



AVERTISSEMENT DROIT D'AUTEUR

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document. Toute contrefaçon, plagiat ou reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



LIÈGE université
GRASP

SIMPPÉ



THÈSE EN COTUTELLE

entre L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE EN FRANCE
et L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE EN BELGIQUE

Présentée par :

David LUCE

pour l'obtention du grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE
Mention Énergie et Mécanique et DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

Rhéologie des milieux granulaires à cohésion magnétique contrôlée en écoulement quasi-2D

Sous la direction de :

Sébastien KIESGEN de RICHTER (Université de Lorraine)

Nicolas VANDEWALLE (Université de Liège)

Adrien GANS (Université de Lorraine)

Composition du jury :

Nicolas TABERLET,

Maître de conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1, Rapporteur,

Patrick RICHARD,

Directeur de recherche à l'Université Gustave Eiffel, Rapporteur,

Blanche DALLOZ-DUBRUJEAUD,

Maîtresse de Conférence à l'Université d'Aix-Marseille, Examinatrice,

Philippe GONDRET,

Professeur à l'Université Paris-Saclay, Président,

Sébastien KIESGEN de RICHTER,

Professeur à l'Université de Lorraine, Directeur de thèse,

Nicolas VANDEWALLE,

Professeur à l'Université de Liège, Directeur de thèse,

Adrien GANS,

Maître de Conférence à l'Université de Lorraine, Co-directeur de thèse.

Nancy, 3 décembre 2025

Remerciements

Je souhaiterais remercier en premier lieu mes trois directeurs de thèse. Sébastien, merci de m'avoir accueilli au sein de l'équipe EPS du LEMTA, tout d'abord pour mon stage de fin d'études, qui a stimulé ma curiosité pour la physique de la matière complexe, et ensuite pour ma thèse dans laquelle je me suis pleinement épanoui au cours de ces trois années. Je suis reconnaissant de la confiance que vous m'avez accordée pour la réalisation de ce travail de thèse en cotutelle internationale. Adrien, merci de m'avoir accompagné tout au long de ma thèse, même si elle débuta au même moment que ton arrivée au LEMTA, ce qui devait apporter son lot de difficultés ! Nos échanges m'ont beaucoup apporté et ton expertise des silos m'a très souvent guidé. Nicolas, je suis très heureux de la confiance que vous m'avez accordée dès le départ, alors que nous nous connaissions à peine. Merci de m'avoir accueilli au sein de votre groupe de recherche à Liège, où la cohésion est bel et bien une expérience quotidienne plutôt qu'un simple sujet de recherche parmi d'autres. Je tiens également à remercier Patrick Richard et Nicolas Taberlet d'avoir accepté d'être rapporteurs, ainsi que Blanche Dalloz-Dubrujeaud et Philippe Gondret pour avoir accepté de participer à mon jury. Je suis reconnaissant de l'intérêt qu'elles et ils portent à mon travail de thèse. Je remercie Philippe Marchal et Jérémy Petit pour leurs conseils, ainsi que Geoffroy Lumay pour le prêt de matériel et l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie également l'ensemble des doctorants et stagiaires avec qui j'ai pu échanger et dont j'admire la persévérance. Merci à Arthur Pascot pour m'avoir permis de démarrer dans les meilleures conditions, à Jean, Ghita, Mickael, Julien et Thibus, et à tous ceux que j'ai malheureusement oubliés. Merci également à l'ensemble des mémorants, doctorants, post-doctorants et assistants de Liège : Adrien L et Adrien W, Axel, Béatrice, Brice, Daniel, Enzo, Éric, Fanny, Filip, Jocelyn, Joséphine, Matteo, Martial, Megan, Nicolas, Nils et Thomas. Merci plus particulièrement à Hector, pour la curiosité et l'enthousiasme que tu as tout de suite portés à mes travaux ; je suis heureux de la dimension supplémentaire que tu as su apporter à ma thèse.

Enfin, je tiens à remercier mes amis et ma famille, mes parents, mes frères et ma sœur pour leur soutien et tous les agréables moments passés ensemble, ponctués de gâteaux festifs, et jamais ratés. Et bien sûr, merci à toi, Barbara, d'avoir été présente et de m'avoir soutenu durant cette étape importante pour moi.

Table des matières

Introduction	9
1 État de l'art	13
1.1 Généralités sur les milieux granulaires	14
1.1.1 Chaînes de forces	14
1.1.2 Angle de repos	15
1.1.3 Dilatance	18
1.1.4 Cristallisation	20
1.2 Interactions dans les milieux granulaires	23
1.2.1 Classification des milieux granulaires	23
1.2.2 Effets électrostatiques	25
1.2.3 Effets capillaires	29
1.2.4 Effets adhésifs	30
1.2.5 Cohésion magnétique	31
1.3 Description des milieux granulaires	36
1.3.1 À l'échelle d'une particule	36
1.3.2 À l'échelle mésoscopique	46
1.4 Vidange de silo	53
1.4.1 Généralités	53
1.4.2 Phénomènes spécifiques au silo	56
1.4.3 Modélisation de l'écoulement	62
Objectifs de la thèse	70
2 Dispositif expérimental	71
2.1 Montage expérimental	72
2.1.1 Description du montage	72
2.1.2 Protocole expérimental d'une vidange	74
2.1.3 Champ magnétique externe	75
2.1.4 Milieu granulaire	76
2.1.5 Mesure du nombre de Bond magnétique	76

2.2	Algorithme d'analyse des données	80
2.2.1	Acquisition et traitement des images	80
2.2.2	Détection et suivi des particules	81
2.2.3	Mesures des grandeurs lagrangiennes	83
2.2.4	Méthode de la projection eulérienne	85
2.3	Effets électrostatiques	86
2.3.1	Cas A : Effets du protocole de décharge	88
2.3.2	Cas B : Cas favorable à la triboélectrification	91
2.3.3	Cas C : Effets de l'état d'usage des particules	92
2.3.4	Cas D : Effets des parois conductrices	93
	Conclusion	95
3	Cristallisation en écoulement	97
3.1	Description générale de l'écoulement	98
3.2	Mise en évidence de la cristallisation	100
3.2.1	Visualisation de la cristallisation	100
3.2.2	Contrôle du mélange	102
3.3	Effet de la cristallisation sur l'écoulement	106
3.3.1	Écoulement à la sortie	106
3.3.2	Écoulement dans le réservoir	108
3.4	Dynamique de la cristallisation	113
3.4.1	Dislocations locales	113
3.4.2	Relation entre diffusion et ordre structural	115
	Conclusion	117
4	Cohésion magnétique et écoulement	119
4.1	Écoulement dans le réservoir	120
4.1.1	Seuil de déclenchement de la vidange	120
4.1.2	Canalisation du flux	121
4.1.3	Porosité du milieu granulaire	130
4.2	Instabilité des arches en chute libre	134
4.2.1	Description de la dynamique à la sortie	134
4.2.2	Fluctuations de vitesse localisées	136
4.2.3	Dynamique moyenne des arches instables	137
4.3	Écoulement à l'ouverture	142
4.3.1	Profils au niveau de la sortie	142
4.3.2	Dilatation à la sortie	144
4.3.3	Loi de débit	146
	Conclusion	147

5 Ondes internes	149
5.1 Visualisation des forces en écoulement	150
5.2 Description des impulsions d'onde	153
5.2.1 Étapes de la génération d'une impulsion	153
5.2.2 Décomposition en mode dynamique	156
5.3 Caractérisation des ondes	159
5.3.1 Fréquence d'émission	159
5.3.2 Vitesse des ondes et taille d'impulsion	165
Conclusion	174
6 Cohésion magnétique et structure	175
6.1 Stratification dans l'écoulement	176
6.1.1 Observation instantanée de l'orientation local	176
6.1.2 Microstructures moyennes en écoulement	178
6.1.3 Origine physique des bandes de texture	182
6.2 Influence de la cohésion sur la texture	187
6.2.1 Réorientation de la structure interne	187
6.2.2 Clef de voûte	189
Conclusion	191
7 Conclusion générale et perspectives	193
Annexe A Durée de vie des arches soumis à des vibrations	201
A.1 Principe de l'expérience	201
A.2 Protocole expérimental	203
A.3 Durée de vie des arches en fonction de la hauteur de grains	204
Annexe B Écoulement sur plan incliné quasi-2D	207
B.1 Principe de l'expérience	207
B.2 Sélectivité de la structure interne	208
B.3 Profils de vitesse et non-localité	213
Annexe C Experimental study of the discharge of granular quasi-2D silo in a uniform magnetic field	215
Annexe D Structural Order	
Drives Diffusion in a Granular Packing	222

Nomenclature

a	Accélération	m.s^{-2}
Bo	Nombre de Bond	
b	Longueur caractéristique de diffusion	m
d	Diamètre moyen des grains	m
D	Taille de l'ouverture du silo	m
E_p	Énergie du mode p dans la décomposition en modes dynamiques	$\text{m}^4.\text{s}^{-4}$
f	Fréquence d'émission des ondes	s^{-1}
g	Pesanteur	m.s^{-2}
h	Hauteur de remplissage du silo	m
i	Indice usuel pour une particule	
K	Kurtosis des distributions de vitesse	
L	Largeur de la cavité du silo	m
N	Nombre de coordination	
P	Pression	Pa
Q	Débit de vidange	$\text{m}^3.\text{s}^{-1}$
v	Vitesse d'écoulement	m.s^{-1}
\tilde{v}	Vitesse des ondes	m.s^{-1}
V_v	Volume d'une cellule de Voronoï	m^3
V	Volume libre d'un grain	m^3
W	Épaisseur de la cavité du silo	m
X_f	Fraction massique de mélange	
x	Coordonnée spatiale (direction horizontale)	m
y	Coordonnée spatiale (direction verticale)	m
α, β, C_n	Paramètres d'ajustement	
θ_0	Angle de repos	$^\circ$
λ	Longueur d'écrantage du modèle de Janssen	m
$\tilde{\lambda}$	Largeur des fronts d'onde	m
$\tilde{\Lambda}$	Distance entre deux fronts d'onde	m
ϕ	Compacité du milieu	
ϕ_b	Compacité de préparation du milieu (en régime statique)	
ψ_k	Paramètre d'ordre orientationnel (d'ordre $k = 4, k = 5$ ou $k = 6$)	
ξ	Taille caractéristique des agrégats	m
$\tilde{\gamma}$	Tenseur des taux de déformation	s^{-1}
$\underline{\mu}$	Coefficient de frottement entre deux solides	
χ_m	Susceptibilité magnétique de l'acier	
ρ	Masse volumique	kg.m^{-3}

Résumé en français

Les milieux granulaires sont omniprésents dans la nature comme dans de nombreuses applications industrielles. Pourtant, leur comportement reste souvent difficile à prédire, en raison des multiples interactions possibles entre les grains qui gouvernent leur comportement mécanique. La recherche à leur sujet est donc essentielle pour l'optimisation des technologies de transport, de préparation et de stockage de ces matériaux. Cette thèse s'inscrit dans ce contexte en proposant une étude sur l'influence des interactions dites **cohésives** sur l'écoulement des grains lors de la vidange d'un silo.

- Ce travail se concentre sur un type particulier de cohésion : celle induite par les **interactions magnétiques** entre grains. Cette cohésion présente plusieurs avantages : elle est directement contrôlable grâce à un champ magnétique appliqué par deux bobines externes, elle n'introduit pas d'interactions parasites avec les parois du dispositif, et les interactions entre deux grains sont bien comprises grâce aux travaux antérieurs.
- Il s'appuie également sur l'étude d'un écoulement complexe et encore mal compris : la vidange d'un **silo quasi bidimensionnel**. Cette géométrie permet d'observer toutes les particules formant une seule couche, ce qui facilite l'analyse fine de la dynamique de l'écoulement. Le développement d'un algorithme de suivi des particules a permis de mesurer un large éventail de grandeurs physiques à l'échelle des grains : vitesse, accélération, volume libre et paramètres structurels avancés tels que le paramètre d'ordre hexatique.

Les résultats obtenus offrent une vision complète des **écoulements de grains cohésifs magnétiques** dans un silo quasi-2D. Ils couvrent un large spectre d'observations rapportées dans la littérature tout en apportant de nouvelles perspectives sur la dynamique, la cohésion et la structure interne des milieux granulaires. Cette étude met en lumière les phénomènes se produisant au cœur de la vidange de silo, parmi lesquels : la canalisation du flux de grains, l'apparition d'arches instables au-dessus de l'orifice, l'émergence d'ondes de force ascendantes et la stratification du milieu lorsqu'il est soumis à un cisaillement par la vidange.

Résumé en anglais

Granular media are ubiquitous in nature as well as in many industrial applications. Yet, their behavior often remains difficult to predict, due to the multiple possible interactions between grains that govern their mechanical response. Research in this field is therefore essential for optimizing technologies related to the transport, preparation, and storage of these materials. This thesis fits into this context by proposing a study on the influence of so-called **cohesive interactions** on grain flow during the discharge of a silo.

- This work focuses on a particular type of cohesion : that induced by **magnetic interactions** between grains. This form of cohesion offers several advantages : it can be directly controlled through a magnetic field applied by two external coils ; it does not introduce parasitic interactions with the device walls ; and the interactions between two grains are well understood thanks to previous studies.
- It also relies on the study of a complex and still poorly understood flow : the discharge of a **quasi-two-dimensional silo**. This geometry makes it possible to observe all particles forming a single layer, which facilitates a detailed analysis of flow dynamics. The development of a particle-tracking algorithm has made it possible to measure a wide range of physical quantities at the grain scale : velocity, acceleration, free volume, and advanced structural parameters such as the hexatic order parameter.

The results obtained provide a comprehensive view of **magnetically cohesive granular flows** in a quasi-2D silo. They encompass a wide range of observations reported in the literature while offering new insights into the dynamics, cohesion, and internal structure of granular media. This study highlights the phenomena occurring at the core of silo discharge, including : the channelling of grain flow, the formation of unstable arches above the outlet, the emergence of upward-propagating force waves, and the stratification of the medium when subjected to shear by the discharge.

Introduction

La matière sous forme de grains est omniprésente autour de nous. Elle intervient dans de nombreux procédés et phénomènes naturels, qui fascinent et attirent l'attention des chercheurs et ingénieurs. La physique des milieux granulaires est la branche de la physique qui s'intéresse aux mécanismes exceptionnels de ces matériaux, comme le chant des dunes de sable [1, 2], le blocage d'un sablier pendant son écoulement [3, 4] ou encore les avalanches de neige [5].

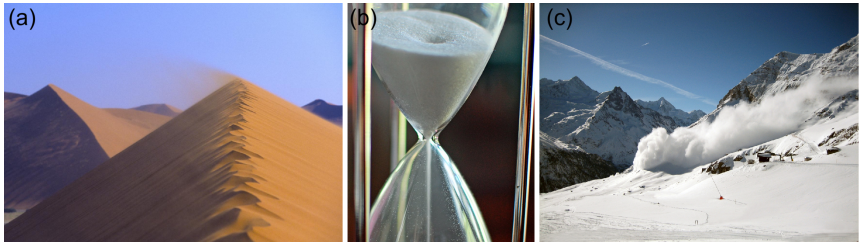


FIGURE 1 – Milieux granulaires dans la nature : (a) Dune 45 du désert du Namib en Namibie (crédit : Thierry Grun). (b) Photographie d'un sablier. (c) Avalanche de neige près de la station de Zinal en Suisse.

Ces phénomènes uniques reflètent la **complexité** des milieux granulaires : du chaos et du désordre apparent émergent des comportements collectifs souvent remarquables. Il s'agit là d'une des propriétés fondamentales des systèmes collectifs et des matières molles, auxquelles appartiennent également les mousses, les gels et les polymères [6] (Fig. 2). Elle est à l'origine de la difficulté que nous avons à appréhender leur comportement mécanique. Les mêmes outils théoriques sont utilisés pour modéliser la physique de ces matériaux, mettant en avant les similitudes qu'ils partagent. Cependant, pour chacun d'entre eux, le lien entre les interactions microscopiques de leurs constituants et les comportements macroscopiques émergents demeure aujourd'hui encore au cœur de nombreuses recherches [7].



FIGURE 2 – Exemples de systèmes complexes remarquables : (gauche) piétons formant spontanément des lignes sur un passage piéton bondé (Shibuya, Tokyo, Japon), (milieu) cohésion d’un banc de poissons (carangues gros-yeux) interagissant entre eux pour former un gros tourbillon, (droite) mousse de savon dont les bulles de même taille forment un réseau hexagonal.

La **cohésion** désigne la propriété d’un système complexe à maintenir sa stabilité face à d’éventuelles perturbations externes ou internes. Elle reflète la manière dont les interactions entre les éléments du système favorisent une structure collective plutôt que la dispersion des constituants. Dans les milieux granulaires, la cohésion entre grains crée des comportements collectifs riches encore mal compris et peu étudiés, tel que la formation d’agrégats [8, 9], l’intermittence des écoulements de grains [10, 11] ou encore la mise en suspension de fines particules dans l’air. Cette thèse s’inscrit dans la continuité de ces recherches et propose une nouvelle étude expérimentale de l’influence de la cohésion sur les écoulements granulaires. L’objectif est de répondre à la problématique suivante :

Comment les interactions cohésives entre particules modifient le comportement mécanique global d’un milieu granulaire ?

Pour répondre à cette question, ce travail de thèse s’appuie sur deux approches développées par la communauté scientifique au cours des dernières décennies : (1) l’utilisation d’un silo très mince, ne contenant qu’une seule couche de particules, servant de système modèle pour étudier un écoulement à la fois riche et hétérogène et (2) l’introduction d’une cohésion contrôlée au sein d’un milieu granulaire composé de billes ferromagnétiques.

- (1) Un silo quasi-2D est un silo rempli de billes ayant toutes plus ou moins la même taille, de sorte à ne former qu’une seule couche dans le réservoir. Cette géométrie a largement été étudiée depuis les années 1960 [12, 13, 14]. En étudiant le mouvement du milieu à l’échelle **locale**, ces études ont permis de mieux comprendre les mécanismes

se produisant dans les silos réels tridimensionnels, tel que les profils d'écoulement [13], la présence de zones stagnantes [15], ou encore la survenue de blocage [4]. Plus récemment, l'influence de l'application de vibrations verticales sur le contrôle du débit de vidange d'un silo quasi-2D a été investigué par Pascot et al. [16], au sein du LEMTA. Cette thèse s'inscrit dans la continuité directe de ces travaux, en s'appuyant sur le dispositif développé lors de cette étude.

- (2) Récemment, plusieurs travaux de recherche ont porté sur la conception d'un milieu granulaire cohésif modèle, dans lequel les particules sont rendues collantes avant la mise en écoulement [17]. L'objectif de cette thèse est d'explorer une approche alternative et complémentaire, développée depuis le début des années 2000, qui consiste à utiliser un milieu granulaire dont les interactions cohésives peuvent être contrôlées à distance, grâce au ferromagnétisme des particules soumises à un champ magnétique externe. Dans cette perspective, des études récentes ont déjà montré le potentiel de cette méthode. Par exemple, l'analyse de la vidange d'un entonnoir soumis à un champ magnétique a révélé qu'il était possible de contrôler l'écoulement de grains [10]. De plus, d'autres travaux ont mis en évidence l'intermittence de l'écoulement lors de la vidange d'un silo bidimensionnel en présence d'un champ magnétique horizontal [11]. Cette thèse poursuit cette réflexion en proposant d'étudier l'influence des **interactions magnétiques verticales** sur la vidange d'un silo quasi-2D, en considérant à la fois l'échelle globale du système et celle des particules individuelles.

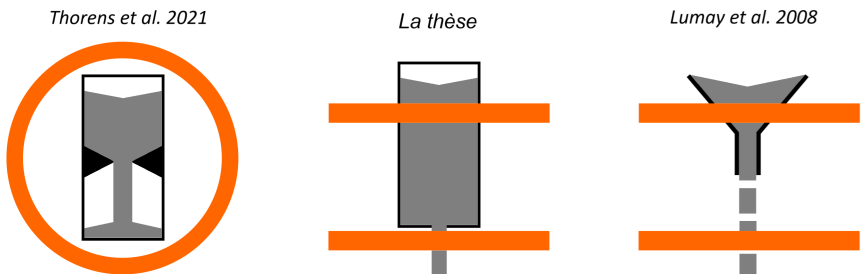


FIGURE 3 – Schémas de principes des montages expérimentaux : (gauche) Thorens et al. [11], (droite) Lumay et al. [10] et (milieu) l'expérience étudiée durant cette thèse. Les bobines créant le champ magnétique externe sont représentées en orange sur la figure.

C'est dans ce contexte, et grâce aux progrès technologiques récents, tels que l'augmentation de la puissance de calcul et de la mémoire des ordinateurs, l'utilisation de caméras haute performance ou encore le développement de matériaux aux propriétés innovantes, que nous avons pu étudier plus précisément les effets de la cohésion sur la vidange de silo. Ce manuscrit de thèse est organisé de la manière suivante :

- Le chapitre introductif propose un **état de l'art** sur la physique des milieux granulaires. Il met particulièrement en avant les concepts clés abordés dans ce travail, notamment la cohésion et l'écoulement en silo.
- Le deuxième chapitre décrit en détail les **méthodes expérimentales** développées au cours de cette thèse. Après avoir présenté le montage expérimental utilisé, il expose l'algorithme de suivi des particules ainsi que l'ensemble des grandeurs physiques mesurées. Une première étude de sensibilité sur la cohésion électrostatique, qui peut apparaître lors de la vidange d'un silo, y est également discutée.
- Le troisième chapitre s'intéresse à l'influence de **la cristallisation** sur l'écoulement en silo. Cet aspect, rarement exploré dans le cas des écoulements bidimensionnels, est ici étudié afin d'évaluer son rôle dans notre système et de mieux comprendre comment contrôler ses effets. Les résultats obtenus montrent que la cristallisation peut être interprétée comme une forme de cohésion à part entière.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'influence de **la cohésion magnétique sur l'écoulement global** de la vidange de silo. Il met en évidence l'effet de canalisation induit par le champ magnétique et apporte des éléments suggérant l'existence d'arches instables qui se forment au-dessus de l'orifice du silo.
- Le cinquième chapitre approfondit l'analyse de ces arches instables. Nous montrons que leur présence conduit à l'émergence **d'ondes de force** ascendantes au cœur du réservoir. L'influence de la cohésion sur les grandeurs caractéristiques de ces ondes est examinée de manière détaillée.
- Le sixième chapitre traite des effets de la **cohésion sur la structuration interne** du milieu granulaire. L'étude des paramètres d'ordre orientationnel révèle une sélection préférentielle des directions denses alignées avec le champ appliqué. Elle met également en évidence la non-localité de la rhéologie dans les milieux granulaires bidimensionnels, même en l'absence de cohésion magnétique.

1) État de l'art

Ce premier chapitre fait un état de l'art non exhaustif de la mécanique des milieux granulaires. Il présente les éléments importants à connaître pour comprendre les résultats discutés dans ce manuscrit de thèse. Les grandeurs physiques et leurs symboles associés y sont introduits. Les modèles pertinents sont également présentés en fin de ce chapitre.

Table des matières

1.1	Généralités sur les milieux granulaires	14
1.1.1	Chaînes de forces	14
1.1.2	Angle de repos	15
1.1.3	Dilatance	18
1.1.4	Cristallisation	20
1.2	Interactions dans les milieux granulaires . .	23
1.2.1	Classification des milieux granulaires	23
1.2.2	Effets électrostatiques	25
1.2.3	Effets capillaires	29
1.2.4	Effets adhésifs	30
1.2.5	Cohésion magnétique	31
1.3	Description des milieux granulaires	36
1.3.1	À l'échelle d'une particule	36
1.3.2	À l'échelle mésoscopique	46
1.4	Vidange de silo	53
1.4.1	Généralités	53
1.4.2	Phénomènes spécifiques au silo	56
1.4.3	Modélisation de l'écoulement	62
	Objectifs de la thèse	70

1.1 Généralités sur les milieux granulaires

Les milieux granulaires sont des systèmes matériels composés d'un grand nombre de particules solides et peu déformables. Elles interagissent les unes avec les autres par des contacts répulsifs et frictionnels [5] qui sont à l'origine de la non-linéarité de la mécanique dans ces milieux. En plus de dissiper de l'énergie par frottement, ces contacts sont fortement discontinus. Une très légère variation de la position relative entre deux grains peut suffire à créer ou détruire un contact entre eux. Bien que ces interactions soient plutôt bien comprises à leur échelle [18], le caractère collectif des matériaux granulaires engendre des **phénomènes étonnants**, propres à la matière complexe [7, 19]. Les plus importants d'entre eux sont présentés dans cette première section.

1.1.1 Chaînes de forces

Un milieu granulaire peut être considéré comme **dense** lorsque la durée de vie des contacts entre particules est assez longue pour qu'une particule interagisse simultanément avec plusieurs autres. Dans ces systèmes, les grains forment un **réseau de contacts** à travers lequel les forces se transmettent. Lorsqu'un grain subit une force externe, comme son propre poids, elle est partiellement redistribuée à ses voisins via ce réseau. Ce mécanisme s'applique à l'ensemble des particules, donnant naissance à un **réseau de propagation des forces** structuré par les interactions entre grains.

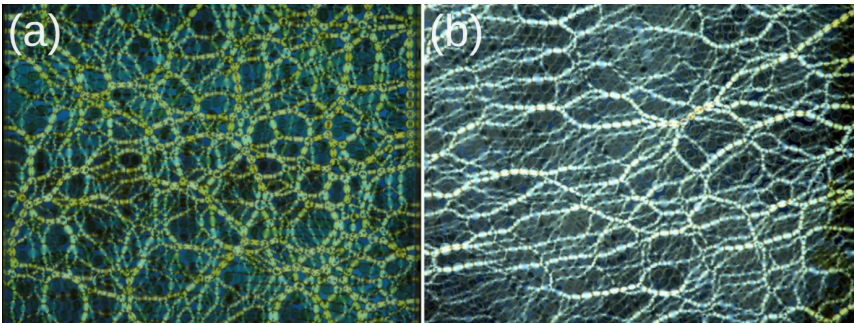


FIGURE 1.1 – Réseaux de forces dans un milieu granulaire 2D de disques en compression isotrope (a) ou en cisaillement (b) (figures extraites de [19]). Les lignes blanches ou jaunes correspondent aux chaînes de forces, révélées par les propriétés photoélastiques des grains.

De nombreuses expériences [19, 20, 21] et simulations numériques discrètes [22, 23] de milieux granulaires se sont intéressées aux réseaux de forces, et ont étendu notre compréhension de ces derniers. Ces réseaux se structurent majoritairement autour de séries de contacts fortement sollicités, appelées **chaînes de forces**. Celles-ci forment des chemins plus ou moins rectilignes, avec des ramifications, et semblent à certains endroits disparaître dans un réseau de contacts plus faiblement sollicités (voir Fig. 1.1). Comprendre la physique de ces chaînes de force (taille caractéristique, orientation, durée de vie ...) revient à comprendre le lien entre les propriétés à **l'échelle du contact** entre grains et les propriétés **macroscopiques** du milieu granulaire.

1.1.2 Angle de repos

Dans la nature, lorsque des grains sont empilés les uns sur les autres, ils forment spontanément un tas (voir Fig. 1.2), comme c'est le cas pour les dunes de sable dans les déserts (voir Fig. 1 (a)). Les forces de pression et de friction entre les grains, transmises à travers le réseau de contacts, contribuent à la stabilité de cette structure. Les pentes latérales du tas adoptent un angle bien défini, appelé **angle de repos**. Ce phénomène naturel illustre parfaitement l'émergence d'un comportement collectif simple, une interface rectiligne inclinée, résultant d'un désordre local, où les chaînes de force ne suivent pas un alignement régulier.

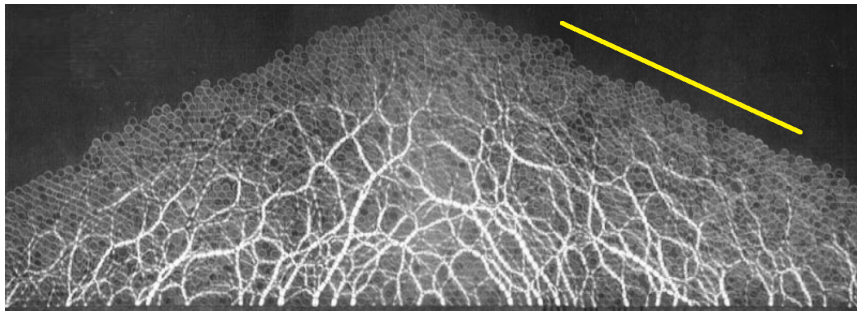


FIGURE 1.2 – Chaînes de force (en blanc) dans un tas 2D de grains photoélastiques (figure extraite de [24]). La ligne jaune suit la surface libre du tas, inclinée à environ 25° .

La stabilité d'un tas de grains peut être analysée en s'appuyant sur l'analogie d'une particule posée sur un plan incliné. Une particule située à la surface du tas est en équilibre mécanique lorsque toutes les forces qui s'exercent sur elle se compensent, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

où \mathbf{P} représente le poids de la particule et \mathbf{R} la résultante des forces exercées par le reste du tas sur cette particule. Cette force de réaction \mathbf{R} se décompose en deux contributions orthogonales : la réaction normale \mathbf{N} , perpendiculaire à la surface du tas, et la réaction tangentielle \mathbf{T} , parallèle à sa surface, qui correspond à la force de frottement statique s'opposant au glissement de la particule. Dans le repère lié à la surface inclinée du tas formant un angle θ_0 avec l'horizontale, l'équilibre des forces s'exprime en projetant l'équation (1.1) selon les directions tangente et normale à la surface :

$$\begin{cases} -mg \sin(\theta_0) + \|\mathbf{T}\| = 0 \\ -mg \cos(\theta_0) + \|\mathbf{N}\| = 0 \end{cases} . \quad (1.2)$$

L'intensité de la force de frottement statique est proportionnelle à la force normale exercée sur la particule. Cette proportionnalité est décrite par le coefficient de frottement μ , défini par le rapport :

$$\mu = \|\mathbf{T}\|/\|\mathbf{N}\|. \quad (1.3)$$

En réalité, le frottement statique ne peut excéder une valeur maximale, déterminée par le coefficient de frottement statique limite μ_s . Tant que $\mu \leq \mu_s$, la particule reste immobile ; si μ atteint cette valeur critique, le glissement débute. En combinant le système (1.2) et la définition (1.3), on obtient directement une relation entre l'angle d'inclinaison θ_0 du tas et le coefficient de frottement :

$$\tan(\theta_0) = \mu. \quad (1.4)$$

L'angle de repos correspond à l'angle d'équilibre maximal que peut prendre la surface libre du tas, c'est-à-dire à la situation limite où le frottement atteint sa valeur maximale μ_s . On a alors :

$$\theta_0 = \arctan(\mu_s). \quad (1.5)$$

L'angle critique θ_0 est une grandeur **macroscopique** mesurable qui reflète directement les propriétés de frottement à l'échelle **microscopique**, c'est-à-dire à l'échelle des interactions entre les grains. Sa mesure expérimentale est simple et fournit une information précieuse sur le comportement mécanique global d'un milieu granulaire.

En particulier, la valeur de l'angle de repos permet d'évaluer la nature des forces agissant entre les particules. Lorsque seules des forces de contact répulsives et frictionnelles sont présentes, l'angle de repos est bien défini. En revanche, si des interactions supplémentaires apparaissent entre les grains, telles que des forces de cohésion de type capillarité ou Van der Waals, l'angle de repos **augmente** et devient **moins bien défini**. Ce phénomène se manifeste notamment pour certaines poudres cohésives, comme le sucre, où ces forces interparticulaires sont significatives (voir Fig. 1.3). D'autres interactions entre grains pouvant influencer l'angle de repos seront présentés plus en détail dans la section 1.2 de ce chapitre.

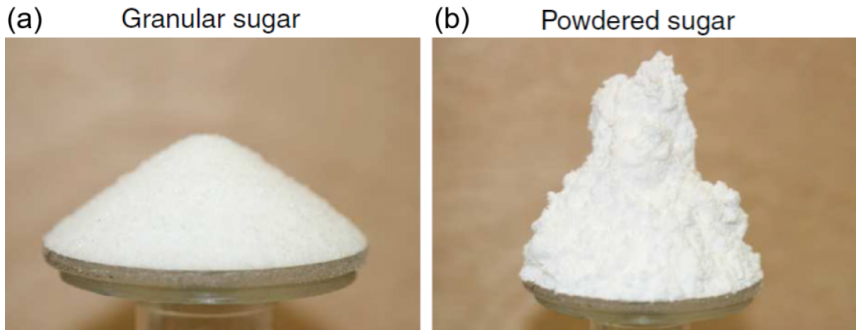


FIGURE 1.3 – Tas de grains de (a) sucre grossier formant un tas avec un angle bien défini et (b) sucre fin cohésif formant des agrégats en surface, signe d'une répartition inhomogène des forces internes (figures extraites de [25]).

L'influence de la présence de forces magnétiques entre particules sur l'angle de repos a été explorée expérimentalement [26] et numériquement [27, 28]. Les résultats montrent que plus la force d'attraction magnétique entre les grains est importante, plus l'angle de repos augmente (voir Fig. 1.4 (a)). Forsyth et al. observent également que l'angle dynamique, formé par la surface d'un milieu granulaire en rotation dans un tambour tournant, croît avec l'intensité des forces de cohésion (voir Fig. 1.4 (b)).

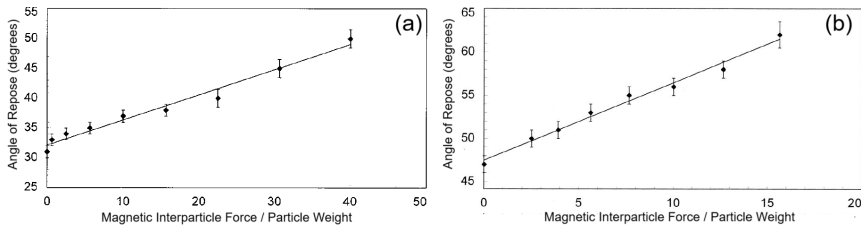


FIGURE 1.4 – Angle de repos (a) statique et (b) dynamique en fonction du rapport entre la norme de la force magnétique et le poids d’une particule. Les milieux granulaires sont des particules en acier plongées dans un champ magnétique externe vertical (figures extraites de [29]).

Afin d’inscrire les nouveaux résultats obtenus dans le cadre de cette thèse dans la **continuité des précédents travaux** sur les milieux granulaires magnétiques, nous avons également étudié l’influence de la cohésion magnétique sur l’angle de repos d’un tas de billes ferromagnétiques, en configuration bidimensionnelle. Les résultats seront présentés au chapitre 4. L’objectif est d’exploiter cette mesure simple et directe pour renforcer l’interprétation de nos résultats.

1.1.3 Dilatance

L’une des principales caractéristiques d’un empilement de grains est son taux d’occupation volumique, qui correspond au rapport entre le volume occupé par les grains et le volume total apparent de l’empilement. Ce rapport est appelé **compacité** ou fraction volumique (notée ϕ). Lorsque des grains s’empilent, ils tendent naturellement à minimiser les espaces entre eux. En 1885, Reynolds fut le premier à décrire le **phénomène de dilatance** : lorsqu’un empilement de grains subit une déformation sous l’effet d’une compression ou d’un cisaillement, il se dilate, c’est-à-dire que sa compacité diminue [30]. Ce phénomène s’explique par le fait qu’une sollicitation mécanique externe force le milieu granulaire à se réorganiser. Pour que les grains puissent se déplacer les uns par rapport aux autres, ils doivent libérer de l’espace pour que d’autres particules puissent bouger.

Initialement observé pour la compression d’un matériau granulaire (voir Fig. 1.5 (a)), ce mécanisme joue également un rôle clé dans la transition entre solide granulaire et liquide granulaire. Lorsqu’un milieu granulaire entre en écoulement, il se dilate, entraînant une réduction de sa compacité

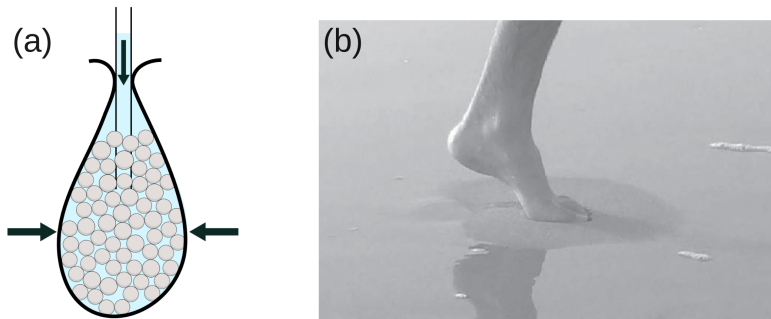


FIGURE 1.5 – (a) Expérience de la poire de Reynolds : Lorsqu'on exerce une pression sur le sachet contenant les grains, le matériau se dilate, augmentant l'espace disponible pour le fluide interstitiel. En conséquence, la hauteur de la colonne de fluide diminue [30] (b) De manière similaire, lorsque l'on marche sur la plage, le sable autour du pied paraît sec. La raison est que l'eau s'infiltré dans le milieu granulaire autour du point d'appui qui exerce une compression. (figure extraite de [5]).

par rapport à un empilement statique. De nombreux écoulements mettent en jeu simultanément les deux phases granulaires denses **liquide** et **solide**. C'est le cas par exemple de l'écoulement de Couette ou l'écoulement sur plan incliné (voir Fig. 1.6) [31]. Dans certaines configurations, une phase granulaire **gazeuse** peut également apparaître, caractérisée par des contacts brefs entre les grains, typique d'un régime collisionnel (voir Fig. 1.6 (a)). Dans ce cas, la compacité est très faible.

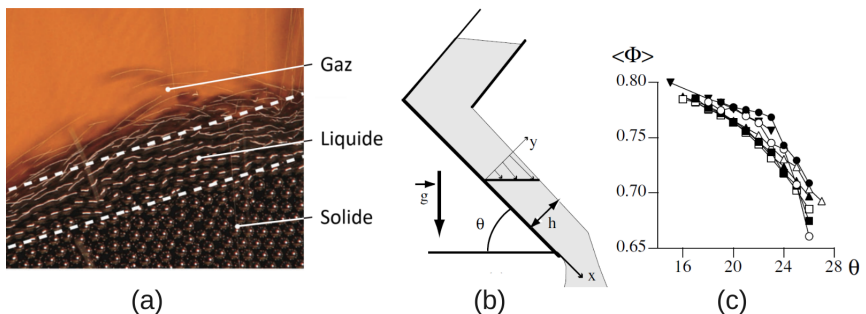


FIGURE 1.6 – (a) Photographie de l'écoulement à la surface d'un tas, illustrant les trois phases granulaires (figure extraite de [32]). (b) Schéma de l'expérience de l'écoulement de grains sur plan incliné et (c) évolution de la compacité 2D moyenne $\langle \phi \rangle$ du milieu en fonction de l'angle d'inclinaison du plan (dont dépend aussi la vitesse moyenne de l'écoulement) (figures extraites de [31]).

De manière générale, il a été observé que la compacité diminue à mesure que la vitesse globale de l'écoulement augmente (voir Fig. 1.6 (c)). Autrement dit, la mise en écoulement d'un milieu granulaire implique sa **dilatation**. Le phénomène de dilatance est l'un des phénomènes centraux dans les écoulements de silo, comme nous le verrons dans la section 1.4 de ce chapitre.

1.1.4 Cristallisation

En 1611, Kepler fut le premier à suggérer que la compacité maximale d'un empilement de sphères parfaites de même taille ne pouvait pas dépasser $\phi = 0.74$ [33]. Il supposa également qu'en trois dimensions, seules deux structures permettent d'atteindre cette valeur : la structure cubique à faces centrées (CFC) et la structure hexagonale compacte (HC). En deux dimensions, un empilement hexagonal de disques est la seule configuration atteignant la compacité maximale de $\phi_{2D} = 0.907$. Dans ce cas, la compacité est définie par rapport aux surfaces des disques et non aux volumes. Ces structures sont qualifiées d'ordonnées, car elles possèdent à la fois un **ordre orientationnel** des positions des particules, avec des plans de symétrie bien définis, et un **ordre translationnel**, les motifs géométriques étant invariants par translation.

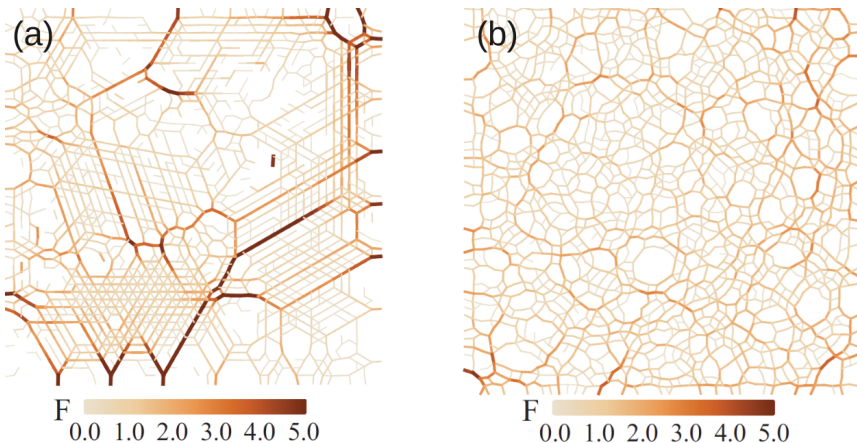


FIGURE 1.7 – Résultats de simulations numériques : réseaux de force dans un milieu granulaire 2D (a) monodisperse et (b) polydisperse (figures extraites de [23]).

La **crystallisation** désigne l'apparition spontanée d'un ordre cristallin au sein d'un ensemble de particules, lorsque la distribution de taille est très resserrée. Elle correspond à l'émergence d'une corrélation à longue portée des positions angulaires ainsi qu'une corrélation par translation des voisins de chaque particule. Ce phénomène se manifeste, par exemple, lors du passage de l'eau de l'état liquide à l'état solide, où les molécules s'ordonnent automatiquement pour former de la glace. Dans un milieu granulaire cristallisé, le réseau de forces adopte une structure spécifique, bien distincte de celles observées dans les milieux désordonnés. Ce réseau se caractérise par une régularité accrue et un nombre réduit de chaînes de force (voir Fig. 1.7 (a)), contrastant avec la configuration plus chaotique des milieux amorphes (voir Fig. 1.7 (b)) [23, 34].

Dans un milieu cristallisé, les particules occupent majoritairement des états d'énergie minimaux, traduisant une organisation stable et optimisée du système. À l'inverse, dans un milieu amorphe, les particules ne peuvent pas simultanément satisfaire toutes les contraintes de l'empilement ; elles se retrouvent **géométriquement frustrées** ce qui empêche le système d'atteindre un état d'énergie globalement minimal. Cette différence fondamentale de structuration a une influence importante sur le comportement mécanique du matériau, comme nous le verrons au chapitre 3.

Tous ces phénomènes caractéristiques illustrent la **complexité** des matériaux granulaires. Ils révèlent que, bien que ces milieux soient constitués d'éléments simples, des particules solides interagissant par contact, leur comportement collectif peut être d'une richesse qui dépasse celle des états classiques de la matière, comme les solides, liquides et gaz. L'émergence de structures comme les chaînes de force, l'apparition d'états d'équilibre macroscopiques comme l'angle de repos, ou encore les transitions entre les phases granulaires solides, liquides et gazeuses, témoignent d'une physique où l'hétérogénéité du milieu, la dissipation par frottement, et les effets de seuil jouent un rôle central. Ces systèmes échappent souvent aux descriptions traditionnelles de la matière condensée, car ils se situent à la frontière entre plusieurs approches : l'approche continue et discrète, entre l'ordre et le désordre, et entre l'étude de la stabilité et des écoulements. C'est cette richesse de comportements, mêlant non-linéarité, auto-organisation, mémoire et irréversibilité, qui fait des milieux granulaires un sujet d'étude fondamental, à la fois pour la physique de la matière complexe et pour de nombreuses applications industrielles et géophysiques.

Ces phénomènes s'observent de manière concrète lors de la vidanges de silos de grains, où leur manifestations prennent des formes singulières. L'étude de l'influence des **interactions cohésives** entre particules et l'expression de ces phénomènes constitue l'objet principal de cette thèse. La section suivante présente un aperçu de ces différentes interactions pouvant exister entre les particules d'un matériau granulaire.

1.2 Interactions dans les milieux granulaires

La **cohésion** désigne la propriété des systèmes complexes à maintenir leur stabilité face à d'éventuelles perturbations externes ou internes. Elle traduit la manière dont les interactions complexes entre les éléments du système favorisent une structure collective plutôt que la dispersion de ses constituants. Dans les milieux granulaires, la cohésion entre grains crée des phénomènes collectifs riches encore mal compris aujourd'hui, tel que la stabilité de structures solides [35, 36], la formation d'agrégats [8, 9], l'intermittence des écoulements de grains [10, 11] ou encore la mise en suspension de fines particules dans l'air. Les milieux granulaires "secs" désignent communément les matériaux dont les grains (plutôt sphériques) n'ont principalement que des contacts répulsifs et frictionnels entre eux. Dans la nature, de nombreuses autres interactions aux origines physiques multiples peuvent apparaître dans ces matériaux, que l'on qualifie alors de **milieux granulaires cohésifs**. L'influence de ces interactions sur les écoulements de grains a été en partie explorée ces dernières années [37, 38, 39, 40, 41] et constitue tout l'objet de cette thèse. Cette deuxième partie donne un tour d'horizon des interactions cohésives les plus souvent présentes dans ces milieux.

1.2.1 Classification des milieux granulaires

Dans la nature, les milieux granulaires se présentent sous des formes très diverses : colloïdes, poudres alimentaires, matériaux de construction, nuage de poussières, etc. De manière générale, les grains constituant chacun de ces matériaux sont caractérisés par de nombreuses propriétés physiques, comme la masse volumique, la sphéricité, la rugosité de surface ou la dispersion de la taille des grains. Parmi ces propriétés, l'ordre de grandeur de la taille des grains permet de mieux discerner les **différentes interactions** régissant la physique de ces matériaux. Andreotti et al. ont proposé une classification basée sur l'analyse en ordre de grandeurs des interactions physiques possibles [5] :

- Les **colloïdes** (voir Fig. 1.8 (a)) désignent des milieux granulaires constitués de particules immergées dans un fluide, dont la taille est généralement comprise entre 1 nm et 1 μm . À cette échelle, l'agitation thermique du fluide environnant influence fortement la dynamique des grains. Un exemple historique marquant est fourni par les observations de Brown en 1828, qui décrit le mouvement aléatoire de

grains de pollen d'environ $6\ \mu\text{m}$, dû aux collisions incessantes avec les molécules du solvant [42]. Si l'origine physique de ce phénomène n'était pas encore comprise à l'époque, ces observations ont par la suite donné leur nom au "mouvement brownien", tel qu'il est reconnu aujourd'hui par la communauté scientifique et qui caractérise les systèmes à cette échelle.

- Les **poudres** (voir Fig. 1.8 (b)) désignent des milieux granulaires dont la taille des particules varie généralement de $1\ \mu\text{m}$ à $100\ \mu\text{m}$ [43]. À cette échelle, l'agitation thermique devient négligeable par rapport à d'autres interactions, telles que les forces de Van der Waals ou encore les effets électrostatiques et capillaires, qui peuvent induire des comportements cohésifs remarquables. Par exemple, certaines poudres alimentaires comme la farine ou la fécule de maïs ont une forte tendance à former des agglomérats ainsi que des nuages de particules en suspension dans l'air lors de leur mise en écoulement.
- L'expression **milieu granulaire** est habituellement utilisée lorsque les grains mesurent plus de $100\ \mu\text{m}$ (voir Fig. 1.8 (c)). Au delà de cette taille, l'influence des forces de Van der Waals et des effets de frottement visqueux avec l'air ambiant sont négligeable. D'autres interactions peuvent tout de même exister dans ces milieux, comme nous le verrons dans la suite de cette section.



FIGURE 1.8 – (a) La boue est une forme de colloïde. (b) La farine est un exemple de poudre alimentaire omniprésente au quotidien. (c) Le sable figure parmi les milieux granulaires les plus répandus sur Terre.

Les milieux granulaires se distinguent avant tout par leur nature **athermale** : l'agitation thermique est négligeable à l'échelle des grains, ce qui rend difficilement applicables les outils classiques de la thermodynamique fondés sur des notions telles que la température, la pression ou l'énergie libre. Leur comportement mécanique ne peut donc pas être décrit à l'aide des équations d'état habituelles des gaz ou des liquides moléculaires.

Par ailleurs, les milieux granulaires sont constitués de particules **passives**, c'est-à-dire dépourvues de motilité intrinsèque : chaque grain ne se déplace que sous l'effet d'une contrainte externe (gravité, vibration, cisaillement, etc) et non par une énergie propre. Cela les distingue fondamentalement des milieux actifs tels que les suspensions de micro-organismes (comme les bactéries) ou les assemblages de particules auto-propulsées (par exemple des colloïdes Janus), où chaque entité individuelle est capable de générer son propre mouvement [44].

1.2.2 Effets électrostatiques

Lorsque deux solides frottent l'un contre l'autre, l'équilibre des charges électriques entre eux peut se rompre : l'un des matériaux devient chargé positivement tandis que l'autre se charge négativement. Ce phénomène est appelé **triboélectrification**, mot issu de l'association des mots grecs *tribein* (signifiant « frotter ») et *ēlektron* (signifiant « ambre »), une résine fossile réputée pour son aptitude à facilement se charger par frottement [45]. Il peut survenir quel que soit le type de matériaux, qu'ils soient conducteurs ou isolants. Il est possible de classer ces derniers en fonction de leur aptitude à se charger positivement ou négativement lorsqu'ils sont frottés contre d'autres. Ces classements, basés sur l'expérience, sont appelés **séries triboélectriques**. La figure 1.9 illustre un exemple de série regroupant des matériaux courants. Par exemple lorsque l'on frotte du verre avec du plastique (polyéthylène (PE)), le premier va se charger positivement alors que le deuxième se chargera négativement.

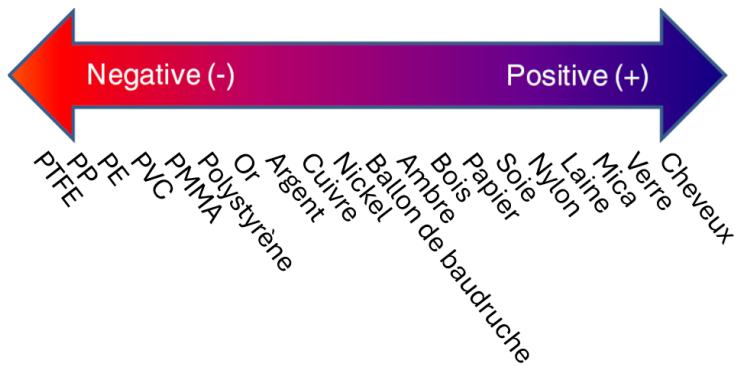


FIGURE 1.9 – Série triboélectrique de matériaux du quotidien (figure extraite de [46]).

Bien que la triboélectrification soit connue depuis l'Antiquité, elle demeure encore mal comprise et fait l'objet de recherches actives et multidisciplinaires [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53]. Williams a recensé trois mécanismes principaux pouvant expliquer ce phénomène, selon différentes approches développées par diverses communautés scientifiques [50] :

- **Transfert d'électrons** (voir Fig. 1.10 (a)) : Diaz et Felix-Navarro, dans leur étude de 2004, ont compilé de nombreuses données expérimentales afin de produire une série triboélectrique semi-quantitative. Ils ont proposé l'idée que la capacité d'un matériau à se charger électriquement dépend de ses caractéristiques chimiques comme son électronégativité, la nature des groupes fonctionnels présents (donneurs ou accepteurs d'électrons) ainsi que d'autres propriétés électroniques telles que le potentiel de surface [47].
- **Transfert d'ions** (voir Fig. 1.10 (b)) : Peu de temps après dans leur étude de 2008, McCarty et Whitesides suggèrent que l'eau présente naturellement à la surface des solides est un élément essentiel à la triboélectrification. Le transfert de charge correspondrait donc à un échange d'anion hydroxyde OH^- entre deux surfaces, ce qui pourrait se produire pour n'importe quel couple de matériau [48].
- **Transfert de matière** (voir Fig. 1.10 (c)) : Enfin en 2011, Baytekin et ses collaborateurs ont mis en évidence, à l'aide de la microscopie à sonde Kelvin, l'apparition d'une ségrégation de charges électriques sous forme de motifs en mosaïque, composés de zones localement chargées positivement ou négativement, sur deux surfaces identiques de PDMS mises en contact [49] (voir Fig. 1.11 (a) et (b)). Ils suggèrent que cette distribution de charge pourrait résulter d'un échange de fragments de polymère entre les surfaces.

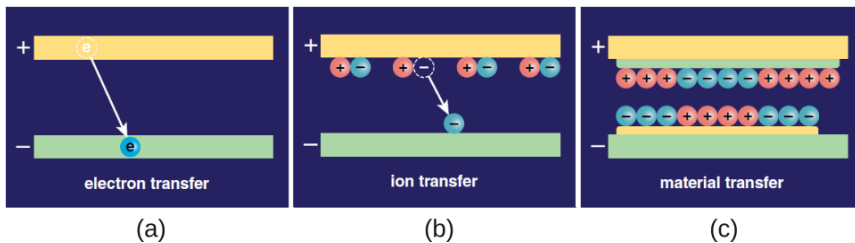


FIGURE 1.10 – Schémas des trois mécanismes possibles de la triboélectrification : (a) transfert d'électrons, (b) transfert d'ions et (c) transfert de matière (figure extraite de [50]). Ces mécanismes peuvent tous les trois coexister.

La nature frictionnelle des milieux granulaires, leur très grande surface spécifique et la différence de matériau souvent observée entre les grains et la géométrie dans laquelle ils s'écoulent favorisent la triboélectrification. Les particules chargées électriquement se comportent alors comme des parois de petits condensateurs, qui interagissent via des **forces électrostatiques à distance** attractives ou répulsives (voir Fig. 1.11 (c,d,e,f)), ce qui modifie le comportement mécanique macroscopique du milieu. Par exemple, le transport de grains [54, 55, 56, 57], la compaction [58, 59], ou l'écoulement sur plan incliné [60, 61] peuvent inclure des effets électrostatiques, entre particules ou entre particules et parois. Même si la triboélectrification peut survenir lors de la vidange d'un silo, peu d'études s'intéressent à ce sujet pour l'instant.

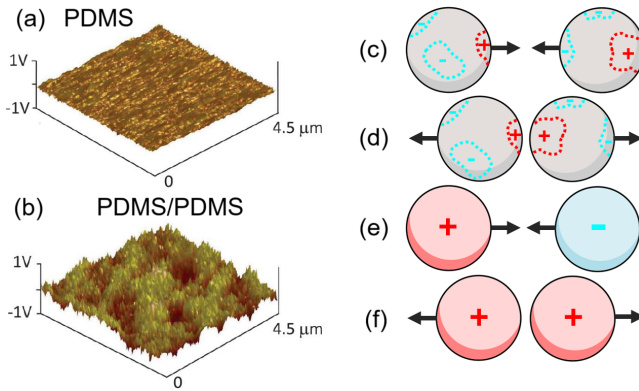


FIGURE 1.11 – Champ du potentiel électrique mesuré à la surface d'un substrat en PDMS (a) avant contact et (b) après contact avec une autre surface du même matériau (figures extraites de [49]). Schémas des interactions électrostatiques possibles entre grains isolants ((c) attractifs ou (d) répulsif) et entre grains conducteurs ((e) attractif ou (f) répulsif).

Dans un référentiel fixe, la force électrostatique entre deux grains i et j uniformément chargés peut s'exprimer grâce à la loi de Coulomb :

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^3}, \quad (1.6)$$

avec q_i et q_j les charges respectives des grains i et j , \mathbf{r}_{ij} est le vecteur reliant la position de leur centre respectif et ϵ_0 est la permittivité électrique du vide ($8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$). La norme de cette force (1.6) est du même ordre de grandeur que le poids d'une particule de diamètre d_{elec} . si la

condition suivante est vérifiée :

$$d_{elec.} = \left(\frac{6q_1q_2}{4\pi^2\epsilon_0\rho g} \right)^{1/5}. \quad (1.7)$$

Hogue et Calle ont observé qu'une bille en acier (de masse volumique $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$) tombant sur un plan incliné accumule une charge d'environ 0.1 nC [62]. En considérant cette valeur de référence pour les charge q_1 et q_2 , la taille caractéristique en dessous de laquelle les effets électrostatiques se font ressentir pour une bille en acier est de $d_{elec.} \sim 1.2 \text{ mm}$.

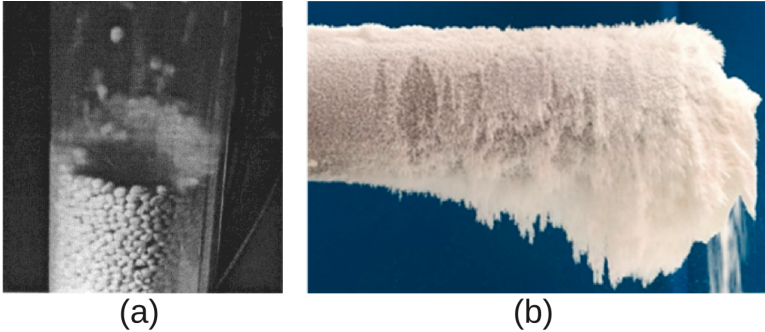


FIGURE 1.12 – Exemples de structures complexes engendrées par la triboélectrification d'un milieu granulaire en écoulement. (a) Dans ce convoyeur pneumatique, les grains sont collés à la paroi du fait de la cohésion électrostatique (figure extraite de [55]). (b) Les grains forment des chaînes en sortie d'une buse (figure extraite de [57]).

L'écoulement d'un ensemble de billes en acier de diamètre moyen 1.1 mm dans une géométrie en PMMA peut donc conduire à la triboélectrification du milieu granulaire. Ce processus est d'autant plus probable que la différence de dureté entre l'acier et le PMMA peut provoquer l'**attrition** des surfaces. Ce processus correspond à l'usure par frottement : des morceaux de polymère chargés peuvent se retrouver piégés à la surface des particules (transfert de matière), et donc une différence de charges peut apparaître. Ce mécanisme peut également se produire avec un ensemble de billes de verre, dont la dureté est aussi importante par rapport à celle du PMMA. Le chapitre 2, présentant le montage expérimental utilisé dans le cadre de ce travail de thèse, donnera des éléments d'investigation sur la triboélectrification de billes de verre en écoulement dans un silo en PMMA ou en polycarbonate couvert d'une fine couche conductrice.

1.2.3 Effets capillaires

La triboélectrification des grains constitue la principale source de cohésion dans les milieux granulaires secs, dans le sens où l'humidité relative de l'air est inférieure à 30% [59]. Cette cohésion électrostatique diminue progressivement en intensité avec l'augmentation de l'humidité de l'environnement, au profit de la **cohésion capillaire**, dont les effets deviennent notables au-delà de 70% d'humidité relative [59, 61].

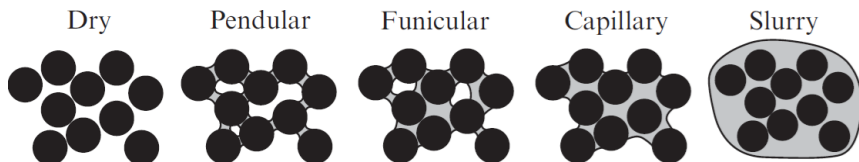


FIGURE 1.13 – Différents régimes de distribution de l'eau dans les interstices d'un milieu granulaire en fonction de la quantité de liquide dans le système (figure extraite de [63]).

Dans un matériau granulaire, l'eau présente sous forme de vapeur dans l'air peut se condenser à la surface des particules solides, formant des films liquides adsorbés. Ce phénomène d'adsorption joue non seulement un rôle dans la triboélectrification [48], comme discuté précédemment, mais peut aussi engendrer des interactions capillaires dès que l'humidité relative devient suffisante. En effet, lorsque celle-ci augmente, des ponts capillaires se forment aux points de contact entre les grains (voir Fig. 1.13 : régimes "Pendular" et "Funicular"), générant des interactions attractives supplémentaires entre particules qui peut se substituer aux forces électrostatiques selon les conditions environnementales.

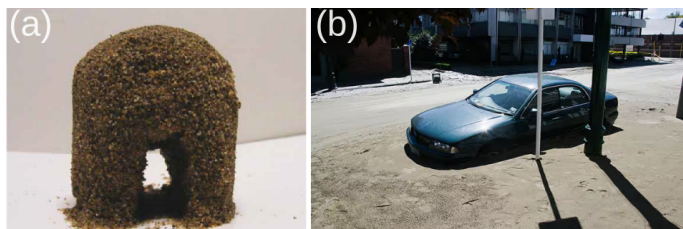


FIGURE 1.14 – (a) L'eau consolide le sable, créant une structure en forme de hutte. (b) Sous l'effet des vibrations d'un séisme, le sol granulaire s'est liquéfié, provoquant l'enfoncement partiel d'une voiture (figures extraites de [63]). Le compactage du sol a réduit le volume des interstices disponibles, sans modification de la quantité d'eau présente, entraînant ainsi un remplissage complet des pores par le fluide (régime "Slurry").

La cohésion capillaire tend à renforcer la structure globale d'un milieu granulaire, facilitant sa consolidation et sa résistance aux sollicitations mécaniques (voir Fig. 1.14 (a)). Toutefois, si la teneur en eau devient excessive, saturant complètement les interstices entre les grains (régime "Slurry"), le comportement du matériau peut drastiquement changer et mener à sa liquéfaction, affectant fortement ses propriétés mécaniques globales (voir Fig. 1.14 (b)). Lorsqu'un pont capillaire existe entre deux particules sphériques en contact, la relation de Young-Laplace permet de lier les grandeurs géométriques du ménisque et la force s'exerçant entre les grains. Andreotti et al. montrent que cette force est du même ordre de grandeur que le poids d'une bille de verre si son diamètre est d'environ 2 mm [5].

De manière plus générale, lorsque les forces entre grains sont bien définies, un nombre sans dimension peut être utilisé pour quantifier la cohésion à l'échelle locale, appelé **nombre de Bond** et noté Bo . Celui-ci correspond au rapport entre la norme de la force d'interaction cohésive et la norme du poids d'un grain :

$$Bo = \frac{\|\mathbf{F}_{coh}\|}{\|m\mathbf{g}\|}. \quad (1.8)$$

Dans cette expression, la force cohésive peut avoir plusieurs origines différentes. Ce nombre sans dimension est particulièrement utilisé dans le cas de la cohésion capillaire ; celle-ci continue à être beaucoup étudiée de nos jours [63, 64, 65, 66, 67] car il s'agit de l'une des formes de cohésion les plus répandues dans les procédés industriels et dans la nature.

1.2.4 Effets adhésifs

Récemment, Gans et al. ont développé un procédé permettant de créer des grains dont on peut contrôler le caractère adhésif en les recouvrant d'une fine couche de polymère (voir Fig. 1.15) [17]. L'objectif est de formuler un **milieu granulaire cohésif modèle** utilisable pour l'étude fondamentale des effets de la cohésion sur les écoulements de grains. En particulier, ils ont réalisés plusieurs études portant sur l'écoulement dans un silo [41] et sur l'effondrement d'une colonne de grain [40]. Elles montrent que la cohésion induite par le revêtement polymère modifie significativement les propriétés mécaniques du milieu granulaire, notamment en augmentant la résistance au cisaillement et en ralentissant les vitesses d'écoulement.

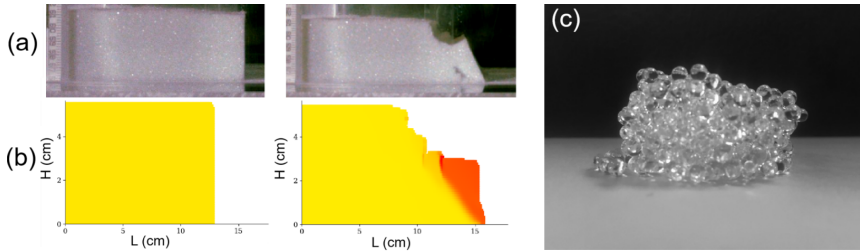


FIGURE 1.15 – Expérience de l’effondrement de colonne : (a) photographies d’une colonne de grains modérément cohésifs (gauche) avant et (droite) après son effondrement partiel. (b) Résultat de simulation numérique continue permettant de retrouver une forme finale similaire pour la colonne (figures extraites de [40]). (c) Empilement de grains en verre recouvert d’un revêtement collant (figure extraite de [17]).

1.2.5 Cohésion magnétique

Dans l’optique de contrôler la cohésion dans un milieu granulaire pour mieux l’étudier, depuis le début des années 2000, plusieurs équipes eurent une autre idée, celle d’utiliser les interactions magnétiques pour modifier les forces entre particules [26, 28, 36, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. L’avantage de cette **cohésion magnétique** contrôlable est qu’il est possible de créer des forces d’attraction et/ou de répulsion entre les grains, sans créer d’interactions magnétiques supplémentaires avec les parois d’un système expérimental. Cette cohésion peut être créée de deux façons, soit en utilisant des particules préalablement magnétisées [68, 71, 73] ou alors en utilisant des particules ferromagnétiques plongées dans un champ magnétique externe [11, 26, 36, 69, 70, 72, 74, 75] (voir Fig. 1.16).

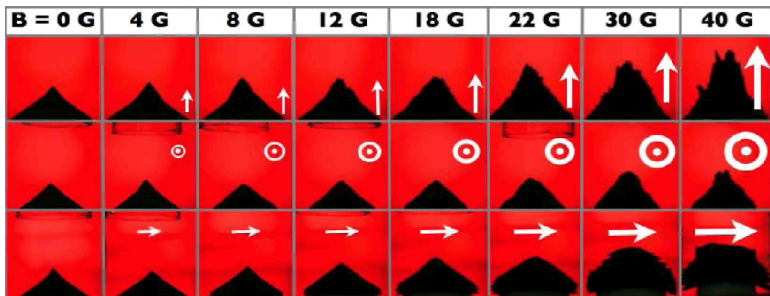


FIGURE 1.16 – Tas de grains ferromagnétiques dans un champ magnétique externe. Pour un champ vertical, plus son intensité est élevée, plus l’angle de repos du tas est élevé, et donc plus la cohésion est importante (figure extraite de [75]).

C'est dans ce contexte que des études sur l'influence de la cohésion magnétique sur les écoulements dans différentes géométries ont été menées, parmi lesquelles l'écoulement dans un tambour tournant [72], dans un silo [11, 73, 75, 76] ou encore l'avalanche à la surface d'un tas [70].

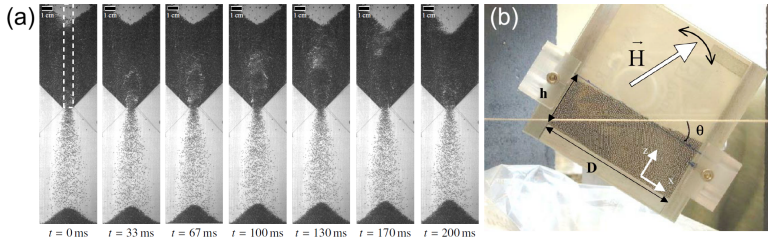


FIGURE 1.17 – (a) Photos successives de la vidange d'un silo quasi-2D dans un champ vertical perpendiculaire au plan (figure extraite de [11]). (b) Dispositif d'étude de l'angle de repos d'un milieu granulaire plongé dans un champ magnétique tournant (figure extraite de [70]).

Afin de mieux comprendre la nature des interactions magnétiques au cœur d'un milieu granulaire, il est nécessaire de considérer dans un premier temps le cas simple de l'interaction entre deux particules sphériques et ferromagnétiques. Celles-ci sont indicées i et j , ont le même diamètre d et sont constituées du même matériau. Le vecteur reliant les centres de ces deux sphères est désignée par \mathbf{r}_{ij} , de norme r_{ij} . Plongées dans un champ magnétique externe uniforme \mathbf{B} , supposé vertical, ces particules s'aimantent et acquièrent chacune un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ orienté principalement selon la direction du champ.

Approximation dipolaire

Lorsque la distance entre les particules i et j est suffisamment grande ($r_{ij} \geq 2d$) [77], le champ magnétique créé par l'une ne perturbe pas celui créé par l'autre. Les particules sont alors uniformément magnétisées, et leur moment magnétique est donné par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\pi d^3}{6} \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

où χ_m représente la susceptibilité magnétique d'une particule ($\chi_m = 3$ pour une sphère [78]), et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. B.F. Edwards et J.M. Edwards montrent que l'interaction magnétique entre ces

deux particules peut alors être assimilée à celle de deux dipôles magnétiques ponctuels [79] (approximation dipolaire). Ils donnent l'expression suivante pour la **force magnétique** exercée par la particule i sur la particule j :

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{3\mu_0}{4\pi r_{ij}^5} \left[2(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_{ij}) \boldsymbol{\mu} + \|\boldsymbol{\mu}\|^2 \mathbf{r}_{ij} - \frac{5(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_{ij})^2}{r_{ij}^2} \mathbf{r}_{ij} \right]. \quad (1.10)$$

Cette force à distance voit son intensité décroître comme $1/r_{ij}^4$. Elle peut être soit attractive, soit répulsive selon l'orientation relative des deux particules, c'est-à-dire selon la direction du vecteur \mathbf{r}_{ij} (voir Fig. 1.18). Par exemple, si les deux sphères sont parfaitement alignées verticalement (l'une au-dessus de l'autre), la force est attractive, favorisant le rapprochement des particules. À l'inverse, si elles sont placées côte à côte dans le plan horizontal, la force devient répulsive. Il existe par ailleurs une orientation particulière, lorsque \mathbf{r}_{ij} forme un angle d'environ $\gamma = 55^\circ$ avec la verticale, pour laquelle la force dipolaire s'annule.

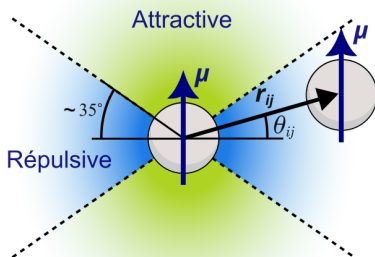


FIGURE 1.18 – Schéma de l'interaction magnétique dipolaire entre deux sphères distant de r_{ij} et de même moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$, de norme μ . L'angle d'inversion du sens de l'interaction est 35.3° , soit $\gamma = 54.7^\circ$.

Cette approche est limitée car elle n'est viable que dans le cas où les particules sont espacées d'une distance supérieure à $r_{ij} \geq 2d$. Elle est généralement utilisée dans l'étude de système faisant intervenir des gaz granulaires magnétiques [68, 80].

Interaction magnétique en milieu dense

Selon l'expression (1.10), lorsque les deux particules i et j sont en contact direct ($r_{ij} = d$) et qu'elles sont positionnées l'une sur l'autre, la force magnétique est maximale et sa norme vaut :

$$F_{max} = \frac{3\mu_0\mu^2}{2\pi d^4}. \quad (1.11)$$

Cependant dans ce régime, l'approximation dipolaire n'est plus valide. Les champs magnétiques générés par chaque particule s'influencent mutuellement, ce qui conduit à une aimantation non uniforme des particules. Cette redistribution de l'aimantation interne modifie profondément la force magnétique exercée entre elles. Dans leur étude de 2014, Biller et al. ont précisément modélisé cet effet [77]. En tenant compte de l'influence réciproque de l'aimantation de chaque particule, ils montrent que lorsque les particules i et j sont en contact direct l'une sur l'autre, la force magnétique réelle est environ 22.5 fois supérieure à celle prédite par l'approximation dipolaire (1.11) (voir Fig 1.19 (a)). Ils mettent également en évidence que l'angle d'inversion du sens de l'interaction magnétique tend vers $\gamma = 90^\circ$ dans cette configuration, ce qui signifie que l'interaction devient quasiment **exclusivement attractive**, quelle que soit leur position relative. Plus précisément, cet angle évolue de $\gamma = 54.7^\circ$ lorsque $r_{ij} \rightarrow +\infty$ à $\gamma = 83.4^\circ$ pour $r_{ij} = d$ (voir Fig 1.19 (b)).

