UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université Paul Verlaine-Metz
Laboratoire LMAM, CNRS UMR 7122
Ecole doctorale IAEM Lorraine
Département de Mathématiques

THÈSE soumise en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE-METZ

par

Imen AYADI

Super-algèbres non associatives avec des structures homogènes

Soutenue le 10 Mars 2011 devant le Jury composé de

Helena Albuquerque	Université de Coimbra (Portugal)
Ignacio Bajo	Université de Vigo (Espagne)
Saïd Benayadi	Université Paul Verlaine-Metz, Directeur de thèse
Michel Goze	Université de Haute Alsace-Mulhouse
Richard Kerner	Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Salah Mehdi	Université Paul Verlaine-Metz
Angela Pasquale	Université Paul Verlaine-Metz

Rapporteurs :	Alberto Elduque	Université de Zaragoza (Espagne)
	Michel Goze	Université de Haute Alsace-Mulhouse

Table des matières

1 Généralités **6**
1.1 Super-algèbres associatives . . . 8
1.1.1 Classification des super-algèbres associatives simples . . . 9
1.2 Super-algèbres non associatives . . . 16
1.3 Super-algèbres avec des structures homogènes . . . 19

2 Super-algèbres de Novikov symétriques **22**
2.1 Propriétés des super-algèbres de Novikov symétriques . . . 22
2.2 Exemples de super-algèbres de Novikov symétriques . . . 25
2.3 Structures et description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques . . . 29
2.3.1 Quelques extensions de super-algèbres de Novikov symétriques . . . 30
2.3.2 Description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques . . . 33

3 Super-algèbres associatives symétriques homogènes **37**
3.1 Incompatibilité des structures symétriques paires et des structures symétriques impaires . . . 37
3.1.1 Caractérisations des super-algèbres associatives symétriques homogènes . . . 38
3.2 Super-algèbres associatives symétriques homogènes simples . . . 40
3.3 Super-algèbres associatives $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ symétriques homogènes telles que leurs parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples . . . 43
3.3.1 Super-algèbres associatives symétriques impaires telles que leurs parties paires sont des bimodules semi-simples . . . 44
3.3.2 Super-algèbres associatives symétriques paires telles que leurs parties paires sont des bimodules semi-simples . . . 49
3.4 Descriptions inductives des super-algèbres associatives symétriques homogènes . . . 53
3.4.1 Structures et description inductive des super-algèbres associatives symétriques paires . . . 54
3.4.2 Description inductive des super-algèbres associatives symétriques paires . . . 56
3.4.3 Structures et description inductive des super-algèbres associatives symétriques impaires . . . 58

4 Super-algèbres associatives super-commutatives avec des structures homogènes **62**
4.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques homogènes . . . 63
4.1.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques paires . . . 63
4.1.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques impaires . . . 66
4.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes symplectiques homogènes . . . 68
4.2.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires avec des structures symplectiques homogènes . . . 69
4.2.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques impaires avec des structures symplectiques homogènes . . . 77

5 Super-algèbres de Lie avec des structures homogènes **85**

5.1 La compatibilité et l'incompatibilité de certaines structures homogènes 85
5.2 Super-algèbres de Lie symplectiques homogènes 89
5.2.1 Super-algèbres de Lie symplectiques paires 89
5.2.2 Super-algèbres de Lie symplectiques impaires 92
5.3 Super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes 94
5.3.1 Super-algèbres de Lie quadratiques impaires avec des structures symplectiques homogènes 95
5.3.2 Super-algèbres de Lie quadratiques paires avec des structures symplectiques homogènes 102
5.4 Super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes et les super-algèbres de Manin homogènes 106
5.4.1 Description inductive des super-algèbres de Manin impaires symplectiques impaires spéciales 107
5.4.2 Description inductive des super-algèbres de Manin paires (resp. impaires) symplectiques impaires (resp. paires) spéciales 109

6 Super-algèbres Poisson-admissibles avec des structures homogènes 111
6.1 Super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques homogènes 111
6.1.1 Super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques paires 111
6.1.2 Super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques impaires 116
6.2 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes 119
6.2.1 Construction des super-algèbres de Lie quaratiques homogènes à partir des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes 119
6.2.2 Double extensions généralisées des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes 121
6.3 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes 130
6.3.1 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques paires symplectiques paires 132
6.3.2 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques impaires symplectiques impaires 134
6.3.3 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques paires (resp. quadratiques impaires) symplectiques impaires (resp. symplectiques paires) 135

Remerciements

J'aimerais commencer par remercier Saïd Benayadi, mon directeur de thèse. C'est un grand plaisir pour moi et c'est l'occasion de lui manifester toute ma gratitude pour avoir proposé un sujet passionnant. Il a su me guider avec patience et précision tout au long de ce travail. Il m'a aussi permis de rencontrer plusieurs personnes qui travaillent dans ce domaine en m'envoyant vers des destinations variées. Cela m'a beaucoup enrichie tant sur le plan personnel que professionnel. Pour tout cela et pour m'avoir fait confiance, j'aimerais lui exprimer mes remerciements.

Je remercie également Alberto Elduque ainsi que Michel Goze, qui ont bien voulu rapporter ma thèse.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance à Helena Albuquerque, Ignacio Bajo, Richard Kerner, Salah Mehdi et Angela Pasquale pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Hedi Benamor avec qui j'ai eu des discussions fructueuses, Chakib Bennis pour m'avoir fait des remarques judicieuses et Angela Pasquale pour m'avoir toujours accueilli les bras ouverts dans son bureau. J'adresse aussi mes remerciements a tous les membres du laboratoire de Mathématiques et Application de Metz (LMAM) pour m'avoir accueilli durant cette période.

Je tiens à remercier tous les thésards du LMAM, en particulier Hedi Regeiba, Ali Abbas, Jérome Noel, Mikael Chopp, Stephane Garnier, Hassan Yessine, El-kaioum Mohamed Moutuou et Amur Khuda Bux. J'aimerais remercier Ivan Lassagne et Alexandre Rey Alcantara avec qui je partage mon bureau. L'ambiance dans mon bureau a toujours été très stimulante et je leur suis profondément reconnaissante pour toute l'aide et le soutien qu'ils m'ont apportés.

J'ai également beaucoup de reconnaissance envers mes amies avec qui j'ai partagé beaucoup de bons moments et qui m'ont toujours soutenue. Je pense à Imen, Nadia, Rim et Wafa avec qui il est toujours agréable de passer du temps.

Je remercie également mes parents Samira et Youssef sans qui je n'en serais pas là aujourd'hui s'ils ne m'avaient pas toujours encouragée et soutenue. J'aimerais exprimer ma gratitude envers ma soeur Najoua, son mari Abdo et ses enfants Zied et Ilyes, envers mes frères Mahmoud et Wajdi et leurs femmes et envers mon frère Mourad.

Comment finir ces remerciements en ne faisant pas apparaître Khaled, sans le soutien de qui je n'aurais sûrement jamais pu finir ma thèse. Il a su supporter mes sautes d'humeur et me remonter le moral quand j'en avais besoin. Il m'a poussée et soutenue dans tous les choix que j'ai pu faire. Merci de tout coeur Khaled.

Résumé de la thèse

Le but de cette thèse est d'étudier certaines super-algèbres non associatives qui sont munies des structures homogènes.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons étudié les super-algèbres associatives symétriques homogènes. Nous avons généralisé, au cas des super-algèbres associatives, la double extension des algèbres associatives symétriques introduite par A. Aubert.
Nous avons utilisé un cas particulier de cette nouvelle notion de double extension pour étudier les super-algèbres de Novikov symétriques paires. En particulier, nous avons donné une description inductive de ces super-algèbres.
Ensuite, nous avons montré que toutes les super-algèbres associatives simples possèdent des structures symétriques homogènes. Plus précisément, nous avons donné explicitement sur chaque super-algèbre associative simple une structure symétrique homogène. Ce résultat nous a permis de donner une description inductive complète des super-algèbres associatives symétriques homogènes.
Nous avons terminé cette partie en donnant une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes symplectiques homogènes.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons complété l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes commencée par E. Barriero et S. Benayadi.
Ensuite, à l'aide des différentes types de double extensions introduites dans la première et la deuxième partie, nous avons introduit la notion de la double extension des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes. Finalement, en utilisant ces nouvelles notions de double extensions, nous avons obtenu des descriptions inductives des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes.

Introduction

La théorie des super-algèbres non associatives munies des formes bilinéaires est une branche intéressante des mathématiques. Nous trouvons des applications de cette théorie dans différentes disciplines [3], [21], [24], [36].

Les super-algèbres non associatives envisagées dans cette thèse sont les super-algèbres de Lie et les super-algèbres associatives. Rappelons que la terminologie "super-algèbres non associatives" signifie super-algèbres non nécessairement associatives.

Nous nous intéressons à des super-algèbres non associatives quadratiques homogènes et/ou symplectiques homogènes.

• Une super-algèbre non associative $(\mathcal{A}, .)$ est dite quadratique homogène paire (resp. impaire) si elle est munie d'une forme bilinéaire B homogène paire (resp. impaire), super-symétrique, non-dégénérée et invariante (c'est à dire $B(x.y, z) = B(x, y.z), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{A}.$).

• Une super-algèbre non associative $(\mathcal{A}, .)$ est dite symplectique homogène paire (resp. impaire) si elle est munie d'une forme bilinéaire ω homogène paire (resp. impaire), super-anti-symétrique, non-dégénérée qui satisfait

$$(-1)^{|z||x|}\omega(x, y.z)+(-1)^{|x||y|}\omega(y, z.x)+(-1)^{|y||z|}\omega(z, x.y) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{A}_{|x|},\ y \in \mathcal{A}_{|y|} \ \text{ et } \ z \in \mathcal{A}_{|z|}.$$

Les super-algèbres de Lie quadratiques homogènes ont été beaucoup étudiées ([1], [2], [9], [13], [14], [28], [33], [34]). Les algèbres de Lie semi-simples, les super-algèbres de Lie classiques basiques et plusieurs super-algèbres de Lie résolubles sont des super-algèbres de Lie quadratiques paires. En revanche, les super-algèbres $d(n)/KI_{2n}$, $n \geq 3$, sont des super-algèbres de Lie quadratiques impaires. Dans [33], A. Medina et Ph. Revoy ont introduit le concept de la double extension des algèbres de Lie quadratiques et ils ont utilisé ce concept pour donner une classification inductive des algèbres de Lie quadratiques. D'autres descriptions des algèbres de Lie quadratiques ont été données dans [18], [30]. Dans [13], une généralisation de la double extension introduite par A. Medina et Ph. Revoy dans le cas des super-algèbres quadratiques paires a été faite. À l'aide de cette nouvelle notion de double extension, une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques paires $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ telle que $dim\mathfrak{g}_{\bar{1}} = 2$ a été obtenue dans [13]. La question suivante a été posée dans [13] : " Soit $(\mathfrak{g}, B)$ une super-algèbre de Lie quadratique paire B-irréductible non simple. Peut-on obtenir $\mathfrak{g}$ par doubles extensions ?" Une réponse affirmative a cette question a été donnée dans [14] dans le cas des super-algèbres de Lie quadratiques paires

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ telle que l'action de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ sur $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ est complètement réductible. De plus, en introduisant une notion particulière de la double extension des super-algèbres de Lie quadratiques paires dans [14], S. Benayadi a donné une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques paires $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ telle que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie réductive et l'action de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ sur $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ est complètement réductible. Dans le but de donner une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques paires, en particulier celles qui satisfont $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\}$, les auteurs de [9] ont introduit la notion de la double extension généralisée des super-algèbres de Lie quadratiques paires. En particulier, ils ont montré que toute super-algèbre de Lie quadratique paire résoluble est obtenue par une série finie de doubles extensions généralisées par une super-algèbre de Lie de dimension 1. La notion de la double extension généralisée a permis aussi aux auteurs de [1], de donner une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques paires $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ telle que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie réductive. Plus précisément, le travail fait dans [1] est une amélioration de l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques paires $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ telle que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie réductive et l'action de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ sur $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ est complètement réductible faite dans [14]. Dans un travail récent [2] , H. Albuquerque, E. Barreiro et S. Benayadi ont développé l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques impaires en donnant deux descriptions des super-algèbres de Lie quadratiques impaires telles que leurs parties paires soient des algèbres de Lie réductives. La première description est obtenue au moyen de la notion de la double extension généralisée des super-algèbres de Lie quadratiques impaires. En revanche, la seconde description n'utilise pas la notion de la double extension.

D'autres travaux intéressants ont été consacrés à l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes avec en plus des structures symplectiques homogènes [4], [10] et [12]. En particulier, dans [4], A. Aubert a donné une description inductive des algèbres de Lie quadratiques symplectiques en moyen du concept de la double extension symplectique. Dans [10], nous trouvons deux autres descriptions inductives de ces algèbres. La première description a été obtenue à l'aide de la double extension quadratique. Ensuite, en remarquent que toute algèbre de Lie quadratique symplectique est une algèbre de Manin, les auteurs de [10] ont donné une deuxième description inductive de ces algèbres à l'aide de la double extension des algèbres de Manin [32]. Récemment, une généralisation aux cas des super-algèbres de Lie quadratiques paires symplectiques paires de ces deux descriptions a été faite dans [12]. Suite au travail fait dans [12] deux questions naturelles se posent :

1. Existe-t-il d'autres super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes que celles considérées dans [12] ?

2. Si la réponse à la question ci-dessus est positive, peut-on donner une description inductive de ces super-algèbres à l'aide des techniques de doubles extensions ?

Dans cette thèse, nous donnons une réponse positive à la première question. Ensuite, nous étudions les super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes. En particulier, nous développons certains concepts de doubles extensions.

