



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES
UNIVERSITAIRES**

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Contrôlabilité de quelques systèmes couplés d'équations de la chaleur par la méthode de la platitude

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 juin 2024

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Mathématiques appliquées)

par

Blaise COLLE

Composition du jury

<i>Président :</i>	Jamal Daafouz	Professeur des universités, CRAN, Université de Lorraine, Nancy
<i>Rapporteurs :</i>	Emmanuel Trélat Lucie Baudouin	Professeur des universités, LJLL, Sorbonne Université, Paris Directrice de recherche CNRS, LAAS, Toulouse
<i>Examineurs :</i>	Assia Benabdallah Philippe Martin Julie Valein	Professeure émérite, I2M, Aix-Marseille Université, Marseille Maître de recherche, CAS, MINES ParisTech, Paris Maîtresse de conférence, IECL, Université de Lorraine, Nancy
<i>Directeur :</i>	Takéo Takahashi	Directeur de recherche INRIA, IECL, Nancy
<i>Co-directeur :</i>	Jérôme Lohéac	Chargé de recherche CNRS, CRAN, Nancy

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Merci à Jérôme et Takéo d'avoir encadré ma thèse et pour leur implication tout au long de ce travail.

Merci à Lucie Baudouin et Emmanuel Trélat de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse.

Merci à Assia Benabdallah, Jamal Daafouz, Philippe Martin et Julie Valein de me faire le plaisir de participer à mon jury.

Je remercie en particulier Philippe Martin pour la discussion fort éclairante que nous avons eue sur la platitude et son approche numérique.

Je remercie le personnel d'appui et administratif qui a fait en sorte que les divers aspects de ma thèse se déroulent pour le mieux.

Je remercie l'ANR TRECOS, la Fédération Charles Hermite et le CRAN qui ont financé mes travaux.

Voilà arrivée la section des remerciements qui n'ont pas trait directement à ma thèse. Etant pudique et peu à l'aise avec les mots, je serai succinct. Si vous vous reconnaissez dans l'une ou plusieurs des catégories suivantes, sachez que ces remerciements vous sont sincèrement adressés et que je n'en pense pas moins.

Merci à l'équipe d'API d'avoir rendu les pauses méridiennes si agréables et pour le pot.

Je remercie tous les collègues de l'IECL ou d'ailleurs, avec qui j'ai le grand plaisir d'échanger régulièrement, que cela soit dans le cadre du travail, autour d'un café ou d'un repas.

Merci à mes enseignants, qui sont devenus des collègues et qui m'ont soutenus tout au long de mon parcours.

Merci à mes camarades doctorants (et affiliés), ceux qui sont encore là et ceux qui sont déjà partis.

Merci au bureau 210 et à ses occupants d'hier et d'aujourd'hui.

Merci à ADAGIO de m'avoir "adopté".

Merci à ma famille, à mes amis, merci Oriane.

Résumé

Dans cette thèse, on démontre quelques résultats de contrôlabilité des pour des systèmes couplés d'équations de la chaleur. Ces résultats sont obtenus en exploitant la propriété de platitude de ces systèmes. La platitude d'un système correspond à la possibilité d'en paramétrer l'état et le contrôle par une fonction appelée sortie plate, qui peut être choisie librement. Dans nos travaux, on construit explicitement des solutions sous forme de séries entières en espace dont les coefficients sont des fonctions du temps. Le choix d'un nombre fini de ces coefficients permet de décrire la trajectoire du système.

Cette thèse est rédigée par articles et on s'intéresse successivement à trois systèmes différents.

Tout d'abord, on montre des résultats de contrôlabilité pour un système de diffusion croisée à frontière libre qui modélise un processus de fabrication de panneaux solaires. On s'attachera à respecter des contraintes de signe sur l'état et les contrôles, imposées par la modélisation.

On s'intéresse ensuite à un problème de Stefan à deux phases, c'est un système de deux équations de la chaleur à frontière libre qui modélise la transition solide liquide d'un corps pur. La position de l'interface entre les deux phases est donnée par une équation différentielle qui fait intervenir les solutions des deux équations de la chaleur. On établit des résultats de contrôlabilité pour la température dans chaque phase ainsi que la position de l'interface. On cherche ici aussi à respecter des contraintes de signe.

Enfin, on démontre des résultats de contrôlabilité pour un système de deux équations de la chaleur en cascade. On améliore ainsi des résultats déjà connus sur ce système en construisant explicitement des contrôles très réguliers.

Mots-clés: équation de la chaleur, platitude, contrôlabilité, systèmes couplés, diffusion croisée, système en cascade, problème de Stefan, frontière libre.

Abstract

In this thesis, we prove some controllability results for coupled systems of heat equations. These results are obtained by exploiting the flatness property of these systems. The flatness of a system corresponds to the possibility to parameterize its state and control by a function called flat output, which can be freely chosen. In our work, we explicitly construct solutions as integer series in the space variable whose coefficients are functions of the time. The choice of a finite number of these coefficients then determines the trajectory. This thesis is written by articles, and we focus successively on three different systems. First, we show controllability results for a cross-diffusion system with a free-boundary that models a solar panel manufacturing process. The focus is on respecting sign constraints on the state and controls, imposed by the model.

We then turn to a two-phase Stefan problem, a system of two heat equations with a free boundary modeling the solid-liquid transition of a pure substance. The position of the interface between the two phases is given by a differential equation involving the solutions of the two heat equations. Controllability results are established for the temperature in each phase and the position of the interface. We aim here also to respect sign constraints. Finally, we demonstrate controllability results for a cascade system of two heat equations. Already known results on this system are

improved by explicitly constructing very regular controls.

Keywords: heat equation, flatness, controllability, coupled system, cross-diffusion, cascade system, Stefan problem, free boundary.

Sommaire

Chapitre 1

Introduction

1

1.1	Notions de contrôlabilité	2
1.1.1	Définitions	2
1.1.2	L'équation de la chaleur	3
1.2	Introduction à la platitude différentielle	4
1.2.1	Motivations et commentaire bibliographique	4
1.2.2	L'exemple de l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$	6
1.3	Fonctions de classe Gevrey	8
1.3.1	Théorèmes de stabilité	9
1.3.2	Construction de fonctions Gevrey	11
1.3.3	L'article de Yamanaka et un théorème des fonctions implicites	15
1.4	Platitude des équations aux dérivées partielles, l'exemple de l'équation de la chaleur.	18
1.4.1	État de l'art	18
1.4.2	L'exemple de l'équation la chaleur	20
1.5	Plan de la thèse et résumé des contributions	24
1.5.1	Un système de diffusion croisée	24
1.5.2	Un problème de Stefan	31
1.5.3	Un système d'équations de la chaleur en cascade	36
1.5.4	Conclusion et annexes	39
1.6	Notations	40
1.6.1	Ensembles	40
1.6.2	Normes	40
1.6.3	Calcul différentiel	41
1.6.4	Autre	41

Chapitre 2 Controllability results for a cross diffusion system with a free boundary by a flatness approach	43
--	-----------

2.1	Abstract	43
2.2	Introduction and statement of our results	44
2.3	Preliminaries and the flatness method	47
2.3.1	Property of the system (2.4)	47
2.3.2	The flatness approach	48
2.4	Proof of the main results	49
2.4.1	Proof of Theorem 2.2.1	49
2.4.2	Proof of Theorem 2.2.2	51
2.4.3	Proof of Proposition 2.2.4	53
2.4.4	Proof of Theorem 2.2.5	54
2.5	Numerical illustrations	55
2.5.1	Illustrations for Theorem 2.2.2.	56
2.5.2	Illustration of Theorem 2.2.5	56

Chapitre 3 Controllability of the Stefan problem by the flatness approach	61
--	-----------

3.1	Abstract	61
3.2	Introduction and main results	61
3.3	The flatness approach	66
3.4	Gevrey functions	66
3.5	Analyticity of the solutions of the Stefan problem	70
3.6	Proof of the main results	71
3.7	Numerical illustrations	75
3.8	Conclusion	78

Chapitre 4 Flatness approach for the boundary controllability of a system of heat equations	81
--	-----------

4.1	Abstract	81
4.2	Introduction	82
4.3	Flatness approach	84
4.3.1	The general method	84
4.3.2	The boundary conditions at $x = 1$	86

4.4	Proof of theorem 4.2.1	88
4.5	Proof of theorem 4.2.2	92
4.6	Proof of theorem 4.2.4	95
4.7	Conclusion	95

Chapitre 5

Conclusion et perspectives	97
-----------------------------------	-----------

5.1	Vers un système en cascade pour l'équation de la chaleur	97
5.2	Conclusion générale	100

Annexe A

Appendices	101
-------------------	------------

A.1	Diverses inégalités	101
A.2	Les opérateurs de Mikusiński	105
A.3	Une famille bi-orthogonale de fonctions Gevrey	106

Bibliographie

Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse à la contrôlabilité de certains systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles (EDP) en une dimension d'espace. Les systèmes considérés sont constitués d'équations de la chaleur. On s'intéresse, à deux problèmes à frontière libre non linéaires un problème de Stefan et un système de diffusion croisée. Dans ces systèmes, la dynamique de la frontière est régie par une équation différentielle ordinaire (EDO) dépendant de l'état du système ou des contrôles. Ces systèmes étant issus de la physique, on impose des conditions de signe sur l'état et les contrôles. On montrera que dans certains cas, il est possible de les contrôler tout en respectant ces contraintes. On traitera aussi le cas d'équations de la chaleur en cascade, on établit des théorèmes de contrôlabilité pour deux équations et on évoque une approche pour généraliser ces résultats à un système de n équations. La méthode employée tout au long de cette thèse, est celle de la platitude différentielle, elle consiste à paramétrer l'état et les contrôles d'un système par une fonction appelée sortie plate qui elle-même dépend de l'état et du contrôle et qui peut être choisie librement. Cette approche, a pour avantage d'être constructive et de fournir des contrôles très réguliers. De plus, elle s'adapte facilement à de nombreuses conditions aux bords.

La suite de cette introduction s'organise de la manière suivante :

On commence par rappeler des notions de contrôlabilité qui nous seront utiles pour le reste de ce document. On présente ensuite une introduction à la platitude différentielle dans le cadre de la dimension finie. Dans un troisième paragraphe, on s'intéresse aux fonctions de classe Gevrey qui jouent un rôle central dans ce travail. Cela nous permet de présenter la platitude pour les EDP et le cas particulier de l'équation de la chaleur. Enfin, on donne un résumé détaillé des contributions de cette thèse, qui est rédigée par articles.

Sommaire

1.1	Notions de contrôlabilité	2
1.1.1	Définitions	2
1.1.2	L'équation de la chaleur	3
1.2	Introduction à la platitude différentielle	4
1.2.1	Motivations et commentaire bibliographique	4
1.2.2	L'exemple de l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$	6
1.3	Fonctions de classe Gevrey	8
1.3.1	Théorèmes de stabilité	9
1.3.2	Construction de fonctions Gevrey	11
1.3.3	L'article de Yamanaka et un théorème des fonctions implicites	15

1.4	Platitude des équations aux dérivées partielles, l'exemple de l'équation de la chaleur.	18
1.4.1	État de l'art	18
1.4.2	L'exemple de l'équation la chaleur	20
1.5	Plan de la thèse et résumé des contributions	24
1.5.1	Un système de diffusion croisée	24
1.5.2	Un problème de Stefan	31
1.5.3	Un système d'équations de la chaleur en cascade	36
1.5.4	Conclusion et annexes	39
1.6	Notations	40
1.6.1	Ensembles	40
1.6.2	Normes	40
1.6.3	Calcul différentiel	41
1.6.4	Autre	41

1.1 Notions de contrôlabilité

Nous allons rappeler certaines notions de contrôlabilité puis nous intéresser plus particulièrement au cas de l'équation de la chaleur qui est à la base des résultats présentés dans ce document.

1.1.1 Définitions

Dans cette section, nous allons rappeler certaines notions de contrôlabilité qui apparaîtront au sein de ce document. Le lecteur intéressé par le sujet pourra trouver, pour la dimension finie, une littérature pléthorique. On se contentera donc de citer trois références extrêmement classiques que sont, [55, 57, 108]. Concernant la contrôlabilité des équations aux dérivées partielles, on renvoie le lecteur vers [19] pour un panorama général des méthodes existantes et vers [111] pour une approche de la contrôlabilité des systèmes linéaires par le biais des semi-groupes.

Pour fixer les idées, on commence par définir les notions de contrôlabilité apparaissant dans ce travail pour un système de dimension finie de la forme suivante.

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.1}$$

où $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé l'état du système et $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est le contrôle appartenant à un certain espace fonctionnel \mathcal{U} . On verra ensuite sur un exemple comment ces définitions s'adaptent aux cas qui nous intéressent. Regardons tout d'abord la notion de contrôlabilité la plus élémentaire :

Définition 1.1.1. *Soient $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$, on dit que x^1 est accessible depuis x^0 en temps T s'il existe $u \in \mathcal{U}$ tel que la solution de (1.1) vérifiant $x(0) = x^0$ satisfasse $x(T) = x^1$.*

Remarque 1.1.2. *On pourrait vouloir contrôler le système à partir d'un temps t_0 quelconque, mais on peut toujours se ramener à $t_0 = 0$ par translation.*

Dans certains cas on peut prouver une notion assez forte de contrôlabilité qui ne dépend pas des états initiaux et finaux :

Définition 1.1.3. On dit que le système (1.1) est contrôlable si, pour tout $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $T > 0$ tel que x^1 est accessible depuis x^0 en temps T .

Définition 1.1.4. On dit que le système (1.1) est contrôlable en temps $T > 0$ si pour tout $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathcal{U}$ tel que la solution x de (1.1) vérifiant $x(0) = x^0$ satisfasse $x(T) = x^1$.

Ces notions sont souvent trop fortes et l'on doit parfois se contenter de résultats plus faibles. On définit ainsi :

Définition 1.1.5. Le système (1.1) est contrôlable à 0 ou nul-contrôlable, si pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $T > 0$ tel que 0 est accessible depuis x^0 en temps T .

Définition 1.1.6. On dit que le système (1.1) est contrôlable à 0 en temps $T > 0$ si pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathcal{U}$ tel que la solution x de (1.1) vérifiant $x(0) = x^0$ satisfasse $x(T) = 0$.

On définit encore :

Définition 1.1.7. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ alors le système (1.1) est localement contrôlable en x^0 si, pour tout $T > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x^1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x^1 - x^0| \leq \varepsilon$, x^1 est accessible depuis x^0 en temps T .

Il est possible de définir de nombreuses autres notions de contrôlabilité ou des notions associées comme la contrôlabilité approchée, la contrôlabilité aux trajectoires ou encore la stabilisation.

Dans cette thèse, on s'intéresse à la contrôlabilité de certaines équations aux dérivées partielles et plus particulièrement leur contrôlabilité au bord. Dans ce cas, la dynamique de l'état est régie par une EDP et u apparaît comme l'une de ses conditions au bord. Par exemple :

$$\begin{cases} \partial_t y(t, x) - \partial_x^2 y(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) \\ \partial_x y(t, 0) = 0 & t \in (0, T) \\ \partial_x y(t, 1) = u(t) & t \in (0, T) \\ y(0, x) = y_0(x) & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (1.2)$$

où $y_0 \in L^2(0, 1)$.

Ici, l'état est noté y et le contrôle u agit sur le bord du domaine. Dans ce cas les conditions initiales et finales $y_0 = y(0, \cdot)$ et $y_1 = y(T, \cdot)$ ne sont plus des constantes mais des fonctions de x qui doivent être choisies dans des espaces fonctionnels appropriés, par exemple $L^2(0, 1)$. Les définitions précédentes s'adaptent alors sans difficulté à ce système.

1.1.2 L'équation de la chaleur

Nous allons maintenant rappeler les différentes manières de contrôler l'équation de la chaleur en une variable d'espace. On reprend donc l'exemple (1.2). De par son effet régularisant, il est vain de vouloir contrôler l'équation de la chaleur vers un état quelconque, on montre donc sa contrôlabilité à 0. On a en fait le théorème suivant :

Théorème 1.1.8 ([27, 44, 71, 81]). Pour tout $y_0 \in L^2(0, 1)$, pour tout $T > 0$ il existe $u \in L^2(0, T)$ tel que la solution y de (1.2), associée à y_0 et u , vérifie

$$y(T, \cdot) = 0$$

Remarque 1.1.9. *On a en fait un théorème bien plus général qui s'applique en dimension n (ou même sur des variétés à bord) pour un opérateur parabolique plus général et avec des conditions aux bords plus générales. De même, on dispose de théorèmes semblables pour la contrôlabilité par un terme source.*

Remarque 1.1.10. *L'équation (1.2) étant linéaire, sa contrôlabilité à 0 est équivalente à sa contrôlabilité aux trajectoires, c'est à dire : si y_1 est une solution de (1.2) si $T > 0$ et $y_0 \in L^2(0, 1)$, il existe $u \in L^2(0, T)$ telle que la solution y de (1.2), associée à y_0 et u , vérifie*

$$y(T, \cdot) = y_1(T, \cdot)$$

En effet :

Soient \bar{u}, \bar{y} fournis par le théorème 1.1.8 pour la condition initiale $y_0 - y_1(0, \cdot)$. Posons alors $u = \bar{u} + \partial_x y_1(t, 1)$ et y la solution de (1.2) associée à y_0 et u alors, $y_2 := y - y_1$ est solution de l'équation de la chaleur et vérifie $y_2(0, \cdot) = y_0 - y_1(0, \cdot)$, $\partial_x y_2(t, 0) = 0$ et $\partial_x y_2(t, 1) = \bar{u}$ donc par unicité des solutions de (1.2), $y_2 = \bar{y}$ d'où

$$y(T, \cdot) = \bar{y}(T, \cdot) + y_1(T, \cdot) = y_1(T, \cdot)$$

Il existe différentes approches du contrôle de la chaleur et donc différentes preuves du théorème 1.1.8. La première, date de 1971 elle est due à Fattorini et Russel dans [27, Theorem 3.3]. Leur preuve ne fonctionne qu'en dimension 1 d'espace, les auteurs ramènent le problème de la contrôlabilité à 0 à un certain problème de moment. Ils résolvent ce problème en construisant une famille bi-orthogonale à la famille des $(t \mapsto e^{-\lambda_n t})_{n \in \mathbb{N}}$, où les $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les valeurs propres du laplacien. Des approches permettant de traiter la question en dimension quelconque ont été publiées presque simultanément en 1995 et 1996 et exploitent toutes deux une inégalité de Carleman. Tout d'abord en 1995 par Lebeau et Robbiano dans [71, Théorème 2]. Dans cet article, les auteurs utilisent la méthode qui porte maintenant leur nom dans laquelle ils exploitent une inégalité d'observabilité pour les basses fréquences du laplacien. En 1996 dans [44, Theorem 2.3], Fursikov et Imanuvilov prouvent directement la contrôlabilité à 0 en montrant une inégalité d'observation qui y est équivalente via les inégalités de Carleman. Finalement, comme nous le verrons plus en détails en Section 1.4.2 dans [81, Theorem 3], Martin, Rosier et Rouchon prouvent le théorème 1.1.8 en exploitant la platitude de l'équation de la chaleur en dimension 1 et obtiennent ainsi un contrôle explicite dont ils prouvent la régularité Gevrey (voir définition 1.3.1).

1.2 Introduction à la platitude différentielle

1.2.1 Motivations et commentaire bibliographique

Les résultats de cette thèse sont obtenus en exploitant la propriété de platitude différentielle des systèmes considérés. Qualitativement un système dynamique est dit différentiellement plat si l'on peut paramétrer ses trajectoires par une sortie dite plate qui elle-même dépend de l'état. Pour se donner une idée plus précise, considérons le système en dimension finie,

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.3}$$

avec pour état $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ et pour entrée $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$. On a alors

Définition 1.2.1. *Le système (1.3) est différentiellement plat s'il existe une fonction $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ et des fonctions h, F et G , ainsi que des entiers α, β, γ tels que*

$$\begin{aligned} y &= h(x, u, u', \dots, u^{(\alpha)}) \\ x &= F(y, y', \dots, y^{(\beta)}) \\ u &= G(y, y', \dots, y^{(\gamma)}) \end{aligned}$$

tels que l'on puisse choisir librement y . La fonction y est alors appelée sortie plate du système.

Le lecteur pourra se référer à [107, Chapitre 7] pour une définition plus précise dans ce contexte particulier. La platitude peut être vue comme l'analogue pour les systèmes dynamiques de la paramétrisation des systèmes d'équations linéaires sous-déterminés.

Exemple 1.2.2. *Si l'on considère par exemple le système linéaire :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

alors, en posant $y = x_2$ on a alors la paramétrisation suivante

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}y \\ x_2 = y \\ x_3 = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}y \\ x_4 = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}y \end{cases}$$

Résoudre le système revient alors à choisir une valeur pour y , c'est la même idée pour la platitude.

Le concept a été formalisé pour la première fois pour la dimension finie, par Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin et Pierre Rouchon dans [34]. La notion s'insère dans le contexte plus large de la théorie algébrique des systèmes (cf. [31–33]). Le langage employé est celui de l'algèbre différentielle. La contrôlabilité d'un système équivaut à la liberté d'un certain module, et sa platitude, à l'existence d'une base (la sortie plate) ayant de bonnes propriétés. Les auteurs démontrent entre autres que, dans le cas d'un système de contrôle linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$, d'état x à valeur dans \mathbb{R}^n , et de contrôle u à valeurs dans \mathbb{R}^m , avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, la contrôlabilité est équivalente à la platitude. La Section 1.2.2 permet de comprendre ce résultat en terme de paramétrisation.

Dans [35], les mêmes auteurs s'intéressent aux systèmes qui ne sont pas plats et fournissent des exemples. Dans [36], ils présentent une nouvelle caractérisation de la platitude pour les systèmes de la forme (1.3), ce qui permet à Pierre Rouchon de donner une condition nécessaire pour la platitude de ce système dans [101] et à Jean Lévine d'obtenir une condition nécessaire et suffisante en 2011 dans [72]. Le lecteur pourra se référer à la thèse de Philippe Martin [79] pour une synthèse de ces deux approches.

Depuis ces travaux fondateurs, la platitude a été exploitée pour obtenir de nombreux résultats de contrôlabilité, de stabilisation, de suivi de trajectoire, en temps discret et même de filtrage. Les contributions sont trop nombreuses pour pouvoir faire un état de l'art exhaustif et on renvoie le lecteur vers [107] et [100] pour une synthèse sur la platitude en dimension finie (et infinie).

La notion de platitude a été étendue de manière plus ou moins formelle en dimension infinie (voir en particulier [39]), tout d'abord avec les systèmes à retard, notamment dans [38],[90],[89], puis aux équations aux dérivées partielles, ce qui est le sujet de cette thèse et sur lequel on reviendra plus tard dans cette introduction.

1.2.2 L'exemple de l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$

Dans ce paragraphe, adapté de [107, Paragraphe 2.4], on va exprimer en termes de paramétrisation la platitude d'un système de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère l'EDO

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (1.4)$$

Notons,

$$\mathcal{K} := [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

la matrice de Kalman du système. Il est bien connu que l'inversibilité de cette matrice est équivalente à la contrôlabilité du système (1.4). Nous allons montrer que l'inversibilité de \mathcal{K} implique la platitude du système. Nous allons montrer le théorème :

Théorème 1.2.3. *Si \mathcal{K} est inversible, le système (1.4) est différentiellement plat.*

Démonstration. Comme \mathcal{K} est inversible, on peut faire le changement de variable $z = \mathcal{K}^{-1}x$. Alors z est solution de

$$\dot{z} = Cz + bu, \quad (1.5)$$

avec $C = \mathcal{K}A\mathcal{K}^{-1}$ et $b = \mathcal{K}^{-1}B$, dont les expressions en coordonnées sont

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\dot{z}_1 = u - c_0 z_n$$

et

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \dot{z}_i = z_{i-1} - c_{i-1} z_n.$$

Si l'on pose $y = z_n$, on a alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad z_i = y^{(n-i)} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k y^{(k-i)} \quad (1.6)$$

$$u = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k y^{(k)} \quad (1.7)$$

En effet, posons temporairement $u = z_0$, on a alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \dot{z}_i = z_{i-1} - c_{i-1} y.$$

Montrons par récurrence inversée sur $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $z_i = y^{(n-i)} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k y^{(k-i)}$.

Le cas $i = n$ est trivial.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant l'hypothèse de récurrence, on a alors par la formule de récurrence :

$$z_{i-1} = \dot{z}_i + c_{i-1} y = y^{(n-i+1)} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k y^{(k-i+1)} + c_{i-1} y = y^{(n-(i-1))} + \sum_{k=i-1}^{n-1} c_k y^{(k-(i-1))}.$$

Par récurrence, on a bien les relations annoncées.

Pour montrer que y est une sortie plate de (1.4), il faut l'exprimer en fonction de x et u et réciproquement.

Tout d'abord, $y = z_n$ et comme $z = \mathcal{K}^{-1}x$, on obtient $y = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \mathcal{K}^{-1}x$.

L'équation (1.7) nous donne une paramétrisation de u par y . De (1.6) et de $z = \mathcal{K}^{-1}x$, on tire :

$$x = \mathcal{K} \begin{pmatrix} y^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k y^{(k-1)} \\ \vdots \\ y^{(n-i)} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k y^{(k-i)} \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}.$$

Cela montre que le système (1.4) est plat et que y en est une sortie plate. \square

Intéressons nous maintenant à la contrôlabilité du système.

En exploitant la platitude du système, on va montrer le théorème suivant :

Théorème 1.2.4. *Soient, $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty([0, T], \mathbb{R})$ telle que l'unique solution x de (1.4) satisfaisant $x(0) = x^0$ vérifie $x(T) = x^1$.*

Démonstration. On va utiliser la paramétrisation précédente et choisir y de manière à satisfaire les conditions initiales et finales.

Soit $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a alors avec le changement de variable précédent :

$$(x(0) = x^0 \text{ et } x(T) = x^1) \Leftrightarrow (z(0) = \mathcal{K}^{-1}x^0 \text{ et } z(T) = \mathcal{K}^{-1}x^1)$$

Et x est solution de (1.4) si et seulement si $z = \mathcal{K}^{-1}x$ est solution de (1.5). Posons alors

$$z = \begin{pmatrix} y^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k y^{(k-1)} \\ \vdots \\ y^{(n-i)} + \sum_{k=i}^{n-1} c_k y^{(k-i)} \\ \vdots \\ y \end{pmatrix} \text{ et } u = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k y^{(k-i)}$$

pour une fonction $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ que nous allons préciser et $x = \mathcal{K}z$. On vérifie alors sans peine que z satisfait (1.5). On a de plus,

$$z(0) = \mathcal{K}^{-1}x^0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y^{(n-i)}(0) + \sum_{k=i}^{n-1} c_k y^{(k-i)}(0) = (\mathcal{K}^{-1}x^0)_i$$

et

$$z(T) = \mathcal{K}^{-1}x^1 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y^{(n-i)}(T) + \sum_{k=i}^{n-1} c_k y^{(k-i)}(T) = (\mathcal{K}^{-1}x^1)_i.$$

Les vecteurs $(y(0) \ y'(0) \ \dots \ y^{(n)}(0))^\top$ et $(y(T) \ y'(T) \ \dots \ y^{(n)}(T))^\top$ sont alors imposés comme solutions d'un système linéaire triangulaire. Notons $(y_1^0 \ y_2^0 \ \dots \ y_n^0)^\top$ et

$(y_1^1 \ y_2^1 \ \dots \ y_n^1)^\top$ les solutions de ces systèmes. Choisissons alors pour y un polynôme vérifiant $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y^{(i)}(0) = y_i^0$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y^{(i)}(T) = y_i^1$ ainsi, x est l'unique solution de (1.4) telle que $x(0) = x^0$ et elle vérifie, $x(T) = x^1$. \square

1.3 Fonctions de classe Gevrey

Comme nous le verrons par la suite, l'une des difficultés techniques de la platitude pour les EDP est de garantir la convergence de séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (t, x) \in I \times \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Pour cela, on va choisir φ dans une classe de fonctions très régulières (quasi-analytique), les fonctions de classe Gevrey du nom de Maurice Gevrey qui les a introduites dans [47].

Définition 1.3.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ est dite Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ si pour tout $K \subset U$ compact, il existe $M, R_1, \dots, R_n > 0$ tels que

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, |D^\alpha f(x)| \leq M \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i!^{\sigma_i}}{R_i^{\alpha_i}} \quad x \in K$$

Une fonction $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ est dite Gevrey d'ordre $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ si toutes ses applications coordonnées le sont.

Notation 1.3.2. Si $I \subset \mathbb{R}$, on note $\mathcal{G}_I(M, R, \sigma)$, avec $M, R, \sigma > 0$, l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|f^{(k)}\|_{L^\infty(I)} \leq M \frac{k!^\sigma}{R^k}$$

et on pose $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(M, R, \sigma) = \mathcal{G}(M, R, \sigma)$.

Remarque 1.3.3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ et soient $\sigma, R, M > 0$. Soient maintenant $I' \subset I$ et $M', R', \sigma' > 0$ tels que $\sigma' \geq \sigma$, $0 < R' \leq R$ et $M' \geq M$. On a alors

$$\mathcal{G}_I(M, R, \sigma) \subset \mathcal{G}_{I'}(M', R', \sigma').$$

Outre [47], pour un traitement systématique du sujet, on renvoie le lecteur vers le paragraphe Quasi-analytic classes de [102, Chapitre 19] ou vers [88, Partie VI, Chapitre 5, § 5]. On pourra aussi s'intéresser à [99]. Dans le contexte de la platitude en dimension infinie, on pourra se reporter à [64, Annexe C] et à [83], où les auteurs démontrent des théorèmes d'interpolations Gevrey. Enfin dans [114], en utilisant une définition équivalente à la nôtre, l'auteur démontre de nombreux résultats de stabilité et notamment un théorème d'inversion locale sur lequel nous reviendrons. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons démontrer des résultats de stabilité pour les fonctions Gevrey. Nous utiliserons ensuite ces résultats pour construire des fonctions particulières que nous utiliserons dans tout ce document. On montrera la convergence des séries semblables à celle de (1.8). Nous conclurons en détaillant l'approche de Takesi Yamanaka dans [114] qui permet d'obtenir un théorème des fonctions implicites pour les fonctions Gevrey, que nous utiliserons au chapitre 2.

Remarque 1.3.4. Si dans la définition 1.3.1 l'un des $\sigma_i \leq 1$, alors f est analytique en la variable x_i (voir par exemple [47, Paragraphe I.1]). En dimension 1 on reconnaît les inégalités de Cauchy.

Un des intérêts des fonctions de classes Gevrey d'ordres strictement supérieurs à 1 est de permettre un bon contrôle des dérivées tout en étant moins rigides que les fonctions analytiques. Ainsi, nous construirons des fonctions Gevrey d'ordre $\sigma > 1$ à support compact ou constantes sur des intervalles.

1.3.1 Théorèmes de stabilité

Nous allons maintenant énoncer et démontrer des résultats de stabilité (qui sont tous des cas particuliers de théorèmes que l'on peut trouver dans [114]).

Tout d'abord, on montre facilement que :

Proposition 1.3.5. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n > 0$, alors l'ensemble des fonctions Gevrey d'ordre $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur U à valeurs dans \mathbb{R} forme une algèbre.*

Démonstration. La somme et la multiplication par un scalaire se montrant très facilement, on ne détaille que le produit.

On considère la relation d'ordre \preceq sur \mathbb{N}^n donnée par

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \beta \preceq \alpha \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \beta_i \leq \alpha_i.$$

Soient maintenant $K \subset U$ un compact, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et f, g Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur U . Par la formule de Leibniz, on a :

$$|D^\alpha(fg)| = \left| \sum_{\beta \preceq \alpha} \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g \right|.$$

En notant M, R_1, \dots, R_n des constantes de Gevrey pour f sur K et $\tilde{M}, \tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_n$ des constantes de Gevrey pour g , on a alors

$$|D^\alpha(fg)| \leq \sum_{\beta \preceq \alpha} M \tilde{M} \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i} \frac{\beta_i!^{\sigma_i} (\alpha_i - \beta_i)!^{\sigma_i}}{R_i^{\beta_i} \tilde{R}_i^{\alpha_i - \beta_i}}.$$

En utilisant les inégalités $\beta_i! (\alpha_i - \beta_i)! \leq \alpha_i!$ et $\frac{\alpha_i!}{R_i^{\beta_i} \tilde{R}_i^{\alpha_i - \beta_i}} \leq \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{\tilde{R}_i}\right)^{\alpha_i}$, on obtient

$$|D^\alpha(fg)| \leq M \tilde{M} \left(\sum_{\beta \preceq \alpha} 1 \right) \prod_{i=1}^n \alpha_i!^{\sigma_i} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{\tilde{R}_i} \right)^{\alpha_i}.$$

On a de plus $\sum_{\beta \preceq \alpha} 1 = \prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$ et donc en remarquant que $\forall k \in \mathbb{N}, k + 1 \leq 2^k$ on obtient finalement

$$|D^\alpha(fg)| \leq M \tilde{M} \prod_{i=1}^n \alpha_i!^{\sigma_i} 2^{\alpha_i} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{\tilde{R}_i} \right)^{\alpha_i}.$$

Ce qui démontre le résultat voulu. □

Remarque 1.3.6. *Dans le cas où $n = 1$, les calculs précédents se simplifient et on obtient : si $f \in \mathcal{G}_I(M, R, \sigma)$ et $g \in \mathcal{G}_I(\tilde{M}, \tilde{R}, \sigma)$ alors $fg \in \mathcal{G}_I\left(M\tilde{M}, \frac{R\tilde{R}}{R+\tilde{R}}, \sigma\right)$.*

On va maintenant énoncer un certain nombre de résultats de stabilité dont les preuves se généralisent immédiatement au cas vectoriel.

On verra plus tard que la composée de deux fonctions Gevrey est elle-même Gevrey, dans cette thèse, on utilise régulièrement le cas particulier suivant.

Proposition 1.3.7. *Soit f Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Alors g définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(at + b)$$

est Gevrey d'ordre σ . Plus précisément, si $f \in \mathcal{G}(M, R, \sigma)$, alors $g \in \mathcal{G}\left(M, \frac{R}{|a|}, \sigma\right)$.

On s'intéresse maintenant à des fonctions Gevrey à plusieurs variables. On a tout d'abord le résultat suivant : les classes Gevrey sont stables par différentiation et intégration.

Proposition 1.3.8. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur U .*

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors $D^\alpha f$ est Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur U .

Démonstration. Par récurrence, on se ramène au cas des dérivées partielles d'ordre 1.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et soit $K \subset U$ un compact. En appliquant l'inégalité de la définition 1.3.1 à $(\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_n)$, on obtient

$$\forall x \in K, |D^\alpha \partial_{x_i} f(x)| \leq M \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\alpha_j!^{\sigma_j}}{R_j^{\alpha_j}} \right) \frac{(\alpha_i + 1)!^{\sigma_i}}{R_i^{\alpha_i + 1}}.$$

En utilisant proposition A.1.1 pour majorer $(\alpha_i + 1)!$, on a

$$\begin{aligned} |D^\alpha \partial_{x_i} f(x)| &\leq M \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\alpha_j!^{\sigma_j}}{R_j^{\alpha_j}} \right) \frac{2^{\sigma_i(\alpha_i + 1)} \alpha_i!^{\sigma_i}}{R_i^{\alpha_i + 1}} \\ &= \frac{2^{\sigma_i}}{R_i} M \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\alpha_j!^{\sigma_j}}{R_j^{\alpha_j}} \right) \frac{2^{\sigma_i \alpha_i} \alpha_i!^{\sigma_i}}{R_i^{\alpha_i}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.9. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, soient $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et f une fonction Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur $U \times I$ à valeurs dans \mathbb{R} . Alors si $t_0 \in I$, la fonction*

$$F : (x, t) \mapsto \int_{t_0}^t f(x, \tau) d\tau$$

est Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur $U \times I$.

Démonstration. On montre que F est C^∞ sur $U \times I$ en combinant les théorèmes de régularité pour les intégrales à paramètres et le fait que les dérivées en temps de F , sont des dérivées de f . Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, soit $K \subset U$ un compact et soit $r > 0$.

Si $\alpha_n = 0$, alors

$$\forall x \in K, \forall t \in I, |t - t_0| \leq r, |D^\alpha F(x, t)| = \left| \int_{t_0}^t D^\alpha f(x, \tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |D^\alpha f(x, \tau)| d\tau \right|.$$

Donc, par l'inégalité induite par la définition 1.3.1 sur $K \times ([t_0 - r, t_0 + r] \cap I)$, on a

$$|D^\alpha F(x, t)| \leq \left| \int_{t_0}^t M \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i!^{\sigma_i}}{R_i^{\alpha_i}} d\tau \right| \leq |t - t_0| M \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i!^{\sigma_i}}{R_i^{\alpha_i}} \leq r M \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i!^{\sigma_i}}{R_i^{\alpha_i}},$$

ce qui correspond bien à une inégalité de type Gevrey dans le cas où $\alpha_n = 0$.

Si $\alpha_n \neq 0$, alors, en posant $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n - 1)$, on a,

$$D^\alpha F = D^\beta f$$

et on retrouve l'inégalité de type Gevrey en utilisant le fait que $(\alpha_n - 1)! \leq \alpha_n!$. □

On va maintenant énoncer un théorème issu de [114]. L'énoncé que nous donnons est justifié par la discussion de la définition de Takesi Yamanaka (définition 1.3.19 dans la sous-section éponyme).

Théorème 1.3.10 (Cas particulier du théorème 6.1 de [114]). *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $I \subset \mathbb{R}$ des ouverts. Soient $f : U \rightarrow I$ Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur U et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gevrey d'ordre σ' . Alors, $g \circ f$ est Gevrey d'ordres (σ, \dots, σ) sur U , où $\sigma = \max_i \{\sigma_i, \sigma'\}$.*

De ce théorème, on déduit le corollaire suivant pour les fonctions à une variable :

Corollaire 1.3.11. *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gevrey d'ordre $\sigma \geq 1$ sur I . S'il existe $A > 0$ tel que $\forall t \in I, f(t) \geq A$ alors $\frac{1}{f}$ est Gevrey d'ordre σ sur I .*

Démonstration. Comme pour tout $t \in I, f(t) \geq A$, f est à valeurs dans $J := (\frac{A}{2}, +\infty)$. Posons $g(t) = 1/t$. Comme g est analytique sur J , elle y est en particulier Gevrey d'ordre σ . Le théorème précédent assure alors que $\frac{1}{f}$ est Gevrey d'ordre σ sur I . \square

1.3.2 Construction de fonctions Gevrey

Nous allons maintenant utiliser les théorèmes précédents pour construire des fonctions Gevrey particulières qui nous seront utiles tout au long de ce document. Nous concluons ce paragraphe en montrant que les séries du type (1.8) sont bien convergentes à condition de choisir φ correctement.

Pour $\sigma > 1$, on peut construire une fonction Gevrey d'ordre σ nulle sur \mathbb{R}_- mais pas identiquement nulle.

Proposition 1.3.12. *Soit $\sigma > 0$ alors la fonction*

$$\phi_\sigma(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^\sigma}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est Gevrey d'ordre $1 + \frac{1}{\sigma}$ sur \mathbb{R} .

Démonstration. Cette preuve est adaptée de [78].

Le fait que ϕ_σ soit C^∞ en 0 découle du théorème de croissance comparée car toutes ses dérivées sur \mathbb{R}_+^* sont de la forme $P(\frac{1}{t^\sigma}, \frac{1}{t}) e^{-\frac{1}{t^\sigma}}$, avec $P \in \mathbb{R}[X, Y]$.

Il reste donc à montrer l'inégalité de Gevrey sur \mathbb{R}_+^* . Posons $\forall t > 0, f(t) = e^{-\frac{1}{t^\sigma}}$ et on étend f en une fonction holomorphe du demi-plan complexe $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ par la même formule en utilisant la détermination principale du logarithme.

Soit $t > 0$ et $r \in (0, 1)$ on note $\Gamma_r(t)$ le lacet paramétré par $\theta \mapsto t + tre^{i\theta}$ pour $\theta \in [-\pi, \pi)$

Par la formule de Cauchy, on a

$$\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(t) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz, \quad (1.9)$$

avec

$$\int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t + tre^{i\theta}) i r t e^{i\theta}}{(tre^{i\theta})^{n+1}} d\theta = \frac{i}{r^n t^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + tre^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Donc

$$\left| \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{r^n t^n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t + tre^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{r^n t^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\Re\left(\frac{1}{(t+tre^{i\theta})^\sigma}\right)} d\theta.$$

Montrons qu'il existe $r > 0$ dépendant uniquement de σ , tel que

$$\forall t > 0, \forall \theta \in [-\pi, \pi], \Re\left(\frac{1}{(t + tre^{i\theta})^\sigma}\right) \geq \frac{1}{2t^\sigma}.$$

On a

$$\Re\left(\frac{1}{(t + tre^{i\theta})^\sigma}\right) - \frac{1}{2t^\sigma} = \frac{1}{t^\sigma} \left(\Re\left(\frac{1}{(1 + re^{i\theta})^\sigma}\right) - \frac{1}{2} \right). \quad (1.10)$$

Or, par continuité de $z \mapsto \Re\left(\frac{1}{(1+z)^\sigma}\right)$ en 0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq \eta \Rightarrow \left| \Re\left(\frac{1}{(1+z)^\sigma}\right) - 1 \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq \eta, \Re\left(\frac{1}{(1+z)^\sigma}\right) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc, en fixant $r \in (0, 1)$ tel que $r \leq \eta$, on a

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], |re^{i\theta}| = r \leq \eta,$$

et donc en appliquant à $re^{i\theta}$ l'inégalité précédente dans (1.10), on trouve

$$\Re\left(\frac{1}{(t + tre^{i\theta})^\sigma}\right) - \frac{1}{2t^\sigma} \geq 0 \quad t > 0, \theta \in [-\pi, \pi].$$

On peut donc choisir $r > 0$, assez proche de 0, ne dépendant que de σ , tel que

$$\forall t > 0, \forall \theta \in [-\pi, \pi], \Re\left(\frac{1}{(t + tre^{i\theta})^\sigma}\right) \geq \frac{1}{2t^\sigma},$$

ce qui donne

$$\forall t > 0, \left| \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{2\pi}{r^n t^n} e^{-\frac{1}{2t^\sigma}} = \frac{2\pi}{r^n} h\left(\frac{1}{t^\sigma}\right),$$

avec $\forall t > 0, h(t) = t^{\frac{n}{\sigma}} e^{-\frac{t}{2}}$. On a,

$$\forall t > 0, h'(t) = t^{\frac{n}{\sigma}-1} e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{n}{\sigma} - \frac{t}{2} \right).$$

Donc h est maximale en $t = \frac{2n}{\sigma}$, d'où

$$\forall t > 0, \left| \int_{\Gamma_r(t)} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{2\pi}{r^n} h\left(\frac{2n}{\sigma}\right).$$

Or, en utilisant pour tout $x \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$, on a,

$$h\left(\frac{2n}{\sigma}\right) = \left(\frac{2^{\sigma-1}}{\sigma^{\sigma-1}}\right)^n (n^n e^{-n})^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\frac{2^{\sigma-1}}{\sigma^{\sigma-1}}\right)^n n!^{\frac{1}{\sigma}}.$$

En injectant la borne ainsi obtenue dans (1.9) on obtient :

$$\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(t)| \leq \left(\frac{2^{\sigma-1}}{r\sigma^{\sigma-1}}\right)^n n!^{1+\frac{1}{\sigma}},$$

ce qui conclut. □

Nous allons utiliser cette fonction pour construire des fonctions Gevrey particulières qui nous seront très utiles pour la suite.

