UNIVERSITÉ DE LORRAINE | BIBLIOTHÈQUES UNIVERSITAIRES

AVERTISSEMENT
DROIT D'AUTEUR

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document. Toute contrefaçon, plagiat ou reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

UNIVERSITÉ DE LORRAINE
34 COURS LÉOPOLD — CS 25233
54052 NANCY CEDEX
TÉL : 03 54 50 54 00
CONTACT@UNIV-LORRAINE.FR
WWW.UNIV-LORRAINE.FR

Homogénéisation non-périodique des bassins sédimentaires pour la propagation des ondes sismiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2025 pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité Géosciences

par

Marius Rapenne

Composition du jury :

Présidente du jury :	
Professeure Alessia MAGGI	ITES Université de Strasbourg
Rapporteurs :	
Directeur de recherche Yann CAPDEVILLE	CNRS Nantes
Professeur Fernando LOPEZ-CABALLERO	LMPS Paris Saclay
Examinatrices :	
Ingénieure-Chercheur Céline GÉLIS	IRSN
Chargée de recherche Nathalie GLINSKY	Cerema Sophia Antipolis
Directeur de thèse :	
Maître de conférences Paul CUPILLARD	Université de Lorraine
Co-directeur de thèse :	
Professeur Guillaume CAUMON	Université de Lorraine
Co-encadrant de thèse :	
Corentin GOUACHE	CCR Paris

GeoRessources - UMR 7359
Université de Lorraine – CNRS
École Nationale Supérieure de Géologie
2 rue du Doyen Marcel Roubault - BP 10162
54505 Vandœuvre-lès-Nancy, FRANCE

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier grandement mon directeur de thèse Paul Cupillard et mon Co-directeur Guillaume Caumon pour m'avoir encadré tout au long de cette thèse et d'avoir su me guider, d'avoir été là lors des moments les plus difficiles de la thèse. Plus particulièrement, je ne remercierais jamais assez Paul Cupillard qui a su m'épauler quand j'en ai eu le plus besoin et sans qui je n'aurais probablement pas réussi à aller jusqu'au bout de cette thèse. Et Paul, tu m'as dit que tu t'en voulais de m'avoir parfois "bousculé" pour faire avancer le travail, mais je ne l'ai jamais ressenti comme tel, à chaque fois ça m'a aidé et je suis content que tu aies été mon directeur de thèse. Je souhaite également remercier Corentin Gouache, mon co-encadrant de thèse, qui a su m'apporter une autre perspective sur mon sujet et pour avoir toujours été très réactif. Comme tu avais fini ta thèse dans l'équipe RING peu de temps avant que je commence la mienne, tu as pu comprendre mon quotidien, ce qui a créé une proximité particulière qui m'a été très bénéfique tout au long de ce travail.

Je remercie également les rapporteurs et examinateurs de ma thèse Alessia Maggi, Yann Capdeville, Fernando Lopez-Caballero, Céline Gélis et Nathalie Glinsky pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour le temps et l'énergie qu'ils ont consacrés à mon manuscrit et ma soutenance.

Un grand merci à Emmanuel Chaljub et Diego Mercerat pour avoir accepté de faire partie de mon comité de suivi et de m'avoir, tous les ans, fait des retours sur l'avancée de mon travail.

De plus, je souhaite remercier la Caisse Centrale de Réassurance d'avoir financé ma thèse et pour m'avoir accueilli dans leurs locaux. Plus précisément, je souhaite remercier tous les membres du département Modèles que j'ai rencontrés, Jean Philipe Naulin, Luc Baudoux, Pierre Aurélien Stahl, Daniela Peredo, Charles Dumartinet, Gilles Kieffer, Souhail Aboulfadile pour leur accueil et pour m'avoir intégré dans leur équipe pendant trois mois. Je remercie également Frédéric Drapeau du Département Usage de la Donnée & Innovation pour l'anticipation de mon arrivée dans les locaux et l'aide qu'il a apporté lors de mon passage.

Ces remerciements et cette thèse n'auraient pas été possibles sans ma famille, mes parents et mes frère et sœur Valentin et Félicie, pour m'avoir toujours entouré et qui m'ont tant apporté : le tennis, le piano, les jeux de sociétés et Donjons et Dragons, la lecture (même si ça a été laborieux au début), une passion pour le Seigneur des Anneaux et l'univers de Tolkien, et tout le reste...

Je tiens également à remercier Benjamin Rapenne, qui m'a hébergé durant mon séjour à Paris : je suis content d'avoir appris à davantage te connaître pen-

dant ces quelques mois.

Un grand merci à mes enseignants de lycée et de classe préparatoire qui m'ont donné goût à la science et l'envie de persévérer dans ce domaine.

Je tiens également à remercier tous mes amis qui m'ont aidé à en arriver là : Thomas, Maxime, Maxime, Léa, Baptiste, Pauline, Julie, Jeane, Yann, Romane, Geoffroy, Chloé, Kilyann et Zélie. Il faudrait organiser des moments pour se revoir car ça fait longtemps pour certains.

Je me dois également de remercier fortement tous les membres de l'équipe RING que j'ai pu croiser lors de mon temps au labo. Un grand merci pour François et Christophe pour l'aide informatique qu'ils ont pu m'apporter, Mustafa pour les conseils (et pas que au tarot) et les discussions. Un grand merci à tous les doctorants que j'ai côtoyés : Paul, Zoé et Capucine (bureau poney), Enrico, Fabrice, Amandine, Giusi, Paul, Loïs, Bastien, et les nouveaux arrivants Roberto, Zakaria, Fethi et Jorge.
En particulier, je tiens à remercier plus spécifiquement Amandine et Paul, qui ont su être présents dans les moments les plus compliqués de la rédaction du manuscrit, et dont la présence autour de moi m'a aidé à finir ma thèse.
Merci également à Pauline, Marie et Honorine pour les discussions à la cafet et le midi. Et enfin à toute l'équipe en général pour les parties effrénées de tarot.

Un grand merci également aux trois étudiants que j'ai encadré, Aurélie, Benjamin, et Laurine. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec vous, même si ce n'était pas forcément dans les meilleures conditions (à distance, avec des horaires décalés, etc.). Vous avez tous fait un super travail qui a été utile à différents passages durant ma thèse et je suis content que ce soit vous qui ayez choisi mes sujets.

Ces remerciements n'auraient pas lieu d'être sans un mot pour mon professeur de piano, Luc Pertuy, qui n'est malheureusement plus parmi nous, mais sans qui je ne serais pas qui je suis aujourd'hui. Luc, tu m'as inculqué l'amour de la musique et du piano et même s'il faut que je m'y remette ces derniers temps, je pense toujours à toi quand je m'y installe.

Enfin, je souhaite remercier toutes les personnes que je n'aurais pas forcément nommées précédemment mais qui ont été présentes lors de ma soutenance, aussi bien en présentiel qu'en distanciel.

Un grand merci à tous pour tout !

Résumé

Résumé en Français

L'étude des bassins sédimentaires revêt une importance capitale en sismologie, notamment en raison de leur influence sur l'amplification des ondes sismiques et la distribution spatiale de l'aléa. En effet, ces structures géologiques induisent des effets de site caractérisés par des phénomènes d'amplification ou de désamplification des ondes sismiques, ce qui peut générer des zones de forte accélération du sol. Une modélisation précise de ces effets est donc essentielle pour une évaluation fiable de l'aléa sismique. Cependant, leur simulation numérique reste un défi en raison de la complexité géométrique et des propriétés hétérogènes qui apparaissent dans les bassins sédimentaires et qui rendent les approches classiques coûteuses en termes de calcul. Cette thèse propose deux stratégies complémentaires pour réduire ces coûts.

Une première approche repose sur l'homogénéisation non-périodique à deux échelles, qui permet de remplacer le milieu géologique hétérogène par un milieu lisse équivalent plus simple à mailler et dont la taille des éléments ne dépend plus de la géométrie mais, au contraire, de la longueur d'onde minimale du champ d'onde à propager. Toutefois, la théorie de l'homogénéisation non-périodique existante n'étant pas directement applicable aux bassins sédimentaires, une adaptation méthodologique a été nécessaire pour garantir la validité des résultats.

Pour réduire encore davantage le coût numérique des simulations de propagation des ondes dans les bassins sédimentaires, une méthode de maillage adaptatif a été développée, spécifiquement conçue pour les milieux lisses issus de l'homogénéisation. Cette approche permet de minimiser le nombre d'éléments spectraux 2D (c.-à-d. de quadrangles) du milieu homogénéisé tout en préservant la précision des simulations. Enfin, une optimisation supplémentaire du maillage a été explorée, visant à maximiser le pas de temps admissible lors des calculs, ce qui permet d'accélérer significativement les simulations sans compromettre leur robustesse.

English summary

The study of sedimentary basins is of major interest in seismology, as they influence both the amplification of seismic waves and the spatial distribution of seismic hazard. Indeed, these geological structures induce site effects, characterized by amplification and deamplification phenomena, which can create zones of high ground acceleration. Accurate modeling of these effects is essential to obtain

a reliable estimation of seismic hazard. However, their simulation is challenging due to the geometrical complexity and heterogeneous properties of sedimentary basins, which result in high computational costs for classical approaches. This PhD thesis proposes two strategies to reduce this cost.

The first approach relies on two-scale non-periodic homogenization, which allows heterogeneous geological media to be replaced with a smooth, equivalent medium that is easier to mesh. In this case, the element size no longer depends on the geometry but on the minimum propagated wavelength. However, the existing homogenization theory cannot be directly applied to basins. An adaptation of the methodology is therefore necessary to ensure the validity of the results.

To further reduce the numerical cost of wave propagation simulations, an adaptive meshing strategy has been developed, specifically tailored for the smooth media obtained through homogenization. This approach minimizes the number of 2D spectral elements (i.e., quadrilaterals) in the homogenized media while maintaining simulation accuracy. Finally, an additional optimization of the mesh has been explored, aiming to maximize the highest admissible time step for computations. This significantly speeds up the simulations without compromising their robustness.

Table des matières

Remerciements **i**

Résumé **iii**

Introduction **1**

I Homogénéisation **11**

1 Homogénéisation de milieu stratifié **15**
1.1 Théorie de la propagation des ondes dans un milieu stratifié . . . 15
1.2 Homogénéisation à deux échelles des milieux stratifiés 18
1.2.1 Outils mathématiques de l'homogénéisation périodique . . 19
1.2.2 Homogénéisation périodique 20
1.2.3 Outil mathématique pour l'homogénéisation non-périodique 23
1.2.4 Homogénéisation non-périodique 24
1.3 Expression de $\langle S \rangle$ 25

2 Homogénéisation : application sur des modèles synthétiques **29**
2.1 Application à un modèle stratifié (*layer cake*) 30
2.2 Application a un modèle de bassins sédimentaire 32

3 Homogénéisation adaptative **35**
3.1 Homogénéisation avec filtrage adaptatif 36
3.1.1 Rappel théorique 36
3.1.2 Détermination de la longueur d'onde minimum 37
3.1.3 Comparaison de méthodes d'intégrations pour l'estimation de λ_{min} 38
3.1.4 Détermination des propriétés effectives 38
3.2 Application : premier résultat 40
3.2.1 Description du modèle 40
3.2.2 Propriétés effectives 40

II Maillage quadrangulaire adaptatif **49**

4 Maillage quadrangulaire adaptatif **53**

4.1 Quadrangular adaptive mesh for elastic wave simulation in smooth anisotropic media 54
4.1.1 Introduction 54
4.1.2 Mesh optimality criteria for smooth anisotropic media . . . 56
4.1.3 Meshing algorithm and optimization 57
4.1.4 Handling the topography 61
4.1.5 Effect of the adaptive meshes on wave simulation : application to the Groningen gas field 69
4.1.6 Discussion and conclusions 73
4.1.7 Directional S-wave velocity in an anisotropic material . . . 77
4.1.8 Closest 2D isotropic material 77

Conclusions **79**

Bibliographie **83**

Introduction

La sismologie, du grec *seismos* qui signifie “secousses” et *logos* qui signifie “étude”, désigne la science des tremblements de terre. Si nous pouvons la faire remonter à l'Antiquité occidentale (avec une théorie sur l'origine des séismes dès le IVème siècle avant J.-C. par Aristote) et à la dynastie des Han orientaux (avec notamment le sismoscope de Zhang Heng en 132), c'est au XIXème siècle que la sismologie connaît son véritable essor avec le recensement d'évènements sismiques en catalogues [Perrey, 1848], les premières études de terrain [Mallet, 1862] et le développement de la sismographie [Cecchi, 1875]. Au cours des XXème et XXIème siècles, l'amélioration, la multiplication et la diversification des instruments de mesure ont permis de construire notre connaissance actuelle des tremblements de terre, des mécanismes qui les génèrent (tectonique des plaques, hydrothermalisme, vêlage glaciaire, fracturation hydraulique...) aux dégâts qu'ils peuvent causer à la surface de la Terre (endommagement de bâtiments et d'infrastructures, effondrements gravitaires, tsunamis, liquéfaction...).

Les effets de site lithologiques

Lorsqu'un séisme survient, les secousses ressenties à un site donné dépendent de la magnitude du séisme et de la distance du site à l'hypocentre, mais aussi des conditions géologiques du site. Ce sont les sismologues japonais qui, les premiers, à la suite du grand séisme de Kanto en 1923, documentent la forte corrélation entre l'endommagement des bâtiments et la géologie de surface [Ishimoto, 1931, Omote, 1949]. Ils remarquent tout d'abord que le bâti situé sur des reliefs faits de roches cristallines (que nous appellerons *socle* par la suite) connaît en général nettement moins de destructions que le bâti situé dans les vallées sédimentaires. De plus, ils mettent en évidence une forte corrélation entre l'épaisseur des sédiments et le taux d'endommagement. Grâce au développement de la sismographie et des sondages géotechniques, les sismologues continueront d'affiner l'observation de ces *effets de site* en corrélant la nature des sols aux dommages et/ou aux mouvements du sol mesurés par des accéléromètres dans d'autres régions sismiquement actives comme les aires urbaines de San Francisco [Borcherdt, 1970, Borcherdt et Gibbs, 1976], Mexico [Singh et al., 1988], Thessalonique [Chávez-García et al., 1990], Los Angeles [Hartzell et al., 1997] et Seattle [Booth, 2004], ou des zones moins densément peuplées comme le sud du Tadjikistan [King et Tucker, 1984], le nord de l'Arménie [Yegian et al., 1994] et le centre de l'Italie [Pagliaroli et al., 2020]. Dans les bassins sédimentaires, on observera notamment que l'amplification du signal sismique se produit à certaines fréquences et peut considérablement varier d'un point à un autre de la surface du bassin. Dans les reliefs cristallins, on relèvera d'importantes amplifications au niveau

des sommets topographiques et, à l'inverse, des désamplifications au niveau des creux [p. ex., Geli et al., 1988]

Dans ce travail de thèse, nous ne nous intéresserons qu'aux phénomènes d'amplification ou de désamplification des ondes sismiques dans les bassins sédimentaires, aussi appelés effets de site lithologiques. Pour les expliquer, de très nombreux travaux théoriques sur le comportement des ondes sismiques au sein des bassins ont été conduits. En réutilisant le résultat de Haskell [1960] qui donne les fréquences de résonance f_i d'une onde SH plane pénétrant à incidence normale dans une couche élastique horizontale d'épaisseur h reposant sur un demi-espace élastique :

$$f_i = \frac{(2i+1)V_S}{4h}, \ i = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{1}$$

(V_S étant la vitesse de propagation des ondes S dans la couche), Borcherdt [1970] explique une bonne part de la corrélation qu'il observe entre la fréquence du mode fondamental du spectre d'amplification et l'épaisseur des sédiments à différents sites du sud de la baie de San Francisco. Dans la configuration très simple de Haskell [1960], le facteur d'amplification du mode fondamental est donné par

$$A = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{\pi\xi}{2}} \ , \tag{2}$$

où ξ est le facteur d'atténuation des ondes S dans la couche et c le contraste d'impédance (définie comme le produit de la densité et de la vitesse des ondes) entre le demi-espace (c.-à-d., le socle) et la couche (c.-à-d., le bassin). Cette équation montre l'augmentation de l'amplification avec le contraste d'impédance à l'interface socle-bassin. Dans une configuration plus complexe où le bassin est composé de strates horizontales, Kramer [1996] donne une solution analytique du spectre d'amplification, aussi appelé *fonction de transfert*.

Dans les milieux stratifiés, sans variation latérale des propriétés viscoélastiques, que nous venons de considérer, l'amplification et la désamplification sont dues au piégeage des ondes de volume qui, se réfléchissant à la surface et au fond du bassin, interfèrent constructivement ou destructivement. Bien que très simples, ces modèles 1D conviennent à de nombreux sites réels [p. ex., Thompson et al., 2012, Pilz et Cotton, 2019]. Cependant, pour la plupart des points de la surface des bassins sédimentaires, la présence de contrastes latéraux en profondeur (dus à la variation d'épaisseur du bassin, par exemple) donne des effets 2D voire 3D qui peuvent être considérables. Afin de comprendre ces effets, Trifunac [1971] propose une solution analytique du déplacement à la surface d'un bassin semi-cylindrique excité par une onde SH plane. Cette solution, pertinente pour les vallées longues et profondes, montre que la fréquence du mode fondamental est uniforme à la surface du bassin, mais que les variations spatiales de l'amplification peuvent être très rapides, de l'ordre de la longueur d'onde. La solution met également en évidence une forte dépendance du déplacement à l'angle d'incidence de l'onde plane. Pour étudier davantage de cas, Wong et Trifunac [1974] considèrent des bassins semi-elliptiques. Cela permet notamment de considérer des bassins peu profonds. Dans ce cas, les auteurs montrent que la dépendance du mouvement du sol à l'angle d'incidence de l'onde plane est moins importante que dans le cas semi-cylindrique. Surtout, ils montrent que

l'approximation 1D ne peut fournir de bons résultats qu'à basse fréquence, lorsque la pulsation ω de l'onde est telle que

$$\frac{\omega h}{V_S} < \frac{\pi}{2} \ , \tag{3}$$

où h est l'épaisseur locale du bassin.

Pour prendre en compte des géométries d'interface socle-sédiment plus irrégulières, Aki et Larner [1970] et Bard et Bouchon [1980a,b] développent et mettent en œuvre une approche 2D qui s'appuie sur la diffraction de Rayleigh d'une combinaison linéaire d'ondes planes dont les coefficients permettent d'annuler la contrainte normale à la surface (condition de surface libre) et de satisfaire la continuité du déplacement et de la contrainte à l'interface. Cette méthode semi-analytique est précise tant que l'interface reste suffisamment lisse (c.-à-d., lorsque le spectre de ses irrégularités ne présente pas de fréquence spatiale supérieure au plus grand nombre d'onde du champ incident). Dans ce cas, la méthode modélise proprement la génération d'ondes de surface (c.-à-d., de Love dans le cas SH et de Rayleigh dans le cas P-SV) aux bords du bassin, et cela même lorsque l'onde incidente se propage verticalement. La grande durée du mouvement sismique en surface due au piégeage des ondes de Love ou de Rayleigh dans le bassin est également modélisée. Enfin, une comparaison de résultats 2D avec des résultats obtenus dans le cadre de l'approximation 1D montre que cette dernière devient mauvaise lorsque l'interface socle-sédiment est très inclinée ou que la direction de propagation de l'onde plane incidente s'éloigne grandement de la verticale. En utilisant la même méthode, Bard et Bouchon [1985]...

En utilisant la même méthode, Bard et Bouchon [1985] étudient le comportement des bassins profonds (c.-à-d., dont le rapport d'aspect est supérieur à 0,2) et montrent notamment que i) les fréquences des pics d'amplification restent les mêmes sur toute la surface du bassin et que ii) le pic le plus grave a une amplitude maximale au centre du bassin pour décroître progressivement vers les bords.

Simulation numérique des effets de site lithologiques

Les méthodes analytiques que nous venons de décrire ont été clés pour comprendre les caractéristiques générales de la propagation des ondes dans les bassins sédimentaires et pour modéliser le comportement général des amplifications et désamplifications des spectres en surface. Aujourd'hui encore, des dérivations analytiques sont proposées pour, par exemple, mieux comprendre le comportement de l'amplification des ondes de surface vis-à-vis des bords du bassin ou de son épaisseur [Bowden et Tsai, 2017, Brissaud et al., 2020]. D'un point de vue plus opérationnel, les solutions analytiques issues de l'approximation 1D restent très largement utilisées en ingénierie sismologique pour inclure les effets de site dans l'estimation de l'aléa sismique [p. ex., Pilz et Cotton, 2019]. La rapidité du calcul de ces solutions permet notamment de les mettre en œuvre de manière stochastique afin de reproduire la variabilité des observations et de les inclure dans l'estimation probabiliste de l'aléa (PSHA, pour *Probabilistic Seismic Hazard Assessment*) [P. ex., Rodriguez-Marek et al., 2014, Haji-Soltani et Pezeshk, 2017]. Cependant, les géométries et la physique considérées dans les méthodes analytiques demeurent toujours

relativement simples. La complexité des effets de site qu'elles sont en mesure de modéliser est donc limitée, et le comportement particulier de chaque bassin sédimentaire, avec sa propre géométrie d'interface socle-sédiment, son propre remplissage sédimentaire et ses propres lois de comportement, a rapidement fait l'objet de modélisations totalement numériques.

Les sismologues se sont tout d'abord penchés sur la méthode des différences finies (FDM). Boore [1970] est l'un des premiers à la mettre en œuvre : en considérant la croûte terrestre comme un guide d'ondes 2D, il analyse les effets de la variation d'épaisseur de la croûte sur la propagation des ondes de Love. Les différences finies sont ensuite étudiées par, p. ex., Kelly et al. [1976], qui pointent le fait que la méthode remplace les discontinuités de propriétés élastiques par une zone de transition numérique. Pour atténuer les artefacts d'une telle approximation, Virieux [1984] propose un schéma dans lequel l'inverse de la densité et la vitesse d'une part, et le module de cisaillement et la contrainte d'autre part, sont discrétisés sur des grilles décalées. Moczo et al. [2002] développent cette idée pour la propagation des ondes en 3D et implémentent un schéma d'ordre 4 dans lequel la densité et les modules élastiques sont moyennés de façon arithmétique et harmonique, respectivement. Plus tard, Moczo et al. [2023] et Valovcan et al. [2023] montreront qu'une discontinuité proprement lissée d'après le nombre d'onde de Nyquist donne une erreur de simulation bien inférieure à celle obtenue en introduisant brutalement la discontinuité via une fonction de Heaviside dans la grille des différences finies.

La méthode des éléments de frontière (BEM) permet quant à elle de prendre en compte l'effet de la géométrie des discontinuités de propriétés de manière précise [Semblat et al., 2002, Chaillat et al., 2009, Meza-Fajardo et al., 2016, Sohrabi-Bidar et al., 2025]. Cette méthode fait partie de la famille des méthodes intégrales de frontières qui ont été mises en œuvre de façon semi-analytique par, p. ex, Sánchez-Sesma et Esquivel [1979] dans le cas des effets de site lithologiques, et par, p. ex., Sánchez-Sesma [1983] dans le cas des effets de site topographiques. Elle repose sur le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti et respecte naturellement les conditions de radiation à l'infini, évitant ainsi toute réflexion artificielle sur les bords d'un domaine fini [Bouchon et Sánchez-Sesma, 2007]. Sa mise en œuvre numérique permet notamment de simuler l'interaction entre le sol et le bâti, de plus petite échelle, lors d'une excitation sismique [p. ex., Semblat et al., 2008]. Dans ce contexte, la prise en compte de lois de comportement non-linéaires (p. ex., élasto-plastiques) est souvent pertinente, ce que permet la BEM [p. ex., Semblat, 2011].

La très classique méthode des éléments finis (FEM) a elle aussi été appliquée à la propagation des ondes sismiques [Smith, 1975, Toshinawa et Ohmachi, 1992]. Comme la BEM, elle permet de prendre en compte des discontinuités de géométrie complexe et des comportements non-linéaires [p. ex., Xu et al., 2003, Brun et al., 2021]. De plus, elle peut gérer les éventuelles variations de propriétés à l'intérieur des couches géologiques. Dans le cadre de la simulation des effets de site lithologiques, Bao et al. [1998] et Bielak et Ghattas [1999] mettent la FEM en œuvre avec un maillage triangulaire (en 2D) et tétraédrique (en 3D) plus fin dans le bassin que dans le socle afin de gérer l'importante différence des vitesses de propagation des ondes et, par conséquent, de longueurs d'onde dans les deux milieux. Mais malgré l'augmentation continue des puis-

sances de calcul depuis plusieurs décennies, la FEM reste très coûteuse. Cela explique en partie le développement de la méthode des éléments spectraux (SEM) à la fin des années -90 [Komatitsch et Vilotte, 1998, Komatitsch et Tromp, 1999]. Grâce à des polynômes de Lagrange définis par des points de Gauss-Lobatto-Legendre sur des éléments quadrangulaires (en 2D) ou hexaédriques (en 3D), cette méthode présente une matrice de masse diagonale et une convergence spectrale qui la rendent très efficace et précise [Komatitsch et Tromp, 2002, Chaljub et al., 2007, De Basabe et Sen, 2007]. De plus, elle permet l'implémentation de lois de comportement non-linéaires [Stupazzini et al., 2009, Oral et al., 2017, 2019, Ba et al., 2024].

Bien qu'utilisée dans de nombreuses simulations d'effets de site [p. ex., Komatitsch et al., 2004, Lee et al., 2008, Chaljub et al., 2010, De Martin, 2011, Maufroy et al., 2015, Infantino et al., 2020, Castro-Cruz et al., 2021a, 2022, Oral et al., 2022], la SEM manque de flexibilité lorsqu'il s'agit de mailler des contacts tangentiels entre horizons géologiques, comme cela peut être le cas au niveau du bord des bassins sédimentaires [Delavaud et al., 2006, Cupillard et al., 2012, Chaljub et al., 2015]. Pour gérer ces géométries tout en conservant une grande précision des calculs, la méthode de Galerkin discontinu (DGM) s'appuie sur des maillages simpliciaux [Käser et Dumbser, 2006, Dumbser et Käser, 2006, Mercerat et Glinsky, 2015], à la manière des éléments finis triangulaires ou tétraédriques. De plus, la DGM permet la p-adaptativité, qui consiste à utiliser un degré polynomial plus faible dans les petits éléments afin d'alléger la contrainte sur le pas de temps dans les schémas explicites [p. ex., Dumbser et al., 2007, Etienne et al., 2010].

Un type de solutions plus avancées encore pour traiter les géométries complexes des bassins sédimentaires ainsi que l'ordre de grandeur qui sépare la vitesse des ondes dans le socle et la vitesse des ondes dans le bassin consiste à mettre en œuvre des méthodes hybrides. Celles-ci permettent de bénéficier des avantages d'une méthode dans une partie du domaine spatial (par exemple, la flexibilité de la DGM là où des géométries complexes sont en jeu) et d'une autre méthode dans le reste du domaine (par exemple, la rapidité de la FDM là où aucune discontinuité majeure n'est présente). Les méthodes hybrides incluent notamment les approches FEM-FDM [Galis et al., 2008], FEM tétraédrique-hexaédrique [Ichimura et al., 2009], FEM-SEM [Brun et al., 2021, Korres et al., 2023], DGM-FDM [Lisitsa et al., 2016], SEM continue-discontinue [Terrana et al., 2019] et fk-SEM [Ba et al., 2022].

Gestion des échelles et des incertitudes

La section précédente a mis en évidence le caractère multi-échelle de la propagation des ondes sismiques dans les bassins sédimentaires :

1. Des structures géologiques fines, plus petites que la longueur d'onde du champ incident, sont en jeu : couches peu épaisses au sein du remplissage sédimentaire, contacts tangentiels entre ces couches ou au niveau des bords du bassin, etc.

2. La valeur des vitesses de propagation des ondes sismiques peut varier d'un ordre de grandeur entre le socle et les sédiments les moins consolidés, faisant varier d'autant la longueur d'onde.

Grâce au développement des différentes méthodes numériques que nous avons exposées, ce caractère multi-échelle a pu être géré et des simulations ont pu être effectuées dont les résultats reproduisent, jusqu'à des fréquences de 1 à 3 Hz selon les puissances de calcul et les régions géographiques considérées, l'amplification spectrale et la durée de secousses observées. Ainsi en est-il de la FDM mise en œuvre dans les bassins de Los Angeles [Vidale et Helmberger, 1988, Graves et al., 1998, Olsen, 2000], de San Francisco [Frankel et Vidale, 1992], de Seattle [Frankel et al., 2009], de Kinki [Iwata et al., 2008] et d'Osaka [Asano et al., 2016, Oprsal et al., 2023] ; de la BEM au sein du bassin de Nice [Semblat et al., 2000] ; de la SEM dans les régions de Los Angeles [Komatitsch et al., 2004] et de Taipei [Lee et al., 2008] ; de la DGM en Provence [Glinsky et al., 2019]. Au-delà de 1 à 3 Hz en revanche, les nombreuses incertitudes sur la source sismique (notamment sur les hétérogénéités spatiales du glissement, de la vitesse de propagation de la rupture et de la durée de la rupture), sur la propagation des ondes de la source au site (c.-à-d., sur les structures et les propriétés crustales) et sur le site lui-même (c.-à-d., sur les structures et les propriétés des sédiments) rendent actuellement impossible la modélisation déterministe des observations. Ce sont donc des approches stochastiques qui sont mises en œuvre pour simuler les hautes fréquences [p. ex., Graves et Pitarka, 2010].

[Bradley, 2019] distinguent quatre stratégies pour simuler le mouvement du sol en prenant en compte le rôle de la source, celui de la propagation des ondes de la source au site, et les effets de site (on parle alors de simulation à grande échelle [p. ex., Poursartip et al., 2020] ou de *physics-based simulation* [p. ex., Bradley, 2019]) :

1. Le couplage fort des trois aspects (source - propagation - site) au sein d'une même simulation [p. ex., Taborda et al., 2012, Chaljub et al., 2021]. Certaines méthodes numériques hybrides mentionnées dans la section précédente permettent ce couplage fort.
2. Le couplage faible, qui décompose le domaine physique en plusieurs sous-domaines afin de gérer chaque aspect au sein d'une simulation donnée. On parle alors de méthodes à réduction de domaine [p. ex., Bielak et al., 2003, Yoshimura et al., 2003, Korres et al., 2023]. Là aussi, certaines techniques hybrides mentionnées plus haut permettent ce type de couplage.
3. La combinaison d'une simulation numérique à grande échelle sans structures fines ni vitesses lentes au site et d'une solution 1D pour l'effet de site. La combinaison se fait alors par simple convolution dans le domaine temporel ou multiplication dans le domaine fréquentiel [p. ex., Roten et al., 2012, Hu et al., 2022].
4. La combinaison d'une simulation numérique à grande échelle pour les basses fréquences et d'une solution phénoménologique (fonction de Green empirique ou terme de site d'une *Ground Motion Prediction Equation*) pour les hautes fréquences. La combinaison se fait alors par simple addition des deux spectres en les pondérant au niveau de leurs fréquences communes [Graves et Pitarka, 2010, Infantino et al., 2020, Stupazzini et al., 2021, Castro-Cruz et al., 2021b].

Quelle que soit la stratégie utilisée, pour introduire une stochasticité physique dans les simulations et modéliser ainsi le comportement statistique des enregistrements sismiques à haute fréquence, les paramètres de la source peuvent être perturbés aléatoirement. Dans le cas d'une faille finie, Mai et Beroza [2002], Graves et Pitarka [2010,

2016], Frankel et al. [2018] perturbent aléatoirement la distribution du glissement sur la faille et définissent des champs aléatoires partiellement corrélés à cette distribution pour perturber aussi l'instant et la durée de la rupture. Dans le cas d'un point-source, ce sont la localisation et les six composantes du tenseur des moments qui peuvent être tirées aléatoirement [p. ex., Lehmann et al., 2024a]. Pour la propagation de la source au site, la stochasticité est assurée par des perturbations aléatoires de petite échelle du modèle de vitesse [Hartzell et al., 2010, Imperatori et Mai, 2012, Iwaki et al., 2018, Withers et al., 2018, Celorio et al., 2022, Lehmann et al., 2022, 2024b,a]. Il en est de même pour les effets de site [El Haber et al., 2019, Tchawe et al., 2021, Chaljub et al., 2021].

Par ailleurs, un certain nombre de travaux procèdent à des simulations numériques pour mener des études paramétriques visant à mieux comprendre les paramètres incertains qui, à haute ou basse fréquence, impactent les amplifications du champ d'onde en surface. Maufroy et al. [2016] montrent par exemple l'importante sensibilité du mouvement du sol à la position de l'hypocentre dans le cas de séismes de faible magnitude. Castro-Cruz et al. [2021a] étudient quant à eux l'impact du modèle géologique régional sur la prédiction du mouvement du sol au site nucléaire de Kashiwazaki-Kariwa, au Japon. Enfin, l'impact des incertitudes structurales et de vitesses de propagation des ondes dans les bassins est étudié par De Martin et al. [2013], Meza-Fajardo et al. [2016], Moczo et al. [2018], Infantino et al. [2020], DeMartin et al. [2021]. Ces derniers montrent notamment que, dans le cas de l'EUROSEISTEST [Pitilakis et al., 2013], ξ est le paramètre qui a la plus grande influence sur le maximum du déplacement au centre du bassin, tandis que le maximum du déplacement aux bords du bassin est essentiellement contrôlé par la profondeur d'une discontinuité dans le bassin. Ils mettent aussi en évidence que l'arrivée des ondes balistiques est influencée par chaque paramètre propre tandis que le champ diffracté est davantage contrôlé par des effets d'interaction entre paramètres. Pour obtenir ce genre de résultats, DeMartin et al. [2021] ont procédé à plus de 800 simulations, chacune d'elle demandant environ 10 000 heures.cœur de calcul.

Contributions de ce travail de thèse

Dans ce travail de thèse, nous explorons la possibilité d'utiliser l'homogénéisation non-périodique à deux échelles pour calculer les propriétés élastiques effectives des bassins sédimentaires et réduire ainsi le coût de calcul des effets de site lithologiques. L'homogénéisation non-périodique développée par Capdeville et Marigo [2007], Capdeville et al. [2010a,b] permet en effet de déterminer, pour une longueur d'onde minimum et un facteur de précision donnée, le milieu lisse équivalent, au sens de la propagation des ondes sismiques, de n'importe quel milieu élastique, sans contrainte théorique sur la taille, la forme ou l'amplitude des hétérogénéités. Le milieu équivalent ne contenant plus de petites échelles, il devient très facile à mailler et à prendre en compte dans les méthodes de simulation numérique de la propagation des ondes. Le caractère lisse du milieu permet notamment d'éviter les petits éléments qui peuvent augmenter considérablement le temps de calcul lorsqu'il s'agit de mailler explicitement les petites échelles. Dans les milieux homogénéisés, c'est la longueur d'onde minimum du champ d'onde qui se propage et non les hétérogénéités du milieu qui contrôle la discrétisation spatiale, et

par conséquent le pas de temps des simulations lorsque celles-ci se basent sur un schéma temporel explicite.

L'homogénéisation à deux échelles est apparue en micromécanique à la fin des années 1970 afin de prédire la réponse macroscopique de matériaux composites ou aléatoires soumis à des excitations statiques ou dynamiques [Bensoussan et al., 1978, Sanchez-Palencia, 1980]. Depuis, cette technique a été appliquée avec succès à de nombreux processus physiques tels que le transfert de chaleur [Allaire et Habibi, 2013], la magnétisation [Santugini-Repiquet, 2007] et la propagation des ondes élastiques [Boutin et Auriault, 1993, Chen et Fish, 2001, Fish et Chen, 2004, Parnell et Abrahams, 2008, par ex.]. Dans ce dernier domaine, l'homogénéisation à deux échelles a été adaptée aux milieux non-périodiques par Capdeville et Marigo [2007] et Capdeville et al. [2010a,b], ce qui permet la mise à l'échelle de milieux élastiques très généraux, sans contrainte sur la forme et la taille des hétérogénéités. La méthode a été testée en 1D [Capdeville et Marigo, 2007, 2008, Capdeville et al., 2010a], en 2D [Capdeville et al., 2010b, Guillot et al., 2010, Capdeville et al., 2015] et en 3D [Cupillard et Capdeville, 2018a, Cupillard et al., 2020]. Une introduction détaillée de la méthode est également disponible [Capdeville et al., 2020]. Enfin, dans ces dernières années, l'homogénéisation inverse a été développée afin de déterminer les modèles élastiques de petite échelle compatibles avec les modèles intrinsèquement lisses obtenus par inversion de formes d'onde complètes [Hedjazian et al., 2021, Santos et al., 2024, Ruggiero et al., 2025].