L'autre classe des super-algèbres que nous avons étudié est celles des super-algèbres associatives symétriques homogènes et/ou symplectiques homogènes. Dans la cas non $\mathbb{Z}_2$-gradué, en utilisant le concept de la double extension d'une algèbre associative symétrique par une algèbre associative,

une description inductive des algèbres associatives symétriques a été obtenue dans [4]. Dans [11], nous trouvons une étude de la structure des algèbres associatives commutatives symétriques symplectiques qui utilise la T^*-extension introduite par M. Bordemann [18] et la double extension des algèbres associatives symétriques utilisée dans [4]. Dans cette thèse, nous généralisons la double extension faite dans [4] aux cas des super-algèbres associatives symétriques homogènes. Dans un premier temps, nous utilisons la double extension généralisée des super-algèbres associatives symétriques paires par une super-algèbre associative de dimension 1 à produit nul, pour étudier la structure des super-algèbres de Novikov symétriques paires. Ces super-algèbres sont des super-algèbres associatives symétriques paires avec une condition supplémentaire. En particulier, nous donnons une description inductive de ces super-algèbres. Ensuite, nous montrons que, contrairement au cas Lie [28] et [34], toutes les super-algèbres associatives simples possèdent des structures symétriques homogènes. Plus précisément, nous donnons explicitement sur chaque super-algèbre associative simple une structure symétrique homogène. Finalement, nous obtenons une description inductive complète des super-algèbres associatives symétriques homogènes. Ces résultats sur les super-algèbres associatives symétriques homogènes sont publiés dans [5] et [6]. Nous obtenons d'autres résultats sur les super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes symplectiques homogènes qui nous permettent d'étudier les super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous étudions les super-algèbres de Poisson quadratiques homogènes symplectiques homogènes. Une super-algèbre de Poisson est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A}$ muni de deux lois " $[,]$ " et " $\circ$ " tel que $(\mathcal{A}, [,])$ est une super-algèbre de Lie, $(\mathcal{A}, \circ)$ est une super-algèbre associative super-commutative et les super-dérivations intérieures pour la structure de Lie sont des super-dérivations pour la structure associative super-commutative. Une description d'une algèbre de Poisson à l'aide qu'une seule opération bilinéaire a été donnée dans [17], [25] et [31]. Ce point de vue a permis aux auteurs de [25] d'étudier les algèbres de Poisson en tant qu'algèbres non associatives. Plus précisément, ils ont étudié leurs propriétés algébriques et cohomologiques, déterminé leurs déformations en tant qu'algèbres non associatives et donné leurs classifications en petites dimensions. Dans [17], S. Benayadi a donné une autre description des algèbres de Poisson à l'aide d'une seule opération bilinéaire équivalente à celle donnée dans [25]. Ensuite, il a donné explicitement toutes les structures de Poisson sur des classes intéressantes d'algèbres de Lie. Dans [16], il est montré comment on peut construire des algèbres de Lie quadratiques de dimensions plus grandes à partir des algèbres de Poisson quadratiques.

Cette thèse est constituée de six chapitres qui sont organisés de la manière suivante.

Dans le premier chapitre, nous donnons les définitions des super-algèbres étudiées dans cette thèse et nous rappelons les différents résultats intéressants liés à ces super-algèbres. Dans la première section de ce chapitre, nous rappelons la classification des super-algèbres associatives simples sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 [29]. Cette classification est dû à C. Wall [35]. Ensuite, nous déduisons la liste des super-algèbres associatives simples sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Cette liste coïncide avec celle citée dans [22]. Dans la deuxième section, nous donnons une description d'une super-algèbre de Poisson à l'aide d'une seule opération bilinéaire. Cette description généralise celle donnée dans le cas des algèbres de Poisson dans [17]. Finalement, la troisième section de ce chapitre consiste à regrouper quelques résultats sur les

super-algèbres qui sont munies de structures quadratiques homogènes et/ou de structures symplectiques homogènes.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les super-algèbres de Novikov gauches et les super-algèbres de Novikov droites qui sont munies de structures symétriques paires. Nous montrons dans la première section que dans une super-algèbre munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée, les notions de super-algèbre de Novikov gauche et de super-algèbre de Novikov droite coïncident. Par conséquent, nous parlerons simplement de super-algèbre de Novikov munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée. D'après la description d'une super-algèbre de Poisson à l'aide d'une seule opération bilinéaire faite dans le chapitre précédent, nous déduisons que les super-algèbres de Novikov symétriques paires sont des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques paires. Les algèbres de Novikov sont apparues dans [7], [8], [19], [20] et [37]. En particulier dans [37], il a été démontré que les algèbres de Novikov symétriques de dimension ≤ 4 sont commutatives. De plus, un exemple d'algèbre de Novikov symétrique non-commutative de dimension 6 a été présenté dans [37]. Dans la deuxième section de ce chapitre, nous donnons plusieurs exemples de super-algèbres de Novikov symétriques paires non-super-commutatives et nous obtenons des résultats intéressants sur la structure des super-algèbres de Novikov symétriques paires. En particulier, nous montrons que toutes les algèbres de Novikov symétriques de dimension 5 sont commutatives. La classification des super-algèbres de Novikov symétriques paires (à isomorphismes près) semble très difficile. Néanmoins, nous pouvons donner une description inductive de ces super-algèbres. Dans la troisième section, nous introduisons quelques notions de doubles extensions de super-algèbres de Novikov symétriques paires. Plus explicitement, nous montrons que toute super-algèbre de Novikov symétrique paire de dimension $n > 1$ peut être obtenue à partir de $\{0\}$, $\mathbb{K}$ ou l'algèbre de dimension 1 à produit nul par une série finie de double extensions.

Le troisième chapitre est réservé à l'étude des super-algèbres associatives symétriques homogènes. Dans la première section, nous montrons que toute super-algèbre associative à produit non-nul ne peut pas posséder simultanément une structure symétrique paire et une structure symétrique impaire. En particulier, dans la deuxième section, nous montrons que contrairement aux super-algèbres de Lie simples ([28], [34]), toutes les super-algèbres associatives simples possèdent des structures symétriques homogènes en donnant explicitement dans chaque cas la structure symétrique homogène. Dans la troisième section de ce chapitre, nous donnons une description inductive des super-algèbres associatives $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ avec des structures symétriques homogènes telles que leurs parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples. En particulier, dans le cas des super-algèbres associatives symétriques impaires dont les parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples, nous donnons une description intéressante de ces super-algèbres sans utiliser les techniques de doubles extensions. Finalement, nous terminons ce chapitre par introduire la notion de la double extension généralisée des super-algèbres symétriques paires et celle des super-algèbres symétriques impaires dans le but de donner des descriptions inductives de ces deux types de super-algèbres.

Le quatrième chapitre consiste à étudier les super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes symplectiques homogènes. La double extension généralisée d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique homogène par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul est un cas particulier de la double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique homogène introduite dans le chapitre précédent. Ce cas particulier va être très utile dans ce chapitre. Dans la première section, nous généralisons la double extension symplectique d'une algèbre associative commutative symplectique par l'algèbre de dimension 1 à produit nul introduite dans [11]. Ensuite, nous introduisons la double extension généralisée d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul. Nous utilisons ces doubles extensions afin de donner une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques homogènes nilpotentes. Dans la deuxième section, nous nous intéressons à l'étude des super-algèbres associatives super-commutatives qui sont munies simultanément des structures symétriques homogènes et des structures symplectiques homogènes. Nous utilisons les résultats obtenus dans [11] et nous développons d'autres concepts de doubles extensions dans le but de donner une description inductive pour ce type de super-algèbres.

Nous étudions dans le cinquième chapitre les super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes. Ce chapitre est constitué de trois sections. Dans la première section nous montrons que les seules super-algèbres de Lie qui possèdent simultanément des structures quadratiques paires et des structures quadratiques impaires sont les super-algèbres de Lie abéliennes. Ensuite, nous donnons des contre-exemples qui montrent qu'il existe des super-algèbres de Lie non-abéliennes qui possèdent à la fois des structures symplectiques paires et des structures symplectiques impaires. Dans la deuxième section, nous généralisons au cas des super-algèbres de Lie symplectiques paires la double extension symplectique faite dans [4]. Ensuite nous introduisons le double extension (généralisée) symplectique impaire des super-algèbres de Lie symplectiques impaires dans le but de donner une description inductive des super-algèbres de Lie symplectiques homogènes nilpotentes. Finalement, dans la troixième section nous complétons l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes commencée dans [12].

Dans le sixième chapitre nous exploitons toutes les techniques de double extensions introduites dans les chapitres précédents afin de définir des double extensions généralisées des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes et/ou symplectiques homogènes. En utilisant ces nouvelles notions de double extensions, nous obtenons des descriptions inductives des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, on regroupe quelques définitions et résultats sur les super-algèbres non associatives. Dans cette thèse, toutes les super-algèbres envisagées sont de dimensions finies sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractéristique zéro.

Définition 1. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel Γ-gradué $\mathcal{V}$ (où Γ représente l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ ou l'anneau des entiers relatifs modulo 2, $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) est un espace vectoriel qui possède une famille $(\mathcal{V}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de sous-espaces de $\mathcal{V}$ telle que

$$\mathcal{V} = \bigoplus\nolimits_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{V}_\gamma.$$

Un élément $v \in \mathcal{V}_\gamma$ est dit homogène de degré γ. Dans la cas où $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, les éléments de $\mathcal{V}_{\bar{0}}$ (resp. de $\mathcal{V}_{\bar{1}}$) sont dits pairs (resp. impairs).

Définition 2. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels Γ-gradués. Une application linéaire $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est dite homogène de degré α (où $\alpha \in \Gamma$) si

$$f(\mathcal{V}_\gamma) \subseteq \mathcal{W}_{\alpha+\gamma}, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

f est dite aussi un homomorphisme homogène d'espaces vectoriels Γ-gradués de degré α et l'ensemble des homomorphismes homogènes de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$ de degré α est notée $(Hom(\mathcal{V}, \mathcal{W}))_\alpha$. Dans le cas où $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, f est dite un endomorphisme homogène de $\mathcal{V}$ de degré α.

En particulier, si $\mathcal{W} = \mathbb{K}$, où $\mathbb{K}_{\bar{0}} := \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_{\bar{1}} := \{0\}$, alors $\mathcal{V}^* := Hom(\mathcal{V}, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué. Plus précisément,

$$\mathcal{V}^*_\alpha := \{f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{K};\ f(\mathcal{V}_{\alpha+\bar{1}}) = \{0\}\}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2.$$

Dans certains cas, on a besoin de changer la graduation d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué. D'où la définition suivante.

Définition 3. Soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué. On note $P(\mathcal{A}) := \mathcal{W}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{W}_{\bar{1}}$ l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué tel que $P(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ en tant qu'espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués et

$$\mathcal{W}_{\bar{0}} := \mathcal{V}_{\bar{1}} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{\bar{1}} := \mathcal{V}_{\bar{0}}.$$

De plus, si l'on considère $\mathcal{V}^*$ l'espace dual de $\mathcal{V}$, alors $P(\mathcal{V}^*) = \mathcal{V}^*$ en tant qu'espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués avec

$$\mathcal{W}_{\bar{0}}^* = \mathcal{V}_{\bar{1}}^* \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{\bar{1}}^* = \mathcal{V}_{\bar{0}}^*.$$

Définition 4. ([34]) Une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{A}, .)$ est dite une algèbre Γ-gradué si l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel Γ-gradué (c'est à dire $\mathcal{A} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{A}_\gamma$, où $\mathcal{A}_\gamma$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$, $\forall\gamma \in \Gamma$) tel que $\mathcal{A}_\alpha.\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$, $\forall\alpha, \beta \in \Gamma$. Une algèbre $\mathbb{Z}_2$-gradué est dite une super-algèbre.

Dans la suite, on considère $\mathcal{A}$ une super-algèbre. Un élément $x \in \mathcal{A}$ est dit homogène si $x \in \mathcal{A}_{\bar{0}} \cup \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Les éléments considérés dans la suite seront homogènes. Dans le cas contraire, la mention non homogène sera spécifiée. Pour un élément homogène x, on utilise la notation standard $\mid x \mid \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ pour indiquer son degré. Pour un élément homogène x de $\mathcal{A}$, on considère les deux applications L_x et R_x qui sont définies respectivement par

$$L_x(y) := x.y \quad \text{et} \quad R_x := (-1)^{|x||y|}y.x, \quad \forall y \in \mathcal{A}_{|y|}$$

et qui sont appelées respectivement la multiplication gauche et la multiplication droite par x dans $\mathcal{A}$.

Définition 5. Soient $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre et $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

(i) $\mathcal{H}$ est dit un sous-espace vectoriel gradué de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{A}_{\bar{0}}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{A}_{\bar{1}})$.

(ii) $\mathcal{H}$ est dit une sous-super-algèbre de $\mathcal{A}$ (où une sous-algèbre gradué de $\mathcal{A}$) si $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel gradué tel que $\mathcal{H}.\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$.

(iii) $\mathcal{H}$ est dit un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel gradué $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{H}.\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ et $\mathcal{A}.\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$.

Définition 6. Soit $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre.

(i) L'ensemble $Ann(\mathcal{A}) := Vect\,\{x \in \mathcal{A},\ x.y = y.x = 0,\ \forall y \in \mathcal{A}\}$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ appelé l'annulateur de $\mathcal{A}$.

(ii) L'ensemble $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] := \left\{\sum_{finie}[x, y],\ x, y \in \mathcal{A}\right\}$, où $[x, y] := x.y - (-1)^{|x||y|}y.x$, est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}^-$ appelé l'algèbre de commutateur de $\mathcal{A}$.

Définition 7. Soient $(\mathcal{A}, .)$ et $(\mathcal{B}, *)$ deux super-algèbres. Un homomorphisme de super-algèbres $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un homomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués de degré zéro qui satisfait

$$f(x.y) = f(x) * f(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

En outre, un isomorphisme de super-algèbres est un homomorphisme de super-algèbres bijectif.

1.1 Super-algèbres associatives

Définition 8. Soit $(\mathcal{A}, .)$ une algèbre associative. $(\mathcal{A}, .)$ est dite une algèbre associative $\mathbb{Z}_2$-gradué (ou une super-algèbre associative) si l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué tel que $\mathcal{A}_\alpha.\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Remarquons que contrairement à une super-algèbre de Lie [34], une super-algèbre associative est une algèbre associative.

Exemple 1.1.1. Soient $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué et $Hom(\mathcal{V})$ l'ensemble de tous les $\mathbb{K}$-endomorphismes de $\mathcal{V}$. Muni de la $\mathbb{Z}_2$-graduation définie par

$$\big(Hom(\mathcal{V})\big)_\alpha = \{f \in Hom(\mathcal{V});\ f(\mathcal{V}_\beta) \subseteq \mathcal{V}_{\alpha+\beta},\ \forall \beta \in \mathbb{Z}_2\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2,$$

$Hom(\mathcal{V})$ est une super-algèbre associative.

Définition 9. Soient $(\mathcal{A}, *)$ une super-algèbre associative, $\mathcal{V}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué et ϕ et ψ deux applications bilinéaires définies par

$$\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \ ;\ \phi(x, v) := x.v \quad \text{et} \quad \psi : \mathcal{V} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V} \ ;\ \psi(v, x) := v.x.$$

Alors $\mathcal{V}$ est dit un bimodule de $\mathcal{A}$ (ou un $\mathcal{A}$-bimodule) si

$$(x * y).v = x.(y.v), \quad (x.v).y = x.(v.y), \quad (v.x).y = v.(x * y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A},\ v \in \mathcal{V}$$

Définition 10. Une représentation d'une super-algèbre associative $(\mathcal{A}, *)$ dans un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{V}$ est un couple (l, r) d'applications linéaires homogènes de degré zéro $l : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{V})$ et $r : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{V})$ tel que

$$l(x*y) = l(x)l(y),\ \ r(x*y) = (-1)^{|x||y|}r(y)r(x),\ \ l(x)r(y) = (-1)^{|x||y|}r(y)l(x),\ \ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}.$$

Soient $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué. Si (l, r) est une représentation de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{V}$, alors on vérifie facilement que $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{A}$-bimodule, où $\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ définie par $x.v = l(x)(v)$ et $\psi : \mathcal{V} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{V}$ définie par $v.x = (-1)^{|x||v|}r(x)(v)$. Réciproquement, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{A}$-bimodule, alors le couple (l, r) défini par $l : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{V})$; $l(x)(v) = x.v$ et $r : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{V})$; $r(x)(v) = (-1)^{|x||v|}v.x$ est une représentation de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{V}$.