Corollaire 1.3.13. *Si $\sigma > 1$, la fonction*

$$\theta_\sigma(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0, \\ \frac{e^{-((1-t)^{-c_\sigma})}}{e^{-((1-t)^{-c_\sigma})} + e^{-(t^{-c_\sigma})}} & \text{if } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{if } t \geq 1, \end{cases} \quad (1.11)$$

avec $c_\sigma = (\sigma - 1)^{-1}$ est Gevrey d'ordre σ . De plus elle vérifie

1. $\forall t \in \mathbb{R}, 1 \geq \theta_\sigma(t) \geq 0$;
2. $\forall t \in \mathbb{R}, \theta_\sigma(t) + \theta_\sigma(1 - t) = 1$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \theta_\sigma(t) = \frac{\phi_{c_\sigma}(1 - t)}{\phi_{c_\sigma}(1 - t) + \phi_{c_\sigma}(t)},$$

Avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{c_\sigma}(1 - t) + \phi_{c_\sigma}(t) > 0$ et $\phi_{c_\sigma}(1 - t) + \phi_{c_\sigma}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 1$ il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{c_\sigma}(1 - t) + \phi_{c_\sigma}(t) \geq A$. Ainsi, par les propositions 1.3.5 et 1.3.7, le corollaire 1.3.11 ainsi que la proposition 1.3.12, θ_σ est Gevrey d'ordre $1 + \frac{1}{c_\sigma} = \sigma$. □

Remarque 1.3.14. *Cette fonction a été introduite pour la première fois par François Malrait dans un travail non publié à l'Ecole des mines (selon [23, Appendix B]) et est depuis utilisée abondamment dans la littérature sur la platitude pour les équations aux dérivées partielles.*

On peut utiliser cette fonction pour construire une fonction bulle :

Corollaire 1.3.15. *Si $\sigma > 1$, la fonction*

$$\eta_\sigma(t) = \frac{\theta_\sigma(t)\theta_\sigma(1 - t)}{\int_{\mathbb{R}} \theta_\sigma(\tau)\theta_\sigma(1 - \tau)d\tau} \quad t \in \mathbb{R}$$

est Gevrey d'ordre σ et vérifie :

1. $\eta_\sigma \geq 0$;
2. $\text{supp}(\eta_\sigma) \subset [0, 1]$;
3. $\int_{\mathbb{R}} \eta_\sigma(t)dt = 1$.

Démonstration. Cela découle directement du théorème précédent et des propositions 1.3.5 et 1.3.7. \square

Remarque 1.3.16. Pour tout $\sigma > 1$, θ_σ et η_σ sont constantes en dehors de $[0, 1]$. On peut donc choisir $M, R > 0$ tels que $\theta_\sigma, \eta_\sigma \in \mathcal{G}(M, R, \sigma)$.

Remarque 1.3.17. On montre facilement que θ_σ converge ponctuellement vers une fonction de Heaviside lorsque σ tend vers 1. Ainsi, si l'on veut éviter des explosions en implémentant numériquement θ_σ et ses dérivées, il est préférable de prendre σ aussi loin de 1 que possible, et donc proche de 2 dans les applications que l'on en fera. Ce phénomène est illustré en partie par la figure 1.1.

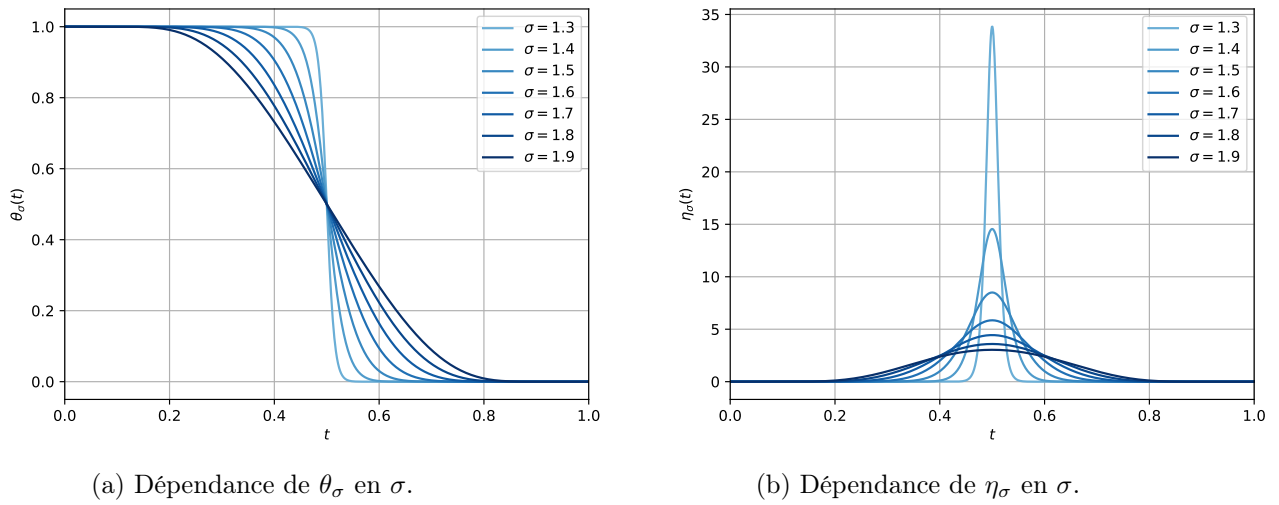


FIGURE 1.1 – Evolution des graphes de θ_σ et η_σ en fonction de σ .

Terminons en montrant que les séries semblables à (1.8) convergent :

Théorème 1.3.18. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gevrey d'ordre $\sigma \in [1, 2)$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions

$$S(t, x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \varphi^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad T(t, x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \varphi^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (t, x) \in I \times \mathbb{R},$$

sont Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x . De plus, elles peuvent être dérivées terme à terme.

Démonstration. Montrons le résultat pour S , la preuve pour T est identique.

Posons

$$\forall k \in \mathbb{N}, f_k(t, x) = a^k \varphi^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

On a alors

$$\forall l, m, k \in \mathbb{N}, \partial_t^l \partial_x^m f_k(t, x) = \begin{cases} a^k \varphi^{(k+l)}(t) \frac{x^{2k+1-m}}{(2k+1-m)!} & \text{si } 2k+1 \geq m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $K \subset I$ un compact, $r > 0$ et M, R des constantes de Gevrey pour φ sur K , en utilisant l'inégalité de la définition 1.3.1 et le fait que $x \in [-r, r]$, on a

$$\forall l, k \in \mathbb{N}, \forall m \leq 2k + 1, \forall (t, x) \in K \times [-r, r],$$

$$\left| \partial_t^l \partial_x^m f_k(t, x) \right| \leq |a|^k |\varphi^{k+l}(t)| \frac{|x|^{2k+1-m}}{(2k+1-m)!} \leq M |a|^k \frac{(k+l)!^\sigma}{R^{k+l}} \frac{r^{2k+1-m}}{(2k+1-m)!}.$$

Finalement, en utilisant la proposition A.1.1 et le fait que $\binom{2k+1}{m} \geq 1$, on a

$$\left| \partial_t^l \partial_x^m f_k(t, x) \right| \leq M \frac{|a|^k 2^{\sigma k} r^{2k+1} k!^\sigma}{(2k+1)!} \frac{2^{\sigma l} l!^\sigma m!}{R^l r^m}.$$

Si l'on pose $\forall k \in \mathbb{N}, u_k := M \frac{|a|^k 2^{\sigma k} r^{2k+1} k!^\sigma}{(2k+1)!} \frac{2^{\sigma l} l!^\sigma m!}{R^l r^m}$, on a, comme $2 > \sigma$,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{|a| 2^\sigma r^2 (k+1)^\sigma}{(2k+2)(2k+3)} = \frac{|a| 2^\sigma r^2 (1 + \frac{1}{k})^\sigma}{k^{2-\sigma} (2 + \frac{2}{k})(2 + \frac{3}{k})} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc (u_k) est sommable, donc S est C^∞ et dérivable terme à terme. En sommant les inégalités précédentes sur k , on trouve

$$\left| \partial_t^l \partial_x^m S(t, x) \right| \leq M \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a|^k 2^{\sigma k} r^{2k+1} k!^\sigma}{(2k+1)!} \right) \frac{2^{\sigma l} l!^\sigma m!}{R^l r^m} \quad (t, x) \in K \times [-r, r], \quad l, m \in \mathbb{N},$$

ce qui prouve la régularité Gevrey voulue. \square

1.3.3 L'article de Yamanaka et un théorème des fonctions implicites

Afin de justifier le théorème 1.3.10 et de pouvoir énoncer un théorème des fonctions implicites pour les applications Gevrey, il nous faut nous intéresser plus avant à l'article de Takesi Yamanaka [114]. Dans cet article, l'auteur prend une définition de fonction Gevrey que l'on peut exprimer sous la forme équivalente suivante avec les notations de la page 40.

Définition 1.3.19. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ est dite Gevrey au sens de Yamanaka d'ordre $\lambda > 0$ sur U si pour tout $K \subset U$ compact, il existe $C, L > 0$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|d^k f_x\|_{k, \infty} \leq CL^k \frac{k!^\lambda}{(1+k)^2} \quad x \in K.$$

Si l'on ne précise rien, "Gevrey" signifie toujours Gevrey au sens de la définition 1.3.1.

Remarque 1.3.20. Dans son article, Yamanaka prend en fait comme définition une inégalité globale sur un ouvert U , mais comme notre définition est locale, ses résultats s'appliquent directement à la définition donnée ci-dessus pour U ouvert, en les appliquant sur toutes les boules ouvertes contenues dans U .

On peut établir un lien entre ces deux définitions de fonction Gevrey :

Théorème 1.3.21. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.

Si f est Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ au sens de la définition 1.3.1, alors f est Gevrey au sens de Yamanaka d'ordre $\lambda = \max_{i \in [1, n]} \sigma_i$.

Si f est Gevrey au sens de Yamanaka d'ordre λ , alors elle est Gevrey au sens de la définition 1.3.1 d'ordres $(\lambda, \dots, \lambda)$.

Démonstration. Soit $K \subset U$ un compact.

Si f est Gevrey d'ordres $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ sur U . Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour tous $x \in K$, $k \in \mathbb{N}$ et tous $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \|v_i\|_\infty \leq 1$ et $v_i = \sum_{j=1}^n v_i^j e_j$, on a

$$\begin{aligned} |d^k f_x(v_1, \dots, v_k)| &= \left| \sum_{\beta \in \llbracket 1, n \rrbracket^k} \left(\prod_{i=1}^k v_i^{\beta_i} \right) d^k f_x(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_k}) \right| \\ &\leq \sum_{\beta \in \llbracket 1, n \rrbracket^k} |d^k f_x(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_k})|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour tout $\beta \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k$ et tel que $d^k f_x(e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_k}) = D^\alpha f(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} |d^k f_x(v_1, \dots, v_k)| &\leq n^k \max_{|\alpha|=k} |D^\alpha f(x)| \\ &\leq n^k C \frac{\prod_{i=1}^n \alpha_i!^{\sigma_i}}{\prod_{i=1}^n R_i^{\alpha_i}} \text{ pour } \alpha \in \arg \max_{|\beta|=k} |D^\beta f(x)|. \end{aligned}$$

Comme $\alpha_i!^{\sigma_i} \leq \alpha_i!^\lambda$, on a,

$$|d^k f_x(v_1, \dots, v_k)| \leq M \frac{n^k}{\min(R_i)^k} \prod_{i=1}^n (\alpha_i!)^\lambda.$$

Finalement, en utilisant le fait que la suite $\left(\frac{(1+k)^2}{2^k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée (car elle converge vers 0) et en majorant, $\prod_{i=1}^n \alpha_i!$ grâce à la proposition A.1.3 on trouve

$$\begin{aligned} |d^k f_x(v_1, \dots, v_k)| &\leq M \left(\frac{2N}{\min R_i} \right)^k \frac{(1+k)^2}{2^k} \frac{(k!)^\lambda}{(1+k)^2} \\ &\leq CL^k \frac{(k!)^\lambda}{(1+k)^2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|d^k f_x\|_{k, \infty} \leq CL^k \frac{(k!)^\lambda}{(1+k)^2} \quad x \in K,$$

ce qui prouve que f est Gevrey au sens de Yamanaka d'ordre $\lambda = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sigma_i$.

Réciproquement, si f est Gevrey au sens de Yamanaka d'ordre λ . Pour $x \in K$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ il existe $v \in (\mathbb{R}^n)^{|\alpha|}$ formé de vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n tel que

$$D^\alpha f(x) = d^{|\alpha|} f_x(v)$$

et donc

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x)| &= |d^{|\alpha|} f_x(v)| \\ &\leq \|d^{|\alpha|} f_x\|_{|\alpha|, \infty} \prod_{i=1}^{|\alpha|} \|v_i\|_\infty. \end{aligned}$$

En utilisant $\|v_i\|_\infty \leq 1$ et l'inégalité de la définition, on a,

$$|D^\alpha f(x)| \leq CL^{|\alpha|} \frac{(|\alpha|!)^\lambda}{(1 + |\alpha|)^2}.$$

Finalement, en majorant $|\alpha|!$ grâce au corollaire A.1.2, on trouve

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x)| &\leq C 2^{n|\alpha|} \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i)!^\lambda}{\prod_{i=1}^n L^{-\alpha_i}} \\ &= C \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i)!^\lambda}{\prod_{i=1}^n (2^n L)^{-\alpha_i}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |D^\alpha f(x)| \leq C \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i)!^\lambda}{\prod_{i=1}^n (2^n L)^{-\alpha_i}} \quad x \in K,$$

donc f est bien Gevrey sur U d'ordres $(\lambda, \dots, \lambda)$. \square

Remarque 1.3.22. Pour $n = 1$, l'ordre d'une fonction Gevrey et son ordre au sens de Yamanaka sont les mêmes.

Cette équivalence, justifie l'énoncé que l'on a donné du théorème 1.3.10.

On donne maintenant une première version du théorème des fonctions implicites qui nous intéresse :

Théorème 1.3.23 (Cas particulier du théorème 8.1 de [114]). Soient I et J deux intervalles ouverts de \mathbb{R} . Soit $g : I \rightarrow J$ une fonction continue et soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que

$$\forall t \in I, f(t, g(t)) = 0.$$

S'il existe $A, B, L > 0$ et $\sigma \geq 1$ tels que :

$$\forall (t, x) \in I \times J, |\partial_x f(t, x)| \geq A$$

et

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, i + j \geq 2, |\partial_t^i \partial_x^j f(t, x)| \leq BL^{i+j-2} \frac{(i+j-2)!^\sigma}{(i+j-1)^2} \quad (t, x) \in I \times J,$$

alors g est Gevrey d'ordre σ sur I .

On va traduire le résultat précédent en un corollaire dans lequel l'inégalité sur les dérivées de f est remplacée par son appartenance à une certaine classe Gevrey.

Corollaire 1.3.24. Soient I, J des intervalles ouverts de \mathbb{R} . Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ Gevrey d'ordres (σ_1, σ_2) , avec $\sigma_1, \sigma_2 \geq 1$ sur $I \times J$. Soit $g : I \rightarrow J$ une fonction continue telle que

$$\forall t \in I, f(t, g(t)) = 0.$$

S'il existe $A > 0$ tel que $\forall (t, x) \in I \times J, |\partial_x f(t, x)| \geq A$, alors g est Gevrey d'ordre $\sigma := \max(\sigma_1, \sigma_2)$ sur I .

Démonstration. Quitte à travailler sur toute boule ouverte incluse dans $I \times J$, on peut supposer que les inégalités de la définition 1.3.1 sont globales sur $I \times J$.

Pour que f vérifie toutes les hypothèses du théorème précédent, il faut montrer qu'il existe $B, L > 0$ tels que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, i + j \geq 2, \forall (t, x) \in I \times J |\partial_t^i \partial_x^j f(t, x)| \leq BL^{i+j-2} \frac{(i+j-2)!^\sigma}{(i+j-1)^2}.$$

Par le théorème 1.3.21, f est Gevrey au sens de Yamanaka d'ordre σ sur $I \times J$. On peut donc prendre $C, L > 0$ tels que

$$\|d^k f_{(t,x)}\|_{k,\infty} \leq CL^k \frac{k!^\sigma}{(1+k)^2} \quad k \in \mathbb{N}, (t, x) \in I \times J.$$

Ainsi en notant (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \mathbb{N}, i + j \geq 2, \forall (t, x) \in I \times J, |\partial_t^i \partial_x^j f(t, x)| &= |d^{i+j} f_{(t,x)}(e_1, \dots, e_1, e_2 \dots e_2)| \\ &\leq CL^{i+j} \frac{(i+j)!^\sigma}{(1+i+j)^2} \\ &\leq CL^2 L^{i+j-2} \frac{(i+j)^\sigma (i+j-1)^\sigma (i+j-2)!^\sigma}{(1+i+j)^2}. \end{aligned}$$

En multipliant et en divisant par $2^{i+j-2}(i+j-1)^2$, on obtient

$$|\partial_t^i \partial_x^j f(t, x)| \leq CL^2 (2L)^{i+j-2} \frac{(i+j)^\sigma (i+j-1)^{\sigma+2} (i+j-2)!^\sigma}{(i+j+1)^2 2^{i+j-2} (i+j-1)^2}.$$

Finalement, on utilise le fait que la suite $(\frac{(k)^\sigma (k-1)^{\sigma+2}}{(k+1)^2 2^{k-2}})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour obtenir

$$|\partial_t^i \partial_x^j f(t, x)| \leq B(2L)^{i+j-2} \frac{(i+j-2)!^\sigma}{(i+j-1)^2},$$

avec $B > 0$ une constante telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $CL^2 \frac{(k)^\sigma (k-1)^{\sigma+2}}{(k+1)^2 2^{k-2}} \leq B$. Cela donne l'inégalité voulue, on peut donc appliquer le théorème en question à f et g . \square

1.4 Platitude des équations aux dérivées partielles, l'exemple de l'équation de la chaleur.

1.4.1 État de l'art

Après s'être intéressée aux systèmes à retard, la communauté scientifique de la platitude a étudié aux équations aux dérivées partielles comme autre exemple de système plat de dimension infinie. Tout d'abord en se ramenant aux systèmes à retard comme dans [91] qui s'intéresse à l'équation des ondes ou étendant le concept de π -liberté (dans le contexte de la théorie algébrique des systèmes, cela correspond à l'existence d'une sortie plate dans un espace plus large que celui considéré initialement, voir par exemple [39]) introduit pour les systèmes à retards comme dans [40]. Parmi les travaux pionniers pour les EDP, on peut aussi citer [97] où les auteurs s'intéressent à du suivi de trajectoire pour l'équation d'une chaîne pesante, [37] où les auteurs résolvent un problème de filtrage pour l'équation des télégraphistes, ou encore [22] dans lequel les auteurs

proposent une méthode de suivi de trajectoire ainsi qu'un schéma numérique pour l'équation de Saint-Venant. Ces travaux fondateurs ont pour points communs de ne pas s'intéresser directement à des problèmes de contrôles, mais plutôt à des problèmes de planification de trajectoire et de souvent s'appuyer sur le calcul opérationnel (que ce soit par le formalisme la transformation de Laplace ou celui des opérateurs de Mikusiński voir l'appendice A.2) pour trouver une paramétrisation des solutions.

Pour une approche plus générale de la platitude pour les EDP, il faut attendre la thèse de Béatrice Laroche [64] et les articles attenants [69],[68],[67]. Dans ces travaux, l'approche proposée est d'essayer de généraliser les méthodes de la dimension finie par la construction de familles de Brunovsky, pour généraliser la forme normale de Brunovsky, ou l'utilisation du déterminant de Fredholm, qui généralise le polynôme caractéristique. On voit aussi apparaître la décomposition des solutions sous forme de séries entières, comme ce qui est décrit au paragraphe suivant. Dans ces travaux, la difficulté de contrôler l'EDP en partant d'une condition initiale quelconque est clairement soulignée. Pour palier à ce problème, les auteurs établissent des résultats de contrôlabilité approchée en utilisant la densité de certains ensembles de fonctions pour lesquelles le contrôle exact par platitude est facile. On pourra aussi noter les travaux plus récents de Béatrice Laroche dans le domaine [66][65].

Dans les années 2010, Lionel Rosier, Pierre Rouchon et Philippe Martin ont démontré un certain nombre de résultats de contrôlabilité exacte (souvent à 0), pour l'équation de la chaleur [81], une classe d'équations paraboliques [82], l'équation de Schrödinger [84], et avec Ivonne Rivas pour l'équation de Korteweg-de Vries [80]. Ces résultats s'appuient sur des propriétés régularisantes des équations considérées pour gérer des conditions initiales générales. Mentionnons aussi [93] où Iván Moyano, adoptant la même approche, parvient à montrer la contrôlabilité à 0 d'une équation parabolique fortement dégénérée. Dans l'article [70], Camille Laurent et Lionel Rosier obtiennent des résultats de contrôlabilité semblables aux précédents, basés sur la platitude, pour une équation de la chaleur non linéaire. L'approche y est différente des papiers précédents, car au lieu de chercher directement à décomposer l'état sous forme de série pour en trouver une paramétrisation comme nous le verrons au paragraphe suivant, les auteurs en obtiennent une de manière implicite en s'appuyant sur un théorème de Cauchy original.

En exploitant la platitude, dans [83] (un résultat similaire se trouve dans [80]), les auteurs ont pu caractériser une partie des états atteignables par le contrôle au bord de l'équation de la chaleur. Leurs résultats ont ensuite été généralisés par d'autres méthodes dans [20],[52], pour finalement aboutir à une détermination totale des états atteignables dans [56].

Une école allemande de la platitude s'est formée autour de Joachim Rudolph, Frank Woittennek et Jan Winkler. Parmi leurs articles notables, on peut citer : [78] qui s'apparente aux premiers articles cités en décomposant les solutions à une certaine classe d'EDP sous forme de séries ; [92] et [113] où les auteurs exploitent les opérateurs de Mikusiński et les ultradistributions pour paramétrer les solutions de certaines équations ; [63] et [112] où au lieu de paramétrer explicitement les trajectoires des équations qu'ils considèrent, les auteurs traduisent la platitude en terme d'injectivité de certains opérateurs. On pourra aussi s'intéresser au livre qu'ils ont écrit sur le sujet [103].

On notera que la majorité des problèmes traités par platitude sont en dimension 1 d'espace, les rares exceptions se trouvant dans [64] et [81] ; ces deux résultats s'appuyant sur une géométrie particulière.

1.4.2 L'exemple de l'équation la chaleur

Dans ce paragraphe on va introduire la méthode de platitude pour les EDP en s'appuyant sur l'exemple de l'équation de la chaleur et l'article [81] (voir aussi [69]). Considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t y(t, x) - \partial_x^2 y(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) \\ \partial_x y(t, 0) = 0 & t \in (0, T) \\ \partial_x y(t, 1) = u(t) & t \in (0, T) \\ y(0, x) = y_0(x) & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (1.12)$$

où $y_0 \in L^2(0, 1)$. Dans [81], les auteurs prouvent le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. [81, Theorem 3] *Soient $y_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$, et $\sigma \in (1, 2)$. Il existe u de classe Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$, tel que la solution y de (1.12) vérifie*

$$y(T, \cdot) = 0.$$

De plus, y est de classe Gevrey d'ordre σ en t et $\frac{\sigma}{2}$ en x sur $[\varepsilon, T] \times [0, 1]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Ce résultat est basé sur la platitude et nous allons voir comment se traduit cette propriété pour une EDP et comment l'exploiter pour prouver ce théorème. Le but est de paramétrer les solutions de (1.12) par une sortie plate. Pour ce faire, on cherche une solution y de (1.12) sous la forme :

$$y(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(t) \frac{x^k}{k!} \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1],$$

où l'on suppose les coefficients α_k aussi réguliers que nécessaire. On a alors formellement :

$$\begin{aligned} \partial_t y(t, x) - \partial_x^2 y(t, x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \dot{\alpha}_k(t) \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \dot{\alpha}_k(t) \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k+2} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Donc, si les calculs précédents sont justifiés, on obtient, par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_{k+2} = \dot{\alpha}_k. \quad (1.13)$$

De la condition $\partial_x y(t, 0) = 0$, on tire $\alpha_1 = 0$. On a ainsi par récurrence immédiate avec (1.13) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_{2k+1} = 0.$$

De même on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_{2k} = \alpha_0^{(k)}.$$

En posant $\alpha_0 = \alpha$, on obtient alors

$$y(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (1.14)$$

Le contrôle u est alors imposé par la condition

$$\partial_x y(t, 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{(k+1)}(t) \frac{1}{(2k+1)!} = u(t). \quad (1.15)$$

Une sortie plate du système est donc $\alpha(t) = y(t, 0)$.

Pour justifier les calculs précédents, on démontre le lemme suivant :

Lemme 1.4.2. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Si α est une fonction Gevrey d'ordre $\sigma \in [1, 2)$ sur I . Alors, la fonction y définie par (1.14) est bien définie, Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur $I \times [0, 1]$ et peut être dérivée terme à terme. De plus, y vérifie :*

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_x^2 y = 0 & \text{dans } I \times [0, 1] \\ \partial_x y(t, 0) = 0 & \text{dans } I \end{cases}$$

Démonstration. Le fait que y est bien définie et sa régularité est assurée par le théorème 1.3.18. Le fait qu'elle vérifie les équations annoncées, provient de nos calculs précédents qui sont maintenant pleinement justifiés par la dérivation terme à terme. \square

On est à présent en mesure de démontrer le théorème suivant, qui est semblable au théorème 1.4.1 mais plus proches des résultats que l'on montrera par la suite.

Théorème 1.4.3. *Soient $y_0 \in L^2(0, 1)$, $T > 0$, et $\sigma \in (1, 2)$. Il existe u de classe Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$, tel que la solution y de (1.12) vérifie*

$$y(T, \cdot) = 0.$$

De plus, y est de classe Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur $(0, T] \times [0, 1]$.

Démonstration. Soit $(\alpha_k^0) \in \ell^2(\mathbb{N})$ les coefficients de y_0 dans la base hilbertienne (à $\sqrt{2}$ près) des $(\cos(k\pi x))_{k \in \mathbb{N}}$. On pose, \bar{y} la solution de (1.12) pour $u = 0$ et $\bar{y}(0, \cdot) = y_0$. On a alors

$$\bar{y}(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^0 e^{-k^2 \pi^2 t} \cos(k\pi x) \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1].$$

La première étape de la preuve consiste à utiliser cette formule pour mettre \bar{y} sous la forme donnée par (1.14). En décomposant les cosinus en série entières, on obtient

$$\bar{y}(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^0 e^{-k^2 \pi^2 t} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{(k\pi x)^{2i}}{(2i)!} \right) \quad (t, x) \in (0, T] \times [0, 1].$$

On veut intervertir ces deux sommes. Soit $\varepsilon > 0$. On a, pour tous $k, i \in \mathbb{N}$, $t \in (\varepsilon, T]$ et $x \in [0, 1]$:

$$\left| \alpha_k^0 e^{-k^2 \pi^2 t} (-1)^i \frac{(k\pi x)^{2i}}{(2i)!} \right| \leq M e^{-k^2 \pi^2 \varepsilon} \frac{(k\pi)^{2i}}{(2i)!},$$

avec M tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M \geq |\alpha_k^0|$. Prenons maintenant $0 < r < 1$ on a, en utilisant l'inégalité précédente et le fait que pour tout $x \geq 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $e^x \geq \frac{x^k}{k!}$;

$$\left| \alpha_k^0 e^{-k^2 \pi^2 t} (-1)^i \frac{(k\pi x)^{2i}}{(2i)!} \right| \leq M e^{-k^2 \pi^2 \varepsilon} \frac{\left(\frac{k\pi}{\sqrt{r}}\right)^{2i}}{(2i)!} r^i \leq M e^{\frac{k\pi}{\sqrt{r}} - k^2 \pi^2 \varepsilon} r^i \in L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}).$$

Cette inégalité justifie l'inversion des deux séries et comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$\bar{y}(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^0 e^{-k^2 \pi^2 t} (-1)^i (k\pi)^{2i} \right) \frac{x^{2i}}{(2i)!} \quad (t, x) \in (0, T] \times [0, 1].$$

On pose pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in (0, T]$, $\bar{\alpha}_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^0 e^{-k^2 \pi^2 t} (-1)^i (k\pi)^{2i}$. En majorant comme précédemment l'exponentielle sur $(\varepsilon, T]$ et en utilisant le théorème d'holomorphic sous l'intégrale, on montre aisément que $\bar{\alpha}_i$ est une fonction analytique sur $(0, T]$. En particulier, $\bar{\alpha}_i$ est Gevrey d'ordre σ sur $(0, T]$. En dérivant $\bar{\alpha}_0$, on trouve que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_0^{(i)}$ et donc,

$$\bar{y}(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \bar{\alpha}_0^{(i)} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \quad (t, x) \in (0, T] \times [0, 1].$$

Ainsi, \bar{y} se met sous la forme donnée par le lemme 1.4.2 sur $(0, T] \times [0, 1]$ donc, en particulier, elle y est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x . Maintenant que l'on a mis \bar{y} sous la forme (1.14), on va construire y en utilisant le lemme 1.4.2 qui coïncide avec \bar{y} pendant un temps court pour ensuite rejoindre 0. On choisit $0 < \tau < T$ et on pose

$$\alpha(t) = \theta_\sigma \left(1 - \frac{t - \tau}{T - \tau} \right) \bar{\alpha}_0(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

où θ_σ est donné par le corollaire 1.3.13. Comme $t \mapsto \theta_\sigma \left(1 - \frac{t - \tau}{T - \tau} \right)$ Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R} et nulle sur $(-\infty, \tau]$ et que $\bar{\alpha}_0$ est Gevrey d'ordre σ sur $(0, +\infty)$, α est Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R} .

Soit alors, \tilde{y} donnée par le lemme 1.4.2. Pour tout $t \in (-\infty, \tau]$, $\tilde{y}(t, \cdot) = 0$. De plus, on montre facilement avec les propriétés de θ_σ et la formule de Leibniz que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha^{(k)}(T) = \bar{\alpha}_0^{(k)}(T)$ d'où $\tilde{y}(T, \cdot) = \bar{y}(T, \cdot)$. Donc, si l'on pose $y = \bar{y} - \tilde{y}$, y est par linéarité solution de (1.12) avec u donné par la trace au bord de la solution. Cette fonction est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur $(0, T]$ car c'est le cas pour \bar{y} et \tilde{y} . On a de plus

$$y(0, \cdot) = \bar{y}(0, \cdot) - \tilde{y}(0, \cdot) = \bar{y}(0, \cdot) = y_0$$

et

$$y(T, \cdot) = \bar{y}(T, \cdot) - \tilde{y}(T, \cdot) = 0.$$

Enfin, on a $u(t) = \partial_x \bar{y}(t, 1) - \partial_x \tilde{y}(t, 1) = -\partial_x \tilde{y}(t, 1)$ donc u est bien Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$ et est donné par (1.15). \square

Remarque 1.4.4. *Satisfaire les conditions initiales et finales constitue souvent la partie la plus technique des preuves comme on le verra par la suite.*

Remarque 1.4.5. *La méthode de la platitude s'adapte facilement à des conditions au bord variées. Par exemple, si l'on remplaçait ici les conditions de Neumann par celles de Dirichlet ou de Robin il suffirait d'adapter la condition de récurrence sur les α_k et la base hilbertienne utilisée pour adapter la preuve ci-dessus. Dans la suite de cette thèse, on aura l'occasion de rencontrer des conditions aux bords assez variées.*

Remarque 1.4.6. *Contrairement à ce qui se passe en dimension finie, on a ici une paramétrisation de l'état et du contrôle par un nombre infini de dérivées de la sortie plate.*

Remarque 1.4.7. On peut se demander pourquoi chercher des solutions sous cette forme particulière, concernant l'équation de la chaleur, on pourra trouver une justification dans l'approche présentée dans [39]. Regardons (1.12) posée sur $\mathbb{R}^+ \times (0, 1)$ avec $y_0 = 0$ et prenons la transformée de Laplace en temps de la solution. On note \hat{y} cette transformée de Laplace, elle vérifie l'équation :

$$s\hat{y}(t, x) - \partial_x^2 \hat{y}(s, x) = 0 \quad \Re(s) > 0, x \in [0, 1]$$

À s fixé, $x \mapsto \hat{y}(s, x)$ est donc solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, en choisissant une racine carrée pour s notée \sqrt{s} on a alors,

$$\hat{y}(s, x) = A(s)e^{x\sqrt{s}} + B(s)e^{-x\sqrt{s}}$$

et donc $\partial_x \hat{y}(s, x) = \sqrt{s}(A(s)e^{x\sqrt{s}} - B(s)e^{-x\sqrt{s}})$ et donc, de la condition $\partial_x \hat{y}(s, 0) = 0$ on tire $B(s) = A(s)$ et donc, indépendamment du choix de \sqrt{s} , on a :

$$\hat{y}(s, x) = 2A(s) \cosh(x\sqrt{s}) = 2A(s) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Par conséquent, en cherchant A sous la forme $\frac{\hat{\alpha}}{2}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha^{(k)}(0) = 0$ on a

$$\hat{y}(s, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{\alpha^{(k)}}(s) \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

si bien que l'on trouve

$$y(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Cela donne une intuition sur la forme sous laquelle chercher y .

Bien que pour de nombreuses équations, on cherche une paramétrisation sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(t) \frac{x^k}{k!}$, ce n'est pas toujours le cas ; dans [82], les auteurs cherchent des solutions sous une forme de série plus adaptée à l'équation considérée. Dans le chapitre portant sur la publication [16], on cherchera à développer la solution en série entières autour de la frontière libre et non en 0.

On va maintenant démontrer un résultat facile obtenu par platitude qui nous permettra d'illustrer la méthode que nous avons développée pour garantir des contraintes de signe sur l'état ou les contrôles. On s'intéresse aux états stationnaires de (1.12), ils sont donnés par la formule

$$\bar{y}(x) = \bar{y} \in \mathbb{R}.$$

On montre alors,

Proposition 1.4.8. Soient, $y_0 > 0$ et $\bar{y} > 0$ deux états stationnaires. Soit $\sigma \in]1, 2[$. Alors, il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$ il existe une Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$ tel que : la solution y de (1.12) vérifiant $y(0, \cdot) = y_0$ satisfasse $y(T, \cdot) = \bar{y}$ et

$$y(t, \cdot) > 0 \quad t \in [0, T].$$

De plus, y est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x .

Démonstration. Posons :

$$\bar{\alpha}(t) = y_0\theta_\sigma(t) + \bar{y}\theta_\sigma(1-t) \quad t \in \mathbb{R}$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\bar{\alpha}(t) \geq \min(y_0, \bar{y}) =: m > 0$.

On pose à présent $\alpha(t) := \bar{\alpha}\left(\frac{t}{T}\right) \quad t \in [0, T]$.

On définit alors y par le lemme 1.4.2 et u par (1.15). Cela assure la régularité annoncée et que l'on construit bien une solution de (1.12). Il est aisé de vérifier que les conditions initiales et finales désirées sont respectées quelle que soit la valeur de T .

Montrons à présent l'existence de T_0 . On a :

$$\begin{aligned} y(t, x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{(k)}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \bar{\alpha}\left(\frac{t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{\alpha}^{(k)}\left(\frac{t}{T}\right)}{T^k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \geq m + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{\alpha}^{(k)}\left(\frac{t}{T}\right)}{T^k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Soient $M, R > 0$ tels que

$$\|\bar{\alpha}^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M \frac{k!^\sigma}{R^k} \quad k \in \mathbb{N}$$

et donc pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{y}^{(k)}\left(\frac{t}{T}\right)}{T^k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| &\leq M \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!^\sigma}{T^k R^k} \frac{1}{(2k)!} \\ &\leq \frac{M}{T} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!^\sigma}{R^k (2k)!} \right) \underset{T \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

Donc pour T assez grand

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\bar{y}^{(k)}\left(\frac{t}{T}\right)}{T^k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{m}{2} \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$$

et donc

$$y(t, x) \geq \frac{m}{2} > 0 \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1].$$

□

1.5 Plan de la thèse et résumé des contributions

Cette thèse est rédigée par article. Après cette introduction, on trouve trois chapitres qui sont la reproduction intégrales d'articles publiés ou en cours de publication. Ils sont suivis par un chapitre de conclusion et une annexe.

1.5.1 Un système de diffusion croisée

Dans le chapitre 2 qui correspond à la publication [17], on présente des résultats de contrôlabilité pour un système de diffusion croisée. Ce système modélise le processus industriel de dépôt physique par phase vapeur (physical vapor deposition PVD). On se place ici dans le cadre

des articles [6, 15] où ce processus intervient dans la fabrication de panneaux solaires. On démontre des résultats de contrôlabilité d'état stationnaire à état stationnaire tout en préservant des contraintes physiques de signe.

On injecte $n + 1$ espèces chimiques numérotées de 0 à n sous forme de flux gazeux sur une fine plaque de métal où elles se solidifient pour occuper l'épaisseur $[0, e(t)]$. Chaque espèce a à chaque instant t et en tout point x de $[0, e(t)]$ une fraction volumique $u_i(t, x)$. On agit sur le système via les flux $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ de chaque espèce que l'on injecte. De par la nature des objets introduits, on a les conditions physiques suivantes

$$\sum_{k=0}^n u_k = 1, \quad u_k \geq 0 \quad (0 \leq k \leq n) \quad (1.16)$$

et

$$\varphi_k \geq 0 \quad (0 \leq k \leq n). \quad (1.17)$$

La dynamique de l'épaisseur e est donnée par

$$e(t) = e^0 + \int_0^t \left(\sum_{k=0}^n \varphi_k(s) \right) ds \quad (t \geq 0). \quad (1.18)$$

Les flux $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ constituent le contrôle par lequel il est possible d'agir sur le système. En posant

$$u := (u_1, \dots, u_n)^\top \in \mathbb{R}^n \text{ et } \varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

on a les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - A(u) \partial_x^2 u = 0 & t > 0, \quad x \in (0, e(t)), \\ A \partial_x u(t, 0) = 0 & t > 0, \\ A \partial_x u(t, e(t)) + e'(t) u(t, e(t)) = \varphi(t) & t > 0, \\ u(0, x) = u^0(x) & x \in (0, e^0), \end{array} \right. \quad (1.19)$$

avec A une matrice qui dépend de u . Il s'agit d'un système de diffusion croisée, c'est-à-dire un système d'équations paraboliques fortement interconnectées. De tels systèmes apparaissent naturellement dans la modélisation de nombreux systèmes biologiques ou physiques (dynamique des populations, pompes à ions, croissance tumorale, mélange de différentes espèces chimiques...). Le lecteur intéressé pourra se reporter à [54, Chapitre 4]. Pour l'exemple précis du processus PVD, on renvoie le lecteur vers [85]. Dans notre cas, en fonction du choix de A , la dynamique d'une espèce chimique peut impacter plus ou moins fortement les autres.

Dans le cadre de notre étude, on supposera que A est une matrice constante de taille $n \times n$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la contrôlabilité de ce système où l'état est (u, e) (u_0 étant donné par (1.16)) et le contrôle (φ_0, φ) . Concernant le caractère bien posé ou non du système, on pourra se référer à [6], où les auteurs utilisent une méthode d'entropie. Pour plus d'informations sur cette méthode et les systèmes de diffusion croisée, on dirige le lecteur vers [53, 54]. Quant à la contrôlabilité du système, le seul autre résultat à notre connaissance est un résultat de stabilisation obtenu dans [15]. Les auteurs obtiennent un résultat de stabilisation pour un système linéarisé dans lequel A est une matrice constante diagonalisable, ce qui permet de découpler les différentes équations. Ce résultat est obtenu grâce à la méthode de backstepping.

L'ensemble des états stationnaires physiquement pertinents est :

$$\mathcal{S} := \left\{ (\bar{e}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \bar{e} > 0, \quad \bar{u}_k > 0 \quad (1 \leq k \leq n), \quad \sum_{k=1}^n \bar{u}_k \in (0, 1) \right\}. \quad (1.20)$$

Dans [17], on montre les résultats suivants :

Théorème 1.5.1 (Théorème 2.2.1 du chapitre 2). Soient $\sigma \in (1, 2)$, $T > 0$, $(e^0, u^0) \in \mathcal{S}$ et $e^1 > e^0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $u^1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(e^1, u^1) \in \mathcal{S}$ et $|u^0 - u^1| < \varepsilon$, il existe un contrôle $(\varphi_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ Gevrey d'ordre σ vérifiant (1.17) sur $(0, T)$, et une solution (e, u) de (1.18)-(1.19) telle que e est Gevrey d'ordre σ , u est Gevrey d'ordre σ en temps et 1 en espace. De plus, $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times (0, e(t))$ et

$$e(T) = e^1, \quad u(T, \cdot) = u^1.$$

Théorème 1.5.2 (Théorème 2.2.2 du chapitre 2). Soit $\sigma \in (1, 2)$. Considérons $(e^0, u^0), (e^1, u^1) \in \mathcal{S}$ avec

$$e^0 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0 \right) = e^1 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^1 \right). \quad (1.21)$$

Alors il existe $T_0 > 0$ tel que, pour tout $T \geq T_0$, il existe un contrôle $(\varphi_k)_k$ Gevrey d'ordre σ avec $\varphi_0 \equiv 0$ et une solution (e, u) de (1.18)-(1.19) telle que e est Gevrey d'ordre σ , u est Gevrey d'ordre σ en temps et 1 en espace, $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in (0, e(t))$, et

$$e(T) = e^1, \quad u(T, \cdot) = u^1.$$

Théorème 1.5.3 (Théorème 2.2.5 du chapitre 2). Soient $\sigma \in (1, 2)$ et $T > 0$. On considère $(e^0, u^0), (e^1, u^1) \in \mathcal{S}$. Alors il existe un contrôle $(\varphi_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ Gevrey d'ordre σ et une solution (e, u) de (1.18)-(1.19) telle que, e est Gevrey d'ordre σ , u est Gevrey d'ordre σ en temps et 1 en espace, $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, $(t, x) \in [0, T] \times (0, e(t))$ et

$$e(T) = e^1, \quad u(T, \cdot) = u^1.$$

Les preuves de ces théorèmes reposent sur le résultat de platitude suivant :

Proposition 1.5.4. Soient $\sigma \in (1, 2)$ et $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R} . Alors la fonction

$$u(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur \mathbb{R}^2 et satisfait

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2(Au) = 0 & (t > 0, x > 0) \\ A\partial_x u(t, 0) = 0 & (t > 0). \end{cases}$$

Le fait que l'ensemble de nos résultats soient établis entre états stationnaires provient en partie de la difficulté à écrire une solution générale de (1.19) sous la forme donnée par la proposition 1.5.4.

Idée de la preuve du théorème 1.5.1. On pose :

$$\alpha(t) := \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) u^0 + \left(1 - \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \right) u^1 \in \mathbb{R}^n \quad (t \in \mathbb{R})$$

où θ_σ est donnée par le corollaire 1.3.13.

