décomposition en communautés d'entreprises ne fournit pas une structuration adaptée aux contraintes monétaires des cycles de compensation. Le cadre algorithmique retenu est donc centré sur la sélection d'arcs pondérés plutôt que sur une partition des nœuds. Deuxièmement, les propriétés structurelles pertinentes du réseau n'existent pas à un instant donné mais émergent par accumulation temporelle des interactions : une observation instantanée du système ne fait pas forcément apparaître des structures connexes suffisamment larges et exploitables. Le cadre retenu intègre donc explicitement cette dimension temporelle en raisonnant sur des fenêtres contrôlées d'accumulation des factures actives plutôt que sur des instantanés indépendants.

Le Chapitre 5 s'appuie sur le premier principe pour formuler le problème de compensation de dettes et introduire une méthode algorithmique basée sur les arcs dans des graphes statiques, que l'on complètera aux Chapitres 6 et 7, tandis que le Chapitre 8 s'appuie sur le second principe pour traiter la question de la temporalisation de cette méthode.

Troisième partie

Algorithme de compensation de dettes sur des graphes statiques

Chapitre 5 :
Construction d'un algorithme de compensation intégrale

Sommaire

5.1 Heuristique de compensation intégrale sur graphe statique . . . 59
5.2 Résultats expérimentaux 64

Les chapitres précédents ont établi le cadre économique et formel de la réduction de dettes inter-entreprises en montrant que la compensation multilatérale peut être interprétée comme une transformation du réseau d'obligations visant à remplacer un ensemble d'expositions brutes par une configuration équivalente du point de vue des positions financières finales des agents.

L'analyse structurelle des réseaux de facturation B2B a mis en évidence une forte hétérogénéité topologique ainsi qu'une organisation dominée par les flux monétaires eux-mêmes plutôt que par des communautés de nœuds clairement séparées. Ces observations suggèrent que la conception d'un mécanisme de compensation doit être formulée directement comme un problème de sélection d'arcs dans un graphe dirigé pondéré. Dans ce cadre, notre question devient cell e de la construction d'un mécanisme de compensation intégrale calculable à grande échelle. L'indivisibilité des créances transforme le problème en une sélection combinatoire d'obligations avec simultanément des contraintes de conservation des flux et de liquidité disponible, conduisant à un problème d'optimisation sur graphe pour lequel les approches exhaustives sont inapplicables.

Avant d'introduire la dimension temporelle du modèle général, nous considérons ici une représentation statique du réseau de dettes, obtenue comme une photographie des obligations actives sur une période donnée. Cette hypothèse permet d'isoler les difficultés combinatoires fondamentales du problème et de concevoir une première méthode algorithmique dédiée à la compensation intégrale.

Ce chapitre introduit une heuristique de sélection d'obligations, dite par potentiels, permettant de calculer une transformation effective du réseau sur des graphes réels de grande dimension. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication à la conférence *FRCCS 2025* [26] et une version étendue est actuellement en revue dans un journal.

5.1 Heuristique de compensation intégrale sur graphe statique

Nous considérons un réseau de facturation suivant la Définition 3.1, représenté par le multigraphe dirigé pondéré $G = (V, E)$. Les définitions des poids, des positions nettes et des contraintes monétaires associées sont conservées sans modification.

On rappelle qu'une compensation consiste à sélectionner une configuration $C \subseteq E$, c'est-à-dire un sous-ensemble de factures réglées simultanément (voir Définition 3.8). Dans le cadre

statique, l'objectif est de construire une configuration de compensation $C \subseteq E$ présentant un bon compromis entre volume traité et financement externe. L'espace des sous-ensembles possibles étant exponentiel en $|E|$, nous utilisons une heuristique fondée sur une idée centrale : ***injecter localement une liquidité externe afin de déclencher une propagation de règlements au sein du réseau***, puis ne conserver que les configurations dont le facteur d'amplification dépasse un seuil imposé. La liquidité injectée est fournie par le financeur externe v^* formalisé au Chapitre 3.

5.1.1 Mesures locales de potentiel de propagation

L'heuristique repose sur l'évaluation locale d'une facture $e \in E$ selon sa capacité à déclencher une réduction de dettes en cascade. On rappelle les notations $s(e)$ et $d(e)$, origine et destination de l'arc e.

Définition 5.1 (Potentiel sortant)**.** *Soit un arc $e \in E$ et $R \subseteq E$ un ensemble d'arcs déjà mobilisés dans le calcul du potentiel ($R = \varnothing$ au premier appel récursif). Le potentiel sortant de e relatif à R est défini par récurrence sur $E \setminus R$:*

$$\mathcal{U}_G^-(e, R) = w(e) + \max_{\substack{S \subseteq O_G(d(e)) \setminus R \\ \sum_{o \in S} w(o) \leq w(e)}} \sum_{o \in S} \mathcal{U}_G^-(o, R \cup S \cup \{e\}),$$

Pour simplifier la notation, on pose $U_G^-(e) = \mathcal{U}_G^-(e, \varnothing)$.

À chaque appel récursif, l'ensemble R croît strictement puisque $e \notin R$ par construction. Comme $R \subseteq E$ et E est fini, la profondeur de récursion est bornée par $|E|$: $\mathcal{U}_G^-(e, R)$ est donc toujours bien définie, y compris en présence de circuits (en particulier de circuits de poids égaux, qui généreraient une récursion infinie si on ne retirait pas les arcs déjà utilisés).

L'interprétation est la suivante : si l'on finance intégralement la facture e (coût initial $w(e)$), alors $d(e)$ reçoit $w(e)$ et peut régler un sous-ensemble de ses factures sortantes, dont le volume total ne dépasse pas $w(e)$. Le potentiel $U_G^-(e)$ donne une estimation de la dette totale pouvant être réglée par cette propagation, en privilégiant récursivement les factures qui déclenchent elles-mêmes une propagation maximale. Cette valeur est un majorant car dans certains cas, une même arête peut être comptée plusieurs fois.

Définition 5.2 (Potentiel entrant)**.** *Le potentiel entrant $U_G^+(e)$ est défini de manière symétrique en remplaçant $O_G(d(e))$ par $I_G(s(e))$ dans la définition précédente. Il mesure la dette totale pouvant être réglée en redirigeant le financement de e vers un sous-ensemble de factures amont convergeant vers $s(e)$, sous une contrainte de budget $w(e)$.*

Dans la pratique, calculer exactement $U_G^-(e)$ ou $U_G^+(e)$ est coûteux, car l'optimisation interne sur S est de nature combinatoire (proche d'un problème de sac-à-dos).

Définition 5.3 (Ensembles optimisants locaux)**.** *Soit un arc $e \in E$. On note M_e^- un sous-ensemble d'arcs atteignant le maximum dans la définition de $U_G^-(e)$, et M_e^+ un sous-ensemble d'arcs atteignant le maximum dans la définition de $U_G^+(e)$. On associe alors à e deux configurations candidates :*

$$C_e^- = \{e\} \cup M_e^-, \qquad C_e^+ = \{e\} \cup M_e^+.$$

5.1.2 Chemins de démarrage et ratio potentiel/coût

L'heuristique construit C en deux phases : (i) initialisation par des chemins courts décroissants à fort facteur d'amplification, (ii) expansion itérative autour de la solution courante.

Définition 5.4 (Potentiel d'un chemin)**.** *Soit $p = (e_1, \dots, e_k)$ un chemin orienté décroissant de G. On définit le potentiel du chemin par*

$$U_p = \sum_{i=1}^{k} w(e_i),$$

avec $\forall i \in [1, k-1], w(e_i) \geq w(e_{i+1})$.

Définition 5.5 (Ratio potentiel/coût)**.** *Pour un chemin p, on définit le ratio potentiel/coût*

$$\rho(p) = \frac{U_p}{F(p)}, \qquad \text{où } F(p) = F(\{e_1, \dots, e_k\}).$$

De même, pour une facture e on définit le ratio de potentiel sortant, entrant et général

$$\rho^-(e) = \frac{U_G^-(e)}{F(C_e^-)}, \qquad \rho^+(e) = \frac{U_G^+(e)}{F(C_e^+)}, \qquad \rho(e) = \max(\rho^-(e), \rho^+(e)).$$

Ces ratios quantifient l'efficacité d'une structure locale (chemin ou ensemble associé à un arc) : ils rapportent le volume de dette qu'elle permet de réduire au financement externe nécessaire pour la traiter. Une valeur élevée caractérise donc une structure réduisant un volume de dette important au prix d'un financement faible. Ces ratios sont l'analogue local du facteur d'amplification $\alpha(C)$ (Définition 3.10) : là où α évalue le rendement $D_C/F(C)$ d'une configuration de compensation ***globale***, ρ applique le même rapport de dette réduite sur financement requis à l'échelle d'une ***structure candidate*** isolée. L'heuristique exploite ainsi localement, au fil de sa construction, le critère d'efficacité que le facteur d'amplification mesure globalement sur la solution finale.

5.1.3 Description détaillée de l'algorithme des potentiels

L'heuristique suit la structure suivante.

1. **Pré-traitement des cycles bilatéraux :** si G contient des paires d'arcs (u, v) et (v, u) de même poids, ces deux factures peuvent être compensées directement sans financement externe. Elles sont retirées du graphe et ne sont pas intégrées dans C, car elles relèvent d'un règlement bilatéral trivial, une possibilité déjà ouverte aux entreprises. On peut aussi suspecter que ces relations bilatérales exactes représentent des remboursements.
2. **Recherche de chemins de démarrage :** on énumère un ensemble de chemins courts candidats, appelés ***germes***, dont les poids sur les arêtes sont égaux ou décroissants, et on retient ceux dont le ratio $\rho(p)$ dépasse un ***seuil*** $\rho_{\min}$. On construit ensuite un ensemble de chemins ***non recouvrants*** (qui ne partagent aucune facture) en sélectionnant itérativement le meilleur candidat restant. L'union de ces chemins initialise C.
3. **Expansion itérative :** à partir de la solution courante C, on examine des factures candidates adjacentes aux nœuds déjà impliqués, et on évalue leur ajout. Ainsi, pour chaque facture candidate e, on choisit la direction (entrante ou sortante) qui maximise le ratio $\rho(e)$, c'est-à-dire C_e^- si $\rho^-(e) \geq \rho^+(e)$, sinon C_e^+. On ajoute ensuite à C la facture candidate et sa structure associée qui maximise notre objectif sur le facteur d'amplification, si son ratio dépasse $\rho_{\min}$. Il est important de noter qu'à égalité de facteur d'amplification, la structure présentant le plus grand volume de dette réduite sera choisie. L'expansion se poursuit tant qu'il existe au moins une structure admissible avec ratio supérieur au

seuil. Il est parfois nécessaire de recalculer le potentiel de certains arcs si une partie de leur structure associée partage des arcs avec une structure déjà ajoutée. Les méthodes de recalcul et le détail sur les arcs concernés sont expliqués en Annexe C.

Cet algorithme nous permet de travailler sur deux objectifs simultanés : maximiser la couverture tout en atteignant une valeur seuil de facteur d'amplification. Cela permet de chercher des solutions qui sont intéressantes d'un point de vue systémique, tout en optimisant les dépenses de liquidités faites.

La Figure 5.1 illustre le déroulement de l'algorithme sur un exemple simple. Chaque ligne représente un état du réseau et chaque transition une opération élémentaire de l'heuristique : pré-traitement, initialisation de C, puis extensions successives. Le nœud rouge *Fin* matérialise le financeur temporaire v^*, dont les injections de liquidité apparaissent en pointillés rouges.

L'exécution débute par la suppression des 2-cycles parfaits : la paire d'arcs opposés de même poids entre A et B (en pointillés bleus) relève d'un règlement bilatéral trivial et est retirée du graphe, sans mobiliser de financement externe ni être intégrée à C.

L'algorithme recherche ensuite des chemins décroissants non recouvrants dont le ratio dépasse le seuil $\rho_{\min} = 2$. Le chemin germe retenu initialise C et déclenche la création d'un financement temporaire dirigé vers B, qui amorce la propagation des règlements. On observe que le volume traité D_C peut croître alors plus rapidement que le financement $F(C)$, ce qui justifie le recours à un seuil minimal sur le facteur d'amplification afin de ne conserver que les configurations générant un effet boule de neige non négligeable.

L'expansion se poursuit par ajouts successifs d'arbres de dette, chacun sélectionné pour maximiser conjointement le facteur d'amplification et le volume traité. Le premier, enraciné en $(C, D, 1)$, a pour potentiel $U_G^-((C, D, 1)) = 2$ et un ratio $\rho^-((C, D, 1)) = \infty$. Il est intégré à C sans création de nouveau financement temporaire.

La deuxième extension, enracinée en $(E, F, 3)$, présente un potentiel plus élevé $U_G^-((E, F, 3)) = 5$ pour un ratio qui est maintenant infini (il aurait eu un ratio de 5) : la liquidité déjà injectée suffit à absorber la dette supplémentaire, puisque E, devenu bénéficiaire de 3 unités, peut régler sa dette vers F, qui règle à son tour la sienne vers H.

La dernière extension, enracinée en $(C, B, 2)$ avec $U_G^-((C, B, 2)) = 2$ et $\rho^-((C, B, 2)) = \infty$, ne mobilise pas davantage de liquidité nouvelle : son ajout se traduit par un simple déplacement de 2 unités de financement de B vers C. Cet arc, qui devrait coûter 2 unités, revient en effet à créditer C de 2 unités tout en débitant B d'autant.

Les facteurs d'amplification infinis signifient donc que chacune de ces extensions est absorbée par la liquidité déjà présente dans le réseau, sans coût marginal (attention à ne pas croire que l'extension est forcément sans coût). Tout cela met en avant qu'une modification locale de C peut accroître le volume traité à coût décroissant. L'heuristique exploite ainsi la structure du graphe pour optimiser l'utilisation de la liquidité disponible plutôt que d'en accroître systématiquement le niveau. Enfin, cet exemple, même très simple, confirme que l'efficacité du mécanisme ne repose pas uniquement sur la présence de cycles, mais sur l'existence d'autres arborescences capables d'amplifier une unité de liquidité injectée. La sélection guidée par le facteur d'amplification permet donc d'identifier des configurations dont l'effet de réduction de dette au niveau systémique dépasse leur coût marginal en financement.

Une comparaison avec une méthode plus naïve proposée pour la compensation intégrale sur des réseaux dans une étude préliminaire [17] est présentée en Annexe D. Celle-ci fait ressortir des pièges dans lesquels d'autres algorithmes peuvent tomber et qui sont évités par notre heuristique, ce qui lui permet à terme de présenter une meilleure qualité de résultats.

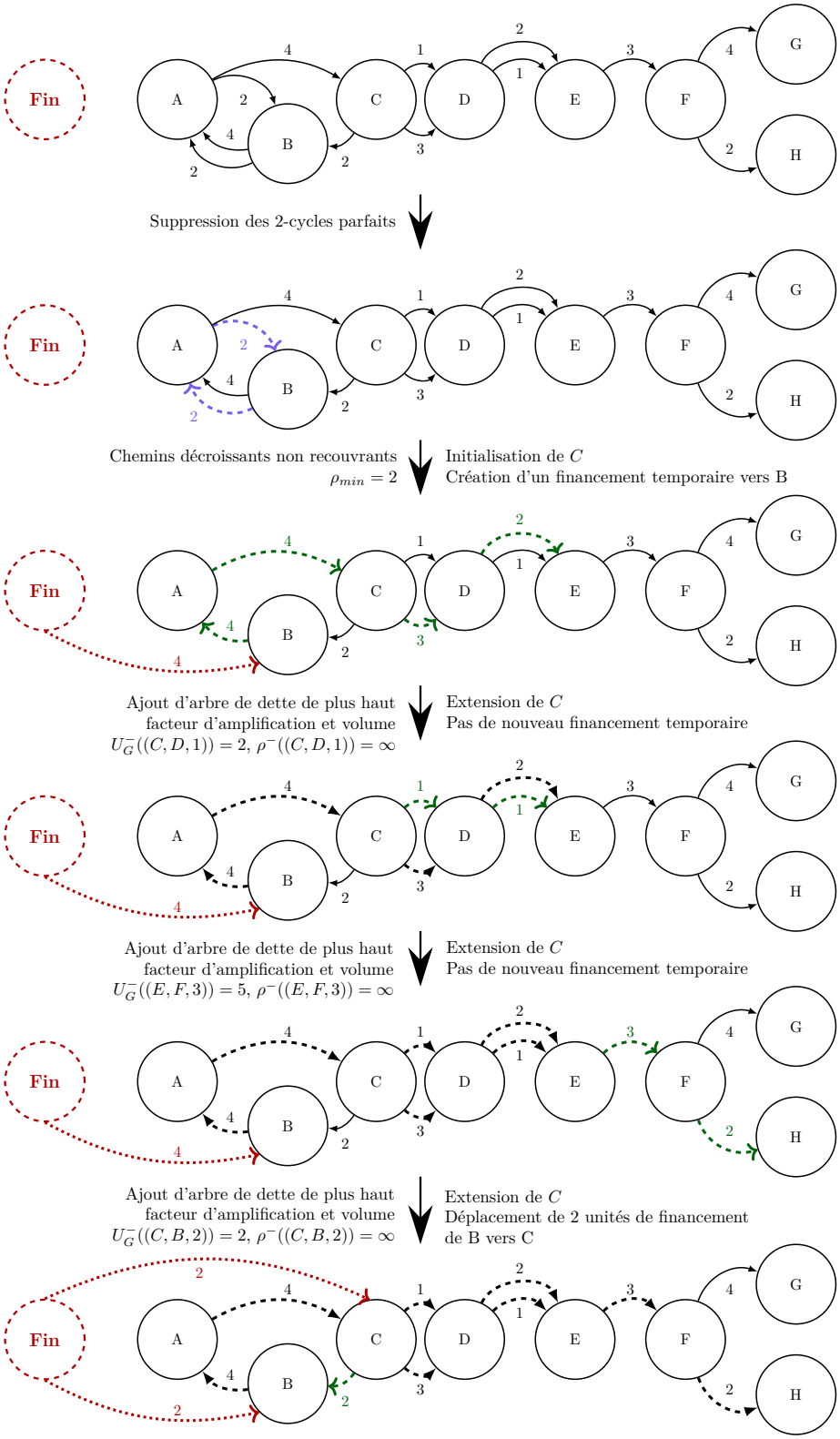


FIGURE 5.1 – Schéma illustratif de l'heuristique de compensation intégrale sur un exemple simple. Le nœud rouge *Fin* représente ici le financeur temporaire.

5.2 Résultats expérimentaux

L'heuristique a été évaluée sur :
— des graphes synthétiques contrôlés ;
— des graphes réels tirés du jeu de données présenté au Chapitre 4.

5.2.1 Validation sur petits graphes synthétiques

Une première étape de validation consiste à étudier le comportement de l'heuristique sur des graphes synthétiques de petite taille pour lesquels il est possible d'énumérer l'ensemble des solutions possibles. Nous considérons des graphes aléatoires contenant vingt arcs. Pour ces instances, il est possible de calculer l'ensemble des sous-graphes candidats et d'évaluer exactement les métriques définies dans la section précédente. Cette approche permet d'identifier les solutions optimales et de positionner les résultats produits par notre heuristique dans l'espace des solutions.

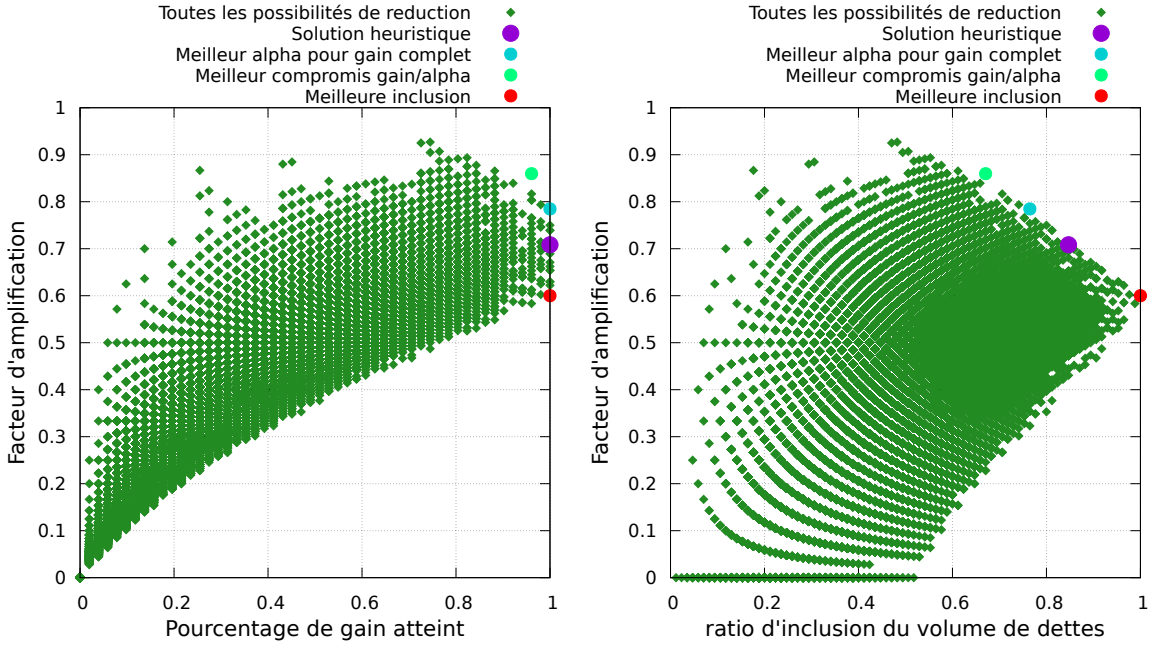


FIGURE 5.2 – Position de la solution produite par l'heuristique dans l'espace des solutions pour un graphe aléatoire de 20 arcs.

La Figure 5.2 représente la position de la solution obtenue par l'algorithme dans l'espace défini par le facteur d'amplification normalisé [29] et le gain ou l'inclusion. Les solutions optimales se situent dans la région supérieure droite du graphique. On observe que la solution sélectionnée par l'heuristique appartient à la frontière de Pareto [30] des solutions possibles pour le couple

29. Le facteur d'amplification $\alpha(C) = \frac{D_C}{F(C)}$ n'est pas borné supérieurement. Pour faciliter la visualisation et la comparaison entre différentes solutions, nous utilisons une transformation normalisée définie par $1 - \frac{1}{\alpha}$. Pour cette transformation normalisée, plus α est élevé, plus la valeur normalisée est proche de 1.

30. La frontière de Pareto désigne l'ensemble des solutions pour lesquelles il n'existe aucune autre solution améliorant simultanément toutes les métriques considérées. Dans notre cas, une solution appartient à cette frontière s'il n'existe pas d'autre sous-graphe produisant à la fois un facteur d'amplification plus élevé et un gain de compensation supérieur.

facteur d'amplification et inclusion.

L'heuristique maximise principalement le volume de dette traitée pour un facteur d'amplification donné. Il peut donc arriver que le facteur d'amplification obtenu soit légèrement inférieur au maximum théorique pour une valeur donnée du gain. Cette différence provient du fait que l'algorithme sélectionne des extensions arborescentes guidées par les potentiels $U_G^-(e)$ et $U_G^+(e)$, alors que la solution optimale peut parfois correspondre à une combinaison plus complexe d'arcs. Ces résultats montrent néanmoins que l'heuristique fournit des solutions proches de l'optimum tout en restant calculable, ce qui est essentiel lorsque l'on passe à des graphes de grande taille.

5.2.2 Analyse des performances

Pour travailler désormais sur des données réelles, nous avons sélectionné des partitions journalières intéressantes de notre réseau global. La Figure 5.3 présente l'évolution du facteur d'amplification en fonction du gain pour trois jours représentatifs du jeu de données. Nous avons utilisé comme paramètres de l'algorithme $\rho_{\min} = 1.95$ après avoir identifié cette valeur comme un seuil important dans une étude précédente [17].

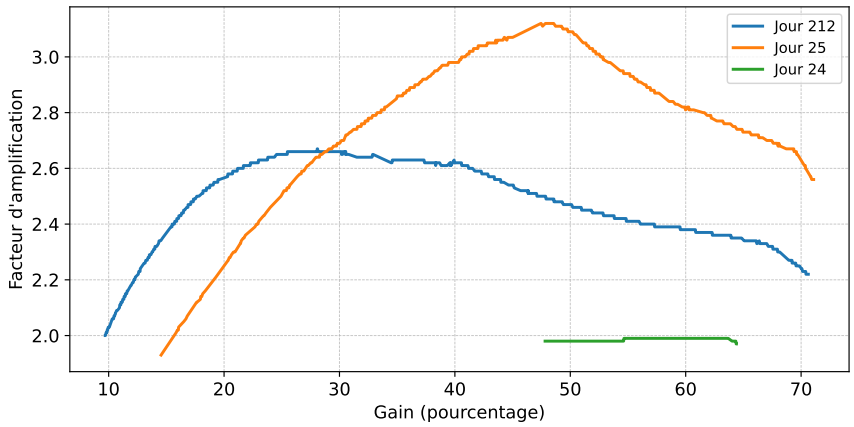
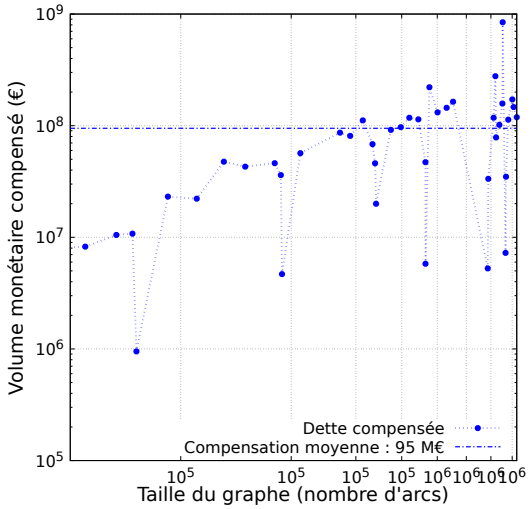


FIGURE 5.3 – Évolution du facteur d'amplification en fonction du gain au cours de l'exécution de l'algorithme pour trois graphes journaliers. La fin d'exécution de l'algorithme est le point présentant le gain le plus élevé.