Dans une première partie, l'homogénéisation est adaptée pour pouvoir être utilisée sur des bassins sédimentaires. Dans une première section, la théorie de la propagation d'onde en milieu stratifié est présentée. Cette partie montre une réécriture du problème élastostatique dans une géométrie cylindrique afin d'arriver à une formulation de l'équation d'onde qui est plus simple à manipuler pour le développement des équations d'homogénéisation. Dans une seconde section, l'homogénéisation à deux échelles est présentée dans son cadre théorique et permet de montrer que les résultats connus de l'homogénéisation sont bien retrouvés dans ce nouveau formalisme. Ensuite des applications de cette homogénéisation à des milieux stratifiés, puis à un milieu synthétique modélisant un bassin sédimentaire simple sont réalisées pour valider l'application de l'homogénéisation dans ces milieux. Enfin, une dernière section de cette partie présente le travail d'un projet Master que j'ai encadré pour aller plus loin dans la théorie de l'homogénéisation et utiliser un filtrage adaptatif, initiant un travail pour développer une homogénéisation adaptative.

Pour la simulation numérique, le milieu homogénéisé doit être discrétisé par un maillage adapté à la méthode numérique retenue (DF, BEM, SEM, etc...). Dans ce cadre, le choix du maillage à un impact important sur les performances numériques. Pour cette raison, une seconde partie est dédiée au développement d'un algorithme de maillage adaptatif pour les milieux lisses (par exemple un milieu homogénéisé). Un algorithme de maillage adaptatif créant des maillages quadrangulaires conformes est présenté. Ce travail a fait l'objet d'un article accepté à Computer & Geosciences. Puis un autre travail de projet Master que j'ai encadré présente comment améliorer cet algorithme de maillage adaptatif pour lui permettre de prendre en compte une faible topographie. Enfin, une troisième partie montrant un algorithme d'optimisation du maillage adapté aux milieux lisses est présentés. Cette partie est composée d'un article publié dans

Etudiant	Année	Projet	Durée
B. Pinet (2A)	2022-2023	développement d'un jupyter notebook pour des codes de maillage et d'optimisation	2 mois
A. Scuotto (3A et Master)	2022-2023	Prise en compte de la topographie dans un algorithme de maillage adaptatif quadrangulaire	3,5 mois
L. Andres (3A et Master)	2023-2024	Filtrage adaptatif des propritétés élastiques pour la simulation d'onde sismique	3,5 mois

TABLE 1 – Etudiants encadrés et leurs projets.

Computer et Geoscience auquel le travail du projet master a été incorporé.

Contexte général de la thèse

Cette thèse a été réalisée au sein de l'Université de Lorraine, en étant rattaché à l'école doctorale SIReNa. Plus précisément, j'ai travaillé au sein de l'équipe RING du laboratoire GeoRessources. Les activités de l'équipe RING (*Reasearch for Integrative Numerical Geology*) consistent à étudier la modélisation du sous-sol, les incertitudes, les méthodes d'inversions et les mathématiques appliquées. Je fus amené à présenter tous les ans mes travaux dans un congrès annuel organisé par l'équipe RING pour présenter les diverses avancées aux sponsors académiques et industriels de l'équipe. Elle fut financée par la Caisse Centrale de Réassurance (CCR), avec une période de 3 mois dans leurs locaux pour y appliquer mes travaux de thèse. Durant cette thèse, j'ai également développé plusieurs codes informatiques associés à mes activités de recherches : SmoothQuad (C++, Python), et ai également adapté des codes fortran pour l'homogénéisation. J'ai également eu l'occasion de donner des cours dans l'Ecole Nationale Supérieure de Géologie de Nancy (ENSG). Plus précisément, j'ai été amené à donner des cours de Python aux étudiants de 2ème année de l'ENSG pendant les années 2022-2023 et 2023-2024 à un régime de 24h par an. J'ai également eu l'opportunité de superviser des projets de recherche d'un étudiant de deuxième année et de deux étudiantes de Master (Tableau 1).

Contribution Scientifique

Article dans des revues à comité de lecture

M. Rapenne, P. Cupillard, G. Caumon, et C. Gouache. Quadrangular adaptive mesh for elastic wave simulation in smooth anisotropic media. *Computers & Geosciences*, 203: 105946, 2025. ISSN 00983004. doi: 10.1016/j.cageo.2025.105946

Présentation dans des conférences internationales

M. Rapenne, G. Caumon, P. Cupillard, et C. Gouache. Quadrangular adaptive meshing for wave simulation in homogenized media. In *21th Annual Conference of the*

IAMG, 2022

M. Rapenne, G. Caumon, P. Cupillard, et C. Gouache. Quadrangular adaptive mesh for elastic wave simulation in smooth anisotropic media. In *SSA Annual Meeting*, p. 23, 2024

Première partie

Homogénéisation

Introduction

Le but de cette partie est d'étudier une méthode de changement d'échelle (d'*upscaling*), qui vise à calculer les propriétés effectives à partir d'une description du milieu à fine échelle, afin de réduire le temps de calcul de simulation d'ondes tout en minimisant l'erreur de ces simulations. Une façon particulière d'upscaler un modèle est la méthode de l'homogénéisation [par exemple Capdeville et al., 2020]. Cette méthode repose sur une expansion asymptotique de l'équation d'onde et produit un milieu lisse équivalent. Capdeville et Marigo [2007] ont étudié cette méthode pour les milieux à couche dans une géométrie sphérique, adaptée à la sismologie globale. Lors de ce développement, une attention avait été portée aux conditions limites afin de pouvoir visualiser les résultats de l'homogénéisation avec des simulations d'ondes de surface. Plus tard, Capdeville et al. [2010b] proposent un autre développement de l'homogénéisation pour des milieux élastiques quelconques. Toutefois, ce développement ne contient pas de descriptions des conditions limites et ne s'intéresse pas aux ondes de surface, mais est valide pour la sismologie plus régionale. Ainsi, aucun des développements de l'homogénéisation existants n'est parfaitement adapté pour l'étude des effets de sites dans les bassins sédimentaires, ces derniers nécessitant une approche plus locale, pour pouvoir représenter les effets liés à la géométrie du bassin [Bard et Bouchon, 1980b], à sa stratification interne [Geli et al., 1988], mais nécessitant également de connaître les conditions limites afin de bien pouvoir représenter les ondes de surface. Dans le but de mieux modéliser les effets de site dans les bassins sédimentaires, il est nécessaire de trouver un nouveau développement de l'homogénéisation plus adapté pour les bassins sédimentaires. Le développement proposé dans cette thèse se place, dans un premier temps, dans un environnement 2D afin d'étudier certains effets latéraux et géométriques, la 3D ajoutant des effets de sites latéraux supplémentaires. Il a été choisi de considérer les bassins sédimentaires comme une juxtaposition de profils 1D. On considère ensuite que chaque profil suit une géométrie cylindrique. Cette approximation est facile à justifier dans le cas de milieu à couche horizontale et subhorizontale. Dans un premier temps, le cadre théorique de l'équation d'onde en géométrie cylindrique sera décrit. Puis, l'équation d'onde cylindrique est utilisée comme point de départ pour un nouveau développement théorique de l'homogénéisation. Des résultats préliminaires de l'homogénéisation dans ce nouveau développement théorique sont montrés. Enfin, la piste de l'homogénéisation adaptative est étudiée.

Chapitre 1

Homogénéisation de milieu stratifié

Sommaire

1.1 Théorie de la propagation des ondes dans un milieu stratifié 15
1.2 Homogénéisation à deux échelles des milieux stratifiés . . . 18
1.2.1 Outils mathématiques de l'homogénéisation périodique 19
1.2.2 Homogénéisation périodique 20
1.2.3 Outil mathématique pour l'homogénéisation non-périodique . 23
1.2.4 Homogénéisation non-périodique 24
1.3 Expression de $\langle S \rangle$ 25

Résumé Les milieux stratifiés proposent une géométrie permettant de réécrire le problème élastostatique dans un référentiel cylindrique. Un nouveau développement de la théorie de l'homogénéisation est réalisé dans ce référentiel. L'idée est d'appliquer l'homogénéisation dans ce nouveau référentiel aux bassins sédimentaires. Des résultats connus de l'homogénéisation sont retrouvés et une attention particulière a été mise sur la description des conditions aux limites.

1.1 Théorie de la propagation des ondes dans un milieu stratifié

Le problème élastodynamique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} \mathbf{u} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{f}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec $\mathbf{u}$ le déplacement, $\partial_{tt}\mathbf{u}$ l'accélération, $\mathbf{C}$ le tenseur élastique, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ le tenseur des déformations, ρ la densité, $\mathbf{f}$ le terme de force source et $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ l'opérateur de divergence.

Dans la suite, le milieu est supposé être un milieu stratifié, c'est-à-dire un milieu à couche dont les propriétés ne varient que selon la profondeur.

Pour plus de simplicité, on suppose également que le milieu est isotrope, c'est-à-dire que les propriétés élastiques ne dépendent pas de la direction. Cette simplification nous permet de réduire le nombre de paramètres élastiques à deux : les paramètres de Lamé λ et μ. Kennett [1983] a proposé d'étudier ces milieux (stratifié isotrope) avec

un système de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) avec z l'axe vertical perpendiculaire à la stratification. La surface libre est choisie comme se situant à $z = 0$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\sigma}(z = 0) \cdot e_z = 0$. L'axe z est également choisi comme augmentant avec la profondeur. Cette configuration proposée par Kennett se base sur une terre aplatie. La surface libre considérée est donc également horizontale.

Le problème élastostatique (1.1) peut alors se réécrire comme [Kennett, 1983] :

$$\begin{aligned}
&\partial_z \sigma_{rz} + \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1}\partial_\phi \sigma_{r\phi} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) = \rho \partial_{tt} u_r - \rho f_r, \\
&\partial_z \sigma_{\phi z} + \partial_r \sigma_{r\phi} + r^{-1}\partial_\phi \sigma_{\phi\phi} + 2r^{-1}\sigma_{r\phi} = \rho \partial_{tt} u_\phi - \rho f_\phi, \\
&\partial_z \sigma_{zz} + \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1}\partial_\phi \sigma_{\phi z} + r^{-1}\sigma_{rz} = \rho \partial_{tt} u_z - \rho f_z.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Afin de résoudre ces équations, il faut d'abord résoudre le problème homogène [Kennett, 1983], c'est-à-dire résoudre le problème sans termes de force extérieure $\mathbf{f}$. On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_V &= r^{-1}\left[\partial_r\left(r u_r\right) + \partial_\phi u_{phi}\right], \\
\sigma_{Vz} &= r^{-1}\left[\partial_r\left(r \sigma_{rz}\right) + \partial_\phi \sigma_{\phi z}\right], \\
u_H &= r^{-1}\left[\partial_r\left(r u_\phi\right) - \partial_\phi u_r\right], \\
\sigma_{Hz} &= r^{-1}\left[\partial_r\left(r \sigma_{\phi z}\right) - \partial_\phi \sigma_{rz}\right].
\end{aligned} \tag{1.3}$$

On introduit également le Laplacien horizontal ∇_1^2 d'une fonction Ψ :

$$\nabla_1^2 \Psi = r^{-1}\partial_r\left(r \partial_r \Psi\right) + r^{-2}\partial_{\phi\phi}\Psi. \tag{1.4}$$

En appliquant (1.3) et (1.4), les équations (1.2), sans termes de force extérieure $\mathbf{f}$, peuvent être réécrites en isolant les dérivées selon z :

$$\begin{aligned}
\partial_z u_z &= -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1} u_V + (\lambda + 2\mu)^{-1}\sigma_{zz}, \\
\partial_z u_V &= -\nabla_1^2 u_z + \mu^{-1}\sigma_{Vz}, \\
\partial_z \sigma_{zz} &= \rho \partial_{tt} u_z - \sigma_{Vz}, \\
\partial_z \sigma_{Vz} &= \left(\rho \partial_{tt} - 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\nabla_1^2\right) u_V - \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\nabla_1^2 \sigma_{zz}, \\
\partial_z u_H &= \mu^{-1}\sigma_{Hz}, \\
\partial_z \sigma_{Hz} &= \left(\rho \partial_{tt} - \mu \nabla_1^2\right) u_H.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Les quatre premières équations de (1.5) correspondent au couplage P-SV tandis que les deux dernières correspondent au couplage SH [Kennett, 1983].

Pour le cas anisotrope, il est possible de se référer à Woodhouse [1974].

Les équations (1.5) comprennent des dérivées partielles selon le temps ainsi que des variables horizontales r et ϕ. Les propriétés ne dépendant que de la profondeur, le but est de retirer leur dépendance aux variables horizontales et temporelles afin d'obtenir des équations différentielles ordinaires selon z.

La première étape consiste à appliquer une transformation de Fourier pour retirer la dépendance au temps. Dans un deuxième temps, deux transformations sont utilisées pour retirer les variables horizontales : une transformation de Hankel d'ordre m de la distance radiale r, et une transformation de Fourier finie sur la variable angulaire ϕ

[Kennett, 1983].

$$\begin{aligned} F_m\left[\Psi\right] &= \hat{\Psi}(k,m;\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\int_0^{\infty} drrJ_m(kr)\int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-im\phi}\Psi\left(r,\phi;t\right), \end{aligned} \tag{1.6}$$

avec J_m la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m, utilisée dans la transformation de Hankel.

En appliquant la transformation (1.6) sur chaque variable de contraintes et de déplacements impliquée dans l'équation (1.5), il est possible d'obtenir un nouvel ensemble de variables pour chaque ordre azimutal m :

$$\begin{aligned} U &= \hat{u}_z, & P &= \omega^{-1}\hat{\sigma}_{zz}, \\ V &= -k^{-1}\hat{u}_V, & S &= -(\omega k)^{-1}\hat{\sigma}_{Vz}, \\ W &= -k^{-1}\hat{u}_H, & T &= -(\omega k)^{-1}\hat{\sigma}_{Hz}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

En appliquant (1.6) sur l'équation (1.5), avec ces nouvelles variables, on obtient un nouvel ensemble d'équations différentielles ordinaires. Si ces équations sont exprimées en termes de la lenteur horizontale $p = k/\omega$, on obtient, dans le cas P-SV [Kennett, 1983] :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} U \\ V \\ P \\ S \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & p(1-2\beta^2/\alpha^2) & (\rho\alpha^2)^{-1} & 0 \\ -p & 0 & 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ -\rho & 0 & 0 & p \\ 0 & \rho[vp^2-1] & -p(1-2\beta^2/\alpha^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \\ S \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

avec

$$\begin{aligned} &\alpha = [(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2} \text{ la vitesse des ondes P,} \\ &\beta = [\mu/\rho]^{1/2} \text{ la vitesse des ondes S,} \\ &v = 4\beta^2(1-\beta^2/\alpha^2). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Pour le cas SH, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ \rho[\beta^2p^2-1] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Pour le cas isotrope, les coefficients des matrices (1.8) et (1.10) sont indépendants de l'ordre azimutal m. La dépendance en m ne survient que lorsque le terme source f est ajouté dans le cas de l'équation d'onde hétérogène.

Ces équations (1.8) et (1.10) sont les équations d'ondes qui vont être homogénéisées.

Afin de simplifier la lecture, on introduit les notations suivantes :

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_V = \begin{pmatrix} U \\ V \\ P \\ S \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\mathbf{A}_V = \omega \begin{pmatrix} 0 & p(1-2\beta^2/\alpha^2) & (\rho\alpha^2)^{-1} & 0 \\ -p & 0 & 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ -\rho & 0 & 0 & p \\ 0 & \rho[vp^2-1] & -p(1-2\beta^2/\alpha^2) & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_H = \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{A}_H = \omega \begin{pmatrix} 0 & (\rho\beta^2)^{-1} \\ \rho\left[\beta^2 p^2 - 1\right] & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Les équations (1.8) et (1.10) peuvent ainsi être réécrites

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\mathcal{Y}}_q = \mathbf{A}_q \boldsymbol{\mathcal{Y}}_q, \tag{1.15}$$

avec q pouvant valoir soit V (dans le cas P-SV) ou H (dans le cas SH). Afin de davantage simplifier les notations, l'indice q sera omis dans la suite, car le développement des équations est identique dans les deux cas.

Les conditions de surface libre de $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_q$ dépendent de P, S et de T, et donc de $\hat{\sigma}_{zz}$, σ_{rz} et $\sigma_{\phi z}$ (respectivement les composantes horizontales et verticales de la traction). Les conditions aux limites associées à l'équation (1.15) peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_V(0,k,m,\omega)]_3 &= 0, \\ [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_V(0,k,m,\omega)]_4 &= 0, \\ [\boldsymbol{\mathcal{Y}}_H(0,k,m,\omega)]_2 &= 0, \end{aligned} \tag{1.16}$$

avec $[.]_i$ la i^{th} composante d'un vecteur. Comme précédemment mentionnée, la dépendance envers l'ordre azimutal m provient uniquement du terme source, qui est nul dans le cas du problème homogène.

1.2 Homogénéisation à deux échelles des milieux stratifiés

L'homogénéisation à deux échelles de l'équation d'ondes a d'abord été développée par Capdeville et Marigo [2007] pour des géométries sphériques, c'est-à-dire pour l'échelle globale. Dans la partie 1.1, l'équation d'ondes a été réécrite sous la forme d'une équation différentielle de premier ordre dans un référentiel cylindrique. Cette équation est équivalente à l'équation d'ondes qui est homogénéisée dans Capdeville et Marigo [2007]. Mais le référentiel géométrique utilisé est différent, ce qui change le contenu des matrices $\mathbf{A}_q$ et $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_q$. Toutefois, ces différences ne modifient en rien le développement mathématique de l'homogénéisation. De ce fait, le développement des équations suivant se repose fortement sur le travail de Capdeville et Marigo [2007].

Avant de formellement développer l'homogénéisation, une formalisation des outils mathématiques utilisés est nécessaire.

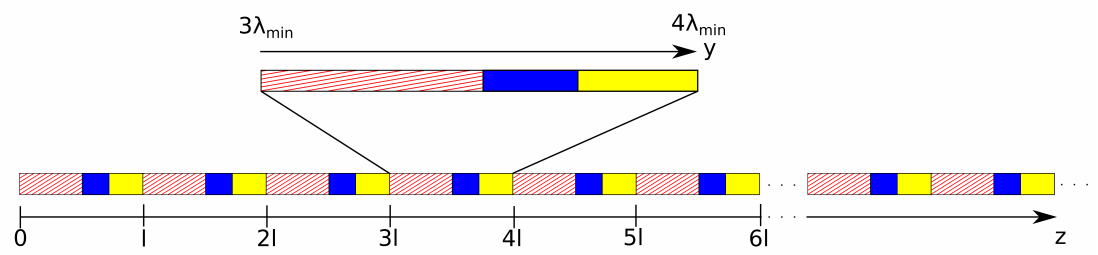


FIGURE 1.1 – Milieu périodique 1D dont les propriétés varient selon l'axe z. L'axe y correspond à un zoom de taille l sur une cellule périodique. Inspiré de Capdeville et al. [2020].

1.2.1 Outils mathématiques de l'homogénéisation périodique

1.2.1.1 Fonction périodique

L'homogénéisation se base sur l'utilisation de fonctions périodiques. En une dimension, une fonction périodique est une fonction h, pour laquelle une période T existe telle que, pour n'importe quelle variable d'espace x, $h(x+T) = h(x)$.

L'homogénéisation utilise la séparation de l'espace en deux échelles distinctes : les grandes échelles et les petites échelles. Une définition plus précise de ce que "grandes" et "petites" signifie sera introduite plus tard lors du développement de l'homogénéisation. Dans la suite, pour toute fonction à deux variables $h(x, y)$, nous utilisons x pour désigner les grandes échelles et y les petites échelles.

On suppose une fonction $h(x, y)$ T-périodique en y, c'est à dire que $h(x, y+T) = h(x, y)$. On définit la "moyenne cellulaire" de h comme

$$\langle h \rangle (x) = \frac{1}{T} \int_0^T h(x, y) dy. \tag{1.17}$$

Quand bien même la notion de cellule n'est pas encore définie, une explication rapide est de considérer une partie de h autour de x, de taille T en y (Figure 1.1). Une définition plus précise de la cellule est donnée en Section 1.2.2.

Cette fonction h, T-périodique en y, possède des propriétés intéressantes :

$$\partial_y h = 0 \Leftrightarrow h(x, y) = \langle h \rangle (x) \tag{1.18}$$

et

$$\langle \partial_y h \rangle = 0. \tag{1.19}$$

Ces deux propriétés peuvent être aisément démontrées en utilisant l'intégration par parties et la périodicité en T.

On introduit désormais $\mathcal{T}$ l'espace fonctionnel des fonctions à deux variables T-périodique dans la seconde variable. $\mathcal{T}$ possède des propriétés intéressantes pour l'homogénéisation. Supposons $(g, h) \in \mathcal{T}^2$. Alors le produit de ces deux fonctions $g.h$ appartient également à $\mathcal{T}$. Dans les faits, n'importe quelle fonction $h \in \mathcal{T}$ reste dans $\mathcal{T}$ après n'importe quelle opération non linéaire [Capdeville et al., 2020]. Cette dernière propriété permet d'assurer que les petites et grandes échelles restent séparées après des

opérations mathématiques.

1.2.2 Homogénéisation périodique

1.2.2.1 Description du problème de l'homogénéisation

L'homogénéisation à deux échelles repose sur une réécriture de l'équation d'onde (1.15) en utilisant deux variables d'espaces z et y. Afin de simplifier la réécriture de l'homogénéisation, des hypothèses sur la géométrie du milieu sont imposées. On supposera par la suite que le milieu suit une géométrie cylindrique précédemment mentionnée (Section 1.1). On supposera également que les propriétés élastiques et de masse volumique suivent une même périodicité l. Mathématiquement, cela se traduit par $\mathbf{C}(z+l) = \mathbf{C}(z)$ et $\rho(z+l) = \rho(z)$. On suppose également que le champ d'ondes qui sera simulé possède une longueur d'onde minimale $\lambda_{min} = \frac{\alpha}{f_{max}}$, avec α la vitesse des ondes P et f_{max} la fréquence maximale du champ d'ondes simulé. On introduit $\epsilon = l/\lambda_{min}$, un paramètre indiquant le degré de séparation des "petites" et "longues" échelles. Enfin, on suppose que la périodicité du modèle l est petite par rapport à la longueur d'onde minimale du champ d'ondes λ_{min}. Dans cette situation, on a $\epsilon << 1$. On définit maintenant y la variable spatiale "rapide" telle que $y = \frac{z}{\epsilon}$. y peut être vue comme un zoom sur les "petites" échelles (Fig. 1.1). Par construction, y est λ_{min}-périodique.

Lors du passage à la limite $\epsilon \to 0$, toute variation de y n'induit que de très petites variations en z. De ce fait, y et z sont considérés comme étant des variables indépendantes. Sous cette hypothèse, la dérivée selon z devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \to \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.20}$$

Comme $\mathbf{A}$ dépend de l (par construction du fait de la séparation en "petite" et "grande" échelles), il dépend également de ϵ. De ce fait, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ (Eq. (1.11)) dépend également de ϵ. Cette dépendance en ϵ sera indiquée en temps qu'exposant par la suite. L'équation d'ondes (1.15) peut être réécrite comme :

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{\epsilon}(z, y, \omega) = \mathbf{A}^{\epsilon}(z, \omega)\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{\epsilon}(z, y, \omega). \tag{1.21}$$

Par construction, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ est également λ_{min}-périodique. Par conséquent, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ appartient à $\mathcal{T}$. On définit ensuite :

$$\mathbf{S}(z, y) = \mathbf{A}^{\epsilon}(z). \tag{1.22}$$

Par construction, $\mathbf{S}(x)$ est l-périodique (car $\mathbf{A}$ dépend de l) et est donc λ_{min}-périodique en y. Dans la suite, la dépendance en z de $\mathbf{S}(y)$ sera omise. Enfin, on suppose que, pour un ϵ et un ω donnée, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ dépend des petites échelles et des grandes échelles, et qu'il peut être écrit comme une expansion en série de puissance en ϵ :

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{\epsilon}(z) = \sum_{i=-1}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{\mathcal{Y}}^i \left(z, \frac{z}{\epsilon}\right). \tag{1.23}$$

Due à la relation (1.1) de dérivation entre le déplacement et la traction, pour que l'expansion du déplacement commence à 0, il est nécessaire que l'expansion de la traction

commence à -1. En introduisant (1.20) et (1.22) dans (1.21) et (1.23), et en identifiant les coefficients de chaque ϵ^i, on obtient une séquence d'équations en i :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^i}{\partial z} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{i+1}}{\partial y} = \mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{Y}}^i. \tag{1.24}$$

L'équation (1.24) a, pour chaque i, les mêmes conditions aux limites que (1.15) (c'est à dire les conditions aux limites détaillées équations (1.16))

1.2.2.2 Résolution du problème de l'homogénéisation

Résoudre le problème de l'homogénéisation nécessite de résoudre la séquence d'équations (1.24) pour chaque i.
Pour $i = -2$, (1.24) devient

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1}}{\partial y} = 0. \tag{1.25}$$

En utilisant la propriété (1.18), on obtient directement

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1} = \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1} \right\rangle. \tag{1.26}$$

Pour $i = -1$, en prenant la moyenne cellulaire de (1.24), en utilisant (1.26) et (1.19), il est possible de montrer que

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1}}{\partial z} = \langle \mathbf{S} \rangle \, \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1}. \tag{1.27}$$

Ce résultat est facilement démontrable en utilisant la linéarité de l'opérateur $\langle . \rangle$ avec (1.26). Cependant, la composante de déplacement de $\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1}$ est, par définition de $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$, nulle (car le déplacement ne commence qu'à partir de 0 dans l'expansion en série de puissance). De plus, en utilisant l'expression de $\langle S \rangle$ (voir la section 1.3) et (1.18), on peut montrer que l'unique solution de (1.27) est $\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{-1} = 0$.
En réintroduisant ce résultat dans (1.24), on obtient immédiatement

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{0}}{\partial y} = 0. \tag{1.28}$$

En utilisant les propriétés de la moyenne cellulaire (1.18), on trouve que

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}^{0} = \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{0} \right\rangle. \tag{1.29}$$

Ce résultat est très important pour l'homogénéisation, car il montre que l'ordre 0 de l'homogénéisation dépend uniquement des grandes échelles z.

Pour $i = 0$, en prenant la moyenne cellulaire de (1.24) et en utilisant (1.29), on obtient l'équation d'homogénéisation d'ordre 0

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{0}}{\partial z} = \langle \mathbf{S} \rangle \, \boldsymbol{\mathcal{Y}}^{0}, \tag{1.30}$$

avec les conditions limites

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{\mathcal{Y}}_V^0(0,k,m,\omega)\right]_3 &= 0,\\ \left[\boldsymbol{\mathcal{Y}}_V^0(0,k,m,\omega)\right]_4 &= 0,\\ \left[\boldsymbol{\mathcal{Y}}_H^0(0,k,m,\omega)\right]_2 &= 0.\end{aligned} \tag{1.31}$$

L'équation homogénéisée d'ordre 0 est semblable à (1.21), mais avec des coefficients élastiques homogénéisés. Une propriété remarquable de l'ordre 0 est que $\langle S\rangle$ reproduit les résultats de Backus [1962]. Ce résultat reste vrai en géométrie cylindrique.

Afin de le montrer, une analyse précise du contenu de $\langle S\rangle$ est nécessaire. Cette analyse est réalisée dans la Section 1.3.

En réintroduisant (1.30) dans (1.24), pour $i = 0$, on obtient également

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1}{\partial y}(y) = \left(\mathbf{S}(y) - \langle \mathbf{S}\rangle\right)\boldsymbol{\mathcal{Y}}^0. \tag{1.32}$$

On introduit maintenant le correcteur d'ordre 1 $\mathbf{X}^1(y)$, solution de

$$\frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial y}(y) = \mathbf{S}(y) - \langle \mathbf{S}\rangle \tag{1.33}$$

Par construction de $\mathbf{S}$, $\mathbf{X}^1$ est périodique en y. Afin d'assurer qu'il n'existe qu'une unique solution, on impose $\left\langle \mathbf{X}^1\right\rangle = 0$. Grâce à $\mathbf{X}^1$, on peut exprimer la contribution de l'ordre 1 comme

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}^1 = \mathbf{X}^1\boldsymbol{\mathcal{Y}}^0 + \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1\right\rangle. \tag{1.34}$$

Pour $i = 1$, la moyenne cellulaire de (1.24) donne

$$\frac{\partial \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1\right\rangle}{\partial z} = \left\langle \mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{Y}}^1\right\rangle. \tag{1.35}$$

En utilisant le correcteur d'ordre 1 (1.34), cette expression devient

$$\frac{\partial \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1\right\rangle}{\partial z} = \langle \mathbf{S}\rangle \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1\right\rangle + \left\langle \mathbf{S}\mathbf{X}^1\right\rangle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^0. \tag{1.36}$$

Cette équation a la même forme que l'équation d'ordre 0 (1.30) avec un terme additionnel de force de volume $\left\langle \mathbf{S}\mathbf{X}^1\right\rangle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^0$. Ce dernier peut cependant être calculé en utilisant la solution de l'ordre 0. Afin que $\boldsymbol{\mathcal{Y}}^1$ puisse satisfaire les conditions limite de surface libre, $\left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1\right\rangle$ doit satisfaire les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\left[\left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}_V^1\right\rangle(0,k,m,\omega)\right]_3 &= -\left[\mathbf{X}_V^1(0)\boldsymbol{\mathcal{Y}}_V^0(0,k,m,\omega)\right]_3,\\ \left[\left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}_V^1\right\rangle(0,k,m,\omega)\right]_4 &= -\left[\mathbf{X}_V^1(0)\boldsymbol{\mathcal{Y}}_V^0(0,k,m,\omega)\right]_4,\\ \left[\left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}_H^1\right\rangle(0,k,m,\omega)\right]_2 &= -\left[\mathbf{X}_H^1(0)\boldsymbol{\mathcal{Y}}_H^0(0,k,m,\omega)\right]_2.\end{aligned} \tag{1.37}$$

Un autre résultat de $i = 1$ est

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^2}{\partial y} = \mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{Y}}^1 - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1}{\partial y}. \tag{1.38}$$

En utilisant (1.34) et (1.36), et en refactorisant, on obtient

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{Y}}^2}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial y} \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1 \right\rangle + \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial y} \boldsymbol{\mathcal{Y}}^0, \tag{1.39}$$

avec

$$\frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial y}(y) = \mathbf{S}\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}^1 \langle \mathbf{S} \rangle - \left\langle \mathbf{S}\mathbf{X}^1 \right\rangle. \tag{1.40}$$

Cette dernière équation est légèrement différente de celle correspondante dans Capdeville et Marigo [2007] (equation 38). Il y a en effet une erreur dans ce dernier avec l'opérateur de moyenne cellulaire qui a été oublié dans le terme $\mathbf{X}^1 \langle \mathbf{S} \rangle$. $\mathbf{X}^2$ est périodique par construction. En imposant $\left\langle \mathbf{X}^2 \right\rangle = 0$, $\mathbf{X}^2$ possède une unique solution.

Pour $i = 2$, en prenant la moyenne cellulaire de (1.24), une factorisation et utiliser les correcteurs d'ordre 1 et 2 permet d'obtenir

$$\frac{\partial \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^2 \right\rangle}{\partial z} = \langle \mathbf{S} \rangle \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{S}\mathbf{X}^1 \right\rangle \left\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1 \right\rangle + \left\langle \mathbf{S}\mathbf{X}^2 \right\rangle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^0. \tag{1.41}$$

Cette équation possède des conditions aux limites semblables à (1.37). Il est théoriquement possible de poursuivre ce développement pour des i allant à l'infini, mais nous choisissons ici de nous arrêter à l'ordre 2 car les applications de cette thèse ne dépassent pas l'ordre 1 et la discussion des résultats mentionne jusqu'à l'ordre 2, les ordres supérieurs ajoutant un niveau de détail qui n'est a priori pas requis pour ce travail.

Il est important de faire remarquer que jusqu'à présent, tout ce développement repose sur l'équation (1.23) sans preuve ni justification de sa convergence. Cette convergence est clef pour la résolution du problème d'homogénéisation. Ainsi, cette convergence a beaucoup été étudiée et a été rigoureusement démontrée dans le cas périodique [Nguetseng, 1989, Allaire, 1992].

1.2.3 Outil mathématique pour l'homogénéisation non-périodique

1.2.3.1 Filtrage et espace de Fourier

L'homogénéisation non périodique repose fortement sur l'utilisation de filtre et l'espace de Fourier. Le but de cette sous-section est de présenter certaines de leurs propriétés mathématiques qui nous intéressent pour la suite.

Un filtre passe-bas est défini comme :

$$\mathcal{F}(h)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, z) \omega_{\lambda_{min}}(y - z) dz, \tag{1.42}$$

avec $\omega_{\lambda_{min}}$ une ondelette filtre avec une fréquence de coupure de λ_{min}.

1.2.3.2 Fonction non périodique

Dans le cas de fonction non périodique en y, il est nécessaire de définir un nouvel espace fonctionnel $\mathcal{V}$, analogue à l'espace $\mathcal{T}$ qui regroupe les fonctions à deux variables tel que les "petites" variations existent dans le sens de Fourier. C'est-à-dire qu'il existe une variable de séparation des échelles $k_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ telles que, dans le domaine de Fourier, pour une fonction h, n'importe quelle valeur $h(k)$, avec $|k| > k_0$, est considérée dans les petites échelles. Comment choisir λ_0 sera discuté dans la section 1.2.4.

On définit le nouvel espace fonctionnel

$$\mathcal{V} = \{h(x,y),\ \ Y\text{-periodique en } y \text{ tel que } \mathcal{F}(h)(x,y) = \langle h \rangle (x)\}. \tag{1.43}$$

avec Y un segment en y, centré autour de x. Un exemple de construction de Y sera donné dans la section 1.2.4.

$\mathcal{V}$ représente donc l'espace fonctionnel des fonctions qui ne contiennent que des variations rapides plus une valeur constante en y.

1.2.4 Homogénéisation non-périodique

Dans la réalité, les milieux géologiques sont rarement périodiques. Il est donc nécessaire de relaxer la condition de périodicité en l tout en gardant les échelles séparées. Il faut donc construire $\mathbf{S}$ comme une extension de $\mathbf{A}^\epsilon$, telle que $\mathbf{A}^\epsilon \in \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ a été introduit dans la section 1.2.3.2). Comme le milieu n'est pas périodique, l ne peut pas être défini. On ne peut donc plus l'utiliser pour séparer les échelles et définir ϵ. Pour pallier à ce fait, on définit λ_0, un paramètre défini par l'utilisateur, qui sert à séparer les petites et grandes échelles. N'importe quelle valeur de λ_0 est valide tant que $\epsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_{min}}$ est petit (inférieur à 1). Toutes les précédentes dépendances en ϵ peuvent maintenant être remplacées par des dépendances en ϵ_0. Pour construire une extension $\mathbf{S}$ de $\mathbf{A}^{\epsilon_0}$, une première étape est d'étendre $\mathbf{A}^{\epsilon_0}(z)$ pour $z < 0$, c'est-à-dire étendre $\mathbf{A}^{\epsilon_0}$ au-dessus de la surface libre. Il existe une infinité de possibilités d'extension de $\mathbf{A}^{\epsilon_0}$ possible. Toutefois, deux sont très communes [Capdeville et Marigo, 2007] :
- l'extension symétrique : $\mathbf{A}^{\epsilon_0}(z) = \mathbf{A}^{\epsilon_0}(-z)$ pour $z < 0$.
- l'extension par dernière valeur : $\mathbf{A}^{\epsilon_0}(z) = \mathbf{A}^{\epsilon_0}(0)$ pour $z < 0$.