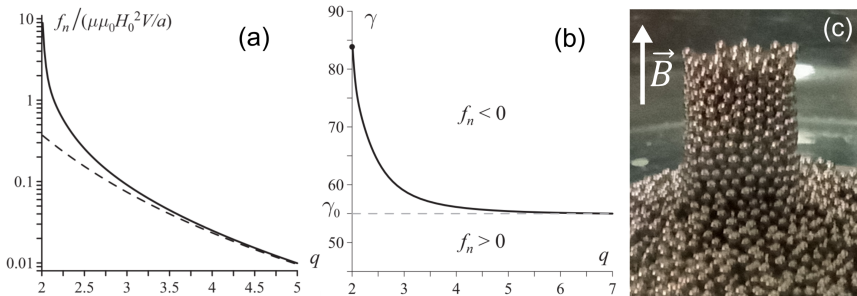


FIGURE 1.19 – (a) Évolution de la norme de la force attractive exercée entre deux particules l'une au-dessus de l'autre en fonction de la distance entre elles $q = 2r_{ij}/d$. La ligne "—" correspond au cas de l'approximation dipolaire, alors que la ligne "-" correspond au résultat d'un calcul par approximation multipolaire. (b) Évolution de l'angle d'inversion du sens de l'interaction magnétique γ en fonction de la distance entre les deux particules. (c) Stabilité d'une colonne de billes ferromagnétiques dans un champ magnétique vertical uniforme.

Plus généralement, lorsque de nombreuses particules sphériques magnétisées interagissent au sein d'un milieu granulaire dense, c'est-à-dire lorsque la distance moyenne entre particules est inférieure à un diamètre ($\langle r_{ij} \rangle_{ij} \leq 2d$), les interactions magnétiques deviennent **encore plus complexes et difficiles à estimer** analytiquement. Les grains interagissent collectivement les uns avec les autres, à longue portée, ce qui renforce ainsi les interactions magnétiques et stabilise davantage la structure du milieu. Expérimentalement, il est possible d'observer que ces interactions restent **majoritairement attractives**, comme le montre la stabilité d'une colonne de billes ferromagnétiques plongée dans un champ magnétique vertical (voir Fig 1.19 (c)).

Face à la diversité des mécanismes physiques à l'origine de la cohésion dans les milieux granulaires, qu'ils soient d'origine électrostatique, capillaire, ou encore adhésif, une question fondamentale se pose : ces différentes formes de cohésion, bien que distinctes dans leur nature microscopique, induisent-elles des effets similaires à l'échelle macroscopique des écoulements ? Existe-t-il une forme **d'universalité** dans la manière dont les formes de cohésions modifient les comportements collectifs des milieux granulaires ?

La cohésion magnétique constitue un outil particulièrement pertinent pour une étude contrôlée des effets de la cohésion dans les milieux granulaires en écoulement. En permettant d'ajuster finement les interactions entre particules, elle ouvre la voie à l'exploration approfondie des écoulements encore mal compris aujourd'hui, parmi lesquels figure la **vidange de silo**.

L'analyse fine de ces dynamiques nécessite cependant des outils théoriques et numériques adaptés, capables de capter les effets non locaux, notamment ceux induits par l'apparition d'interactions magnétiques entre particules. C'est dans cette perspective que s'inscrit la section suivante, qui introduit les grandeurs permettant de décrire la physique de ces milieux granulaires cohésifs de manière formelle.

1.3 Description des milieux granulaires

La complexité des milieux granulaires complique la description du mouvement global du système à partir de la dynamique de ses constituants. L'étude de la mécanique de ces matériaux nécessite donc une approche **multi-échelle**, intégrant à la fois la dynamique à l'échelle individuelle d'une particule (**l'échelle locale**) mais aussi celle d'un ensemble de particules (**l'échelle mésoscopique**). Cette troisième section introduit les principales grandeurs physiques utilisées pour analyser les mouvements collectifs de grains, en s'appuyant sur les concepts de la mécanique classique, de la mécanique statistique et de la mécanique des fluides.

1.3.1 À l'échelle d'une particule

Dans un milieu granulaire, une **grandeur lagrangienne** correspond à une quantité physique associée à une particule donnée évoluant au cours du mouvement de celle-ci. L'approche, issue de la mécanique classique, consiste à observer la trajectoire individuelle de chaque particule dans le milieu et à étudier l'évolution de ses grandeurs lagrangiennes au cours du mouvement.

Position, vitesse et accélération d'une particule

Considérons un ensemble de particules solides et indéformables. Leur position dans l'espace est définie par leur centre de masse. Pour une particule i , la trajectoire de son centre de masse au cours du temps est représentée par le vecteur $\mathbf{r}_i(t)$ dans le référentiel du laboratoire. Sa **vitesse instantanée** correspond à la première dérivée temporelle de sa trajectoire tandis que son **accélération instantanée** est donnée par la seconde dérivée temporelle. Celles-ci sont notées de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i(t)}{\partial t}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{a}_i(t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i(t)}{\partial t^2}. \quad (1.13)$$

En pratique lors d'une expérience, la position d'un grain est connue à chaque intervalle de temps régulier Δt qui correspond à l'inverse de la fréquence d'acquisition de l'appareil de mesure (une caméra par exemple).

Ainsi les vecteurs vitesse et accélération de cette particule peuvent être déterminés en calculant les dérivées temporelles (1.12) et (1.13) grâce à la méthode des différences finies. Si t_n correspond au n -ième temps où la position de la particule est connue à partir de la position initiale t_0 , tel que $t_n = t_0 + n\Delta t$, alors on a :

$$\mathbf{v}_i(t_n) = \frac{1}{k_1\Delta t} (\mathbf{r}_i(t_n + k_1\Delta t) - \mathbf{r}_i(t_n)), \quad (1.14)$$

$$\mathbf{a}_i(t_n) = \frac{1}{(k_2\Delta t)^2} (\mathbf{r}_i(t_n - k_2\Delta t) + \mathbf{r}_i(t_n + k_2\Delta t) - 2\mathbf{r}_i(t_n)), \quad (1.15)$$

avec k_1 et k_2 deux nombres entiers fixés en fonction du bruit des données de positions. Au temps discret t_n , le vecteur $\mathbf{v}_i(t_n)$ représenté en rouge sur la figure 1.20 (a) correspond à la vitesse instantanée d'un grain i , alors que le vecteur $\mathbf{a}_i(t_n)$ représenté en bleu sur la figure 1.20 (b) correspond à son accélération instantanée.

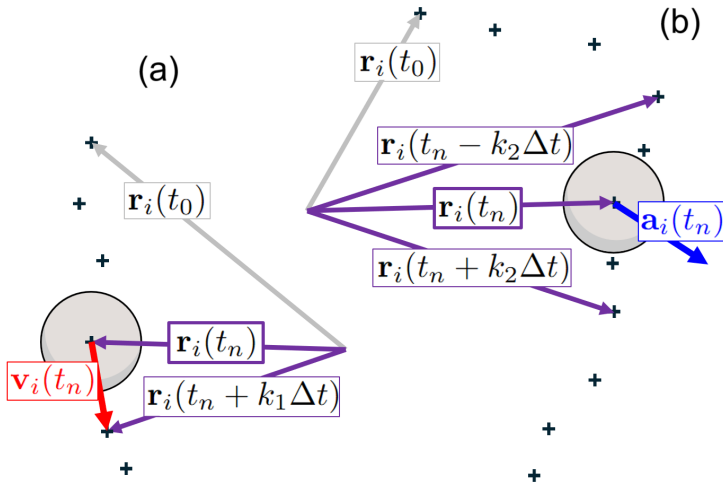


FIGURE 1.20 – Schémas de trajectoires de particules avec (a) les vecteurs utilisés pour le calcul de la vitesse instantanée $\mathbf{v}_i(t_n)$ (1.14) avec $k_1 = 1$ et (b) les vecteurs utilisés pour le calcul de son accélération instantanée $\mathbf{a}_i(t_n)$ (1.15) avec $k_2 = 2$ au temps t_n .

Dans la plupart des systèmes expérimentaux, bien que la position des grains puisse être mesurée, les forces qui leur sont appliquées et qui engendrent leur mouvement ne sont pas connues. Étant donné que la seconde

loi de Newton s'applique à chaque grain dans un milieu en écoulement, il est possible d'évaluer la **résultante des forces** qu'ils subissent en calculant leur accélération instantanée :

$$\mathbf{a}_i(t_n) = \frac{1}{m_i} \sum \mathbf{F}_{ext}, \quad (1.16)$$

où m_i est la masse du grain i et \mathbf{F}_{ext} est une des forces externes appliquées au grain i . Cette méthode d'évaluation indirecte sera appliquée dans le chapitre 5 pour révéler l'émergence d'un comportement dynamique encore très peu compris : les ondes de force lors de la vidange d'un silo.

Volume libre

Une autre grandeur lagrangienne d'intérêt pour l'étude de l'écoulement des milieux granulaires est le **volume libre** d'un grain. Il correspond à l'espace disponible autour de ce grain qui n'est pas occupé par de la matière solide. Il reflète son **degré de liberté de mouvement** et permet d'évaluer localement la dilatation du milieu lors de son écoulement.

La tessellation de Voronoï est une méthode de partitionnement de l'espace qui attribue à chaque point d'un ensemble donné une région spécifique (voir Fig. 1.21 (a)). Lorsqu'elle est appliquée à un milieu granulaire, où les points représentent les positions des centres des particules à un instant donné, elle permet d'associer à chaque particule i un volume libre correspondant $V_i(t)$. L'algorithme de Fortune offre une approche efficace pour réaliser ce pavage en deux dimensions. Si d_i est le diamètre de la particule i et V_{v_i} le volume de sa cellule de Voronoï, alors son volume libre est défini à l'instant t comme suit :

$$V_i(t) = V_{v_i}(t) - \frac{\pi d_i^3}{6}. \quad (1.17)$$

Même s'il peut être difficile de déterminer expérimentalement avec précision la taille des grains dans un mélange, le **volume de la cellule de Voronoï** offre une estimation pertinente du volume libre, à condition que la répartition des tailles dans le milieu soit suffisamment homogène (milieu faiblement polydisperse). Dans le cas bidimensionnel, celui-ci est défini comme suit :

$$V_{v_i}(t) = S_{v_i}(t) \times W, \quad (1.18)$$

avec S_{v_i} la surface de la cellule du diagramme de Voronoï et W la profondeur caractéristique de la géométrie du système.

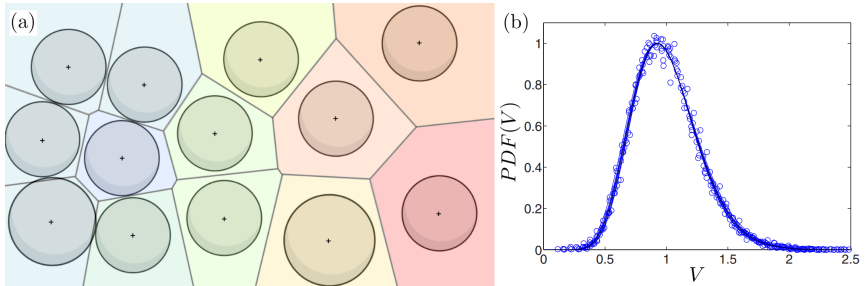


FIGURE 1.21 – (a) Exemple de diagramme de Voronoï d'un ensemble de positions de particules à deux dimensions. (b) Distribution k -Gamma de la densité de probabilité de V (normalisée) obtenue par Aste et Di Matteo (figure extraite de [81]).

En 2008, Aste et Di Matteo ont montré que la densité de probabilité des volumes de Voronoï dans un empilement suivait une distribution statistique bien précise, appelée loi k -Gamma, où k est un paramètre qui se révèle être très sensible à l'organisation de la structure interne du milieu [81] (voir Fig. 1.21). Cette distribution se retrouve dans de nombreux résultats obtenus à partir de systèmes expérimentaux et simulations numériques, indiquant que la mesure des volumes libres des grains est un outil puissant et versatile pour modéliser la physique des milieux granulaires, et plus spécifiquement pour modéliser la **dilatance** en écoulement. Nous verrons aux chapitres 3 et 4 que les densités de probabilité de V_v obtenues ont bien une forme similaire à celle représentée sur la figure 1.21 (b).

Coordinnence

Dans un milieu granulaire, la notion de **coordinnence** joue un rôle fondamental dans la description de la structure locale. On appelle *coordinnence* d'une particule i , notée N_i , le nombre de particules voisines avec lesquelles elle est en contact direct. Il s'agit donc d'un indicateur de l'encombrement local. Pour un ensemble de billes monodisperses, ce nombre est borné : en deux dimensions, une particule peut être au contact de six voisines au maximum, tandis qu'en trois dimensions, ce nombre peut atteindre douze.

La coordinnence d'une particule est, en général, inversement liée à son volume libre : plus une particule est en contact avec un grand nombre de

voisines, plus l'espace dont elle dispose autour d'elle est restreint. Sa liberté de mouvement est réduite ce qui tend à stabiliser sa position [82]. Par ailleurs, une coordinence faible implique aussi une plus grande diversité de configurations accessibles pour les particules voisines. En d'autres termes, une particule peu entourée laisse davantage de degrés de liberté dans le positionnement de ses voisines. À l'inverse, une coordinence élevée restreint fortement les possibilités d'agencement local. Dans le cas d'un grain avec exactement six voisins directs dans un milieu monodisperse, la fixation de la position d'un seul voisin suffit à contraindre, par effet géométrique, la position de tous les autres voisins. Cela illustre parfaitement le caractère fortement **coopératif** des structures denses.

Expérimentalement il est difficile d'estimer s'il y a un contact entre deux grains ou non. Il existe plusieurs méthodes pour estimer le nombre de voisins d'une particule dans un milieu faiblement polydisperse. La première utilise la **tesselation de Voronoï**. Il est possible d'associer à une particule i une cellule composée de plusieurs côtés, dont chacun est associé à un grain présent dans son voisinage. En étudiant la forme de cette cellule, il est possible d'estimer le nombre de voisins proches de la particule i .

Alignement local

Une autre méthode pour estimer le nombre de voisins d'une particule repose sur l'analyse du **champ de densité**. Celui-ci, noté ρ , est défini en tout point de l'espace. Ce champ ne se limite pas à donner une simple mesure locale de la densité : il contient également des informations fines sur la **microstructure du milieu**, en particulier sur l'arrangement spatial des particules voisines autour d'une particule donnée.

On considère un référentiel centré sur une particule i et exprimé en coordonnées polaires (r, θ) . Dans ce cadre, on définit un champ de densité local spécifique à la particule i , noté $\rho_i(r, \theta)$, qui décrit la densité de particules à une distance r et dans une direction θ par rapport à la particule i . En introduisant la densité moyenne globale du système, notée ρ_0 , on peut construire une fonction normalisée, analogue à une densité de probabilité spatiale :

$$g_i(r, \theta) = \frac{\rho_i(r, \theta)}{\rho_0}. \quad (1.19)$$

Cette fonction $g_i(r, \theta)$ renseigne sur la probabilité de trouver une particule dans une direction θ et à une distance r autour de la particule centrale i , comparée à ce qui serait attendu dans un milieu parfaitement homogène. Elle met donc en évidence les hétérogénéités de l'organisation structurale locale du matériau granulaire. Pour obtenir une mesure plus synthétique de la répartition spatiale des particules autour de la particule i , on peut intégrer $g_i(r, \theta)$ selon l'angle θ afin de définir la **fonction de distribution radiale** locale, notée $g_i(r)$:

$$g_i(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_i(r, \theta)}{\rho_0} d\theta. \quad (1.20)$$

Cette fonction $g_i(r)$ exprime la densité radiale de particules situées à une distance r de la particule i (voir Fig. 1.22). Elle joue un rôle central dans la caractérisation du désordre local : si $g_i(r)$ présente des pics bien définis à certaines distances, cela indique que les particules voisines sont disposées de manière **ordonnée** autour de la particule i sur des couronnes concentriques nettes. En revanche, si $g_i(r)$ converge rapidement vers 1 lorsque r augmente, cela suggère une organisation plus désordonnée et une répartition spatiale locale proche de celle d'un **milieu aléatoire**, où les corrélations entre les positions des particules disparaissent rapidement avec l'augmentation de la distance r .

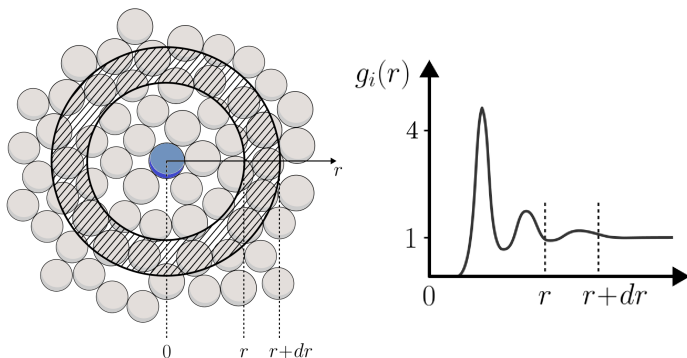


FIGURE 1.22 – Schéma de principe du calcul de la fonction de distribution radiale particulaire $g_i(r)$ pour un empilement de grains à deux dimensions. Le grain i est représenté en bleu sur la figure de gauche. Sur la figure de droite, la valeur du premier maximum de la courbe représentant la fonction $g_i(r)$ correspond environ au nombre de premiers voisins de la particule centrale i .

Orientation locale

Pour extraire des informations supplémentaires sur la microstructure du milieu à partir de la fonction $g_i(r, \theta)$ définie en (1.19), il est également possible d'intégrer cette fonction selon la variable radiale r plutôt que selon l'angle θ . On obtient alors la **fonction de distribution angulaire** associée à la particule i , notée $g_i(\theta)$. Cette fonction correspond à la densité moyenne de particules situées dans une direction donnée θ , intégrée sur une distance maximale R à partir du centre de la particule (voir Fig. 1.23) :

$$g_i(\theta) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\rho_i(r, \theta)}{\rho_0} dr. \quad (1.21)$$

La valeur de R détermine la taille de la zone prise en compte, représentée par un motif hachuré noir sur la figure 1.23. Lorsque R est choisi de l'ordre du diamètre des particules ($R \sim d$), la fonction $g_i(\theta)$ met en évidence les directions privilégiées des contacts les plus proches de la particule i . Les maxima de cette fonction indiquent alors les angles sous lesquels se trouvent les voisins directs, fournissant ainsi une information précise sur l'**anisotropie locale** du réseau de contacts.

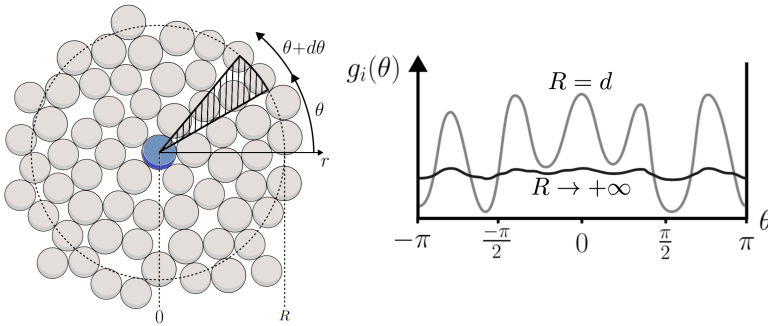


FIGURE 1.23 – Schéma de principe du calcul de la fonction de distribution angulaire d'une particule i . Celle-ci est représentée au centre en bleu sur la figure de gauche. La fonction $g_i(\theta)$ quantifie le nombre de particules contenues dans la part de disque représentée par un motif hachuré noir relativement au nombre moyen de particules dans le milieu. À droite, les maxima de la fonction $g_i(\theta)$ correspondent aux nombres de grains que l'on peut trouver sur une distance R de la particule centrale dans la direction d'angle θ .

Considérons maintenant uniquement le cas où R est de l'ordre du diamètre d'une particule ($R \sim d$). Dans ce régime, la fonction $g_i(\theta)$ présente toujours des oscillations lorsque des particules rigides se trouvent dans le voisinage de la particule i . Ces oscillations traduisent une répartition des positions privilégiée dans certaines directions θ . Il est alors possible de les analyser en appliquant une transformation de Fourier à la fonction $g_i(\theta)$, définie comme suit :

$$\psi_i(k) = \mathcal{F}(g_i(\theta)), \quad (1.22)$$

où $\psi_i(k)$ est un nombre complexe associé à la composante harmonique d'ordre k , et k désigne la fréquence angulaire dans l'espace de Fourier. Bien que la transformée puisse être calculée pour tout entier k , seules certaines valeurs portent une signification physique claire en lien avec la symétrie locale du système. En particulier :

- $\psi_i(4)$, noté ψ_{4i} , mesure la présence d'une organisation à symétrie quadratique, et peut être désigné comme le **paramètre d'ordre tétractique**,
- $\psi_i(5)$, noté ψ_{5i} , correspond à une organisation à symétrie pentagonale, et peut être appelé **paramètre d'ordre pentatique**,
- $\psi_i(6)$, noté ψ_{6i} , le plus couramment utilisé dans les milieux granulaires bidimensionnels, quantifie la symétrie hexagonale locale, et est classiquement nommé **paramètre d'ordre hexatique**.

Ces paramètres d'ordre angulaire permettent d'identifier et de quantifier le degré d'organisation du système selon différentes symétries. La norme $|\psi_{ki}|$ mesure l'intensité de la symétrie k autour de la particule i , tandis que son argument $\arg(\psi_{ki})$ renseigne sur l'orientation de cette symétrie. La figure 1.24 représente les trois structures élémentaires en milieu dense, associées aux ordres tétractique, pentatique et hexatique. Le module $|\psi_{ki}|$ vaut 1 lorsque la particule i et son voisinage forment la structure de référence associée à une coordinence $N_i = k$.

En pratique, il est possible de calculer ces paramètres de texture sur la base des positions angulaires discrètes θ_{ij} des plus proches voisins j de la particule i :

$$\psi_{ki} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \exp(i k \theta_{ij}). \quad (1.23)$$

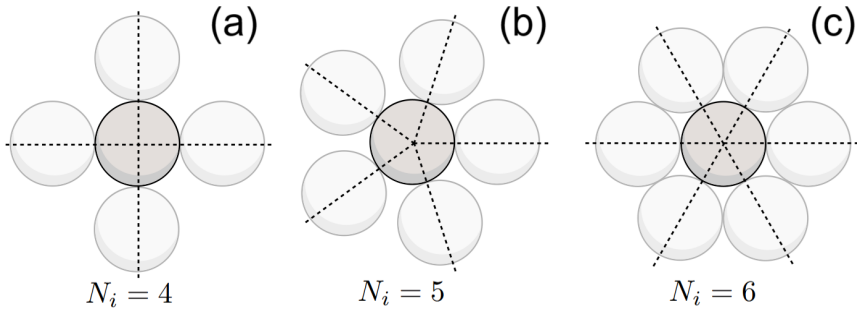


FIGURE 1.24 – Schémas des trois configurations régulières élémentaires pour les ordres (a) tétractique ($k = 4$), (b) pentatique ($k = 5$) et (c) hexatique ($k = 6$).

Dans le cas 2D, le calcul du **paramètre d'ordre hexatique**, noté ψ_6 est plus adapté :

$$\psi_{6i} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \exp(i 6 \theta_{ij}), \quad (1.24)$$

car l'empilement optimal de sphères de même taille forme un réseau hexagonal, c'est-à-dire que les directions denses du système forment des angles de 60° entre elles. Le module de ce nombre complexe tend vers la valeur $|\psi_6| = 1$ lorsque la structure formée par le grain i et ses N_i premiers voisins forme une structure hexagonale parfaite. Son argument $\arg(\psi_6)$, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, renseigne alors sur l'orientation des directions denses de l'hexagone : s'il vaut 0 alors les directions denses de l'hexagone forment des angles géométriques de 0 , $\pi/3$ et $2\pi/3$ avec la direction horizontale de référence, alors qu'un argument valant π correspond à un hexagone dont les directions denses forment des angles de $\pi/6$, $\pi/2$ et $5\pi/6$ avec l'horizontal. Dans le cas précis $|\psi_6| = 1$ et $N_i = 6$, le paramètre d'ordre hexatique est un **descripteur bijectif**, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une seule configuration spatiale associée au nombre complexe ψ_6 ¹. La figure 1.25 (a) montre les différentes structures hexagonales observables représentées dans le plan complexe. Lorsque le module du paramètre d'ordre hexatique $|\psi_6|$ est inférieur à 1, la structure formée n'est plus parfaitement hexagonale. Même si son argument garde un certain niveau d'information sur les directions denses de la microstructure, ce paramètre **n'est plus un descripteur**

1. Les cas où la microstructure forme un hexagone parfait dont il manquerait une ou plusieurs particules sont très instables car les particules ont naturellement tendance à combler les vides dans le milieu.

bijectif, c'est-à-dire que l'analyse de plusieurs microstructures formées par une particule i et ses voisins peut donner la même valeur du nombre complexe ψ_{6i} . La figure 1.25 (b) donne une représentation schématique de cette propriété. Le nombre de configurations accessibles Ω augmente considérablement lorsque le module $|\psi_{6i}|$ s'éloigne de la valeur 1. De façon réciproque, le nombre de configurations probables diminue rapidement lorsque le module mesuré $|\psi_{6i}|$ s'approche de la valeur 1.

Le paramètre d'ordre hexatique contient également indirectement une information sur la valeur du volume libre de la particule i , car plus la structure est proche d'un hexagone plus le volume libre de la particule centrale est faible.

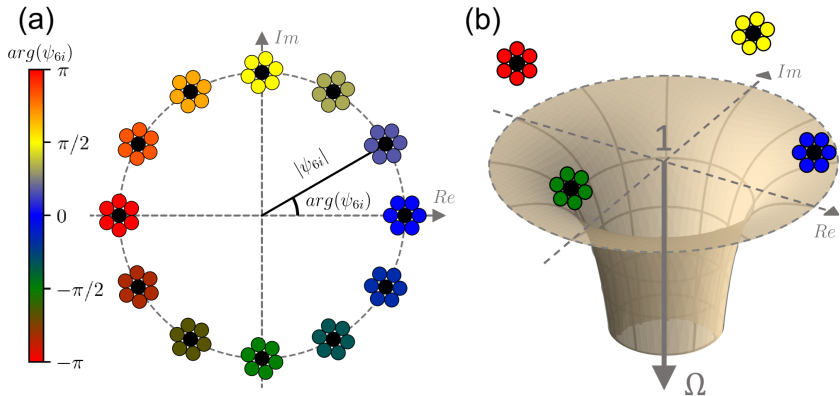


FIGURE 1.25 – (a) Diagramme des phases hexatiques représentées dans le plan complexe. (b) Représentation graphique du nombre de conformations accessibles Ω en fonction de la position dans le plan complexe. Sur les deux figures, les cercles en pointillés gris représentent les cercles de rayon unitaire.

Dans la littérature scientifique, Watanabe et al. ont utilisé le module du paramètre d'ordre hexatique pour mettre en évidence l'existence de corrélations orientationnelles courtes portées des positions dans les écoulements granulaires 2D, même faiblement polydispersés [83]. Leur étude montre l'apparition systématique d'un ordre cristallin local, qu'ils appellent *medium-range crystalline order* (MRCO). Dans le chapitre 6, les paramètres d'ordre hexatique, mais aussi tétractique et pentatique seront utilisés comme nouveaux descripteurs de la microstructure locale pour l'étude de l'écoulement lors de la vidange d'un silo.

1.3.2 À l'échelle mésoscopique

Dans un milieu granulaire, la dynamique de chaque particule influence directement celle de ses voisines de façon non-linéaire. La complexité de ces systèmes rend difficile le lien entre dynamique individuelle et comportement global. Il est souvent indispensable de simplifier les équations du mouvement de chaque grain afin de prédire et modéliser les propriétés à l'échelle mésoscopique du milieu.

Principe de la modélisation continue

L'**homogénéisation** d'un milieu granulaire consiste à le modéliser comme un milieu continu, afin d'appliquer les lois de la mécanique des fluides, couramment utilisées pour décrire ce type de système [84, 85, 86]. Cela implique de définir un volume élémentaire où les grains présentent des comportements similaires, permettant une description mésoscopique du mouvement. Le choix de ce volume est crucial, car il doit capter la physique du système malgré l'hétérogénéité du milieu.

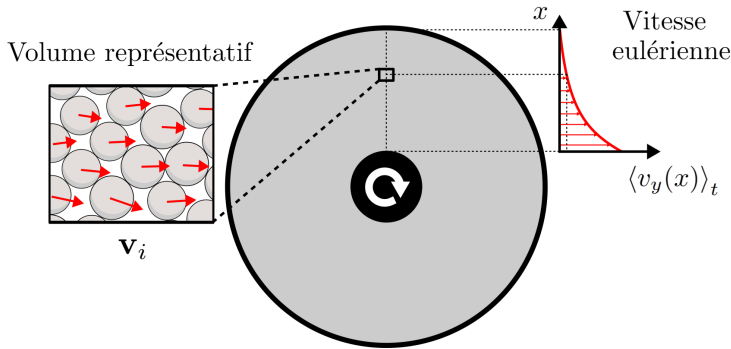


FIGURE 1.26 – Schéma de principe de l'homogénéisation : exemple d'un écoulement dans une géométrie Couette. Les vitesses lagrangiennes de chaque particule incluse dans un volume représentatif (gauche), notée \mathbf{v}_i , sont moyennées pour obtenir le profil de vitesse eulérien $\langle v_y(x) \rangle_t$ (droite).

Les **grandeurs eulériennes** sont ensuite obtenues en combinant les contributions individuelles des grains présents dans ce volume. En faisant parcourir ce volume de contrôle à travers l'ensemble du milieu, il est possible de construire des champs eulériens, qui traduisent l'évolution spatiale des grandeurs d'intérêt. Enfin, les équations de la mécanique des milieux conti-

nus peuvent être appliquées à ces champs afin de prédire leur évolution dans l'espace et le temps.

Soit Ω un volume de contrôle centré sur la position (x, y) . La grandeur eulérienne instantanée $M(x, y, t)$ peut être obtenue en calculant simplement la moyenne d'ensemble des grandeurs lagrangiennes instantanées $M_i(\mathbf{r}_i(t), t)$ des particules contenues dans le volume Ω au temps t :

$$M(x, y, t) = \langle M_i(\mathbf{r}_i(t), t) \rangle_i \quad \text{avec } \mathbf{r}_i(t) \in \Omega. \quad (1.25)$$

L'homogénéisation par la moyenne d'ensemble est une méthode couramment utilisée, notamment pour le calcul de fonctions de corrélation structurales. Par exemple, Zhang et al. ont utilisé cette méthode pour calculer le champ de vitesse eulérien [84]. Si le mouvement global est stationnaire, on peut définir le champ eulérien moyen $M(x, y)$ de la manière suivante :

$$M(x, y) = \langle M(x, y, t) \rangle_t. \quad (1.26)$$

Les équations (1.25) et (1.26) peuvent être appliquées à toutes les grandeurs lagrangiennes introduites précédemment, permettant ainsi d'obtenir les champs eulériens instantanés et moyens correspondants.

La description des milieux granulaires comme un milieu continu pose néanmoins une question fondamentale : quelle doit être la taille de ce volume pour être suffisamment représentatif des propriétés mécaniques du milieu ? Un volume trop petit induirait des variations spatiales trop importantes des grandeurs, et un volume trop grand par rapport à la taille des grains pourrait en revanche ne pas rendre compte de la richesse de la dynamique du milieu à l'échelle locale.

Texture du milieu

La **texture** d'un milieu granulaire 2D correspond à l'organisation de sa structure interne, qu'elle soit désordonnée ou non. En mécanique des milieux granulaires, la compacité locale ϕ définie comme la fraction volumique de grains dans un volume donné, est la grandeur eulérienne la plus couramment utilisée pour caractériser l'aspect du milieu. Cependant, d'autres grandeurs issues de la mécanique statistique permettent d'avoir une description plus précise de la structure interne de la matière. La **fonction de corrélation de paires** correspond à la moyenne d'ensemble de la fonction de distribution radiale particulaire (1.20) sur un nombre N de

particules contenues dans un volume représentatif Ω . Elle est définie par la formule suivante :

$$g(r) = \langle g_i(r) \rangle_i . \quad (1.27)$$

Lorsque r tend vers l'infini, c'est-à-dire que l'on considère un très grand volume de contrôle, la limite de la fonction $g(r)$ est égale à 1. Cette fonction reflète la **corrélacion translationnelle** des positions des particules dans la structure du milieu.

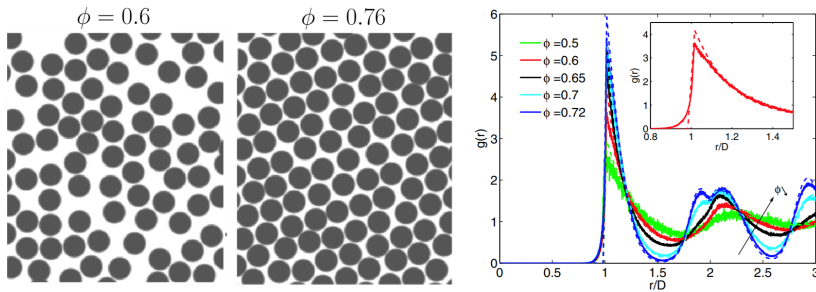


FIGURE 1.27 – (gauche) Milieux granulaires 2D hors équilibre pour deux valeurs de compacité différentes (amorphe $\phi = 0.6$ ou cristallisé $\phi = 0.76$). (droite) Évolution de la fonction de corrélation de paire $g(r)$ pour différentes fractions volumiques (figures extraites de [87]).

Dans le cas d'un milieu cristallisé, les maxima locaux visibles sur la courbe représentative de $g(r)$ subsistent même pour de grandes valeurs de r . C'est un marqueur d'une corrélation translationnelle à **quasi-longue portée**. En revanche pour un milieu granulaire amorphe, les valeurs de ces maxima décroissent très rapidement avec l'augmentation de r ; cela traduit une corrélation translationnelle à **courte portée**.

Reis et al. ont utilisé cette fonction pour l'étude d'un milieu granulaire 2D soumis à des vibrations externes contrôlées [87]. En augmentant la fraction volumique en particules dans leur système, le milieu passe d'un état désordonné à un état cristallisé. Ils ont montré que la fonction de corrélation de paires permettait de bien capturer cette transition même dans un système hors-équilibre (voir Fig. 1.27 *droite*). Ce résultat suggère que l'utilisation de cette fonction est également envisageable pour l'étude du désordre dans les milieux granulaires 2D en écoulement.

La moyenne d'ensemble peut également être appliquée à la fonction de distribution angulaire particulière. On obtient la **fonction de distribution angulaire**, définie par la formule suivante :

$$g(\theta) = \langle g_i(\theta) \rangle_i . \quad (1.28)$$

Dans le cas d'un milieu cristallisé, la fonction de distribution angulaire présente des maxima quelle que soit la distance R considérée pour le calcul de l'intégrale (1.21). Cela signifie que la texture du milieu présente une corrélation orientationnelle **courte et longue portée**. En revanche, dans le cas d'un milieu granulaire amorphe, la fonction de distribution angulaire devient constante pour des grandes valeurs de R . Cela signifie que la densité de grain dans toutes les directions est la même. Le milieu ne présente donc pas de corrélation orientationnelle longue portée.

Tenseur des taux de déformations

En mécanique des fluides, il est possible de définir le tenseur des taux de déformations, noté $\underline{\dot{\gamma}}$, à partir du champ de vitesse eulérien \mathbf{v} . Il est défini comme suit :

$$\underline{\dot{\gamma}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{v} + \underline{\nabla} \mathbf{v}^t), \quad (1.29)$$

où $\underline{\nabla} \mathbf{v}$ est le tenseur gradient de \mathbf{v} et $\underline{\nabla} \mathbf{v}^t$ dénote sa transposée. Il décrit comment un volume de matière se déforme au fil du temps sous l'effet de contraintes externes. La composante diagonale correspond à la contraction ou dilatation du milieu, alors que les composantes hors-diagonaux correspondent aux taux de cisaillement. La trace de ce tenseur est notée $\dot{\gamma}$.

Tenseur des contraintes

En mécanique des milieux continus appliquée aux milieux granulaires, le tenseur des contraintes, noté $\underline{\sigma}$, a une interprétation spécifique en raison des caractéristiques particulières de ces matériaux, comme la répartition inhomogène des forces internes (chaînes de force) ou le frottement entre les grains. Il permet néanmoins de quantifier les forces internes qui agissent sur un volume représentatif du milieu, en réponse à des forces externes ou des déformations. Par analogie avec la pression dans un fluide, la **pression granulaire** est une grandeur souvent utilisée pour quantifier les forces présentes dans le milieu. Si un grain est soumis à un ensemble de forces

exercé par ses voisins, la pression de ce grain peut être définie comme la somme des composantes normales à chaque contact, normalisée par la surface de ce grain (voir Fig. 1.28).

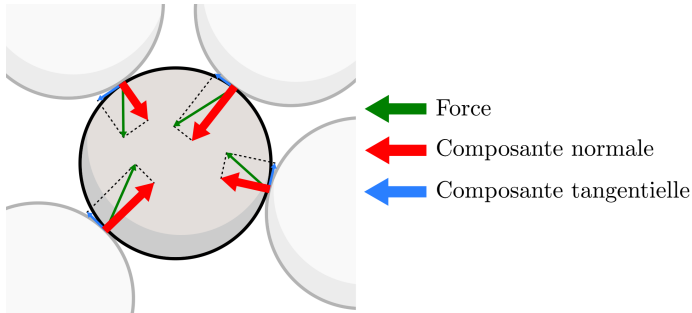


FIGURE 1.28 – Schéma de principe du calcul de la pression subie par un grain. Celle-ci peut être calculée comme la somme des composantes normales des forces appliquées au niveau de chaque contact (représentées en rouge), divisée par la surface du grain.

À partir de la pression associée à chaque grain, qui est donc une grandeur lagrangienne, il est possible de définir un champ de pression continu, en calculant par exemple la moyenne de la pression des grains contenus dans un certain volume représentatif. Dans la grande majorité des systèmes expérimentaux, il est envisageable de mesurer la position des grains, mais les contraintes qu'ils subissent sont bien souvent inaccessibles. C'est pourquoi les simulations numériques d'écoulements peuvent être réalisées, en complément des expériences.

Modèle rhéologique

Pour un fluide classique, la loi de comportement relie le tenseur des contraintes au tenseur des taux de déformations. Cette relation constitue la base des équations de la mécanique des fluides. Dans le cas des milieux granulaires denses, où les contacts interparticulaires jouent un rôle essentiel, une loi constitutive spécifique a été introduite par Jop et al. en 2006 : la loi rhéologique $\mu(I)$ [88]. Elle relie la contrainte de cisaillement τ à la pression de confinement P selon :

$$\tau = \mu(I)P, \quad (1.30)$$

où $\mu(I)$ est un coefficient de frottement effectif dépendant du nombre inertiel I , paramètre clé qui caractérise le régime d'écoulement granulaire. Ce dernier est défini par :

$$I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}}, \quad (1.31)$$

avec $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement, d le diamètre moyen des grains, P la pression, et ρ la masse volumique des particules. Le nombre inertiel I exprime le rapport entre le temps caractéristique de déformation et celui du confinement des grains par la pression. Il augmente avec la rapidité de l'écoulement et la dilution du milieu, traduisant ainsi la transition entre comportement quasi-statique et inertiel. La fonction $\mu(I)$ est souvent modélisée sous forme empirique comme :

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{1 + I_0/I}, \quad (1.32)$$

où μ_s correspond au frottement statique (régime lent), μ_2 au frottement dynamique (régime inertiel), et I_0 est un paramètre de transition. Cette relation traduit une augmentation progressive du frottement avec l'inertie. Un modèle équivalent permet de relier la compacité $\phi(I)$ au nombre inertiel :

$$\phi(I) = \phi_{max} - (\phi_{max} - \phi_{min})I, \quad (1.33)$$

où ϕ_{max} est la compacité en régime quasi-statique, et ϕ_{min} celle atteinte à forte inertie. Ces deux expressions dépendent des propriétés microscopiques du matériau, telles que la forme, la rugosité ou la nature des contacts. La loi $\mu(I)$ permet ainsi de décrire de manière unifiée les écoulements granulaires denses, notamment ceux observés sur plans inclinés, dans des canaux ou des dispositifs de type Couette [31], où les forces de contact dominant. Elle constitue une alternative simplifiée à des modèles plus complexes, comme celui de Cosserat qui prend en compte les rotations internes et les moments de couple entre grains [89, 90]. Cependant, cette approche présente des limites. Elle devient inadaptée dans les régimes très dilués, proches de la transition solide-liquide, ou lorsque des effets de cohésion, de polydispersité, ou de taille de grains deviennent importants. En particulier, la loi $\mu(I)$ ne permet pas de reproduire quantitativement certains profils d'écoulement complexes comme la vidange d'un silo, qui fait intervenir des zones hétérogènes et des effets de seuils que nous aborderons dans la section suivante [91].

Ainsi, la description des milieux granulaires repose sur un ensemble d'outils théoriques et expérimentaux permettant de relier les dynamiques individuelles des grains à des grandeurs représentatives à l'échelle mésoscopique. Les notions de volume libre, de coordinence et d'ordre orientationnel, combinées aux approches d'homogénéisation et aux champs eulériens, permettent de capturer les caractéristiques clés des phénomènes observés dans ces milieux : formation de chaînes de force, dilatance, transition cristalline ou amorphe.

Ces outils sont d'autant plus pertinents lorsqu'il s'agit d'étudier des systèmes cohésifs, où les interactions entre particule peuvent fortement perturber l'**organisation spatiale du milieu**. L'application de ces concepts trouve un cas d'étude emblématique dans l'analyse des écoulements au sein des silos, où les effets de structure, de friction et de cohésion aboutissent à des comportements dynamiques complexes.

1.4 Vidange de silo

La vidange de silo correspond à l'écoulement d'un ensemble de particules à travers une ouverture ou un rétrécissement. La compréhension de cet écoulement figure parmi les problèmes de la physique des milieux granulaires les plus fascinants. Lorsqu'une ouverture ne permet le passage que d'un nombre limité de grains à la fois, comment l'ensemble des particules se réorganise-t-il en amont pour la franchir ? Si un réservoir contenant un grand nombre de particules soumises à leur poids est ouvert par le bas, celles-ci s'échapperont naturellement sous l'effet de la gravité. Pour traverser l'ouverture, ces particules sont contraintes de se **réorganiser collectivement**, ce qui engendre des motifs géométriques complexes encore mal compris aujourd'hui, comme l'apparition d'ondes internes de forces durant la vidange ou encore l'apparition de chaînes de force en forme d'arches au-dessus de l'ouverture. Cette dernière section fait un état de l'art sur l'étude de la vidange de silo. Elle présente les **phénomènes uniques** associés à ces systèmes et introduit également les modèles semi-empiriques et notations utilisées dans ce manuscrit pour décrire ces écoulements.

1.4.1 Généralités

De nombreux secteurs d'activité font intervenir les matériaux granulaires en tant que matière première (sable, minerai, granules de plastique, etc) ou en tant que produits finis (poudre alimentaire, médicament, etc). L'industrie pharmaceutique, la construction, le secteur agroalimentaire ou encore la métallurgie les utilisent dans la plupart de leurs procédés (stockage, fabrication additive, transport, mélange, etc).



FIGURE 1.29 – (a) Vidange d'un silo rempli de sable cohésif formant des agrégats en sortie. (b) Solution technique permettant de limiter la formation de poussière lors de la vidange d'un silo surélevé (crédits : AGRO PROFF (DSH solution)). (c) Effondrement partiel d'un silo causé par un potentiel mauvais dimensionnement de celui-ci (crédits : Engineering Services Hamburg).

Les silos apparaissent régulièrement à différentes étapes de ces processus. Malgré cela ils sont souvent encore dimensionnés sur la base de modèles empiriques [92, 93], ne prédisant pas toujours certains comportements indésirables. Parmi les problèmes pouvant survenir se trouvent les blocages de silo lors d'une vidange, les phénomènes de résonance, l'inflammation du contenu [54, 94], la mise en suspension de grande quantité de poussière, l'effondrement de silo (voir Fig. 1.29) ou encore une hétérogénéité du temps de stockage des matériaux dans le silo (ce qui peut être problématique pour le stockage de matériaux alimentaires) [94]. Étudier les écoulements lors des vidanges de silos permettrait de mieux comprendre ces phénomènes et d'en limiter l'impact. C'est l'une des raisons pour lesquelles ils sont encore largement étudiés de nos jours.

Un silo désigne généralement une cavité de stockage constituée d'un réservoir à grains muni d'au moins une ouverture au fond. La partie inférieure du réservoir peut éventuellement être en forme de cône, convergeant vers la sortie (similaire à un entonnoir) ; dans le cas contraire, on parle de silo à fond plat (en anglais : *flat-bottom silo* (voir Fig. 1.30 (e))). Même si plusieurs formes d'écoulement sont possibles lors de la vidange d'un silo (voir Fig. 1.30 (a-d)) [94] (selon les propriétés des particules, la nature de la cohésion, la géométrie du silo, etc.), certains phénomènes restent néanmoins récurrents dans cette géométrie.

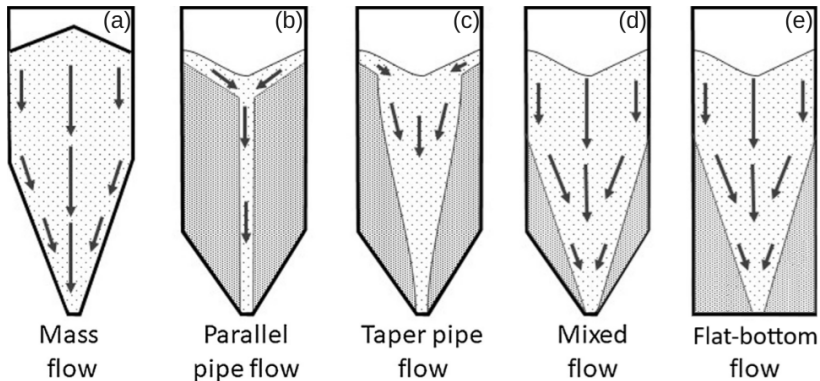


FIGURE 1.30 – (a, b, c, d) Schémas des différents motifs d'écoulement possibles durant la vidange d'un silo conique axisymétrique (figures extraites de [94]). Les zones grises correspondent aux zones mortes durant la vidange. (e) Schéma d'un écoulement dans un silo à fond plat, qui est la géométrie de réservoir utilisée dans le cadre de cette thèse.

L'écoulement dans un silo est engendré par la gravité. Dans les instants après l'ouverture de l'orifice du silo, l'empilement de grains s'effondre continuellement, jusqu'à ce que le réservoir soit vide. Du fait de la pesanteur, la majorité des particules dans le volume du réservoir se déplacent vers la sortie, malgré les frottements qu'elles subissent au cours de leur mouvement.

Une proportion de grains peut néanmoins se retrouver piégée de part et d'autre de l'ouverture, dans des zones appelées zones mortes (voir Fig. 1.30 (b-e)). Ces grains constituent une phase solide, dont l'interface est difficile à définir a priori pendant la vidange [15]. À la fin de la vidange en revanche, ces zones forment des tas avec un angle de repos bien défini, similaire à celui qu'on peut mesurer sur un tas conique.

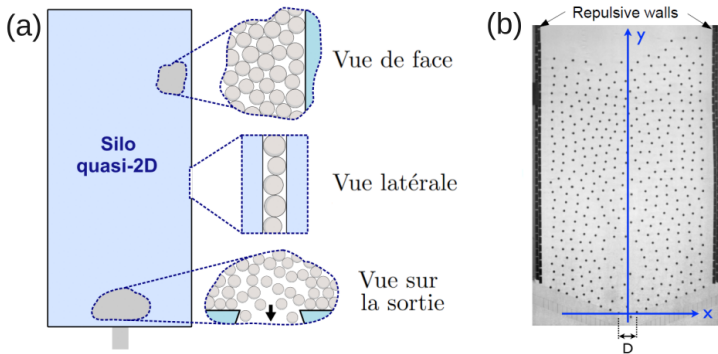


FIGURE 1.31 – (a) Schéma de principe d'un silo quasi 2D. En vue de face, tous les grains sont visibles. (b) Photographie d'un exemple de silo quasi-2D rempli de petits cylindres magnétiques (figure extraite de [73]).

Observer la dynamique des particules au cœur de cet écoulement est une tâche très difficile, surtout dans les systèmes industriels à taille réelle, traitant de très grande quantité de particules s'écoulant sur de courts laps de temps. C'est pourquoi en recherche expérimentale, l'utilisation de silos quasi-2D est souvent préférée [11, 73, 95]. Il s'agit de silos dont l'épaisseur du réservoir est très faible devant sa largeur et sa hauteur (voir Fig. 1.31). Ils sont souvent utilisés avec des milieux granulaires faiblement polydisperses [96], voire monodisperses [4], de sorte que cette épaisseur soit du même ordre de grandeur que la taille maximale des particules dans le silo. Il n'y a alors qu'une seule couche de grain dans l'épaisseur, ce qui permet de tous les visualiser à chaque instant de l'écoulement.

L'hypothèse principale de cette approche est que les observations faites dans ces systèmes sont similaires au cas des silos 3D. En particulier les lois de débits obtenues à partir de l'analyse dimensionnelle fonctionnent aussi bien pour une géométrie 2D qu'une géométrie 3D. Les résultats de cette thèse sont obtenus uniquement grâce à l'utilisation d'un silo quasi-2D ; le dispositif sera décrit au chapitre 2.

1.4.2 Phénomènes spécifiques au silo

Cette partie présente les phénomènes remarquables observés lors de la vidange de silo, qui sont à l'origine des nombreuses difficultés de la description et de la modélisation de ces écoulements.

Pression statique dans un silo : effet Janssen

Comme nous l'avons vu précédemment, dans un milieu granulaire les forces se propagent en formant un réseau bien particulier, responsable des propriétés mécaniques du matériau. Ce réseau de force est à l'origine d'un phénomène bien connu depuis longtemps dans les silos, appelé effet Janssen [97]. Lors du remplissage du réservoir d'un silo, la pression statique appliquée par les grains au fond du silo finit par saturer avec la hauteur [97, 98]. Cette observation ne serait pas faite si on remplissait un réservoir de silo avec de l'eau. Dans ce cas, la pression au fond du silo est directement proportionnelle à la hauteur de liquide.

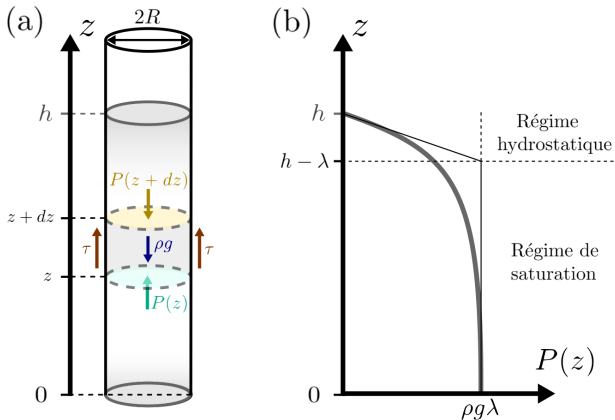


FIGURE 1.32 – (a) Schéma d'une colonne de grain dans un silo cylindrique. (b) Évolution de la pression statique $P(z)$ en fonction de la hauteur z (modèle de Janssen).

Considérons un empilement de grains introduit dans une colonne cylindrique rigide de hauteur h et de rayon R . On assimile cet ensemble à un milieu continu, soumis à une pression verticale $P(z)$ dépendant uniquement de la coordonnée verticale z . Une tranche élémentaire d'épaisseur dz de cette colonne est soumise aux forces suivantes :

- la force de pression exercée par les grains au-dessus : $P(z + dz) \pi R^2$,
- la force de pression exercée par les grains en dessous : $P(z) \pi R^2$,
- la force de frottement exercée par les parois latérales : $\tau 2\pi R dz$,
- le poids des grains contenu dans la tranche : $\rho g \pi R^2 dz$.

Selon l'axe vertical, le bilan des forces appliquées à celle-ci s'écrit donc de la façon suivante :

$$-P(z + dz) \pi R^2 + P(z) \pi R^2 + \tau 2\pi R dz - \rho g \pi R^2 dz = 0. \quad (1.34)$$

En supposant que la contrainte de frottement τ est proportionnelle à la pression, telle que $\tau = K\mu P(z)$, où μ est le coefficient de frottement paroi-grains et K le coefficient de redirection des forces internes, on obtient l'équation différentielle suivante après simplification :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{2K\mu}{R} P(z) - \rho g. \quad (1.35)$$

En considérant que la pression est nulle à la surface libre, c'est-à-dire $P(h) = 0$, la solution de cette équation est :

$$P(z) = \rho g \lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{h-z}{\lambda}\right) \right], \quad (1.36)$$

où

$$\lambda = \frac{R}{2K\mu}. \quad (1.37)$$

Cette modélisation met en évidence un profil de pression de nature exponentielle. Le mécanisme complexe de redirection des contraintes internes est quantifié par la longueur caractéristique λ . Cette grandeur joue un rôle central : au-delà de cette profondeur, la contrainte verticale cesse de croître de manière linéaire et tend vers une valeur limite. Concrètement, des chaînes de forces en forme d'arche émergent et prennent appui sur les parois latérales du silo. Le frottement entre ces grains et les parois engendre une force d'adhérence globale, capable de soutenir une fraction significative du poids total. Ainsi, la charge exercée au fond du silo est fortement

réduite par rapport à celle que prédirait un modèle hydrostatique. Toutefois, si ce phénomène est mal évalué, il peut avoir des conséquences graves. Une sous-estimation du rôle de la friction et de la valeur effective de λ peut conduire à des efforts latéraux imprévus, susceptibles de provoquer la déformation, voire l'effondrement des parois du silo (voir Fig. 1.29). D'où l'importance d'une détermination précise des paramètres du système, en particulier de la longueur caractéristique λ , qui représente physiquement la profondeur des voûtes.

Pression dynamique lors de la vidange d'un silo

Lors de l'ouverture de l'orifice d'un silo, le champ de pression statique prédit par le modèle de Janssen est perturbé sur une hauteur donnée. Les chaînes de force qui prenaient appui sur la surface qui maintenait l'orifice du silo fermé s'effondrent ; les grains qui en faisaient partie se retrouvent en chute libre, entraînant ainsi à leur tour tous ceux qui s'appuyaient dessus. Localement la pression granulaire au niveau de l'ouverture atteint zéro (les grains ne se touchent quasiment plus) et l'écoulement est enclenché.

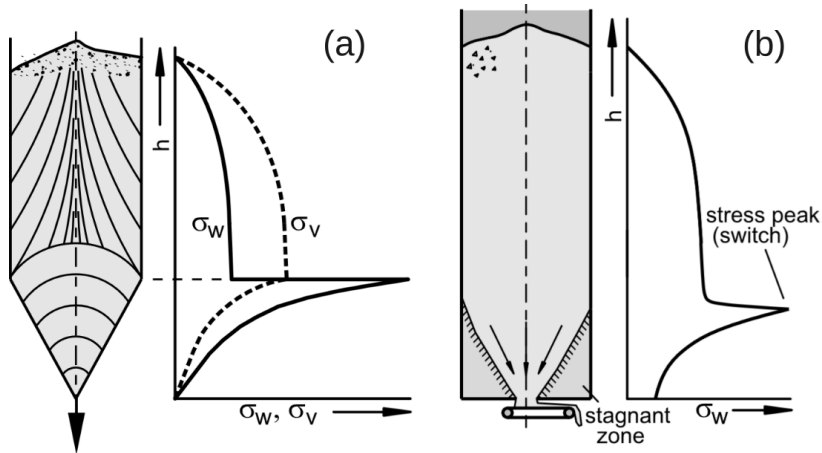


FIGURE 1.33 – (a) Schéma de l'évolution de la pression dynamique (composante de compression horizontale σ_w et verticale σ_v) dans un silo axisymétrique lors de sa vidange. (b) Schéma de l'évolution de la pression dynamique dans un silo à fond plat à débit contrôlé lors de sa vidange (figures extraites de [92]).

Le champ de pression lors de la vidange d'un silo a une forme bien spécifique (voir Fig. 1.33) qui se décompose en deux régions [92, 99, 100] : une partie supérieure où le champ de pression a une forme similaire à celle prédite par le modèle de Janssen, et une partie inférieure où la pression dynamique chute jusqu'à être nulle au niveau de la sortie. À noter que si le débit est imposé à la sortie, par un convoyeur à bande par exemple, la pression au niveau de la sortie n'est pas nulle mais reste plus faible que dans le cas statique car un écoulement subsiste (voir Fig. 1.33 (b)). Ces deux parties sont séparées à une hauteur caractéristique bien précise, pouvant correspondre soit à une discontinuité de la direction de la paroi du fait de la présence d'un entonnoir (voir Fig. 1.33 (a)), soit au sommet des zones mortes dynamiques (voir Fig. 1.33 (b)). Une surpression localisée existe au niveau de la zone de transition entre ces deux parties, étant causée par la présence d'arches s'appuyant sur ces discontinuités et supportant une grande partie du poids de l'empilement granulaire supérieur. Nous verrons que cette discontinuité de la pression a une influence importante sur la phase en écoulement, notamment dans le cas où le milieu est sujet à la cristallisation.

Dans la deuxième partie, où la pression décroît exponentiellement avec la profondeur, Rubio-largo et al. ont montré que l'évolution de l'accélération effective croît exponentiellement avec celle-ci [101]. Les évolutions des forces de pression et de l'accélération sont donc couplées, comme le prévoit la seconde loi de Newton (1.16). Plus les forces que subissent les particules sont faibles, plus leur accélération est proche de celle de la pesanteur.

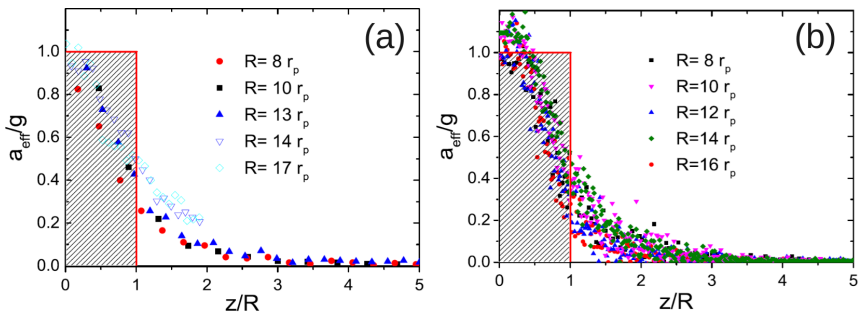


FIGURE 1.34 – Évolution de l'accélération en fonction de la profondeur pour différentes tailles d'ouverture R pour un silo 2D (a) et pour un silo 3D (b) (figures extraites de [101]). R correspond à la taille de l'orifice du silo (au diamètre pour le cas 3D).

Blocages de silos

Les arches sont donc omniprésentes dans les empilements de grains et donnent cette forme très spécifique au profil de pression dans les silos. C'est également le cas au voisinage de l'ouverture d'un silo. Elles sont à l'origine d'un autre phénomène encore plus fascinant : lors d'une vidange, si le diamètre de l'ouverture est suffisamment faible devant la taille des grains, alors l'écoulement peut subitement s'arrêter [4].

Ce phénomène de blocage du silo s'explique par la formation d'une chaîne de force unique qui forme une arche au niveau de l'ouverture, dont la présence suffit à freiner entièrement l'écoulement et à maintenir l'empilement de grains stable [19].

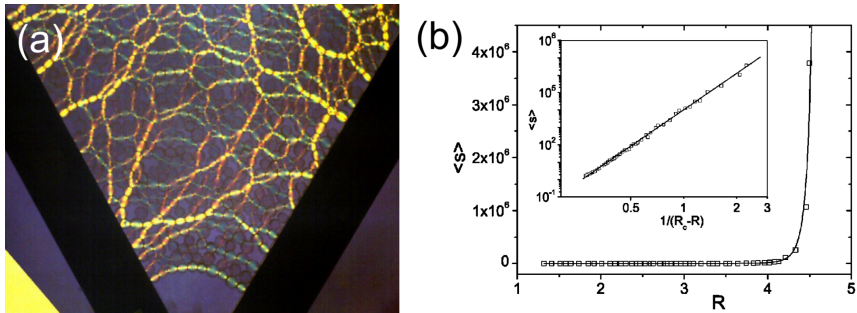


FIGURE 1.35 – (a) Une chaîne de force (en jaune et vert) bloque l'ouverture du silo (figure extraite de [19]). (b) Au-delà de $R = 4.5d$, la durée des avalanches $\langle s \rangle$ explose, l'écoulement ne se bloque plus (figure extraite de [4]).

Ce phénomène critique tire son origine de la nature discrète et non linéaire des milieux granulaires. Il n'existe pas de modèle aujourd'hui permettant de prédire la survenue d'un blocage de silo, même en connaissant la configuration du milieu granulaire quelques instants avant. L'écoulement proche de l'ouverture est fortement intermittent ; il a été montré qu'il n'y a pas de discontinuité dans les fluctuations de la vitesse des grains pour des valeurs de tailles d'ouverture proche de la valeur critique [102].

Ce résultat important suggère que la probabilité de blocage n'est donc en réalité jamais nulle quelque soit la taille de l'orifice du silo. De façon équivalente cela signifie que les arches sont omniprésentes dans le milieu granulaire mais qu'elles ne sont jamais suffisamment stables pour freiner totalement l'écoulement. En s'appuyant sur les zones mortes latérales ou

sur la paroi de l'entonnoir du silo, ces arches déchargent une partie du poids du milieu, ce qui, en plus d'expliquer l'effet Janssen [97], explique la forme du profil de pression dans la partie inférieure du silo lors de sa vidange [92].

Chant des silos

Les écoulements denses de grains génèrent souvent beaucoup de bruit du fait de la nature dissipative des milieux granulaires. Dans certaines conditions particulières encore mal comprises aujourd'hui, des fréquences sonores bien précises se dégagent dans les spectres d'émission mesurés lors de certains écoulements. Par exemple, lors des avalanches à la surface de certaines dunes, un son grave émane du sable [1, 2, 103]. Ce phénomène est appelé "chants des dunes" et a longtemps piqué la curiosité des explorateurs et chercheurs.

Un phénomène similaire existe lors de la vidange d'un silo. Des ondes de pression internes émergent dans le milieu granulaire et se propagent jusqu'en haut du réservoir du silo [89]. La surface libre supérieure du milieu granulaire agit alors comme une membrane et la structure du réservoir du silo comme une caisse de résonance. Si la fréquence des ondes est proche de la fréquence de résonance de la cavité, alors cela engendre un son très grave et très fort, pouvant endommager la structure du silo et nuire à l'environnement local.

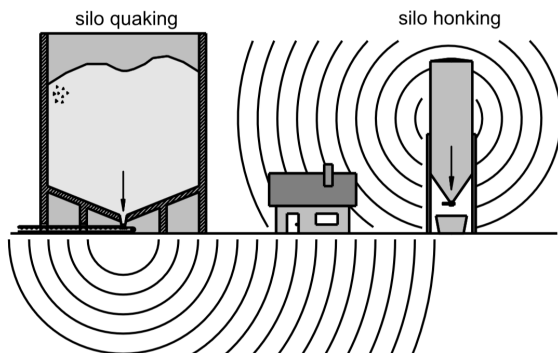


FIGURE 1.36 – (gauche - *Silo quacking*) Le tremblement de silo peut se produire lorsque le milieu granulaire cohésif maintenu en hauteur contre les parois s'effondre à l'intérieur du réservoir du silo. (droite - *Silo honking*) Un bruit similaire à un klaxon émane du silo lors de sa vidange (figures extraites de [92]).

Quelques travaux se sont intéressés à ce phénomène, mais aujourd'hui, il n'y a pas de consensus sur son origine [89, 92, 104]. Le chapitre 5 de ce manuscrit donne de nouveaux éléments de compréhension sur l'origine de ce phénomène. De plus, l'influence de la cohésion magnétique sur celui-ci sera détaillée.

1.4.3 Modélisation de l'écoulement

Le modèle rhéologique $\mu(I)$ est très peu utilisé pour modéliser les écoulements dans les silos. Les nombreux phénomènes spécifiques pouvant se produire simultanément dans ces systèmes limitent l'usage de ce modèle. Par exemple, celui-ci ne prédit pas la taille minimale de l'ouverture pour que la vidange s'effectue sans se bloquer. Dans cette sous-section nous abordons les différentes approches qui cherchent à mieux décrire les écoulement de vidange.

Loi de débit

Le débit d'un silo est principalement fixé par la taille de son ouverture. Durant la phase de vidange, le débit de particules traversant la sortie, noté Q est constant. L'hypothèse retenue pour expliquer cette observation est la répartition homogène de la pression dans la partie supérieure de l'empilement, du fait de l'effet Janssen. Cela permet d'exclure la hauteur de remplissage du réservoir des paramètres pouvant influencer la dynamique de l'écoulement. Hagen proposa en 1852 une expression simple de la loi de débit basée sur une analyse dimensionnelle [98]. Cette loi d'échelle suppose qu'au niveau de la sortie du silo, les grains sont en **chute libre** et ont une vitesse v_c proportionnelle à la hauteur de chute h , telle que $v_c \propto \sqrt{gh}$. En considérant une ouverture circulaire, telle que $S = \pi D^2/4$, la hauteur caractéristique pertinente correspond alors au diamètre de l'ouverture, tel que $h = D$. Le débit de vidange est alors donné par la loi d'échelle suivante :

$$Q \propto \sqrt{gD^3}. \quad (1.38)$$

Cette relation concorde avec les expériences de vidanges conduites pour des tailles d'ouverture très grandes devant la taille des grains $D \gg d$. Des divergences apparaissent néanmoins lorsque la taille de l'ouverture est plus faible $D \leq 10d$. De plus, cette loi ne permet pas de retrouver la taille critique maximale telle que l'ouverture se bloque à cause d'une arche de grains.

Pour renforcer cette loi d'échelle, plus de cent ans plus tard, Beverloo et al. proposent en 1961 une version modifiée de la loi de débit qui permet de prendre en compte le mécanisme d'obstruction partielle de l'ouverture d'un silo par les grains eux-mêmes [105]. Cette nouvelle loi, appelée loi de Beverloo, s'écrit comme suit :

$$Q \propto \rho \phi_b \sqrt{g} (D - kd)^{5/2}, \quad (1.39)$$

avec ρ la masse volumique des particules, ϕ_b la compacité initiale de l'empilement de grains et k une nouvelle constante expérimentale. Leurs expériences montrent que cette constante prend la valeur de 1.4 pour une grande variété de matériaux granulaires. Ce paramètre d'ajustement traduirait la proportion de grains qui gêne l'écoulement au niveau de l'ouverture. Le modèle de Beverloo rectifie ainsi la loi d'échelle et permet de mieux prédire le débit pour les ouvertures plus réduites, même si elle ne permet toujours pas de retrouver la taille minimale d'ouverture telle que le silo se bloque. Du fait de sa simplicité, elle est encore très souvent utilisée aujourd'hui pour dimensionner la taille de l'orifice d'un silo en fonction du débit souhaité.

En 2007, Mankoc et al. étudient la pertinence de l'introduction du paramètre k dans la loi d'échelle (1.38) [106]. Sur la base de données numériques, ils montrent que la compacité au niveau du centre de l'ouverture, notée ϕ_c varie significativement avec la taille de l'orifice du silo D . Lorsque $D \gg d$, la compacité au niveau de la sortie égale la compacité initiale du milieu ($\phi_c \sim \phi_b$). En revanche pour $D \leq 10d$, la compacité ϕ_c décroît à mesure que l'orifice est petit, jusqu'à la taille critique de $D \sim 4.5d$. Ils proposent la loi d'ajustement suivante pour ϕ_c :

$$\phi_c(D) = \phi_b \left(1 - \alpha \exp \left(-\beta \frac{D-d}{d} \right) \right), \quad (1.40)$$

avec α et β deux paramètres d'ajustement². L'effet de la taille de l'ouverture sur la compacité, et donc le débit n'est pas pris en compte dans la loi de Beverloo.

2. Par soucis de clarté, les notations des paramètres d'ajustement des équations ont été uniformisées. Initialement dans leur article, les auteurs définissent cette relation en posant $\alpha = 1/2$, et en notant b à la place de β .

En considérant cette expression de la compacité, ils proposent donc une nouvelle loi de débit :

$$Q \propto \rho \phi_b \left(1 - \alpha \exp\left(-\beta \frac{D-d}{d}\right) \right) \sqrt{g} (D-d)^{5/2}, \quad (1.41)$$

qui prédit avec plus de précision les valeurs de débit pour des ouvertures de silo plus petites d'après leur étude.

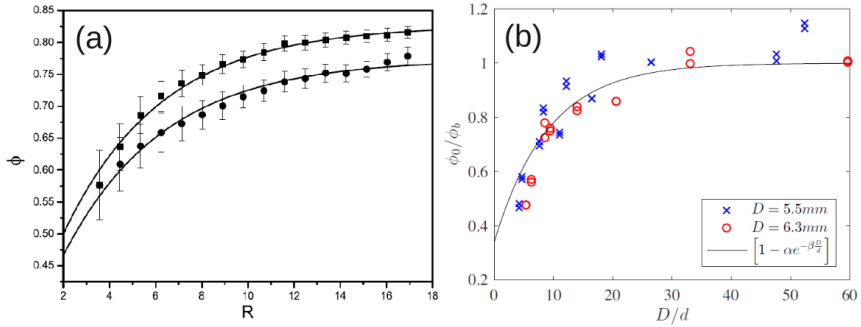


FIGURE 1.37 – Évolution de la compacité au centre de l'ouverture ϕ_c en fonction de sa taille (a) notée R ou (b) notée D/d . (a) Résultats de simulations numériques de Mankoc et al. [106] et (b) résultats expérimentaux de Benyamine et al. [107].

En 2012, les chercheurs de la même équipe ont montré que les profils de vitesse $v(x)$ et de fraction volumique $\phi(x)$ à la sortie d'un silo sont autosimilaires [14]. La figure 1.38 (a) représente l'ensemble des profils de vitesse expérimentaux obtenus pour des tailles d'ouverture allant de $D = 4.16 d$ jusqu'à $D = 35.6 d$, où ils sont ajustés par l'équation suivante :

$$v = v_c \left(1 - \left(\frac{2x}{D} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (1.42)$$

De la même façon, la figure 1.38 (b) montre l'ensemble des profils de fraction volumique ajustés par la relation suivante :

$$\phi = \phi_c \left(1 - \left(\frac{2x}{D} \right)^2 \right)^{1/\nu}, \quad (1.43)$$

où l'exposant $1/\nu$ traduit la courbure du profil autosimilaire.