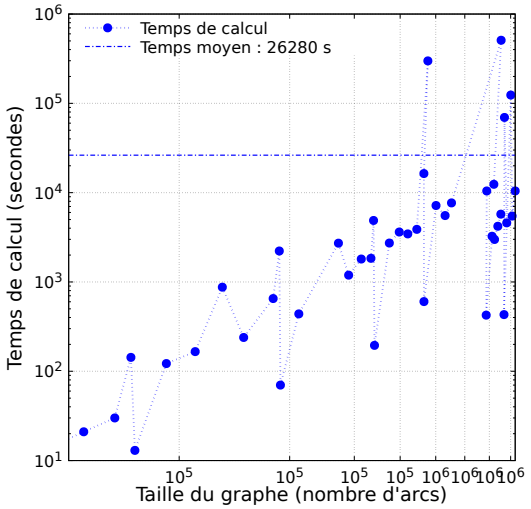
Nous avons choisi trois jours représentatifs de trois tailles différentes dans notre réseau. Les jours 24 et 25 représentent des jours de semaine classiques, tandis que le jour 212 est celui avec le plus d'arcs de notre réseau. On observe que le facteur d'amplification reste systématiquement supérieur à 2 tout au long du processus de réduction. Les valeurs finales du gain se situent généralement entre 65% et 72%.

Il est important de noter que l'objectif de l'algorithme n'est pas de compenser la totalité de la dette réductible. Une réduction complète conduirait généralement à un facteur d'amplification proche de 1, ce qui correspondrait à une utilisation inefficace de la liquidité externe.

La Figure 5.4a montre l'évolution du volume de dette compensée en fonction de la taille du graphe traité. On observe que les graphes les plus grands offrent généralement un potentiel de réduction plus important, car ils contiennent davantage de structures exploitables par l'algorithme. Toutefois, cette relation n'est pas strictement monotone : la topologie du graphe joue également un rôle déterminant dans l'efficacité de la réduction.



(a) Évolution du volume de dette compensée (échelle log-log).



(b) Évolution du temps de calcul (échelle log-log).

FIGURE 5.4 – Influence de la taille du graphe sur la réduction de dette et le temps de calcul.

5.2.3 Temps de calcul et passage à l'échelle

Le temps de calcul constitue un aspect critique du problème. Comme illustré dans la Figure 5.4b, le temps d'exécution de l'algorithme augmente de façon polynomiale avec la taille du graphe (linéaire en log-log). Cette croissance non linéaire s'explique par la complexité du calcul des potentiels et par la taille croissante des arbres et circuits explorés lors du processus de réduction. Ce coût est particulièrement marqué autour des hubs : l'ajout d'une facture adjacente à un tel nœud peut invalider les potentiels de l'ensemble de ses arcs voisins, déjà calculés ou en cours d'exploration, et nécessiter leur recalcul (Annexe C). Ce phénomène est d'autant plus pénalisant que les hubs concentrent, par construction, un grand nombre d'arcs adjacents.

En pratique, cette observation signifie qu'il n'est pas possible de traiter directement des graphes construits à partir de longues périodes temporelles (par exemple des semaines ou des mois) sans optimisation supplémentaire. Cette limitation calculatoire a motivé le développement d'une stratégie de division du graphe, présentée dans le Chapitre 6.

Chapitre 6 :
Passage à l'échelle

Sommaire

6.1 Principe de l'approche diviser pour régner 67
6.2 Division du graphe 68
6.3 Stratégies de division du graphe 68
6.4 Recombinaison des sous-solutions et réextension 73
6.5 Résultats expérimentaux 74

Les résultats expérimentaux présentés au Chapitre 5 montrent que l'heuristique basée sur les potentiels permet d'obtenir des solutions de bonne qualité sur des graphes de taille modérée. Toutefois, les temps de calcul observés sur les instances les plus volumineuses révèlent une croissance rapide du coût de calcul lorsque le nombre d'arcs augmente. Cette augmentation provient principalement de deux facteurs :

— le calcul des potentiels $U_G^-(e)$ et $U_G^+(e)$, nécessitant d'explorer le graphe ;
— la mise à jour des potentiels après chaque modification de la solution.

Dans nos réseaux de facturation B2B, le nombre d'arcs peut facilement atteindre plusieurs millions, ce qui rend difficile l'application directe de l'heuristique. Cette difficulté serait encore accentuée dans des graphes plus denses ou plus complets. Il devient donc nécessaire de développer des stratégies permettant de réduire la taille effective des instances traitées.

Dans ce chapitre, nous introduisons une approche du type ***diviser pour régner***, consistant à décomposer le graphe initial en plusieurs sous-graphes indépendants sur lesquels l'algorithme peut être appliqué séparément. Les sous-solutions obtenues seront ensuite fusionnées et recombinées pour les améliorer. Les méthodes de division du graphe et les résultats expérimentaux associés présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de publications, notamment dans les actes de *CSS 2025* [27] et font aussi partie de la version étendue de l'algorithme. Certaines figures et analyses présentées ici sont reprises ou adaptées de ces travaux.

6.1 Principe de l'approche diviser pour régner

L'approche proposée repose sur trois étapes principales :

1. Le graphe initial $G = (V, E)$ est partitionné en plusieurs sous-graphes de taille plus réduite. Cette étape permet de limiter la complexité du calcul des potentiels.
2. L'heuristique décrite au Chapitre 5 est appliquée indépendamment sur chacun des sous-graphes afin de produire des solutions locales.

3. Une phase de recombinaison est effectuée afin d'exploiter les arcs reliant différents sous-graphes. Cette étape permet de reconstruire des structures de compensation plus larges qui n'auraient pas été identifiées lors de la résolution locale.

On obtient ainsi une solution globale construite à partir des solutions locales, enrichie par des structures inter-composantes.

6.2 Division du graphe

La première étape de l'approche consiste à décomposer un graphe de facturation initial en plusieurs sous-graphes de taille plus réduite. L'objectif est de limiter la complexité du calcul des potentiels tout en conservant autant que possible les structures propices à la compensation présentes dans le réseau.

6.2.1 Définition d'une partition d'arcs

Soit $G = (V, E)$ un graphe statique de facturation introduit précédemment. Une division du graphe consiste à construire une partition de l'ensemble des arcs

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j.$$

Il est important ici de ne pas confondre cette partition de graphe statique en $(E_i)_{i=1}^{k}$ avec les E^k de la suite générative $(G^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de notre réseau dynamique présentée dans le Chapitre 3. Chaque ensemble E_i définit une instance partielle du problème de compensation intégrale sur laquelle l'heuristique du Chapitre 5 peut être appliquée. La solution globale sera ensuite construite et améliorée à partir de l'union des solutions locales obtenues sur chaque sous-ensemble.

6.2.2 Objectifs de la décomposition

La division du graphe doit satisfaire plusieurs objectifs potentiellement contradictoires. D'une part, les sous-graphes doivent être suffisamment petits pour que le calcul des potentiels et les mises à jour associées restent peu coûteux. Une réduction significative de la taille des instances permet de diminuer fortement le temps de calcul de l'heuristique. D'autre part, la décomposition ne doit pas supprimer un trop grand nombre de structures de compensation. En effet, certaines chaînes de règlement peuvent impliquer des entreprises appartenant à différentes régions du graphe, en fonction de notre découpage. Une partition trop fine risquerait donc de dégrader la qualité de la solution finale.

La construction des sous-graphes doit ainsi chercher un compromis entre réduction de la complexité algorithmique et préservation des opportunités de compensation.

6.3 Stratégies de division du graphe

Dans ce travail, nous avons étudié deux stratégies de division reposant sur des principes différents :

— une approche centrée sur les nœuds du graphe ;
— une approche centrée sur les arcs.

Ces deux approches correspondent à deux manières différentes de préserver la structure du réseau lors de la décomposition. La première cherche à maintenir des groupes d'entreprises fortement connectées, tandis que la seconde vise à préserver les chaînes potentielles de compensation entre factures.

6.3.1 Division centrée nœuds

La première stratégie de division repose sur une *partition des nœuds* du graphe. L'objectif est de regrouper dans une même partition les entreprises qui échangent un nombre important de factures. Cette intuition laisse présager qu'on préservera les structures locales de compensation dans les sous-graphes obtenus. On va donc construire deux sous-graphes contenant chacun un nombre d'arcs comparable tout en conservant des structures locales cohérentes.

La division centrée nœuds repose sur la construction progressive de deux ensembles de nœuds V_1 et V_2 formant une partition de V.

La construction de la partition est réalisée de manière incrémentale. Celle-ci nécessite une initialisation. Deux nœuds distincts sont sélectionnés aléatoirement dans V et utilisés comme graines initiales des ensembles V_1 et V_2. Ensuite, à chaque étape, un nœud v non encore assigné est choisi aléatoirement et ajouté à la partition avec laquelle il partage le plus grand nombre d'arcs. Plus précisément, on note

$$d_i(v) = |\{(v,u) \in E \mid u \in V_i\}| + |\{(u,v) \in E \mid u \in V_i\}|,$$

le nœud v est affecté à la partition V_i telle que $d_i(v)$ soit maximal.

Afin d'éviter la formation de partitions fortement déséquilibrées, une contrainte d'équilibrage est introduite. Si l'ajout d'un nœud v dans une partition V_i conduit à dépasser un seuil maximal de taille (la moitié des nœuds), ce nœud est affecté à l'autre partition quel que soit son degré.

Une fois la partition des nœuds obtenue, les arcs reliant deux partitions distinctes constituent des ***arcs de frontière***[31]. Afin de maintenir une répartition équilibrée des factures entre les sous-graphes, ces arcs sont affectés à la partition dont le degré total est le plus faible.

Cette règle vise à favoriser la formation de sous-graphes contenant un grand nombre d'arcs internes, afin d'essayer de préserver les chaînes potentielles de compensation entre entreprises.

La Figure 6.1 illustre le fonctionnement de la division basée sur les nœuds dans un exemple simple. Dans un premier temps, deux nœuds sont sélectionnés comme graines des partitions V_1 et V_2. Dans l'exemple présenté, les nœuds A et D sont choisis comme points de départ des deux sous-ensembles.

Dans l'exemple, le nœud B est d'abord ajouté à la partition V_1 car il possède une connexion avec A, tandis qu'aucun arc ne le relie à V_2. De manière analogue, les nœuds E et F[32] sont affectés à V_2 car ils n'ont aucun lien avec V_1.

Une fois ces affectations réalisées, le nœud C est traité. Celui-ci possède deux arcs vers la partition V_1 (via A et B) et un seul arc vers V_2 (via D). Il est donc ajouté à V_1.

À l'issue de ce processus, l'ensemble des nœuds est partitionné en deux sous-ensembles. Les arcs reliant deux partitions distinctes constituent les ***arcs de frontière***. Dans l'exemple, l'arc $(C, D, 2)$ relie les deux partitions et est donc identifié comme arc de frontière. Il est associé à la partition V_2 afin d'équilibrer le nombre d'arcs.

31. Un arc $e = (s(e), d(e))$ est dit ***de frontière*** si ses deux extrémités appartiennent à des partitions différentes : $s(e) \in V_i$ et $d(e) \in V_j$ avec $i \neq j$.

32. F n'est pas directement relié à D, mais est affecté à V_2 lors d'une étape ultérieure, une fois E intégré à V_2 : il partage en effet un arc avec E et aucun avec V_1.

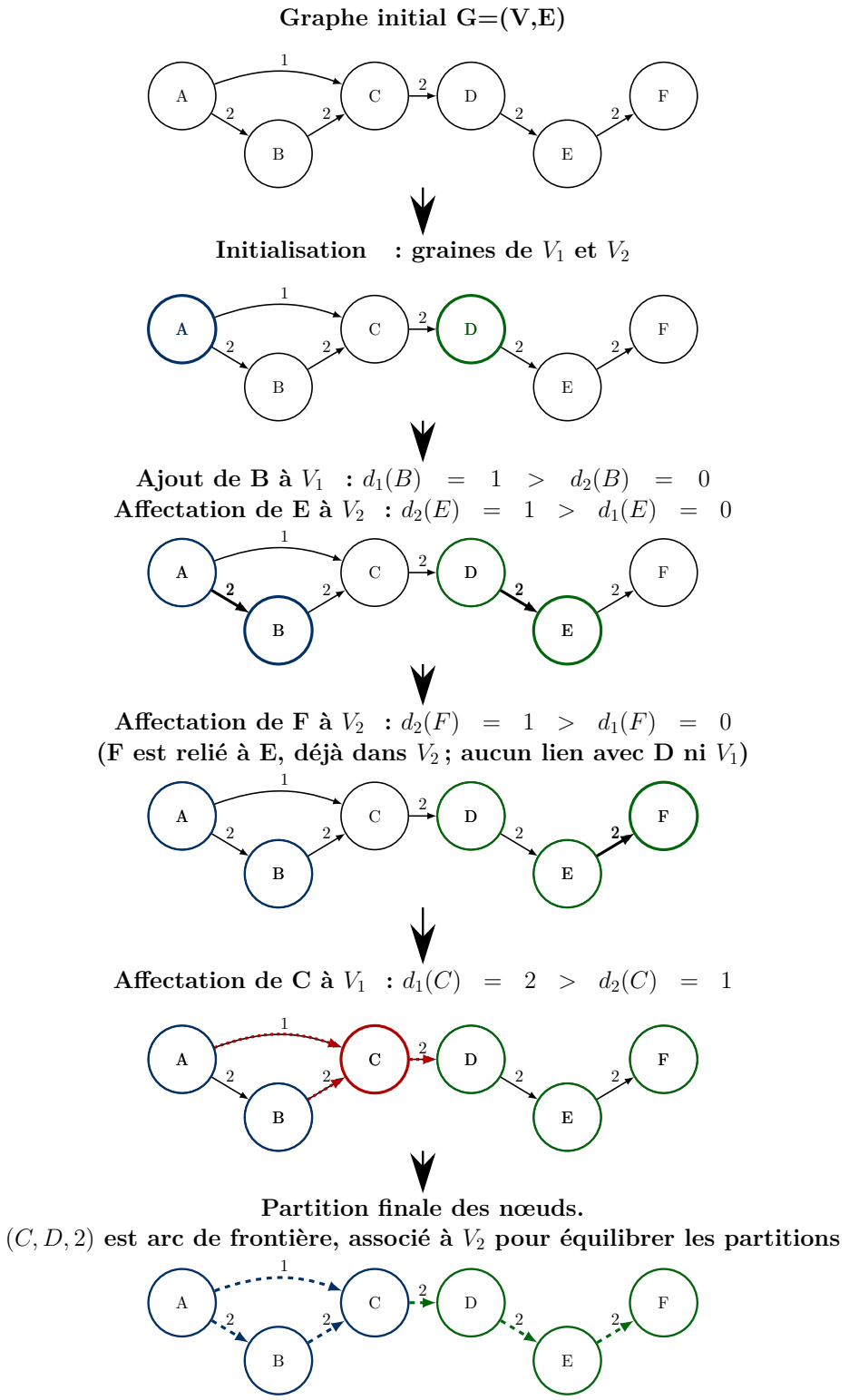


FIGURE 6.1 – Illustration de la division centrée nœuds. Les nœuds sont répartis en deux ensembles tandis que les arcs de frontière sont affectés afin d'équilibrer les sous-graphes.

Malgré son caractère intuitif, cette stratégie présente certaines limites, que l'analyse structurelle du réseau menée au Chapitre 4 laissait d'ailleurs présager. Nous y avions en effet observé

que l'organisation mésoscopique du réseau de factures n'est pas gouvernée par des communautés de nœuds (Section 4.5) : la décomposition en communautés produit un grand nombre de groupes sans séparation nette, et surtout, les partitions obtenues sont centrées sur les relations entre entreprises plutôt que sur les montants des factures qui les relient. Ici encore, le critère de partition repose uniquement sur la ***densité de connexions*** entre entreprises et ne tient pas compte des ***montants*** associés aux factures. Or, dans notre problème de compensation, les possibilités de réduction dépendent fortement de la ***structure des poids*** présents dans le graphe.

En particulier, un groupe d'entreprises peut échanger un nombre important de factures sans pour autant participer à des structures de compensation efficaces. En effet, si les montants associés aux arcs sont trop différents, les chaînes de compensation potentielles peuvent être limitées ou inexistantes, même si les entreprises sont fortement connectées.

À l'inverse, certaines structures de compensation reposent sur des arcs de poids similaires répartis entre plusieurs zones du graphe. Une partition centrée uniquement sur les nœuds peut alors séparer des arcs qui auraient pu former une structure de compensation cohérente. C'est notamment ce qu'on observe sur la Figure 6.1 où un long chemin d'arcs de même valeur se retrouve coupé. Cette inquiétude reste toutefois à nuancer : la phase de réextension (Section 6.4) relance l'heuristique sur le graphe complet en conservant la solution fusionnée comme point de départ, ce qui peut potentiellement lui permettre de retraverser les arcs de frontière et de reconstituer, au moins partiellement, certains arbres ou circuits de compensation qui avaient été fragmentés par la division.

Pour autant, ces observations suggèrent que la structure topologique du réseau ne constitue pas toujours un indicateur suffisant pour préserver les mécanismes de réduction de dette lors de la phase de division. Afin de mieux capturer directement ces structures, nous introduisons dans la section suivante une seconde stratégie de division centrée sur les arcs.

6.3.2 Division centrée arcs

La seconde stratégie de division repose sur une partition de l'ensemble des arcs du graphe. Contrairement à la méthode précédente, qui regroupe les entreprises selon leur connectivité, cette approche s'intéresse aux caractéristiques des factures elles-mêmes, en particulier à leurs montants.

Soit $G = (V, E)$ un graphe de facturation statique. On considère l'ensemble des arcs trié selon leurs poids $w(e)$. La division est alors obtenue en coupant cette liste au niveau de la médiane des poids.

Plus précisément, si m désigne la médiane des valeurs $\{w(e) \mid e \in E\}$, on définit deux ensembles d'arcs :

$$E_1 = \{e \in E \mid w(e) < m\}, \qquad E_2 = \{e \in E \mid w(e) \geq m\}.$$

On obtient ainsi deux sous-graphes

$$G_1 = (V, E_1) \qquad \text{et} \qquad G_2 = (V, E_2),$$

qui partagent le même ensemble de nœuds mais contiennent des ensembles de factures distincts.

Cette séparation présente deux propriétés importantes. Tout d'abord, elle garantit que les deux sous-graphes contiennent un nombre d'arcs comparable, ce qui permet d'équilibrer les tailles des instances traitées lors de l'application de l'heuristique. Ensuite, elle tend à regrouper dans un même sous-graphe des arcs de poids similaires. En effet, les chaînes de compensation

construites par l'heuristique reposent fréquemment sur des arcs dont les montants sont proches. En conservant ces arcs dans une même instance, on augmente donc la probabilité de préserver ces structures lors de la phase de division.

La Figure 6.2 illustre l'application de cette stratégie sur le même graphe que celui utilisé pour la division centrée nœuds. On observe que la partition obtenue diffère sensiblement de la précédente : les arcs sont ici répartis selon leurs montants. Dans cet exemple, tous les arcs de poids 2 sont regroupés dans la même partition, ce qui permet de conserver une structure cohérente sans nécessiter d'opération de refusion.

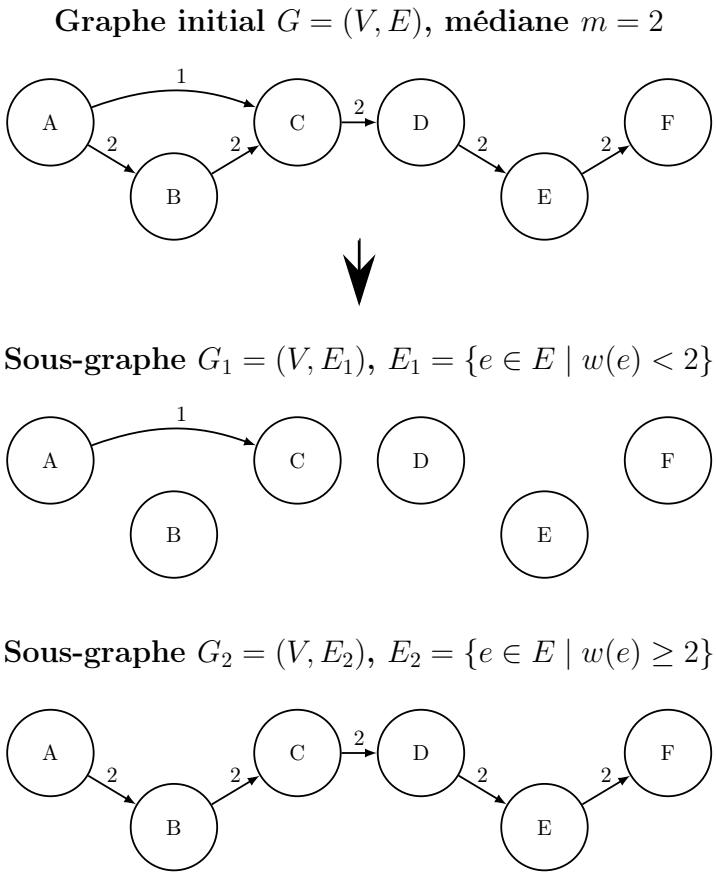


FIGURE 6.2 – Illustration de la division centrée arcs. Les arcs sont répartis en deux ensembles quasi équilibrés à l'aide de la médiane des poids.

Cette stratégie cherche ainsi à conserver des ensembles d'arcs homogènes du point de vue de leurs poids, ce qui peut favoriser l'identification de structures de compensation lors de l'application de l'heuristique sur chaque sous-graphe.

Malgré cela, cette stratégie présente également certaines limites. La partition repose uniquement sur la valeur des poids et ne prend plus en compte la topologie du graphe. Il est donc possible que des entreprises fortement connectées se retrouvent séparées dans les sous-graphes.

Dans certaines situations, cette séparation peut fragmenter des arbres de compensations reliant des arcs de poids différents. Une partition trop stricte selon les poids peut alors empêcher l'identification de ces structures lors de la résolution locale des sous-graphes. Par ailleurs, lorsque la distribution des montants est concentrée autour de la médiane, les deux sous-graphes obtenus

peuvent rester fortement entremêlés du point de vue de la structure du réseau. Dans ce cas, la division pourrait réduire l'efficacité de l'heuristique locale en séparant des arcs qui auraient pu participer à une même structure de compensation.

Ces observations montrent que les deux stratégies de division présentées dans ce chapitre capturent des aspects différents du problème : la division centrée nœuds préserve la topologie relationnelle du réseau, tandis que la division centrée arcs privilégie l'homogénéité des montants des factures. Dans la pratique, ces approches peuvent produire des partitions différentes et donc des solutions drastiquement différentes.

6.4 Recombinaison des sous-solutions et réextension

La phase de division permet de réduire la taille effective des instances traitées par l'heuristique. Toutefois, les solutions obtenues sur les sous-graphes restent nécessairement partielles, car certaines structures de compensation peuvent impliquer des arcs appartenant à différentes partitions. Pour reconstruire une solution globale de meilleure qualité, une phase de recombinaison est appliquée après la résolution locale des sous-graphes.

Soient $G_1 = (V, E_1)$ et $G_2 = (V, E_2)$ les deux sous-graphes obtenus lors de la phase de division. L'heuristique décrite au Chapitre 5 est appliquée indépendamment sur chacun d'entre eux, ce qui produit deux configurations locales

$$C_1 \subseteq E_1 \qquad \text{et} \qquad C_2 \subseteq E_2.$$

La première étape de la recombinaison consiste à fusionner ces configurations locales afin de former une première approximation de la configuration de compensation globale

$$C = C_1 \cup C_2 \subseteq E.$$

Cependant, cette solution est généralement sous-optimale. En effet, certains arbres ou circuits de compensation impliquant des arcs appartenant à différentes partitions n'ont pas pu être construits et sélectionnés lors de la résolution locale des sous-graphes. Pour exploiter ces opportunités, une phase de ***réextension*** est appliquée à la solution fusionnée. Cette étape consiste à relancer l'heuristique sur le graphe initial en utilisant C comme solution de départ.

Plus précisément, les arcs déjà sélectionnés dans C sont conservés, et l'algorithme d'expansion décrit dans la Sous-section 5.1.3 est réappliqué afin d'identifier de nouvelles structures de compensation impliquant les arcs restants du graphe.

Cette phase permet notamment de détecter des structures reliant les deux partitions initiales, en particulier lorsque des chaînes de règlements traversent la frontière entre les sous-graphes. Elle joue donc un rôle essentiel pour restaurer certaines possibilités de compensation qui auraient été perdues lors de la phase de division.

6.4.1 Résumé de l'approche diviser pour régner

L'approche complète peut ainsi être résumée en quatre étapes :

1. division du graphe initial en sous-graphes de taille réduite ;
2. résolution indépendante de chaque sous-graphe ;
3. fusion et réextension progressives des solutions locales ;
4. obtention de la solution sur le graphe complet.