Posons aussi

$$e(t) := \frac{e^1 - e^0}{T} t + e^0 \quad t \in [0, T].$$

On prend alors u donné par la proposition 1.5.4. Il est facile de vérifier que les conditions initiales et finales voulues sont satisfaites. Le couple (e, u) a alors la régularité désirée. On peut ainsi définir :

$$\varphi(t) := A\partial_x u(t, e(t)) + e'(t)u(t, e(t)) \quad \text{et} \quad \varphi_0(t) := e'(t) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(t).$$

Par le théorème 1.3.10 φ et φ_0 sont Gevrey d'ordre σ . Avec ces choix, (e, u) est solution de (1.18)-(1.19) et possède la régularité voulue. En exprimant soigneusement toutes ces quantités en fonction de α et en utilisant une méthode semblable à la preuve de la proposition 1.4.8, on montre que si on prend $|u^0 - u^1|$ assez petit, (e, u) , φ et φ_0 satisfont les conditions de signe désirées. \square

Idée de la preuve du théorème 1.5.2. Comme précédemment, on pose

$$\alpha(t) := \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) u^0 + \left(1 - \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \right) u^1 \in \mathbb{R}^n \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Contrairement au théorème précédent, on ne peut pas fixer e à loisir, car la condition $\varphi_0 = 0$ et (1.18) imposent

$$e'(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \quad t \in [0, T]$$

et φ ne peut donc pas être défini par la condition au bord

$$A\partial_x u(t, e(t)) + e'(t)u(t, e(t)) = \varphi(t) \quad t > 0 \quad (1.22)$$

pour n'importe quel e . On a de ce fait besoin d'informations supplémentaires sur le système. On a le résultat suivant :

Lemme 1.5.5. *Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ vérifiant*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2(Au) = 0 & (t > 0, x > 0) \\ A\partial_x u(t, 0) = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

et soit $u_0 := 1 - \sum_{k=1}^n u_k$. Alors pour e donné, (1.18) et (1.22) sont équivalents à

$$\frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_k(t, x) dx = \varphi_k(t) \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket, t > 0$$

et $e(0) = e^0$.

On en déduit alors :

Corollaire 1.5.6. *Si (e, u) est une solution régulière de (1.18)-(1.19) avec $\varphi_0 \equiv 0$, alors*

$$\int_0^{e(t)} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, x) \right) dx = \int_0^{e^0} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0(x) \right) dx.$$

Ce corollaire montre tout d'abord que la condition imposée à (e^0, u^0) et (e^1, u^1) dans l'énoncé du théorème 1.5.2 est en fait une condition nécessaire.

Définissons à présent u par la proposition 1.5.4. On vérifie facilement que $u(0, \cdot) = u^0$ et $u(T, \cdot) = u^1$. En utilisant des bornes sur les coefficients de u^0 et de u^1 , l'expression de α et en

raisonnant comme pour la proposition 1.4.8, on construit un $r > 0$ explicite tel que :
pour tout $T > 0$ assez grand :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k(t, x) > 0 \text{ et } \sum_{k=1}^n u_k(t, x) < 1 \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [-r, r].$$

De plus, r est tel que la fonction

$$U(t, x) := \int_0^x \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, y) \right) dy$$

vérifie $U(t, 0) = 0$ et $U(t, r) \geq e^0 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0 \right)$. Donc, pour tout $t > 0$, il existe un unique $e(t) \in [0, r]$ tel que

$$\int_0^{e(t)} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, x) \right) dx = e^0 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0 \right).$$

Par la proposition 1.3.9 et le théorème des fonctions implicites pour les fonctions Gevrey 1.3.24, on montre que e est Gevrey d'ordre σ . Par unicité de $e(t)$, $e(0) = e^0$. Enfin, on montre, en utilisant la relation imposée à (e^0, u^0) et (e^1, u^1) que $e(T) = e^1$. On pose alors

$$\varphi_k(t) := \frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_k(t, x) dx \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket, t > 0.$$

On vérifie ensuite que

$$\frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_0(t, x) dx = 0.$$

Donc, par le lemme 1.5.5, (e, u) est une solution de (1.18)-(1.19) satisfaisant les propriétés désirées. \square

Idée de la preuve du théorème 1.5.3. La preuve est similaire à celle du théorème 1.5.1, avec

$$e(t) := e^0 \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} \right) + \varepsilon T^{1/2} \left(\theta_\sigma \left(1 - \frac{3t}{T} \right) - \theta_\sigma \left(3 - \frac{3t}{T} \right) \right) + e^1 \theta_\sigma \left(3 - \frac{3t}{T} \right),$$

avec $\varepsilon \in (0, 1)$ à préciser par la suite, et

$$\alpha(t) := \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} - 1 \right) u^0 + \left(1 - \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} - 1 \right) \right) u^1 \in \mathbb{R}^n \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On définit encore une fois u par la proposition 1.5.4 et φ et φ_0 par (1.22) et (1.18).

L'idée derrière ces choix est de chercher à contrôler indépendamment e et u : en maintenant u constant à u_0 , il est possible d'amener e de e^0 à $L := \varepsilon T^{\frac{1}{2}}$ en temps arbitrairement petit, ici $\frac{T}{3}$. Puis, en raisonnant comme pour la preuve de la proposition 1.4.8, on écrit u sous la forme de $\alpha + O(L)$, avec $\alpha > 0$ et le $O(L)$ tendant vers 0 quand L tend vers 0. En choisissant L et donc ε assez petits et en maintenant $e = L$, il est donc possible de faire passer u de u^0 à u^1 en gardant $u > 0$ en temps arbitrairement petit (à nouveau $\frac{T}{3}$). Enfin, on fait passer e de L à e_1 en temps $\frac{T}{3}$ tout en maintenant u à u^1 . Cette construction est rendue possible par le fait que le choix de φ_0 étant libre, il est possible de choisir u et e à loisir. \square

Remarque 1.5.7. *On peut montrer en se ramenant à l'équation de la chaleur et en appliquant [75, Théorème 2] que lorsque A possède une valeur propre réelle, il existe (e^0, u^0) et (e^1, u^1) tels que la condition $T \geq T_0 > 0$ dans le théorème 1.5.2 est une condition nécessaire pour effectuer le contrôle.*

On va maintenant s'intéresser à l'aspect numérique du problème. Pour illustrer les théorèmes 1.5.2 et 1.5.3, on va approximer u en tronquant la série donnée par la proposition 1.5.4, dont on peut démontrer que les sommes partielles convergent rapidement. Les dérivées successives de α sont obtenues en calculant par récurrence celles de θ_σ , par le procédé décrit dans [84, Annexe A]. Pour calculer e dans le théorème 1.5.2, on utilise le résultat suivant qui est obtenu à partir du corollaire 1.5.6 :

Corollaire 1.5.8. *Si (e, u) est une solution de (1.18)-(1.19) donnée par le théorème 1.5.2, alors e est solution du problème de Cauchy :*

$$e'(t) = \frac{\sum_{k=1}^n (A\partial_x u)_k(t, e(t))}{1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, e(t))} \quad t \in [0, T] \text{ avec } e(0) = e^0.$$

On peut donc utiliser un solveur d'EDO pour obtenir e .

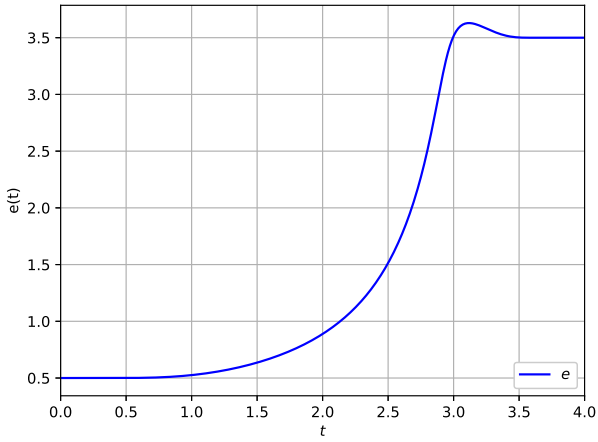
On fait les choix suivants pour A (justifié dans l'article), e^0 , u^0 et u^1 :

$$A := \begin{pmatrix} 3.65 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 1.2 & 6.55 & 0.6 & 0.2 \\ 1.25 & 0.5 & 5.7 & 1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.6 & 6.7 \end{pmatrix}$$

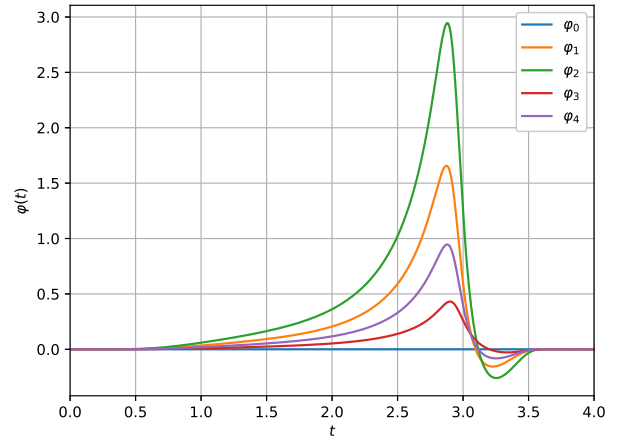
$$e^0 = 1/2, \quad u^0 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u^1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4.5 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Les relations de compatibilité du théorème 1.5.2 imposent

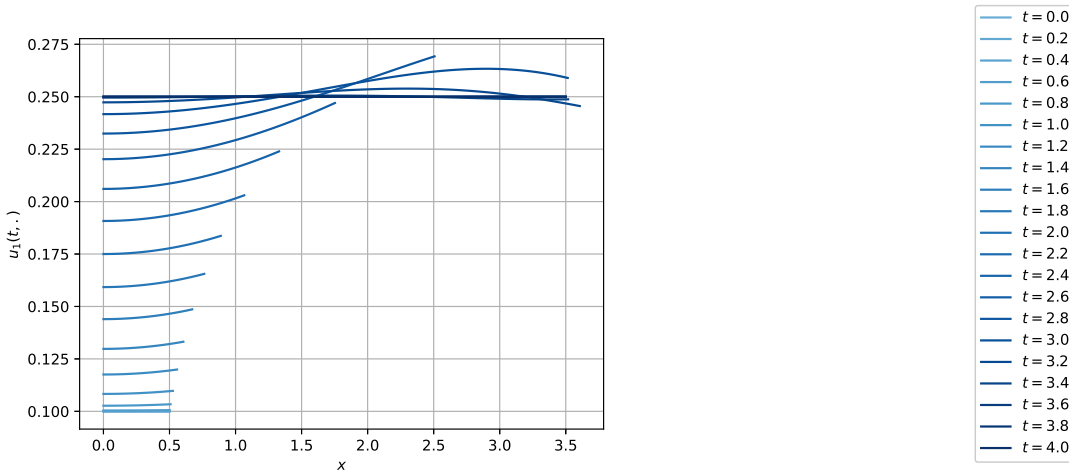
$$e^1 = \frac{7}{2}. \quad (1.24)$$



(a) Graphe de e .



(b) Graphes des contrôles.



(c) Représentation de $u_1(t, \cdot)$ et la légende associée.

FIGURE 1.2 – Simulations numériques avec $T = 4$, $N = 10$ et $\sigma = 2 - \frac{1}{32}$. Les valeurs de e^0 , u^0 et u^1 sont données dans (1.23).

On illustre dans la figure 1.2 le théorème 1.5.2. Le choix de $T = 4$ n'est pas anodin, on observe numériquement que les conditions de signes ne sont pas respectées pour des T plus petits. On va maintenant illustrer dans la figure 1.3 comment, avec le théorème 1.5.3, il est possible d'effectuer le même contrôle en temps petit.

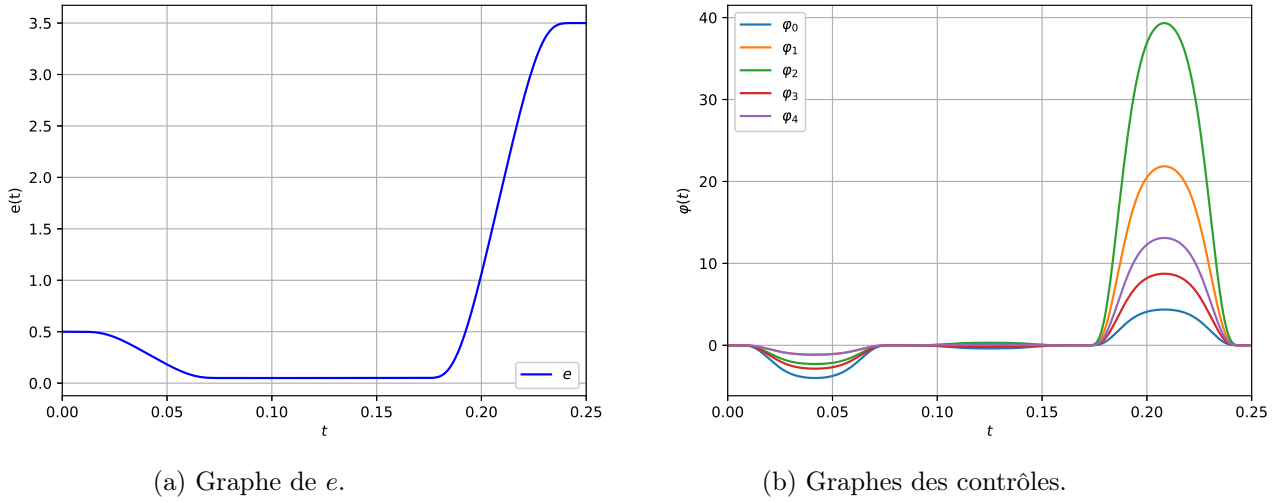


FIGURE 1.3 – Simulations numériques avec $T = 0.25$, $N = 10$, $\varepsilon = 0.1$ (voir la preuve du théorème 1.5.3) et $\sigma = 2 - \frac{1}{32}$. Les valeurs de e^0 , u^0 , e^1 et u^1 sont données en (1.23) et en (1.24).

1.5.2 Un problème de Stefan

Dans le chapitre 3, qui correspond à l'article [16], on s'intéresse à un problème de Stefan à deux phases et on établit des résultats de contrôlabilité vers les états stationnaires, un de ses résultats préservant des contraintes physiques de signe.

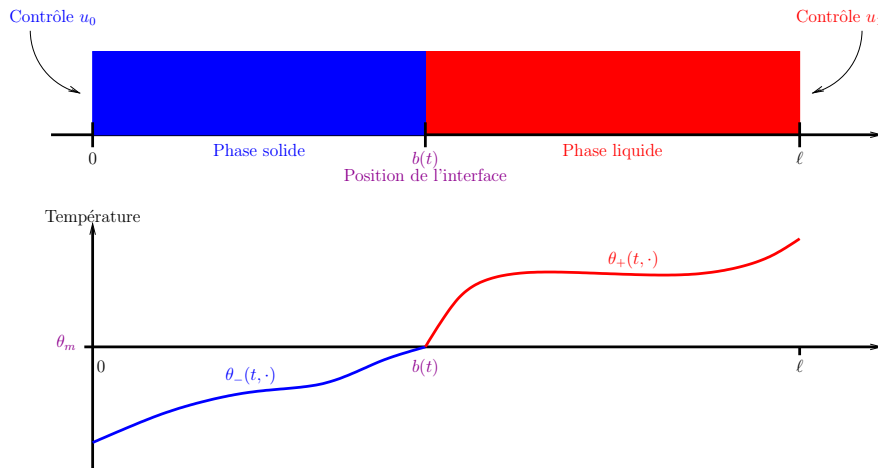


FIGURE 1.4 – Représentation schématique du problème de Stefan à deux phases.

Le problème de Stefan est la modélisation d'un phénomène de transition solide liquide dans un corps pur. On considère le problème à deux phases en une dimension d'espace. On a alors une phase solide à la température $\theta_-(t, x)$, une phase liquide à la température $\theta_+(t, x)$ et l'interface

entre les deux, dont la position $b(t)$ varie au cours du temps (voir la figure 1.4). La température dans chaque phase est régie par une équation de la chaleur tandis que la dynamique de b est donnée par le saut des dérivées normales. Par un changement de variable on peut toujours se ramener au cas où on a un matériau de longueur 1 et de température de fusion 0. De plus, le modèle impose la continuité de la température à l'interface. On a donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \theta_-(t, x) - c_- \partial_x^2 \theta_-(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times (0, b(t)) \\ \theta_-(t, 0) = u_0(t) & t \in (0, T) \\ \theta_-(t, b(t)) = 0 & t \in (0, T) \\ \theta_-(0, \cdot) = \theta_-^0 & x \in (0, b^0) \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} \partial_t \theta_+(t, x) - c_+ \partial_x^2 \theta_+(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times (b(t), 1) \\ \theta_+(t, 1) = u_1(t) & t \in (0, T) \\ \theta_+(t, b(t)) = 0 & t \in (0, T) \\ \theta_+(0, \cdot) = \theta_+^0 & x \in (b^0, 1) \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} \dot{b}(t) = \partial_x \theta_-(t, b(t)) - \partial_x \theta_+(t, b(t)) = 0 & t \in (0, T) \\ b(0) = b^0 \end{cases} \quad (1.27)$$

avec $c_-, c_+ > 0$. Pour satisfaire le modèle physique, on a les contraintes :

$$b(t) \in (0, 1) \quad t \in [0, T] \quad (1.28)$$

$$\theta_-(t, x) > 0 \quad (t, x) \in [0, T] \times (0, b(t)) \quad (1.29)$$

$$\theta_+(t, x) > 0 \quad (t, x) \in [0, T] \times (b(t), 1) \quad (1.30)$$

On cherche donc à contrôler le système dont l'état est (b, θ_-, θ_+) par les biais des contrôles u_0 et u_1 .

Concernant le caractère bien posé du système, on pourra se référer à [42] en dimension n ou à [25] pour le cas particulier de la dimension 1. Concernant la contrôlabilité du système, on pourra se référer à [21],[29] et [30] pour des résultats de contrôlabilité locale à 0 de la température en dimension 1 et 2 pour des domaines étoilés. Dans ces résultats, les auteurs ne cherchent pas à atteindre une cible particulière pour l'interface. Dans [11], les auteurs prouvent la contrôlabilité aux trajectoires pour le problème à une phase, en linéarisant le problème et en utilisant une inégalité de Carleman. Dans [45], les auteurs prouvent la contrôlabilité d'un système linéarisé. Des résultats de contrôlabilité locale sont obtenus dans [46] pour un système similaire au nôtre. On mentionnera aussi [59],[60], et [61] où les auteurs obtiennent des résultats de stabilisation pour le système à une et deux phases par la méthode de backstepping. La platitude différentielle a déjà été appliquée au problème de Stefan dans [23],[24] et [104]. Dans ces trois articles, les auteurs utilisent des séries similaires à celles que nous utilisons et qui sont décrites dans la suite de ce paragraphe, mais obtiennent leur rayon de convergences comme racine d'un certain polynôme, ce qui force ce rayon à être fini. Par conséquent, leurs résultats reposent sur des conditions de petitesse. Dans nos résultats, nous montrons que ce rayon de convergence est infini, ce qui évite toute hypothèse de petitesse. Dans [23], les auteurs s'intéressent à un problème de suivi de trajectoire pour une version du problème de Stefan à une phase, dans lequel l'équation de la chaleur contient un terme non linéaire. Dans cet article, ils étudient attentivement le rayon de convergence mentionné précédemment. Dans [24] et [104], seule la contrôlabilité d'état stationnaire à état stationnaire est mentionnée là où nous traitons des données \mathcal{C}^1 . De plus, les résultats ne garantissent pas les conditions de signes, ce que nous arrivons à faire pour la contrôlabilité

d'état stationnaire à état stationnaire en temps long.

Dans [16], on démontre les résultats suivants,

Théorème 1.5.9 (Théorème 3.2.1 du chapitre 3). *Soient $b^0 \in (0, 1)$, $\theta^0 \in \mathcal{C}^1([0, 1] \setminus \{b^0\}) \cap \mathcal{C}^0([0, 1])$ telle que $\theta^0 \leq 0$ sur $[0, b^0]$, $\theta^0 \geq 0$ sur $[b^0, 1]$, $\theta^0(0) < 0$ et $\theta^0(1) > 0$. Alors, pour tous $T > 0$, $\sigma \in (1, 2)$, $\bar{b} \in (0, 1)$ et $\bar{v} \in \mathbb{R}$, il existe des contrôles u_0, u_1 Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$ tels que la solution (b, θ_-, θ_+) de (1.25)-(1.26)-(1.27) vérifie*

$$\begin{aligned} \theta_-(0, x) &= \theta^0(x) & x \in [0, b^0] & \text{ et } \theta_-(T, x) = \bar{v}(x - \bar{b}) & x \in [0, \bar{b}] \\ \theta_+(0, x) &= \theta^0(x) & x \in [b^0, 1] & \text{ et } \theta_+(T, x) = \bar{v}(x - \bar{b}) & x \in [\bar{b}, 1] \\ b(0) &= b^0 & \text{ et } b(T) &= \bar{b}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, b est Gevrey d'ordre σ sur $[\varepsilon, T]$ et il existe S_- et S_+ des fonctions Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned} \theta_-(t, x) &= S_-(t, x - b(t)) & (t, x) \in [\varepsilon, T] \times [0, b(t)] \\ \theta_+(t, x) &= S_+(t, x - b(t)) & (t, x) \in [\varepsilon, T] \times [b(t), 1] \end{aligned}$$

Si on se restreint à considérer le contrôle du système d'état stationnaire à état stationnaire, on démontre le théorème suivant :

Théorème 1.5.10 (Théorème 3.2.2 du chapitre 3). *Si dans le théorème 1.5.9, on suppose $\bar{v} > 0$ et que l'on prend θ^0 sous la forme*

$$\theta_0(x) = v^0(x - b^0)$$

avec $v_0 > 0$ et $b^0 \in (0, 1)$, alors il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$, les conclusions du théorème 1.5.9 s'appliquent pour $\varepsilon = 0$. De plus, la solution (b, θ_-, θ_+) ainsi obtenue vérifie (1.28), (1.29) et (1.30).

Les preuves de ces théorèmes reposent sur la paramétrisation de l'état sous la forme

$$\theta_-(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_{-,i} \frac{(x - b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_{-,i} \frac{(x - b(t))^{2i}}{(2i)!} \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, b(t)] \quad (1.31)$$

$$\theta_+(t, x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_{+,i} \frac{(x - b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_{+,i} \frac{(x - b(t))^{2i}}{(2i)!} \quad (t, x) \in [0, T] \times [b(t), 1] \quad (1.32)$$

$$b'(t) = \alpha_{-,0} - \alpha_{+,0} \quad t \in [0, T] \quad (1.33)$$

et les coefficients des séries sont donnés par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} \beta_{-,i+1} = \frac{1}{c_-} \beta'_{-,i} - \frac{1}{c_-} b' \alpha_{-,i} \\ \alpha_{-,i+1} = \frac{1}{c_-} \alpha'_{-,i} - \frac{1}{c_-} b' \beta_{-,i+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta_{+,i+1} = \frac{1}{c_+} \beta'_{+,i} - \frac{1}{c_+} b' \alpha_{+,i} \\ \alpha_{+,i+1} = \frac{1}{c_+} \alpha'_{+,i} - \frac{1}{c_+} b' \beta_{+,i+1} \end{cases}$$

avec $\beta_{-,0} = \beta_{+,0} = 0$. Donc, $\alpha_{-,0} = \partial_x \theta_-(t, b(t))$ et $\alpha_{+,0} = \partial_x \theta_+(t, b(t))$ jouent le rôle de sortie plate. Contrairement au cas de (1.12), les coefficients ne s'expriment pas simplement en fonction de $\alpha_{-,0}$ et $\alpha_{+,0}$, on doit ainsi établir des estimations sur les normes de ces coefficients pour garantir que les séries convergent avec un rayon infini. On démontre par récurrence le résultat suivant :

Proposition 1.5.11 (Proposition 3.4.4 du chapitre 3). Soient $\sigma \geq 1, M_f, M_\alpha, M_\beta, R, \chi > 0$. Soit $f \in \mathcal{G}(M_f, R, \sigma)$. On considère les suites $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\alpha_0 \in \mathcal{G}(M_\alpha, R, \sigma), \quad \beta_0 \in \mathcal{G}(M_\beta, R, \sigma)$$

et pour tout $i \geq 0$,

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \chi \beta'_i - \chi f \alpha_i \\ \alpha_{i+1} = \chi \alpha_i - \chi f \beta_{i+1}. \end{cases}$$

Alors, pour tout $\rho > 0$ tel que :

$$\rho \leq \frac{2^{3-\sigma} R}{3} \quad \text{et} \quad \rho \leq \frac{2M_\alpha}{3\chi \left(\frac{M_\beta}{R} + M_\alpha M_f \right) M_f},$$

on a pour tout $i, l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|\alpha_i^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \frac{M_\alpha \chi^i}{R^l \rho^i} \frac{(l+2i)!^\sigma}{i!^{2-\sigma} (2i)!^{\sigma-1}}, \\ \|\beta_{i+1}^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \left(\frac{M_\beta}{R} + M_\alpha M_f \right) \frac{\chi^{i+1}}{R^l \rho^i} \frac{(l+2i+1)!^\sigma}{i!^{2-\sigma} (2i+1)!^{\sigma-1}}. \end{aligned}$$

Si $\beta_0 = 0$, on peut prendre $M_\beta = 0$ dans ce qui précède.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.5.12 (Corollaire 3.4.6 du chapitre 3). Sous les hypothèses de la proposition 1.5.11, si $\sigma < 2$, la fonction

$$S(t, x) := \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i(t) \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i(t) \frac{x^{2i}}{(2i)!} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x et peut être dérivée terme à terme.

Nous pouvons à présent donner une idée des preuves des théorèmes 1.5.9 et 1.5.10.

Idée de la preuve du théorème 1.5.9. On pose :

$$\tilde{u}_0(t) := \theta^0(0) < 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_1(t) := \theta^0(1) > 0.$$

En utilisant [43], on prouve que la solution $(\tilde{b}, \tilde{\theta}_-, \tilde{\theta}_+)$ de (1.25)-(1.26)-(1.27) avec les contrôles précédents peut se mettre sous la forme (1.31)-(1.32)-(1.33) sur $(0, T]$, avec des coefficients $\tilde{\alpha}_{\pm, i}$ et $\tilde{\beta}_{\pm, i}$.

On construit alors en utilisant le corollaire 1.5.12, une solution de (1.25)-(1.26)-(1.27) qui coïncide avec $(\tilde{b}, \tilde{\theta}_-, \tilde{\theta}_+)$ sur $[0, \tau]$ pour un certain $\tau > 0$ et qui atteint la valeur désirée en T . Les contrôles u_0 et u_1 sont alors donnés par les traces de θ_- et θ_+ aux bords. \square

Idée de la preuve du théorème 1.5.10. Posons

$$\alpha(t) := v^0 \theta_\sigma(t) + \bar{v} \theta_\sigma(1-t) \quad t \in \mathbb{R}$$

avec θ_σ donné par le corollaire 1.3.13 et on choisit :

$$\text{si } b^0 \geq \bar{b}, \quad \alpha_{-,0} := \alpha\left(\frac{t}{T}\right), \quad \alpha_{+,0} := \alpha\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{b^0 - \bar{b}}{T} \eta_\sigma\left(\frac{t}{T}\right) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

et

$$\text{si } b^0 < \bar{b}, \quad \alpha_{-,0} := \alpha\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\bar{b} - b^0}{T} \eta_\sigma\left(\frac{t}{T}\right), \quad \alpha_{+,0} := \alpha\left(\frac{t}{T}\right) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Donc

$$b(t) := b^0 + (\bar{b} - b^0) \int_0^{t/T} \eta_\sigma(s) ds,$$

où η_σ est donné par le corollaire 1.3.15.

On définit alors (θ_-, θ_+) par le corollaire 1.5.12. On choisit ensuite, pour u_0 et u_1 les traces de ces fonctions aux bords. On raisonne ensuite, comme pour la proposition 1.4.8, en utilisant proposition 1.5.11, pour montrer que les conditions de signes sont satisfaites si T est assez grand. \square

On va maintenant s'intéresser à l'aspect numérique de l'article. Pour illustrer le théorème 1.5.10 on va calculer des séries tronquées qui ont une convergence rapide. Cependant, contrairement au cas précédent, les coefficients α_i et β_i ne s'obtiennent pas simplement en dérivant la sortie plate, mais par des relations de récurrence plus complexes. Afin de calculer ces coefficients, on a donc recours à du calcul formel. On évalue ensuite les expressions obtenues aux points d'intérêts. Cette méthode est coûteuse, on ne calcule donc qu'un nombre restreint de termes (on va jusque α_7 et β_7). Cependant, grâce à la convergence rapide des séries, on observe une convergence numérique, même avec un petit nombre de termes. On obtient la valeur de $b(t)$ par intégration numérique avec la formule (1.33). Dans les figures 1.5 et 1.6, on illustre le théorème 1.5.10, en traçant l'état et les contrôles.

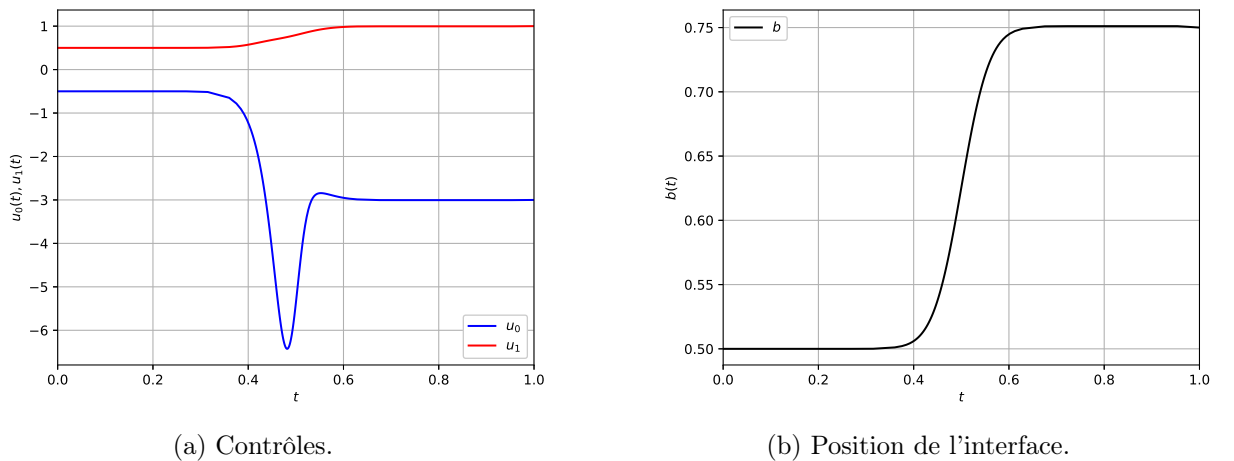


FIGURE 1.5 – Illustration des contrôles et de la position de l'interface dans le théorème 1.5.10 avec $T = 1$, $(b^0, v^0) = (1/2, 1)$, $(\bar{b}, \bar{v}) = (3/4, 4)$, $c_- = c_+ = 1$.

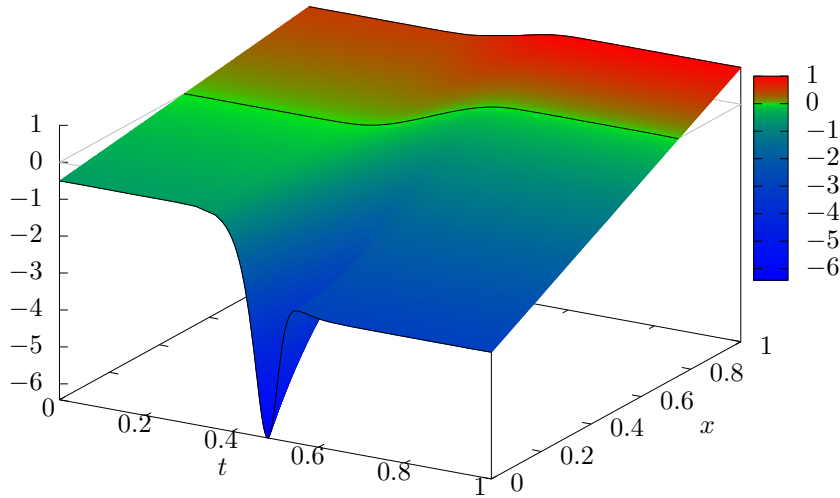


FIGURE 1.6 – Illustration du profil des températures dans le théorème 1.5.10 avec $T = 1$, $(b^0, v^0) = (1/2, 1)$, $(\bar{b}, \bar{v}) = (3/4, 4)$, $c_- = c_+ = 1$.

Dans l'article, on mène quelques investigations numériques sur l'influence des choix de T et σ sur les contrôles.

1.5.3 Un système d'équations de la chaleur en cascade

Dans le chapitre 4, on retrouve des résultats de contrôlabilité pour un système de deux équations de la chaleur en cascade. Ce chapitre porte sur la publication [18].

On considère le système :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_x^2 y_1 = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_t y_2 - \frac{1}{d} \partial_x^2 y_2 = y_1 & \text{in } (0, T) \times (0, 1), \\ y_1(t, 0) = 0, \quad y_1(t, 1) = u(t) & \text{in } (0, T), \\ y_2(t, 0) = y_2(t, 1) = 0 & \text{in } (0, T), \\ y_1(0, \cdot) = y_1^0, \quad y_2(0, \cdot) = y_2^0 & \text{in } (0, 1), \end{cases} \quad (1.34)$$

avec $d > 0$. On cherche à contrôler à 0 ce système de deux équations par le biais de l'unique contrôle u . La question est entièrement résolue dans [4]. En démontrant une inégalité d'observabilité grâce à la méthode des moments pour un problème plus général, les auteurs montrent que :

Théorème 1.5.13. *Théorèmes 6.8 et 6.17 et Proposition 6.20 de [4]*

1. Si $d = 1$, le système (1.34) est contrôlable à 0 pour tout temps $T > 0$, avec $u \in H^{-1}(0, 1)$.
2. Si $d \neq 1$ et $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$, le système (1.34) n'est pas contrôlable dans $H^{-1}(0, 1)$.

3. Si $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, il existe $T_d \in [0, +\infty]$ tel que le système (1.34) est contrôlable à 0 en tout temps $T > T_d$ et non contrôlable en tout temps $T < T_d$, avec $u \in H^{-1}(0, 1)$. De plus, pour tout $\tau \in [0, +\infty]$, il existe $d > 0$ avec $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ tel que $T_d = \tau$.

Les points 1 et 2 du théorème précédent ont été démontrés initialement dans [28]. On pourra aussi se référer à [2, 3, 77] pour plus d'informations sur le système (1.34) et sur les systèmes paraboliques distribués en général.

Le temps minimal est connu explicitement (voir encore [4]), on a, en fait, $T_d = c(\Lambda_d)$, l'indice de condensation de la suite $\Lambda_d := \left\{ \frac{(\pi n)^2}{d}, (\pi n)^2 \right\}_{n \geq 1}$ des valeurs propres de l'opérateur que l'on considère, soit encore :

$$c(\Lambda_d) = \max(l_1, l_2), \quad l_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \left| \sin \left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}} \right) \right|}{\frac{\pi^2 n^2}{d}}, \quad l_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \left| \sin \left(\pi n \sqrt{d} \right) \right|}{\pi^2 n^2}. \quad (1.35)$$

Dans [18], on redémontre les résultats de contrôlabilité précédents lorsque la contrôlabilité est assurée en exploitant la platitude du système, ce qui nous permet de construire explicitement des contrôles de classe Gevrey. On démontre aussi que la contrôlabilité du système d'état stationnaire à état stationnaire est possible pour tout $d > 0$ et en tout temps $T > 0$. On a les résultats suivants :

Théorème 1.5.14 (Théorème 4.2.1 du chapitre 4). *Supposons que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ avec $c(\Lambda_d) < +\infty$. Alors, pour tout $\sigma \in (1, 2)$, $T > c(\Lambda_d)$ et $(y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, 1)$, il existe un contrôle u Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$ tel que la solution (y_1, y_2) de (1.34) est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur $(0, T] \times [0, 1]$ et tel que*

$$y_1(T, \cdot) = y_2(T, \cdot) = 0.$$

Théorème 1.5.15 (Théorème 4.2.2 du chapitre 4). *Supposons que $d = 1$. Alors, pour tout $\sigma \in (1, 2)$, $T > 0$ et $(y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, 1)$, il existe un contrôle u Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$ tel que la solution (y_1, y_2) de (1.34) est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur $(0, T] \times [0, 1]$ et tel que*

$$y_1(T, \cdot) = y_2(T, \cdot) = 0.$$

Il est facile de montrer que les états stationnaires de (1.34) sont de la forme

$$\bar{y}_1(x) = \bar{u}x, \quad \bar{y}_2(x) = \frac{d}{6}\bar{u}(x - x^3) \quad (x \in [0, 1]),$$

avec $\bar{u} \in \mathbb{R}$. On montre alors :

Théorème 1.5.16 (Théorème 4.2.4 du chapitre 4). *Si $d > 0$, pour tous $\sigma \in (1, 2)$, $T > 0$ et tous états stationnaires $(\bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_2^{(1)})$ et $(\bar{y}_1^{(2)}, \bar{y}_2^{(2)})$, il existe un contrôle u Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$ tel que la solution (y_1, y_2) de (1.34) est Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x sur $[0, T] \times [0, 1]$ et tel que*

$$y_1(0, \cdot) = \bar{y}_1^{(1)}, \quad y_2(0, \cdot) = \bar{y}_2^{(1)}$$

et

$$y_1(T, \cdot) = \bar{y}_1^{(2)}, \quad y_2(T, \cdot) = \bar{y}_2^{(2)}.$$

Ces résultats reposent sur la platitude du système :

Proposition 1.5.17. Soient $\sigma \in (1, 2)$, $T > 0$, $d > 0$ et a et b des fonctions Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$. Alors les fonctions (y_1, y_2) définies par

$$\begin{aligned} y_1(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & y_2(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(d^k b^{(k)}(t) - d \frac{d^k - 1}{d-1} a^{(k-1)}(t) \right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & \text{si } d \neq 1, \\ y_1(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & y_2(t, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(b^{(k)}(t) - k a^{(k-1)}(t) \right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & \text{si } d = 1, \end{aligned}$$

sont bien définies, Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x et vérifient

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_x^2 y_1 = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_t y_2 - \frac{1}{d} \partial_x^2 y_2 = y_1 & \text{dans } (0, T) \times (0, 1), \\ y_1(t, 0) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y_2(t, 0) = 0 \end{cases}$$

Dans le résultat précédent, il reste à prendre en compte la condition au bord $y_2(t, 1) = 0$. On a donc besoin du lemme suivant :

Lemme 1.5.18. Si dans la proposition 1.5.17, on prend a et b définies par

$$a(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{(2m+1)!} f^{(m)}(t), \quad b(t) = \sum_{m=1}^{\infty} d \frac{d^m - 1}{d-1} \frac{f^{(m-1)}(t)}{(2m+1)!} \quad \text{si } d \neq 1$$

et

$$a(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m+1)!}, \quad b(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{f^{(m-1)}(t)}{(2m+1)!} \quad \text{si } d = 1,$$

alors y_2 vérifie

$$y_2(t, 1) = 0 \quad t \in [0, T].$$

Remarque 1.5.19. L'intuition derrière le lemme précédent est détaillée dans [18]. Elle repose sur la réécriture de la condition au bord par la transformée de Laplace.

Les preuves des théorèmes 1.5.14 et 1.5.15 étant très similaires, nous ne donnons l'idée que pour le premier.

Idée de la preuve du théorème 1.5.14. En utilisant la proposition 1.5.17 et le lemme 1.5.18, on va construire une solution (y_1, y_2) de (1.34) nulle en $t = 0$ et qui intercepte la solution libre $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ (avec $u = 0$) du système pour les conditions initiales (y_1^0, y_2^0) . Notre solution sera alors la différence entre ces deux autres. Comme d'habitude, le contrôle u sera donné par la trace de la solution au bord.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_{1,n} = \frac{(\pi n)^2}{d}$ et $\lambda_{2,n} = (\pi n)^2$. Ce sont les valeurs propres de notre opérateur. En utilisant la décomposition de (y_1^0, y_2^0) dans la "base hilbertienne" des $\sin(n\pi x)$ et en raisonnant comme pour la preuve du théorème 1.4.3, on décompose pour tout $t > 0$, la solution libre sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t, x) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 1} (-1)^k \alpha_{2,n} (n\pi)^{2k+1} e^{-\lambda_{2,n} t} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \tilde{y}_2(t, x) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 1} (-1)^k (n\pi)^{2k+1} \left[\alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n} t} + \frac{d}{(1-d)(n\pi)^2} \alpha_{2,n} e^{-\lambda_{2,n} t} \right] \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on se rend compte que l'on veut construire a et b de la proposition 1.5.17 de manière à avoir au voisinage de T ,

$$\begin{aligned} a^{(k)}(t) &= \sum_{n \geq 1} (-1)^k \alpha_{2,n} (n\pi)^{2k+1} e^{-\lambda_{2,n}t}, \\ b^{(k)}(t) &= \sum_{n \geq 1} \left[(n\pi) (-\lambda_{1,n})^k \alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \frac{d}{(1-d)n\pi} \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t} \right]. \end{aligned}$$

Cela revient à chercher f , du lemme 1.5.18, telle qu'au voisinage de T , elle coïncide avec une fonction \tilde{f} vérifiant :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{(2m+1)!} \tilde{f}^{(m+k)}(t) &= \sum_{n \geq 1} (n\pi) \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} d \frac{d^m - 1}{d-1} \frac{\tilde{f}^{(m+k-1)}(t)}{(2m+1)!} &= \sum_{n \geq 1} \left[(n\pi) (-\lambda_{1,n})^k \alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \frac{d}{(1-d)n\pi} \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t} \right]. \end{aligned}$$

Ces formules nous incitent à chercher \tilde{f} sous la forme :

$$\tilde{f}(t) := \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} e^{-\lambda_{2,n}t}.$$

En injectant ces formules dans les équations caractérisant \tilde{f} et en inversant les sommes, on trouve

$$\beta_{1,n} := \alpha_{1,n} \frac{\pi^4 n^4 (d-1)}{d^{5/2} \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right)}, \quad \beta_{2,n} := \alpha_{2,n} \frac{\pi^2 n^2 \sqrt{d}}{\sin(\pi n \sqrt{d})}.$$

En utilisant (1.35), on montre que l'on obtient ainsi des séries normalement convergentes pour tout $t > c(\Lambda_d)$. Pour garantir la valeur 0 en 0 et la convergence pour $0 \leq t \leq c(\Lambda_d)$, on choisit T_0 tel que $c(\Lambda_d) < T_0 < T$ et on pose

$$f(t) = \theta_\sigma \left(1 - \frac{t - T_0}{T - T_0} \right).$$

On vérifie que ce choix fonctionne. □

Idée de la preuve du théorème 1.5.16. On vérifie que prendre

$$f(t) := \left(\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)} \right) \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) + \bar{u}^{(1)},$$

dans le lemme 1.5.18, convient. □

1.5.4 Conclusion et annexes

Dans le chapitre 5 on proposera une approche pour essayer de généraliser les arguments du chapitre précédent à n équations de la chaleur en cascade. On donne ensuite une conclusion générale à ce travail. La conclusion est suivie d'appendices démontrant des résultats utilisés dans ce travail, et d'un appendice où l'on construit une famille bi-orthogonale de fonctions Gevrey résultat intéressant mais qui ne trouvait pas sa place dans le corps de cette thèse.