Exemple 1.1.2. Soit $(\mathcal{A}, *)$ une super-algèbre associative et $\mathcal{A}^*$ son espace dual.

(i) $\mathcal{A}$ possède une structure de $\mathcal{A}$-bimodule au moyen de (L, R), où
$L : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{A})$; $L(x)(y) := L_x(y) = x * y$,
$R : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{A})$; $R(x)(y) := R_x(y) = (-1)^{|x||y|}y * x$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}$.

(ii) $\mathcal{A}^*$ possède une structure de $\mathcal{A}$-bimodule au moyen de (L^*, R^*) où
$L^* : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{A}^*)$; $L^*(x)(f) = (-1)^{|f||x|} f \circ R_x$,
$R^* : \mathcal{A} \longrightarrow End(\mathcal{A}^*)$; $R^*(x)(f) = f \circ L_x$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, f \in \mathcal{A}^*{}_{|f|}$.

Définition 11. Soient $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux $\mathcal{A}$-bimodules. Un morphisme de $\mathcal{A}$-bimodules est une application linéaire $\Phi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ qui satisfait

$$\Phi(v.x) = \Phi(v).x \quad \text{et} \quad \Phi(x.v) = x.\Phi(v), \quad \forall x \in \mathcal{A},\, v \in \mathcal{V}.$$

1.1.1 Classification des super-algèbres associatives simples

Dans ce paragraphe, on rappelle la classification des super-algèbres associatives simples sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 obtenue dans [35]. Ensuite, on déduit la liste suivante des super-algèbres associatives simples sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractéristique zéro qui a été donnée aussi dans [22].

(a) $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{K})$, l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$ telle que :

$\mathcal{A}_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in M_r(\mathbb{K}), b \in M_s(\mathbb{K}) \right\}$, $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} : c \in M_{r\times s}(\mathbb{K}), d \in M_{s\times r}(\mathbb{K}) \right\}$,
où $r \geq 1$, $s \geq 0$ et $r + s = n$. Cette super-algèbre est notée $M_{r,s}(\mathbb{K})$.

(b) La sous super-algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ de $M_{n,n}(\mathbb{K})$ telle que :

$\mathcal{A}_{\bar{0}} = \left\{ \tilde{a} := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in M_n(\mathbb{K}) \right\}$, $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \left\{ \bar{b} := \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} : b \in M_n(\mathbb{K}) \right\}$. Cette super-algèbre est notée $Q_n(\mathbb{K})$.

Définition 12. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative et S un sous-espace vectoriel gradué de $\mathcal{A}$. Le centralisateur de S dans $\mathcal{A}$ noté par $\hat{C}_{\mathcal{A}}(S)$ est la sous-super-algèbre de $\mathcal{A}$ définie par

$$\hat{C}_{\mathcal{A}}(S) := Vect\left\{ x \in \mathcal{A}_{|x|}, xs = (-1)^{|x||s|} sx, \forall s \in S_{|s|} \right\}.$$

Si $S \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} = \{0\}$, alors $\hat{C}_{\mathcal{A}}(S) = C_{\mathcal{A}}(S)$, où $C_{\mathcal{A}}(S) := Vect\{x \in \mathcal{A},\ x.s = s.x,\ \forall s \in S\}$ est le centralisateur de S dans $\mathcal{A}$ dans le sens usuel (non-gradué).

Définition 13. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-super-algèbre associative.

(i) $\mathcal{A}$ est dite centrale sur $\mathbb{K}$ si $\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) := \hat{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathbb{K}$.

(ii) $\mathcal{A}$ est dite centrale simple sur $\mathbb{K}$ si $\mathcal{A}$ est centrale sur $\mathbb{K}$ telle que les seuls idéaux bilatères gradués de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{A}$.

Il est clair que $\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{A})$ est différent de $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) := C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$, le centre de $\mathcal{A}$ en tant qu'algèbre non-graduée. Cependant, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ est aussi une sous-super-algèbre de $\mathcal{A}$ telle que $(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))_{\bar{0}} = (\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}))_{\bar{0}}$.

On remarque que si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}}$, alors on a $\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Par conséquent, dans ce cas, les notions de super-algèbre centrale, super-algèbre simple et de super-algèbre centrale simple coïncident respectivement avec les notions d'algèbre centrale, algèbre simple et algèbre centrale simple.

Définition 14. Soient $(\mathcal{A}, .)$ et $(\mathcal{B}, *)$ deux $\mathbb{K}$-super-algèbres associatives. Le produit tensoriel gradué $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une super-algèbre associative telle que

$$(\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B})_{\bar{0}} := \mathcal{A}_{\bar{0}}\hat{\otimes}\mathcal{B}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}\hat{\otimes}\mathcal{B}_{\bar{1}}, \quad (\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B})_{\bar{1}} := \mathcal{A}_{\bar{0}}\hat{\otimes}\mathcal{B}_{\bar{1}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}\hat{\otimes}\mathcal{B}_{\bar{0}}$$

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} a.a' \otimes b * b', \ \forall a \in \mathcal{A}, a' \in \mathcal{A}_{|a'|}, \ b \in \mathcal{B}_{|b|}, \ b' \in \mathcal{B}.$$

Théorème 1.1.3. ([29]) Soient $(\mathcal{A}, .)$ et $(\mathcal{B}, *)$ deux $\mathbb{K}$-super-algèbres associatives et $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ deux sous-super-algèbres de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement, alors

(i) $\hat{C}_{\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}}(\mathcal{A}'\hat{\otimes}\mathcal{B}') = \hat{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}')\hat{\otimes}\hat{C}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. En particulier, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont centrales sur $\mathbb{K}$, alors $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ est centrale sur $\mathbb{K}$.

(ii) Si $\mathcal{A}$ est centrale simple sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B}$ est simple, alors $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ est simple.

(iii) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont centrales simples sur $\mathbb{K}$, alors $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ est centrale simple sur $\mathbb{K}$.

Preuve. On montre (i) par double inclusion. L'inclusion " $\supseteq$ " est directe. Réciproquement, soient e un élément homogène de $\hat{C}_{\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}}(\mathcal{A}'\hat{\otimes}\mathcal{B}')$ et $\{b_i\}_{1\leq i\leq n_2}$ une base homogène de $\mathcal{B}$. Par conséquent, on a : $e = \sum_{i=1}^{n_2} a_i \otimes b_i$, où a_i est un élément homogène de $\mathcal{A}$ tel que

$$| a_i | + | b_i | \equiv | e | \pmod 2, \quad \forall i \in \{1, \cdots, n_2\}. \tag{1.1}$$

Par définition de e, on a $(a' \otimes 1)e = (-1)^{|e||a'|} e(a' \otimes 1)$ pour tout a' élément homogène de $\mathcal{A}'$. En utilisant la condition (1.1), on obtient que $a'a_i = (-1)^{|a'||a_i|} a_i a'$, $\forall i \in \{1, \cdots, n_2\}$. D'où, $a_i \in \hat{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}')$ et il s'ensuit que $e \in \hat{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}')\hat{\otimes}\mathcal{B}$. Si maintenant on suppose que $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq m}$ est une base homogène de $\hat{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}')$, alors $e = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \otimes \beta_i$, où $\{\beta_i\}_{1\leq i\leq m}$ est une famille d'éléments homogènes de $\mathcal{B}'$. En raisonnement de la même manière que ci-dessus, on déduit que $\beta_i \in \hat{C}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et par conséquent, $e \in \hat{C}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}')\hat{\otimes}\hat{C}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. D'où le résultat.
(ii) On suppose que I est un idéal bilatère gradué non-nul de $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ et on montre que $1_{\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}} \in I$. Il est clair que tout élément homogène z de I est de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i, \ \text{tel que pour tout } i \text{ on a } a_i \in \mathcal{A}_{|a_i|}, \ b_i \in \mathcal{B}_{|b_i|} \text{ et } | a_i | + | b_i | \equiv | z | \pmod 2. \tag{1.2}$$

Parmi les éléments homogènes non-nuls de I, on considère l'élément z qui satisfait l'équation (1.2) tel que r est le plus petit entier possible. D'où, il s'ensuit que $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$, a_i et b_i sont des éléments non-nuls. D'abord, on a la famille $\{a_1, \cdots, a_r\}$ est linéairement indépendante car s'il existe $k_i \in \mathbb{K}$ tel que $a_1 = \sum_{i=2}^{s} k_i a_i$, où $a_1, \cdots, a_s$ sont des éléments homogènes de même degré, on obtient que $z = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i = \sum_{i=2}^{s} a_i \otimes (k_i b_1 + b_i) + \sum_{i=s+1}^{r} a_i \otimes b_i$. Ceci implique que z est un élément homogène non-nul de I qui est la somme de $r-1$ termes. Ce qui contredit

le choix de r. En appliquant le même raisonnement, on déduit que $\{b_1, \cdots, b_r\}$ est aussi une famille linéairement indépendante. Ensuite, on cherche à trouver un élément homogène non-nul de I tel que $a_1 \otimes b_1 = 1 \otimes 1$. On vérifie facilement que $\mathcal{A}a_1\mathcal{A}$ est un idéal bilatère gradué non-nul de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est simple en tant qu'algèbre graduée, alors on a $\mathcal{A}a_1\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Par conséquent, il existe $c_j \in \mathcal{A}_{|c_j|}$ et $d_j \in \mathcal{A}_{|d_j|}$, où $j \in \{1, \cdots, n_1\}$ avec $n_1 = dim\mathcal{A}$, tels que : $\sum_{j=1}^{n_1} c_j a_1 d_j = 1$.

$$c_j z d_j = c_j(\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i)d_j = (c_j \otimes 1)(\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i)(d_j \otimes 1) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{|d_j||b_i|} c_j a_i d_j \otimes b_i,\ \forall j \in \{1, \cdots, n_1\}.$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{n_1} (-1)^{|b_1||d_j|} c_j z d_j = 1 \otimes b_1 + \sum_{i=2}^{r} a'_i \otimes b_i,$$

où $a'_i := \sum_{j=1}^{n_1} (-1)^{|d_j|(|b_i|+|b_1|)} c_j a_i d_j$. Si on note $z_1 := \sum_{j=1}^{n_1} (-1)^{|b_1||d_j|} c_j z d_j$, alors on déduit que z_1 est un élément homogène non-nul de I tel que $a_1 = 1$. L'hors du passage de z à z_1 la famille $\{b_1, \cdots, b_r\}$ n'a pas changé. Donc, en répétant le même procédure, on obtient un élément z_2 homogène non-nul de I tel que $z_2 := 1 \otimes 1 + \sum_{i=2}^{r} a'_i \otimes b'_i$. Maintenant, soit $a \in \mathcal{A}_{|a|}$. Il est clair que $az_2 - z_2 a$ est un élément homogène de I. D'autre part, $az_2 - z_2 a = \sum_{i=2}^{r} (aa'_i - (-1)^{|a||b'_i|} a'_i a) \otimes b'_i$. Par conséquent, on déduit que $az_2 = z_2 a$, $\forall a \in \mathcal{A}_{|a|}$. Ceci implique que $aa'_i = (-1)^{|a||a'_i|} a'_i a$ et donc $a'_i \in \hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{A})$, pour tout i. Le fait que $\mathcal{A}$ est centrale sur $\mathbb{K}$, implique que a'_i est un scalaire pour tout i. Comme la famille $\{1, a'_2, \cdots, a'_r\}$ est linéairement indépendante, on conclut que $r = 1$. Ce qui achève la démonstration de l'assertion (ii).
(iii) découle immédiatement de l'assertion (i) et l'assertion (ii).

Théorème 1.1.4. ([29]) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux super-algèbres associatives. S'il existe $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ tel que $z^2 = 1$ et $zx = -xz$ $\forall x \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$, alors $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sont isomorphes en tant qu'algèbres graduées.

Preuve. Soit $\mathcal{B}' = 1\hat{\otimes}\mathcal{B}_{\bar{0}} + z\hat{\otimes}\mathcal{B}_{\bar{1}}$. Il est clair que $\mathcal{B}'$ est une sous-super-algèbre de $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ qui est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à $\mathcal{B}$ au moyen de $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ défini par

$$\varphi(b_{\bar{0}} + b_{\bar{1}}) = 1 \otimes b_{\bar{0}} + z \otimes b_{\bar{1}},\ \forall b_{\bar{0}} \in \mathcal{B}_{\bar{0}}, b_{\bar{1}} \in \mathcal{B}_{\bar{1}}.$$

D'autre part, à l'aide d'un calcul simple, on vérifie facilement que $\mathcal{A} \subseteq \hat{C}_{\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Par conséquent, il s'ensuit que l'application linéaire $\phi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}'$ définie par $\phi(a \otimes b) := a\varphi(b)$, $\forall a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, est un homomorphisme de super-algèbres associatives. En outre, $\phi|_{\mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}}} = id|_{\mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}}}$, $\phi|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}}} = id|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}}}$, $\phi|_{\mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}}} = L_z|_{\mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}}}$ et $\phi|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}}} = -L_z|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}}}$. Comme L_z est une bijection, on conclut que ϕ est un isomorphisme de super-algèbres associatives.

Les exemples de super-algèbres associatives centrales simples donnés dans la suite, vont être très utiles dans la classification de ces super-algèbres.

Exemple 1 : Toute algèbre associative $\mathcal{A}$ centrale simple sur $\mathbb{K}$ est une super-algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ notée par $(\mathcal{A})$, où $(\mathcal{A})_{\bar{0}} = \mathcal{A}$ et $(\mathcal{A})_{\bar{1}} = \{0\}$.

Exemple 2 : L'algèbre des matrices $M_n(\mathbb{K})$ est une super-algèbre centrale simple sur $\mathbb{K}$.

Rappelons que si $\mathbb{L}$ est une extension quadratique de $\mathbb{K}$, alors il existe $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ qui n'admet pas de racine carrée dans $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{L}$ est isomorphe à $\mathbb{K}(\sqrt{a})$.

Exemple 3 : Soit $\mathbb{L} := \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$, où $z^2 = a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ une extension quadratique de $\mathbb{K}$. En posant, $\mathbb{L}_{\bar{0}} = \mathbb{K}$ et $\mathbb{L}_{\bar{1}} = z\mathbb{K}$, on vérifie facilement que $\mathbb{L}$ possède une structure de super-algèbre associative. De plus, le fait que $\mathbb{L}$ est un corps commutative, il s'ensuit que $\mathbb{L}$ est une super-algèbre associative centrale simple. En tant qu'une algèbre graduée $\mathbb{L}$ est notée par $\mathbb{K} < \sqrt{a} >$.