$\mathbf{A}^{\epsilon_0}$ est ensuite séparé en deux : Une part "lisse" $\mathbf{A}^s$ et une part "rapide" $\mathbf{A}^f$ tel que $\mathbf{A}^{\epsilon_0} = \mathbf{A}^s + \mathbf{A}^f$. On défini maintenant $Y(z,y)$ un segment centré en z de taille λ_0 tel que $Y(z) = \left[z - \frac{\lambda_0}{2}, z + \frac{\lambda_0}{2}\right]$.

On introduit une nouvelle fonction $\tilde{\mathbf{S}}(z,.)$ telle que pour $z' \in Y(z)$, $\tilde{\mathbf{S}}(z,z') = \mathbf{A}^f(z')$. $\tilde{\mathbf{S}}$ est une fonction qui, pour chaque z, possède des variations rapides autour de ce point dans une cellule Y.

$\tilde{\mathbf{S}}(z,.)$ est ensuite étendu à l'axe y en entier en répétant périodiquement la cellule Y existante, et ce pour chaque z. Après cette opération, $\tilde{\mathbf{S}}(z,y)$ est maintenant défini pour tout z et pour tout y.

Enfin, on définit

$$\mathbf{S}(z,y) = \mathbf{A}^s(z) + \tilde{\mathbf{S}}\left(z, \frac{z}{\epsilon_0}\right). \tag{1.44}$$

Par construction, $\mathbf{S}(z,y)$ appartient à $\mathcal{V}$. Maintenant que $\mathbf{S}(z,y)$ est défini pour des milieux non périodiques, il est possible d'utiliser le même développement que dans le cas périodique. Afin de pouvoir terminer la définition de $\mathbf{S}$, il faut également déterminer une valeur de $\mathbf{A}^s(z)$. Un choix naturel de $\mathbf{A}^s(z)$ est :

$$\mathbf{A}^s(z) = \mathcal{F}(\mathbf{A}^\epsilon)(z). \tag{1.45}$$

Une telle définition de $\mathbf{A}^s(z)$ permet d'assurer qu'il ne contient aucune des petites échelles.

Un résultat notable de l'homogénéisation est que, au niveau des conditions aux limites, dans le cas de l'extension symétrique, le correcteur périodique $\mathbf{X}^1$ est nul. De plus, il semble que dans la plupart des cas, le terme $\langle \boldsymbol{\mathcal{Y}}^1 \rangle + \langle \mathbf{S}\mathbf{X}^1 \rangle$ de l'équation d'homogénéisation (1.36) est également nul. Les solutions d'ordre 0 et d'ordre 1 sont alors égales au niveau de la surface libre. Ce résultat semble être général pour le cas de l'extension symétrique [Capdeville et Marigo, 2007].

1.3 Expression de $\langle S \rangle$

Cette section a pour but de décrire le contenu de $\langle S \rangle$ et de montrer que l'on retrouve des résultats connus de l'homogénéisation.

Backus [1962] utilise les paramètres élastiques A, C, F, L, N. Ces paramètres sont reliés à la vitesse des ondes à travers les expressions :
$V_{pv} = \sqrt{C/\rho}$ pour les ondes P verticales,
$V_{sv} = \sqrt{L/\rho}$ pour les ondes S verticalement polarisées,
$V_{ph} = \sqrt{A/\rho}$ pour les ondes P horizontales,
$V_{sh} = \sqrt{N/\rho}$ pour les ondes S horizontalement polarisées,
$\eta = \frac{F}{A-2L}$ pour la caractérisation des vitesses à des angles différents de l'horizontale ou de la verticale.

Pour le cas isotrope, on a $A = C = \lambda + 2\mu$, $L = N = \mu$ et $F = \lambda$. Pour calculer $\langle S \rangle$, il faut calculer la moyenne cellulaire de chaque composant de $\mathbf{A}_q$. On note $\mathbf{A}_{q,ij}$, le composant de la i-ème ligne et j-ème colonne, avec q valant soit V, soit H (suites aux équations (1.12) et (1.14)). On obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_{V,01} \rangle &= \left\langle k \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle k \left(1 - 2\frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \right) \right\rangle \\ &= k \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \\ &= k \left\langle \frac{F}{C} \right\rangle . \end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_{V,02} \rangle &= \left\langle \left(\rho\alpha^2 \right)^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\rho\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{C} \right\rangle \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}_{V,13} \rangle &= \left\langle \left(\rho\beta^2\right)^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\rho\frac{\mu}{\rho}\right)^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{L} \right\rangle\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}_{V,31} \rangle &= \left\langle \rho\left(4\beta^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)p^2 - 1\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \rho\left(4\frac{\mu}{\rho}\left(1-\frac{mu}{\lambda+2\mu}\right)p^2 - 1\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{4\mu\lambda+4\mu^2}{\lambda+2\mu}p^2 - \rho \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(\lambda+2\mu)^2-\lambda^2}{\lambda+2\mu}p^2 - \rho \right\rangle \\ &= \left\langle A - \frac{F^2}{C} \right\rangle p^2 - \langle\rho\rangle\end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}_{H,10} \rangle &= \left\langle \rho\left(\beta^2 p^2 - 1\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\rho\frac{\mu}{\rho}p^2 - \rho\right) \right\rangle \\ &= \left\langle Np^2 - \rho \right\rangle \\ &= \langle N\rangle\, p^2 - \langle\rho\rangle\end{aligned} \tag{1.50}$$

On peut facile de voir que les quantités moyennes requises pour calculer $\langle \mathbf{S} \rangle$ sont $\langle N \rangle$, $\left\langle A - \frac{F^2}{C} \right\rangle$, $\left\langle \frac{1}{L} \right\rangle$, $\left\langle \frac{1}{C} \right\rangle$ et $\left\langle \frac{F}{C} \right\rangle$. Ce résultat est le même que celui trouvé par Backus [1962]. Une autre observation notable est que les propriétés homogénéisées sont isotropes transverses quand bien même le milieu originel est isotrope.

Conclusion

Dans ce chapitre, l'équation d'onde a été écrite dans un référentiel cylindrique. Cette écriture cylindrique est adaptée aux milieux horizontalement stratifiés. Cette écriture de l'équation d'ondes a ensuite été homogénéisée. Un développement détaillé de l'homogénéisation en milieu périodique a été réalisé. Ce développement est très semblable au développement existant de l'homogénéisation en géométrie sphérique, mais ce dernier est adapté à l'échelle globale, tandis que la géométrie cylindrique peut être appliquée à des échelles plus locales. Une description du problème non périodique, et de sa résolution a ensuite été réalisée. Des résultats connus de l'homogénéisation (développé dans d'autres géométries) ont été retrouvés. Cette nouvelle formulation du problème

d'homogénéisation va nous permettre de l'appliquer dans un contexte régional et le développement des conditions de surface libre rend la théorie adaptée pour l'étude des effets de site et des ondes de surface. Les contraintes de la géométrie cylindrique font que cette théorie ne peut pas être appliquée à tous les modèles géologiques mais semble adaptée pour les modèles de bassins sédimentaires, qui sont créés par empilement de sédiments.

Chapitre 2

Homogénéisation : application sur des modèles synthétiques

Sommaire

2.1 Application à un modèle stratifié (*layer cake*) 30
2.2 Application a un modèle de bassins sédimentaire 32

Résumé Des simulations sont réalisées dans des milieux synthétiques afin de pouvoir tester la théorie. Comme les bassins sédimentaires ne suivent pas une géométrie cylindrique, une approche dite « multi-1D » a été utilisée. Les simulations dans des milieux respectant parfaitement une géométrie cylindrique montrent un bon respect de la simulation de référence, tandis que les simulations dans des modèles de bassins simplifiés montrent une plus forte erreur.

2.1 Application à un modèle stratifié (*layer cake*)

Dans le but de tester notre homogénéisation cylindrique, nous considérons tout d'abord un modèle synthétique vérifiant les hypothèses de la géométrie cylindrique (Fig. 2.1). Les 200 premiers mètres de ce modèle consistent en une succession de douze couches fines horizontales présentant des contrastes de propriétés importants. Les vitesses de propagation des ondes et les masses volumiques dans ces couches sont sélectionnées aléatoirement dans le champ de valeurs des propriétés des sédiments donné par Anquez et al. [2021] pour la basse vallée du Var. La partie inférieure du modèle, quant à elle, est composée d'une unique couche homogène dont les valeurs des propriétés physiques correspondent à celle d'une roche plus indurée. Géologiquement, un tel milieu correspond à un *layercake* sédimentaire au-dessus d'un socle induré. La figure 2.1 montre le profil de la vitesse des ondes S dans ce milieu, ainsi que la vitesse V_{Sv} dans le milieu homogénéisé calculé avec $\epsilon_0 = 0.75$, $\lambda_0 = 17.5\,m$, et une extension symétrique. Ces profils 1D sont étendus latéralement afin de construire des milieux 2D. La figure 2.2) montre le milieu 2D initial.

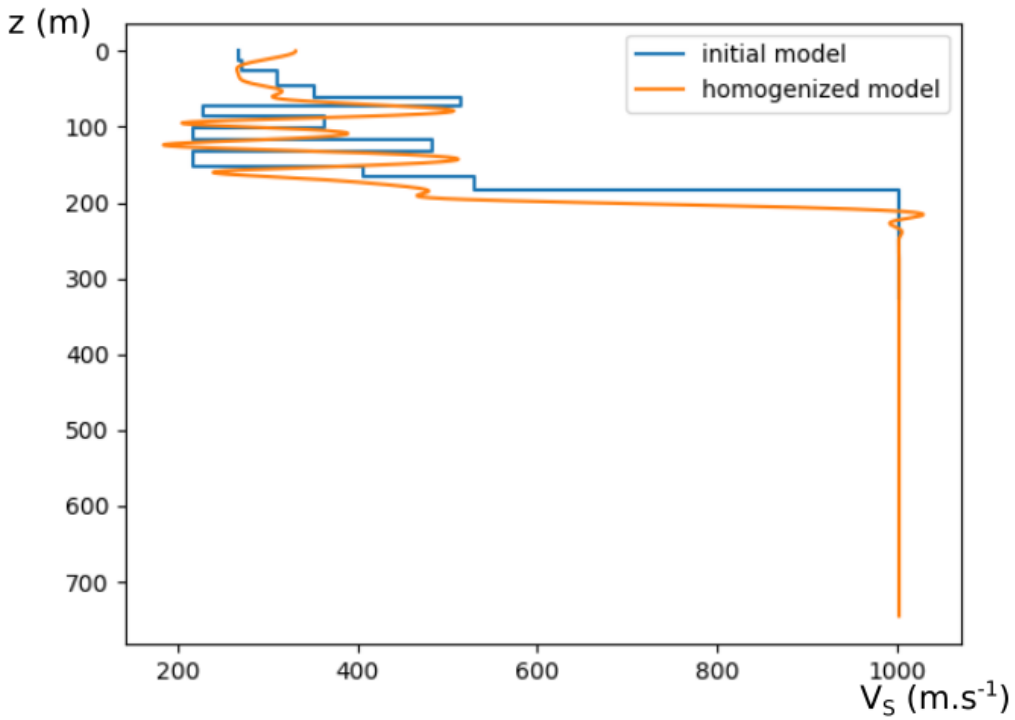


FIGURE 2.1 – Vitesse de propagation des ondes S (V_S) dans le milieu initial et vitesse de propagation des ondes S polarisées verticalement (V_{Sv}) dans le milieu homogénéisé.

Ce modèle 1D est ensuite interpolé latéralement afin de construire un modèle 2D (Fig. 2.2). Il serait facile d'étendre ce modèle en un modèle 3D, mais une étude précise des problèmes en 2D avec des milieux plus complexes a été priorisée et sera abordée en Section 2.2.

Afin de mesurer l'impact de l'homogénéisation, une simulation de la propagation des

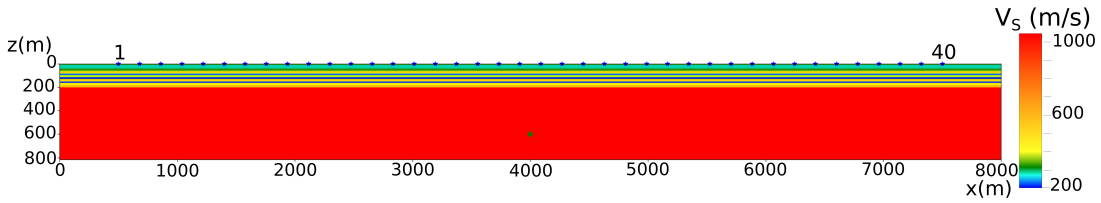


FIGURE 2.2 – Vitesse des ondes S dans le *layercake* 2D initial. Les récepteurs et la source utilisés dans les simulations de la propagation des ondes sont représentés par des étoiles bleues et une étoile verte, respectivement.

ondes P-SV est réalisée. L'impact est quantifié grâce à l'erreur de la simulation dans le milieu homogénéisé par rapport à la même simulation dans le milieu originel. L'erreur considérée est la *Root Mean Square Error* (RMSE) du déplacement :

$$E = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{\int_0^{t_{sim}}(\mathbf{u}-\mathbf{u}^{ref})^2(x_i,t)dt}{\int_0^{t_{sim}}(\mathbf{u}^{ref})^2(x_i,t)dt}}, \tag{2.1}$$

avec N le nombre de récepteurs (dans notre cas, $N = 40$), $\mathbf{u}$ le déplacement dans le milieu homogénéisé, et $\mathbf{u}^{ref}$ le déplacement dans le milieu initial.

La source utilisée consiste en une force élastique verticale basale dans le plan P-SV et la durée simulée est de 2,25 secondes. La simulation est réalisée grâce à la méthode des éléments spectraux (SEM) [Komatitsch et al., 2005] en utilisant le logiciel Specfem2D. Une grille cartésienne est utilisée pour mailler les milieux. Dans le milieu originel, ce maillage est conforme aux strates. Le milieu homogénéisé est entièrement lisse. Il a donc été maillé entièrement régulièrement. Les éléments du maillage font 5*3," m dans le milieu homogénéisé. Les éléments ont une taille similaire dans le maillage cartésien mais varient légèrement verticalement afin de permettre la conformité du maillage. Le pas de temps utilisé est de $5E-5\,s$ et la fréquence dominante simulée f_0 est de $5Hz$. Enfin, le degré polynomial utilisé est 6. Les sources et récepteurs sont montrés dans la Figure 2.2 et sont à la même position pour les deux simulations. Il est important de noter que les récepteurs sont placés le long de la surface libre, car le but sur le long terme initié dans ce travail est d'étudier l'effet de l'homogénéisation sur les ondes de surface. Les deux simulations ont été réalisées sur une grille cartésienne fine avec des *convolutional perfectly matched layer* (CPML) [Komatitsch et Martin, 2007] ajoutés le long des bords latéraux et basaux du modèle. Les deux simulations (celle de référence et celle en milieu homogénéisé) partagent donc le même maillage avec des éléments à la même résolution. La figure 2.3 montre le déplacement aux récepteurs en fonction de leur position. L'erreur E sur l'ensemble des récepteurs est de $0,011$. On peut voir que l'erreur est très faible dans le milieu homogénéisé donc que ce dernier suit très bien la solution de référence. La simulation montre des effets de résonance dans le bassin avec des réflexions notamment visibles proches du centre du modèle.

Ces résultats sont très positifs et montrent que lorsque le milieu considéré suit les hypothèses sur la géométrie du milieu, l'homogénéisation produit de très bons résultats. L'un des avantages de l'homogénéisation est l'amélioration du temps de calcul [Capdeville et al., 2020]. Comme les milieux homogénéisés sont lisses, le calcul de champs d'onde y est très peu coûteux. Il n'y a pas de variations spatiales plus petites que λ_0,

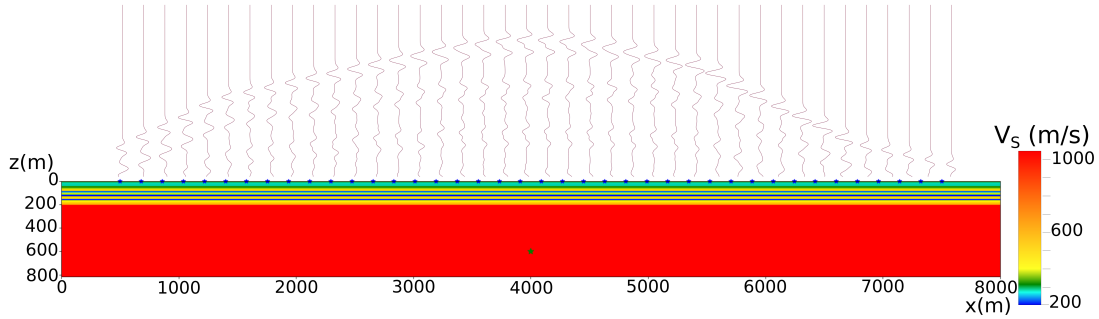


FIGURE 2.3 – Comparaison du déplacement entre le milieu de référence et le milieu homogénéisé. Les traces sont alignées avec la position des récepteurs.

il n'y a plus de structures géologiques que le maillage devrait honorer et la taille des éléments est contrainte uniquement par λ_0. Tout ceci permet de mailler beaucoup plus facilement un milieu homogénéisé, en utilisant moins et de plus gros éléments. Dans certains cas, l'homogénéisation a montré pouvoir accélérer le calcul de la simulation par plus de 260 fois par rapport à une référence [Capdeville et al., 2020]. Toutefois, les considérations de l'accélération produite par l'homogénéisation n'ont pas été traitées dans ce travail.

2.2 Application a un modèle de bassins sédimentaire

Notre homogénéisation fonctionne grâce à des hypothèses de géométrie cylindrique. Toutefois, un bassin sédimentaire ne suit pas cette géométrie. Afin de concilier les deux, une approche dite "multi-1D" est utilisée. Cette approche consiste à réaliser une multitude de profils 1D du bassin sédimentaire, qui seront homogénéisés facilement, car tous respectent la géométrie cylindrique individuellement. Le modèle 2D est ensuite reconstruit en juxtaposant tous les profils 1D à leur position originelle et en interpolant bilinéairement toutes valeurs qui ne seraient pas sur un de ces profils. On peut ainsi homogénéiser tous bassins sédimentaires. Un avantage de cette procédure est qu'elle est facilement étendable en 3D. Afin de travailler sur des modèles réalistes de bassin, il a été choisi d'utiliser des modèles synthétiques du bassin du Var [Rohmer et al., 2020]. Le bassin du Var est une zone moyennement sismique avec des enjeux économiques dus à la présence de la métropole de Nice, avec notamment le troisième plus grand aéroport de France. Cela fait que le modèle du bassin du Var est très grandement étudié, ce qui a permis d'en obtenir un modèle structural. Afin de vérifier que le "multi-1D" fonctionne sur des modèles à géométrie plus compliquée, un modèle synthétique à deux couches est construit (Figure 2.4). Ce modèle est créé pour pouvoir tester l'influence de la géométrie du bassin et si notre homogénéisation multi-1D arrive bien à reproduire ces effets. Les deux couches possèdent des propriétés différentes afin de modéliser les variations que l'on trouve entre le remplissage sédimentaire d'un bassin et la roche socle en dessous. Les valeurs de V_P, V_S, et ρ sont choisies selon les valeurs réelles trouvées à Nice [Anquez et al., 2021]. Plus précisément, pour le remplissage sédimentaire (en jaune dans la figure 2.4), on a $V_P = 600m.s^{-1}$, $V_S = 240m.s^{-1}$ et $\rho = 1900kg.m^{-3}$. Pour le socle, on choisit $V_P = 2234.s^{-1}$, $V_S = 1290m.s^{-1}$ et $\rho = 2300kg.m^{-3}$.

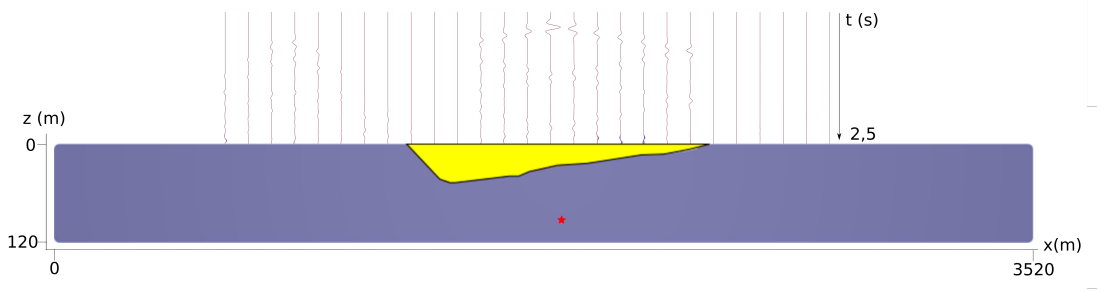


FIGURE 2.4 – Comparaison du déplacement entre le milieu de référence et le milieu homogénéisé. Les traces sont alignées avec la position des récepteurs.

Afin de limiter au plus les effets potentiels du multi-1D et sa perte inhérente de résolution et d'anisotropie, des profils sont réalisés tous les $1\,m$ dans le bassin. Finalement, λ_{min} et ϵ_0 sont imposés à $25\,m$ et à $0,75$ respectivement ce qui force $\lambda_0 = 17,5\,m$. Une homogénéisation d'ordre 0 est appliquée pour générer le milieu homogénéisé. La position de la source est montrée dans l'image 2.4. La source est un Ricker avec $f_0 = 5Hz$. La simulation consiste en une force élastique dans le plan SH. La Figure 2.4 montre les signaux obtenus par la simulation de référence et la simulation en milieu homogénéisé à chaque récepteur. La simulation est arrêtée prématurément à 2,5 secondes car on voit l'apparition d'une forte erreur. Cette erreur provient très probablement d'un problème technique sur l'utilisation de SpecFem2D et de l'introduction du milieu homogénéisé. Un calcul d'erreur sur l'ensemble des récepteurs avant 2,5 secondes donne une erreur globale de 0.023. De nouvelles simulations seraient nécessaires pour vérifier l'origine de cette erreur et permettre d'obtenir des simulations plus longues qui permettraient de mieux évaluer l'effet de l'homogénéisation sur la simulation. L'homogénéisation utilisée dans cette simulation était d'ordre 0 avec une extension en miroir. Des simulations aux ordres supérieurs permettraient d'obtenir de meilleurs résultats.

Chapitre 3

Homogénéisation adaptative

Sommaire

3.1 Homogénéisation avec filtrage adaptatif 36
3.1.1 Rappel théorique 36
3.1.2 Détermination de la longueur d'onde minimum 37
3.1.3 Comparaison de méthodes d'intégrations pour l'estimation de λ_{min} 38
3.1.4 Détermination des propriétés effectives 38
3.2 Application : premier résultat 40
3.2.1 Description du modèle 40
3.2.2 Propriétés effectives 40

Résumé Dans ce chapitre, une méthode automatique de détermination d'un λ_{min} local est proposée. Cette détermination automatique permet de modifier le filtrage des propriétés lors du processus d'homogénéisation par un filtrage local. Une rapide discussion de la sensibilité de cette méthode de détermination par rapport à la méthode d'intégration utilisée est réalisée. Afin d'observer les effets de ce nouveau filtrage adaptatif, des milieux à couches sont homogénéisés.

Le principe de l'homogénéisation à deux échelles a été présenté lors du chapitre précédent. Ce chapitre est le résultat de travaux d'un projet de Master de Laurine Andres que j'ai encadré. Le principe derrière l'homogénéisation adaptative est de ne plus avoir un unique ϵ_0 mais d'avoir un ϵ_0 qui varie dans le milieu afin d'être localement plus adapté et avoir une meilleure séparation des échelles partout dans le milieu. Avoir un λ_0 adaptatif permet de relâcher la contrainte géométrique associée à l'utilisation d'un λ_0 global et ouvre la voie à l'utilisation de maillage adaptatif avec des milieux homogénéisés. Un autre avantage d'un λ_0 adaptatif est qu'il permettrait de mieux prendre en compte les différences d'ordre de grandeur entre les propriétés du socle et le remplissage sédimentaire des bassins. De plus, le λ_0 globale utilisé en homogénéisation classique fait un modèle avec une résolution beaucoup plus élevée que nécessaire dans les zones à forte vitesse, ce qui peut être résolu par l'utilisation de l'homogénéisation adaptative. Toutefois, ce n'est pas la solution qui a été retenue dans ce travail, car le développement mathématique théorique nécessaire pour avoir un ϵ_0 adaptatif n'a pas été réalisé. L'approche choisie est d'utiliser un filtrage adaptatif. Étant donné que le formalisme utilisé dans ce travail est différent de celui utilisé précédemment, un rappel rapide des équations dans ce formalisme sera réalisé.

3.1 Homogénéisation avec filtrage adaptatif

3.1.1 Rappel théorique

Tout comme précédemment, ce travail se situe dans un cas 1D. On suppose que l'onde P se propage avec une longueur d'onde minimale λ_{min}. Pour rappel, le problème élastodynamique peut s'écrire :

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,t) = f(x,t), \tag{3.1}$$

avec ρ la masse volumique, $u(x,t)$ le déplacement, $\sigma(x,t)$ le tenseur des contraintes et f le terme de forces extérieures. On a également

$$\sigma(x,t) = E(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \tag{3.2}$$

avec E le module de Young.

On peut alors réécrire ces équations en tant que somme en appliquant l'extension asymptotique :

$$\begin{aligned} u(x;t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon_0^i u_i(x, \frac{x}{\epsilon_0}; t), \\ \sigma(x;t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \epsilon_0^i \sigma_i(x, \frac{x}{\epsilon_0}; t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

où ϵ_0 est la variable de séparation d'échelles de l'homogénéisation. On suppose toujours que $\varepsilon_0 \ll 1$. On peut donc à nouveau définir $y = \frac{x}{\epsilon_0}$ tel que x et y soient considérés comme des variables indépendantes, avec x représentant les grandes variations et y les petites variations. Dans le cas périodique, $\epsilon_0 = \frac{l}{\lambda_{min}}$, où l est la taille de la cellule périodique. Il en découle que l'introduction de la variable des petites échelles y nous permet

de réécrire les paramètres physiques : le module de Young $E(x)$ et la masse volumique $\rho(x)$ du milieu peuvent être considérés comme étant des quantités λ_{min}-périodique $E(y)$ et $\rho(y)$. De plus u_i et σ_i sont également supposé λ_{min-}périodiques en y. Ces hypothèses nous permettent de prendre la moyenne cellulaire de ces quantités, produisant des propriétés effectives. Ces propriétés effectives sont notées avec un astérisque par la suite. On obtient donc E^* le module de Young effectif et ρ^* la masse volumique effective.

Une simulation d'onde dans un tel milieu nous permet d'obtenir l'ordre 0 de l'homogénéisation (Eq. (3.3)).

Comme les milieux géologiques ne sont pas périodiques, il est impossible d'avoir une valeur de l pour définir ε. On utilise donc $\lambda_0 < \lambda_{min}$ un paramètre défini par l'utilisateur servant à séparer les échelles. On définit alors $\epsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_{min}} < 1$. ε_0 définit le degré de lissage du milieu homogénéisé ainsi que la précision du déplacement et contrainte d'ordre 0. La principale difficulté de l'homogénéisation non-périodique est de séparer les échelles de sorte que $E(x, y)$ et $\rho(x, y)$ ont une définition mathématiquement correcte (le lecteur est amené à se rapporter à Capdeville et al. [2020] ou à faire le parallèle avec le développement réalisé dans la section 1.2.4). Les résultats finaux permettent de définir les modules de Young et masses volumiques effectives tels que :

$$\begin{aligned} \rho^*(x) &= \mathcal{F}^{\lambda_0}(\rho), \\ E^*(x) &= \left[\mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{1}{E}\right)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\mathcal{F}^{\lambda_0}$ est un filtre passe-bas qui lisse les petites hétérogénéités.

3.1.2 Détermination de la longueur d'onde minimum

La longueur d'onde minimum introduite dans les sections précédentes est définie comme

$$\lambda_{min} = \frac{V}{f_{max}}, \tag{3.5}$$

ou f_{max} est la fréquence maximum émise par les forces extérieures f et V est la vitesse des ondes. V dépend quant à lui des propriétés effectives du milieu :

$$V = \sqrt{\frac{E^*}{\rho^*}}. \tag{3.6}$$

Il résulte de cette relation entre V et les propriétés effective que λ_{min}, qui est un paramètre d'entrée de l'homogénéisation, dépend du résultat de l'homogénéisation. En pratique, il est généralement suffisant d'utiliser une estimation de λ_{min} à travers V en utilisant une moyenne de n'importe quelle propriété. Le but de ce travail est de proposer une méthode systématique d'estimation de λ_{min}. Comme il peut varier dans l'espace, car les propriétés effectives varient dans l'espace dans le cas général de milieu non-périodique (Eq. (3.4)), il est nécessaire de calculer λ_{min} comme une fonction de x.

On commence avec une estimation de la longueur d'onde minimum :

$$\lambda_{min}^{loc}(x) = \frac{V^{loc}(x)}{f_{max}}, \tag{3.7}$$

ou $V^{loc} = \sqrt{E/\rho}$. Quand de petites échelles sont présentes, une telle longueur d'onde minimale locale peut être très différente de la réalité, car la vitesse des ondes V dans l'équation (3.5) dépend non seulement des propriétés locales $E(x)$ et $\rho(x)$, mais aussi de leurs valeurs autour de x. Par exemple, si $E(x)$ est très petit comparé aux valeurs alentour (par exemple $E(x)$ est estimé au sein d'une couche très petite devant λ_{min} ou d'une hétérogénéité locale), alors la valeur de $\lambda^{loc}_{min}(x)$ sous-estimera grandement la véritable valeur minimale λ_{min}. Cependant, $\lambda^{loc}_{min}(x)$ peut être utilisé pour définir une série qui converge vers une valeur pertinente de λ_{min}.

$$\begin{aligned}
\lambda^{(0)}_{min}(x) &= \frac{1}{\lambda^{loc}_{min}(x)} \int_{x-\frac{\lambda^{loc}_{min}(x)}{2}}^{x+\frac{\lambda^{loc}_{min}(x)}{2}} \lambda^{loc}_{min}(s)\,\mathrm{d}s, \\
\lambda^{(n+1)}_{min}(x) &= \frac{1}{\lambda^{(n)}_{min}(x)} \int_{x-\frac{\lambda^{(n)}_{min}(x)}{2}}^{x+\frac{\lambda^{(n)}_{min}(x)}{2}} \lambda^{loc}_{min}(s)\,\mathrm{d}s \ , \ \forall n \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Cette série a été appliquée à de nombreux milieux. Dans tous les cas, la convergence de la série a été atteinte pour obtenir des valeurs réalistes de λ_{min}. La preuve mathématique de convergence n'a quant à elle pas encore été démontrée.

3.1.3 Comparaison de méthodes d'intégrations pour l'estimation de λ_{min}

Comme expliqué dans la section précédente, la convergence de la série (3.8) est observée empiriquement. Pour réaliser le calcul de l'intégrale nécessaire, plusieurs schémas d'intégration numérique ont été testés. La figure 3.1 montre les résultats obtenus par les différentes méthodes. La méthode la plus précise est la méthode des rectangles, mais la méthode de Simpson composite est plus rapide et présente un bon résultat même à un faible nombre d'intervalles. De plus, toutes les méthodes convergent avec un terme d'oscillation. Ce terme est négligeable ($<$0.1 %) sauf dans le cas de la méthode de Simpson.

3.1.4 Détermination des propriétés effectives

Une expression possible de l'amplitude spectrale du filtre passe-bas $\mathcal{F}^{\lambda_0}$, introduit dans l'équation (3.4), est [Capdeville et al., 2013, par exemple]

$$\bar{w}^{\lambda_0}(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k < \frac{1}{2\lambda_0} \\ \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\pi \frac{k - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{2\lambda_0}}\right)\right] & \text{pour } \frac{1}{2\lambda_0} > k > \frac{1}{\lambda_0} \\ 0 & \text{pour } k > \frac{1}{\lambda_0} \end{cases} \tag{3.9}$$

avec k la variable duale de x (c'est-à-dire le nombre d'onde). Un tel filtre passe-bas retire toutes les échelles plus petites que λ_0 sans pour autant créer de coupure abrupte qui créerait des oscillations infinies dans l'espace de l'ondelette correspondante $w^{\lambda_0}(x)$. Appliquer ce filtre dans le domaine spatial revient à réaliser une convolution de la

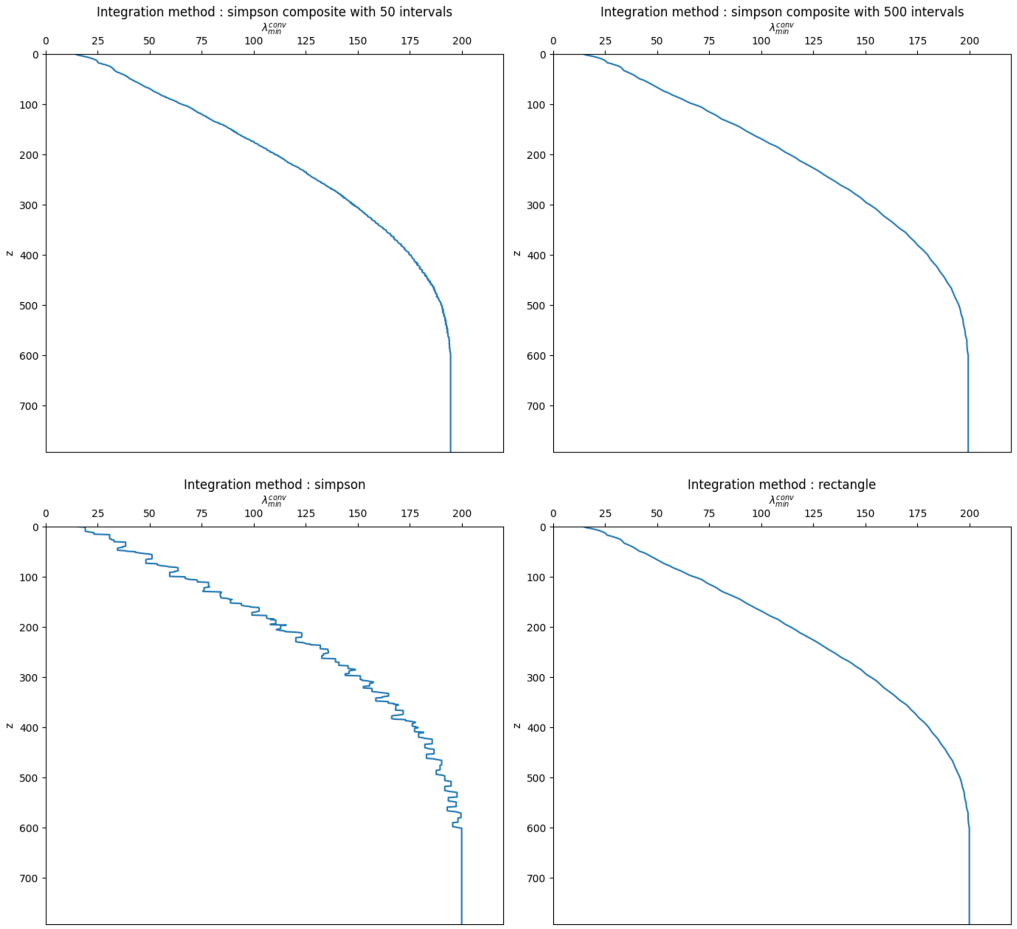


FIGURE 3.1 – Test des différentes méthodes d'intégration pour le calcul de l'intégrale dans la série (3.8). l'axe des ordonnées est la profondeur en m et les abscisses la valeur de λ_{min} après la convergence (en m).

quantité à filtrer $P(x)$ par l'ondelette :

$$\mathcal{F}^{\lambda_0}(P)(x) = P(x) * w^{\lambda_0}(x) = \int_{-r_{max}}^{r_{max}} P(x-r) w^{\lambda_0}(r) dr \tag{3.10}$$

où r_{max} est la moitié de l'extension spatiale de l'ondelette.