Dans la pratique, la phase de division peut être appliquée de manière récursive afin de réduire davantage la taille des instances traitées. Un sous-graphe obtenu lors d'une première division peut ainsi être lui-même subdivisé selon l'une des stratégies présentées précédemment, jusqu'à atteindre une taille compatible avec une résolution efficace par l'heuristique. On obtient ainsi une hiérarchie de sous-graphes formant une structure arborescente. Les instances les plus petites, situées aux feuilles de cette structure, sont résolues en premier à l'aide de l'heuristique de compensation.

La reconstruction de la solution globale s'effectue ensuite de manière progressive. Les solutions locales obtenues sur les sous-graphes élémentaires sont fusionnées deux à deux afin de reconstruire progressivement des solutions sur des graphes de taille croissante. Après chaque opération de fusion, une phase de réextension est appliquée afin d'exploiter les nouvelles opportunités de compensation rendues possibles par la réunion des partitions. Ce processus de fusion et de réextension est répété jusqu'à atteindre le graphe initial. À chaque niveau de la hiérarchie, la réextension permet d'identifier des structures de compensation impliquant des arcs appartenant à des partitions précédemment séparées. L'idée générale de la méthode est présentée sur la Figure 6.3. Cette stratégie hiérarchique permet de traiter des graphes de grande taille tout en limitant les coûts associés au calcul des potentiels et aux mises à jour de l'heuristique.

6.5 Résultats expérimentaux

Cette section évalue l'apport de l'approche ***diviser pour régner*** en termes de passage à l'échelle. L'objectif est de quantifier l'effet du ***niveau de division*** sur les temps de calcul et la qualité des solutions après refusion et réextension. Pour évaluer notre méthode, nous utilisons un graphe comportant environ 408 mille nœuds et 1.2 million d'arcs. Les valeurs numériques détaillées associées à cette expérience sont présentées dans le Tableau E.1 de l'Annexe E.

Gain de temps en fonction du niveau de division

La Figure 6.4a présente l'évolution du temps de calcul total en fonction du niveau de division, pour les différentes stratégies de division et de fusion étudiées.

On observe tout d'abord que l'introduction de la phase de division permet de réduire très fortement les temps de calcul par rapport à l'approche sans division (référence) appliquée directement sur le graphe complet. Dès les premiers niveaux de division, le temps d'exécution diminue de plusieurs ordres de grandeur (a minima 20 fois plus rapide). Cette amélioration s'explique par la réduction de la taille effective des instances traitées par l'heuristique : après n niveaux de division, le graphe est décomposé en 2^n sous-graphes dont les tailles sont significativement plus petites que celle de l'instance initiale.

Les variantes utilisant la stratégie de division basée sur les arcs (poids) ou sur les nœuds (degré) présentent des comportements similaires : le temps de calcul décroît rapidement lorsque le niveau de division augmente, puis tend à se stabiliser à partir de niveaux de division intermédiaires de l'expérience. Ce phénomène s'explique par un compromis entre deux effets opposés. D'une part, la réduction de la taille des sous-graphes accélère l'exécution de l'heuristique locale. D'autre part, l'augmentation du nombre de partitions entraîne un coût supplémentaire lors des phases successives de fusion et de réextension.

Une comparaison avec une méthode de refusion-reéxtension globale plutôt que deux à deux a aussi été testée pour étudier les efficacités respectives. Cela a été également instructif du point de vue des deux stratégies de recombinaison. Les variantes utilisant la refusion globale présentent

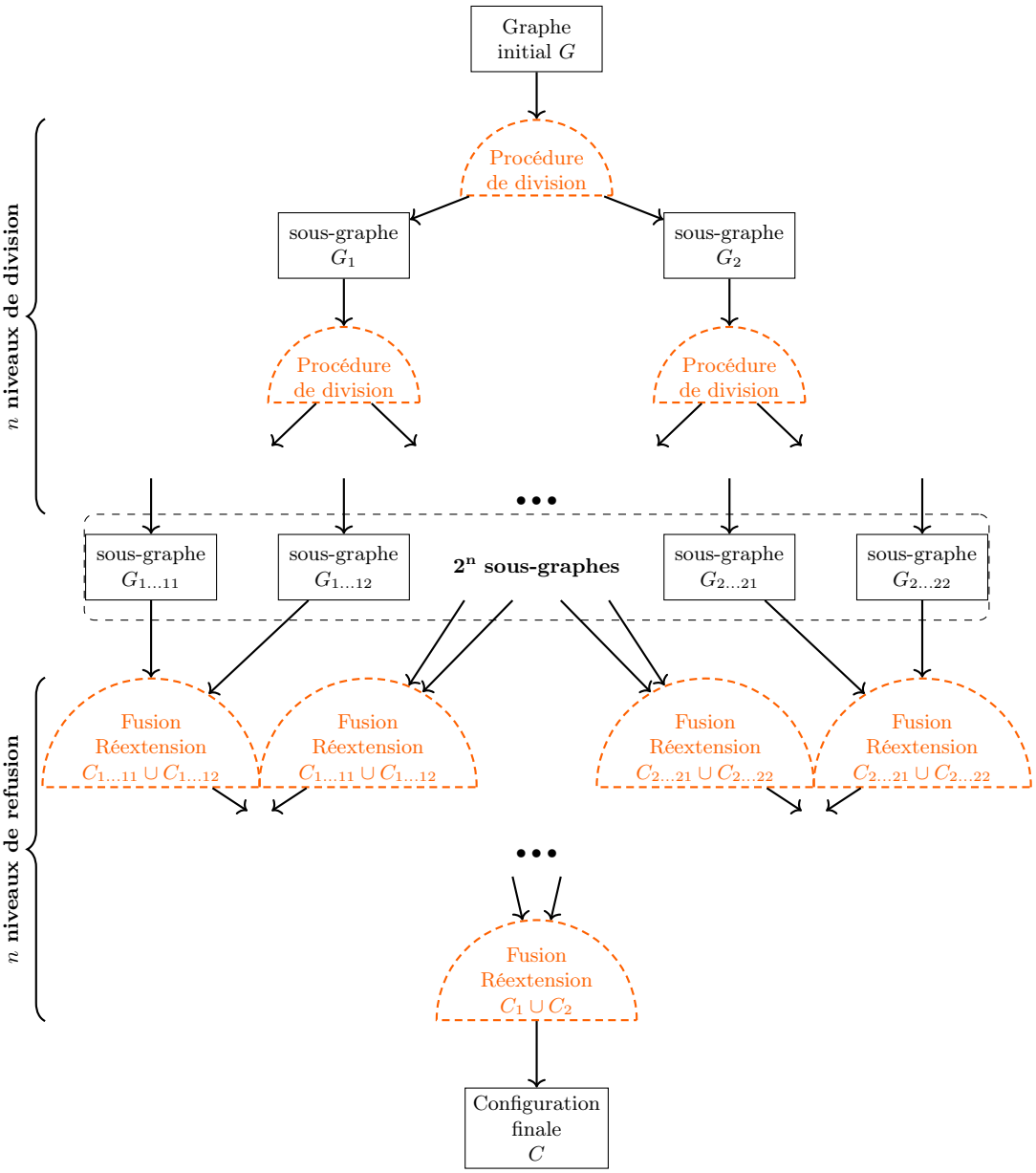


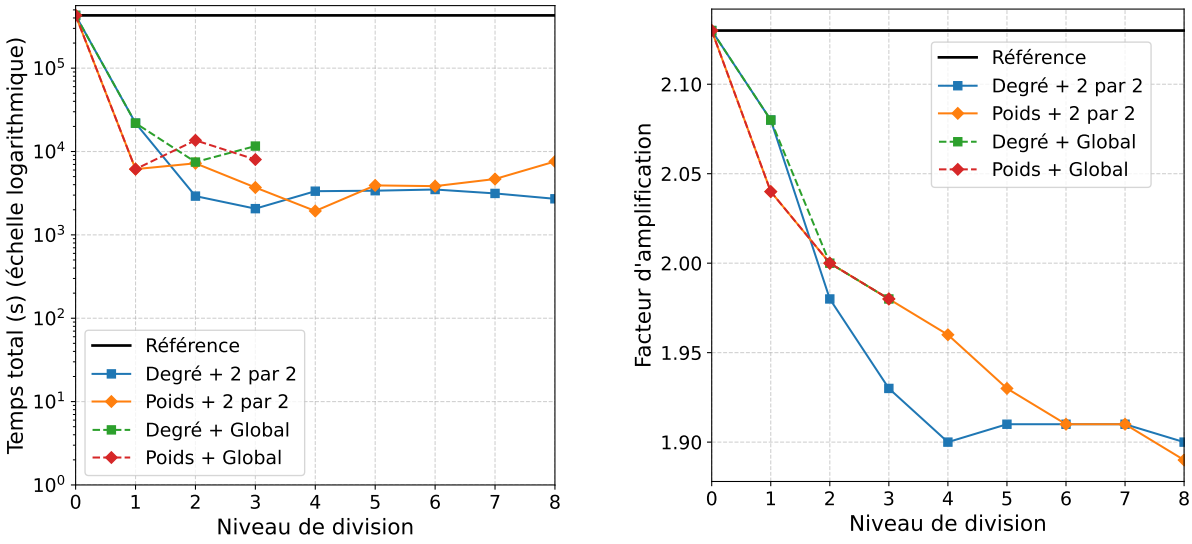
FIGURE 6.3 – Illustration du processus complet de division-refusion.

des temps de calcul plus élevés que celles utilisant une refusion locale, ce qui est attendu puisque la refusion globale nécessite d'examiner un ensemble plus large de structures lors de la phase de recombinaison. Ce surcoût n'est pas à négliger dès le 3^e niveau de division [33].

Effet sur la qualité de la solution

La Figure 6.4b présente l'évolution du facteur d'amplification obtenu en fonction du niveau de division et des méthodes. Cela nous permet d'évaluer dans quelle mesure la phase de division peut

33. Les autres niveaux n'ont pas été testés pour la fusion globale car peu intéressants suite à cette observation.



(a) Temps de calcul.

(b) Qualité de la solution.

FIGURE 6.4 – Évolution du temps de calcul et de la qualité en fonction du niveau de division et de la méthode.

affecter la qualité des solutions produites par l'heuristique. On observe que l'augmentation du niveau de division entraîne une légère diminution de la qualité des solutions (au maximum 12% de perte du facteur d'amplification). Ce phénomène s'explique naturellement par la fragmentation des structures de compensation lors de la phase de partition du graphe : certaines chaînes de règlement peuvent être réparties entre plusieurs sous-graphes et ne sont donc pas détectées lors de la résolution locale.

En termes de comparaison des méthodes de division, la méthode de division basée sur les poids semble mieux préserver la qualité de la solution que la méthode basée sur les degrés lorsque l'on divise un grand nombre de fois notre réseau. On peut conjecturer que cela est dû au fait que les structures réduites par notre algorithme présentent des poids semblables sur les arcs qui les composent.

Cependant, cette dégradation reste modérée. Les valeurs obtenues demeurent proches de celles de la solution de référence, ce qui montre que la phase de recombinaison permet de restaurer une partie des structures de compensation initialement séparées.

La comparaison entre les deux stratégies de recombinaison met également en évidence l'intérêt de la refusion globale pour la qualité. Les variantes utilisant cette stratégie conservent systématiquement une qualité de solution légèrement supérieure à celles reposant uniquement sur une refusion locale. En autorisant l'exploration d'un ensemble plus large de structures lors de la phase de recombinaison, la refusion globale permet en effet de reconstruire plus efficacement certaines structures de compensation qui avaient été fragmentées par la phase de division.

Effet sur le gain

Afin de compléter l'analyse précédente, nous avons également mesuré l'évolution du gain $\Gamma(C)$ (Définition 3.12) obtenu après application de la stratégie de division et de refusion. Cette métrique permet d'évaluer si l'approche de division et de refusion conserve un intérêt global du point de vue de l'efficacité de la compensation.

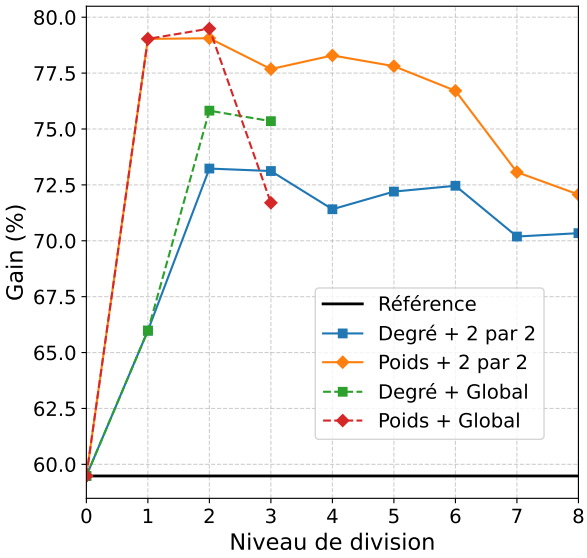


FIGURE 6.5 – Évolution du gain de compensation en fonction du niveau de division.

La Figure 6.5 présente l'évolution du gain en fonction du niveau de division et des différentes variantes de la méthode.

On observe tout d'abord que l'introduction de la stratégie ***diviser pour régner*** améliore fortement le gain obtenu par rapport à l'approche de référence appliquée directement sur le graphe complet. Dès le premier niveau de division, le gain augmente significativement, passant d'environ 60% à près de 79%.

Ce phénomène peut sembler contre-intuitif au premier abord. La division du graphe fragmente en effet certaines structures de compensation, ce qui pourrait théoriquement dégrader la qualité des solutions. Cependant, la résolution locale sur des sous-graphes plus petits modifie le comportement de l'heuristique : celle-ci peut explorer certaines structures de compensation qui seraient restées dominées par des structures localement plus attractives du point de vue du facteur d'amplification dans une exécution sur l'ensemble du graphe.

Autrement dit, la division agit ici comme un mécanisme de diversification de la recherche. Les solutions locales construites dans les différents sous-graphes peuvent révéler des structures de compensation alternatives qui ne seraient pas nécessairement sélectionnées dans une exécution unique sur le graphe complet. La phase de refusion et de réextension permet ensuite d'intégrer ces structures dans la solution globale.

On observe également que les variantes basées sur la division centrée arcs obtiennent les meilleurs résultats en termes de gain. Cette observation confirme que le regroupement d'arcs de montants similaires favorise l'identification de structures de compensation efficaces.

Enfin, lorsque le niveau de division devient trop élevé, le gain tend à diminuer progressivement. Cette dégradation s'explique par une fragmentation excessive des structures de compensation, qui ne peuvent plus être entièrement reconstruites lors des phases de refusion.

6.5.1 Discussion et choix d'un niveau de division

Les résultats obtenus mettent en évidence le compromis central associé à l'approche ***diviser pour régner***. L'augmentation du niveau de division permet de réduire fortement les temps de calcul, mais peut également entraîner une légère dégradation de la qualité des solutions.

Du point de vue du temps de calcul, les premiers niveaux de division produisent les gains les plus importants. La réduction rapide observée sur la Figure 6.4a s'explique par la diminution de la taille des instances locales traitées par l'heuristique. Après n niveaux de division, le graphe est décomposé en 2^n sous-graphes, chacun contenant en moyenne $|E|/2^n$ arcs. Si le calcul des potentiels avait une complexité linéaire en la taille du graphe, la division n'offrirait aucun avantage réel, le coût total cumulé sur l'ensemble des sous-graphes restant comparable à celui d'une résolution directe. L'accélération observée indique cependant que le coût du calcul des potentiels croît plus vite que linéairement avec la taille du graphe, ce qui est cohérent avec la nature combinatoire de leur calcul, déjà évoquée au Chapitre 5 (l'optimisation interne sur l'ensemble S s'apparentant à un problème de sac-à-dos). Lorsque le niveau de division devient plus élevé, les avantages temporels ont tendance à se stabiliser : les phases successives de fusion et de réextension doivent traiter un nombre croissant de sous-graphes et d'arcs de frontière, ce qui explique la stabilisation, puis la réduction progressive du bénéfice observée aux niveaux de division les plus élevés.

Du point de vue de la qualité des solutions, la Figure 6.4b montre que l'augmentation du niveau de divisions entraîne une légère diminution du facteur d'amplification obtenu. Cette dégradation provient du fait que certaines structures de compensation peuvent être fragmentées lors de la phase de division. Les chaînes de règlement impliquant des arcs répartis dans plusieurs partitions ne peuvent en effet pas être identifiées lors de la résolution locale des sous-graphes. La phase de recombinaison joue donc un rôle essentiel pour restaurer ces structures. La comparaison entre les différentes variantes montre que la refusion globale permet généralement de préserver légèrement mieux la qualité des solutions, mais au prix d'un surcoût de calcul non négligeable. À l'inverse, la stratégie de refusion locale deux à deux permet de conserver une complexité plus faible tout en obtenant des résultats de qualité comparable.

Par ailleurs, les expériences réalisées dans ce chapitre confirment l'intérêt de la stratégie de division centrée sur les arcs. En regroupant les factures selon leurs montants, cette méthode tend à moins dégrader la qualité des solutions trouvées.

Les expériences présentées dans la suite de ce travail reposeront sur la combinaison suivante : une stratégie de division centrée sur les arcs associée à une procédure de refusion locale deux à deux. Cette configuration offre le meilleur compromis entre réduction du temps de calcul, préservation de la qualité des solutions et amélioration du gain global.

De plus, l'analyse des performances en fonction du niveau de division permet de fixer une taille cible pour les sous-graphes élémentaires. Les résultats expérimentaux montrent que l'heuristique reste efficace sur des graphes contenant de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers d'arcs. Dans la suite du manuscrit, la phase de division sera donc poursuivie jusqu'à obtenir des graphes feuilles contenant approximativement 8×10^4 arcs. Dans l'expérience présentée ici, ce choix correspond au niveau de division 4.

À ce niveau, la perte observée sur le facteur d'amplification reste modérée, de l'ordre de 8%, ce qui est même négligeable d'un point de vue économique, tandis que les bénéfices en temps de calcul et en gain de compensation sont très importants : le calcul devient plus de 200 fois plus rapide et le gain augmente d'environ 31% par rapport à l'exécution directe sur le graphe complet. Ce niveau de division constitue ainsi un compromis satisfaisant pour la suite de nos expérimentations.

Chapitre 7 :
Limitation des financements : effets sur la compensation

Sommaire

7.1	**Formalisation d'une contrainte de financement**	**79**
7.2	**Adaptation de la stratégie de division et de fusion sous contrainte de financement**	**80**
7.3	**Résultats expérimentaux sous contrainte de financement**	**82**
7.4	**Conclusion**	**84**

Les chapitres précédents ont permis d'établir une première méthode complète de résolution du problème de compensation intégrale sur réseau de dettes. Nous avons introduit une heuristique pour sélectionner un sous-ensemble pertinent de factures dans un graphe statique, puis montré comment adapter cette approche à des graphes de grande taille grâce à une stratégie de division, de refusion et de réextension.

Dans ce cadre, le financement externe requis par une solution de compensation était principalement étudié comme une quantité de sortie : il permettait d'évaluer l'efficacité d'une solution donnée au moyen du facteur d'amplification et du gain. Toutefois, dans de nombreuses situations réelles, ce financement disponible ne peut pas être considéré comme infini. Il est au contraire soumis à des contraintes de capacité, de risque ou de politique économique.

L'hypothèse d'un financement externe illimité constitue donc une simplification utile pour construire et analyser les heuristiques, mais elle ne permet pas de rendre compte de l'ensemble des contraintes possibles auxquelles un mécanisme de compensation peut être confronté dans la pratique. Dès lors qu'une borne est imposée sur le financement mobilisable, la nature du problème se modifie : il ne s'agit plus uniquement de rechercher une solution efficace, mais de déterminer quelles structures de compensation restent réalisables sous contrainte de liquidité.

Ce chapitre étudie précisément cette question. Nous analysons les effets de la limitation du financement disponible sur les solutions de compensation obtenues par l'algorithme. Nous montrons que l'introduction d'une contrainte de financement transforme le comportement du mécanisme de compensation et conduit à de nouveaux arbitrages entre gain global et amplification.

7.1 Formalisation d'une contrainte de financement

On rappelle que $F(C)$ est le montant de financement mobilisé par le mécanisme de compensation pour un graphe de facturation $G = (V, E)$ et une configuration de compensation C (voir Définition 3.9). Celui-ci correspond au niveau maximal de liquidité que le financeur doit

mobiliser lors du processus de compensation. Cette quantité dépend directement de la structure des factures sélectionnées.

Dans les chapitres précédents, ce financement était considéré comme une variable d'évaluation : les solutions produites par l'algorithme étaient analysées a posteriori au moyen du facteur d'amplification et du gain de compensation, qui mesurent l'efficacité avec laquelle la liquidité mobilisée permet de réduire les dettes du réseau.

Le problème de compensation intégrale peut alors être reformulé comme un problème de sélection sous contrainte de ressource. Étant donné un graphe de facturation $G = (V, E)$ et une capacité maximale de financement Λ, l'objectif est de construire une configuration de compensation $C \subseteq E$ qui respecte la contrainte de financement tout en maximisant l'efficacité de la réduction de dette dans le réseau. Plus formellement, on cherche une solution admissible qui maximise nos métriques d'efficacité vérifiant

$$F(C) \leq \Lambda.$$

L'introduction de cette contrainte modifie la nature du problème algorithmique. Alors que les chapitres précédents cherchaient principalement à identifier les configurations de compensation locales offrant les meilleurs facteurs d'amplification, l'algorithme doit désormais arbitrer entre plusieurs objectifs potentiellement concurrents : maximiser la réduction de dette, préserver une bonne amplification et respecter la limite de financement disponible. Si l'intégration d'un nouvel arc ou d'une nouvelle structure conduit à dépasser cette borne, cette configuration locale est simplement rejetée par l'algorithme. Cette règle peut être appliquée directement dans l'heuristique décrite au Chapitre 5 en évaluant le financement associé à la solution partielle après chaque expansion.

7.2 Adaptation de la stratégie de division et de fusion sous contrainte de financement

Comme indiqué précédemment, l'intégration de la contrainte de financement dans l'heuristique locale est immédiate : un arbre ou un circuit de compensation n'est accepté que si la solution partielle obtenue vérifie toujours la contrainte globale de financement.

La difficulté principale apparaît lorsque l'on applique la stratégie de passage à l'échelle introduite au Chapitre 6. Dans ce cadre, le graphe initial est décomposé en plusieurs sous-graphes qui sont réduits indépendamment avant d'être fusionnés progressivement. Si chaque sous-graphe est traité séparément avec la capacité maximale de financement Λ, la combinaison naïve de plusieurs solutions locales pourrait conduire à une solution globale nécessitant un financement supérieur au budget disponible. Il est donc nécessaire d'adapter la procédure de fusion.

7.2.1 Réduction indépendante des sous-graphes

La procédure de division décrite au Chapitre 6 reste inchangée. Pour un niveau de division n, le graphe initial est décomposé en une famille d'ensembles d'arcs

$$(E_k)_{k \in \{1,\dots,2^n\}}.$$

Chaque sous-ensemble d'arcs E_k est ensuite réduit indépendamment à l'aide de l'heuristique présentée précédemment, sous la même contrainte de financement Λ que celle appliquée au graphe global.

Autrement dit, la capacité de financement n'est pas répartie entre les différentes partitions : chaque sous-graphe est traité comme une instance indépendante disposant du budget maximal disponible. Cette stratégie permet d'obtenir pour chaque sous-graphe une solution locale de bonne qualité. Pour chaque configuration C_k réduite de E_k, le financement requis $F(C_k)$ (Définition 3.9) vérifie par construction

$$F(C_k) \leq \Lambda.$$

Cette phase garantit que chaque partition est réduite indépendamment sous la même contrainte de financement. Toutefois, lors de la recombinaison de plusieurs sous-graphes, la somme des financements requis par les solutions locales peut dépasser la capacité globale disponible. Une procédure spécifique de fusion doit donc être introduite afin de garantir le respect de la contrainte de financement globale.

7.2.2 Fusion sous contrainte de financement

Les sous-graphes réduits sont fusionnés progressivement le long de l'arbre de partition introduit au Chapitre 6 (voir Figure 6.3). À chaque nœud de cet arbre, deux sous-graphes réduits sont combinés afin de reconstruire progressivement une solution sur des graphes de taille croissante. La stratégie de division utilisée dans ce travail présente une particularité importante : les partitions obtenues tendent à regrouper les factures selon leur montant. Les sous-graphes situés *à droite* de l'arbre contiennent donc les factures aux *montants les plus élevés*, tandis que ceux situés *à gauche* regroupent les factures *de plus faible montant*. Cette asymétrie nous servira lors de la phase de fusion.

Considérons deux configurations réduites C_A et C_B correspondant respectivement aux enfants à gauche et à droite d'un nœud de l'arbre de partition. La procédure de fusion est la suivante :

1. Si $F(C_A) + F(C_B) \leq \Lambda$, les deux solutions sont fusionnées intégralement.
2. Si $F(C_A) + F(C_B) > \Lambda$, la solution du sous-graphe gauche est partiellement tronquée afin de respecter la contrainte globale de financement.

Cette troncature est réalisée en revenant sur les dernières extensions ajoutées lors de la construction de la solution locale du sous-graphe gauche. Les configurations locales retirées sont celles présentant les plus faibles facteurs d'amplification. Cette stratégie gloutonne permet de conserver en priorité les configurations de compensation les plus volumineuses mais aussi les plus efficaces tout en garantissant que la solution fusionnée respecte la contrainte de financement. Une fois cette sélection effectuée, la phase d'extension est alors appliquée sur la solution fusionnée afin d'exploiter le financement éventuellement encore disponible et d'identifier de nouvelles structures de compensation reliant les deux sous-graphes.