Dans ces expressions, v_c est ajustée par la relation suivante :

$$v_c = \sqrt{g\gamma D}, \quad (1.44)$$

avec γ une constante d'ajustement, alors que ϕ_c est exprimée grâce à la relation (1.45), que les auteurs modifient en enlevant la contribution arbitraire qui tient compte de l'obstruction partielle de l'ouverture :

$$\phi_c(D) = \phi_b \left(1 - \alpha \exp \left(-\beta \frac{D}{d} \right) \right). \quad (1.45)$$

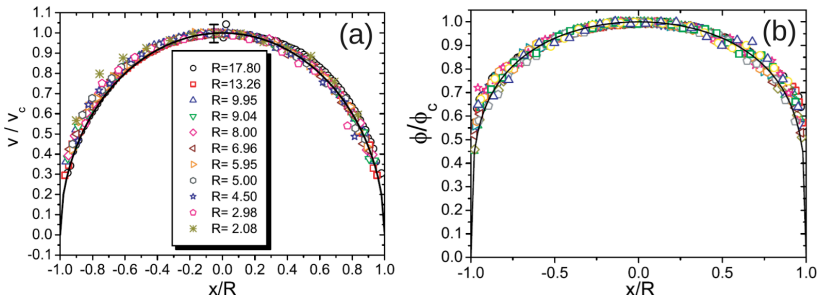


FIGURE 1.38 – Profils normalisés au niveau de l'ouverture de (a) la vitesse et (b) la capacité pour un silo à fond plat (figure extraite de [14]). Les lignes noires correspondent aux équations 1.42 et 1.43. R correspond à la taille de l'ouverture du silo quasi-2D.

Sur la base de ces profils autosimilaires, le débit peut se calculer selon l'intégrale suivante :

$$Q = \int_{-D/2}^{D/2} v(x)\phi(x)dx, \quad (1.46)$$

ce qui donne la loi de débit suivante en trois dimensions :

$$Q = C \rho \phi_b [1 - \alpha \exp(-\beta D/d)] \sqrt{gD^5}. \quad (1.47)$$

Aujourd'hui, il n'existe toujours pas de modèle théorique prédisant le débit de vidange d'un silo. La relation (1.47) correspond au modèle empirique le plus avancé, qui possède néanmoins quatre zones d'ombre, représentées par quatre constantes d'ajustement :

- γ dans l'expression de la vitesse au centre de l'ouverture du silo (1.44). La valeur observée est $\gamma = 1.1$ [14].

- ν caractérise la courbure du profil de fraction volumique (1.43). Janda et al. observent que la valeur $1/\nu = 0.22$ ajuste aux mieux leur données. Une valeur similaire est obtenue par Alonso-Marroquin et al. ($1/\nu = 0.2 \pm 0.2$) [108].
- α et β sont les deux constantes de l'expression (1.45) qui caractérisent le phénomène de dilatance à la sortie. Benyamine et al. observent les valeurs de $\alpha = 0.80$ et $\beta = 0.085$ [107].

Plusieurs études récentes explorent l'influence de certains effets sur ces paramètres d'ajustement, comme la présence de cohésion dans le milieu granulaire [41] ou encore l'influence de l'angle du fond [107]. L'influence de la cohésion magnétique sur ces grandeurs d'ajustement sera étudiée au chapitre 4.

Écoulement dans le réservoir

L'écoulement à l'intérieur du silo a également fait l'objet de nombreuses études. En 1963, soit deux ans après l'article de Beverloo et al. [105], Litwiniszyn publie ses travaux portant sur la nature stochastique de l'écoulement à l'intérieur du réservoir du silo [12]. Il montre que pendant une certaine durée Δt les grains dans le réservoir du silo se déplacent d'une certaine hauteur $\Delta z(x)$, formant alors un profil de déplacement similaire à une forme gaussienne. La figure 1.39 montre les mêmes observations faites plus tard par Giunta en 1969 [109]. Elles sont également reproduites par Mullins en 1972 [110].

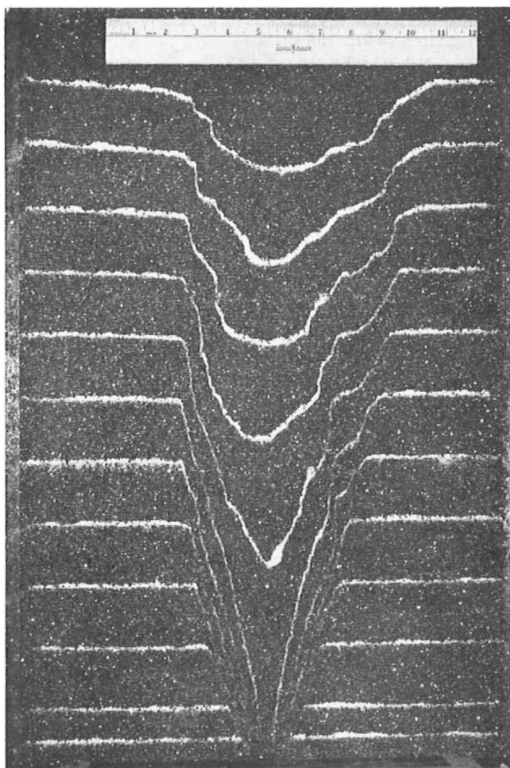


FIGURE 1.39 – Photographie du profil de déplacement pseudo-gaussien de lignes de particules blanches, lors de l'écoulement partiel d'un concentré de minerai de fer (figure extraite de [109]).

En 1979, Nedderman et Tüzün formalisent le **modèle cinématique**, donnant la forme des profils de vitesse dans le volume du silo [13]. Ce modèle repose sur deux hypothèses : le milieu est incompressible (1.48) et la vitesse horizontale v_x est directement proportionnelle au gradient horizontal de vitesse verticale (1.49), ce qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (1.48)$$

$$v_x = b \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (1.49)$$

où b est un coefficient de proportionnalité, homogène à une longueur, de l'ordre de quelques tailles de grain [95, 111, 112]. En notant Q le débit volumique, la solution à ce système d'équations prend la forme suivante :

$$v_x(x, y) = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi b y}} \frac{x}{2y} \exp\left(\frac{-x^2}{4by}\right), \quad (1.50)$$

$$v_y(x, y) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi b y}} \exp\left(\frac{-x^2}{4by}\right). \quad (1.51)$$

Ces expressions sont semi-empiriques ; bien qu'elles reposent sur une hypothèse de diffusion (1.49), l'interprétation du paramètre d'ajustement b n'est pas solidement construite. Dans leur étude de 2005, Choi et al. montrent qu'elles permettent néanmoins de prédire fidèlement la forme des profils de vitesse $v_y(x, y)$ dans le volume d'un silo [112]. Ces résultats sont confortés plus tard en 2019 par l'étude de Zuriguel et al. qui observent également un bon ajustement des profils de vitesse $v_x(x, y)$ avec la relation (1.50) [113].

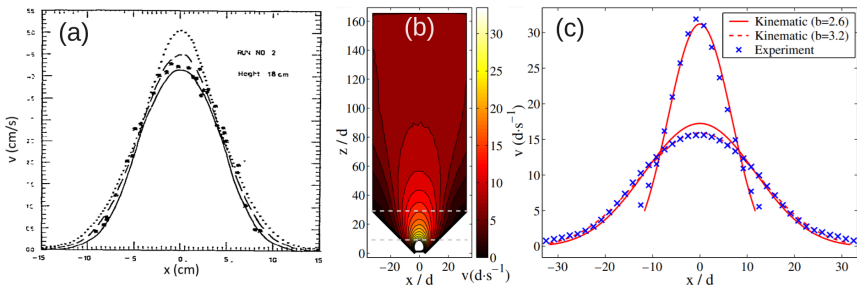


FIGURE 1.40 – (a) Profil de vitesse dans un silo à une hauteur de $h = 18$ cm (figure extraite de [13]). (b) Carte de vitesse de la vidange d'un silo 2D et (c) profils de vitesse pour deux hauteurs $h_1 = 9.1$ d et $h_2 = 29.1$ d (figures extraites de [112]).

Bien que b soit construite comme une longueur de diffusion, Medina et al. montrent en 1998 que celle-ci croît avec la position verticale y [111]. Aujourd’hui il n’y a pas encore d’explication sur cette évolution avec la hauteur dans le silo. Enfin en 2025, Hanif et al. montre que les profils d’écoulement de billes dans un silo quasi-2D peuvent être mieux ajustés en introduisant le **kurtosis** des distributions de vitesse $v_y(x)$, noté K [114] :

$$K = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{v_y - \bar{v}_y}{\sigma} \right)^4, \quad (1.52)$$

où n est le nombre de points formant le profil v_y , \bar{v}_y est la vitesse moyennée sur ces points à une hauteur y donnée et σ est l’écart-type correspondant. Ils montrent qu’au fond du silo, les profils de vitesse sont leptokurtiques, c’est-à-dire qu’ils sont plus piqués qu’une forme gaussienne ($K > 3$). En considérant des positions de plus en plus haut dans le silo, leurs résultats suggèrent que les distributions de vitesse $v_y(x)$ s’étalent de plus en plus. Elles deviennent progressivement platykurtiques ($K < 3$), c’est-à-dire qu’elles sont plus larges qu’une courbe gaussienne. Dans leur étude, les auteurs montrent que le kurtosis tend vers la valeur $K = 1.5$.

Le chapitre 3 portera sur l’étude de l’influence de la cristallisation sur l’écoulement dans le réservoir. Nous verrons que le processus de cristallisation influence significativement le paramètre b du modèle cinématique, ce qui nous permet de donner une nouvelle interprétation de ce dernier. De plus, le chapitre 4 abordera l’influence de la cohésion magnétique sur le modèle cinématique ainsi que sur le kurtosis des distributions de vitesse.

Le silo figure parmi les écoulements granulaires les plus **énigmatiques**. De nombreux aspects de ce type d’écoulement restent mal compris encore aujourd’hui :

- Malgré sa simplicité apparente et bien que de nombreuses expériences la confirment, la loi d’échelle pour le débit reste encore à ce jour **non-démontrée**.
- De nombreux phénomènes complexes peuvent survenir simultanément lors de la vidange de silo, comme les ondes internes en écoulement, le profil de pression atypique, la présence de cohésion, ou encore la formation d’arches au niveau de la sortie. Aucun cadre théorique ne permet de prédire ou modéliser fidèlement tous ces aspects en même temps.

Objectifs de la thèse

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre introductif, les interactions entre les particules d'un milieu granulaire peuvent être **diverses et multiples**. Bien que de nombreuses études aient exploré leurs effets sur la rhéologie des matériaux granulaires, de nombreuses questions restent ouvertes, et les connaissances actuelles demeurent partiellement complètes. Comment se manifeste précisément la triboélectrification dans les écoulements de grains, à l'échelle locale? Plus généralement, toutes les formes de cohésion évoquées précédemment ont-elles des effets similaires sur les écoulements granulaires, ou bien chaque type de cohésion engendre-t-il ses propres mécanismes spécifiques? Afin d'apporter des éléments de réponse à ces interrogations, cette thèse propose une étude expérimentale centrée sur les effets de la cohésion magnétique. Celle-ci présente l'avantage décisif d'être facilement **contrôlable** et sera étudiée dans le cadre d'un écoulement singulier et emblématique : la vidange de silo.

Comme évoqué à la dernière section de chapitre, la modélisation de l'écoulement lors de la vidange de silo figure parmi les problèmes les plus redoutables de la physique des milieux granulaires. Les nombreuses études qui s'y sont intéressées dressent de multiples approches à ce problème, sans dégager une description globale et cohérente de ces écoulements. Plusieurs questions fondamentales demeurent ainsi sans réponse : quel est le lien entre l'apparition d'arches au niveau de l'orifice, la présence d'ondes de pression responsables du *chant des silos*, et l'intermittence de l'écoulement? Quelles équations permettraient de prédire les profils de vitesse dans un tel milieu? Et surtout, malgré son apparente simplicité, quel est le fondement théorique de la loi de Beverloo?

En se plaçant à la frontière des connaissances actuelles, à la fois sur les milieux granulaires cohésifs et sur les écoulements en silo, ce travail de thèse prétend apporter des nouveaux éléments de réponse à toutes ces questions. Dans ce manuscrit, nous étudierons successivement plusieurs phénomènes associés à la vidange de silo, tel que la triboélectrification des grains, la cristallisation en écoulement, la canalisation du flux sous l'effet d'un champ magnétique, la formation d'arches instables à l'orifice, l'émergence d'ondes de force au cours de la vidange, la plasticité des milieux granulaires bidimensionnels, ainsi que la stratification de la structuration interne du milieu.

2) Dispositif expérimental

Ce deuxième chapitre se consacre à la description des méthodes expérimentales mises en œuvre dans le cadre de cette thèse pour étudier l'influence de la cohésion magnétique sur l'écoulement dans un silo. La première section détaille les dispositifs expérimentaux utilisés. La deuxième présente l'algorithme d'analyse des données, spécifiquement conçu pour étudier les phénomènes propres aux silos abordés dans le chapitre précédent. Enfin la dernière partie présente une analyse phénoménologique des effets électrostatiques dans le silo, réalisée dans le but de limiter leur influence sur l'écoulement.

Table des matières

2.1	Montage expérimental	72
2.1.1	Description du montage	72
2.1.2	Protocole expérimental d'une vidange	74
2.1.3	Champ magnétique externe	75
2.1.4	Milieu granulaire	76
2.1.5	Mesure du nombre de Bond magnétique	76
2.2	Algorithme d'analyse des données	80
2.2.1	Acquisition et traitement des images	80
2.2.2	Détection et suivi des particules	81
2.2.3	Mesures des grandeurs lagrangiennes	83
2.2.4	Méthode de la projection eulérienne	85
2.3	Effets électrostatiques	86
2.3.1	Cas A : Effets du protocole de décharge	88
2.3.2	Cas B : Cas favorable à la triboélectrification	91
2.3.3	Cas C : Effets de l'état d'usage des particules	92
2.3.4	Cas D : Effets des parois conductrices	93
	Conclusion	95

2.1 Montage expérimental

Tous les résultats présentés dans ce manuscrit de thèse sont centrés autour d'un seul montage expérimental : le silo quasi-2D. Le principe de ce dispositif a été introduit dans la section précédente 1.4.1. Des mesures complémentaires ont été également réalisées grâce à d'autres dispositifs, venant renforcer les observations des phénomènes concernant le silo.

2.1.1 Description du montage

Le dispositif expérimental consiste en une cavité de silo quasi bidimensionnelle (voir Fig. 2.2) développé principalement lors de la thèse d'Arthur Pascot [115]. Ses dimensions sont les suivantes : une hauteur H de 300 mm, une largeur L de 100 mm, et une profondeur W de 1.25 mm. L'ouverture inférieure D , de taille ajustable, peut varier de 6 mm à 24 mm. La faible profondeur du silo est conçue pour ne contenir qu'une seule couche de particules sphériques, typiquement de diamètre $d = 1$ mm. Le remplissage s'effectue à l'aide d'un entonnoir positionné au-dessus du réservoir, tandis que les grains s'écoulent par l'ouverture inférieure, pour être recueillis dans un récipient de collecte. Les parois avant et arrière de la cavité sont fabriquées en polycarbonate recouvert d'un revêtement conducteur, afin de limiter l'accumulation de charges électrostatiques dans le système.

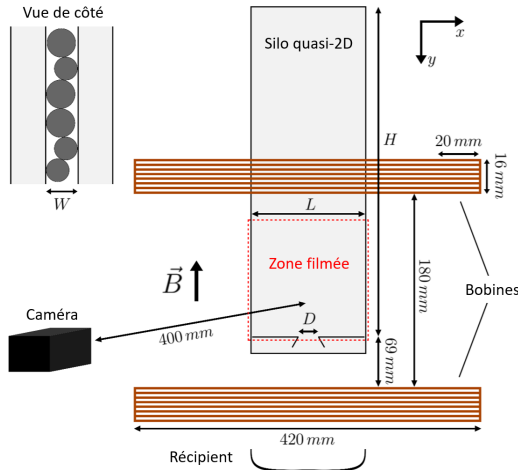


FIGURE 2.1 – Schéma du silo quasi-2D avec les bobines en configuration de Helmholtz créant un champ magnétique vertical uniforme dans la zone filmée.

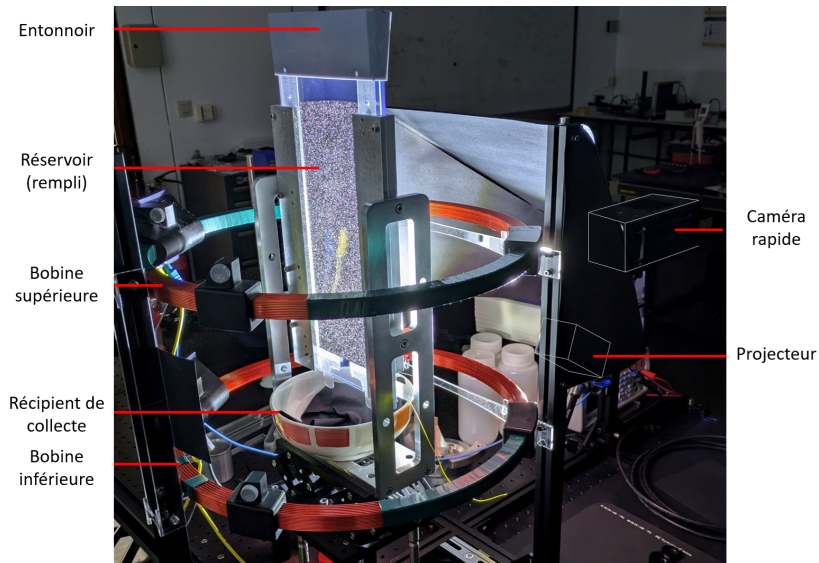


FIGURE 2.2 – Photographie du montage expérimental du silo quasi-2D utilisé dans le cadre de cette thèse. Le reflet des câbles d'alimentation jaune et bleu est visible sur la paroi arrière du silo, sans que cela n'altère la mesure.

Le silo est monté sur un support fixe posé sur une table optique à niveau. Une caméra rapide enregistre en temps réel l'écoulement des grains dans la cavité, en se concentrant sur la zone proche de l'orifice du silo (indiquée en rouge sur la Fig. 2.1). Cette caméra fonctionne à une fréquence d'acquisition de 2000 images par seconde. En raison du temps d'exposition très court du capteur ($498 \mu\text{s}$), un spot lumineux puissant est requis pour garantir une visibilité homogène des grains sur les images obtenues (voir Fig. 2.7). La mémoire interne de la caméra permet de stocker jusqu'à 3956 images au format maximal de 1024×1024 pixels par pixels, correspondant aux images d'un carré de taille réelle d'environ 10 cm par 10 cm. L'objectif utilisé est un modèle Navitar NMV-50M23 50 mm $F/2.8$, positionné à une distance de 40 cm de la cavité du silo. Les données sont transférées vers un ordinateur via une connexion réseau directe, une fois l'acquisition d'images lors de la vidange terminée.

2.1.2 Protocole expérimental d'une vidange

L'expérience principale consiste donc à observer l'écoulement lors de la phase stationnaire de la vidange du silo quasi-2D. Les étapes à suivre sont les suivantes :

- Régler l'alimentation des bobines à l'intensité de courant souhaitée avec le potentiomètre du générateur de courant continu,
- Faire l'acquisition d'une image du silo **vide**, nécessaire pour l'algorithme de traitement des images,
- Insérer un fil fin pour bloquer temporairement l'ouverture située au fond du silo,
- Positionner le récipient de collecte sous l'ouverture, en y plaçant au préalable un chiffon à lunettes pour amortir les rebonds des particules,
- Remplir le silo à l'aide d'un entonnoir et d'un petit récipient conducteur, en s'assurant qu'il est correctement relié à la terre pour éviter l'accumulation de charges électrostatiques lors du remplissage,
- Allumer le projecteur lumineux pour éclairer l'empilement,
- **Déclencher la vidange en retirant le fil bloquant l'ouverture**,
- Quelques instants plus tard (typiquement le temps de réaction humain), démarrer l'acquisition d'images par la caméra rapide,
- Une fois la vidange terminée, éteindre le projecteur, puis lancer le transfert des images depuis la mémoire tampon de la caméra vers l'ordinateur,
- Couper l'alimentation des bobines,
- Retirer le silo de son support afin de vider les particules restantes dans la cavité, notamment celles des zones mortes.

Les paramètres physiques modifiés au cours des expériences sont la taille de l'ouverture, notée D et l'intensité du champ magnétique $\|\mathbf{B}\|$. Pour chaque combinaison de ces paramètres, **cinq** vidanges successives sont réalisées. Un démontage et un nettoyage des parois du silo sont effectués toutes les cinq vidanges, afin de garantir la reproductibilité des conditions expérimentales.

2.1.3 Champ magnétique externe

Le silo est entouré d'un jeu de bobines parallèles disposées selon une configuration Helmholtz, c'est-à-dire que la distance entre elles est égale à leur rayon. Ces bobines, de diamètre extérieur 416 mm, sont positionnées horizontalement, de sorte à générer un champ magnétique purement vertical au centre de la zone filmée par la caméra. Elles sont alimentées par un générateur de courant continu, capable de fournir un courant maximal de 4 A. Un multimètre est utilisé pour vérifier la valeur du courant délivré par le générateur. En configuration de Helmholtz, la variation spatiale de l'intensité du champ magnétique dans la zone filmée n'excède pas 1.75%, comme le montre les mesures de l'intensité du champ magnétique, présentées dans la table 2.1.

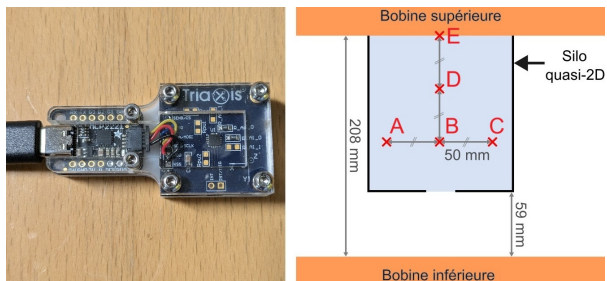


FIGURE 2.3 – (gauche) Magnétomètre tri axial permettant la mesure du champ magnétique. (droite) Schéma des points de mesure (représentés en rouge) pris pour l'estimation de l'homogénéité du champ magnétique.

I (A)	B (G)					Ecart-type (%)
	A	B	C	D	E	
0.0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.0
0.5	3.4	3.4	3.4	3.4	3.3	1.18
1.0	6.6	6.8	6.7	6.8	6.5	1.75
1.5	10.1	10.0	10.0	10.1	9.7	1.47
2.0	13.5	13.6	13.5	13.5	13.1	1.30
2.5	17.0	17.0	16.9	17.1	16.4	1.47
3.0	20.5	20.6	20.4	20.6	19.7	1.66

TABLE 2.1 – Mesures des valeurs d'intensité du champ magnétique vertical en fonction du courant d'alimentation des bobines pour les différentes positions dans l'espace A, B, C, D et E représentées sur la figure 2.3 droite.

2.1.4 Milieu granulaire

Dans cette thèse, nous utilisons principalement des billes de précision en acier chromé, conçues à l'origine pour des roulements à billes. Notre mélange est constitué de deux classes de diamètre : $d_{min} = 1.0$ mm et $d_{max} = 1.2$ mm. Un tamis de type filet est utilisé pour filtrer efficacement les particules selon leur taille, permettant ainsi de contrôler précisément la fraction massique du mélange, notée X_f , de chaque classe granulométrique dans le matériau. La possibilité d'ajuster la composition du mélange est essentielle pour l'étude et le contrôle du processus de cristallisation, évoqué dans le chapitre 3. D'autres particules ont également été utilisées, comme des billes en verre sphériques de taille variant entre 1 mm et 1.25 mm. En adaptant la largeur entre les parois W , il est également possible d'insérer des billes plus grosses dans le silo.

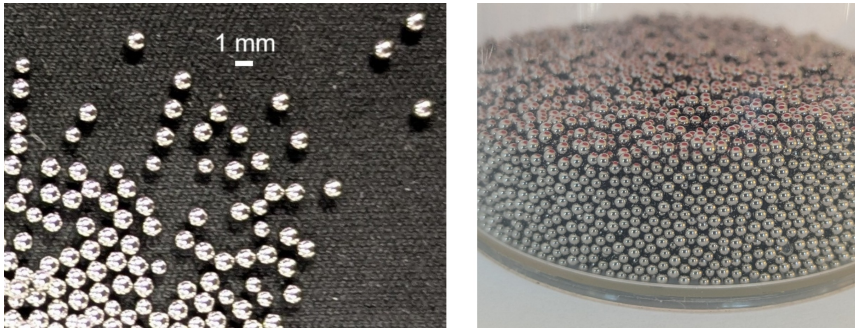


FIGURE 2.4 – (gauche) Billes en acier utilisées pour les expériences. (droite) Les mêmes billes en acier rangées dans leur récipient de stockage.

2.1.5 Mesure du nombre de Bond magnétique

Dans cette thèse, le nombre de Bond magnétique est défini comme le rapport entre la norme de la force magnétique maximale et celle du poids d'un grain. Cette force magnétique est proportionnelle au carré du courant d'alimentation des bobines I , d'où :

$$Bo = I^2 / I_{ref}^2. \quad (2.1)$$

Cette force correspond à l'interaction magnétique entre deux particules superposées dans un champ magnétique vertical. Le cas de référence $Bo = 1$ correspond à une particule fixe de diamètre $d = 1.2$ mm exerçant une

force attractive juste suffisante pour soutenir une seconde particule contre son poids. Ce cas est atteint lorsque le courant dans les bobines atteint la valeur critique I_{ref} , d'où la définition (2.1). Nous choisissons donc de mesurer expérimentalement ce courant de référence afin d'établir un nombre de Bond magnétique pour notre système. Pour cela, nous utilisons un dispositif imprimé en 3D, dont le schéma est représenté sur la figure 2.5 (a).

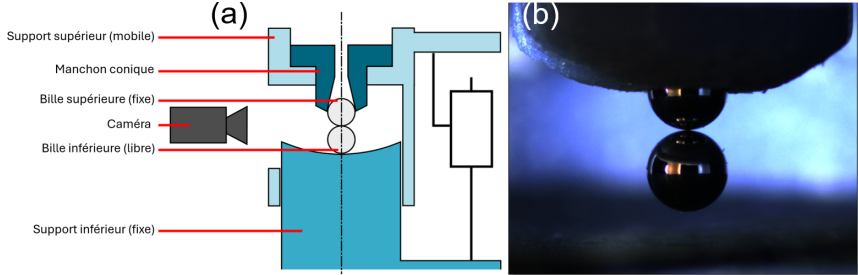


FIGURE 2.5 – (a) Schéma du dispositif développé pour la mesure du nombre de Bond magnétique. (b) Photographie d'une bille de diamètre $d_{max} = 1.2$ mm suspendue à une autre par la seule force d'attraction dipolaire magnétique.

Le dispositif est composé de deux supports, l'un fixe et l'autre mobile. Le support inférieur, fixe, est composé d'une surface incurvée, utile pour piéger une bille en son centre. Le support supérieur mobile est composé de deux parties dont l'une est amovible et qui correspond à un manchon conique utilisé pour maintenir une bille uniquement par serrage (voir Fig. 2.5 (b)). Celui-ci est emboîté dans le support supérieur, pouvant monter ou descendre grâce à une vis micrométrique. Une caméra permet de visualiser les billes avec une grande précision au niveau du contact. L'ensemble du dispositif est placé au milieu des deux bobines présentées précédemment. Le protocole de mesure est le suivant :

- Le champ magnétique vertical est initialement à une intensité de 13.5 G, en alimentant les bobines par un courant continu de 2 A.
- Une première bille en acier de diamètre $d = 1.2$ mm est posée sur le support inférieur à l'aide d'une pince en aluminium.
- En baissant le manchon au maximum grâce à la vis micrométrique, cette bille se fixe à l'intérieur du trou conique.
- Après avoir relevé le manchon, une autre bille est posée sur le support inférieur.

- Ensuite, le contact entre les billes est créé en abaissant progressivement le manchon : si le champ est suffisant alors la bille inférieure se soulève lorsqu'on relève le support mobile, sinon elle ne bouge pas.
- En diminuant l'intensité du champ magnétique, il est possible de trouver le champ minimal permettant de soulever une bille.
- Enfin un aimant permanent est utilisé pour enlever les deux billes du dispositif de mesure.

Cette étude a permis de mesurer l'intensité du courant de référence $I_{ref} = 1.48 \pm 0.06 \text{ A}$, ce qui correspond à un champ magnétique de $\|\mathbf{B}\|_{ref} = 10.2 \pm 0.4 \text{ G}$ pour un couple de billes dans les conditions expérimentales présentées. Le nombre de Bond magnétique correspondant est donc compris entre $Bo = 0$ et $Bo = 7.3$.

Ce protocole présente plusieurs **limitations**. Tout d'abord, le contrôle du champ magnétique manque de précision. Bien qu'un multimètre capable de mesurer le courant d'alimentation des bobines au milliampère près soit utilisé, le potentiomètre du générateur de courant continu reste très sensible, rendant difficile le réglage précis du courant. Ensuite, la vis micrométrique permet un ajustement très fin de la position relative des deux billes, mais les manipulations manuelles de l'expérimentateur peuvent introduire de légères vibrations. Ces perturbations, bien que minimes, peuvent suffire à faire décrocher une bille maintenue uniquement par la force magnétique. De plus, dans certains cas, même si cette force est suffisante pour maintenir la bille en équilibre sous une autre bille fixe, il peut être impossible de soulever correctement la bille inférieure à cause de ces vibrations incontrôlées. Enfin, les effets d'aimantation rémanente sont difficiles à caractériser, notamment l'orientation. C'est pourquoi la première étape du protocole favorise autant que possible le placement de l'orientation de l'aimantation résiduelle des billes dans le sens du champ magnétique externe vertical.

En se basant sur l'expression (1.11) discutée à la section 1.2.5, le nombre de Bond magnétique théorique peut s'écrire :

$$Bo = C \times \frac{\chi_m^2}{4\mu_0\rho g d} \|\mathbf{B}\|^2, \quad (2.2)$$

où $C = 22.5$ correspond à l'écart entre l'approximation dipolaire et le résultat du calcul en approximation multipolaire [77]. Sur la base de cette expression, il est possible d'estimer la valeur de susceptibilité magnétique χ_m pour les particules de notre système :

$$\chi_m = \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{\sqrt{4\mu_0\rho g d}}{\|B\|_{ref}}. \quad (2.3)$$

Sachant que la perméabilité magnétique du vide vaut $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A, que la masse volumique est $\rho = 7850$ kg/m³ et que l'accélération de la pesanteur est $g = 9.81$ m/s², la susceptibilité magnétique obtenue expérimentalement est $\chi_m = 0.045$ avec $C = 22.5$, valeur très inférieure à la valeur de référence $\chi_m = 3$ [78]. Cette incohérence reste inexplicée. Afin d'explorer ce point, nous avons mesuré l'angle de repos du milieu granulaire en fonction de l'intensité du champ magnétique¹, qui constitue la mesure de référence pour la quantification de la cohésion. La comparaison avec les résultats de la littérature montre que l'écart entre la force issue de l'approximation dipolaire et la force réellement observée est seulement d'un facteur $C = 7$, au lieu de $C = 22.5$. Avec $C = 7$ dans l'expression (2.2), nos mesures deviennent compatibles avec celles de Forsyth et al. [29] (voir Fig. 2.6). Cependant, la valeur de référence $\chi_m = 3$ n'est toujours pas retrouvée, l'application numérique conduisant à $\chi_m = 0.080$.

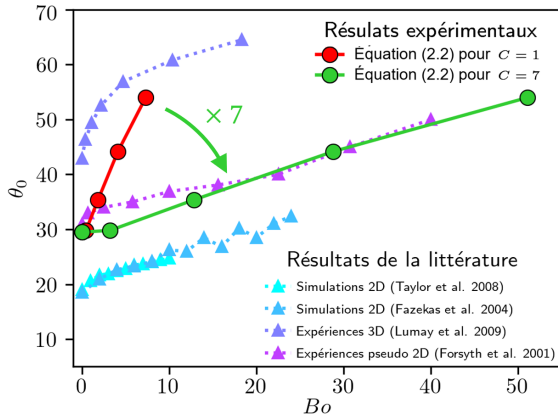


FIGURE 2.6 – Angle de repos en fonction de l'intensité de la cohésion magnétique.

Dans la suite du manuscrit, nous conservons la plage de nombre de Bond issue de l'expérience, entre $Bo = 0$ et $Bo = 7.3$. Il convient de souligner qu'avec cette définition, la cohésion magnétique est **surestimée d'un facteur 7** par rapport aux valeurs rapportées dans la littérature [29].

1. Le détail de la mesure sera présente plus loin, à la section 4.1.2 du chapitre 4.

2.2 Algorithme d'analyse des données

Pour chaque vidange, les données expérimentales se présentent sous la forme de séries d'images capturant le mouvement des particules à l'intérieur de la cavité du silo quasi-2D. Au cours de cette thèse, les différentes campagnes de mesures ont généré un total de 2.01 To d'images brutes. Le code initialement utilisé n'était plus adapté ni au nouveau montage expérimental, dépourvu de vibrations et doté d'une surface filmée plus large, ni à ce volume important de données [115]. Il a donc été nécessaire de concevoir un nouveau code d'analyse d'images capable de gérer efficacement ce très grand volume de données. Ce programme a été spécialement optimisé pour exploiter le calcul parallèle sur processeur à l'aide de la librairie `Joblib`, et a été écrit en langage `Python`, ce qui simplifie son utilisation et son déploiement sur plusieurs machines simultanément. L'analyse complète de l'ensemble des données requiert environ un mois et demi de calcul continu. Cette section décrit en détail les méthodes employées pour extraire les informations physiques du système expérimental présenté précédemment.

2.2.1 Acquisition et traitement des images

Chaque vidange donne lieu à l'acquisition d'une série de 3957 images, en niveaux de gris, au format `.tiff`, représentant un volume de données d'environ 3 Go. Une image initiale de la cavité vide est prise avant la vidange, afin de la soustraire aux images suivantes. Cette étape permet d'éliminer des éléments fixes tels que les parois latérales et inférieures, et d'éventuelles rayures présentes sur la paroi frontale du silo.

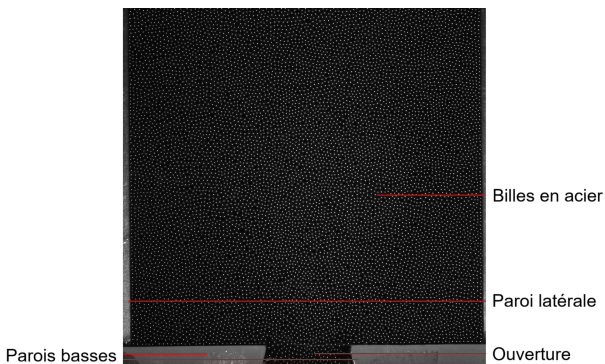


FIGURE 2.7 – Image complète capturée par la caméra rapide ($D = 24$ mm).

2.2.2 Détection et suivi des particules

Chaque image est représentée par une matrice d'intensité lumineuse I de dimensions 1024×1024 , où (x, y) désigne les coordonnées d'un élément de cette matrice, correspondant à un entier compris entre 0 et 255. Les particules apparaissent sous forme de points lumineux, centrés approximativement autour de leur centre géométrique (voir Fig. 2.8). Leur position initiale (x_p, y_p) est détectée en comparant deux images : (1) l'image binarisée ayant subi un flou gaussien et (2) la même image ayant subi une dilatation. Les pixels ayant les mêmes valeurs sur les deux images correspondent aux positions de particules.

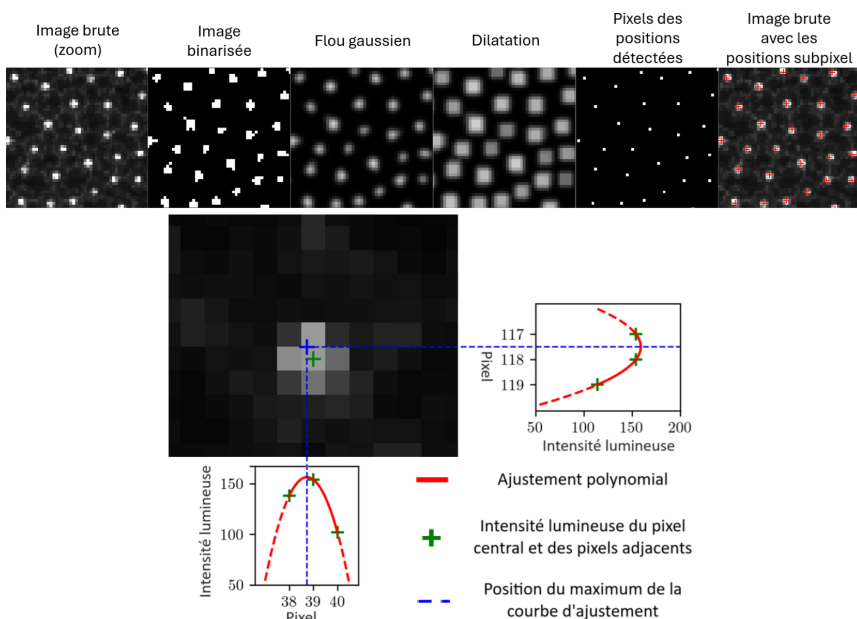


FIGURE 2.8 – (haut) Étapes successives de la détection de la position des particules. (bas) Exemple de l'application de la méthode subpixel pour le raffinement de la position d'un grain situé en $(x_p, y_p) = (39, 118)$, avec $(x_i, y_i) = (38.7, 117.5)$.

Cette détection est ensuite affinée par une méthode à résolution subpixel, basée sur l'ajustement d'un polynôme de degré deux à deux séries de trois points extraits autour de la position initiale : $S_x = \{I(x_p - 1, y_p), I(x_p, y_p), I(x_p + 1, y_p)\}$ et $S_y = \{I(x_p, y_p - 1), I(x_p, y_p), I(x_p, y_p + 1)\}$. La figure 2.8 illustre cette méthode. La position du maximum du polynôme

ajusté à la série S_x fournit la coordonnée subpixel selon l'axe x de la particule repérée en (x_p, y_p) . De manière analogue, le maximum du polynôme ajusté à la série S_y donne la coordonnée subpixel selon l'axe y . Ainsi, les nouvelles coordonnées instantanées de la particule i , notées (x_i, y_i) ont une meilleure précision que les anciennes (x_p, y_p) . Nous notons le vecteur position du grain i comme suit :

$$\mathbf{r}_i(t_n) = x_i(t_n) \mathbf{e}_x + y_i(t_n) \mathbf{e}_y. \quad (2.4)$$

L'intérêt de cette méthode usuelle est de valoriser davantage d'information contenue dans l'image, en tenant compte des quatre valeurs des pixels adjacents au pixel central où se trouve le centre de la particule a priori.

L'identification des particules entre deux images successives repose sur la comparaison de leurs positions détectées respectives. Un grain est considéré comme étant le même d'une image à l'autre si ses positions successives $\mathbf{r}_i(t_n)$ et $\mathbf{r}_i(t_n + \Delta t)$ sont suffisamment proches. La **condition d'identification** repose sur la **réciprocité** de proximité : la position $\mathbf{r}_i(t_n)$ doit être la plus proche de $\mathbf{r}_i(t_n + \Delta t)$, et réciproquement, $\mathbf{r}_i(t_n + \Delta t)$ doit être la plus proche de $\mathbf{r}_i(t_n)$. Cette comparaison est rendue efficace grâce à l'utilisation d'une structure de données en arbre k-dimensionnel, appliquée aux ensembles de positions détectées aux temps t_n et $t_n + \Delta t$. Lorsqu'une particule est détectée, un identifiant unique (un nombre entier) lui est attribué. Si cette particule n'est pas retrouvée à l'instant $t_n + \Delta t$, mais réapparaît au temps $t_n + 2\Delta t$, alors l'identifiant initial ne peut pas être conservé : un nouvel identifiant lui est assigné. La particule est alors considérée comme une nouvelle entité dans l'algorithme de suivi.

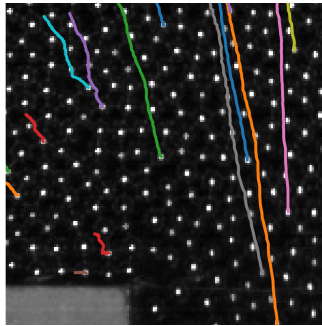


FIGURE 2.9 – Trajectoires de plusieurs particules proches de la sortie du silo quasi-2D.

2.2.3 Mesures des grandeurs lagrangiennes

Connaissant la trajectoire de chaque particule, il est possible de calculer leur vitesse et leur accélération instantanée en appliquant la méthode des différences finies, comme présenté dans la section 1.3.1, avec les paramètres $k_1 = 1$ et $k_2 = 15$ (voir équations (1.14) et (1.15)). La figure 2.10 représente les vecteurs vitesse \mathbf{v}_i et accélération \mathbf{a}_i de l'ensemble des particules détectées à un instant donné de l'écoulement.

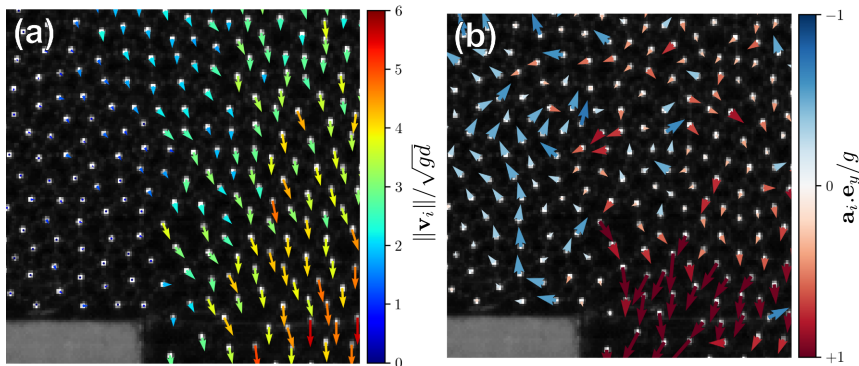


FIGURE 2.10 – Vecteurs (a) vitesse et (b) accélération instantanée des particules proches de la sortie du silo quasi-2D. Le vecteur \mathbf{e}_y est unitaire et dirigé vers le bas.

La tessellation de Voronoï permet d'associer à chaque particule un volume apparent. Il correspond au produit de la surface de la cellule de Voronoï S_v , estimée à l'aide de la formule de la surface de Gauss, et de l'espacement entre les parois avant et arrière W , tel que :

$$V_v = S_v \times W = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^{N_i} (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) \right| \times W \quad (2.5)$$

Expérimentalement, ce volume est calculé lorsque l'un des côtés de la cellule de Voronoï n'excède pas la valeur arbitraire de 22 pixels. La coordonnée d'une particule est ensuite estimée en comptant le nombre de côtés dont la taille est comprise entre 3 pixels et 22 pixels.

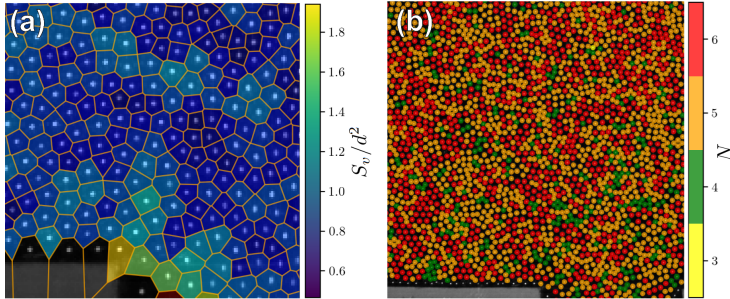


FIGURE 2.11 – (a) Exemple de diagramme de Voronoï, où les cellules sont colorées en fonction de la valeur de leur surface. (b) Estimation de la coordinnce d’un ensemble de particules proche de la sortie du silo quasi-2D.

Enfin, dès que le voisinage de chaque grain est connu, il devient possible de calculer les modules et arguments des paramètres d’ordre orientationnel, tel que ψ_4 , ψ_5 et ψ_6 , que nous discuterons en détail au chapitre 6.

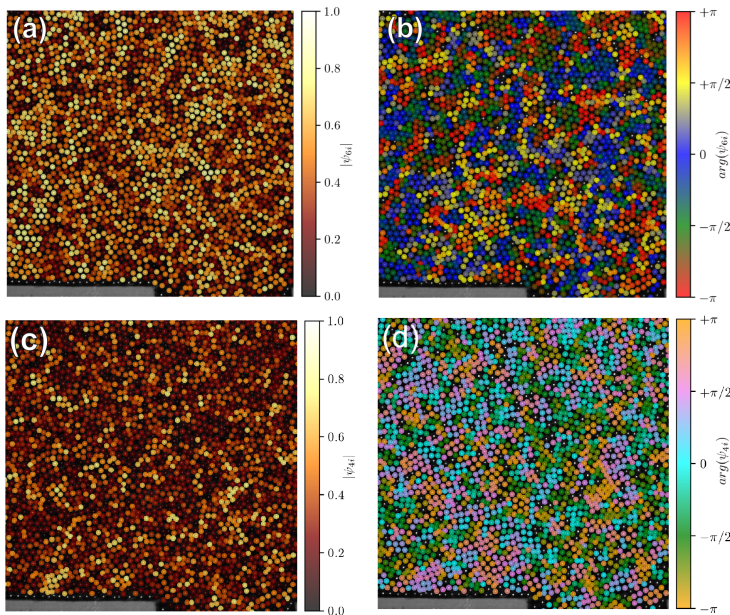


FIGURE 2.12 – Pour chaque particule : (a) module et (b) argument du nombre complexe ψ_{6i} ; (c) module et (d) argument du nombre complexe ψ_{4i} .

2.2.4 Méthode de la projection eulérienne

Le volume considéré pour l'homogénéisation correspond à un pavé de dimensions $d \times d \times W$. Puisque l'écoulement est stationnaire, un petit volume suffit à représenter la dynamique locale du système, car un grand nombre de particules, présentant un comportement similaire, peuvent le traverser. La grandeur eulérienne correspondante est obtenue par un calcul de moyenne pondérée par la fraction du volume de particules contenue dans la maille. Cette fraction est déterminée une seule fois à l'aide d'un algorithme de type Monte Carlo. Le principe est de tirer aléatoirement des points dans un cube de côté unitaire, centré en $(0, 0)$, et de compter le nombre de points inclus dans une boule centrée en (x, y) pour différentes valeurs de (x, y) . Connaissant la position du grain par rapport au centre de la maille, on peut alors estimer le volume de particules qu'elle renferme (voir Fig. 2.13). Une fois les champs eulériens instantanés obtenus, les moyennes temporelles sont ensuite calculées selon la formule (1.26).

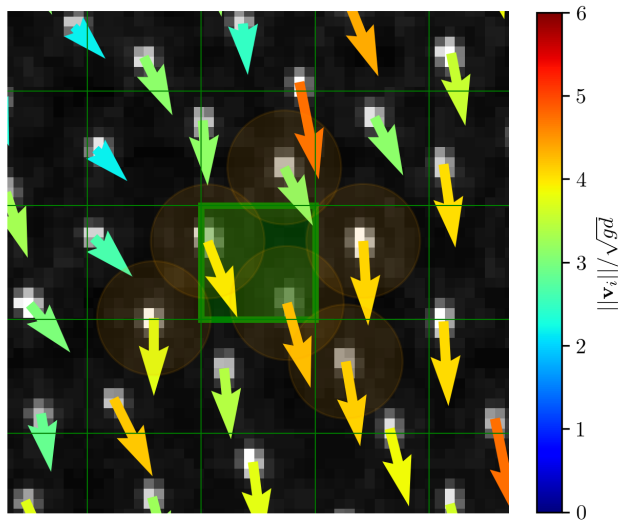


FIGURE 2.13 – Principe de la projection eulérienne appliquée au vitesse. Une maille de la grille eulérienne est représentée en verte au centre, et la taille moyenne des particules proches est représentée en orange. La vitesse de ces dernières est utilisée pour calculer la vitesse instantanée de la maille.

2.3 Effets électrostatiques

La triboélectrification, décrite à la section 1.2.2, apparaît dès que deux solides frottent l'un contre l'autre. Dans un silo quasi-2D, ce phénomène concerne toutes les particules, car chacune est en contact soit avec la paroi avant, soit avec la paroi arrière de la cavité. La ségrégation des charges électriques est particulièrement favorisée lorsque les grains et les parois sont constitués de matériaux différents, ce qui est souvent le cas en pratique. De plus, lorsque ces matériaux sont isolants, l'écoulement induit une répartition hétérogène des charges électriques, à la fois sur les parois avant et arrière du silo et sur les particules elles-mêmes, ce qui engendre **des interactions cohésives non contrôlées**.

Dans le cadre de cette thèse, une attention particulière a été portée à l'analyse de ce phénomène. L'objectif initial était de déterminer l'influence de la cohésion induite par la triboélectrification sur l'écoulement d'un milieu granulaire. Le silo quasi-2D constituait un dispositif idéal : le champ de contraintes y est à la fois complexe et riche, et sa géométrie bidimensionnelle permet de suivre individuellement chaque grain en écoulement. Cependant, nous avons rencontré une difficulté majeure concernant la reproductibilité des expériences, comme nous le verrons dans cette section. Celle-ci rassemble un ensemble de résultats préliminaires, souvent délicats à interpréter.

Dans notre étude, nous avons choisi de varier plusieurs paramètres susceptibles d'influencer la génération de charges électrostatiques dans le silo :

- **La nature des parois** : les parois du silo peuvent soit conduire les charges électriques en surface (polycarbonate (PC) revêtu d'un film conducteur), soit être isolantes (PMMA).
- **L'état de surface des grains** : les grains utilisés sont en verre. Des tests préliminaires ont révélé que des différences apparaissent dans les résultats, selon que l'on utilise des particules neuves ou des particules usées. (Les grains usées ont déjà servi à de nombreuses reprises pour un grand nombre d'écoulements dans différentes géométries.)
- **Déchargement électrique du silo** : un pistolet soufflant de l'air ionisé permet de neutraliser les charges électriques résiduelles dans la cavité du silo entre chaque vidange. Son efficacité est difficile à vérifier, bien qu'il s'agisse d'un équipement couramment utilisé.

Quatre analyses ont été conduites, nommées cas *A*, *B*, *C* et *D*. Le tableau 2.2 représente les conditions expérimentales dans lesquelles se sont déroulées chaque série d'expériences. L'ouverture du silo est fixée à $D = 10$ mm.

Cas	Parois	Décharge	Grains usés	HR (%)	T ($^{\circ}C$)
A	Isolantes	Oui	Oui	24%	21.5 $^{\circ}C$
B	Isolantes	Non	Oui	21%	21.5 $^{\circ}C$
C	Isolantes	Non	Non	22%	20 $^{\circ}C$
D	Conductrices	Non	Oui	25%	21 $^{\circ}C$

TABLE 2.2 – Tableau des conditions expérimentales explorées. Les colonnes HR et T sont respectivement l'humidité relative et la température de l'environnement.

Pour cette étude, les particules sortant du silo tombent dans une coupe de Faraday. Cet appareil permet de mesurer, à l'aide d'un électromètre, la quantité de charge présente dans la coupe, qui se comporte comme un condensateur. Lors d'une vidange, la **quantité de charge** accumulée dans la coupe, notée $Q_{\text{électrique}}$, est mesurée au cours du temps, à la fréquence de 100 Hz. Parallèlement, les mesures optiques de l'écoulement permettent d'acquérir la **vitesse au centre de l'ouverture du silo**, notée v_c , au cours du temps. La figure 2.14 représente une photographie du montage utilisé pour cette étude. Le silo est placé dans une chambre climatique, où l'humidité relative et la température sont contrôlées.

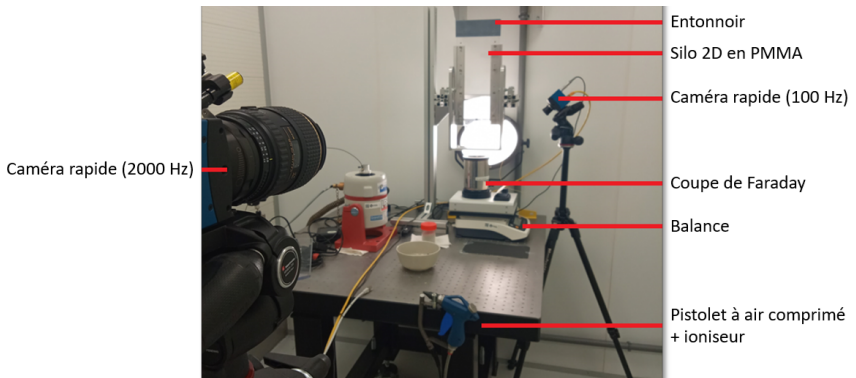


FIGURE 2.14 – Photographie du dispositif expérimental conçu pour l'étude des effets électrostatiques. La caméra rapide, opérant à 100 Hz, enregistre l'afficheur numérique de la coupe de Faraday, afin de mesurer la charge accumulée durant la vidange.

2.3.1 Cas A : Effets du protocole de décharge

La première campagne de mesures correspond à la réalisation de quatre vidanges successives de billes en verre usées dans un silo dont les parois sont **isolantes** (PMMA). La cavité du silo est **déchargée** entre chaque vidange en soufflant de l'air ionisé à l'intérieur pendant environ cinq secondes. Tout d'abord, la figure 2.15 (a) montre l'évolution de la vitesse v_c au cours du temps pour les différentes vidanges, nommées V01, V02, V03 et V04.

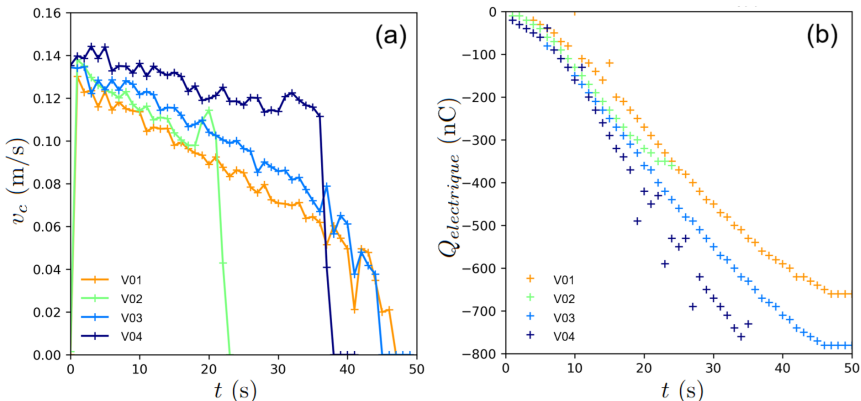


FIGURE 2.15 – Évolution de (a) la vitesse au centre de la sortie du silo v_c et de (b) la charge totale $Q_{\text{electrique}}$ cumulée par les grains sortis du silo. Les vidanges ont été réalisées dans l'ordre suivant : V01, V02, V03 et V04.

À chaque reprise, la vitesse v_c après déclenchement de la vidange est de $v_c \sim 0.13$ m/s, ce qui montre une reproductibilité des conditions de départ. En revanche, l'évolution temporelle varie d'une expérience à l'autre. Trois comportements distincts sont observés :

- Les vidanges V01 et V03 se terminent par un **blocage complet du silo**. Un bloc de grains consolidé se forme au dessus de l'ouverture, ce qui la bloque, comme le montre les photographies 2.16 (a) (pour la vidange V01) et 2.16 (c) (pour la vidange V03). La stabilité mécanique de ces agrégats est permise par les interactions attractives entre les parois avant et arrière du silo, chargées positivement, et les grains, chargés négativement en moyenne, comme le montre la figure 2.15 (b). Plus précisément, la figure 2.16 (d) représente l'image prise par la caméra rapide du bloc cohésif colmatant l'ouverture du silo pour V03. Celui-ci présente **deux microstructures filamen-**

teuses, montrant une répartition complexe des charges électriques dans le milieu. Des charges à la fois positives et négatives coexistent à la surface de certains grains, ce qui leur permet de former ces petites structures stables en forme de chaînes. Celles-ci sont également visibles sur la photographie 2.16 (a).

- Pour la vidange V02, la vidange s'arrête bien plus tôt que pour les vidanges V01 et V03, bien que la quantité de grains dans le silo soit la même. La raison est que l'entonnoir d'alimentation du silo quasi-2D, visible en bleu sur l'image 2.14, s'est bloqué à cause des interactions électrostatiques. Autrement dit, aucun agrégat n'a bloqué l'ouverture inférieure du silo durant la phase de vidange.
- Enfin, la vidange V04 ne s'est jamais bloquée : toutes les particules sont sorties du silo. Pourtant, il s'agit de la vidanges dont les particules ont accumulé le plus de charges électriques négatives, comme le montre la figure 2.15 (b).

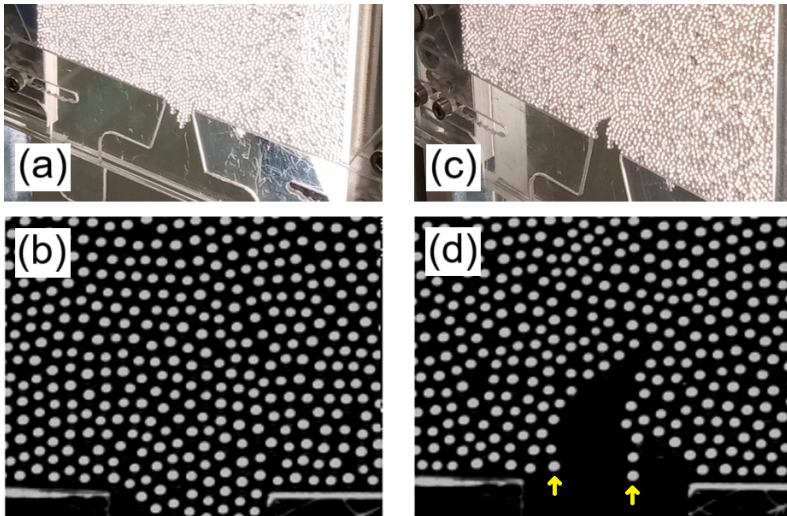


FIGURE 2.16 – Blocages du silo du à un agrégat de particules chargées pour (a,b) V01 et (c,d) V02. Les images (a) et (c) correspondent à des photographies du silo bloqué, alors que les images (b) et (d) correspondent aux images prises par la caméra rapide, qui filme l'écoulement. Les flèches jaunes montrent deux chaînes de grains suspendues.

La figure 2.15 (b) montre que la quantité de charges électriques accumulée par les grains lors de l'écoulement augmente de plus en plus au fur et à mesure de chaque vidange (en valeur absolue). Il n'y a donc pas de corrélation entre la quantité de charges observée et la survenue d'un blocage électrostatique. Pour une vidange donnée, le ralentissement de la vitesse v_c au cours du temps semble moins prononcé lorsque la charge électrique du milieu granulaire est plus importante. L'explication possible à cette observation est que la présence de charges négatives en plus grand nombre à la surface des grains limitent davantage la présence de charges positives à leur surface. Les interactions attractives entre particules, à l'origine des blocages pour les vidanges $V01$, $V02$ et $V03$ sont donc moins présentes et ont moins d'impact sur l'écoulement.

Enfin, nous remarquons que le signe négatif de la charge électrique mesurée est en contradiction avec la prédiction de la série triboélectrique 1.9. Pour interpréter cette observation, nous avançons l'hypothèse selon laquelle le mécanisme dominant de triboélectrification serait le transfert de matière entre les surfaces en contact (voir section 1.2.2 et Fig. 1.10 (c)). Concrètement, lors de l'écoulement, les grains en verre usent les parois en PMMA, c'est le phénomène d'attrition. Cette usure est mise en évidence par l'apparition, après plusieurs cycles de vidange, d'un dépôt blanchâtre près de l'orifice de sortie, là où la vitesse d'écoulement est maximale. Il est très probable que ce dépôt corresponde à des particules fines de PMMA arrachées aux parois. D'après la série triboélectrique, ces particules devraient être chargées négativement. Ainsi, pendant l'écoulement, les grains de verre, eux-mêmes porteurs de charges positives, peuvent capter et transporter ces fines particules de PMMA. En conséquence, lorsqu'ils sont recueillis dans la coupe de Faraday, ils y apportent non seulement leur propre charge mais également une fraction de cette poussière chargée négativement. Ce processus conduit alors à une mesure globale de charge qui devient négative, ce qui explique la contradiction apparente avec la série triboélectrique initiale.

Pour cette campagne de mesure, l'origine de la triboélectrification est donc très certainement les contacts frictionnels entre les grains et les parois isolantes du silo. Le protocole de décharge seul **ne permet pas de limiter l'apparition de charges électrostatiques** lors des vidanges, et celles-ci s'accumulent à la surface des grains au fil des expériences. Il est important de noter que **la cohésion électrostatique peut conduire au blocage d'un silo quasi-2D** lorsqu'elle n'est pas limitée.

2.3.2 Cas B : Cas favorable à la triboélectrification

La deuxième campagne de mesures correspond à la réalisation de cinq vidanges de billes en verre usées, avec le silo dont les parois sont **isolantes** (PMMA). Cette fois-ci, il n'y a pas de protocole de décharge entre les vidanges, car il ne semble pas avoir d'effet bénéfique pour garantir un écoulement constant. Bien que ces conditions expérimentales semblent être les plus propices à l'apparition d'effets électrostatiques, les mesures ne vont pas dans ce sens. La figure 2.17 (a) illustre l'évolution temporelle de v_c pour les vidanges V05, V06, V07, V08 et V09. Les profils observés sont identiques pour l'ensemble des vidanges réalisées dans ces conditions, contrairement au cas précédent. Un régime transitoire est observé pendant les dix premières secondes de chaque vidange. La vitesse au centre **augmente systématiquement vers la même valeur limite**, environ $v_c \sim 0.13$ m/s, identique à la vitesse initiale observée au cas précédent.

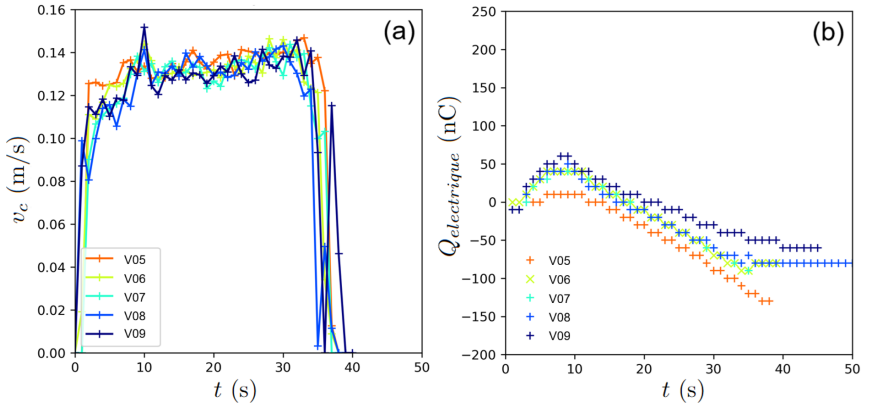


FIGURE 2.17 – Évolution de (a) la vitesse au centre de la sortie du silo v_c et de (b) la charge totale $Q_{\text{électrique}}$ cumulée par les grains sortis du silo. Les vidanges ont été réalisées dans l'ordre suivant : V05, V06, V07, V08 et V09.

Afin d'expliquer cette observation a priori déroutante, les mesures de charge électrique cumulée, représentées sur la figure 2.17 (b), nous donnent une information importante : contrairement au cas A, la charge mesurée au début de la vidange est **positive** et augmente jusqu'à un certain temps, qui coïncide avec la fin du régime transitoire de v_c (à t légèrement inférieur à $t \sim 10$ s). Ensuite, $Q_{\text{électrique}}$ baisse progressivement, et devient négatif. Au fur et à mesure des vidanges, la charge cumulée finale s'approche de plus en plus de $Q_{\text{électrique}} = 0$, ce qui montre que la quantité de

charges positives augmente dans le milieu granulaire, comme le prédit la série triboélectrique 1.9. Cependant, la non-reproductibilité des résultats rend difficile toutes explications supplémentaires à ces observations.

2.3.3 Cas C : Effets de l'état d'usage des particules

La troisième campagne de mesure correspond à la réalisation de quatre vidanges de billes en verre. Cette fois-ci, les billes sont **neuves**, c'est-à-dire qu'elles sont récupérées directement du contenant d'origine, placées dans un bac en verre dans un stockage climatisé, puis utilisées pour les expériences. Les parois du silo sont **isolantes** (PMMA) et il n'y a pas de protocole de décharge entre les vidanges, comme pour le cas précédent. La figure 2.18 (a) montre des profils de vitesse v_c qui décroissent au cours du temps. La valeur de vitesse initiale est $v_c \sim 0.13$ m/s pour V10, et baisse légèrement au fur et à mesure des vidanges, jusqu'à $v_c \sim 0.10$ m/s pour V13. Cela indique que la répartition initiale des charges électriques dans la cavité du système altère dès le départ la vidange du silo. Pourtant, au cas précédent, où aucun protocole de décharge n'était appliqué, ce comportement n'était pas observé. Il est donc très difficile d'interpréter ces résultats. D'autre part, la vidange se finit à chaque fois par un blocage du silo, à cause de structures cohésives de forme similaire à celles présentées précédemment. La cause de ces blocages semblent donc être la même qu'au cas A, bien qu'ils se produisent toujours ici.

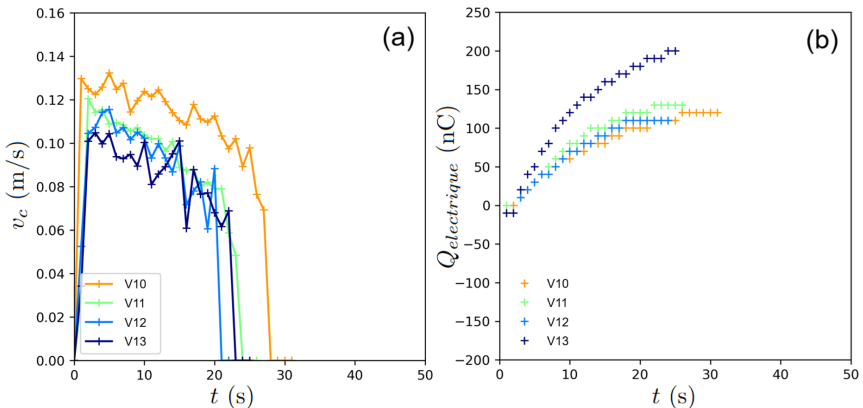


FIGURE 2.18 – Évolution de (a) la vitesse au centre de la sortie v_c et de (b) la charge totale cumulée $Q_{\text{electrique}}$ par les grains sortis du silo. Les vidanges ont été réalisées dans l'ordre suivant : V10, V11, V12 et V13.

La figure 2.18 (b) montre l'évolution de la charge cumulée $Q_{\text{électrique}}$ au cours de la vidange. Celle-ci est toujours positive contrairement au cas A et B, ce qui correspond à l'observation attendue d'après la série triboélectrique 1.9. Pour la dernière vidange V13, la charge $Q_{\text{électrique}}$ augmente beaucoup plus rapidement que pour les vidanges V010, V011 et V012, où la croissance est quasiment identique. Enfin, nous pouvons noter que la vitesse au centre v_c décroît plus rapidement que pour le cas A. Ici encore, toutes ces observations sont difficiles à interpréter.

2.3.4 Cas D : Effets des parois conductrices

La dernière campagne de mesures correspond à quatre vidanges successives sans protocole de décharge. Les parois avant et arrière de la cavité sont en polycarbonate, revêtues d'une fine couche conductrice, et les particules sont des billes de verre usées. La figure 2.19 (a) montre l'évolution de la vitesse au centre de l'ouverture v_c . Pour chaque vidange, la vitesse mesurée est **constante** et vaut $v_c \sim 0.11$ m/s. La légère différence avec la vitesse de référence ($v_c = 0.13$ m/s) peut s'expliquer par une incertitude sur le réglage de l'ouverture et par des propriétés de frottement différentes entre les parois en polycarbonate et en PMMA. Le **stationnarité de la vidange** est le comportement attendu en l'absence de cohésion. Enfin, les variations de vitesse au début et à la fin de chaque vidange sont abruptes, ce qui indique qu'aucun phénomène transitoire de plusieurs secondes

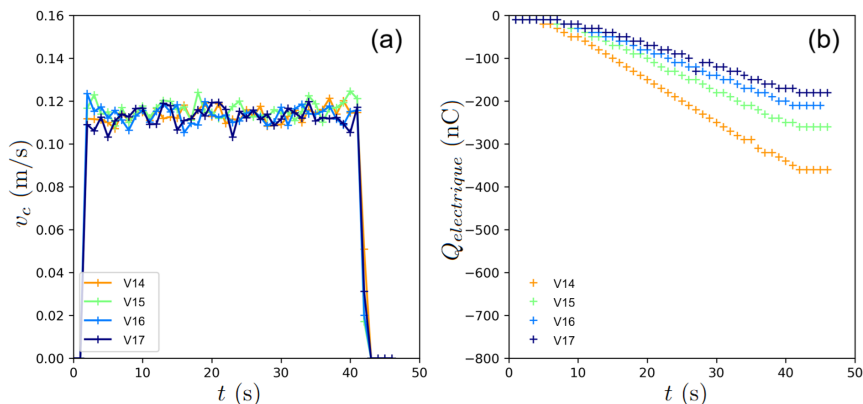


FIGURE 2.19 – Évolution de (a) la vitesse au centre de la sortie du silo v_c et de (b) la charge totale $Q_{\text{électrique}}$ cumulée par les grains sortis du silo. Les vidanges ont été réalisées dans l'ordre suivant : V01, V02, V03 et V04.

n'affecte la vitesse au centre de l'ouverture ni le débit.

L'évolution de la charge électrique totale des particules sorties du silo au cours du temps est représentée sur la figure 2.19 (b). Bien qu'aucun effet électrostatique ne soit observé sur la vitesse v_c , l'ensemble des particules récoltées dans la coupe de Faraday affiche systématiquement une **charge électrique totale négative**. A priori, cette observation entre en contradiction avec la série triboélectrique 1.9, qui prévoit que le verre se charge négativement en frottant contre la plupart des matériaux plastiques. Une hypothèse permet de résoudre ce paradoxe apparent. Elle repose sur l'observation des valeurs de charges finales accumulées à la fin de chaque vidange : celles-ci baissent en intensité au fur et à mesure de chaque vidange. Nous pouvons donc formuler l'hypothèse suivante : avant les quatre expériences, les billes de verre possédaient des charges résiduelles négatives du fait de leurs précédentes manipulations. En s'écoulant dans un silo quasi-2D chaque bille de verre se décharge progressivement en entrant en contact avec les parois conductrices avant ou arrière. Cette hypothèse est confortée par l'idée qu'il n'y a pas d'effet électrostatique visible sur la vitesse v_c , et donc qu'il est peu probable qu'une grande quantité de charges positives et négatives coexiste dans le milieu granulaire.

Nous pouvons conclure que l'utilisation de parois conductrices **sans protocole de décharge** permet d'observer des écoulements reproductibles, peu importe la quantité de charges résiduelles initiales des particules. Les effets cohésifs électrostatiques sont donc **limités** et n'influencent pas significativement la façon dont s'écoulent les grains dans le silo. Cela valide l'intérêt d'utiliser uniquement des parois conductrices sans autres précautions pour l'étude principale de cette thèse sur les effets cohésifs magnétiques.

L'étude expérimentale des effets liés à la **cohésion électrostatique** met en évidence **d'importantes difficultés à obtenir des résultats reproductibles**. Pour un même couple de matériaux, les billes peuvent se charger négativement (cas A et B) ou positivement (cas C), et une alternance du signe de la charge cumulée a même été observée (cas B). Ces résultats indiquent que les paramètres que nous avons choisis de faire varier ont une influence limitée sur le phénomène de triboélectrification, comparée à d'autres effets plus déterminants. Les expériences menées avec des parois isolantes confirment que les charges électriques se localisent majoritairement à la surface des matériaux. Si l'état de surface des parois peut être partiellement maîtrisé en les nettoyant, il reste très difficile de contrôler de façon équivalente la **surface spécifique très étendue d'un milieu granulaire isolant**. Les observations suggèrent que des charges électriques générées lors de manipulations antérieures des particules sont restées piégées à leur surface, et que la mise en écoulement constitue un moyen direct de redistribuer ces charges dans le système. Dans ce contexte, l'usage de **parois conductrices** se révèle particulièrement pertinent : il permet de neutraliser les charges accumulées dans le milieu granulaire (cas A). L'influence de l'**histoire** des grains et de la façon de les **stocker** apparaît ainsi comme un facteur déterminant du comportement électrostatique du système.