Soient $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. On définit l'algèbre des quaternions $\mathcal{A} = (\frac{a,b}{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}$ comme l'algèbre à deux générateurs i et j avec les relations suivantes

$$i^2 = a,\ j^2 = b,\ ij = -ji.$$

Si on pose $k = ij$, alors, on obtient que $k^2 = -ab \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $ik = -ki$ et $kj = -jk$. Avec ces multiplications, il est clair que $\mathcal{A} = (\frac{a,b}{\mathbb{K}})$ est engendrée par $\{1, i, j, k\}$ et que $\{1, i, j, k\}$ est une base de $\mathcal{A}$.

Exemple 4 : Toute algèbre des quaternions $\mathcal{A} = (\frac{a,b}{\mathbb{K}})$ sur $\mathbb{K}$ est une super-algèbre centrale simple. En effet, considérons $\mathcal{A}_{\bar{0}} := \mathbb{K} \oplus k\mathbb{K}$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}} := i\mathbb{K} \oplus j\mathbb{K}$, on vérifie que $\mathcal{A}$ possède une structure de super-algèbre associative. En tant qu'algèbre graduée, $\mathcal{A}$ est notée par $< \frac{a,b}{\mathbb{K}} >$. Ensuite, on considère $\mathcal{B} := \mathbb{K} \oplus i\mathbb{K}$ et $\mathcal{C} := \mathbb{K} \oplus j\mathbb{K}$. Le fait que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient isomorphes respectivement à $\mathbb{K} < \sqrt{a} >$ et $\mathbb{K} < \sqrt{b} >$, il s'ensuit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux super-algèbres associatives centrales simples. Finalement, comme $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}\hat{\otimes}\mathcal{C}$, on conclut que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative centrale simple.

Lemme 1.1.5. ([29]) Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative simple telle que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$, alors $\mathcal{A}_{\bar{0}} = \mathcal{A}_{\bar{1}}^2$. En outre, si I est un idéal bilatère non-nul de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$, alors $\mathcal{A}_{\bar{0}} = I + \mathcal{A}_{\bar{1}} I \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}} = I\mathcal{A}_{\bar{1}} + \mathcal{A}_{\bar{1}} I$.

Preuve. La preuve consiste à vérifier que ${\mathcal{A}_{\bar{1}}}^2 \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $(I + \mathcal{A}_{\bar{1}} I \mathcal{A}_{\bar{1}}) \oplus (I\mathcal{A}_{\bar{1}} + \mathcal{A}_{\bar{1}} I)$ sont deux idéaux bilatères gradués non-nuls de $\mathcal{A}$. D'où le résultat d'après la simplicité de $\mathcal{A}$.

Lemme 1.1.6. ([29]) Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative simple telle que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$. Supposons que J est un idéal bilatère non-gradué propre de $\mathcal{A}$, alors les deux projections $\pi_0 : J \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\pi_1 : J \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{1}}$ sont deux isomorphismes de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules.

Preuve. Le fait que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ est une somme direct de deux $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules, il s'ensuit qu'il existe deux projections $\pi_0 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\pi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{0}}$ telles que $\pi_i^2 = \pi_i$, où $i \in \{0, 1\}$ $\pi_{\bar{0}} + \pi_{\bar{1}} = id_{\mathcal{A}}$ et $\pi_{\bar{0}} \circ \pi_{\bar{1}} = 0$. Soient $x_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $y = y_0 + y_1$ un élément de $\mathcal{A}$, alors

$$\pi_i(x_0 y) = \pi_i(x_0(y_0 + y_1)) = \pi_i(x_0 y_0 + x_0 y_1) = x_0 y_i = x_0 \pi_i(y),$$

$$\pi_i(y x_0) = \pi_i((y_0 + y_1)x_0) = \pi_i(y_0 x_0 + y_1 x_0) = y_i x_0 = \pi_i(y) x_0, \quad \forall i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

D'où, on en déduit que π_0 et π_1 sont deux morphismes de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules. Posons $I = J \cap \mathcal{A}_{\bar{0}}$. On vérifie facilement que I est un idéal bilatère de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. De plus I est nul car sinon, d'après le Lemma 1.1.5, on obtient que $1 \in \mathcal{A}_{\bar{0}} = I + \mathcal{A}_{\bar{1}} I \mathcal{A}_{\bar{1}} \subset J$ ce qui contredit le fait que J est propre. D'autre part, Posons $I' = \pi_0(J)$. En utilisant le fait que π_0 est un morphisme de

$\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules, on vérifie facilement que I' est un idéal bilatère de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. Il est clair, d'après la simplicité de $\mathcal{A}$ en tant qu'algèbre graduée, que $\pi_{\bar{0}}(J) \neq J \cap \mathcal{A}_{\bar{0}}$. D'où, il s'ensuit que $I' \neq \{0\}$. En appliquant de nouveau le Lemme 1.1.5, on obtient que $\mathcal{A}_{\bar{0}} = I' + \mathcal{A}_{\bar{1}} I' \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Le fait que $\mathcal{A}_{\bar{1}} id_{\mathcal{A}}(J)\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{1}}(\pi_0(J)+\pi_1(J))\mathcal{A}_{\bar{1}} \subseteq J$, il s'ensuit que $\mathcal{A}_{\bar{1}}\pi_0(J)\mathcal{A}_{\bar{1}} \subseteq \pi_0(J)$ et par conséquent, on en déduit que $I' = \mathcal{A}_{\bar{0}}$. D'où, on a $I = \{0\}$ et $I' = \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Il s'ensuit que π_0 et π_1 sont deux isomorphismes de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules.

Proposition 1.1. *([29]) Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative simple. Si $\mathcal{A}$ n'est pas simple en tant qu'algèbre non-graduée, alors $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative simple et $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{0}}u$ où $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $u^2 = 1$.*

Preuve. Soit J un idéal bilatère propre non-gradué de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$, alors d'après le Lemme 1.1.6, il existe un unique élément de J de la forme $1+u$, où $u \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Le fait que J est un idéal bilatère de $\mathcal{A}$, implique que $u(1+u) = u+u^2$ est aussi dans J. D'autre part, il est clair que $\pi_{\bar{1}}(u+u^2) = \pi_{\bar{1}}(u+1)$. Par conséquent d'après le Lemme 1.1.6, on déduit que $u^2 = 1$. Maintenant, on montre que $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Pour $z \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ (resp. $z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$), on a $\pi_0(z(1+u)) = \pi_0((1+u)z)$ (resp. $\pi_1(z(1+u)) = \pi_1((1+u)z)$). D'où, en appliquant de nouveau le Lemme 1.1.6, il obtient que $zu = uz$ et par conséquent $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Soit $x \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$, alors $x = x.1 = x.u^2 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}u$. D'où, il s'ensuit que $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{0}}u$. Reste maintenant à vérifier que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est simple. Soit I un idéal bilatère non nul de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. D'après le Lemme 1.1.5, on obtient que $\mathcal{A}_{\bar{0}} = I + \mathcal{A}_{\bar{1}} I \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Or $\mathcal{A}_{\bar{1}} I \mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{0}} u I \mathcal{A}_{\bar{0}} u \subseteq \mathcal{A}_{\bar{0}} u I u \subseteq I u^2 = I$. D'où, on conclut que $I = \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et par conséquent $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est simple.

Corollaire 1.1.7. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ telle que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$. Si $\mathcal{Z}_1 := \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}$ est non nul, alors il existe $z_1 \in \mathcal{Z}_1 \setminus \{0\}$ tel que $z_1^2 \neq 0$.

Théorème 1.1.8. ([29]) Soient $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ telle que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$ et $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{Z}_1$ où $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Alors,

(i) $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est une algèbre centrale simple sur $\mathbb{K}$ (en tant qu'algèbre non graduée).

(ii) $\mathcal{Z}_1 \neq \{0\}$ si et seulement si $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre centrale simple sur $\mathbb{K}$.

Preuve. (i) Il est évident que si $\mathcal{A}$ est une algèbre centre simple sur $\mathbb{K}$, alors $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$. Il est clair que $\mathcal{A}$ est centrale. Si de plus $\mathcal{A}$ n'est pas simple, alors d'après la Proposition 1.1, on a $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \{0\}$. D'où la contradiction.
(ii) Supposons que $\mathcal{Z}_1 \neq \{0\}$. Par conséquent, en appliquant le Corollaire 1.1.7, il existe $z_1 \in \mathcal{Z}_1 \setminus \{0\}$ tel que $z_1^2 = a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Comme $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{1}} a = \mathcal{A}_{\bar{1}} z_1^2 \subseteq \mathcal{A}_{\bar{0}} z_1$, il s'ensuit que $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{0}} z_1$ et par conséquent pour $x \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ on a

$$x\mathcal{A}_{\bar{1}} = x\mathcal{A}_{\bar{0}} z_1 = \mathcal{A}_{\bar{0}} x z_1 = \mathcal{A}_{\bar{0}} z_1 x = \mathcal{A}_{\bar{1}} x.$$

D'où, $x \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ et il s'ensuit que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} = \mathbb{K}$. Par conséquent, $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est centrale sur $\mathbb{K}$. Finalement, en utilisant le Lemme 1.1.5 et le fait que $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{0}} z_1$, on conclut que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$

est simple. Réciproquement, supposons que $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$. D'après l'assertion (i) de ce théorème, il s'ensuit que $\mathcal{A}$ est une algèbre associative non-graduée centrale simple sur $\mathbb{K}$. Par conséquent, d'après le Corollaire 1.7 page 82 [29], on a $C := C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ est une algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ telle que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes C$ en tant qu'algèbre non-graduée. D'où, $C = C_{\bar{0}} \oplus C_{\bar{1}}$, où $C_{\bar{0}} = \mathbb{K}$ et $C_{\bar{1}} \neq \{0\}$. En appliquant le Lemme 1.1.5, on obtient que $C_{\bar{1}}^2 = C_{\bar{0}} = \mathbb{K}$. C'est à dire, il existe $u, v \in C_{\bar{1}}$ tels que $uv \neq 0$. Par conséquent, on a $C_{\bar{1}} = C_{\bar{1}}1 = C_{\bar{1}}uv \subseteq C_{\bar{0}}v = \mathbb{K}v$ et il s'ensuit que $C = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}v$ est une algèbre associative commutative. Ceci contredit le fait que C est une algèbre centrale simple sur $\mathbb{K}$.

Définition 15. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ tel que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{Z}_1$, où $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}$. On dit que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ de type pair (resp. impair) si $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$ (resp. $\mathcal{Z}_1 \neq \{0\}$).

Dans le Théorème suivant, on étudie les super-algèbres associatives centrales simples sur $\mathbb{K}$ de type impairs.

Théorème 1.1.9. ([29]) Si $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ de type impair, alors

(i) $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) = \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$, où $z \in \mathcal{Z}_1$ et $z^2 = a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. z est unique à une multiplication près et $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cong \mathbb{K} < \sqrt{a} >$ en tant qu'algèbres graduées.

(ii) $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_{\bar{0}}) \hat{\otimes} \mathbb{K} < \sqrt{a} > \cong (\mathcal{A}_{\bar{0}}) \otimes \mathbb{K} < \sqrt{a} >$ en tant qu'algèbres graduées.

(iii) Si $a \notin \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$, alors $\mathcal{A}$ est une algèbre centrale simple sur $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cong \mathbb{K}(\sqrt{a})$. D'autre part, si $a \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$, alors $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cong \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ et $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$ en tant qu'algèbres non-graduées.

Preuve. Comme $\mathcal{Z}_1 \neq \{0\}$, alors d'après le Lemme 1.1.7, il existe $z \in \mathcal{Z}_1 \setminus \{0\}$ tel que $z^2 = a$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{0}}z$, où $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Par conséquent, on vérifie facilement que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$. D'autre part, on a $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K} \oplus \mathcal{Z}_1$. Pour montrer que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$, il suffit de montrer l'unicité de z à une multiplication près. Soit $y \in \mathcal{Z}_1$. Comme $yz^{-1} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} = \mathbb{K}$, où z^{-1} est l'inverse de z dans $\mathcal{Z}_1$, alors on a $y \in \mathbb{K}z$. Par conséquent, $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) = \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$, où $z^2 = a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et il s'ensuit que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cong \mathbb{K} < \sqrt{a} >$. Ce qui achève la preuve de (i).
(ii) Comme $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{0}}z$ et $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$, alors il est clair que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ engendrent $\mathcal{A}$ et $dim\mathcal{A} = dim\mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. De plus, le fait que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ commute avec $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ implique que l'application linéaire $\Phi : \mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par $\Phi(a \otimes b) = ab$ est un isomorphisme d'algèbres associatives graduées. D'où,

$$\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_{\bar{0}}) \otimes \mathbb{K} < \sqrt{a} > \cong (\mathcal{A}_{\bar{0}}) \hat{\otimes} \mathbb{K} < \sqrt{a} > .$$

(iii) Supposons que $a \notin \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$. Comme $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ est centrale simple sur $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est centrale simple sur $\mathbb{K}$ en tant qu'algèbres, alors on obtient que $\mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ est une algèbre centrale simple sur $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Supposons maintenant que $a \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$. Dans ce cas, il existe $a' \in \mathbb{K}$ tel que $a = a'^2$ et par conséquent on peut choisir $z' \in \mathcal{Z}_1$ tel que $z'^2 = 1$. On considère l'application linéaire suivante $\Psi : \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ définie par $\Psi(1) = (1, 1)$ et $\Psi(z) = (1, -1)$. On vérifie facilement que Ψ est un isomorphisme d'algèbres. Par conséquent,

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \cong \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K} \cong \mathbb{K} \times \mathbb{K},$$

et il s'ensuit que

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \cong \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}},$$

en tant qu'algèbres non-graduées.

D'après le Théorème 1.1.9 ci-dessus, on déduit que pour toute super-algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$ de type impair on a $dim\mathcal{A}_{\bar{0}} = dim\mathcal{A}_{\bar{1}} = \frac{1}{2}dim\mathcal{A}$. Cette situation n'est pas vrai, en général, dans le cas des super-algèbres associatives centrales simples sur $\mathbb{K}$ de type pairs. D'où la difficulté d'étudier cette classe de super-algèbres associatives. Néanmoins, dans le Théorème 1.1.10 suivant, on étudie les super-algèbres associatives centrales simples sur $\mathbb{K}$ de type pairs dans un cadre plus facile et qui nous permet de déduire la classification des super-algèbres associatives centrales simples sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos et de caractéristique zéro. Avant cette étude, commonçons par rappeler la notion "d'involution principale" d'une super-algèbre.