Le fait de privilégier les structures impliquant les factures de plus grande valeur repose sur l'idée que ces factures possèdent généralement un ***potentiel de diffusion plus important*** dans le réseau. Lorsque ces factures sont compensées, les excédents de liquidité générés sur certains nœuds peuvent contribuer à financer d'autres compensations impliquant des factures de montants plus faibles. Ce processus est appliqué récursivement le long de l'arbre de partition jusqu'à reconstruire une solution globale finale C vérifiant $F(C) \leq \Lambda$.

7.3 Résultats expérimentaux sous contrainte de financement

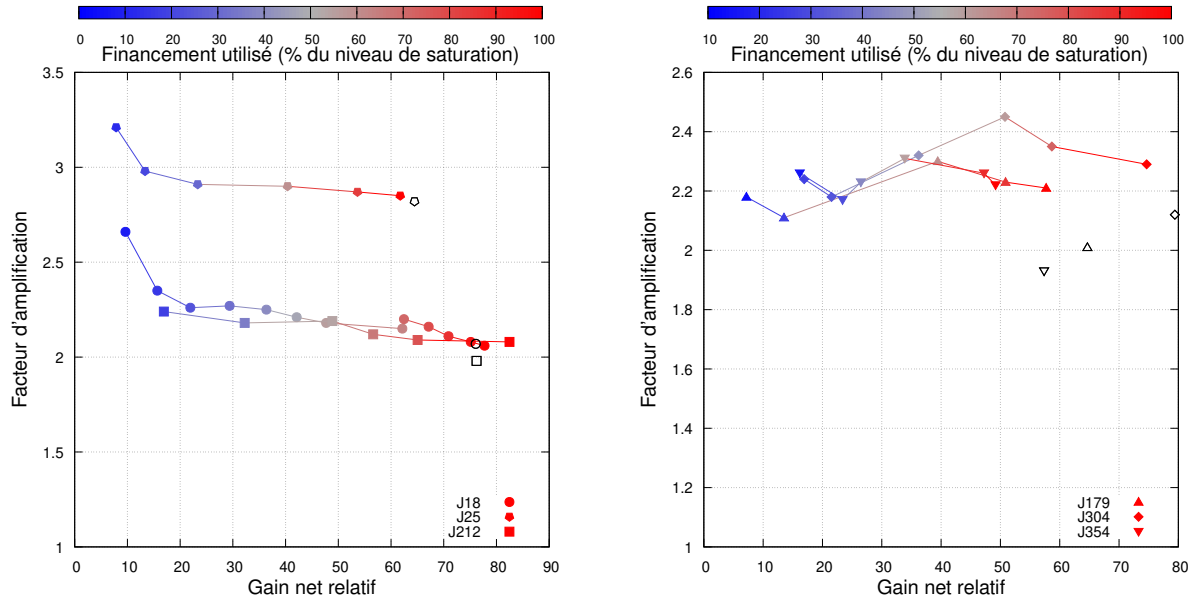
Évaluons maintenant l'effet de la contrainte de financement sur les performances du mécanisme de compensation. L'objectif est d'analyser comment les solutions de compensation produites par l'algorithme se modifient lorsque la capacité de financement disponible Λ est restreinte.

Pour cela, nous faisons varier la capacité maximale de financement Λ et observons l'évolution des métriques principales du mécanisme de compensation : le facteur d'amplification α et le gain de compensation Γ.

On appelle ***saturation*** le niveau de financement requis lorsque l'algorithme est exécuté sans limitation de financement tout en respectant la contrainte minimale d'amplification. Cette valeur, notée $F^\star$, sert de référence pour exprimer les différents budgets de financement considérés dans les expériences.

Nous retenons ici six jours représentatifs de tailles distinctes : trois graphes intermédiaires compris entre 700 000 et 1.2 million de factures (jours 18, 25 et 212), et trois grands graphes compris entre 2.2 et 3 millions de factures (jours 179, 304 et 354). Dans tous les cas, nous utilisons la stratégie de division centrée sur les arcs avec des graphes feuilles de l'ordre de 8×10^4 arcs, conformément aux conclusions du Chapitre 6.

La Figure 7.1 montre que, pour les deux groupes, l'augmentation du financement disponible entraîne systématiquement une augmentation du gain de compensation Γ (changement des bleus vers les rouges). De façon triviale, plus la capacité de financement augmente, plus l'algorithme peut intégrer de structures de compensation et couvrir une part importante de la dette nette mobilisable dans le réseau. L'évolution du facteur d'amplification correspond à ce que l'on aurait pu attendre, cette mesure étant meilleure lorsque l'on se concentre sur une part faible du réseau. Nous reviendrons en détail sur cette interprétation dans les parties suivantes.



(a) Graphes de taille intermédiaire.

(b) Graphes de grande taille.

FIGURE 7.1 – Facteur d'amplification en fonction du gain de compensation. La couleur représente le financement utilisé (en pourcentage de saturation). Les points noirs correspondent aux solutions de référence sans limitation explicite de financement.

7.3.1 Graphes de taille intermédiaire

Pour les graphes intermédiaires (jours 18, 25 et 212), l'évolution du facteur d'amplification α présente une forme concave et quasi monotone décroissante vers des valeurs proches de 2 lorsque le pourcentage de saturation augmente.

Lorsque seule une faible fraction du financement de saturation est mobilisée, le facteur d'amplification prend des valeurs relativement élevées. Cela est cohérent car l'algorithme sélectionne d'abord des structures plus efficaces du point de vue de l'utilisation de la liquidité : peu de financement est engagé, mais ce financement est utilisé sur des configurations très favorables. En revanche, le gain de compensation Γ associé reste faible, généralement de l'ordre de 10% à 20%, ce qui montre que ces structures très efficaces ne représentent qu'une part limitée du potentiel global de compensation.

À mesure que le financement disponible augmente, l'algorithme intègre progressivement des structures supplémentaires, moins rentables localement mais couvrant une fraction plus importante de la dette mobilisable. Cela se traduit par une diminution graduelle de α, accompagnée d'une forte augmentation de Γ.

On observe en particulier, sur la Figure 7.1a, un effet de seuil situé approximativement entre 30% et 40% de la saturation. En dessous de ce seuil, le financement supplémentaire sert principalement à élargir fortement la couverture du réseau, au prix d'une baisse relativement rapide du facteur d'amplification. Au-delà, l'augmentation du gain se poursuit, mais de manière plus progressive. Cette rupture correspond à l'épuisement des structures les plus efficaces du point de vue du rapport entre dette compensée et financement requis.

Ce comportement est cohérent avec les résultats déjà observés dès les premières études sur la compensation intégrale [17]. L'apparition d'un ***effet de coude*** marque le passage entre une phase d'exploitation de structures très efficientes et une phase de couverture plus extensive du réseau.

7.3.2 Grands graphes

Pour les grands graphes (jours 179, 304 et 354), l'évolution du facteur d'amplification est plus complexe et n'est plus monotone. La Figure 7.1b met en évidence un comportement de rebond : lorsque le financement passe d'environ 20% à 40% de la saturation, le facteur d'amplification augmente temporairement avant de diminuer à nouveau au-delà de 50%.

Ce phénomène s'explique vraisemblablement par l'interaction entre la contrainte de financement et la procédure de division-fusion orientée vers les factures de plus grande valeur. Lorsque la saturation est faible, une part importante du financement disponible est concentrée sur un petit nombre de structures construites autour de factures élevées, issues des feuilles à droite dans l'arbre de décomposition, qui ne présentent pas nécessairement les meilleurs potentiels de diffusion. À ce stade, l'algorithme privilégie avant tout la valeur absolue des montants engagés.

Lorsque le financement augmente, certaines configurations de forte valeur peuvent être ajoutées en amont de configurations plus petites, ce qui libère de la capacité de financement pour d'autres configurations présentant un bon potentiel de diffusion au cours des phases de fusion. Cela permet alors d'intégrer plus de feuilles (gauches) à l'intérieur de nos configurations grâce à cette capacité de financement supplémentaire. Cette redistribution semble être l'élément principal expliquant la remontée de α observée à financement intermédiaire. Une fois cette phase passée, l'augmentation supplémentaire du financement conduit de nouveau à intégrer des configurations plus nombreuses mais moins efficaces, ce qui fait redescendre progressivement le facteur d'amplification.

Autrement dit, dans les graphes les plus volumineux, la limitation du financement ne produit pas seulement une réduction uniforme de la couverture, mais modifie également la hiérarchie des structures sélectionnées par l'algorithme. L'effet de la contrainte dépend alors de la manière dont les grosses factures, les potentiels de diffusion et les phases de fusion interagissent.

7.3.3 Discussion

Dans l'ensemble, ces résultats montrent que l'introduction d'une contrainte de financement transforme le comportement de notre algorithme de compensation. Lorsque le financement disponible est très limité, l'algorithme sélectionne uniquement des structures à très forte efficacité locale, ce qui conduit à des facteurs d'amplification élevés mais à un gain global relativement faible. À mesure que le financement augmente, l'algorithme peut couvrir une part croissante du réseau, ce qui accroît le gain mais conduit progressivement à intégrer des structures moins efficaces du point de vue de l'amplification.

Il faut également souligner qu'atteindre la saturation ne signifie pas atteindre un gain total de 100%. Comme l'heuristique n'intègre que des configurations respectant localement la contrainte d'amplification minimale, une partie du potentiel théorique de compensation reste exclue. Néanmoins, même sous cette contrainte, l'algorithme atteint au moins 50% du gain compensable, ce qui est cohérent avec les performances observées précédemment pour l'approche de compensation sans limitation explicite du financement, lorsque l'amplification minimale est fixée à 2. Ces résultats confirment ainsi que la contrainte de financement introduit un arbitrage central entre efficacité locale et couverture globale. Cet arbitrage dépend non seulement du niveau de financement disponible, mais aussi de la structure du graphe et de la manière dont les grandes factures diffusent leur effet dans le processus de fusion.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les effets d'une contrainte explicite de financement sur le fonctionnement du mécanisme de compensation intégrale. Alors que les Chapitres 5 et 6 considéraient un financement externe illimité, l'introduction d'une borne sur la liquidité modifie la nature du problème. Dans cette logique, la sélection des structures de compensation doit désormais tenir compte non seulement de leur efficacité locale, mais également de la contrainte globale de financement. Nous avons montré que cette contrainte peut être intégrée dans l'heuristique présentée au Chapitre 5. Toutefois, son introduction pose des difficultés supplémentaires dans le cadre de la stratégie de passage à l'échelle introduite au Chapitre 6. En particulier, la combinaison de solutions locales obtenues sur des sous-graphes peut conduire à dépasser la capacité de financement disponible. Nous avons donc proposé une adaptation de la procédure de fusion qui garantit que la solution globale reconstruite respecte toujours la contrainte de financement.

Les résultats expérimentaux montrent que la limitation du financement introduit un compromis structurel entre efficacité locale et couverture globale du réseau. Lorsque le financement disponible est faible, l'algorithme sélectionne principalement des structures de compensation plus efficaces du point de vue de l'utilisation de la liquidité, ce qui conduit à des facteurs d'amplification élevés mais à une couverture limitée du réseau. À mesure que la capacité de financement augmente, l'algorithme peut intégrer un plus grand nombre de structures de compensation, ce qui accroît le gain global au prix d'une diminution progressive du facteur d'amplification.

Les expériences mettent également en évidence des comportements plus complexes sur les graphes de grande taille, où l'interaction entre la contrainte de financement et la stratégie de

division-fusion peut modifier la hiérarchie des structures sélectionnées. En particulier, la concentration initiale du financement sur les factures de grande valeur peut conduire à des effets de réallocation de la liquidité au cours des phases de fusion.

Plus généralement, ces résultats montrent que la performance d'un mécanisme de compensation ne dépend pas uniquement de la structure du réseau de dettes, mais également du niveau de financement disponible pour activer les structures de compensation. La contrainte de financement apparaît ainsi comme un autre paramètre du mécanisme, qui détermine l'équilibre entre efficacité de la liquidité et couverture du réseau. Il est cependant lié aux autres paramètres de façon non triviale.

Les trois chapitres précédents ont ainsi permis de construire un ***processus algorithmique complet*** pour la compensation intégrale sur des *graphes statiques de grande taille*. Nous avons d'abord introduit une heuristique de sélection d'obligations permettant d'identifier des structures de compensation efficaces dans un réseau de facturation. Nous avons ensuite montré comment adapter cette approche à des graphes comportant plusieurs millions d'arcs grâce à une stratégie de division et de recombinaison hiérarchique. Enfin, nous avons étudié l'effet d'une contrainte explicite de financement sur les solutions obtenues par l'algorithme.

Cet ensemble de résultats constitue une première base algorithmique pour l'étude de la compensation multilatérale sur des réseaux de dettes réels. Dans les chapitres suivants, nous élargissons ce cadre en introduisant la dynamique temporelle ainsi que des questions sur la mesure des intérêts économiques et la mise en place dans un système réel.

Quatrième partie

Intégration du cadre temporel et considérations économiques de la compensation intégrale

Chapitre 8 :
Mécanisme de compensation temporelle

Sommaire

8.1 Graphes opérationnels : rappel 90

8.2 Déroulement d'une session de compensation 90

8.3 Application du mécanisme temporel et résultats expérimentaux 93

Les chapitres précédents ont permis de développer un cadre algorithmique pour la compensation intégrale sur des graphes de facturation statiques. Nous avons introduit une heuristique de sélection d'obligations, montré comment l'adapter à des graphes de très grande taille grâce à une stratégie de division et de fusion, puis étudié l'effet de contraintes de financement sur les solutions obtenues.

Toutefois, les réseaux de facturation sont naturellement temporels, comme nous l'avons évoqué dans les Chapitres 1 et 2. Les obligations entre entreprises apparaissent et disparaissent au fil du temps, au rythme de l'émission et du règlement des factures. La structure du graphe de dettes évolue donc continuellement, ce qui modifie les possibilités de compensation.

Le cadre formel permettant de représenter cette dynamique a été introduit au Chapitre 3. Dans ce modèle, les factures sont représentées comme des arcs temporels $(s(e), d(e), w(e), \tau(e))$ et l'émission des factures génère une suite de graphes $(G^k)_{k\in\mathbb{N}}$ décrivant l'évolution des émissions du réseau au cours des périodes successives.

Comme discuté dans la Section 3.3, ces graphes d'émission ne correspondent cependant pas directement aux structures sur lesquelles les algorithmes de compensation doivent être appliqués. Une facture peut en effet rester active pendant plusieurs périodes après son émission, jusqu'à son règlement ou son expiration. À chaque période, la compensation porte donc sur l'ensemble des factures encore actives, et non sur les seules factures émises durant cette période.

Dans ce chapitre, nous étendons le cadre précédent en introduisant la dimension temporelle du mécanisme de compensation. L'objectif est de comprendre comment la dynamique des flux de facturation influence les configurations de compensation et d'analyser dans quelle mesure les méthodes développées dans le cadre statique peuvent être appliquées de manière répétée au cours du temps.

Après un bref rappel des graphes opérationnels définis au Chapitre 3, nous décrivons le fonctionnement du mécanisme temporel résultant de l'application itérative de l'algorithme de réduction de dettes.

8.1 Graphes opérationnels : rappel

Le mécanisme temporel ne s'applique pas directement aux graphes d'émission G^k, mais aux ***graphes opérationnels*** formalisés au Chapitre 3 (Section 3.3). On en rappelle ici les éléments essentiels, utilisés tout au long du chapitre.

À la période k, on distingue deux ensembles d'obligations actives :

— A_k, les factures actives, c'est-à-dire émises et non encore compensées ni expirées ;

— L_k, les financements actifs, c'est-à-dire les arcs synthétiques représentant les dettes encore en cours des entreprises envers le financeur v^*.

Le graphe opérationnel de la session k agrège ces deux ensembles (Définition 3.13) :

$$\widehat{G}^k = (V, \widehat{E}^k), \qquad \widehat{E}^k = A_k \cup L_{k-1}.$$

La persistance des obligations est bornée par deux paramètres de durée de vie, D_{i} pour les factures et D_{f} pour les financements, également introduits au Chapitre 3. La construction ***itérative*** des ensembles A_k et L_k au fil des sessions dépend en revanche des configurations compensées produites par l'algorithme ; elle est détaillée dans la suite de ce chapitre.

8.2 Déroulement d'une session de compensation

Une fois le graphe opérationnel $\widehat{G}^k$ construit, une session de compensation consiste à appliquer l'algorithme de réduction développé dans les chapitres précédents afin de sélectionner une configuration de compensation. On note C^k la configuration compensée de $\widehat{G}^k$ par l'algorithme lors de la session k. L'ensemble C^k correspond aux factures et financements qui sont compensés intégralement lors de cette session.

8.2.1 Positions nettes des entreprises après réduction

D'après la Définition 3.5, la position nette d'une entreprise v dans un graphe G est donnée par

$$B_G(v) = in_G(v) - out_G(v),$$

avec $in_G(v)$ la somme des factures entrantes du nœud v et $out_G(v)$ la somme des factures sortantes.

Dans le cadre d'une session de compensation, nous considérons les positions nettes calculées sur le sous-graphe induit par la configuration C^k. Pour chaque entreprise $v \in V$, la position nette après réduction est donc $B_{C^k}(v)$. Une position nette positive signifie que l'entreprise est excédentaire dans la session, tandis qu'une position nette négative signifie qu'elle doit mobiliser des liquidités pour régler les factures sélectionnées et nécessite donc un financement externe.

8.2.2 Création des financements

Lorsque la position nette d'une entreprise est négative après la session, la liquidité nécessaire est fournie par le financeur du réseau comme introduit dans le Chapitre 3. Ce financement est représenté dans le système par un arc synthétique reliant l'entreprise au financeur. Les financements générés lors de l'étape k sont regroupés dans l'ensemble de financements F^k. Il sera fusionné avec l'ensemble des financements actifs lors de la session suivante.

8.2.3 Remboursement interne des financements

Les positions nettes positives obtenues lors d'une session peuvent être utilisées pour rembourser tout ou partie des financements contractés lors de sessions précédentes.

Si une entreprise v possède un financement actif envers le financeur et présente une position nette positive $B_{C^k}(v) > 0$, cette liquidité est utilisée pour rembourser ce financement [34]. Deux cas peuvent alors se produire :

— si le montant du financement restant est inférieur ou égal à $B_{C^k}(v)$, le financement est remboursé intégralement ;

— si le montant du financement restant est supérieur à $B_{C^k}(v)$, le financement est remboursé partiellement et son montant restant est mis à jour.

Ce mécanisme de remboursement interne permet au système de recycler progressivement les liquidités injectées par le financeur. On notera U_k le montant total remboursé au financeur lors de la session k.

8.2.4 Mise à jour itérative des ensembles actifs

La construction du graphe opérationnel à la période k repose sur une mise à jour itérative des ensembles de factures et financements actifs à l'étape k. L'ensemble des factures actives A_k à la période k est obtenu en ajoutant E^k, l'ensemble des nouvelles factures du graphe d'émission $G^k = (V, E^k)$, puis en retirant :

— les factures compensées lors de la session $k-1$;

— les factures expirées.

En notant C^k la configuration compensée lors de la session k, on peut écrire

$$A_k = (E^k \cup A_{k-1}) \setminus (C^{k-1} \cup E^{k-D_i}),$$

lorsque les indices sont définis (sinon, les ensembles non définis sont égaux à l'ensemble vide).

De manière analogue, les financements actifs L_k à l'issue de la période k sont mis à jour comme suit :

— sont ajoutés : les nouveaux financements F^k créés à l'issue de la session k, ainsi que les financements déjà présents, mis à jour après remboursement partiel ;

— sont retirés : les financements intégralement remboursés et ceux qui expirent.

La mise à jour de L_k dépend notamment du mécanisme de remboursement partiel, dont la complexité rend difficile une formulation purement ensembliste. La description précédente de L_k identifie cependant les composantes principales de cette mise à jour.

8.2.5 Interprétation opérationnelle

Cette construction permet de distinguer clairement trois niveaux dans le fonctionnement du mécanisme temporel :

— les ***graphes d'émission*** G^k, qui décrivent l'apparition de factures à la période k ;

— les ***ensembles actifs*** A_k et L_k, qui représentent l'état des factures et financements du système à un instant donné ;

— le ***graphe opérationnel*** $\widehat{G}^k$, qui constitue l'entrée effective de l'algorithme de compensation lors de la session k.

34. Il est important de noter que cela n'intervient que lorsqu'une entreprise présente une position nette positive dans le système de compensation et non pas dans le système classique auquel nous n'avons pas accès.

Le passage du modèle génératif du Chapitre 3 au graphe opérationnel fournit ainsi le lien entre la modélisation du réseau de dettes et le fonctionnement itératif du mécanisme temporel. Une session de compensation consiste à appliquer l'algorithme de réduction sur $\widehat{G}^k$, puis à utiliser le résultat obtenu pour construire la session suivante.

8.2.6 Résumé du processus temporel

Le fonctionnement du mécanisme temporel peut être résumé par le schéma de la Figure 8.1. Celui-ci illustre la manière dont les factures nouvellement émises, les factures restantes et les financements actifs issus des sessions précédentes sont combinés pour construire le graphe opérationnel de la session courante.

La session de compensation consiste alors à appliquer l'algorithme de réduction sur le graphe opérationnel $\widehat{G}^k$. La configuration compensée C^k obtenue détermine les factures réglées au cours de la session. Les factures non sélectionnées restent actives pour la période suivante, sous réserve qu'elles n'aient pas atteint leur durée de vie maximale D_{i}, tandis que les positions nettes négatives génèrent de nouveaux financements et les financements existants sont mis à jour. Ces opérations permettent de construire les ensembles actifs A_{k+1} et L_k, qui serviront à la session suivante.

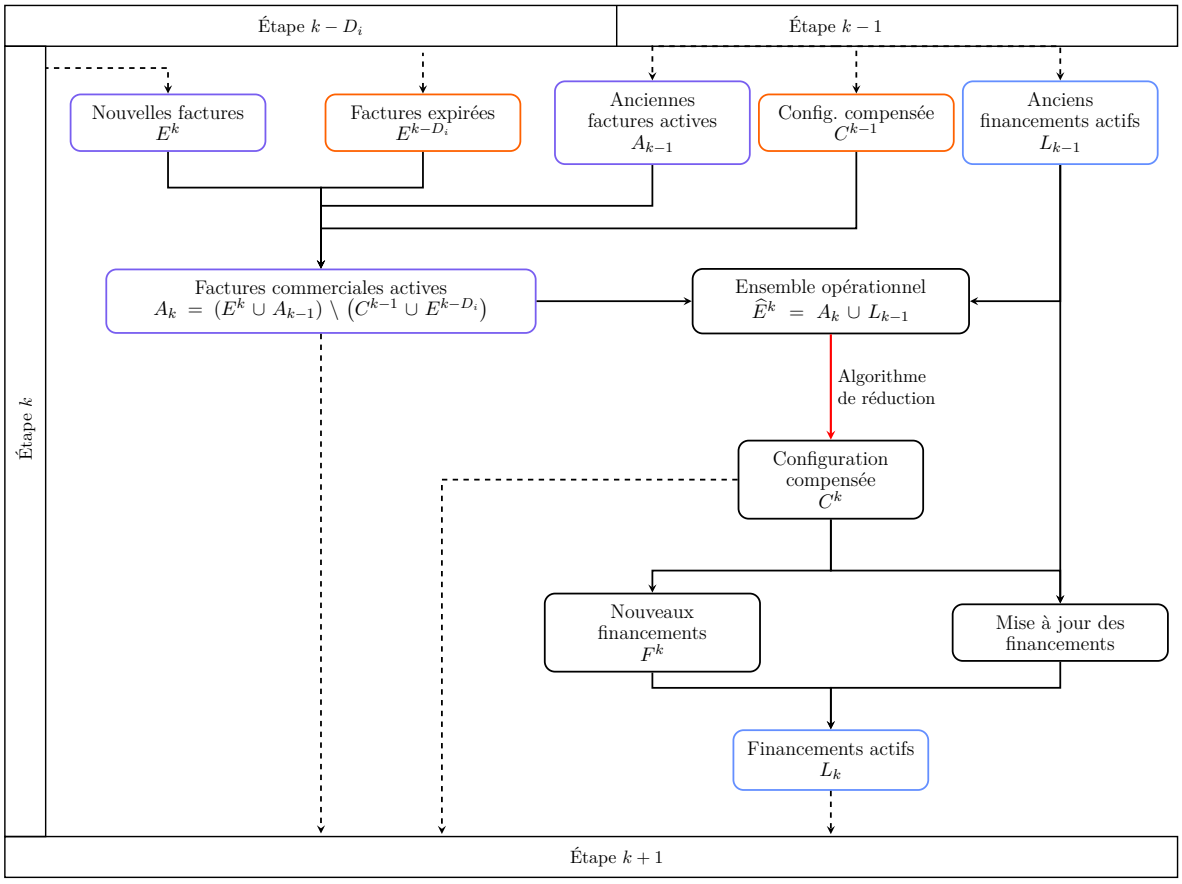


FIGURE 8.1 – Schéma du mécanisme de compensation temporelle.

8.2.7 Mesures temporelles du mécanisme

Pour caractériser le comportement du mécanisme de compensation dans le cadre temporel, nous introduisons plusieurs indicateurs définis sur la suite des sessions successives.

La Définition 3.10 donne la formule du facteur d'amplification associé à la session k et à la configuration compensée C^k

$$\alpha_k = \alpha(C^k) = \frac{D_{C^k}}{D_{F^k}} = \frac{D_{C^k}}{F(C^k)},$$

où D_{C^k} représente le volume de dette commerciale compensée et $D_{F^k} = F(C^k)$ [35] le financement externe nécessaire à la réalisation de la configuration.