Conclusion

L'approche expérimentale développée au cours de cette thèse repose de manière centrale sur l'algorithme présenté dans ce chapitre. Cet outil constitue **le socle de la grande majorité des résultats originaux** qui seront analysés dans les quatre chapitres suivants. Grâce à cet algorithme, il est possible d'extraire une large diversité de grandeurs physiques pertinentes, permettant une description fine et cohérente de l'écoulement au sein du silo. Cette diversité des mesures offre une vision globale et riche de la dynamique de l'écoulement dans un silo bidimensionnel plongé dans un champ magnétique. En outre, le fait que toutes ces grandeurs soient obtenues simultanément et dans un même cadre expérimental autorise des comparaisons directes entre elles. Cette **cohérence méthodologique représente un atout essentiel** pour confronter et explorer le lien entre les différents modèles introduits dans le premier chapitre. Les résultats issus de cette approche sont présentés dans la suite de ce manuscrit.

3) Cristallisation en écoulement

L'écoulement dans un silo quasi-2D a largement été étudié au cours des dernières décennies, menant à la formulation de plusieurs modèles semi-empiriques fondés sur des paramètres simples, présentés à la section 1.4 du premier chapitre. Toutefois, ces modèles considèrent généralement un milieu granulaire **amorphe**, défini par une taille moyenne de particule, sans tenir compte de la présence éventuelle de structures cristallines. L'effet de la cristallisation sur les propriétés mécaniques du milieu et sur la validité de ces modèles reste donc encore mal compris et peu étudié. Ce chapitre constitue le premier apport original de cette thèse. Nous y examinons **l'influence de la cristallisation sur la vidange de silo quasi-2D** en l'absence de cohésion magnétique. La première section fait une description générale de l'écoulement dans le cas parfaitement bidisperse. La suivante présente les techniques permettant d'observer et de contrôler le processus de cristallisation. La troisième section analyse son impact sur les champs de vitesse, notamment dans le réservoir du silo. Enfin, la dernière section étudie la dynamique de la cristallisation durant la vidange et propose une interprétation des résultats en lien avec la littérature.

Table des matières

3.1	Description générale de l'écoulement	98
3.2	Mise en évidence de la cristallisation	100
3.2.1	Visualisation de la cristallisation	100
3.2.2	Contrôle du mélange	102
3.3	Effet de la cristallisation sur l'écoulement	106
3.3.1	Écoulement à la sortie	106
3.3.2	Écoulement dans le réservoir	108
3.4	Dynamique de la cristallisation	113
3.4.1	Dislocations locales	113
3.4.2	Relation entre diffusion et ordre structural	115
	Conclusion	117

3.1 Description générale de l'écoulement

Dans le réservoir du silo, la majorité des particules se déplacent progressivement vers la sortie sous l'effet exclusif de la pesanteur. L'écoulement étant stationnaire, les trajectoires individuelles des particules coïncident avec les lignes de courant, qui sont donc représentatives de la dynamique globale du système. Ces lignes sont illustrées dans la figure 3.1 (a), aux côtés du champ de vitesse eulérienne moyen $v(x, y)$ qui a permis leur calcul. La stationnarité implique qu'à toute position (x, y) , la vitesse moyenne mesurée dans le référentiel eulérien, $v(x, y)$, correspond à la vitesse typique des particules en ce point. La figure 3.1 (a) présente ce champ de vitesse pour la plus grande ouverture testée, $D = 24$ mm, soit environ $D \sim 22d$, correspondant au débit de vidange le plus élevé observé. Cela implique que les vitesses sont globalement comprises entre 0 et $5\sqrt{gd}$, où $\sqrt{gd} = 3.28$ m/s est la vitesse qu'atteindrait une particule chutant librement d'une hauteur équivalente au diamètre moyen $d = 1.1$ mm.

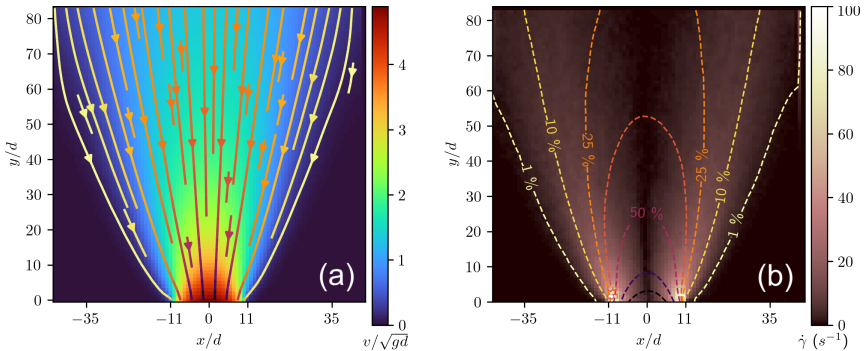


FIGURE 3.1 – (a) Vitesse eulérienne moyenne $v(x, y)$ des particules pour une ouverture de $D/d \sim 22$. Les lignes de courant y sont représentées. (b) Profil du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ associé (valeur absolue de la trace de $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}$), enrichi de plusieurs lignes de niveau du champ de vitesse, exprimées en pourcentage de la vitesse maximale mesurée au centre de l'ouverture $(x, y) = (0, 0)$.

La structure de l'écoulement est fortement **hétérogène**, en raison des conditions aux limites imposées par le système. Les parois du silo empêchent les particules de s'échapper en exerçant une réaction opposée à la pression du milieu granulaire. À l'inverse, l'ouverture située à la base du réservoir ne s'oppose pas au mouvement des grains, qui tombent alors sous leur propre poids. Cette configuration engendre une contrainte de cisaille-

ment **localisée**, particulièrement intense au voisinage des bords gauche et droit de l'ouverture. La figure 3.1 (b) montre le champ eulérien du taux de cisaillement, noté $\dot{\gamma}(x, y)$, obtenu par une méthode de différences finies. Il met en évidence deux zones où les taux de cisaillement atteignent un maximum, précisément aux bords de l'ouverture (en $x = \pm 11d$), avec des valeurs typiques autour de $\dot{\gamma} = 100 \text{ s}^{-1}$. Cette déformation locale du matériau est directement induite par la gravité. Au vu de cette structuration mécanique, l'écoulement peut être divisé en plusieurs zones, chacune caractérisée par des régimes distincts :

- **Zones mortes dynamiques** : Situées de part et d'autre de l'écoulement central, ces zones correspondent à des régions où les grains restent immobiles pendant la vidange, formant une **phase granulaire solide**. Elles apparaissent en bleu foncé sur la figure 3.1 (a). Deux lignes iso-vitesse correspondant à 1 % de la vitesse maximale (en jaune sur la figure 3.1 (b)) permettent d'en délimiter les contours de manière arbitraire.
- **Zone en écoulement dans le réservoir** : Ces mêmes lignes séparent les zones mortes de la zone centrale, où le matériau se comporte plutôt comme un **liquide granulaire**. Dans cette zone, les lignes iso-vitesse sont espacées, indiquant des gradients de vitesse relativement faibles (typiquement $\dot{\gamma} < 40 \text{ s}^{-1}$).
- **Zone en écoulement proche de l'ouverture** : C'est ici que les taux de cisaillement sont les plus élevés. Si les grains sont souvent en contact dans le réservoir, c'est bien à la sortie qu'ils deviennent libres de toute contrainte et tombent uniquement sous leur poids. Cette transition marque le passage d'un état liquide vers un **état gazeux**.

La coexistence des phases granulaires solide, liquide et gazeuse au sein d'un même écoulement illustre toute la complexité du comportement de ces matériaux. Cependant, comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, la distinction entre ces différentes phases granulaires s'avère plus subtile qu'il n'y paraît. L'étude du processus de cristallisation apporte en effet des éléments nouveaux permettant de mieux comprendre la transition entre l'état solide et l'état liquide granulaire, en révélant la nature **hexatique** du milieu granulaire en mouvement.

3.2 Mise en évidence de la cristallisation

La cristallisation **modifie la répartition des forces** au sein d'un milieu granulaire. Il est donc naturel de supposer que cette structuration particulière du réseau de contraintes internes peut influencer l'écoulement dans une cavité 2D. Dans cette deuxième section, nous montrons comment la cristallisation est mise en évidence par l'algorithme de mesure, et également la façon dont nous pouvons la contrôler expérimentalement.

3.2.1 Visualisation de la cristallisation

Le processus de cristallisation se manifeste souvent dans les systèmes quasi-bidimensionnels, y compris dans un silo quasi-2D. Lorsque la distribution en diamètre des grains est très resserrée, une **cristallisation locale** peut survenir, modifiant ainsi l'ordre orientationnel de la structure du matériau. Pour étudier ses effets, nous avons réalisé plusieurs séries de vidanges en faisant varier à chaque fois la fraction massique de particules en acier de diamètre $d_{min} = 1.0$ mm, notée X_f , dans un ensemble de particules de diamètre $d_{max} = 1.2$ mm. Les valeurs explorées sont comprises entre $X_f = 0$ (milieu constitué uniquement de particules de diamètre $d_{max} = 1.2$ mm) et $X_f = 1$ (milieu constitué uniquement de particules de diamètre $d_{min} = 1,0$ mm). L'omniprésence des particules de taille d_{max} lorsque $X_f < 1$ impose que la distance entre les parois avant et arrière du silo reste fixée à $W = 1.25$ mm. Le protocole expérimental correspond à celui présenté dans la section 2.1.2 du chapitre 2. L'ouverture du silo est de $D = 18$ mm pour toutes les expériences.

Sur la figure 3.2, les images (a-d) représentent des grains en écoulement pour différentes valeurs de fraction de mélange X_f , allant de $X_f = 0$ (monodisperse) à $X_f = 0.2$ (légèrement bidisperse). Les particules sont colorées en fonction de la valeur du module de leur paramètre d'ordre hexatique $|\psi_{6i}|$. Pour le cas $X_f = 0$, un gros bloc cristallin est visible au centre de l'image. Les particules le formant ont toutes un module $|\psi_{6i}|$ très élevé, indiquant une **conformation locale cristallisée**. Ce bloc est entouré de particules aux valeurs $|\psi_{6i}|$ bien plus faibles. Celles-ci se trouvent au sein de zones localement désordonnées. Lorsque la fraction en petites particules X_f augmente, la taille des blocs cristallins, notée ξ , diminue très rapidement. Pour $X_f = 0.2$, elle ne mesure plus que quelques diamètres de grain, et la structure du milieu granulaire 2D est globalement **amorphe**.

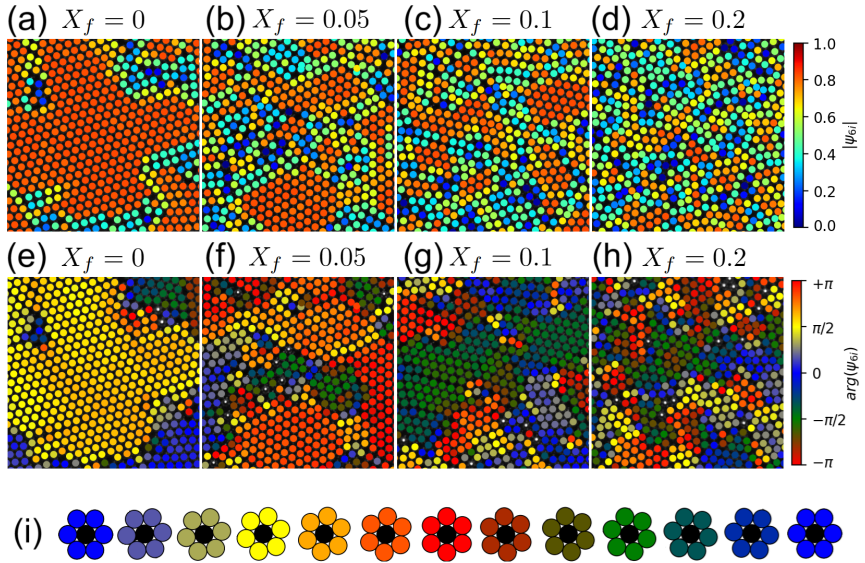


FIGURE 3.2 – Empilements de grains en écoulement. Sur les figures (a), (b), (c) et (d), les grains sont colorés en fonction de la valeur de leur module $|\psi_{6i}|$, avec (a) $X_f = 0$, (b) $X_f = 0.05$, (c) $X_f = 0.1$ et (d) $X_f = 0.2$. Sur les figures (e), (f), (g) et (h), les grains sont colorés en fonction de la valeur de leur argument $\arg(\psi_{6i})$, avec (e) $X_f = 0$, (f) $X_f = 0.05$, (g) $X_f = 0.1$ et (h) $X_f = 0.2$. La figure (i) rappelle le code couleur utilisé pour la représentation des structures hexatiques observables.

Les images (e-h) de la figure 3.2 montrent les mêmes grains en écoulement, colorés cette fois-ci en fonction de la valeur de leur argument $\arg(\psi_{6i})$. La frise 3.2 (i) illustre la correspondance entre l'orientation des phases hexatiques et le code couleur utilisé dans ce manuscrit. Cette représentation permet d'identifier clairement les directions denses au sein des zones cristallisées. Par exemple, sur l'image correspondant à $X_f = 0$, le gros bloc cristallin au centre est majoritairement constitué de particules colorées en jaune, ce qui indique un argument de $\pi/2$ dans le plan complexe. Cette orientation correspond aux trois directions denses réelles suivantes : $\pi/12$, $5\pi/12$ et $9\pi/12$. En plus de caractériser l'intensité de la cristallisation à travers la mesure de $|\psi_{6i}|$, nous pouvons donc également mesurer **l'orientation locale des grains au cours de l'écoulement**. Cette approche sera développée plus en profondeur dans le dernier chapitre de cette thèse.

3.2.2 Contrôle du mélange

En pratique, chaque mélange de grain est préparé à l'avance à l'aide d'un tamis et d'une balance, permettant de contrôler précisément la fraction massique en particules de chaque classe de diamètre. Ensuite, au cours de la vidange, il est possible de vérifier la proportion en chaque espèce dans la préparation en mesurant la distribution statistique du volume de Voronoï de toutes les particules. Celui-ci, noté V_v , correspond au produit de la surface de la cellule de Voronoï d'une particule, notée S_v , par l'espacement W , tel que $V_v = S_v \times W$. La figure 3.3 représente la distribution des volumes de Voronoï pour l'ensemble des valeurs de fractions de mélange explorées. Les valeurs de V_v sont normalisées par $d = 1.1$ mm élevé au cube, la taille de référence des particules quel que soit X_f .

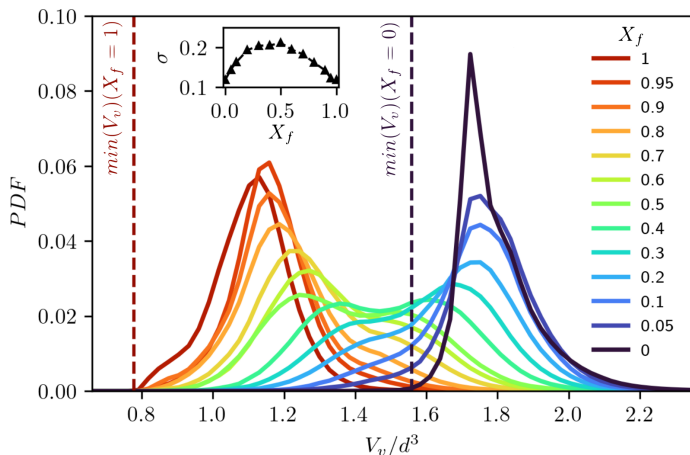


FIGURE 3.3 – Distributions des volumes de Voronoï des grains V_v (PDF) pour différentes fractions de mélange X_f . Les lignes en tirets correspondent aux seuils minimaux de V_v dans les cas $X_f = 0$ (en bleu) et $X_f = 1$ (en rouge). (insert) Évolution de l'écart-type des distributions σ en fonction de la fraction de mélange X_f .

Dans le cas monodisperse ($X_f = 0$), seuls les gros grains sont présents dans l'empilement, et la distribution présente **un pic net**. À mesure que X_f augmente, un second pic apparaît pour des volumes inférieurs, indiquant l'introduction de grains plus petits. La distribution globale s'élargit, atteignant son étalement maximal autour de $X_f = 0.5$, puis se resserre à nouveau pour des valeurs de X_f plus élevées, comme le confirme l'écart-type σ représenté en insert. À $X_f = 1$, lorsque seules les petites particules sont présentes, des domaines cristallins réapparaissent. Le pic reste néan-

moins **plus large** que dans le cas $X_f = 0$ à cause du confinement limité imposé par la taille maximale des particules.

Sensibilité de la mesure

Les schémas 3.4 (a) et (b) représentent respectivement une coupe et une vue de face du cas idéal, où tous les grains sont contenus dans un seul plan d'observation $z = 0$. Notre système s'en approche le plus lorsque $X_f = 0$, avec $W/d \approx 1.04$. La cristallisation est alors **fortement facilitée**, et la cellule de Voronoï d'une particule forme un hexagone quasiment parfait de hauteur d . Nous en déduisons la valeur minimale $\min(V_v)(X_f = 0)$ mesurable :

$$\min(V_v)(X_f = 0) = \sqrt{3}/2 \times W d^2, \quad (3.1)$$

où $S_v = \sqrt{3}/2 \times d^2$ correspond à la surface de l'hexagone représenté en orange sur la figure 3.4 (b), et W est la profondeur de la cellule (voir Fig. 3.4 (a)). L'application numérique donne $\min(V_v)(X_f = 0) = 1.559 \text{ mm}^3$, avec $d = 1.2 \text{ mm}$ et $W = 1.25 \text{ mm}$. Sur la figure 3.3, nous observons effectivement que la très grande majorité des valeurs de V_v se trouve supérieure à ce seuil pour $X_f = 0$, ce qui valide **la précision de la mesure dans ces conditions**.

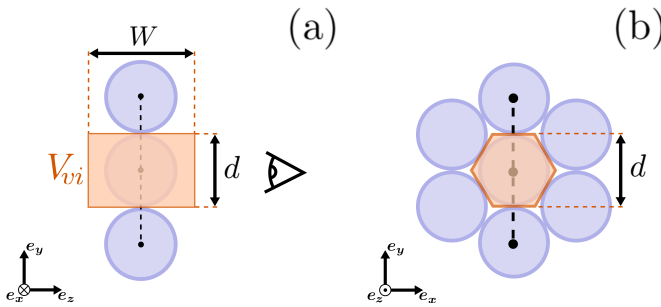


FIGURE 3.4 – Schéma de l'empilement idéal (a) en vue de profil et (b) en vue de face. La cellule de Voronoï du grain central est représentée en orange sur les deux schémas.

Contrairement aux grosses particules, les petits grains peuvent se recouvrir légèrement dans le plan d'observation (x, y) , comme l'illustre le schéma 3.5 (a). Ils forment alors un angle de contact non nul dans le plan (y, z) , noté α et pouvant mesurer au maximum $\alpha = \arcsin(W/d - 1)$. Ce nouvel arrangement géométrique limite l'apparition de blocs cristallins dans le

milieu, ce qui confirme l'observation d'une distribution plus large pour $X_f = 1$ que pour $X_f = 0$. Le schéma 3.5 (b) représente alors la nouvelle plus petite surface de Voronoï observable, correspondant à un hexagone équilatéral de hauteur d' .

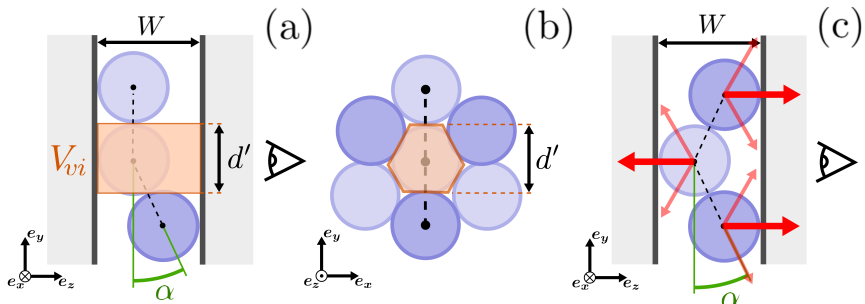


FIGURE 3.5 – Schéma d'un empilement réel (a) en vue de profil et (b) en vue de face. Le schéma (c) illustre l'apparition d'une contrainte de pression s'exerçant sur les parois avant et arrière de la cavité 2D. La cellule de Voronoï du grain central est représentée en orange sur les schémas (a) et (b), alors que les parois avant et arrière sont représentées en gris sur les schémas (a) et (c). Les particules légèrement plus foncées se trouvent dans un plan $z > 0$, alors que les particules claires sont dans le plan $z = 0$. Sur le schéma (c), les flèches rouges représentent les forces de pression exercées par les grains sur les parois, en l'absence de frottement.

En considérant que le diamètre apparent de la particule centrale d' reste proche de d , le nouveau volume minimal peut alors être approximé par la formule suivante :

$$\min(V_v)(X_f = 1) \approx \sqrt{3}/2 \times W d'^2. \quad (3.2)$$

On peut l'exprimer en fonction de d connaissant l'angle de contact maximal α entre les particules, tel que :

$$d' = d \times \sqrt{1 - \left(\frac{W}{d} - 1\right)^2}. \quad (3.3)$$

La présence d'un angle de contact α non-nul induit un effet supplémentaire qui perturbe davantage la mesure. Les forces exercées entre particules engendrent une **pression dans la direction z** , comme l'illustre le schéma 3.5 (c). Cette contrainte appuie sur les parois avant et arrière, ce qui **augmente légèrement la valeur effective de W** . Nous observons qu'avec un accroissement de 22%, cela conduit à un volume minimal de $\min(V_v)(X_f = 1) \approx 0.778 \text{ mm}^3$, qui correspond bien au seuil en dessous

duquel aucune valeur de V_v n'est mesurée pour $X_f = 1$ (voir Fig. 3.3).

La figure 3.6 (a) présente les distributions des volumes de Voronoï, normalisées cette fois-ci par le diamètre effectif, noté d_e et défini comme la moyenne pondérée des diamètres :

$$d_e = d_{min} X_f + d_{max} (1 - X_f). \quad (3.4)$$

Les distributions sont bien plus rapprochées qu'à la figure précédente 3.3 **sans se superposer parfaitement**. La figure 3.6 (b) représente l'évolution de la valeur médiane des distributions avec la fraction de mélange. Nous observons une croissance légère entre $X_f = 0$ et $X_f = 0.2$, qui correspond à une diminution de la compacité du milieu au fur et à mesure que la cristallisation s'y estompe (Fig. 3.2). Au delà de $X_f = 0.2$, la valeur médiane des distributions chute progressivement, ce qui révèle l'influence des effets parasites sur la mesure des volumes de Voronoï.

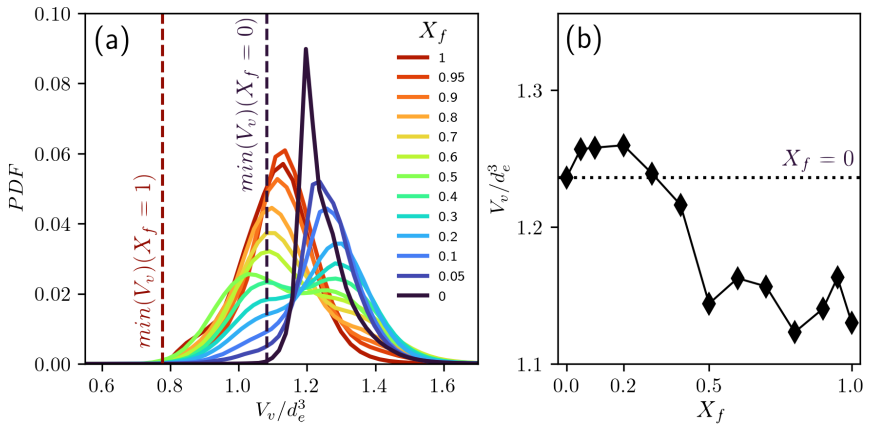


FIGURE 3.6 – (a) Distributions des volumes de Voronoï normalisés V_v/d_e^3 pour différentes fractions de mélange X_f . (b) Évolution de la médiane des distributions en fonction de X_f .

Dans la suite de ce chapitre, nous continuerons d'analyser les données pour l'ensemble des valeurs de X_f explorées, malgré l'imprécision des mesures quand $X_f \rightarrow 1$. Cependant, plutôt que d_e , nous choisissons $d = 1.1$ mm comme échelle caractéristique de notre milieu granulaire. Nous évaluerons donc seulement les **effets globaux** de la cristallisation sur l'écoulement.

3.3 Effet de la cristallisation sur l'écoulement

La distribution des volumes de Voronoï pour $X_f = 0.5$ n'est pas une simple combinaison des distributions pour $X_f = 0$ et $X_f = 1$, ce qui suggère que les grains sont bien mélangés dans le milieu et que la dynamique de ségrégation est négligeable devant la dynamique de l'écoulement. Il n'est donc pas nécessaire de modifier l'intensité de l'écoulement pour maîtriser la dispersion, contrairement à d'autres écoulements à surface libre, où la ségrégation peut être très importante [117]. La taille de l'ouverture du silo est donc fixée à $D = 18$ mm, et l'apparition de la cristallisation peut alors être contrôlée uniquement par le choix de la fraction de mélange X_f . Cette section examine son influence sur les champs de vitesse en l'absence de cohésion.

3.3.1 Écoulement à la sortie

Les profils de vitesse et compacité à l'ouverture sont représentés sur les figures 3.7 (a) et (b) respectivement. Nous observons que la dispersion en taille des grains **ne modifie pas** la forme en arc de cercle des profils de vitesse, ce qui confirme les observations de précédentes études [14, 118]. De la même façon, les profils de compacité ne changent pas de forme lorsque X_f varie.

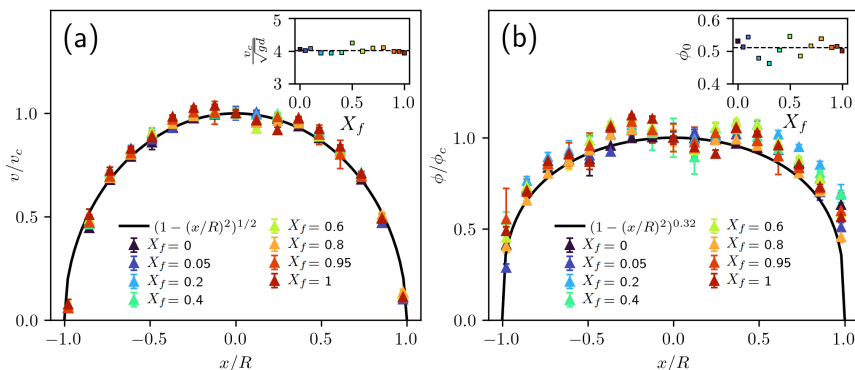


FIGURE 3.7 – Profils moyens de (a) vitesse v/v_c et (b) compacité ϕ/ϕ_c normalisée pour différentes valeurs de fraction de mélange X_f . L'insert de la figure (a) représente l'évolution de la vitesse v_c en fonction de X_f , alors que l'insert de la figure (b) représente l'évolution de la compacité ϕ_c .

Les relations (1.42) et (1.43) s'ajustent donc très bien aux mesures, et nous trouvons $1/\nu = 0.32$ pour le profil ϕ/ϕ_c . Nous observons également que la vitesse au centre de la sortie varie peu avec X_f , comme le montre l'insert de la figure 3.7 (a). La compacité au centre de l'ouverture ne varie pas non plus significativement avec X_f (insert de la figure 3.7 (b)). La précision de notre méthode ne permet donc pas de retrouver la faible variation de débit observée dans [107] et [118].

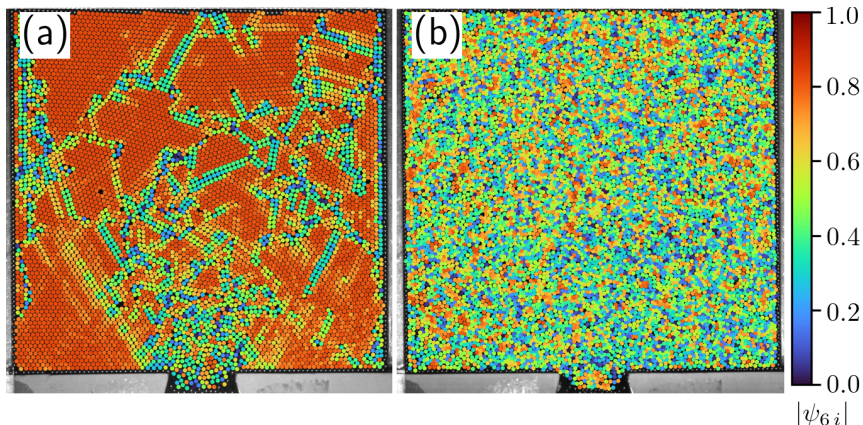


FIGURE 3.8 – Champs lagrangiens instantanés $|\psi_{6i}|$ sur l'ensemble de la zone filmée par la caméra rapide, pour (a) $X_f = 0$ et (b) $X_f = 0.5$.

L'absence de dépendance significative des profils vis-à-vis de X_f indique que la dispersion en taille des particules a **très peu d'influence** sur l'écoulement proche de la sortie. La figure 3.8 compare les champs instantanés $|\psi_{6i}|$ dans le cas monodisperse (a) et bidisperse (b). Elle montre que le milieu granulaire est **fortement désordonné** à proximité immédiate de l'ouverture, même lorsque $X_f = 0$. Cette observation s'explique par la forte dilatation du milieu dans cette région, où les contacts entre particules sont réduits à des **collisions brèves**. Dans un tel régime, aucune chaîne de force stable ne peut se développer, et la dispersion en tailles, qui n'affecte que leur géométrie, reste donc sans effet sur l'écoulement. En revanche, dans des zones plus denses où des structures durables peuvent émerger et favoriser la cristallisation, l'influence de la distribution des tailles devient plus significative, comme nous le verrons par la suite.

3.3.2 Écoulement dans le réservoir

La figure 3.9 illustre les profils de vitesse normalisée $v_y/v_y(x=0)$, en haut de la zone filmée, en $y/d = 83$, pour différentes valeurs de X_f . Les courbes sont réparties sur deux figures pour une meilleure lisibilité, avec $X_f \leq 0.5$ d'un côté (a) et $X_f \geq 0.5$ de l'autre (b). Pour la majorité des cas, nous retrouvons des profils de vitesse similaires aux courbes de fonctions gaussiennes. Néanmoins, lorsque la cristallisation se manifeste, c'est à dire surtout pour $X_f \leq 0.2$ et $X_f \geq 0.9$, les profils sont **légèrement plus étalés**. Plus spécifiquement, pour $X_f = 0$, le profil de vitesse peut même se décomposer en une composante constante, notée \bar{v}_y , qui s'ajoute à la composante gaussienne, dont l'origine a déjà été établie précédemment (section 1.4.3). Bien que l'étude de Tüzün et al. de 1979 présente la mesure d'un profil de vitesse similaire dans le réservoir d'un silo pseudo 2D, aucune interprétation sur cette forme particulière n'a été discutée [119].

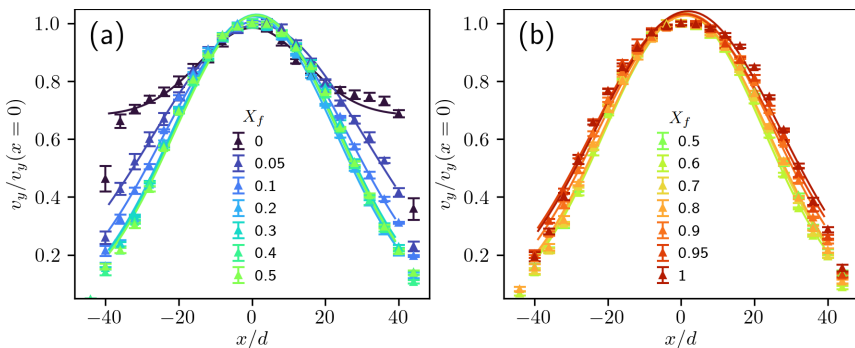


FIGURE 3.9 – Profils de vitesse normalisés $v_y/v_y(x=0)$ pour (a) $X_f \leq 0.5$ et (b) $X_f \geq 0.5$ pour $y/d = 83$. Les lignes pleines correspondent à l'ajustement de l'équation (3.5).

Nous ajustons alors l'ensemble des profils de vitesse par une version modifiée de l'expression (1.51), issue du modèle cinématique :

$$v_y(x, y) = \bar{v}_y + \frac{Q - L\bar{v}_y}{\sqrt{4\pi by}} \exp\left(\frac{-x^2}{4by}\right), \quad (3.5)$$

où L correspond à la largeur du silo et Q correspond au débit volumique à deux dimensions (exprimé en m^2/s). Dans ce modèle, le terme proportionnel à $Q - L\bar{v}_y$ est relié au mécanisme de diffusion de la vitesse, alors

que l'ajout de \bar{v}_y est associée au comportement solide du milieu granulaire, non pris en compte dans le modèle initial. Cette nouvelle expression s'ajuste correctement aux données expérimentales, et décrit à la fois **l'étalement des profils de vitesse** et l'apparition d'une **vitesse bouchon** dans la partie supérieure du réservoir. La longueur de diffusion b permet de quantifier l'élargissement des profils de vitesse. La figure 3.10 illustre l'évolution de ce paramètre en fonction de la hauteur dans le silo, pour toutes les fractions de mélange explorées.

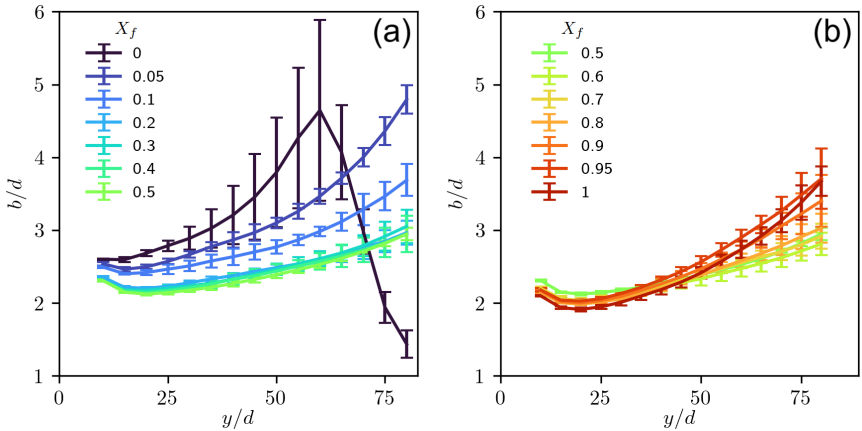


FIGURE 3.10 – Évolution de la longueur de diffusion b/d en fonction de la hauteur y/d dans le réservoir pour (a) $X_f \leq 0.5$ et (b) $X_f \geq 0.5$.

Tout d'abord, nous observons que **b augmente systématiquement avec la hauteur** dans le réservoir. Cette tendance est cohérente avec les observations de Medina et al., qui ont étudié la vidange d'un milieu granulaire monodisperse, dans des conditions où le rapport d'aspect entre l'espace du silo et la taille des particules correspond à notre cas $X_f = 1$ [111]. Nous retrouvons alors les mêmes valeurs que dans leur étude, comprises entre $b/d = 2$ et $b/d = 4$. Nos résultats montrent également qu'à une hauteur y/d donnée, la **cristallisation augmente la longueur de diffusion b** . Cet effet est observé à la fois pour $X_f \leq 0.2$ et $X_f \geq 0.9$. De plus, la croissance de b avec la hauteur dans le réservoir est plus forte lorsque le milieu granulaire cristallise. Pour mieux comprendre l'origine physique de la variation de b avec X_f et la hauteur y/d , nous pouvons nous appuyer sur la vue schématique des paysages énergétiques des structures locales, représentée sur la figure 3.11 dans le cas monodisperse (a) et bidisperse

(b). Dans un premier temps, nous discutons de la façon dont la fraction de mélange modifie b , puis nous nous pencherons sur la compréhension de la croissance de b avec y/d .

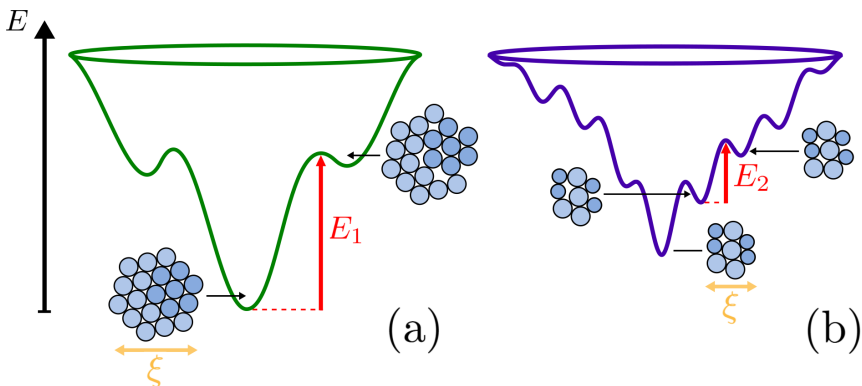


FIGURE 3.11 – Représentations schématiques du paysage énergétique des structures locales de taille caractéristique ξ , pour le cas d'un milieu (a) monodisperse et (b) polydisperse. Sur la figure, E représente l'échelle d'énergie d'une structure locale donnée.

Dans le cas d'un milieu monodisperse (Fig. 3.11 (a)), les particules se trouvent régulièrement piégées à l'intérieur de grandes structures cristallines, de taille caractéristique ξ , comme le montre la figure 3.2 (a) et 3.8. Chacune d'entre elles forment un motif hexagonal avec ses voisins, ce qui signifie que leur **niveau énergétique est minimal**, car ce pavage est la structure la plus compacte possible en 2D. Pour qu'un bloc cristallin se fragmente, il est donc nécessaire d'apporter **une grande quantité d'énergie**, afin que chaque particule puisse se réorganiser et quitter sa configuration stable. Il en résulte que l'énergie nécessaire pour qu'un bloc se fissure, notée E_1 , est relativement importante, d'autant plus que ξ est grand lorsque X_f est proche de 0. Cette stabilité accrue des structures internes **favorise la propagation de la contrainte** au sein du milieu granulaire. Lorsque celui-ci est cisailé, si l'énergie de sollicitation n'est pas suffisante, alors la contrainte de cisaillement se propagera sans induire de déformation, c'est-à-dire que la **contrainte seuil d'écoulement n'a pas été atteinte**, car trop élevée. Pour l'écoulement de silo, cela se manifeste par des profils de vitesse plus plats et une longueur de diffusion b plus grande. Dans le cas limite $X_f = 0$, cela provoque même l'apparition d'un écoulement bouchon, typique d'un fluide à seuil.

Dans le cas bidisperse (Fig. 3.11 (b)), les particules se trouvent piégées dans des **cages irrégulières**, dont la dynamique a beaucoup été étudiée ces dernières décennies, et dont la taille caractéristique ξ se révèle être de l'ordre de quelques diamètres moyens [83, 120]. Les grains sont **géométriquement frustrés** dans ces microstructures, à cause de la condition de mélange des espèces dans le milieu. Le niveau d'énergie associé à ces conformations locales ne correspond donc pas au minimum globale atteignable, obtenu uniquement pour l'agencement hexagonal ; les particules se trouvent alors **piégées dans plusieurs états métastables distincts**. La quantité d'énergie nécessaire pour briser une de ces cages, notée E_2 , est alors bien moins importante que E_1 , car elles sont relativement petites (ξ faible) et car les états métastables voisins sont proches. Lorsqu'une contrainte de cisaillement externe est appliquée au milieu granulaire bidisperse, l'énergie introduite dans le système est alors probablement suffisante pour détruire un grand nombre de ces cages. Autrement dit, **la contrainte seuil d'écoulement est plus facilement dépassable dans le cas bidisperse que dans le cas monodisperse**. La multiplicité des conformations possibles au sein du milieu implique que l'énergie nécessaire pour créer une dislocation locale E_2 n'est jamais la même d'une microstructure à l'autre. Cela implique qu'au court de la sollicitation mécanique, **les déformations plastiques surviennent de façon hétérogène, à la fois dans l'espace et dans le temps**. Dans le contexte de la vidange d'un silo 2D, cela se caractérise par des gradients de vitesse plus fort, et une longueur de diffusion b plus faible.

Nous montrons ainsi que la longueur de diffusion b est directement reliée à la contrainte seuil d'écoulement, qui elle-même est reliée au taux de cristallisation dans le milieu granulaire. Maintenant, afin d'expliquer pourquoi b croît systématiquement avec la hauteur y/d , il est nécessaire de faire intervenir un dernier paramètre clé, **la pression**. En effet, la capacité d'une sous-structure à se disloquer, qu'il s'agisse d'un bloc cristallin ou d'une cage irrégulière, est principalement pilotée par la pression qu'elle subie, car c'est cette dernière qui **s'oppose directement à la dilatation du milieu**, quelque soit sa forme. Ainsi, une microstructure renforcée par les forces de pression diffusera plus facilement la contrainte de cisaillement, de proche en proche et sans se déformer. Dans le silo, la pression augmente progressivement avec la hauteur, jusqu'à atteindre une valeur saturante pour des valeurs de y/d dépassant la hauteur des zones mortes [94]. La contrainte seuil d'écoulement croît donc de la même façon avec y/d , im-

pliquant une meilleure capacité de diffusion de la quantité de mouvement, et donc une longueur caractéristique b plus élevée. La cas limite $X_f = 0$ confirme davantage cette interprétation : la combinaison d'une pression saturée pour $y/d > 60$ et d'une forte cristallinité du milieu granulaire dans la même zone permet d'observer l'apparition d'une phase solide, soumise à une contrainte de cisaillement bien plus faible que la contrainte seuil, qui se déplace à vitesse constante. La figure 3.12 présente l'évolution de cette vitesse bouchon obtenue par l'ajustement de la relation (3.5).

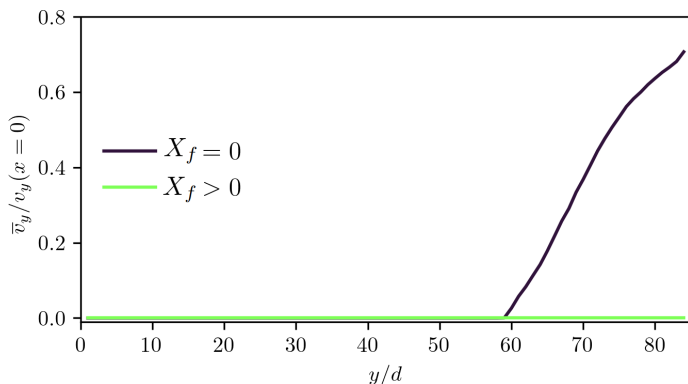


FIGURE 3.12 – Évolution de la contribution constante \bar{v}_y des profils de vitesse en fonction de la hauteur dans le réservoir y/d . Seul le cas $X_f = 0$ montre l'apparition d'une contribution \bar{v}_y non nulle.

Dans un silo, les propriétés de diffusion de la quantité de mouvement sont donc fortement reliées à la pression locale dans le système. La présence d'interactions cohésives isotropes et attractives, telle que les interactions capillaires, renforcerait davantage la stabilité des structures internes au milieu, et favoriserait donc la **diffusion de quantité de mouvement**.

3.4 Dynamique de la cristallisation

Dans cette dernière section, nous cherchons à confirmer le lien entre cristallinité du milieu et diffusion de la quantité de mouvement. Si cette dernière propriété est quantifiée par la longueur globale b , nous montrons que $\langle |\psi_6| \rangle_t$ est la grandeur pertinente pour étudier **l'évolution de la structure locale** du milieu granulaire au cours de la vidange du silo.

3.4.1 Dislocations locales

La figure 3.13 représente le champ eulérien moyen $\langle |\psi_6| \rangle_t(x, y)$ pour différentes valeurs de fraction de mélange. Cette grandeur reflète le **degré d'ordre local** moyen du milieu granulaire durant son écoulement stationnaire. Si en théorie $\langle |\psi_6| \rangle_t$ est défini entre 0 et 1, nous mesurons expérimentalement des valeurs comprises entre 0.4 et 0.8.

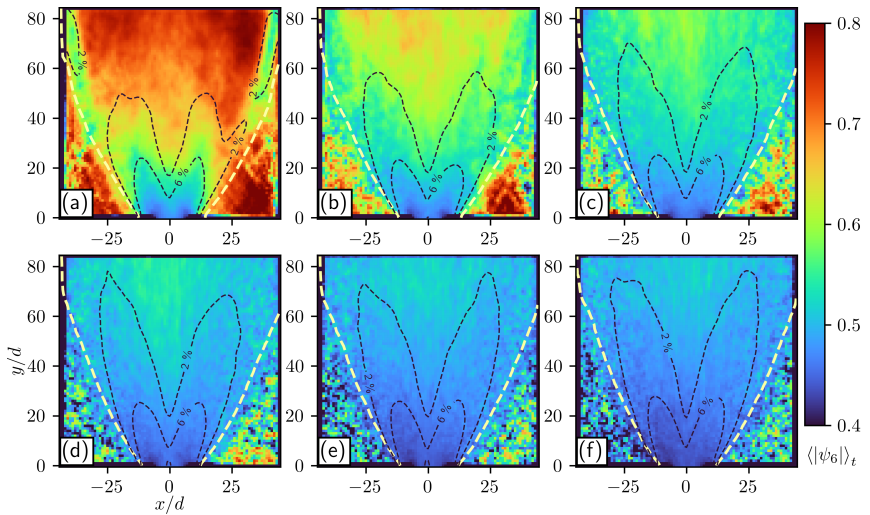


FIGURE 3.13 – Champs eulériens moyens du module du paramètre d'ordre hexatique $\langle |\psi_6| \rangle_t(x, y)$ pour (a) $X_f = 0$, (b) $X_f = 0.05$, (c) $X_f = 0.1$, (d) $X_f = 0.2$, (e) $X_f = 0.3$ et (f) $X_f = 0.4$. Sur chaque figure, les lignes jaunes en tirets représentent les lignes iso-vitesse correspondant à 1% de la vitesse maximale, alors que les lignes noires en tirets représentent les iso-valeurs du taux de cisaillement $|\dot{\gamma}|/|\dot{\gamma}|_{max} = 2\%$ ou $|\dot{\gamma}|/|\dot{\gamma}|_{max} = 6\%$.

Lorsque la valeur de $\langle |\psi_6| \rangle_t$ est élevée en (x, y) , cela indique que le milieu se trouve une grande partie du temps dans un **état cristallisé** à cet endroit. Par exemple pour $X_f = 0$, le champ $\langle |\psi_6| \rangle_t(x, y)$, représenté sur la figure 3.13 (a), affiche des valeurs particulièrement élevées, de l'ordre de $\langle |\psi_6| \rangle_t \sim 0.8$, dans la partie supérieure de l'écoulement, au-delà de $y/d \sim 50$. Elles **confirment l'existence de blocs cristallins**, qui passent très fréquemment à cet endroit tout au long de la vidange, comme le suggérait déjà la figure 3.8 et les mesures de \bar{v}_y . Des valeurs élevées de $\langle |\psi_6| \rangle_t$ sont également observées dans les zones mortes, délimitées par les lignes jaunes en tirets sur la figure, ce qui montre que les grains immobiles qui s'y trouvent forment une phase hexatique statique, dense et ordonnée.

En revanche, des valeurs plus faibles de $\langle |\psi_6| \rangle_t$ en (x, y) indiquent que le milieu granulaire se **trouve régulièrement dans un état désordonné** à cet endroit, c'est-à-dire qu'il présente rarement la symétrie hexagonale caractéristique d'un empilement parfait. Sur l'ensemble des champs représentés sur la figure 3.13, c'est notamment le cas au niveau de la sortie du silo, où nous observons $\langle |\psi_6| \rangle_t \sim 0.45$, quel que soit la fraction de mélange X_f . Ce résultat confirme l'invariance des profils de vitesse et compacité en sortie par rapport à X_f , et souligne que l'écoulement y est caractérisé par **l'absence d'ordre structurel** au cours du temps. En d'autres termes, les structures hexatiques, qui se forment au cœur de l'écoulement et dont la taille dépend de la fraction X_f , finissent inévitablement par **se disloquer à l'approche de la sortie** du silo. Ainsi, la grandeur $\langle |\psi_6| \rangle_t(x, y)$ est une mesure pertinente du **taux de dislocations locales** : plus sa valeur est élevée, moins le milieu subit de réorganisations internes en (x, y) ; à l'inverse, une valeur faible indique des réarrangements locaux plus fréquents.

En 2021, Downs et al. ont étudié la dynamique d'un milieu granulaire monodisperse confiné dans une cellule 2D ($\phi_{2D} = 0.82$) soumise à des vibrations orthogonales au plan [121]. En augmentant l'accélération de ces vibrations, ils mettent en évidence une transition de phase, le système passant d'un état hexatique ordonné à un état amorphe. Cette transition se traduit par une diminution du paramètre d'ordre hexatique moyen, de $\langle |\psi_6| \rangle_t \sim 0.85$ à $\langle |\psi_6| \rangle_t \sim 0.5$. Nos résultats présentent donc une évolution similaire : l'accélération progressive des particules dans le silo induit une transition de phase, de $\langle |\psi_6| \rangle_t \sim 0.8$ (phase hexatique) à $\langle |\psi_6| \rangle_t \sim 0.45$ (phase diluée et désordonnée).

3.4.2 Relation entre diffusion et ordre structural

Pour renforcer cette interprétation, les lignes de niveau du taux de cisaillement $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_{max} = 2\%$ et $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_{max} = 6\%$ sont tracées sur l'ensemble des champs de la figure 3.13. Elles délimitent les deux principales zones de cisaillement déjà présentées à la figure 3.1 (b) pour $X_f = 0.5$. On observe que la hauteur de ces zones **diminue avec l'intensité de la cristallisation du milieu**. Ainsi, la ligne $\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_{max} = 2\%$ atteint $y/d \sim 50$ pour $X_f = 0$, puis $y/d \sim 60$ pour $X_f = 0.05$, et enfin $y/d \sim 70$ dans le cas amorphe $X_f = 0.1$. Ces hauteurs coïncident avec la hauteur maximale des zones mortes, confirmant que la pression limite le cisaillement au-delà. Le milieu granulaire se cisaille donc plus facilement et sur une zone plus large lorsque sa **structure interne est désordonnée**. Enfin, les lignes de niveau révèlent une **correspondance nette entre les régions où $\langle |\psi_6| \rangle_t(x, y)$ est faible et celles où $\dot{\gamma}(x, y)$ est élevé**. Dans le cas $X_f = 0$, elles indiquent précisément la frontière entre l'extrémité des zones mortes et la partie supérieure de l'écoulement central ($40 < y/d < 80$), formant une bande de cisaillement localisée où **de fortes valeurs de $\dot{\gamma}$ coïncident avec de faibles valeurs de $\langle |\psi_6| \rangle_t$** (voir Fig. 3.13 (a)).

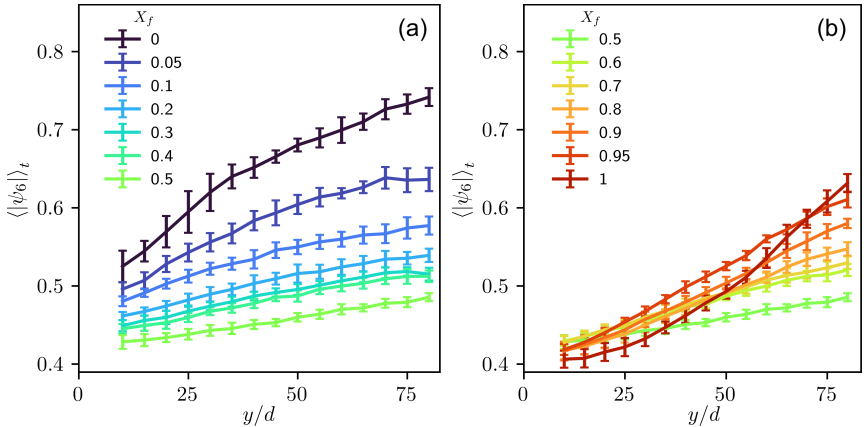


FIGURE 3.14 – Module du paramètre d'ordre hexatique $\langle |\psi_6| \rangle_t$ calculé au centre de l'écoulement en fonction de y/d pour (a) $X_f \leq 0.5$ et (b) $X_f \geq 0.5$. Les barres d'erreur correspondent au calcul de l'écart-type pour chaque y/d entre $x/d = -15$ et $x/d = +15$.

Comme le suggérait l'analyse de l'écoulement, on a donc effectivement un écoulement bouchon au delà de $y/d > 60$, révélé ici par la présence de très forts gradients du champ $\langle |\psi_6| \rangle_t(x, y)$. Dans les autres cas ($0.05 \leq$

$X_f \leq 0.4$), on distingue que les valeurs de $\langle |\psi_6| \rangle_t(x, y)$ sont légèrement plus élevées au centre de l'écoulement, où $\dot{\gamma}(x, y)$ est nul, et dans la partie supérieure de l'écoulement, où $\dot{\gamma}(x, y)$ est faible alors que la pression est forte.

Afin d'établir un lien entre $\langle |\psi_6| \rangle_t$ et la longueur caractéristique de diffusion du milieu b , nous calculons, pour chaque position y/d , la moyenne et l'écart-type de $\langle |\psi_6| \rangle_t$ au centre de l'écoulement entre $x/d = -15$ et $x/d = +15$. La figure 3.14 illustre le résultat du calcul, les barres d'erreur correspondant aux écarts-types. Dans un premier temps, ils montrent que la cristallisation est moins importante dans le cas $X_f = 1$ que dans le cas $X_f = 0$. La valeur maximale atteinte est de $\langle |\psi_6| \rangle_t = 0.74$ pour $X_f = 0$ contre seulement $\langle |\psi_6| \rangle_t = 0.65$ pour $X_f = 1$, ce qui s'explique par la modification du confinement des grains lorsque X_f augmente. On observe également que $\langle |\psi_6| \rangle_t$ **augmente avec la hauteur, quel que soit X_f** . Cela confirme qu'en règle générale, les réorganisations induites par le cisaillement sont moins importantes dans la partie supérieure du réservoir que dans la région proche de l'ouverture.

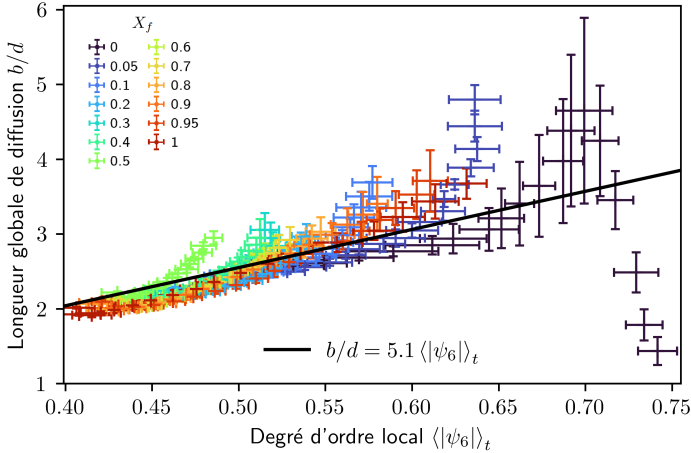


FIGURE 3.15 – Corrélation entre le module du paramètre d'ordre hexatique $\langle |\psi_6| \rangle_t$ et la longueur de diffusion globale b/d pour l'ensemble des valeurs de X_f .

Enfin, en comparant les valeurs de b/d présentées sur la figure 3.10, ainsi que celles de $\langle |\psi_6| \rangle_t$ présentées sur la figure 3.14, nous observons une **corrélation claire entre elles**, comme le montre la figure 3.15. Une relation directe de proportionnalité existe entre ces deux grandeurs. Nous lions

donc une **grandeur macroscopique**, b/d , qui caractérise l’aptitude du milieu granulaire à diffuser la quantité de mouvement, à une **grandeur microscopique**, $\langle |\psi_6| \rangle_t$, qui décrit la capacité du milieu à se réarranger localement.

Conclusion

Un milieu granulaire bi-dimensionnel est fondamentalement structuré par un ensemble de blocs internes, allant de petites cages irrégulières pour les milieux faiblement polydispersés, aux gros blocs cristallins pour les milieux monodispersés. Au cours de ce troisième chapitre, nous montrons à travers l’étude de l’écoulement dans un silo quasi-2D que **la diffusion de la quantité de mouvement est principalement pilotée par l’ordre structural du milieu granulaire**. La présence de cristallisation accroît la stabilité du milieu. En ce sens, elle peut être considérée comme une forme de **cohésion** à part entière.

Ce résultat reste néanmoins limité par son caractère expérimental. Il repose sur plusieurs hypothèses qu’il est nécessaire de rappeler :

- Le modèle cinématique n’est qu’un modèle de diffusion **semi-empirique**. L’ajustement des profils de vitesse n’est pas parfait, et ne prend pas en compte l’existence d’un seuil d’écoulement.
- Une distance entre les parois avant et arrière supérieure à la taille des grains induit des **effets tri-dimensionnels**, qui perturbe la cristallisation et les mesures. L’utilisation de parois plus rigides aurait permis de limiter ces effets, et éventuellement de retrouver les résultats de l’influence de la cristallisation sur le débit [107, 118].
- Le champ de pression reste **inconnu** au cours de la vidange, même si plusieurs références proposent une hypothèse sur sa forme [94, 92]. L’existence d’arches instables et d’ondes internes de force au cours de l’écoulement, objets des deux prochains chapitres, montrent que le champ de pression moyen est difficile à évaluer, même si aucun de nos résultats n’invalide l’hypothèse d’une pression qui croît exponentiellement dans le silo, jusqu’à atteindre le régime de Janssen, juste au-dessus de la partie convergente.

Enfin, le **paramètre d’ordre hexatique** se révèle être un outil central pour la compréhension des milieux granulaires 2D en écoulement. Le chapitre 6 en exploite son potentiel.

4) Influence de la cohésion magnétique sur la vidange

Ce quatrième chapitre se concentre sur la question principale abordée dans cette thèse, à savoir l'influence de la cohésion magnétique sur la vidange d'un silo quasi-2D. Plus précisément, ce chapitre s'intéresse à la façon dont les interactions magnétiques modifient l'écoulement à l'**échelle macroscopique**. La première section analyse l'effet de la cohésion sur la dynamique globale du milieu dans le réservoir du silo, bien en amont de l'ouverture. La deuxième section se concentre sur une zone plus restreinte, entre le réservoir et l'ouverture, où les mesures révèlent la formation continue **d'arches instables**, des structures encore mal décrites mais dont l'étude est essentielle pour comprendre la vidange de silo. Nous y étudions en particulier l'impact de la cohésion sur ces arches. Enfin, la troisième section présente comment la cohésion magnétique modifie le débit de vidange et les différents champs à l'extrémité de la sortie du silo.

Table des matières

4.1	Écoulement dans le réservoir	120
4.1.1	Seuil de déclenchement de la vidange	120
4.1.2	Canalisation du flux	121
4.1.3	Porosité du milieu granulaire	130
4.2	Instabilité des arches en chute libre	134
4.2.1	Description de la dynamique à la sortie	134
4.2.2	Fluctuations de vitesse localisées	136
4.2.3	Dynamique moyenne des arches instables	137
4.3	Écoulement à l'ouverture	142
4.3.1	Profils au niveau de la sortie	142
4.3.2	Dilatation à la sortie	144
4.3.3	Loi de débit	146
	Conclusion	147

4.1 Écoulement dans le réservoir

Cette première section montre comment la cohésion magnétique verticale modifie les propriétés macroscopiques de l'écoulement, tel que l'ouverture seuil qui permet à une vidange de s'initier, la taille des zones mortes ou encore la porosité du milieu granulaire.

4.1.1 Seuil de déclenchement de la vidange

Expérimentalement, nous observons que la vidange peut s'arrêter très rapidement lorsque l'ouverture est inférieure à $D_c \sim 4.5d$, comme déjà montré dans la littérature [4]. La cohésion magnétique **modifie** cette taille minimale en dessous de laquelle la vidange ne s'initie pas. La figure 4.1 présente le diagramme de phase dans l'espace (D, Bo) .

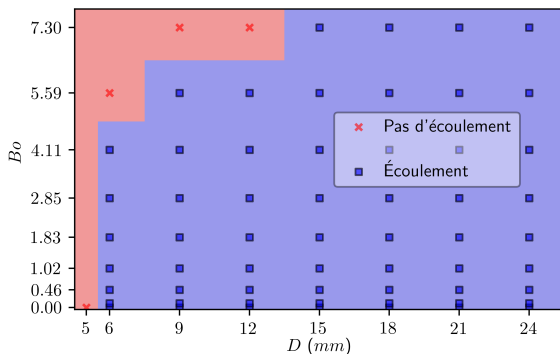


FIGURE 4.1 – Espace des paramètres (D, Bo) explorés. Les points dans la région bleue correspondent à chaque série de cinq expériences réalisées. Dans la région rouge, les points correspondent aux vidanges qui ne démarrent pas après l'ouverture du silo.

Les points de la région bleue correspondent aux couples (D, Bo) où la vidange s'initie toujours, tandis que ceux de la région rouge correspondent aux cas où le silo se bloque dès l'ouverture. Si le seuil critique d'écoulement est retrouvé sans cohésion, nous observons qu'une cohésion de $Bo = 5.59$ bloque la vidange pour $D = 6$ mm, et qu'une cohésion de $Bo = 7.30$ la bloque pour $D = 9$ mm et $D = 12$ mm. Ces résultats suggèrent qu'il existe, pour chaque ouverture D , un point critique où **les interactions cohésives entre particules bloquent la vidange**, bien que les interactions magnétiques soient anisotropes. Des niveaux de cohésion supérieurs à $Bo = 7.30$ pourraient donc bloquer le silo même pour $D > 12$ mm.

4.1.2 Canalisation du flux

Le mouvement d'ensemble dans le réservoir du silo est principalement caractérisé par sa **convergence**. La figure 4.2 montre les lignes de courants de l'écoulement pour différentes intensités de cohésion magnétique. En allant de la figure (a) à la figure (d), l'intensité des interactions magnétiques augmente, et les lignes de courants deviennent de plus en plus **alignées avec la direction verticale**. Le champ magnétique vertical imposé a donc pour effet de **canaliser l'écoulement** de grains dans le réservoir. Les interactions stabilisatrices pour le système ont pour effet d'accroître la taille des **zones mortes dynamiques**. La canalisation du flux est un phénomène également observé pour d'autres formes de cohésion, comme par exemple lors de la vidange d'un milieu granulaire dont les particules sont adhésives [41].

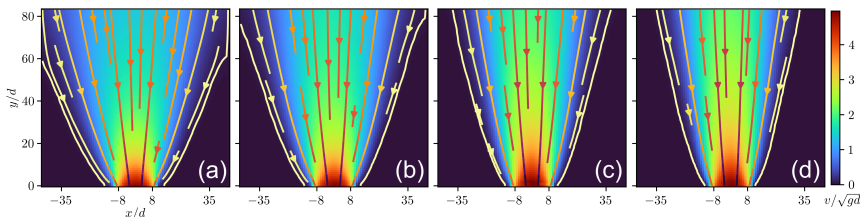


FIGURE 4.2 – Lignes de courant pour $D = 18$ mm pour (a) $Bo = 0$, (b) $Bo = 2.85$, (c) $Bo = 5.59$ et (d) $Bo = 7.3$. Les champs de vitesse $v(x, y)$ sont également représentés.

Lorsqu'une vidange se termine, deux zones de grains statiques subsistent de part et d'autre de l'ouverture. Ces zones sont appelées **zones mortes statiques** et correspondent aux grains des zones mortes dynamiques qui ne se sont pas écoulés. La surface de ces tas correspond à la zone où la limite de stabilité mécanique des particules est atteinte. L'ajout d'interactions magnétiques verticales attractives vient renforcer la stabilité mécanique du milieu granulaire à cet endroit, en attirant les grains à la surface des zones mortes. Cela modifie en conséquence le lieu où l'équilibre mécanique est le plus critique. Expérimentalement, nous observons effectivement que l'angle formé par ces zones mortes **augmente** avec l'intensité du champ magnétique (voir Fig. 4.3 (b)). Ces valeurs sont extraites par analyse d'images. Un flou gaussien important est appliqué à celles-ci pour détecter les contours de ces deux zones mortes ; un exemple est donné en figure 4.3 (a).

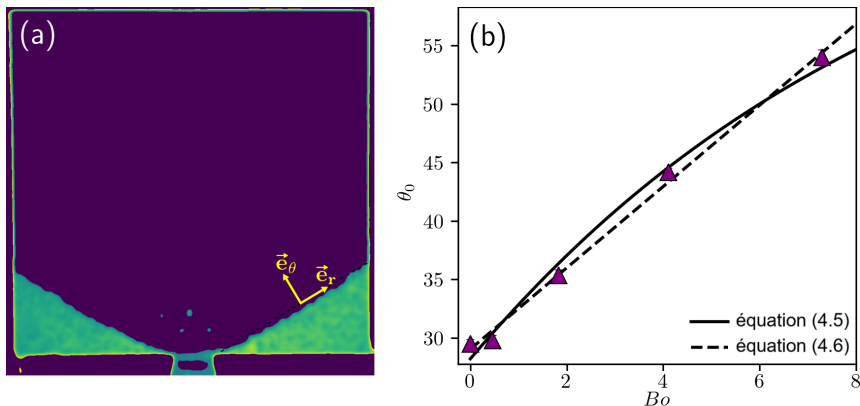


FIGURE 4.3 – (a) Image traitée des zones mortes après la vidange ($Bo = 0$). L'image a subi un flou gaussien (41 px par 41 px) puis un filtre passe-bande (intensité de chaque pixel comprise entre 50 et 120). (b) Évolution de l'angle de repos θ_0 en fonction de l'intensité de la cohésion magnétique verticale Bo .

Cet effet est cohérent avec l'observation de la canalisation du flux de particules. Pour en rendre compte de manière simple, nous utilisons l'analogie d'un mobile placé sur un plan incliné, présentée à la section 1.1.2. Considérons un grain situé sur la surface du tas. L'idée est d'introduire, en plus du poids et des forces de contact, une force magnétique effective représentant l'effet du champ vertical sur ce grain. Le bilan des forces s'écrit alors :

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{\text{mag}} = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Nous faisons l'hypothèse que la force magnétique résultante est strictement verticale et agit comme une force supplémentaire qui attire le grain vers le bas, renforçant ainsi la stabilité du tas. Toutefois, en raison de la distribution désordonnée des particules dans le milieu, la force réellement efficace pour empêcher le grain de glisser n'est qu'une fraction α de la force attractive maximale (1.11). Ainsi, la force magnétique effective s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = -\alpha F_{\text{max}} \cos(\theta_0) \mathbf{e}_\theta. \quad (4.2)$$

En projetant l'équation (4.1) sur la base locale liée à la surface ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$), illustrée en figure 4.3 (a), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -mg \sin(\theta_0) + \|\mathbf{T}\| = 0 \\ -\alpha F_{\text{max}} \cos(\theta_0) - mg \cos(\theta_0) + \|\mathbf{N}\| = 0 \end{cases}. \quad (4.3)$$

L'introduction du coefficient de frottement μ permet de simplifier ce système et de relier directement l'angle de la surface au rapport des forces, à travers le nombre de Bond magnétique :

$$\tan(\theta_0) = \mu (1 + \alpha Bo). \quad (4.4)$$

Enfin, l'angle de repos en présence d'un champ magnétique vertical peut donc s'écrire :

$$\theta_0 = \arctan(\mu_s (1 + \alpha Bo)). \quad (4.5)$$

Le développement limité au premier ordre de cette relation conduit à la relation linéaire suivante en fonction de Bo :

$$\theta_0 = \arctan(\mu_s) + \frac{\mu_s}{1 + \mu_s^2} \alpha Bo, \quad (4.6)$$

La figure 4.3 (b) illustre l'ajustement aux données expérimentales des relations théoriques (4.5) et (4.6). L'ajustement de la relation approchée (4.6) reproduit bien la tendance observée expérimentalement : comme dans l'étude de Forsyth et al. (2001) [29], nous observons une **augmentation linéaire** de l'angle de repos en fonction du rapport entre la force magnétique et le poids de la particule. Nous montrons également que la relation exacte dérivée du modèle (4.5) permet de décrire correctement les données sur tout l'intervalle de Bo exploré. L'ajustement de ce modèle conduit aux valeurs suivantes : $\alpha = 0.20$ et $\mu = 0.54$, ce qui correspond à un angle statique sans cohésion de $\theta_0 = 30.74^\circ$. D'autre part, l'ajustement de son développement limité au premier ordre (4.6) donne des résultats très proches : $\alpha = 0.14$ et $\mu = 0.56$, soit un angle de repos de $\theta_0 = 31.74^\circ$. Ces deux estimations de l'angle statique sont en bon accord avec notre valeur mesurée à champ nul, $\theta_0(Bo = 0) = 29.50^\circ$, ainsi qu'avec les résultats rapportés par Forsyth et al. [29]. Cela confirme que le modèle capture de manière satisfaisante le rôle stabilisateur de la cohésion magnétique sur la surface du tas.

La fraction de force attractive maximale obtenue à partir de nos ajustements est donc légèrement inférieure à 20%. Ce résultat est cohérent avec l'idée que seule une partie limitée de la force magnétique totale contribue effectivement à la stabilisation des grains en surface. Cette réduction peut s'expliquer par le caractère amorphe et désordonné du milieu granulaire, où l'organisation locale ne permet pas à toutes les particules de bénéficier de la force attractive maximale.

Il est toutefois intéressant de comparer nos résultats à ceux de Forsyth et al. [29]. Alors que dans notre étude un angle de repos élevé ($\theta_0 \sim 50^\circ$) est atteint dès un nombre de Bond modéré ($Bo \sim 6$), ces auteurs n'observent une telle valeur d'angle qu'à des nombres de Bond beaucoup plus grands, de l'ordre de $Bo = 40$. Même si l'on prend en compte la différence de taille de particule, et que l'on exprime notre nombre de Bond avec $d = 0.8$ mm comme dans leur définition, l'angle $\theta_0 \sim 50^\circ$ ne serait atteint dans notre cas qu'à $Bo \sim 11$, ce qui reste significativement inférieur à leur résultat. Cette différence marquée suggère que d'autres paramètres expérimentaux ou physiques peuvent intervenir. Deux hypothèses principales peuvent être avancées pour expliquer cet écart :

- Le matériau composant les billes peut avoir une susceptibilité magnétique différente. Comme celle-ci est élevée au carré dans l'expression du nombre de Bond (2.2), cela peut justifier cet écart.
- Dans leur étude, le protocole de mesure du nombre de Bond de référence est **différent** de celui décrit à la section 2.1.5. En effet, Forsyth et al. observent que l'aimantation résiduelle **n'est jamais suffisante** pour qu'une particule en maintienne une autre face à son poids. Ils ont donc choisi de définir le nombre de Bond magnétique de référence par rapport à la plus faible valeur de courant d'alimentation des bobines telle qu'une particule suspendue reste accrochée à une autre fixe. Dans leur méthode, l'hystérésis de l'aimantation des particules contribue donc à améliorer significativement la stabilité de la suspension d'une particule à une autre, ce qui conduit à une mesure de champ magnétique critique plus faible et donc à **un nombre Bond magnétique de référence bien supérieur** à celui défini dans le cadre de cette thèse.

Indépendamment des valeurs exactes du nombre de Bond, l'angle de repos des zones mortes est donc un **indicateur fiable** de l'intensité de la cohésion créée. Sa mesure systématique permet de **comparer de façon fiable** les résultats obtenus dans différentes études, dès lors que l'angle de repos est mesuré en fonction de l'intensité de la cohésion. Il est toutefois important de noter que le caractère anisotrope des interactions magnétiques n'est pas contenu dans notre définition du nombre de Bond.