Définition 16. Soient $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ une super-algèbre et $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un homomorphisme de $\mathcal{A}$ défini par $\nu(x_0 + x_1) = x_0 - x_1$, $\forall x_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $x_1\mathcal{A}_{\bar{1}}$. On vérifie facilement que ν est un automorphisme de super-algèbres de d'ordre 2 (sauf si $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \{0\}$). ν est dite l'involution principale de $\mathcal{A}$ et elle est uniquement déterminée par la propriété $\nu|_{\mathcal{A}_{\bar{0}}} = id|_{\mathcal{A}_{\bar{0}}}$ et $\nu|_{\mathcal{A}_{\bar{1}}} = -id|_{\mathcal{A}_{\bar{1}}}$.

Théorème 1.1.10. ([29]) Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative centrale simple de type pair telle que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$. On suppose que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $M_n(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est une algèbre de division centrale simple sur $\mathbb{K}$. Alors

(i) $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) = C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ et il existe $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ tel que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) = \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$ et $z^2 = a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. L'élément z est unique à une multiplication près.

(ii) Si $a \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$, alors $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) \cong \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ et il existe un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ tel que $\mathcal{A} \cong End(\mathcal{V})\hat{\otimes}(\mathcal{D})$ en tant qu'algèbres graduées (la $\mathbb{Z}_2$-graduation de $End(\mathcal{V})$ est définie dans l'exemple 1.1.1). De plus, $\mathcal{A}_{\bar{0}} \cong M_r(\mathcal{D}) \times M_s(\mathcal{D})$, où $r = dim\mathcal{V}_{\bar{0}}$ et $s = dim\mathcal{V}_{\bar{1}}$.

Preuve. Comme $\mathcal{Z}_1 = \{0\}$, alors d'après l'assertion (i) du Théorème 1.1.8, on a $\mathcal{A}$ est une algèbre associative centrale simple sur $\mathbb{K}$. Par conséquent, d'après le Théorème de Skolem-Noether [29], tous les endomorphismes de $\mathcal{A}$ sont des automorphismes intérieurs. Soit ν l'involution principale de $\mathcal{A}$. D'où, il existe un élément homogène z de $\mathcal{A}$ inversible tel que $\nu(x) = z^{-1}xz$, $\forall x \in \mathcal{A}$. En utilisant la définition de ν et le fait que $\nu|_{\mathcal{A}_{\bar{0}}} = id|_{\mathcal{A}_{\bar{0}}}$, on déduit facilement que $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ et que $C_{\mathcal{A}}(z) = \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Maintenant, soit $x \in \mathcal{A}$ tel que $xy = yx$, $\forall y \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Comme $z \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, alors on a en particulier, $xz = zx$. D'où, $x \in C_{\mathcal{A}}(z) = \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Par conséquent, on conclut que $C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) = \mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$. Dans la suite, on montre que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) = \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$. Comme $\nu^2 = id_{\mathcal{A}}$, alors $z^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{K}$. Ensuite, le fait que z est inversible implique que $z^2 = a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

1er cas : Supposons que $a \notin \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ et considérons $\mathbb{L} := \mathbb{K} < \sqrt{a} >= \mathbb{K} \oplus z\mathbb{K}$ une extension quadratique de $\mathbb{K}$. Le fait que $\mathbb{L}$ est simple implique, d'après la Proposition 1.6 page 82 [29], que $C_{\mathcal{A}}(C_{\mathcal{A}}(\mathbb{L})) = \mathbb{L}$. Or $C_{\mathcal{A}}(\mathbb{L}) = Vect\{x \in \mathcal{A},\ xz = zx\} = \mathcal{A}_{\bar{0}}$. D'où, $\mathbb{L} = C_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) = \mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}})$. Maintenant pour montrer l'unicité de z, on suppose qu'il existe $y \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $\{1, y\}$ engendre $\mathbb{L}$ et que $y^2 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Si $y = \alpha+\beta z$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, alors on obtient que $y^2 = \alpha^2+a\beta^2+\alpha\beta z$. Par conséquent $\alpha = 0$ et on déduit que $y = \beta z$.

2ème cas : Supposons que $a \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$. Dans ce cas, on peut supposer que $z^2 = 1$. Par conséquent il vient que $e = \frac{1-z}{2}$ est un élément idempotent (c'est à dire $e^2 = e$) de $\mathcal{A}$. On considère θ l'isomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $M_n(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est une algèbre de division centrale simple, tel que $\theta(e) = e'$, où $e' = I_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tel que $r \in \mathbb{N}$ et $r \leq n$.

$\theta(z) = \theta(1-2e) = \theta(1) - 2\theta(e) = I_n - 2e' = \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$, où $r + s = n$. Comme $\mathcal{A}_{\bar{0}} = \{x \in \mathcal{A}, xz = zx\}$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \{x \in \mathcal{A}, xz = -zx\}$, alors

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{A}_{\bar{0}}) &= \{M \in M_n(\mathcal{D}), \text{ tel que } M \text{ commute avec } \theta(z)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, X \in M_r(\mathcal{D}), T \in M_s(\mathcal{D}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{A}_{\bar{1}}) &= \{M \in M_n(\mathcal{D}), \text{ tel que } M \text{ anticommute avec } \theta(z)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix}, Y \in M_{r\times s}(\mathcal{D}), Z \in M_{s\times r}(\mathcal{D}) \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{A} \cong M_n(\mathbb{D}) \cong M_n(\mathbb{K}) \otimes M_1(\mathbb{K})\hat{\otimes}(\mathcal{D})$ en tant qu'algèbres graduées. Si on considère $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué tel que $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}^r$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}^s$, alors $\mathcal{A} \cong End(\mathcal{V})\hat{\otimes}(\mathcal{D})$. Comme $\mathcal{A}_{\bar{0}} \cong M_r(\mathcal{D}) \times M_s(\mathcal{D})$, il s'ensuit que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{\bar{0}}) \cong \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ car $\mathcal{D}$ est centrale simple.

1.2 Super-algèbres non associatives

Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre. On appelle l'associateur de $(\mathcal{A}, .)$, l'application trilinéaire paire

$$(.,.,.) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \quad \text{définie par} \quad (x, y, z) := (x.y).z - x.(y.z), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{A}.$$

Définition 17. Soit $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre.

(i) $(\mathcal{A}, .)$ est dite une super-algèbre symétrique gauche (resp. symétrique droite) si :

$$(x, y, z) = (-1)^{|x||y|}(y, x, z), \ \big(\text{resp. } (x, y, z) = (-1)^{|y||z|}(x, z, y)\big) \ \ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, z \in \mathcal{A}_{|z|}.$$

(ii) $(\mathcal{A}, .)$ est dite une super-algèbre de Novikov gauche (resp. Novikov droite) si $\mathcal{A}$ est une super-algèbre symétrique gauche (resp. symétrique droite) vérifiant de plus :

$$N_r(x, y, z) := (x.y).z - (-1)^{|y||z|}(x.z).y = 0, \ \big(\text{resp. } N_l(x, y, z) := x.(y.z) - (-1)^{|x||y|}y.(x.z)) = 0\big)$$

$\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, z \in \mathcal{A}_{|z|}$.

Définition 18. Soit $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre. On appelle une super-dérivation D homogène de degré α (avec $\alpha \in \mathbb{Z}_2$) de $\mathcal{A}$, une application linéaire homogène de $\mathcal{A}$ de degré α qui satisfait

$$D(x.y) = D(x).y + (-1)^{\alpha|x|} x.D(y), \quad \forall x \in \mathcal{A}_{|x|},\, y \in \mathcal{A}.$$

On note l'espace de toutes les super-dérivations homogènes de degré α de $\mathcal{A}$ par $(Der(\mathcal{A}))_\alpha$.

Définition 19. Une super-algèbre de Lie est une super-algèbre $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ munie d'une application bilinéaire " $[,]$ " : $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ qui satisfait :

(i) La propriété de l'anti-symétrie graduée :

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|} [y, x], \quad \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}$$

(ii) L'identité de Jacobi graduée :

$$(-1)^{|z||x|} [x, [y, z]] + (-1)^{|x||y|} [y, [z, x]] + (-1)^{|y||z|} [z, [x, y]] = 0,$$

$\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, z \in \mathcal{A}_{|z|}$. La condition (ii) signifie que pour tout $x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $L_x := [x, .] := ad_{\mathcal{A}}(x)$ est une super-dérivation homogène de $(\mathcal{A}, [,])$ de degré $\mid x \mid$.

Si $\mathcal{A}$ est une super-algèbre telle que "." désigne la multiplication dans $\mathcal{A}$, alors sur l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué sous-jacent à $\mathcal{A}$, on peut définir les deux produits suivants :

$$(1)\ [x, y] := x.y - (-1)^{|x|y|} y.x \quad (2)\ x \circ y := x.y + (-1)^{|x||y|} y.x,\ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|},$$

et on note l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A}$ muni du $[,]$ (resp. $\circ$) par $\mathcal{A}^-$ (resp. $\mathcal{A}^+$). En particulier, si $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative, on vérifie facilement que $\mathcal{A}^-$ est une super-algèbre de Lie.

Exemple 1.2.1. La super-algèbre $Hom(\mathcal{V})^-$ est une super-algèbre de Lie, notée par $pl(\mathcal{V})$ (ou $gl(\mathcal{V})$) et appelée la super-algèbre de Lie générale linéaire.

Rappelons qu'une représentation d'une super-algèbre de Lie $(\mathcal{A}, [,])$ dans un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{V}$ est un homomorphisme de super-algèbres de Lie $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow pl(\mathcal{V})$. Plus précisément π est une application linéaire homogène de degré zéro qui satisfait

$$\pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - (-1)^{|x||y|} \pi(y)\pi(x),\ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|},\, y \in \mathcal{A}_{|y|}.$$

Dans ce cas, $\mathcal{V}$ est dit un $\mathcal{A}$-module.

Exemple 1.2.2. Soient $(\mathcal{A}, [,])$ une super-algèbre de Lie et $\mathcal{A}^*$ l'espace dual de $\mathcal{A}$.

1. $\mathcal{A}$ possède une structure de $\mathcal{A}$-module au moyen de la représentation adjointe $ad : \mathcal{A} \longrightarrow gl(\mathcal{A})$ définie par $ad(x)(y) := [x, y]$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}^*$ possède une structure de $\mathcal{A}$-module au moyen de la représentation co-adjointe $ad^* : \mathcal{A} \longrightarrow gl(\mathcal{A}^*)$ définie par $ad^*(x)(f) := -(-1)^{|f||x|} f \circ ad(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}$, $f \in \mathcal{A}^*{}_{|f|}$.

Définition 20. Une super-algèbre de Poisson est une super-algèbre $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ munie de deux lois " $[,]$ " et " $\circ$ " telles que

(i) $(\mathcal{A}, [,])$ est une super-algèbre de Lie,

(ii) $(\mathcal{A}, \circ)$ est une super-algèbre associative super-commutative (c'est à dire $x \circ y = (-1)^{|x||y|} y \circ x$)

(iii) $[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + (-1)^{|x||y|} y \circ [x, z]$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}$ et $z \in \mathcal{A}$.

La condition (iii) représente une certaine compatibilité entre les structures $[,]$ et $\circ$ et elle signifie que $ad_{(\mathcal{A},[,])}(x) := [x, .]$ est une super-dérivation de degré $\mid x \mid$ de $(\mathcal{A}, \circ)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$.

Définition 21. Soit $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre et considérons les multiplications $[x, y] := x.y - (-1)^{|x||y|} y.x$ et $x \circ y := x.y + (-1)^{|x||y|} y.x$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $y \in \mathcal{A}_{|y|}$. La super-algèbre $(\mathcal{A}, .)$ est dite une super-algèbre Poisson-admissible si $(\mathcal{A}, [,], \circ)$ est une super-algèbre de Poisson.

Une description des algèbres Poisson-admissibles en terme d'une seule opération bilinéaire a été faite dans [17], [25] et [31]. Dans la suite, on donne une description des super-algèbres de Poisson en terme d'une seule opération bilinéaire.

Définition 22. Une super-algèbre $(\mathcal{A}, .)$ est dite

(i) flexible si $(1 + (-1)^{|x|})(x, y, x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}$.

(ii) Lie-admissible si $\mathcal{A}^- := (\mathcal{A}, [x, y] := x.y - (-1)^{|x||y|} y.x)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $y \in \mathcal{A}_{|y|}$ est une super-algèbre de Lie.

Lemme 1.2.3. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{A}$ est une super-algèbre flexible,

(ii) $(x, y, z) = -(-1)^{|x|(|y|+|z|)+|y||z|}(z, y, x), \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$,

(iii) $[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + (-1)^{|x||y|} y \circ [x, z], \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$.

Preuve. La preuve du Lemme 1.2.3 est analogue à celle faite dans le cas non-gradué dans [17].

Dans la proposition suivante, on donne une description des super-algèbres de Poisson à l'aide d'une seule opération bilinéaire.

Proposition 1.2. *Soit $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre. Alors, $(\mathcal{A}, .)$ est une super-algèbre Poisson-admissible si et seulement si $(\mathcal{A}, .)$ est une super-algèbre flexible Lie-admissible telle que pour tous éléments homogènes x, y et z de $\mathcal{A}$, on a :*

$$2(x, y, z) = (-1)^{|y||z|} N_l(x, z, y) + (-1)^{|x|(|y|+|z|)} N_r(y, z, x). \tag{1.3}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.2.3, $\mathcal{A}$ est une super-algèbre Poisson-admissible si et seulement si $\mathcal{A}$ est une super-algèbre flexible telle que $\mathcal{A}^-$ est une super-algèbre de Lie et $\mathcal{A}^+$ est une super-algèbre associative super-commutative. Par conséquent, $\mathcal{A}$ est une super-algèbre Poisson-admissible si et seulement si $\mathcal{A}$ est une super-algèbre flexible Lie-admissible telle que $\circ$ est

associative. Maintenant, comme $\mathcal{A}$ est une super-algèbre flexible, on montre facilement que $\mathcal{A}^+$ est une super-algèbre associative si et seulement si la condition (1.3) est satisfaite.

1.3 Super-algèbres avec des structures homogènes

Soient $\mathcal{A}$ une super-algèbre et $Bil(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathcal{A}$. D'après [34], $Bil(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué tel que :

$$Bil(\mathcal{A}, \mathbb{K})_\gamma = \{B \in Bil(\mathcal{A}, \mathbb{K})\,; B(\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta) \subset \mathbb{K}_{\alpha+\beta+\gamma}; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\}\,, \forall \gamma \in \mathbb{Z}_2,$$

où le corps $\mathbb{K}$ est muni de la $\mathbb{Z}_2$-graduation suivante : $(\mathbb{K})_{\bar{0}} = \mathbb{K}$ et $(\mathbb{K})_{\bar{1}} = \{0\}$. Un élément B de $Bil(\mathcal{A}, \mathbb{K})_\gamma$, où $\gamma \in \bar{0}, \bar{1}$, est dite homogène de dergé γ. Si $\gamma = \bar{0}$ (resp. $\gamma = \bar{1}$), on dit que B est une forme bilinéaire paire (resp. impaire). Dans la suite, on ne considère que les formes bilinéaires homogènes paires ou impaires.