1.6 Notations

1.6.1 Ensembles

- On note classiquement les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et \mathbb{C} . Si rien n'est précisé, \mathbb{K} désigne indifféremment \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans \mathbb{K} . On note

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

- Si E et F sont des espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F , si $k \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{L}^k(E, F)$ l'espace des applications k -linéaires continues de E dans F .
- On désigne par $\llbracket p, q \rrbracket$ où $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q$, l'ensemble $\{p, p+1, \dots, q\}$.
- Si X est un espace mesuré, on note classiquement, $L^p(X)$ l'ensemble des fonctions dont la puissance p est intégrable sur X .
- Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $H^m(U)$ l'espace de Sobolev des fonctions qui ont m dérivées dans $L^2(U)$. On désigne par $H_0^1(U)$ l'adhérence des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact sur U . Enfin, on désigne par $H^{-1}(U)$ le dual topologique de $H_0^1(U)$.

1.6.2 Normes

- $|\cdot|$ désigne classiquement la valeur absolue sur \mathbb{R} et le module sur \mathbb{C} . Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est utilisé comme un multi-indice on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Dans certains cas que l'on précisera cela pourra désigner une autre norme.

- Si $p \geq 1$ $\|\cdot\|_p$, désigne la norme p classique sur \mathbb{K}^n , à savoir

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie, à savoir

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|.$$

- Sur $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, on note $\|\cdot\|_{k,\infty}$ la norme

$$\forall L \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|L\|_{k,\infty} = \sup_{\|v_1\|_\infty \leq 1, \dots, \|v_k\|_\infty \leq 1} \|L(v_1, \dots, v_k)\|_\infty$$

1.6.3 Calcul différentiel

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction différentiable en $x \in U$, df_x la différentielle de f en x et pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note

$$D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f.$$

On notera parfois $\dot{f} = \partial_t f$ et on utilise aussi les notations classiques f' et $f^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$, pour les fonctions d'une variable.

1.6.4 Autre

Si $i, j \in \mathbb{N}$, on note $\delta_{i,j}$ l'application delta de Kronecker i.e,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Controllability results for a cross diffusion system with a free boundary by a flatness approach

Ce chapitre fait l'objet de la publication [17] co-écrite avec Jérôme Lohéac et Takéo Takahashi.

Sommaire

2.1	Abstract	43
2.2	Introduction and statement of our results	44
2.3	Preliminaries and the flatness method	47
2.3.1	Property of the system (2.4)	47
2.3.2	The flatness approach	48
2.4	Proof of the main results	49
2.4.1	Proof of Theorem 2.2.1	49
2.4.2	Proof of Theorem 2.2.2	51
2.4.3	Proof of Proposition 2.2.4	53
2.4.4	Proof of Theorem 2.2.5	54
2.5	Numerical illustrations	55
2.5.1	Illustrations for Theorem 2.2.2.	56
2.5.2	Illustration of Theorem 2.2.5	56

2.1 Abstract

We study a one-dimensional cross diffusion system with a free boundary modeling the Physical Vapor Deposition. Using the flatness approach, we show several results of boundary controllability for this system in spaces of Gevrey class functions. One of the main difficulties consists in the physical constraints on the state and on the control. More precisely, the state corresponds to volume fractions of the $n + 1$ chemical species and to the thickness of the film produced in the process, whereas the controls are the fluxes of the chemical species. We obtain the local controllability in the case where we apply $n + 1$ nonnegative controls and a controllability result for large time in the case where we apply n controls without any sign constraints. We also show

in this last case that the controllability may fail for small times. We illustrate these results with some numerical simulations.

2.2 Introduction and statement of our results

We consider controllability properties of a cross diffusion system with moving boundaries that can model the Physical Vapor Deposition (PVD) process involved in the fabrication of solar panels. Over a substrate, $n + 1$ chemical species are introduced in gaseous state and solidify to generate a film occupying a domain of the form $(0, e(t))$ at time $t \geq 0$. We follow here the model considered in [6, 15]. For more information about the physical process, we refer to [85].

We denote by u_k the volume fraction of the species $k \in \{0, \dots, n\}$ and by φ_k its flux. The physical conditions on these quantities are

$$\sum_{k=0}^n u_k = 1, \quad u_k \geq 0 \quad (0 \leq k \leq n) \quad (2.1)$$

and

$$\varphi_k \geq 0 \quad (0 \leq k \leq n). \quad (2.2)$$

We have denoted by $e(t) > 0$ the thickness of the film at time t and its relation with the fluxes is

$$e(t) = e^0 + \int_0^t \sum_{k=0}^n \varphi_k(s) ds \quad (t \geq 0). \quad (2.3)$$

In what follows, the state variables of the system are e and

$$u := (u_1, \dots, u_n)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

since u_0 can be obtained from u with the relation (2.1). We also set

$$\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Then the model considered here is (see [15])

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - A \partial_x^2 u = 0 & t > 0, \quad x \in (0, e(t)), \\ A \partial_x u(t, 0) = 0 & t > 0, \\ A \partial_x u(t, e(t)) + e'(t) u(t, e(t)) = \varphi(t) & t > 0, \\ u(0, x) = u^0(x) & x \in (0, e^0). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

To be more precise in the model considered in [6], the matrix $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ can depend on u . Here we assume that A is independent of u , and invertible :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}). \quad (2.5)$$

The existence of solutions to the above system has been proven under some particular conditions on the function $A(u)$ that give a gradient flow structure to (2.4) and permit to use the boundedness by entropy technique (see [10, 53]). For an introduction to this method and to general cross diffusion systems, one can refer to the book [54]. One can see (2.3)–(2.4) as a controlled system where the state is (e, u) and the controls are the fluxes φ_k . To our knowledge, the only work dealing with the controllability of the above system is [15] where the authors show the finite-time

stabilization of the linearized system around some equilibrium states. Their result is based on the backstepping method.

In our work, we use a different approach to control the system : the differential flatness. This method, which comes from the finite-dimensional framework, has been successfully applied to several partial differential equations : the heat equation [81, 83], general parabolic equations [82], the Schrödinger equation [84], the linear Korteweg–de Vries equation [80] and a class of semilinear heat equations [70]. The authors of the present paper have used this method to show some controllability properties of another free boundary model, the Stefan problem, in [16].

As for the Stefan problem, the difficulties to handle (2.3)–(2.4) are the free-boundary and the physical restrictions that impose bounds on the solutions or on the controls. Here we want to use the controls φ_k to pass from a stationary state to another with the restrictions (2.1) and (2.2). With these two constraints, we obtain a local controllability result (theorem 2.2.1). To go further, we also investigate the problem where (2.1) is satisfied and where there is no sign constraints on the controls (theorems 2.2.2 and 2.2.5). The set of “physically reasonable” stationary states of (2.3)–(2.4) is

$$\mathcal{S} := \left\{ (\bar{e}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \bar{e} > 0, \quad \bar{u}_k > 0 \ (1 \leq k \leq n), \quad \sum_{k=1}^n \bar{u}_k \in (0, 1) \right\}. \quad (2.6)$$

In order to state our mains results, we first recall the notion of Gevrey functions. A function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a Gevrey function of order $\sigma \geq 1$ if it is C^∞ and if for any compact subset K of \mathbb{R} , there exist $M, R \in \mathbb{R}_+^*$ such that its derivatives satisfy

$$\left| f^{(\ell)}(t) \right| \leq M \frac{\ell!^\sigma}{R^\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}, t \in K).$$

Similarly, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a Gevrey function of order (σ_1, σ_2) if it is C^∞ and if for any compact subset K of \mathbb{R}^2 , there exist $M, R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+^*$ such that

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^k g(t, x) \right| \leq M \frac{\ell!^{\sigma_1} k!^{\sigma_2}}{R_1^\ell R_2^k} \quad (\ell, k \in \mathbb{N}, (t, x) \in K).$$

These definitions can be extended to vector-valued functions. The interest for such functions is due to the fact that for any $\sigma > 1$, the function

$$\theta_\sigma(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0, \\ \frac{e^{-((1-t)^{-c_\sigma})}}{e^{-((1-t)^{-c_\sigma})} + e^{-(t^{-c_\sigma})}} & \text{if } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{if } t \geq 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

with $c_\sigma = (\sigma - 1)^{-1}$ is a Gevrey function of order σ (see, for instance [23, Appendix B]). More precisely one can show the existence of $M, R > 0$ such that

$$\left| \theta_\sigma^{(i)}(t) \right| \leq M \frac{(i!)^\sigma}{R^i} \quad (i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}). \quad (2.8)$$

For more information on the Gevrey functions, we can refer for instance to [99, 102, 114].

We are now in position to give the main results of this paper. The first main result states as follows :

Theorem 2.2.1. Assume (2.5), $\sigma \in (1, 2)$, $T > 0$ and $(e^0, u^0) \in \mathcal{S}$. Let us consider $(e^1, u^1) \in \mathcal{S}$ and assume that $e^1 > e^0 > 0$. There exists $\varepsilon > 0$ such that if

$$|u^0 - u^1| \leq \varepsilon, \quad (2.9)$$

then there exist a control $(\varphi_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ Gevrey of order σ satisfying (2.2) in $(0, T)$, and a solution (e, u) of (2.3)–(2.4) such that e is Gevrey of order σ , u is Gevrey of order σ in time and 1 in space, $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, for every $t \in [0, T]$ and $x \in (0, e(t))$ and

$$e(T) = e^1, \quad u(T, \cdot) = u^1.$$

In the case where we do not consider the condition (2.2), we can control globally the system (2.3)–(2.4). First we consider the case where $\varphi_0 \equiv 0$, that is we have only n scalar controls $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ acting on (2.3)–(2.4). Our second main result is stated below :

Theorem 2.2.2. Assume (2.5) and $\sigma \in (1, 2)$. Let us consider $(e^0, u^0), (e^1, u^1) \in \mathcal{S}$ with

$$e^0 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0 \right) = e^1 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^1 \right). \quad (2.10)$$

Then there exists $T_0 > 0$ such that for any $T \geq T_0$, there exist a control $(\varphi_k)_k$ Gevrey of order σ with $\varphi_0 \equiv 0$ and a solution (e, u) of (2.3)–(2.4) such that e is Gevrey of order σ , u is Gevrey of order σ in time and 1 in space, $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, for every $t \in [0, T]$ and $x \in (0, e(t))$, and

$$e(T) = e^1, \quad u(T, \cdot) = u^1.$$

Remark 2.2.3. The compatibility condition (2.10) is necessary if $\varphi_0 \equiv 0$ and it will be justified by the corollary 2.3.2.

To complete theorem 2.2.2, we show that for $\varphi_0 \equiv 0$, there are cases where the problem is not controllable for small times $T > 0$:

Proposition 2.2.4. Assume (2.5) and that A has a real eigenvalue. Then, there exist $(e^0, u^0), (e^1, u^1) \in \mathcal{S}$ satisfying (2.10) and $T_0 > 0$ such that if there exist a control $(\varphi_k)_k$ with $\varphi_0 \equiv 0$ and a solution (e, u) of (2.3)–(2.4) such that $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, for every $t \in [0, T]$ and $x \in (0, e(t))$ and

$$e(T) = e^1, \quad u(T, \cdot) = u^1,$$

then

$$T \geq T_0.$$

In the case where we use the $n + 1$ controls and where we do not consider the condition (2.2), then the system is controllable for any time $T > 0$:

Theorem 2.2.5. Assume (2.5), $\sigma \in (1, 2)$ and $T > 0$. Let us consider $(e^0, u^0), (e^1, u^1) \in \mathcal{S}$. Then there exist a control $(\varphi_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$ Gevrey of order σ and a solution (e, u) of (2.3)–(2.4) such that e is Gevrey of order σ , u is Gevrey of order σ in time and 1 in space, $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, $t \in [0, T]$ and $x \in (0, e(t))$ and

$$e(T) = e^1, \quad u(T, \cdot) = u^1.$$

The outline of the paper is the following : in Section 2.3, we give some preliminary results and recall the flatness method that we use in our main results. Then we show these main results in Section 2.4. Finally, we present some numerical illustrations of our results in Section 2.5.

2.3 Preliminaries and the flatness method

2.3.1 Property of the system (2.4)

One of the difficulties to deal with our system is the boundary condition in (2.4) :

$$A\partial_x u(t, e(t)) + e'(t)u(t, e(t)) = \varphi(t) \quad (t > 0). \quad (2.11)$$

We show that condition (2.11) can be written in different and more convenient ways :

Lemma 2.3.1. *Assume $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ satisfies*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2(Au) = 0 & (t > 0, x > 0), \\ A\partial_x u(t, 0) = 0 & (t > 0), \end{cases} \quad (2.12)$$

and let set $u_0 := 1 - \sum_{k=1}^n u_k$. Then (2.3), (2.11) are equivalent to

$$\frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_k(t, x) dx = \varphi_k(t) \quad (0 \leq k \leq n, t > 0), \quad e(0) = e^0. \quad (2.13)$$

Proof. Using (2.12), we have that for $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_k(t, x) dx &= \int_0^{e(t)} \partial_t u_k(t, x) dx + e'(t)u_k(t, e(t)) \\ &= \partial_x[Au(t, e(t))]_k + e'(t)u_k(t, e(t)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_0(t, x) dx &= \frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, x) \right) dx \\ &= e'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_k(t, x) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

We can now show the equivalence : if (2.13) holds, then (2.14) yields (2.11) and (2.15) yields

$$e'(t) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \quad (2.16)$$

which, combined with $e(0) = e^0$, implies (2.3). Conversely, (2.3) implies $e(0) = e^0$ and (2.16). Then (2.14) and (2.11) yield

$$\frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_k(t, x) dx = \varphi_k(t)$$

for $k \in \{1, \dots, n\}$ and the case $k = 0$ is obtained from (2.16) and from (2.15). \square

We deduce the following compatibility conditions for the reachable states if $\varphi_0 \equiv 0$:

Corollary 2.3.2. *Assume (e, u) is a smooth solution of (2.3)–(2.4) with $\varphi_0 \equiv 0$. Then for any $t > 0$,*

$$\int_0^{e(t)} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, x) \right) dx = \int_0^{e^0} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0(x) \right) dx. \quad (2.17)$$

Remark 2.3.3. This result justifies the condition (2.10) between the initial and the final conditions in theorem 2.2.2. Moreover, it can be used to obtain a numerical algorithm in the case where $\varphi_0 \equiv 0$. This corresponds to the result below.

Corollary 2.3.4. Assume (e, u) is a smooth solution of (2.3)–(2.4) in $[0, T]$, with $\varphi_0 \equiv 0$ and such that $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, for every $t \in [0, T]$ and $x \in [0, e(t)]$. Then for any $t > 0$, e is the solution of the Cauchy problem

$$e'(t) = \frac{\sum_{k=1}^n (A\partial_x u)_k(t, e(t))}{1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, e(t))} \quad (t \in [0, T]), \quad e(0) = e^0. \quad (2.18)$$

Proof. Differentiating (2.17) with respect to time, we obtain that

$$e'(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, e(t)) \right) = \int_0^{e(t)} \sum_{k=1}^n \partial_t u_k(t, x) \, dx.$$

Then using the first two equations of (2.4), we deduce that

$$e'(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, e(t)) \right) = \sum_{k=1}^n (A\partial_x u)_k(t, e(t)).$$

Using that

$$\sum_{k=1}^n u_k(t, e(t)) \in (0, 1),$$

we deduce the result. \square

Remark 2.3.5. The above result allows us to solve numerically (2.3)–(2.4) if $\varphi_0 \equiv 0$. By the flatness method described in the next section, we obtain a smooth solution of (2.12) that can be approximated through a truncation. Then, we can solve (2.18) by a standard numerical method, provided that $\sum_{k=1}^n u_k < 1$. Note that, with this condition, the Cauchy problem (2.18) admits a unique local solution thanks to the Cauchy-Lipschitz theorem. In the proof of theorem 2.2.2, we use directly corollary 2.3.2 instead of corollary 2.3.4 to obtain the existence and uniqueness of e .

2.3.2 The flatness approach

theorems 2.2.1, 2.2.2 and 2.2.5 are based on the flatness approach. This strategy was introduced in [81] for the heat equation, and we follow here the same strategy by searching the solution u of (2.4) in the form

$$u(t, x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \quad ((t, x) \in \mathbb{R}^2), \quad (2.19)$$

where $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is Gevrey of order $\sigma \in (1, 2)$, i.e., there exist $M_1, R_1 > 0$ such that

$$\left| \alpha^{(i)}(t) \right| \leq M_1 \frac{(i!)^\sigma}{R_1^i} \quad (i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}). \quad (2.20)$$

Here and in what follows, we use the notation $|\cdot|$ for the maximum norm of \mathbb{R}^n . Formally, we see that for all (t, x) , we have the following relations

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) - A \partial_x^2 u(t, x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} A^{-i} \alpha^{(i+1)}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i-2}}{(2i-2)!} A^{-(i-1)} \alpha^{(i)}(t) = 0, \\ \partial_x u(t, 0) &= 0. \end{aligned}$$

To justify the above property, we need to show that u given by (2.19), with α given later by (2.38), is well-defined and is a Gevrey function. First, we set

$$f_i(t, x) := \frac{x^{2i}}{(2i)!} A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \quad ((t, x) \in \mathbb{R}^2, i \in \mathbb{N}).$$

If $2i < k$, then $\partial_t^\ell \partial_x^k f_i \equiv 0$, and if $2i \geq k$, then (2.20) yields

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^k f_i(t, x) \right| \leq M_1 \frac{((\ell + i)!)^\sigma}{R_1^{\ell+i}} \|A^{-1}\|^i \frac{|x|^{2i-k}}{(2i-k)!}, \quad (2.21)$$

where here $\|\cdot\|$ denotes the matrix norm induced by the maximum norm in \mathbb{R}^n . Using that $(\ell + i)! \leq 2^{\ell+i} \ell! i!$ and the Stirling formula, we deduce that u given by (2.19), with α satisfying (2.20), is well-defined. Furthermore, for every $r > 0$, there exist $M > 0$ such that

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^k u(t, x) \right| \leq M \frac{(\ell!)^\sigma}{(R_1/2^\sigma)^\ell} \frac{k!}{r^k} \quad (\ell, k \in \mathbb{N}, t > 0, |x| \leq r).$$

We have thus obtained the following result :

Proposition 2.3.6. *Assume α satisfies (2.20). Then u given by (2.19) is Gevrey of class σ in time and 1 in space and is a solution of (2.12).*

2.4 Proof of the main results

2.4.1 Proof of Theorem 2.2.1

We consider u given by (2.19) with α given by

$$\alpha(t) := \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) u^0 + \left(1 - \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \right) u^1 \in \mathbb{R}^n \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (2.22)$$

where θ_σ is defined by (2.7). We also set

$$e(t) := \frac{e^1 - e^0}{T} t + e^0 \quad (t \in [0, T]). \quad (2.23)$$

In particular,

$$e'(t) = \frac{e^1 - e^0}{T} > 0 \quad \text{and} \quad e^0 \leq e(t) \leq e^1 \quad (t \in [0, T]).$$

Applying proposition 2.3.6, we deduce the regularity of (e, u) and that (2.3)–(2.4) hold with the controls given by

$$\varphi(t) := A \partial_x u(t, e(t)) + e'(t) u(t, e(t)) \quad \text{and} \quad \varphi_0(t) := e'(t) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \quad (t > 0). \quad (2.24)$$

Moreover, using the properties (2.7) of θ_σ , we also have

$$u(t, x) = u^0 \quad \text{if } t \leq 0, \quad u(t, x) = u^1 \quad \text{if } t \geq T. \quad (2.25)$$

There exists $d \in (0, 1)$ such that

$$d \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k^0 \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n u_k^0 \leq 1 - d. \quad (2.26)$$

Taking $\varepsilon \leq d/2$ in (2.9), we deduce from the above estimates and from (2.22) that

$$\frac{d}{2} \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \alpha_k \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq 1 - \frac{d}{2} \quad \text{in } (0, T). \quad (2.27)$$

Now, we can write

$$\sum_{k=1}^n u_k(t, x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \sum_{k=1}^n \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \quad (2.28)$$

and

$$u_k(t, x) = \alpha_k(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.29)$$

Using (2.8) and (2.9), we have

$$\left| \alpha^{(i)}(t) \right| \leq \varepsilon M \frac{(i!)^\sigma}{(RT)^i} \quad (i \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{R}) \quad (2.30)$$

and thus

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \right| \leq M \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\|A^{-1}\| (e^1)^2}{RT} \right)^i \frac{(i!)^\sigma}{(2i)!} \quad (t \in [0, T], x \in [0, e(t)]). \quad (2.31)$$

Taking ε small enough, we deduce that

$$\frac{d}{4} \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k(t, x) \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n u_k(t, x) \leq 1 - \frac{d}{4} \quad (t \in [0, T], x \in [0, e(t)]). \quad (2.32)$$

Finally, from (2.24) and (2.29), we have

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= e'(t) \alpha_k(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e(t)^{2i-1}}{(2i-1)!} \left[A^{-(i-1)} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \\ &\quad + e'(t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e(t)^{2i}}{(2i)!} \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \quad (t > 0, 1 \leq k \leq n) \end{aligned} \quad (2.33)$$

and

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = e'(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e(t)^{2i-1}}{(2i-1)!} \sum_{k=1}^n \left[A^{-(i-1)} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \\ - e'(t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e(t)^{2i}}{(2i)!} \sum_{k=1}^n \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

The relations in (2.23) and (2.27) yield

$$e'(t) \alpha_k(t) \geq \frac{e^1 - e^0}{T} \frac{d}{2} > 0, \quad e'(t) \left(1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \right) \geq \frac{e^1 - e^0}{T} \frac{d}{2} > 0 \quad (t \in [0, T]). \quad (2.35)$$

On the other hand, for any $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e(t)^{2i-1}}{(2i-1)!} \left[A^{-(i-1)} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \right| \leq M\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|A^{-1}\|^{i-1} (e^1)^{2i-1}}{(RT)^i} \frac{(i!)^\sigma}{(2i-1)!} \quad (t \in [0, T]) \quad (2.36)$$

and

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e(t)^{2i}}{(2i)!} \left[A^{-i} \alpha^{(i)} \right]_k(t) \right| \leq M\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\|A^{-1}\| (e^1)^2}{RT} \right)^i \frac{(i!)^\sigma}{(2i)!} \quad (t \in [0, T]). \quad (2.37)$$

Taking ε small enough, and combining (2.33)–(2.37), we deduce (2.2) in $(0, T)$.

This concludes the proof of theorem 2.2.1. \square

2.4.2 Proof of Theorem 2.2.2

We consider u given by (2.19) with α defined through the function θ_σ given in (2.7) :

$$\alpha(t) := \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) u^0 + \left(1 - \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \right) u^1 \in \mathbb{R}^n \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2.38)$$

Using (2.8), we have

$$\left| \alpha^{(i)}(t) \right| \leq M_1 \frac{(i!)^\sigma}{(RT)^i} \quad (i \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{R}) \quad (2.39)$$

Applying proposition 2.3.6, we deduce the regularity of u , and that it satisfies (2.12), and

$$u(0, x) = u^0, \quad u(T, x) = u^1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Note that we have for $(t, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{k=1}^n u_k(t, x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \sum_{k=1}^n \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \quad (2.40)$$

and

$$u_k(t, x) = \alpha_k(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.41)$$

From (2.39), we deduce that if $|x| \leq r$ and $T \geq 1$, then

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \right| \leq \frac{f(r)}{T}, \quad \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \sum_{k=1}^n \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \right| \leq \frac{nf(r)}{T}, \quad (2.42)$$

where

$$f(r) := M_1 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{r^2 \|A^{-1}\|}{R} \right)^i \frac{(i!)^\sigma}{(2i)!} < \infty. \quad (2.43)$$

Now, let us consider $d \in (0, 1)$ such that

$$d \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k^0, \quad \sum_{k=1}^n u_k^0 \leq 1 - d, \quad d \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k^1, \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n u_k^1 \leq 1 - d, \quad (2.44)$$

Then, the above relations and (2.38) yield

$$d \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \alpha_k \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq 1 - d. \quad (2.45)$$

We then set

$$r := \frac{2}{d} e^0 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0 \right) > 0 \quad (2.46)$$

and we consider $T \geq 1$ such that

$$\frac{nf(r)}{T} \leq \frac{d}{2}.$$

Combining (2.40)–(2.42), (2.45) and the above relation, we deduce

$$\frac{d}{2} \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k(t, x) \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n u_k(t, x) \leq 1 - \frac{d}{2} \quad (t \geq 0, |x| \leq r). \quad (2.47)$$

In particular, the function

$$U(t, x) := \int_0^x \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, y) \right) dy$$

is increasing in $x \in [0, r]$, and satisfies $U(t, 0) = 0$, and, with (2.46),

$$U(t, r) \geq r \frac{d}{2} = e^0 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0 \right).$$

Therefore, there exists a unique $e(t) \in [0, r]$ such that

$$\int_0^{e(t)} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k(t, x) \right) dx = e^0 \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0 \right).$$

One can check that U is Gevrey of order σ in time and 1 in space. Thus using the Implicit Gevrey map theorem (see [114, Theorem 8.1]), we deduce that e is Gevrey of order σ . We have $e(0) = e^0$ and if we set

$$\varphi_k(t) := \frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_k(t, x) dx \quad (1 \leq k \leq n, t > 0)$$

then we see that

$$\frac{d}{dt} \int_0^{e(t)} u_0(t, x) dx = 0$$

and thus (2.13) holds and from lemma 2.3.1, we deduce that (e, u) is a solution of (2.3)–(2.4). From (2.47) and $e(t) \leq r$, we deduce that $(e(t), u(t)) \in \mathcal{S}$ for all $t \in [0, T]$.

This concludes the proof of theorem 2.2.2. \square

2.4.3 Proof of Proposition 2.2.4

We now prove that the controllability of the system can fail for small times.

We denote by A^\top the transpose of A and by hypothesis, there exist $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ and $\lambda \neq 0$ such that

$$A^\top a = \lambda a.$$

Since $a \neq 0$, there exist $u^0, u^1 \in \mathbb{R}^n$ such that

$$u^0 \cdot a \neq u^1 \cdot a,$$

together with

$$\min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k^0 > 0, \quad \min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k^1 > 0, \quad \sum_{k=1}^n u_k^0 < 1, \quad \sum_{k=1}^n u_k^1 < 1.$$

We also choose $e^0 > 0$ and $e^1 > 0$ such that (2.10) holds. Let us consider a control $(\varphi_k)_k$ with $\varphi_0 \equiv 0$ and a solution (e, u) of (2.3)–(2.4) satisfying $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$, for every $t \in [0, T]$ and $x \in (0, e(t))$, and

$$e(T) = e^1, \quad u(T, x) = u^1 \quad (x \in (0, e^1)).$$

We set

$$v := u \cdot a + \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad v^0 := u^0 \cdot a + \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad v^1 := u^1 \cdot a + \sum_{k=1}^n |a_k|$$

and we have $v^0 \neq v^1$ and $v^0, v^1 > 0$. Since $(e(t), u(t, x)) \in \mathcal{S}$ for all $t \in [0, T]$, we have $v(t, x) > 0$, for all (t, x) . From corollary 2.3.2, we deduce

$$e(t) > L := \int_0^{e^0} \left(1 - \sum_{k=1}^n u_k^0(x) \right) dx > 0.$$

Taking the inner product of the first equation of (2.4) with a , and using the above results, we deduce that

$$\begin{cases} \partial_t v - \lambda \partial_x^2 v = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ v(t, 0) > 0, \quad v(t, L) > 0 & t \in (0, T), \\ v(0, x) = v^0 > 0, \quad v(T, x) = v^1 > 0 & x \in (0, L). \end{cases}$$

If $\lambda > 0$, we can apply [75, Theorem 2.1] to deduce the existence of $T_0(v^0, v^1, L, \lambda) > 0$ such that

$$T \geq T_0.$$

If $\lambda < 0$, we can perform the change of variable $t \mapsto T - t$ and apply [75, Theorem 2.1] to deduce the result.

This concludes the proof of proposition 2.2.4. \square

2.4.4 Proof of Theorem 2.2.5

We end this section by the proof of the controllability result in arbitrarily small time, using $n + 1$ controls which are not subject to any sign constraint.

Using φ_0 , we can control e independently of u . More precisely, let us set

$$e(t) := e^0 \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} \right) + \varepsilon T^{1/2} \left(\theta_\sigma \left(1 - \frac{3t}{T} \right) - \theta_\sigma \left(3 - \frac{3t}{T} \right) \right) + e^1 \theta_\sigma \left(3 - \frac{3t}{T} \right), \quad (2.48)$$

with $\varepsilon \in (0, 1)$ small enough that we specify later. We define u with (2.19) where α is defined through the function θ_σ given in (2.7) :

$$\alpha(t) := \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} - 1 \right) u^0 + \left(1 - \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} - 1 \right) \right) u^1 \in \mathbb{R}^n \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2.49)$$

We have that α satisfies (2.39). Then, applying proposition 2.3.6, we deduce the regularity of (e, u) and that it satisfies (2.3)–(2.4) with the controls given by

$$\varphi(t) := A \partial_x u(t, e(t)) + e'(t) u(t, e(t)) \quad \text{and} \quad \varphi_0(t) := e'(t) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \quad (t > 0). \quad (2.50)$$

Using the properties (2.7) of θ_σ , we also have

$$u(t, x) = u^0 \quad \text{if } t \leq \frac{T}{3}, \quad u(t, x) = u^1 \quad \text{if } t \geq \frac{2T}{3}, \quad (2.51)$$

and

$$e(t) = e^0 \quad \text{if } t \leq 0, \quad e(t) = \varepsilon T^{1/2} \quad \text{if } t \in \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3} \right), \quad e(t) = e^1 \quad \text{if } t \geq T \quad (2.52)$$

and $e(t) \geq \min(e^0, e^1, \varepsilon T^{1/2}) > 0$ in the other intervals. It only remains to show that

$$0 < \min_{k \in \{1, \dots, n\}} u_k(t, x) \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n u_k(t, x) < 1 \quad (t \in (0, T), x \in (0, e(t))). \quad (2.53)$$

Using (2.51), we deduce the above relations for $t \notin \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3} \right)$. If $t \in \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3} \right)$, we use (2.19) to write (2.40), with

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(t) = \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} - 1 \right) \sum_{k=1}^n u_k^0 + \left(1 - \theta_\sigma \left(\frac{3t}{T} - 1 \right) \right) \sum_{k=1}^n u_k^1 \in (0, 1) \quad (t \in (0, T)).$$

As in the proof of theorem 2.2.2, we only need to estimate the sum in the right-hand side of (2.40) : using (2.52), $e(t) = \varepsilon T^{1/2}$ and combining it with (2.39), we obtain

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \sum_{k=1}^n \left[A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right]_k \right| \leq M_1 n \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\|A^{-1}\|}{R} \right)^i \frac{(i!)^\sigma}{(2i)!} \quad (x \in (0, \varepsilon T^{1/2})). \quad (2.54)$$

In particular, taking ε small enough, we conclude that

$$\sum_{k=1}^n u_k \in (0, 1) \quad \left(t \in \left(\frac{T}{3}, \frac{2T}{3} \right), x \in (0, e(t)) \right).$$

The other relation in (2.53) is obtained similarly by taking ε possibly smaller.

This concludes the proof of theorem 2.2.5. \square

2.5 Numerical illustrations

Within the flatness method, one can deduce naturally a numerical algorithm to approximate the solution of (2.4). Assuming that the solution u is given by (2.19), where $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a Gevrey function of order $\sigma \in (1, 2)$ satisfying (2.20), one can approach u by its partial sums :

$$u_N(t, x) := \sum_{i=0}^N \frac{x^{2i}}{(2i)!} A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \quad ((t, x) \in \mathbb{R}^2). \quad (2.55)$$

The following result gives an estimate of the error between u and u_N . The proof is standard, but we recall it for completeness.

Lemma 2.5.1. *Assume $\sigma \in (1, 2)$, and let $L > 0$. There exists a constant $C > 0$ such that for any Gevrey function α satisfying (2.20), there exists $N_0 \in \mathbb{N}^*$ such that for any $N \geq N_0$, u and u_N , given respectively by (2.19) and (2.55), satisfy*

$$\|u - u_N\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [-L, L])} \leq CM_1 \frac{\sqrt{N}}{\ln N} \left(\frac{L^2 \|A^{-1}\|}{4R_1} \right)^N \frac{1}{(N!)^{2-\sigma}}. \quad (2.56)$$

Proof. From (2.20) and the Stirling formula, there exist a constant $C > 0$ and $N_0 \in \mathbb{N}^*$ such that for any $L > 0$, $x \in [-L, L]$ and $i \geq N_0$,

$$\left| \frac{x^{2i}}{(2i)!} A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right| \leq CM_1 \left(\frac{L^2 \|A^{-1}\| e^{2-\sigma}}{4R_1} \right)^i i^{i(\sigma-2) + \frac{1}{2}(\sigma-1)}. \quad (2.57)$$

We thus set

$$K := \frac{L^2 \|A^{-1}\| e^{2-\sigma}}{4R_1}, \quad g(y) := (2 - \sigma)y \ln y - \frac{\sigma - 1}{2} \ln y - y \ln K$$

so that (2.57) can be written as

$$\left| \frac{x^{2i}}{(2i)!} A^{-i} \alpha^{(i)}(t) \right| \leq CM_1 e^{-g(i)}. \quad (2.58)$$

Using that $\sigma \in (1, 2)$, we deduce that taking N_0 large enough, we have

$$g'(y) \geq g'(N) \geq \frac{2 - \sigma}{2} \ln(N) > 0 \quad (y \geq N \geq N_0).$$

Therefore, we deduce from the above relation, together with (2.19), (2.55) and (2.58) that

$$\|u - u_N\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [-L, L])} \leq CM_1 \int_N^\infty e^{-g(y)} dy \leq \frac{CM_1}{\ln(N)} e^{-g(N)}.$$

We conclude the proof of this lemma by using the Stirling formula. \square

We will now give different illustrations of our results. All the calculations are performed using **Matlab**.

For $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $u(t, x)$ from (2.19) is approximated by (2.55). Thanks to the previous proposition, one does not need to take N to be very large (most of the time, we use $N = 100$ nonetheless) one can observe in figure 2.3a that the convergence is fast. The derivatives of α are computed inductively as in the appendix of [84]. As θ_σ from (2.7) converges pointwise to a Heaviside function when σ goes to 1 in order for the numerical computation to go well and to avoid an explosion (see figure 2.3b) one will benefit from taking σ close to 2 therefore, we chose to work with $\sigma = 2 - \frac{1}{32}$.

Remark 2.5.2. According to [15] (see also [6]) a matrix form which is of physical interest for this system is given by $A(u) = (A_{i,j}(u))_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ with

$$\begin{cases} A_{i,i}(u) = \sum_{1 \leq k \neq i \leq n} (K_{i,k} - K_{k,0})u_k + K_{k,0}, & \text{for } 1 \leq i \leq n, \\ A_{i,j}(u) = -(K_{i,j} - K_{i,0})u_i, & \text{for } 1 \leq i \neq j \leq n, \end{cases}$$

where for every $0 \leq i \neq j \leq n$, $K_{i,j} = K_{j,i} > 0$.

All the computations are done with $n = 4$, and $A = A(u_0)$ constructed as in the previous remark with :

$$(K_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 2 & 5 \\ 2 & * & 5 & 7 \\ 2 & 5 & * & 3 \\ 5 & 7 & 3 & * \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (K_{i,0})_{i \in \{1, \dots, n\}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

2.5.1 Illustrations for Theorem 2.2.2.

For this part, we take,

$$e^0 = 1/2, \quad u^0 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad u^1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4.5 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Recall that when φ_0 is set to 0, u^0 , u^1 , e^0 and e^1 satisfy the compatibility condition (2.3.4). With the values given in (2.59), this leads to

$$e^1 = 7/2. \quad (2.60)$$

Here, we compute e as the solution of the Cauchy problem given in corollary 2.3.4 using the `ode45` function from `Matlab` by approximating u and $\partial_x u$ with truncated series as described before, φ and φ_0 are then computed from u_N and e using (2.24). The result can be seen in figures 2.1, 2.2. In figure 2.1a we can see that the condition (2.10) is numerically verified (as e_1 isn't used in the algorithm that computes e), and in figure 2.1b, the fact that $\varphi_0 \equiv 0$ is also numerically verified. In figure 2.2 we give the graphs of $u(t, \cdot)$ for different values of t which allows us to see that the transition from u^0 to u^1 is quite smooth.

In figure 2.3a one can observe the fast convergence of φ_1 with respect to N . In fact the control has *numerically converged* for $N = 4$. Finally, in figure 2.3b we illustrate the dependence of the control with respect to σ . We see in particular the fact that for σ close to 1, the control becomes singular. In fact, at a given time $T > 0$, taking σ close to 1 leads to a violation of the state constraints. Roughly speaking, the more σ is small the larger T has to be. As example, the state constraint is still violated for $\sigma = 1.3$ and $T = 100$.

2.5.2 Illustration of Theorem 2.2.5

To numerically illustrate theorem 2.2.5, we take e^0 , u^0 , e^1 and u^1 as in the previous paragraph, i.e., they are given by (2.59) and (2.60). Here, e is given by (2.48) and $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ are obtained through (2.24). In (2.48), we chose $\varepsilon = 0.1$, recall that this value has to be chosen small enough to ensure the state constraints on u .

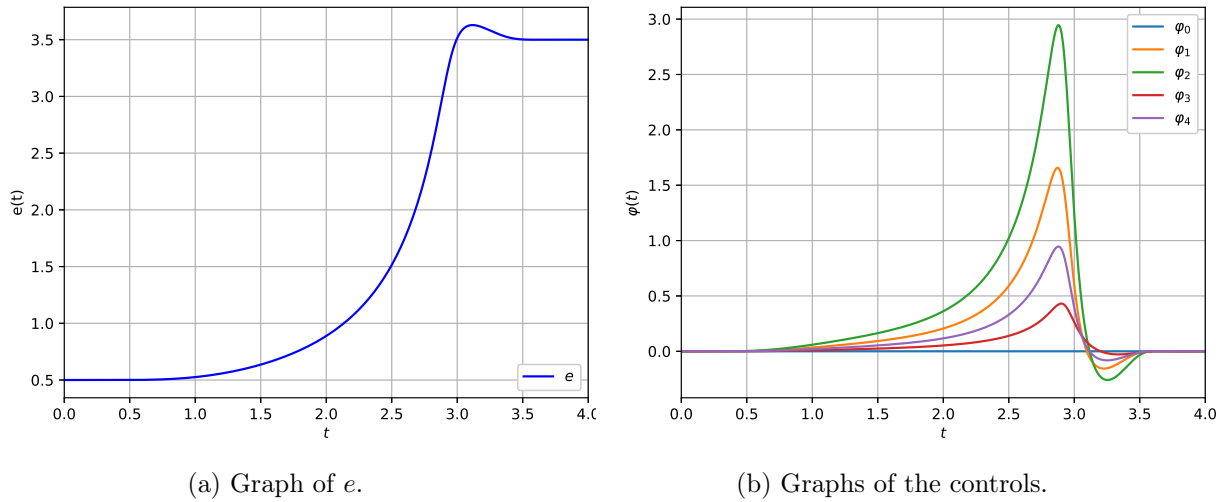
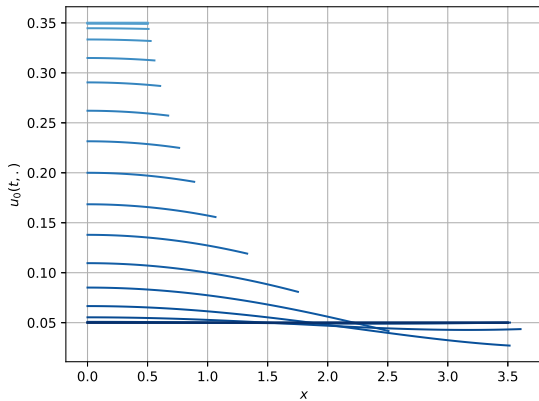
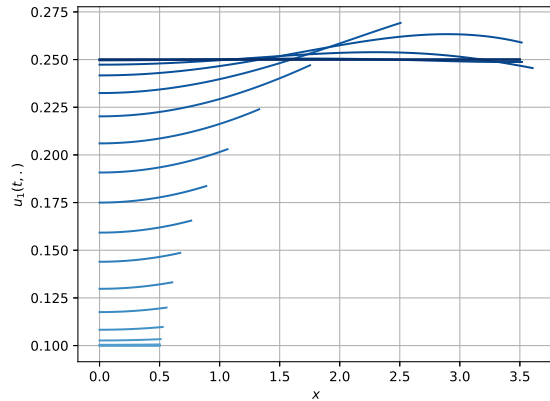


FIGURE 2.1 – Numerical test with $T = 4$, $N = 100$ and $\sigma = 2 - \frac{1}{32}$. The values of e^0 , u^0 and u^1 are given in (2.59).

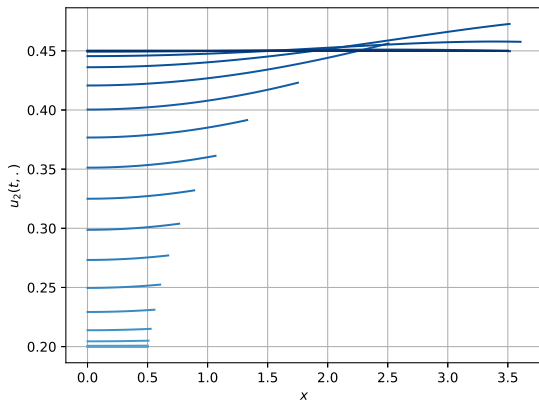
Using φ_0 we are able to control our system from the same steady states as in the previous case and with the same parameters in arbitrarily small time (we take $T = 0.25$ for the numerical illustration). Recall that in the n controls case a minimal time is required to ensure that $\sum_{i=1}^n u_i < 1$, and this constraint is violated even for $T = 3$ (when $\varphi_0 \equiv 0$). On figure 2.4, we have displayed the trajectory of e and the controls $\varphi_0, \dots, \varphi_4$.



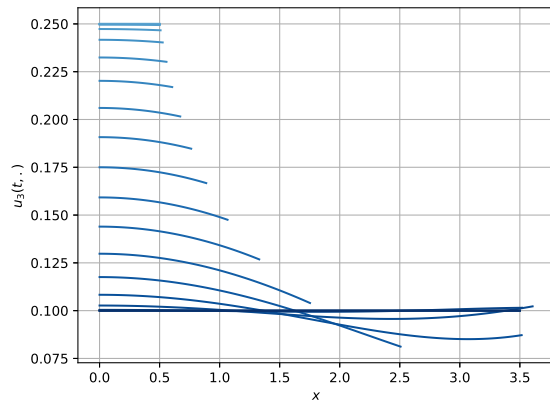
(a) Representation of $u_0(t, \cdot)$.