Pour aller plus loin dans la modélisation du phénomène de canalisation, nous pouvons nous appuyer sur le **modèle cinématique**, introduit au chapitre précédent pour l'étude de l'influence du processus de cristallisation sur les profils d'écoulement. Celui-ci propose une forme gaussienne pour les profils de vitesse verticale $v_y(x)$ à partir d'une hypothèse d'incompressibilité (1.48) et de diffusion (1.49), que nous rappelons ici :

$$v_y(x, y) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi by}} \exp\left(\frac{-x^2}{4by}\right). \quad (4.7)$$

La figure 4.4 montre plusieurs profils de vitesse situés à différentes hauteurs dans le réservoir du silo en fonction de la cohésion pour une taille d'ouverture de $D = 18$ mm. Ces profils sont normalisés par la vitesse centrale $v_y(x = 0)$ qui est aussi la vitesse maximale de chaque profil. Pour une meilleure lisibilité de la figure, seul la moitié des profils sont représentés (entre $x/d = -44$ et $x = 0$) car ils sont symétriques par rapport à $x = 0$.

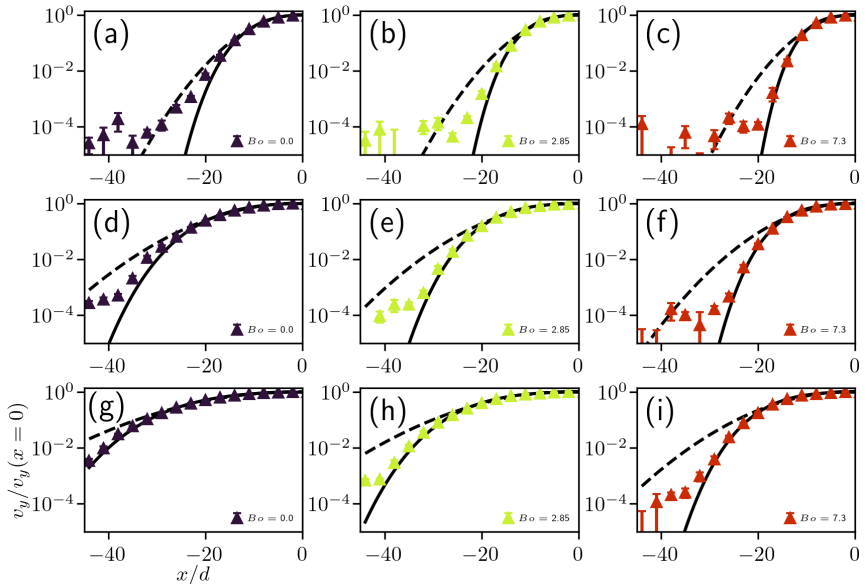


FIGURE 4.4 – Profils de vitesse verticale normalisés $v_y/v_y(x = 0)$ pour $D = 18$ mm pour différentes hauteurs dans le réservoir ((a, b, c) $y/d = 10$, (d, e, f) $y/d = 30$, (g, h, i) $y/d = 50$) et pour différentes intensités de cohésion ((a, d, g) $Bo = 0$, (b, e, h) $Bo = 2.85$ et (c, f, i) $Bo = 7.3$). Les lignes en tirets "--" représentent l'ajustement du modèle cinématique (4.7) alors que les lignes en trait plein "-" représentent l'ajustement de la relation (4.8).

Avec ou sans cohésion, l'ajustement de la formule (1.51) permet de **capturer la forme globale des profils** d'écoulement autour de la valeur centrale dans le réservoir. On observe tout de même un écart de la prédiction du modèle cinématique pour les vitesses faibles, typiquement inférieures à 10% de la vitesse centrale. Le modèle peine à prédire correctement le comportement du milieu granulaire proche du seuil d'écoulement (zone de transition solide-liquide) mais permet néanmoins de modéliser l'observation de la canalisation de l'écoulement par le champ magnétique vertical.

Dans le modèle cinématique, b/d est l'unique paramètre d'ajustement. Quand il est multiplié par y/d , celui-ci reflète **l'épaisseur de la zone en écoulement**, c'est-à-dire l'étalement des profils de vitesse. Pour une hauteur y/d donnée, une valeur de b/d plus faible correspond donc à un profil de vitesse **plus étroit**. La figure 4.5 montre l'évolution de cette longueur caractéristique en fonction de la hauteur y/d pour différentes intensités de cohésion et pour différentes tailles d'ouverture.

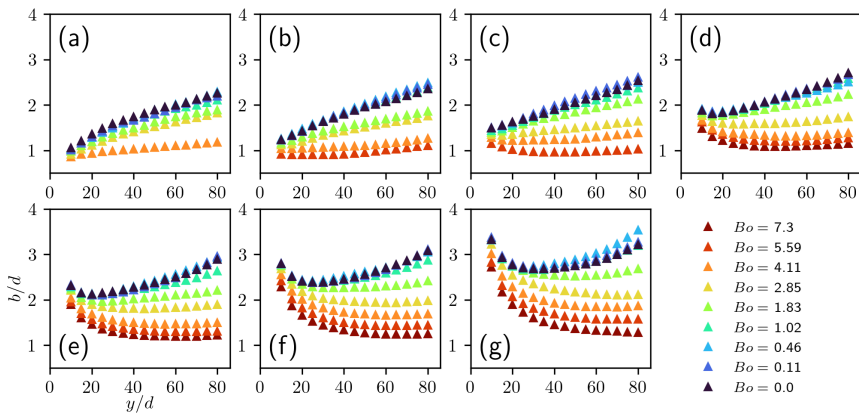


FIGURE 4.5 – Longueur caractéristique de diffusion b/d en fonction de la hauteur y/d pour différentes intensités de cohésion magnétique Bo et pour (a) $D = 6$ mm, (b) $D = 9$ mm, (c) $D = 12$ mm, (d) $D = 15$ mm, (e) $D = 18$ mm, (f) $D = 21$ mm et (g) $D = 24$ mm.

Dans le cas sans cohésion, nous observons que les valeurs de b croissent en fonction de y comme Medina et al. le montrent dans leur étude de 1998 [111]. Avec une ouverture de silo fixée à environ $D/d \sim 6.3$, ils mesurent que la longueur b/d croît entre les valeurs de 0.95 et 3.82, correspondant

respectivement aux hauteurs $y/d = 19$ et $y/d = 62$. Dans notre cas le plus proche ($D = 6$ mm), nous mesurons une longueur plus faible en $y/d = 62$ ($b/d = 2$ contre $b/d = 3.82$). Cette différence provient de **l'influence de la cristallisation** qui apparaît dans le milieu granulaire qu'ils utilisent, dont la taille des particules est de $d = 3.15 \pm 0.04$. Le chapitre précédent confirme qu'un milieu monodisperse présente de meilleures propriétés de diffusion dans le silo quasi-2D, ce qui se traduit par une longueur de diffusion b/d plus élevée.

Les résultats de la figure 4.5 montrent que la cohésion magnétique verticale **baisse la longueur de diffusion b** , quel que soit la taille de l'ouverture et la hauteur. La canalisation de l'écoulement est donc bien décrite par le modèle cinématique, et l'application d'un champ magnétique vertical externe permet de la **contrôler de façon robuste**. La croissance de la longueur b avec la hauteur y est de moins en moins forte lorsque la cohésion est intense. Pour les cohésions les plus fortes, cette longueur **tend vers une valeur constante** et unique de $b/d \sim 1.2$. L'existence de cette limite suggère que **les propriétés de diffusion deviennent homogènes** dans le milieu granulaire lorsque les interactions magnétiques sont fortes. La raison possible est que les composantes attractives verticales des interactions **limitent la variation de pression avec la hauteur** dans le réservoir. Le champ magnétique externe modifie les chaînes de force dans le milieu en les **alignant avec la direction verticale**, ce qui limite la décharge du poids du milieu granulaire sur les parois latérales de la cavité du silo, et empêche les particules de bouger dans la direction orthogonale à l'écoulement. Le chapitre 6 portant sur l'étude de la microstructure du milieu granulaire en écoulement donne une explication à ces observations.

Pour aller encore plus loin dans l'analyse de ces résultats, il est possible de réduire en partie l'écart entre le modèle cinématique et les distributions de vitesse en introduisant un terme supplémentaire dans la relation (1.51) :

$$v_y(x, y) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi by}} \exp\left(\frac{-x^2}{4by} + \beta x^4\right), \quad (4.8)$$

où β est un paramètre d'ajustement, traduisant la non-gaussianité apparente du profil de vitesse. Lorsque $\beta = 0$, la distribution est gaussienne (mésokurtique); elle devient platykurtique (plus large qu'une gaussienne) pour $\beta < 0$ et leptokurtique (plus étroite qu'une gaussienne) pour $\beta > 0$. Comme le montre la figure 4.4, cette nouvelle relation s'ajuste bien mieux

aux profils de vitesse $v_y(x)$, bien que les hypothèses du modèle cinématique ne permettent pas de justifier directement l'existence du terme βx^4 . L'origine physique de ce terme supplémentaire est liée à la plasticité du milieu granulaire. Les grains en écoulement au centre du système peuvent se trouver régulièrement piégés par leurs voisins, ce qui conduit à la formation de microstructures rigides, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Ce mécanisme favorise alors un mouvement collectif cohérent, plutôt qu'une diffusion de type brownien. Ainsi, l'introduction du terme βx^4 permet de rendre compte du caractère sur-diffusif de la dynamique des particules au centre de l'écoulement, même si ce modèle modifié ne fournit pas, en retour, de critère clair pour définir un seuil d'écoulement.

Le kurtosis des distributions de vitesse, noté K , peut être calculé indépendamment du modèle cinématique grâce à la formule (1.52). La figure 4.6 montre l'évolution de K en fonction de la hauteur y/d pour différentes tailles d'ouverture et différentes intensités de cohésion.

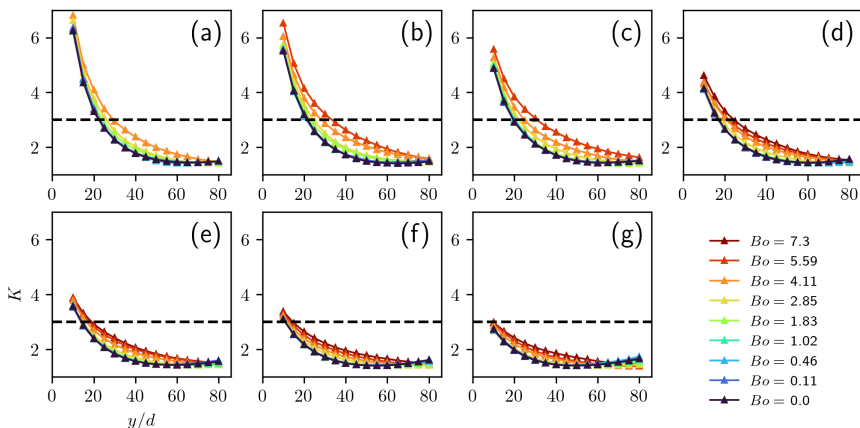


FIGURE 4.6 – Kurtosis K des distributions de vitesse $v_y(x)$ en fonction de l'intensité de la cohésion magnétique Bo pour (a) $D = 6$ mm, (b) $D = 9$ mm, (c) $D = 12$ mm, (d) $D = 15$ mm, (e) $D = 18$ mm, (f) $D = 21$ mm et (g) $D = 24$ mm. La ligne "—" correspond à $K = 3$: lorsque $K > 3$ le profil est leptokurtique, alors que lorsque $K < 3$ le profil est platykurtique.

Dans leur étude de 2025, Hanif et al. [114] ont mesuré la valeur du kurtosis des distributions de vitesse pour un écoulement de sphères dans un silo quasi-2D. Pour une ouverture fixée à $D/d = 5$ et une largeur de silo

de $L/d = 18.5$, ils observent que les profils de vitesse sont leptokurtiques lorsque $y/d < 5$ et qu'ils deviennent platykurtiques au delà. Nous retrouvons ici **le même comportement, y compris en présence de la cohésion magnétique verticale**. Dans le cas le plus proche de leur étude ($D = 6$ mm), nous observons que le kurtosis devient inférieur à $K = 3$ lorsque $y/d \sim 20$, ce qui est près de quatre fois supérieur au seuil qu'ils observent.

Plus la taille de l'ouverture D est grande, plus la hauteur où ce seuil est franchit est faible, jusqu'à $y/d \sim 10$ pour $D = 21$ mm. Pour $D = 24$ mm, les distributions sont toujours platykurtiques quel que soit la position. Enfin pour toutes les tailles d'ouverture et intensités de cohésion explorées, le kurtosis des distributions tend toujours vers la valeur $K = 1.52 \pm 0.09$. Cela signifie que les profils de vitesse $v_y(x)$ dans le silo tendent toujours vers des formes **plus plates** que des courbes gaussiennes, ce qui traduit bien le caractère sous-diffusif de la dynamique du milieu. Nous pouvons également conclure que **la cohésion magnétique verticale modifie très peu la forme des profils** d'écoulement dans le réservoir du silo, et donc la nature de la dynamique.

4.1.3 Porosité du milieu granulaire

Pour que le milieu granulaire puisse s'écouler dans la cavité du silo, celui-ci doit **se dilater** localement pour permettre aux particules de bouger les unes par rapport aux autres. Le champ de compacité moyen du milieu $\phi(x, y)$ est représentée sur la figure 4.7 (a) pour une ouverture de $D = 24$ mm. La compacité mesurée est globalement comprise entre $\phi_{min} = 0.45$ et $\phi_{max} = 0.65$ dans toute la cavité observée.

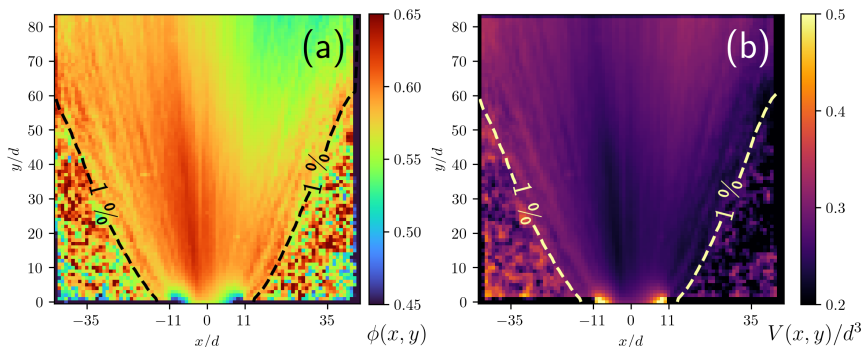


FIGURE 4.7 – (a) Compacité moyenne $\phi(x, y)$ et (b) volume libre moyen $V(x, y)$ pour $D = 24$ mm et $Bo = 0$. Les lignes en tirets représentent l'iso-vitesse correspondant à 1% de la vitesse maximale ((a) en noir et (b) en jaune pour un meilleur contraste). Pour la figure (a) (et plus légèrement sur la figure (b)), l'observation de valeur plus faible dans la zone en haut à droite peut s'expliquer par une luminosité insuffisante causant des problèmes de détection des particules.

Dans les zones mortes dynamiques (définies par $v/\max(v) < 1\%$), le champ de compacité locale présente des **hétérogénéités marquées**, avec des valeurs de compacité ϕ comprises entre 0.50 et 0.65. Les particules situées dans ces régions sont **géométriquement frustrées** : elles ne peuvent se réorganiser et demeurent figées dans une configuration donnée qui est liée à la façon dont le silo a été rempli. Ces hétérogénéités du champ $\phi(x, y)$ reflètent la présence de **pores distribués de manière désordonnée** à l'intérieur de ces zones. La figure 4.8 (a) illustre l'évolution de la compacité moyenne dans les zones mortes, notée ϕ_b , en fonction de la cohésion interparticulaire. On observe que la valeur de ϕ_b **varie très peu avec l'intensité de la cohésion** : elle reste globalement comprise entre 0.55 et 0.60. Cela indique que l'augmentation de la cohésion n'induit qu'une faible variation de la taille moyenne des pores dans ces régions. En l'absence de cohésion ($Bo = 0$), la valeur moyenne mesurée est $\phi_b = 0.58$.

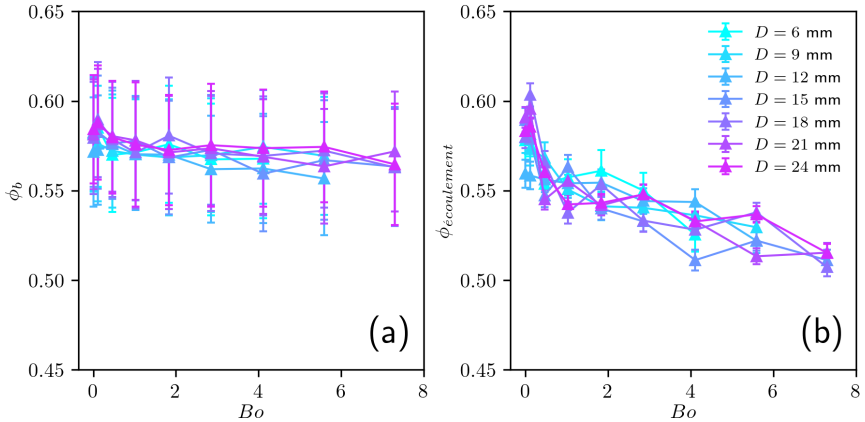


FIGURE 4.8 – Évolution de (a) la compacité de préparation ϕ_b et de (b) la compacité dans la zone en écoulement $\phi_{\text{écoulement}}$ en fonction de l'intensité des interactions cohésives.

En revanche, dans la zone centrale en écoulement (définie par $v/\max(v) > 1\%$) où les grains conservent une certaine mobilité, le champ de compacité est relativement **homogène**, avec une valeur moyenne autour de $\phi \sim 0.60$. Cette compacité reste constante sur la majeure partie de la zone en écoulement, mais chute brusquement au niveau de la sortie du silo, où elle atteint la valeur minimale de $\phi = 0.45$. La figure 4.8 (b) montre l'évolution de la compacité moyenne dans cette zone dynamique en fonction de l'intensité des interactions magnétiques. On observe une **diminution marquée de la compacité** avec l'augmentation de la cohésion : elle passe de $\phi = 0.58$ pour $Bo = 0$ à $\phi = 0.51$ pour $Bo = 7.3$. Ce résultat indique que les interactions magnétiques favorisent l'apparition de **pores plus larges** dans l'écoulement.

Les volumes libres associés aux particules, calculés à partir de la formule (1.17), permettent d'obtenir une estimation plus fine de la taille des interstices présents dans le milieu granulaire. En projetant ces mesures selon la méthode (1.25), on obtient le champ spatial du volume libre $V(x, y)$, représenté sur la figure 4.7 (b). Ce champ est **inversement proportionnel** à celui de la compacité $\phi(x, y)$: les zones les plus denses ($\phi(x, y)$ élevée) coïncident avec les régions où les particules disposent de moins d'espace libre ($V(x, y)$ faible), et inversement. En théorie, pour un empilement optimal de sphères monodisperses dans une cavité bidimensionnelle de largeur

d , la valeur minimale du volume libre ne peut descendre en dessous de $V_{min}/d^3 = 0.34$. Toutefois, deux sources d'incertitude dans notre méthode de mesure expliquent que des valeurs inférieures puissent être observées :

- La détection des particules ne permet pas de déterminer précisément leur diamètre réel. On considère par défaut un diamètre moyen $d = 1.1$ mm. Cette approximation peut entraîner une **sous-estimation** du diamètre réel de certaines particules. En prenant en compte cette incertitude, la valeur minimale mesurable du volume libre s'abaisse à $V_{min}/d^3 = 0.17$.
- La largeur de la cavité étant légèrement supérieure au diamètre des particules, ces dernières peuvent partiellement se recouvrir dans la direction perpendiculaire au plan d'observation. Cela peut conduire à une légère augmentation de l'épaisseur W , ce qui contribue à une réduction supplémentaire du volume libre minimal mesurable, pouvant atteindre exceptionnellement $V_{min}/d^3 \sim 0$. Une discussion plus détaillée de cet effet est faite à la première section du chapitre 3.

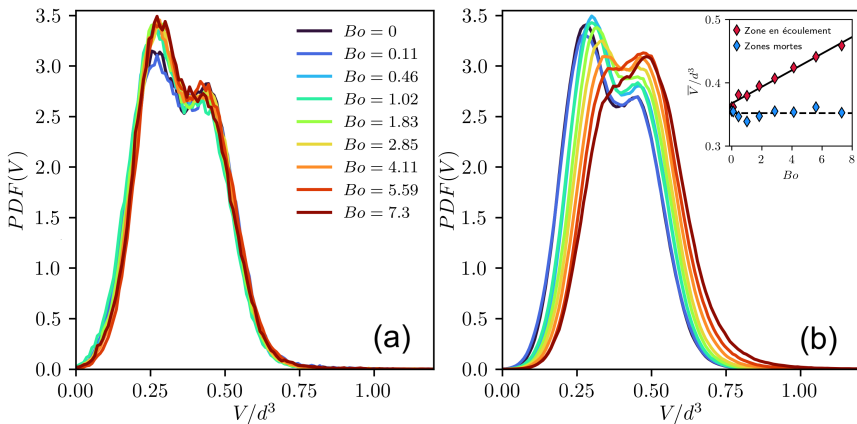


FIGURE 4.9 – Densités de probabilité du volume libres des grains V/d^3 (a) dans les zones mortes et (b) dans la zone en écoulement pour différentes intensités de cohésion Bo . L'insert de la figure (b) représente l'évolution des moyennes de chaque distribution \bar{V}/d^3 en fonction de la cohésion. La ligne en tirets " - - " correspond au volume libre moyen dans les zones mortes ($\bar{V}/d^3 = 0.35$) alors que la ligne noir en trait plein " - " correspond à l'ajustement de la relation (4.9).

Pour aller plus en détail, la figure 4.9 présente les distributions des volumes libres pour les particules situées dans les zones mortes (figure 4.9

(a) et dans la zone en écoulement (figure 4.9 (b)). Ces distributions présentent globalement une forme similaire à celle d'une loi gamma, comme déjà observé dans plusieurs travaux antérieurs [122, 81]. Plus précisément, dans notre cas, les courbes présentent deux pics distincts, caractéristiques de la **bidispersité** du mélange granulaire utilisé lors des expériences. Le chapitre 3 reviendra plus en détail sur l'influence de la distribution des tailles de particules sur la forme des distributions des volumes de Voronoï. La figure 4.9 (a) montre que la cohésion magnétique a peu d'effet sur la distribution des volumes libres dans les zones mortes : la **taille des pores y reste globalement inchangée**, quel que soit le niveau de cohésion. En revanche, la figure 4.9 (b) met en évidence un déplacement significatif des distributions dans la zone en écoulement, suggérant que la cohésion magnétique **favorise l'augmentation de la taille des interstices** entre les particules en mouvement. L'insert de la figure 4.9 (b) compare l'évolution des valeurs moyennes des distributions de volumes libres, notées \bar{V} , en fonction de l'intensité de la cohésion pour les deux zones étudiées. Dans les zones mortes, la valeur moyenne reste constante, avec $\bar{V}/d^3 = 0.35$, ce qui confirme que la cohésion magnétique n'a pas d'effet notable sur la structure locale de ces régions figées. En revanche, dans la zone centrale en écoulement, \bar{V} **augmente linéairement** avec la cohésion magnétique. Cette croissance est bien décrite par l'ajustement linéaire suivant :

$$\bar{V} = C_1 B_0 + C_2, \quad (4.9)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'ajustement. Les valeurs extraites sont $C_1 = 0.013$ et $C_2 = 0.37$. La légère différence entre C_2 et la valeur moyenne observée dans les zones mortes ($\bar{V}/d^3 = 0.35$) s'explique par le phénomène de **dilatation du milieu granulaire induite par l'écoulement**. En d'autres termes, la mise en mouvement du matériau engendre une augmentation intrinsèque du volume libre moyen, indépendamment de la cohésion.

En conclusion, cette analyse montre que les interactions magnétiques affectent peu la compacité du milieu à l'état statique ; leurs effets n'interviennent principalement qu'en écoulement. Elles modifient alors le **processus de dilatation** en induisant une baisse progressive de la compacité moyenne avec l'intensité de la cohésion. Par ailleurs, la cohésion n'élargit pas les distributions de taille des pores : elle **les décale vers des volumes plus élevés**, tout en **conservant leur forme**, ce qui traduit une redistribution homogène du volume libre dans l'ensemble de la zone en écoulement.

4.2 Instabilité des arches en chute libre

Après avoir étudié l'écoulement dans le réservoir d'un point de vue macroscopique, cette deuxième section propose une analyse approfondie de l'écoulement dans la région située à proximité de l'ouverture, où se manifeste toute la complexité du comportement du milieu granulaire. Nous nous intéressons en particulier aux motifs des fluctuations de vitesse et à la façon dont la cohésion magnétique les modifie.

4.2.1 Description de la dynamique à la sortie

La figure 4.10 représente trois champs eulériens qui permettent de caractériser la dynamique des particules au niveau de la sortie. La figure 4.10 (a) montre le champ de compacité $\phi(x, y)$ proche de la sortie pour $Bo = 0$ et $D = 24$ mm. Au centre de l'ouverture, la compacité est proche de celle du milieu en écoulement ($\phi \sim 0.6$). En revanche, nous observons que $\phi(x, y)$ est minimale dans deux zones bien distinctes, situées de part et d'autre de l'ouverture, avec une valeur de $\phi_{min} = 0.45$. Ces zones coïncident exactement avec celles où le cisaillement moyen $\dot{\gamma}$ est maximal, comme le montre la figure 4.10 (b). Nous retrouvons le comportement attendu : **plus le taux de cisaillement du milieu est important plus celui-ci se dilate.**

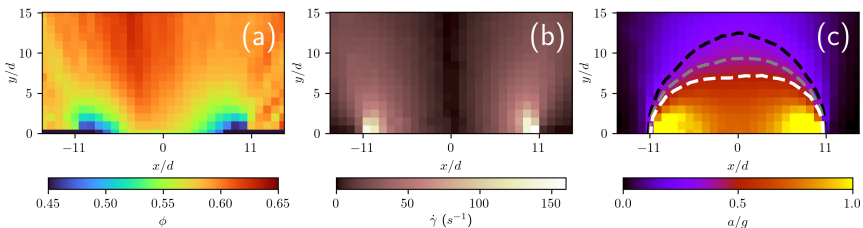


FIGURE 4.10 – Champs moyen de (a) compacité $\phi(x, y)$, (b) taux de cisaillement $\dot{\gamma}(x, y)$ et (c) accélération normalisée $a(x, y)/g$ pour $Bo = 0$ et $D = 24$ mm. Pour la figure (c), les lignes en tirets “--” correspondent aux lignes iso-accélération d’intensité $a/g = 0.3$ (noir), $a/g = 0.4$ (gris) et $a/g = 0.5$ (blanc).

Comme discuté dans la sous-section 1.3.1, la mesure de l'accélération des particules fournit une **estimation indirecte de la force** moyenne qui s'exerce sur elles. Les valeurs du champ eulérien d'accélération $a(x, y)$ sont représentée sur la figure 4.10 (c). Celle-ci sont toujours positives car l'écoulement est stationnaire, et peuvent atteindre la valeur maximale de

$a = g$ à certains endroits. À partir de ce champ nous définissons trois zones caractéristiques :

- **Zones de chute libre** ($a = g$) : Deux régions de part et d'autre de l'ouverture montrent une accélération maximale. Elles coïncident avec les zones de compacité minimale et de cisaillement maximal. À ces endroits, les particules sont libres de tout contact et ne subissent plus que leur poids, caractérisant un état de gaz granulaire.
- **Jet central** ($a < g$) : Au centre de l'ouverture du silo, l'accélération est inférieure à g dans une zone formant un jet central. Les trajectoires convergentes dans cette zone, analogues aux lignes de courant, augmentent la fréquence des collisions, générant une pression granulaire significative qui limite la liberté des particules à chuter sous leur propre poids.
- **Arche** ($a \sim 0.4 g$) : Les lignes iso-accélération, dont certaines sont représentées sur la figure 4.10 (c), forment des arches au-dessus de l'ouverture, pour des valeurs typiquement comprise entre $a \sim 0.1 g$ et $a \sim 0.5 g$. L'hypothèse selon laquelle les particules se retrouveraient en chute libre à partir d'un lieu formant un arc demi-circulaire est donc invalidée par la mesure directe de l'accélération.

L'ensemble de ces motifs révèle une structuration complexe de l'écoulement au voisinage de la sortie du silo. Nous verrons dans la suite que cette complexité est en grande partie liée à une instabilité qui émerge dans cette zone en particulier.

L'écoulement lors de la vidange d'un silo est caractérisé par son **intermittence**. Plusieurs études récentes développent l'hypothèse de l'existence de "free-fall arches", terme traduit dans ce manuscrit de thèse par **arches en chute libre** ou **arches instables**. Ces structures mécaniques correspondent à des arches qui apparaissent sans cesse au dessus de l'ouverture pendant la vidange d'un silo, sans jamais être suffisamment stables pour bloquer entièrement l'écoulement [101, 123, 124]. Le dernier motif observé, les arches formées par les lignes iso-accélération, semble appuyer l'existence de ces forces structurées dans l'écoulement. Pour explorer plus en détail ce point, il est intéressant d'analyser dans un premier temps les profils de **fluctuations de vitesse**, notés $v'(x, y)$.

4.2.2 Fluctuations de vitesse localisées

La figure 4.11 représente l'ensemble des profils de fluctuations de vitesse pour toutes les tailles d'ouverture explorées, sans cohésion. Elles sont calculées comme l'écart-type temporel des vitesses eulériennes instantanées. Tout comme les profils d'accélération, ces derniers révèlent des structures caractéristiques uniques.

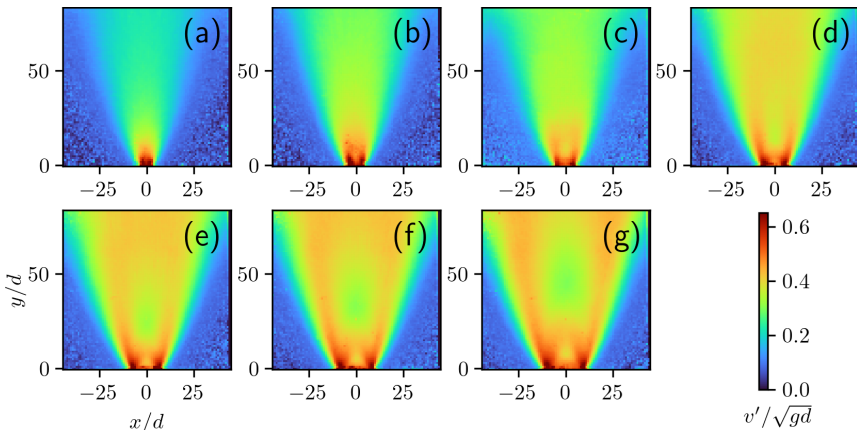


FIGURE 4.11 – Profils des fluctuations de vitesse $v'(x, y)/\sqrt{gd}$ en l'absence de cohésion, pour (a) $D = 6$ mm, (b) $D = 9$ mm, (c) $D = 12$ mm, (d) $D = 15$ mm, (e) $D = 18$ mm, (f) $D = 21$ mm et (g) $D = 24$ mm.

Pour $D = 24$ mm, on distingue clairement trois types de zones :

- **Bandes de cisaillement** : Deux bandes de fortes fluctuations de vitesse ($v' \sim 0.45\sqrt{gd}$) longent les frontières entre les zones mortes et la zone d'écoulement au centre. Celles-ci coïncident avec la zone où le milieu est cisailé de chaque côté (voir Fig. 3.1 (b)).
- **Puit central** : Les fluctuations de vitesse sont relativement faibles dans la zone au centre de l'écoulement, où elles sont limitées à la valeur de $v' \sim 0.3\sqrt{gd}$. Les taux de cisaillement sont également faibles à cet endroit. De plus, le kurtosis des distributions de vitesse y est toujours inférieur à $K = 3$, ce qui montre que le milieu s'écoule plutôt en formant un **bouchon**.
- **Arche** : Une zone de fortes fluctuations en forme d'arche est localisée au dessus de l'ouverture ($v' \sim 0.45\sqrt{gd}$). Celle-ci s'appuie sur les bords de l'ouverture, où les fluctuations se révèlent être maximales

($v' \sim 0.6\sqrt{gd}$). Cette observation semble confirmer l'apparition régulière d'arches granulaires instables dans cette zone au cours de la vidange.

Ces structures sont également observées pour des ouvertures plus petites, jusqu'à $D = 12$ mm. En dessous de cette taille, elles deviennent plus difficiles à identifier car les bandes latérales de fortes fluctuations se rejoignent progressivement. La figure 4.12 montre comment la présence d'interactions magnétiques verticales modifie ces motifs.

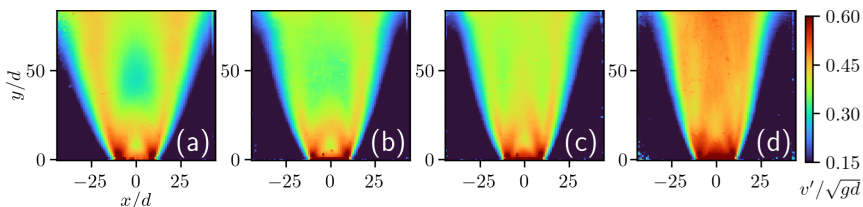


FIGURE 4.12 – Profils de fluctuation de vitesse $v'(x, y)/\sqrt{gd}$ pour $D = 24$ mm pour (a) $Bo = 0$, (b) $Bo = 2.85$, (c) $Bo = 4.11$ et (d) $Bo = 5.59$.

La cohésion a pour effet **d'étirer vers le haut la zone en forme d'arche** au dessus de l'ouverture. Pour les intensités de cohésion les plus fortes, le motif devient à peine discernable comme sur la figure 4.12 (d). Pour les bandes de fluctuations latérales, celles-ci s'affinent et se rapprochent légèrement jusqu'à se rejoindre lorsque la cohésion augmente. Enfin, nous observons que les fluctuations de vitesse au cœur de l'écoulement augmentent avec l'intensité de la cohésion magnétique.

4.2.3 Dynamique moyenne des arches instables

Pour mieux comprendre le lien entre ces arches de fluctuations de vitesse et la présence d'arches granulaires instables, il est essentiel de mieux comprendre le mécanisme sous-jacent. La formation et la destruction des arches instables s'effectuent en plusieurs étapes :

- **Formation d'une arche instable** : À un instant donné de l'écoulement, une structure arquée, appelée arche instable, se forme juste au-dessus de l'ouverture du silo. Elle résulte de l'apparition d'une chaîne de forces reliant plusieurs grains initialement en mouvement. Ces grains entrent alors en contact de façon suffisamment forte pour soutenir temporairement le poids du matériau au-dessus. Cette configuration provoque un **ralentissement local** de l'écoulement : les

particules dans l'arche voient leur vitesse fortement réduite, voire momentanément stoppée.

- **Stabilisation temporaire de l'écoulement** : Tant que l'arche subsiste, elle agit comme un obstacle partiel au flux. Elle ne bloque pas entièrement l'écoulement, mais le perturbe localement, modifiant temporairement les profils de vitesse et de pression.
- **Destruction de l'arche instable** : Après un certain temps, cette structure fragile se désorganise sous l'effet des sollicitations mécaniques. Cela correspond à la rupture d'un ou plusieurs contacts forts entre les grains, déséquilibrant l'ensemble et entraînant sa dislocation.
- **Reprise de l'accélération** : Une fois l'arche détruite, les particules qui étaient immobilisées ou freinées retrouvent leur liberté de mouvement. Elles reprennent leur chute sous l'effet de la gravité et **accélèrent de nouveau**. Le cycle peut alors recommencer avec la formation d'une nouvelle arche instable.

Ce processus engendre donc une variation locale des forces entre grains, ce qui modifie l'accélération des particules et donc crée des **fluctuations de vitesse**. Ces variations ne sont pas aléatoires : elles constituent une **signature claire et visible de la formation et de la destruction des arches instables** dans le matériau granulaire. La figure suivante illustre en trois étapes le passage d'une particule à travers la zone de formations des arches en chute libre.

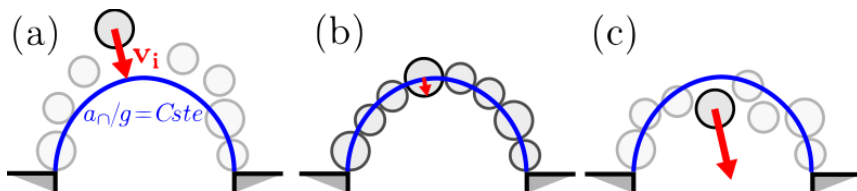


FIGURE 4.13 – Ralentissement d'une particule lors de son passage à travers la zone de formation des "free-fall arches". (a) La particule se dirige vers la sortie du silo. (b) Elle est ralentie momentanément par une arche instable. (c) L'arche se brise et la particule accélère de nouveau.

Pour approfondir la description des "free-fall arches", on peut établir un lien entre l'accélération moyenne $a(x, y)$ et les motifs en arc des fluctuations de vitesse. La figure 4.14 montre un agrandissement des arches de

fluctuations en l'absence de cohésion avec les lignes iso-accelération en bleu qui s'ajustent au mieux à ces structures. Elles sont obtenues en extrayant la position et la valeur du maximum local de chaque profil $v'(x = 0, y)$. Cette méthode permet, pour certaines tailles d'ouverture et intensités de cohésion, d'extraire la position des arches instables (h_Γ), l'accélération correspondante (a_Γ), ainsi que les fluctuations au centre de l'arche (v'_Γ). Pour des ouvertures plus petites ($D \leq 12$ mm), la précision de la méthode ne permet pas d'estimer correctement ces trois grandeurs.

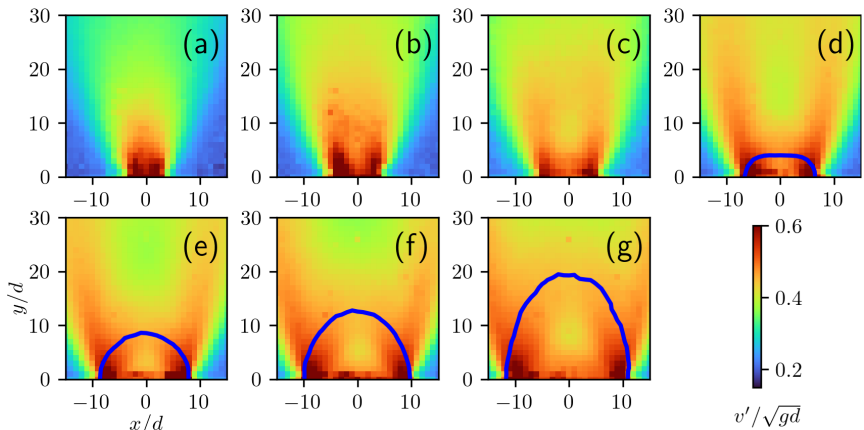


FIGURE 4.14 – Agrandissement des profils des fluctuations de vitesse $v'(x, y)/\sqrt{gd}$ dans le cas non-cohésif, pour (a) $D = 6$ mm, (b) $D = 9$ mm, (c) $D = 12$ mm, (d) $D = 15$ mm, (e) $D = 18$ mm, (f) $D = 21$ mm et (g) $D = 24$ mm. Les courbes en tirets bleu correspondent aux lignes iso-accelération qui passent au centre des zones de fortes fluctuations.

Considérons le **cas limite** où l'ouverture D est proche de la valeur critique $D_c \sim 4.5, d$. Garcimartín et al. ont observé que, dans ce régime, les arches stables adoptent une forme proche d'un demi-cercle [125]. Plus tard, Thomas et Durian [102] ont montré qu'il n'y a pas de discontinuité nette dans les fluctuations de vitesse pour $D \sim D_c$. En combinant ces résultats, trois hypothèses peuvent être formulées : lorsque D dépasse légèrement D_c , les arches instables atteignent une hauteur d'environ $h_\Gamma \sim D_c/2$ (1). Leur quasi-stabilité laisse aux particules situées en dessous le temps de s'écouler. Lors de leur effondrement, les particules au-dessus tombent alors en chute libre avec une accélération proche de g , soit $a_\Gamma \sim g$ (2). Enfin, si la particule formant l'arche passe d'un état immobile à une vitesse \sqrt{gd} après rupture, alors la fluctuation de vitesse moyenne est $v'_\Gamma = 0.5\sqrt{gd}$ (3).

La figure 4.15 illustre l'évolution des grandeurs caractéristiques associées aux arches instables, en fonction de la taille normalisée de l'ouverture D/d pour différentes intensités de cohésion.

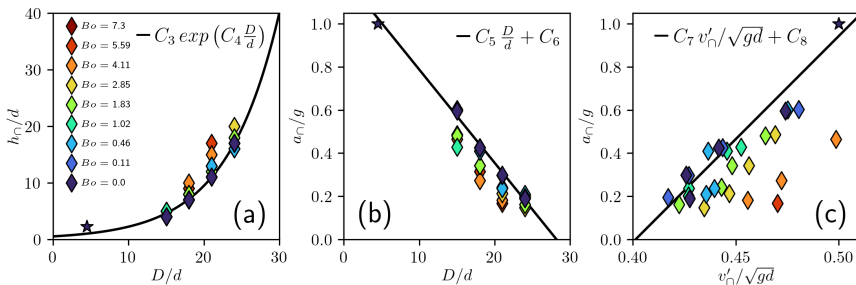


FIGURE 4.15 – (a) Hauteur des "free-fall arches" h_{Γ}/d en fonction de D/d pour différents nombres de Bond Bo . La ligne noire correspond à l'ajustement de l'expression 4.10 aux données sans cohésion ($Bo = 0$). (b) Accélération moyenne a_{Γ}/g mesurée au niveau des arches en fonction de D/d pour différentes intensités de cohésion. Là encore, la ligne noire montre l'ajustement de l'expression 4.11 pour $Bo = 0$. La courbe (c) représente les fluctuations de vitesse v'_{Γ}/\sqrt{gd} en fonction de l'accélération a_{Γ}/g au niveau de l'arche. Le cas $Bo = 0$ est ajusté par l'expression 4.12. Les symboles en forme d'étoile indiquent les prédictions issues des hypothèses du cas limite $D \sim D_c$.

La première figure 4.15 (a) montre la position des arches instables h_{Γ}/d pour différentes ouvertures comprises entre $D/d = 13.6$ et 21.8 , ainsi que pour le cas limite $D \sim D_c$. Dans le cas non-cohésif, on observe une croissance rapide de h_{Γ} avec D , bien décrite par une loi exponentielle :

$$h_{\Gamma}(D)/d = C_3 \exp\left(C_4 \frac{D}{d}\right), \quad (4.10)$$

avec $C_3 = 0.515$ et $C_4 = 0.160$. Bien que purement empirique, cette relation suggère que les arches instables se forment à des hauteurs de plus en plus grandes quand D augmente. L'hypothèse est qu'au-delà d'un certain seuil, la formation d'arches devient incertaine : la distance croissante entre les points d'appui rend les structures de plus en plus instables, et les motifs de fluctuations de vitesse tendent à disparaître. Cette figure montre également que la cohésion magnétique augmente légèrement la position des arches pour une taille d'ouverture fixée.

Le second graphique 4.15 (b) présente l'évolution de l'accélération moyenne a_{Γ}/g au niveau des arches instables. On observe une décroissance quasi-linéaire de a_{Γ} avec l'ouverture D , traduisant une perte progressive d'effica-

cité des arches à ralentir l'écoulement. Autrement dit, plus l'ouverture est grande, **moins les arches freinent le flux**. Cette tendance est modélisée par la relation linéaire :

$$a_{\cap}(D)/g = C_5 \frac{D}{d} + C_6, \quad (4.11)$$

où $C_5 = -0.046$ et $C_6 = 1.198$. Selon cette loi, a_{\cap} tend vers zéro pour $D/d \sim 28$, suggérant une ouverture critique au-delà de laquelle les arches instables cesseraient de se former et où l'écoulement ne serait plus intermittent. Nous observons que la cohésion baisse légèrement la valeur d'accélération a_{\cap} pour une ouverture donnée, ce qui est cohérent avec le déplacement de la zone de formation des arches plus haut dans le réservoir, où l'accélération est plus faible.

Enfin, la troisième courbe 4.15 (c) met en évidence la corrélation entre les fluctuations de vitesse au centre des arches v'_{\cap} et l'accélération a_{\cap} . Une relation affine permet également de modéliser cette dépendance :

$$a_{\cap}(v'_{\cap})/g = C_7 \frac{v'_{\cap}}{\sqrt{gd}} + C_8, \quad (4.12)$$

avec $C_7 = 9.558$ et $C_8 = -3.836$. Cette relation montre que la dynamique des fluctuations est directement liée à la stabilité des arches : plus a_{\cap} est faible, plus les variations de vitesse sont réduites, ce qui confirme que la formation et la disparition des arches instables sont à l'origine des fluctuations observées dans l'écoulement granulaire. Si la cohésion influence légèrement h_{\cap} et a_{\cap} , nous montrons qu'elle augmente significativement l'intensité des fluctuations au niveau des arches, comme l'illustre le décalage vers la droite des points sur la figure 4.15 (c). Ce résultat confirme l'observation de la figure 4.12.

En conclusion, nous montrons dans cette section que les particules dans le réservoir convergent vers une zone où la dynamique est principalement pilotée par la formation en continu d'arches instables. L'origine de ce phénomène reste à ce jour inconnue.

4.3 Écoulement à l'ouverture

Cette dernière section se concentre sur l'écoulement au plus près de la sortie du silo, en dessous des arches instables. C'est dans cette zone que la plupart des études portant sur la vidange de silo quasi-2D se focalisent. Nous présentons l'influence de la cohésion magnétique sur la dynamique du milieu granulaire.

4.3.1 Profils au niveau de la sortie

Parmi les résultats remarquables dans les études sur la vidange de silo, l'observation de l'**auto-similarité des profils** de vitesse et de compacité figure parmi les plus robustes [14, 118]. La figure 4.16 (a) montre l'ensemble des profils de vitesse normalisés obtenus pour tous les paramètres expérimentaux explorés.

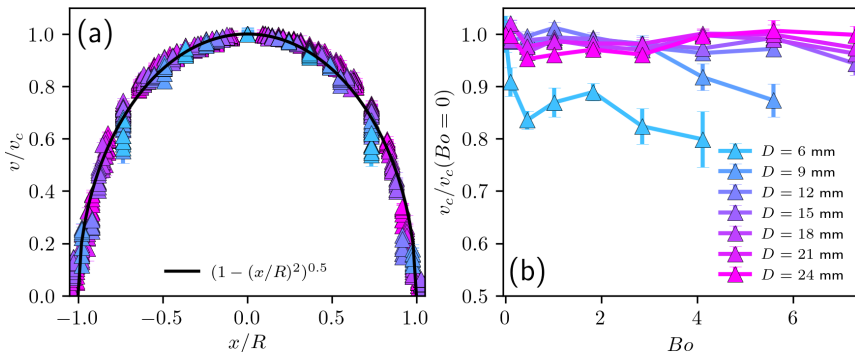


FIGURE 4.16 – (a) Profils de vitesse normalisés $v(x)/v_c$ à l'ouverture pour toutes les tailles D et intensités de cohésion Bo . (b) Variation de la vitesse centrale v_c en fonction de Bo pour différentes tailles d'ouvertures.

Nous retrouvons l'auto-similarité des profils de vitesse, et nous confirmons que celle-ci **n'est pas affectée par les interactions magnétiques anisotropes**. Cette invariance s'explique par la nature des forces en jeu : les interactions attractives et orientées verticalement s'exercent sur toutes les particules de manière similaire, quelle que soit leur position x/R le long de l'ouverture. Autrement dit, si une particule se situe au centre de la sortie ou sur ses bords, elle subit des forces magnétiques de même intensité et orientées de la même façon. Les vitesses au centre de l'ouverture, notées v_c et représentées sur la figure 4.16 (b), sont elles aussi très peu affectées par la cohésion magnétique. On observe toutefois une légère diminution

de v_c pour les diamètres d'ouverture $D = 9$ mm et $D = 6$ mm, avec une baisse respective de 10% et 20%. Cette réduction peut être directement attribuée aux forces magnétiques attractives verticales. À ces petites ouvertures, l'écoulement est suffisamment lent pour que l'effet de la cohésion magnétique soit important devant l'inertie des particules. Celles-ci sont alors freinées dès le début de leur chute, ce qui réduit la vitesse au centre de la sortie du silo. En revanche, pour des ouvertures plus larges, la vitesse d'écoulement étant plus élevée, l'influence des forces magnétiques devient faible par rapport à l'inertie. La légère variation de v_c observée dans ce cas est liée à la modification de la structuration interne du milieu granulaire, comme nous le verrons au dernier chapitre de cette thèse.

De même, les profils de fraction volumique $\phi(x)$ normalisés par la valeur au centre ϕ_c présentent un comportement autosimilaire (voir Fig. 4.17 (a)). L'ajustement par la relation (1.43) permet d'extraire un facteur de forme de $1/\nu = 0.32 \pm 0.04$.

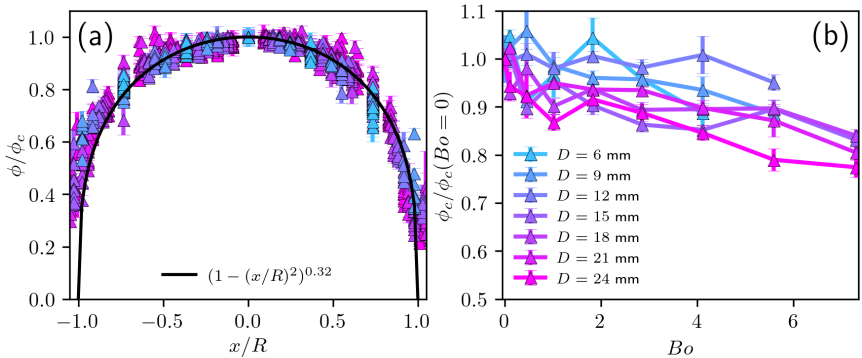


FIGURE 4.17 – (a) Profils de fraction volumique $\phi(x)/\phi_c$ au niveau de l'ouverture pour toutes les tailles d'ouverture et toutes les intensités de cohésion. (b) Évolution de la compacité au centre de l'ouverture ϕ_c en fonction de l'intensité de la cohésion Bo .

L'écart avec les valeurs issues de la littérature ($1/\nu = 0.22$ [14] et $1/\nu = 0.2 \pm 0.2$ [108]) s'explique par plusieurs facteurs :

- **Sensibilité de l'ajustement** : la différence de forme des profils est près de deux fois plus marquée entre $1/\nu = 0.32$ et $1/\nu = 0.5$ (aire ~ 0.115) qu'entre $1/\nu = 0.32$ et $1/\nu = 0.2$ (aire ~ 0.062). La courbe pour $1/\nu = 0.32$ est donc plus proche de la courbe pour $1/\nu = 0.2$ que de la courbe pour $1/\nu = 0.5$.

- **Biais expérimentaux** : une légère parallaxe tend à écraser les profils selon x/R , ce qui augmente légèrement $1/\nu$ lors de l'ajustement.

Bien que la cohésion n'a pas d'effet clairement visible sur la forme des profils de compacité, elle impacte significativement ϕ_c . La figure 4.17 (b) représente l'évolution de ϕ_c en fonction de l'intensité de la cohésion. Pour toutes les tailles d'ouvertures, la compacité ϕ_c baisse jusqu'à 80% de sa valeur initiale pour la cohésion la plus forte. Ces résultats sont cohérents avec la baisse de compacité dans le réservoir observée précédemment (voir Fig. 4.8 (b)). Ils vont également dans le sens d'un renforcement des arches en chute libre au dessus de l'ouverture. Plus celles-ci sont résistantes, plus les particules en dessous d'elles ont le temps de tomber du fait de la gravité, et donc moins la zone est dense.

4.3.2 Dilatation à la sortie

La figure 4.18 (a) montre l'évolution de la compacité normalisée ϕ_c/ϕ_b en fonction de la taille adimensionnée de l'ouverture D/d . La relation (1.43) peut être ajustée aux données expérimentales pour $Bo = 0$. On obtient alors les valeurs de $\alpha = 0.93$ et $\beta = 0.15$. Celles-ci diffèrent légèrement de celles obtenues par Janda et al. [14], Benyamine et al. [107] et Gans et al. [41] mais restent globalement du même ordre de grandeur. La table suivante 4.1 compare les différents paramètres choisis dans ces trois études et celle présentée dans cette section.

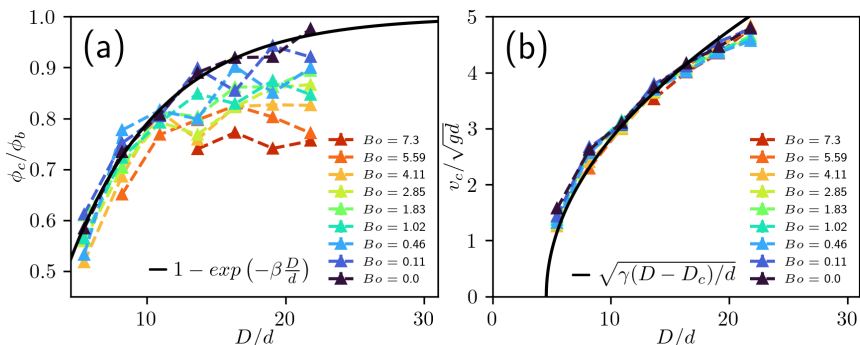


FIGURE 4.18 – (a) Compacité normalisée ϕ_c/ϕ_b et (b) vitesse normalisée v_c/\sqrt{gd} en fonction de l'ouverture normalisée D/d pour différentes intensités de cohésion.

	L (mm)	d (mm)	W (mm)	α	β
Résultats	100	1.1 ± 0.1	1.25	0.93	0.15
Benyamine et al. [107]	60	< 4.5	3.5 – 10	0.66	0.11
Janda et al. [14]	200	1.00 ± 0.01	1.1	0.50	0.30
Gans et al. [41]	110	0.34 / 0.80	20	0.47	0.08

TABLE 4.1 – Table des paramètres expérimentaux L (largeur de la cavité), W (épaisseur de la cavité) et d (taille des grains) ainsi que des paramètres d’ajustement de la fonction de dilataance obtenus α et β dans différentes études [41, 107, 14] ainsi que dans le cadre de cette thèse.

La forme exponentielle de la fonction $\phi_c(D)$ reflète l’importance des **arches instables** dans la dynamique de vidange du silo. Elle permet de définir trois régimes d’écoulement en fonction de la taille de la sortie :

- **Régime de blocage** ($D/d \leq 4.5$) : Des arches stables peuvent se former et obturer la sortie du silo.
- **Régime intermittent** ($4.5 \leq D/d \leq 28$) : Des arches instables se forment en continu au-dessus de la sortie, impactant la fraction de particule dans la zone de l’ouverture. L’analyse précédente pressent que l’influence de ces structures est limitée pour des tailles d’ouverture supérieures à $D/d > 28$.
- **Régime continu** ($D/d \geq 28$) : Si des forces structurées existent, elles n’ont aucune incidence sur l’écoulement au niveau de la sortie.

Le paramètre β traduit le taux de croissance de ϕ_c/ϕ_b en fonction de D/d . Plus β est grand, plus le plateau $\phi_c/\phi_b \sim 1$ est atteint pour des petites valeurs de D/d . Il caractérise donc **la taille du régime intermittent** sur l’échelle D/d . La figure 4.18 (a) montre que la cohésion magnétique baisse systématiquement la compacité ϕ_c . Cela confirme que les interactions magnétiques stabilisent les arches. Dans la gamme d’ouverture explorée, **la cohésion rend l’écoulement toujours intermittent**.

La figure 4.18 (b) montre l’évolution de la vitesse normalisée v_c/\sqrt{gd} en fonction de la taille de l’ouverture pour différentes intensités de cohésion Bo . Les interactions magnétiques n’ont quasiment pas d’effet sur la vitesse au centre de l’ouverture, comme le suggérait déjà la précédente figure 4.16 (b). En revanche contrairement à ce qui est observé dans la littérature, nous observons que la vitesse v_c , même en l’absence de cohésion, ne s’exprime pas comme une fonction de la racine carré de l’ouverture, mais plutôt comme suit :

$$v_c = \sqrt{gd} \sqrt{\gamma(D - D_c)/d}. \quad (4.13)$$

Cette observation peut s'expliquer par une méthode de calcul différente pour la vitesse v_c . Dans notre étude, nous avons observé que la vidange s'initie pour $D/d \sim 5.5$ mais pas toujours $D/d \sim 4.5$ ce qui concorde avec les études de Zuriguel et al. [4] et de Benyamine et al. [107] qui prévoient que le silo peut se bloquer pour des valeurs respectives de $D_c \sim 4.5$ et $D_c \sim 4.1$. En supposant $D_c/d \sim 4.5$ dans notre cas, la loi (4.13) s'ajuste au mieux aux données avec $\gamma = 1.46$.

4.3.3 Loi de débit

Le débit de vidange peut se calculer en intégrant les profils de vitesse et compacité au niveau de la sortie, selon la formule introduite au premier chapitre (1.46). Une autre approche, plus précise, repose sur la conservation du débit. Elle consiste à calculer l'intégrale du produit des profils de vitesse et compacité, puis de moyennner sur toutes les couches de hauteur y/d :

$$Q = \left\langle \int_{-L/2}^{+L/2} v(x, y) \phi(x, y) dx \right\rangle_y. \quad (4.14)$$

La figure 4.19 (a) présente l'évolution du débit Q en fonction de la taille de l'ouverture du silo pour toutes les intensités de cohésion explorées.

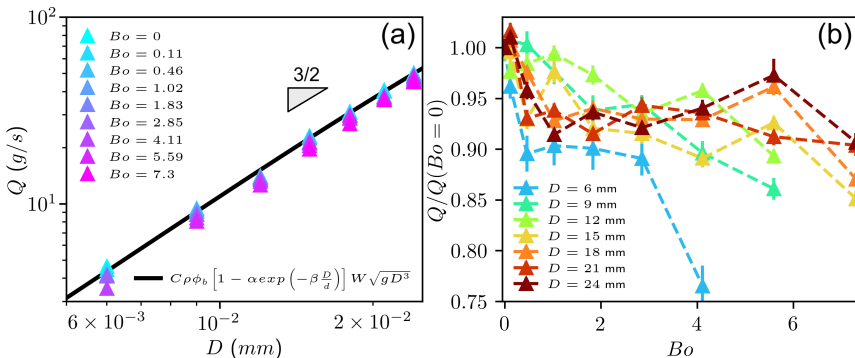


FIGURE 4.19 – (a) Débit Q en fonction de la taille de l'ouverture D pour toutes les intensités de cohésion étudiées. (b) Débit normalisé par le débit sans cohésion $Q/Q(Bo = 0)$ en fonction de l'intensité de la cohésion Bo pour différentes tailles d'ouvertures D .

Les données pour $Bo = 0$ s'ajustent bien à l'expression de la loi de débit (1.47) adaptée dans le cas quasi-2D :

$$Q = C \rho \phi_b [1 - \alpha \exp(-\beta D)] W \sqrt{gD^3}. \quad (4.15)$$

Les paramètres d'ajustement obtenus sont $C = 0.79$, $\alpha = 0.62$ et $\beta = 0.11$. Il est intéressant de noter que ces valeurs de α et β sont encore plus proches des valeurs de Benyamine et al. [107] que celles obtenues précédemment à partir de l'ajustement de la compacité au niveau du centre de l'ouverture (voir table 4.1). Cela peut s'expliquer par une meilleure précision de la méthode d'estimation du débit.

La figure 4.19 (b) montre le détail de l'influence de la cohésion sur le débit de vidange. Globalement, les interactions magnétiques ont pour effet de baisser progressivement le débit, peu importe la taille de l'ouverture. Cela conforte les résultats précédents, qui montrent que la cohésion affecte peu la vitesse mais diminue clairement la fraction volumique en particules au niveau de la sortie. En allant un peu plus loin dans l'analyse de ces courbes, on observe l'émergence d'un comportement **non-monotone** pour les grandes ouvertures ($D > 18$ mm). Après une décroissance rapide d'environ 5% de leur valeur initiale, les débits normalisés stagnent avant de décroître à nouveau. En particulier, un maximum local de débit est observé pour $D = 24$ mm et $D = 18$ mm, situé autour de $Bo = 5.59$. Le chapitre 6 portant sur la microstructure du milieu granulaire donnera des éléments expliquant l'origine de la non-monotonie du débit en fonction de la cohésion pour les grandes ouvertures.

Conclusion

Ce quatrième chapitre présente comment la cohésion magnétique modifie la vidange du silo-2D. Nous avons vu que les interactions magnétiques entre particules jouent un **rôle stabilisant** pour le milieu granulaire :

- **Seuil d'écoulement** : Elles augmentent la taille minimale d'ouverture D_c nécessaire pour initier une vidange. Ce résultat confirme bien que le seuil critique en l'absence de cohésion $D_c \sim 4.5d$ n'est pas associé à un régime dynamique collectif particulier, mais qu'il est plutôt lié uniquement aux interactions entre particules. En ce sens, nous retrouvons l'analyse de Thomas et al., qui ne détecte aucune

singularité dans les paramètres décrivant la distribution des fluctuations de vitesse pour une taille d'ouverture proche de D_c .

- **Canalisation des zones mortes** : L'effet stabilisant des interactions s'observe également sur les zones mortes statiques, dont la taille augmente linéairement avec l'intensité de la cohésion. En conséquence, le flux granulaire dans le réservoir du silo se canalise durant la phase de vidange. Bien que l'interaction magnétique soit anisotrope, nous découvrons donc dans ce chapitre que cette cohésion particulière a le même effet que d'autres formes de cohésions, telle que la cohésion par adhésion par exemple, qui est isotrope. [41].
- **Augmentation de la porosité** : La cohésion augmente la porosité du milieu granulaire, à la fois en régime statique et dynamique. Cela confirme que son effet stabilise bien la structure interne du milieu, en favorisant des organisations internes spécifiques caractérisées par des volumes libres associés à chaque grain plus élevés.

Notre analyse détaillée des champs eulériens a également permis de mettre en lien **trois régimes d'écoulement** distincts : le régime de blocage ($D \sim 4.5d$), le régime intermittent ($4.5d < D < 28d$) et le régime continu ($D \geq 28d$). L'étude des fluctuations de vitesse et de l'accélération moyenne a permis de **dévoiler l'existence d'arches instables**, phénomène central responsable de l'intermittence de la vidange de silo pour des tailles d'ouverture modérées. Même si plusieurs études poussées ont exploré le mécanisme de blocage des silos pour les petites ouvertures $D \sim D_c$, des études plus approfondies sont nécessaires pour mieux comprendre la dynamique des arches instables dans le régime intermittent. Si l'ensemble des différentes mesures eulériennes permet d'en dessiner les contours, de nombreuses questions à leur sujet subsistent. Le prochain chapitre se concentre spécifiquement sur ce processus, et surtout sur la conséquence de son existence : l'émergence d'ondes internes de forces.

5) Ondes internes

Ce chapitre présente plus en détail le processus de formation des arches instables au cœur de l'écoulement, que nous avons pu observer pour la première fois à l'**échelle locale** du système, grâce à la très haute fréquence d'acquisition de la caméra rapide. Ce mécanisme reste peu étudié dans la littérature, qui s'intéresse principalement à l'écoulement en sortie. Les quelques articles portant plus spécifiquement sur ce phénomène adoptent une approche macroscopique plutôt que locale compte tenu de la technologie disponible à l'époque, avec l'utilisation de différents capteurs (géophone pour la mesure de la fréquence des vibrations, capteur de niveau de la surface libre, sonde de pression interne) [89, 104]. Dans la première section, nous montrons que ces arches instables peuvent être visualisées grâce à la mesure des champs instantanés d'accélération des particules. Ensuite, la deuxième section établit le lien entre l'apparition d'une arche instable et la génération d'une **impulsion d'onde** de force ascendante. Enfin, la troisième section se concentre sur l'étude détaillée de ce phénomène, étroitement lié au **chant des silos**. Nous montrons que le lien entre les fluctuations de débit et ces ondes n'est pas trivial, et mettons également en évidence l'influence de la cohésion magnétique sur les caractéristiques principales des ondes, telles que leur fréquence d'apparition et leur vitesse de propagation dans le milieu.

Table des matières

5.1	Visualisation des forces en écoulement	150
5.2	Description des impulsions d'onde	153
5.2.1	Étapes de la génération d'une impulsion	153
5.2.2	Décomposition en mode dynamique	156
5.3	Caractérisation des ondes	159
5.3.1	Fréquence d'émission	159
5.3.2	Vitesse des ondes et taille d'impulsion	165
	Conclusion	174

5.1 Visualisation des forces en écoulement

La visualisation des arches instables au cours de l'écoulement repose essentiellement sur la mesure de l'accélération instantanée des particules. Pour un grain à un instant donné t , celle-ci est représentée dans la base cartésienne par le vecteur $\mathbf{a}_i(t)$ tel que :

$$\mathbf{a}_i(t) = a_{x_i}(t)\mathbf{e}_x + a_{y_i}(t)\mathbf{e}_y, \quad (5.1)$$

où \mathbf{e}_x est le vecteur unitaire dirigé horizontalement vers la droite et \mathbf{e}_y le vecteur unitaire dirigé verticalement vers le bas. Cette accélération est directement reliée à la résultante des forces exercées sur la particule à cet instant à travers la seconde loi de Newton. Dans l'écoulement, une particule décélère si une force la **freîne dans son déplacement**, dans une direction donnée.

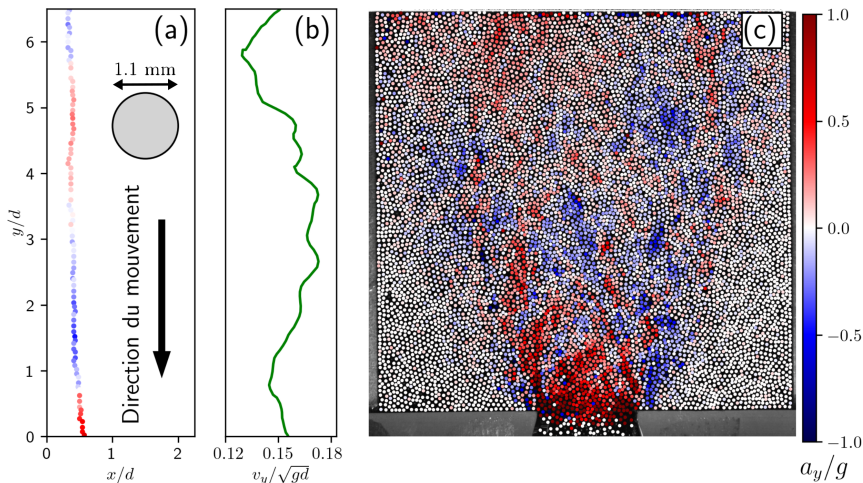


FIGURE 5.1 – (a) Trajectoire d'un grain situé au centre de l'écoulement, colorié en fonction de son accélération verticale instantanée $a_{y_i}(t)$ et (b) vitesse v_y/\sqrt{gd} associée. (c) Champ lagrangien de l'accélération verticale instantanée de chaque particule en écoulement, superposé à l'image brute de l'instant correspondant pour $D = 24$ mm.

Par exemple, la figure 5.1 (a) représente la trajectoire d'un grain au centre de l'écoulement, se dirigeant vers le bas. Le temps qui s'écoule entre chaque position est de 0.0005 s, ce qui correspond à la fréquence d'acquisition des images de 2000 Hz. Cette trajectoire est coloriée en fonction de l'accélé-

ration verticale de la particule $a_{y i}$. Les positions rouges correspondent à des phases d'accélération vers la sortie du silo ($a_{y i} > 0$) alors que les positions bleues correspondent à des phases de décélération de la particule ($a_{y i} < 0$). Cela montre qu'à certain moment, des **forces apparaissent et s'opposent directement au mouvement de la particule**. Au cœur de l'écoulement, et bien que celui-ci soit stationnaire, la dynamique des particules alterne donc entre des phases d'accélération vers le bas et des phases de décélération.

La figure 5.1 (c) représente la composante verticale d'accélération $a_{y i}$ de toutes les particules identifiées, à un instant donnée. Celles-ci sont représentées par des disques colorés en fonction de la valeur de $a_{y i}$, comme pour la figure 5.1 (a). Les particules dans les zones mortes sont représentées en blanc car leur accélération verticale est nulle ($a_{y i} \sim 0$). Bien que l'écoulement global soit stationnaire, cette figure montre que les particules peuvent décélérer **collectivement par endroit** lors de la vidange. La figure 5.1 (c) montre que les zones de décélération en bleu regroupent plusieurs particules en même temps, ce qui signifie que les forces freinant le mouvement des grains **se propagent dans le milieu** lors de l'écoulement. Ces zones de décélération collective présentent une structure filamenteuse. Elles mettent en évidence la présence de **chaînes de forces** au sein de l'écoulement. La figure 5.1 (c) montre également deux zones de chute libre ($a \sim g$) situées de part et d'autre de l'ouverture. L'accélération des particules au centre de la sortie est légèrement inférieure à la gravité ($a < g$). Ces observations instantanées confirment la structuration de la dynamique au niveau de l'ouverture, décrite au chapitre précédent (voir section 4.2.1) et établie à partir des mesures moyennes d'accélération (voir Fig. 4.10). En d'autres termes, la zone située à proximité immédiate de l'ouverture ne présente a priori **pas de fluctuations significatives** des forces exercées sur les particules dans cette région.

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la théorie des "free-fall arches", qui propose l'existence de chaînes de force organisées en forme d'arche au-dessus de l'ouverture du silo. Les mesures eulériennes moyennées dans le temps, en particulier celles portant sur les fluctuations de vitesse, ont fourni des éléments en faveur de cette hypothèse. Toutefois, ces observations ne permettaient pas de valider formellement l'existence de telles structures. C'est grâce à l'analyse de l'accélération instantanée des particules que nous pouvons désormais confirmer de manière directe et sans

ambiguïté que **ces structures existent bel et bien dans l'écoulement** lors de la vidange du silo. La figure 5.2 (a) illustre une zone importante de décélération qui prend naissance de part et d'autre de l'ouverture et s'étend au-dessus de celle-ci en suivant une zone arquée. Cette configuration correspond à l'instant où **une arche instable se forme**. La présence de cette structure ralentit le mouvement des grains sur une large région, dont les contours coïncident ici de manière remarquable avec la ligne iso-accélération $a_{\cap}/g = 0.19$ (indiquée en jaune).

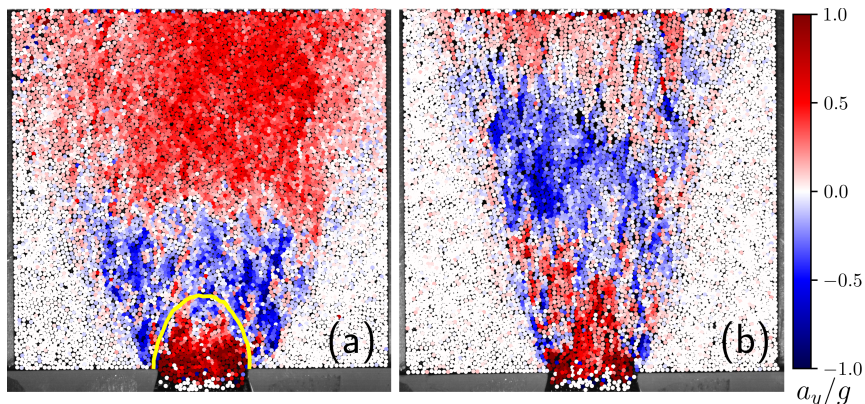


FIGURE 5.2 – Champ d'accélération verticale instantanée $a_{y i}(t)$ des particules pour $D = 24$ mm, (a) sans cohésion ($Bo = 0$) et (b) avec cohésion ($Bo = 7.3$). Sur la figure (a), la ligne jaune correspond à l'iso-accélération $a = 0.19g$, également représentée sur la figure précédente 4.14 (g).