Comme expliqué dans la section 3.1.1, $\lambda_0 = \varepsilon_0 \, \lambda_{min}$. Dans le cas périodique, le milieu équivalent est homogène. Donc λ_{min} ne dépend pas de x. Dans le cas non-périodique, les propriétés effectives dépendent de x (Eq. (3.4)), donc λ_{min} en dépend également. Cependant, toutes les implémentations actuelles de l'homogénéisation reposent sur l'utilisation d'une unique valeur de λ_0 qui est appliquée à chaque x. Le but de ce travail est alors de prendre en compte les variations spatiales de la longueur d'onde minimale pour qu'un filtrage adaptatif puisse être réalisé pour calculer le milieu homogénéisé. En appliquant la série (3.8), la longueur d'onde minimale a n'importe quel x et le λ_0 correspondant peuvent être calculés. Puis, une ondelette appropriée peut être calculée basée sur $\lambda_0(x)$ et le filtrage adaptatif peut être appliqué.

3.2 Application : premier résultat

3.2.1 Description du modèle

Le filtrage adaptatif est testé sur un milieu de $800\,m$ de profondeur. Comme nous travaillons avec une profondeur, la variable d'espace sera notée z à la place de x. Le milieu correspond à un modèle à couches *layercake* composé de couches de $10\,m$ d'épaisseur en partant de la surface $z = 0$ jusqu'à $500\,m$ de profondeur. En dessous, une unique couche de $300\,m$ permet de compléter le modèle. Cette couche permet de reproduire les effets du socle dans les bassins. Les propriétés de masse volumique et le module de Young sont montrés dans la Figure 3.2.

Le filtrage adaptatif est appliqué de la surface jusqu'à la base. À chaque point z ou le filtrage est appliqué, la valeur de $\lambda_0(z)$ est utilisée pour déterminer le point suivant $z' = z + \lambda_0(z)/4$. Cela permet d'avoir un échantillonnage adaptatif à deux fois la fréquence de Nyquist. D'autre part, une extension du milieu au-dessus de la surface est nécessaire pour la détermination de λ_{min} et pour le filtrage. Le milieu est étendu par miroir, suivant Capdeville et Marigo [2007].

3.2.2 Propriétés effectives

La figure 3.2 montre le résultat de l'homogénéisation avec un filtrage non-adaptatif ainsi que d'un filtrage adaptatif de l'inverse du module de Young (suivant l'équation (3.4)). Comme on pourrait s'y attendre, le filtrage adaptatif produit un résultat plus lisse, car il dépend d'un λ_{min} qui dépend de z plutôt que d'un λ_{min} global.

D'autres tests ont été réalisés en utilisant un milieu isotrope par couche. Dans ce cas, les propriétés effectives sont données par Backus [1962] et Capdeville et al. [2013] :

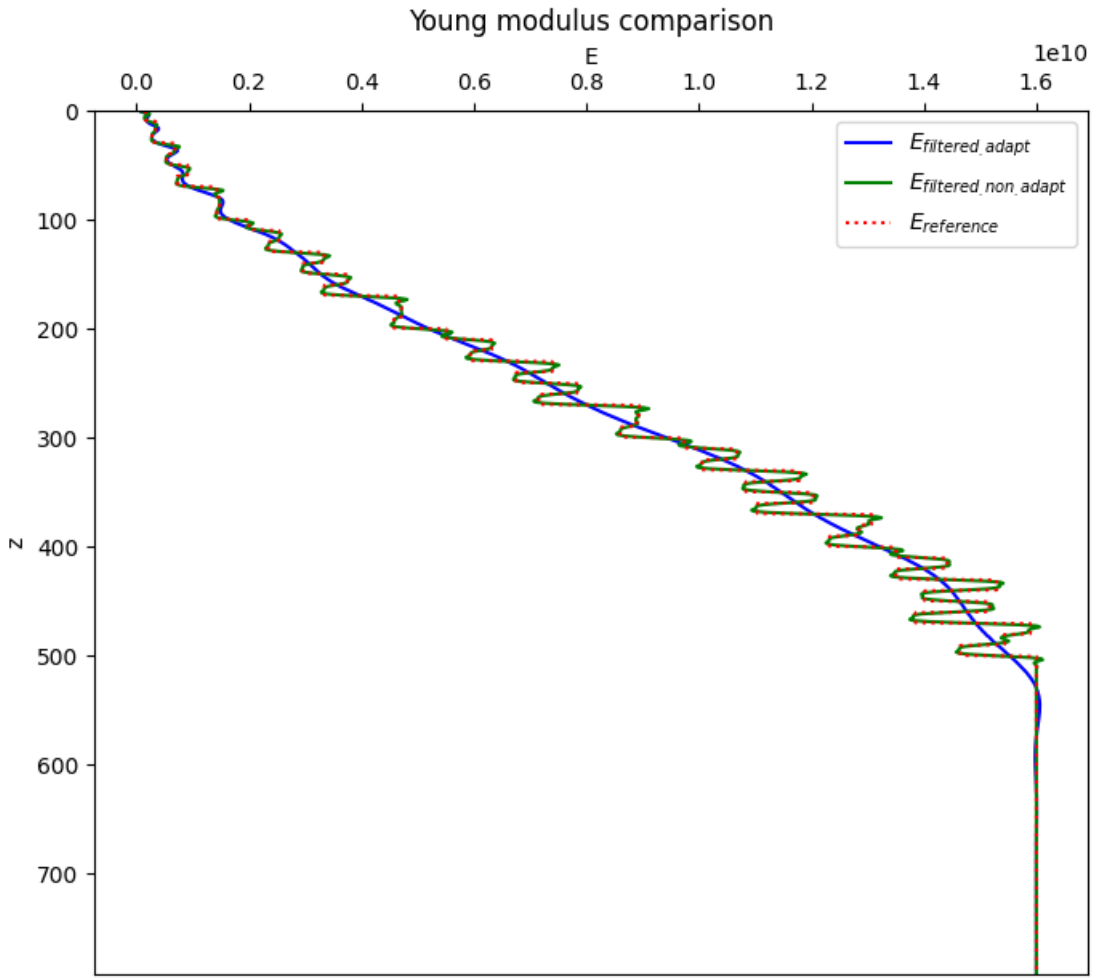


FIGURE 3.2 – Comparaison du module de Young E dans le milieu de référence (pointillé rouge) et les modules de Young effectifs E^* du filtrage adaptatif (en bleu) et non-adaptatif (en vert).

$$
\begin{aligned}
A^* &= \mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\right) + \mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\right)^{-1} \times \mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)^2, \\
C^* &= \mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\right)^{-1}, \\
F^* &= \mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{1}{\lambda+2\mu}\right)^{-1} \times \mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right), \\
L^* &= \mathcal{F}^{\lambda_0}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{-1}, \\
N^* &= \mathcal{F}^{\lambda_0}(\mu),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Dans cette configuration, les vitesses effectives, anisotropes, peuvent être écrites comme :

- $V_{P_v} = \sqrt{\frac{C^*}{\rho}}$ pour les ondes P verticales,
- $V_{S_v} = \sqrt{\frac{L^*}{\rho}}$ pour les ondes S polarisées verticalement,
- $V_{P_h} = \sqrt{\frac{A^*}{\rho}}$ pour les ondes P horizontales,
- $V_{S_h} = \sqrt{\frac{N^*}{\rho}}$ pour les ondes S polarisées horizontalement.

Il est important de remarquer que la masse volumique est toujours considérée comme homogène ($\rho^* = \rho$).

La différence entre les vitesses originelles et les différentes vitesses effectives (provenant d'un filtrage adaptatif et non-adaptatif) sont présentées dans les Figures 3.3 et 3.4. Tout comme lors de la comparaison entre les modules de Young, les vitesses obtenues par le filtrage adaptatif présentent un résultat de plus en plus lisse au fur et à mesure que la profondeur augmente.

Afin d'aller plus loin, il serait intéressant de comparer les résultats de simulations d'onde dans les milieux obtenus par filtrage adaptatif et comparer les résultats contre des simulations de référence sur le milieu initial et contre des simulations avec de l'homogénéisation avec filtrage non-adaptatif. De telles simulations ont été entamées, mais des problèmes avec les perfectly matched layers (PML) dans le logiciel Specfem2D [Komatitsch et Vilotte, 1998] ont rendu les résultats de simulation inexploitables. De nouvelles simulations sont donc nécessaires afin de déterminer les éventuels gains de cette méthode. Un avantage direct de cette méthode est qu'elle ne montre pas d'hétérogénéité plus petite que λ_{min}, c'est-à-dire qu'elle est plus lisse dans les régions où la vitesse effective est élevée et moins lisse dans les zones où la vitesse effective est plus faible. Cette propriété du filtrage adaptatif ouvre la porte à l'utilisation de maillage adaptatif, dans lesquels la taille des éléments dépend de λ_{min}.

Une fois testé de façon plus robuste et s'être assuré de la convergence, cette homogénéisation adaptative peut facilement être étendue aux dimensions supérieures. Similairement au cas 1D, l'intégrale dans la série (3.8) serait en 2D ou 3D, et l'ondelette du filtre w^{λ_0} utilisée dans l'équation (3.10) dépendrait de variables d'espace respectivement 2D ou 3D.

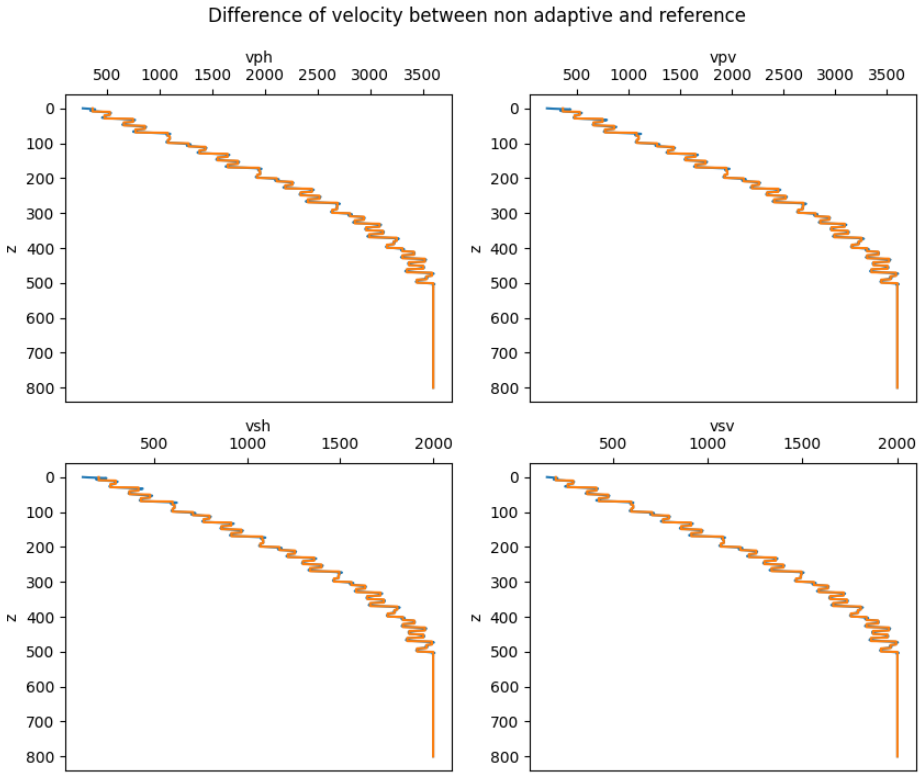


FIGURE 3.3 – Comparaison de la vitesse des ondes dans le milieu de référence (en orange) et les vitesses des ondes obtenues après un filtrage non-adaptatif (en bleu).

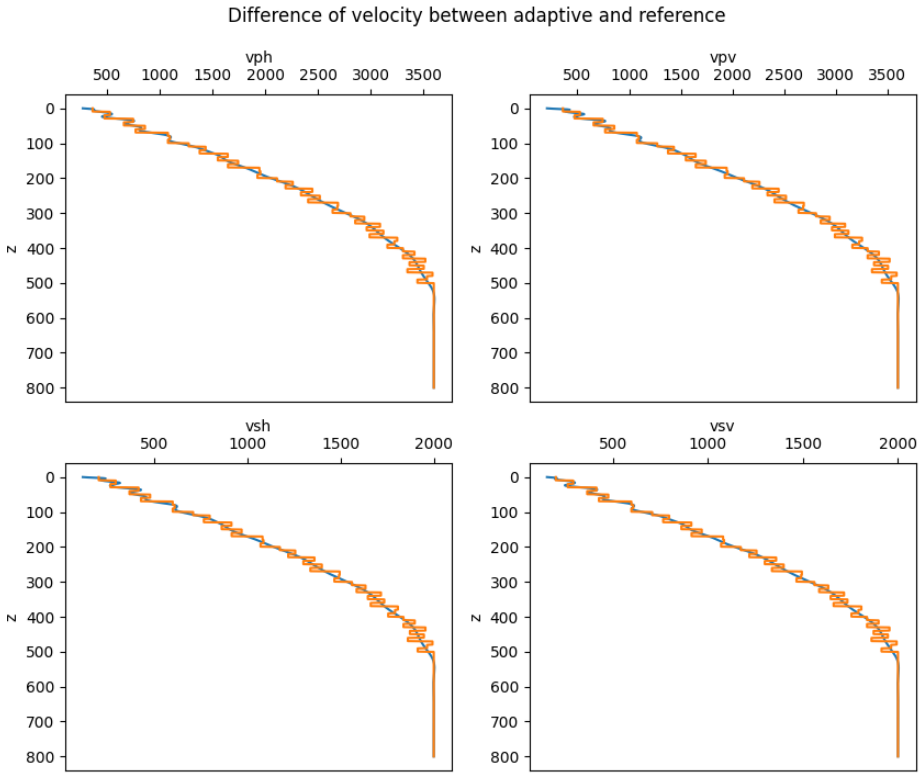


FIGURE 3.4 – Comparaison des vitesses des ondes dans le milieu de référence (en orange) et les vitesses effectives obtenues par filtrage adaptatif (en bleu).

Conclusion

Les bassins sédimentaires sont des structures géologiques créées par un enchaînement de dépôts sédimentaires et d'érosions. Il en résulte que le contenu des bassins sédimentaires peut être plus ou moins complexe. Cette complexité interne des bassins sédimentaires donne naissance à des effets de sites parfois difficiles à étudier. Cette complexité géologique des bassins sédimentaires donne lieu à de nombreuses contraintes géométriques. Afin de réaliser des simulations sur un milieu géologique, il est nécessaire de le discrétiser. Cette discrétisation passe par la réalisation d'un maillage (Fig 3.5). Réaliser un tel maillage est souvent difficile car il faut prendre en compte des géométries complexes, comme des contacts tangentielles (Fig 3.5 a) et b)) ou dans certains cas des failles, qui peuvent générer des connexions topologiques entre différentes strates difficiles à prendre en compte. Enfin, les bassins peuvent également présenter des fines couches [Anquez et al., 2021]. Afin de mailler ces différentes parties, il est souvent nécessaire d'utiliser des petits éléments très déformés. L'utilisation de tels éléments pour la simulation est néfaste car ils forcent l'utilisation de pas de temps beaucoup plus faibles pour maintenir la stabilité numérique de la simulation. Cette réduction de pas de temps impose, en retour, une augmentation du nombre d'itérations, ce qui implique un coût de calcul plus important pour la simulation. Il existe plusieurs stratégies pour réduire le temps de calcul. Une possibilité est de simplifier géométriquement le modèle afin de ne pas avoir besoin d'utiliser ces petits éléments [Anquez et al., 2021, par exemple]. Une autre possibilité est d'utiliser de l'*upscaling* pour trouver un milieu équivalent qui est plus simple à mailler. L'homogénéisation appartient cette catégorie. Une difficulté de la simulation est donc de trouver le bon équilibre entre une représentation fidèle du modèle (qui possède une bonne précision) et le coût de calcul associé à cette représentation. Avoir une représentation la plus fidèle possible est souhaitable car les bassins sédimentaires génèrent des effets de sites qui sont difficiles à prendre en compte. Ces effets de sites consistent en des phénomènes de résonance, c'est-à-dire des successions de réflexions dans les couches internes et avec le sol, et des effets de bord du bassin. Ces effets génèrent des amplifications et déamplifications des ondes sismiques en fonction de leur position dans le bassin et de leur longueur d'onde. La prise en compte de ces effets de site peut passer par des calculs analytiques, mais ceux-ci ne sont pas toujours possibles dans le cas de bassins complexes, ou par des simulations, qui permettent de prendre en compte les géométries complexes ainsi que des effets non linéaires. Lors de cette partie, le comportement de milieu effectif par rapport à la simulation des effets de site a été étudié. L'utilisation de milieu effectif permet de réduire le temps de calcul. Avoir des simulations rapides et précises permettrait à terme de pouvoir produire des estimations des incertitudes géologiques sur les effets lithologiques et sur l'estimation

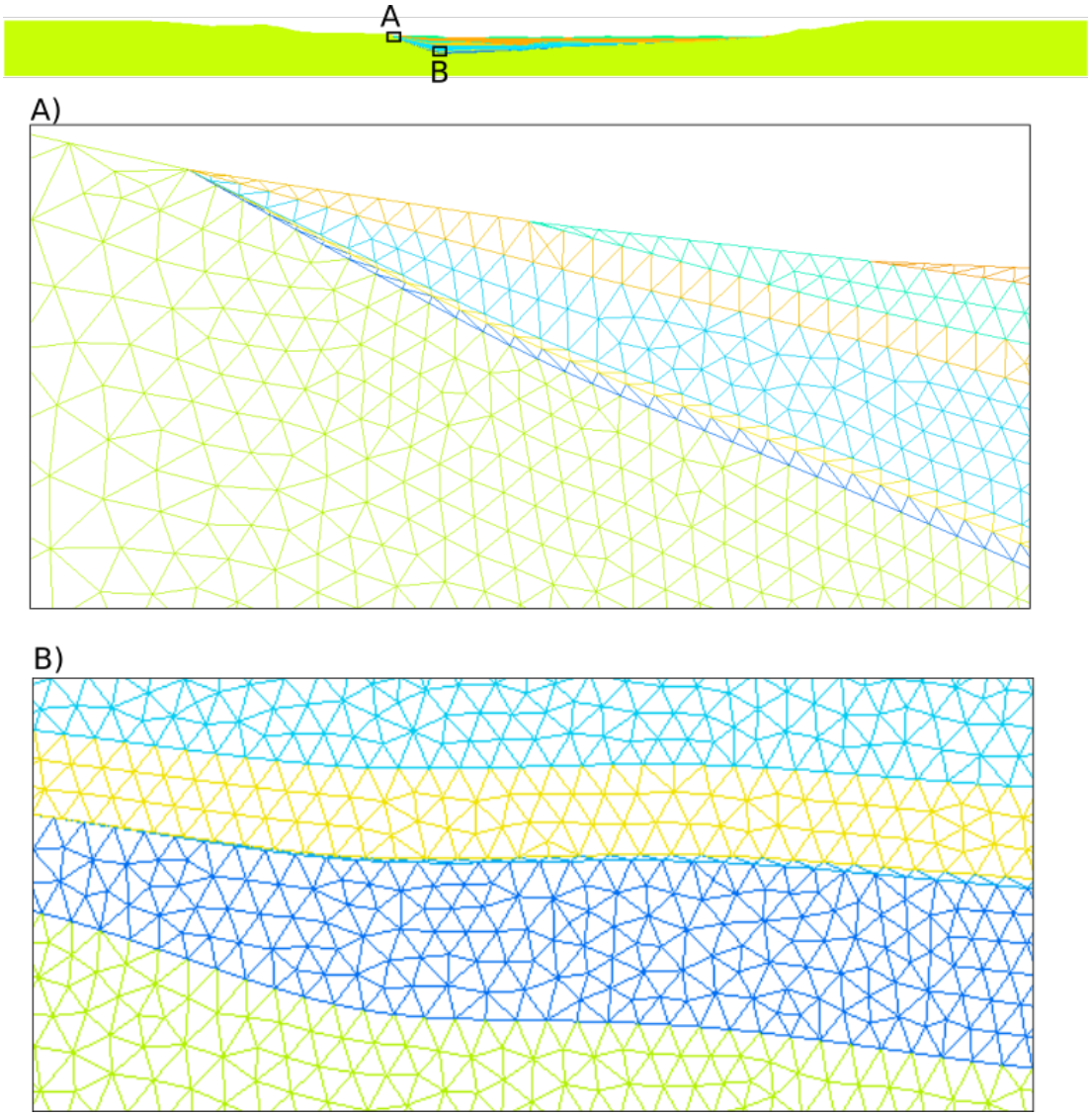


FIGURE 3.5 – Maillage d'une coupe 2D du bassin du Var.A) zoom sur un contact tangentiel sur les bords du bassin. B) zoom sur un contact tangentiel au centre du bassins.

de l'aléa sismique. Cela permettrait aussi plus facilement de gérer les incertitudes lors d'un évènement sismique, notamment sur la position de la source et le mécanisme au foyer.

L'homogénéisation permet de générer des milieux équivalent lisses qui sont pratiques à utiliser pour la simulation d'ondes. Les milieux générés sont faciles à mailler car le milieu possède une unique grandeur caractéristique λ_0. La théorie de l'homogénéisation a déjà été écrite dans plusieurs cadres, sphérique et cartésien [Capdeville et Marigo, 2007, Capdeville et al., 2010b]. Toutefois, aucun de ces développement de l'homogénéisation n'est directement applicable aux bassins sédimentaires car ceux-ci sortent du cadre théorique dans lequel ils ont été écris. L'homogénéisation sphérique a été écrite dans une géométrie que ne suivent pas les bassins sédimentaire, et est adaptée à la sismologie globale. La géométrie cartésienne quant à elle peut fonctionner dans n'importe quelle géométrie mais ne possède pas d'expression pour les conditions limites,

alors que la prise en compte de la surface libre est importante. Une nouvelle écriture du problème d'homogénéisation en géométrie cylindrique a donc été réalisée afin de pouvoir l'adapter aux bassins sédimentaires. Lors du développement de notre homogénéisation cylindrique, les résultats de Capdeville et Marigo [2007] ont été retrouvés. Cette réécriture en géométrie cylindrique est plus adaptée aux milieux stratifiés pour des simulations d'ondes à une échelle régionale. Afin de valider le développement théorique, des simulations sur un milieu *layercake ont été réalisées. Ce milieu est stratifié et ne change que en fonction de la profondeur. Il vérifie toute les hypothèses émises lors du développement des équations. Une analyse des résultats montre une très faible erreur entre la référence et la simulation en milieu homogénéisé. Des simulations dans des milieux plus complexes, modélisant des bassins sédimentaires simplifiés, ont également été réalisées afin de vérifier si cette nouvelle homogénéisation était facilement adaptable. Étant donné que ce modèle de bassin sédimentaire ne suit plus l'hypothèse de géométrie cylindrique (le contact entre le remplissage sédimentaire du bassin et le socle ne dépend pas uniquement de z), une stratégie dite "multi-1D" a été employée. Cette stratégie consiste à prendre des sections verticales 1D de notre milieu, considérer que chacune de ces sections respectent l'hypothèse de géométrie cylindrique, les homogénéiser, puis reconstruire un milieu 2D en interpolant les valeurs entre chacune des sections.*

Les résultats observés ont nécessité d'arrêter préemptivement les simulations à cause d'une forte erreur après 2,5 secondes, causée par un problème technique de SpecFem2D et l'introduction du milieu homogénéisé. Il est tout de même important de souligner de potentielles limites à cette approche "multi-1D". Notre approche "multi-1D" est intrinsèquement source d'erreurs car elle induit des simplifications de la géométrie du bassin et de l'anisotropie au niveau des interfaces. En discrétisant le milieu, il y a une perte de résolution latérale, qui se répercute sur l'interface socle-bassin. De plus, l'homogénéisation cylindrique ne peut uniquement créer qu'une anisotropie dite VTI (Vertically Transverse Isotropy). Or, l'anisotropie réelle d'un bassin sédimentaire sur les bords du bassin est plus complexe. Un milieu homogénéisé qui serait obtenu grâce à une homogénéisation 2D, qui prend mieux en compte les effets latéraux, serait entièrement anisotrope.

Il existe cependant plusieurs possibilités pour aller plus loin. La première est d'utiliser une homogénéisation d'ordre 2. Dans ce travail, seule une homogénéisation d'ordre 0 avec une extension symétrique a été utilisée. Or, une propriété centrale de l'homogénéisation est que l'on peut aisément gagner en précision en utilisant des ordres supérieurs. De plus, le développement théorique de l'homogénéisation cylindrique avec les conditions aux limites associées a été réalisée jusqu'à l'ordre 2, rendant son utilisation possible. Une autre possibilité serait de réaliser une homogénéisation 2D du milieu afin de pouvoir comparer l'anisotropie obtenue au niveau des interfaces socle-sédiments et également comparer les résultats de simulations. L'homogénéisation 2D ne possède pas de description des conditions aux limites. Toutefois, il est possible d'étendre verticalement le milieu par symétrie et réaliser une homogénéisation d'ordre 0. Une fois que les résultats sur les bassins simplifiés sont améliorés, la progression naturelle est de tester l'homogénéisation sur des bassins avec une stratification interne. Une des causes majeures des effets de sites est la résonance des ondes dans les bassins. Rajouter une stratification interne permettra d'observer si l'homogénéisation permet de correctement modéliser ces effets et à quel ordre. Une dernière possibilité d'amélioration de ce travail serait de dévelop-

per une homogénéisation adaptative. Un travail préliminaire avec un filtrage adaptatif a été initié en section 3 mais ne correspond pas à proprement parler à une homogénéisation adaptative qui ferait varier directement ϵ_0 dans l'espace. L'homogénéisation des bassins sédimentaire pourrait bénéficier grandement de l'homogénéisation adaptative car cela permettrait de mieux prendre en compte les différences d'ordre de grandeur entre les propriétés du socle et du remplissage sédimentaire des bassins. Aujourd'hui, l'homogénéisation utilise un unique λ_{min} global à tout le modèle, ce qui crée un modèle trop détaillé au niveau des vitesses élevées. Une homogénéisation adaptative ouvre également la porte à un maillage adaptatif. Classiquement, en homogénéisation, les milieux sont maillés avec des éléments mesurant $\lambda_0\, m$. Cela génère des maillage beaucoup trop précis dans les fortes vitesse et un maillage adaptatif permettrait de réduire le nombre d'élément et d'accélérer encore plus les simulations. Une deuxième partie de cette thèse a été dédiée à l'étude d'un algorithme de maillage adaptatif qui permet de créer des maillages pour des milieux lisses entièrement anisotropes, avec des éléments dont la taille dépend d'un λ_{min} locale.

Deuxième partie

Maillage quadrangulaire adaptatif

Introduction

Usuellement, les milieux homogénéisés sont maillés par des grilles cartésiennes. Cela s'explique facilement étant donné que les milieux homogénéisés possèdent un λ_0 pour commun à tout le milieu. Ce λ_0 est l'unique contrainte limitant la taille des éléments du maillage en milieu homogénéisé. Cependant, la taille maximale des éléments dans un maillage dépend du ratio entre la vitesse des ondes locales et de la longueur d'onde maximale propagée. Or, ce ratio n'est pas constant dans un milieu homogénéisé. Il est donc théoriquement possible de réduire le nombre d'éléments utilisés, réduisant ainsi le coût de calcul nécessaire pour une simulation d'onde, tout en conservant une bonne précision. Dans le but d'accélérer les simulations en milieu homogénéisé, et plus généralement en milieu lisse, le début de cette partie est dédié à l'étude d'un algorithme de maillage adaptatif pour la simulation d'onde. Puis une seconde partie est dédiée à l'optimisation des maillages générés. Ces deux parties ont fait l'objet d'un article publié dans *Computer et Geosciences* qui a été mis ci-après. Une sous partie dédiée à la gestion de la surface libre est également rajoutée en section 4.1.4. Cette sous-partie a fait l'objet du travail de master d'Aurélie Scuotto que j'ai co-encadrée.

Chapitre 4

Maillage quadrangulaire adaptatif

Sommaire

4.1 Quadrangular adaptive mesh for elastic wave simulation in smooth anisotropic media 54

4.1.1 Introduction 54

4.1.2 Mesh optimality criteria for smooth anisotropic media 56

4.1.3 Meshing algorithm and optimization 57

4.1.4 Handling the topography 61

4.1.5 Effect of the adaptive meshes on wave simulation : application to the Groningen gas field 69

4.1.6 Discussion and conclusions 73

4.1.7 Directional S-wave velocity in an anisotropic material 77

4.1.8 Closest 2D isotropic material 77

Résumé Ce chapitre présente un algorithme de maillage adaptatif adapté aux milieux lisses. Cet algorithme permet de générer des maillages quadrangulaires conformes adaptés à la simulation d'ondes SEM. Un deuxième algorithme est ensuite présenté, améliorant cet algorithme pour lui permettre de prendre en compte de faibles topographies. Enfin, un algorithme de *mesh warping* est étudié. Cet algorithme utilise un Laplacien pour déplacer localement les nœuds des maillages générés et les déplacer légèrement afin d'améliorer le pas de temps de simulation.

4.1 Quadrangular adaptive mesh for elastic wave simulation in smooth anisotropic media

4.1.1 Introduction

Seismic wave simulations are extensively used for seismic hazard assessment [e.g., Komatitsch et al., 2004, Bielak et al., 2005, Delavaud et al., 2006, Chaljub et al., 2010, Maufroy et al., 2015, Poursartip et al., 2020, DeMartin et al., 2021, Castro-Cruz et al., 2021a, 2022]. In this context, the simulations often require a mesh to represent the interior of the Earth numerically. However, constructing a mesh that honors the complexity of the underground is often difficult. In sedimentary basins, this complexity stems from tectonic structures such as folds and faults, and from stratigraphic features such as intrusions and erosion surfaces, which may lead to small geometric features and tangential contacts between domain boundaries [e.g., Euler et al., 1998, Caumon et al., 2004, 2009, Minisini et al., 2013, Peyrusse et al., 2014, Maufroy et al., 2015, Anquez et al., 2019, 2022]. When honored, these features often result in small elements as compared to the wavelength, which induces a substantial computational cost in wave equation solvers based on explicit time schemes. Moreover, distorted elements may be present, which can induce numerical biases during simulations.

In the context of full waveform inversions (FWI) for either seismic source imaging [e.g., Somala et al., 2018, Willacy et al., 2019, Sawade et al., 2022] or the Earth interior imaging [e.g., Fichtner et al., 2009, Virieux et Operto, 2009, Tape et al., 2010, Zhu et al., 2012, Fichtner et al., 2018, Lei et al., 2020], the wave propagation medium is usually smooth because fine-scale features are not required for explaining the observed waveforms. Nevertheless, computational overburdens are reached when moving to high frequencies [e.g., Fichtner et al., 2018, Lei et al., 2020] or quantifying uncertainty of the imaging result [e.g., Fichtner et Trampert, 2011, Rawlinson et al., 2014, Fichtner et Simutė, 2018, Thurin et al., 2019, Xie et al., 2021].

Bringing down the computation cost while keeping a good accuracy of the solution is an important part of the research on seismic wave simulations. One way to achieve this is to continuously improve the numerical methods which are extensively used in seismology. In recent years, the discontinuous Galerkin method (DGM) became hybridizable [Bonnasse-Gahot et al., 2018, Terrana et al., 2019], which decreases the number of degrees of freedom in the global linear system to be solved by introducing a hybrid unknown to represent the velocity at the elements boundaries. On the continuous Galerkin side, the finite element method (FEM) and the spectral element method (SEM) are now provided with local time-stepping [Rietmann et al., 2017], similarly to well-established results for the DGM [e.g., Dumbser et al., 2007, Diaz et Grote, 2015]. Moreover, the so-called mass-lumped FEM met recent improvement thanks to local assembly [Mulder et Shamasundar, 2016] and new quadrature rules [Geevers et al., 2019]. The finite difference method (FDM), which relies on the discretization of the wave equation's strong form on a regular grid, met significant improvements as well thanks to the development of stable discontinuous grids which allows handling large material contrasts in an efficient way [Kristek et al., 2010, Kostin et al., 2015, Li et al., 2015, Fan et al., 2018, Nie et al., 2017]. New computationally efficient methods also emerged, such as the distributional finite difference method [Masson, 2023], the discontinuous Galerkin

SEM [e.g., Antonietti et al., 2012, Mazzieri et al., 2013, Terrana et al., 2019, Liu et al., 2023] and hybrid methods like FDM-FEM [e.g., Galis et al., 2008], DGM-FDM [Lisitsa et al., 2016] and continuous-discontinuous Galerkin SEM [Terrana et al., 2019].

Complementary to these advances, a possible way of decreasing the computational cost of elastic wave simulations while preserving a good accuracy consists of modifying the propagation medium. When small-scale features are involved, local simplifications can enlarge the small elements while keeping the simulation results accurate [Anquez et al., 2019, 2022]. Upscaling the original medium to obtain a smooth equivalent one can be a solution as well. Theoretical studies to understand effective elastic properties go back to Hashin et Shtrikman [1963] and Hill [1965] who study the macroscopic elastic moduli of multiphase media. Backus [1962] proposed long-wave effective properties in finely layered media that are still widely used. A more recent upscaling technique is the non-periodic homogenization method [Capdeville et al., 2010b, Guillot et al., 2010, Cupillard et Capdeville, 2018b, Capdeville et al., 2020]. This method transforms the original model into a smooth equivalent one based on the minimum wavelength to be propagated in the domain. The obtained model is usually anisotropic and holds no interface, similarly to FWI results [e.g., Fichtner et al., 2013, Stopin et al., 2014, Capdeville et Métivier, 2018]. Such models prevent geometric features that are difficult to mesh. They are compatible with high order simulation methods as long as these latter can handle anisotropy and properly capture the variations of smooth properties.

To further optimize computational performance of wave propagation simulations in smooth models, unstructured adaptive meshes can be used. In the present article, we aim at introducing a new adaptive meshing algorithm for SEM simulations in smooth anisotropic media. Although the SEM can be implemented on simplicial meshes [Mercerat et al., 2006, Mazzieri et Rapetti, 2012, Liu et al., 2017, Afanasiev et al., 2019], most of its applications rely on hypercubical meshes to benefit from a diagonal mass matrix [e.g., Chaljub et al., 2007]. The algorithm we introduce focuses on quadrangles and may serve as a basis for further developments in 3D, hexahedron-based meshing.

As early as the 1990s, the SEM was applied at the local [Komatitsch et Vilotte, 1998] and the global scale [Chaljub et Vilotte, 1998]. In both cases, to handle the increase of seismic wave velocity with depth, the size of the hypercubic elements can be doubled [Komatitsch et Tromp, 1999, 2002, Komatitsch et al., 2004, Nissen-Meyer et al., 2007, Chen et al., 2007, Nissen-Meyer et al., 2014, Leng et al., 2016] or tripled [Casarotti et al., 2008, Peter et al., 2011, De Martin, 2011, Touhami et al., 2022] in a conforming way. Interestingly, van Driel et al. [2020] use a doubling strategy at depth and a tripling strategy in the horizontal direction to also adapt the mesh to the smoothness of the waves which can be anticipated from the source location. As an alternative to these conforming strategies, nonconforming meshes can be used, at the price of a mortar method to ensure continuity constraints at the nonconforming interfaces [Chaljub et al., 2003, Antonietti et al., 2012]. In the case of a free surface topography or undulating internal discontinuities, the tripling strategy was implemented in the horizontal direction by Afanasiev et al. [2019] to accommodate layer thickness variations. When such discontinuities are intersecting so that one or several geological layers disappear, meshing the medium with hypercubes becomes much more difficult. Unstructured meshes from the CUBIT software (`http://cubit.sandia.gov`) are commonly considered in this case

[Delavaud et al., 2006, Casarotti et al., 2008, Stupazzini et al., 2009, Peter et al., 2011, Pilz et al., 2011, Cupillard et al., 2012, Villani et al., 2014, Chaljub et al., 2015, Maufroy et al., 2015].