Dans le cadre temporel, il est également naturel de considérer une version cumulée de cette mesure.

Définition 8.1 (Facteur d'amplification global théorique)**.** *Le facteur d'amplification global théorique, aussi appelé efficacité théorique globale, observé jusqu'à la session k est donné par*

$$\alpha_k^{\text{th}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} D_{C^i}}{\sum_{i=1}^{k} F(C^i)}.$$

Comme nous avons introduit un mécanisme de remboursement des financements, il nous faudra aussi mesurer notre efficacité en prenant cela en compte.

Définition 8.2 (Financement effectif)**.** *On rappelle U_k le montant total des remboursements effectués vers le financeur lors de la session k, introduit en Sous-section 8.2.3. On définit alors le* ***financement effectif*** *de la session comme*

$$F_k^{\text{eff}} = \sum_{i=1}^{k} (F(C^i) - U_i).$$

Ce financement effectif nous permet alors d'introduire une évaluation tenant compte du recyclage progressif des liquidités injectées dans le système.

Définition 8.3 (Amplification effective)**.** *L'amplification effective représente l'efficacité globale réelle en prenant en compte les remboursements vers le financeur. Elle est définie comme*

$$\alpha_k^{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} D_{C^i}}{F_k^{\text{eff}}}.$$

8.3 Application du mécanisme temporel et résultats expérimentaux

Nous appliquons maintenant le mécanisme de compensation temporelle décrit précédemment à des données réelles de facturation inter-entreprises.

Les expériences présentées dans cette section reposent sur le jeu de données décrit au Chapitre 4. Celui-ci contient environ 22 millions de factures émises en Italie au cours de l'année 2019, impliquant près de deux millions d'entreprises pour un volume total d'environ 90 milliards d'euros. Dans l'ensemble des expériences présentées ci-dessous, nous considérons une décomposition temporelle journalière : chaque période k correspond donc à une journée de facturation.

35. Il est intéressant de noter cette égalité car le total des financements crées est, par construction, égal au montant nécessaire pour financer C^k.

8.3.1 Paramétrisation du mécanisme

Dans nos expériences, les paramètres de durée de vie sont fixés à

$$D_{\mathrm{i}} = 28 \text{ jours}, \qquad D_{\mathrm{f}} = 84 \text{ jours}.$$

Le choix de D_{i} correspond à environ la moitié du délai de paiement théorique usuel dans les transactions inter-entreprises en Europe, généralement fixé à 60 jours. Ce choix permet de maintenir un compromis entre la probabilité d'intégrer une facture dans une session de compensation et la nécessité de ne pas retarder son règlement si celle-ci n'était pas compensable efficacement. La durée D_{f} correspond quant à elle à un horizon typique pour des financements de court terme accordés aux entreprises (3 mois).

Enfin, l'algorithme de réduction utilisé dans chaque session est celui décrit dans les chapitres précédents. Comme dans les expériences sur graphes statiques, nous imposons un facteur d'amplification minimal proche de 1.95, ce qui garantit qu'un euro de financement permet de compenser environ deux euros de dette. Cela sera complété par l'approche diviser pour régner avec des divisions en sous-graphes de 80 000 arcs avec la méthode basée sur les poids et une refusion deux à deux.

8.3.2 Évolution temporelle de la compensation

Afin d'analyser le comportement du mécanisme temporel, nous observons l'évolution du facteur d'amplification mesuré au cours de l'année, ainsi que l'évolution de la couverture, tels que définis dans le Chapitre 3.

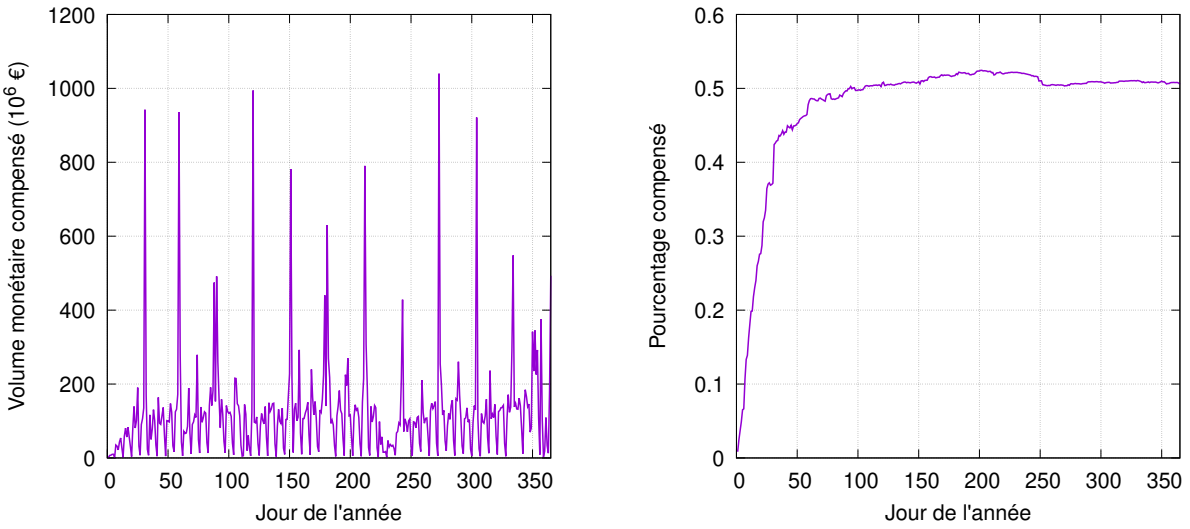
Comme décrit dans les sections précédentes, chaque session k produit une configuration compensée C^k sur le graphe opérationnel $\widehat{G}^k$. Cette configuration détermine à la fois le volume de dette compensé au cours de la session et le financement externe nécessaire à la réalisation de cette compensation.

Évolution du volume de dette compensée : Afin d'analyser la couverture globale du mécanisme de compensation temporelle, nous observons l'évolution du volume de dette commerciale compensée au cours des sessions successives. Le volume de dette compensée lors d'une session correspond alors au volume total des factures appartenant à la configuration C^k associée.

Il est important de souligner que ces mesures ne concernent que la dette inter-entreprises présente dans le réseau de facturation. Les remboursements intégraux ou partiels des financements ne sont donc pas inclus dans les montants présentés ici. Les résultats décrivent uniquement la réduction de la dette commerciale *naturelle* du réseau afin de ne pas faire gonfler artificiellement les résultats.

La Figure 8.2a présente l'évolution du volume de dette compensée lors de chaque session journalière. On observe une forte variabilité d'une session à l'autre, reflétant assez bien la structure journalière hétérogène du réseau de facturation observée dans le Chapitre 4. Certaines sessions permettent d'identifier des configurations de compensation particulièrement efficaces et conduisent à des volumes compensés très élevés, tandis que d'autres sessions produisent des réductions plus modestes. Cependant, avec les paramètres fixés, l'algorithme semble toujours trouver des opportunités de compensation.

La Figure 8.2b montre l'évolution du volume cumulé de dette compensée au cours de l'année, *i.e.* l'inclusion (Définition 3.11), exprimée en proportion de la dette commerciale cumulée de la première session jusqu'à la session actuelle.



(a) Volume monétaire compensé à chaque session. (b) Proportion cumulée de la dette compensée.

FIGURE 8.2 – Évolution du volume de dette compensée lors des sessions journalières.

On observe une croissance rapide du taux d'inclusion cumulé au cours des premières sessions, correspondant à une phase transitoire durant laquelle le mécanisme ne dispose pas encore d'un stock suffisant de factures et de financements actifs pour faire apparaître l'ensemble des structures de compensation potentielles. Cette croissance ralentit progressivement et se stabilise autour d'une valeur proche de 50 % du volume total de dette observé dans le jeu de données.

Ce résultat indique qu'une fraction importante de la dette inter-entreprises peut être intégrée dans des structures de compensation efficaces, tandis qu'une partie restante correspond à des obligations trop isolées ou mal positionnées dans le réseau pour être incluses dans des configurations satisfaisant les contraintes de l'algorithme.

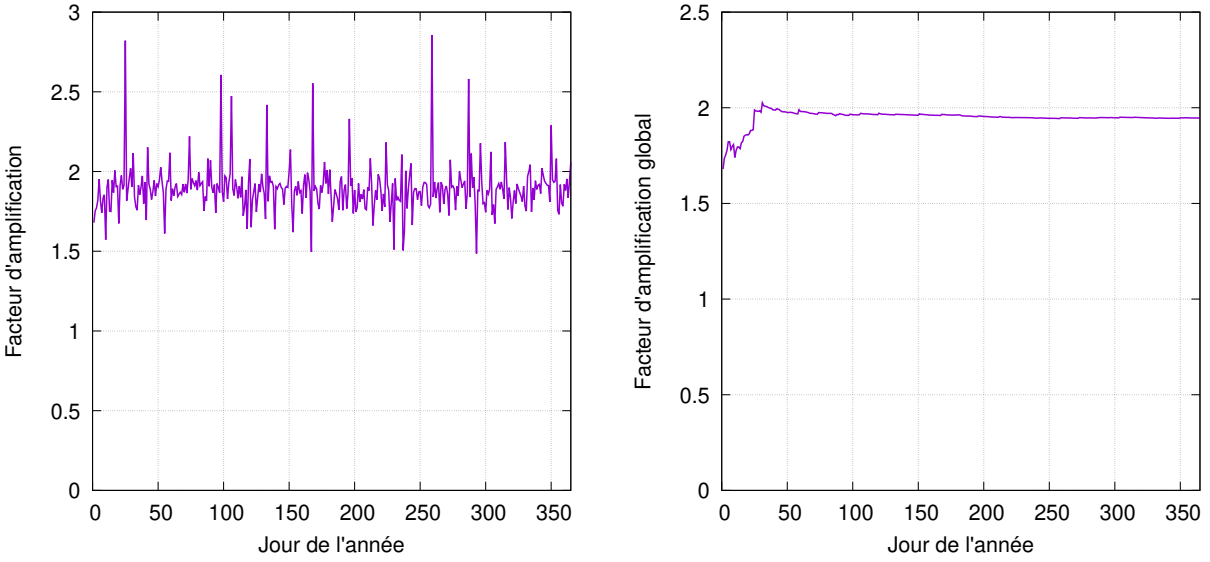
Évolution temporelle du facteur d'amplification : Pour caractériser l'efficacité du mécanisme de compensation au cours du temps, nous analysons maintenant l'évolution du facteur d'amplification obtenu lors des sessions successives. Rappelons que pour une configuration compensée C^k, le facteur d'amplification est défini comme le rapport entre le volume de dette compensée et le financement externe nécessaire pour réaliser cette compensation.

Dans les expériences présentées ici, l'algorithme sélectionne les configurations de manière à maintenir un facteur d'amplification supérieur à un seuil fixé à 1.95, conformément au paramétrage retenu dans les expériences précédentes.

La Figure 8.3a présente l'évolution du facteur d'amplification obtenu lors de chaque session journalière. On observe que l'amplification reste globalement proche de la valeur cible fixée par l'algorithme, avec des fluctuations liées à la structure du graphe à chaque période. La plupart des sessions produisent des configurations dont l'amplification est proche de 2, ce qui confirme que l'efficacité du mécanisme observée dans les expériences sur graphes statiques se maintient dans le cadre temporel.

On remarque toutefois que certaines sessions semblent produire un facteur d'amplification inférieur au seuil fixé de 1.95. Cette situation s'explique par la manière dont les indicateurs sont calculés dans les figures présentées ici. En effet, comme expliqué précédemment, les mesures représentées ne prennent en compte que les factures inter-entreprises. Les créances synthétiques correspondant aux financements accordés par le financeur ne sont pas incluses dans les volumes de dette compensée affichés. Or, lors de certaines sessions, des financements peuvent être

remboursés intégralement à l'intérieur même des structures de compensation identifiées par l'algorithme. Dans ce cas, l'arc représentant la dette envers le financeur participe effectivement à la structure (par exemple dans un arbre de compensation), mais il disparaît ensuite du calcul des indicateurs lorsque l'on ne considère que les dettes commerciales. Cette différence entre les structures réellement traitées par l'algorithme et les montants représentés dans les figures peut donc conduire à une sous-estimation apparente du facteur d'amplification pour certaines sessions.



(a) Facteur d'amplification de la session.

(b) Facteur d'amplification global du réseau.

FIGURE 8.3 – Évolution du facteur d'amplification au cours des sessions journalières.

La Figure 8.3b montre l'évolution du facteur d'amplification global du mécanisme au cours de l'année (Définition 8.1). On observe que cet indicateur se stabilise rapidement autour de notre valeur seuil, ce qui confirme que le mécanisme temporel conserve, sur le long terme, l'efficacité financière imposée par la contrainte d'amplification. Il est cependant intéressant de noter que si le régime stationnaire est atteint au bout de deux mois environ pour les volumes traités, dans le cadre du facteur d'amplification, celui-ci atteint son seuil au bout d'environ un mois.

8.3.3 Remboursements et amplification effective du mécanisme temporel

Le mécanisme temporel introduit un système de remboursement des financements accordés par le financeur. Les arcs synthétiques qui représentent des financements peuvent être réduits directement par l'algorithme. De plus, une position nette positive à l'issue d'une session est utilisée pour rembourser une partie des financements contractés lors des sessions précédentes par l'entreprise concernée.

Afin d'analyser la dynamique de ces remboursements, nous observons l'évolution cumulée des montants retournés au financeur par le mécanisme. La Figure 8.4a présente la part du financement total injecté ayant été remboursée, en distinguant les remboursements intégraux et les remboursements partiels [36]. On observe que les remboursements apparaissent rapidement dans le processus, puis croissent progressivement au fil des sessions.

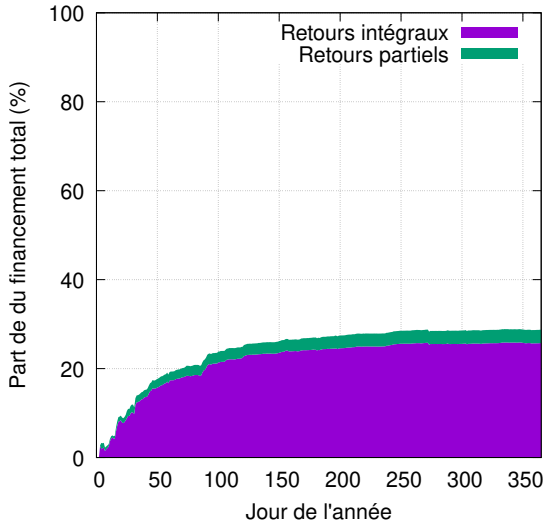
36. Ces remboursements sont uniquement effectués lorsqu'une entreprise présente une position nette positive *à l'intérieur du mécanisme de compensation*. Dans le fonctionnement réel, une entreprise pourrait rembourser le financeur par des flux extérieurs au système. L'analyse de ce cas plus général est discutée dans le Chapitre 9.

Une part significative, quasiment un tiers, du financement injecté est ainsi progressivement recyclée dans le système. Les remboursements intégraux représentent la part principale de ces flux, traduisant le fait que les financements sont souvent réductibles au gré des configurations de compensation successives. Le fait même que ces financements finissent par être remboursés est attendu : dans le circuit classique aussi, les entreprises s'acquittent à terme de leurs dettes. L'apport du mécanisme ne réside donc pas dans le remboursement en lui-même, mais dans sa rapidité : en recyclant les liquidités à l'intérieur du système, il permet d'aboutir au même résultat avec des délais de traitement, des retards de règlement et des besoins de liquidité moindres.

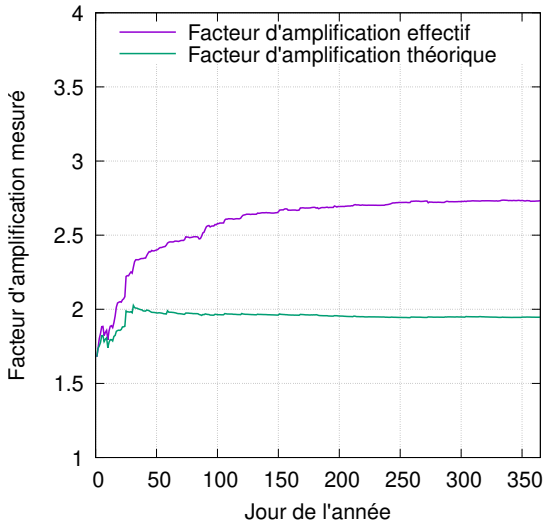
Cette dynamique de remboursement a un effet direct sur l'efficacité globale du mécanisme. En effet, comme introduit dans la Sous-section 8.2.7, le financement ***effectif*** (réellement mobilisé) dans le système correspond au financement total injecté auquel on soustrait les remboursements cumulés. La Figure 8.4b montre l'évolution du facteur d'amplification effectif, calculé à partir du financement effectif. On observe que l'efficacité réelle du mécanisme augmente progressivement au cours du temps, à mesure que les remboursements réduisent la quantité de capital immobilisée.

Alors que le facteur d'amplification théorique global reste proche du seuil imposé par l'algorithme, l'amplification effective dépasse progressivement cette valeur pour atteindre un niveau plus élevé. Ce phénomène traduit la capacité du mécanisme temporel à recycler une partie des liquidités injectées, ce qui améliore progressivement l'efficacité globale du système.

On observe aussi que la croissance de ces indicateurs ralentit après les premières sessions. Ce ralentissement doit toutefois être interprété avec prudence : la part remboursée étant rapportée au financement injecté de façon cumulée, chaque nouvelle injection gonfle le dénominateur sans contrepartie immédiate au numérateur. L'apparition d'un quasi-plateau reflète donc en partie cet effet de normalisation, et pas nécessairement un essoufflement du recyclage. Sur l'horizon d'un an considéré, nos données ne permettent pas de conclure quant à la valeur limite, même si la part remboursée semble se stabiliser autour de 30 %.



(a) Évolution des remboursements cumulés (intégraux et partiels) rapportés au financement total.



(b) Évolution du facteur d'amplification effectif comparé au facteur d'amplification théorique.

FIGURE 8.4 – Dynamique des remboursements et amplification effective du mécanisme temporel.

Ces observations suggèrent que, malgré la nécessité d'une injection initiale de liquidités pour amorcer le mécanisme, une part croissante de ce financement est progressivement recyclée par la dynamique de compensation du réseau de dettes. L'analyse détaillée des implications économiques de ce phénomène, notamment sous des hypothèses plus réalistes du point de vue du financeur et des entreprises participantes, sera discutée dans le chapitre suivant.

Chapitre 9 :
Questions et considérations économiques

Le chapitre précédent a permis de construire et d'analyser un mécanisme de compensation de dettes temporel. Nous avons étudié le problème dans un cadre statique et l'avons ensuite étendu à un mécanisme temporel. Les résultats expérimentaux présentés au chapitre précédent montrent que ce mécanisme permet de compenser une fraction importante de la dette rencontrée dans le réseau tout en respectant une contrainte d'efficacité financière mesurée par le facteur d'amplification. Ils mettent également en évidence un phénomène de recyclage efficace du financement injecté dans le système, rendu possible par la dynamique des remboursements internes.

Ces observations soulèvent naturellement plusieurs questions d'ordre économique. En particulier, il est nécessaire d'analyser les implications du mécanisme pour les différents acteurs impliqués dans le système. D'une part, le financeur de réseau doit mobiliser des liquidités afin d'amorcer et de soutenir le processus de compensation ; il est donc essentiel d'évaluer la dynamique du capital nécessaire et les risques associés. D'autre part, les entreprises participantes peuvent bénéficier d'une réduction effective de leurs besoins de liquidité, mais ces bénéfices peuvent être distribués de manière hétérogène selon la structure de leurs relations commerciales.

L'objectif de ce chapitre est d'examiner ces différentes dimensions économiques du mécanisme proposé. Nous analysons d'abord la dynamique du financement du point de vue du financeur de réseau, puis nous étudions la manière dont les effets de la compensation se répartissent entre les entreprises du réseau. Enfin, nous discutons plus largement les implications du mécanisme pour le fonctionnement des réseaux de dettes inter-entreprises.

9.1 Le rôle et l'exposition du financeur

Le mécanisme de compensation que nous avons proposé repose sur l'intervention d'un financeur de réseau, chargé de fournir les liquidités nécessaires pour régler les positions nettes négatives apparaissant lors des sessions de compensation.

Le rôle de cet acteur est central dans le fonctionnement du système. En effet, lorsque l'algorithme identifie une configuration de compensation C^k, certaines entreprises présentent une position nette négative. Le financeur fournit alors la liquidité permettant de régler les factures sélectionnées, ce qui permet d'assurer la réalisation effective de la compensation.

Dans les expériences réalisées, nous avons adopté volontairement une hypothèse conservatrice : nous supposons que les entreprises ne mobilisent pas de liquidités propres pour participer à la compensation. Les besoins de financement sont donc entièrement pris en charge par le financeur de réseau. Cette hypothèse conduit à surestimer le financement nécessaire au fonctionnement du mécanisme. Dans un contexte plus réaliste, où les entreprises pourraient mobiliser une partie de leurs liquidités, le besoin de financement externe serait donc moindre et l'efficacité du mécanisme potentiellement plus élevée.

Cependant, l'introduction de ce financeur soulève une question importante du point de vue économique : le mécanisme de compensation conduit-il à une croissance incontrôlée du financement nécessaire, ou bien la dynamique du système permet-elle de stabiliser le capital mobilisé ?

Afin de répondre à cette question, nous étudions l'évolution du financement nécessaire au cours du temps ainsi que les mécanismes de remboursement introduits dans le système. L'objectif est de comprendre dans quelle mesure les liquidités injectées par le financeur peuvent être recyclées au fil des sessions de compensation.

9.1.1 Deux scénarios de recyclage

Pour analyser l'évolution du capital mobilisé par le financeur, nous considérons deux scénarios encadrant la récupération des financements. Dans un premier scénario, très défavorable, nommé *pessimiste*, les financements ne peuvent être remboursés qu'à l'intérieur même du mécanisme de compensation. Autrement dit, seuls les remboursements identifiés par l'algorithme sont pris en compte. Les financements qui arrivent à expiration sans avoir été remboursés dans le système sont alors supposés perdus du point de vue du mécanisme. Ce scénario fournit une estimation pessimiste de la capacité du système à recycler les liquidités injectées par le financeur.

Dans un second scénario, plus favorable, nommé *optimiste*, on suppose que les financements restant à l'issue de leur durée de vie sont finalement remboursés au financeur par les entreprises concernées via les canaux de paiement traditionnels. Les financements sortant du système sont alors considérés comme récupérés par le financeur.

Ces deux scénarios correspondent respectivement à la borne supérieure et à la borne inférieure du capital que doit mobiliser le financeur. Ils fournissent ainsi un encadrement du capital mobilisé dans le système : le scénario pessimiste correspond à une estimation très prudente du capital nécessaire, tandis que le scénario optimiste décrit une situation plus favorable dans laquelle les financements sont récupérés hors de notre système lors de leur expiration.

Dans la pratique, la situation réelle se situe vraisemblablement entre ces deux cas limites. En effet, même si toutes les créances commerciales ne sont pas systématiquement honorées, la grande majorité des factures inter-entreprises est finalement réglée après un délai plus ou moins long. Les études sur les comportements de paiement des entreprises en Europe indiquent que les défauts de paiement *définitifs* ne représentent qu'une faible fraction du volume total des transactions commerciales, généralement de l'ordre de quelques pourcents [83, 84].

Dans ce contexte, le scénario pessimiste décrit ci-dessus doit être interprété comme une hypothèse volontairement défavorable. La dynamique réelle du financement devrait se situer plus près du scénario optimiste dans lequel les financements sont finalement récupérés par le financeur.

La Figure 9.1 présente l'évolution cumulée de plusieurs quantités au cours de l'année de simulation par rapport à nos scénarios.

La première courbe (violet et disques) correspond au volume cumulé de factures compensées par le mécanisme. Elle illustre la croissance progressive du volume total de dette commerciale traitée par le système.

La deuxième courbe (rouge et triangles) représente le ***financement théorique*** cumulatif généré par les sessions de compensation successives. Ce volume correspond au financement théorique injecté par le financeur afin de couvrir les positions nettes négatives apparaissant lors des sessions (voir Sous-section 8.2.7).

À partir de ce besoin théorique, on peut déduire les deux scénarios de capital mobilisé introduits ci-dessus.

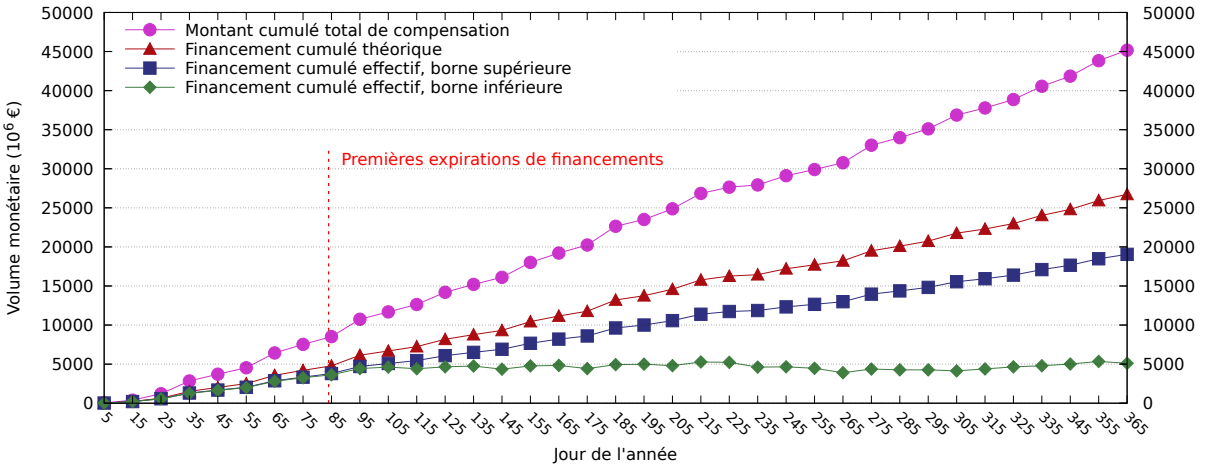


FIGURE 9.1 – Évolution cumulée du volume de dette compensée et du capital mobilisé par le financeur selon les deux scénarios de recyclage des financements.