La figure 5.2 (b) présente le champ d'accélération verticale instantanée des particules dans le cas fortement cohésif. En comparant ces deux profils, on observe à nouveau la canalisation de l'écoulement, mise en évidence par l'élargissement des zones où les particules n'ont pratiquement aucune accélération. Au-delà de ce changement dans la structure macroscopique, on note également une transformation des motifs de décélération au sein même de l'écoulement. Ces zones sont davantage **étirées dans la direction verticale** qu'en l'absence de cohésion, et présentent une morphologie plus **filandreuse**. Les interactions magnétiques induisent la formation de structures verticales en chaînes de particules, qui glissent les unes par rapport aux autres. Lorsqu'un de ces agrégats filiformes subit une décélération, les groupes de particules adjacents restent plus faiblement liés en raison des forces répulsives, ce qui facilite l'apparition de lignes de rupture et favorise ainsi un cisaillement localisé selon la verticale.

5.2 Description des impulsions d'onde

En plus de révéler la formation d'une arche instable au cours de l'écoulement, la figure 5.2 (a) met en évidence l'origine d'une impulsion **d'onde de force**. Les zones de décélération localisées au niveau de l'arche semblent en effet se propager vers le haut, au-dessus de cette structure. Étant donnée la stationnarité de l'écoulement, ces zones de décélération sont transitoires : elles disparaissent progressivement et cèdent la place à une nouvelle phase d'accélération. Ce comportement fluctuant avait déjà été suggéré par l'analyse de la trajectoire individuelle d'une particule (voir Fig. 5.1 (a)).

5.2.1 Étapes de la génération d'une impulsion

La figure 5.3 illustre de manière plus directe l'émergence de l'impulsion d'une onde dans le milieu granulaire, en représentant le champ eulérien instantané de l'accélération verticale $a_y(x, y, t)/g$ à différents instants. Celle-ci est entourée des lignes de niveaux du champ de décélération ($a_y(x, y, t)/g$ pour (x, y) tels que $a_y(x, y, t) \in [-0.1, -0.25, -0.5]$).

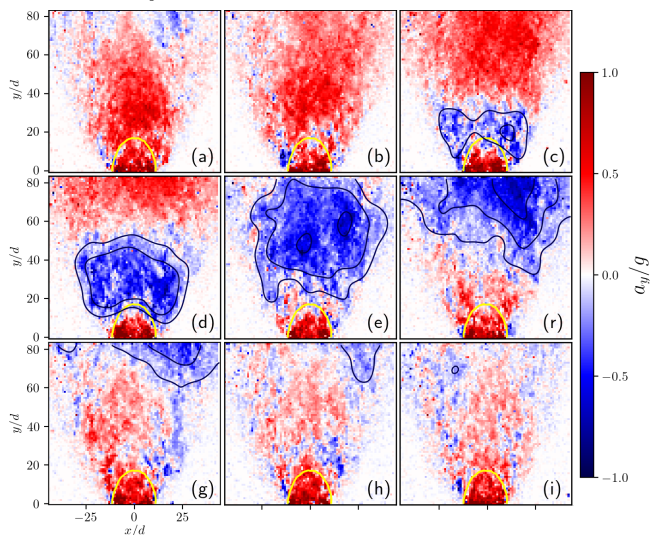


FIGURE 5.3 – Champs eulériens d'accélération verticale $a_y(x, y, t)/g$ à différents instants : (a) 0 s, (b) 0.005 s, (c) 0.01 s, (d) 0.015 s, (e) 0.02 s, (f) 0.025 s, (g) 0.03 s, (h) 0.035 s et (i) 0.04 s, sans cohésion et pour une ouverture de silo de $D = 24$ mm. Les lignes de niveau $a_y/g \in [-0.1, -0.25, -0.5]$ sont représentées sur la figure.

Cette série de champs instantanés permet ainsi de suivre visuellement **la propagation temporelle de l'onde de force** à travers le matériau. Dans un premier temps, le milieu granulaire est globalement en phase d'accélération vers le bas (Fig. 5.3 (a) et (b)). Une arche commence ensuite à se former de chaque côtés de l'ouverture (Fig. 5.3 (b)) puis se consolide progressivement, induisant une décélération importante des grains à son niveau (Fig. 5.3 (c) et (d)). Cette structure instable finit par se briser (Fig. 5.3 (e) et (f)), ce qui marque le début d'une nouvelle phase d'accélération pour les particules situées à proximité de l'ouverture (Fig. 5.3 (g), (h) et (i)). L'impulsion associée à l'onde de force émerge précisément au moment de la consolidation de l'arche (Fig. 5.3 (c)). Elle se propage ensuite rapidement à travers le milieu granulaire, vers le haut du réservoir (Fig. 5.3 (d), (e) et (f)), illustrant **le processus de propagation des forces** à l'échelle du système.

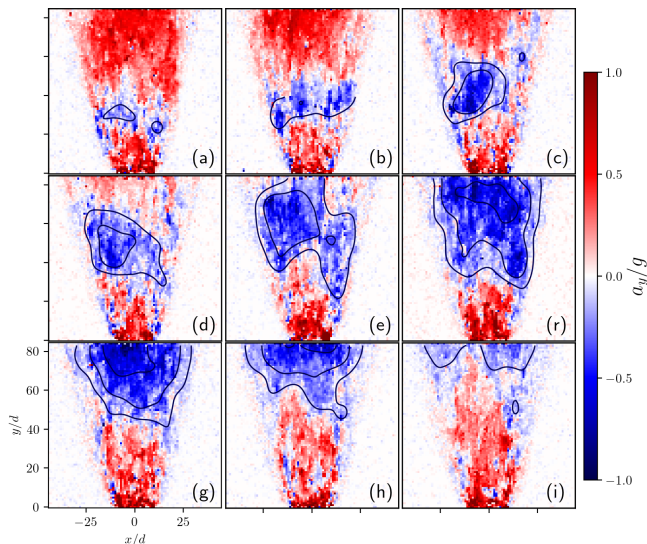


FIGURE 5.4 – Champs eulériens d'accélération verticale $a_y(x, y, t)/g$ à différents instants : (a) 0 s, (b) 0.0075 s, (c) 0.015 s, (d) 0.0225 s, (e) 0.03 s, (f) 0.0375 s, (g) 0.045 s, (h) 0.0525 s et (i) 0.06 s, avec cohésion ($Bo = 7.3$) et pour une ouverture de silo de $D = 24$ mm. Les lignes de niveau $a_y/g \in [-0.1, -0.25, -0.5]$ y sont représentées.

La génération d'impulsion d'onde se produit également en présence de cohésion magnétique dans le milieu. Sur le même principe que la figure précédente, la figure 5.4 représente l'apparition d'un front d'onde dans le

cas le plus cohésif étudié ($Bo = 7.3$). Ici, les profils représentés sont un peu plus espacés dans le temps, car le processus d'émergence d'une arche instable se révèle être plus lent.

La formation d'arches instables **n'est pas le seul mécanisme** à l'origine de la génération des ondes internes de pression. En plus du processus illustré dans la figure précédente, la figure 5.5 met en évidence un autre cas pouvant conduire aussi à la génération d'une impulsion d'onde dans le milieu granulaire. Plus précisément, il est possible qu'une **arche incomplète** soit à l'origine d'une onde de pression. Sur cette figure, les lignes de niveau du champ de décélération permettent de suivre l'évolution de la zone de décélération au cours du temps. Cette dernière apparaît initialement au niveau du bord gauche de l'ouverture (voir Fig. 5.5 (b)). Elle croît progressivement (Fig. 5.5 (c), (d) et (e)), puis commence à se propager vers le haut (de Fig. 5.5 (e) à (i)), tout en continuant à s'élargir. Simultanément, les particules situées au niveau des arches instables, sur le côté droit, ne cessent d'accélérer vers le bas qu'à partir de l'étape 5.5 (i).

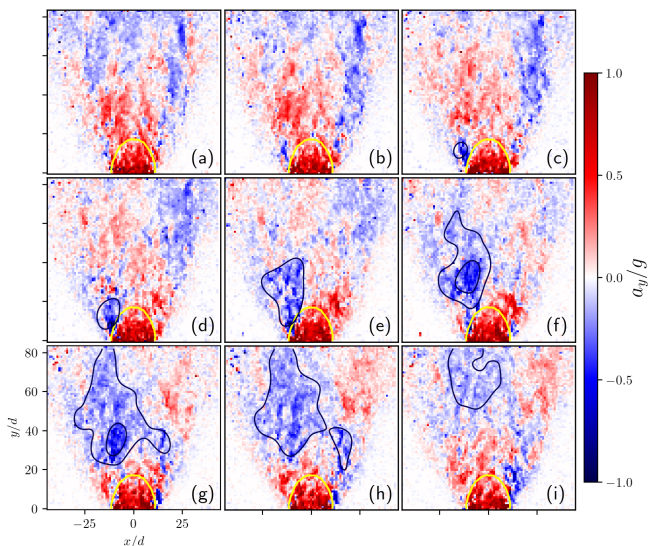


FIGURE 5.5 – Champs eulériens d'accélération verticale $a_y(x, y, t)/g$ à différents instants : (a) 0 s, (b) 0.005 s, (c) 0.01 s, (d) 0.015 s, (e) 0.02 s, (f) 0.025 s, (g) 0.03 s, (h) 0.35 s et (i) 0.4 s, sans cohésion et pour une ouverture de silo de $D = 24$ mm. Les lignes de niveau $a_y/g \in [-0.1, -0.25, -0.5]$ qui entoure la zone de décélération à gauche sont représentées sur la figure.

5.2.2 Décomposition en mode dynamique

Pour identifier plus précisément ces structures, nous appliquons la méthode de la décomposition en modes dynamiques (DMD) [126] des champs eulériens d'accélération verticale instantanée $a_y(x, y, t)$. Cette décomposition s'écrit :

$$a_y(x, y, t) \sim \sum_{p=1}^r \alpha_p \xi_p(x, y) \lambda_p^t, \quad (5.2)$$

où r correspond au nombre total de modes, $\xi_p(x, y)$ désigne le mode spatial associé au rang p , α_p représente l'amplitude complexe de ce mode pour la reconstruction du champ $a_y(x, y, t)$ à l'instant initial $t = 0$, et λ_p est la valeur propre complexe correspondant au mode p . Nous pouvons définir l'énergie associée à chaque mode de la façon suivante :

$$E_p = |\alpha_p|^2 \|\xi_p\|^2, \quad (5.3)$$

où $\|\xi_p\|^2$ désigne la norme L^2 du mode spatial p . Cette énergie fournit une estimation de l'importance relative de chaque mode dans la dynamique du système. Un mode avec une énergie plus élevée est généralement plus influent dans la reconstruction du champ $a_y(x, y, t)$.

La décomposition est appliquée à l'ensemble des champs $a_y(x, y, t)$ pour chaque vidange, indépendamment et dans le cas sans cohésion uniquement. Pour cela, nous utilisons la librairie Python open source `PyDMD`, avec laquelle nous extrayons systématiquement les $r = 12$ modes spatiaux ainsi que leur énergie. Les modes oscillants, associés à des valeurs propres complexes conjuguées, sont ensuite fusionnés : leurs parties réelles sont additionnées, de même que leur énergie.

La figure 5.6 (b,c,d) montre un exemple de décomposition pour une vidange avec une ouverture de silo de $D = 24$ mm. Afin d'en améliorer la précision, les champs d'accélération instantanés ont été lissés par convolution avec une gaussienne d'écart-type $\sigma = 2.4$, en utilisant la fonction `gaussian_filter` du module `scipy.ndimage`. Le premier mode spatial (Fig. 5.6 (b)) correspond au champ moyen de l'accélération verticale. Sa valeur propre, réelle et proche de 1 ($\lambda_1 \approx 1$), indique que cette contribution est quasiment constante dans le temps. La figure 5.6 (a) présente la moyenne obtenue par calcul direct du champ d'accélération verticale ; **la ressemblance des**

profils confirme la validité de l'analyse. L'énergie de chaque mode est alors normalisée par l'énergie totale de l'ensemble des modes, notée E_{tot} .

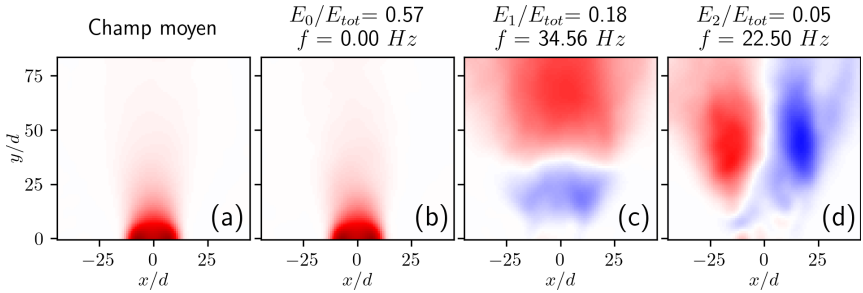


FIGURE 5.6 – (a) Champ euclidien moyen de l'accélération verticale $\langle a_y \rangle_t(x, y)$. Parties réelles des modes spatiaux obtenues par la décomposition d'une série de champ : (b) mode moyen $\text{Re}(\xi_0 + \bar{\xi}_0)$, (c) mode fluctuant $\text{Re}(\xi_1 + \bar{\xi}_1)$ et (d) mode asymétrique $\text{Re}(\xi_2 + \bar{\xi}_2)$. Un flou gaussien d'écart-type $\sigma = 2.4$ a été appliqué à chaque profil.

Cette décomposition met clairement en évidence **l'existence d'impulsions d'onde** au cours de la vidange. Le deuxième mode (Fig. 5.6 (c)), dont l'énergie est relativement importante par rapport au mode moyen, est associé au processus d'apparition des arches instables. La forte ressemblance entre ce mode oscillant principal et le profil instantané présenté sur la figure 5.3 (d) renforce cette interprétation. Par ailleurs, la décomposition en modes dynamiques révèle également la présence d'un mode asymétrique (Fig. 5.6 (d)). Bien que ce dernier soit moins bien défini et possède une énergie nettement inférieure à celle des deux modes principaux, son existence suggère que des blocages partiels, apparaissant préférentiellement sur l'un des deux bords, peuvent bel et bien survenir au cours de la vidange. En revanche, l'analyse des énergies montre qu'il ne s'agit pas du processus principal de la génération des ondes.

Pour chaque taille d'ouverture explorée, les champs euclidiens $a_y(x, y, t)$ de cinq vidanges sont décomposés en modes dynamiques. Pour chaque cas, nous identifions le mode moyen ainsi que le mode oscillant principal, puis nous extrayons les valeurs de leur énergie respective. Nous calculons également l'énergie totale de la décomposition, qui correspond à la somme des énergies de l'ensemble des modes. Pour une ouverture donnée, l'énergie de l'ensemble des modes moyens identifiés est ensuite moyennée, de même que celle du mode oscillant principal. La figure 5.7 représente ainsi l'évolution

des énergies de chaque mode en fonction de D/d . Sur cette figure, toutes les valeurs sont normalisées par l'énergie totale de chaque décomposition.

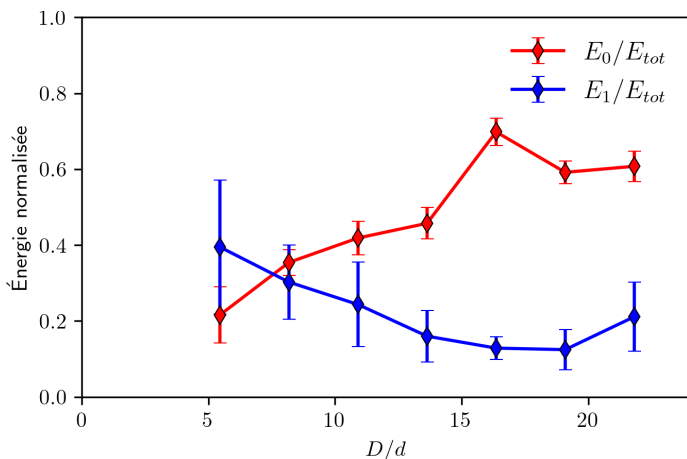


FIGURE 5.7 – Évolution de l'énergie normalisée (en rouge) du mode moyen E_0/E_{tot} et (en bleu) du mode oscillant principal E_1/E_{tot} , en fonction de la taille normalisée de l'ouverture du silo D/d .

Nous observons que l'énergie du mode moyen E_0/E_{tot} augmente systématiquement avec la taille de l'ouverture, tandis que celle du mode oscillant principal E_1/E_{tot} diminue. Cette évolution indique que la dynamique globale de l'écoulement devient progressivement dominante par rapport à celle des arches temporaires, lesquelles perdent en stabilité, et exercent une influence de plus en plus faible sur le mouvement collectif des particules. En revanche, pour une ouverture de $D = 6$ mm, les résultats montrent que l'énergie du mode oscillant principal E_1/E_{tot} est du même ordre de grandeur que celle du mode moyen E_0/E_{tot} . Autrement dit, dans le cas des petites ouvertures, la dynamique du système est fortement gouvernée par **les arches instables**. Ce constat suggère l'existence d'un régime particulier, associé aux arches stables, lorsque $D \sim 4.5d$.

L'ensemble de ces résultats renforcent davantage les conclusions faites au chapitre précédent. Lorsque l'ouverture est relativement petite par rapport à la taille des particules ($D \leq 28$), la vidange d'un silo est **significativement influencée par l'existence d'une instabilité : la formation d'arches fragiles au-dessus de l'orifice de sortie**. Dans cette section,

l'analyse en décomposition en modes dynamiques nous a montré que la dynamique associée à ces structures solides instables devient de plus en plus importante devant la dynamique moyenne du milieu granulaire quand la taille de l'ouverture D baisse, jusqu'à être du **même ordre de grandeur** lorsque $D \sim D_c$. Enfin la nature expérimentales des données et le faible nombre de répétitions (cinq vidanges par taille d'ouverture) **limitent fortement la précision des décompositions**. Même si l'**existence de modes asymétriques oscillants** ont pu être mis en évidence, il n'a pas été possible d'analyser rigoureusement leur importance face à la dynamique des arches instables. De plus, le manque de temps et la complexité technique de la méthode n'ont pas permis de l'appliquer aux champs $a_y(x, y, t)$ en présence de cohésion magnétique dans les délais impartis de cette thèse.

5.3 Caractérisation des ondes

Dans cette dernière section, nous nous focalisons sur la caractérisation des ondes de forces. Nous supposons que ces ondes correspondent à une succession périodique de fronts d'onde se propageant vers le haut du silo. Ils peuvent donc être caractérisés par leur fréquence d'émission, notée \tilde{f} , leur vitesse de propagation dans le milieu granulaire, notée \tilde{v} , et une certaine longueur caractéristique, notée $\tilde{\lambda}$, que nous discutons par la suite. Dans cette section, nous étudions notamment l'impact de la cohésion magnétique sur \tilde{f} et \tilde{v} , et en déduisons la valeur de $\tilde{\lambda}$ et son interprétation.

5.3.1 Fréquence d'émission

L'analyse des modes dynamiques révèle que les ondes internes de forces sont essentiellement émises par des arches instables qui apparaissent sur **une zone arquée** bien précise au dessus de l'ouverture. Afin d'étudier plus en détail ce processus, nous nous focalisons sur l'évolution temporelle de l'accélération $a_y(x, y, t)$ le long d'une bande verticale située au centre du profil en $x/d = 0$. Les diagrammes spatio-temporels, notés $\overline{a_y}(y, t)$, sont obtenus en calculant, pour chaque hauteur y et à chaque instant t , la moyenne de l'accélération entre $x/d = -5$ et $x/d = +5$.

La figure 5.8 montre plusieurs diagrammes spatio-temporels pour différentes tailles d'ouverture, avec et sans cohésion. Ils montrent l'existence de **franges bleues** correspondant aux **fronts d'ondes de décélération**. Celles-ci sont **périodiquement espacées** et légèrement inclinées dans le sens horaire, indiquant que les impulsions se propagent toujours vers le haut au cours du temps. Le caractère oscillant, déjà mis en lumière par l'analyse des modes dynamiques, est confirmé par la répétition de ces motifs. L'existence des ondes est révélée de la même façon sur les diagrammes, que l'ouverture soit petite (Fig. 5.8 (a)) ou grande (Fig. 5.8 (e)). On note tout de même que la taille de la zone d'accélération positive (représentée en rouge, près du fond du silo ($y \sim 0$)) croît avec D . Cette figure illustre également l'influence de la cohésion magnétique sur les ondes. Pour des cohésions intenses, les diagrammes (b), (d), et (f) montrent des franges de décélération **bien plus larges et espacées**. De plus, nous remarquons que leur inclinaison est atténuée, traduisant une diminution de la vitesse de propagation des fronts d'ondes.

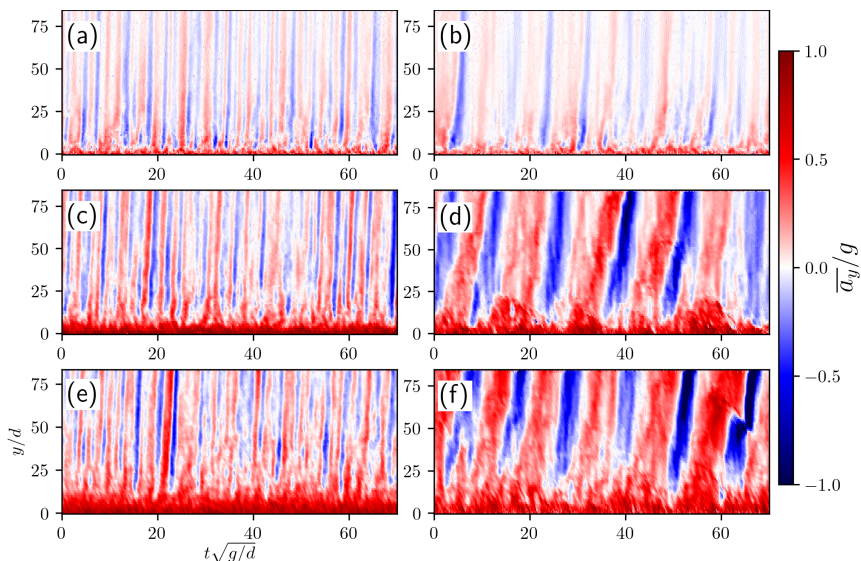


FIGURE 5.8 – Diagrammes spatio-temporels d'accélération $\bar{a}_y(y,t)$ pour (a,b) $D = 6$ mm, (c,d) $D = 15$ mm et (e,f) $D = 24$ mm, (a,c,e) sans cohésion ou (b,d,f) avec une cohésion forte ((b) $Bo = 4.11$ et (c,d) $Bo = 7.3$).

Ces phases de décélération indiquent qu'il y a des baisses momentanées de la vitesse des particules au sein de l'écoulement. Il est donc pertinent de se demander si l'existence de ces ondes de forces est visible sur le débit de vidange instantané. Pour cela, la figure 5.9 présente un diagramme spatio-temporel typique pour $D = 24$ mm et $Bo = 0$, mis en face du débit instantané de vidange, calculé au niveau de la sortie à partir de la formule suivante :

$$Q(t) = \rho \int_{-D/2}^{+D/2} v_y \phi dx \times W. \quad (5.4)$$

Tout d'abord, cette figure montre que le débit instantané Q est bien constant en moyenne, c'est-à-dire que la vidange est globalement stationnaire. En revanche, celui-ci révèle des fluctuations notables à courte échelle temporelle. Il apparaît clairement qu'il est difficile de relier de manière certaine chaque frange observée dans le diagramme spatio-temporel à une baisse momentanée du débit instantané. Cela explique que, dans la littérature scientifique, très peu d'articles mentionnent l'existence d'ondes de forces ascendantes dans le réservoir, la plupart se concentrant uniquement sur l'écoulement au niveau de l'ouverture, qui ne présente donc pas de signe distinctif d'un comportement périodique.

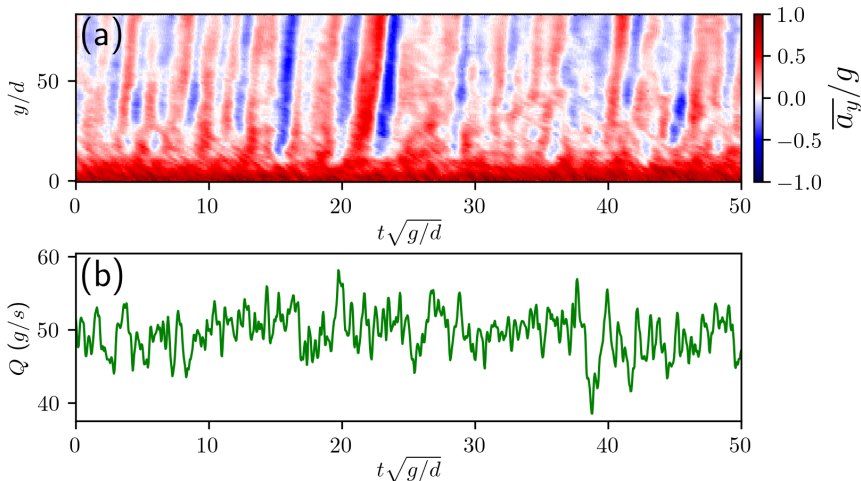


FIGURE 5.9 – (Haut) Diagrammes spatio-temporels de l'accélération moyenne en centre du profil $\bar{a}_y(y, t)$ pour $D = 6$ mm et $Bo = 0$ et (Bas) débit instantané de vidange Q , calculé selon la formule (5.4).

Pour déterminer la fréquence caractéristique des ondes, \tilde{f} , nous calculons le spectre de puissance de chaque ligne des diagrammes spatio-temporel $\overline{a_y}(y, t)$, noté $P(f, y)$. Pour cela nous, utilisons la méthode de Welch, disponible dans la librairie Python `scipy.signal`. Elle repose sur la transformée de Fourier discrète, appliquée aux segments successifs d'un même signal. Dans notre cas, les signaux sont découpés en segments de 768 points temporels, avec un recouvrement de 75% entre segments successifs. Chaque segment est multiplié par une fenêtre de Hann pour atténuer les effets de bords. Ce choix de paramètres permet d'améliorer la stabilité du calcul des spectres de puissance, ce qui améliore l'estimation de la fréquence des ondes.

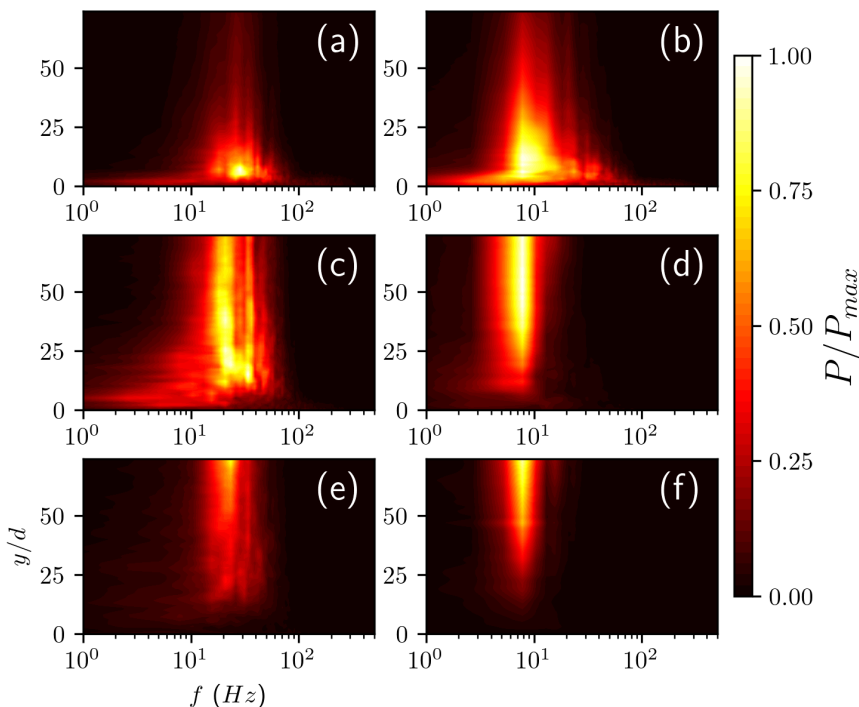


FIGURE 5.10 – Spectres de puissance $P(f, y)$ pour (a,b) $D = 6$ mm, (c,d) $D = 15$ mm et (e,f) $D = 24$ mm, (a,c,e) sans cohésion ou (b,d,f) avec une cohésion forte ((b) $Bo = 4.11$ et (c,d) $Bo = 7.3$).

La figure 5.10 présente les spectres de puissance $P(f, y)$ obtenus à partir des diagrammes spatio-temporels d'accélération illustrés précédemment à

la figure 5.8. On observe que les positions des maxima locaux de $P(f, y)$ s'alignent selon des bandes verticales bien marquées, représentées en jaune sur les figures. L'abscisse de ces bandes correspond à la **fréquence caractéristique** du phénomène \tilde{f} . En présence de cohésion (Fig. 5.10 (b,d,f)), ces bandes sont légèrement plus étroites et mieux définies, ce qui indique une onde **plus cohérente et mieux structurée**. À l'inverse, en l'absence de cohésion (Fig. 5.10 (a,c,e)), la bande devient légèrement plus diffuse, traduisant des fluctuations d'accélération moins nettes. La fréquence \tilde{f} mesurée dans le cas cohésif est environ **trois fois plus faible** que dans le cas non-cohésif, atteignant approximativement $\tilde{f} \sim 8$ Hz contre environ $\tilde{f} \sim 30$ Hz, valeur similaire à celle du mode fluctuant identifiée précédemment ($\tilde{f} = 34.56$ Hz, voir Fig. 5.6 (c)).

Pour chaque position verticale y , la fréquence correspondant au maximum du spectre de puissance est extraite. La fréquence caractéristique des ondes est ensuite définie comme la moyenne de ces fréquences, en ne considérant que les valeurs pour $y > 10$. Cette restriction est nécessaire car l'analyse spectrale ne fournit pas d'informations fiables dans la zone proche de l'ouverture du silo, comme le montrent les zones noires ou fortement bruitées pour $y < 10$ sur les spectrogrammes de la figure 5.10.

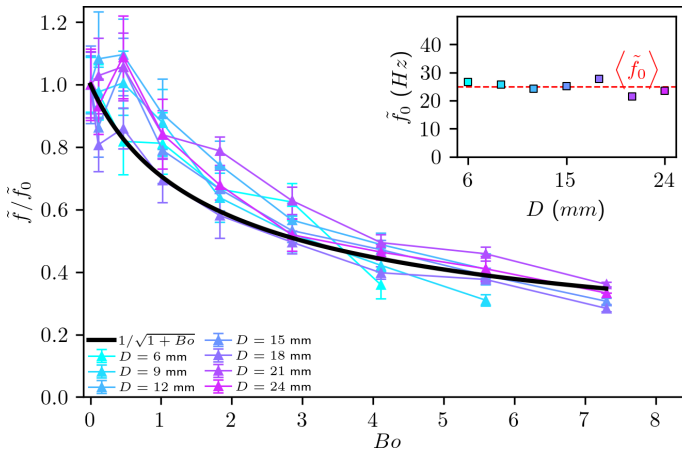


FIGURE 5.11 – Évolution de la fréquence des ondes normalisée \tilde{f}/\tilde{f}_0 en fonction de l'intensité de la cohésion Bo pour différentes tailles d'ouverture de silo D . En insert, évolution de la fréquence sans cohésion \tilde{f}_0 en fonction de la taille d'ouverture D .

La figure 5.11 représente l'évolution de la fréquence des ondes en fonction de l'intensité de la cohésion. Nous observons que la fréquence des ondes **ne dépend pas de l'ouverture du silo**. En l'absence de cohésion, l'analyse dimensionnelle prévoit qu'elle ne dépend principalement que de la taille des particules d et de l'accélération de la pesanteur g , telle que :

$$\tilde{f}_0 \propto \sqrt{\frac{g}{d}}. \quad (5.5)$$

Nos expériences conduisent à une valeur de fréquence de $\tilde{f}_0 = 24.92$ Hz, alors que (5.5) donne $\sqrt{g/d} = 94.44$ Hz. L'écart, de l'ordre d'un facteur quatre, peut être expliqué par l'existence d'un pré-facteur qui tiendrait compte des propriétés physiques du matériau constituant les billes. Étant donné que la fréquence des ondes de force est proche de la limite basse du spectre audible, il est possible que ces grandeurs, intervenant dans l'expression de la vitesse du son dans un matériau, jouent un rôle important.

Ensuite, les résultats montrent que **la fréquence des ondes décroît systématiquement avec l'intensité de la cohésion**, indépendamment de la taille de l'ouverture. Pour modéliser cet effet, nous pouvons faire l'hypothèse que la cohésion **augmente linéairement le diamètre apparent des particules**, tel que $d^* = d(1 + Bo)$. En remplaçant ce nouveau diamètre dans la relation (5.5), nous obtenons la formule suivante :

$$\frac{\tilde{f}}{\tilde{f}_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Bo}}. \quad (5.6)$$

La courbe représentative de ce modèle empirique est représentée sur la figure 5.11; elle concorde avec nos observations, ce qui suggère que la dynamique de génération des ondes est essentiellement reliée aux propriétés microscopiques des particules, dont leur diamètre.

5.3.2 Vitesse des ondes et taille d'impulsion

Nous cherchons maintenant à évaluer la vitesse de propagation des ondes dans le milieu granulaire. Celle-ci se décompose dans la base cartésienne comme suit :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_x \mathbf{e}_x + \tilde{v}_y \mathbf{e}_y. \quad (5.7)$$

Nous pouvons évaluer sa composante verticale \tilde{v}_y directement à partir des diagrammes spatio-temporels d'accélération $\overline{a}_y(t, y)$. En effet, l'inclinaison des motifs géométriques mis en évidence sur ces diagrammes est directement reliée à la **vitesse caractéristique** de propagation des ondes de force dans la direction verticale. L'analyse de cette inclinaison permet de remonter à la valeur de la composante \tilde{v}_y . Nous faisons l'hypothèse que la vitesse de propagation est constante dans la partie supérieure du silo. Cela repose sur le fait que le mouvement des particules tend à être uniforme dans la direction verticale, car l'écoulement se rapproche d'un écoulement bouchon et que le débit est conservé sur chaque section horizontale du silo.

Pour mesurer la vitesse des ondes, nous avons développé un algorithme de mesure automatique de \tilde{v}_y pour chaque impulsion d'onde, applicable à chaque diagramme $\overline{a}_y(t, y)$. Cet algorithme repose sur la détection et l'analyse des franges d'accélération. Il procède en plusieurs étapes :

- **Étape 1 : Détection initiale des impulsions.** Dans un premier temps, l'algorithme extrait le nombre d'impulsions d'onde se produisant pendant la vidange. Pour cela, il compte le nombre de minima locaux $\min(\overline{a}_y)(t, y/d)$ détectés à la hauteur y/d maximale, correspondant à la couche la plus élevée représentée dans le diagramme.
- **Étape 2 : Recherche des correspondances verticales.** Ensuite, pour chaque minimum détecté à un instant t_k à la hauteur y/d maximale, l'algorithme cherche, dans la couche immédiatement inférieure $y/d - 1$, le minimum local $\min(\overline{a}_y)(t, y/d - 1)$ le plus proche temporellement. Cette recherche est effectuée dans une fenêtre centrée sur t_k , telle que $t \in [t_k - 10\Delta t, t_k + 10\Delta t]$. L'algorithme répète cette opération de proche en proche, couche après couche, vers le bas du diagramme, tant que le minimum local identifié reste strictement négatif (indiquant une décélération).

- **Étape 3 – Reconstruction de la trajectoire.** Les minima ainsi détectés successivement forment une série de points associés à une même impulsion d’onde. L’ensemble de ces points définit une courbe dans l’espace (t, y) , qui suit la fringe de décélération observée. Cette courbe peut ensuite être ajustée pour en extraire la pente moyenne, directement reliée à la valeur de \tilde{v}_y .

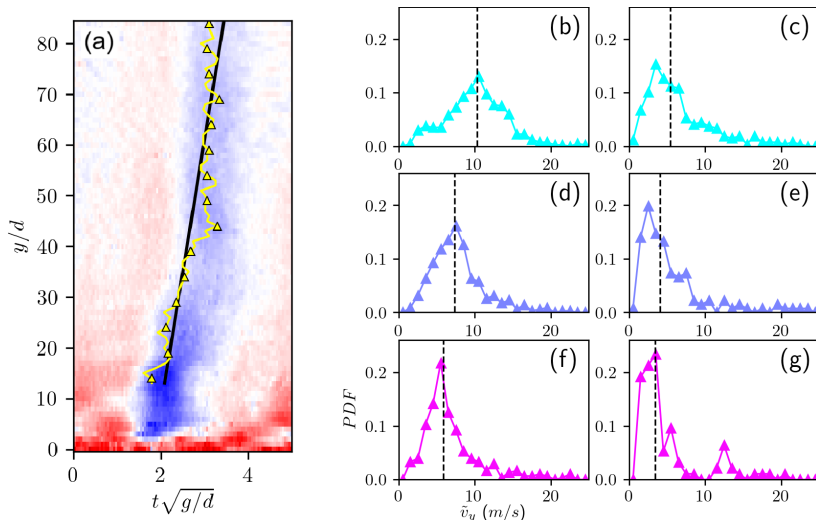


FIGURE 5.12 – (a) Représentation de la détection d’un front d’onde sur un diagramme spatio-temporel pour $D = 15$ mm et $Bo = 0$. Densité de probabilité de la vitesse verticale des ondes \tilde{v}_y pour (b,c) $D = 6$ mm, (d,e) $D = 15$ mm et (f,g) $D = 24$ mm, (b,d,f) sans cohésion ou (c,e,g) avec une cohésion forte ((c) $Bo = 4.11$ et (e,g) $Bo = 7.3$).

La figure 5.12 (a) illustre un exemple de détection d’une fringe. Sa position est représentée par la courbe jaune sur la figure. L’ajustement affine, représenté en noir, suit correctement la fringe bleue. La vitesse verticale de ce front d’onde correspond donc simplement à l’inverse de la pente de la droite. Les figures 5.12 (b-g) représentent les distributions de vitesse des fronts d’onde pour les mêmes paramètres d’expériences qu’à la figure 5.10. La vitesse des ondes est globalement de l’ordre de 10 m/s, ce qui est vingt fois plus élevé que la vitesse maximale des grains. Comme le dispositif expérimental est initialement dimensionné pour l’analyse du mouvement des particules, la précision de l’algorithme de mesure de \tilde{v}_y est limitée. C’est pourquoi pour chaque couple de paramètres explorés (D, Bo), nous extrayons uniquement les valeurs médianes des distributions, sans analyser le détail de leur forme.

La figure 5.13 (a) illustre l'évolution de la vitesse des ondes \tilde{v}_y en fonction de la taille de l'ouverture du silo, pour différentes intensités de cohésion. Tout d'abord, on remarque qu'en l'absence de cohésion ($Bo = 0$), la vitesse de propagation des ondes **n'est pas constante avec la taille de l'ouverture, contrairement à la fréquence d'émission**. Plus la taille d'ouverture D augmente, plus la vitesse \tilde{v}_y diminue. Les valeurs de \tilde{v}_y/\sqrt{gd} varient ainsi de 100 pour $D/d = 5.5$ à 50 pour $D/d = 21.8$, ce qui correspond à des vitesses réelles comprises entre $\tilde{v}_y \simeq 10$ m/s et $\tilde{v}_y \simeq 5$ m/s. Autrement dit, l'augmentation de la taille d'ouverture s'accompagne d'un ralentissement notable de la propagation des ondes dans le milieu.

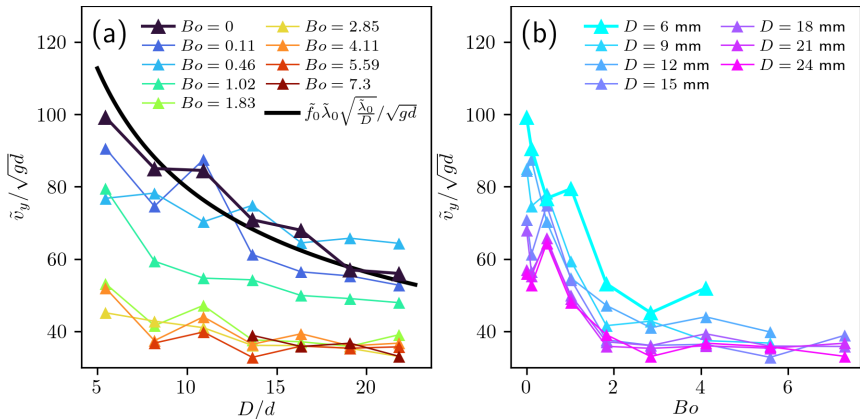


FIGURE 5.13 – Évolution de (a) la vitesse médiane des ondes \tilde{v}_y et (b) la distance entre chaque impulsion $\tilde{\lambda}$ en fonction de la taille normalisée de l'ouverture du silo D/d pour différentes intensités de cohésion Bo .

L'origine physique de la décroissance de \tilde{v}_y avec D s'explique par **la modification de la dynamique des contacts**. En effet, les ondes de forces que nous étudions se propagent dans le milieu granulaire à travers le réseau de contacts. Lorsque l'ouverture du silo est petite, l'écoulement est lent et les contacts entre grains sont persistants (voir Fig. 5.14 (a)). Il y a peu de réarrangement au sein du milieu, ce qui facilite le passage du front d'onde. En conséquence, celle-ci se propage **rapidement**. En revanche, lorsque l'ouverture est grande, l'écoulement est rapide et les contacts se font et se défont plus fréquemment devant l'échelle de temps associée aux ondes (voir Fig. 5.14 (b)). Une telle organisation du milieu rend plus difficile la propagation d'une onde de force. Cela s'exprime par une vitesse de propagation plus **faible**.

Une analyse plus fine de la figure 5.12 (a) révèle que la frange de décélération présente une forme légèrement coudée, avec un changement de pente autour de $y/d \sim 35$. La vitesse du front \tilde{v}_y est donc plus faible à proximité de l'ouverture, où la frange est davantage inclinée dans le sens horaire, que plus haut dans le réservoir, où elle devient presque verticale. Cette observation confirme que la vitesse \tilde{v}_y dépend directement de la dynamique des contacts : elle est plus faible près de l'ouverture du silo, où le régime est dominé par les collisions, et plus élevée dans la partie supérieure, où le milieu évolue principalement par déformations plastiques successives.

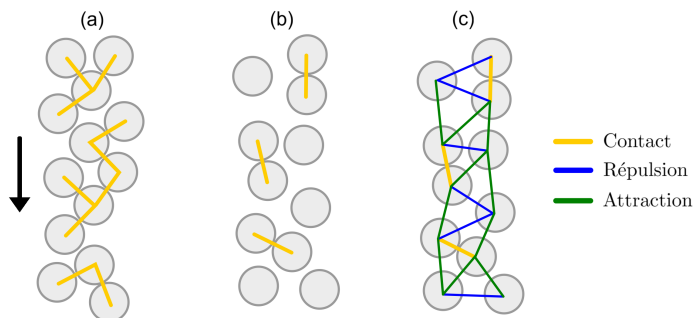


FIGURE 5.14 – Schéma représentant les contacts et interactions entre grains pour un milieu en écoulement (a) lent, (b) rapide et (c) cohésif.

La figure 5.13 (b) illustre l'influence de la cohésion magnétique sur la vitesse des ondes. Pour une intensité de cohésion donnée, la vitesse \tilde{v}_y décroît toujours avec la taille de l'ouverture, bien que cet effet devienne de moins en moins marqué lorsque le nombre de Bond Bo augmente. Pour une taille d'ouverture fixée, l'augmentation de la cohésion réduit significativement la vitesse des ondes, jusqu'à atteindre une valeur limite d'environ $\tilde{v}_y/\sqrt{gd} \sim 33$. Pour comprendre l'effet de la cohésion, notons d'abord que dans le cas sans cohésion, les contacts entre grains sont très peu élastiques : ils se rompent facilement dès que le milieu se déforme. En revanche, lorsque des interactions magnétiques apparaissent, les grains n'interagissent plus uniquement par des contacts solide-solide, mais également à travers des forces à distance, attractives ou répulsives, qui **dépendent peu du régime dynamique** (voir Fig. 5.14 (c)). Autrement dit, quelle que soit la vitesse d'écoulement ou la fréquence de réarrangement des contacts, la dynamique de chaque grain reste couplée à celle de ses voisins via ces interactions cohésives. Si une particule décélère, elle tend à ralentir les grains voisins, même en l'absence de contact direct. En ce sens, la co-

hésion magnétique renforce l'élasticité apparente du milieu granulaire en augmentant l'interdépendance des dynamiques locales. Les fronts d'onde de force se propagent alors plus lentement dans ce milieu, car l'énergie de déformation est partagée entre un plus grand nombre de particules liées entre elles de façon élastique.

Taille des impulsions d'onde

Pour modéliser l'évolution de la vitesse des ondes, notons d'abord qu'elle peut s'écrire comme le produit d'une fréquence et d'une longueur caractéristique sur la base de l'analyse dimensionnelle :

$$\tilde{v}_y(D, Bo) = \tilde{f} \tilde{\Lambda}. \quad (5.8)$$

Le terme $\tilde{\Lambda}$ est homogène à une longueur et correspond à **la distance qui sépare deux impulsions d'onde**, qui dépend a priori de la taille de l'ouverture D et de l'intensité de la cohésion Bo . Elle se distingue d'une autre longueur, $\tilde{\lambda}$ définie comme étant l'épaisseur des fronts d'onde. Le schéma 5.15 permet de visualiser comment sont définies ces grandeurs.

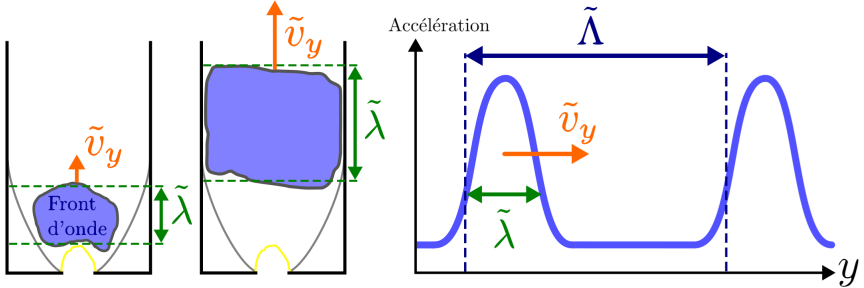


FIGURE 5.15 – Schéma de l'émission d'une impulsion d'onde de force ascendante, représentée en bleu, avec une vitesse de propagation \tilde{v}_y et une épaisseur $\tilde{\lambda}$. $\tilde{\Lambda}$ correspond à la distance entre deux impulsions.

La figure 5.3 permet d'ores et déjà de faire une estimation approximative de $\tilde{\lambda}$ dans le cas non-cohésif, que nous appelons alors $\tilde{\lambda}_0$. En se focalisant sur le zones de décélération, nous extrayons les valeurs de $\tilde{\lambda}_0 \sim 30d$ sur la figure 5.3 (d) et $\tilde{\lambda}_0 \sim 60d$ sur la figure 5.3 (e). Nous en déduisons que lors de la phase d'apparition de l'impulsion, l'épaisseur $\tilde{\lambda}_0$ augmente rapidement avec la position verticale du front, à l'instar de sa vitesse.

Pour approfondir l'analyse de la longueur caractéristique $\tilde{\lambda}$, il est essentiel de souligner que les propriétés de ces ondes internes sont étroitement liées au processus de redistribution des forces au sein du milieu granulaire. Dans cette optique, la grandeur $\tilde{\lambda}$ peut être directement comparée à une autre longueur bien connue dans l'étude des empilements granulaires : **la profondeur de saturation de la pression du modèle de Janssen**, notée λ . Nous faisons l'hypothèse que cette grandeur, initialement issue d'un modèle purement statique, est **mobilisée ici de manière périodique** à travers la formation et la destruction d'arches éphémères dans le milieu granulaire. Autrement dit, chaque fois qu'une arche instable se forme à proximité de l'ouverture du silo, le milieu se fige momentanément, entraînant le rétablissement temporaire d'un champ de pression dirigé du bas vers le haut, analogue à celui observé dans le cas statique. L'annexe A présente une étude préliminaire à cette thèse, visant à estimer la longueur λ du modèle de Janssen dans le cas sans cohésion (notée λ_0). Cette estimation repose sur une approche expérimentale originale utilisant le même silo quasi-2D et les mêmes particules d'acier que dans les expériences principales. Nous obtenons alors une valeur expérimentale de $\lambda_0 = 97d$, légèrement supérieure mais du **même ordre de grandeur** que les valeurs de $\tilde{\lambda}_0$ précédemment extraites à partir de la figure 5.3. Ainsi, la longueur $\lambda_0 = 97d$ peut être interprétée comme la limite asymptotique probable de $\tilde{\lambda}_0$ lorsque le régime de propagation des ondes devient stationnaire, ce qui renforce l'idée d'un lien direct entre la dynamique des ondes internes et la redistribution des contraintes dans le milieu granulaire. Dans la suite de ce chapitre, nous faisons l'hypothèse que, dans la phase de propagation stationnaire, l'épaisseur caractéristique des ondes est égale à $\lambda_0 = 97d$ en l'absence de cohésion.

Modélisation de la vitesse de propagation des ondes

En l'absence de cohésion, la diminution de la vitesse \tilde{v}_y avec D entraîne également une décroissance de $\tilde{\Lambda}$ avec D . L'analyse dimensionnelle prédit que le rapport entre la distance séparant deux fronts d'onde, $\tilde{\Lambda}$, et leur épaisseur moyenne, $\tilde{\lambda}$, s'exprime comme suit :

$$\frac{\tilde{\Lambda}}{\tilde{\lambda}} = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{D} \right)^\nu, \quad (5.9)$$

avec ν une constante d'ajustement. En introduisant cette relation dans l'expression de la vitesse (5.8), on obtient :

$$\tilde{v}_y(D, Bo) = \tilde{f} \tilde{\lambda} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{D} \right)^\nu. \quad (5.10)$$

En l'absence de cohésion, la vitesse des ondes, alors notée \tilde{v}_{y0} , s'écrit

$$\tilde{v}_{y0}(D) = \tilde{f}_0 \tilde{\lambda}_0 \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_0}{D}}, \quad (5.11)$$

et s'ajuste au mieux aux données expérimentales, pour $\nu = 1/2$, comme l'illustre la figure 5.13 (a). Cette expression rend compte de manière satisfaisante de l'influence de la taille de l'ouverture sur la vitesse des ondes, tout en reposant sur un nombre minimal d'hypothèses. Cependant, ses limites par rapport à D restent mal définies. En effet, la relation ne prend pas en compte la taille des grains, et donc la taille d'ouverture critique $D_c \sim 4.5d$: lorsque D tend vers zéro, la vitesse diverge, ce qui est physiquement impossible. Inversement, lorsque l'ouverture devient très grande, la vitesse de propagation tend vers zéro, ce qui soulève la question de l'existence même des ondes dans ce régime. D'après nos précédents résultats, il semblerait que les arches instables n'apparaissent plus au-delà de $D/d \sim 28$, suggérant ainsi que les ondes cessent également d'exister pour de grandes valeurs de D .

Finalement, pour compléter la modélisation de la vitesse des ondes, il est possible de prendre en compte les effets de la cohésion, non seulement sur leur fréquence d'émission \tilde{f} via la relation (5.6), mais aussi sur leur épaisseur $\tilde{\lambda}$. En effet, si la grandeur $\tilde{\lambda}$ peut être interprétée comme une longueur caractéristique de redistribution latérale des forces dans le milieu granulaire, il est raisonnable de penser que la cohésion magnétique modifie cette grandeur. Comme les interactions magnétiques ont tendance à aligner les chaînes de forces selon la direction verticale (voir Fig. 5.2), la cohésion magnétique **limite la redistribution latérale des forces**, ce qui se traduit par une augmentation de la longueur caractéristique du modèle de Janssen. Pour tenir compte de cet effet, nous supposons que $\tilde{\lambda}$ varie selon la relation linéaire suivante :

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0 (1 + \alpha(D)Bo), \quad (5.12)$$

où α est un paramètre d'ajustement dépendant de la taille de l'ouverture du silo D . Cette expression est analogue à la relation linéaire (4.6) reliant l'angle de repos des zones mortes à l'intensité de la cohésion. Dans les deux cas, ces relations traduisent **l'influence du champ magnétique sur la structuration des forces internes** dans le milieu granulaire. Cependant, la première décrit un processus statique de redistribution des forces, tandis que (5.12) rend compte d'un processus dynamique. Par cohérence avec les observations précédentes, on peut estimer que le paramètre α est donc de l'ordre de ~ 0.1 .

En introduisant l'hypothèse (5.12) ainsi que la relation de la fréquence en fonction de la cohésion (5.6) dans la formule (5.10), on obtient :

$$\tilde{v}_y/\tilde{v}_{y0} = \frac{(1 + \alpha Bo)^{3/2}}{\sqrt{1 + Bo}} \quad (5.13)$$

Cette dernière expression coïncide très bien aux mesures en ajustant $\alpha(D)$, comme le montre l'ensemble des courbes représentées sur la figure 5.16.

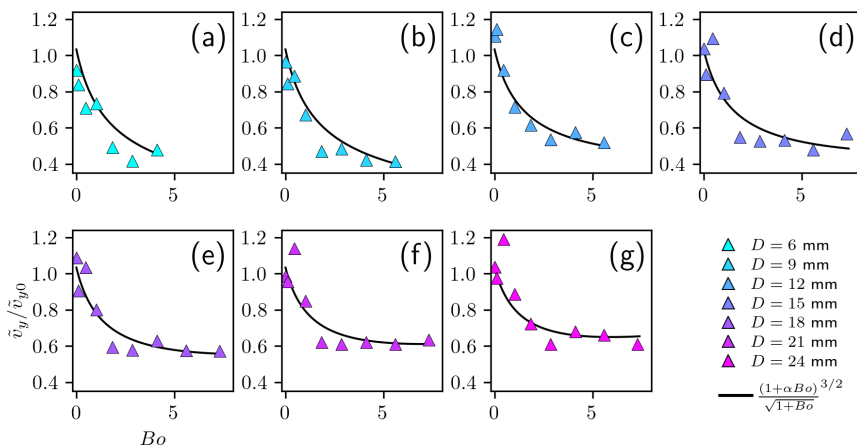


FIGURE 5.16 – Évolution de la vitesse des ondes normalisée $\tilde{v}_y/\tilde{v}_{y0}$ en fonction de l'intensité de la cohésion Bo pour (a) $D = 6$ mm, (b) $D = 9$ mm, (c) $D = 12$ mm, (d) $D = 15$ mm, (e) $D = 18$ mm, (f) $D = 21$ mm et (g) $D = 24$ mm. Les courbes sont représentées sur des axes différents pour une meilleure lisibilité.

La figure 5.17 montre que le paramètre d'ajustement α augmente linéairement avec la taille de l'ouverture du silo, passant d'environ $\alpha \sim 0$ pour $D/d = 5.5$ à $\alpha = 0.07$ pour $D/d = 21.8$. Cette évolution indique que la cohésion magnétique exerce une influence plus marquée sur la redistribution des forces internes lorsque le débit de vidange est plus élevé, c'est-à-dire lorsque l'écoulement est rapide. Dans ces conditions, les contacts entre particules sont de courte durée, et les interactions cohésives à distance renforcent significativement la structure collective du milieu. Ce résultat met une nouvelle fois en évidence le rôle central de **la dynamique des contacts** dans la formation et la propagation des ondes internes de forces.

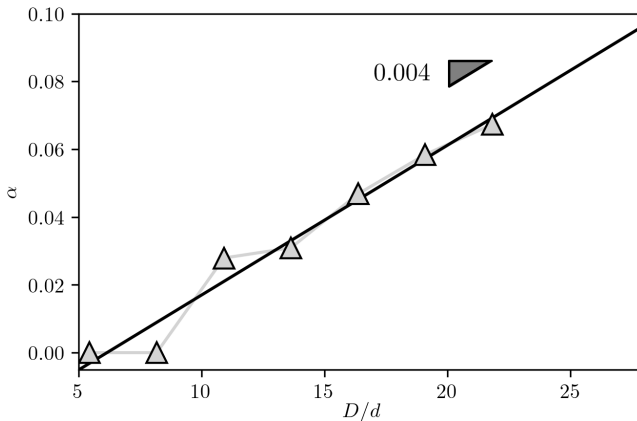


FIGURE 5.17 – Évolution du paramètre α en fonction de la taille de l'ouverture D/d .

Bien que la modélisation proposée dans cette section capture la dynamique des ondes de forces, certaines questions persistent à leur sujet :

- L'invariance de la fréquence d'émission des ondes par rapport à la taille de l'ouverture est un résultats majeur, qui reste sans fondements théoriques à ce jour. Des paramètres non étudiés tels que le module d'élasticité des grains peuvent jouer un rôle.
- La taille des impulsions n'est pas mesurée directement, même si une convergence des éléments permet de poser $\tilde{\lambda}_0 = 97d$.
- L'analyse dimensionnelle donnant l'expression (5.9) est arbitraire. D'autres longueurs peuvent influencer la dynamique des ondes, telle que la largeur du silo L , l'espacement entre les parois avant et arrière W et également la taille des grains d , comme l'envisageait déjà l'expression. (5.5).

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons poursuivi l'étude expérimentale des arches instables qui se forment lors de la vidange de silo. En nous focalisant sur la mesure instantanée de l'accélération des particules, nous montrons que ces arches fragiles **gènèrent périodiquement des impulsions d'onde de forces**. En caractérisant leur fréquence et leur vitesse de propagation, nous avons pu explorer en détail l'influence de la cohésion sur ce phénomène. La cohésion magnétique

- est un levier original pour contrôler la fréquence d'émission des ondes, et donc l'intermittence de l'écoulement.
- permet de consolider la structure interne du milieu en favorisant un comportement dynamique collectif, effet d'autant plus significatif lorsque l'écoulement est rapide.

Dans le cas sans cohésion, nous avons également pu relier la taille caractéristique des impulsions d'onde avec la longueur d'écrantage du modèle de Janssen. Nous montrons que celle-ci est de l'ordre $\tilde{\lambda}/d \sim 97$. Néanmoins, des investigations supplémentaires sont nécessaires pour mieux comprendre la fréquence caractéristique du phénomène. Celle-ci semble ne pas dépendre uniquement du rapport $\sqrt{g/d}$, mais également des propriétés des particules, comme leur masse volumique, leur module d'Young ou encore le coefficient de frottement entre grains.

Plus généralement, l'existence d'arches instables au cours de la vidange d'un silo reste un phénomène encore mal compris. À ce jour, il n'existe pas de démonstration théorique de l'existence d'une telle instabilité pour les ouvertures relativement petites, telles que $D/d \leq 28$. Pourtant, la caractérisation de sa fréquence semble être un bon moyen pour **quantifier le degré de cohésion** d'un milieu granulaire.

6) Structuration interne du milieu granulaire

Dans ce dernier chapitre, nous étudions l'influence de la cohésion magnétique sur la **structure interne** du milieu granulaire bidisperse, c'est-à-dire à l'échelle des grains, qui constitue la plus petite échelle accessible à nos observations. Les paramètres d'ordre orientationnels tétractique, pentatique et hexatique, introduits dans l'état de l'art (section 1.3.1), sont ici mesurés sur les mêmes jeux de données que ceux analysés au chapitre 4 et 5. La première section met en évidence un phénomène inédit observé lors de la vidange d'un silo, coexistant avec les ondes de forces et les arches instables : la **stratification du milieu par l'écoulement**. La deuxième section examine l'influence de la cohésion magnétique sur ce mécanisme interne.

Table des matières

6.1	Stratification dans l'écoulement	176
6.1.1	Observation instantanée de l'orientation local . . .	176
6.1.2	Microstructures moyennes en écoulement . . .	178
6.1.3	Origine physique des bandes de texture	182
6.2	Influence de la cohésion sur la texture	187
6.2.1	Réorientation de la structure interne	187
6.2.2	Clef de voûte	189
	Conclusion	191

6.1 Stratification du milieu granulaire

Dans cette première section, nous appliquons la mesure des paramètres d'ordre orientationnel ψ_k à l'ensemble des données expérimentales issues de la détection et du suivi des grains. En particulier, l'étude se focalise sur l'argument des nombres complexes particuliers ψ_k , noté $\arg(\psi_k)$, qui mesure l'orientation locale de la structure formée par les grains. À ce jour, peu d'études en mécanique des milieux granulaires ont mesuré ces paramètres d'ordre texturés [83, 87, 121, 127], et encore moins se sont intéressées aux situations d'écoulements réels [118, 128]. À notre connaissance, aucun article n'aborde véritablement la mesure de $\arg(\psi_k)$ pour la description de la structure interne d'un milieu granulaire bidimensionnel. Nous montrons ici que sa mesure révèle des **caractéristiques structurales jusqu'ici inexplorées**, y compris en l'absence de cohésion.

6.1.1 Observation instantanée de l'orientation local

La figure 6.1 illustre les champs lagrangiens instantanés des modules $|\psi_{4i}|$, $|\psi_{5i}|$ et $|\psi_{6i}|$, de chaque particule au centre de l'écoulement. Nous observons que la proportion de grains colorés en rouge, indiquant des valeurs plus élevées de $|\psi_{ki}|$, augmente progressivement avec l'ordre k . Cela montre qu'à un instant donné, les grains tendent davantage à former des hexagones parfaits que des pentagones réguliers ou des microstructures carrées. Afin d'étayer ce point, la moyenne d'ensemble $\langle |\psi_{ki}| \rangle_i$ est indiquée en dessous de chaque champ ; celle-ci croît bien avec l'ordre k .

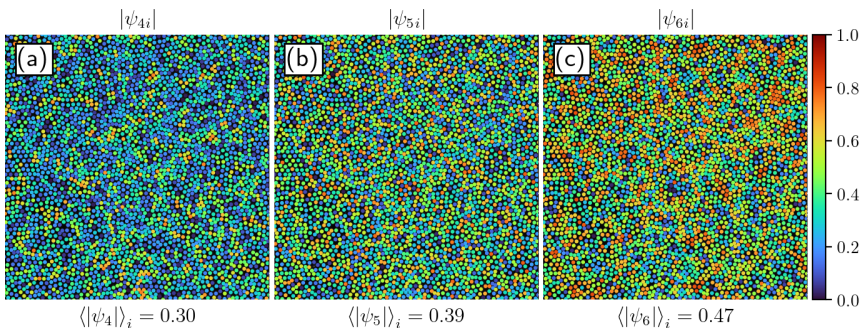


FIGURE 6.1 – Champs lagrangiens instantanés des modules des paramètres d'ordre orientationnel (a) $|\psi_{4i}|$, (b) $|\psi_{5i}|$ et (c) $|\psi_{6i}|$.

Si le module $|\psi_{ki}|$ mesure la similitude entre la microstructure formée par un grain i et ses voisins et une structure régulière k -périodique, l'argument $\arg(\psi_{ki})$ en décrit l'orientation dans le plan (x, y) . La figure 6.2 présente les arguments des paramètres d'ordre pour toutes les particules de la figure précédente. Ces valeurs sont calculées à l'aide de la fonction `atan2(y, x)` de `numpy`, qui retourne l'angle associé au nombre complexe ψ_{ki} en tenant compte du bon quadrant :

$$\arg(\psi_{ki}) = \text{atan2}(\text{Im}(\psi_{ki}), \text{Re}(\psi_{ki})). \quad (6.1)$$

La figure 6.2 (d) illustre quelques structures régulières à quatre, cinq et six voisins, dont la couleur correspond à la valeur de l'argument $\arg(\psi_{ki})$ comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Par exemple, si une particule i vérifie $|\psi_{4i}| = 0$, $|\psi_{5i}| = 0$ et $|\psi_{6i}| = 1$, elle forme une structure parfaitement hexagonale avec ses voisins. Dans ce cas, $\arg(\psi_{6i})$ indique l'orientation exacte de la structure locale. En revanche, si pour une autre particule on mesure $|\psi_{4i}| = 0.2$, $|\psi_{5i}| = 0.2$ et $|\psi_{6i}| = 0.6$, cela traduit une organisation seulement proche d'un hexagone, sans forme parfaitement définie. Dans ce cas, $\arg(\psi_{6i})$ correspond à une "orientation apparente" de la microstructure irrégulière.

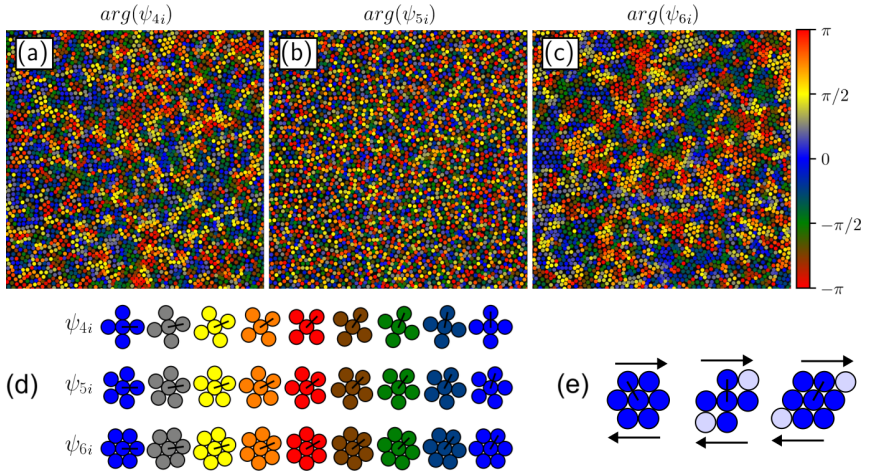


FIGURE 6.2 – Arguments lagrangiens instantanés (a) $\arg(\psi_{4i})$, (b) $\arg(\psi_{5i})$ et (c) $\arg(\psi_{6i})$. La figure (d) représente plusieurs microstructures locales formées par cinq, six ou sept particules, colorées en fonction des directions denses. Le schéma (e) représente le cisaillement en trois étapes d'un hexagone selon la direction horizontale.

La figure 6.2 (c) met en évidence plusieurs groupes de grains partageant des valeurs de $arg(\psi_{6i})$ similaires, ce qui indique qu'ils s'organisent selon les mêmes directions denses. L'apparition de ces régions colorées confirme l'existence d'un ordre cristallin local, même dans un système polydisperse [83]. En revanche, la figure 6.2 (b) montre un champ $arg(\psi_{5i})$ très proche d'une distribution aléatoire, soulignant l'absence de corrélation angulaire à moyenne portée suivant l'ordre structurel $k = 5$, bien que $\langle |\psi_{5i}| \rangle_i$ reste non négligeable devant $\langle |\psi_{6i}| \rangle_i$. Cette absence d'organisation s'explique par l'impossibilité de paver le plan avec des pentagones. Enfin, la figure 6.2 (a) révèle également des motifs réguliers pour $arg(\psi_{4i})$, ressemblant à ceux observés pour $arg(\psi_{6i})$. En effet, lorsqu'une structure hexagonale est soumise à un cisaillement, elle peut se dilater et évoluer vers une organisation carrée plutôt que pentagonale, comme l'illustre la figure 6.2 (e). Cela montre que les mesures de $arg(\psi_{4i})$ et de $arg(\psi_6)$ peuvent fournir des informations pertinentes sur l'effet du cisaillement sur l'orientation locale de la microstructure.

6.1.2 Microstructures moyennes en écoulement

La méthode de la projection eulérienne peut être appliquée au champ lagrangien $arg(\psi_{ki})$, afin d'obtenir le champ eulérien instantané correspondant. En revanche, la moyenne temporelle eulérienne ne peut pas être calculée comme une simple moyenne arithmétique des champs eulériens instantanés, car $arg(\psi_k)(x, y, t)$ est une grandeur périodique. Pour dépasser ce problème, nous calculons directement la moyenne temporelle du champ eulérien $\psi_k(x, y, t)$. Enfin, l'argument moyen est défini par :

$$arg(\langle \psi_k \rangle_t)(x, y) = atan2(\langle Im(\psi_k) \rangle_t, \langle Re(\psi_k) \rangle_t). \quad (6.2)$$

Cette quantité décrit l'orientation **moyenne et locale** de la composante orientationnelle k . Par exemple, si on observe $\langle |\psi_6| \rangle_t \sim 0.8$ en (x, y) , alors $arg(\langle \psi_6 \rangle_t)(x, y)$ représente la direction moyenne des hexagones qui se forment très régulièrement en ce point.

La figure 6.3 représente les champs eulériens moyens $arg(\langle \psi_k \rangle_t)(x, y)$ pour $k = 4$, $k = 5$ et $k = 6$. Sur les figures (a) et (c), les champs $arg(\langle \psi_4 \rangle_t)(x, y)$ et $arg(\langle \psi_6 \rangle_t)(x, y)$ révèlent la présence de motifs en forme de bandes dans la zone en écoulement, convergeant vers la sortie du silo. Nous appelons ces structures des **bandes de texture**. La couleur des bandes suit une séquence précise de la gauche vers la droite : bleu / vert / rouge / jaune

dans les deux cas. L'argument décroît donc lorsque x/d augmente, ce qui signifie que les microstructures carrées ou hexagonales pivotent de façon continue lorsqu'on se déplace du bord gauche vers le bord droit du silo. À l'inverse, dans les zones mortes, aucun motif net n'apparaît : les champs $\arg(\langle\psi_4\rangle_t)(x, y)$ et $\arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$ restent hétérogènes, ce qui montre une distribution désordonnée de l'orientation des microstructures.

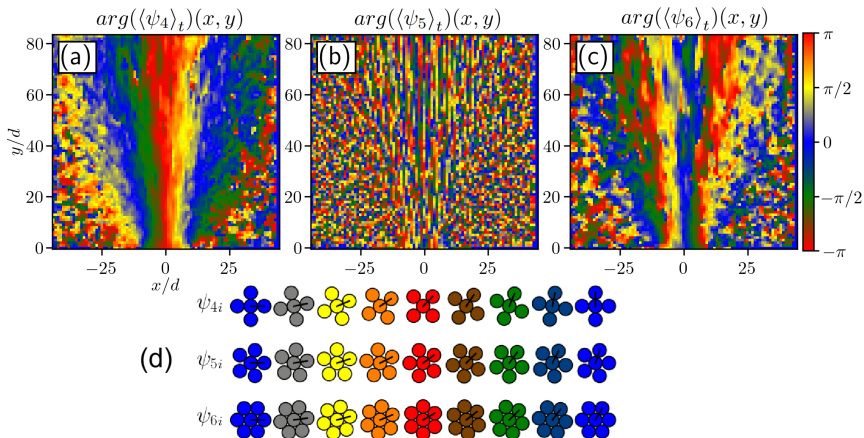


FIGURE 6.3 – Champs eulériens moyens des arguments de (a) $\langle\psi_4\rangle_t(x, y)$, (b) $\langle\psi_5\rangle_t(x, y)$ et (c) $\langle\psi_6\rangle_t(x, y)$, correspondant à l'analyse d'une seule vidange pour $D = 24$ mm. La figure (d) représente plusieurs microstructures locales formées par cinq, six ou sept particules, colorées en fonction des directions denses.

Concernant la figure 6.3 (b), le champ $\arg(\langle\psi_5\rangle_t)(x, y)$ ne montre pas d'ordre pentagonal au temps long : aucun motif particulier n'émerge sur la figure, bien que de fines bandes verticales d'une épaisseur d'environ un diamètre soient visibles. Celles-ci semblent se raccourcir à mesure qu'elles se rapprochent de la sortie du silo. Ce motif précis traduit le **persistance des microstructures locales** : une cage de grains formant un pentagone en (x, y) à un instant donné peut se déplacer au sein du réservoir sans nécessairement se disloquer ni pivoter, laissant ainsi une trace visible sur les champs moyens $\arg(\langle\psi_5\rangle_t)(x, y)$. Ce phénomène est particulièrement marqué dans la partie supérieure du réservoir, où la forte pression et le faible cisaillement limitent les réarrangements internes.