Définition 23. Soient $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre et B une forme bilinéaire sur $\mathcal{A}$.

(i) B est dite super-symétrique si : $B(x, y) = (-1)^{|x||y|} B(y, x)$, $\forall\, x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $y \in \mathcal{A}_{|y|}$;

(ii) B est dite invariante si : $B(x.y, z) = B(x, y.z)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$;

(iii) B est dite non-dégénérée si $x \in \mathcal{A}$ tel que $B(x, y) = 0$, $\forall y \in \mathcal{A}$, alors $x = 0$.

Définition 24. Une super-algèbre quadratique homogène (paire ou impaire) est une super-algèbre $\mathcal{A}$ qui est munie d'une forme bilinéaire B super-symétrique, paire ou impaire, non-dégénérée et invariante. $\mathcal{A}$ munie de B est notée par $(\mathcal{A}, B)$ et B est dite un produit scalaire homogène invariant sur $\mathcal{A}$ ou une structure quadratique homogène sur $\mathcal{A}$.

Remarque 1. Dans le cas d'une super-algèbre associative, une forme bilinéaire invariante est appelée aussi une forme bilinéaire associative et une structure quadratique homogène est appelée aussi une structure symétrique homogène.

Définition 25. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre quadratique homogène.

(i) Un idéal bilatère gradué I de $\mathcal{A}$ est dit non-dégénéré (resp. dégénéré) si la restriction $B\,|_{I\times I}$ de B à I est non-dégénérée (resp. dégénérée).

(ii) $(\mathcal{A}, B)$ est dite irréductible (où B-irréductible) si les seuls idéaux bilatères gradués non-dégénérés de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{A}$.

(iii) Un idéal gradué bilatère I est dit totalement isotrope si $B(I, I) = \{0\}$.

Lemme 1.3.1. Soient $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre quadratique homogène, I un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ et J son orthogonal relativement à B. Alors,

(i) J est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ et $I.J = \{0\} = J.I$.

(ii) Si I est non-dégénéré, alors $\mathcal{A} = I \oplus J$ et J est non-dégénéré.

La proposition suivante, qui découle immédiatement du Lemme 1.3.1, réduit l'étude des super-algèbres quadratiques homogènes à celles qui sont irréductibles.

Proposition 1.3. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre quadratique homogène. Alors*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$$

telles que

(i) $B(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = \{0\}$, $\forall i \neq j \in \{1, \cdots, n\}$;

(ii) $\mathcal{A}_i$ *est un idéal bilatère gradué non-dégénéré de* $\mathcal{A}$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$;

(iii) $(\mathcal{A}_i, B_i := B\,|_{\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i})$ *est une super-algèbre quadratique homogène* B_i*-irréductible,* $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$;

Parmi les super-algèbres quadratiques homogènes B-irréductibles, il y a les super-algèbres quadratiques homogènes B-irréductibles non-simples où les idéaux bilatères minimaux jouent un rôle très important dans l'étude de ces super-algèbres.

Définition 26. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre. Un idéal gradué bilatère I de $\mathcal{A}$ est dit

(i) minimal si $I \notin \{\{0\}, \mathcal{A}\}$ et si J est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ tel que $J \subseteq I$ alors $J \in \{\{0\}, I\}$.

(ii) maximal si $I \notin \{\{0\}, \mathcal{A}\}$ et si J est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ tel que $I \subseteq J$ alors $J \in \{I, \mathcal{A}\}$.

Définition 27. Soient $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre et $\omega : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire homogène de degré α sur $\mathcal{A}$. La forme ω est dite un 2-cocycle scalaire de $\mathcal{A}$ homogène de degré α si

(i) ω est super-anti-symétrique si : $\omega(x, y) = -(-1)^{|x||y|}\omega(y, x)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $y \in \mathcal{A}_{|y|}$

(ii) Pour tous $x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $y \in \mathcal{A}_{|y|}$ et $z \in \mathcal{A}_{|z|}$, on a

$$(-1)^{|z||x|}\omega(x, y.z) + (-1)^{|x||y|}\omega(y, z.x) + (-1)^{|y||z|}\omega(z, x.y) = 0.$$

Définition 28. Une super-algèbre symplectique homogène (paire ou impaire) est une super-algèbre $\mathcal{A}$ qui est munie d'une forme bilinéaire homogène (paire ou impaire) ω de $\mathcal{A}$ telle que ω est un 2-cocycle scalaire non-dégénéré. Munie d'une telle forme, $\mathcal{A}$ sera notée par $(\mathcal{A}, \omega)$ et ω est dite une forme symplectique homogène (paire ou impaire) sur $\mathcal{A}$.

Lemme 1.3.2. Soit $(\mathcal{A}, \omega)$ une super-algèbre symplectique homogène et I est un idéal bilatère gradué central de $\mathcal{A}$, alors $I^{\perp}$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$.

Définition 29. Soient $\mathcal{A}$ une super-algèbre munie d'une forme bilinéaire B homogène (paire ou impaire), super-symétrique, invariante et non-dégénérée et D une super-dérivation homogène de $\mathcal{A}$ de degré α. On dit que D est super-antisymétrique (ou B-super-antisymétrique) si

$$B(D(x), y) = -(-1)^{\alpha|x|}B(x, D(y)), \quad \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}.$$

On note l'ensemble des super-dérivations homogènes de $\mathcal{A}$ de degré α et super-antisymétriques par $(Der_a(\mathcal{A}))_\alpha$.

Proposition 1.4. *Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre.*

(i) S'il existe une structure quadratique paire B sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ possède une structure symplectique paire ω si et seulement s'il existe une super-dérivation Δ paire, super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ telle que

$$\omega(x, y) := B(\Delta(x), y), \ \forall x, y \in \mathcal{A}. \tag{1.4}$$

(ii) S'il existe une structure quadratique paire B sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ possède une structure symplectique impaire ω si et seulement s'il existe une super-dérivation Δ impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ qui satisfait (1.4).

(iii) S'il existe une structure quadratique impaire B sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ possède une structure symplectique paire ω si et seulement s'il existe une super-dérivation Δ impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ qui satisfait (1.4).

(iv) S'il existe une structure quadratique impaire B sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ possède une structure symplectique impaire ω si et seulement s'il existe une super-dérivation Δ paire, super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ qui satisfait (1.4).

Preuve. Supposons que B et ω sont respectivement une structure quadratique homogène (paire ou impaire) et une structure symplectique homogène (paire ou impaire) sur $\mathcal{A}$. Fixons un élément homogène x de $\mathcal{A}$. D'après la non-dégénérescence de B, il existe un unique élément homogène $\tilde{x}$ de $\mathcal{A}$ tel que $B(\tilde{x}, .) = \omega(x, .)$. Considérons l'application linéaire $\Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par $\Delta(x) = \tilde{x}$, $\forall x \in \mathcal{A}$. D'après la parité de B et ω, on déduit facilement que Δ est une application linéaire homogène de degré d. Ensuite, comme B et ω sont non-dégénérées, alors Δ est inversible. De plus, d'après la super-antisymétrie de ω et la super-symétrie de B, on déduit que Δ est super-antisymétrique relativement à B. Finalement, le fait que ω est un 2-cocyle scalaire de $\mathcal{A}$, implique que

$$B(\Delta(x).y + (-1)^{d|x|}x.\Delta(y) - \Delta(x.y), z) = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{A}.$$

D'où, d'après la non-dégénérescence de B, Δ est une super-dérivation de $\mathcal{A}$. Les réciproques de (i), (ii), (iii) et (iv) sont faciles à vérifier.

Chapitre 2

Super-algèbres de Novikov symétriques

Dans ce chapitre, on étudie les super-algèbres de Novikov gauches et les super-algèbres de Novikov droites qui sont munies de structures symétriques paires. On montre dans la section 1 que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre de Novikov gauche (resp. droite) symétrique paire si et seulement si $\mathcal{A}$ est une super-algèbre de Novikov droite (resp. gauche) symétrique paire. Dans la section 2 de ce chapitre, on donne plusieurs exemples de super-algèbres de Novikov symétriques paires non-super-commutatives et on obtient des résultats intéressants sur les structures des super-algèbres de Novikov symétriques paires. Comme les exemples donnés au début de la section 2 et les exemples donnés dans [37] sont 2-nilpotentes, une question naturelle se pose : Existe-t-il des (super)algèbres de Novikov non-super-commutatives qui ne sont pas 2-nilpotentes ? à la fin de la section 2, on donne une réponse positive à cette question. La classification des super-algèbres de Novikov symétriques paires (à isomorphismes près) semble très difficile. Néanmoins, on peut donner une description inductive de ces super-algèbres. Dans la section 3, on introduit quelques notions de double extensions de super-algèbres de Novikov symétriques paires. Plus explicitement, on montre que toute super-algèbre de Novikov symétrique paire de dimension $n > 1$ peut être obtenue à partir de $\{0\}$, $\mathbb{K}$ ou l'algèbre de dimension 1 à produit nul par une série finie de double extensions.

2.1 Propriétés des super-algèbres de Novikov symétriques

Dans ce paragraphe, on montre que pour une super-algèbre munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée les notions de super-algèbre de Novikov gauche et de super-algèbre de Novikov droite coïncident. Par conséquent, on parlera simplement de super-algèbre de Novikov munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée. En outre, on montre que toute super-algèbre de Novikov munie d'une forme

bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée est une super-algèbre Poisson-admissible quadratique.

Lemme 2.1.1. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée B, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{A}$ est une super-algèbre symétrique gauche,

(ii) $\mathcal{A}$ est une super-algèbre symétrique droite,

(iii) $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative.

Preuve. Supposons que l'assertion (i) est vérifiée et que x, y, z et t quatre éléments homogènes de $\mathcal{A}$, alors

$$\begin{aligned} B\left(\left(x,y,z\right),t\right) &= -\left(-1\right)^{|t|(|x|+|y|+|z|)} B\left(\left(t,x,y\right),z\right) = -\left(-1\right)^{|t|(|y|+|z|)} B\left(\left(x,t,y\right),z\right) \\ &= \left(-1\right)^{|t|(|y|+|z|)+|z|(|x|+|t|+|y|)} B\left(\left(z,x,t\right),y\right) = \left(-1\right)^{|t||y|+|z||y|} B\left(\left(x,z,t\right),y\right) \\ &= -\left(-1\right)^{|t||y|+|z||y|+|y|(|x|+|z|+|t|)} B\left(\left(y,x,z\right),t\right) = -B\left(\left(x,y,z\right),t\right) \end{aligned}$$

D'où, d'après la non-dégénérescence de B, il s'ensuit que $(x, y, z) = 0$. Par conséquent, on conclut que (i) est équivalente à (iii). En raisonnant de la même manière, on vérifie que (ii) est équivalente à (iii).

Lemme 2.1.2. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée B, alors

$$[L_x,\ L_y] = 0 \ \text{ si et seulement si } \ [R_x,\ R_y] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}.$$

Preuve. Soient $z \in \mathcal{A}_{|z|}$ et $t \in \mathcal{A}_{|t|}$, alors

$$\begin{aligned} B\left(\left[L_x, L_y\right] z, t\right) &= B\left(\left(L_x \circ L_y - \left(-1\right)^{|x||y|} L_y \circ L_x\right) z, t\right) \\ &= B\left(x.\left(y.z\right) - \left(-1\right)^{|x||y|} y.\left(x.z\right), t\right) \\ &= \left(-1\right)^{|t|(|x|+|y|+|z|)} B\left(t, x.\left(y.z\right) - \left(-1\right)^{|x||y|} y.\left(x.z\right)\right) \\ &= \left(-1\right)^{|t|(|x|+|y|+|z|)} B\left(\left[R_y, R_x\right] t, z\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat d'après la non-dégénérescence de la forme B.

La proposition suivante est une conséquence de deux lemmes précédents.

Proposition 2.1. *Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée B, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *$\mathcal{A}$ est une super-algèbre de Novikov gauche*;

(ii) *$\mathcal{A}$ est une super-algèbre de Novikov droite*;

(iv) *$\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative vérifiant :* $[L_x, L_y] = 0,\ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}$;

(iii) *$\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative vérifiant :* $[R_x, R_y] = 0,\ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}$.

D'après la Proposition 2.1, on a deux autres définitions équivalentes à la définition d'une super-algèbre de Novikov munie d'une forme bilinéaire paire, super-symétrique, associative et non-dégénérée.

Définition 30. Si $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative telle que $[R_x, R_y] = 0, \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $\forall y \in \mathcal{A}_{|y|}$ et si B est une forme bilinéaire paire super-symétrique non-dégénérée et associative sur $\mathcal{A}$, alors le couple $(\mathcal{A}, B)$ est appelé une super-algèbre de Novikov symétrique.

Le corollaire suivant est une conséquence de la Définition 30, le Lemme 2.1.2 et la Proposition 1.2.

Corollaire 2.1.3. Toute super-algèbre de Novikov symétrique et une super-algèbre Poisson-admissible quadratique.

Rappelons que dans le cas d'une algèbre associative $(\mathcal{A}, .)$, on peut définir deux nouvelles algèbres $(\mathcal{A}, ._a)$ et $(\mathcal{A}, \circ)$ telles que $x._a y := x.a.y$ et $x \circ y := \alpha x.y + \beta y.x$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, où $a \in \mathcal{A}$. Ces deux nouvelles algèbres sont dites des mutations de $(\mathcal{A}, .)$ (pour le détail voir [23]). La notion de mutation d'algèbres associatives peut être généralisée au cas des super-algèbres associatives de la manière suivante :

$$x._a y := x.a.y \quad \text{et} \quad x \circ y := \alpha x.y + \beta(-1)^{|x||y|} y.x, \ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, \ \text{où } a \in \mathcal{A}_{\overline{0}}.$$

En particulier, si $(\mathcal{A}, ., B)$ est une super-algèbre de Novikov symétrique alors les deux mutations $(\mathcal{A}, ._a, B)$ et $(\mathcal{A}, \circ, B)$ de $\mathcal{A}$ sont aussi deux super-algèbre de Novikov symétriques. En effet, d'après la Définition 30, $(\mathcal{A}, .)$ est une super-algèbre associative (c'est à dire $[L_x, R_y] = 0$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$) telle que $[R_x, R_y] = 0$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Par conséquent, $(\mathcal{A}, ._a)$ est une super-algèbre associative telle que pour $x, y, z \in \mathcal{A}$ on a,

$$\begin{aligned}
[R_x{}^{\cdot a}, R_y{}^{\cdot a}](z) &= (-1)^{|z|(|x|+|y|)}((-1)^{|x||y|}(z.a.y).a.x - (z.a.x).a.y) \\
&= (-1)^{|z|(|x|+|y|)}((-1)^{|x||y|}((z.y).x - (z.x).y).a^2 \\
&= [R_x, R_y](z).a^2,
\end{aligned}$$

où $R_x{}^{\cdot a}$ désigne la multiplication droite dans $(\mathcal{A}, ._a)$. De plus, le fait que $B(x._a y, z) = B(x.a.y, z) = B(x.y.a, z) = B(x, y.a.z) = B(x, y._a z)$, implique que $(\mathcal{A}, ._a, B)$ est une super-algèbre de Novikov symétrique. A l'aide d'un calcul simple, on obtient que

$$\begin{aligned}
[R_x{}^{\circ}, R_y{}^{\circ}] &= \alpha^2[R_x, R_y] + \beta^2[L_x, L_y] + \alpha\beta[L_x, R_y] + \alpha\beta[R_x, L_y]; \\
[L_x{}^{\circ}, R_y{}^{\circ}] &= \alpha^2[L_x, R_y] + \beta^2[R_x, R_y] + \alpha\beta[L_x, L_y] + \alpha\beta[R_x, R_y]; \\
\text{et} \quad B(x \circ y, z) &= \alpha B(x, y.z) + (-1)^{|y||z|}\beta B(x, z.y) = B(x, y \circ z).
\end{aligned}$$

où $L_x{}^{\circ}$, $R_y{}^{\circ}$ désignent respectivement les multiplications gauche et droite dans $(\mathcal{A}, \circ)$. Par conséquent, $(\mathcal{A}, \circ, B)$ est une super-algèbre de Novikov symétrique.