La troisième courbe (bleu et carrés) correspond à une *borne supérieure du capital nécessaire*, associée au scénario pessimiste dans lequel les financements ne peuvent être remboursés qu'à l'intérieur du mécanisme de compensation. Dans ce cas, les financements qui arrivent à expiration sans avoir été remboursés sont considérés comme définitivement perdus pour le système. Cette courbe reste croissante mais demeure environ 30% plus basse que le besoin théorique.

La quatrième courbe (vert et losanges) correspond quant à elle à une *borne inférieure du capital mobilisé*. Elle correspond au scénario optimiste dans lequel les financements sortant du système sont finalement remboursés par les entreprises hors du système. Celle-ci se stabilise autour de 5 milliards d'euros, ce qui représente, en fin d'année, un volume 80% plus bas que le montant théorique financé.

On observe que les deux courbes suivent une dynamique similaire au début de l'année. Cette phase correspond à une période d'accumulation du financement, pendant laquelle les premiers financements accordés par le système ne sont pas encore arrivés à expiration. La ligne verticale pointillée de la figure indique le moment où apparaissent les premières expirations de financements. À partir de ce point, les deux scénarios se différencient. Dans le scénario pessimiste, le capital mobilisé continue d'augmenter progressivement. Dans le scénario optimiste, en revanche, on observe une stabilisation du capital nécessaire et l'apparition d'un plateau.

La Figure 9.2 illustre la dynamique présentée par ces scénarios du point de vue de l'efficacité. En effet, l'amplification effective est en augmentation permanente dans le cas optimiste et stable dans le cas pessimiste, ce qui nous indique que le système est efficace hors du cas pessimiste.

Cette dynamique générale montre que, même dans l'hypothèse pessimiste, la croissance du capital mobilisé reste maîtrisée par rapport au volume total de dette compensée. Dans le scénario optimiste, **le mécanisme tend vers un régime stable, comme un fonds de roulement**, dans lequel le capital mobilisé se stabilise tandis que le volume total de dette compensée continue de croître, ce qui permet au système de traiter un volume croissant de dettes sans augmentation proportionnelle du capital mobilisé si le réseau reste globalement de la même taille.

9.1.2 Granularité du portefeuille et risque du financeur

Au-delà de la dynamique du capital mobilisé, il est également nécessaire d'examiner le risque financier associé au portefeuille de financements accordés par le financeur de réseau. Une pre-

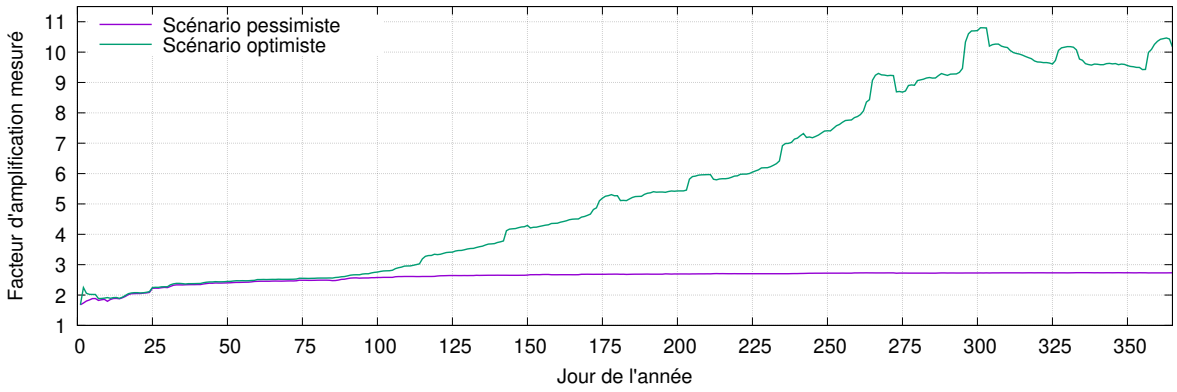


FIGURE 9.2 – Évolution de l'amplification effective selon le scénario de recyclage des financements.

mière analyse grossière de ce risque a été menée par des collègues économistes lors de notre réflexion commune sur le mécanisme temporel. Pour ce faire, ils ont étudié la structure du portefeuille de prêts généré par notre système sur l'année étudiée. Cette analyse montre que le portefeuille construit par le mécanisme possède un très haut niveau de granularité. Pour autant, malgré cette première réponse, la question de la gestion globale du risque reste ouverte.

Dans notre étude de cas, plus de 21 000 prêts sont distribués par session, représentant un total de 440 000 entreprises financées sur l'année, avec un montant moyen par prêt relativement faible (environ 3 000 euros). La part moyenne d'un prêt individuel dans l'ensemble du portefeuille est inférieure à 0.01%, ce qui indique une fragmentation extrêmement forte des expositions. Une telle granularité a des conséquences importantes du point de vue du risque de crédit. Comme l'a montré le modèle asymptotique de portefeuille [85], lorsque le portefeuille devient suffisamment granulaire, le ***risque idiosyncratique*** [37] associé aux défauts individuels tend à disparaître. Dans ce cas, seul subsiste le risque systémique lié aux conditions macroéconomiques générales.

Dans le cadre du mécanisme étudié ici, la très forte fragmentation des expositions implique que **le risque associé à un défaut individuel d'entreprise devient négligeable** pour le financeur. Le risque global du portefeuille est alors principalement déterminé par les facteurs macroéconomiques affectant simultanément l'ensemble du système. Ainsi, le mécanisme de compensation que nous proposons tend à générer un portefeuille de financements dans lequel le risque idiosyncratique est fortement mutualisé. Cette propriété constitue un élément important de la viabilité économique du système, car elle permet de limiter l'exposition du financeur y compris lorsque le volume de dettes traitées par le mécanisme est élevé.

9.2 Effets de la compensation pour les entreprises

Au-delà de la question du financement du mécanisme, il est également nécessaire d'examiner ses effets du point de vue des entreprises participantes. En effet, l'intérêt économique d'un système de compensation ne peut pas être évalué uniquement à partir de son efficacité globale ou de la dynamique du capital mobilisé par le financeur. Il dépend aussi de la manière dont les réductions du besoin de liquidité se répartissent entre les acteurs du réseau.

37. Le risque idiosyncratique désigne un risque propre à une entreprise spécifique, dû à des facteurs internes, et non aux évolutions générales du marché.

Dans un système de paiement classique, chaque entreprise doit mobiliser la liquidité nécessaire pour régler ses propres factures, indépendamment de l'existence éventuelle de créances sur d'autres entreprises. Le mécanisme de compensation modifie cette dynamique en permettant à une partie des dettes d'être réglée à l'intérieur même du réseau, par l'intermédiaire de configurations de compensation.

L'effet principal pour les entreprises est donc une réduction de leurs besoins immédiats de liquidité. Toutefois, cet effet n'est pas uniforme. Il dépend de la position des entreprises dans le réseau, du nombre de factures qu'elles émettent ou reçoivent, ainsi que de la répartition des montants concernés.

9.2.1 Une réduction largement diffusée

Les résultats obtenus sur le jeu de données montrent d'abord que les effets du mécanisme ne se limitent pas à un petit nombre d'entreprises situées au cœur du réseau. Au contraire, ils concernent une part importante de la population observée.

Comme le montre le Tableau 9.1, le mécanisme permet de compenser au moins 50% du volume monétaire des factures pour 72.9% des entreprises. Ce taux varie sensiblement selon la position de l'entreprise dans le réseau de paiement : les entreprises mixtes, qui détiennent à la fois des dettes et des créances, atteignent le taux le plus élevé avec 81.3%, suivies des entreprises sources avec 72.0%, et des entreprises puits [38] avec 63.9%. Ces résultats doivent être lus en gardant à l'esprit que le jeu de données n'offre qu'une vision partielle des relations économiques réelles, puisqu'il ne couvre que les clients d'un opérateur de facturation électronique [39]. Malgré cette limitation, le mécanisme parvient donc à produire un bénéfice diffusé à une large part des entreprises observées.

Tableau 9.1 – Réduction du besoin de liquidité d'au moins 50 %, par type d'entreprise.

Type	**Nombre total**	**% du total**	**Bénéficiaires**	**% concerné**	**% du type**
Global	2 056 198	100.00%	1 499 093	72.91%	72.89%
Sources	1 531 043	74.45%	1 102 321	53.61%	72.00%
Puits	173 824	8.45%	111 143	5.41%	63.94%
Mixtes	351 331	17.08%	285 629	13.89%	81.30%

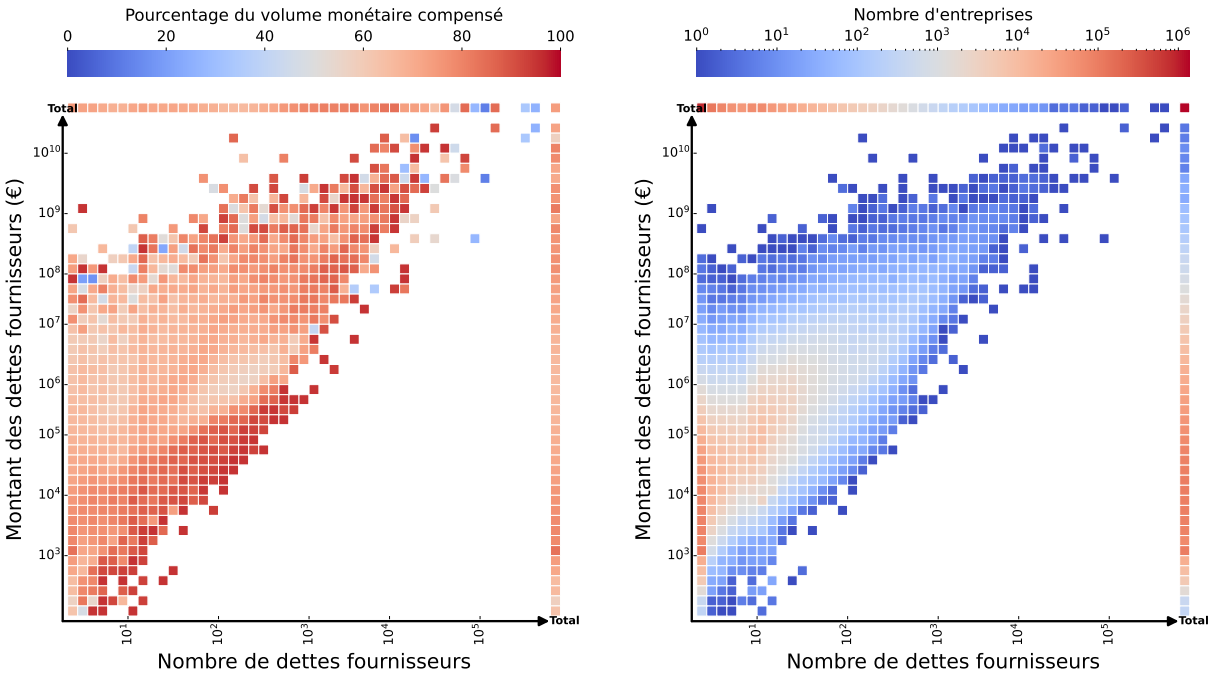
La Figure 9.3 permet de préciser cette observation. Elle croise, pour chaque entreprise, le nombre de factures à payer et le volume monétaire total correspondant. La Figure 9.3a indique la part moyenne du volume compensé dans chaque catégorie, tandis que la Figure 9.3b montre le nombre d'entreprises appartenant à chaque zone du diagramme.

Ces figures montrent que, dans la majorité des configurations, les entreprises obtiennent une réduction de dettes significative, souvent supérieure à 50% du volume de leurs dettes. Les zones où ce bénéfice est le plus élevé correspondent généralement à des entreprises ayant un nombre suffisant de factures et une certaine diversité de montants, ce qui accroît les possibilités d'insertion dans des structures de compensation.

Inversement, les cas dans lesquels la compensation est plus faible restent relativement peu nombreux. Ils correspondent principalement à des entreprises situées dans des zones extrêmes

38. On appelle ***entreprise source*** de notre réseau une entreprise qui émet des factures vers d'autres entreprises sans en recevoir, et ***entreprise puits*** une entreprise qui reçoit des factures sans en émettre. Les entreprises ***mixtes*** détiennent à la fois des créances et des dettes dans le réseau de facturation.

39. Cette question du caractère partiel de notre réseau est couverte dans la Sous-section 4.1.4.



(a) Pourcentage du volume monétaire compensé selon le nombre et le volume des dettes.

(b) Répartition du nombre d'entreprises selon le nombre et le volume des dettes.

FIGURE 9.3 – Répartition des effets du mécanisme de compensation selon le profil des entreprises.

de la distribution : très gros volumes concentrés sur peu de factures, ou des configurations dans lesquelles les possibilités de chaînage sont réduites (possible effet de bord de notre réseau qui est incomplet). Ainsi, les bénéfices de la compensation intégrale sont largement partagés dans le réseau, mais leur intensité dépend de la structure locale des relations commerciales, même si elles n'ont pas besoin d'être cycliques.

9.2.2 L'effet de la taille des factures sur le bénéfice obtenu

L'hétérogénéité des gains observés entre entreprises tient en partie à la manière dont les factures de différents montants peuvent être intégrées dans des structures de compensation.

La Figure 9.4 montre que les factures de faible ou moyen montant (entre 200 € et 500 000 €) sont, en proportion, beaucoup plus souvent compensées que les factures de très grande valeur. Notre mécanisme est donc particulièrement efficace sur la partie la plus dense en volume du réseau de dettes, c'est-à-dire celle où l'on trouve un grand nombre d'obligations de montants intermédiaires susceptibles d'être combinées entre elles.

À l'inverse, les très grosses factures sont plus difficiles à intégrer dans des structures satisfaisant la contrainte d'amplification imposée à l'algorithme. Elles représentent certes une part importante du volume monétaire total, mais leur compensation exigerait souvent un niveau de financement trop élevé au regard du gain obtenu. Pour cette raison, elles sont moins fréquemment sélectionnées par le mécanisme.

Ces résultats confirment pourquoi certaines entreprises bénéficient moins de la compensation que d'autres. Les entreprises dont le profil de dettes est dominé par quelques très grosses factures présentent mécaniquement moins d'opportunités de réduction efficace. À l'inverse, les entreprises ayant un portefeuille de dettes plus fragmenté, composé d'un plus grand nombre de factures de

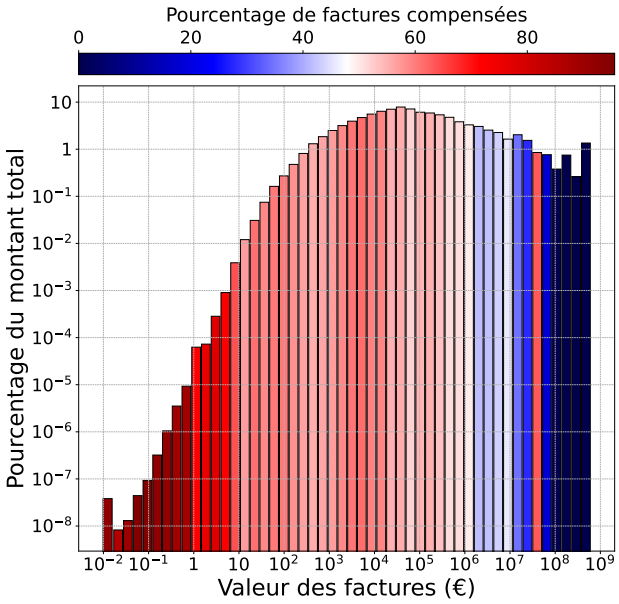


FIGURE 9.4 – Part du volume total représenté par chaque classe de montants et pourcentage de factures compensées selon leur valeur.

montants variés, profitent davantage de la logique de compensation multilatérale.

9.2.3 Interprétation économique

Du point de vue économique, ces résultats montrent que le mécanisme agit comme un dispositif de réduction des besoins de liquidité pour une large part des entreprises du réseau, mais sans uniformiser complètement les situations individuelles.

Son effet est maximal pour les entreprises suffisamment intégrées dans le tissu productif, c'est-à-dire celles qui entretiennent des relations commerciales multiples et diversifiées, par les montants et les partenaires, sans distinction nécessaire de taille d'entreprise. Pour ces entreprises, la compensation permet de transformer une partie de leurs créances en capacité de règlement immédiate, réduisant ainsi leur dépendance à la liquidité externe.

À l'inverse, les entreprises plus périphériques ou exposées à un petit nombre de très grosses factures bénéficient moins du mécanisme. Cette limite n'est pas due à un dysfonctionnement de l'algorithme, mais à la structure même du réseau de dettes observé : lorsque les obligations sont trop isolées ou trop concentrées, les possibilités de compensation restent mécaniquement faibles.

Ainsi, le mécanisme ne doit pas être compris comme un outil produisant un gain identique pour tous les acteurs, mais comme une infrastructure de coordination financière dont les bénéfices dépendent du degré d'insertion des entreprises dans le réseau inter-entreprises.

9.3 Discussion et limites économiques

Les analyses présentées dans ce chapitre permettent de mieux situer la portée économique du mécanisme de compensation temporelle étudié dans cette thèse. Au-delà de ses propriétés algorithmiques, le système proposé modifie en effet la manière dont les besoins de liquidité sont répartis entre les acteurs du réseau et la façon dont ces besoins peuvent être coordonnés.

9.3.1 Apports économiques du mécanisme

Un premier résultat important est que le mécanisme permet de dissocier, au moins partiellement, le volume total de dette commerciale à traiter du volume de liquidité effectivement nécessaire pour la traiter. Dans un système de paiement brut classique, ces deux grandeurs sont totalement liées : chaque entreprise doit mobiliser des liquidités propres pour régler ses obligations, même lorsque ces obligations s'inscrivent dans des chaînes de dettes plus larges. À l'inverse, le mécanisme proposé exploite précisément la structure du réseau pour réduire les besoins de liquidité agrégés.

Cette réduction repose sur deux propriétés complémentaires. D'une part, l'algorithme identifie des structures de compensation permettant de régler une part importante de la dette commerciale avec un facteur d'amplification défini. D'autre part, l'introduction d'un financeur permet de coordonner les déséquilibres résiduels, sans exiger que chaque entreprise dispose individuellement de toute la liquidité nécessaire.

Du point de vue du financeur, le résultat majeur est que le système ne semble pas conduire à une divergence incontrôlée du capital mobilisé. Au contraire, la dynamique observée dans les scénarios les plus favorables montre l'apparition d'un régime proche d'un fonds de roulement, dans lequel le stock de capital nécessaire se stabilise tandis que le volume total de dette compensée continue de croître. Cette propriété constitue un argument central en faveur de la viabilité économique du mécanisme.

Par ailleurs, l'analyse du portefeuille de prêts généré par le système suggère que le risque du financeur est fortement atténué par la granularité des expositions. Le mécanisme ne concentre pas le risque sur un petit nombre d'entreprises, mais le répartit sur un grand nombre d'entreprises et de financements de taille relativement faible. Dans ce cadre, le risque idiosyncratique devient secondaire, voire négligeable, par rapport au risque systémique global, risque indépendant de notre mécanisme.

Du point de vue des entreprises, les résultats montrent que les bénéfices de la compensation sont largement diffusés dans le réseau. Une part importante des entreprises observées bénéficie d'une réduction substantielle de ses besoins de liquidité, en particulier lorsqu'elle occupe une position suffisamment insérée dans le tissu productif. Le mécanisme agit alors comme une infrastructure de coordination financière permettant de transformer des créances en capacité de règlement immédiate.

9.3.2 Limites et conditions d'interprétation

Ces résultats doivent toutefois être interprétés avec prudence et replacés dans le cadre précis de cette thèse.

Une première limite tient aux hypothèses retenues sur le comportement des acteurs. Dans les simulations présentées ici, nous avons supposé que les entreprises ne mobilisent pas de liquidités propres pour participer au mécanisme, ce qui conduit à surestimer le recours au financeur de réseau. Cette hypothèse est utile pour majorer les besoins de financement, mais elle ne décrit pas fidèlement toutes les situations réelles. Dans un déploiement effectif, certaines entreprises pourraient financer elles-mêmes une partie de leurs positions négatives, ce qui réduirait encore le capital externe nécessaire.

Une deuxième limite concerne le traitement des remboursements. Les deux scénarios étudiés dans ce chapitre jouent un rôle d'encadrement, mais ne décrivent pas à eux seuls toute la diversité des comportements de paiement possibles. La réalité se situerait vraisemblablement entre ces deux bornes, en fonction des effets macroéconomiques, non étudiés dans cette thèse, et des règles

institutionnelles retenues pour le fonctionnement du mécanisme.

Une troisième limite est liée à la structure du jeu de données. Comme cela a été discuté dans le chapitre consacré aux propriétés des réseaux de facturation, les données utilisées ne couvrent qu'une partie des relations économiques effectives entre entreprises. Cette couverture partielle peut affecter la détection des structures de compensation, et donc la mesure des potentiels bénéfices apportés. En particulier, certaines entreprises apparaissent artificiellement comme des sources ou des puits de dettes, ce qui peut réduire les opportunités de compensation.

Il faut également souligner que les bénéfices du mécanisme ne sont pas uniformément répartis. Les entreprises dont les dettes sont trop concentrées, trop isolées ou dominées par quelques factures de très grande taille disposent de moins d'opportunités de compensation. Cette hétérogénéité ne constitue pas une anomalie du système, mais une conséquence directe de la topologie du réseau de dettes.

Enfin, l'analyse proposée dans cette thèse porte avant tout sur la faisabilité, les propriétés structurelles et les effets potentiels du mécanisme. Elle ne constitue pas encore une évaluation complète de toutes les conditions institutionnelles, réglementaires ou contractuelles nécessaires à sa mise en œuvre opérationnelle. De telles questions relèvent d'un prolongement naturel de ce travail, à l'interface entre économie monétaire, finance d'entreprise et conception des infrastructures de paiement.

Dans l'ensemble, les résultats obtenus suggèrent que le mécanisme de compensation intégrale temporelle constitue une solution économiquement pertinente pour réduire les besoins de liquidité dans les réseaux de dettes inter-entreprises. Il ne supprime ni l'hétérogénéité des situations individuelles, ni les contraintes propres au financement de court terme, mais il permet de ***transformer une partie du problème de liquidité en un problème de coordination*** de réseau. C'est précisément cette transformation d'un mode de paiement brut à un mécanisme de paiement net sélectif qui constitue, selon nous, l'apport principal du mécanisme étudié dans cette thèse.

Conclusion générale

Cette thèse a traité un problème encore peu exploré à l'interface entre économie, science des réseaux et informatique : la compensation multilatérale intégrale de dettes dans les réseaux inter-entreprises.

Dans les économies fondées sur le crédit commercial, chaque facture émise et non encore réglée relie deux entreprises au sein d'un réseau d'obligations en évolution permanente, dont la structure globale conditionne la capacité collective à honorer les paiements. L'absence de coordination de ces règlements conduit à mobiliser un volume de liquidité souvent bien supérieur à celui qu'exigeraient les seules positions nettes. La compensation multilatérale intégrale apparaît dès lors comme un mécanisme susceptible de réduire ces besoins de liquidité tout en préservant la continuité du processus productif. Sa mise en œuvre effective dans les réseaux inter-entreprises soulève toutefois plusieurs défis majeurs : la structure hétérogène et dynamique des réseaux de dettes, la complexité algorithmique de la sélection des obligations compensables, ainsi que les contraintes financières et institutionnelles liées au financement des positions nettes.

Pour relever ces défis, cette thèse a cherché à traiter ces différentes dimensions en combinant l'analyse structurelle des réseaux de dettes inter-entreprises, la conception de mécanismes algorithmiques de compensation intégrale et l'étude de leurs implications économiques. Les contributions correspondantes s'organisent comme suit.

Une première contribution caractérise, de manière exploratoire, la structure des réseaux de facturation inter-entreprises à partir d'un jeu de données de grande ampleur. L'analyse menée à l'aide des outils de la science des réseaux met en évidence plusieurs propriétés structurelles importantes : des ***distributions fortement asymétriques*** des degrés et des montants échangés, l'existence de structures communautaires non évidentes et une organisation hétérogène des relations commerciales. Ces caractéristiques rapprochent les réseaux de dettes B2B de certaines familles de réseaux complexes tout en révélant des ***propriétés spécifiques*** liées à leur nature économique. Au-delà de cette caractérisation, cette analyse montre que les structures pertinentes pour la compensation sont portées par les arcs pondérés, les factures, plutôt que par les nœuds, et qu'elles émergent par accumulation temporelle des interactions : deux observations qui fondent le cadre algorithmique retenu dans la suite.