Dans la suite, nous concentrons notre analyse sur les paramètres d'ordre tétractique et hexatique, la mesure de ψ_5 n'ayant pas pu être réalisée sur l'ensemble des données faute de temps.

Les bandes de texture visibles dans les deux champs $arg(\langle\psi_4\rangle_t)(x, y)$ et $arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$ mettent en évidence l'existence d'une **orientation locale privilégiée des microstructures**, qu'elles soient carrées ou hexagonales. Dans la zone centrale de l'écoulement, ces bandes coïncident remarquablement avec les lignes de courant, comme le montrent les figures 6.4 (a) et 6.4 (b). Cela signifie qu'en moyenne, les particules s'arrangent selon les mêmes microstructures tout au long de leur déplacement dans le système. En revanche, près de la sortie du silo, les bandes de texture au centre s'élargissent légèrement, alors que les lignes de courant continuent de converger. Cette divergence suggère une réorganisation significative des microstructures dans cette région, confirmant un changement important de la structure interne au niveau de l'ouverture, déjà mise en évidence dans les chapitres précédents. Les résultats établissent donc un lien clair entre **la structure interne moyenne** du milieu granulaire et **la dynamique des particules** au sein de l'écoulement.

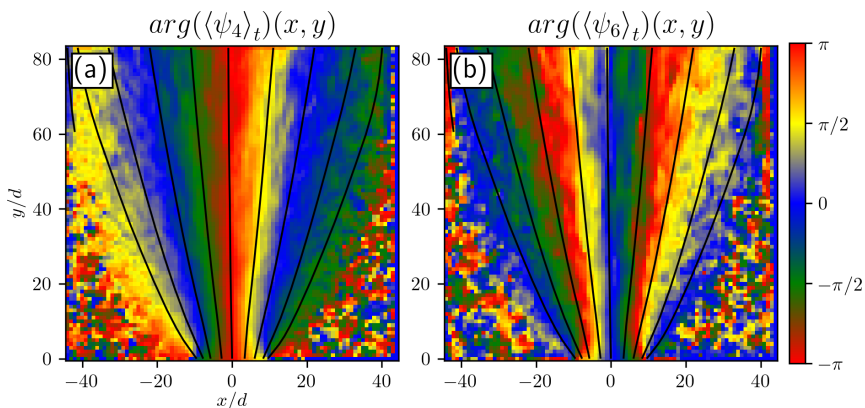


FIGURE 6.4 – Champs eulériens moyens des arguments de (a) $\langle\psi_4\rangle_t(x, y)$ et (b) $\langle\psi_5\rangle_t(x, y)$ pour $D = 24$ mm, auxquels s'ajoutent les lignes de courants, représentées en noir.

La figure 6.5 présente le champ $arg(\langle\psi_4\rangle_t)(x, y)$ pour différentes tailles d'ouverture du silo, moyenné sur cinq réalisations. Les bandes de texture apparaissent nettement, quel que soit D . Cependant, la convergence des moyennes est moins satisfaisante pour les petites ouvertures : par exemple, pour $D = 6$ mm, les bandes sont moins homogènes dans la partie supérieure de la zone filmée, là où l'écoulement est le plus lent. Cette hétérogénéité

s'explique par le fait qu'un nombre beaucoup plus faible de grains traverse cette région qu'avec une ouverture de $D = 24$ mm. À titre de comparaison, sur une durée donnée, le nombre de grains franchissant la sortie est environ dix fois plus élevé pour $D = 24$ mm que pour $D = 6$ mm.

On observe également que l'élargissement des bandes de texture centrales au niveau de la sortie devient de moins en moins marqué lorsque D diminue, ce qui indique que la zone de réorganisation interne du milieu se restreint progressivement.

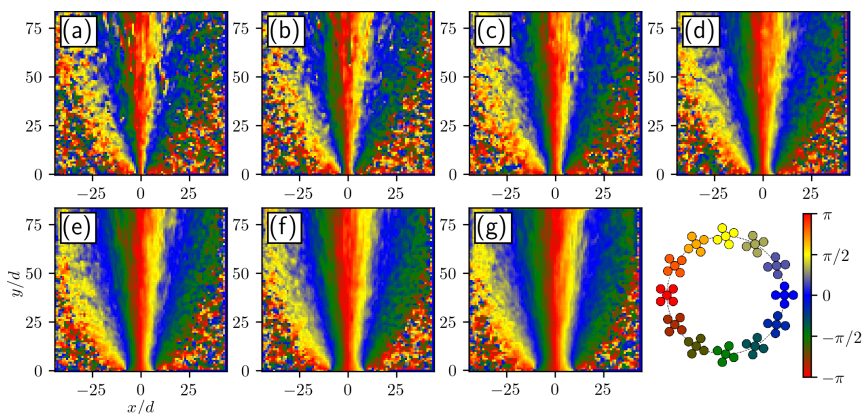


FIGURE 6.5 – Champs eulériens moyens de l'argument $\arg(\langle \psi_4 \rangle_t)(x, y)$ pour (a) $D = 6$ mm, (b) $D = 9$ mm, (c) $D = 12$ mm, (d) $D = 15$ mm, (e) $D = 18$ mm, (f) $D = 21$ mm et (g) $D = 24$ mm.

De la même façon, la figure 6.6 présente le champ $\arg(\langle \psi_6 \rangle_t)(x, y)$ pour différentes tailles d'ouverture du silo, moyenné sur cinq réalisations. La convergence des moyennes y est légèrement moins bonne, mais les bandes de texture restent clairement visibles, ce qui montre qu'elles **ne changent pas avec la taille de l'ouverture du silo**. Les orientations locales préférentielles ne dépendent pas de l'intensité de l'écoulement. Autrement dit, peu importe la vitesse des particules, leur organisation collective dépend **principalement de la géométrie de l'écoulement**. Dans la suite de ce chapitre, nous nous limiterons donc principalement au cas $D = 24$ mm, pour lequel la convergence de la moyenne est la plus satisfaisante.

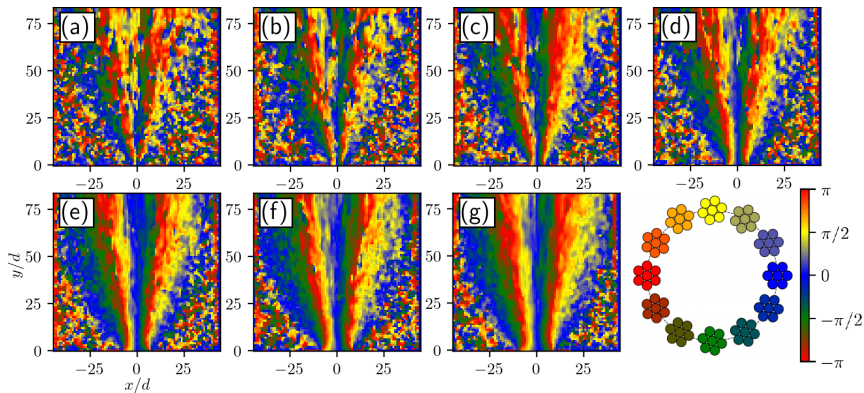


FIGURE 6.6 – Champs eulériens moyens de l’argument $\arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$ pour (a) $D = 6$ mm, (b) $D = 9$ mm, (c) $D = 12$ mm, (d) $D = 15$ mm, (e) $D = 18$ mm, (f) $D = 21$ mm et (g) $D = 24$ mm.

6.1.3 Origine physique des bandes de texture

Dans cette partie, nous discutons de l’origine physique des bandes de texture au sein de l’écoulement. Pour comprendre le lien entre phase hexatique et cisaillement, il est essentiel de revenir à la structure même d’un hexagone. Le schéma 6.7 représente deux hexagones aux directions opposées, cisailés selon la direction horizontale.

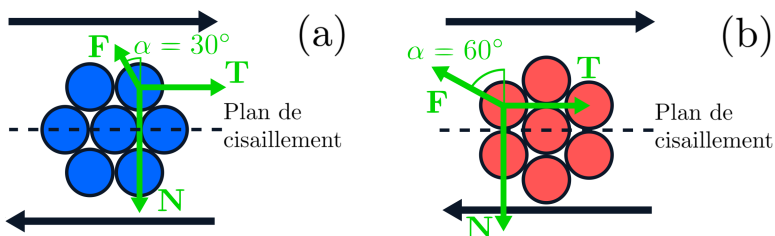


FIGURE 6.7 – Schémas (a) d’un hexagone bleu ($\arg(\psi_6) = 0$) et (b) d’un hexagone rouge ($\arg(\psi_6) = \pm\pi$), cisailés selon la direction horizontale.

Dans ce contexte, une particule est uniquement soumise principalement à trois forces : une force \mathbf{N} issue de la pression interne du milieu, une force \mathbf{T} induite par la contrainte de cisaillement imposée et une force \mathbf{F}

qui représente la force de contact exercée par la particule qui s'oppose le plus directement à son déplacement. Cette dernière se décompose en une composante normale \mathbf{F}_n et une composante tangentielle \mathbf{F}_t , telle que :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_n &= -F_n \sin(\alpha) \mathbf{e}_x + F_n \cos(\alpha) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{F}_t &= -F_n \mu \cos(\alpha) \mathbf{e}_x - F_n \mu \sin(\alpha) \mathbf{e}_y \end{cases}, \quad (6.3)$$

où μ est le coefficient de frottement solide au niveau du contact entre les deux particules. Nous en déduisons les expressions de \mathbf{T} et \mathbf{N} :

$$\begin{cases} \mathbf{T} &= F_n (\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{N} &= F_n (\cos(\alpha) - \mu \sin(\alpha)) \mathbf{e}_y \end{cases}. \quad (6.4)$$

À partir de ces dernières expressions, nous pouvons définir un coefficient de frottement effectif associé à la microstructure hexagonale, noté μ_{eff} , tel que $\mu_{eff} = \|\mathbf{T}\|/\|\mathbf{N}\|$. Ce coefficient s'écrit :

$$\mu_{eff} = \tan(\alpha + \delta), \quad (6.5)$$

en introduisant $\mu = \tan(\delta)$, avec $\delta \sim 0.2$ pour l'acier [129]. Dans le cas (a), où l'une des directions denses de l'hexagone est parallèle à la direction principale du cisaillement, l'angle de contact vaut $\alpha = 30^\circ$. À l'inverse, l'angle de contact est de $\alpha = 60^\circ$ dans le cas (b). En effectuant le calcul du rapport des coefficients de frottement entre le cas (a) et (b), on trouve que le coefficient de frottement effectif de l'hexagone rouge est près de **trois fois plus élevé** que celui de l'hexagone bleu. D'un point de vue énergétique, lorsqu'un cisaillement est imposé à un milieu granulaire, il est donc plus **favorable** pour les particules d'adopter la conformation hexagonale **dont l'une des trois directions denses est alignée avec la direction du cisaillement**. Autrement dit, pour une même compacité, un milieu granulaire 2D opposera moins de résistance si ses particules s'organisent en directions denses parallèles au cisaillement principal.

Nous avons vu, dans le chapitre consacré à la cristallisation, que les déformations plastiques au sein du milieu se produisent de manière hétérogène, à la fois dans l'espace et dans le temps. Ce modèle jouet permet d'expliquer l'existence d'un seuil d'écoulement local dans un milieu granulaire bidimensionnel. Le caractère hétérogène de la dynamique interne est directement lié à **la distribution aléatoire de l'orientation des blocs hexagonaux**, elle-même engendrée par le mélange des différents diamètres

de particules dans le milieu. Les hexagones, briques élémentaires de l'empilement, sont plus ou moins réguliers et présentent des orientations plus ou moins favorables vis-à-vis de la contrainte externe appliquée. Un hexagone mal orienté par rapport à cette contrainte résistera plus longtemps avant de se disloquer. Sa rupture se produira lorsque des hexagones voisins, plus fragiles, céderont, modifiant ainsi la répartition locale des forces. Dans ce contexte, un écoulement correspond à une succession de dislocations. Un apport suffisant d'énergie garantit qu'aucune phase hexatique ne subsiste indéfiniment dans le temps et sur une zone trop étendue. À titre d'exemple, dans le cas de la vidange d'un silo, les hexagones situés dans les zones mortes sont orientés de façon aléatoire; cette région demeure figée tout au long de la vidange car la contrainte de cisaillement y reste insuffisante pour casser les microstructures, peu importe leur orientation. À l'inverse, au centre du silo, chaque région en écoulement sélectionne préférentiellement une phase hexatique bien précise, en réponse à la contrainte locale imposée. Afin de démontrer cette sélectivité de la structure interne, nous effectuons dans la suite de cette section une analyse statistique de l'orientation des microstructures en écoulement.

La figure 6.8 (a) et (b) montre à nouveau les mêmes champs, cette fois-ci avec les lignes de niveaux $\dot{\gamma} / \max(\dot{\gamma}) = 10\%$, colorées en rose dans la partie gauche et en cyan dans la partie droite de l'écoulement. Pour confirmer l'existence d'une **sélectivité des microstructures** carrées et hexagonales, la figure 6.8 présente les distributions statistiques des grandeurs lagrangiennes $arg(\psi_4)$ (Fig. (c)) et $arg(\psi_6)$ (Fig. (d)), calculées pour l'ensemble des particules situées dans chaque zone délimitée par les lignes de niveaux. On constate que la distribution de la figure 6.8 (d) n'est pas uniforme, ce qui indique clairement que l'écoulement favorise certaines structures hexagonales par rapport à d'autres. En effet, le cisaillement élevé dans les zones gauche et droite encourage l'apparition d'hexagones alignés avec les lignes de courant. Cela démontre que le milieu sélectionne spécifiquement la phase hexatique la plus adaptée au cisaillement, c'est-à-dire celle pour laquelle la valeur de μ_{eff} est minimale.

De même, la distribution présentée à la figure 6.8 (c) met en évidence une préférence pour certaines structures carrées. Ces structures partagent une direction dense commune avec les structures hexagonales présentes aux mêmes endroits. Ces directions denses coïncident également avec la direction principale du cisaillement, comme l'illustrent les schémas (a) et

(c) de la figure 6.9. Ces mesures confirment ainsi le mécanisme moyen représenté à la figure 6.2 (e).

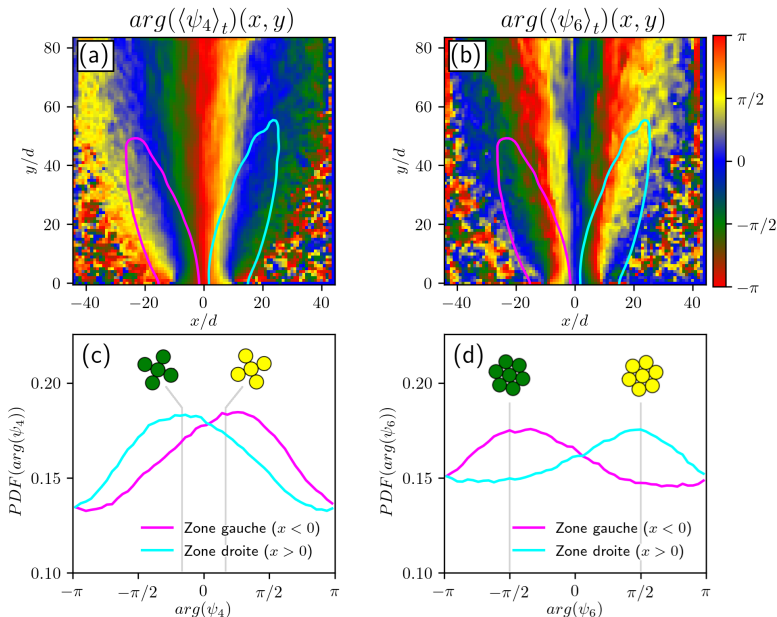


FIGURE 6.8 – Champs des paramètres d'ordre (a) tétraactique et (b) hexactique pour $D = 24$ mm. Les lignes de niveaux $\dot{\gamma}/max(\dot{\gamma}) = 10\%$ sont représentées, en rose dans la partie gauche et en cyan dans la partie droite. Distributions des arguments (c) $arg(\psi_4)$ et (d) $arg(\psi_6)$ en fonction de la zone de cisaillement considérée (gauche ou droite).

Enfin, la figure 6.9 (a) montre que, dans les zones de fort cisaillement, les lignes de courant s'alignent avec l'une des directions denses des microstructures. Cela démontre que l'écoulement organise le milieu granulaire en strates dans ces zones. En revanche, le taux de cisaillement est nul le long de la ligne de courant centrale, située en $x = 0$. Les mesures indiquent qu'à cet endroit, les particules adoptent des structures carrées et hexagonales qui résistent le plus au cisaillement. Cette observation s'explique par le fait qu'une bille superposée à une autre constitue une conformation mécaniquement instable ; en pratique, une particule tend naturellement à reposer sur deux autres.

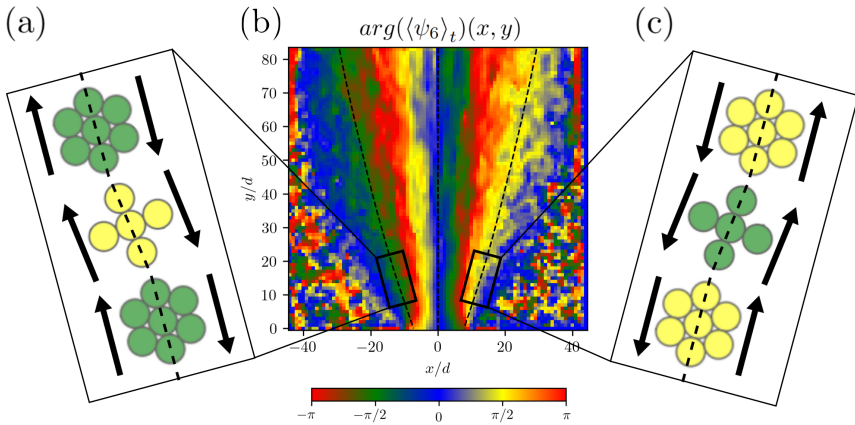


FIGURE 6.9 – (b) Champ $\arg(\langle \psi_6 \rangle_t)(x, y)$ avec les lignes de courant traversant les deux zones de cisaillement de chaque côté de l'ouverture ainsi que la ligne de courant au centre $x = 0$, représentées par les lignes noires en tirets. Schéma du cisaillement du mécanisme de cisaillement dans (a) la zone gauche et (c) la zone droite de l'écoulement central.

La structuration locale d'un milieu granulaire 2D en écoulement n'est donc pas aléatoire. Dans les faits, des orientations privilégiées émergent naturellement lors du cisaillement du milieu, même lorsque celui-ci est bidisperse.

6.2 Influence de la cohésion magnétique sur la texture du milieu

Au cours de cette deuxième section, nous étudions l'influence de la cohésion magnétique sur la texture du milieu granulaire en écoulement.

6.2.1 Réorientation de la structure interne

La figure 6.10 montre l'évolution du champ $arg(\langle\psi_4\rangle_t)(x, y)$ en fonction de l'intensité de la cohésion magnétique verticale. On observe que la bande de texture centrale, représentée en rouge et correspondant à une microstructure en forme de "x", s'amincit progressivement à mesure que l'intensité du champ magnétique augmente, jusqu'à ce que les deux bandes latérales, en bleu et associées à la microstructure en forme de "+", se rejoignent. Ainsi, les interactions magnétiques favorisent les microstructures carrées dont l'une des directions denses est alignée avec la verticale, renforçant leur stabilité mécanique face à la contrainte appliquée localement au milieu granulaire.

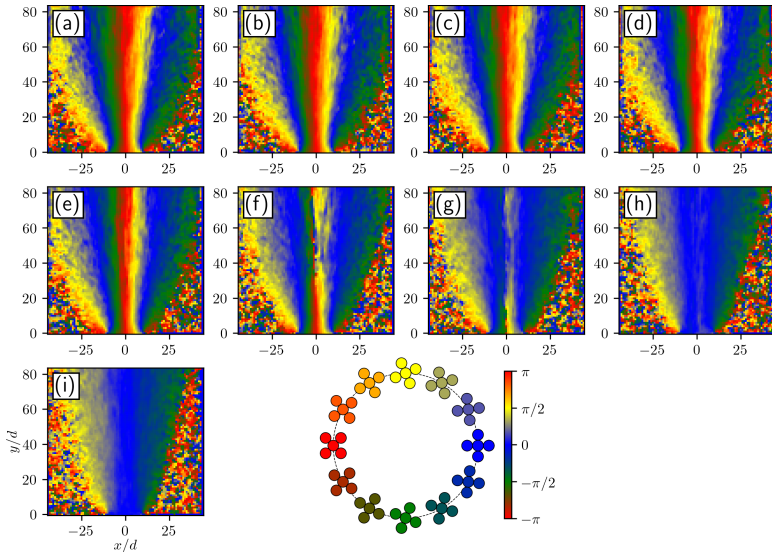


FIGURE 6.10 – Champs eulériens moyens $arg(\langle\psi_4\rangle_t)(x, y)$ pour $D = 24$ mm et (a) $Bo = 0$, (b) $Bo = 0.11$, (c) $Bo = 0.46$, (d) $Bo = 1.02$, (e) $Bo = 1.83$, (f) $Bo = 2.85$, (g) $Bo = 4.11$, (h) $Bo = 5.59$ et (i) $Bo = 7.3$.

De la même façon, la figure suivante 6.11 illustre l'évolution du champ $arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$ en fonction de l'intensité de la cohésion magnétique verticale. Ces profils montrent également que la bande de texture centrale, en bleu, s'affine progressivement jusqu'à ce que les deux bandes latérales, en rouge, se rejoignent. On observe ainsi, au centre, une transition de la microstructure hexagonale : les hexagones passent d'une orientation où l'une des directions denses est perpendiculaire au champ magnétique à une orientation où l'une des directions denses est alignée verticalement, suivant la direction du champ.

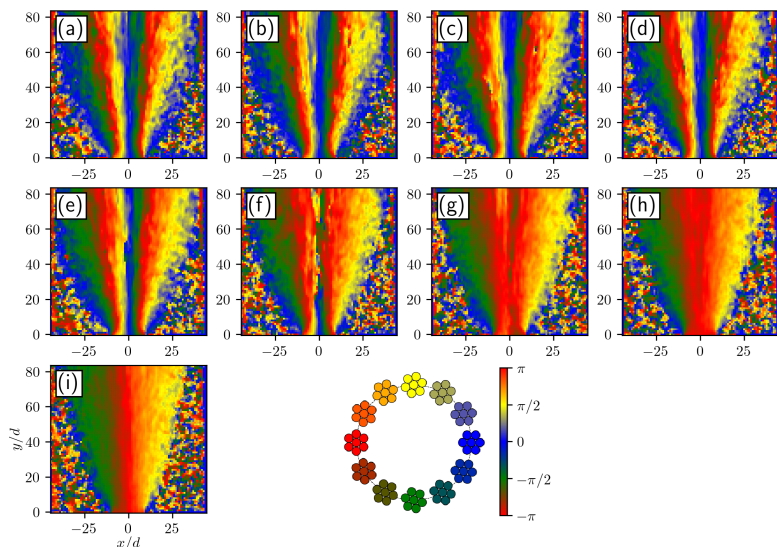


FIGURE 6.11 – Champs eulériens moyens $arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$ pour $D = 24$ mm et (a) $Bo = 0$, (b) $Bo = 0.11$, (c) $Bo = 0.46$, (d) $Bo = 1.02$, (e) $Bo = 1.83$, (f) $Bo = 2.85$, (g) $Bo = 4.11$, (h) $Bo = 5.59$ et (i) $Bo = 7.3$.

Ces résultats démontrent qu'il est possible de **contrôler à distance la microstructure du milieu granulaire**. En imposant des interactions verticales attractives et des interactions horizontales répulsives, on peut sélectionner l'orientation de la structure interne, qui s'adapte naturellement à la nature de la cohésion lors de la mise en écoulement. L'observation du caractère filiforme des zones de décélération, mise en évidence à la figure 5.2 du chapitre précédent, confirme l'intérêt des mesures de $arg(\langle\psi_4\rangle_t)(x, y)$ et $arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$. Enfin, l'étude de l'influence du champ magnétique sur les propriétés microstructurelles montre que la présence

de bandes de texture en l'absence de cohésion est directement liée à la distribution et à l'orientation des contacts dans le milieu granulaire.

6.2.2 Clef de voûte

Dans cette dernière partie, nous montrons que la réorganisation de la structure interne du milieu granulaire sous l'effet des interactions magnétiques a des conséquences significatives sur ses propriétés d'écoulement. Comme présenté à la section 4.3.1, la compacité au centre de la sortie diminue systématiquement avec l'intensité de la cohésion, quelle que soit la taille de l'ouverture du silo. En revanche, la vitesse centrale v_c ne suit pas cette tendance : elle varie légèrement avec la cohésion lorsque l'ouverture est suffisamment grande, typiquement pour $D \geq 18$ mm. La figure 6.12 montre que la vitesse normalisée $v_c/v_c(Bo = 0)$ diminue légèrement avant d'augmenter de nouveau à partir de $Bo \approx 3.5$. Cette valeur de cohésion correspond précisément au moment où la bande de texture centrale change d'orientation, passant de $\arg(\langle \psi_6 \rangle_t)(x, y) = 0$ à $\arg(\langle \psi_6 \rangle_t)(x, y) = +\pi$. Autrement dit, les hexagones formés au centre pivotent de 30° pour s'aligner avec le champ magnétique vertical. Cette valeur seuil correspond à la moyenne entre $Bo = 2.85$ et $Bo = 4.11$, qui sont les intensités pour lesquelles la bande de texture centrale disparaît.

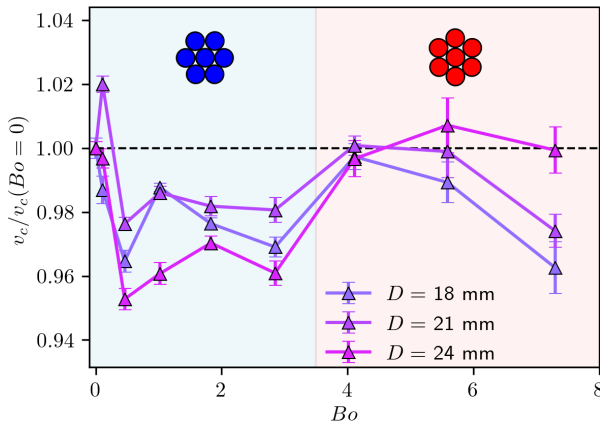


FIGURE 6.12 – Évolution de la vitesse centrale v_c , normalisée par $v_c(Bo = 0)$, en fonction de l'intensité de cohésion magnétique. Pour $Bo < 3.5$, la bande de texture centrale est bleue, tandis que pour $Bo \geq 3.5$, elle devient rouge, comme le montre la figure précédente 6.11.

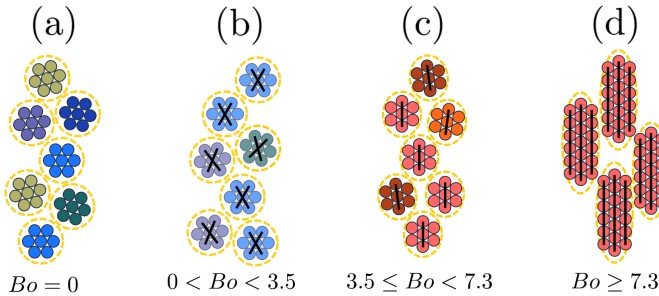


FIGURE 6.13 – Schémas des quatre régimes. Les cercles en tirets orange délimitent les microstructures qui se forment au centre de l'écoulement. Les lignes noires correspondent aux interactions attractives entre particules.

La figure 6.13 représente les schémas des microstructures internes au centre de l'écoulement, suivant l'intensité du champ magnétique externe. Nous distinguons **quatre régimes structurels** pour les grandes ouvertures, cas où l'énergie du système est suffisante pour permettre un grand nombre de réorganisations internes :

- (a) En l'absence de cohésion ($Bo = 0$), les particules s'agencent en hexagones les plus résistants au cisaillement vertical (en bleu sur la figure 6.12), à cause de la pression du milieu qui les stabilise.
- (b) Lorsque le champ magnétique est faible ($0 < Bo \leq 3.5$), la cohésion induite **renforce les microstructures** présentes dans le milieu. En particulier, les hexagones qui s'opposent le plus à un cisaillement vertical sont légèrement renforcés par les interactions attractives verticales. Cela provoque une légère baisse de vitesse au centre de la sortie du silo.
- (c) Lorsque le champ magnétique est suffisamment fort, typiquement entre $Bo = 3.5$ et $Bo = 7.3$, les interactions magnétiques **modifient les microstructures internes**, en favorisant l'apparition d'hexagones les moins résistants au cisaillement vertical (en rouge sur la figure 6.12). Dans ce régime, la compacité diminue encore mais la vitesse v_c augmente à nouveau car le cisaillement du milieu est facilité. Le débit de vidange augmente légèrement.
- (d) Enfin, lorsque le champ magnétique est très intense $Bo \geq 7.3$, l'échelle structurelle pertinente **dépasse la taille d'un seul hexagone** : les grains forment des blocs cohésifs fortement allongés dans

le sens du champ, qui sont retenus collectivement par l'ensemble des particules contenues dans la partie supérieure du silo, lesquelles se comportent comme un **électroaimant**. Dans ce dernier régime, la vitesse au centre de la sortie baisse à nouveau significativement.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons montré que la mesure des paramètres d'ordre orientationnel, d'ordre $k = 4$ et $k = 6$, constitue un outil pertinent pour révéler la structuration interne d'un milieu granulaire bidimensionnel soumis à un écoulement complexe. Ces paramètres permettent de mettre en évidence à la fois l'organisation moyenne des particules et les fluctuations locales de la microstructure.

- En l'absence de cohésion, nous avons observé qu'en moyenne, les particules tendent à s'agencer de sorte que les directions denses du milieu granulaire s'alignent avec la direction principale du cisaillement. Par ailleurs, au centre de l'écoulement, là où le cisaillement est le plus faible, les particules adoptent préférentiellement des microstructures qui s'opposent naturellement à l'écoulement, illustrant un mécanisme de résistance interne (effet clef de voûte).
- Lorsque des interactions cohésives verticales apparaissent, la microstructure adoptée par les grains **peut être contrôlée**. Plus précisément, la cohésion favorise une verticalisation des directions denses au cœur du flux. Cette observation conforte la validité et la robustesse des mesures effectuées à partir des paramètres ψ_4 et ψ_6 , qui traduisent fidèlement l'évolution de la structuration interne.
- Enfin, nous avons mis en évidence que la dynamique du milieu granulaire est de nature non-locale. Les structures hexatiques se caractérisent chacune par une contrainte seuil de dislocation : à tout instant de l'écoulement, une microstructure hexagonale peut se rompre sous forme d'événements plastiques localisés. Cette rupture modifie les conditions aux limites des structures voisines, sans que celles-ci aient nécessairement subi directement la contrainte appliquée. Ce comportement révèle l'existence d'une longueur caractéristique intrinsèque au système, dont dépendent les propriétés d'écoulement. De plus, la cohésion contrôlée permet d'accroître significativement cette longueur, de sorte que la dynamique d'une particule dépend fortement de celle des particules situées au-dessus et en dessous d'elle.

7) Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous étudions l'écoulement de billes ferromagnétiques dans un silo quasi-2D. L'analyse de leur dynamique sous l'effet d'un champ magnétique externe et vertical permet d'examiner en détail les principaux mécanismes à l'œuvre au cœur du silo.

- Le premier chapitre propose un panorama général de la physique des milieux granulaires, en mettant l'accent sur les différentes formes de cohésion, ainsi que sur l'état actuel des connaissances concernant la vidange de silo. Ce cadre de référence montre que de nombreuses questions demeurent ouvertes et que la recherche sur les écoulements granulaires cohésifs reste un champ particulièrement actif.
- Le deuxième chapitre présente les fondements de notre approche expérimentale. Il met en évidence le potentiel d'une méthode basée sur la mesure systématique des grandeurs physiques, toutes traitées de manière uniforme par l'algorithme, ce qui facilite leur comparaison directe. La dernière partie de ce chapitre expose une étude exploratoire des effets triboélectriques sur l'écoulement dans un silo quasi-2D. Bien que les campagnes expérimentales révèlent une faible reproductibilité des résultats, elles montrent néanmoins que les particules acquièrent des charges électriques sur leur surface, distribuées de manière hétérogène.
- Le troisième chapitre s'intéresse à la cristallisation en écoulement, phénomène qui révèle le rôle fondamental de la diffusion de quantité de mouvement dans le milieu. Cette étude met également en lumière la cristallisation comme **une forme de cohésion** à part entière, dans la mesure où elle renforce la stabilité interne face au cisaillement imposé.

- Le quatrième chapitre décrit les effets de la cohésion magnétique verticale sur les propriétés globales de vidange du silo. Nous montrons qu'elle canalise l'écoulement en augmentant la taille des zones mortes et modifie la largeur minimale d'ouverture nécessaire pour initier la vidange. Elle accroît également la porosité du milieu granulaire, un effet particulièrement marqué dans les zones en écoulement par rapport aux zones statiques. Enfin, la cohésion magnétique amplifie significativement l'intensité des fluctuations. Celles-ci, initialement localisées dans une région arquée au-dessus de l'ouverture, s'étendent à l'ensemble de la zone étudiée sous l'effet du champ magnétique.
- Le cinquième chapitre est consacré à l'étude approfondie des arches instables qui se forment au-dessus de l'ouverture du silo, ainsi qu'à leurs conséquences : l'émission d'ondes de force ascendantes au cours de la vidange. Il apparaît que la fréquence d'émission de ces ondes est indépendante de la taille de l'ouverture, tandis que leur vitesse de propagation dépend fortement de la dynamique d'écoulement : plus celui-ci est lent, plus la vitesse des ondes est élevée. L'introduction d'une cohésion magnétique modifie significativement ce comportement, en réduisant à la fois la fréquence d'apparition des impulsions et leur vitesse de propagation dans le milieu granulaire. Ce double effet suggère que la cohésion magnétique tend à homogénéiser la dynamique interne du système et à en accroître sa rigidité. En d'autres termes, elle agit comme un facteur stabilisant, uniformisant les fluctuations locales et conférant au milieu granulaire une réponse plus cohérente face aux contraintes imposées. En conclusion, la mesure des fréquences internes se révèle être un moyen de quantifier le degré de cohésion d'un système.
- Enfin, le sixième et dernier chapitre explore l'utilisation des paramètres d'ordre orientationnel pour décrire la structuration interne du milieu granulaire. Leur mesure systématique met en évidence des réarrangements subtils qui échappent à l'analyse de la seule compacité, grandeur traditionnellement employée pour caractériser la structure d'un milieu granulaire. Nous montrons en particulier que les particules s'orientent naturellement selon la direction principale du cisaillement. Ce chapitre ouvre la voie à la mesure systématique des paramètres d'ordre orientationnel dans les géométries quasi-2D, tel que sur plan incliné, dans une cellule de cisaillement plan-plan ou même dans une géométrie Couette.

Perspectives

Cette dernière section expose les perspectives qui découlent de cette thèse. Elle met en avant les pistes de recherche qui s'inscrivent dans la continuité des principaux résultats présentés tout au long du manuscrit, et souligne que de nombreuses questions relatives à la physique des milieux granulaires cohésifs restent ouvertes.

Vidanges avec effets électrostatiques

Au cours du chapitre 2, nous avons présenté des résultats exploratoires sur l'influence de la triboélectrification lors de la vidange des silos. L'utilisation d'un silo quasi-2D permet de mettre en évidence comment la vitesse des grains est affectée par l'apparition d'une ségrégation de charges dans le système au cours du temps. Si la mesure optique, utilisée pour déterminer le mouvement des particules, est réalisée d'un côté de la cavité quasi-2D, une technique a été envisagée durant cette thèse pour estimer la quantité de charge stockée sur la paroi externe opposée du silo. (voir Fig. 7.1)

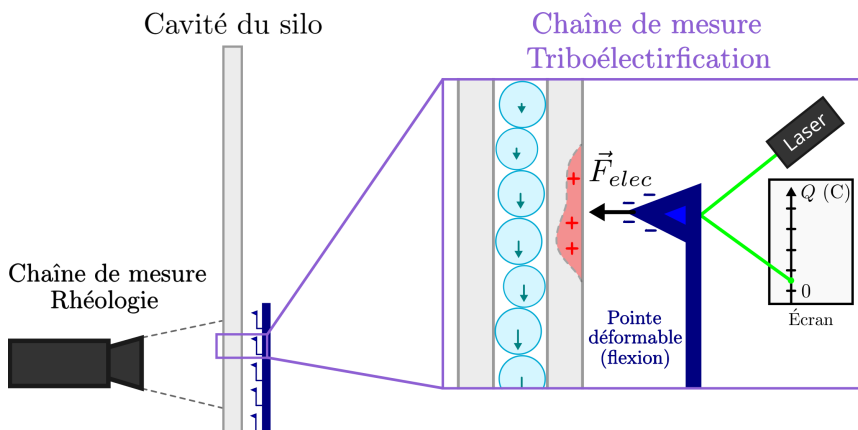


FIGURE 7.1 – Schéma du montage permettant de mesurer simultanément la vitesse d'écoulement des grains et la force du champ créée par les charges accumulées localement sur la surface de la paroi arrière du silo.

Cette méthode s'appuie sur l'adaptation du principe de la microscopie à force de Kelvin à un système de bien plus grande taille, dans lequel les différences de charges électriques sont nettement supérieures à celles observées sur les matériaux traditionnellement étudiés avec cette technique. Lors de

la vidange, des charges électriques s'accumulent sur les parois internes de la cavité du silo quasi-2D, entraînant l'apparition de zones chargées sur la partie externe des parois. Expérimentalement, l'existence de ces zones peut être ressentie après une vidange : en approchant son bras de la paroi, les poils se dressent vers la cavité, indiquant que celle-ci reste bel et bien chargée à la fin de la vidange. De plus, en touchant la paroi externe, on observe une légère décharge électrique : localement, la tension entre la paroi et l'expérimentateur dépasse la tension de claquage de l'air, qui est d'environ 3600 kV pour une distance équivalente à une taille de grain, soit 1.2 mm. Il est donc possible d'estimer la quantité de charge présente sur la paroi externe au cours du temps en plaçant une lamelle métallique qui se charge spontanément d'un signe opposé, générant ainsi une force électrostatique responsable de sa déformation. En mesurant cette déformation, on peut remonter à la valeur de la charge électrique apparente et locale stockée sur la paroi du silo. Cette approche permettrait donc de mesurer simultanément et localement l'évolution temporelle à la fois de la vitesse des grains et de leur charge électrique.

Vidanges dans différents champs magnétiques

Cette thèse se concentre principalement sur l'étude de la cohésion créée par un champ magnétique **vertical**. Elle s'inscrit dans la continuité des travaux de Thorens et al. [74], qui ont étudié l'influence d'un champ orthogonal à la cavité quasi-2D. Ces investigations ouvrent naturellement la question de l'effet d'un champ magnétique horizontal sur l'écoulement, dans le plan du système. Bien que certaines données aient été générées dans cette configuration, elles n'ont pas pu être analysées et présentées dans ce manuscrit faute de temps. Il serait intéressant que des travaux futurs explorent cette orientation afin de compléter notre compréhension des **effets directionnels** du champ magnétique sur la vidange de silo. Par analogie avec la cohésion électrostatique, qui semble se renforcer au cours de la vidange, l'utilisation d'une cohésion magnétique instationnaire permettrait d'étudier de manière fine l'influence des formes de cohésions transitoires. Dans le même esprit, l'application d'une cohésion oscillante pourrait révéler de nouveaux comportements du milieu granulaire lors de la vidange d'un silo. Ces perspectives ouvrent la voie à de futures études visant à comprendre comment des champs cohésifs dynamiques modulent les écoulements granulaires et la formation de structures complexes, l'objectif à terme étant de mieux contrôler ces écoulements.

Formation d'arche stable

Le chapitre 6 met en évidence tout le potentiel de la mesure des paramètres d'ordre orientationnel. Illustré sur la figure 7.2 (a), l'observation du champ d'argument $\arg(\langle \psi_6 \rangle_t)(x, y)$ permet d'identifier la succession des microstructures de gauche à droite : bleu, vert, rouge, jaune, bleu, vert, rouge, jaune, puis à nouveau bleu. En plaçant côte à côte les microstructures correspondant à chacune de ces couleurs, on voit apparaître une **arche formée par les directions denses** de chaque microstructure (dans le cadre rose de la figure 7.2 (a)). Ces structures macroscopiques en forme d'arche émergent spontanément pour deux raisons principales : (1) les grains s'organisent naturellement selon un agencement hexagonal, et (2) la direction du cisaillement favorise les microstructures les plus adaptées à l'écoulement.

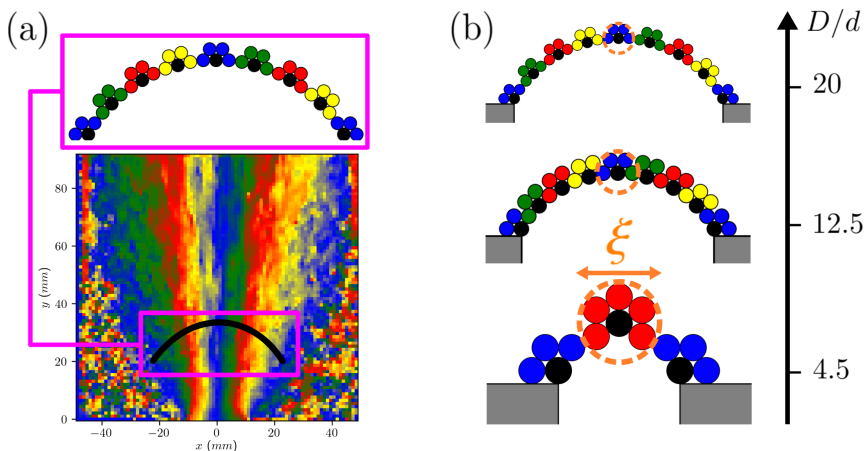


FIGURE 7.2 – (a) Identification d'une structure moyenne en forme d'arche au milieu de l'écoulement en silo quasi-2D. (b) Schémas des structures moyennes en forme d'arche qui peuvent se former pour trois tailles d'ouverture différentes. Les microstructures sont caractérisées par leur taille ξ .

Cette observation montre que des structures arquées se forment dans l'ensemble de la zone en écoulement. Cela est particulièrement vrai juste au-dessus de l'ouverture, où nous avons mis en évidence le processus de formation d'une arche instable. Ces résultats apportent un **nouvel éclairage sur le phénomène de blocage des silos** lorsque l'ouverture approche de la taille critique $D_c/d = 4.5$. Le schéma 7.2 (b) illustre les structures en forme d'arche susceptibles de se former juste au-dessus de l'ouverture,

pour différentes tailles d'ouverture. L'arche observée pour $D/d = 20$ apparaît particulièrement instable du fait de sa régularité quasi parfaite. Le simple désaxement d'une seule particule constituant l'arche suffit à provoquer l'effondrement de l'ensemble. La probabilité de voir émerger une telle structure est donc très faible, compte tenu du grand nombre de configurations accessibles à chaque particule. En revanche, à mesure que la taille de l'ouverture diminue, le nombre de configurations possibles pour les particules situées à la sortie se réduit également. Dans le cas limite $D_c/d = 4.5$, **seules quelques particules restent en mouvement** dans cette zone. Nous pouvons alors formuler l'hypothèse qu'un blocage stable, dans ces conditions, est associé à la formation locale d'hexagones orientés de manière défavorable par rapport à l'écoulement. Ces structures présentent alors une contrainte seuil de dislocation supérieure à la contrainte de cisaillement imposée par la gravité. Plus précisément, si les hexagones bleus sont ceux qui résistent le mieux à un cisaillement vertical, le schéma 7.2 (b) montre qu'un hexagone orienté favorablement par rapport au cisaillement peut néanmoins jouer le rôle de clé de voûte, stabilisant ainsi l'arche et freinant l'écoulement global. Enfin, la figure 7.3 propose un mécanisme simple, fondé sur des considérations géométriques, expliquant pourquoi le seuil critique prend la valeur spécifique $D_c/d = 4.5$.

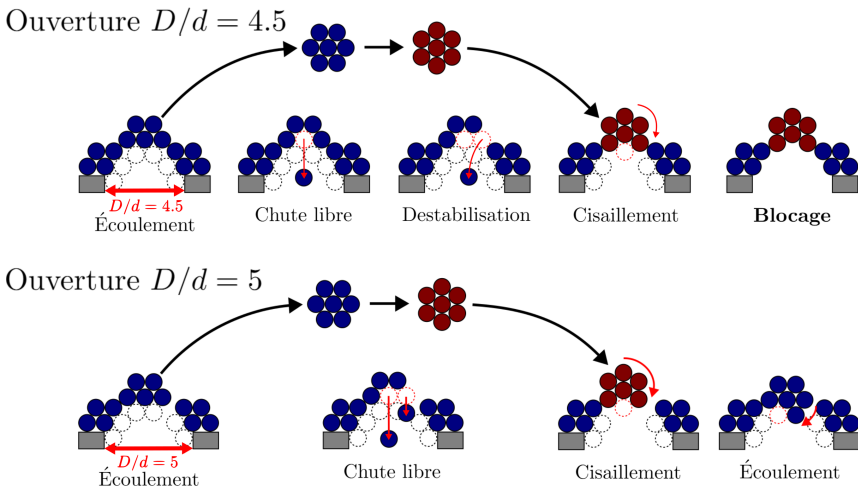


FIGURE 7.3 – Vision schématique de la dynamique de blocage d'un silo (haut) au niveau du seuil ($D/d = 4.5$) et (bas) juste au-dessus du seuil ($D/d = 5$).

Lien entre texture et rhéologie

Plus généralement, la mesure des paramètres d'ordre orientationnel peut offrir un nouvel éclairage sur la structure interne des écoulements granulaires quasi-2D, tels que ceux observés sur plan incliné, dans une cellule de Couette ou dans un tambour tournant. Deux pistes de recherche peuvent être explorées à partir de cette approche :

- **Non-localité de la réponse mécanique des matériaux granulaires** : Le modèle standard $\mu(I)$ présente des limites dans de nombreux systèmes expérimentaux, car sa formulation ne prend pas en compte la non-localité de la réponse mécanique des milieux granulaires. L'étude préliminaire présentée en annexe de cette thèse montre que le paramètre d'ordre hexatique ψ_6 constitue un excellent descripteur structural local, contenant davantage d'information que la compacité seule. Il permet notamment de visualiser la propagation de l'influence des singularités géométriques imposées par les conditions aux limites jusqu'au cœur du milieu en écoulement. Sa mesure systématique permettrait donc de révéler l'émergence de motifs complexes responsables de la dynamique globale du milieu, comme par exemple la formation d'arches instables pour les silo quasi-2D.
- **Angle d'avalanche et effet mémoire** : Le paramètre d'ordre hexatique établit un lien entre la contrainte seuil et la structuration interne locale d'un milieu granulaire. L'analyse statistique de l'orientation des structures hexagonales offre donc un moyen d'évaluer la fragilité des différentes zones du milieu. Ainsi, lorsqu'une contrainte est appliquée, il devient envisageable d'identifier les microstructures qui se déforment en premier, afin de mieux comprendre l'origine des avalanches granulaires. Nous avons montré au chapitre 6 que le cisaillement sélectionne les microstructures les moins résistantes. On peut en déduire que, dans l'empilement statique postérieur à une avalanche, les microstructures sont orientées favorablement à l'écoulement passé. En ce sens, l'ordre hexatique encode la mémoire du cisaillement ayant façonné le milieu granulaire.
- **Lien entre les écoulements 2D et 3D** : L'écoulement en silo occupe une place singulière en physique des milieux granulaires. En effet, la loi dimensionnelle décrivant le débit de vidange s'applique aussi bien à un silo quasi-2D qu'à un silo tridimensionnel, sans qu'aucun modèle théorique ne justifie pleinement cette similarité. Cette observation constitue l'un des fondements méthodologiques de cette

thèse et des travaux sur les systèmes quasi-2D : nous faisons l'hypothèse que les processus observés dans un système quasi-2D se manifestent également, sous une forme adaptée, dans les écoulements tridimensionnels. Par exemple, les phénomènes de blocage sont observés aussi bien dans les silos quasi-2D que dans les silos 3D. Cependant, cette analogie soulève une question intéressante : si, dans un système quasi-2D, le milieu adopte spontanément des configurations hexagonales lors de l'écoulement, que se passe-t-il dans le cas tridimensionnel, où deux arrangements compacts sont possibles, le cubique à faces centrées (CFC) et l'hexagonal compact (HC) ? Pourquoi un empilement optimal unique apparaît-il en 2D, tandis que deux structures optimales coexistent en 3D ? Bien que cette question n'ait pas de réponse simple, il semble que cette différence n'affecte pas significativement les écoulements de grains dans les silos, puisque la loi dimensionnelle du débit de vidange reste valide dans les deux cas.

Simulations numériques

Les résultats présentés dans ce manuscrit de thèse proviennent exclusivement d'une approche expérimentale. Aujourd'hui, grâce à l'augmentation importante de la puissance de calcul au cours des dernières années, il devient envisageable de réaliser des simulations numériques de ce type de système à l'aide de la méthode des éléments discrets (DEM), couramment utilisée pour modéliser les écoulements granulaires. L'avantage de cette approche réside dans sa capacité à fournir l'ensemble des grandeurs physiques d'intérêt, telles que la position de chaque particule et les forces qui lui sont appliquées. Il serait donc possible d'observer plus en détail l'évolution des paramètres d'ordre orientationnel de chaque grain, ainsi que le processus de propagation des forces au sein du milieu granulaire. De futurs travaux dans ce sens complèteraient directement les résultats présentés dans ce manuscrit de thèse.

Cette thèse ouvre ainsi de nombreuses perspectives, à la fois sur le plan fondamental, en établissant un lien entre l'empilement optimal et la réponse mécanique des milieux granulaires, et sur le plan appliqué, à travers l'étude d'une cohésion contrôlable dans un écoulement omniprésent dans les applications industrielles : la vidange de silo.

Annexe A Durée de vie des arches soumis à des vibrations

Dans cette première annexe, nous présentons un ensemble de résultats expérimentaux conduisant à **une estimation de la longueur d'écrantage** λ du modèle de Janssen, précédemment introduite dans la section 1.4.2 et discutée plus en détail dans le chapitre sur les ondes internes de forces à la section 5.3.2 [130]. Nous y détaillons le principe de l'expérience, le montage et l'algorithme utilisés pour cela. Enfin nous présentons les résultats principaux de cette courte étude parallèle.

A.1 Principe de l'expérience

Récemment, plusieurs études ont montré que vibrer un silo quasi-2D verticalement permet de modifier finement le débit de vidange [16] et également de **briser les arches stables** dans le régime de blocage [131, 132], c'est-à-dire lorsque $D < D_c$. Dans cette étude annexe, nous proposons d'étudier plus en détail l'influence des vibrations sur **la durée de vie des arches stables**. Plutôt que faire varier l'intensité des perturbations externes, nous choisissons de mesurer simultanément, pour chaque arche stable, sa durée de vie, notée T_c , ainsi que **la hauteur de grains dans le réservoir au moment du blocage temporaire**, notée h_c . Pour cela, nous nous reposons sur le dispositif expérimental développé dans le cadre de la thèse d'Arthur Pascot, qui permet d'appliquer des vibrations verticales contrôlées à la même cavité quasi-2D que celle présentée au chapitre 2. La figure A.1 (a) montre le schéma du montage expérimental. Celui-ci comprend notamment une boucle d'asservissement permettant de contrôler les vibrations en temps réel. L'accéléromètre envoie en continu sa mesure à un contrôleur, qui ajuste le courant délivré au pot vibrant afin de garantir l'amplitude et la fréquence des vibrations sinusoïdales souhaitées. La photographie du dispositif est montré en figure A.1 (b).

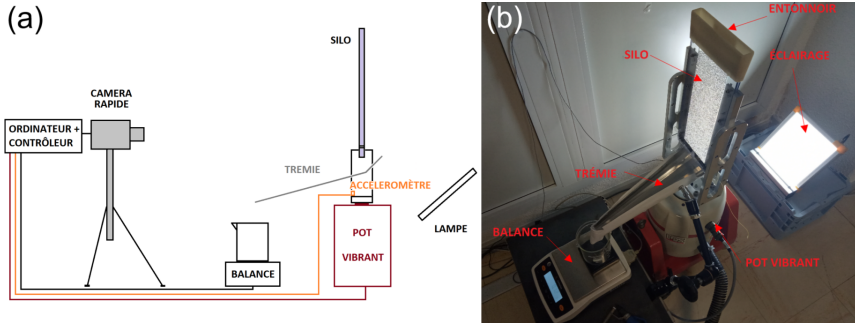


FIGURE A.1 – (a) Schéma du montage expérimental d'Arthur Pascot, utilisé dans le cadre de cette étude annexe. (b) Photographie du silo quasi-2D rempli de billes en verre.

Afin de mesurer en même temps T_c et h_c pour la majorité des arches stables survenant au cours d'une vidange, le dispositif expérimental est muni d'une caméra rapide, filmant l'écoulement au niveau de la sortie, et d'une balance numérique, toutes deux reliées au même ordinateur :

- **Mesure de la durée de vie T_c** : la caméra filme la zone proche de la sortie du silo à la fréquence d'acquisition relativement basse de 30 Hz. Bien qu'il soit impossible d'identifier et suivre les particules à cette résolution temporelle, il est quand même possible de détecter l'apparition d'arches bloquantes, dont la durée de vie est au moins supérieure à $T_c \geq 1/30$ s. Pour cela, nous calculons entre chaque paires d'images qui se suivent dans le temps le produit de corrélation entre elles. Le **caractère aléatoire des empilements granulaires** nous permet de conclure que si deux images successives montrent le même agencement de grains (c'est-à-dire que le coefficient de corrélation, noté C , est proche de $C \sim 1$), alors ces mêmes particules n'ont très probablement pas bougé entre ces deux instants. **Une arche bloque donc la sortie du silo.** À l'inverse, si les empilements représentés sur deux images successives sont différents, alors les particules ont nécessairement bougé entre chaque instant. **Le silo est donc ouvert** et dans ce cas nous mesurons un coefficient de corrélation bien inférieur à 1. Enfin nous estimons la durée de vie d'une arche en comptant le nombre n de paires d'images successives qui vérifient $C > 0.9$ (seuil arbitraire). La durée de vie d'une arche correspond alors à $T_c = n/30$ s.

- **Mesure de la hauteur de grains h_c** : la balance permet de mesurer la masse de grains écoulés au cours de la vidange, notée $m(t)$. Lorsque la sortie du silo est bloquée, les courbes $m(t)$ et $h(t)$ présentent un plateau, dont la longueur correspond exactement à la durée de vie de l’arche bloquante T_c . En revanche, lorsque le silo se vidange, le débit est constant et $m(t)$ est une fonction linéairement croissante tandis que $h(t)$ est linéairement décroissante. Nous avons donc une relation de la forme suivante :

$$h(t) = h(0) \left(1 - \frac{m(t)}{m_{totale}} \right) \quad (\text{A.1})$$

En connaissant la hauteur de grains initiale $h(0)$ et en relevant la valeur maximale de la masse de grains écoulés m_{totale} , nous pouvons alors reconstruire la hauteur réelle $h(t)$ à chaque instant de la vidange. En particulier, nous pouvons mesurer la valeur de hauteur h_c pour chaque plateau identifié, et directement la relier avec la durée de vie de l’arche associée.

A.2 Protocole expérimental

Deux échantillons distincts sont utilisés : des billes en acier de diamètre moyen 1.1 mm et des billes en verre de diamètre moyen 1.125 mm. Pour chaque échantillon, plusieurs vidanges ont été réalisées avec une ouverture de silo fixée à $D/d \sim 3.9$ afin d’observer l’apparition d’arche stable au cours de l’écoulement. À chaque expérience, la caméra filme l’écoulement proche de la sortie, pendant que la balance mesure la masse écoulée au court du temps. La table A.1 récapitule l’ensemble des paramètres expérimentaux explorés.

Échantillon	D/d	f (Hz)	A (mm)	Nombre de vidanges
Billes en acier	3.9	30	0.70	35
Billes en verre	3.9	30	0.45	37

TABLE A.1 – Paramètres expérimentaux explorés pour l’analyse de la durée de vie des arches stables. f désigne la fréquence des vibrations alors que A correspond à leur amplitude.

La fréquence des vibrations est fixée à $f = 30$ Hz, afin de correspondre au taux d’acquisition de la caméra. Nous observons que l’ordre de grandeur

de la durée de vie des arches stables **dépend sensiblement de l'amplitude** des vibrations. Afin d'observer des arches dont la durée de vie est raisonnable, nous avons choisi de fixer l'amplitude des vibrations à $A = 0.70$ mm pour les billes en acier et $A = 0.45$ mm pour les billes en verre. Pour chaque échantillon, si l'amplitude des vibrations est inférieure de 0.05 mm, les arches persistent bien trop longtemps devant la durée pendant laquelle la caméra peut filmer la vidange. En revanche, si l'amplitude des vibrations est supérieure de 0.05 mm, la durée de vie des arches devient inférieure à la valeur minimale mesurable de $\min(T_c) = 1/30$ s.

A.3 Durée de vie des arches en fonction de la hauteur de grains

La figure A.2 représente l'évolution de la durée de vie moyenne des arches $\langle T_c \rangle$ en fonction de la hauteur h/d de grains dans le réservoir au moment de leur apparition. Chaque point correspond à la moyenne de l'ensemble des durées de vie T_c des arches dont la hauteur h_c est comprise dans un intervalle de taille 18 d.

Dans un premier temps, nous observons que la durée de vie moyenne des arches est **constante lorsque la hauteur de grains dans le réservoir est élevée**. Cette observation s'explique par la saturation de la pression au niveau de l'ouverture du silo lorsque celle-ci est bloquée. En effet, la stabilité d'une arche, c'est-à-dire sa durée de vie, est directement reliée à l'intensité des forces de frottement et donc à **l'intensité des forces de pression** subie par les grains qui la constituent. Une durée de vie moyenne constante indique donc que la pression au niveau de l'arche est maximale et vaut la **pression de saturation** du milieu.

Ensuite, lorsque la hauteur de grains dans le réservoir devient plus faible au cours de la vidange, typiquement inférieure à environ 75 d, la durée de vie moyenne des arches **chute brusquement**. Dans ce régime, la pression au niveau de la sortie, lorsqu'elle est bloquée, est bien inférieure à la pression de saturation, ce qui se traduit par une **baisse de la stabilité des arches**. Celle-ci perdurent alors moins longtemps que précédemment. Si l'existence d'arches est toujours observée lorsque $h/d < 50$ pour la vidange de billes en verre, nous ne détectons **plus aucun blocage** dans cette plage pour les billes en acier.

A.3. DURÉE DE VIE DES ARCHES EN FONCTION DE LA HAUTEUR DE GRAINS

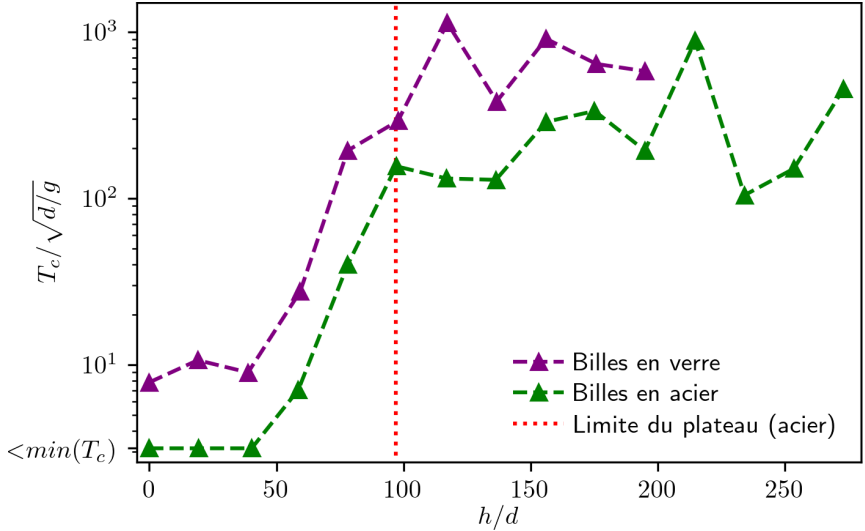


FIGURE A.2 – Durée de vie des arches stables normalisée $T_c/\sqrt{d/g}$ en fonction de la hauteur de grains dans le réservoir au moment du blocage. La ligne en pointillé rouge correspond à la limite inférieure du plateau de saturation, au delà duquel la durée de vie des arches est relativement constante.

Pour l'acier, la longueur d'écrantage λ correspond à la dernière hauteur h/d telle que $T_c/\sqrt{d/g}$ appartient au plateau de saturation. Nous extrayons la valeur suivante :

$$\boxed{\lambda/d \sim 97}. \quad (\text{A.2})$$

La longueur d'écrantage extraite pour le verre serait de $\lambda/d \sim 78$, ce qui reste du même ordre de grandeur. La similarité des résultats obtenus montre que la longueur d'écrantage dépend moins du choix du matériau que **de la géométrie du système utilisé**. Ces valeurs sont comparables à celles obtenues par Vivanco et al. dans leur étude de 2016 [133]. Ils obtiennent des valeurs de longueurs d'écrantage légèrement inférieures aux nôtres, comprises entre $\lambda/d \sim 16$ et $\lambda/d \sim 38$ dans une géométrie quasi-2D bien plus étroite ($L/d \sim 15$ dans leur étude contre $L/d \sim 91$ dans notre cas).

Annexe B Écoulement sur plan incliné quasi-2D

Cette deuxième annexe vient compléter et approfondir l’observation présentée au chapitre 6 : le cisaillement continu d’un milieu granulaire tend à sélectionner sa structure interne en écoulement. L’objectif est ici d’évaluer le paramètre d’ordre hexatique ψ_6 dans un autre type d’écoulement bidimensionnel, a priori plus simple à analyser car de nature unidirectionnelle : l’écoulement sur plan incliné quasi-2D. Les résultats présentés dans cette annexe ont été obtenus par Hector Leclerc au cours de son stage de M1 au sein du GRASP [134]. Il a mené les campagnes de mesures expérimentales, participé à la conception et à la mise en place du montage, et contribué à l’adaptation de l’algorithme décrit au chapitre 2 de ce manuscrit de thèse.

B.1 Principe de l’expérience

Le montage expérimental est constitué d’un plan incliné quasi-2D, fixé à un angle de 40° , dont les parois sont en polycarbonate recouvertes d’une fine couche conductrice (voir Fig. B.1 (a)). Ce dispositif est analogue à celui du silo quasi-2D présenté au chapitre 2. Il se décompose en deux parties principales : un réservoir quasi-2D destiné à contenir les grains et une section inclinée, appelée « plan incliné », dont la géométrie du fond peut être choisie et modulée en fonction des besoins expérimentaux. La figure B.1 (b) illustre les quatre types de géométries de fond étudiées : rugosités favorables, rugosités défavorables, cliquets favorables et cliquets défavorables. Les rugosités favorables imitent des grains fixes disposés de telle sorte que leur direction dense soit alignée avec celle de l’écoulement. À l’inverse, les rugosités défavorables reproduisent des particules fixes dont les directions denses sont inclinées respectivement de 30° , 90° et 150° par rapport au plan basal. Les cliquets favorables consistent en de petites marches d’en-

viron 0.5 mm desquelles chutent naturellement les particules au cours de l'écoulement. Les cliquets défavorables, en revanche, sont constitués des mêmes marches mais orientées de manière à constituer un obstacle que les grains doivent franchir pour poursuivre leur mouvement. Enfin, chaque fond étudié possède une longueur d'environ 30 cm, ce qui est suffisant pour l'établissement d'un écoulement stationnaire et uniforme.

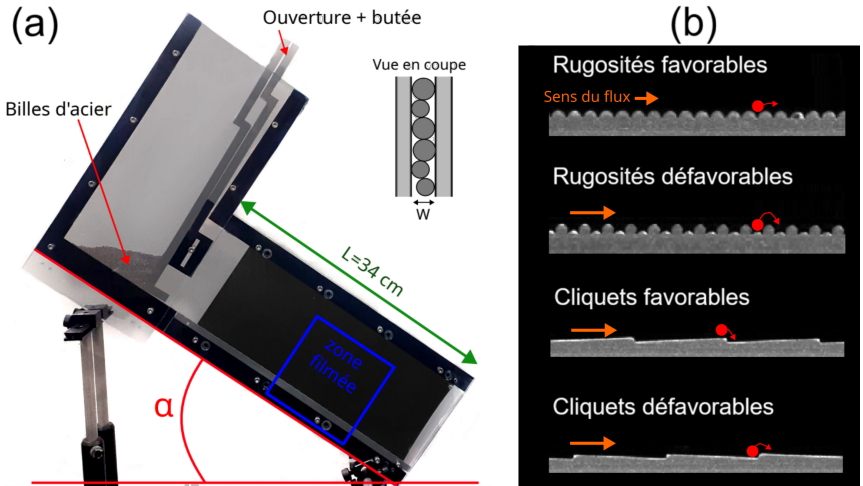


FIGURE B.1 – (a) Schéma du plan incliné quasi-2D. (b) Ensemble des quatre types de fond utilisés pour les expériences. Les flèches orange représentent le sens du flux de grains. Un grain de diamètre $d = 1.2\text{ mm}$ est représenté en rouge sur chaque fond.

Une expérience correspond à l'ouverture du réservoir à une hauteur fixe de 3 cm pour déclencher l'écoulement. Le réservoir est entièrement rempli de billes en acier de diamètre moyen $d = 1.1\text{ mm}$, ce qui garantit un flux stationnaire pendant au moins 2 s, soit la durée d'acquisition de la caméra rapide. Pour chaque type de fond, trois vidanges ont été réalisées.

B.2 Sélectivité de la structure interne

Les figures B.2 (a) et (b) présentent les champs eulériens moyens de l'argument du paramètre d'ordre hexatique, $\arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$, pour les deux types de fonds rugueux. Dans le cas (a), correspondant aux rugosités favorables, on observe que le fond impose aux grains voisins une

orientation particulière : l'argument du paramètre d'ordre tend alors vers $\arg(\langle\psi_6\rangle_t) = 0$. Cet effet est marqué dans la zone proche du fond, c'est-à-dire pour $y/d \leq 3$, puis il s'atténue progressivement à mesure que l'on s'éloigne de la paroi. Plus en détail, entre $y/d = 3$ et $y/d = 8$, les structures hexagonales apparaissent légèrement inclinées dans le sens antihoraire par rapport à la direction de l'écoulement, avec $\arg(\langle\psi_6\rangle_t) \sim \pi/2$. Cette réorientation est liée à la dynamique interne du milieu granulaire, marquée par les fluctuations de vitesse et les irrégularités de la structure locale. Le mécanisme peut être décrit de la façon suivante : lorsqu'une structure hexagonale bleue en mouvement se bloque, la structure qui la suit doit la contourner par le haut afin de poursuivre son déplacement. Pour ce faire, elle se réoriente légèrement tout en conservant une configuration permettant d'être facilement cisailée par la contrainte globale appliquée. Sans cette réorganisation, elle se bloquerait à son tour, entraînant la répétition du processus par propagation de proche en proche. En moyenne, les structures orientées avec $\arg(\langle\psi_6\rangle_t) = \pi/2$ (zones jaunes) sont plus fréquemment observées que celles correspondant à $\arg(\langle\psi_6\rangle_t) = -\pi/2$ (zones vertes), car elles se révèlent plus faciles à cisailier. Le schéma B.3 (a) illustre visuellement ce mécanisme.

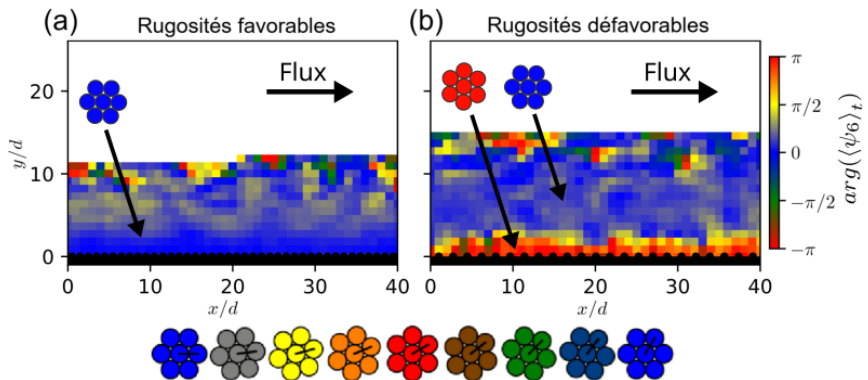


FIGURE B.2 – Champs eulériens moyens $\arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y)$ pour (a) le fond aux rugosités favorables et (b) le fond aux rugosités défavorables. En dessous se trouve les microstructures hexagonales colorées en fonction de la valeur de $\arg(\psi_6)$ du grain au centre.

Dans le deuxième cas (Fig. B.2 (b)), on observe l'existence d'une couche de grains caractérisée par $\arg(\langle\psi_6\rangle_t)(x, y) = \pm\pi$ pour $y/d \leq 3$. Cette contrainte géométrique, imposée par la configuration du fond du plan in-

cliné, induit la formation d'une structure hexagonale particulièrement défavorable à l'écoulement. Au-delà de cette zone, entre $y/d = 3$ et $y/d = 11$, le même phénomène que dans le cas précédent est mis en évidence : des structures hexagonales favorables au cisaillement, légèrement inclinées dans le sens antihoraire par rapport à l'écoulement, persistent au cours du mouvement. Une fine bande de transition, localisée autour de $y/d = 3$, sépare ces deux régions. Les microstructures présentes dans cette zone intermédiaire sont marquées par un argument proche de $\arg(\psi_6) \sim \pi/2$. Comme pour le cas des rugosités favorables, l'apparition de ces structures inclinées s'explique par la rigidité des couches inférieures. Pour poursuivre leur progression, les grains doivent en effet adopter une organisation locale qui maximise leur aptitude au cisaillement. Ce mécanisme est représenté schématiquement dans la figure B.3 (b).

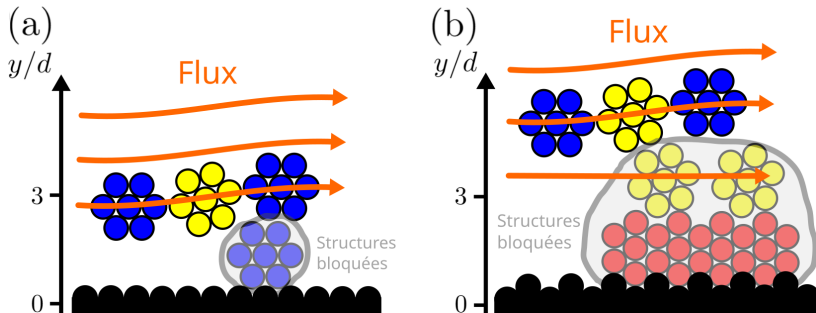


FIGURE B.3 – Schémas des mécanismes à l'origine de l'existence des différentes bandes de texture pour le fond aux rugosités (a) favorables et (b) défavorables.

La figure B.4 présente les densités de probabilité de $\arg(\psi_6)$ pour (a) le fond muni de rugosités favorables et (b) celui muni de rugosités défavorables. On constate tout d'abord que les distributions ne sont jamais uniformes : cela indique que, quel que soit y/d , l'écoulement impose effectivement une organisation interne au milieu granulaire. La sélectivité de cette structure interne est particulièrement marquée à proximité du fond, comme en témoigne l'évolution du maximum des PDF en fonction de y/d , représentée en encart dans chaque figure. Ces résultats confirment les observations précédentes : chaque type de fond impose bien une microstructure spécifique aux grains qui lui sont directement adjacents. Toutefois, dans la partie supérieure de la couche en écoulement, les distributions tendent progressivement vers une forme similaire, indépendamment de la condition limite imposée au fond du plan incliné.