2.2 Exemples de super-algèbres de Novikov symétriques

Dans ce paragraphe, on donne des exemples de super-algèbres de Novikov symétriques non-super-commutatives.

Exemple 2.2.1. Soit $(\mathcal{N}, *)$ une algèbre associative non commutative qui satisfait $[R_x, R_y] = 0 = [L_x, L_y]$, $\forall x, y \in \mathcal{N}$. On peut considérer, en particulier, l'algèbre de Novikov de dimension 6 définie dans [37]. Ensuite, sur l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{A}_{\bar{0}} = \mathcal{N}$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}} = P(\mathcal{N}^*)$, on considère l'application bilinéaire "." : $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$(x + f).(y + g) := x * y + g \circ R_x + f \circ L_y, \ \ \forall x, y \in \mathcal{N}, \ \forall f, g \in P(\mathcal{N}^*).$$

Muni du produit ".", on vérifie facilement que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative qui vérifie $[R_{(x+f)}, R_{(y+g)}] = 0 = [L_{(x+f)}, L_{(y+g)}]$, $\forall (x + f), (y + g) \in \mathcal{A}$. Maintenant, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^*$. Muni de la multiplication suivante

$$(X + F) \star (Y + G) := X * Y + (-1)^{|X||Y|} G \circ R_X + F \circ L_Y, \tag{2.1}$$

et de la forme bilinéaire super-symétrique B définie par

$$B(X + F, Y + G) := F(Y) + (-1)^{|X||Y|} G(X), \ \forall (X + F) \in (\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^*)_{|X|}, (Y + G) \in (\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^*)_{|Y|} \tag{2.2}$$

$\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^*$ est une super-algèbre de Novikov symétrique non super-commutative.

Exemple 2.2.2. Soient $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension finie n et $\bigwedge \mathcal{V}$ l'algèbre de Grassmann de $\mathcal{V}$. Il est connu que l'algèbre de Grassmann est une algèbre $\mathbb{Z}_2-$graduée telle que $(\bigwedge \mathcal{V})_{\bar{0}} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \bigwedge^{2i} \mathcal{V}$ et $(\bigwedge \mathcal{V})_{\bar{1}} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \bigwedge^{2i+1} \mathcal{V}$. Ensuite, il est prouvé dans [15] que $\bigwedge \mathcal{V}$ est une algèbre symétrique si et seulement si la dimension de $\mathcal{V}$ est paire. Maintenant, supposons que la dimension de $\mathcal{V}$ est paire, notant θ un produit scalaire associatif sur $\bigwedge \mathcal{V}$ et considérant $(\mathcal{N}, B)$ une algèbre de Novikov symétrique non commutative. On peut prendre l'algèbre de Novikov de dimension 6 définie dans [37]. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A} := \mathcal{N} \otimes \bigwedge \mathcal{V}$ muni du produit défini par $(n \otimes l).(n' \otimes l') := nn' \otimes ll'$ et de la forme bilinéaire $B \otimes \theta$ définie par $B \otimes \theta(n \otimes l, n' \otimes l') := B(n, n')\theta(l, l')$, $\forall\, n, n' \in \mathcal{N}$, $l, l' \in \bigwedge \mathcal{V}$ est une super-algèbre de Novikov symétrique non super-commutative.

Les exemples de super-algèbres de Novikov symétriques non-super-commutatives donnés ci-dessous sont construits à partir des super-algèbres de Lie quadratiques 2-nilpotentes.

Exemple 2.2.3. On considère la super-algèbre de Lie 2-nilpotente $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{L}_{\bar{0}} := \mathbb{K}l_0 \oplus \mathbb{K}k_0$ et $\mathcal{L}_{\bar{1}} := \mathbb{K}l_1 \oplus \mathbb{K}k_1$ telle que $[l_0, l_1] = k_1$, $[l_1, l_1] = k_0$ et $[,]$ est nul ailleurs. On trouve cette super-algèbere dans la classification des super-algèbres de Lie 2-nilpotentes de dimension inférieure ou égale à cinq donnée dans [26]. Sur $\mathcal{L}$, on considère la forme bilinéaire B super-symétrique définie par $B(l_0, k_0) = 1 = B(l_1, k_1)$ et B est nulle ailleurs. Au moyen d'un calcul simple, on montre que B est une structure quadratique sur $\mathcal{L}$. Par conséquent, $(\mathcal{L}, [,], B)$ est une

super-algèbre de Novikov symétrique non-super-commutative.

Remarque 2. En échangeant, dans l'Exemple 2.2.3, la forme B par la forme bilinéaire super-symétrique $B_{\alpha,\beta}$, où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, définie sur $\mathcal{L}$ par $B_{\alpha,\beta}(l_0, l_0) = \alpha$, $B_{\alpha,\beta}(l_0, k_0) = \beta = B_{\alpha,\beta}(l_1, k_1)$ et $B_{\alpha,\beta}$ est nulle ailleurs, on déduit que $(\mathcal{L}, [,], B_{\alpha,\beta})$ est une super-algèbre de Novikov symétrique non-super-commutative.

Dans le but d'obtenir d'autres exemples de super-algèbres de Lie quadratiques 2-nilpotentes, on rappelle un cas particulier de la notion de la double extension et la notion de la double extension généralisée des super-algèbres de Lie quadratiques introduites dans [9], [13] et [33]. Soient $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}}, B)$ une super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre de Lie de dimension 1 et $(D, x_0) \in (Der_a(\mathfrak{g}))_{|e|} \times (\mathfrak{g}_{\bar{0}} \cap \mathcal{Z}(\mathfrak{g}))$ tels que $(1-(-1)^{|e|})B(x_0, x_0) = 0$, $(1-(-1)^{|e|})D(x_0) = 0$, $D^2 = 0$ et $D \circ ad_{\mathfrak{g}}(x) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{K}e \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e^*$ admet une structure de super-algèbre de Lie 2-nilpotente définie par

$$e^* \in \widetilde{\mathfrak{g}}, \quad [e, e] := \frac{1}{2}(1-(-1)^{|e|})x_0, \quad [e, x] := D(x) - \frac{1}{2}(1-(-1)^{|e|})B(x_0, x)e^*,$$

$$[x, y] := [x, y]_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|e|}B(D(x), y)e^*, \ \forall\, x \in \mathfrak{g}_{|x|}, y \in \mathfrak{g}_{|y|}.$$

De plus, la forme bilinéaire γ définie par $\gamma(e^*, e) = 1$, $\gamma\,|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} := B$ et $\gamma(e^*, \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}) = \{0\} = \gamma(e, \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e)$ est un produit scalaire invariant sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$. La super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \gamma)$ est dite la double extension 2-nilpotente (resp. la double extension 2-nilpotente généralisée) de $\mathfrak{g}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de D (resp. (D, x_0)) si e est un élément homogène paire (resp. impaire).

Ces techniques de construction nous permet d'obtenir d'autres exemples de super-algèbres de Lie quadratiques 2-nilpotentes à partir de la super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente $(\mathcal{L}, B)$ définie dans l'Exemple 2.2.3. Plus précisément, si on considère $D_0 \in (Der_a(\mathcal{L}))_{\bar{0}}$ définie par $D_0(l_1) = k_1$ et D_0 est nulle ailleurs, alors la double extension 2-nilpotente $\widetilde{\mathcal{L}} := \mathbb{K}e \oplus \mathcal{L} \oplus \mathbb{K}e^*$ de $\mathcal{L}$ par l'algèbre de Lie $\mathbb{K}e$ au moyen de D_0 est une super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente telle que son crochet est donné par

$$[e, l_1] := k_1, \ [l_0, l_1] := k_1, \ [l_1, l_1] := k_0 - e^* \quad \text{et} \quad [,] \quad \text{est nul ailleurs}$$

et son produit scalaire invariant $\widetilde{B}$ est défini par

$$\widetilde{B}|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}} = B, \quad \widetilde{B}(e^*, e) = 1, \quad \text{et} \quad \widetilde{B}(e^*, \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{L}) = \{0\} = \widetilde{B}(e, \mathcal{L} \oplus \mathbb{K}e). \tag{2.3}$$

En outre, si on considère $(D_1, X_0) \in (Der_a(\mathcal{L}))_{\bar{1}} \times (\mathcal{L}_{\bar{0}} \cap \mathcal{Z}(\mathcal{L}))$ défini par $X_0 = k_0$, $D_1(l_0) = k_1$, $D_1(l_1) = k_0$ et D_1 est nulle ailleurs, alors la double extension 2-nilpotente généralisée $\widetilde{\mathcal{L}} := \mathbb{K}e \oplus \mathcal{L} \oplus \mathbb{K}e^*$ de $\mathcal{L}$ par la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de (D_1, X_0) est une super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente telle que son crochet est donné par

$$[e, e] := k_0, \ [e, l_0] := k_1 - e^*, \ [e, l_1] := k_0, \ [l_0, l_1] := k_1 + e^*, \ [l_1, l_1] := k_0,$$

et son produit scalaire invariant $\widetilde{B}$ est défini comme dans l'équation (2.3).

Remarque 3. La super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente décrite dans l'Exemple 2.2.3 est obtenue à partir d'une double extension 2-nilpotente de la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}l_1 \oplus \mathbb{K}k_1$ par l'algèbre de Lie $\mathbb{K}l_0$ au moyen de $D \in Der_a(\mathbb{K}l_1 \oplus \mathbb{K}k_1)$ définie par $D(l_1) = k_1$ et D est nulle ailleurs ou à partir d'une double extension 2-nilpotente généralisée de l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{K}l_0 \oplus \mathbb{K}k_0$ par la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}l_1$ au moyen de $(0, k_0)$. Plus généralement, en utilisant les deux notions de la double extensions 2-nilpotentes décritent ci-dessus, on donne une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques 2-nilpotentes. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble formé par $\{0\}$ et l'algèbre de Lie de dimension 1. Si $(\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente telle que $\mathcal{A} \notin \mathcal{N}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{N}$ par une série finie de double extensions 2-nilpotentes généralisées par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle et/ou doubles extensions 2-nilpotentes par l'algèbre de Lie de dimension 1 et/ou sommes directes orthogonales.

On constate que l'algèbre de Novikov non commutative de dimension 6 donnée dans [37] est une algèbre 2-nilpotente et que tous les exemples de super-algèbres de Novikov symétriques non super-commutatives qu'on a donnés précédemment sont des super-algèbres 2-nilpotentes. Une question naturelle se pose : existe-t-il des (super)-algèbres de Novikov non super-commutatives qui ne sont pas 2-nilpotentes ? La réponse a cette question est affirmative. En effet, soit $(\mathcal{A}, [,])$ une super-algèbre de Lie 2-nilpotente. Par conséquent, $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subset \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Posons V et T deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués de $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \oplus T$ et $\mathcal{A} = V \oplus \mathcal{Z}(\mathcal{A})$. D'où, on a $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = [V, V] \oplus T$. Dans la suite, on cherche à trouver un produit " $\circ$ " associative super-commutative sur $\mathcal{A}$ tel que le produit "." défini sur $\mathcal{A}$ par $x.y := [x, y] + x \circ y, \forall x, y \in \mathcal{A}$ est associative, non 2-nilpotent et qui satisfait

$$[R_x, R_y] = 0 = [L_x, L_y]\,, \ \forall x, y \in \mathcal{A}. \tag{2.4}$$

Un calcul simple montre que "." est associative vérifiant (2.4) si et seulement si " $\circ$ " satisfait :

$$(*) \begin{cases} x \circ y \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \quad \forall x \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}),\, y \in \mathcal{A} \\ [x, y] \circ z = 0, \quad \forall x, y \in V,\, z \in \mathcal{A}, \\ [x \circ y, z] = [x, y \circ z]\,, \quad \forall x, y, z \in V. \end{cases}$$

1er cas : Supposons que $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subsetneq \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ (c'est à dire $T \neq \{0\}$). En particulier, supposons que $T_{\bar{0}} \neq \{0\}$ et considérons l'application bilinéaire $\psi : T_{\bar{0}} \times T_{\bar{0}} \to T_{\bar{0}}$ définie par $\psi(t_i, t_j) = 0$ si $i \neq m$ ou $j \neq m$ et $\psi(t_m, t_m) = t_m$, où $\{t_1, \cdots, t_m\}$ est une base de $T_{\bar{0}}$. Le produit " $\circ$ " sur $\mathcal{A}$ défini par $t \circ t := \psi(t, t)$, $\forall t \in T_{\bar{0}}$ et nul ailleurs est associative, super-commutative et vérifie les conditions $(*)$ ci-dessus. Par conséquent, $(\mathcal{A}, .)$, où $x.y := [x, y] + x \circ y, \ \forall x, y \in \mathcal{A}$ est une super-algèbre associative qui vérifie la condition (2.4) et qui n'est ni super-commutative ni super-anticommutative ni 2-nilpotente car ${t_m}^n = t_m$. Maintenant, supposons que $T_{\bar{0}} = \{0\}$ et considérons le produit direct $\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ de la super-algèbre de Lie $\mathcal{A}$ et l'algèbre de Lie $\mathbb{K}e$. Le produit "$\circ$" défini sur $\bar{\mathcal{A}}$ par $e \circ e = e$ et nul ailleurs est associative, super-commutative et

satisfait

$$(**)\begin{cases} x\circ y\in\mathcal{Z}(\bar{\mathcal{A}}), & \forall x\in\mathcal{Z}(\bar{\mathcal{A}}),\ y\in\bar{\mathcal{A}}\\ [x,y]\circ z=0, & \forall x,y\in V,\ z\in\bar{\mathcal{A}},\\ [x\circ y,z]=[x,y\circ z]\,, & \forall x,y,z\in V.\end{cases}$$

Par conséquent $(\bar{\mathcal{A}},.)$, où $x.y:=[x,y]+x\circ y$, $\forall x,y\in\mathcal{A}$, est une super-algèbre associative non 2-nilpotente qui satisfait la condition (2.4). On considère maintenant $T_0^*\mathcal{A}:=\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}^*$ (resp. $T_0^*\bar{\mathcal{A}}:=\bar{\mathcal{A}}\oplus\bar{\mathcal{A}}^*$) la T^*-extension triviale de $\mathcal{A}$ (resp. $\bar{\mathcal{A}}$) si $T_{\bar{0}}\neq\{0\}$ (resp. $T_{\bar{0}}=\{0\}$). Munie du produit $\star$ défini comme dans (2.1) et de la forme bilinéaire B définie comme dans (2.2), on conclut que $(T_0^*\mathcal{A},\star,B)$ (resp. $(T_0^*\bar{\mathcal{A}},\star,B)$) est une super-algèbre de Novikov symétrique non-super-commutative et qui n'est pas 2-nilpotente.