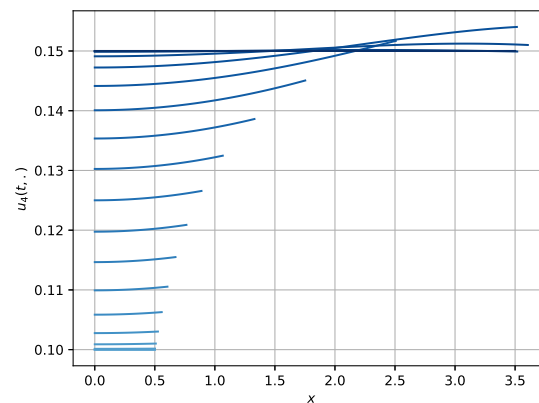
(b) Representation of $u_1(t, \cdot)$.



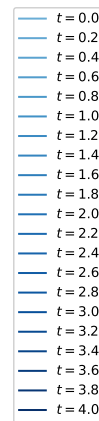
(c) Representation of $u_2(t, \cdot)$.



(d) Representation of $u_3(t, \cdot)$.

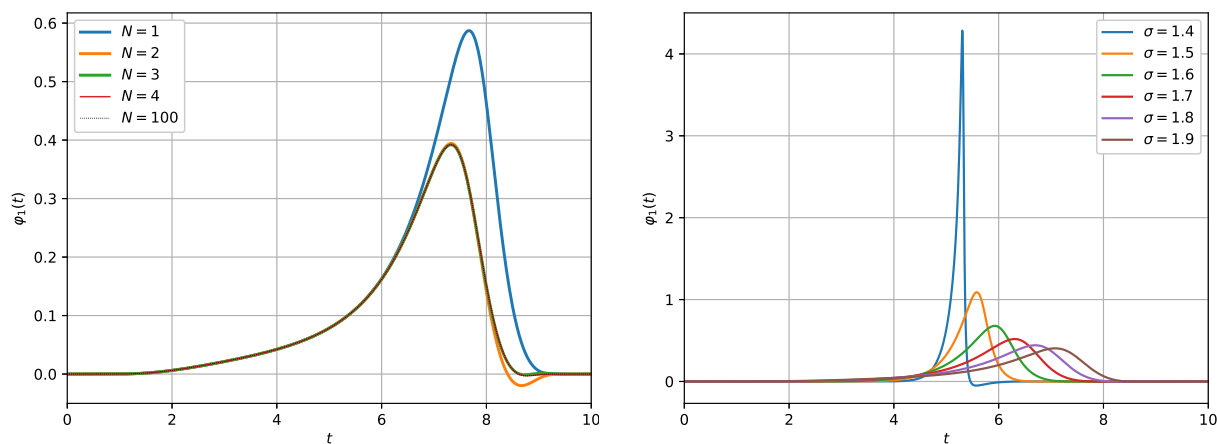


(e) Representation of $u_4(t, \cdot)$.



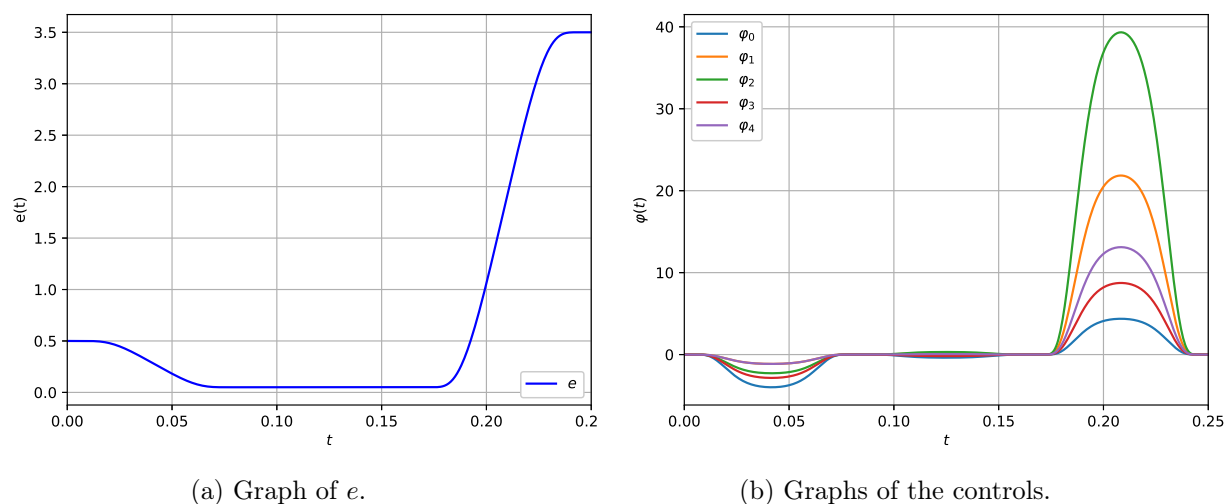
(f) Legend of the previous graphs.

FIGURE 2.2 – Representation of $u(t, \cdot)$ for different values of t . The parameters are given in figure 2.1.



(a) Convergence of φ_1 with respect to N with $T = 10$ and $\sigma = 2 - \frac{1}{32}$. (b) Behaviour φ_1 with respect to σ with $T = 10$ and $N = 100$.

FIGURE 2.3 – Dependency of φ_1 with respect to N or σ . The values of e^0 , u^0 and u^1 are given in (2.59).



(a) Graph of e .

(b) Graphs of the controls.

FIGURE 2.4 – Numerical test with $T = 0.25$, $N = 100$, $\varepsilon = 0.1$ (see (2.48)) and $\sigma = 2 - \frac{1}{32}$. The values of e^0 , u^0 , e^1 and u^1 are given in (1.23) and (1.24).

Controllability of the Stefan problem by the flatness approach

Les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet de la publication [16] réalisée en collaboration avec Jérôme Lohéac et Takéo Takahashi.

Sommaire

3.1	Abstract	61
3.2	Introduction and main results	61
3.3	The flatness approach	66
3.4	Gevrey functions	66
3.5	Analyticity of the solutions of the Stefan problem	70
3.6	Proof of the main results	71
3.7	Numerical illustrations	75
3.8	Conclusion	78

3.1 Abstract

We show the boundary controllability to stationary states of the Stefan problem with two phases and in one dimension in the space variable. In the case of an initial condition that is a stationary state and for a time of control large enough, we also obtain the controllability to stationary states with the sign constraints associated with the problem. Our method is based on the flatness approach that consists in writing the solution and the controls through two outputs and their derivatives. We construct these outputs as Gevrey functions of order σ so that our solution and controls are also in a Gevrey class.

3.2 Introduction and main results

In this article, we consider the controllability of the Stefan problem with two phases and in dimension 1 in space. This system can model a solid-liquid phase transition, and is illustrated on figure 3.1. One of the main difficulties in the study of this system is that it contains a free boundary, that is the interface between the two phases. In dimension 1 in space, the system

couples two heat equations and a differential equation for the motion of the interface. There is an important literature devoted to the study of the Stefan problem. Concerning the well-posedness, one can quote for instance in the one-dimensional case [12–14, 25, 26, 41, 51]. In [43], the author obtains the analyticity of the interface between the two phases. Let us also mention [42] where the author shows the existence and uniqueness of weak solutions for the Stefan problem in dimension $n \geq 1$ and analyzes their properties. The regularity of the free boundary in that case is studied in [58].

Concerning the controllability of the Stefan problem, let us mention [21, 29, 30] where the authors tackle the local null-controllability of Stefan problem in dimension 1 or in dimension 2 in star-shaped domains. The method is based on a linearization of the system, a fixed point argument and Carleman estimates to handle the controllability of the corresponding parabolic system. Note that in their results, the temperature is lead to zero but there is no constraint on the interface position. Recently, in [11], the controllability to trajectories of the Stefan problem with one phase and dimension 1 in space is shown. The method is based again on a linearization of the system after a change of variables and the controllability of the linear system is obtained by using Carleman estimates. In that case, the authors control both the temperature and the position of the interface. Let us also mention [45], where the authors obtain the controllability of the linearized Stefan problem with surface tension and [46] where the authors show the local exact controllability to stationary trajectories of a system similar to the one considered here. Finally, in the case of feedback stabilization, we can quote for instance [59, 61, 62]. The method used to stabilize the Stefan problem is based on the backstepping method. We would also like to mention some results concerning the inverse problem associated with the Stefan system : [48, 49].

In this article, our aim is to obtain the controllability to the steady states, and in order to do this, we are going to use the flatness method that we recall in the next section. In this approach, the state and the controls are described by series. Such an approach was already applied for the heat equation [81], general parabolic equations [82], the Schrödinger equation [84], the linear Korteweg–de Vries equation [80] and semilinear heat equations [70]. We would like to mention in particular that the flatness approach was already applied to the Stefan problem for motion planning questions in [23] for the one phase Stefan problem and in [24, 104] for the two phases Stefan problem. In these results, the authors decompose the solutions as series of power with coefficients depending on time (as it is done in the next section). However, to ensure the convergence of the power series, they need a lower bound of the radius of convergence of the series. In the three above mentioned papers, this bound is computed as the root of a polynomial of degree 3, and in [23] several computations are done in order to obtain more information on this bound. If the obtained radius of convergence is not large enough, the series cannot be used as solutions of the Stefan problem. In the present paper, we manage to refine the estimates for the coefficients of the series. In particular, we show that the radius of convergence is infinite. Let us note that we propose here a control for any regular enough (typically C^1 , see theorem 3.2.1) initial data, while [24, 104] are only devoted to the transition between stationary states. In this article, we also tackle the controllability issue with the sign constraints on the state. In the Stefan problem, the temperature satisfies physical sign constraints : the temperature in the liquid (respectively solid) phase is above (respectively below) the melting temperature. Using the flatness approach, we can obtain a controllability result with these conditions in the case of where the initial and final conditions are stationary states (with the physical sign constraints) and for a time of control large enough (see theorem 3.2.2).

Let us now describe precisely our system and our results.

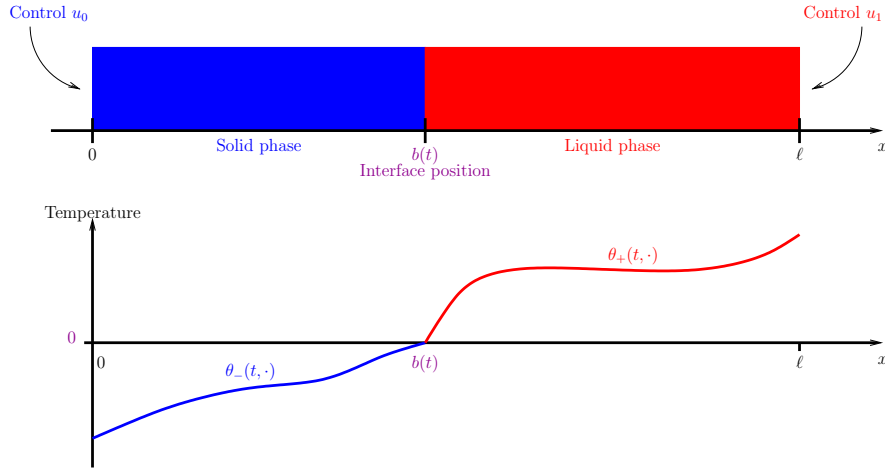


FIGURE 3.1 – Schematic representation of the problem.

First we consider the Stefan problem :

$$\partial_t \theta = c \partial_x^2 \theta \quad (t \geq 0, x \in (0, 1) \setminus \{b(t)\}), \quad (3.1a)$$

$$\theta(t, b(t)) = 0 \quad (t > 0), \quad (3.1b)$$

$$b'(t) = \partial_x \theta(t, b(t)^-) - \partial_x \theta(t, b(t)^+) \quad (t > 0), \quad (3.1c)$$

with initial condition :

$$b(0) = b^0, \quad \theta(0, \cdot) = \theta^0. \quad (3.2)$$

At the boundaries, we impose two controls :

$$\theta(t, 0) = u_0(t), \quad \theta(t, 1) = u_1(t) \quad (t > 0). \quad (3.3)$$

In the above system, θ denotes the temperature of the material, and we assume that this material is liquid for $x < b(t)$ and solid for $x > b(t)$. If necessary, we write

$$\theta_-(t, x) := \theta(t, x) \quad (x < b(t)) \quad \text{and} \quad \theta_+(t, x) := \theta(t, x) \quad (x > b(t)).$$

Both temperatures are equal at the interface and by a change of variables we can assume that $\theta_-(t, b(t)) = \theta_+(t, b(t))$ which permits to use the global variable θ as a function continuous at $b(t)$. The motion of the interface depends on the jump of the derivatives of θ at $x = b(t)$. Here, we have assumed that the diffusion coefficient is constant on each state of the material :

$$c := \begin{cases} c_- & \text{if } x < b(t), \\ c_+ & \text{if } x > b(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

where $c_-, c_+ \in \mathbb{R}_+^*$. Note that by some change of variables we can assume that all the other physical parameters are equal to 1. A natural physical condition for the above system consists in imposing

$$\theta(t, x) < 0 \quad (x \in (0, b(t))) \quad \text{and} \quad \theta(t, x) > 0 \quad (x \in (b(t), 1)) \quad (t > 0). \quad (3.5)$$

Our aim is to use the controls u_0 and u_1 in order to reach a stationary state $(\bar{b}, \bar{\theta})$ of (3.1) in a finite time $T > 0$. Such a stationary state satisfies $\bar{b} \in (0, 1)$ and for some constant $\bar{v} \in \mathbb{R}$:

$$\bar{\theta}(x) = \bar{v}(x - \bar{b}). \quad (3.6)$$

In our first result, we show that we can reach such a stationary state by using the flatness approach. Note that in this result, we do not impose the condition (3.5).

Theorem 3.2.1. *Assume*

$$\begin{aligned} b^0 \in (0, 1), \quad \theta^0 \in C^1([0, 1] \setminus \{b^0\}) \cap C^0([0, 1]), \\ \theta^0 \leq 0 \text{ in } [0, b^0], \quad \theta^0 \geq 0 \text{ in } [b^0, 1], \quad \theta^0(0) < 0, \quad \theta^0(1) > 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Then for any $T > 0$, $\sigma \in (1, 2)$, $\bar{b} \in (0, 1)$ and $\bar{v} \in \mathbb{R}$, there exist two controls u_0, u_1 Gevrey of order σ in $[0, T]$ such that the solution (b, θ) of (3.1)–(3.3) satisfies

$$b(T) = \bar{b}, \quad \theta(T, x) = \bar{v}(x - \bar{b}) \quad (x \in [0, 1]). \quad (3.8)$$

Moreover, for any $\varepsilon > 0$, b is Gevrey of order σ in $[\varepsilon, T]$ and there exist S_- and S_+ in $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}$ Gevrey of order σ in time and 1 in space such that

$$\begin{aligned} \theta_-(t, x) &= S_-(t, x - b(t)) & (t \in [\varepsilon, T], x \in [0, b(t)]), \\ \theta_+(t, x) &= S_+(t, x - b(t)) & (t \in [\varepsilon, T], x \in [b(t), 1]). \end{aligned}$$

In order to respect the sign condition (3.5), the stationary states, described by (3.6), need to satisfy $\bar{v} > 0$. The second result states that one can use the controls u_0 and u_1 to pass from such a stationary state to another, and to keep the sign condition (3.5) during the evolution of the system. To obtain such a result, we need a time of control large enough.

Theorem 3.2.2. *Assume*

$$b^0 \in (0, 1), \quad v^0 > 0, \quad \theta^0(x) = v^0(x - b^0) \quad (3.9)$$

and suppose that $\bar{v} > 0$. Then there exists T_1 with the following property : if $T \geq T_1$ one can choose the controls u_0 and u_1 such that the same properties of theorem 3.2.1 hold with $\varepsilon = 0$ (in particular (3.8)) and such that (3.5) holds for all $t \in [0, T]$.

Since the problem is nonlinear, it is quite complicated to estimate the cost of the controls, but in the framework of the above theorem, and using T large enough, we can obtain the following result

Corollary 3.2.3. *Assume the same hypotheses as theorem 3.2.2 and let us set*

$$\bar{u}_0 := -\bar{v}\bar{b}, \quad \bar{u}_1 := \bar{v}(1 - \bar{b}). \quad (3.10)$$

Then there exist $C, T_1 > 0$ such that for any $T \geq T_1$, the controls u_0 and u_1 in theorem 3.2.2 satisfy

$$|u_0(t) - \bar{u}_0| \leq \bar{v} |\bar{b} - b^0| + |v^0 - \bar{v}| \max(\bar{b}, b^0) + \frac{C}{T} (|\bar{b} - b^0| + |v^0 - \bar{v}|). \quad (3.11)$$

$$|u_1(t) - \bar{u}_1| \leq \bar{v} |\bar{b} - b^0| + |v^0 - \bar{v}| (1 - \min(\bar{b}, b^0)) + \frac{C}{T} (|\bar{b} - b^0| + |v^0 - \bar{v}|). \quad (3.12)$$

The quantities \bar{u}_0 and \bar{u}_1 correspond to boundary values of the stationary state (3.6).

Remark 3.2.4. *In the proof of theorems 3.2.1 and 3.2.2, one can see that in fact our controls u_0 and u_1 are constructed from two Gevrey functions of order $\sigma : \alpha_{-,0}, \alpha_{+,0}$ and their derivatives.*

Remark 3.2.5. *We recall that f is Gevrey of order σ in a domain $I \subseteq \mathbb{R}$ if $f \in C^\infty(I)$ and if for any compact set $K \subset I$, there exist $M, R > 0$ such that*

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty(K)} \leq M \frac{(n!)^\sigma}{R^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

If $\sigma = 1$, it is thus an analytic function. As explained for instance in [81], one of the interests of such a class of functions here is that for $\sigma > 1$, there exist step functions that are Gevrey of order σ (see Section 3.4). The notion of Gevrey function for several variables is similar : for instance for two variables as above, f is Gevrey of order σ_1 in time and σ_2 in space if there exist $M, R_1, R_2 > 0$ such that

$$\|\partial_t^m \partial_x^n f\|_{L^\infty(K)} \leq M \frac{(m!)^{\sigma_1}}{R_1^m} \frac{(n!)^{\sigma_2}}{R_2^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Remark 3.2.6. *An important feature in our two results is that we do not linearize the system, and consequently, we do not have any smallness assumptions as this is the case for the results in [21, 29, 30]. With respect to previous systems studied with the flatness approach (see [70, 80–82, 84]), we consider here a nonlinear problem coupling PDEs and ODEs and with a free boundary.*

Remark 3.2.7. *Let us mention some results for the controllability of parabolic equations with a sign constraint on the control or on the state : [73–76, 86, 105], etc. It is proved in particular in [75, Theorem 3] that to control the heat equation under non negativity constraints on the state, one need a minimal time. Let us also quote a similar result [98, Theorem 1.1] in the case of the wave equation under a nonnegative control constraint.*

Remark 3.2.8. *Let us mention that in this paper, we have chosen Dirichlet boundary controls, but this is not required for the flatness approach. For instance, similar results could have been obtained with Neumann or Robin boundary controls.*

The outline of the article is as follows. In Section 3.3, we describe the flatness approach in the case of the Stefan problem. Then in Section 3.4, we present some results on the Gevrey functions. Several of these results are well-known, but we point out that a key point in the proof of the main results is proposition 3.4.4. In the proof of theorem 3.2.1, we need to show that the solutions of the Stefan is regular enough for any positive time. In order to do this we use [43] where the time regularity is proved and standard methods to obtain the regularity in space. Gathering the results of the previous sections, we prove, in Section 3.6, our main results, theorems 3.2.1 and 3.2.2. Section 3.7 is devoted to some numerical illustrations of our method and we end this article with Section 3.8 where we discuss some related open problems.

3.3 The flatness approach

In this section, we present the flatness approach for the Stefan problem. We decompose the solution of (3.1) as follows

$$\theta(t, x) := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{-,i}(t) \frac{(x-b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{-,i}(t) \frac{(x-b(t))^{2i}}{(2i)!} \quad (x < b(t)), \quad (3.13a)$$

$$\theta(t, x) := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{+,i}(t) \frac{(x-b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{+,i}(t) \frac{(x-b(t))^{2i}}{(2i)!} \quad (x > b(t)). \quad (3.13b)$$

Note that formally (3.1b) yields $\beta_{\pm,0} = 0$. The separation between odd and even powers is due to the case of the heat equation, see [81, 82] where only the odd or the even powers appear.

Formally, for both (3.13a) and (3.13b), we have

$$\begin{aligned} \partial_t \theta - c \partial_x^2 \theta &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha'_i(t) \frac{(x-b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(t) b'(t) \frac{(x-b(t))^{2i}}{(2i)!} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \beta'_i(t) \frac{(x-b(t))^{2i}}{(2i)!} - \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{i+1}(t) b'(t) \frac{(x-b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &\quad - c \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i+1}(t) \frac{(x-b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} - c \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{i+1}(t) \frac{(x-b(t))^{2i}}{(2i)!}, \end{aligned}$$

so that (3.1a) yields that α_i and β_i satisfy the recurrence formula

$$\begin{cases} \beta_{-,i+1} = \frac{1}{c_-} \beta'_{-,i} - \frac{1}{c_-} b' \alpha_{-,i}, \\ \alpha_{-,i+1} = \frac{1}{c_-} \alpha'_{-,i} - \frac{1}{c_-} b' \beta_{-,i+1}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_{+,i+1} = \frac{1}{c_+} \beta'_{+,i} - \frac{1}{c_+} b' \alpha_{+,i}, \\ \alpha_{+,i+1} = \frac{1}{c_+} \alpha'_{+,i} - \frac{1}{c_+} b' \beta_{+,i+1}, \end{cases} \quad (i \geq 0). \quad (3.14)$$

Finally, (3.1c) imposes,

$$b' = \alpha_{-,0} - \alpha_{+,0}. \quad (3.15)$$

We thus see that all the coefficients of θ , that is $(\alpha_{\pm,i})$, $(\beta_{\pm,i})$, and b' are completely given by $\alpha_{-,0}$ and $\alpha_{+,0}$. The idea of the flatness method consists in constructing $\alpha_{-,0}$ and $\alpha_{+,0}$ so that θ and b satisfy the initial and final conditions and then, the controls u_0 and u_1 are given by

$$u_0(t) := - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{-,i}(t) \frac{b(t)^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{-,i}(t) \frac{b(t)^{2i}}{(2i)!}, \quad (3.16a)$$

$$u_1(t) := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{+,i}(t) \frac{(1-b(t))^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{+,i}(t) \frac{(1-b(t))^{2i}}{(2i)!}. \quad (3.16b)$$

The proof of theorem 3.2.1 relies on the above formal computation that we justify by using the Gevrey functions.

3.4 Gevrey functions

We recall here some standard results on the Gevrey functions, and we study systems of the form (3.14) when the first two terms are Gevrey of order σ . Let us quote for instance [99, 102, 114] for some references on the Gevrey functions.

Notation 3.4.1. For $M, R > 0$ and $\sigma \geq 1$, we denote by $\mathcal{G}(M, R, \sigma)$ the set of functions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ such that

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M \frac{(n!)^\sigma}{R^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

We recall the following results

Lemma 3.4.2. Assume $\sigma > 1$. Then there exist $\phi_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ and $\eta_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ two Gevrey functions of order σ such that

$$\begin{aligned} \phi_\sigma(t) &= \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0, \\ 0 & \text{if } t \geq 1, \end{cases} & \phi_\sigma(t) + \phi_\sigma(1-t) &= 1 \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \text{supp } \eta_\sigma &\subset [0, 1], \quad \eta_\sigma \geq 0, & \int_{\mathbb{R}} \eta_\sigma ds &= 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

In particular, there exist $M_0, R_0 > 0$ such that $\phi_\sigma, \eta_\sigma \in \mathcal{G}(M_0, R_0, \sigma)$.

Proof. We set $k := (\sigma - 1)^{-1}$ and we consider the Gevrey function of order σ

$$\phi_\sigma(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0, \\ \frac{e^{-((1-t)^{-k})}}{e^{-((1-t)^{-k})} + e^{-(t^{-k})}} & \text{if } t \in (0, 1), \\ 0 & \text{if } t \geq 1. \end{cases}$$

Then, we set

$$\eta_\sigma := \frac{\phi_\sigma(t)\phi_\sigma(1-t)}{\int_{\mathbb{R}} \phi_\sigma(s)\phi_\sigma(1-s) ds} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

One can check that ϕ_σ and η_σ satisfy the properties of the lemma. \square

Lemma 3.4.3. Assume $\ell, i, j \in \mathbb{N}$ and $\sigma \geq 1$. Then

$$\sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (\ell - m + i)^\sigma (m + j)^\sigma \leq \left(\frac{i!j!(i+j+\ell+1)!}{(i+j+1)!} \right)^\sigma.$$

We have the following crucial result

Proposition 3.4.4. Assume $\sigma \geq 1$, $M_f, M_\alpha, M_\beta, R, \chi \in \mathbb{R}_+^*$. Suppose $f \in \mathcal{G}(M_f, R, \sigma)$ and let us consider the sequences $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ defined by

$$\alpha_0 \in \mathcal{G}(M_\alpha, R, \sigma), \quad \beta_0 \in \mathcal{G}(M_\beta, R, \sigma)$$

and for any $i \geq 0$,

$$\begin{cases} \beta_{i+1} = \chi \beta'_i - \chi f \alpha_i, \\ \alpha_{i+1} = \chi \alpha'_i - \chi f \beta_{i+1}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Then, for any $\rho > 0$ such that

$$\rho \leq \frac{2^{3-\sigma} R}{3} \quad \text{and} \quad \rho \leq \frac{2M_\alpha}{3\chi \left(\frac{M_\beta}{R} + M_\alpha M_f \right) M_f}, \quad (3.19)$$

we have, for any $\ell, i \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \alpha_i^{(\ell)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{M_\alpha \chi^i}{R^\ell \rho^i} \frac{(\ell + 2i)^\sigma}{i!^{2-\sigma} (2i)!^{\sigma-1}}, \quad (3.20)$$

$$\left\| \beta_{i+1}^{(\ell)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{M_\beta}{R} + M_\alpha M_f \right) \frac{\chi^{i+1}}{R^\ell \rho^i} \frac{(\ell + 2i + 1)^\sigma}{i!^{2-\sigma} (2i + 1)!^{\sigma-1}}. \quad (3.21)$$

If $\beta_0 = 0$, then one can take $M_\beta = 0$ in the above statements.

Remark 3.4.5. Note that in [23], the authors show an induction result similar to proposition 3.4.4 (see [23, Theorem 2.1]). More precisely, they can deal with more general non-linearities as the one associated with the Stefan problem, but they also need a smallness condition that we avoid here.

Proof of proposition 3.4.4. We consider $\rho > 0$ satisfying (3.19). We show (3.20)–(3.21) by induction on i . For $i = 0$, (3.20) is a consequence of $\alpha_0 \in \mathcal{G}(M_\alpha, R, \sigma)$. Then, using that $f \in \mathcal{G}(M_f, R, \sigma)$, $\alpha_0 \in \mathcal{G}(M_\alpha, R, \sigma)$, and $\beta_0 \in \mathcal{G}(M_\beta, R, \sigma)$ combined with the Leibniz rule, we deduce,

$$\left| \beta_1^{(\ell)} \right| \leq \chi \left| \beta_0^{(\ell+1)} \right| + \chi \left| \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \alpha_0^{(\ell-m)} f^{(m)} \right| \leq \chi \frac{M_\beta (\ell + 1)^\sigma}{R^{\ell+1}} + \frac{\chi M_\alpha M_f}{R^\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (\ell - m)^\sigma (m!)^\sigma.$$

Using lemma 3.4.3, we obtain (3.21) for $i = 0$.

Assume now (3.20)–(3.21) for $i \in \mathbb{N}$. Then (3.18) and the Leibniz rule imply

$$\left| \alpha_{i+1}^{(\ell)} \right| \leq \chi \left| \alpha_i^{(\ell+1)} \right| + \chi \left| \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \beta_{i+1}^{(\ell-m)} f^{(m)} \right|. \quad (3.22)$$

Using (3.20) and that $\sigma \geq 1$, we have

$$\begin{aligned} \chi \left| \alpha_i^{(\ell+1)} \right| &\leq \frac{M_\alpha \chi^{i+1}}{R^\ell \rho^{i+1}} \frac{(\ell + 2 + 2i)^\sigma}{(i + 1)!^{2-\sigma} (2i + 2)!^{\sigma-1}} \frac{\rho}{R} \frac{(i + 1)^{2-\sigma} (2i + 2)^{\sigma-1} (2i + 1)^{\sigma-1}}{(\ell + 2 + 2i)^\sigma} \\ &\leq \frac{M_\alpha \chi^{i+1}}{R^\ell \rho^{i+1}} \frac{(\ell + 2 + 2i)^\sigma}{(i + 1)!^{2-\sigma} (2i + 2)!^{\sigma-1}} \frac{\rho 2^{\sigma-2}}{R}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Using (3.21) and that $f \in \mathcal{G}(M_f, R, \sigma)$, we have that

$$\chi \left| \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \beta_{i+1}^{(\ell-m)} f^{(m)} \right| \leq \frac{\chi^{i+2}}{R^\ell \rho^i} \frac{\left(\frac{M_\beta}{R} + M_\alpha M_f \right) M_f}{(i)!^{2-\sigma} (2i + 1)!^{\sigma-1}} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (\ell - m + 2i + 1)^\sigma (m!)^\sigma.$$

Applying lemma 3.4.3 and using that $\sigma \geq 1$, we find

$$\chi \left| \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \beta_{i+1}^{(\ell-m)} f^{(m)} \right| \leq \frac{M_\alpha \chi^{i+1}}{R^\ell \rho^{i+1}} \frac{(\ell + 2 + 2i)^\sigma}{(i + 1)!^{2-\sigma} (2i + 2)!^{\sigma-1}} \frac{\rho \chi \left(\frac{M_\beta}{R} + M_\alpha M_f \right) M_f}{2M_\alpha}.$$

Using the above estimate and (3.23), in (3.22), together with the condition (3.19) on ρ , we deduce (3.20) for α_{i+1} .

We proceed similarly for β_{i+1} : applying the Leibniz rule on (3.18), we deduce

$$\left| \beta_{i+2}^{(\ell)} \right| \leq \chi \left| \beta_{i+1}^{(\ell+1)} \right| + \chi \left| \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \alpha_{i+1}^{(\ell-m)} f^{(m)} \right|. \quad (3.24)$$

From (3.21), we have

$$\chi \left| \beta_{i+1}^{(\ell+1)} \right| \leq \left(\frac{M_{\beta}}{R} + M_{\alpha} M_f \right) \frac{\chi^{i+2}}{R^{\ell} \rho^{i+1}} \frac{(\ell + 2i + 3)!^{\sigma}}{(i + 1)!^{2-\sigma} (2i + 3)!^{\sigma-1}} \frac{\rho 2^{\sigma-2}}{R}. \quad (3.25)$$

Using (3.20) and that $f \in \mathcal{G}(M_f, R, \sigma)$, we have that

$$\chi \left| \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \alpha_{i+1}^{(\ell-m)} f^{(m)} \right| \leq \frac{M_{\alpha} M_f \chi^{i+2}}{R^{\ell} \rho^{i+1}} \frac{1}{(i + 1)!^{2-\sigma} (2i + 2)!^{\sigma-1}} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (\ell - m + 2i + 2)!^{\sigma} m^{\sigma}.$$

The above estimate and lemma 3.4.3 imply

$$\chi \left| \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \alpha_{i+1}^{(\ell-m)} f^{(m)} \right| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{M_{\beta}}{R} + M_{\alpha} M_f \right) \frac{\chi^{i+2}}{R^{\ell} \rho^{i+1}} \frac{(\ell + 2i + 3)!^{\sigma}}{(i + 1)!^{2-\sigma} (2i + 3)!^{\sigma-1}}.$$

Inserting the above estimate and (3.25) into (3.24), we deduce

$$\left| \beta_{i+2}^{(\ell)} \right| \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{\rho 2^{\sigma-2}}{R} \right) \left(\frac{M_{\beta}}{R} + M_{\alpha} M_f \right) \frac{\chi^{i+2}}{R^{\ell} \rho^{i+1}} \frac{(\ell + 2i + 3)!^{\sigma}}{(i + 1)!^{2-\sigma} (2i + 3)!^{\sigma-1}}.$$

Using (3.19), the above inequality implies (3.21) for β_{i+1} . \square

Corollary 3.4.6. *With the assumptions of proposition 3.4.4, if $\sigma < 2$, then the function defined by*

$$S(t, x) := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(t) \frac{x^{2i+1}}{(2i + 1)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(t) \frac{x^{2i}}{(2i)!} \quad (t, x \in \mathbb{R}), \quad (3.26)$$

is Gevrey of order σ in time and 1 in space and

$$\partial_t^{\ell} \partial_x^n S(t, x) = \sum_{2i+1 \geq n} \alpha_i^{(\ell)}(t) \frac{x^{2i+1-n}}{(2i + 1 - n)!} + \sum_{2i \geq n} \beta_i^{(\ell)}(t) \frac{x^{2i-n}}{(2i - n)!} \quad (t, x \in \mathbb{R}). \quad (3.27)$$

Moreover, for any $r > 0$, there exist $C, \tilde{r} > 0$ such that

$$\left| \partial_t^{\ell} \partial_x^n S(t, x) \right| \leq C \frac{n!}{r^n} \frac{(\ell)!^{\sigma}}{\tilde{r}^{\ell}} \quad (t, x \in \mathbb{R}, |x| \leq r). \quad (3.28)$$

Proof. Applying proposition 3.4.4, we deduce the existence of $C > 0$ such that for $t, x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \alpha_i^{(\ell)}(t) \frac{x^{2i+1-n}}{(2i + 1 - n)!} \right| \leq C \frac{\chi^i}{R^{\ell} \rho^i} |x|^{2i+1-n} \frac{(\ell + 2i)!^{\sigma}}{i!^{2-\sigma} (2i)!^{\sigma-1}} \frac{1}{(2i + 1 - n)!}. \quad (3.29)$$

$$\left| \beta_i^{(\ell)}(t) \frac{x^{2i-n}}{(2i - n)!} \right| \leq C \frac{\chi^{i+1}}{R^{\ell} \rho^i} |x|^{2i-n} \frac{(\ell + 2i + 1)!^{\sigma}}{i!^{2-\sigma} (2i + 1)!^{\sigma-1}} \frac{1}{(2i - n)!}. \quad (3.30)$$

Using that

$$(\ell + 2i)! \leq 2^{\ell+2i} \ell! (2i)!, \quad (2i)! \leq 2^{2i} (2i + 1 - n)! (n - 1)!$$

and similar relations for β_i , we deduce that if $|x| \leq r$,

$$\left| \alpha_i^{(\ell)}(t) \frac{x^{2i+1-n}}{(2i+1-n)!} \right| + \left| \beta_i^{(\ell)}(t) \frac{x^{2i-n}}{(2i-n)!} \right| \leq C \frac{n!}{r^n} \left(\frac{2^\sigma}{R} \right)^\ell (\ell!)^\sigma \frac{1}{i!^{2-\sigma}} \left(\frac{\chi 4^{\sigma+1} r^2}{\rho} \right)^i. \quad (3.31)$$

Since $\sigma < 2$,

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!^{2-\sigma}} \left(\frac{\chi 4^{\sigma+1} r^2}{\rho} \right)^i < \infty,$$

Therefore, the function S defined by (3.26) is C^∞ in time and space and satisfies for any $t, x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq r$,

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^n S(t, x) \right| \leq C \frac{n!}{r^n} \left(\frac{2^\sigma}{R} \right)^\ell (\ell!)^\sigma.$$

□

3.5 Analyticity of the solutions of the Stefan problem

In this section, we show that the solutions of the Stefan problem are analytic in the time and space variables for any positive time and more precisely that we can write θ under the form (3.13) provided that we choose the controls adequately. The proof is based on results of [43] that we recall here.

Let us assume that θ^0 and b^0 satisfy (3.7). We consider $u_0, u_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ analytic and such that $u_0(0) = \theta^0(0)$, $u_1(0) = \theta^0(1)$, $u_0 < 0$ and $u_1 > 0$. One can for instance take u_0 and u_1 as constant functions. Then from [43], the system (3.1)–(3.3) admits a unique solution (b, θ) in $[0, T]$. Moreover, b is analytic in time and after a change of variable, the temperature is also analytic in time. Let us precise this result.

First, we consider the map

$$\mathbb{T}(t) := \int_0^t \frac{1}{b(s)^2} ds.$$

We have that \mathbb{T} is a bijection from $[0, T]$ onto $[0, T_b]$, where $T_b := \int_0^T \frac{1}{b^2} ds$, and we can define

$$f(\tau) := u_0(\mathbb{T}^{-1}(\tau)) \quad (\tau \in [0, T_b]),$$

$$v(\tau, y) := \theta(\mathbb{T}^{-1}(\tau), yb(\mathbb{T}^{-1}(\tau))) - (1-y)f(\tau) \quad (\tau \in [0, T_b], y \in [0, 1]).$$

It is proven in [43] that for any closed interval \mathcal{I} in $(0, T_b]$, there exist $M > 0$, $K_\tau > 0$ and $K_y > 0$ such that for all $\tau \in \mathcal{I}$ and $y \in [0, 1]$,

$$\left| \partial_\tau^n \partial_y^q v(\tau, y) \right| \leq M K_\tau^n K_y^q (n+q)! \quad (n \geq 0, q \in \{0, 1, 2\}). \quad (3.32)$$

The above estimates yield in a standard way the analyticity of v in time and space. For sake of completeness, let us give a sketch of proof of this property. First, we deduce from (3.1a) that for $\tau \in [0, T_b]$, and $y \in [0, 1]$,

$$\partial_\tau v - c \partial_{yy} v = b(\mathbb{T}^{-1}(\tau)) b'(\mathbb{T}^{-1}(\tau)) y (\partial_y v - f(\tau)) - (1-y) f'(\tau)$$

and thus

$$\partial_{yy} v = \frac{1}{c} \partial_\tau v + y d(\tau) \partial_y v + f_0(\tau) + y f_1(\tau) \quad (3.33)$$

with d, f_0, f_1 analytic in $(0, T]$. By taking possibly M and K_τ larger, we can also assume that for all $\tau \in \mathcal{I}$,

$$\left|d^{(n)}(\tau)\right| + \left|f_1^{(n)}(\tau)\right| \leq MK_\tau^n n! \quad (n \geq 0). \quad (3.34)$$

We can also suppose that

$$K_y \geq \frac{1}{c}K_\tau + 2M + 1. \quad (3.35)$$

Then we can show by induction on q that for any $\tau \in \mathcal{I}$, $y \in [0, 1]$, and $n \geq 0$,

$$\left|\partial_\tau^n \partial_y^q v(\tau, y)\right| \leq MK_\tau^n K_y^q (n+q)!. \quad (3.36)$$

From (3.33), we deduce

$$\partial_\tau^n \partial_y^3 v = \frac{1}{c} \partial_\tau^{n+1} \partial_y v + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d^{(n-k)} \partial_\tau^k \partial_y v + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d^{(n-k)} \partial_\tau^k \partial_y^2 v + f_1^{(n)}(\tau) \quad (3.37)$$

From (3.32) and (3.34), the above relation yields

$$\begin{aligned} \left|\partial_\tau^n \partial_y^3 v(\tau, y)\right| &\leq \frac{1}{c} MK_\tau^{n+1} K_y (n+2)! + M^2 K_\tau^n K_y n! (n+1)^2 + M^2 K_\tau^n K_y^2 n! (n+2)(n+1)^2 + MK_\tau^n n! \\ &= MK_\tau^n K_y^2 (n+3)! \left(\frac{1}{c} \frac{K_\tau}{K_y} \frac{1}{n+3} + \frac{M}{K_y} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} + M \frac{n+1}{n+3} + \frac{1}{K_y^2} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right). \end{aligned}$$

Combining this relation with (3.35), we obtain (3.36) for $q = 3$. The induction for $q \geq 4$ is completely similar.

We deduce from (3.36) the existence of $\varepsilon > 0$ such that for $y \in [1 - \varepsilon, 1]$ and $\tau \in \mathcal{I}$,

$$v(\tau, y) = \sum_{q=1}^{\infty} v_q(\tau) \frac{(y-1)^q}{q!}.$$

Thus, for any interval \mathcal{J} of $(0, T]$, we can decompose θ as (3.13a) for $t \in \mathcal{J}$ and for $x \in [(1 - \varepsilon)b(t), b(t)]$. We can proceed similarly for $x \in [b(t), (1 + \varepsilon)b(t)]$ and we obtain (3.13b). Due to (3.36), the formal computation done in Section 3.3 is justified, and we obtain (3.14) and (3.15). We can thus apply proposition 3.4.4 (with $\sigma = 1$) and corollary 3.4.6. This shows that the decompositions (3.13a) and (3.13b) hold for $x \in [0, b(t)]$ and $x \in [b(t), 1]$.

3.6 Proof of the main results

We are now in position to prove theorems 3.2.1 and 3.2.2.

Proof of theorem 3.2.1. We set

$$\tilde{u}_0(t) := \theta^0(0) < 0 \quad \text{and} \quad \tilde{u}_1(t) := \theta^0(1) > 0.$$

From Section 3.5, the corresponding solution $(\tilde{b}, \tilde{\theta})$ of (3.1)–(3.3) with the above controls satisfies (3.13) for $t \in (0, T]$. The corresponding coefficients $\tilde{\alpha}_{\pm, i}$ and $\tilde{\beta}_{\pm, i}$ verify $\tilde{\beta}_{\pm, 0} = 0$, (3.14) and (3.15). Since $\tilde{b} \in (0, 1)$ in $(0, T]$, there exists $\varepsilon \in (0, 1)$ such that

$$\frac{\varepsilon T}{3} \left\| \tilde{b}' \right\|_{L^\infty(0, T)} < \tilde{b} \left(\frac{T}{3} \right) < 1 - \frac{\varepsilon T}{3} \left\| \tilde{b}' \right\|_{L^\infty(0, T)}.$$

We consider now ϕ_σ and η_σ satisfying the property of lemma 3.4.2. The function defined by

$$\widehat{b}(t) := \widetilde{b} \left(\frac{T}{3} \right) + \int_{\frac{T}{3}}^t \widetilde{b}'(s) \phi_\sigma \left(\frac{3s - T}{\varepsilon T} \right) ds \quad (3.38)$$

satisfies $\widehat{b}(t) \in (0, 1)$ for $t \geq T/3$ and is constant after $t \geq (1 + \varepsilon)T/3$. We denote by \widehat{b}^0 the value of $\widehat{b}(t)$ after $t \geq (1 + \varepsilon)T/3$, and we introduce,

$$\gamma(t) := \frac{3(\widehat{b}^0 - \bar{b})}{T(2 - \varepsilon)} \eta_\sigma \left(\frac{3t - T(1 + \varepsilon)}{T(2 - \varepsilon)} \right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

and for $\tau \in (0, T)$,

$$\alpha_{-,0}(t) := \widetilde{\alpha}_{-,0}(t) \phi_\sigma \left(\frac{3t - T}{\varepsilon T} \right) + \bar{v} \phi_\sigma \left(\frac{T - t}{T - \tau} \right) \quad (t \in (0, T]), \quad (3.39)$$

$$\alpha_{+,0}(t) := \widetilde{\alpha}_{+,0}(t) \phi_\sigma \left(\frac{3t - T}{\varepsilon T} \right) + \bar{v} \phi_\sigma \left(\frac{T - t}{T - \tau} \right) + \gamma(t) \quad (t \in (0, T]). \quad (3.40)$$

We define b by $b = \widetilde{b}$ in $[0, \min(\tau, T/3)]$ and satisfying (3.15) in $[\min(\tau, T/3), T]$. Taking the difference between (3.39) and (3.40), we can check that

$$b(t) := \widehat{b}(t) + \left(\bar{b} - \widehat{b}^0 \right) \int_{-(1+\varepsilon)/(2-\varepsilon)}^{(3t-T(1+\varepsilon))/(T(2-\varepsilon))} \eta_\sigma(s) ds \quad (t \in [T/4, T]).$$

In particular, we have $b(t) = \widehat{b}(t)$ for $t < T(1 + \varepsilon)/3$.