The algorithm we propose relies on the quadtree division introduced by Maréchal [2009] to adapt the size of quadrangular elements to a smoothly varying S-wave velocity field. By *smooth* we mean that the spatial variation of the velocity is larger than the local minimum wavelength. Seismic anisotropy is handled by defining the division criterion on the element edges so that S-wave velocities in both the vertical and the horizontal directions are considered. Our algorithm first results in a conforming mesh with tripling transition patterns in the two directions of space. Then, an optimization step based on a cotangent Laplacian smoothing is implemented to further improve the quality of the mesh.

The criteria which drive the meshing of a smooth anisotropic medium for SEM simulations are given in Section 4.1.2. Then, our algorithm is described and illustrated using a homogenized medium (Sec. 4.1.3). Finally, the effects of various parameters of the algorithm on the accuracy and performance of SEM simulations are discussed in Section 4.1.5.

4.1.2 Mesh optimality criteria for smooth anisotropic media

When meshing smooth media, there is no internal discontinuity to be honored. In this context, only the size and the angles of the elements constrain both the accuracy and the performance of SEM simulations (assuming the polynomial degree fixed). Therefore, these two element features control the optimality of the mesh.

4.1.2.1 Upper bound for mesh element size : accuracy condition

For SEM simulations to be accurate, one needs each mesh element to be able to properly model the local minimum wavelength. Hence, the size d of each element edge is bounded by a maximum edge size d_{max} such that [e.g., Casarotti et al., 2008]

$$d \leq d_{max} = \alpha_N \frac{V_S}{f_{max}}, \tag{4.1}$$

where f_{max} is the maximum frequency of the wavefield propagating in the medium, V_S is the shear-wave velocity, and α_N is an empirical parameter which depends on the SEM polynomial degree N. All along the paper, N is set to six, as this polynomial degree allows for a good accuracy at a reasonable computational cost [Lyu et al., 2020], but any other value of N could be considered. For $N = 6$, α_N is roughly equal to 1. Because α_N and f_{max} are fixed for a particular use case, the only quantity which varies in space in eq. (4.1) is the shear-wave velocity V_S. The size of the mesh elements will be adapted to this latter quantity so that (4.1) is verified while keeping the overall number of elements as low as possible. Because the medium is anisotropic, V_S will be determined as described in appendix 4.1.7. Because the medium is heterogeneous, V_S will be estimated around each mesh edge using either the harmonic average or the minimum velocity. This is further discussed in Section 4.1.3.1.

4.1.2.2 Stability condition and performance considerations

Although implicit time schemes have been investigated [e.g., Chabassier et Imperiale, 2016, Methenni et al., 2024], most of SEM implementations are based on explicit time schemes. Such schemes are computationally efficient, but they require the global time step Δt to follow the stability condition :

$$\Delta t \leq C_{max} \left[\frac{\Delta x}{V_P} \right]_{min}, \tag{4.2}$$

with Δx the spacing between two adjacent Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) points (for $N=6$, the smallest Δx is roughly equal to $0.11747d$), V_P the local P-wave velocity, and C_{max} the Courant constant [Courant et Friedrichs, 1928]. This constant makes sure that the simulation is numerically stable as long as the local Courant number $C = V_P \frac{\Delta t}{\Delta x}$ is lower than C_{max}. For a 3D deformed mesh of a heterogeneous medium, the Courant constant is roughly equal to 0.4 [Komatitsch et al., 2005]. An optimal SEM mesh will look for each element size d to be large so that Δt can be large (Eq. (4.2)) while keeping d small enough to ensure accuracy (Eq. (4.1)).

4.1.2.3 Mesh element shape

The SEM also has a requirement on the shape of the elements in order to limit the numerical dispersion and maintain a good accuracy [e.g., Oliveira et Seriani, 2011]. The shape of a quadrangular element can be measured with the equiangle skewness s, which is equal to 0 for a perfectly rectangular element and to 1 for a degenerate "flat" element :

$$s = \max \left\{ \frac{Q_{max} - 90}{90}, \frac{90 - Q_{min}}{90} \right\}, \tag{4.3}$$

with Q_{max} the largest angle (in degree) of the element, and Q_{min} the smallest one. According to the SPECFEM documentation (`https://github.com/SPECFEM`), this equiangle skewness should be inferior to 0.75, although Casarotti et al. [2008] recommend an equiangle skewness lower than 0.5 even though 0.8 is sometimes acceptable.

4.1.3 Meshing algorithm and optimization

This section aims at presenting an adaptive meshing algorithm for 2D SEM simulations, following the criteria defined in the previous section. To illustrate how the algorithm works, we will rely on a small vertical slice across the homogenized SEG-EAGE overthrust model [Cupillard et al., 2020, Capdeville et al., 2020]. This model is smooth and fully anisotropic. From it we extract a 4 km × 4 km P-Sv section (Fig. 4.1) so that we have a relevant and pedagogical medium to exemplify our meshing algorithm. The minimum length of the elastic property variations in this medium is 150 m.

4.1.3.1 Quadtree division

In this section, we extend the adaptive meshing technique proposed by Maréchal [2009] to mesh smooth anisotropic media for elastic wave propagation simulations. The algorithm first creates a bounding box around the object of interest (i.e., a smooth

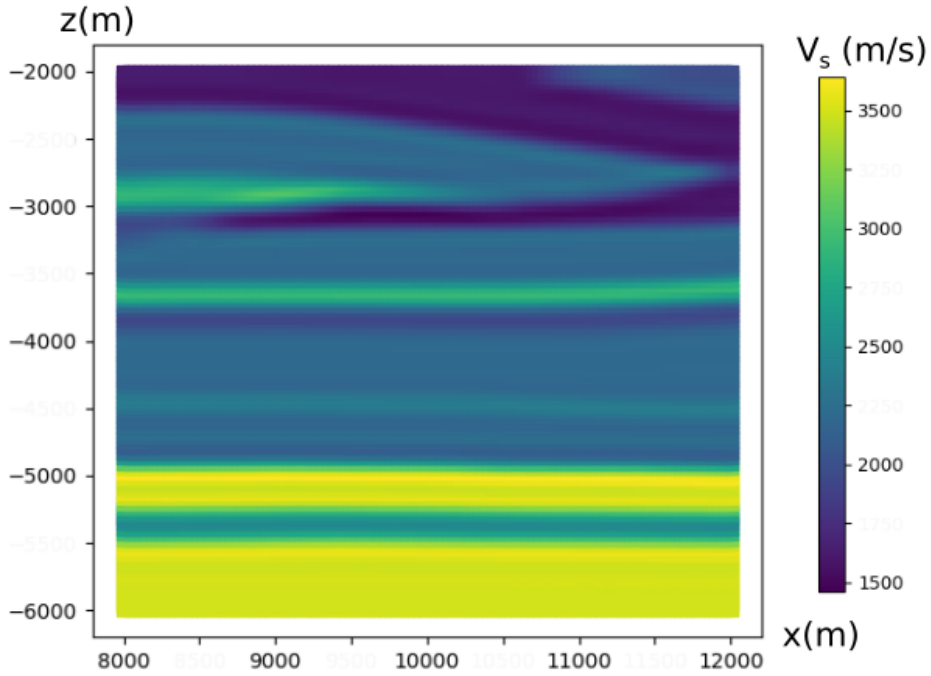


FIGURE 4.1 – A 4 km × 4 km section across the homogenized SEG-EAGE overthrust model [Cupillard et al., 2020]. The background color represents the S-wave velocity of the closest isotropic medium (App. 4.1.8).

elastic model, such as in Figure 4.2a). Then, this bounding box is divided until each cell matches the accuracy condition (4.1), forming a quadtree (Fig. 4.2b). The division process needs to honor some geometrical and topological rules which ensure that the final mesh will be composed of quadrangular elements only. Namely, a balancing rule, which only allows one level of refinement between two adjacent cells so that the ratio of their areas is always either 1/4, 1 or 4, and a pairing rule which enforce that if a cell is to be divided, the cell that originated from the same "parent" cell are to also be divided. These two rules ensure the next step of the algorithm is also possible.

Following the refinement stage, the quadtree mesh is converted into a conforming mesh by adding points and edges at the size transitions, so that each node has exactly four neighbors (Fig. 4.2c). This introduces non-quadrangular elements that are not desired for the application. The quadrangular only mesh is obtained by taking the geometric dual of the conforming mesh. This creates one quadrangle per vertex of the primal mesh, by taking the barycenter of each polygon and connecting it to the barycenter of each polygon sharing an edge with the original polygon. These operations ensure the dual mesh to be composed of quadrangles only (Fig. 4.2d).

Whereas Maréchal [2009] evaluates the division criterion on the cells, our method considers the neighborhoods of the edges to decide whether a cell must be divided or not. This allows us to have a finer control over the division process and, more importantly, to put the adaptivity to V_S on the final dual mesh instead of the primal one. What we call the neighborhood of an edge is, for instance, the square for which the edge is a median (e.g., the red square in Figure 4.3a). Evaluating the division criterion (4.1) on such a square yields a tag *cut* or *do not cut* on the edge (Fig. 4.3b). Repeating this for the three

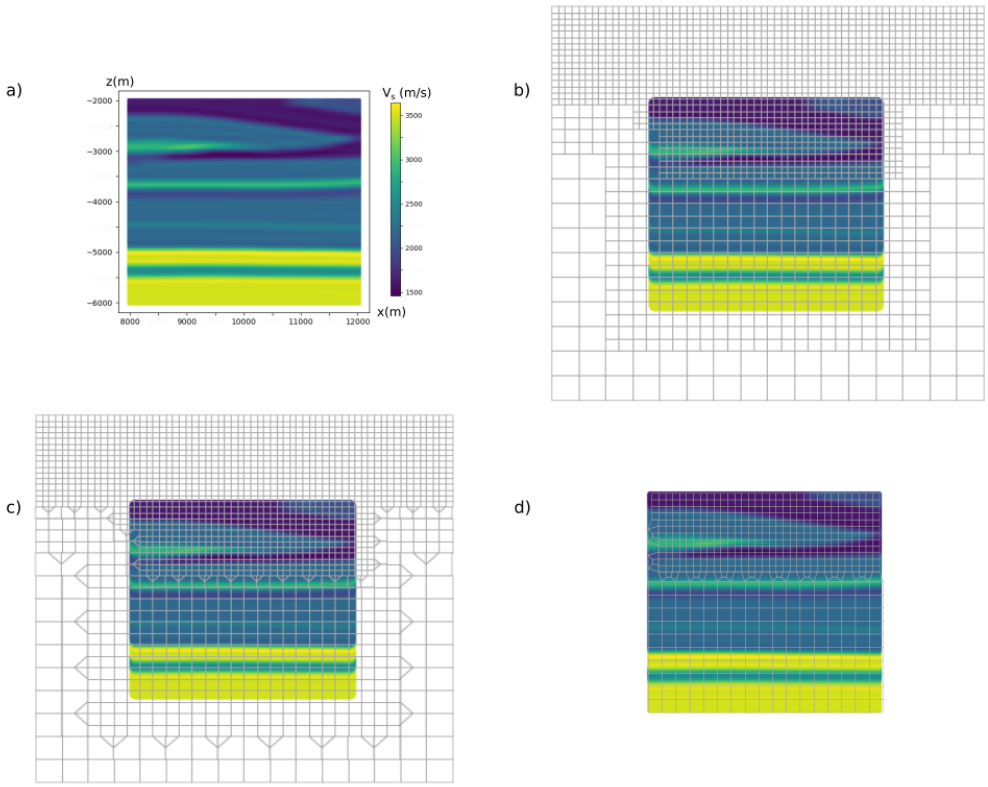


FIGURE 4.2 – The different steps of the meshing algorithm proposed by Maréchal [2009]. a) The model to be meshed (see Figure 4.1). b) Initial quadtree division adapted to the local S-wave velocity. c) Conforming step by adding points and edges. d) Final dual mesh.

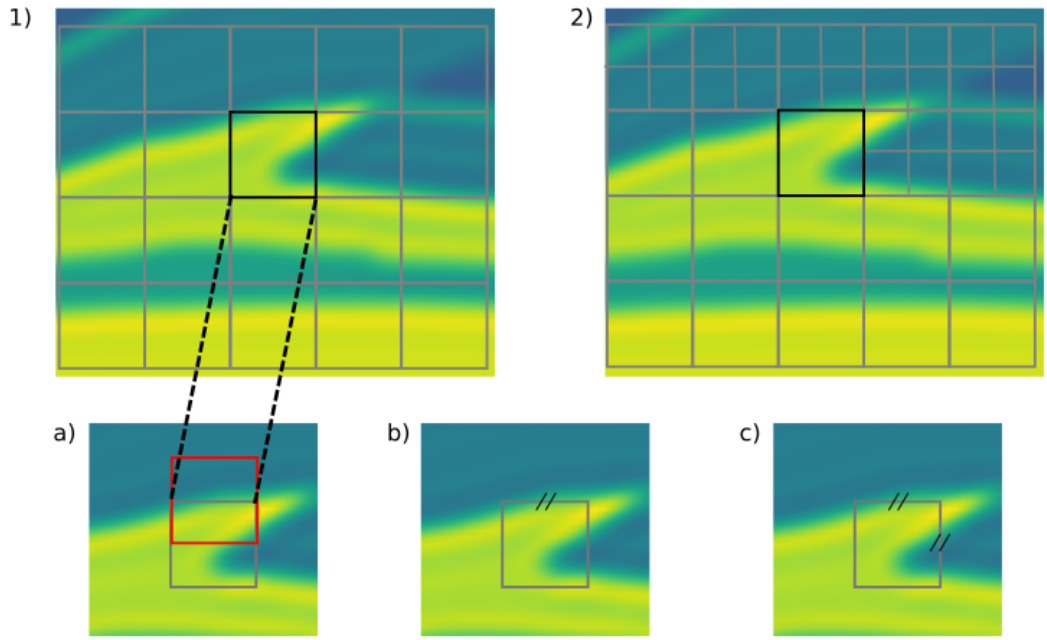


FIGURE 4.3 – Division algorithm applied to a quadrangle. a) A neighbourhood is drawn for an edge. b) Then a local decision is taken based on the maximum edge size (4.1). (c) The process is repeated for each edge.

other edges of the cell (Fig. 4.3c), we end up with four tags to decide whether the cell must be divided or not (Fig. 4.3d). The more *cut*-tagged edges, the more the interior and vicinity of the cell contain low shear-wave velocity. In the following, we divide the cell when three or four edges are *cut*-tagged. When only one edge is tagged to *cut*, a low velocity zone is located somewhere, which may imply to divide a neighboring cell, but most of the interior and vicinity of the current cell are filled with high values of V_S. In the case of two edges tagged to *cut*, either a larger low velocity zone or two low velocity zones are involved, but there is still a significant part of high velocity. In such smooth but contrasted regions, size transition patterns have a good chance to appear in the final dual mesh.

Such a division process put the adaptivity to V_S on the dual mesh instead of the primal one because the overlap between the neighborhoods of the edges and the dual elements is larger than the overlap between the primal elements and the dual elements. For a given edge, the V_S value we consider is the velocity of the S-wave propagating in the direction of the edge, which is either vertical or horizontal (App. 4.1.7). As compared to the V_S value derived from the closest isotropic medium (App. 4.1.8), such a choice enables the shortest wavelength in any vertical transversely isotropic (VTI) media to be properly handled. Assuming weak anisotropy, which is the case for most of the earth materials [e.g., Thomsen, 1986, Ismail et Mainprice, 1998] and scales [e.g., Debayle et Ricard, 2012, Çubuk Sabuncu et al., 2017, Singh et al., 2021], the shortest wavelength for other directions and lower levels of symmetry can be properly handled as well.

Because the elastic media we are dealing with are heterogeneous, a last important choice when estimating V_S for a given edge is the average over its neighborhood. We consider the harmonic mean in this work, because the kinematics of seismic rays is

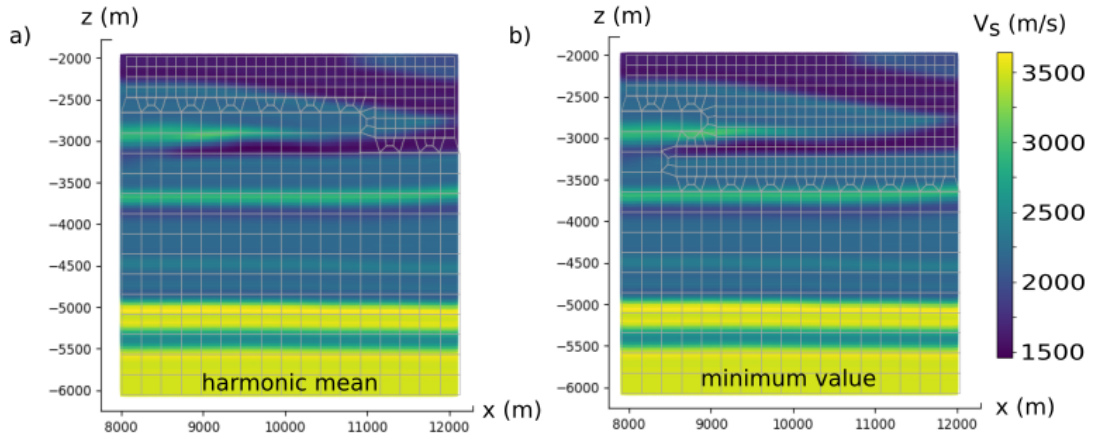


FIGURE 4.4 – Meshes obtained using the harmonic mean of V_S (a) and the minimum V_S value (b) in the division criterion.

linearly dependent on the slowness. As a much more conservative choice, we also consider the minimum value. Two meshes resulting from these two different options are shown in Figure 4.4. As expected, a higher degree of refinement is observed when using the minimum value. The effects of these two options on wave propagation simulations are investigated in Section 4.1.5.

The position and the geometry of the mesh borders are determined by the position and the size of the initial bounding box (e.g., Fig. 4.2) as well as potential transition patterns (e.g., Fig. 4.4). When perfectly matched layers (PML) have to be added for absorbing incident waves, irregularly borders does not matter, as long as the extrusion of the border edges is possible (see Section 4.1.5 and Figure 4.16). In contrast, when dealing with Neumann or Dirichlet boundary conditions, honoring the geometry of the physical borders is mandatory. In particular, when the traction-free surface of the earth is involved, the top border of the mesh has to honor the topography.

The handling of the topography has been the topic of Aurelie Scuotto's master project that I supervised.

4.1.4 Handling the topography

There are several main difficulties concerning the topography. Currently, due to the bounding box, the position of the top of the mesh can vary. Another problem comes from the different division criteria (minimum velocity and harmonic means) which may create division along the free surface (Fig 4.5)

A preliminary workaround for these issues was to impose a same level of division around the free surface. This ensure horizontal free surface elements which are easier to work with in order to compare the mesh effect on wave simulation. However this has the side effect of potentially lowering the time step as the mesh is no longer adaptive along the free surface.

Hence the goal of this work was to remove these restrictions by modifying the meshing algorithm.

Firstly, we only consider "*small*" topography. We define small as a topography whose height difference between it's highest and smallest point is lower or equal to the size of

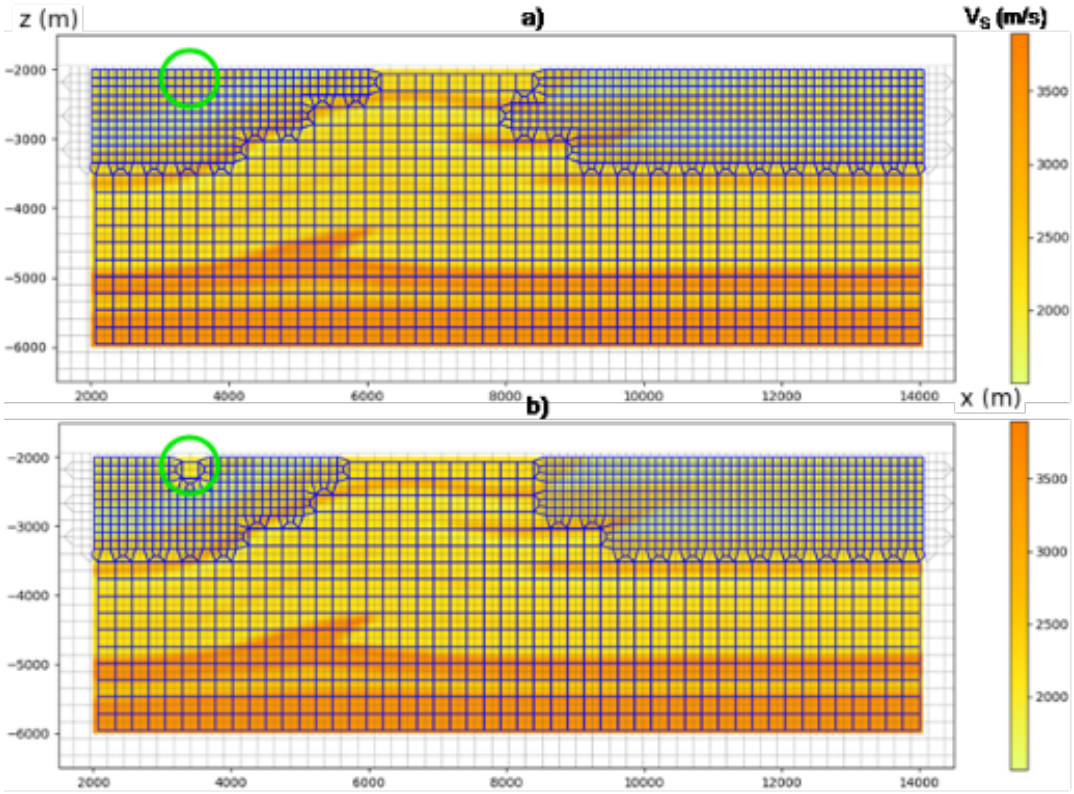


FIGURE 4.5 – Comparison of two meshes using different criteria (minimum velocity (a) and harmonic mean (b)). The harmonic-mean mesh shows more division on the free surface (green circle).

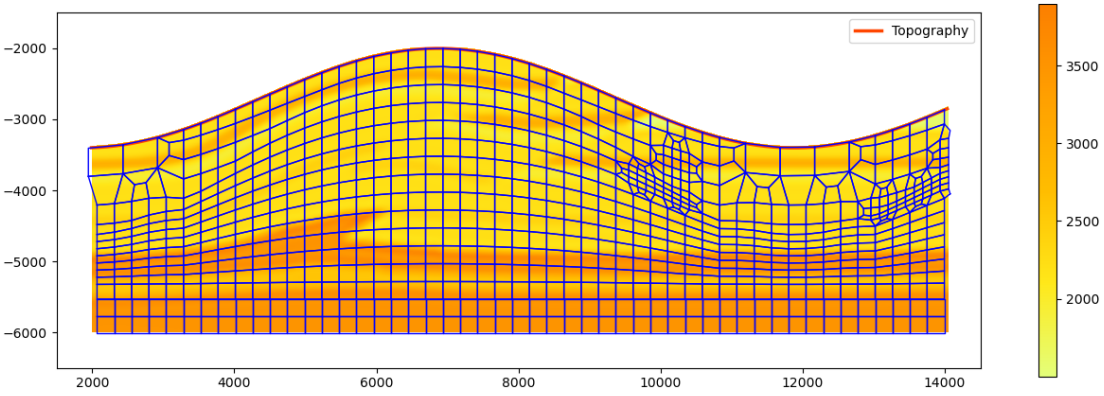


FIGURE 4.6 – Example where the free surface topography is too high compared to the mesh division. The elements are not properly divided along the free surface, leading in large element being present alongside it.

the biggest elements along the free surface. This limits stems from the quadtree division and ensures that the mesh remains adaptive (Fig. 4.6). If the difference in topography is too high, there are elements whose subdivision is not supported by any data. This result in elements being too large along the free surface.

The free surface will be taken into acount by warping the top of the mesh onto it. The displacement will then be smoothed gradually on all the mesh in order to minimize the individual elements deformation. The first step of the algorithm is to find the optimal position of the bounding box in order to minimize the displacement of the mesh. This is achieved by minimizing the distance between the topography and the top nodes of the dual mesh z_{dif} :

$$z_{dif} = argmin \left[\frac{\sum_i^n w_i \left(z_i - z_{ref} + z_i^{topo} \right)^2}{\sum_i^n w_i} \right], \tag{4.4}$$

with n the number of points of the dual along the topography, z_{ref} the top of the primal mesh, z_i the distance from the vertex i to z_{ref}, z_i^{topo} the altitude of the topography at $x = x(z_i)$, and with $w_i = \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^{-1}$ the weight associated to the vertex i (Fig. 4.7).

Because the initial position of the bounding box has an effect on the quadtree division, minimizing eq. (4.4) by moving the bounding box near the free surface is not linear (Fig. 4.8 b). However, this only results in small jump in the z_{dif} function value. It is worth noting that eq. (4.4) is nearly a quadratic equation (Fig 4.8 a). Hence, it is rather easy to find the value of z_{ref} minimizing z_{dif} knowing it closely follow a quadratic equation. An iterative process is used in order to take into acount the mesh variation, which allows to converge towards the value of z_{ref} which minimize z_{dif}.

In order to fit the mesh to the topography, each node has to be moved vertically. However, in order not to modify the surface element too much, wihch would severly reduce the maximum eligible time step, the displacement has to be propagated over a given thickness z_{pmax}.

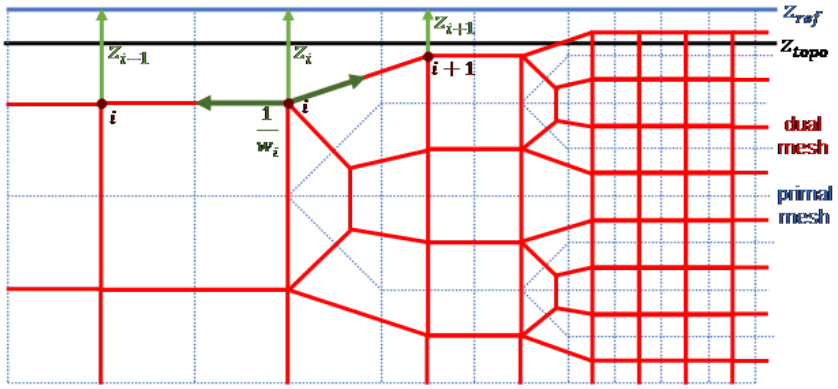


FIGURE 4.7 – Schema of the different parameters used for z_{dif}.

4.1.4.1 Mesh Optimization

In this section, the algorithm presented in the previous section is further improved by slightly moving the mesh nodes so that the global time step Δt of SEM simulations is maximized. To do so, a Laplacian smoothing is applied to all the interior nodes (i.e., the nodes which are not on the boundary of the domain) in a random and iterative way. Such a slight move of the nodes is not expected to alter the SEM accuracy, because a large majority of the starting edge sizes d from the algorithm of the previous section is significantly lower than d_{max} (down to $\frac{d_{max}}{2}$, owing to the quadtree refinement strategy) and because the accuracy condition (4.1) depends on a heuristic value of α_N and the estimation of V_S which can both be chosen in a conservative way.

Maximizing the global time-step of SEM simulations corresponds to maximizing the local values of $\frac{\Delta x}{V_P}$ (Eq. (4.2)). This can be achieved using a weighted mean Laplacian smoothing [Zhang et al., 2009, Wardetzky et al., 2008] and relevant values of P-wave velocity as weights. In its iterative formulation [e.g., Mallet, 1992], the weighted mean Laplacian moves each node i at iteration n from x_i^n to x_i^{n+1} so that it becomes the weighted barycenter of its neighbors. In one dimension, the update is written :

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{2} \left[V_P^{ij}\right]_{min} (x_i^n - x_j), \tag{4.5}$$

with j the index of the neighboring nodes, $\left[V_P^{ij}\right]_{min}$ the minimum P-wave velocity along the edge ij, and $\gamma = \left[V_P^{i1}\right]_{min} + \left[V_P^{i2}\right]_{min}$ a normalization coefficient. As discussed later on, the minimum P-wave velocity is preferred to other velocity values such as the mean or the maximum because it fosters the convergence of the algorithm. Moreover, direct algebraic optimization approaches exist for this problem, but an iterative approach is preferred because it allows recomputing the velocity at each iteration. Figure 4.9 shows an example of applying Equation (4.5) to all the nodes, in a random order at each iteration, until it converged, i.e., until the displacement of all the nodes was smaller than an ϵ defined by the user. To make the effect of the weighted mean Laplacian clear,

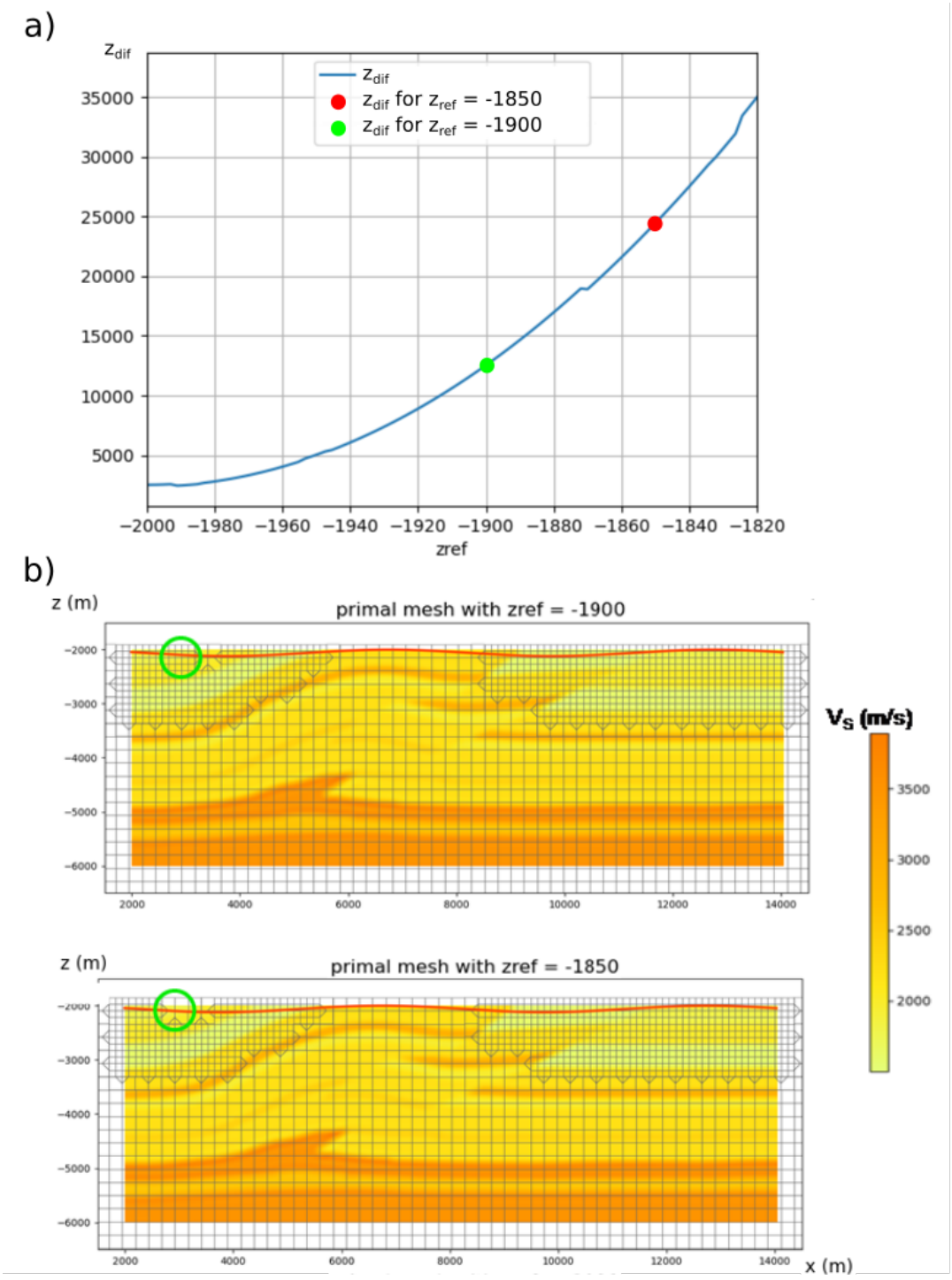


FIGURE 4.8 – a) Exemple of value of z_{dif} for different value of r_{ref}. b) Primal mesh corresponding to the value of z_{dif} shown. A small topography is represented with an orange line. The main modification of the mesh at the free surface are highlighted by the green circle.

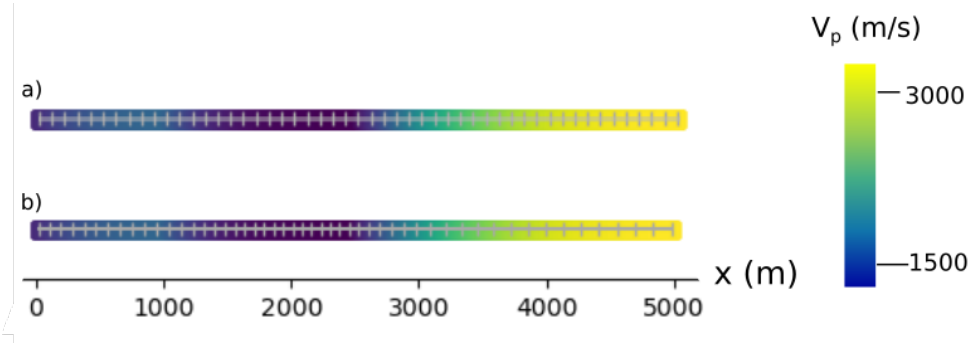


FIGURE 4.9 – Illustration of the weighted mean Laplacian smoothing (Eq. 4.5) applied to a 1D regular mesh (a). The final mesh (b) shows small elements in the low P-wave velocity zones whereas larger elements are obtained in the high velocity zones.

we start from a regular mesh instead of a V_S-adapted mesh. As expected, elements are slightly enlarged in high P-wave velocity regions and shrunk in low P-wave velocity regions.

Unfortunately, applying the 2D version of Equation (4.5) to the adaptive meshes obtained from the algorithm presented in Section 4.1.3.1 shows to not be working properly, as it results in inverted elements (Fig. 4.10). Such inversions appear because the nodes have a variable number of neighbors. Because the weights only depend on P-wave velocity without regard for node density, the smoothing can make some nodes move in preferential directions, which deforms the mesh in an unintended way. Such a behavior can be prevented by using the cotangent Laplacian discretization, which weights each neighbor's contribution by the cotangent of the angles opposite to the corresponding edge. It was first proposed by Pinkall et Polthier [1993] for triangular meshes. For quadrangular meshes, Xiong et al. [2011] introduced a positive weight formulation when updating each internal node :

$$\boldsymbol{x}_i^{n+1} = \boldsymbol{x}_i^n + \frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{m}[w_j(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i^n) + w'_j(\boldsymbol{x}'_j - \boldsymbol{x}_i^n)], \tag{4.6}$$

with

$$w_j = \cot\frac{\alpha_{j1}}{2} + \cot\frac{\alpha_{j4}}{2} + \cot\frac{\alpha_{(j-1)3}}{2} + \cot\frac{\alpha_{(j-1)6}}{2}, \tag{4.7}$$

$$w'_j = \cot\frac{\alpha_{j2}}{2} + \cot\frac{\alpha_{j5}}{2}, \tag{4.8}$$

m the valence of node i, $\boldsymbol{x}_j$ and $\boldsymbol{x}'_j$ the position of two nodes, as defined in Figure 4.11, from the neighboring element j, $\eta = \sum_{j=1}^{m}(w_j + w'_j)$ a normalization coefficient, and all the angles α as defined in Figure 4.11.