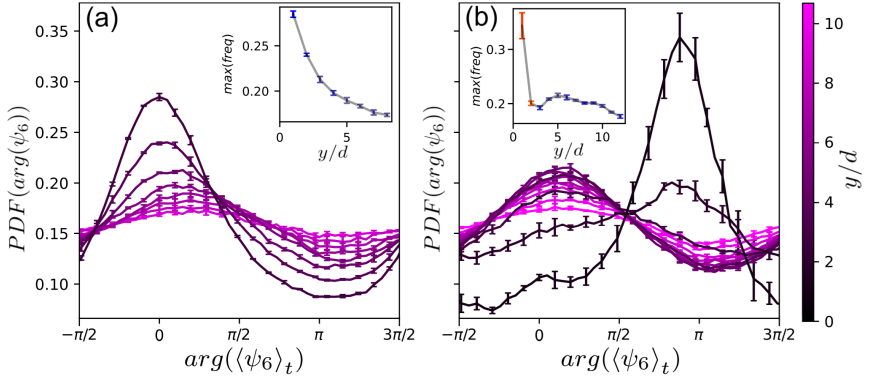


FIGURE B.4 – Densités de probabilité de $arg(\psi_6)$ pour différentes couches en écoulement pour le fond aux rugosités (a) favorables et (b) défavorables. Les inserts de chaque figure représentent l'évolution de l'amplitude du maximum des distributions en fonction de y/d .

La figure B.5 présente les champs eulériens moyens de l'argument du paramètre d'ordre hexatique pour les fonds équipés de cliquets favorables (a) et défavorables (b). Dans le cas (a), correspondant aux cliquets favorables, on observe que la texture moyenne du milieu granulaire reste globalement alignée avec la direction de l'écoulement au sein des cinq premières couches, avec $arg(\psi_6) \sim 0$. Toutefois, des irrégularités apparaissent localement à proximité immédiate de chaque marche, comme le montre l'agrandissement inclus dans la figure. Dans ces zones restreintes, les valeurs de $arg(\psi_6)$ deviennent légèrement négatives, traduisant une rotation horaire des microstructures. Cet effet demeure fortement localisé, ce qui illustre de manière nette la rigidité intrinsèque du milieu granulaire. Dans le cas (b), où les grains doivent franchir activement les marches du fond pour progresser, ce phénomène local est beaucoup plus marqué. Bien que la structure interne globale du milieu reste, comme dans les autres cas, alignée avec l'écoulement, le champ moyen révèle l'apparition de **motifs singuliers en forme de panache**. Ces structures émergent au voisinage de chaque marche et s'étendent presque sur toute la hauteur de la couche en écoulement. Elles témoignent du fait que des structures rigides peuvent se former temporairement au cours du mouvement, contraignant les microstructures environnantes à se réorienter afin de s'adapter aux nouvelles conditions mécaniques locales.

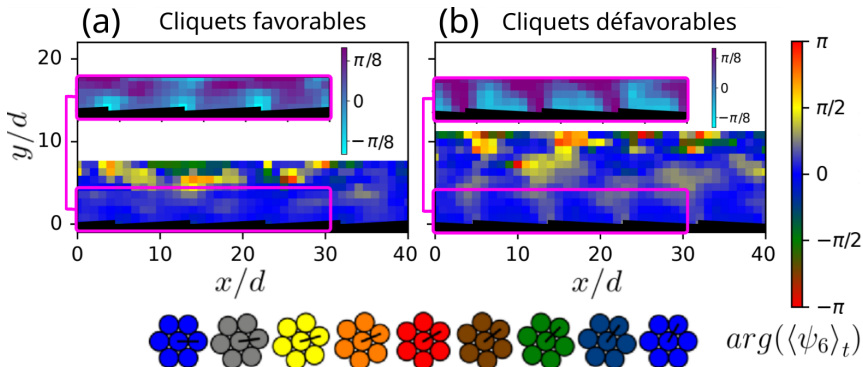


FIGURE B.5 – Champs eulériens moyens $arg(\langle \psi_6 \rangle_t)$ pour le fond aux cliquets (a) favorables et (b) défavorables. Un zoom de chaque champ est représenté sur les figures.

Qu’il s’agisse de marches à franchir (Fig. B.5 (b)) ou d’ouvertures à franchir (Fig. B.5 (a)), ces observations conduisent à la conclusion suivante : les aspérités de la géométrie du système favorisent l’émergence de grandes structures internes, à la fois rigides et éphémères, même dans un régime d’écoulement stationnaire. Ces structures correspondent à des chaînes de forces dont la taille est significativement plus grande que celle d’une particule individuelle. Elles possèdent une rigidité suffisante pour modifier les propriétés globales de l’écoulement du milieu granulaire. Dans le cas de l’écoulement sur plan incliné, l’uniformité de la direction x permet de réduire l’influence de ces effets non locaux. En revanche, dans le cas de l’écoulement en silo, caractérisé à la fois par sa stationnarité et par son hétérogénéité, ces effets deviennent incontournables et conditionnent fortement l’organisation interne du milieu.

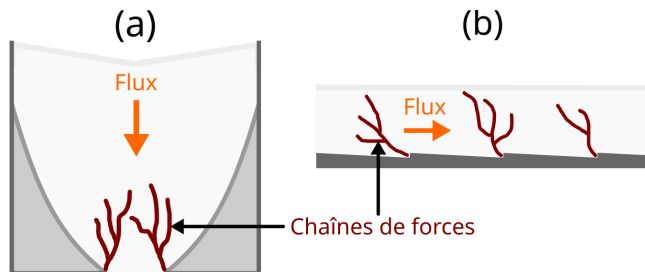


FIGURE B.6 – Les singularités géométriques du système influencent la dynamique des écoulements de grains, que ce soit (a) dans les silos ou (b) sur un plan incliné comportant des marches.

B.3 Profils de vitesse et non-localité

La figure B.7 (a) présente les profils moyens de vitesse des particules pour les quatre types de fonds étudiés. Ces profils sont **fortement influencés** par la géométrie imposée par le plan incliné. On observe tout d'abord que le fond muni de cliquets favorables est celui qui facilite le plus efficacement le glissement des particules : la vitesse basale y est non nulle, avec $v(y = 0) \neq 0$. À l'inverse, les autres conditions limites contraignent l'écoulement à une vitesse pratiquement nulle au contact du fond ($y = 0$). Par ailleurs, les profils de compacité, représentés dans la figure B.7 (b), révèlent que l'épaisseur de la couche en écoulement est nettement plus importante lorsque la condition limite impose aux grains des arrangements internes particulièrement résistants au cisaillement appliqué.

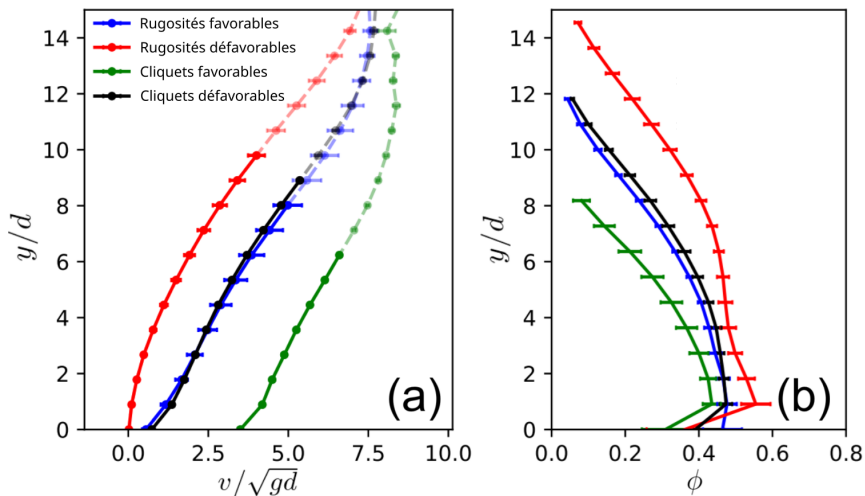


FIGURE B.7 – Profils de (a) vitesse normalisée v/\sqrt{gd} et (b) compacité moyenne ϕ en fonction de la hauteur dans la couche en écoulement y/d .

Conclusion

L'ensemble des observations présentées dans cette annexe confirme que les conditions aux limites d'un dispositif où s'écoulent des particules jouent un rôle central dans la rhéologie du milieu. Le simple changement de condition limite conduit à des **comportements dynamiques très différents**, et ce sur une échelle spatiale bien supérieure à la taille d'un grain. Il apparaît donc qu'aucun modèle rhéologique universel ne peut prédire correctement les profils d'écoulement sans prendre en compte à la fois la structure externe du système et **la structure interne du milieu granulaire**. Dans cette perspective, le paramètre d'ordre hexatique s'impose comme un descripteur structurel particulièrement pertinent pour analyser et comprendre la non-localité de la rhéologie des milieux granulaires en écoulement bidimensionnel.

Le modèle rhéologique $\mu(I)$ demeure aujourd'hui une référence incontournable pour la description des écoulements granulaires, en particulier sur plan incliné. Toutefois, il ne prend en considération aucun paramètre d'ordre orientationnel. Les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse, ainsi que ceux issus du stage de Hector Leclerc, ouvrent ainsi une voie prometteuse vers une modélisation plus fine des écoulements granulaires. Cette approche pourrait à terme améliorer la description et la modélisation des écoulements appliqués les plus complexes, dont l'écoulement en silo constitue un exemple emblématique.

Experimental study of the discharge of granular quasi-2D silo in a uniform magnetic field

David LUCE^{1,2,*}, Adrien GANS², Nicolas VANDEWALLE¹, and Sébastien KIESGEN DE RICHTER^{2,3}

¹Université de Liège, GRASP, Liège, Belgique

²Université de Lorraine, CNRS, LEMTA, Vandoeuvre-lès-nancy, France

³Institut Universitaire de France (IUF)

Abstract. We present an experimental study of the discharge of a monolayer of a ferromagnetic granular medium in a quasi-2D silo surrounded by vertical uniform magnetic field. We observe that the cohesion induced by the vertical magnetic field tends to canalize the flow above the outlet, modifying its morphology with little incidence on the mass flow rate. Using a direct measurement method of velocities based on particle tracking, we are able to extract an altitude-dependent diffusion length of the granular medium, previously introduced in the kinetic model, and propose a qualitative interpretation of its decay with cohesion.

1 Introduction

Granular media frequently shows complex cohesive behavior in various geophysical phenomena and industrial applications as in additive manufacturing [1] or in food processes [2]. The difficulty in apprehending such cohesive behavior lies in the hard, and often impossible, ways of controlling cohesion in granular materials. Although granular materials are used in many processes in the industry, its behavior remains quite obscure. Therefore, various standard experiments have been used in the past to extract rheological properties of granular materials, such as slump test [3], pile angles [4] or inclined planes flow [5]. In particular, silo discharge is a widely used system, some properties of which remain challenging to fully understand to this day. It has been extensively studied for cohesionless granular media [6–9] and more recent works focus on the cohesive case [10]. In particular the influence of aperture size on the flow rate was widely studied, firstly by Hagen in 1852 (translated in [6]) followed by more recent works [7–9]. Considering grains of size d falling freely through an opening of a given size $D \times W$, one can show that the mass flow rate Q may be written:

$$Q(D) \propto \sqrt{g}WD^{3/2} \quad (1)$$

Later, Beverloo [7] introduced a new parameter k to take account of grains obstructing part of the aperture, leading to the following expression :

$$Q(D) = C\rho\phi_b\sqrt{g}W(D - kd)^{3/2} \quad (2)$$

* e-mail: david.luce@univ-lorraine.fr

Where ρ represents the density of the grains, ϕ_b denotes the volume fraction of the bulk, W is the width of the silo, D corresponds to the aperture size length, d is the mean grain diameter. C is a dimensionless fitting parameter ranging between 0.55 and 0.65 [7]. Since k accounts for the fraction of grains obstructing the aperture, it should be close to 1, which was shown by Mankoc et al 2007 [8] for large outlet (i.e. large D/d ratio) implying that dilatancy effects that cannot be neglected for small aperture are not captured by the Beverloo law.

The morphology of the velocity profile in the bulk of the silo was also investigated [11–15]. In that case, the flow is controlled by the cooperative dynamics of particles at the outlet and the kinetic model attempts to account for the resulting diffusion processes. This model is based on the hypothesis of the existence of a correlation length, denoted b , between the horizontal velocity v_x and the horizontal velocity gradient $\partial_x v_y$ such as:

$$v_x = b \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (3)$$

Assuming that the mass flow rate Q is constant, which is observed experimentally and the flow is mostly incompressible, the vertical velocity v_y can be calculated analytically such as:

$$v_y(x, y) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi b y}} \exp\left(\frac{-x^2}{4by}\right) \quad (4)$$

which correspond to a velocity profile close to a gaussian distribution. Since a strong hypothesis of the model is the incompressibility of the flow, this analytical formula do not capture the observed velocity profile close to the outlet.

In this work, we investigate the flow of a remotely cohesion-controlled granular media in a quasi-2D silo, which allows us to observe the effect of the cohesion on the flow. We evidence the influence of cohesion on previous existing models.

2 Experiments

A monolayer of steel beads (mean diameter $d = 1.1 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$) is confined in a quasi-2D silo made of conductor polycarbonate plates. The dimensions of the cavity are $H = 300 \text{ mm}$ (height), $L = 100 \text{ mm}$ (width) and $W = 1.25 \text{ mm}$ (depth) (Fig. 1 (a)).

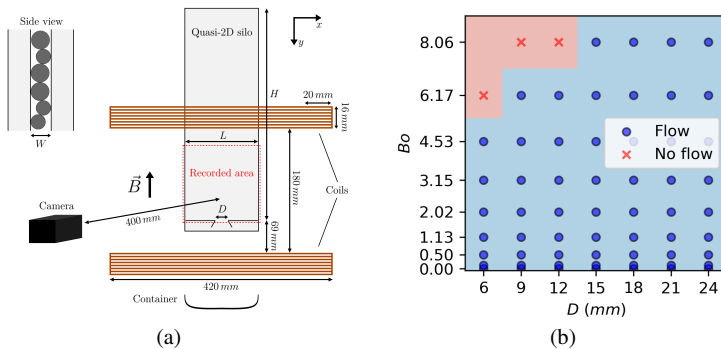


Figure 1. (a) Sketch of the experimental setup. (b) Phase diagram for the outlet flow in the parameter space (D, Bo) .

We characterize the flow for aperture size D from 6 mm to 24 mm. Images of the discharge recorded by a high-speed camera are analysed by using PTV to extract the velocity v , the volume fraction ϕ and reconstruct the flow rate Q at each timestep. Coils in Helmholtz configuration subjected to a current I allow one to apply a uniform magnetic field \vec{B} across the opening of the silo. Cohesion is controlled by adjusting the current passing through them (up to 4.0 A) which corresponds to a range of applied magnetic field from 0 G to 27.2 G. Steel particles placed in a magnetic field acquire magnetic dipolar moments, and behave like small magnets. They attract each other in the vertical direction and repel each other in the horizontal direction as shown in previous work [16]. To quantify cohesion, we define a magnetic Bond number, denoted as $Bo = F_m/mg$ where F_m is the normal magnetic force and m is the mass of a particle. As discussed in [17], the expression of the Bond number may be reduced to:

$$Bo = \frac{I^2}{I_{ref}^2} \quad (5)$$

where I_{ref} is the reference current required for the magnetic force to equal the weight of a single grain ($Bo = 1$). Measurements lead to a reference current of $I_{ref} = 1.409 \pm 0.144$ A and Bond numbers from 0 to 8.06.

3 Results

3.1 Outlet flow

We observe a flow threshold emerging for a critical cohesion at a given aperture D , as shown in Fig. 1 (b). The flow does not occur beyond this threshold. In the cohesion-less case, it is known that velocity and volume fraction profiles are self-similar [9]. Below this threshold, our results show that cohesion does not change the shape of velocity profiles (Fig.2 (a)) and have only a little incidence on volumic fraction profiles (Fig.2 (b)).

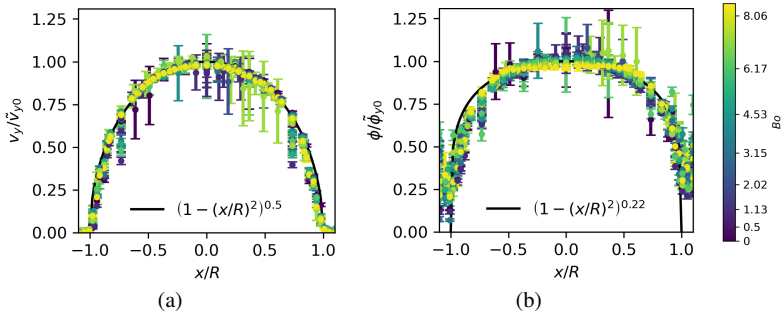


Figure 2. (a) Vertical velocity profiles and (b) volumic fraction profiles against cohesion Bo normalized by their fitted center value \tilde{v}_{y0} and ϕ_0 .

From these data, we investigate the evolution of the flow rate Q for different aperture size D and different cohesion by computing the integral of these profiles. Our experiments shows that the evolution of the flow rate is well captured by the Beverloo model (Fig.3 (a)) even with cohesion, with a little deviation for small values of D/d which is consistent with the literature. A more detailed analysis shows that cohesion slightly increases the velocity v_{y0} at the center of the aperture (Fig.3 (b)) but reduces the volume fraction ϕ_{y0} (Fig.3 (c)), which implies that magnetic cohesion has little influence on the flow rate.

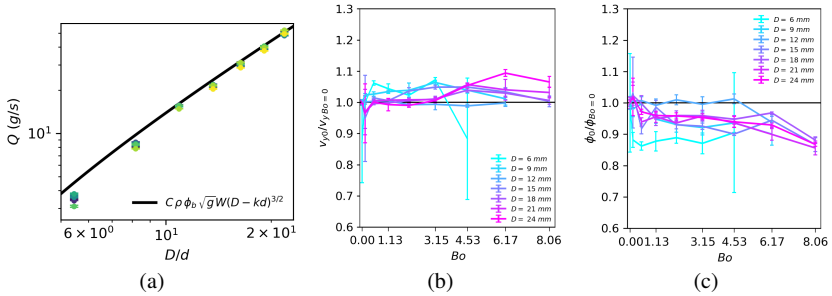


Figure 3. (a) Flow rate versus the aperture D and cohesion Bo and Beverloo law for $C = 0.65$ and $k = 1.5$. Evolution of (b) the velocity and (c) the volume fraction at the center of the outlet versus cohesion.

3.2 Bulk flow

Our results show that, in the bulk of the silo, the vertical velocity profiles resemble Gaussian distributions for cohesionless granular materials, which is consistent with the literature [13], and also for cohesive granular material (Fig. 4 (a) and (b)). Moreover, we observe that the vertical magnetic field does not alter the Gaussian-like shape of the velocity profiles (Fig. 4 (b)), although it channels the flow (Fig. 5). This effect of cohesion extends the dead zone where the velocity is close to zero, thereby making the velocity field more vertical. This channeling effect has already been observed by Gans *et al.* [10] for the flow of cohesive polymer-coated granular materials, and it is interesting to note that we observe quite the same behavior, although the origin of cohesion is different.

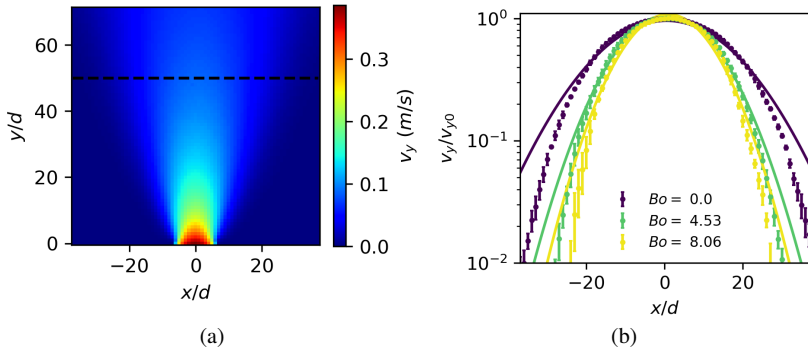


Figure 4. (a) Average vertical velocity field $v_y(x, y)$ for $Bo = 0$ and $D = 15$ mm and (b) normalized vertical mean velocity profiles for $D = 15$ mm for three different cohesion. The profiles are taken at $y = 50d$ (black dotted line on (a)).

In the framework of the kinematic model [15], it is possible to account for the phenomenon of channeling through the characteristic diffusion length b using (4). First we observe that the value of b is not constant with the altitude in the bulk which is also consistent with the literature [14]. However we observe that the value of b decreases with cohesion for each

aperture size (Fig. 6). This implies a more vertical motion of the grains leading to a higher velocity at the outlet (Fig.3 (c)). Our observation suggests that there is a critical Bond number Bo different for each outlet diameter where the value of b becomes constant with the altitude in the bulk for $y > 40d$. This result implies that for a critical cohesion value, the velocity profile in the bulk also becomes self-similar.

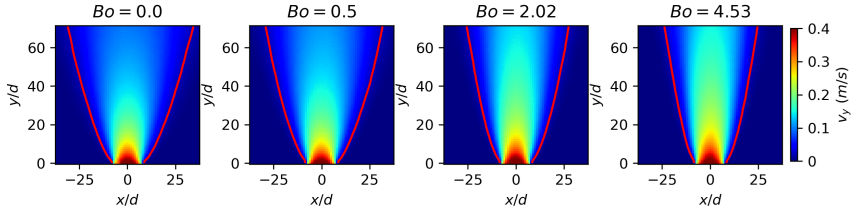


Figure 5. Velocity profiles $v_y(x, y)$ for different Bond number. The red line is the isovelocity line corresponding to 5% of the maximum velocity.

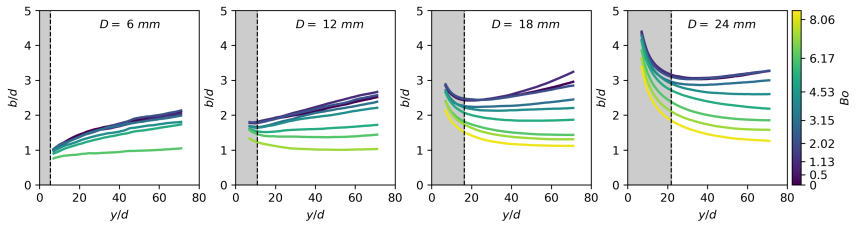


Figure 6. Fitting parameter of the kinetic model b for $D = 6 \text{ mm}$, $D = 12 \text{ mm}$, $D = 18 \text{ mm}$ and $D = 24 \text{ mm}$. The gray zone corresponds to the region of the flow where the kinetic model cannot be considered valid due to the dilatancy close to the outlet that cannot be neglected.

4 Conclusion

Using magnetic field and ferromagnetic granular material, we investigated the effect of cohesion induced by a vertical magnetic field on the discharge of a quasi-2D silo. We reported a non-monotonic evolution of the flow rate with cohesion for a given aperture size, and an anti-correlated behavior of the velocity and the volume fraction at the outlet. Also our results show that, in the bulk, the velocity profile for a given altitude can be approximated by a gaussian-like profile determined by what may be seen as a diffusion length b for cohesionless granular media, which is consistent with the literature, and also for cohesive granular media, which is new. Moreover, our results show that cohesion tends to channel the flow which has already been observed in the literature, and suggest that there is a critical Bond number where the value of b becomes constant with the altitude in the bulk, a phenomenon that has never been observed before. More experiments are needed to fully apprehend the hidden mechanism behind this evolution of b with cohesion. We believe that this investigation on the effect of cohesion on the velocity profile, both at the outlet and in the bulk, constitute a promising perspective on the full comprehension of silo discharge.

References

- [1] S. Roy, M.Y. Shaheen, T. Pöschel, Effect of cohesion on structure of powders layers in additive manufacturing. *Granular Matter* **25**(4), p68 (2023)
- [2] M. Benković, S. Srećec, I. Špoljarić, G. Mršić and I. Bauman, Flow properties of commonly used food powders and their mixtures. *Food and bioprocess technology* **6**, p2525-2537 (2013)
- [3] L. Brezzi, F. Gabrieli and S. Cola, Collapse of granular-cohesive soil mixtures on a horizontal plane. *Acta Geotechnica* **15**, p695-714 (2020)
- [4] A. Samadani and A. Kudrolli, Angle of repose and segregation in cohesive granular matter. *Physical Review E* **64**(5), 051301 (2001)
- [5] S. Deboeuf and A. Fall, Cohesion and aggregates in unsaturated wet granular flows down a rough incline. *Journal of Rheology* **67**(4), p909-909 (2023)
- [6] B.P. Tighe, M. Sperl, Pressure and Motion of Dry Sand - Translation of Hagen's Paper from 1852. *Granular Matter* **9**, 141-144 (2007)
- [7] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. V. de Velde, The flow of granular solids through orifices. *Chemical Engineering Science* **15**, 260 (1961)
- [8] C. Mankoc., et al. The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular Matter* **9** : 407-414 (2007).
- [9] A. Janda, I. Zuriguel, and D. Maza. Flow Rate of Particles through Apertures Obtained from Self-Similar Density and Velocity Profiles. *Physical review letters* **108**, 248001 (2012)
- [10] A. Gans, P. Aussillous, B. Dalloz and M. Nicolas, The effect of cohesion on the discharge of a granular material through the orifice of a silo. *Powders and Grains* **249**, 08014 (2021)
- [11] J. Litwinišzyn, An Application of the Random Walk Argument to the Mechanics of Granular Media *Rheology and Soil Mechanics: Symposium Grenoble, April 1-8*, p82-89 (1964)
- [12] W.W. Mullins, Experimental evidence for the stochastic theory of particle flow under gravity. *Powder Technology* **9**(1), p29-37 (1974)
- [13] R.M. Nedderman and U. Tüzün. A kinematic model for the flow of granular materials. *Powder Technology*, **39**, 2, p243-253, (1979).

- [14] A. Medina, et al. Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2D silo. *Physics Letters A* **250.1-3** : 111-116 (1998).
- [15] J. Choi, A. Kudrolli and M. Z. Bazant. Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers. *Journal of Physics: Condensed Matter*, **17(24)**, S2533 (2004)
- [16] G. Lumay and N. Vandewalle. Controlled flow of smart powders. *Physical Review E* **78**, 061302 (2008)
- [17] G. Lumay and N. Vandewalle. Flow of magnetized grains in a rotating drum. *Physical Review E* **82(4)**, 040301 (2010)

Structural Order Drives Diffusion in a Granular Packing

David Luce,^{1,2,*} Adrien Gans,¹ Sébastien Kiesgen De Richter,^{1,3} and Nicolas Vandewalle²¹LEMETA, Université de Lorraine, CNRS, 2, Avenue de la Forêt de Haye, Vandœuvre-lès-Nancy, 54504, France²GRASP, Institute of Physics B5a, Université de Liège, 4000 Liège, Belgium³Institut Universitaire de France (IUF)

We investigate how structural ordering, i.e. crystallization, affects the flow of bidisperse granular materials in a quasi-two-dimensional silo. By systematically varying the mass fraction of two particle sizes, we finely tune the degree of local order. Using high-speed imaging and kinematic modeling, we show that crystallization significantly enhances the diffusion length b , a key parameter controlling the velocity profiles within the flowing medium. We reveal a strong correlation between b and the hexatic order parameter ψ_6 , highlighting the role of local structural organization in governing macroscopic flow behavior. Furthermore, we demonstrate that pressure gradients within the silo promote the stabilization of orientational order even in the absence of crystallization, thus intrinsically increasing b with height. These findings establish a direct link between microstructural order, pressure, and transport properties in granular silo flows.

Granular materials, composed of discrete macroscopic particles, display a wide range of collective behaviors that often defy intuition, owing to their athermal nature and dissipative interactions. Among these behaviors, structural ordering is a central aspect. When monodisperse spherical grains are densely packed, they tend to self-organize into highly ordered configurations, such as hcp and fcc lattices, which represent efficient packing arrangements [1]. However, even a slight degree of size polydispersity can disrupt this tendency, preventing crystallization and promoting disordered or amorphous structures that lack long-range translational order [2, 3]. This effect is particularly pronounced in two-dimensional systems, where monodisperse disks spontaneously form hexagonal crystallites under confinement that shrink when a second granular species is inserted (see Fig. 1(a-d)).

While it is well established that stresses in granular media propagate along discrete contact networks, the influence of structural order on this transmission, particularly under flow conditions, remains a complex and actively debated topic [2, 4–8]. To suppress undesired ordering effects, especially in experimental investigations of flow, compaction, or jamming, bidisperse mixtures are commonly used. This strategy prompts several fundamental questions: which combinations of grain size ratios and mixing fractions most effectively hinder crystallization, and to what extent does the presence or absence of local structural order modify the mechanical response and dynamical behavior of granular systems?

The quasi-two-dimensional geometry of the silo provides an ideal framework to investigate the interplay between particle ordering and granular flow. Over the past decades, granular discharge from silos has been extensively studied, leading to the development of several semi-empirical models that capture key flow properties such as the discharge rate [9–11], the internal velocity field [12–16], and the dynamics near the outlet [11, 17]. Despite this knowledge, the influence of structural ordering, par-

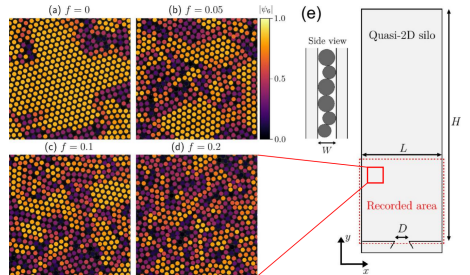


FIG. 1. Four snapshots of the bidisperse granular media in a discharging 2D silo for different values of the mass fraction of small particles (a) $f = 0$, (b) $f = 0.05$, (c) $f = 0.1$ and (d) $f = 0.2$. Each particle is colored according to the hexatic order parameter modulus $|\psi_6|$ given by Eq. (1) from yellow (order) to dark (disorder). (e) Sketch of the experimental quasi-2D silo with relevant parameters.

ticularly crystallization, within the bulk reservoir of the silo remains largely unexplored. This gap motivates a detailed investigation of how local particle arrangements affect the flow behavior in bidisperse systems.

We designed a quasi-two-dimensional silo with a flat bottom — similar to the one used in [18] — that confines the grains to a single monolayer (see Fig. 1(e)). The front and back walls are made of polycarbonate coated with a conductive layer to mitigate triboelectric charging. The cell dimensions are $H = 300$ mm (height), $L = 100$ mm (width), and $W = 1.25$ mm (depth), with a fixed outlet width of 18 mm. The granular medium consists of a binary mixture of steel spheres with diameters $d_1 = 1.0$ mm and $d_2 = 1.2$ mm, and we define the average reference diameter as $d = 1.1$ mm. The mass fraction of small beads is denoted by f , representing the proportion of 1.0 mm particles in the mixture. Once the aperture is opened, by lifting a retaining wire, grains begin to flow

out, allowing us to study the discharge dynamics as a function of f . For each selected mass fraction, five independent discharge experiments were performed. The flow was recorded using a high-speed camera operating at 2000 frames per second. Each video sequence, captured with a resolution of 1024×1024 pixels (corresponding to a physical area of approximately $91 d \times 91 d$), focuses on the bottom region of the silo during the steady-state phase of the discharge. The Lagrangian quantities associated with each grain are projected onto an Eulerian grid composed of square cells of size $d \times d$. The grid is constructed such that its bottom-central cell aligns with the center of the silo outlet. Within this framework, Eulerian fields for any measurable quantity can be obtained by averaging the corresponding Lagrangian values of all particles intersecting a given cell at position (x, y) .

Figure 1(a–d) presents snapshots of the granular packings within the silo for four different values of f , ranging from the monodisperse case ($f = 0$) to a low fraction of small particles ($f = 0.2$). Grains are color-coded according to their local structural environment, from crystalline regions (yellow) to amorphous ones (dark). To quantify this local order, we compute for each particle k the hexatic order parameter based on the angular positions $\theta_{k\ell}$ of its N_k nearest neighbors

$$\psi_{6k} = \frac{1}{N_k} \sum_{\ell=1}^{N_k} \exp(i6\theta_{k\ell}), \quad (1)$$

where $|\psi_{6k}|$ close to 1 indicates a strong sixfold symmetry typical of hexagonal packing. The images clearly show that the large crystalline domains observed at $f = 0$ are rapidly disrupted as f increases, giving way to smaller clusters and disordered regions. This confirms that bidispersity suppresses long-range order and promotes amorphous configurations.

A second structural measure confirms these observations. A Voronoi tessellation is applied to all grains, assigning to each grain k a Voronoi cell of area A_k . We compute the Probability Distribution Function (PDF) of the dimensionless areas A/d^2 for various values of f , as shown in Figure 2. For the monodisperse case ($f = 0$), only large grains are present and the distribution is sharply peaked. As f increases, a second peak emerges at smaller normalized areas, indicating the inclusion of smaller grains. The overall distribution broadens, reaching its widest spread near $f = 0.5$, before narrowing again for high f values. At $f = 1$, where only small particles are present, crystalline domains reappear, although the peak remains broader than in the $f = 0$ case. This is due to the limited confinement in the silo's geometry, allowing some particle overlap and thus reducing positional order. The inset of Figure 2 shows the standard deviation σ of the PDFs, which reaches a maximum around $f = 0.5$, consistent with the regime of minimal crystalline order.

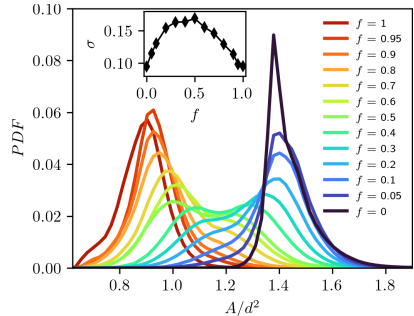


FIG. 2. Probability Distribution Function (PDF) of Voronoi cell areas A normalized by a typical grain area d^2 . Different mixing fractions f are shown exhibiting different patterns. The inset shows the standard deviation σ of each distribution as a function of f .

The above results are confirming the validity of most experimental protocols in which binary mixtures are used to avoid crystallization. The next relevant question is to measure the effect of this mixture on the global granular flow. In particular, we compute the average vertical velocity field $v_y(x, y)$ as a function of the mixing fraction f . Let us start by the outlet of the silo where the velocity profiles exhibit no significant dependence on f , in agreement with prior observations reported in [8, 11] (see Fig. 3). The expected profile around the outlet is fitted over all data. This indicates that orientational correlations have little influence in this dilute region of the flow, where the granular medium is subject to a strong pressure drop [19].

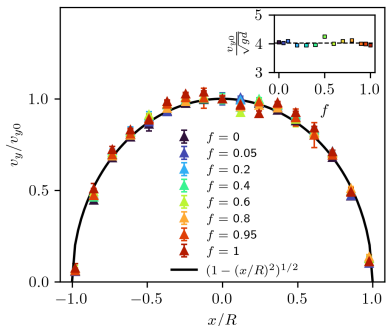


FIG. 3. Normalized vertical velocity v_y/v_{y0} profiles for all mixing fractions f . The black line corresponds to the fitting $(1 - (x/R)^2)^{1/2}$ with R the radius of the silo aperture. The inset presents the central velocity v_{y0} normalized by the characteristic speed \sqrt{gd} , emphasizing no significant dependency of the mixing fractions f .

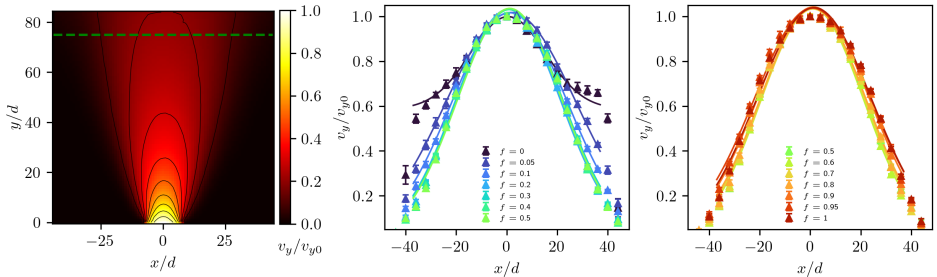


FIG. 4. (a) Time-average field of the normalized vertical velocity field v_y/v_{y0} for $f = 0.5$. Bulk velocity profiles for (b) $f \in [0, 0.5]$ and (c) $f \in [0.5, 1]$ along the horizontal dashed line at $y/d = 75$ represented in green on (a). All solid curves corresponds to the fit of Eq.(2) considering a plug flow component.

However, the effect of mixing granular species can be seen in the silo far from the outlet. A typical velocity field $v(x, y)$ is shown in Fig 4(a) where dead zones are in dark while fast moving parts are in yellow close to the outlet. A large part of the silo is moving and this is well described by the kinematic model introduced by Nedderman and Tüzün [14], based on the earlier work of Litwiniszyn [12]. The model assumes that the horizontal velocity is proportional to the horizontal gradient of the vertical velocity, i.e. $v_x = \partial_x v_y$. This leads to Gaussian-like-shaped vertical velocity profiles of the form

$$v_y(x, y) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi by}} \exp\left(\frac{-x^2}{4by}\right), \quad (2)$$

where Q is the time-averaged flow rate. The model introduces a single fitting parameter, b , which represents a characteristic diffusion length of the medium [16]. These velocity profiles are shown in Fig 4(b,c) for respectively low f and high f values. The profile is taken at the same height $y/d = 75$ for comparison. For $f = 0$, the velocity profile exhibits a uniform component, which corresponds to a crystalline block whose dislocation threshold is significantly higher than the shear stress present in this region. One concludes that velocity field $v(x, y)$ is altered by the onset of the crystallization phenomenon.

Removing the plug flow component, the Gaussian-like shape can still be fitted using the kinematic model, which allows the characteristic diffusion length of the medium b to be extracted as a function of the height y/d and the mixing fraction f . Figures 5 (a) and (b) show resulting b/d values as a function of the vertical position y/d . Distinguishing $f \leq 0.5$ and $f \geq 0.5$ allows to evidence that the diffusion length b is minimal for $f \approx 0.5$ while it increases significantly when ordering is present. The diffusion length b systematically increases with height within the silo. This trend is consistent with the observations of Medina et al. [15], who performed measurements in a monodisperse granular medium, under conditions where

the aspect ratio between the silo gap and particle size corresponds to our case with $f = 1$.

In this study, we further demonstrate that the increase in diffusion length becomes even more pronounced when crystallization occurs within the granular medium. Specifically, the diffusion length reaches a value of $b/d = 4.5$ in the most crystalline case ($f < 0.05$), which exceeds previously reported values for slightly polydisperse granular systems [13, 15, 20, 21].

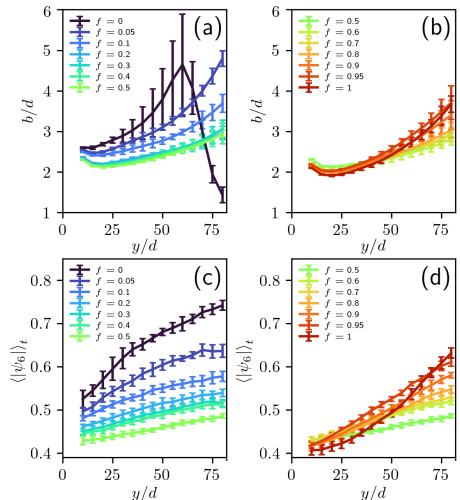


FIG. 5. Evolution of the normalized parameter b/d in the silo for (a) $f \in [0, 0.5]$ and (b) $f \in [0.5, 1]$. Modulus of the local hexatic parameter order $\langle |\psi_6| \rangle_t$ as a function of height for (c) $f \in [0, 0.5]$ and (d) $f \in [0.5, 1]$.

This enhanced diffusivity is strongly correlated with the cohesion induced by crystallization. The formation of crystalline blocks at the mesoscopic scale increases the number of mechanically stable configurations available to the grains, thereby reducing the prevalence of microscopically frustrated packings. As a consequence, the likelihood of localized plastic events occurring during flow decreases, a mechanism suggested to underlie the anomalous diffusion behavior observed in granular materials [22].

To explore this hypothesis, we compute the local time-averaged magnitude of the hexatic order parameter, $\langle |\psi_6| \rangle_t$, as an Eulerian field. Previous studies have established a link between dynamic heterogeneity and short-range orientational order [2]. While instantaneous $|\psi_6|$ values reflect the presence of hexatic structures at a given time, the time-averaged field $\langle |\psi_6| \rangle_t$ is inversely proportional to the frequency of plastic rearrangements at each location.

Our results show that $\langle |\psi_6| \rangle_t$ varies only slightly along the horizontal axis x , but increases significantly with height, as depicted in Figure 5. In regions of high velocity, $\langle |\psi_6| \rangle_t$ ranges between 0.4 and 0.55, indicating substantial dislocation activity consistent with frequent plastic events. Conversely, higher in the silo, this parameter can reach values up to 0.75 in the fully crystalline case ($f = 0$), suggesting slower dynamics in these low-velocity regions where plastic events are suppressed by both elevated pressure [23] and the crystallinity-induced cohesion identified here. Velocity profiles at the outlet and in the bulk are largely similar, except when $\langle |\psi_6| \rangle_t$ exceeds the threshold of 0.6. This critical threshold was previously identified in experimental studies of two-dimensional vibrated granular media [6]. Above this value, the velocity profiles develop broader tails, which are well captured by the diffusion length parameter b .

A clear correlation thus emerges between the global diffusion length b and the local time-averaged degree of order $\langle |\psi_6| \rangle_t$, as illustrated in Figure 6. A high rate of dislocations, reflected by low $\langle |\psi_6| \rangle_t$ values, results in poor diffusion properties of the granular assembly, as momentum transfer is hindered by energy dissipation from plastic events. In contrast, a low dislocation rate, indicated by high $\langle |\psi_6| \rangle_t$ values, is associated with more efficient momentum propagation. Furthermore, this mechanism is reinforced by increasing confining pressure, potentially explaining the rise in the global diffusion parameter b/d observed in previous studies [15].

In summary, we investigated how local structural ordering, i.e. crystallization, affects the flow dynamics of bidisperse granular materials in a quasi-2D silo. We demonstrated that the presence of crystalline domains enhances the local rigidity of the medium, thereby facilitating momentum transfer and leading to a measurable increase in the diffusion length b within the kinematic model. A strong correlation was established between

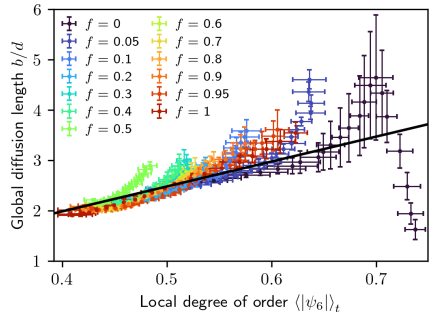


FIG. 6. Correlation between the local modulus of the hexatic parameter order $\langle |\psi_6| \rangle_t$ and the global characteristic diffusion length b/d for $y/d \in [10, 80]$. The black line corresponds to a line with slope 4.96 ($r = 0.963$ in the range $y/d \in [10, 45]$).

the hexatic order parameter and b , highlighting the pivotal role of microstructural organization in governing macroscopic flow behavior. Furthermore, we showed that even in the absence of significant crystallization, the pressure increase with height promotes the stabilization of local orientational order, which in turn causes a gradual increase in b . These findings point to pressure as a key factor mediating the interplay between structural order and transport properties in granular silo flows.

This work was partially supported by the LUE program of the University of Lorraine and by the Institut Universitaire de France (IUF), which significantly contributed to the achievement of this research (2025).

* david.luce@univ-lorraine.fr

- [1] S. Torquato and F. H. Stillinger, Jammed hard-particle packings: From kepler to bernal and beyond, *Reviews of modern physics* **82**, 2633 (2010).
- [2] K. Watanabe and H. Tanaka, Direct observation of medium-range crystalline order in granular liquids near the glass transition, *Physical review letters* **100**, 158002 (2008).
- [3] L. Kondic, A. Goulet, C. O'Hern, M. Kramar, K. Mischaikow, and R. Behringer, Topology of force networks in compressed granular media, *Europhysics Letters* **97**, 54001 (2012).
- [4] P. M. Reis, R. A. Ingale, and M. D. Shattuck, Crystallization of a quasi-two-dimensional granular fluid, *Physical review letters* **96**, 258001 (2006).
- [5] M. Benyamine, M. Djermame, B. Daloz-Dubrujeaud, and P. Aussillous, Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo, *Physical Review E* **90**, 032201 (2014).
- [6] J. Downs, N. Smith, K. Mandadapu, J. Garrahan, and M. Smith, Topographic control of order in quasi-2d gran-

- ular phase transitions, *Physical Review Letters* **127**, 268002 (2021).
- [7] J. Bai, J. Li, G. Hong, J. Pan, and H. Fei, Mesoscopic evolution and kinetic properties of dense granular flow crystallization under continuous shear induction, *Powder Technology* **426**, 118615 (2023).
- [8] C. M. Carlevaro, R. Kozłowski, and L. A. Pugnaloni, Flow rate in 2d silo discharge of binary granular mixtures: the role of ordering in monosized systems, *Frontiers in Soft Matter* **4**, 1340744 (2024).
- [9] G. H. L. Hagen, Über den druck und die bewegung des trocken sandes, Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin , 35 (1852).
- [10] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. Van de Velde, The flow of granular solids through orifices, *Chemical engineering science* **15**, 260 (1961).
- [11] A. Janda, I. Zuriguel, and D. Maza, Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles, *Physical review letters* **108**, 248001 (2012).
- [12] J. Litwiniiszyn, An application of the random walk argument to the mechanics of granular media, *Rheology and Soil Mechanics: Symposium Grenoble, April 1–8, 1964* , 82 (1964).
- [13] Experimental evidence for the stochastic theory of particle flow under gravity, *Powder Technology* **9**, 29 (1974).
- [14] R. Nedderman and U. Tüzün, A kinematic model for the flow of granular materials, *Powder Technology* **22**, 243 (1979).
- [15] A. Medina, J. Cordova, E. Luna, and C. Trevino, Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2d silo, *Physics Letters A* **250**, 111 (1998).
- [16] J. Choi, A. Kudrolli, and M. Z. Bazant, Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers, *Journal of Physics: Condensed Matter* **17**, S2533 (2005).
- [17] M. Benyamine, P. Aussillous, and B. Dalloz-Dubrujeaud, Discharge flow of a granular media from a silo: effect of the packing fraction and of the hopper angle, *EPJ Web of Conferences* **140**, 03043 (2017).
- [18] A. Pascot, J.-Y. Morel, S. Antonyuk, M. Jenny, Y. Cheny, and S. K. De Richter, Discharge of vibrated granular silo: A grain scale approach, *Powder Technology* **397**, 116998 (2022).
- [19] C. Perge, M. A. Aguirre, P. A. Gago, L. A. Pugnaloni, D. Le Tourneau, and J.-C. Géminard, Evolution of pressure profiles during the discharge of a silo, *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* **85**, 021303 (2012).
- [20] A. Samadani, A. Pradhan, and A. Kudrolli, Size segregation of granular matter in silo discharges, *Physical Review E* **60**, 7203 (1999).
- [21] Q. Chen, R. Li, W. Xiu, V. Zivkovic, and H. Yang, Measurement of granular temperature and velocity profile of granular flow in silos, *Powder Technology* **392**, 123 (2021).
- [22] I. Zuriguel, D. Maza, A. Janda, R. C. Hidalgo, and A. Garcimartín, Velocity fluctuations inside two and three dimensional silos, *Granular Matter* **21**, 1 (2019).
- [23] D. Walker, An approximate theory for pressures and arching in hoppers, *Chemical Engineering Science* **21**, 975 (1966).

Bibliographie

- [1] S. Douady, A. Manning, P. Hersen, H. Elbelrhiti, S. Protière, A. Daerr, and B. Kabbachi. Song of the dunes as a self-synchronized instrument. *Physical Review Letters*, 97(1) :018002, 2006.
- [2] N. M. Vriend, M. L. Hunt, R. W. Clayton, C. E. Brennen, K. S. Brantley, and A. Ruiz-Angulo. Solving the mystery of booming sand dunes. *Geophysical Research Letters*, 34(16), 2007.
- [3] J. Durand. *Sables émovants*. Éditions du Seuil, Paris, 2003.
- [4] I. Zuriguel, A. Garcimartín, D. Maza, L. A. Pugnaloni, and J. M. Pastor. Jamming during the discharge of granular matter from a silo. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 71(5) :051303, 2005.
- [5] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen. Les milieux granulaires. *Entre fluide et*, 2011.
- [6] Pierre-Gilles De Gennes. Soft matter. *Science*, 256(5056) :495–497, 1992.
- [7] S. R. Nagel. Experimental soft-matter science. *Reviews of modern physics*, 89(2) :025002, 2017.
- [8] J. R. Royer, D. J. Evans, L. Oyarte, G. Guo, E. Kapit, M. E. Möbius, S. R. Waitukaitis, and H. M. Jaeger. High-speed tracking of rupture and clustering in freely falling granular streams. *Nature*, 459(7250) :1110–1113, 2009.
- [9] S. R. Waitukaitis, H. F. Grütjen, J. R. Royer, and H. M. Jaeger. Droplet and cluster formation in freely falling granular streams. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 83(5) :051302, 2011.
- [10] G. Lumay and N. Vandewalle. Controlled flow of smart powders. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 78(6) :061302, 2008.

- [11] L. Thorens, M. Viallet, K. J. Måløy, M. Bourgoïn, and S. Santucci. Discharge of a 2d magnetic silo. In *EPJ Web of Conferences*, volume 249, page 03017. EDP Sciences, 2021.
- [12] J. Litwiniŝzyn. The model of a random walk of particles adapted to researches on problems of materials of loose materials. *Bull. L'Acad. Polon. Sci.*, 11 :61–70, 1963.
- [13] R. M. Nedderman and U. Tüzün. A kinematic model for the flow of granular materials. *Powder Technology*, 22(2) :243–253, 1979.
- [14] A. Janda, I. Zuriguel, and D. Maza. Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles. *Physical review letters*, 108(24) :248001, 2012.
- [15] G. C. Gardner. The region of flow when discharging granular materials from bin-hopper systems. *Chemical Engineering Science*, 21(3) :261–273, 1966.
- [16] A. Pascot, J.-Y. Morel, S. Antonyuk, M. Jenny, Y. Cheny, and S. Kiesgen de Richter. Discharge of vibrated granular silo : A grain scale approach. *Powder Technology*, 397 :116998, 2022.
- [17] A. Gans, O. Pouliquen, and M. Nicolas. Cohesion-controlled granular material. *Physical Review E*, 101(3) :032904, 2020.
- [18] B. N. J. Persson, I. M. Sivebæk, V. N. Samoilov, K. Zhao, A. I. Volokitin, and Z. Zhang. On the origin of amonton's friction law. *Journal of physics : condensed matter*, 20(39) :395006, 2008.
- [19] R. P. Behringer, D. Bi, B. Chakraborty, A. Clark, J. Dijksman, J. Ren, and J. Zhang. Statistical properties of granular materials near jamming. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2014(6) :P06004, 2014.
- [20] J. F. Wambaugh, R. R. Hartley, and R. P. Behringer. Force networks and elasticity in granular silos. *The European Physical Journal E*, 32 :135–145, 2010.
- [21] K. E. Daniels, J. E. Kollmer, and J. G. Puckett. Photoelastic force measurements in granular materials. *Review of Scientific Instruments*, 88(5), 2017.
- [22] J. F. Peters, M. Muthuswamy, J. Wibowo, and A. Tordesillas. Characterization of force chains in granular material. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 72(4) :041307, 2005.

- [23] M. Kramár, A. Goulet, L. Kondic, and K. Mischaikow. Persistence of force networks in compressed granular media. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 87(4) :042207, 2013.
- [24] J. Geng, E. Longhi, R. P. Behringer, and D. W. Howell. Memory in two-dimensional heap experiments. *Physical Review E*, 64(6) :060301, 2001.
- [25] G. Lumay, F. Boschini, K. Traina, S. Bontempi, J.-C. Remy, R. Cloots, and N. Vandewalle. Measuring the flowing properties of powders and grains. *Powder technology*, 224 :19–27, 2012.
- [26] A. J. Forsyth, S. R. Hutton, C. F. Osborne, and M. J. Rhodes. Effects of interparticle force on the packing of spherical granular material. *Physical Review Letters*, 87(24) :244301, 2001.
- [27] S. Fazekas, J. Kertesz, and D. E. Wolf. Piling and avalanches of magnetized particles. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 71(6) :061303, 2005.
- [28] K. Taylor, P. J. King, and M. R. Swift. Influence of magnetic cohesion on the stability of granular slopes. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 78(3) :031304, 2008.
- [29] A. J. Forsyth, S. R. Hutton, M. J. Rhodes, and C. F. Osborne. Effect of applied interparticle force on the static and dynamic angles of repose of spherical granular material. *Physical Review E*, 63(3) :031302, 2001.
- [30] O. Reynolds. Lvii. on the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. with experimental illustrations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 20(127) :469–481, 1885.
- [31] GDR MiDi gdrmidi@ polytech. univ-mrs. fr <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/MIDI/>. On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 14 :341–365, 2004.
- [32] Y. Forterre and O. Pouliquen. Flows of dense granular media. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40(1) :1–24, 2008.
- [33] E. W. Weisstein. Kepler conjecture. <https://mathworld.wolfram.com/>, 2003.
- [34] L. Kondic, A. Goulet, C. S. O’Hern, M. Kramar, K. Mischaikow, and R. P. Behringer. Topology of force networks in compressed granular media. *Europhysics Letters*, 97(5) :54001, 2012.

- [35] S. V. Franklin. Geometric cohesion in granular materials. *Physics today*, 65(9) :70–71, 2012.
- [36] J. González-Gutiérrez, J. L. Carrillo-Estrada, and J. C. Ruiz-Suárez. Aggregation and dendritic growth in a magnetic granular system. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2013(12) :P12015, 2013.
- [37] P. G. Rognon, J.-N. Roux, M. Naaim, and F. Chevoir. Dense flows of cohesive granular materials. *Journal of Fluid Mechanics*, 596 :21–47, 2008.
- [38] N. Berger, E. Azéma, J.-F. Douce, and F. Radjai. Scaling behaviour of cohesive granular flows. *Europhysics Letters*, 112(6) :64004, 2016.
- [39] S. Deboeuf and A. Fall. Cohesion and aggregates in unsaturated wet granular flows down a rough incline. *Journal of Rheology*, 67(4) :909–909, 2023.
- [40] A. Gans, A. Abramian, P.-Y. Lagrée, M. Gong, A. Sauret, O. Pouliquen, and M. Nicolas. Collapse of a cohesive granular column. *Journal of Fluid Mechanics*, 959 :A41, 2023.
- [41] A. Gans, B. Dalloz-Dubrujeaud, M. Nicolas, and P. Aussillous. Discharge flow of a cohesive granular media from a silo. *Physical Review Letters*, 133(23) :238201, 2024.
- [42] R. Brown. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The philosophical magazine*, 4(21) :161–173, 1828.
- [43] J. Van der Visser. Van der waals and other cohesive forces affecting powder fluidization. *Powder technology*, 58(1) :1–10, 1989.
- [44] E. Fodor and M. C. Marchetti. The statistical physics of active matter : From self-catalytic colloids to living cells. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 504 :106–120, 2018.
- [45] Wikipédia contributors. Triboélectricité. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Triboélectricité>, 2025. Consulté le 2 octobre 2025.
- [46] D. J. Lacks and R. M. Sankaran. Contact electrification of insulating materials. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 44(45) :453001, 2011.

- [47] A. F. Diaz and R. M. Felix-Navarro. A semi-quantitative triboelectric series for polymeric materials : the influence of chemical structure and properties. *Journal of Electrostatics*, 62(4) :277–290, 2004.
- [48] L. S. McCarty and G. M. Whitesides. Electrostatic charging due to separation of ions at interfaces : contact electrification of ionic electrets. *Angewandte Chemie International Edition*, 47(12) :2188–2207, 2008.
- [49] H. T. Baytekin, A. Z. Patashinski, M. Branicki, B. Baytekin, S. Soh, and B. A. Grzybowski. The mosaic of surface charge in contact electrification. *Science*, 333(6040) :308–312, 2011.
- [50] M. W. Williams. What creates static electricity ? *American Scientist*, 100(4) :316–323, 2012.
- [51] H. Zou, Y. Zhang, L. Guo, P. Wang, X. He, G. Dai, H. Zheng, C. Chen, A. C. Wang, C. Xu, et al. Quantifying the triboelectric series. *Nature communications*, 10(1) :1427, 2019.
- [52] Z. L. Wang and A. C. Wang. On the origin of contact-electrification. *Materials Today*, 30 :34–51, 2019.
- [53] F. Galembeck, T. A. L. Burgo, L. B. S. Balestrin, R. F. Gouveia, C. A. Silva, and A. Galembeck. Friction, tribochemistry and triboelectricity : recent progress and perspectives. *Rsc Advances*, 4(109) :64280–64298, 2014.
- [54] M. Nifuku, T. Ishikawa, and T. Sasaki. Static electrification phenomena in pneumatic transportation of coal. *Journal of Electrostatics*, 23 :45–54, 1989.
- [55] J. Yao, Y. Zhang, C. Wang, S. Matsusaka, and H. Masuda. Electrostatics of the granular flow in a pneumatic conveying system. *Industrial & engineering chemistry research*, 43(22) :7181–7199, 2004.
- [56] E. W. C. Lim, J. Yao, and Y. Zhao. Pneumatic transport of granular materials with electrostatic effects. *AIChE journal*, 58(4) :1040–1059, 2012.
- [57] C. Allenspach, P. Timmins, G. Lumay, J. Holman, and T. Minko. Loss-in-weight feeding, powder flow and electrostatic evaluation for direct compression hydroxypropyl methylcellulose (hpmc) to support continuous manufacturing. *International Journal of Pharmaceutics*, 596 :120259, 2021.

- [58] N. Vandewalle, G. Lumay, F. Ludewig, and J. E. Fiscina. How relative humidity affects random packing experiments. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 85(3) :031309, 2012.
- [59] A. Rescaglio, J. Schockmel, N. Vandewalle, and G. Lumay. Combined effect of moisture and electrostatic charges on powder flow. In *EPJ Web of Conferences*, volume 140, page 13009. EDP Sciences, 2017.
- [60] P. M. Ireland. Triboelectrification of particulate flows on surfaces : Part i—experiments. *Powder Technology*, 198(2) :189–198, 2010.
- [61] S. Enferad, S. Pillitteri, G. Lumay, C. Gaiani, S. Kiesgen de Richter, M. Marck, S. Umbetov, N. Vandewalle, and M. Jenny. Powder flow behavior governed by the surface properties of glass beads. *Powder Technology*, 388 :425–433, 2021.
- [62] M. D. Hogue and C. I. Calle. Triboelectrification of granular matter as a function of particle count. In *Proceedings of the Electrostatics Society of America Conference*, Kennedy Space Center, FL, 2010. Innovative Partnership Program project report.
- [63] N. Mitarai and F. Nori. Wet granular materials. *Advances in physics*, 55(1-2) :1–45, 2006.
- [64] N. Fraysse, H. Thomé, and L. Petit. Humidity effects on the stability of a sandpile. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 11 :615–619, 1999.
- [65] N. Huang, G. Ovarlez, F. Bertrand, S. Rodts, P. Coussot, and D. Bonn. Flow of wet granular materials. *Physical review letters*, 94(2) :028301, 2005.
- [66] R. Artoni, A. C. Santomaso, F. Gabrieli, D. Tono, and S. Cola. Collapse of quasi-two-dimensional wet granular columns. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 87(3) :032205, 2013.
- [67] G. Lumay, K. Traina, F. Boschini, V. Delaval, A. Rescaglio, R. Cloots, and N. Vandewalle. Effect of relative air humidity on the flowability of lactose powders. *Journal of Drug Delivery Science and Technology*, 35 :207–212, 2016.
- [68] D. L. Blair and A. Kudrolli. Clustering transitions in vibrofluidized magnetized granular materials. *Physical Review E*, 67(2) :021302, 2003.

- [69] D. L. Blair and A. Kudrolli. Magnetized granular materials. *The Physics of Granular Media*, pages 281–296, 2004.
- [70] F. Peters and E. Lemaire. Cohesion induced by a rotating magnetic field in a granular material. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 69(6) :061302, 2004.
- [71] A. Snezhko, I. S. Aranson, and W.-K. Kwok. Structure formation in electromagnetically driven granular media. *Physical review letters*, 94(10) :108002, 2005.
- [72] G. Lumay and N. Vandewalle. Flow of magnetized grains in a rotating drum. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 82(4) :040301, 2010.
- [73] G. Lumay, J. Schockmel, D. Henández-Enríquez, S. Dorbolo, N. Vandewalle, and F. Pacheco-Vazquez. Flow of magnetic repelling grains in a two-dimensional silo. *Papers in physics*, 7(2) :0–0, 2015.
- [74] L. Thorens, Kn. J. Måløy, M. Bourgoïn, and S. Santucci. Magnetic janssen effect. *Nature Communications*, 12(1) :2486, 2021.
- [75] N. Vandewalle and G. Lumay. Flow properties and heap shape of magnetic powders. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1145, pages 135–138. American Institute of Physics, 2009.
- [76] D. Hernández-Enríquez, G. Lumay, and F. Pacheco-Vázquez. Discharge of repulsive grains from a silo : experiments and simulations. In *EPJ Web of Conferences*, volume 140, page 03089. EDP Sciences, 2017.
- [77] AM Biller, OV Stolbov, and Yu L Raikher. Modeling of particle interactions in magnetorheological elastomers. *Journal of Applied Physics*, 116(11), 2014.
- [78] Kunlun Bai, Joshua Casara, Aparna Nair-Kanneganti, Aubrey Wahl, Florian Carle, and Eric Brown. Effective magnetic susceptibility of suspensions of ferromagnetic particles. *Journal of Applied Physics*, 124(12), 2018.
- [79] B. F. Edwards and J. M. Edwards. Dynamical interactions between two uniformly magnetized spheres. *European Journal of Physics*, 38(1) :015205, 2016.
- [80] Eric Opsomer, Simon Merminod, Julien Schockmel, Nicolas Vandewalle, Michael Berhanu, and Eric Falcon. Patterns in magnetic granular media at the crossover from two to three dimensions. *Physical Review E*, 102(4) :042907, 2020.

- [81] T. Aste and T. Di Matteo. Emergence of gamma distributions in granular materials and packing models. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 77(2) :021309, 2008.
- [82] M. Oda. Co-ordination number and its relation to shear strength of granular material. *Soils and foundations*, 17(2) :29–42, 1977.
- [83] K. Watanabe and H. Tanaka. Direct observation of medium-range crystalline order in granular liquids near the glass transition. *Physical review letters*, 100(15) :158002, 2008.
- [84] J. Zhang, R. P. Behringer, and I. Goldhirsch. Coarse-graining of a physical granular system. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 184 :16–30, 2010.
- [85] T. Weinhart, R. Hartkamp, A. R. Thornton, and S. Luding. Coarse-grained local and objective continuum description of three-dimensional granular flows down an inclined surface. *Physics of fluids*, 25(7), 2013.
- [86] T. Weinhart, C. Labra, S. Luding, and J. Y. Ooi. Influence of coarse-graining parameters on the analysis of dem simulations of silo flow. *Powder technology*, 293 :138–148, 2016.
- [87] P. M. Reis, R. A. Ingale, and M. D. Shattuck. Crystallization of a quasi-two-dimensional granular fluid. *Physical review letters*, 96(25) :258001, 2006.
- [88] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094) :727–730, 2006.
- [89] J. Tejchman and G. Gudehus. Silo-music and silo-quake experiments and a numerical cosserat approach. *Powder Technology*, 76(2) :201–212, 1993.
- [90] L. S. Mohan, P. R. Nott, and K. K. Rao. A frictional cosserat model for the flow of granular materials through a vertical channel. *Acta Mechanica*, 138(1) :75–96, 1999.
- [91] L. Staron, P.-Y. Lagrée, and S. Popinet. The granular silo as a continuum plastic flow : The hour-glass vs the clepsydra. *Physics of Fluids*, 24(10), 2012.
- [92] D. Schulze. *Powders and bulk solids*. Springer, 2021.
- [93] K. Saleh and M. Leturia. Stockage et écoulement des solides granulaires dans les silos : Concepts de base et théorie. *Techniques de l'ingénieur*, 2258, 2020.

- [94] K. Saleh, S. Golshan, and R. Zarghami. A review on gravity flow of free-flowing granular solids in silos—basics and practical aspects. *Chemical Engineering Science*, 192 :1011–1035, 2018.
- [95] W. W. Mullins. Experimental evidence for the stochastic theory of particle flow under gravity. *Powder Technology*, 9(1) :29–37, 1974.
- [96] A. Pascot, N. Gaudel, S. Antonyuk, J. Bianchin, and S. Kiesgen de Richter. Influence of mechanical vibrations on quasi-2d silo discharge of spherical particles. *Chemical Engineering Science*, 224 :115749, 2020.
- [97] M. Sperl. Experiments on corn pressure in silo cells—translation and comment of janssen’s paper from 1895. *Granular Matter*, 8(2) :59–65, 2006.
- [98] B. P. Tighe and M. Sperl. Pressure and motion of dry sand : translation of hagen’s paper from 1852. *Granular Matter*, 9 :141–144, 2007.
- [99] A. W. Jenike, J. R. Johanson, and J. W. Carson. Bin loads—part 2 : concepts. 1973.
- [100] P. L. Bransby, P. M. Blair-Fish, and R. G. James. An investigation of the flow of granular materials. *Powder Technology*, 8(5-6) :197–206, 1973.
- [101] S. M. Rubio-Largo, A. Janda, D. Maza, I. Zuriguel, and R. C. Hidalgo. Disentangling the free-fall arch paradox in silo discharge. *Physical review letters*, 114(23) :238002, 2015.
- [102] C. C. Thomas and D. J. Durian. Intermittency and velocity fluctuations in hopper flows prone to clogging. *Physical Review E*, 94(2) :022901, 2016.
- [103] M. L. Hunt and N. M. Vriend. Booming sand dunes. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 38(1) :281–301, 2010.
- [104] B. K. Muite, S. F. Quinn, S. Sundaresan, and K. K. Rao. Silo music and silo quake : granular flow-induced vibration. *Powder Technology*, 145(3) :190–202, 2004.
- [105] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. Van de Velde. The flow of granular solids through orifices. *Chemical engineering science*, 15(3-4) :260–269, 1961.
- [106] C. Mankoc, A. Janda, R. Arevalo, J. M. Pastor, I. Zuriguel, A. Garcimartín, and D. Maza. The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular matter*, 9 :407–414, 2007.

- [107] M. Benyamine, P. Aussillous, and B. Dalloz-Dubrujeaud. Discharge flow of a granular media from a silo : effect of the packing fraction and of the hopper angle. In *EPJ Web of Conferences*, volume 140, page 03043. EDP Sciences, 2017.
- [108] F. Alonso-Marroquin and P. Mora. Beverloo law for hopper flow derived from self-similar profiles. *Granular Matter*, 23 :1–8, 2021.
- [109] J. S. Giunta. Flow patterns of granular materials in flat-bottom bins. 1969.
- [110] W. W. Mullins. Stochastic theory of particle flow under gravity. *Journal of Applied Physics*, 43(2) :665–678, 1972.
- [111] A. Medina, J. A. Cordova, E. Luna, and C. Trevino. Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2d silo. *Physics Letters A*, 250(1-3) :111–116, 1998.
- [112] J. Choi, A. Kudrolli, and M. Z. Bazant. Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 17(24) :S2533, 2005.
- [113] I. Zuriguel, D. Maza, A. Janda, R. C. Hidalgo, and A. Garcimartín. Velocity fluctuations inside two and three dimensional silos. *Granular Matter*, 21 :1–9, 2019.
- [114] M. H. Hanif and D. van der Meer. Flow dynamics of different particle shapes in a rectangular silo. *Physical Review E*, 111(2) :025416, 2025.
- [115] A. Pascot. *Rhéologie et propriétés de vidange de milieux granulaires modèles : application à l'écoulement en silo*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2020.
- [116] TIS Wälzkörpertechnologie GmbH. Chrome Steel AISI 52100 (100Cr6) – Technical Data Sheet, 2017. Accessed : 2025-06-29.
- [117] J. M. N. T. Gray. Particle segregation in dense granular flows. *Annual review of fluid mechanics*, 50(1) :407–433, 2018.
- [118] C. M. Carlevaro, R. Kozłowski, and L. A. Pugnaloni. Flow rate in 2d silo discharge of binary granular mixtures : the role of ordering in monosized systems. *Frontiers in Soft Matter*, 4 :1340744, 2024.
- [119] U. Tüzün and R. M. Nedderman. Experimental evidence supporting kinematic modelling of the flow of granular media in the absence of air drag. *Powder Technology*, 24(2) :257–266, 1979.
- [120] O. Dauchot, G. Marty, and G. Biroli. Dynamical heterogeneity close to the jamming transition in a sheared granular material. *Physical review letters*, 95(26) :265701, 2005.

- [121] J. G. Downs, N. D. Smith, K. K. Mandadapu, J. P. Garrahan, and M. I. Smith. Topographic control of order in quasi-2d granular phase transitions. *Physical Review Letters*, 127(26) :268002, 2021.
- [122] V. Senthil Kumar and V. Kumaran. Voronoi cell volume distribution and configurational entropy of hard-spheres. *The Journal of chemical physics*, 123(11), 2005.
- [123] Q. Wang, Q. Chen, R. Li, G. Zheng, R. Han, and H. Yang. Shape of free-fall arch in quasi-2d silo. *Particuology*, 55 :62–69, 2021.
- [124] Y. Tang, D. H. Chan, and D. Z. Zhu. The modeling of free-fall arch formation in granular flow through an aperture. *Frontiers in Physics*, 10 :963495, 2022.
- [125] A. Garcimartín, I. Zuriguel, L.A. Pugnaloni, and A. Janda. Shape of jamming arches in two-dimensional deposits of granular materials. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 82(3) :031306, 2010.
- [126] P. J. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of fluid mechanics*, 656 :5–28, 2010.
- [127] R. Zuñiga, G. Varas, and S. Job. Geometry-controlled phase transition in vibrated granular media. *Scientific Reports*, 12(1) :14989, 2022.
- [128] F. Ghimenti, M. Ozawa, G. Biroli, and G. Tarjus. Shear-induced phase behavior and topological defects in two-dimensional crystals. *Physical Review B*, 109(10) :104114, 2024.
- [129] Wikipédia contributors. Liaisons mécaniques avec frottement. Wikipédia, L’encyclopédie libre, 2022. Dernière modification le 16 avril 2022.
- [130] D. Luce. Étude de l’aptitude à l’écoulement des milieux granulaires vibrés : ouverture aux milieux granulaires cohésifs. Master’s thesis, Université de Lorraine, 2022.
- [131] C. Lozano, G. Lumay, I. Zuriguel, R. C. Hidalgo, and A. Garcimartín. Breaking arches with vibrations : the role of defects. *Physical review letters*, 109(6) :068001, 2012.
- [132] C. Lozano, I. Zuriguel, and A. Garcimartín. Stability of clogging arches in a silo submitted to vertical vibrations. *Physical Review E*, 91(6) :062203, 2015.

- [133] F. Vivanco, J. Mercado, F. Santibáñez, and F. Melo. Stress profile in a two-dimensional silo : Effects induced by friction mobilization. *Physical Review E*, 94(2) :022906, 2016.
- [134] H. Leclerc. Signature structurelle hexatique de l'influence des bords d'un écoulement granulaire 2d. Master's thesis, Université Claude Bernard Lyon I, 2025.