We also define $\alpha_{\pm,i}$ and $\beta_{\pm,i}$ with (3.14) and with $\beta_{\pm,0} = 0$. From the properties of ϕ_σ and η_σ (see lemma 3.4.2), we deduce that

$$\alpha_{\pm,i} = \widetilde{\alpha}_{\pm,i}, \quad \beta_{\pm,i} = \widetilde{\beta}_{\pm,i} \quad (i \geq 0, t \in (0, \min(\tau, T/3)]),$$

$$\alpha_{-,0}(T) = \bar{v}, \quad \alpha_{+,0}(T) = \bar{v}, \quad \alpha_{\pm,i}(T) = 0 \quad (i \geq 1), \quad \beta_{\pm,i}(T) = 0 \quad (i \geq 0), \quad b(T) = \bar{b}.$$

Moreover, there exist $M, R > 0$ such that $\alpha_{-,0}, \alpha_{+,0}, b' \in \mathcal{G}(M, R, \sigma)$. We can apply proposition 3.4.4 and corollary 3.4.6 and define θ by (3.13). Following the computation of Section 3.3, we deduce that θ and b satisfy (3.1) with

$$(b, \theta) = (\widetilde{b}, \widetilde{\theta}) \quad \text{in } (0, \min(\tau, T/3)] \quad \text{and} \quad b(T) = \bar{b}, \quad \theta(T, x) = \bar{v}(x - \bar{b}) \quad (x \in [0, 1]).$$

□

Proof of theorem 3.2.2. We define

$$\alpha(s) := v^0 \phi_\sigma(s) + \bar{v} \phi_\sigma(1 - s) \quad (s \in \mathbb{R}). \quad (3.41)$$

Then, we set

$$\text{if } b^0 \geq \bar{b}, \quad \alpha_{-,0} := \alpha \left(\frac{t}{T} \right), \quad \alpha_{+,0} := \alpha \left(\frac{t}{T} \right) + \frac{b^0 - \bar{b}}{T} \eta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (3.42a)$$

and

$$\text{if } b^0 < \bar{b}, \quad \alpha_{-,0} := \alpha \left(\frac{t}{T} \right) + \frac{\bar{b} - b^0}{T} \eta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right), \quad \alpha_{+,0} := \alpha \left(\frac{t}{T} \right) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (3.42b)$$

We also set

$$b(t) := b^0 + (\bar{b} - b^0) \int_0^{t/T} \eta_\sigma(s) ds \quad (3.43)$$

and we consider $\alpha_{\pm,i}$ and $\beta_{\pm,i}$ for $i \geq 1$ given by (3.14) with $\beta_{\pm,0} = 0$. We can check that (3.15) holds true.

We assume $T \geq 1$, and we thus deduce from the above construction that there exist $M > 0$ and $R > 0$ such that $\alpha_{-,0}, \alpha_{+,0} \in \mathcal{G}(M, RT, \sigma)$ and $b' \in \mathcal{G}(\frac{M}{T}, RT, \sigma)$. We apply proposition 3.4.4 : the condition (3.19) writes

$$\rho \leq \frac{2^{3-\sigma} RT}{3} \quad \text{and} \quad \rho \leq \frac{2T^2}{3\chi M^2}. \quad (3.44)$$

In particular, for T large enough, one can take

$$\rho := \rho_0 T, \quad \text{with} \quad \rho_0 := \frac{2^{3-\sigma} R}{3}.$$

With this choice, we can apply corollary 3.4.6 and define θ by (3.13). Following the computation of Section 3.3, we deduce that θ and b satisfy (3.1) with

$$(b(0), \theta(0, \cdot)) = (b^0, v^0(\cdot - b^0)) \quad \text{and} \quad (b(T), \theta(0, \cdot)) = (\bar{b}, \bar{v}(\cdot - \bar{b})).$$

From the property of η_σ , we have that b is monotone and thus $b(t) \in (0, 1)$ for any $t \in [0, T]$. We also deduce that

$$\alpha_{\pm,0}(t) \geq \min(v^0, \bar{v}) > 0. \quad (3.45)$$

Moreover, we have the following estimates, for any $i \in \mathbb{N}$:

$$\|\alpha_{\pm,i}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{M\chi^i (2i)!}{\rho_0^i T^i i!^{2-\sigma}}, \quad \|\beta_{\pm,i+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{M^2 \chi^{i+1} (2i+1)!}{T \rho_0^i T^i i!^{2-\sigma}}. \quad (3.46)$$

Thus

$$\delta(t, x) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{-,i}(t) \frac{(x - b(t))^{2i}}{(2i+1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{-,i}(t) \frac{(x - b(t))^{2i-1}}{(2i)!}$$

satisfies for $0 < x < b(t)$,

$$|\delta(t, x)| \leq \frac{C_\delta}{T} \quad \text{where} \quad C_\delta := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M\chi^i}{\rho_0^i} \frac{1}{i!^{2-\sigma}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^2 \chi^{i+1}}{\rho_0^i} \frac{1}{i!^{2-\sigma}} < \infty.$$

We thus deduce from (3.13a), the above relation and (3.45) that for T large enough

$$\frac{\theta(t, x)}{x - b(t)} = \alpha_{-,0}(t) + \delta(t, x) \geq \frac{1}{2} \min(v^0, \bar{v}) > 0 \quad (x < b(t))$$

and with a similar argument, one can show that for T large enough,

$$\frac{\theta(t, x)}{x - b(t)} \geq \frac{1}{2} \min(v^0, \bar{v}) > 0 \quad (x > b(t)).$$

□

Let us now show the estimate of the cost of the controls for large time and in the framework of theorem 3.2.2 :

Proof of corollary 3.2.3. We can assume that $b^0 < \bar{b}$ (the other case can be treated similarly). In that case, $\alpha_{\pm,0}$ are given by (3.41) and (3.42b) and $\beta_{\pm,0} = 0$. We obtain $\alpha_{\pm,i}$ and $\beta_{\pm,i}$ for $i \geq 1$ with (3.14). First, according to (3.43), we have for every $t \in [0, T]$

$$b^0 \leq b(t) \leq \bar{b}. \quad (3.47)$$

From (3.16a), (3.10) and the above relation, we deduce that

$$|u_0(t) - \bar{u}_0| \leq |\bar{v}\bar{b} - \alpha_{-,0}(t)b(t)| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{-,i}(t)|}{(2i+1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\beta_{-,i}(t)|}{(2i)!}.$$

Combining this with (3.41) and (3.42b) yields

$$|u_0(t) - \bar{u}_0| \leq \bar{v}|\bar{b} - b^0| + \bar{b}|v^0 - \bar{v}| + \frac{|\bar{b} - b^0|}{T} \|\eta_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{-,i}(t)|}{(2i+1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\beta_{-,i}(t)|}{(2i)!}. \quad (3.48)$$

Similarly,

$$|u_1(t) - \bar{u}_1| \leq \bar{v}|\bar{b} - b^0| + |v^0 - \bar{v}|(1 - b^0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{+,i}(t)|}{(2i+1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\beta_{+,i}(t)|}{(2i)!}. \quad (3.49)$$

Now, from (3.14), (3.15), (3.41) and (3.42b)

$$\beta_{-,1} = -\frac{1}{c_-} \frac{\bar{b} - b^0}{T} \eta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \left((v^0 - \bar{v}) \phi_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) + \bar{v} + \frac{\bar{b} - b^0}{T} \eta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \right),$$

and

$$\alpha_{-,1} = \frac{1}{c_- T} \left((v^0 - \bar{v}) \phi'_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) + \frac{\bar{b} - b^0}{T} \eta'_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \right) - \frac{1}{c_-} \frac{b^0 - \bar{b}}{T} \eta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) \beta_{-,1}.$$

We have similar expressions for $\alpha_{+,1}$ and $\beta_{+,1}$. Consequently, for T large enough,

$$\beta_{\pm,1}, \alpha_{\pm,1}, b' \in \mathcal{G} \left(\frac{M}{T}, RT, \sigma \right)$$

with M of the form

$$M = M_0 (|\bar{b} - b^0| + |v^0 - \bar{v}|)$$

and where $M_0 > 0$ depends on c_\pm , \bar{b} , \bar{v} , b^0 and v^0 . We now apply proposition 3.4.4 : as in the proof of theorem 3.2.2, one can take

$$\rho := \rho_0 T, \quad \text{with } \rho_0 := \frac{2^{3-\sigma} R}{3}$$

so that for T large enough, condition (3.19) is satisfied. We then deduce for $i \geq 1$,

$$\|\alpha_{\pm,i}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{M \chi^{i-1}}{\rho_0^{i-1} T^i} \frac{(2i-2)!}{(i-1)!^{2-\sigma}}, \quad \|\beta_{\pm,i+1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{M}{R} + M^2 \right) \frac{\chi^i}{\rho_0^{i-1} T^{i+1}} \frac{(2i-1)!}{(i-1)!^{2-\sigma}}, \quad (3.50)$$

with $\chi = \max(c_-, c_+)$. From the above estimates, we obtain,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_{\pm,i}(t)|}{(2i+1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\beta_{\pm,i}(t)|}{(2i)!} \leq \frac{C}{T} (|\bar{b} - b^0| + |v^0 - \bar{v}|). \quad (3.51)$$

Combining these estimates with (3.48) and (3.49) yields the conclusion. \square

3.7 Numerical illustrations

In this section, we present some numerical tests based on our theoretical results. First, we estimate the error associated with the truncation of the series defining the solutions, see (3.13).

Corollary 3.7.1. *Assume the same hypotheses of proposition 3.4.4 and that $\sigma < \sigma' < 2$. Then the series defined by (3.26) satisfies the following property :*

$$\left\| \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i(t) \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=N}^{\infty} \beta_i(t) \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right\|_{L^\infty((0,T) \times (0,1))} = o\left(\frac{1}{(\ln N)(N!)^{2-\sigma'}}\right). \quad (3.52)$$

Proof. Using (3.20) and (3.21),

$$\left\| \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i(t) \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \sum_{i=N}^{\infty} \beta_i(t) \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right\|_{L^\infty((0,T) \times (0,1))} = o\left(\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{i!^{2-\sigma'}}\right). \quad (3.53)$$

Now, using Stirling formula,

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{i!^{2-\sigma'}} \leq \sum_{i=N}^{\infty} \exp\left(-\left(2-\sigma'\right)\left(i+\frac{1}{2}\right)\ln i - i\right).$$

Since the function $g(x) := \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x$ is increasing and convex in $[1, \infty)$, we deduce from the above estimate that

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{i!^{2-\sigma'}} \leq \int_N^{\infty} \exp\left(-\left(2-\sigma'\right)g(x)\right) dx \leq \frac{\exp\left(-\left(2-\sigma'\right)g(N)\right)}{\left(2-\sigma'\right)\ln N}.$$

Using again the Stirling formula, we deduce the result. \square

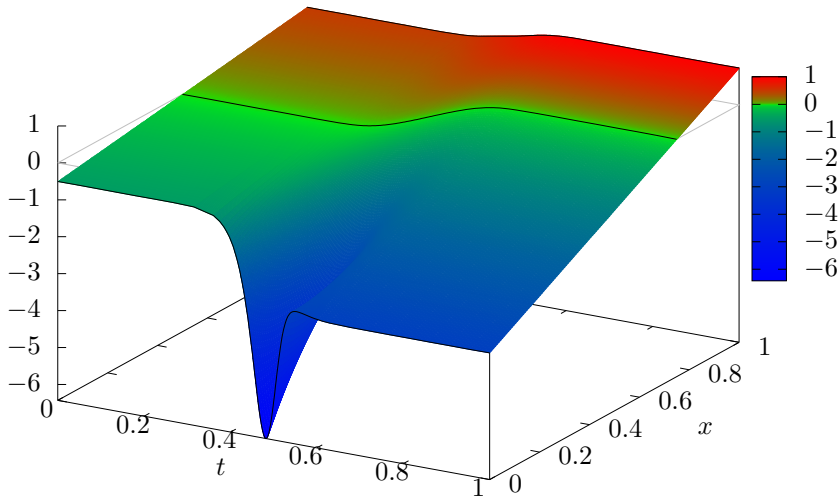
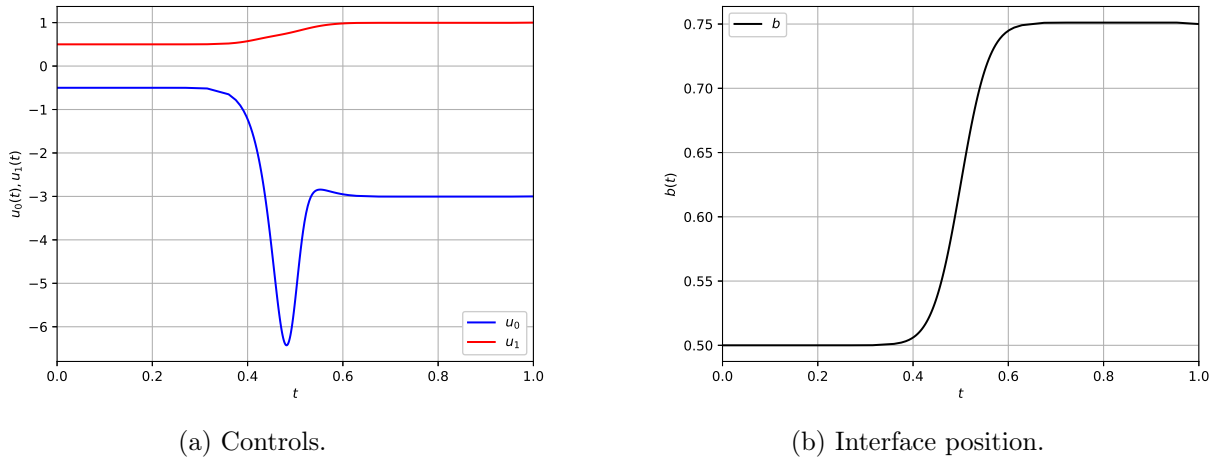
Now to illustrate the construction of our controls, we presented below some numerical tests obtained through a code in `Matlab` available at <https://hal.science/hal-03889209v1>

First, we follow for instance the proof of theorem 3.2.2 to pass from a stationary state to another. We only need some functions ϕ_σ and η_σ , and we can use the explicit formula given in lemma 3.4.2. This allows us to build $\alpha_{\pm,0}$ and b . Then we use (3.14) for $i = 1, \dots, N$ and build the approximations of the solutions with the formula (3.13) where the series are truncated at $i = N$. Due to corollary 3.7.1, we know that the convergence of these series is quite quick which allows us to consider small values of N . In figure 3.4, we illustrate the convergence of the controls u_0 and u_1 with respect to N . In this test, we take $c_- = c_+ = 1$, $T = 1$, $b^0 = 1/2$, $v^0 = 1$, $\bar{b} = 3/4$ and $\bar{v} = 4$.

Let us mention that in order to compute the coefficients $\alpha_{\pm,i}$ and $\beta_{\pm,i}$ defined by induction in (3.14), we use the symbolic calculus in `Matlab` to differentiate the formulas.

With the same parameters as above, figure 3.2 corresponds to the numerical test for $N = 7$. We represent the two controls u_0 and u_1 , and the evolution of b and of θ with respect to time.

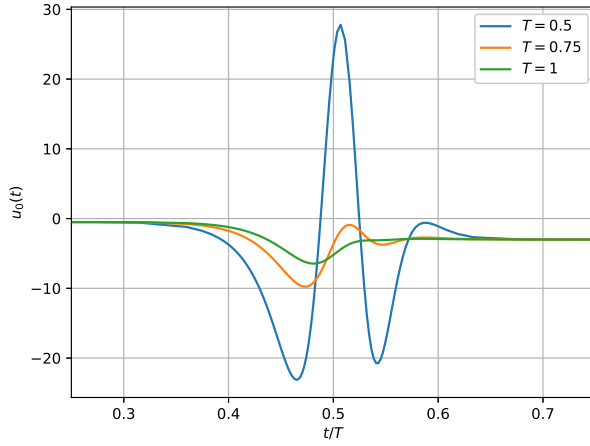
Finally, in figure 3.3, we consider the dependence of the controls u_0 and u_1 with respect to T . We see in particular that for $T = 0.5$, the control u_0 have positive values whereas for $T = 0.75$ and for $T = 1$, this control remains negative. We can observe the convergence of the controls when N is growing on figure 3.4 where we observe a ‘‘smoothing effect’’. On figures 3.3 and 3.4, the controls are almost constant for abscissa less than 0.25 and larger than 0.75 and thus those areas are excluded from these figure.



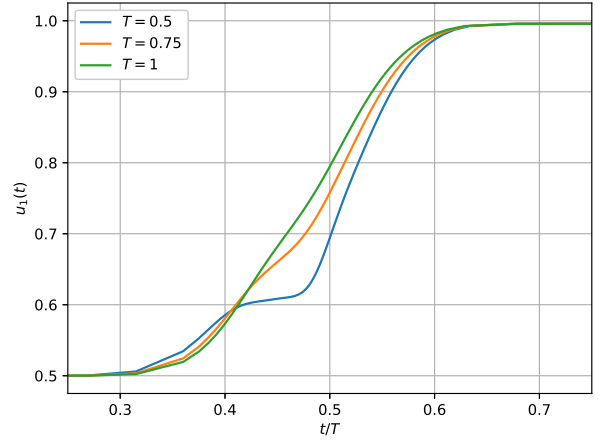
(c) Temperatures.

FIGURE 3.2 – Numerical test with $T = 1$, $N = 7$, $(b^0, v^0) = (1/2, 1)$, $(\bar{b}, \bar{v}) = (3/4, 4)$, $c_- = c_+ = 1$.

Figures 3.2,3.3 and 3.4 correspond to the case where our controls are of Gevrey order $\sigma = 3/2$. We display in figures 3.6,3.5 the dependence of the controls with respect to $\sigma \in (1, 2)$. As σ decreases and gets close to 1, the approximation ϕ_σ of the Heaviside type function can show more singularities (see the expression of ϕ_σ in the proof of lemma 3.4.2) and so can the controls we are constructing.

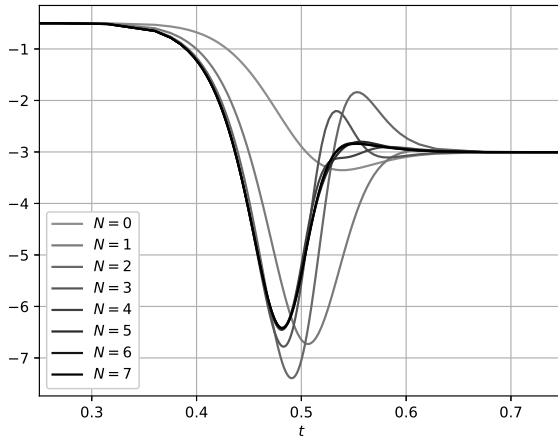


(a) Dependence of u_0 on T .

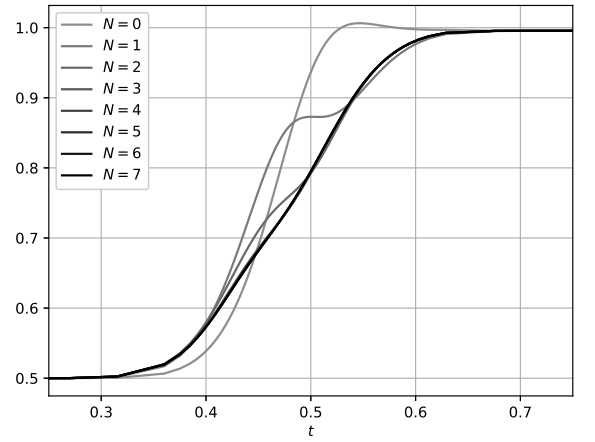


(b) Dependence of u_1 on T .

FIGURE 3.3 – Dependence of the controls with respect to T . Test done with $N = 4$, $(b^0, v^0) = (1/2, 1)$, $(\bar{b}, \bar{v}) = (3/4, 4)$, $c_- = c_+ = 1$.



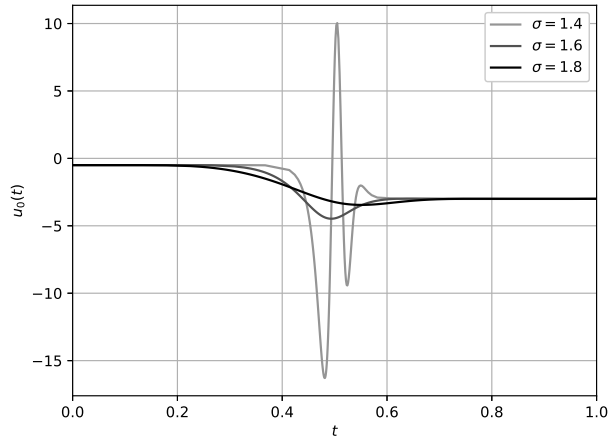
(a) Dependence of u_0 on N .



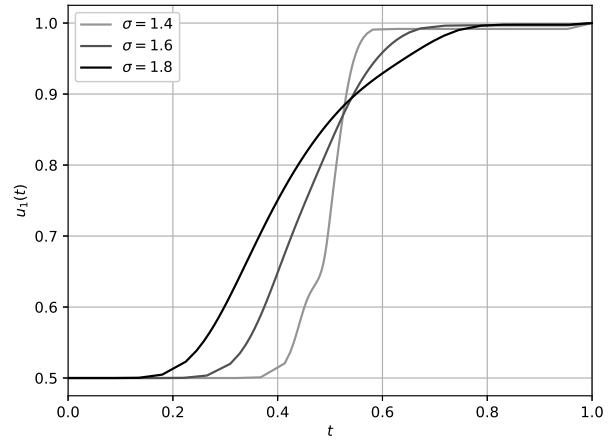
(b) Dependence of u_1 on N .

FIGURE 3.4 – Convergence of the controls with N . Test done with $T = 1$, $(b^0, v^0) = (1/2, 1)$, $(\bar{b}, \bar{v}) = (3/4, 4)$, $c_- = c_+ = 1$.

Let us also mention that we do not observe, as it is the case for the minimal L^2 -norm control (see [50, 94]), a singular behavior of the control at the final time. This is due to our method where we use regular solutions and controls. In particular here the control and all its derivatives cancel at the final time. Note also that for T small, the terms in the series for the solution or for the control (see the proof of theorem 3.2.2) behave like powers of $1/T$. Hence, the convergence of the numerical computation is delicate to handle for small values of T .

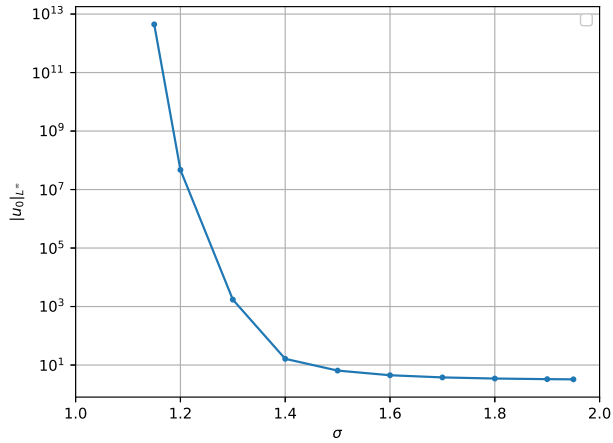


(a) Dependence of u_0 on σ .

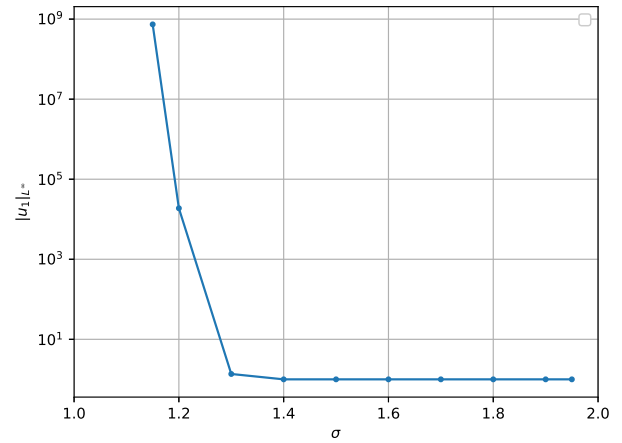


(b) Dependence of u_1 on σ .

FIGURE 3.5 – Controls for different values of $\sigma \in (1, 2)$. Tests done with $N = 4$, $(b^0, v^0) = (1/2, 1)$, $(\bar{b}, \bar{v}) = (3/4, 4)$, $c_- = c_+ = 1$ and $T = 1$.



(a) Dependence of $\|u_0\|_{L^\infty}$ on σ .



(b) Dependence of $\|u_1\|_{L^\infty}$ on σ .

FIGURE 3.6 – L^∞ norm of the controls for different values of $\sigma \in (1, 2)$ in log scale. Tests done with $N = 4$, $(b^0, v^0) = (1/2, 1)$, $(\bar{b}, \bar{v}) = (3/4, 4)$, $c_- = c_+ = 1$ and $T = 1$.

3.8 Conclusion

In this article, we have shown how one can obtain some controllability results for the Stefan problem by using the flatness approach. In the case where the initial and the final state are stationary states, we can show that for T large enough, the solutions satisfies the sign constraints related to the physical model.

There are several perspectives :

- It would be interesting to extend the controllability results with the sign constraints for more general initial conditions. One could also investigate the value of the minimal time $T_1 > 0$ for the controllability result with the sign constraint.
- The flatness method naturally leads to consider boundary controls as the controls are obtained as the traces of the solutions. It is possible however to construct an internal control by combining the boundary controllability, see [82, Corollary 1.2]. One can also wonder if it is possible to use the flatness method with other controls such as a lumped control of the form $u(t)g(x)$.
- Let us also mention that we could have considered the Stefan problem with only one phase as in [11, 21, 29, 30]. In that case, the stationary states are reduced to the null function, and we could not show the controllability with a sign condition. We refer to cite [23, Section 3], for the use of the maximum principle to get the behavior of the solution, when sign constraints are imposed on the one phase Stefan problem. Without the sign constraint, our method can be extended to show a controllability result for the one phase Stefan problem, similar to theorem 3.2.1.
- Finally, an interesting question is to see if the flatness approach can be used to construct optimal controls (in a sense to be defined).

Flatness approach for the boundary controllability of a system of heat equations

Cette section reprend l'article [18], co-écrit avec Jérôme Lohéac et Takéo Takahashi.

Sommaire

4.1	Abstract	81
4.2	Introduction	82
4.3	Flatness approach	84
4.3.1	The general method	84
4.3.2	The boundary conditions at $x = 1$	86
4.4	Proof of theorem 4.2.1	88
4.5	Proof of theorem 4.2.2	92
4.6	Proof of theorem 4.2.4	95
4.7	Conclusion	95

4.1 Abstract

We study the boundary controllability of 2×2 system of heat equations by using a flatness approach. According to the relation between the diffusion coefficients of the heat equation, it is known that the system can be not null-controllable or null-controllable for any $T > T_0$ where $T_0 \in [0, \infty]$. Here we recover this result in the case that $T_0 \in [0, \infty)$ by using the flatness method, and we obtain an explicit formula for the control and for the corresponding solutions. In particular, the state and the control have Gevrey regularity in time and in space.

4.2 Introduction

We consider the boundary controllability of the following system coupling two heat equations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y_1 - \partial_x^2 y_1 = 0 \quad \text{in } (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_t y_2 - \frac{1}{d} \partial_x^2 y_2 = y_1 \quad \text{in } (0, T) \times (0, 1), \\ y_1(t, 0) = 0, \quad y_1(t, 1) = u(t) \quad \text{in } (0, T), \\ y_2(t, 0) = y_2(t, 1) = 0 \quad \text{in } (0, T), \\ y_1(0, \cdot) = y_1^0, \quad y_2(0, \cdot) = y_2^0 \quad \text{in } (0, 1), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

where $d > 0$. This is a ‘‘cascade’’ system : the control u acts on y_1 (at $x = 1$) whereas y_2 is controlled through y_1 . The controllability of coupled heat equations has been studied by several authors, and we refer the reader to the survey paper [3] for results until 2011. In the case of distributed controls, it is possible to obtain general results such as Kalman criterion to show the null-controllability of the corresponding system for any time $T > 0$ (see [1] and also [109] in the case of Stokes systems instead of heat equations). In the case of boundary controls, we can quote for instance [4, 5, 7] where the authors obtain in particular that the minimal time of controllability can be positive. Let us also mention [106] where the author considers a system similar to system (4.1), where the coupling term in the second equation is of the form qy_1 , $q \in L^\infty(0, 1)$ instead of y_1 . In that case, using the block moment method introduced in [7], he obtains a characterization of the time of controllability.

For system (4.1), the controllability properties depend on the coefficient d : if $d = 1$, then the system is null-controllable for any $T > 0$ (see [2] and [28]), whereas if $d \neq 1$ and $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$, then the system is not null-controllable for any $T > 0$. In the case $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, the system is null-controllable at any time $T > c(\Lambda_d)$ and not null-controllable for any $T < c(\Lambda_d)$ (see [4, Theorem 6.17]), where $c(\Lambda_d)$ is the index of condensation of the sequence

$$\Lambda_d := \left\{ \frac{(\pi n)^2}{d}, (\pi n)^2 \right\}_{n \geq 1}.$$

In that case, one can show (see [4, Relation (6.16)]) that

$$c(\Lambda_d) = \max(l_1, l_2), \quad l_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \left| \sin \left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}} \right) \right|}{\pi^2 n^2}, \quad l_2 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln \left| \sin \left(\pi n \sqrt{d} \right) \right|}{\pi^2 n^2}. \quad (4.2)$$

Using the differential flatness, our aim is to show that the system is null-controllable, as soon as $d = 1$ or $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ with $c(\Lambda_d) < \infty$. The flatness approach comes from the study of finite-dimensional control systems and has already been applied to several partial differential equations : the heat equation [81, 83], general parabolic equations [82], the Schrödinger equation [84], the linear Korteweg-de Vries equation [80] and a class of semi-linear heat equations [70]. The authors of the present paper have used this method to show some controllability properties of some free boundary models : the Stefan problem, in [16] and a cross-diffusion problem in [17].

In order to state our mains results, we first recall the notion of Gevrey functions. A function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a Gevrey function of order $\sigma \geq 1$ if it is C^∞ and if for any compact subset K of \mathbb{R} , there exist $M, R \in \mathbb{R}_+^*$ such that its derivatives satisfy

$$\left| f^{(\ell)}(t) \right| \leq M \frac{\ell!^\sigma}{R^\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}, t \in K).$$

Similarly, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a Gevrey function of order (σ_1, σ_2) if it is C^∞ and if for any compact subset K of \mathbb{R}^2 , there exist $M, R_1, R_2 \in \mathbb{R}_+^*$ such that

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^k g(t, x) \right| \leq M \frac{\ell!^{\sigma_1}}{R_1^\ell} \frac{k!^{\sigma_2}}{R_2^k} \quad (\ell, k \in \mathbb{N}, (t, x) \in K).$$

One of the interests in such functions for controllability properties comes from the fact that one can construct Gevrey function with compact support or which are constant on some intervals. For instance, for any $\sigma > 1$, the function

$$\theta_\sigma(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0, \\ \frac{e^{-(t-c_\sigma)}}{e^{-(1-t)^{-c_\sigma}} + e^{-(t-c_\sigma)}} & \text{if } t \in (0, 1), \\ 1 & \text{if } t \geq 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

with $c_\sigma = (\sigma - 1)^{-1}$ is a Gevrey function of order σ (see, for instance [23, Appendix B]). In particular, this function satisfies

$$\theta_\sigma^{(\ell)}(0) = \theta_\sigma^{(\ell)}(1) = 0 \quad (\ell \geq 1),$$

and one can show the existence of $M, R > 0$ such that

$$\left| \theta_\sigma^{(\ell)}(t) \right| \leq M \frac{\ell!^\sigma}{R^\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}).$$

For more information on the Gevrey functions, one can refer for instance to [99, 102, 114].

We are now in position to state our main results.

Theorem 4.2.1. *Assume $d \neq 1$ and $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ with $c(\Lambda_d) < \infty$. For any $\sigma \in (1, 2)$, $T > c(\Lambda_d)$ and $(y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, 1)^2$, there exists a control u Gevrey of order σ in $[0, T]$ such that the solution (y_1, y_2) of (4.1) is Gevrey of order $(\sigma, 1)$ in $(0, T] \times [0, 1]$ and such that*

$$y_1(T, \cdot) = y_2(T, \cdot) = 0.$$

Theorem 4.2.2. *Assume $d = 1$. For any $\sigma \in (1, 2)$, $T > 0$ and $(y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, 1)^2$, there exists a control u Gevrey of order σ in $[0, T]$ such that the solution (y_1, y_2) of (4.1) is Gevrey of order $(\sigma, 1)$ in $(0, T] \times [0, 1]$ and such that*

$$y_1(T, \cdot) = y_2(T, \cdot) = 0.$$

Remark 4.2.3. *We recall that if \sqrt{d} is irrational and algebraic, then $c(\Lambda_d) = 0$. Moreover, for any $T_0 > 0$, there exists d such that $c(\Lambda_d) = T_0$ (see [4, Proposition 6.20]).*

We also consider the particular case where the initial and final conditions of our control problem are stationary states, that is, solutions of

$$\begin{cases} -\partial_x^2 \bar{y}_1 = 0 & \text{in } (0, 1), \\ -\frac{1}{d} \partial_x^2 \bar{y}_2 = \bar{y}_1 & \text{in } (0, 1), \\ \bar{y}_1(0) = 0, \quad \bar{y}_1(1) = \bar{u}, \\ \bar{y}_2(0) = 0, \quad \bar{y}_2(1) = 0, \end{cases}$$

for $\bar{u} \in \mathbb{R}$. The explicit solutions of the above system are

$$\bar{y}_1(x) = \bar{u}x, \quad \bar{y}_2(x) = \frac{d}{6}\bar{u}(x - x^3) \quad (x \in [0, 1]). \quad (4.4)$$

For such particular control problem, one obtain the exact controllability for any $d > 0$ and any $T > 0$:

Theorem 4.2.4. *Assume $d > 0$, $T > 0$ and $\sigma \in (1, 2)$. For any stationary states $(\bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_2^{(1)})$ and $(\bar{y}_1^{(2)}, \bar{y}_2^{(2)})$, there exists a control u Gevrey of order σ in $[0, T]$ such that the solution (y_1, y_2) of (4.1) is Gevrey of order $(\sigma, 1)$ in $(0, T] \times [0, 1]$ and such that*

$$y_1(0, \cdot) = \bar{y}_1^{(1)}, \quad y_2(0, \cdot) = \bar{y}_2^{(1)} \quad \text{in } (0, 1)$$

and

$$y_1(T, \cdot) = \bar{y}_1^{(2)}, \quad y_2(T, \cdot) = \bar{y}_2^{(2)} \quad \text{in } (0, 1).$$

The outline of the paper is the following : in Section 4.3, we recall the flatness method that we use in our main results. Then we show theorem 4.2.1 in Section 4.4, theorem 4.2.2 in Section 4.5 and theorem 4.2.4 in Section 4.6. Finally, the Section 4.7 conclude this paper with some open problems.

4.3 Flatness approach

4.3.1 The general method

Following the approach developed in [81] for a single heat equation, we look for solutions of (4.1) of the form

$$y_1(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad y_2(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Inserting these expressions into the two first equations of (4.1) leads to the following induction formulae :

$$a_{k+1} = a'_k, \quad b_{k+1} = d(b'_k - a_k) \quad (k \geq 0)$$

so that the sequences (a_k) and (b_k) can be expressed through $a := a_0$ and $b := b_0$. More precisely, we obtain

$$y_1(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad y_2(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(d^k b^{(k)}(t) - d \frac{d^k - 1}{d - 1} a^{(k-1)}(t) \right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{if } d \neq 1, \quad (4.5)$$

$$y_1(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad y_2(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(b^{(k)}(t) - k a^{(k-1)}(t) \right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{if } d = 1, \quad (4.6)$$

where we denote by $a^{(k)}$ the k -th derivative of a .

Remark 4.3.1. *We could also add in the solutions a series for the even powers of x , but, as in the case of the heat equation alone (see, [81]), one can see that the corresponding coefficients are 0 due to the homogeneous Dirichlet boundary conditions at $x = 0$.*

In order to have that (4.5) or (4.6) are well-defined, we will search a and b as Gevrey functions and use the following result.

Lemma 4.3.2. *Assume that a and b are Gevrey functions of order $\sigma \in (1, 2)$ in \mathbb{R} . Then y_1 and y_2 defined either by (4.5) or (4.6) are well-defined and are Gevrey functions of order $(\sigma, 1)$ in \mathbb{R}^2 . They satisfy the two first equations of (4.1) and the Dirichlet boundary conditions $y_1(t, 0) = y_2(t, 0) = 0$ for all t .*

Proof. We only show that y_1 and y_2 are well-defined and are Gevrey functions of order $(\sigma, 1)$ in \mathbb{R}^2 , the fact that they satisfy the two first equations of (4.1) and the Dirichlet boundary conditions at $x = 0$ can be obtained by standard computations.

To show that the series in (4.5) or (4.6) are convergent and correspond to Gevrey functions, we see that they have the general form

$$y(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (4.7)$$

where c_k are C^∞ functions such that for any compact K of \mathbb{R} , there exist $M, R \in \mathbb{R}_+^*$ such that

$$\left| c_k^{(\ell)}(t) \right| \leq M \frac{(\ell+k)!^\sigma}{R^{\ell+k}} \quad (\ell, k \in \mathbb{N}, t \in K).$$

Let us consider $r > 0$ and let us set

$$g_k(t, x) := c_k(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Then, $\partial_t^\ell \partial_x^j g_k = 0$ if $2k+1 < j$, and if $2k+1 \geq j$, we have

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^j g_k(t, x) \right| \leq M \frac{(\ell+k)!^\sigma}{R^{\ell+k}} \frac{r^{2k+1-j}}{(2k+1-j)!} \quad (t \in K, |x| \leq r).$$

Combining this relation with the formula $(\ell+k)! \leq 2^{\ell+k} \ell! k!$, leads to

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^j g_k(t, x) \right| \leq 2Mr \frac{2^{\sigma\ell} \ell!^\sigma j!}{R^\ell r^j} \left(\frac{4(2^\sigma)r^2}{R} \right)^k \frac{k!^\sigma}{(2k+1)!} \quad (t \in K, |x| \leq r).$$

Since $\sigma < 2$, we have

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{4(2^\sigma)r^2}{R} \right)^k \frac{(k)!\sigma}{(2k+1)!} < \infty$$

and we deduce that formula (4.7) defines a C^∞ function y and that there exist $M_1, R_1 > 0$ such that

$$\left| \partial_t^\ell \partial_x^j y(t, x) \right| \leq M_1 \frac{(\ell)!\sigma j!}{R_1^\ell r^j} \quad (t \in K, |x| \leq r).$$

This concludes the proof of the lemma. □

4.3.2 The boundary conditions at $x = 1$

The control u will be given by the trace of y_1 at $x = 1$, that is

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(t)}{(2k+1)!}, \quad (4.8)$$

but it remains to deal with the Dirichlet boundary condition of y_2 at $x = 1$:

$$y_2(t, 1) = 0 \quad (t \in (0, T)). \quad (4.9)$$

One of the main difficulties in this method based on the flatness approach for the controllability of partial differential equations is coming from such a boundary condition. The particular form of the solutions ((4.5), (4.6)) yields directly the boundary conditions at $x = 0$ but it can be quite difficult to check any boundary condition at $x = 1$.

Let us start by a formal computation in the case $d \neq 1$ (the case $d = 1$ can be treated similarly). First, using (4.5), we write (4.9) as

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{(2k+1)!} b^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d \frac{d^k - 1}{d - 1} \frac{a^{(k-1)}(t)}{(2k+1)!} \quad (t \in (0, T)). \quad (4.10)$$

Let us assume that

$$a^{(k)}(0) = b^{(k)}(0) = 0 \quad (k \geq 0) \quad (4.11)$$

and let us consider the Laplace transforms of a and b :

$$\widehat{a}(s) := \int_0^{\infty} e^{-ts} a(t) dt, \quad \widehat{b}(s) := \int_0^{\infty} e^{-ts} b(t) dt \quad (s > 0).$$

Then, the relation (4.10) for $T = \infty$ yields that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k s^k}{(2k+1)!} \widehat{b}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} d \frac{d^k - 1}{d - 1} \frac{s^{k-1}}{(2k+1)!} \widehat{a}(s) \quad (s > 0).$$

One possible solution of the above equation is

$$\widehat{a}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k s^k}{(2k+1)!} \widehat{f}(s), \quad \widehat{b}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} d \frac{d^k - 1}{d - 1} \frac{s^{k-1}}{(2k+1)!} \widehat{f}(s) \quad (s > 0),$$

for some function f . If we assume that f satisfies the same property (4.11) as a and b , this leads us to consider the following form for a and b (if $d \neq 1$) :

$$a(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{(2m+1)!} f^{(m)}(t), \quad b(t) = \sum_{m=1}^{\infty} d \frac{d^m - 1}{d - 1} \frac{f^{(m-1)}(t)}{(2m+1)!}. \quad (4.12)$$

In the case $d = 1$, a similar formal computation leads to the following formulae

$$a(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m+1)!}, \quad b(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{f^{(m-1)}(t)}{(2m+1)!}. \quad (4.13)$$

Remark 4.3.3. Without condition (4.11), the relation (4.10) for $T = \infty$ yields a formula of the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k s^k}{(2k+1)!} \widehat{b}(s) - \sum_{k=1}^{\infty} d \frac{d^k - 1}{d-1} \frac{s^{k-1}}{(2k+1)!} \widehat{a}(s) = R(s) \quad (s > 0),$$

for a function R that can be expressed as a series of s . Such a Bézout identity may be difficult to solve in the general case and one can quote the recent article [96] where the author presents a practical algorithm for computing this kind of Bézout relations. A similar difficulty appears for the controllability by a flatness approach of the beam equation where there are four boundary conditions : the authors in [40] are using Mikusiński's operators (see [87]) to overcome this problem.

The following result gives a rigorous framework to the above formal computations :

Lemma 4.3.4. Assume f is a Gevrey function of order $\sigma \in (1, 2)$. Then formulae (4.12) (respectively (4.13)) define Gevrey functions a and b of order σ . Moreover, if (y_1, y_2) is defined by (4.6) (respectively (4.5)), then y_2 satisfies (4.9).