This positive weight formulation relies on two triangulations of each element around a given node i (Fig. 4.11). This results in 2^m possible triangulations of the quadrangles around i. The cotangent Laplacian smoothing for quadrangles (also called quadrangular mesh Laplace Beltrami operator, abbreviated QLBO) works by averaging all the Laplacian discretizations over the 2^m triangulations around i. If the mesh is regular, the angles are all the same so the weights are all equal. If the mesh is irregular, the angles

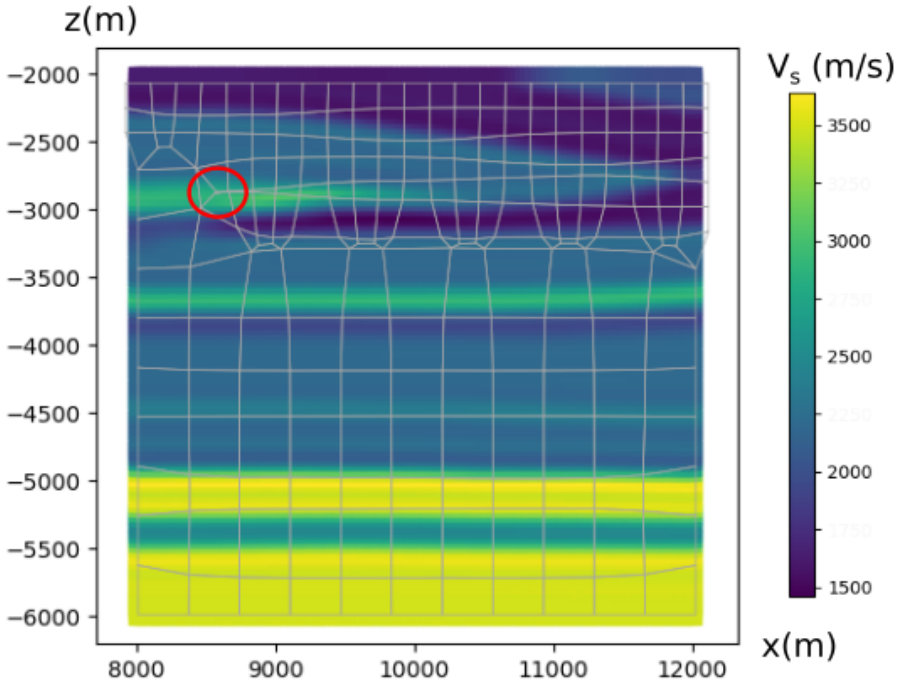


FIGURE 4.10 – A 2D adaptive mesh after a velocity-weighted mean Laplacian smoothing. The elements in the transition patterns become highly distorted. They can even invert, as shown in the red circle.

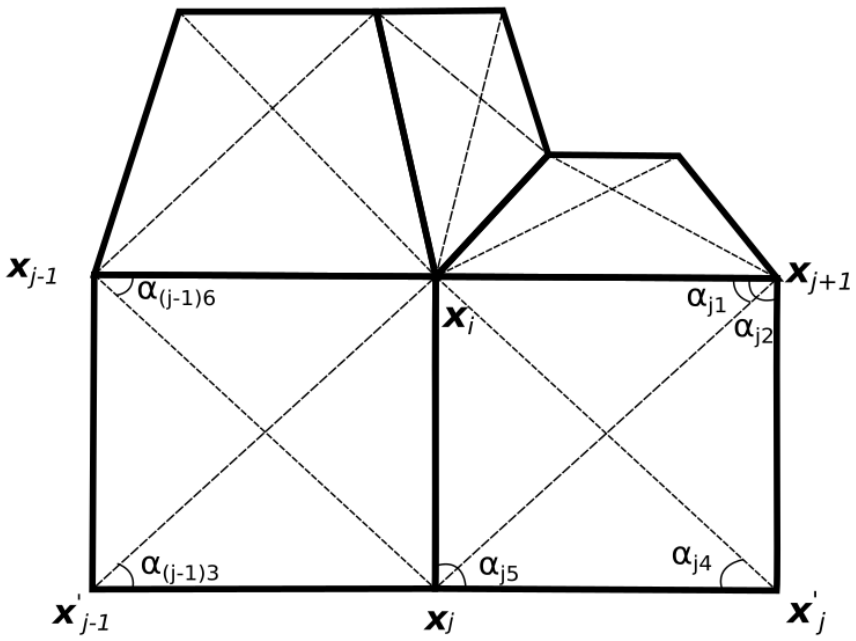


FIGURE 4.11 – The angles used to compute the cotangent Laplacian, adapted from Xiong et al. [2011].

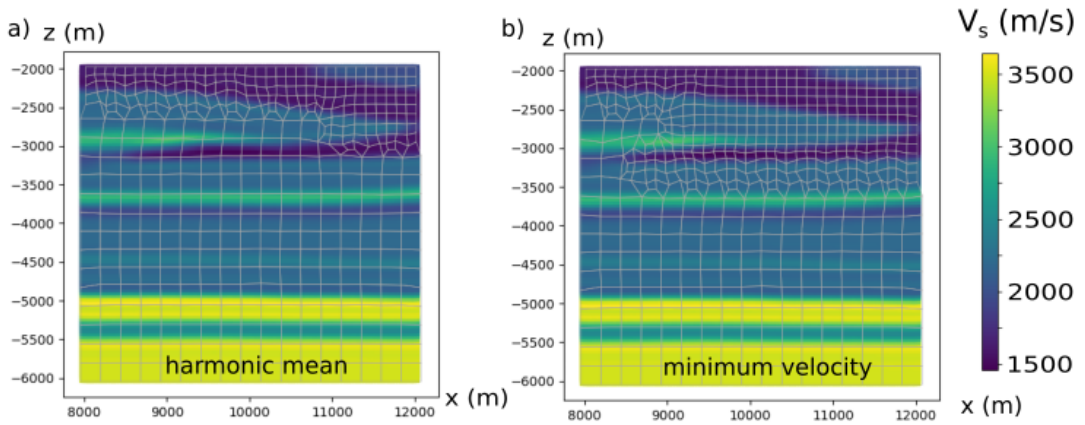


FIGURE 4.12 – The two V_S-adapted meshes from Figure 4.4 optimized using the cotangent Laplacian smoothing (4.6) with the weights (4.9) and (4.10).

are different from each other, which decreases the weighting of x_j if it is close to x_{j-1} and/or x_{j+1}, or increases it otherwise. For instance, in Figure 4.11, the three points at the top right of node i will all have their respective weights lowered by the cotangent Laplacian because they are all close to their neighbors $j-1$ and $j+1$.

To maximize the local values of $\frac{\Delta x}{V_P}$, which is our primary goal in this section, let us introduce a P-wave velocity term into the weights (4.7) and (4.8). Similarly to Eq. 4.5, the minimum P-wave velocity along the edges is used :

$$w_j = \left[V_P^{ij}\right]_{min}\left[\cot\frac{\alpha_{j1}}{2}+\cot\frac{\alpha_{j4}}{2}+\cot\frac{\alpha_{(j-1)3}}{2}+\cot\frac{\alpha_{(j-1)6}}{2}\right], \tag{4.9}$$

$$w'_j = \left[V_P^{ij'}\right]_{min}\left[\cot\frac{\alpha_{j2}}{2}+\cot\frac{\alpha_{j5}}{2}\right]. \tag{4.10}$$

Because the medium is anisotropic, the P-wave velocity field from which we extract the minimum should ideally be the velocity in the direction of the edges. This calls for updating, at each iteration, the minimum velocity along each edge from the elastic tensor. To reduce the computational cost, we propose instead to use the P-wave velocity of the closest isotropic medium (App. 4.1.8). This choice allows us to use a single velocity field during the mesh optimization process.

Figure 4.12 shows the result of the above weighted cotangent Laplacian smoothing applied to the meshes presented in Figure 4.4. The two obtained meshes do not hold inverted or overly distorted elements. Looking at the distribution of the equiangle skewness (Fig. 4.13), one observes that the mesh derived from a minimum V_S value is very regular, with the majority of the elements having a skewness of 0 and only a few elements reaching a value of 0.45. These skewness values remain below the acceptable limit of 0.75 discussed in Section 4.1.2.3 [Komatitsch et al., 2005]. The optimization only shows a local effect on the mesh and makes the elements in the low velocity area smaller and the elements in the high velocity area larger when possible.

In order to prevent our new weights from deforming the mesh too much and losing the locality of our QLBO operator, a limit on the element skewness can be set. If a node displacement makes an element exceed this skewness limit, the displacement is

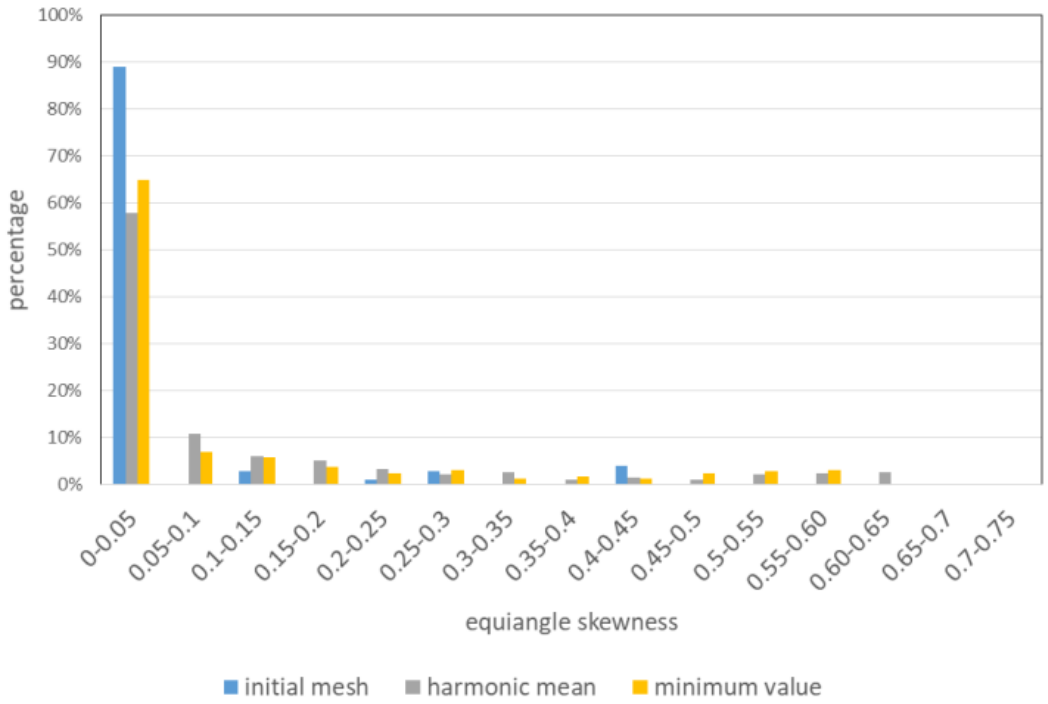


FIGURE 4.13 – Equiangle skewness statistics of the two optimized meshes shown in Figure 4.12. As a comparison, the statistics of the initial mesh are also provided.

not authorized and the node does not change place during the current iteration. This ensures that the worst element skewness is within the acceptable range for the spectral element simulation. In practice, the skewness limit can be reached by the algorithm for a few elements located inside the transition patterns. The convergence of the algorithm, either with or without the skewness limit, has not been proven mathematically, but it is observed numerically. In Figure 4.12, the convergence is reached after 97 iterations.

4.1.5 Effect of the adaptive meshes on wave simulation : application to the Groningen gas field

The Groningen gas field is located in Northern Netherlands and is the largest gas field in Europe. Since the beginning of the gas exploitation in 1963, the seismicity in the region has been increasing [Hettema et al., 2017]. This increase has been proved to be related to gas extraction [van der Voort et Vanclay, 2015]. In such a context, the Groningen gas field has been extensively studied and several velocity models have been built. We here consider the homogenized model proposed by Renat et al. [2022], which is derived from Romijn [2017]. This model is composed of eight lithologies with P-wave velocity spanning from 2000 $m.s^{-1}$ to 6000 $m.s^{-1}$. and an S-wave velocity spanning from 1000 $m.s^{-1}$ to 3500 $m.s^{-1}$. The homogenized model we use is presented in Figure 4.14.

4.1.5.1 Simulation settings

To study the effect of our meshing algorithm and optimization on wave simulations, two parameters are made variable : the division criteria and skewness limit. For each

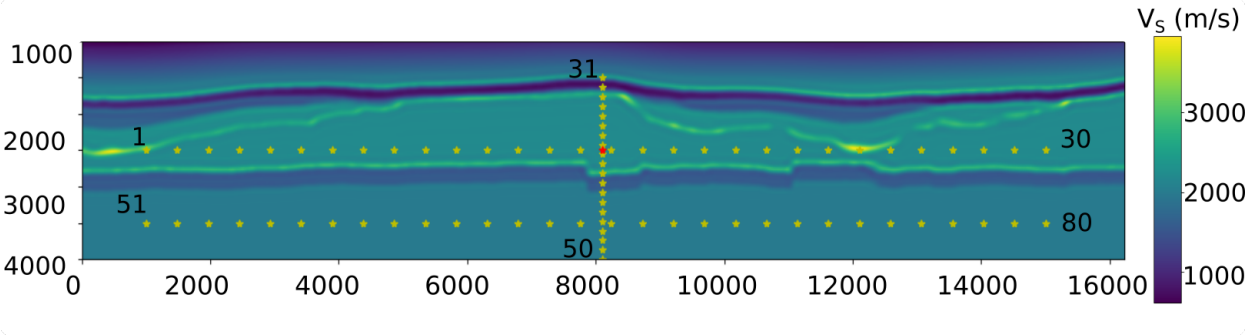


FIGURE 4.14 – A vertical section across the homogenized Groningen model from Renat et al. [2018]. The three lines of receivers are represented using the yellow stars and the red star marks the position of a point-source.

division criteria, meshes are produced with a skewness limit ranging from 0.45 to 0.85. Figure 4.15 shows the non-optimized mesh as well as two optimized meshes for a skewness limit of 0.65. The goal is to compare how the simulation performs on each mesh with regard to a reference simulation. The reference solution is computed on a fine, regular grid with elements around 70 meters wide, which corresponds to the smallest d_{max} (Eq. (4.1)).

The quadtree meshing takes approximately 5 seconds per mesh, on a laptop with an Intel i7 core, while the optimization is way slower and takes approximately 2h45 per mesh on the same labtop. It is worth noting that the quadtree meshing algorithm is implemented in C++ and is fairly optimized while the optimization code is mainly in Python (with some C++ binding) with little optimization.

The adaptive meshes are compared through their responses to a wave simulation in the model. The source and the receivers are the same for all simulations (Fig. 4.14), with the only varying factors being the meshes and the associated time steps (for each mesh, we take the maximum admissible time step, which is evaluated using the smallest P-wave velocity in each edge, cf (Eq. (4.2)). Two sets of simulations are compared separately. The first one involves an explosion at the center of the domain whereas the second one involves a vertical elastic force. The simulation results are estimated by computing an error through 80 receivers spread on 3 different lines (Fig. 4.14). The error E of a simulated wavefield displacement $\bar{u}$ to the reference simulation $\bar{u}^{ref}$ is defined as :

$$E = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{\int_0^{t_{sim}}(\bar{u}-\bar{u}^{ref})^2(x_i,t)dt}{\int_0^{t_{sim}}(\bar{u}^{ref})^2(x_i,t)dt}}, \tag{4.11}$$

with t_{sim} the duration of the simulated signal (here $t_{sim} = 5s$), N the number of receivers and x_i their position.

To simulate a semi-infinite model, convolutional PMLs [Komatitsch et Martin, 2007] are added to the lateral and bottom borders of the meshes by extruding the border edges in an orthogonal way. This is illustrated in Figure 4.16.

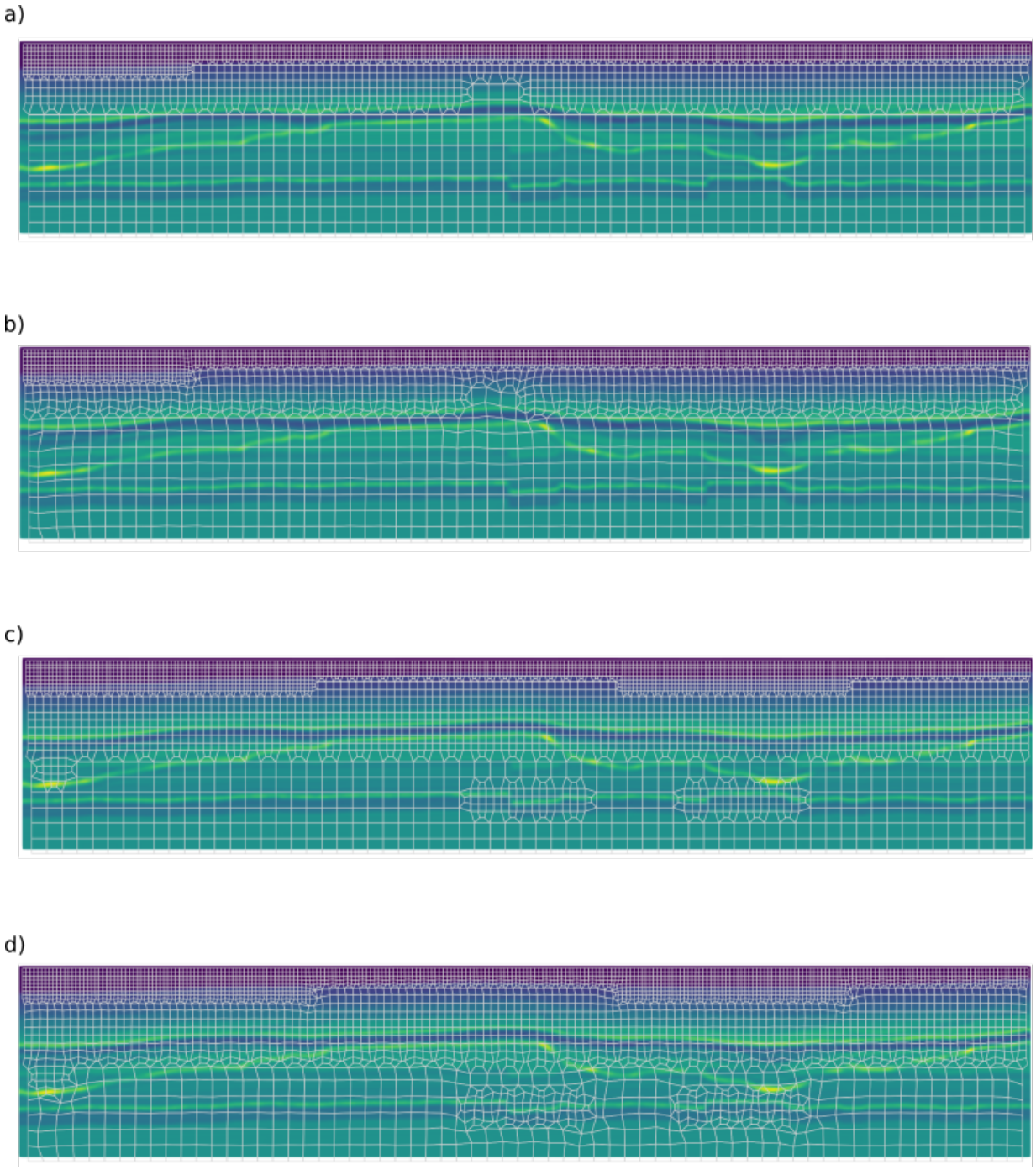


FIGURE 4.15 – Different meshes of the model shown in Figure 4.14 : a) harmonic mean mesh before optimization, b) harmonic mean mesh after optimization with a skewness limit of 0.65, c) minimum value mesh before optimization, d) minimum value mesh after optimization with a skewness limit of 0.65.

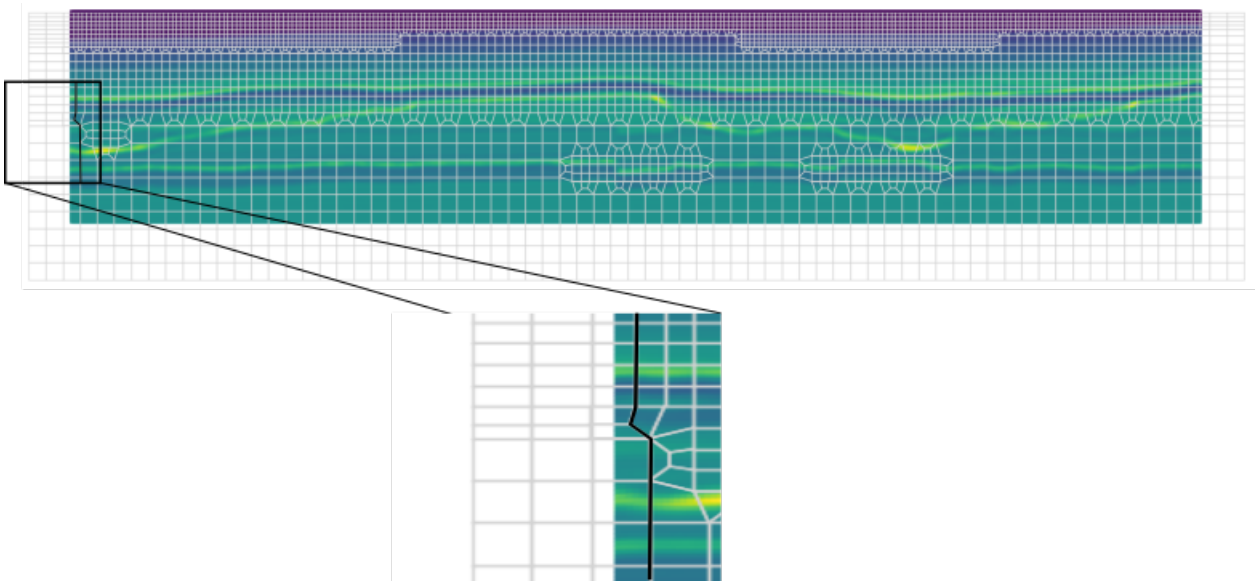


FIGURE 4.16 – Adding PML elements by extruding the border edges. Three layers of elements are added here.

mesh	fine	harmonic mean	minimum value
number of elements	29925	2829	4029
time step (ms)	0.1	0.22	0.21
simulation duration (s)	5485	773	827
error	/	0.037	0.014

TABLE 4.1 – Comparison of the explosion simulation results in the non-optimized meshes.

4.1.5.2 Results

Table 4.1 shows the simulation times and the errors of the explosion simulations in the non-optimized adaptive meshes (Fig. 4.15). In the harmonic cases, the number of elements is divided by a factor 10 and the time step is increased by a factor 2. This results in a global speedup of around 7. In the minimum value case, an even better precision is attained for the cost of a slightly higher computation cost. This higher computation cost is manly explained by the number of elements (1.4 times more elements than in the harmonic mean meshes).

Figure 4.17 shows waveforms at receiver 51. This receiver was selected as it is one of the far away from the source and it is the receiver where the error is the largest in every simulation. There are little discrepancies between the simulations in the adaptive meshes and the reference simulation, with the exception of a wave around 3.5 seconds which shows higher amplitude in the harmonic mean adaptive meshes. This discrepency is absent in the minimum value meshes. In these latter, the error at receiver 51 is 0.094 in the harmonic mean case and 0.042 in the minimum value case, whereas it reaches 0.087 and 0.022 in the non-optimized meshes. On average over the 80 receivers, the error in the optimized meshes is 0.037 in the harmonic mean case and 0.014 in the minimum value case, which corresponds to a 10% and 50% (respectively for the harmonic mean and minimum value case) increase of the accuracy as compared to the non-optimized

meshes. This shows that the optimization not only enlarges the simulation time step, as illustrated hereafter, but it can also help in getting a better accuracy.

The vertical elastic force produces a wavefield with more S-wave energy than the explosion case, especially in the line of receivers 1 to 30. This means that shorter wavelengths must be modelled, which is more challenging from a numerical point of view. Figure 4.18 shows the vertical displacement obtained at receiver 1. Similar trends as in the explosion case are observed : the optimized cases both show a better fit than the non-optimized meshes and the minimum velocity meshes have the smallest error.

The optimization step is further tested using different limits on the skewness. Figure 4.19 shows a summary of the simulation performance in both the minimum value meshes and the harmonic mean meshes. As observed previously (Table 4.1, Fig. 4.17 and Fig. 4.18), the harmonic mean meshes provide both the highest speedup and the highest error, which is expected as the harmonic mean is a less constraining division criterion as compared to the minimum value. More importantly, the optimized meshes again lead to faster and more accurate simulations as compared to the non-optimized meshes, except in the harmonic mean case when the skewness limit is larger than 0.7. In this setting, the error becomes very large because of highly deformed elements. In all the other settings, the optimized meshes provide better performance and the skewness limit has a negligible influence.

All our adaptive meshes allow to increase the time step of the simulation as compared to the reference simulation. Nevertheless, this increase is not as large as one could have hoped as the largest elements in the adaptive meshes are four times larger than the smallest ones, meaning that the time step in these meshes could be, in principle, four times larger than the one in the fine mesh. However, the highest admissible time steps we obtain in the non-optimized and optimized meshes are only 2.2 and 2.5 times larger than the reference time step, respectively (Tables 4.1 and 4.2). This can be explained by the fact that the final element size of the adaptive meshes depends on the initial bounding box , which is chosen according to the size of the domain to be meshed. Then, the meshing criteria only ensure that the final element size is below the optimal one (i.e., d_{max}, see Eq. (4.1)). Moreover, the smallest elements of the adaptive meshes actually lie in the size transition patterns, which are located where the velocity field is close to the division threshold. As a result, these elements provide have the worst admissible time step over the mesh.

The optimization step yields just a slight increase in the maximum admissible time step. The meshes optimized with a skewness limit of 0.45 and 0.55 shows the slightest increase (e.g., from 0.22ms in Table 1 to 0.22ms and 0.23ms, respectively, in Table 2). An explanation is that the initial mesh already shows some elements with a relatively high skewness (Fig. 4.13) so the optimization cannot move the mesh nodes significantly, which limits the time step improvement. When the optimization is less constrained (i.e., with a skewness limit larger than 0.6), a maximum time step is reached, as the optimization is local so it cannot change the structure of the mesh.

4.1.6 Discussion and conclusions

An adaptive meshing algorithm has been developped to perform SEM wave simulations in 2D smooth anisotropic media. This algorithm uses a quadtree division to

skewness limit	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85
time step (ms)	0.22	0.23	0.25	0.25	0.25
simulation duration (s)	765	760	753	752	754
speedup	7.16	7.21	7.28	7.29	2.27
error	0.036	0.038	0.039	0.036	0.037

TABLE 4.2 – Comparison of explosion simulation results obtained in harmonic mean meshes after the optimization process with different skewness limits

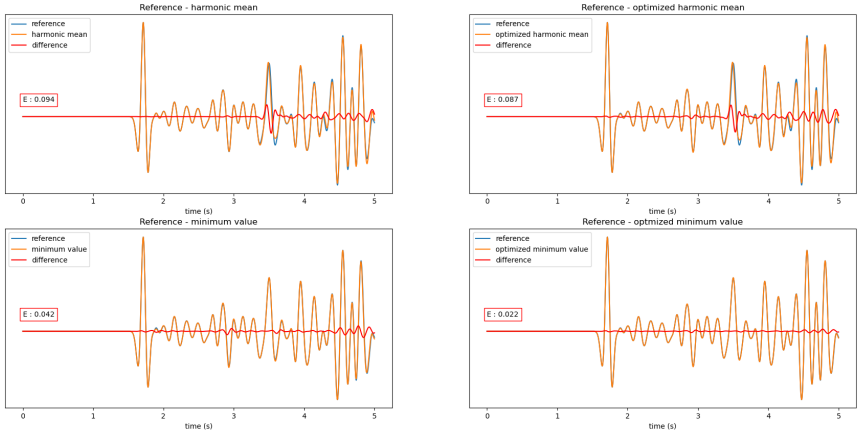


FIGURE 4.17 – Comparison of the z-displacement from a $M_0 = 10^{10} N.m$ explosion simulation at the receiver 51. The error E is computed globally on the whole simulation.

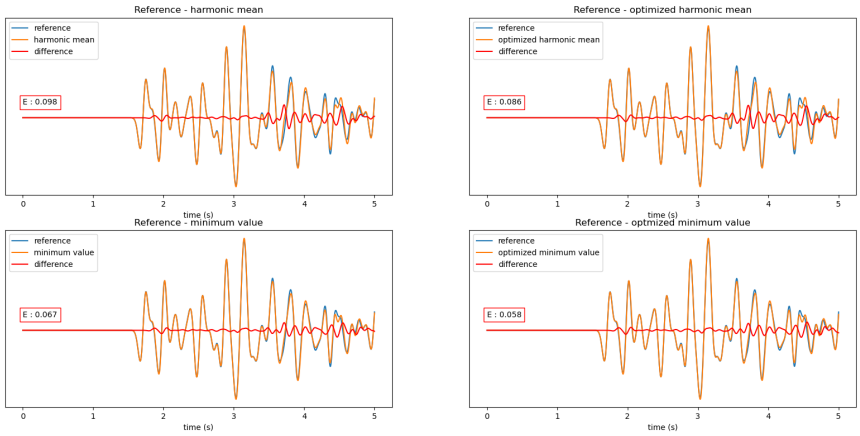


FIGURE 4.18 – Comparison of the z-displacement of a $10^{10} N$ elastic force simulation at the receiver 51. The error E is computed globally on the whole simulation.

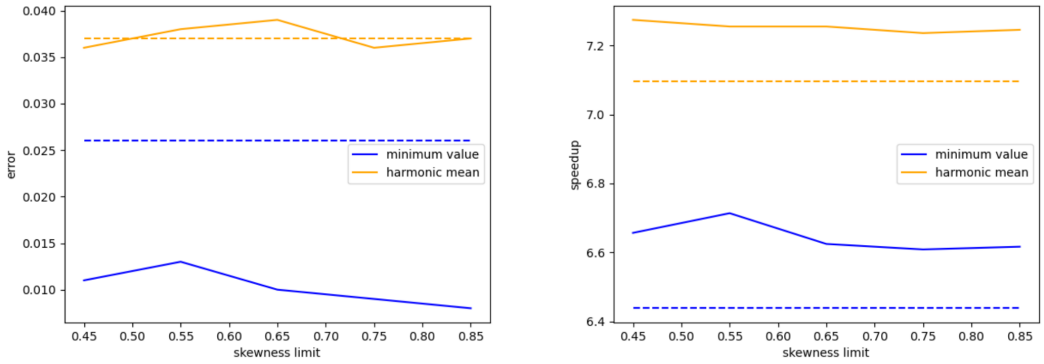


FIGURE 4.19 – Speedup (left) and error (right) of elastic force simulations in both optimized (solid lines) and non-optimized (dotted lines).

adapt the mesh element size to the S-wave velocity. An optimization step which further improves the simulation speed and accuracy has been added to supplement the quadtree division. This optimization relies on an iterative cotangent Laplacian smoothing, weighted using the closest isotropic P-wave velocity (Appendix 4.1.8). An application in the Groningen gas field shows that the adaptive meshes can provide accurate SEM simulation results while allowing a significant speedup with respect to a simulation in a fine regular mesh. In particular, the optimization step is able to further increase both the time-step and the accuracy of the simulations, as compared to non-optimized meshes. However, the optimization process is computationaly expensive at this stage, so optimizing the code would be welcome to fully benefit from it.

Due to the meshing criterion (4.1), the size of the element edges directly depends on the SEM polynomial degree N. In the present work, we only consider $N = 6$, which makes the edges of the adaptive meshes as large as the shortest variation length of the elastic properties. If using a much higher value of N, then the element edges are much bigger [Lyu et al., 2020] so that small low velocity areas might be poorly sampled. To circumvent this potential problem, a stricter division criterion for cutting an element can be considered, like using two tagged edges instead of the current three.

Another potential problem comes from areas where V_p increases whereas V_s decreases, i.e., where $\frac{V_p}{V_s}$ increases. In such areas, there is a discrepency between the velocity used for the meshing and the velocity used for optimization. However, this discrepancy is not such a problem as our optimization step actually relies on the difference in V_p between the edges that share the node to be moved. Moreover, the skewness of the elements is controlled and, at each iteration of the optimization, the sequence of the node displacements is random, so the overall node displacement remain small.

As discussed in Section 4.1.3, a weak topography can be easily handled. In this case, *weak* means that the altitude difference between the highest and the lowest topographic points must be smaller than the edge size of the smallest element on the topography. In such a setting, the position and the size of the initial bounding box can be optimized so that the top of the mesh after the quadtree division is flat (i.e., with no stair steps) and close to the topography ; then, the top nodes can be moved to the topography with no highly skewed, nearly triangular, surface elements. This process can be used to handle

the Earth curvature and apply the meshing algorithm to the regional scale. However, when the Earth curvature is significant, things become much more complicated. For instance, applying our meshing algorithm to a 2D section of the global Earth would not be possible for the same reason as handling a significant topography is not possible at this stage..

A more interesting perspective for this work is to expand it into 3D. The meshing algorithm proposed by Maréchal [2009] already exists in 3D and the modifications we brought to this algorithm are easy to implement in 3D. It would primarily require the closest isotropic S-wave velocity to be computed in the three directions of space. On the other hand, the optimization part would require considering volumetric Laplacian discretizations for hexahedral cells [Wei et al., 2015] and carefully adapting the velocity weighting used in this paper.