La deuxième contribution porte sur la formalisation algorithmique du problème de compensation intégrale de dettes dans un réseau statique. Cette thèse y développe une heuristique de compensation, centrée sur la sélection d'arcs, permettant d'identifier des ensembles de factures susceptibles d'être compensées tout en respectant des contraintes d'efficacité financière. Cette approche introduit ***plusieurs métriques*** permettant d'évaluer la qualité des solutions produites, au premier rang desquelles le facteur d'amplification du financement. Les expérimentations réalisées montrent qu'il est possible de réduire une part importante des dettes présentes dans le réseau tout en mobilisant une quantité relativement limitée de liquidité externe.

Une troisième contribution étend cette approche aux réseaux de grande taille au moyen de

stratégies de décomposition du graphe de type ***diviser pour régner***. Ces méthodes réduisent significativement les coûts de calcul tout en conservant des niveaux comparables de performance en termes de dette compensée et d'efficacité de financement. Ce cadre a par ailleurs été enrichi d'une contrainte explicite sur le montant de capital fourni par le financeur, qui fait apparaître un compromis structurel entre efficacité d'usage de la liquidité et couverture du réseau, et qui doit être préservé jusque dans la phase de recombinaison des solutions locales. Les résultats obtenus montrent que l'approche s'applique à des graphes comportant plusieurs millions d'arcs, ce qui constitue une étape importante vers une utilisation opérationnelle dans des environnements économiques réels.

Le modèle est ensuite étendu à un cadre temporel afin de représenter l'évolution dynamique des réseaux de facturation. Le mécanisme introduit des sessions successives de compensation intégrant l'arrivée continue de nouvelles factures, la persistance temporelle des obligations et le remboursement progressif des financements accordés. Les expérimentations menées montrent que, sous des hypothèses raisonnables, ***le capital mobilisé par le financeur tend vers un régime stable*** semblable à un fonds de roulement, tandis que le volume cumulé de dettes compensées continue de croître au fil du temps. Ce résultat suggère que le mécanisme étudié pourrait fonctionner de manière soutenable dans un contexte réel.

Enfin, l'analyse économique menée dans la dernière partie du manuscrit permet de mieux situer les implications de ce mécanisme pour les différents acteurs du système. Du point de vue du financeur, la forte granularité du portefeuille de financements généré par le mécanisme tend à ***diluer le risque*** idiosyncratique entre un grand nombre de contreparties. Du point de vue des entreprises, les résultats expérimentaux montrent que les bénéfices de la compensation sont ***largement diffusés dans le réseau***, même si leur intensité dépend de la position structurelle des entreprises et de la composition de leur portefeuille de factures.

Ces contributions permettent de revenir sur les interrogations posées en introduction. Elles confirment qu'une part substantielle des tensions de liquidité observées dans les réseaux inter-entreprises relève moins d'une rareté des ressources que d'un défaut de coordination des règlements : une fraction importante de la dette peut être compensée sans mobilisation externe de financement importante, et les volumes de liquidité ainsi économisés sont significatifs. La faisabilité d'une compensation à l'échelle de réseaux de plusieurs millions d'arcs est établie, de même que la présence, dans les données réelles, de structures d'interdépendance suffisamment fréquentes pour être exploitées. D'autres questions, en revanche, ne reçoivent ici qu'une réponse partielle et délimitent les contours d'un programme de recherche que ce travail ouvre plus qu'il ne referme.

Limites

Les résultats obtenus doivent être interprétés en considérant plusieurs limites, discutées en détail au fil du manuscrit. Tout d'abord, les analyses reposent sur un jeu de données qui ne couvre qu'une partie des relations économiques réelles entre entreprises ; certaines configurations de compensation, présentes dans l'économie réelle, peuvent demeurer absentes des données et échapper à l'analyse. Ensuite, les simulations reposent sur des hypothèses simplificatrices concernant le comportement des entreprises et les modalités de remboursement des financements, dont les deux scénarios étudiés ne constituent que des bornes encadrant la réalité. Enfin, l'analyse économique présentée ici ne constitue pas encore une étude complète des conditions institutionnelles et réglementaires nécessaires à la mise en œuvre opérationnelle d'un tel système.

Perspectives

Ces limites dessinent plusieurs axes de prolongement.

Un premier axe concerne la ***robustesse*** des résultats. Il est nécessaire d'étendre l'analyse à d'autres jeux de données, couvrant différents secteurs ou différentes économies, afin d'évaluer dans quelle mesure les propriétés structurelles observées et les bénéfices de compensation obtenus se généralisent au-delà du cas étudié.

Un deuxième axe porte sur le ***réalisme des comportements et la dynamique de long terme***. Une modélisation plus fine du comportement des entreprises, intégrant notamment la mobilisation de leur liquidité propre et des modalités de remboursement plus réalistes, permettrait d'affiner l'évaluation du mécanisme. La question de la valeur limite vers laquelle converge le recyclage du financement reste en particulier ouverte : sur l'horizon d'un an étudié, les données ne permettent pas de conclure de façon définitive. L'étude de scénarios variés et de longue durée constitue un prolongement naturel de cette question.

Un troisième axe concerne le ***risque et la tarification***. L'intégration explicite de la tarification du financement (***pricing***) et de la gestion du risque de crédit dans le modèle reste à mener, de même que l'analyse du déplacement du risque vers le financeur et vers les acteurs qui portent le règlement final, ainsi que son articulation avec le risque systémique, que cette thèse a laissé de côté.

Un dernier axe relève des ***conditions institutionnelles et du déploiement***. Il reste à préciser le cadre réglementaire et contractuel d'un tel dispositif, ainsi que la question de l'étendue souhaitable de la compensation au sein du réseau d'obligations. C'est dans cette perspective que les travaux menés dans cette thèse vont se poursuivre dans le cadre du programme ***Inria Startup Studio***, avec pour objectif d'explorer les conditions techniques, économiques et institutionnelles nécessaires à la mise en œuvre concrète de tels mécanismes à grande échelle, ainsi que le portage du projet en entreprise, à même d'en assurer la mise en œuvre opérationnelle.

Dans l'ensemble, cette thèse montre que les réseaux de dettes inter-entreprises peuvent être étudiés comme des systèmes dynamiques complexes, dans lesquels une part des problèmes de liquidité se reformule en un problème de coordination algorithmique. En articulant analyse structurelle des réseaux, conception d'algorithmes de compensation et réflexion économique sur la liquidité, ce travail propose un cadre cohérent pour concevoir et évaluer de nouvelles formes d'infrastructures financières. Le remplacement partiel de la liquidité par une compensation intégrale sélective constitue notre contribution la plus prometteuse. L'objectif est maintenant à la fois de poursuivre l'exploration de ces questionnements scientifiques et d'éprouver la portée de nos travaux à l'échelle d'une économie réelle au travers du transfert vers l'entreprise.

Annexe A :
Exploration par ré-ordonnancement de la matrice d'adjacence

Avant l'utilisation de méthodes formelles de détection de communautés, une phase exploratoire a consisté à analyser la structure d'un graphe à partir de sa matrice d'adjacence. Cette approche repose sur l'observation visuelle de la matrice après ré-ordonnancement des sommets, technique classiquement utilisée pour révéler d'éventuelles structures communautaires.

A.1 Principe de la méthode

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et A sa matrice d'adjacence définie par

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'idée consiste à appliquer une permutation π des sommets afin de produire une matrice réordonnée regroupant les nœuds supposés proches structurellement, autour de la diagonale principale.

Si le graphe possède des communautés bien définies et fortement séparées, un ordre approprié des sommets fait apparaître des blocs denses le long de la diagonale. Chaque bloc correspond alors à un sous-ensemble de nœuds fortement inter-connectés et faiblement reliés au reste du graphe.

Cette représentation matricielle fournit une interprétation géométrique directe de la modularité d'un réseau et constitue une étape exploratoire fréquemment utilisée avant toute optimisation formelle.

A.2 Illustration sur un graphe à communautés connues

Afin d'illustrer le principe, la Figure A.1 présente la matrice d'adjacence d'un graphe de type ***homme des cavernes***, constitué de communautés fortement connectées en interne et reliées entre elles par un faible nombre de liens.

Après ré-ordonnancement, les blocs compacts sont clairement visibles le long de la diagonale, mettant en évidence la structure communautaire sous-jacente. Les quelques nœuds reliant les communautés apparaissent également distinctement en dehors des blocs principaux.



FIGURE A.1 – Matrices d'adjacence d'un graphe homme des cavernes avant (gauche) et après ré-ordonnancement (droite). Les blocs diagonaux révèlent clairement les communautés.

A.3 Application à des hommes des cavernes bruités

Afin d'évaluer la robustesse de cette approche, un bruit aléatoire a été ajouté à un graphe homme des cavernes en introduisant des arêtes inter-communautés supplémentaires et en supprimant les connections bidirectionnelles pour ressembler un peu plus à nos graphes qui présentent très peu de cycles.

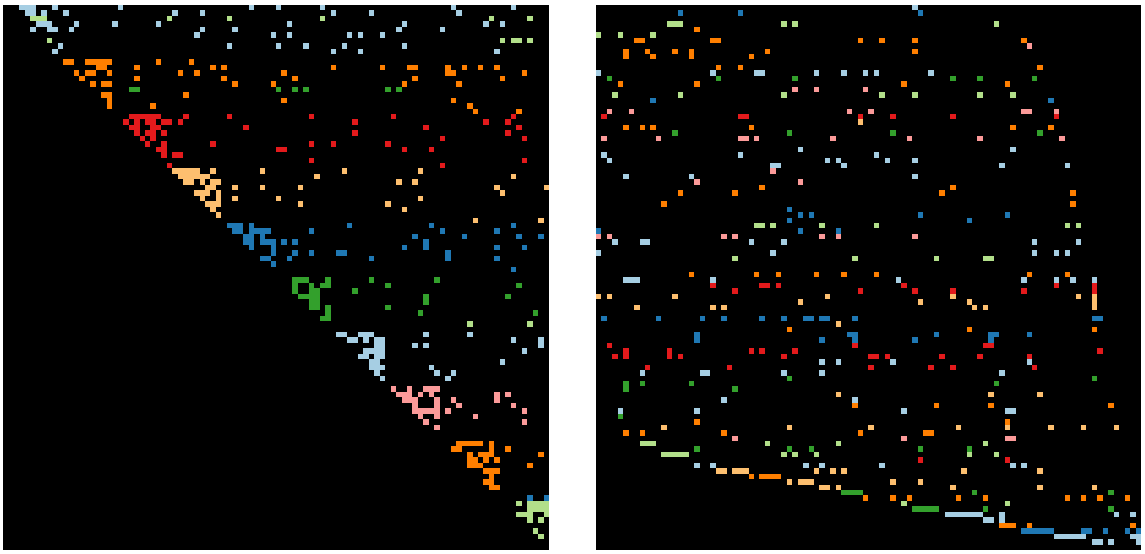


FIGURE A.2 – Matrices d'adjacence d'un graphe homme des cavernes bruité avant (gauche) et après ré-ordonnancement (droite).

On observe que même un niveau modéré de bruit suffit à altérer significativement la lisibilité des blocs diagonaux. Les frontières communautaires deviennent floues et la structure globale apparaît rapidement diffuse après recentrage autour de la diagonale.

Cette expérience met en évidence la sensibilité de la méthode : elle fonctionne principalement lorsque les communautés sont très fortement séparées et peu inter-connectées.

A.4 Limites de l'approche

Cette méthode présente plusieurs limitations structurelles importantes :

— elle dépend fortement de la permutation choisie et ne garantit pas l'obtention d'un ordre révélateur ;
— elle reste essentiellement qualitative et visuelle ;
— elle suppose implicitement l'existence de communautés denses et bien séparées ;
— elle est particulièrement sensible au bruit et aux arêtes inter-groupes ;
— elle devient difficilement interprétable pour des graphes de grande taille.

Dans un réseau économique réel, les interactions sont rarement organisées en modules isolés. Les entreprises entretiennent fréquemment des relations croisées entre secteurs, fournisseurs et clients multiples, ce qui introduit naturellement un bruit structurel important au sens matriciel.

Un réseau de dettes B2B, caractérisé par un faible clustering et une organisation dominée par des chaînes directionnelles longues, ne satisfait donc pas les conditions structurelles favorables à l'apparition de blocs diagonaux nets.

A.5 Conclusion

L'expérience sur des graphes synthétiques montre que le ré-ordonnancement de la matrice d'adjacence permet de révéler des communautés uniquement lorsque celles-ci sont fortement séparées et peu bruitées.

Or, même un bruit modéré rend rapidement la structure illisible. Cette sensibilité rend la méthode inadaptée à l'analyse de réseaux économiques complexes et fortement inter-connectés tels que les réseaux de dettes inter-entreprises.

En conséquence, cette approche n'a pas été retenue pour l'étude globale des dettes. Elle a servi uniquement d'outil exploratoire préliminaire permettant de vérifier que les structures communautaires classiques ne constituent pas une hypothèse structurelle pertinente pour le système étudié.

Cette conclusion motive le recours à des outils analytiques plus robustes et formels, présentés dans la Section 4.5.

Annexe B :
Preuve que $\Gamma(C)$ est borné par 1

L'objectif est de montrer que la mesure de gain présentée dans la Définition 3.12 est une mesure normalisée. C'est-à-dire que pour tout graphe $G = (V, E)$ tel que $D_G \neq F(G)$ [40] et pour toute configuration de compensation C, on a :

$$\Gamma(C) = \frac{D_C - F(C)}{D_G - F(G)} \leq 1$$

On rappelle (voir Sous-section 3.1.4) que pour tout graphe $G = (V, E)$, on identifie G avec son ensemble d'arcs E, ce qui nous autorise à remplacer G par E dans les formulations. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\Gamma(C) = \frac{D_C - F(C)}{D_E - F(E)} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow D_C - F(C) \leq D_E - F(E) && (D_E \geq F(E) \geq 0) \\
&\Leftrightarrow F(E) - F(C) \leq \underbrace{D_E - D_C}_{D_{E\setminus C}} && (D_E = D_{E\setminus C} + D_C)
\end{aligned}$$

On remarque que $D_{E\setminus C} \geq F(E \setminus C)$. Si l'on montre que $F(E \setminus C) \geq F(E) - F(C)$, alors la preuve est complète. En utilisant la définition du financement externe, il faut montrer :

$$\sum_{v\in V} \max\big(0, -B_{E\setminus C}(v)\big) \geq \sum_{v\in V} \max\big(0, -B_E(v)\big) - \max\big(0, -B_C(v)\big).$$

Nous montrons en réalité que $\forall\, v \in V$:

$$\underbrace{\max\big(0, -B_{E\setminus C}(v)\big)}_{\mathcal{X}} \geq \underbrace{\max\big(0, -B_E(v)\big) - \max\big(0, -B_C(v)\big)}_{\mathcal{Y}}.$$

40. Lorsqu'une réduction de dette par compensation nécessite une injection de liquidité.

On observe que :

$$\begin{aligned}
B_{E\setminus C}(v) &= \sum_{e\in I_E(v)\setminus I_C(v)} w(e) - \sum_{e\in O_E(v)\setminus O_C(v)} w(e) \\
&= \left(\sum_{e\in I_E(v)} w(e) - \sum_{e\in I_C(v)} w(e)\right) - \left(\sum_{e\in O_E(v)} w(e) - \sum_{e\in O_C(v)} w(e)\right) \\
&= \left(\sum_{e\in I_E(v)} w(e) - \sum_{e\in O_E(v)} w(e)\right) - \left(\sum_{e\in I_C(v)} w(e) - \sum_{e\in O_C(v)} w(e)\right) \\
&= B_E(v) - B_C(v).
\end{aligned}$$

Par disjonction de cas sur $B_E(v)$ et $B_C(v)$:

Cas $B_E(v) < 0,\ B_C(v) < 0$:
$\mathcal{Y} = -B_E(v) + B_C(v) = -B_{E\setminus C}(v) \leq \mathcal{X}$

Cas $B_E(v) \geq 0,\ B_C(v) < 0$:
$\mathcal{Y} = B_C(v) \leq 0 \leq \mathcal{X}$

Cas $B_E(v) \geq 0,\ B_C(v) \geq 0$:
$\mathcal{Y} = 0 \leq \mathcal{X}$

Cas $B_E(v) < 0,\ B_C(v) \geq 0$:
$\mathcal{Y} = -B_E(v) \leq -B_E(v) + B_C(v) = -B_{E\setminus C}(v) \leq \mathcal{X}$

Ainsi,$\forall v \in V,$ et dans tous les cas possibles de positions nettes, $\mathcal{Y} \leq \mathcal{X}$.
□

Annexe C :
Calcul et mise à jour des potentiels

Cette annexe décrit les détails de calcul des potentiels $U_G^-(e)$ et $U_G^+(e)$ utilisés, ainsi que les mécanismes de mise à jour nécessaires après un ajout dans la configuration C.

C.1 Calcul initial des potentiels

Le calcul des potentiels repose sur une propagation récursive dans le graphe. Afin d'éviter les dépendances circulaires et de garantir que les sous-structures nécessaires au calcul soient déjà disponibles, l'évaluation est effectuée en partant des extrémités du réseau.

Pour le potentiel sortant $U_G^-(e)$, le calcul commence aux nœuds puits du graphe, c'est-à-dire aux nœuds v tels que $O_G(v) = \emptyset$. Les arcs incidents à ces nœuds possèdent un potentiel égal à leur poids, puisqu'aucune propagation supplémentaire n'est possible.

Le calcul se propage ensuite progressivement vers l'amont du graphe. Lorsque le potentiel d'un arc e est évalué, les potentiels de tous les arcs appartenant à $O_G(d(e))$ sont déjà connus. On applique alors la définition introduite dans la Section 5.1.1 :

$$U_G^-(e) = w(e) + \max_{\substack{S \subseteq O_G(d(e)) \\ \sum_{o \in S} w(o) \leq w(e)}} \sum_{o \in S} U_G^-(o).$$

Cette procédure correspond à une propagation ascendante des potentiels le long des branches du graphe. Le calcul du potentiel entrant $U_G^+(e)$ suit exactement la même logique, mais en parcourant le graphe dans la direction opposée. Le calcul débute aux nœuds sources du réseau, c'est-à-dire aux nœuds v tels que $I_G(v) = \emptyset$, puis se propage vers l'aval en utilisant la définition symétrique du potentiel entrant.

C.2 Gestion des dépendances circulaires

La définition récursive des potentiels peut engendrer des dépendances circulaires lorsque le graphe contient des cycles. Dans ce cas, le calcul direct d'un potentiel $U_G^-(e)$ pourrait sembler impossible si l'un des arcs de $O_G(d(e))$ dépend lui-même de e.

Pour éviter ce blocage, l'algorithme adopte la règle suivante : si tous les arcs de $O_G(d(e))$ sauf un ont déjà un potentiel connu, alors le potentiel de e peut être calculé en utilisant uniquement les arcs déjà évalués. L'arc restant est temporairement exclu des ensembles candidats L dans la maximisation de $U_G^-(e)$.

Autrement dit, lorsqu'une dépendance circulaire apparaît, on calcule le potentiel en ignorant provisoirement les arcs dont le potentiel n'est pas encore disponible. Cette approximation reste cohérente avec la définition du potentiel puisque les ensembles L considérés doivent respecter la

contrainte de poids de e, et rien n'impose d'inclure tous les arcs disponibles. Une fois les potentiels restants évalués, les valeurs peuvent éventuellement être mises à jour si une amélioration devient possible. En pratique, cette situation est rare et n'affecte pas la stabilité de l'heuristique. La même logique s'applique symétriquement au calcul des potentiels entrants $U_G^+(e)$ lorsque des cycles apparaissent dans les dépendances associées aux ensembles $I_G(s(e))$.

C.3 Mémoïsation des potentiels

Afin d'éviter des recalculs répétés lors de l'exécution de l'heuristique, les potentiels calculés pour chaque arc sont mémorisés dans une table de hachage. Cette table associe à chaque arc e les valeurs suivantes :

$$(U_G^-(e),\ U_G^+(e))$$

ainsi que les structures optimisantes associées C_e^- et C_e^+, représentées par les suivants directs de e (chaînant ensuite les dépendances).

Grâce à cette mémoïsation, une valeur de potentiel déjà calculée peut être réutilisée directement lorsque l'heuristique évalue plusieurs structures partageant des sous-branches communes ou entre différentes répétitions de l'étape d'extension. Cela permet de réduire significativement le coût de calcul dans les graphes de grande taille.

C.4 Recalcul après modification de la solution

Lorsqu'une structure est ajoutée à la solution courante C, certains arcs utilisés dans les potentiels d'autres arcs peuvent appartenir à cette nouvelle structure. Dans ce cas, les potentiels précédemment calculés peuvent être surestimés, car ils supposent l'utilisation d'arcs désormais indisponibles. Pour éviter ce problème, l'algorithme procède comme suit :

On parcourt d'abord la structure qui vient d'être ajoutée à C afin d'identifier l'ensemble des arcs concernés. Pour chacun de ces arcs, on recherche dans la table de hachage les potentiels dont la structure optimisante C_e^- ou C_e^+ contient au moins un de ces arcs (dans ses suivants). Les potentiels correspondants sont alors invalidés et supprimés de la table de hachage. Les arcs concernés sont marqués comme nécessitant un recalcul.

Une fois cette étape effectuée, les potentiels invalidés sont recalculés en utilisant le graphe courant, c'est-à-dire en tenant compte du fait que les arcs appartenant déjà à C ne peuvent plus être utilisés dans les structures candidates. Cette procédure de recalcul local permet de maintenir la cohérence des potentiels tout en évitant un recalcul global sur l'ensemble du graphe après chaque modification de la solution.

Comme les ratios $\rho(e)$ définis dans la Section 5.1.2 dépendent directement des potentiels $U_G^-(e)$ et $U_G^+(e)$, l'invalidation d'un potentiel entraîne également l'invalidation du ratio associé. Lorsqu'un potentiel est recalculé, les structures candidates correspondantes C_e^- ou C_e^+ sont également mises à jour, et les ratios $\rho^-(e)$, $\rho^+(e)$ ainsi que $\rho(e)$ sont recalculés en conséquence. Les nouvelles valeurs sont ensuite réinsérées dans les structures de sélection utilisées par l'heuristique (par exemple la file de priorité des arcs candidats) de manière à ce que les décisions ultérieures reposent uniquement sur des estimations cohérentes avec l'état courant du graphe.

Annexe D :
Comparaison avec une sélection gloutonne arc par arc

Cette annexe compare l'heuristique basée sur les potentiels, présentée dans le Chapitre 5, avec une méthode plus naïve consistant à sélectionner les arcs un par un en fonction de leur facteur d'amplification marginal [17]. Cette stratégie, que nous appelons ***méthode alpha***, constitue une heuristique gloutonne naturelle et sert ici de point de comparaison.

D.1 Principe de la méthode gloutonne

La méthode alpha est aussi basée sur une extension sur germe (même si la création des germes est différente de celle faite par notre algorithme). Elle construit l'ensemble C en ajoutant itérativement les arcs qui maximisent le facteur d'amplification marginal. À chaque étape, on choisit donc l'arc e maximisant

$$\alpha(e) = \frac{\Delta D(e)}{\Delta F(e)},$$

où $\Delta D(e)$ et $\Delta F(e)$ représentent respectivement les variations du volume de dette traitée et du financement externe induites par l'ajout de l'arc e à la solution courante. Cette stratégie repose uniquement sur une évaluation locale de l'effet de chaque arc. Elle ne prend pas en compte la structure globale du graphe ni les propagations potentielles qui pourraient être déclenchées par une sélection différente.

D.2 Exemple illustratif

La Figure D.1 illustre la différence entre ces deux approches sur un exemple simple. Le graphe initial (graphe germé) contient un cycle principal entre A, B et C, amorcé par une injection de liquidité de 5 unités vers A. Cette injection permet d'activer la structure circulaire représentée en pointillés bleus. À partir de ce cycle, deux branches distinctes peuvent être explorées : une branche courte vers D et une branche plus longue passant par E, F et G.

La méthode gloutonne privilégie l'arc (C, D), car il offre le meilleur rendement marginal immédiat. Cette décision conduit à une réduction totale de dette de 45 pour un financement de 5, soit un facteur d'amplification global de 9 et une couverture de 87% de la dette réductible par compensation.

L'heuristique basée sur les potentiels adopte une stratégie différente. En évaluant la capacité de propagation associée aux arcs sortants du nœud C, elle identifie que la branche passant par (C, E) permet d'activer une structure plus large impliquant successivement E, F et G. La propagation se poursuit donc dans cette direction, ce qui permet de traiter un volume total de dette de 50 pour le même financement, augmentant l'amplification à 10 et la couverture à 98%.