Proof. Assume K is a compact of \mathbb{R} and consider M, R such that

$$\left| f^{(m)}(t) \right| \leq M \frac{m!^\sigma}{R^m} \quad (m \in \mathbb{N}, t \in K).$$

Then

$$\left| \frac{d^\ell}{dt^\ell} \left(\frac{d^m}{(2m+1)!} f^{(m)} \right) (t) \right| \leq M \frac{2^{\sigma\ell} \ell!^\sigma}{R^\ell} \left(\frac{2^\sigma d}{R} \right)^m \frac{m!^\sigma}{(2m+1)!} \quad (\ell, m \in \mathbb{N}, t \in K)$$

and we deduce that a defined by (4.12) or (4.13) is a C^∞ function satisfying

$$\left| a^{(\ell)}(t) \right| \leq M_1 \frac{2^{\sigma\ell} \ell!^\sigma}{R^\ell} \quad (\ell \in \mathbb{N}, t \in K)$$

for some $M_1 > 0$. This shows that a is a Gevrey function of order σ . A similar estimate holds for b , leading to the fact that b is a Gevrey function of order σ .

Moreover, a similar computation shows that we can apply the Fubini theorem in the following computations.

If $d \neq 1$, using (4.5), deduce that

$$\begin{aligned} y_2(t, 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} d^k \frac{b^{(k)}(t)}{(2k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} d \frac{d^k - 1}{d-1} \frac{a^{(k-1)}(t)}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d^{k+1} \frac{d^m - 1}{d-1} \frac{f^{(m+k-1)}(t)}{(2k+1)!(2m+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d^{m+1} \frac{d^k - 1}{d-1} \frac{f^{(m+k-1)}(t)}{(2m+1)!(2k+1)!} \\ &= 0. \end{aligned}$$

If $d = 1$, using (4.6), we find similarly

$$\begin{aligned} y_2(t, 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{(k)}(t)}{(2k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^{(k-1)}(t)}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{f^{(m+k-1)}(t)}{(2k+1)!(2m+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} k \frac{f^{(m+k-1)}(t)}{(2m+1)!(2k+1)!} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Remark 4.3.5. We notice that in lemma 4.3.4, we do not need the condition (4.11) for a , b or f . In particular, by combining lemmas 4.3.2 and 4.3.4, we have obtained that for any Gevrey function f of order $\sigma \in (1, 2)$, the formulas (4.5) and (4.12) (for $d \neq 1$) and (4.6) and (4.13) (for $d = 1$) yield Gevrey functions y_1 and y_2 satisfying the first four equations of (4.1) with the control u defined by (4.8).

It remains to determine f so that the corresponding solutions satisfy the desired initial and final conditions. This is the aim of the next sections.

4.4 Proof of theorem 4.2.1

With the above section, we can construct solutions of (4.1) by using the formulas (4.5) and (4.12) (for $d \neq 1$) or (4.6) and (4.13) (for $d = 1$). In this construction, we need to determine a suitable function f . To this end, we first consider the operator associated with (4.1)

$$\mathcal{D}(A) := [H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)]^2, \quad A : \mathcal{D}(A) \rightarrow L^2(0, 1)^2, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\partial_x^2 y_1 \\ -\frac{1}{d}\partial_x^2 y_2 - y_1 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

The operator $-A$ is the infinitesimal generator of an analytic semigroup and if there is no control (that is if $u = 0$), the system (4.1) writes

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} (0) = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

One can compute the eigenvalues and eigenvectors of A in classical way, and we have the following standard result (see, for instance, [4]).

Proposition 4.4.1. Assume $d \neq 1$. The spectrum of A is composed of eigenvalues

$$\sigma(A) = \{\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}\}_{n \geq 1}, \quad \lambda_{1,n} = \frac{(\pi n)^2}{d}, \quad \lambda_{2,n} = (\pi n)^2 \quad (4.16)$$

and a corresponding family of eigenfunctions is

$$\psi_{1,n}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(n\pi x) \end{bmatrix}, \quad \psi_{2,n}(x) = \begin{bmatrix} \sin(n\pi x) \\ \frac{d}{(1-d)(n\pi)^2} \sin(n\pi x) \end{bmatrix} \quad (x \in [0, 1]).$$

The eigenvalues of A are simple if and only if $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

In particular, if $(y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, 1)^2$, then the solution of (4.1) with $u = 0$ (or equivalently of (4.15)) has the form

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} (t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_{1,n} \psi_{1,n} e^{-\lambda_{1,n} t} + \sum_{n \geq 1} \alpha_{2,n} \psi_{2,n} e^{-\lambda_{2,n} t}, \quad (4.17)$$

with $(\alpha_{1,n})_n, (\alpha_{2,n})_n \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. This shows in particular, that (y_1, y_2) is analytic at any $(t, x) \in (0, T] \times [0, 1]$ and we have

$$y_1(T, x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_{2,n} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_{2,n} T}, \quad (4.18)$$

$$y_2(T, x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_{1,n} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_{1,n} T} + \sum_{n \geq 1} \alpha_{2,n} \frac{d}{(1-d)(n\pi)^2} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_{2,n} T}. \quad (4.19)$$

In order to prove theorem 4.2.1, we use the linearity of our system, and we construct our solution as the difference of the solution (4.17) associated with the initial conditions $(y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, 1)^2$ and with $u = 0$ and a solution with initial conditions

$$y_1(0, \cdot) = y_2(0, \cdot) = 0 \quad \text{in } (0, 1) \quad (4.20)$$

and with the final conditions given by (4.18) and (4.19). As explained in Section 4.3, to build such solutions, we only need to define the Gevrey function f of order $\sigma \in (1, 2)$ such that the corresponding solution (y_1, y_2) satisfies the above initial and final conditions.

Remark 4.4.2. *Finding a suitable function f can be a difficult task in general. In order to do this, we can start by searching a function \tilde{f} such that the solutions (4.17) can be written formally under the form (4.5) and (4.12) where in the last relation f is replaced by \tilde{f} . Relation (4.17) implies*

$$y_1(t, x) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 1} (-1)^k \alpha_{2,n} (n\pi)^{2k+1} e^{-\lambda_{2,n}t} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$y_2(t, x) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 1} (-1)^k (n\pi)^{2k+1} \left[\alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \frac{d}{(1-d)(n\pi)^2} \alpha_{2,n} e^{-\lambda_{2,n}t} \right] \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

By identifying with (4.5), we obtain that

$$a^{(k)}(t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^k \alpha_{2,n} (n\pi)^{2k+1} e^{-\lambda_{2,n}t},$$

$$d^k b^{(k)}(t) - d \frac{d^k - 1}{d - 1} a^{(k-1)}(t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^k (n\pi)^{2k+1} \left[\alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \frac{d}{(1-d)(n\pi)^2} \alpha_{2,n} e^{-\lambda_{2,n}t} \right].$$

Combining these two equations, we deduce

$$b^{(k)}(t) = \sum_{n \geq 1} \left[(n\pi) (-\lambda_{1,n})^k \alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \frac{d}{(1-d)n\pi} \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t} \right].$$

We thus need to find a function \tilde{f} such that (see (4.12)) :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{(2m+1)!} \tilde{f}^{(m+k)}(t) = \sum_{n \geq 1} (n\pi) \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t}, \quad (4.21)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} d \frac{d^m - 1}{d - 1} \frac{\tilde{f}^{(m+k-1)}(t)}{(2m+1)!} = \sum_{n \geq 1} \left[(n\pi) (-\lambda_{1,n})^k \alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \frac{d}{(1-d)n\pi} \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t} \right]. \quad (4.22)$$

This suggests to search \tilde{f} under the form

$$\tilde{f}(t) := \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} e^{-\lambda_{2,n}t}. \quad (4.23)$$

By using the above expression for \tilde{f} and by switching the series, we formally obtain

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{(2m+1)!} \tilde{f}^{(m+k)}(t) = \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_{1,n})^k \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda_{1,n}d)^m}{(2m+1)!} \right) e^{-\lambda_{1,n}t}$$

$$+ \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda_{2,n}d)^m}{(2m+1)!} \right) e^{-\lambda_{2,n}t} \quad (4.24)$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} d \frac{d^m - 1}{d - 1} \frac{\tilde{f}^{(m+k-1)}(t)}{(2m+1)!} &= \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_{1,n})^k \left(\sum_{m=1}^{\infty} d \frac{d^m - 1}{d - 1} \frac{(-\lambda_{1,n})^{m-1}}{(2m+1)!} \right) e^{-\lambda_{1,n}t} \\ &+ \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k \left(\sum_{m=1}^{\infty} d \frac{d^m - 1}{d - 1} \frac{(-\lambda_{2,n})^{m-1}}{(2m+1)!} \right) e^{-\lambda_{2,n}t}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

From (4.16), we have

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{1,n}d)^m}{(2m+1)!} &= 0, & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{2,n}d)^m}{(2m+1)!} &= \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{1,n})^m}{(2m+1)!} &= \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right) \frac{\sqrt{d}}{\pi n}, & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_{2,n})^m}{(2m+1)!} &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Combining (4.24), (4.25) and (4.26), the equations (4.21) and (4.22) become

$$\sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t} = \sum_{n \geq 1} (n\pi) \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t}$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_{1,n})^k \frac{d^2}{(d-1)(\pi n)^2} \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right) \frac{\sqrt{d}}{\pi n} e^{-\lambda_{1,n}t} \\ + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k \frac{d}{(1-d)(\pi n)^2} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}} e^{-\lambda_{2,n}t} \\ = \sum_{n \geq 1} \left[(n\pi) (-\lambda_{1,n})^k \alpha_{1,n} e^{-\lambda_{1,n}t} + \frac{d}{(1-d)n\pi} \alpha_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k e^{-\lambda_{2,n}t} \right]. \end{aligned}$$

We can check that the solution of the above equations is given by

$$\beta_{1,n} := \alpha_{1,n} \frac{\pi^4 n^4 (d-1)}{d^{5/2} \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right)}, \quad \beta_{2,n} := \alpha_{2,n} \frac{\pi^2 n^2 \sqrt{d}}{\sin(\pi n \sqrt{d})}. \quad (4.27)$$

With these values of $(\beta_{1,n})$ and $(\beta_{2,n})$, \tilde{f} defined by (4.23) (formally) satisfies (4.21) and (4.22). Finally, to recover (4.20), we use a Gevrey function η equal to 0 for $t \leq 0$ and equal to 1 for $t \geq T$, and we then set $f := \tilde{f}\eta$. In what follows, we apply this strategy to prove theorem 4.2.1.

Proof of theorem 4.2.1. Let us consider $T > T_0 > c(\Lambda_d)$, $\sigma \in (1, 2)$ and let us define

$$\eta(t) := \theta_{\sigma} \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right),$$

where θ_{σ} is given by (4.3). The function η is Gevrey of order σ and satisfies $\eta \equiv 0$ in $(-\infty, T_0]$, $\eta(T) = 1$ and $\eta^{(k)}(T) = 0$ for all $k \geq 1$. We then define \tilde{f} by (4.23) and (4.27) and $f := \tilde{f}\eta$. From (4.2), for any $\tau > c(\Lambda_d)$, there exists a constant $C > 0$ such that for all $n \geq 1$,

$$\left| \alpha_{1,n} \frac{\pi^4 n^4 (d-1)}{d^{5/2} \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right)} \right| \leq C |\alpha_{1,n}| e^{\tau \lambda_{1,n}}, \quad \left| \alpha_{2,n} \frac{\pi^2 n^2 \sqrt{d}}{\sin(\pi n \sqrt{d})} \right| \leq C |\alpha_{2,n}| e^{\tau \lambda_{2,n}}.$$

This shows that \tilde{f} is an analytic function in $(c(\Lambda_d), \infty)$ and f is a Gevrey function of order σ in \mathbb{R} . Moreover, we have

$$f^{(m)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \tilde{f}^{(j)} \eta^{(m-j)}$$

so that

$$f^{(m)}(0) = 0, \quad f^{(m)}(T) = \tilde{f}^{(m)}(T) = \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_{1,n})^m e^{-\lambda_{1,n}T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^m e^{-\lambda_{2,n}T}.$$

In particular, from (4.12), for every $k \geq 0$ we have

$$a^{(k)}(0) = b^{(k)}(0) = 0, \tag{4.28}$$

$$a^{(k)}(T) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m}{(2m+1)!} \left(\sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_{1,n})^{m+k} e^{-\lambda_{1,n}T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^{m+k} e^{-\lambda_{2,n}T} \right), \tag{4.29}$$

$$b^{(k)}(T) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m - 1}{d-1} \frac{d}{(2m+1)!} \left(\sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_{1,n})^{m+k-1} e^{-\lambda_{1,n}T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^{m+k-1} e^{-\lambda_{2,n}T} \right). \tag{4.30}$$

Using (4.26) into the above relations and applying the Fubini theorem, we deduce

$$a^{(k)}(T) = \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^k \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}} e^{-\lambda_{2,n}T},$$

$$b^{(k)}(T) = \sum_{n \geq 1} \frac{-d}{d-1} \beta_{1,n} \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right) \frac{\sqrt{d}}{\pi n} (-\lambda_{1,n})^{k-1} e^{-\lambda_{1,n}T} + \sum_{n \geq 1} \frac{d}{d-1} \beta_{2,n} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}} (-\lambda_{2,n})^{k-1} e^{-\lambda_{2,n}T}.$$

Finally, using these formulae into (4.5) leads to

$$y_1(T, x) = \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}} e^{-\lambda_{2,n}T} \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda_{2,n})^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$y_2(T, x) = \sum_{k=0}^{\infty} d^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{n \geq 1} \frac{-d}{d-1} \beta_{1,n} \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right) \frac{\sqrt{d}}{\pi n} (-\lambda_{1,n})^{k-1} e^{-\lambda_{1,n}T} + \sum_{k=0}^{\infty} d^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{n \geq 1} \frac{d}{d-1} \beta_{2,n} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}} (-\lambda_{2,n})^{k-1} e^{-\lambda_{2,n}T} - \sum_{k=0}^{\infty} d^k \frac{d^k - 1}{d-1} \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_{2,n})^{k-1} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi n \sqrt{d}} e^{-\lambda_{2,n}T} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

The above relation can be written as

$$y_1(T, x) = \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi^2 n^2 \sqrt{d}} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_{2,n} T}, \quad (4.31)$$

$$y_2(T, x) = \sum_{n \geq 1} \frac{d^{5/2}}{\pi^4 n^4 (d-1)} \beta_{1,n} \sin\left(\frac{\pi n}{\sqrt{d}}\right) \sin(n\pi x) e^{-\lambda_{1,n} T} \\ + \sum_{n \geq 1} \frac{d}{n^2 \pi^2 (1-d)} \beta_{2,n} \frac{\sin(\pi n \sqrt{d})}{\pi^2 n^2 \sqrt{d}} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_{2,n} T}. \quad (4.32)$$

Using (4.27) into (4.31) and (4.32) yields (4.18) and (4.19). This concludes the proof of theorem 4.2.1. \square

Remark 4.4.3. As explained in the introduction, from [4, Theorem 6.17], we know that (4.1) is not null-controllable if $T < c(\Lambda_d)$. In the above proof, we can see that we need the hypothesis $T > c(\Lambda_d)$ since our construction of \tilde{f} by (4.23) and (4.27) leads to an analytic function in $(c(\Lambda_d), \infty)$. If $T < c(\Lambda_d)$, then we deduce from (4.2) that $T < l_1$ or $T < l_2$. If for instance $T < l_1$ (the reasoning is similar in the other case), then, there exists an increasing function $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ such that

$$\left| \sin\left(\frac{\pi \varphi(n)}{\sqrt{d}}\right) \right| < e^{-\frac{(\pi \varphi(n))^2}{d} T}.$$

Hence, using (4.27), there exists $C > 0$ such that

$$|\beta_{1,\varphi(n)}| e^{-\lambda_{1,\varphi(n)} t} \geq C |\alpha_{1,\varphi(n)}| \varphi(n)^4 e^{\lambda_{1,\varphi(n)}(T-t)} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

In particular, there exist sequences $(\alpha_{1,n})_n \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$ such that the first series in (4.23) for the definition of \tilde{f} is not convergent for all $t \in [0, T]$.

4.5 Proof of theorem 4.2.2

The proof of theorem 4.2.2 is similar to the proof of theorem 4.2.1. We start by considering the spectral analysis of the operator A defined by (4.14) (with $d = 1$).

Proposition 4.5.1. Assume $d = 1$. The spectrum of A is composed of simple eigenvalues

$$\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n \geq 1}, \quad \lambda_n = (\pi n)^2,$$

with algebraic multiplicity equal to 2. A corresponding family of generalized eigenfunctions is

$$\psi_{1,n}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(n\pi x) \end{bmatrix}, \quad \psi_{2,n}(x) = \begin{bmatrix} \sin(n\pi x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (x \in [0, 1]).$$

In particular, if $(y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, 1)^2$, then the solution of (4.1) with $u = 0$ (or equivalently of (4.15)) has the form

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} (t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_{1,n} \psi_{1,n} e^{-\lambda_n t} + \sum_{n \geq 1} \alpha_{2,n} \psi_{2,n} e^{-\lambda_n t} + \sum_{n \geq 1} \alpha_{2,n} \psi_{1,n} t e^{-\lambda_n t},$$

with $(\alpha_{1,n})_n, (\alpha_{2,n})_n \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. This shows that (y_1, y_2) is analytic at any $(t, x) \in (0, T] \times [0, 1]$ and we have

$$y_1(T, x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_{2,n} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_n T}, \quad (4.33)$$

$$y_2(T, x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_{1,n} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \alpha_{2,n} \sin(n\pi x) T e^{-\lambda_n T}. \quad (4.34)$$

In order to prove theorem 4.2.2, we are going to construct a solution of (4.1) with initial conditions

$$y_1(0, \cdot) = y_2(0, \cdot) = 0 \quad \text{in } (0, 1)$$

and with the final conditions given by (4.33) and (4.34). As explained in Section 4.3, we build such solutions in the form (4.5), where a and b are given by (4.12). It remains to define the Gevrey function f of order $\sigma \in (1, 2)$ such that the corresponding solution (y_1, y_2) satisfies the above initial and final conditions.

Let us consider $T_0 \in (0, T)$ and let us define

$$\eta(t) := \theta_\sigma \left(\frac{t - T_0}{T - T_0} \right),$$

where θ_σ is given by (4.3). The function η is Gevrey of order σ and satisfies $\eta \equiv 0$ in $(-\infty, T_0]$, $\eta(T) = 1$ and $\eta^{(k)}(T) = 0$ for all $k \geq 1$. We now set

$$\beta_{1,n} := 2(-1)^{n+1}(n\pi)^3 \left(\alpha_{1,n} - \frac{3}{2(n\pi)^2} \alpha_{2,n} \right), \quad \beta_{2,n} := 2(-1)^{n+1}(n\pi)^3 \alpha_{2,n} \quad (4.35)$$

and we define

$$\tilde{f}(t) := \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} e^{-\lambda_n t} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} t e^{-\lambda_n t}, \quad f := \tilde{f}\eta.$$

In particular, \tilde{f} is an analytic function in $(0, \infty)$ and f is a Gevrey function of order σ in \mathbb{R} . Moreover, we have

$$f^{(m)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \tilde{f}^{(j)} \eta^{(m-j)}$$

so that

$$\begin{aligned} f^{(m)}(0) &= 0, \\ f^{(m)}(T) &= \tilde{f}^{(m)}(T) = \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_n)^m e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \left((-\lambda_n)^m T + m(-\lambda_n)^{m-1} \right) e^{-\lambda_n T}. \end{aligned}$$

In particular, from (4.13), for every $k \geq 0$ we have

$$a^{(k)}(0) = b^{(k)}(0) = 0, \quad (4.36)$$

$$a^{(k)}(T) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_n)^{m+k} e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \left((-\lambda_n)^{m+k} T + (m+k) (-\lambda_n)^{m+k-1} \right) e^{-\lambda_n T} \right), \quad (4.37)$$

$$b^{(k)}(T) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{(2m+1)!} \left(\sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_n)^{m+k-1} e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \left((-\lambda_n)^{m+k-1} T + (m+k-1) (-\lambda_n)^{m+k-2} \right) e^{-\lambda_n T} \right). \quad (4.38)$$

We also have

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_n)^m}{(2m+1)!} = 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m (-\lambda_n)^{m-1}}{(2m+1)!} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1) (-\lambda_n)^{m-2}}{(2m+1)!} = \frac{3}{4} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^4}.$$

Using the above formula into (4.37) and (4.38), we deduce

$$a^{(k)}(T) = \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} (-\lambda_n)^k \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} e^{-\lambda_n T}$$

$$b^{(k)}(T) = \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} (-\lambda_n)^k \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \left(\frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} (-\lambda_n)^k T + k (-\lambda_n)^{k-1} \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + (-\lambda_n)^k \frac{3}{4} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^4} \right) e^{-\lambda_n T}.$$

Finally, using these formulae into (4.6) leads to

$$y_1(T, x) = \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n\pi)^3} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_n T},$$

$$y_2(T, x) = \sum_{n \geq 1} \beta_{1,n} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n\pi)^3} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n\pi)^3} \sin(n\pi x) T e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \frac{3}{4} \frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^5} \sin(n\pi x) e^{-\lambda_n T}$$

and in particular,

$$y_2(T, x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n\pi)^3} \left(\beta_{1,n} + \frac{3}{2} \frac{\beta_{2,n}}{(n\pi)^2} \right) \sin(n\pi x) e^{-\lambda_n T} + \sum_{n \geq 1} \beta_{2,n} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n\pi)^3} \sin(n\pi x) T e^{-\lambda_n T}.$$

By using the formula (4.35) into the above relations we deduce (4.33) and (4.34), which ends the proof of theorem 4.2.2.

4.6 Proof of theorem 4.2.4

In order to prove theorem 4.2.4, we follow again the strategy of Section 4.3 and build solutions in the form (4.5) or (4.6), where a and b are given by (4.12) or (4.13). It remains to define the Gevrey function f of order $\sigma \in (1, 2)$ such that the corresponding solution (y_1, y_2) satisfies the above initial and final conditions.

Let us consider two stationary states $(\bar{y}_1^{(1)}, \bar{y}_2^{(1)})$ and $(\bar{y}_1^{(2)}, \bar{y}_2^{(2)})$. They are given by the formula (4.4) for some $\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)} \in \mathbb{R}$.

Let us define

$$f(t) := (\bar{u}^{(2)} - \bar{u}^{(1)}) \theta_\sigma \left(\frac{t}{T} \right) + \bar{u}^{(1)},$$

where θ_σ is given by (4.3). The function f is Gevrey of order σ and satisfies

$$f(0) = \bar{u}^{(1)}, \quad f(T) = \bar{u}^{(2)}, \quad f^{(m)}(0) = f^{(m)}(T) = 0 \quad (m \geq 1).$$

In particular, since a and b are given by (4.12) or (4.13), we have

$$\begin{aligned} a(0) &= \bar{u}^{(1)}, & a(T) &= \bar{u}^{(2)}, & a^{(k)}(0) &= a^{(k)}(T) = 0 & (k \geq 1), \\ b(0) &= \frac{d}{6} \bar{u}^{(1)}, & b(T) &= \frac{d}{6} \bar{u}^{(2)}, & b^{(k)}(0) &= b^{(k)}(T) = 0 & (k \geq 1). \end{aligned}$$

In particular, y_1 and y_2 given by (4.5) or (4.6) satisfy

$$\begin{aligned} y_1(0, x) &= \bar{u}^{(1)} x, & y_2(0, x) &= \frac{d}{6} \bar{u}^{(1)} (x - x^3), \\ y_1(T, x) &= \bar{u}^{(2)} x, & y_2(T, x) &= \frac{d}{6} \bar{u}^{(2)} (x - x^3). \end{aligned}$$

This ends the proof of theorem 4.2.4.

4.7 Conclusion

We have obtained the null-controllability of a coupled system of heat equations in dimension 1 in space by using the flatness approach. The system is in ‘‘cascade’’, with a control acting only on one boundary of the first equation. This is a particular example of the general case treated in [4]

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y - (D\partial_x^2 + A)y = 0 \quad \text{in } (0, T) \times (0, 1), \\ y(t, 0) = 0 \quad \text{in } (0, T), \\ y(t, 1) = Bu(t) \quad \text{in } (0, T), \\ y(0, \cdot) = y^0 \quad \text{in } (0, 1), \end{array} \right. \quad (4.39)$$

where $y = (y_1, \dots, y_n)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag} \left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n} \right)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$ and $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. We have treated the case $n = 2$ and $m = 1$, with

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

For this particular example, we have managed to recover the controllability results in [4] with the flatness method. Note that we avoid in particular the use of any bi-orthogonal basis as it is standard for the study of the controllability of such systems.

In the future, we would like to generalize our result and in particular to deal with general systems of the form (4.39). Another interesting problem would be to consider, as in [106] (see also [7]), the case where in the equation of y_2 in (4.1) we replace the right-hand side by cy_1 with a function c depending on x . In addition, one could try to extend the results obtained here in the case where the operator ∂_x^2 is replaced by a general operator $y \mapsto \partial_x(p(x)\partial_x y) + q(x)\partial_x y + r(x)y$, where the coefficients can be degenerate or singular. In order to do this, one can follow the general flatness approach proposed in [82] to handle such an operator. Finally, one could wonder if this flatness method can be applied to systems of heat equations coupled from the boundary : see, for instance [8], where the coupling is done with Robin boundary condition, or [9], with Kirchhoff boundary conditions.

5

Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, on va commencer par proposer une approche pour généraliser les résultats du chapitre 4. On donnera ensuite une conclusion générale à ce travail en formulant un certain nombre de questions ouvertes sur la platitude des EDP qui pourraient faire l'objet de travaux futurs.

Sommaire

5.1	Vers un système en cascade pour l'équation de la chaleur	97
5.2	Conclusion générale	100

5.1 Vers un système en cascade pour l'équation de la chaleur

On va essayer de généraliser l'approche du chapitre précédent au cas de n équations de la chaleur avec des coefficients de diffusion égaux à 1. On s'intéresse donc au système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y_1(t, x) - \partial_x^2 y_1(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_t y_i(t, x) - \partial_x^2 y_i(t, x) = y_{i-1} & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \\ y_i(t, 0) = 0 & t \in (0, T), i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ y_1(t, 1) = u(t) & t \in (0, T), \\ y_i(t, 1) = 0 & t \in (0, T), i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \\ y_i(0, x) = y_i^0(x) & x \in (0, 1), i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Comme d'habitude, on va chercher à montrer que ce système est plat. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on cherche y_i sous la forme :

$$y_i(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} b_{i,k}(t) \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

En injectant ces expressions dans les équations de la chaleur précédentes, on trouve les relations de récurrence :

$$a_{i,k+1} = \dot{a}_{i,k} - a_{i-1,k} \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \in \mathbb{N} \quad (5.2)$$

et

$$b_{i,k+1} = \dot{b}_{i,k} - b_{i-1,k} \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \in \mathbb{N} \quad (5.3)$$

En utilisant la condition au bord $y_i(t, 0) = 0$ et l'équation 5.3 on vérifie sans mal que l'on doit avoir $b_{i,k} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $k \in \mathbb{N}$. En résolvant la récurrence sur les $a_{i,k}$, on en vient à démontrer le résultat suivant :

Proposition 5.1.1. *Soient $\sigma \in (1, 2)$, $T > 0$. Soient a_1, \dots, a_n des fonctions Gevrey d'ordre σ sur $[0, T]$, alors les fonctions $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ définies par*

$$y_i(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m \binom{k}{m} a_{i-m}^{(k-m)}(t) \right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sont Gevrey d'ordre σ en t et 1 en x . De plus, ces fonctions vérifient

$$\begin{cases} \partial_t y_1(t, x) - \partial_x^2 y_1(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ \partial_t y_i(t, x) - \partial_x^2 y_i(t, x) = y_{i-1} & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \\ y_i(t, 0) = 0 & t \in (0, T), i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve de la régularité Gevrey se fait comme pour le théorème 1.3.18, en utilisant le fait que pour $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\binom{k}{m} = \frac{\prod_{j=0}^{m-1} (k-j)}{m!} \leq k^m \leq k^n \leq C 2^k \quad k \in \mathbb{N},$$

pour un certain $C > 0$. La vérification de $y_i(t, 0) = 0$ est immédiate tout comme le fait que y_1 vérifie l'équation de la chaleur, son expression étant la même qu'en (1.14). Pour garantir les autres équations, il suffit de vérifier que les fonctions $a_{i,k} := \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m \binom{k}{m} a_{i-m}^{(k-m)}$ satisfont (5.2). Or, pour $i \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} & a_{i,k+1} - \dot{a}_{i,k} + a_{i-1,k} \\ &= \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m \binom{k+1}{m} a_{i-m}^{k+1-m} - \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m \binom{k}{m} a_{i-m}^{(k-m+1)} + \sum_{m=0}^{i-2} (-1)^m \binom{k}{m} a_{i-m-1}^{(k-m)} \\ &= \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m \binom{k+1}{m} a_{i-m}^{k+1-m} - \sum_{m=0}^{i-1} (-1)^m \binom{k}{m} a_{i-m}^{(k-m+1)} - \sum_{m=1}^{i-1} (-1)^m \binom{k}{m-1} a_{i-m}^{(k-m+1)} \\ &= 1 - 1 + \sum_{m=1}^{i-1} (-1)^m \left(\binom{k+1}{m} - \binom{k}{m} - \binom{k}{m-1} \right) a_{i-m}^{k+1-m} = 0. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé la formule de Pascal. □

Si on veut continuer à adapter la méthode du chapitre 4, il nous faut un analogue du lemme 1.5.18, pour gérer la condition au bord en $x = 1$. Pour l'obtenir on va recourir une nouvelle fois au calcul opérationnel, mais pour que celui-ci puisse lui-même fournir une preuve et ne pas être un simple guide pour l'intuition, on va se servir des opérateurs de Mikusiński (voir l'appendice A.2). Pour adapter la preuve du chapitre 4, on va chercher à construire une solution de (5.1) nulle à l'origine, qui intercepte la solution libre de l'équation.

Soient $\sigma \in (1, 2)$ et a_1, \dots, a_n des fonctions Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R}^+ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a^{(k)}(0) = 0.$$

On considère les fonctions y_1, \dots, y_n fournies par la proposition 5.1.1. On a :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, y_i(t, 1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{i-1} \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{j=0}^{m-1} (k-j) a_{i-m}^{(k-m)}(t) \right) \frac{1}{(2k+1)!} = 0.$$

Cela peut se réécrire dans \mathcal{M} , en utilisant le théorème A.2.7, par récurrence, en

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, y_i(t, 1) = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{i-1} \frac{(-1)^m}{m!} F_m a_{i-m} = 0, \quad (5.4)$$

avec

$$\forall m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, F_m = \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{j=0}^{m-1} (k-j) \frac{s^{k-m}}{(2k+1)!} \in \mathcal{M}.$$

Remarque 5.1.2. Les opérateurs F_m sont bien définis dans \mathcal{M} , comme la limite opérationnelle de leurs sommes partielles ce que l'on peut voir en les multipliant par exemple par θ_σ (voir le corollaire 1.3.13), la convergence se montrant comme pour la proposition 5.1.1.

On a pour tout m , $F_{m+1} = \frac{dF_m}{ds}$ et on peut donner un sens dans \mathcal{M} à l'expression $F_0 = \sinh(\sqrt{s})/\sqrt{s}$.

On montre facilement (c'est en fait la preuve de régularité de la proposition 5.1.1) :

Lemme 5.1.3. Soit φ une fonction Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R}_+ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}(0) = 0$. Alors, pour tout $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $F_m \varphi$ possède les mêmes propriétés.

On peut alors démontrer un lemme analogue au lemme 1.5.18 pour le système (5.1).

Lemme 5.1.4. Soit $\sigma \in (1, 2)$, soit φ une fonction Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R}_+ dont toutes les dérivées sont nulles en 0. On définit la famille d'opérateurs, donnée par

$$Q_1 = 1 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, Q_{i+1} = \sum_{m=1}^i \frac{(-1)^{i-m}}{(i+1-m)!} F_{i-m+1} F_0^{i-m} Q_m.$$

Alors, la famille

$$\forall m \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_m := F_0^{n-m} Q_m \varphi$$

est telle que pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, a_m est Gevrey d'ordre σ sur \mathbb{R}_+ et a toutes ses dérivées nulles en 0. De plus, en appliquant la proposition 5.1.1 à $a_1 \dots a_n$, les fonctions y_i obtenues, vérifient :

$$y_i(t, 1) = 0 \quad t \in \mathbb{R}_+, i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Démonstration. La régularité et la valeur en 0 des dérivées de $a_1 \dots a_n$ sont assurées par le lemme précédent et le fait que les Q_i sont des polynômes en les F_i . Concernant les conditions au bord, il suffit de vérifier que les a_i résolvent le système linéaire (5.4).

En ré-indexant la somme, (5.4) se réécrit sous la forme :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \sum_{m=1}^i \frac{(-1)^{i-m}}{(i-m)!} F_{i-m} a_m = 0.$$

Pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^i \frac{(-1)^{i-m}}{(i-m)!} F_{i-m} a_m &= \sum_{m=1}^i \frac{(-1)^{i-m}}{(i-m)!} F_{i-m} F_0^{n-m} Q_m \varphi \\
 &= \sum_{m=1}^{i-1} \frac{(-1)^{i-m}}{(i-m)!} F_{i-m} F_0^{n-m} Q_m \varphi + F_0^{n-i+1} Q_i \varphi \\
 &= \left(\sum_{m=1}^{i-1} \frac{(-1)^{i-m}}{(i-m)!} F_{i-m} F_0^{n-m} Q_m \right) \varphi \\
 &\quad + F_0^{n-i+1} \left(\sum_{m=1}^{i-1} \frac{(-1)^{i-1-m}}{(i-m)!} F_{i-m} F_0^{i-1-m} Q_m \right) \varphi = 0
 \end{aligned}$$

□

Pour pouvoir généraliser la preuve du chapitre 4 à (5.1), il faudrait tout d'abord montrer que les solutions libres de (5.1) se mettent sous la forme de la proposition 5.1.1, ce qui est facile à faire. Il faut ensuite montrer que l'on peut choisir φ dans le lemme 5.1.4 de manière à intercepter la solution libre en temps T , ce qui est difficile à faire en raison de la nature combinatoire des opérateurs Q_i et de la difficulté à manipuler ponctuellement ces opérateurs. Une bonne approche pour poursuivre dans cette voie pourrait être de donner un sens différent aux opérateurs F_i qui permettraient de les manipuler ponctuellement.

5.2 Conclusion générale

Nous avons vu dans ce travail qu'il est possible d'adapter la platitude à un certain nombre de situations : non-linéarités, problèmes à frontières libres, conditions aux limites variées, plus faible nombre de contrôles que d'équations... Cependant, la méthode souffre encore d'un certain nombre de limitations et pourrait être améliorée par de futurs travaux. De plus, certaines questions mérites d'être soulevées :

- A part de très rares cas, cette méthode est vissée à la dimension 1. Les articles démontrant des résultats en dimension n s'appuient sur des géométries particulières. On pourrait se demander s'il est possible d'adapter la méthode en dimension supérieure pour des domaines quelconques.
- Il est possible de définir la platitude pour des systèmes discrets (voir par exemple [107, Chapitre 5]) on peut ainsi se demander s'il est possible pour un système différentiellement plat de construire un schéma numérique préservant la platitude.
- En dimension infinie, on manque d'une définition précise et d'une théorie générale de la platitude. Développer une telle théorie permettrait peut-être de répondre à certaines questions importantes, comme caractériser les EDP différentiellement plates, ou savoir s'il est possible d'établir un analogue au théorème de la dimension finie, qui établit l'équivalence entre la platitude et la contrôlabilité pour les systèmes linéaires.

A

Appendices

A.1 Diverses inégalités

Dans cet appendice, on énonce et démontre certaines inégalités utilisées tout au long du manuscrit.

Proposition A.1.1. *Soient $i, j \in \mathbb{N}$, alors*

$$(i + j)! \leq 2^{i+j} i! j!.$$

Démonstration. Posons $n := i + j$. On a alors

$$\binom{n}{i} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

soit, en remplaçant n par sa valeur : $\frac{(i+j)!}{i!j!} \leq 2^{i+j}$. □

Corollaire A.1.2. *Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, alors*

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)! \leq 2^{n|\alpha|} \prod_{k=1}^n (\alpha_k)!$$

avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Démonstration. On prouve, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$:

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)! \leq 2^{n|\alpha|} \prod_{k=1}^n (\alpha_k)!.$$

$H(0)$ est vraie car $0! = 1 \leq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on a alors

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \right)! &= \left(\alpha_{n+1} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \right)! \\
 &\leq 2^{\alpha_{n+1} + (\sum_{k=1}^n \alpha_k)} \alpha_{n+1}! \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)! \\
 &\leq 2^{\alpha_{n+1} + (\sum_{k=1}^n \alpha_k)} 2^{n(\sum_{k=1}^n \alpha_k)} \alpha_{n+1}! \prod_{k=1}^n (\alpha_k)! \\
 &\leq 2^{(n+1)|\alpha|} \prod_{k=1}^{n+1} (\alpha_k)!
 \end{aligned}$$

C'est $H(n+1)$. Dans la première inégalité, on a utilisé la proposition A.1.1 et dans la deuxième, $H(n)$. \square

Proposition A.1.3. Soit $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=1}^m k_i = n$. On pose

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^m k_i!},$$

alors $\binom{n}{k_1, \dots, k_m} \in \mathbb{N}^*$. D'où, en particulier,

$$n! \geq \prod_{i=1}^n k_i!$$

Démonstration. On va prouver la propriété plus forte suivante :
Si l'on pose

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, S_i = \sum_{j=1}^i k_j$$

alors

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_m} = \prod_{i=1}^m \binom{S_i}{k_i}.$$

Prouvons, par récurrence sur $l \in \llbracket 1, m \rrbracket, H(l)$:

$$\binom{S_l}{k_1, \dots, k_l} = \prod_{i=1}^l \binom{S_i}{k_i}$$

$H(1)$ est triviale. Si $l \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ tel que $H(l)$, alors

$$\begin{aligned}
 \binom{S_{l+1}}{k_1, \dots, k_{l+1}} &= \frac{S_{l+1}!}{\prod_{i=1}^{l+1} k_i!} = \frac{S_l! \prod_{i=S_l+1}^{S_{l+1}} i}{\left(\prod_{i=1}^l k_i! \right) k_{l+1}!} = \binom{S_l}{k_1, \dots, k_l} \frac{\prod_{i=S_l+1}^{S_{l+1}} i}{k_{l+1}!} \\
 &= \binom{S_l}{k_1, \dots, k_l} \frac{\prod_{k=0}^{k_{l+1}-1} (S_{l+1} - k)}{k_{l+1}!} = \binom{S_l}{k_1, \dots, k_l} \binom{S_{l+1}}{k_{l+1}} \\
 &= \left(\prod_{i=1}^l \binom{S_i}{k_i} \right) \binom{S_{l+1}}{k_{l+1}} = \prod_{i=1}^{l+1} \binom{S_i}{k_i}.
 \end{aligned}$$

C'est $H(l+1)$. Dans la quatrième égalité, on a posé $i = S_{l+1} - k$ et dans l'avant-dernière, on a utilisé $H(l)$. $H(m)$ donne le résultat voulu. \square

Les deux résultats suivants permettent de prouver le lemme 3.4.3 du chapitre 3.

Lemme A.1.4. Soient $l \in \mathbb{N}, \alpha, c_1, \dots, c_l \geq 1$ et $b_1, \dots, b_l \geq 0$ alors,

$$\sum_{k=1}^l c_k (b_k)^\alpha \leq \left(\sum_{k=1}^l c_k b_k \right)^\alpha$$

Démonstration. On commence par prouver le cas particulier suivant :

$$\forall c \geq 1, \forall a, b \geq 0, ca^\alpha + b^\alpha \leq (ca + b)^\alpha. \quad (\text{A.1})$$

Soit $c \geq 1$. On pose :

$$f(t) := \frac{c + t^\alpha}{(c + t)^\alpha} \quad t \geq 0.$$

On a alors :

$$f'(t) = \frac{c\alpha(c+t)^{\alpha-1}(t^{\alpha-1} - 1)}{(c+t)^{2\alpha}} \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Donc, f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty]$. De plus, $f(0) = \frac{1}{c^{\alpha-1}} \leq 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ on a ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq 1$.

Prouvons (A.1) Soient $a, b \geq 0$:

Si $a = 0$, le résultat est évident.

Si $a \neq 0$, soit $t \geq 0$ tel que $b = ta$, on a alors, $\frac{ca^\alpha + b^\alpha}{(ca+b)^\alpha} = f(t) \leq 1$. Ce qui démontre (A.1).

On peut à présent prouver le lemme A.1.4.

Montrons par récurrence sur $l \in \mathbb{N}, H(l)$:

$$\forall c_1, \dots, c_l \geq 1, \forall b_1, \dots, b_l \geq 0, \sum_{k=1}^l c_k (b_k)^\alpha \leq \left(\sum_{k=1}^l c_k b_k \right)^\alpha.$$

$H(0)$ est triviale.

Soit $l \in \mathbb{N}, H(l)$, soient $c_1, \dots, c_{l+1} \geq 1$ et $b_1, \dots, b_{l+1} \geq 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{l+1} c_k (b_k)^\alpha &= c_{l+1} (b_{l+1})^\alpha + \sum_{k=1}^l c_k (b_k)^\alpha \leq c_{l+1} (b_{l+1})^\alpha + \left(\sum_{k=1}^l c_k b_k \right)^\alpha \\ &\leq \left(c_{l+1} b_{l+1} + \sum_{k=1}^l c_k b_k \right)^\alpha \leq \left(\sum_{k=1}^{l+1} c_k b_k \right)^\alpha. \end{aligned}$$

C'est $H(l+1)$. Dans la première inégalité on a utilisé $H(l)$, et dans la deuxième, (A.1). \square

Lemme A.1.5. Pour tous $i, j, l \in \mathbb{N}$:

$$\frac{i!j!(i+j+l+1)!}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (j+k)!(i+l-k)!.$$

Démonstration. On prend comme convention si $k < 0$ et $n \in \mathbb{N}$ alors, $\binom{n}{k} = 0$ ainsi, la formule de Pascal s'applique pour $k = 0$.

Montrons par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$, $H(l)$:

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \frac{i!j!(i+j+l+1)!}{(i+j+1)!} = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (j+k)!(i+l-k)!$$

$H(0)$ est vraie car pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $\binom{0}{0}j!i! = i!j! = \frac{i!j!(i+j+1)!}{(i+j+1)!}$.

Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $H(l)$. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ on a,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} (j+k)!(i+l+1-k)! \\ &= \binom{l+1}{l+1} (j+l+1)!i! + \sum_{k=0}^l \binom{l+1}{k} (j+k)!(i+l+1-k)! \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Pascal, on trouve :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} (j+k)!(i+l+1-k)! \\ &= (j+l+1)!i! + \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (j+k)!(i+l+1-k)! + \sum_{k=0}^l \binom{l}{k-1} (j+k)!(i+l+1-k)! \\ &= (j+l+1)!i! + A + B. \end{aligned}$$

En appliquant $H(l)$ à l, j et $i+1$ on trouve,

$$A = \frac{(i+1)!j!(i+j+l+2)!}{(i+j+2)!}.$$

En utilisant le fait que $\binom{l}{-1} = 0$ on trouve,

$$B = \sum_{k=1}^l \binom{l}{k-1} (j+k)!(i+l+1-k).$$

En ré-indexant cette somme, on a

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k} (j+k+1)!(i+l-k)! \\ &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (j+k+1)!(i+l-k)! - \binom{l}{l} (j+l+1)!i!. \end{aligned}$$

An appliquant $H(l)$ à $j+1$ et i , on trouve

$$B = \frac{i!(j+1)!(i+j+l+2)!}{(i+j+2)!} - (j+l+1)!i!.$$

Finalement, en rassemblant tous les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} (j+k)!(i+l+1-k)! &= \frac{(i+1)!j!(i+j+l+2)!}{(i+j+2)!} + \frac{i!(j+1)!(i+j+l+2)!}{(i+j+2)!} \\ &= \frac{i!j!(i+j+2)(i+j+l+2)!}{(i+j+2)!} = \frac{i!j!(i+j+l+2)!}{(i+j+1)!}. \end{aligned}$$

C'est $H(l+1)$. □

Pour prouver le lemma 3.4.3, il suffit d'appliquer le lemme A.1.4 a $\alpha = \sigma$ avec $c_k = \binom{l}{k}$ et $b_k = (l-k+i)!(k+j)!$, puis de conclure avec le lemme A.1.5.

A.2 Les opérateurs de Mikusiński

Il existe plusieurs façons de formaliser le calcul opérationnel d'Heaviside, la plus répandue est la transformée de Laplace. Un défaut de cette dernière est que de nombreuses fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace. Pour palier à ce problème, certain ont proposé des constructions alternatives. Nous allons ici nous intéresser aux bases de l'une d'entre elles, les opérateurs de Mikusiński. Proposée par Jan Mikusiński, cette approche permet, par une construction algébrique de donner un sens à la formule $f' = sf - f(0)$. Nous en donnons ici les bases que nous utilisons au chapitre 5. Les références majeures sur le sujet, d'où est entièrement tirée cette présentation succincte, sont [87] et [88].

Considérons l'ensemble $A = L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$, l'ensemble des fonctions localement intégrales sur \mathbb{R}^+ . On montre facilement que A est un anneau commutatif pour l'addition usuelle des fonctions et le produit de convolution suivant : à $f, g \in A$, on associe le produit $f * g \in A$ défini par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad p.p \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Le théorème de Titchmarsh affirme alors que $(A, +, *)$ est un anneau intègre (i.e $f * g = 0 \Rightarrow f = 0$ ou $g = 0$). On pourra se référer à [88, Chapitre 6, §7] pour une preuve de ce théorème.

Définition A.2.1. *L'anneau $(A, +, *)$ étant intègre, on peut considérer son corps des fractions, que l'on note \mathcal{M} .*

*Les éléments de \mathcal{M} , appelés opérateurs (de Mikusiński), sont donc des fractions de la forme $\frac{f}{g}$ avec $f, g \in A$ et $g \neq 0$. On a $\frac{f}{g} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} \Leftrightarrow f * \tilde{g} = \tilde{f} * g$. La somme et le produit sur \mathcal{M} se font de manière usuelle pour les fractions. Lorsqu'on travaillera dans \mathcal{M} , on notera xy le produit de $x, y \in \mathcal{M}$. Donc, dans \mathcal{M} , si $f, g \in A$ on a $fg = f * g$.*

Remarque A.2.2. *L'anneau $(A, +, *)$ n'est pas unitaire, mais \mathcal{M} l'est bien. Son unité, notée 1, est donnée par $\frac{f}{f}$, pour tout $f \in A$, $f \neq 0$. On peut montrer que $1 \notin A$.*

Nous allons maintenant donner quelques propriétés élémentaires sur \mathcal{M} qui nous servent au chapitre 5.

Notation A.2.3. *Si $f \in A$, on note $\{f(t)\}$ l'application $t \mapsto f(t)$. Et on pose $l := \{1\}$.*

Proposition A.2.4. *Si $f \in A$, alors $lf = \{\int_0^t f(\tau)d\tau\} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$.*

Proposition A.2.5. *Pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ telles que $x = \frac{f}{g}$.*

Démonstration. Si $x = \frac{\tilde{f}}{g}$, on a $x = \frac{l\tilde{f}}{lg}$ avec $l\tilde{f}, lg \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$. □

Si on définit l'application $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}$ par $\iota(z) = \frac{\{z\}}{1}$, on vérifie sans mal que ι est un morphisme de corps, faisant donc de \mathcal{M} une extension de \mathbb{C} . De plus pour tout $f \in A$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\iota(z)f = \{zf(t)\}$. On se permettra donc de confondre z avec $\iota(z)$ (on vérifie sans peine que cela ne crée pas de conflit de notation pour 1).

Notation A.2.6. *On note $s = \frac{1}{l}$, l'inverse de l dans \mathcal{M} .*

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème qui justifie l'introduction des opérateurs de Mikusiński pour formaliser le calcul opérationnel.

Théorème A.2.7. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$, alors :*

$$f' = sf - f(0).$$

Démonstration. Par le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\{f(t)\} = \{f(0)\} + \left\{ \int_0^t f'(\tau) d\tau \right\},$$

ce qui s'écrit encore

$$\{f(t)\} = lf(0) + l\{f'(t)\}.$$

On obtient le résultat en multipliant cette égalité par $s = \frac{1}{l}$. □

Remarque A.2.8. *Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+)$, on peut itérer le résultat précédent pour exprimer les dérivées successives de f .*

Dans le chapitre 5, on utilise des séries d'opérateurs. Pour donner un sens à ceci, on va définir une notion de convergence sur \mathcal{M} .

Définition A.2.9. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$, on dit que cette suite converge opérationnellement vers $f \in \mathcal{M}$, s'il existe $q \in \mathcal{M}$ non nul tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $qf_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, $qf \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ et $(qf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers qf .*

Remarque A.2.10. *On montre que la définition précédente ne dépend pas du choix de q , ce qui rend la limite opérationnelle unique.*

Remarque A.2.11. *Il est possible de définir une dérivation sur \mathcal{M} , que nous noterons $\frac{d}{ds}$, et on a, en particulier, $\frac{d}{ds}s^k = ks^{k-1}$.*

A.3 Une famille bi-orthogonale de fonctions Gevrey

Dans une version préliminaire de [18], on utilisait des fonctions de la forme

$t \mapsto \int_0^t \varphi(\tau) e^{n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau$ et $t \mapsto \int_0^t \varphi(\tau) e^{\frac{n^2 \pi^2}{d^2} (t-\tau)} d\tau$ dans le lemme 4.3.4. Choisir φ pour que les solutions ainsi obtenues s'annulent en $t = T$ menait au problème des moments :

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi(t) e^{n^2 \pi^2 t} dt &= -b_n \frac{n^2 \pi^2 d}{\sin(dn\pi)} & (n \in \mathbb{N}^*), \\ \int_0^T \varphi(t) e^{\frac{n^2 \pi^2}{d^2} t} dt &= -a_n \frac{n^4 \pi^4 (d^2 - 1)}{d^5 \sin(n\pi/d)} & (n \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, nous avons été amené à construire une famille bi-orthogonale à la famille $\{e^{-n^2\pi^2}, e^{-\frac{n^2\pi^2}{d}}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui soit Gevrey et dont on puisse exposer des bornes explicites. Cette approche n'a pas été retenue et ce résultat n'a donc pas sa place dans le corps de ce document, mais comme il est intéressant en soit, nous le présentons ici.

On va généraliser l'approche de [110], et plus précisément la présentation qui en est faite dans [95, Paragraphe 2.4.2], où les auteurs construisent une famille bi-orthogonale à la famille $\{e^{-\frac{n^2\pi^2}{d}}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour $d > 0$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_{n,1} := n^2\pi^2 \quad \text{et} \quad \lambda_{n,2} := \frac{n^2\pi^2}{d}.$$

Le but de cette annexe est de prouver le résultat suivant :

Théorème A.3.1. *Si $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ alors, pour tous $T, R > 0$, il existe des suites de fonctions $(q_{j,1})_{j \in \mathbb{N}^*}$ et $(q_{j,2})_{j \in \mathbb{N}^*}$ telles que :*

1. Pour tous $j \in \mathbb{N}^*, \iota \in \{1, 2\}$, $q_{j,\iota} \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T))$.
2. Il existe $M_1 > 0$ dépendant seulement de d, T et R , tel que, pour tous $j \in \mathbb{N}^*, l \in \mathbb{N}$, $\|q_{j,1}^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{M_1 j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{\frac{\lambda_{j,1} T}{2}} \frac{(2l+1)!}{R^l}$.
3. De même, il existe $M_2 > 0$ dépendant seulement de d, T et R , tel que, pour tous $j \in \mathbb{N}^*, l \in \mathbb{N}$, $\|q_{j,2}^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{M_2 j}{|\sin(\frac{j\pi}{\sqrt{d}})|} e^{\frac{\lambda_{j,2} T}{2}} \frac{(2l+1)!}{R^l}$.
4. $\forall j, n \in \mathbb{N}^*, \forall \iota, \kappa \in \{1, 2\}$, $\int_0^T q_{j,\iota}(t) e^{-\lambda_{n,\kappa} t} dt = \delta_{j,n} \delta_{\iota,\kappa}$.

Ci-dessus, $\delta_{i,j}$ désigne le delta de Kronecker défini en Section 1.6. Pour prouver ce théorème, on va avoir besoin de plusieurs lemmes.

Lemme A.3.2. *Si $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ alors, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe des fonctions entières $F_{j,1}$ et $F_{j,2}$ telles que :*

1. pour tous $k \in \mathbb{N}^*, \iota, \kappa \in \{1, 2\}$, $F_{j,\iota}(-i\lambda_{k,\kappa}) = \delta_{j,k} \delta_{\iota,\kappa}$.
2. Il existe $M_1 > 0$ dépendant seulement de d , tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|F_{j,1}(z)| \leq \frac{M_1 j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|}}$.
3. Il existe $M_2 > 0$ dépendant seulement de d , tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|F_{j,2}(z)| \leq \frac{M_2 j}{|\sin(\frac{j\pi}{\sqrt{d}})|} e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|}}$.
4. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F_{j,1}(x)| \leq \frac{M_1 j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{\frac{|x|}{2}}}$.
5. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F_{j,2}(x)| \leq \frac{M_2 j}{|\sin(\frac{j\pi}{\sqrt{d}})|} e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{\frac{|x|}{2}}}$.

Démonstration. On adapte la preuve de [95, Lemma 2.4.12], à nos besoins.

Pour cette preuve, on désigne par \sqrt{z} la valeur principale de la racine carrée dans \mathbb{C} . C'est-à-dire, si $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in (-\pi, \pi]$ alors, $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

on définit :

$$p(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{k,1}}\right) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{k,2}}\right) \quad z \in \mathbb{C}.$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k,1}} < +\infty$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k,2}} < +\infty$, p est une fonction entière bien définie dont les seuls zéros sont $\{-i\lambda_{k,\kappa}\}_{k \in \mathbb{N}^*, \kappa \in \{1,2\}}$ de plus, ces zéros sont simples (voir [102, Théorème 15.4]). On pose :

$$\begin{aligned} p_{j,1}(z) &= \prod_{k=1, k \neq j}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{k,1}}\right) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{k,2}}\right) \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{et,} \\ p_{j,2}(z) &= \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{k,1}}\right) \prod_{k=1, k \neq j}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{k,2}}\right) \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Alors, $p_{j,1}$ et $p_{j,2}$, sont des fonctions entières telles que :

$$\forall k \neq j, \forall \nu, \kappa \in \{1, 2\}, p_{j,\nu}(-i\lambda_{k,\kappa}) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \nu \in \{1, 2\}, p_{j,\nu}(-i\lambda_{j,\nu}) \neq 0.$$

On définit alors,

$$\forall \nu \in \{1, 2\}, F_{j,\nu}(z) = \frac{p_{j,\nu}(z)}{p_{j,\nu}(-i\lambda_{j,\nu})} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.2})$$

Avec ces définitions, le points 1 du lemme A.3.2 est vérifié. En utilisant la représentation du sinus en produit infini (voir par exemple [102, Chapitre 15, exercice 4]) on a,

$$p(z) = \text{sinc}(\sqrt{iz}) \text{sinc}(\sqrt{d}\sqrt{iz}) \quad z \in \mathbb{C},$$

où

$$\text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

C'est une fonction entière. Comme

$$\text{sinc}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{izt} dt,$$

on a,

$$|\text{sinc}(z)| \leq e^{|\Im(z)|} \leq e^{|z|} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.3})$$

En conséquence,

$$|p(z)| \leq e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|}} \quad z \in \mathbb{C}.$$

On a de plus,

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, |p_{j,1}(z)| &\leq \prod_{k=1, k \neq j}^{+\infty} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_{k,1}}\right) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_{k,2}}\right) \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_{k,1}}\right) \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_{k,2}}\right) \\ &= p(i|z|) \end{aligned}$$

et donc,

$$|p_{j,1}(z)| \leq e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|}} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.4})$$

De même,

$$|p_{j,2}(z)| \leq e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|}} \quad z \in \mathbb{C}.$$

On a,

$$\forall \nu \in \{1, 2\}, p(z) = \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{j,\nu}}\right) p_{j,\nu}(z) \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.5})$$

et donc,

$$\forall \iota \in \{1, 2\}, p'(z) = \frac{1}{i\lambda_{j,\iota}} p_j(z) + \left(1 + \frac{z}{i\lambda_{j,\iota}}\right) p'_{j,\iota}(z).$$

On en déduit alors que,

$$i\lambda_{j,\iota} p'(-i\lambda_{j,\iota}) = p_{j,\iota}(-i\lambda_{j,\iota}).$$

Comme $z \mapsto \sqrt{z}$ est différentiable sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on a

$$\begin{aligned} p'(z) &= \frac{i}{2\sqrt{iz}} \left(\frac{\cos(\sqrt{iz})}{\sqrt{iz}} - \frac{\sin(\sqrt{iz})}{iz} \right) \operatorname{sinc}(\sqrt{d}\sqrt{iz}) \\ &+ \frac{i\sqrt{d}}{2\sqrt{iz}} \operatorname{sinc}(\sqrt{iz}) \left(\frac{\cos(\sqrt{d}\sqrt{iz})}{\sqrt{d}\sqrt{iz}} - \frac{\sin(\sqrt{d}\sqrt{iz})}{idz} \right) \quad \Im(z) < 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$p'(-i\lambda_{j,1}) = \frac{i(-1)^j \sin(\sqrt{d}j\pi)}{2\sqrt{d}j^3\pi^3} \quad \text{et} \quad p'(-i\lambda_{j,2}) = \frac{id\sqrt{d}(-1)^j \sin\left(\frac{j\pi}{\sqrt{d}}\right)}{2j^3\pi^3}.$$

Cela nous donne,

$$p_{j,1}(-i\lambda_{j,1}) = \frac{(-1)^{j+1} \sin(\sqrt{d}j\pi)}{2\sqrt{d}j\pi} \quad \text{et} \quad p_{j,2}(-i\lambda_{j,2}) = \frac{\sqrt{d}(-1)^{j+1} \sin\left(\frac{j\pi}{\sqrt{d}}\right)}{2j\pi}.$$

Ainsi,

$$|p_j(-i\lambda_{j,1})| = \frac{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|}{2\sqrt{d}j\pi}.$$

En combinant cette dernière formule avec (A.4) dans (A.2) on obtient,

$$|F_{j,1}(z)| \leq \frac{jM_1}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|}} \quad z \in \mathbb{C}$$

avec $M_1 = 2\sqrt{d}\pi$, ce qui nous donne le point 2 du lemme A.3.2. De même, on obtient un certain $M_2 > 0$, qui dépend seulement de d tel que,

$$|F_{j,2}(z)| \leq \frac{M_2 j}{\left| \sin\left(\frac{j\pi}{\sqrt{d}}\right) \right|} e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|}} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Cela prouve le point 3 du lemme A.3.2.

Pour prouver les points 4 et 5 du lemme A.3.2, on utilise la première inégalité de (A.3) et le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Im(\sqrt{ix}) = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{2}}$, pour obtenir,

$$|p(x)| \leq e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{\frac{|x|}{2}}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\iota \in \{1, 2\}$, $|1 + \frac{x}{i\lambda_{j,\iota}}| \geq 1$, on a par (A.5),

$$|p_{j,\iota}(x)| \leq |p(x)| \quad \iota \in \{1, 2\}, x \in \mathbb{R}.$$

□

Lemme A.3.3. [95, Lemma 2.4.13] *Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $\beta, \nu > 0$, il existe une fonction entière $M_{\beta, \nu}$ telle que :*

1. $\forall z \in \mathbb{C}, |M_{\beta, \nu}(z)| \leq e^{\beta|z|}$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, |M_{\beta, \nu}(x)| \leq C e^{C\nu + \sqrt{\beta\nu}} e^{-\sqrt{\frac{\beta\nu|x|}{2}}}$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, M_{\beta, \nu}(ix) \geq C e^{-C\nu}$.

Démonstration. On prend :

$$M_{\beta, \nu}(z) = \frac{1}{\|\sigma_\nu\|_{L^1(\mathbb{R})}} \int_{-1}^1 \sigma_\nu(t) e^{-it\beta z} dt \quad z \in \mathbb{C},$$

où

$$\sigma_\nu(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\nu}{1-t^2}} & \text{if } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{if } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Les estimées sont prouvées dans [110, Lemma 4.3]. □

On est à présent en mesure de prouver le théorème A.3.1 :

Démonstration du théorème A.3.1. Encore une fois, on adapte une preuve de [95, Théorème 2.4.5] à nos besoins.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les fonctions construites au lemme A.3.2 et au lemme A.3.3, on pose,

$$\hat{g}_{j, \iota}(z) = F_{j, \iota}(z) \frac{M_{\beta, \nu}(z)}{M_{\beta, \nu}(-i\lambda_{j, \iota})} \quad z \in \mathbb{C},$$

pour des paramètres β, ν que nous allons préciser. Cette définition a du sens grâce au point 3 du lemme A.3.3. On choisit,

$$\beta = \frac{T}{4}$$

et $\nu > 0$ tel que

$$1 + \sqrt{d} - \sqrt{\beta\nu} = -\sqrt{2}\gamma,$$

avec $\gamma > 0$ que nous allons préciser par la suite. Par construction, on a,

$$\hat{g}_{j, \iota}(-i\lambda_{k, \kappa}) = \delta_{jk} \delta_{\iota, \kappa} \quad \iota, \kappa \in \{1, 2\}, k \in \mathbb{N}^*.$$

On va maintenant construire $q_{j,1}$, la construction de $q_{j,2}$ est la même avec les estimées correspondantes. En utilisant les estimées de lemme A.3.2 et de lemme A.3.3, on obtient,

$$|\hat{g}_{j,1}(z)| \leq C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{(1+\sqrt{d})\sqrt{|z|} + \beta|z|} \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.6})$$

avec $C(d, T, \gamma) > 0$ une constante qui ne dépend que des paramètres explicites. Par l'inégalité de Young, on a,

$$(1 + \sqrt{d})\sqrt{|z|} \leq \frac{\varepsilon|z|}{2} + \frac{(1 + \sqrt{d})^2}{2\varepsilon} \quad z \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0.$$

En prenant $\varepsilon = 2(\frac{T}{2} - \beta) > 0$ dans cette inégalité donne,

$$(1 + \sqrt{d})\sqrt{|z|} \leq \left(\frac{T}{2} - \beta\right)|z| + \frac{(1 + \sqrt{d})^2}{2\varepsilon} \quad z \in \mathbb{C}.$$

En combinant cette dernière inégalité avec (A.6), on obtient,

$$|\hat{g}_{j,1}(z)| \leq C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{\frac{T}{2}|z|}, \quad (\text{A.7})$$

où $C(d, T, \gamma) > 0$ est une nouvelle constante qui ne dépend que des paramètres donnés. En utilisant le point 4 du lemme A.3.2 et le point 3 du lemme A.3.3, on obtient à nouveau une constante $C(d, T, \gamma) > 0$ telle que,

$$|\hat{g}_{j,1}(x)| \leq C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{-\gamma\sqrt{|x|}} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.8})$$

En particulier, $\hat{g}_{j,1} \in L^2(\mathbb{R})$ grâce à (A.7) et au théorème de Paley Wiener (voir [102, Theorem 19.3]), on obtient une fonction $g_{j,1} \in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, telle que,

$$\hat{g}_{j,1}(z) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_{j,1}(t) e^{-izt} dt \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.9})$$

Par (A.8), on a $\hat{g}_{j,1} \in L^1(\mathbb{R})$ donc, c'est aussi la transformée de Fourier de $g_{j,1}$ dans L^1 . Par construction, on a, $\text{supp}(g_{j,1}) \subset (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. Soit $l \in \mathbb{N}$, on a, grâce à (A.8),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |x^l \hat{g}_{j,1}(x)| dx &\leq C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} \int_{\mathbb{R}} |x|^l e^{-\gamma\sqrt{|x|}} dx \\ &= 2C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} \int_0^{+\infty} x^l e^{-\gamma\sqrt{x}} dx \\ &= 4C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} \int_0^{+\infty} u^{2l+1} e^{-\gamma u} du =: 4C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} I_l. \end{aligned}$$

Pour $l \in \mathbb{N}^*$, on a,

$$\begin{aligned} I_l &= \int_0^{+\infty} x^{2l+1} e^{-\gamma x} dx = \left[\frac{-1}{\gamma} x^{2l+1} e^{-\gamma x} \right]_0^{+\infty} + \frac{2l+1}{\gamma} \int_0^{+\infty} x^{2l} e^{-\gamma x} dx \\ &= \frac{2l+1}{\gamma} \left(\left[-\frac{x^{2l}}{\gamma} e^{-\gamma x} \right]_0^{+\infty} + \frac{2l}{\gamma} \int_0^{+\infty} x^{2l-1} e^{-\gamma x} dx \right) = \frac{(2l+1)(2l)}{\gamma^2} I_{l-1}. \end{aligned}$$

Donc, par récurrence après calcul de I_0 , on a

$$\forall l \in \mathbb{N}, I_l = \frac{(2l+1)!}{\gamma^{2l+2}}.$$

On a donc montré (en mettant un $1/\gamma^2$ dans la constante) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} |x^l \hat{g}_{j,1}(x)| dx \leq C(d, T, \gamma) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} \frac{(2l+1)!}{\gamma^{2l}}.$$

On choisit maintenant $\gamma = \sqrt{R}$ de manière à avoir,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} |x^l \hat{g}_{j,1}(x)| dx \leq C(d, T, R) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} \frac{(2l+1)!}{R^l}.$$

Ainsi, par transformée de Fourier inverse et le fait que $\text{supp } g_{j,1} \subset (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$, on a, $g_j \in \mathcal{C}_c^\infty(0, T)$ et

$$\|g_{j,1}^{(l)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(d, T, R) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} \frac{(2l+1)!}{R^l}.$$

On pose maintenant,

$$q_{j,1}(t) = e^{\frac{\lambda_{j,1}T}{2}} \mathfrak{R} \left(g_{j,1} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right) \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.10})$$

Par construction et nos résultats précédents, $q_{j,1} \in \mathcal{C}_c^\infty(0, T)$ et,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|q_{j,1}^{(l)}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(d, T, R) \frac{j}{|\sin(\sqrt{d}j\pi)|} e^{\frac{\lambda_{j,1}T}{2}} \frac{(2l+1)!}{R^l}.$$

Nous allons maintenant vérifier le point 4 du théorème A.3.1, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in \{1, 2\}$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T q_{j,1}(t) e^{-\lambda_{k,\kappa}t} dt &= e^{\frac{\lambda_{j,1}T}{2}} \int_0^T \mathfrak{R} \left(g_{j,1} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right) e^{-\lambda_{k,\kappa}t} dt \\ &= e^{\frac{\lambda_{j,1}T}{2}} \mathfrak{R} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_{j,1}(u) e^{-\lambda_{k,\kappa}(u+\frac{T}{2})} du \right) \\ &= e^{\frac{T}{2}(\lambda_{j,1}-\lambda_{k,\kappa})} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_{j,1}(u) e^{-\lambda_{k,\kappa}u} du \\ &= e^{\frac{T}{2}(\lambda_{j,1}-\lambda_{k,\kappa})} \mathfrak{R}(\hat{g}_{j,1}(-i\lambda_{k,\kappa})) = \delta_{jk} \delta_{1,\kappa}. \end{aligned}$$

□

Bibliographie

- [1] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. González-Burgos, *A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems*, J. Evol. Equ. **9** (2009), no. 2, 267–291. MR2511553
- [2] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials*, J. Math. Pures Appl. (9) **96** (2011), no. 6, 555–590 (English).
- [3] ———, *Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : a survey*, Math. Control Relat. Fields **1** (2011), no. 3, 267–306. MR2846087
- [4] ———, *Minimal time for the null controllability of parabolic systems : the effect of the condensation index of complex sequences*, J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 7, 2077–2151.
- [5] ———, *New phenomena for the null controllability of parabolic systems : minimal time and geometrical dependence*, J. Math. Anal. Appl. **444** (2016), no. 2, 1071–1113. MR3535750
- [6] A. Bakhta and V. Ehrlacher, *Cross-diffusion systems with non-zero flux and moving boundary conditions*, ESAIM : M2AN **52** (2018), no. 4, 1385–1415.
- [7] A. Benabdallah, F. Boyer, and M. Morancey, *A block moment method to handle spectral condensation phenomenon in parabolic control problems*, Ann. Henri Lebesgue **3** (2020), 717–793 (English).
- [8] K. Bhandari and F. Boyer, *Boundary null-controllability of coupled parabolic systems with Robin conditions*, Evol. Equ. Control Theory **10** (2021), no. 1, 61–102 (English).
- [9] K. Bhandari, F. Boyer, and V. Hernández-Santamaría, *Boundary null-controllability of 1-D coupled parabolic systems with Kirchhoff-type conditions*, Math. Control Signals Syst. **33** (2021), no. 3, 413–471 (English).
- [10] M. Burger, M. Di Francesco, J.-F. Pietschmann, and B. Schlake, *Nonlinear cross-diffusion with size exclusion*, SIAM J. Math. Anal. **42** (2010), no. 6, 2842–2871. MR2745794
- [11] J. A. Bárcena-Petisco, E. Fernández-Cara, and D. A. Souza, *Exact controllability to the trajectories of the one-phase stefan problem*, Journal of Differential Equations **376** (2023), 126–153.
- [12] J. R. Cannon, D. B. Henry, and D. B. Kotlow, *Classical solutions of the one-dimensional, two-phase Stefan problem*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **107** (1975), 311–341 (1976). MR407456
- [13] J. R. Cannon and M. Primicerio, *A two phase Stefan problem with flux boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **88** (1971), 193–205. MR0310426
- [14] ———, *A two phase Stefan problem with temperature boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **88** (1971), 177–191. MR0310425
- [15] J. Cauvin-Vila, V. Ehrlacher, and A. Hayat, *Boundary stabilization of one-dimensional cross-diffusion systems in a moving domain : Linearized system*, Journal of Differential Equations **350** (2023), 251–307.
- [16] B. Colle, J. Lohéac, and T. Takahashi, *Controllability of the Stefan problem by the flatness approach*, Systems and Control Letters **174** (April 2023), 105480.
- [17] ———, *Controllability results for a cross diffusion system with a free boundary by a flatness approach*, Acta Appl. Math. **187** (2023), 18 (English). Id/No 14.
- [18] ———, *Flatness approach for the boundary controllability of a system of heat equations*, SIAM Journal on Control and Optimization **62** (2024), no. 3, 1766–1782.
- [19] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity.*, Math. Surv. Monogr., vol. 136, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2007 (English).
- [20] J. Dardé and S. Ervedoza, *On the reachable set for the one-dimensional heat equation*, SIAM J. Control Optim. **56** (2018), no. 3, 1692–1715 (English).

- [21] R. Demarque and E. Fernández-Cara, *Local null controllability of one-phase Stefan problems in 2D star-shaped domains*, J. Evol. Equ. **18** (2018), no. 1, 245–261. MR3772848
- [22] F. Dubois, N. Petit, and P. Rouchon, *Motion planning and nonlinear simulations for a tank containing a fluid*, 1999 european control conference (ecc), 1999, pp. 3232–3237.
- [23] W. B. Dunbar, N. Petit, P. Rouchon, and P. Martin, *Motion planning for a nonlinear Stefan problem*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var. **9** (2003), 275–296 (English).
- [24] S. Ecklebe, F. Woittennek, C. Frank-Rotsch, N. Dropka, and J. Winkler, *Toward model-based control of the vertical gradient freeze crystal growth process*, IEEE Transactions on Control Systems Technology **30** (2022), no. 1, 384–391.
- [25] A. Fasano and M. Primicerio, *General free-boundary problems for the heat equation. III*, J. Math. Anal. Appl. **59** (1977), 1–14 (English).
- [26] A. Fasano, M. Primicerio, and S. Kamin, *Regularity of weak solutions of one-dimensional two-phase Stefan problems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **115** (1977), 341–348 (1978). MR477460
- [27] H. O. Fattorini and D. L. Russell, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Ration. Mech. Anal. **43** (1971), 272–292 (English).
- [28] E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and L. de Teresa, *Boundary controllability of parabolic coupled equations*, J. Funct. Anal. **259** (2010), no. 7, 1720–1758 (English).
- [29] E. Fernández-Cara, F. Hernández, and J. Límaco, *Local null controllability of a 1D Stefan problem*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **50** (2019), no. 3, 745–769. MR3993192
- [30] E. Fernández-Cara, J. Limaco, and S. B. de Menezes, *On the controllability of a free-boundary problem for the 1D heat equation*, Systems Control Lett. **87** (2016), 29–35. MR3433238
- [31] M. Fliess, *Automatique et corps différentiels. (Robotics and differential fields)*, Forum Math. **1** (1989), no. 3, 227–238 (French).
- [32] ———, *Some basic structural properties of generalized linear systems*, Syst. Control Lett. **15** (1990), no. 5, 391–396 (English).
- [33] M. Fliess and S. T. Glad, *An algebraic approach to linear and nonlinear control*, Essays on control : perspectives in the theory and its applications. proceedings of the plenary lectures and mini-courses of the european control conference, ecc '93, held in groningen, netherlands, june 28-july 1, 1993. 2nd printing with correct, 1994, pp. 223–267 (English).
- [34] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon, *Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. (On differentially flat nonlinear systems)*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **315** (1992), no. 5, 619–624 (French).
- [35] ———, *Flatness and defect of non-linear systems : Introductory theory and examples*, Int. J. Control **61** (1995), no. 6, 1327–1361 (English).
- [36] ———, *A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*, IEEE Trans. Autom. Control **44** (1999), no. 5, 922–937 (English).
- [37] M. Fliess, P. Martin, N. Petit, and P. Rouchon, *Active signal restoration for the telegraph equation*, Proceedings of the 38th ieee conference on decision and control (cat. no.99ch36304), 1999, pp. 1107–1111 vol.2.
- [38] M. Fliess and H. Mounier, *Controllability and observability of linear delay systems : An algebraic approach*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var. **3** (1998), 301–314 (English ; French).
- [39] ———, *Tracking control and π -freeness of infinite dimensional linear systems*, Dynamical systems, control, coding, computing vision. new trends, interfaces, and interplay, 1999, pp. 45–68 (English).
- [40] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, and J. Rudolph, *Linear systems over Mikusiński operators and control of a flexible beam*, ESAIM, Proc. **2** (1997), 183–193 (French).
- [41] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964. MR0181836
- [42] ———, *The Stefan problem in several space variables*, Trans. Am. Math. Soc. **133** (1968), 51–87 (English).
- [43] ———, *Analyticity of the free boundary for the Stefan problem*, Arch. Ration. Mech. Anal. **61** (1976), 97–125 (English).
- [44] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lect. Notes Ser., Seoul, vol. 34, Seoul : Seoul National Univ., 1996 (English).
- [45] B. Geshkovski and D. Maity, *Control of the stefan problem in a periodic box*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **33** (2023), no. 03, 547–608.

-
- [46] B. Geshkovski and E. Zuazua, *Controllability of one-dimensional viscous free boundary flows*, SIAM J. Control Optim. **59** (2021), no. 3, 1830–1850. MR4253800
- [47] M. Gevrey, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. Premier mémoire*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **3e série**, **35** (1918), 129–190 (fr).
- [48] C. Ghanmi, S. Mani Aouadi, and F. Triki, *Identification of a boundary influx condition in a one-phase Stefan problem*, Appl. Anal. **101** (2022), no. 18, 6573–6595. MR4492898
- [49] ———, *Recovering the initial condition in the one-phase Stefan problem*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **15** (2022), no. 5, 1143–1164. MR4405339
- [50] R. Glowinski and J.-L. Lions, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, Acta numerica, 1995, 1995, pp. 159–333. MR1352473
- [51] S. C. Gupta, *The classical Stefan problem*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 45, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2003. Basic concepts, modelling and analysis. MR2032973
- [52] A. Hartmann, K. Kellay, and M. Tucsnak, *From the reachable space of the heat equation to Hilbert spaces of holomorphic functions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **22** (2020), no. 10, 3417–3440 (English).
- [53] A. Jüngel, *The boundedness-by-entropy method for cross-diffusion systems*, Nonlinearity **28** (2015), no. 6, 1963–2001. MR3350617
- [54] ———, *Entropy methods for diffusive partial differential equations*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, [Cham], Bilbao, 2016. MR3497125
- [55] R. E. Kalman, P. L. Falb, and M. A. Arbib, *Topics in mathematical theory*, McGraw-Hill, 1969.
- [56] K. Kellay, T. Normand, and M. Tucsnak, *Sharp reachability results for the heat equation in one space dimension*, Anal. PDE **15** (2022), no. 4, 891–920 (English).
- [57] H. K. Khalil, *Nonlinear systems.*, 3rd ed., Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2002 (English).
- [58] D. Kinderlehrer and L. Nirenberg, *The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 3, 257–282. MR480348
- [59] S. Koga, M. Diagne, and M. Krstic, *Control and state estimation of the one-phase Stefan problem via backstepping design*, IEEE Trans. Automat. Control **64** (2019), no. 2, 510–525. MR3912105
- [60] S. Koga, M. Diagne, S. Tang, and M. Krstic, *Backstepping control of the one-phase Stefan problem*, 2016 american control conference (acc), 2016July, pp. 2548–2553.
- [61] S. Koga and M. Krstic, *Single-boundary control of the two-phase Stefan system*, Syst. Control Lett. **135** (2020), 9 (English). Id/No 104573.
- [62] ———, *Materials phase change PDE control & estimation—from additive manufacturing to polar ice*, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser/Springer, Cham, [2020] ©2020. MR4237775
- [63] J. Kopp and F. Woittennek, *Flatness based trajectory planning and open-loop control of shallow-water waves in a tube*, Automatica **122** (2020), 109251.
- [64] B. Laroche, *Extension de la notion de platitude à des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires*, Theses, 2000.
- [65] ———, *Motion Planning for an integro-PDE transport-reaction model*, CDPS'09, workshop on Control of Distributed Parameter Systems, July 2009.
- [66] B. Laroche and C. Daniel, *Flatness-Based Control of PER Protein Oscillations in a Drosophila Model*, IEEE Transactions on Automatic Control **49** (February 2004), no. 2, 175–183.
- [67] B. Laroche and P. Martin, *Motion Planning for a Linearized Korteweg-De Vries Equation with Boundary Control*, 15th IFAC World Congress, July 2002, pp. 225–230.
- [68] B. Laroche, P. Martin, and P. Rouchon, *Motion planning for a class of partial differential equations with boundary control*, Proceedings of the 37th IEEE conference on decision and control (cat. no.98ch36171), 1998, pp. 3494–3497 vol.3.
- [69] ———, *Motion planning for the heat equation*, Int. J. Robust Nonlinear Control **10** (2000), no. 8, 629–643 (English).
- [70] C. Laurent and L. Rosier, *Exact controllability of semilinear heat equations in spaces of analytic functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **37** (2020), no. 4, 1047–1073.
- [71] G. Lebeau and L. Robbiano, *Exact control of the heat equation*, Commun. Partial Differ. Equations **20** (1995), no. 1-2, 335–356 (French).

- [72] J. Lévine, *On necessary and sufficient conditions for differential flatness*, Appl. Algebra Eng. Commun. Comput. **22** (2011), no. 1, 47–90 (English).
- [73] P. Lissy and C. Moreau, *State-constrained controllability of linear reaction-diffusion systems*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations **27** (2021), 70.
- [74] J. Lohéac, *Nonnegative boundary control of 1D linear heat equations*, Vietnam Journal of Mathematics **49** (September 2021), no. 3, 845–870.
- [75] J. Lohéac, E. Trélat, and E. Zuazua, *Minimal controllability time for the heat equation under unilateral state or control constraints*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **27** (August 2017), no. 9, 1587–1644.
- [76] ———, *Minimal controllability time for finite-dimensional control systems under state constraints*, Automatica **96** (October 2018), 380–392.
- [77] F. Luca and L. de Teresa, *Control of coupled parabolic systems and Diophantine approximations*, SĚMA J. **61** (2013), no. 1, 1–17 (English).
- [78] A. F. Lynch and J. Rudolph, *Flatness-based boundary control of a class of quasilinear parabolic distributed parameter systems*, Int. J. Control **75** (2002), no. 15, 1219–1230 (English).
- [79] P. Martin, *Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats*, Ph.D. Thesis, 1992.
- [80] P. Martin, I. Rivas, L. Rosier, and P. Rouchon, *Exact controllability of a linear Korteweg–de Vries equation by the flatness approach*, SIAM J. Control Optim. **57** (2019), no. 4, 2467–2486. MR3981376
- [81] P. Martin, L. Rosier, and P. Rouchon, *Null controllability of the heat equation using flatness*, Automatica **50** (2014), no. 12, 3067–3076 (English).
- [82] ———, *Null controllability of one-dimensional parabolic equations by the flatness approach*, SIAM J. Control Optim. **54** (2016), no. 1, 198–220 (English).
- [83] ———, *On the reachable states for the boundary control of the heat equation*, AMRX, Appl. Math. Res. Express **2016** (2016), no. 2, 181–216 (English).
- [84] ———, *Controllability of the 1D Schrödinger equation using flatness*, Automatica J. IFAC **91** (2018), 208–216. MR3777606
- [85] D. M. Mattox, *Handbook of physical vapor deposition (pvd) processing*, Second, William Andrew, Oxford, 2010.
- [86] I. Mazari and D. Ruiz-Balet, *A fragmentation phenomenon for a nonenergetic optimal control problem : optimization of the total population size in logistic diffusive models*, SIAM J. Appl. Math. **81** (2021), no. 1, 153–172. MR4205675
- [87] J. Mikusiński, *Operational calculus*, 1959 (English).
- [88] J. Mikusiński and T. K. Boehme, *Operational calculus. Volume II. 2nd ed*, Int. Ser. Monogr. Pure Appl. Math., vol. 110, Pergamon Press, Oxford ; PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1987 (English).
- [89] H. Mounier, *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques*, Ph.D. Thesis, 1995. Thèse de doctorat dirigée par Fliess, Michel Sciences appliquées Paris 11 1995.
- [90] H. Mounier and J. Rudolph, *Flatness-based control of nonlinear delay systems : A chemical reactor example*, Int. J. Control **71** (1998), no. 5, 871–890 (English).
- [91] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess, and P. Rouchon, *Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system*, ESAIM : COCV **3** (1998), 315–321.
- [92] H. Mounier, J. Rudolph, and F. Woittennek, *Boundary value problems and convolutional systems over rings of ultradistributions*, Advances in the theory of control, signals and systems with physical modeling. papers based on the presentations at the bernoulli programme, lausanne, switzerland, january to june 2009., 2011, pp. 179–188 (English).
- [93] I. Moyano, *Flatness for a strongly degenerate 1-D parabolic equation*, Math. Control Signals Syst. **28** (2016), no. 4, 22 (English). Id/No 28.
- [94] A. Münch and E. Zuazua, *Numerical approximation of null controls for the heat equation : ill-posedness and remedies*, Inverse Problems **26** (2010), no. 8, 085018, 39. MR2661697
- [95] Olive, G., *Introduction to linear control theory, lecture notes, shandong university*, 2017.
- [96] F. Ollivier, *Bézout identities and control of the heat equation*, 2023. <https://hal.science/hal-04098736>.
- [97] N. Petit and P. Rouchon, *Motion planning for heavy chain systems*, Nonlinear control in the year 2000. vol. 2, 2001, pp. 229–236 (English).

-
- [98] D. Pighin and E. Zuazua, *Controllability under positivity constraints of multi-d wave equations*, Trends in control theory and partial differential equations, 2019, pp. 195–232 (English).
- [99] J.-P. Ramis, *Déviage Gevrey*, Journées Singulières de Dijon (Univ. Dijon, Dijon, 1978), 1978, pp. 4, 173–204. MR542737
- [100] G. G. Rigatos, *Nonlinear control and filtering using differential flatness approaches. Applications to electro-mechanical systems*, Stud. Syst. Decis. Control, vol. 25, Cham : Springer, 2015 (English).
- [101] P. Rouchon, *Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization*, J. Math. Syst. Estim. Control **4** (1994), no. 2, 257–260 (English).
- [102] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR924157
- [103] J. Rudolph, J. Winkler, and F. Woittennek, *Flatness based control of distributed parameter systems : Examples and computer exercises from various technological domains*, 2003.
- [104] J. Rudolph, J. Winkler, and F. Woittennek, *Flatness based approach to a heat conduction problem in a crystal growth process*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [105] D. Ruiz-Balet and E. Zuazua, *Control under constraints for multi-dimensional reaction-diffusion monostable and bistable equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **143** (2020), 345–375. MR4163133
- [106] E. H. Samb, *Boundary null-controllability of two coupled parabolic equations : simultaneous condensation of eigenvalues and eigenfunctions*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var. **27** (2021), 43 (English). Id/No s29.
- [107] H. Sira-Ramirez and S. K. Agrawal, *Differentially flat systems.*, Control Eng. (Boca Raton), vol. 17, New York, NY : Marcel Dekker, 2004 (English).
- [108] E. D. Sontag, *Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional systems.*, 2nd ed., Texts Appl. Math., vol. 6, New York, NY : Springer, 1998 (English).
- [109] T. Takahashi, L. de Teresa, and Y. Wang, *A Kalman condition for the controllability of a coupled system of Stokes equations*, 2023. <https://hal.science/hal-03936869/>.
- [110] G. Tenenbaum and M. Tucsnak, *New blow-up rates for fast controls of Schrödinger and heat equations*, J. Differ. Equations **243** (2007), no. 1, 70–100 (English).
- [111] M. Tucsnak and G. Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, Birkhäuser Adv. Texts, Basler Lehrbüch., Basel : Birkhäuser, 2009 (English).
- [112] F. Woittennek, A. Irscheid, and N. Gehring, *Flatness-based analysis and control design for 2×2 hyperbolic pdes with nonlinear boundary dynamics*, IFAC-PapersOnLine **55** (2022), no. 26, 13–19. 4th IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations CPDE 2022.
- [113] F. Woittennek and J. Rudolph, *Motion planning for a class of boundary controlled linear hyperbolic PDE's involving finite distributed delays*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations **9** (2003), 419–435 (en).
- [114] T. Yamanaka, *A new higher order chain rule and Gevrey class*, Ann. Global Anal. Geom. **7** (1989), no. 3, 179–203 (English).