4.1.7 Directional S-wave velocity in an anisotropic material

In this appendix, we show how to determine the velocities of S-waves propagating in the vertical and horizontal directions of an anisotropic medium characterized by its stiffness tensor $\mathbf{C}$. To do so, we start from the homogeneous elastic wave equation :

$$\rho \ddot{u}_k - \partial_i \sigma_{ik} = 0,$$

with $\ddot{u}_k$ the k^{th} component of the acceleration, ρ the density, and $\sigma_{ik} = C_{ikjl}\partial_j u_l$ the ik^{th} component of the stress tensor. The plane wave solution of this equation writes

$$u_k = g\Big(\frac{\bar{n}\cdot\bar{x}}{v} - t\Big)\, d_k,$$

where g is a function of time, $\bar{n}$ is the propagation direction, $\bar{d}$ is the displacement direction, and v is the wave velocity. Introducing this solution in the wave equation and assuming a homogeneous medium, it comes

$$\rho\delta_{kl}d_l - C_{ikjl}\frac{n_i n_j}{v^2}d_l = 0.$$

Using the Christoffel tensor $A_{kl} = C_{ikjl}n_i n_j$, we end up with

$$\left(-\rho v^2 I_{kl} + A_{kl}\right) d_l = 0.$$

If $\bar{n} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, meaning that the wave propagates in the horizontal direction, then $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}C_{1111} & C_{1113}\\ C_{1113} & C_{1313}\end{pmatrix}$. Using Voigt notation, we finally have

$$\rho v^2 = \frac{1}{2}\left(C_{11} + C_{55} \pm \sqrt{(C_{11}-C_{55})^2 + 4C_{15}}\right).$$

The S-wave velocity corresponds to the lowest of the two solutions :

$$V_S = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\left(C_{11} + C_{55} - \sqrt{(C_{11}-C_{55})^2 + 4C_{15}}\right)^{1/2}.$$

If $\bar{n} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, meaning that the wave propagates in the vertical direction, we similarly have

$$V_S = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\left(C_{33} + C_{55} - \sqrt{(C_{33}-C_{55})^2 + 4C_{35}}\right)^{1/2}.$$

4.1.8 Closest 2D isotropic material

Using Norris [2005], we here compute the closest isotropic material

$$\mathbf{C}_{eqv} = \begin{pmatrix}\lambda^{eqv} + 2\mu^{eqv} & \lambda^{eqv} & 0\\ . & \lambda^{eqv} + 2\mu^{eqv} & 0\\ . & . & \mu^{eqv}\end{pmatrix}$$

from a general stiffness tensor

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{15} \\ . & C_{33} & C_{35} \\ . & . & C_{55} \end{pmatrix}.$$

To do so, we minimize the Frobenius norm

$$\|\mathbf{C}-\mathbf{C}_{eqv}\|^2 = [C_{11}-(\lambda^{eqv}+2\mu^{eqv})]^2+2(C_{13}-\lambda^{eqv})^2+2C_{15}^2+[C_{33}-(\lambda^{eqv}+2\mu^{eqv})]^2+2C_{35}+(C_{55}-\mu^{eqv})^2$$

by equating its partial derivatives to 0 :

$$\begin{cases} \frac{\partial\|\mathbf{C}-\mathbf{C}_{eqv}\|^2}{\partial\lambda^{eqv}} = -4C_{11} + 4\lambda^{eqv} + 8\mu^{eqv} - 4C_{33} + 4\lambda^{eqv} + 8\mu^{eqv} = 0, \\ \frac{\partial\|\mathbf{C}-\mathbf{C}_{eqv}\|^2}{\partial\mu^{eqv}} = -2C_{11} + 2\lambda^{eqv} + 8\mu^{eqv} - 4C_{13} + 4\lambda^{eqv} - 2C_{33} + 2\lambda^{eqv} + 8\mu^{eqv} - 2C_{55} + 2\mu^{eqv} = 0. \end{cases}$$

This leads to

$$\begin{cases} \lambda^{eqv} = \frac{C_{11}+C_{33}+18C_{13}-4C_{55}}{20}, \\ \mu^{eqv} = \frac{C_{11}+C_{33}+C_{55}-2C_{13}}{5}. \end{cases}$$

Conclusion

De par des raisons géographiques et historiques, la majorité des grandes villes à travers le monde se sont développées le long de cours d'eau, et donc, sur des bassins sédimentaires. Or, ces bassins jouent un rôle clef dans l'aléa sismique. Ils sont sources d'effets de sites générant localement des amplifications et déamplifications du champ d'ondes. Dans les zones à moyenne ou forte activité sismique, il est important d'étudier les bassins sédimentaires et les effets de sites afin de pouvoir obtenir de bonnes estimations de l'aléa sismique. Cette analyse peut être réalisée par différentes approches. Ces approches se rangent dans deux grandes familles : les méthodes probabilistes (Probabilistic Seismic Hazard Assessment, PSHA) et les méthodes déterministes (Deterministic Seismic Hazard Assessment, DSHA). Il est possible de coupler les résultats obtenus par ces méthodes avec des résultats analytiques issus d'approximations 1D afin de mieux prendre en compte les effets de site dans les bassins. Toutefois, une approche analytique n'est pas toujours possible car la géométrie de certains bassins est trop complexe. Cette complexité des bassins provient de leur géométrie, c'est à dire de leur interface socle-sédiment et de leur stratification interne. Afin de pallier cette complexité, les sismologues se sont tournés vers la résolution numérique de l'équation d'ondes. Dans cette thèse, la méthode des éléments spectraux a été choisie. Cette méthode est dérivée des éléments finis et repose sur l'utilisation de polynômes de Lagrange définis par des points de Gauss-Lobatto-Legendre. Cette méthode permet d'obtenir des matrices de masse diagonalisables, ce qui rend son coût numérique beaucoup plus faible que la méthode des éléments finis classique. La méthode des éléments spectraux permet aussi d'obtenir une convergence spectrale, c'est-à-dire que la précision augmente avec le degré polynomial utilisé.

Toutefois, la représentation numérique de bassins sédimentaires pour la simulation peut être difficile. Le contenu sédimentaire des bassins peut parfois contenir de fines couches avec des contacts tangentiels au niveau des bords ou au contact avec d'autres couches. D'autre part, il existe de forts contrastes de vitesse entre les roches sédimentaires du bassin et les roches du socle. Ces géométries, associées aux fortes différences de vitesse, forcent l'utilisation de petits éléments, parfois mal adaptés aux vitesses locales des ondes. Ces petits éléments obligent l'utilisation de petits pas de temps, rendant le coût numérique des simulations parfois très élevé. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que chaque simulation sismique est associée à de nombreuses sources d'incertitude. Les incertitudes sur la source sismique, la propagation des ondes entre la source et le bassin, et sur la propagation au sein même du bassin, rendent la modélisation déterministe de fréquence au-delà de 1 à 3 Hz impossibles.

Pouvoir réaliser plusieurs simulations dans un même milieu permettrait de pouvoir

échantillonner ces incertitudes et donc améliorer notre compréhension des effets de sites. Le coût numérique des simulations d'ondes est donc un verrou technique majeur à la quantification d'incertitudes. Sa réduction est un sujet d'étude majeur en simulation d'ondes.

Dans cette thèse, deux pistes de réduction du coût numérique de simulation ont été étudiées. La première consiste à lisser le milieu d'origine avec une méthode nommée l'homogénéisation à deux échelles. Une fois lissé, un milieu ne présente plus de complexité géométrique nécessitant l'utilisation de petits éléments, ce qui permet d'utiliser des éléments plus gros et en plus petit nombre. De plus gros éléments permettent l'utilisation de pas de temps de simulation plus grands ce qui permet d'obtenir des simulations plus rapides. D'autre part, un algorithme de maillage adaptatif pour des milieux lisses a été proposé. Les bassins sédimentaires présentent de gros contrastes de vitesse entre le contenu sédimentaire du bassin et les roches du socle. Un maillage adaptatif permet d'obtenir des éléments dont la taille varie avec la vitesse locale et permet donc de réduire encore le nombre d'éléments nécessaire pour le maillage, et d'avoir un meilleur ratio $\frac{\delta x}{V_P}$ (avec δx la distance entre deux points de GLL et V_P la vitesse locale des ondes P). Ce ratio conditionne le pas de temps utilisable pour la simulation et il est souhaitable qu'il soit le plus élevé possible.

Contributions principales

Un travail d'adaptation de l'homogénéisation pour rendre la théorie applicable aux bassins sédimentaires a été réalisé. Ce travail commence par une réécriture du problème élastostatique en géométrie cylindrique suivant le travail de Kennett [1983]. Un développement des équations de l'homogénéisation a été réalisé jusqu'à l'ordre 2 avec les conditions aux limites associées. La vérification de cette nouvelle écriture de l'homogénéisation a ensuite été réalisée. Dans un premier temps, un milieu *layercake*, vérifiant toutes les conditions théoriques de l'homogénéisation non périodique est étudié, et montre de bons résultats de simulation et donc consiste en une validation de la théorie quand le cadre de celle-ci est respecté. Ensuite, un milieu synthétique à deux couches a été créé pour tester l'applicabilité de cette nouvelle écriture de l'homogénéisation pour des bassins sédimentaires. Toutefois, les simulations sur des milieux plus complexes ont montré de fortes erreurs, probablement d'origine technique sur l'utilisation du simulateur et de l'introduction du milieu homogénéisé, et donc suggèrent que des travaux supplémentaires sont nécessaires. D'autre part, une version dite "adaptative" de l'homogénéisation a été étudiée grâce à l'encadrement d'un projet de master. Cette partie consiste à utiliser un filtrage adaptatif des propriétés élastiques afin de ne plus être contraint par un λ_0 global.

Une seconde partie du travail de thèse a consisté à étudier les maillages adaptatifs pour des milieux lisses. L'algorithme proposé est basé sur un découpage quadtree et permet d'obtenir des maillages quadrangulaires conformes. Cette partie inclut une discussion sur les critères nécessaires pour mailler de tels milieux et compare différentes façons d'estimer la vitesse des ondes locales dans des milieux anisotropes pour pouvoir y adapter la taille des éléments. Un nouvel algorithme d'optimisation en milieu lisse a ensuite été mis au point afin de modifier localement les maillages générés pour que les

éléments soient plus adaptés aux vitesses locales et ensuite pouvoir encore augmenter le pas de temps de simulation. Des simulations sur le modèle de Groningen ont montré que l'algorithme de maillage adaptatif et d'optimisation permettait de gagner en coût de calcul par rapport à des maillages cartésiens et que l'étape d'optimisation permettait de gagner légèrement en précision. Un projet de Master que j'ai encadré a également permis de rajouter une partie à cet algorithme de maillage en permettant à l'algorithme de maillage d'être adaptatif le long de la surface libre et également en prenant en compte de faibles topographies.

Perspectives

Ce travail de thèse a permis de mettre en avant un nouveau formalisme pour l'homogénéisation. Toutefois, dans les simulations réalisées pour tester son applicabilité pour les bassins sédimentaires, de fortes erreurs sont survenues. Ces erreurs proviennent de l'utilisation de SpecFem2D et de l'introduction des milieux homogénéisés dans ce derniers. Cependant, l'utilisation de cette méthode "multi-1D" possèdent également limites. Cette approche crée une discrétisation des interfaces, et donc, une perte de résolution. De plus, l'homogénéisation 1D réalisée dans ce travail génère une anisotropie VTI, alors que l'anisotropie réelle aux interfaces est sûrement plus complexe. Réaliser une homogénéisation 2D permettrait d'avoir une anisotropie plus complète et donc de mieux prendre en compte les effets latéraux. Une autre façon d'améliorer les résultats serait de réaliser une homogénéisation d'ordre supérieur. L'homogénéisation permet de gagner en précision avec chaque ordre ajouté. Il est donc possible que l'ordre 2 puisse résoudre ces effets latéraux. Pour aller plus loin, il est possible de complexifier progressivement les milieux. Le bassin sédimentaire synthétique étudié n'avait pour le moment que deux couches. Ajouter un remplissage sédimentaire avec plusieurs strates au bassin permettrait d'étudier les effets de l'homogénéisation sur les résonances dans les bassins. Cela permettrait aussi de voir si l'homogénéisation permet de bien modéliser ces effets et à quel ordre. Il serait ensuite possible d'ajouter une topographie plus complexe. L'ajout d'une topographie complexe soulève des questions sur les conditions aux limites qui sont uniquement résolues en 1D. Une autre possibilité de poursuite de ce travail serait de développer l'homogénéisation adaptative. Les variations de vitesse entre bassin et socle peuvent être de plusieurs ordres de grandeur. Une homogénéisation adaptative permettrait de garder une précision importante dans le bassin là où elle est nécessaire et de fortement réduire la précision requise dans le socle. Une telle homogénéisation permettrait aussi de réduire le coût de mémoire nécessaire à la résolution de l'homogénéisation grâce à cette baisse de résolution. Enfin l'homogénéisation adaptative permettrait d'appliquer facilement des maillages adaptatifs aux milieux homogénéisés.

L'algorithme de maillage adaptatif développé permet de mailler des milieux lisses avec une topographie. Il est donc possible de l'utiliser pour des bassins sédimentaires. Il pourrait être intéressant de tester cet algorithme de maillage adaptatif sur un bassin sédimentaire homogénéisé afin de voir si il est bien adapté à de tels milieux. Une autre possibilité serait d'étendre ce travail en 3D. L'algorithme de maillage adaptatif a déjà été développé en 3D par Maréchal [2009] et il est facile d'étendre les critères de découpe utilisés en 2D à la 3D. L'étape d'optimisation, quant à elle, nécessiterait plus de travail

car il faudrait utiliser une discrétisation volumétrique du Laplacien pour des cellules hexaédriques ainsi qu'une adaptation de la pondération avec les vitesses.

Bibliographie

M. Afanasiev, C. Boehm, M. van Driel, L. Krischer, M. Rietmann, D. A. May, M. G. Knepley, et A. Fichtner. Modular and flexible spectral-element waveform modelling in two and three dimensions. *Geophysical Journal International*, 216(3) : 1675–1692, 2019. doi: 10.1093/gji/ggy469. (Cité p. 55)

K. Aki et K. L. Larner. Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves. *Journal of Geophysical Research*, 75(5) : 933–954, 1970. doi: 10.1029/jb075i005p00933. (Cité p. 3)

G. Allaire. Homogenization and Two-Scale Convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6) : 1482–1518, 1992. ISSN 0036-1410, 1095-7154. doi: 10.1137/0523084. (Cité p. 23)

G. Allaire et Z. Habibi. Homogenization of a conductive, convective, and radiative heat transfer problem in a heterogeneous domain. *SIAM J. Math. Anal.*, 45(3) : 1136–1178, 2013. doi: 10.1137/110849821. (Cité p. 8)

P. Anquez, J. Pellerin, M. Irakarama, P. Cupillard, B. Lévy, et G. Caumon. Automatic correction and simplification of geological maps and cross-sections for numerical simulations. *Comptes Rendus Geoscience*, 351(1) : 48–58, 2019. ISSN 16310713. doi: 10.1016/j.crte.2018.12.001. (Cité p. 54, 55)

P. Anquez, N. Glinsky, P. Cupillard, et G. Caumon. Impacts of geometric model simplifications on wave propagation—application to ground motion simulation in the lower Var valley basin (France). *Geophysical Journal International*, 229(1) : 110–137, 2021. ISSN 0956-540X, 1365-246X. doi: 10.1093/gji/ggab447. (Cité p. 30, 32, 45)

P. Anquez, N. Glinsky, P. Cupillard, et G. Caumon. Impacts of geometric model simplifications on wave propagation—application to ground motion simulation in the lower Var valley basin (France). *Geophysical Journal International*, 229(1) : 110–137, 2022. doi: 10.1093/gji/ggab447. (Cité p. 54, 55)

P. F. Antonietti, I. Mazzieri, A. Quarteroni, et F. Rapetti. Non-conforming high order approximations of the elastodynamics equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212 : 212–238, 2012. doi: 10.1016/j.cma.2011.11.004. (Cité p. 55)

K. Asano, H. Sekiguchi, T. Iwata, M. Yoshimi, T. Hayashida, H. Saomoto, et H. Horikawa. Modelling of wave propagation and attenuation in the Osaka sedimentary

basin, western Japan, during the 2013 Awaji Island earthquake. *Geophysical Journal International*, 204(3) : 1678–1694, 2016. doi: 10.1093/gji/ggv543. (Cité p. 6)

Z. Ba, M. Wu, J. Liang, J. Zhao, et V. W. Lee. A two-step approach combining FK with SE for simulating ground motion due to point dislocation sources. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 157 : 107224, 2022. doi: https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2022.107224. (Cité p. 5)

Z. Ba, J. Zhao, Q. Sang, et J. Liang. Nonlinear seismic response of an alluvial basin modelled by spectral element method : Implementation of a davidenkov constitutive model. *Journal of Earthquake Engineering*, 28(16) : 4767–4796, 2024. doi: 10.1080/13632469.2024.2407097. (Cité p. 5)

G. E. Backus. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *Journal of Geophysical Research*, 67(11) : 4427–4440, 1962. ISSN 01480227. doi: 10.1029/JZ067i011p04427. (Cité p. 22, 25, 26, 40, 55)

H. Bao, J. Bielak, O. Ghattas, L. F. Kallivokas, D. R. O'Hallaron, J. R. Shewchuk, et J. Xu. Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 152 (1) : 85–102, 1998. doi: 10.1016/S0045-7825(97)00183-7. (Cité p. 4)

P.-Y. Bard et M. Bouchon. The seismic response of sediment-filled valleys. Part 2. The case of incident P and SV waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 70(5) : 1921–1941, 1980a. doi: 10.1785/bssa0700051921. (Cité p. 3)

P.-Y. Bard et M. Bouchon. The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1. the case of incident SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 70(4) : 1263–1286, 1980b. doi: 10.1785/bssa0700041263. (Cité p. 3, 13)

P.-Y. Bard et M. Bouchon. The two-dimensional resonance of sediment-filled valleys. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 75(2) : 519–541, 1985. doi: 10.1785/bssa0750020519. (Cité p. 3)

A. Bensoussan, J.-L. Lions, et G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*. North-Holland, 1978. (Cité p. 8)

J. Bielak et O. Ghattas. On Earthquake Ground Motion and Structural Response in Alluvial Valleys. p. 30, 1999. (Cité p. 4)

J. Bielak, K. Loukakis, Y. Hisada, et C. Yoshimura. Domain reduction method for three-dimensional earthquake modeling in localized regions, Part I : Theory. *Bulletin of the seismological Society of America*, 93(2) : 817–824, 2003. (Cité p. 6)

J. Bielak, O. Ghattas, et E. Kim. Parallel octree-based finite element method for large-scale earthquake ground motion simulation. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 10(2) : 99, 2005. doi: 10.3970/cmes.2005.010.099. (Cité p. 54)

M. Bonnasse-Gahot, H. Calandra, J. Diaz, et S. Lanteri. Hybridizable discontinuous Galerkin method for the 2-D frequency-domain elastic wave equations. *Geophysical Journal International*, 213(1) : 637–659, 2018. doi: 10.1093/gji/ggx533. (Cité p. 54)

D. M. Boore. Love waves in nonuniform wave guides : Finite difference calculations. *Journal of Geophysical Research*, 75(8) : 1512–1527, 1970. doi: 10.1029/JB075i008p01512. (Cité p. 4)

D. B. Booth. Chimney damage in the greater Seattle area from the Nisqually earthquake of 28 February 2001. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(3) : 1143–1158, 2004. doi: 10.1785/0120030102. (Cité p. 1)

R. D. Borcherdt. Effects of local geology on ground motion near San Francisco bay. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 60(1) : 29–61, 1970. (Cité p. 1, 2)

R. D. Borcherdt et J. F. Gibbs. Effects of local geological conditions in the San Francisco Bay region on ground motions and the intensities of the 1906 earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 66(2) : 467–500, 1976. doi: 10.1785/bssa0660020467. (Cité p. 1)

M. Bouchon et F. J. Sánchez-Sesma. Boundary integral equations and boundary elements methods in elastodynamics. In *Advances in Wave Propagation in Heterogenous Earth*, vol. 48 of *Advances in Geophysics*, p. 157–189. Elsevier, 2007. doi: 10.1016/S0065-2687(06)48003-1. (Cité p. 4)

C. Boutin et J. Auriault. Rayleigh scattering in elastic composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 31(12) : 1669–1689, 1993. ISSN 0020-7225. doi: https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90082-6. (Cité p. 8)

D. C. Bowden et V. C. Tsai. Earthquake ground motion amplification for surface waves. *Geophysical Research Letters*, 44(1) : 121–127, 2017. doi: 10.1002/2016gl071885. (Cité p. 3)

B. A. Bradley. On-going challenges in physics-based ground motion prediction and insights from the 2010–2011 Canterbury and 2016 Kaikoura, New Zealand earthquakes. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 124 : 354–364, 2019. doi: https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.04.042. (Cité p. 6)

Q. Brissaud, D. C. Bowden, et V. C. Tsai. Extension of the basin Rayleigh-wave amplification theory to include basin-edge effects. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 110(3) : 1305–1322, 2020. doi: 10.1785/0120190161. (Cité p. 3)

M. Brun, F. De Martin, et N. Richart. Hybrid asynchronous SEM/FEM co-simulation for seismic nonlinear analysis of concrete gravity dams. *Computers and Structures*, 245 : 106459, 2021. doi: 10.1016/j.compstruc.2020.106459. (Cité p. 4, 5)

Y. Capdeville et J.-J. Marigo. Second order homogenization of the elastic wave equation for non-periodic layered media. *Geophysical Journal International*, 170(2) : 823–838, 2007. ISSN 0956540X, 1365246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2007.03462.x. (Cité p. 7, 8, 13, 18, 23, 24, 25, 40, 46, 47)

Y. Capdeville et J.-J. Marigo. Shallow layer correction for Spectral Element like methods. *Geophysical Journal International*, 172(3) : 1135–1150, 2008. ISSN 0956540X, 1365246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2007.03703.x. (Cité p. 8)

Y. Capdeville et L. Métivier. Elastic full waveform inversion based on the homogenization method : theoretical framework and 2-D numerical illustrations. *Geophysical Journal International*, 213(2) : 1093–1112, 2018. doi: 10.1093/gji/ggy039. (Cité p. 55)

Y. Capdeville, L. Guillot, et J.-J. Marigo. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 2010a. ISSN 0956540X, 1365246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04529.x. (Cité p. 7, 8)

Y. Capdeville, L. Guillot, et J.-J. Marigo. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P–SV waves. *Geophysical Journal International*, 182(2) : 903–922, 2010b. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04636.x. (Cité p. 7, 8, 13, 46, 55)

Y. Capdeville, E. Stutzmann, N. Wang, et J.-P. Montagner. Residual homogenization for seismic forward and inverse problems in layered media. *Geophysical Journal International*, 194(1) : 470–487, 2013. ISSN 1365-246X, 0956-540X. doi: 10.1093/gji/ggt102. (Cité p. 38, 40)

Y. Capdeville, M. Zhao, et P. Cupillard. Fast Fourier homogenization for elastic wave propagation in complex media. *Wave Motion*, 54 : 170–186, 2015. ISSN 01652125. doi: 10.1016/j.wavemoti.2014.12.006. (Cité p. 8)

Y. Capdeville, P. Cupillard, et S. Singh. An introduction to the two-scale homogenization method for seismology. In *Advances in Geophysics*, vol. 61, p. 217–306. Elsevier, 2020. ISBN 978-0-12-821669-9. doi: 10.1016/bs.agph.2020.07.001. (Cité p. 8, 13, 19, 31, 32, 37, 55, 57)

E. Casarotti, M. Stupazzini, S. J. Lee, D. Komatitsch, A. Piersanti, et J. Tromp. CUBIT and seismic wave propagation based upon the spectral-element method : An advanced unstructured mesher for complex 3D geological media. In *Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable*, p. 579–597. Springer Berlin Heidelberg, 2008. doi: 10.1007/978-3-540-75103-8{_}32. (Cité p. 55, 56, 57)

D. Castro-Cruz, F. Gatti, et F. Lopez-Caballero. Assessing the impact of regional geology on the ground motion model variability at the Kashiwazaki-Kariwa nuclear power plant (Japan) via physics-based numerical simulation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 150 : 106947, 2021a. ISSN 0267-7261. doi: 10.1016/j.soildyn.2021.106947. (Cité p. 5, 7, 54)

D. Castro-Cruz, F. Gatti, et F. Lopez-Caballero. High-fidelity broadband prediction of regional seismic response : a hybrid coupling of physics-based synthetic simulation and empirical Green functions. *Natural Hazards*, 108(2) : 1997–2031, 2021b. doi: 10.1007/s11069-021-04766-x. (Cité p. 6)

D. Castro-Cruz, F. Gatti, F. Lopez-Caballero, F. Hollender, E. El Haber, et M. Causse. Blind broad-band (0–10 Hz) numerical prediction of the 3-D near field seismic response of a MW6.0 extended fault scenario : application to the nuclear site of Cadarache (France). *Geophysical Journal International*, 232(1) : 581–600, 2022. doi: 10.1093/gji/ggac346. (Cité p. 5, 54)

G. Caumon, F. Lepage, C. H. Sword, et J.-L. Mallet. Building and editing a sealed geological model. *Mathematical Geology*, 36(4) : 405–424, 2004. doi: 10.1023/b:matg.0000029297.18098.8a. (Cité p. 54)

G. Caumon, P. Collon-Drouaillet, C. Le Carlier de Veslud, S. Viseur, et J. Sausse. Surface-based 3D modeling of geological structures. *Mathematical Geosciences*, 41 (8) : 927–945, 2009. doi: 10.1007/s11004-009-9244-2. (Cité p. 54)

F. Cecchi. Sismografo elettrico a carte affumicate scorrevoli. *Bullettino meteorologico dell'Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri*, 10(9), 1875. (Cité p. 1)

M. Celorio, E. Chaljub, L. Margerin, et L. Stehly. Propagation of 2-D SH waves in random media : Insights from ab initio numerical simulations and transport theory. *Frontiers in Earth Science*, 10, 2022. doi: 10.3389/feart.2022.1033109. (Cité p. 7)

J. Chabassier et S. Imperiale. Fourth-order energy-preserving locally implicit time discretization for linear wave equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106(8) : 593–622, 2016. doi: 10.1002/nme.5130. (Cité p. 57)

S. Chaillat, M. Bonnet, et J.-F. Semblat. A new fast multi-domain BEM to model seismic wave propagation and amplification in 3-D geological structures. *Geophysical Journal International*, 177(2) : 509–531, 2009. (Cité p. 4)

E. Chaljub et J. Vilotte. 3d wave propagation in a spherical earth model using the spectral element method. *EOS, Trans. Am. geophys. Un.*, 79, 1998. (Cité p. 55)

E. Chaljub, Y. Capdeville, et J.-P. Vilotte. Solving elastodynamics in a fluid–solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids. *Journal of Computational Physics*, 187(2) : 457–491, 2003. doi: 10.1016/S0021-9991(03)00119-0. (Cité p. 55)

E. Chaljub, D. Komatitsch, J.-P. Vilotte, Y. Capdeville, B. Valette, et G. Festa. Spectral element analysis in seismology. In *Advances in Wave Propagation in Heterogeneous Media*, vol. 48 of *Advances in Geophysics*, p. 365–419. Elsevier - Academic Press, 2007. (Cité p. 5, 55)

E. Chaljub, P. Moczo, S. Tsuno, P.-Y. Bard, J. Kristek, M. Kaser, M. Stupazzini, et M. Kristekova. Quantitative comparison of four numerical predictions of 3D ground motion in the Grenoble valley, France. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 100(4) : 1427–1455, 2010. doi: 10.1785/0120090052. (Cité p. 5, 54)

E. Chaljub, E. Maufroy, P. Moczo, J. Kristek, F. Hollender, P.-Y. Bard, E. Priolo, P. Klin, F. de Martin, Z. Zhang, W. Zhang, et X. Chen. 3-D numerical simulations of earthquake ground motion in sedimentary basins : testing accuracy through stringent models. *Geophysical Journal International*, 201(1) : 90–111, 2015. doi: 10.1093/gji/ggu472. (Cité p. 5, 56)

E. Chaljub, M. Celorio Murillo, C. Cornou, F. De Martin, E. El Haber, L. Margerin, J. Marti, et I. Zentner. NUMERICAL SIMULATION OF WAVE PROPAGATION IN HETEROGENEOUS AND RANDOM MEDIA FOR SITE EFFECTS ASSESSMENT IN THE GRENOBLE VALLEY. 2021. (Cité p. 6, 7)

F. J. Chávez-García, G. Pedotti, D. Hatzfeld, et P.-Y. Bard. An experimental study of site effects near Thessaloniki (Northern Greece). *Bulletin of the Seismological Society of America*, 80(4) : 784–806, 1990. (Cité p. 1)

M. Chen, J. Tromp, D. Helmberger, et H. Kanamori. Waveform modeling of the slab beneath Japan. 112 : B02305, doi :10.1029/2006JB004394, 2007. (Cité p. 55)

W. Chen et J. Fish. A Dispersive Model for Wave Propagation in Periodic Heterogeneous Media Based on Homogenization With Multiple Spatial and Temporal Scales. *Journal of Applied Mechanics*, 68(2) : 153–161, 2001. ISSN 0021-8936, 1528-9036. doi: 10.1115/1.1357165. (Cité p. 8)

R. Courant et K. Friedrichs. Über die partiellen Differenzengleiehungen der mathematisehen Physik. *Mathematische Annalen*, 100 : 32–74, 1928. doi: 10.1007/BF01448839. (Cité p. 57)

P. Cupillard et Y. Capdeville. Non-periodic homogenization of 3-D elastic media for the seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 213(2) : 983–1001, 2018a. ISSN 0956-540X, 1365-246X. doi: 10.1093/gji/ggy032. (Cité p. 8)

P. Cupillard et Y. Capdeville. Non-periodic homogenization of 3-D elastic media for the seismic wave equation. *Geophysical Journal International*, 213(2) : 983–1001, 2018b. doi: 10.1093/gji/ggy032. (Cité p. 55)

P. Cupillard, E. Delavaud, G. Burgos, G. Festa, J.-P. Vilotte, Y. Capdeville, et J.-P. Montagner. RegSEM : a versatile code based on the spectral element method to compute seismic wave propagation at the regional scale. *Geophysical Journal International*, 188(3) : 1203–1220, 2012. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05311.x. (Cité p. 5, 56)

P. Cupillard, W. Mulder, P. Anquez, A. Mazuyer, et J. Barthélémy. The apparent anisotropy of the SEG-EAGE overthrust model. In *EAGE 2020 Annual Conference & Exhibition Online*, p. 1–5, 2020. doi: 10.3997/2214-4609.202011955. (Cité p. 8, 57, 58)

J. D. De Basabe et M. K. Sen. Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 72(6) : T81–T95, 2007. (Cité p. 5)

F. De Martin. Verification of a Spectral-Element Method Code for the Southern California Earthquake Center LOH.3 Viscoelastic Case. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 101(6) : 2855–2865, 2011. doi: 10.1785/0120100305. (Cité p. 5, 55)

F. De Martin, S. Matsushima, et H. Kawase. Impact of geometric effects on near-surface Green's functions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 103(6) : 3289–3304, 2013. (Cité p. 7)

E. Debayle et Y. Ricard. A global shear velocity model of the upper mantle from fundamental and higher Rayleigh mode measurements. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 117 : B10308, 2012. doi: 10.1029/2012JB009288. (Cité p. 60)

E. Delavaud, P. Cupillard, G. Festa, et J. P. Vilotte. 3D spectral element method simulations of the seismic response in the Caracas basin. In *Proc. of the Third International Symposium on the Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, vol. 1, p. 515–522, 2006. (Cité p. 5, 54, 56)

F. DeMartin, E. Chaljub, P. Thierry, P. Sochala, F. Dupros, E. Maufroy, B. Hadri, A. Benaichouche, et F. Hollender. Influential parameters on 3-D synthetic ground motions in a sedimentary basin derived from global sensitivity analysis. *Geophysical Journal International*, 227(3) : 1795–1817, 2021. doi: 10.1093/gji/ggab304. (Cité p. 7, 54)

J. Diaz et M. J. Grote. Multi-level explicit local time-stepping methods for second-order wave equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 291 : 240–265, 2015. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2015.03.027. (Cité p. 54)

M. Dumbser et M. Käser. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – II. The three-dimensional isotropic case. *Geophysical Journal International*, 167(1) : 319–336, 2006. (Cité p. 5)

M. Dumbser, M. Käser, et E. F. Toro. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - V. Local time stepping and p -adaptivity. *Geophysical Journal International*, 171(2) : 695–717, 2007. doi: 10.1111/j.1365-246X.2007.03427.x. (Cité p. 5, 54)

E. El Haber, C. Cornou, D. Jongmans, D. Youssef Abdelmassih, F. Lopez-Caballero, et T. AL-Bittar. Influence of 2D heterogeneous elastic soil properties on surface ground motion spatial variability. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 123 : 75–90, 2019. doi: 10.1016/j.soildyn.2019.04.014. (Cité p. 7)

V. Etienne, E. Chaljub, J. Virieux, et N. Glinsky. An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling. *Geophysical Journal International*, 183(2) : 941–962, 2010. (Cité p. 5)

N. Euler, C. Sword, et J. C. Dulac. A new tool to seal a 3D Earth model : A cut with constraints. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 1998*, p. 710–713. Society of Exploration Geophysicists, 1998. doi: 10.1190/1.1820562. (Cité p. 54)

N. Fan, L.-F. Zhao, X.-B. Xie, et Z.-X. Yao. A discontinuous-grid finite-difference scheme for frequency-domain 2D scalar wave modeling. *Geophysics*, 83(4) : T235–T244, 2018. doi: 10.1190/geo2017-0535.1. (Cité p. 54)

A. Fichtner et S. Simutė. HamiltonianMonte Carlo inversion of seismic sources in complex media. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 123(4) : 2984–2999, 2018. doi: 10.1002/2017jb015249. (Cité p. 54)

A. Fichtner et J. Trampert. Hessian kernels of seismic data functionals based upon adjoint techniques. *Geophysical Journal International*, 185(2) : 775–798, 2011. doi: 10.1111/j.1365-246x.2011.04966.x. (Cité p. 54)

A. Fichtner, B. L. N. Kennett, H. Igel, et H.-P. Bunge. Full seismic waveform tomography for upper-mantle structure in the australasian region using adjoint methods. *Geophysical Journal International*, 179(3) : 1703–1725, 2009. doi: 10.1111/j.1365-246x.2009.04368.x. (Cité p. 54)

A. Fichtner, J. Trampert, P. Cupillard, E. Saygin, T. Taymaz, Y. Capdeville, et A. Villaseñor. Multiscale full waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 194 (1) : 534–556, 2013. doi: 10.1093/gji/ggt118. (Cité p. 55)

A. Fichtner, D.-P. van Herwaarden, M. Afanasiev, S. Simutė, L. Krischer, Y. Çubuk Sabuncu, T. Taymaz, L. Colli, E. Saygin, A. Villaseñor, J. Trampert, P. Cupillard, H.-P. Bunge, et H. Igel. The Collaborative Seismic Earth Model : Generation 1. *Geophysical Research Letters*, 45(9) : 4007–4016, 2018. doi: 10.1029/2018GL077338. (Cité p. 54)

J. Fish et W. Chen. Space–time multiscale model for wave propagation in heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47) : 4837–4856, 2004. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2004.05.006. (Cité p. 8)

A. Frankel, W. Stephenson, et D. Carver. Sedimentary basin effects in Seattle, Washington : Ground-motion observations and 3D simulations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(3) : 1579–1611, 2009. (Cité p. 6)

A. Frankel, E. Wirth, N. Marafi, J. Vidale, et W. Stephenson. Broadband synthetic seismograms for magnitude 9 earthquakes on the Cascadia megathrust based on 3D simulations and stochastic synthetics, Part 1 : Methodology and overall results. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 108(5A) : 2347–2369, 2018. doi: 10.1785/0120180034. (Cité p. 7)

A. D. Frankel et J. E. Vidale. A three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa Clara Valley, California, from a Loma Prieta aftershock. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 82(5) : 2045–2074, 1992. (Cité p. 6)

M. Galis, P. Moczo, et J. Kristek. A 3-D hybrid finite-difference-finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion. *Geophysical Journal International*, 175(1) : 153–184, 2008. doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.03866.x. (Cité p. 5, 55)

S. Geevers, W. A. Mulder, et J. J. W. van der Vegt. Efficient Quadrature Rules for Computing the Stiffness Matrices of Mass-Lumped Tetrahedral Elements for Linear Wave Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41(2) : A1041–A1065, 2019. doi: 10.1137/18M1198557. (Cité p. 54)

L. Geli, P.-Y. Bard, et B. Jullien. The effect of topography on earthquake ground motion : A review and new results. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78(1) : 42–63, 1988. ISSN 1943-3573, 0037-1106. doi: 10.1785/BSSA0780010042. (Cité p. 2, 13)

N. Glinsky, E. Bertrand, et J. Régnier. Numerical simulation of topographical and geological site effects. Applications to canonical topographies and Rognes hill, South

East France. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 116 : 620–636, 2019. doi: 10.1016/j.soildyn.2018.10.020. (Cité p. 6)

R. Graves et A. Pitarka. Kinematic ground-motion simulations on rough faults including effects of 3D stochastic velocity perturbations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 106(5) : 2136–2153, 2016. (Cité p. 7)

R. W. Graves et A. Pitarka. Broadband ground-motion simulation using a hybrid approach. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 100(5A) : 2095–2123, 2010. (Cité p. 6)

R. W. Graves, A. Pitarka, et P. G. Somerville. Ground-motion amplification in the Santa Monica area : Effects of shallow basin-edge structure. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(5) : 1224–1242, 1998. doi: 10.1785/BSSA0880051224. (Cité p. 6)

L. Guillot, Y. Capdeville, et J.-J. Marigo. 2-D non-periodic homogenization of the elastic wave equation : SH case. *Geophysical Journal International*, 182(3) : 1438–1454, 2010. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04688.x. (Cité p. 8, 55)

A. Haji-Soltani et S. Pezeshk. A comparison of different approaches to incorporate site effects into PSHA : A case study for a liquefied natural gas tank. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 107(6) : 2927–2947, 2017. doi: 10.1785/0120170026. (Cité p. 3)

S. Hartzell, E. Cranswick, A. Frankel, D. Carver, et M. Meremonte. Variability of site response in the Los Angeles urban area. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 87(6) : 1377–1400, 1997. doi: 10.1785/bssa0870061377. (Cité p. 1)