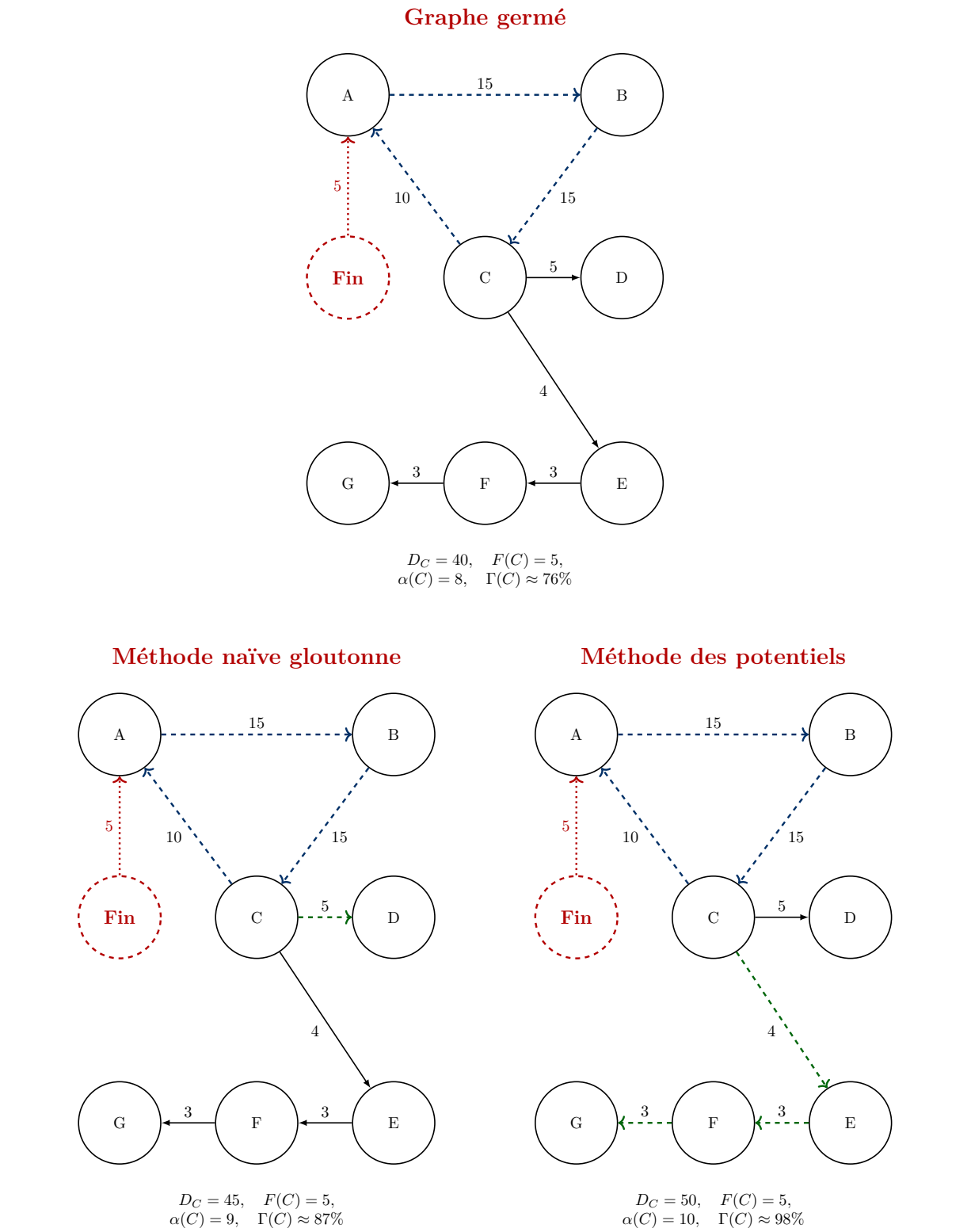


FIGURE D.1 – Comparaison entre la méthode gloutonne arc-par-arc (alpha) et la méthode par potentiels, sur le même graphe germé de départ.

D.3 Analyse

Cet exemple met en évidence la limitation principale des stratégies gloutonnes basées uniquement sur le facteur d'amplification marginal. Une décision localement optimale peut empêcher l'accès à des structures plus efficaces situées plus loin dans le graphe.

La méthode alpha sélectionne l'arc (C, D) car son rendement immédiat est élevé. Cependant, cette sélection empêche l'utilisation de la branche (C, E, F, G), qui permet de déclencher une propagation plus importante.

L'heuristique proposée dans le Chapitre 5 contourne cette difficulté en évaluant les arcs non seulement par leur effet local, mais aussi par leur potentiel de propagation. Les quantités $U_G^-(e)$ et $U_G^+(e)$ permettent d'estimer le volume total de dette susceptible d'être traité si l'arc est activé comme point de départ d'une propagation. Dans l'exemple considéré, cette estimation permet d'identifier que l'arc (C, E) constitue une porte d'entrée vers une structure arborescente plus large, dont l'effet systémique dépasse celui de la branche courte menant à D.

Bien que l'exemple présenté soit volontairement simple, ce type de configuration peut apparaître fréquemment dans les réseaux de dettes. Les structures arborescentes ou faiblement ramifiées peuvent offrir un rendement global élevé malgré un rendement marginal initial plus faible. L'utilisation des potentiels permet ainsi de capturer une information structurelle sur le graphe que les stratégies gloutonnes locales ne peuvent pas exploiter. Cette capacité à anticiper les propagations futures constitue l'un des principaux avantages de l'heuristique proposée, malgré un coût de calcul plus élevé.

Annexe E :
Résultats détaillés de l'approche diviser pour régner

Cette annexe présente les résultats complets des expériences de passage à l'échelle décrites dans la Section 6.5. Les différentes variantes de l'approche ***diviser pour régner*** sont comparées à l'exécution directe de l'heuristique sur le graphe complet. Pour chaque configuration, nous reportons, dans le Tableau E.1, le temps nécessaire aux différentes étapes de l'algorithme ainsi que les principales métriques de qualité : volume de dette compensée, financement mobilisé, facteur d'amplification et gain de compensation.

Les temps de calcul sont décomposés en trois phases :

— le temps de *division* du graphe ;
— le temps total de *réduction* correspondant à l'exécution de l'heuristique sur les sous-graphes ;
— le temps total pris pour les *fusions* et *réextensions* des solutions locales.

Les meilleures valeurs observées pour chaque métrique sont indiquées en vert et les moins bonnes en rouge.

Le Tableau E.1 confirme quantitativement les tendances dégagées dans la Section 6.5. La ligne de référence (sans division) cumule à elle seule les pires valeurs de temps total, de dette compensée et de gain, tout en conservant le meilleur facteur d'amplification (2.13) et le plus faible financement mobilisé : faute de division, l'algorithme se concentre sur les configurations globales les plus efficaces au détriment d'une couverture plus large du réseau.

Dès l'introduction de la division, le temps total chute de plusieurs ordres de grandeur, d'environ 429 000 s à moins de 2 000 s pour les meilleures configurations, soit une accélération supérieure à 200, tandis que le gain de compensation passe d'environ 60 % à près de 79 %. Cette amélioration s'accompagne d'une baisse modérée du facteur d'amplification.

La comparaison des deux stratégies de division est également lisible directement dans le tableau : la division centrée sur les ***poids*** domine systématiquement la division centrée sur les ***degrés*** sur la dette compensée et le gain. Enfin, la fusion globale n'apporte qu'un avantage marginal de qualité au prix d'un temps de recombinaison très supérieur à la fusion locale deux à deux, ce qui justifie le choix de cette dernière retenu dans le corps du manuscrit.

TABLEAU E.1 – Résultats des expériences de division sur le graphe défini dans la Section 6.5

Critère de division	Niveau de division	Type de fusion	Temps (s)				Dette compensée (M€)	Financement (M€)	Facteur d'amplification	Gain (%)
			Division	Réduction	Fusion	Total				
Aucun	0	–	–	429,447	–	**429,447**	**877.77**	**412.21**	**2.13**	**59.48**
Degré	1	2 à 2	124	17 233	4 538	21,895	883.62	**424.72**	**2.08**	65.98
	2	2 à 2	226	613	2,079	2 918	1 053.17	531.17	1.98	73.23
		Globale			6,636	7 475	1 080.30	540.21	2.00	75.82
	3	2 à 2	302	381	1,380	**2 063**	1 080.23	559.40	1.93	73.12
		Globale			10,938	11 621	1 082.28	545.56	1.98	**75.35**
	4	2 à 2	356	65	2 921	3 342	1 071.12	562.46	1.90	71.41
	5	2 à 2	378	38	3 071	3 387	1 080.17	565.87	1.91	72.20
	6	2 à 2	394	32	3 147	3 501	**1 085.50**	569.46	1.91	72.46
	7	2 à 2	403	29	2 710	3 142	1 049.48	549.46	1.91	70.19
	8	2 à 2	412	18	2 278	2 708	1 055.83	554.74	1.90	70.34
Poids	1	2 à 2	18	1 833	4 295	6 146	1 120.08	539.14	**2.04**	79.03
	2	2 à 2	27	1 292	5 901	7 220	1 125.73	562.57	2.00	79.06
		Globale			12,309	13 628	1 134.24	567.98	2.00	**79.49**
	3	2 à 2	34	815	2,852	3 701	1 118.11	564.74	1.98	77.68
		Globale			7,162	8 011	1 029.38	**518.62**	1.98	71.70
	4	2 à 2	43	267	1 624	**1 934**	1 136.42	578.75	1.96	78.29
	5	2 à 2	46	124	3 755	3 922	**1 153.77**	599.15	1.93	77.86
	6	2 à 2	48	45	3 849	3 842	1 146.28	599.81	1.91	76.71
	7	2 à 2	51	39	4 587	4 677	1 103.25	578.51	1.91	73.07
	8	2 à 2	53	21	7 519	7 593	1 091.56	578.15	1.89	72.07

Bibliographie

[1] M. Vernet, *Modèles et algorithmes pour les graphes dynamiques*. Thèse de doctorat, Normandie Université, Oct. 2020.

[2] J. M. Keynes, *The General Theory of Employment, Interest, and Money*. London : Macmillan, 1936. Now in The Collected Writings of John Maynard Keynes, vol. VII, ed. by Donald Moggridge, London : Macmillan – Cambridge University Press for the Royal Economic Society, 1973.

[3] J. A. Schumpeter, *The Theory of Economic Development : An Inquiry into Profits, Capital, Credit, Interest, and the Business Cycle*. New Brunswick, NJ and London, U.K. : Transaction Publishers, 1934.

[4] B. J. Moore, *Horizontalists and Verticalists : The Macroeconomics of Credit Money*. Cambridge : Cambridge University Press, 1988.

[5] S. Battiston, D. Delli Gatti, M. Gallegati, B. Greenwald, and J. E. Stiglitz, "Credit chains and bankruptcy propagation in production networks," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 31, pp. 2061–2084, June 2007.

[6] D. Delli Gatti, M. Gallegati, B. Greenwald, A. Russo, and J. Stiglitz, "The financial accelerator in an evolving credit network," *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 34, no. 9, pp. 1627–1650, 2010.

[7] E. Garcia-Appendini and J. Montoriol-Garriga, "Firms as Liquidity Providers : Evidence from the 2007–2008 Financial Crisis," *Journal of Financial Economics*, vol. 109, no. 1, pp. 272–291, 2013.

[8] S. Carbó-Valverde, F. Rodríguez-Fernández, and G. Udell, "Trade Credit, the Financial Crisis, and SME Access to Finance," *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 48, no. 1, pp. 113–143, 2016.

[9] A. Direr, "Crédit interentreprises et risque de système," *Recherches économiques de Louvain*, vol. 68, no. 3, pp. 371–384, 2002. Publisher : De Boeck Supérieur.

[10] M. Bardoscia, S. Battiston, F. Caccioli, and G. Caldarelli, "Pathways towards instability in financial networks," *Nature Communications*, vol. 8, p. 14416, Feb. 2017.

[11] J. S. Ferris, "A Transactions Theory of Trade Credit Use," *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 96, no. 2, pp. 243–270, 1981.

[12] M. Petersen and R. Rajan, "The Effect of Credit Market Competition on Lending Relationships," *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 110, no. 2, pp. 407–443, 1995.

[13] Y. Fujiwara, H. Inoue, T. Yamaguchi, H. Aoyama, T. Tanaka, and K. Kikuchi, "Money flow network among firms' accounts in a regional bank of Japan," *EPJ Data Science*, vol. 10, p. 19, Apr. 2021.

[14] D. Garlaschelli, S. Battiston, M. Castri, V. D. P. Servedio, and G. Caldarelli, "The scale-free topology of market investments," *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 350, no. 2–4, pp. 491–499, 2005. Publisher : Elsevier.

[15] P. Garrido, P. Campos, and A. Dias, "Balance sheet analysis of credit and debt networks," *Advances in Complex Systems*, vol. 18, p. 1550025, Aug. 2015.

[16] A. Butler, C. Léon, J. F. Moreno, and K. Soramäki, "Liquidity-saving mechanisms in trade credit networks : Optimising corporate liquidity." Working paper / report (PDF), Oct. 2023.

[17] M. Amato, N. Fatès, and L. Gobbi, "The economics and algorithmics of an integral settlement procedure on B2B networks." SSRN working paper, Sept. 2021.

[18] T. Fleischman, P. Dini, and G. Littera, "Liquidity-saving through obligation-clearing and mutual credit : an effective monetary innovation for SMEs in times of crisis," *Journal of Risk and Financial Management*, vol. 13, no. 12, p. 295, 2020.

[19] V. Gazda, D. Horváth, and M. Rešovský, "An application of graph theory in the process of mutual debt compensation," *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 12, pp. 7–24, June 2015.

[20] A. Martin and J. McAndrews, "An Economic Analysis of Liquidity-Saving Mechanisms," *SSRN Electronic Journal*, 2008.

[21] H. Hayakawa, "Liquidity in Financial Networks," *Computational Economics*, vol. 55, pp. 253–301, Jan. 2020.

[22] CPSS-IOSCO, "Principles for financial market infrastructures." Rapport (PDF), Apr. 2012.

[23] J.-C. Rochet and J. Tirole, "Controlling Risk in Payment Systems," *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 28, no. 4, pp. 832–862, 1996.

[24] J. Guichon, N. Fatès, S. Contassot-Vivier, and M. Amato, "Properties of B2B Invoice Graphs and Detection of Structures," in *Complex Networks & Their Applications XII* (H. Cherifi, L. M. Rocha, C. Cherifi, and M. Donduran, eds.), vol. 1143, (Cham), pp. 444–455, Springer Nature Switzerland, Nov. 2023. ISBN 978-3-031-53472-0.

[25] M. M. Güntzer, D. Jungnickel, and M. Leclerc, "Efficient Algorithms for the Clearing of Interbank Payments," *European Journal of Operational Research*, vol. 106, no. 1, pp. 212–219, 1998.

[26] J. Guichon, S. Contassot-Vivier, and N. Fatès, "Integral B2B Debt Netting : Model and Static Algorithm," in *Proceedings of The Fifth French Regional Conference on Complex Systems (FRCCS 2025)* (H. Cherifi, J.-L. Guillaume, G. Melançon, and B. Pinaud, eds.), (Cham), pp. 183–195, Springer Nature Switzerland, May 2025. ISBN 978-3-032-00206-8.

[27] J. Guichon, S. Contassot-Vivier, and N. Fatès, "A divide-and-conquer approach for B2B integral debt netting." Mar. 2025.

[28] L. Walras, *Éléments d'économie politique pure*. Corbaz, 1874.

[29] K. J. Arrow and G. Debreu, "Existence of an equilibrium for a competitive economy," *Econometrica*, vol. 22, no. 3, pp. 265–290, 1954.

[30] A. Graziani, *The Monetary Theory of Production*. Cambridge University Press, 1 ed., 2003.

[31] M. Amato, *L'énigme de la monnaie : À l'origine de l'économie*. Paris : Les Éditions du Cerf, 2015. Collection La nuit surveillée.

[32] N. G. Mankiw, *Principles of Economics*. Cengage Learning, 9 ed., 2021.

[33] H. Leinonen and K. Soramäki, "Optimizing Liquidity Usage and Settlement Speed in Payment Systems." SSRN working paper, Nov. 1999.

[34] B. Bureau, A. Duquerroy, and F. Vinas, "Chocs d'activité et liquidité des entreprises : le rôle du crédit inter-entreprises," document de travail, Banque de France, 2023.

[35] Banque de France, "Chocs d'activité : l'effet amplificateur du crédit interentreprises," billet n°330, Banque de France, 2023.

[36] N. Kiyotaki and J. Moore, "Credit Cycles," *Journal of Political Economy*, vol. 105, no. 2, pp. 211–248, 1997.

[37] Bank of England, "Liquidity saving mechanism user guide." Guide opérationnel (PDF), Feb. 2021. CHAPS Liquidity Saving Mechanism.

[38] European Central Bank, "Information guide for TARGET2 users." Guide utilisateur (PDF), Nov. 2019. Version 13.0.

[39] J. E. Stiglitz and A. Weiss, "Credit rationing in markets with imperfect information," *The American Economic Review*, vol. 71, no. 3, pp. 393–410, 1981.

[40] M. E. J. Newman, *Networks : An Introduction*. Oxford : Oxford University Press, 2010.

[41] A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge : Cambridge University Press, 2008.

[42] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem, and A. Vespignani, "Epidemic processes in complex networks," *Reviews of Modern Physics*, vol. 87, no. 3, pp. 925–979, 2015.

[43] D. J. Watts, "A simple model of global cascades on random networks," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 99, no. 9, pp. 5766–5771, 2002.

[44] M. Amato, E. Belloni, C. A. Favero, and L. Gobbi, "Creating a safe asset without debt mutualization : the opportunity of a European Debt Agency," Tech. Rep. DP17217, CEPR Discussion Paper, 2022. Available at SSRN : 4121392.

[45] D. P. Bertsekas, *Network Optimization : Continuous and Discrete Models*. Belmont, MA : Athena Scientific, 1998.

[46] J. Kleinberg and É. Tardos, *Algorithm Design*. Boston : Pearson, 2006.

[47] L. Eisenberg and T. H. Noe, "Systemic risk in financial systems," *Management Science*, vol. 47, no. 2, pp. 236–249, 2001.

[48] H. Cui, "DebtG : A Graph Model for Debt Relationship," *Information*, vol. 12, p. 347, Sept. 2021.

[49] N. Fatès, "A note on the NP-completeness of the integral netting problem," tech. rep., Inria Nancy - Grand Est, 2026.

[50] G. Iosifidis, Y. Charette, E. Airoldi, G. Littera, L. Tassiulas, and N. Christakis, "Cyclic motifs in the Sardex monetary network," *Nature Human Behaviour*, vol. 2, no. 11, pp. 822–829, 2018.

[51] M. Amato and L. Fantacci, *Saving the Market from Capitalism : Ideas for an Alternative Finance*. John Wiley & Sons, 2014.

[52] J. Stodder, "Complementary Credit Networks and Macroeconomic Stability : Switzerland's Wirtschaftsring," *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. 72, no. 1, pp. 79–95, 2009.

[53] J. Stodder and B. Lietaer, "The macro-stability of Swiss WIR-Bank credits : balance, velocity, and leverage," *Comparative Economic Studies*, vol. 58, no. 4, pp. 570–605, 2016.

[54] T. Fleischman and P. Dini, "Balancing the payment system," *arXiv*, 2020.

[55] T. Fleischman and P. Dini, "Mathematical foundations for balancing the payment system in the trade credit market," *Journal of Risk and Financial Management*, vol. 14, no. 9, p. 452, 2021.

[56] P. Holme and J. Saramäki, "Temporal networks," *Physics Reports*, vol. 519, no. 3, pp. 97–125, 2012.

[57] M. Karsai, N. Perra, and A. Vespignani, "Time-varying networks and the weakness of strong ties," *Scientific Reports*, vol. 4, p. 4001, 2014.

[58] A. Casteigts, P. Flocchini, W. Quattrociocchi, and N. Santoro, "Time-varying graphs and dynamic networks," *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, vol. 27, no. 5, pp. 387–408, 2012.

[59] L. Akoglu, H. Tong, and D. Koutra, "Graph-based anomaly detection and description : A survey," *Data Mining and Knowledge Discovery*, vol. 29, no. 3, pp. 626–688, 2015.

[60] A.-L. Barabási, *Linked : The New Science of Networks*. Perseus, 2002.

[61] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, 1993.

[62] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2009.

[63] C. Magnien, M. Latapy, and J.-L. Guillaume, "Measuring the resilience of the internet topology," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 17, no. 2, pp. 499–511, 2009.

[64] M. Latapy and C. Magnien, "Complex network measurements : Estimating the relevance of observed properties," in *IEEE INFOCOM 2008 - The 27th Conference on Computer Communications*, pp. 1660–1668, 2008.

[65] A. Lakhina, J. W. Byers, M. Crovella, and P. Xie, "Sampling biases in IP topology measurements," in *Proceedings IEEE INFOCOM 2003. Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, vol. 1, pp. 332–341, IEEE, 2003.

[66] J. Leskovec and C. Faloutsos, "Sampling from large graphs," in *Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD '06)*, pp. 631–636, Association for Computing Machinery, 2006.

[67] L. E. C. Rocha, N. Masuda, and P. Holme, "Sampling of temporal networks : Methods and biases." arXiv preprint, 2017.

[68] A. Chiappori and R. Cazabet, "Quantitative evaluation of snapshot graphs for the analysis of temporal networks," *arXiv*, 2021.

[69] S. Fortunato, "Community detection in graphs," *Physics Reports*, vol. 486, no. 3-5, pp. 75–174, 2010.

[70] M. E. J. Newman and M. Girvan, "Finding and evaluating community structure in networks," *Physical Review E*, vol. 69, no. 2, 2004.

[71] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte, and E. Lefebvre, "Fast unfolding of communities in large networks," *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2008, no. 10, p. P10008, 2008.

[72] S. Fortunato and D. Hric, "Community detection in networks : A user guide," *Physics Reports*, vol. 659, pp. 1–44, 2016.

[73] A. Lancichinetti and S. Fortunato, "Community detection algorithms : A comparative analysis," *Physical Review E*, vol. 80, no. 5, p. 056117, 2009.

[74] M. Garey and D. Johnson, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman, 1979.

[75] C. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity*. Dover, 1998.

[76] J. H. Miller and S. E. Page, *Complex Adaptive Systems : An Introduction to Computational Models of Social Life*. Princeton University Press, 2007.

[77] D. J. Watts and S. H. Strogatz, "Collective dynamics of 'small-world' networks," *Nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442, 1998.

[78] M. E. J. Newman, "The structure and function of complex networks," *SIAM Review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.

[79] R. Gibrat, *Les inégalités économiques*. Paris : Librairie du Recueil Sirey, 1931.

[80] M. H. R. Stanley, L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, M. A. Salinger, and H. E. Stanley, "Zipf plots and the size distribution of firms," *Economics Letters*, vol. 49, no. 4, pp. 453–457, 1995.

[81] S. B. Seidman, "Network structure and minimum degree," *Social Networks*, vol. 5, no. 3, pp. 269–287, 1983.

[82] M. Jacomy, T. Venturini, S. Heymann, and M. Bastian, "ForceAtlas2, a continuous graph layout algorithm for handy network visualization designed for the Gephi software," *PLoS ONE*, vol. 9, 2014.

[83] Intrum, "European payment report 2023," tech. rep., Intrum, 2023.

[84] Allianz Trade, "Global insolvency report," tech. rep., Allianz Research, 2025.

[85] O. A. Vasicek, "Limiting Loan Loss Probability Distribution," tech. rep., KMV Corporation, San Francisco, CA, 1991.

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la compensation multilatérale intégrale de dettes dans les réseaux de paiement inter-entreprises (B2B), à l'interface entre informatique, science des réseaux et économie monétaire. Dans les économies contemporaines, une large part des échanges entre entreprises repose sur le crédit commercial : chaque facture non encore réglée constitue une obligation au sein d'un réseau de dettes en évolution permanente. L'absence de coordination des règlements et des liquidités de départ conduit à mobiliser un volume global de liquidité bien supérieur à celui qui serait nécessaire pour ne régler que les positions nettes.

Ce travail aborde ce problème selon trois axes complémentaires. Le premier consiste à caractériser expérimentalement la structure des réseaux de facturation B2B à partir d'un jeu de données réel de 22 millions de factures issues du facturateur électronique italien InfoCert (2019). Le deuxième axe porte sur la conception d'une heuristique d'optimisation pour le problème de compensation intégrale sur graphe statique, qui est NP-difficile, fondée sur des mesures locales de propagation. Des stratégies de décomposition de type diviser-pour-régner permettent ensuite de passer à l'échelle sur des graphes de plusieurs millions d'arcs. Le troisième axe introduit un mécanisme de compensation temporelle dans lequel des sessions successives intègrent l'arrivée continue de nouvelles factures et le remboursement progressif des financements accordés.

Les résultats montrent qu'il est possible de compenser une part importante de la dette commerciale avec un capital limité, tendant vers un régime stable proche d'un fonds de roulement. L'analyse économique confirme que les bénéfices sont largement diffusés dans le réseau et que la forte granularité du portefeuille de financements atténue le risque du financeur.

Mots-clés : compensation de dettes, réseaux B2B, crédit inter-entreprises, optimisation combinatoire, heuristique, systèmes complexes, graphes dynamiques, liquidités, diviser-pour-régner.

Abstract

This PhD thesis addresses the problem of integral multilateral debt netting in business-to-business (B2B) payment networks, at the intersection of computer science, network science, and monetary economics. In contemporary economies, a large share of inter-company transactions relies on trade credit : each outstanding invoice constitutes a financial obligation within a continuously evolving debt network. The absence of global payment coordination and starting liquidity forces companies to mobilize far more liquidity globally than would be needed to settle net positions.

This work approaches the problem along three complementary lines. The first one consists in empirically characterizing the structure of B2B invoice networks using a large-scale real dataset of over 22 million invoices from the Italian e-invoicing platform InfoCert (2019). The second one focuses on designing an optimization heuristic for the integral debt netting problem on static graphs, which is NP-hard, based on local propagation potential measures. Divide-and-conquer decomposition strategies extend this approach to graphs with several million edges. The third line introduces a temporal netting mechanism in which successive sessions incorporate the continuous arrival of new invoices and the progressive repayment of issued financing.

Results show that a significant fraction of commercial debt can be settled with limited capital, converging toward a stable working-capital-like regime. Economic analysis confirms that the benefits are broadly distributed across the network, and that the high granularity of the generated loan portfolio substantially mitigates the financer's risk.

Keywords: debt netting, B2B networks, trade credit, combinatorial optimization, heuristic, complex systems, dynamic graphs, liquidity, divide-and-conquer.