S. Hartzell, S. Harmsen, et A. Frankel. Effects of 3D random correlated velocity perturbations on predicted ground motions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 100(4) : 1415–1426, 2010. doi: 10.1785/0120090060. (Cité p. 7)

Z. Hashin et S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) : 127–140, 1963. ISSN 00225096. doi: 10.1016/0022-5096(63)90060-7. (Cité p. 55)

N. A. Haskell. Crustal reflection of plane SH waves. *Journal of Geophysical Research*, 65(12) : 4147–4150, 1960. doi: 10.1029/JZ065i012p04147. (Cité p. 2)

N. Hedjazian, Y. Capdeville, et T. Bodin. Multiscale seismic imaging with inverse homogenization. *Geophysical Journal International*, 226(1) : 676–691, 2021. doi: 10.1093/gji/ggab121. (Cité p. 8)

M. H. Hettema, B. Jaarsma, B. M. Schroot, et G. C. van Yperen. An empirical relationship for the seismic activity rate of the Groningen gas field. *Netherlands Journal of Geosciences*, 96(5) : s149–s161, 2017. doi: 10.1017/njg.2017.18. (Cité p. 69)

R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4) : 213–222, 1965. doi: 10.1016/0022-5096(65)90010-4. (Cité p. 55)

Z. Hu, K. B. Olsen, et S. M. Day. 0–5 Hz deterministic 3-D ground motion simulations for the 2014 La Habra, California, earthquake. *Geophysical Journal International*, 230(3) : 2162–2182, 2022. (Cité p. 6)

T. Ichimura, M. Hori, et J. Bielak. A hybrid multiresolution meshing technique for finite element three-dimensional earthquake ground motion modelling in basins including topography. *Geophysical Journal International*, 177(3) : 1221–1232, 2009. doi: 10.1111/j.1365-246X.2009.04154.x. (Cité p. 5)

W. Imperatori et P. M. Mai. Broad-band near-field ground motion simulations in 3-dimensional scattering media. *Geophysical Journal International*, 192(2) : 725–744, 2012. doi: 10.1093/gji/ggs041. (Cité p. 7)

M. Infantino, I. Mazzieri, A. G. Özcebe, R. Paolucci, et M. Stupazzini. 3D physics-based numerical simulations of ground motion in Istanbul from earthquakes along the Marmara segment of the north Anatolian fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 110(5) : 2559–2576, 2020. doi: 10.1785/0120190235. (Cité p. 5, 6, 7)

M. Ishimoto. Comparaison accélérométrique des secousses sismiques dans deux parties de la ville de Tokyo. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Imperial University*, 10(1) : 171–187, 1931. (Cité p. 1)

W. B. Ismail et D. Mainprice. An olivine fabric database : an overview of upper mantle fabrics and seismic anisotropy. *Tectonophysics*, 296(1) : 145–157, 1998. doi: 10.1016/S0040-1951(98)00141-3. (Cité p. 60)

A. Iwaki, T. Maeda, N. Morikawa, S. Takemura, et H. Fujiwara. Effects of random 3D upper crustal heterogeneity on long-period ground-motion simulations. *Earth, Planets and Space*, 70(1), 2018. doi: 10.1186/s40623-018-0930-5. (Cité p. 7)

T. Iwata, T. Kagawa, A. Petukhin, et Y. Ohnishi. Basin and crustal velocity structure models for the simulation of strong ground motions in the Kinki area, Japan. *Journal of Seismology*, 12(2) : 223–234, 2008. doi: 10.1007/s10950-007-9086-7. (Cité p. 6)

M. Käser et M. Dumbser. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – I. The two-dimensional isotropic case with external source terms. *Geophysical Journal International*, 166(2) : 855–877, 2006. (Cité p. 5)

K. R. Kelly, R. W. Ward, S. Treitel, et R. M. Alford. Synthetic seismograms : A finite-difference approach. *Geophysics*, 41(1) : 2–27, 1976. (Cité p. 4)

B. L. N. Kennett. Seismic Wave Propagation in Stratified Media. *Cambridge University Press*, 1983. (Cité p. 15, 16, 17, 80)

J. L. King et B. E. Tucker. Observed variations of earthquake motion across a sediment-filled valley. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 74(1) : 137–151, 1984. doi: 10.1785/bssa0740010137. (Cité p. 1)

D. Komatitsch et R. Martin. An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. *GEOPHYSICS*, 72(5) : SM155–SM167, 2007. ISSN 0016-8033, 1942-2156. doi: 10.1190/1.2757586. (Cité p. 31, 70)

D. Komatitsch et J. Tromp. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139(3) : 806–822, 1999. doi: 10.1046/j.1365-246x.1999.00967.x. (Cité p. 5, 55)

D. Komatitsch et J. Tromp. Spectral-element simulations of global seismic wave propagation-I. Validation. *Geophysical Journal International*, 149(2) : 390–412, 2002. doi: 10.1046/j.1365-246X.2002.01653.x. (Cité p. 5, 55)

D. Komatitsch et J.-P. Vilotte. The spectral element method : An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2) : 368–392, 1998. (Cité p. 5, 42, 55)

D. Komatitsch, Q. Liu, J. Tromp, P. Suss, C. Stidham, et J. H. Shaw. Simulations of Ground Motion in the Los Angeles Basin Based upon the Spectral-Element Method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(1) : 187–206, 2004. doi: 10.1785/0120030077. (Cité p. 5, 6, 54, 55)

D. Komatitsch, S. Tsuboi, et J. Tromp. The spectral-element method in seismology. In *Geophysical Monograph Series*, vol. 157, p. 205–227. American Geophysical Union, Washington, D. C., 2005. ISBN 978-0-87590-422-1. doi: 10.1029/157GM13. (Cité p. 31, 57, 68)

M. Korres, F. Lopez-Caballero, V. A. Fernandes, F. Gatti, I. Zentner, F. Voldoire, D. Clouteau, et D. Castro-Cruz. Enhanced seismic response prediction of critical structures via 3D regional scale physics-based earthquake simulation. *Journal of Earthquake Engineering*, 27(3) : 546–574, 2023. doi: 10.1080/13632469.2021.2009061. (Cité p. 5, 6)

V. Kostin, V. Lisitsa, G. Reshetova, et V. Tcheverda. Local time–space mesh refinement for simulation of elastic wave propagation in multi-scale media. *Journal of Computational Physics*, 281 : 669–689, 2015. doi: 10.1016/j.jcp.2014.10.047. (Cité p. 54)

S. L. Kramer. *Geotechnical earthquake engineering*. Prentice-Hall international series in civil engineering and engineering mechanics. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996. ISBN 978-0-13-374943-4 978-81-317-0718-0. (Cité p. 2)

J. Kristek, P. Moczo, et M. Galis. Stable discontinuous staggered grid in the finite-difference modelling of seismic motion. *Geophysical Journal International*, 183(3) : 1401–1407, 2010. doi: 10.1111/j.1365-246x.2010.04775.x. (Cité p. 54)

S.-J. Lee, H.-W. Chen, Q. Liu, D. Komatitsch, B.-S. Huang, et J. Tromp. Three-dimensional simulations of seismic-wave propagation in the Taipei basin with realistic topography based upon the spectral-element method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(1) : 253–264, 2008. doi: 10.1785/0120070033. (Cité p. 5, 6)

F. Lehmann, F. Gatti, M. Bertin, et D. Clouteau. Machine learning opportunities to conduct high-fidelity earthquake simulations in multi-scale heterogeneous geology. *Frontiers in Earth Science*, 10, 2022. doi: 10.3389/feart.2022.1029160. (Cité p. 7)

F. Lehmann, F. Gatti, M. Bertin, et D. Clouteau. Synthetic ground motions in heterogeneous geologies from various sources : the HEMEW-3D database. *Earth System Science Data*, 16(9) : 3949–3972, 2024a. doi: 10.5194/essd-16-3949-2024. (Cité p. 7)

F. Lehmann, F. Gatti, M. Bertin, D. Grenié, et D. Clouteau. Uncertainty propagation from crustal geologies to rock-site ground motion with a Fourier neural operator. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 28(13) : 3088–3105, 2024b. doi: 10.1080/19648189.2024.2393883. (Cité p. 7)

W. Lei, Y. Ruan, E. Bozdağ, D. Peter, M. Lefebvre, D. Komatitsch, J. Tromp, J. Hill, N. Podhorszki, et D. Pugmire. Global adjoint tomography—model GLAD-M25. *Geophysical Journal International*, 223(1) : 1–21, 2020. doi: 10.1093/gji/ggaa253. (Cité p. 54)

K. Leng, T. Nissen-Meyer, et M. van Driel. Efficient global wave propagation adapted to 3-D structural complexity : a pseudospectral/spectral-element approach. *Geophysical Journal International*, 207(3) : 1700–1721, 2016. doi: 10.1093/gji/ggw363. (Cité p. 55)

H. Li, W. Zhang, Z. Zhang, et X. Chen. Elastic wave finite-difference simulation using discontinuous curvilinear grid with non-uniform time step : two-dimensional case. *Geophysical Journal International*, 202(1) : 102–118, 2015. doi: 10.1093/gji/ggv129. (Cité p. 54)

V. Lisitsa, V. Tcheverda, et C. Botter. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation. *Journal of Computational Physics*, 311 : 142–157, 2016. doi: 10.1016/j.jcp.2016.02.005. (Cité p. 5, 55)

Q. Q. Liu, M. Zhuang, W. Zhan, L. Shi, et Q. H. Liu. A hybrid implicit-explicit discontinuous Galerkin spectral element time domain (DG-SETD) method for computational elastodynamics. *Geophysical Journal International*, 234(3) : 1855–1869, 2023. doi: 10.1093/gji/ggad168. (Cité p. 55)

Y. Liu, J. Teng, T. Xu, et J. Badal. Higher-order triangular spectral element method with optimized cubature points for seismic wavefield modeling. *Journal of Computational Physics*, 336 : 458–480, 2017. doi: 10.1016/j.jcp.2017.01.069. (Cité p. 55)

C. Lyu, Y. Capdeville, et L. Zhao. Efficiency of the spectral element method with very high polynomial degree to solve the elastic wave equation. *Geophysics*, 85(1) : T33–T43, 2020. doi: 10.1190/geo2019-0087.1. (Cité p. 56, 75)

P. M. Mai et G. C. Beroza. A spatial random field model to characterize complexity in earthquake slip. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 107(B11) : ESE–10, 2002. (Cité p. 6)

J.-L. Mallet. Discrete smooth interpolation in geometric modelling. *Computer-Aided Design*, 24(4) : 178–191, 1992. doi: 10.1016/0010-4485(92)90054-E. (Cité p. 64)

R. Mallet. *Great Neapolitan Earthquake of 1857 : The First Principles of Observational Seismology*. Royal Society, London, UK, 1862. (Cité p. 1)

L. Maréchal. Advances in octree-based all-hexahedral mesh generation : Handling sharp features. In *Proceedings of the 18th International Meshing Roundtable*, p. 65–84. Springer Berlin Heidelberg, 2009. doi: 10.1007/978-3-642-04319-2{_}5. (Cité p. 56, 57, 58, 59, 76, 81)

Y. Masson. Distributional finite-difference modelling of seismic waves. *Geophysical Journal International*, 233(1) : 264–296, 2023. doi: 10.1093/gji/ggac306. (Cité p. 54)

E. Maufroy, E. Chaljub, F. Hollender, J. Kristek, P. Moczo, P. Klin, E. Priolo, A. Iwaki, T. Iwata, V. Etienne, F. De Martin, N. P. Theodoulidis, M. Manakou, C. Guyonnet-Benaize, K. Pitilakis, et P. Bard. Earthquake ground motion in the Mygdonian basin, Greece : The E2VP verification and validation of 3D numerical simulation up to 4 Hz. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 105(3) : 1398–1418, 2015. doi: 10.1785/0120140228. (Cité p. 5, 54, 56)

E. Maufroy, E. Chaljub, F. Hollender, P.-Y. Bard, J. Kristek, P. Moczo, N. Theodoulidis, M. Manakou, C. Guyonnet-Benaize, et al. 3D numerical simulation and ground motion prediction : Verification, validation and beyond–Lessons from the E2VP project. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 91 : 53–71, 2016. (Cité p. 7)

I. Mazzieri et F. Rapetti. Dispersion analysis of triangle-based spectral element methods for elastic wave propagation. *Numerical Algorithms*, 60(4) : 631–650, 2012. doi: 10.1007/s11075-012-9592-8. (Cité p. 55)

I. Mazzieri, M. Stupazzini, R. Guidotti, et C. Smerzini. SPEED : SPectral Elements in Elastodynamics with Discontinuous Galerkin : a non-conforming approach for 3D multi-scale problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(12) : 991–1010, 2013. doi: 10.1002/nme.4532. (Cité p. 55)

E. D. Mercerat et N. Glinsky. A nodal high-order discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation in arbitrary heterogeneous media. *Geophysical Journal International*, 201(2) : 1101–1118, 2015. (Cité p. 5)

E. D. Mercerat, J. P. Vilotte, et F. J. Sánchez-Sesma. Triangular spectral element simulation of two-dimensional elastic wave propagation using unstructured triangular grids. *Geophysical Journal International*, 166 : 679–698, 2006. (Cité p. 55)

H. Methenni, A. Imperiale, et S. Imperiale. An implicit–explicit time discretization for elastic wave propagation problems in plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125(5) : e7393, 2024. doi: 10.1002/nme.7393. (Cité p. 57)

K. C. Meza-Fajardo, J. Semblat, S. Chaillat, et L. Lenti. Seismic-wave amplification in 3D alluvial basins : 3D/1D amplification ratios from fast multipole BEM simulations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 106(3) : 1267–1281, 2016. doi: 10.1785/0120150159. (Cité p. 4, 7)

S. Minisini, E. Zhebel, A. Kononov, et W. A. Mulder. Local time stepping with the discontinuous Galerkin method for wave propagation in 3D heterogeneous media. *Geophysics*, 78(3) : T67–T77, 2013. doi: 10.1190/geo2012-0252.1. (Cité p. 54)

P. Moczo, J. Kristek, V. Vavrycuk, R. Archuleta, et L. Halada. 3D heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of seismic motion with volume harmonic and arithmetic averaging of elastic moduli and densities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92(8) : 3042–3066, 2002. doi: 10.1785/0120010167. (Cité p. 4)

P. Moczo, J. Kristek, P.-Y. Bard, S. Stripajová, F. Hollender, Z. Chovanová, M. Kristeková, et D. Sicilia. Key structural parameters affecting earthquake ground motion in 2D and 3D sedimentary structures. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 16(6) : 2421–2450, 2018. doi: 10.1007/s10518-018-0345-5. (Cité p. 7)

P. Moczo, J. Kristek, M. Kristekova, J. Valovcan, M. Galis, et D. Gregor. Material interface in the finite-difference modeling : A fundamental view. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 113(1) : 281–296, 2023. doi: 10.1785/0120220133. (Cité p. 4)

W. Mulder et R. Shamasundar. Performance of continuous mass-lumped tetrahedral elements for elastic wave propagation with and without global assembly. *Geophysical Journal International*, 207(1) : 414–421, 2016. doi: 10.1093/gji/ggw273. (Cité p. 54)

G. Nguetseng. A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(3) : 608–623, 1989. ISSN 0036-1410, 1095-7154. doi: 10.1137/0520043. (Cité p. 23)

S. Nie, Y. Wang, K. B. Olsen, et S. M. Day. Fourth-order staggered-grid finite-difference seismic wavefield estimation using a discontinuous mesh interface (WEDMI). *Bulletin of the Seismological Society of America*, 107(5) : 2183–2193, 2017. doi: 10.1785/0120170077. (Cité p. 54)

T. Nissen-Meyer, M. van Driel, S. C. Stähler, K. Hosseini, S. Hempel, L. Auer, A. Colombi, et A. Fournier. Axisem : broadband 3-d seismic wavefields in axisymmetric media. *Solid Earth*, 5(1) : 425–445, 2014. (Cité p. 55)

T. Nissen-Meyer, A. Fournier, et F. A. Dahlen. A two-dimensional spectral-element method for computing spherical-earth seismograms – I. Moment-tensor source. *Geophysical Journal International*, 168(3) : 1067–1092, 2007. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.03121.x. (Cité p. 55)

A. N. Norris. The isotropic material closest to a given anisotropic material, 2005. (Cité p. 77)

S. Oliveira et G. Seriani. Effect of element distortion on the numerical dispersion of spectral element methods. *Communications in Computational Physics*, 9(4) : 937–958, 2011. doi: 10.4208/cicp.071109.080710a. (Cité p. 57)

K. B. Olsen. Site amplification in the Los Angeles basin from three-dimensional modeling of ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 90(6B) : S77–S94, 2000. doi: 10.1785/0120000506. (Cité p. 6)

S. Omote. The relation between the earthquake damages and the structure of ground in Yokohama. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo*, 27 (1-4) : 63–68, 1949. (Cité p. 1)

I. Oprsal, H. Sekiguchi, T. Iwata, et J. Burjanek. Influence of low-velocity superficial layer on long-period basin-induced surface waves in eastern Osaka basin. *Earth, Planets and Space*, 75(1), 2023. doi: 10.1186/s40623-023-01804-9. (Cité p. 6)

E. Oral, C. Gélis, L. F. Bonilla, et E. Delavaud. Spectral element modelling of seismic wave propagation in visco-elastoplastic media including excess-pore pressure development. *Geophysical Journal International*, 211(3) : 1494–1508, 2017. doi: 10.1093/gji/ggx375. (Cité p. 5)

E. Oral, C. Gélis, et L. F. Bonilla. 2-D P-SV and SH spectral element modelling of seismic wave propagation in non-linear media with pore-pressure effects. *Geophysical Journal International*, 217(2) : 1353–1365, 2019. doi: 10.1093/gji/ggz041. (Cité p. 5)

E. Oral, P. Ayoubi, J. P. Ampuero, D. Asimaki, et L. F. Bonilla. Kathmandu Basin as a local modulator of seismic waves : 2-D modelling of non-linear site response under obliquely incident waves. *Geophysical Journal International*, 231(3) : 1996–2008, 2022. doi: 10.1093/gji/ggac302. (Cité p. 5)

A. Pagliaroli, F. Pergalani, A. Ciancimino, A. Chiaradonna, M. Compagnoni, F. De Silva, S. Foti, S. Giallini, G. Lanzo, F. Lombardi, et al. Site response analyses for complex geological and morphological conditions : relevant case-histories from 3rd level seismic microzonation in Central Italy. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 18 (12) : 5741–5777, 2020. (Cité p. 1)

W. Parnell et I. Abrahams. A new integral equation approach to elastodynamic homogenization. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 464(2094) : 1461–1482, 2008. ISSN 1364-5021. doi: 10.1098/rspa.2007.0254. (Cité p. 8)

A. Perrey. Note sur les tremblements de terre ressentis en 1847, avec suppléments pour les années antérieures. In *Mémoires de l'Académie des sciences, arts et belles-lettres de Dijon, années 1847-1848*, p. 68–115. 1848. (Cité p. 1)

D. Peter, D. Komatitsch, Y. Luo, R. Martin, N. Le Goff, E. Casarotti, P. Le Loher, F. Magnoni, Q. Liu, C. Blitz, T. Nissen-Meyer, P. Basini, et J. Tromp. Forward and adjoint simulations of seismic wave propagation on fully unstructured hexahedral meshes : SPECFEM3D Version 2.0 'Sesame'. *Geophysical Journal International*, 186 (2) : 721–739, 2011. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05044.x. (Cité p. 55, 56)

F. Peyrusse, N. Glinsky, C. Gélis, et S. Lanteri. A nodal discontinuous Galerkin method for site effects assessment in viscoelastic media—verification and validation in the Nice basin. *Geophysical Journal International*, 199(1) : 315–334, 2014. doi: 10.1093/gji/ggu256. (Cité p. 54)

M. Pilz et F. Cotton. Does the one-dimensional assumption hold for site response analysis ? A study of seismic site responses and implication for ground motion assessment

using KiK-Net strong-motion data. *Earthquake Spectra*, 35(2) : 883–905, 2019. doi: 10.1193/050718eqs113m. (Cité p. 2, 3)

M. Pilz, S. Parolai, M. Stupazzini, R. Paolucci, et J. Zschau. Modelling basin effects on earthquake ground motion in the Santiago de Chile basin by a spectral element code. *Geophysical Journal International*, 187(2) : 929–945, 2011. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.05183.x. (Cité p. 56)

U. Pinkall et K. Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental Mathematics*, 2(1) : 15–36, 1993. (Cité p. 66)

K. Pitilakis, Z. Roumelioti, D. Raptakis, M. Manakou, K. Liakakis, A. Anastasiadis, et D. Pitilakis. The EUROSEISTEST strong-motion database and web portal. *Seismological Research Letters*, 84(5) : 796–804, 2013. doi: 10.1785/0220130030. (Cité p. 7)

B. Poursartip, A. Fathi, et J. L. Tassoulas. Large-scale simulation of seismic wave motion : A review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 129 : 105909, 2020. doi: 10.1016/j.soildyn.2019.105909. (Cité p. 6, 54)

M. Rapenne, G. Caumon, P. Cupillard, et C. Gouache. Quadrangular adaptive meshing for wave simulation in homogenized media. In *21th Annual Conference of the IAMG*, 2022. (Cité p.)

M. Rapenne, G. Caumon, P. Cupillard, et C. Gouache. Quadrangular adaptive mesh for elastic wave simulation in smooth anisotropic media. In *SSA Annual Meeting*, p. 23, 2024. (Cité p.)

M. Rapenne, P. Cupillard, G. Caumon, et C. Gouache. Quadrangular adaptive mesh for elastic wave simulation in smooth anisotropic media. *Computers & Geosciences*, 203 : 105946, 2025. ISSN 00983004. doi: 10.1016/j.cageo.2025.105946. (Cité p.)

N. Rawlinson, A. Fichtner, M. Sambridge, et M. K. Young. Seismic tomography and the assessment of uncertainty. *Advances in Geophysics*, p. 1–76, 2014. doi: 10.1016/bs.agph.2014.08.001. (Cité p. 54)

Z. Renat, P. Cupillard, et P. Gouédard. Homogenized elastic model of the Groningen gas field. *RING Meeting*, 2018. (Cité p. 70)

Z. Renat, P. Cupillard, et Y. Capdeville. Interpretation of time reversal focal spots based on point-source homogenization. *Geophysical Journal International*, 231(3) : 1653–1671, 2022. doi: 10.1093/gji/ggac275. (Cité p. 69)

M. Rietmann, M. Grote, D. Peter, et O. Schenk. Newmark local time stepping on high-performance computing architectures. *Journal of Computational Physics*, 334 : 308–326, 2017. doi: 10.1016/j.jcp.2016.11.012. (Cité p. 54)

A. Rodriguez-Marek, E. M. Rathje, J. J. Bommer, F. Scherbaum, et P. J. Stafford. Application of single-station sigma and site-response characterization in a probabilistic seismic-hazard analysis for a new nuclear site. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 104(4) : 1601–1619, 2014. doi: 10.1785/0120130196. (Cité p. 3)

O. Rohmer, E. Bertrand, E. Mercerat, J. Régnier, M. Pernoud, P. Langlaude, et M. Alvarez. Combining borehole log-stratigraphies and ambient vibration data to build a 3D Model of the Lower Var Valley, Nice (France). *Engineering Geology*, 270 : 105588, 2020. doi: 10.1016/j.enggeo.2020.105588. (Cité p. 32)

R. Romijn. *Groningen Velocity Model 2017 - Groningen full elastic velocity model September 2017*. PhD thesis, 2017. (Cité p. 69)

D. Roten, K. B. Olsen, et J. C. Pechmann. 3D simulations of M 7 earthquakes on the Wasatch Fault, Utah, Part II : Broadband (0-10 Hz) ground motions and nonlinear soil behavior. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 102(5) : 2008–2030, 2012. doi: 10.1785/0120110286. (Cité p. 6)

G. Ruggiero, P. Cupillard, et G. Caumon. Quantifying fault-related uncertainty in full waveform inversion with inverse homogenization. In *Proc. 86th EAGE Conference and Exhibition*, 2025. doi: 10.3997/2214-4609.2025101301. (Cité p. 8)

E. Sanchez-Palencia. *Non homogeneous media and vibration theory*. Number 127 in Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, 1980. (Cité p. 8)

T. Santos, T. Bodin, F. Soulez, Y. Ricard, et Y. Capdeville. Refining tomography with generative neural networks trained from geodynamics. *Geophysical Journal International*, 238(3) : 1676–1695, 2024. doi: 10.1093/gji/ggae240. (Cité p. 8)

K. Santugini-Repiquet. Homogenization of the demagnetization field operator in periodically perforated domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 334(1) : 502–516, 2007. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.01.001. (Cité p. 8)

L. Sawade, S. Beller, W. Lei, et J. Tromp. Global centroid moment tensor solutions in a heterogeneous earth : the CMT3D catalogue. *Geophysical Journal International*, 231(3) : 1727–1738, 2022. doi: 10.1093/gji/ggac280. (Cité p. 54)

J. Semblat, M. Kham, et P.-Y. Bard. Seismic-Wave Propagation in Alluvial Basins and Influence of Site-City Interaction. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(6) : 2665–2678, 2008. ISSN 0037-1106. doi: 10.1785/0120080093. (Cité p. 4)

J. F. Semblat. Modeling seismic wave propagation and amplification in 1D/2D/3D linear and nonlinear unbounded media. *International Journal of Geomechanics*, 11 (6) : 440–448, 2011. doi: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000023. (Cité p. 4)

J.-F. Semblat, A.-M. Duval, et P. Dangla. Numerical analysis of seismic wave amplification in Nice (France) and comparisons with experiments. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19(5) : 347–362, 2000. doi: 10.1016/S0267-7261(00)00016-6. (Cité p. 6)

J.-F. Semblat, A.-M. Duval, et P. Dangla. Seismic site effects in a deep alluvial basin : numerical analysis by the boundary element method. *Computers and Geotechnics*, 29(7) : 573–585, 2002. (Cité p. 4)

S. Singh, I. Tsvankin, et E. Z. Naeini. Facies-based full-waveform inversion for anisotropic media : a North Sea case study. *Geophysical Prospecting*, 69(8-9) : 1650–1663, 2021. doi: 10.1111/1365-2478.13139. (Cité p. 60)

S. K. Singh, E. Mena, et R. Castro. Some aspects of source characteristics of the 19 September 1985 Michoacan earthquake and ground motion amplification in and near Mexico City from strong motion data. *Bulletin of the Seismological society of America*, 78(2) : 451–477, 1988. (Cité p. 1)

W. D. Smith. The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophysical Journal International*, 42(2) : 747–768, 1975. (Cité p. 4)

A. Sohrabi-Bidar, S. Maghami, et R. Khajevand. The application of time domain boundary element modeling for investigating the seismic response of deep alluvial basin and Rayleigh waves generation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 190 : 109154, 2025. doi: 10.1016/j.soildyn.2024.109154. (Cité p. 4)

S. N. Somala, J.-P. Ampuero, et N. Lapusta. Finite-fault source inversion using adjoint methods in 3-D heterogeneous media. *Geophysical Journal International*, 214(1) : 402–420, 2018. doi: 10.1093/gji/ggy148. (Cité p. 54)

A. Stopin, R.-E. Plessix, et S. Al Abri. Multiparameter waveform inversion of a large wide-azimuth low-frequency land data set in Oman. *Geophysics*, 79(3) : WA69–WA77, 2014. doi: 10.1190/geo2013-0323.1. (Cité p. 55)

M. Stupazzini, R. Paolucci, et H. Igel. Near-Fault Earthquake Ground-Motion Simulation in the Grenoble Valley by a High-Performance Spectral Element Code. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(1) : 286–301, 2009. doi: 10.1785/0120080274. (Cité p. 5, 56)

M. Stupazzini, M. Infantino, A. Allmann, et R. Paolucci. Physics-based probabilistic seismic hazard and loss assessment in large urban areas : A simplified application to Istanbul. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 50(1) : 99–115, 2021. doi: 10.1002/eqe.3365. (Cité p. 6)

F. J. Sánchez-Sesma. Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bulletin of the seismological society of America*, 73(6A) : 1621–1636, 1983. (Cité p. 4)

F. J. Sánchez-Sesma et J. A. Esquivel. Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 69(4) : 1107–1120, 1979. doi: 10.1785/bssa0690041107. (Cité p. 4)

R. Taborda, J. Bielak, et D. Restrepo. Earthquake ground-motion simulation including nonlinear soil effects under idealized conditions with application to two case studies. *Seismological Research Letters*, 83(6) : 1047–1060, 2012. doi: 10.1785/0220120079. (Cité p. 6)

C. Tape, Q. Liu, A. Maggi, et J. Tromp. Seismic tomography of the southern California crust based on spectral-element and adjoint methods. *Geophysical Journal*

International, 180(1) : 433–462, 2010. doi: 10.1111/j.1365-246x.2009.04429.x. (Cité p. 54)

F. N. Tchawe, C. Gelis, L. F. Bonilla, et F. Lopez-Caballero. Effects of 2-D random velocity perturbations on 2-D SHshort-period ground motion simulations in the basin of Nice, France. *Geophysical Journal International*, 226(2) : 847–861, 2021. doi: 10.1093/gji/ggab141. (Cité p. 7)

S. Terrana, N. Nguyen, J. Bonet, et J. Peraire. A hybridizable discontinuous Galerkin method for both thin and 3D nonlinear elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 352 : 561–585, 2019. doi: 10.1016/j.cma.2019.04.029. (Cité p. 5, 54, 55)

E. M. Thompson, L. G. Baise, Y. Tanaka, et R. E. Kayen. A taxonomy of site response complexity. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 41 : 32–43, 2012. doi: 10.1016/j.soildyn.2012.04.005. (Cité p. 2)

L. Thomsen. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51(10) : 1954–1966, 1986. doi: 10.1190/1.1442051. (Cité p. 60)

J. Thurin, R. Brossier, et L. Métivier. Ensemble-based uncertainty estimation in full waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 219(3) : 1613–1635, 2019. doi: 10.1093/gji/ggz384. (Cité p. 54)

T. Toshinawa et T. Ohmachi. Love-wave propagation in a three-dimensional sedimentary basin. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 82(4) : 1661–1677, 1992. doi: 10.1785/bssa0820041661. (Cité p. 4)

S. Touhami, F. Gatti, F. Lopez-Caballero, R. Cottereau, L. de Abreu Corrêa, L. Aubry, et D. Clouteau. Sem3d : A 3d high-fidelity numerical earthquake simulator for broadband (0–10 hz) seismic response prediction at a regional scale. *Geosciences*, 12 (3), 2022. doi: 10.3390/geosciences12030112. (Cité p. 55)

M. D. Trifunac. Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61(6) : 1755–1770, 1971. doi: 10.1785/bssa0610061755. (Cité p. 2)

J. Valovcan, P. Moczo, J. Kristek, M. Galis, et M. Kristekova. Can higher-order finite-difference operators be applied across a material interface ? *Bulletin of the Seismological Society of America*, 113(5) : 1924–1937, 2023. doi: 10.1785/0120230037. (Cité p. 4)

N. van der Voort et F. Vanclay. Social impacts of earthquakes caused by gas extraction in the province of groningen, the netherlands. *Environmental Impact Assessment Review*, 50 : 1–15, 2015. ISSN 0195-9255. doi: https://doi.org/10.1016/j.eiar.2014.08.008. (Cité p. 69)

M. van Driel, C. Boehm, L. Krischer, et M. Afanasiev. Accelerating numerical wave propagation using wavefield adapted meshes. Part I : forward and adjoint modelling. *Geophysical Journal International*, 221(3) : 1580–1590, 2020. doi: 10.1093/gji/ggaa058. (Cité p. 55)

J. E. Vidale et D. V. Helmberger. Elastic finite-difference modeling of the 1971 San Fernando. vol. 78, p. 122–141, 1988. (Cité p. 6)

M. Villani, E. Faccioli, M. Ordaz, et M. Stupazzini. High-resolution seismic hazard analysis in a complex geological configuration : The case of the sulmona basin in central italy. *Earthquake Spectra*, 30(4) : 1801–1824, 2014. doi: 10.1193/1112911EQS288M. (Cité p. 56)

J. Virieux. SH-wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *geophysics*, 49(11) : 1933–1942, 1984. doi: 10.1190/1.1441605. (Cité p. 4)

J. Virieux et S. Operto. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6) : WCC1–WCC26, 2009. doi: 10.1190/1.3238367. (Cité p. 54)

M. Wardetzky, S. Mathur, F. Kälberer, et E. Grinspun. Discrete Laplace operators : no free lunch. In *ACM SIGGRAPH ASIA 2008 courses on - SIGGRAPH Asia '08*, p. 1–5, 2008. doi: 10.1145/1508044.1508063. (Cité p. 64)

P. Wei, D. Lu, T. Huang, et L. Wang. Hexahedral mesh smoothing via local element regularization and global mesh optimization. *Computer-Aided Design*, 59 : 85–97, 2015. ISSN 0010-4485. doi: https://doi.org/10.1016/j.cad.2014.09.003. (Cité p. 76)

C. Willacy, E. van Dedem, S. Minisini, J. Li, J.-W. Blokland, I. Das, et A. Droujinine. Full-waveform event location and moment tensor inversion for induced seismicity. *Geophysics*, 84(2) : KS39–KS57, 2019. doi: 10.1190/geo2018-0212.1. (Cité p. 54)

K. B. Withers, K. B. Olsen, S. M. Day, et Z. Shi. Ground motion and intraevent variability from 3D deterministic broadband (0–7.5 Hz) simulations along a nonplanar strike-slip fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 109(1) : 229–250, 2018. doi: 10.1785/0120180006. (Cité p. 7)

H. L. Wong et M. D. Trifunac. Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64(5) : 1389–1408, 1974. doi: 10.1785/bssa0640051389. (Cité p. 2)

J. H. Woodhouse. Surface Waves in a Laterally Varying Layered Structure. *Geophysical Journal International*, 37(3) : 461–490, 1974. ISSN 0956-540X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1974.tb04098.x. (Cité p. 16)

Y. Xie, C. A. Rychert, N. Harmon, Q. Liu, et D. Gajewski. On-the-fly full Hessian kernel calculations based upon seismic-wave simulations. *Seismological Research Letters*, 92 (6) : 3832–3844, 2021. doi: 10.1785/0220200410. (Cité p. 54)

Y. Xiong, G. Li, et G. Han. *Mean Laplace–Beltrami Operator for Quadrilateral Meshes*, p. 189–201. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-18452-9. doi: 10.1007/978-3-642-18452-9{_}15. (Cité p. 66, 67)

J. Xu, J. Bielak, O. Ghattas, et J. Wang. Three-dimensional nonlinear seismic ground motion modeling in basins. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 137(1) : 81–95, 2003. doi: https://doi.org/10.1016/S0031-9201(03)00009-8. (Cité p. 4)

M. K. Yegian, V. G. Ghahraman, et G. Gazetas. Seismological, soil and valley effects in Kirovakan, 1988 Armenia earthquake. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(2) : 349–365, 1994. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:2(349). (Cité p. 1)

C. Yoshimura, J. Bielak, Y. Hisada, et A. Fernández. Domain reduction method for three-dimensional earthquake modeling in localized regions, Part II : Verification and applications. *Bulletin of the seismological Society of America*, 93(2) : 825–841, 2003. (Cité p. 6)

Y. Zhang, C. Bajaj, et G. Xu. Surface smoothing and quality improvement of quadrilateral/hexahedral meshes with geometric flow. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25(1) : 1–18, 2009. doi: 10.1002/cnm.1067. (Cité p. 64)

H. Zhu, E. Bozdağ, D. Peter, et J. Tromp. Structure of the European upper mantle revealed by adjoint tomography. *Nature Geoscience*, 5(7) : 493–498, 2012. doi: 10.1038/ngeo1501. (Cité p. 54)

Y. Çubuk Sabuncu, T. Taymaz, et A. Fichtner. 3-D crustal velocity structure of western Turkey : Constraints from full-waveform tomography. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 270 : 90–112, 2017. doi: 10.1016/j.pepi.2017.06.014. (Cité p. 60)