2ème cas : Supposons maintenant que $[\mathcal{A},\mathcal{A}]=\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ (c'est à dire $T=\{0\}$). En considérant $\bar{\mathcal{A}}:=\mathcal{A}\oplus\mathbb{K}e$ le produit direct de $\mathcal{A}$ par l'algèbre de Lie $\mathbb{K}e$, on déduit que $\left[\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{A}}\right]\subsetneq\mathcal{Z}(\bar{\mathcal{A}})$. En raisonnant de la même manière que dans le 1er cas, on conclut le résultat.

Dans [37], il a été prouvé que les algèbres de Novikov symétriques de dimensions inférieure ou égale à 4 sont commutatives. En revanche, dans le même article, il existe un exemple d'algèbre de Novikov symétrique de dimension 6 non-commutative. Dans la proposition suivante, on montre que les algèbres de Novikov symétriques de dimension 5 sont commutatives.

Lemme 2.2.4. Soit $(\mathcal{A},.,B)$ est une super-algèbre de Novikov symétrique non super-commutative, alors

(i) $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ est un idéal bilatère gradué non-nul de $\mathcal{A}$, totalement isotrope et inclus dans $Ann(\mathcal{A})$ l'annulateur de $\mathcal{A}$.

(ii) $(\mathcal{A}^-,B)$ est une super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente non-abélienne.

Preuve. (i) Le fait que $(\mathcal{A},.)$ est non super-commutative, implique que $[\mathcal{A},\mathcal{A}]\neq\{0\}$. D'après les assertions (iii) et (iv) de la Proposition 2.1, on déduit que $z.[x,y]=0$ et $[x,y].z=0$, $\forall x\in\mathcal{A}_{|x|},y\in\mathcal{A}_{|y|},z\in\mathcal{A}_{|z|}$. Par conséquent, $[x,y]\in Ann(\mathcal{A})$ et on en déduit que $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ est un idéal de $\mathcal{A}$ inclus dans $Ann(\mathcal{A})$. Maintenant, en utilisant l'associativité de la forme B, on déduit facilement que $\mathcal{A}^2=Ann(\mathcal{A})^\perp$. D'où $[\mathcal{A},\mathcal{A}]\subseteq Ann(\mathcal{A})\cap Ann(\mathcal{A})^\perp$ et par conséquent $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ est totalement isotrope.
(ii) Au moyen d'un calcul simple, on vérifie facilement que $\mathcal{A}^-$ est une super-algèbre quadratique non-abélienne. De plus, en utilisant (i), on déduit que $\mathcal{A}^-$ est une super-algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente non-abélienne.

Proposition 2.2. *Toute algèbre de Novikov symétrique de dimension 5 est commutative.*

Preuve. La preuve consiste à montrer qu'il n'existe pas d'algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente non-abélienne de dimension 5. Supposons qu'il existe $(\mathfrak{g},B)$ une algèbre de Lie quadratique 2-nilpotente non-abélienne de dimension 5, alors $\mathfrak{g}$ est une double extension 2-nilpotente d'une algèbre de Lie quadratique abélienne $(\mathfrak{g}',B')$ de dimension 3 au moyen de $D\in Der_a(\mathfrak{g}',B')$ telle que $D^2=0$ et $D\circ ad_{\mathfrak{g}'}(x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}'$. Comme le coprs $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors

il existe une base $\mathcal{X}$ de $\mathfrak{g}'$ telle que $\mathcal{M}^t = -\mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ désigne la matrice de D dans $\mathcal{X}$. Or le fait que $\mathcal{M}^2 = 0$ implique que $\mathcal{M} = 0$. D'où la contradiction car $(\mathfrak{g}, B)$ est non-abélienne par hypothèse.

2.3 Structures et description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques

Dans cette section, on donne une description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques. La Proposition 1.3 réduit l'étude de ces super-algèbres à celles qui sont B-irréductibles. La famille des super-algèbres de Novikov symétriques B-irréductibles est formée par les super-algèbres de Novikov symétriques simples et les super-algèbres de Novikov symétriques B-irréductibles non-simples. Dans la suite, on commence par déterminer les super-algèbres de Novikov symétriques simples.

D'après le Lemme 2.2.4 ci-dessus, on déduit que toute super-algèbre de Novikov symétrique simple est une super-algèbre associative super-commutative symétrique simple. Il est clair que le corps $\mathbb{K}$ est une algèbre associative commutative symétrique simple. Dans la proposition suivante, on montre que toute super-algèbre associative super-commutative symétrique simple est isomorphe à $\mathbb{K}$.

Proposition 2.3. *Le corps de base $\mathbb{K}$, en tant qu'algèbre associative commutative, est l'unique super-algèbre associative super-commutative simple (à isomorphisme près).*

Preuve. On montre que $(\mathcal{A}, .)$ est une algèbre (c'est à dire $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}}$), ensuite qu'elle est un corps. Supposons que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$ et soit $u \in \mathcal{A}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$. L'idéal engendré par u noté par $\mathcal{A}u$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$. Par conséquent, d'après la simplicité de $\mathcal{A}$, on obtient que $\mathcal{A}u \in \{\{0\}, \mathcal{A}\}$. Si $\mathcal{A}u = \{0\}$ alors $\mathbb{K}u$ est un idéal bilatère non-nul de $\mathcal{A}$. D'où $\mathcal{A} = \mathbb{K}u$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{A}$ est simple. D'où, $\mathcal{A} = \mathcal{A}u$ et on déduit que la multiplication droite R_u de $\mathcal{A}$ par u est bijective. Par conséquent il existe un unique élément $e \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $e.u = u$. En utilisant l'associativité et la super-commutativité de $\mathcal{A}$, on déduit que $e(x.u) = x.u$, $\forall x \in \mathcal{A}$ et il s'ensuit que $y.e = e.y = y$, $\forall y \in \mathcal{A}$. De nouveau d'après la bijection de R_u, il existe un unique $v \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $v.u = e$. Comme $(v.u).u = e.u = u$ et $(v.u).u = v.u^2 = 0$, alors $u = 0$. D'où la contradiction puisque u est supposé non-nul. Par conséquent $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \{0\}$ et donc on a $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Soit $t \in \mathcal{A}$. Le fait que $\mathcal{A}$ est simple, implique que R_t est une bijection et par conséquent il existe un unique $t' \in \mathcal{A}$ tel que $t't = e$. De plus le fait que $e.y = y.e = y$, implique que $\mathcal{A}$ est un corps. Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et $dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$ est finie, alors $\mathcal{A} = \mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}$ en tant qu'algèbre associative commutative munie de la forme B définie par $B(1,1) = 1$ est symétrique.

La suite de ce chapitre est réservé à l'étude des super-algèbres de Novikov symétriques B-irréductibles non-simples afin de conclure une description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques.

2.3.1 Quelques extensions de super-algèbres de Novikov symétriques

On introduit, dans cette sous-section, la notion de la double extension et la notion de la double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique $(\mathcal{W}, B)$ qui satisfait

$$[R_x, R_y] = 0 \text{ (resp. } [L_x, L_y] = 0), \forall x \in \mathcal{W}_{|x|}, y \in \mathcal{W}_{|y|} \tag{2.5}$$

par une super-algèbre associative $\mathbb{K}e$. Comme la double extension (généralisée) est une combinaison d'une extension centrale et d'un produit semi-direct généralisé, dans un premier temps, on commence par introduire l'extension centrale et le produit semi-direct généralisé d'une super-algèbre associative qui satisfait la condition (2.5).

2.3.1.1 Extension centrale

Soient $(\mathcal{W}, *)$ une super-algèbre associative, $\mathbb{K}e^*$ une super-algèbre et $\psi : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire paire sur $\mathcal{W}$ qui satisfait $\psi(x * y, z) = \psi(x, y * z)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{W}$. Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}$ muni de l'application bilinéaire "." : $(\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}) \times (\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}) \longrightarrow (\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W})$ définie par

$$(\alpha e^* + x).(\beta e^* + y) = x * y + \psi(x, y)e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{W}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

est une super-algèbre associative dite une extension centrale de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e^*$ au moyen de ψ. Par définition du produit ".", on a $\mathbb{K}e^*$ est dans l'annulateur de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}$ est par conséquent dans son centre. C'est pour cette raison qu'on appelle ce genre d'extension une extension centrale.

Maintenant si on suppose que $\mathcal{W}$ vérifie de plus la condition (2.5), alors la super-algèbre associative $(\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}, .)$ vérifiant aussi la condition (2.5) si et seulement si

$$\psi(x*y, z) = (-1)^{|y||z|}\psi(x*z, y) \ \ (\text{resp. } \psi(x, y*z) = (-1)^{|x||y|}\psi(y, x*z)), \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, z \in \mathcal{A}_{|z|}.$$

2.3.1.2 Produit semi-direct généralisé

Soient $\mathcal{W}$ une super-algèbre associative, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre telle que $ee = \alpha_0 e$, où $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, $X_0 \in \mathcal{W}_{\bar{0}}$ et $F, G \in (End(\mathcal{W}))_{|e|}$ tels que

$$\begin{cases} (p_1) & G(x * y) = x * G(y) \\ (p_2) & G(x) * y = x * F(y)) \\ (p_3) & F(x) * y = F(x * y) \\ (p_4) & G \circ F = F \circ G \\ (p_5) & G^2(x) = x * x_0 + \alpha_0 G(x) \\ (p_6) & F^2(x) = x_0 * x + \alpha_0 F(x) \\ (p_7) & G(x_0) = F(x_0). \end{cases}$$

Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e$ muni de l'application bilinéaire "." : $(\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e)\times(\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e)\longrightarrow(\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e)$ définie par

$$\begin{aligned} x.(y+\beta e) &:= x*y+\beta G(x),\\ \alpha e.(y+\beta e) &:= \alpha F(y)+\alpha\beta\big(\alpha_0 e+X_0\big), \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}, x,y\in\mathcal{W}, \end{aligned}$$

est une super-algèbre associative dite un produit semi-direct généralisé de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (F,G,X_0).

Remarque 4. $\mathcal{W}$ est toujours un idéal bilatère gradué de $\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e$. En revanche, $\mathbb{K}e$ n'est pas en général une sous super-algèbre de $\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e$ (sauf si $X_0=0$). C'est pour cette raison qu'on appelle ce genre d'extension un produit semi-direct généralisé.

Maintenant, si on suppose que $\mathcal{W}$ vérifie de plus la condition (2.5) et que $\mathbb{K}e$ est une super-algèbre de dimension 1 à produit nul (c'est à dire $\alpha_0=0$), alors le produit semi-direct généralisé de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (F,G,X_0) satisfait aussi la condition (2.5) si et seulement si (F,G,X_0) vérifie de plus

$$\begin{array}{ll} (G_1)\ (1-(-1)^{|e|})g(x_0)=0 & (G_2)\ (1-(-1)^{|e|})g^2(x)=0\\ (G_3)\ g\circ f(x)=(-1)^{|e||x|}x_0*x & (G_4)\ f(x)*y=(-1)^{|x||y|}f(y)*x \end{array}$$

$$(G_5)\ g(x)*y=(-1)^{|e||y|}g(x*y)$$

$$\left(\text{resp.}\ \begin{array}{ll} (D_1)\ (1-(-1)^{|e|})f(x_0)=0 & (D_2)\ f^2(x)=(-1)^{|e|}f^2(x)\\ (D_3)\ (f\circ g)(x)=(-1)^{|e||x|}x*x_0 & (D_4)\ x*g(y)=(-1)^{|x||y|}y*g(x) \end{array}\right)$$

$$(D_5)\ f(x*y)=(-1)^{|e||x|}x*f(y)$$

2.3.1.3 Double extension généralisée de super-algèbres de Novikov symétriques

Dans ce paragraphe, on généralise au cas des super-algèbres associatives la notion de la double extension introduite dans [4].

Théorème 2.3.1. Soient $(\mathcal{W},*,B)$ une super-algèbre associative symétrique et $\mathbb{K}e$ une super-algèbre(pas nécessairement symétrique) telle que $ee=\alpha_0 e$, où $\alpha_0\in\mathbb{K}$. Supposons qu'il existe $f\in End(\mathcal{W})_{|e|}$, $x_0\in\mathcal{W}_{\bar{0}}$ et $\gamma_0=\in\mathbb{K}_{|e|}$ tels que pour tout $x\in\mathcal{W}$ on a :

$$f\circ L_x=L_{f(x)},\quad f\circ g=g\circ f,\quad f^2=L_{x_0},\quad f(x_0)=g(x_0),\quad B(x_0,x_0)=0, \tag{2.6}$$

où $g \in (End(\mathcal{W}))_{|e|}$ qui satisfait $B(f(x),y) = (-1)^{|e|(|x|+|y|)}B(x,g(y)), \forall x \in \mathcal{W}_{|x|}, y \in \mathcal{W}_{|y|}$. Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{W}} := \mathbb{K}e \oplus \mathcal{W} \oplus \mathbb{K}e^*$ muni du produit suivant

$$\begin{aligned}
(x+\alpha e^*).(y+\beta e^*) &= x*y + (-1)^{|e|}B(f(x),y)e^*,\\
e.(x+\alpha e^*) &= f(x) + (-1)^{|e|}B(x_0,x)e^* + (-1)^{|e|}\alpha\alpha_0 e^*,\\
(x+\alpha e^*).e &= g(x) + B(x_0,x)e^* + \alpha\alpha_0 e^*,\\
e.e &= \alpha_0 e + x_0 + \gamma_0 e^*,
\end{aligned}$$

et de la forme bilinéaire $\widetilde{B}$ définie par $\widetilde{B}\,|_{\mathcal{W}\times\mathcal{W}} := B$, $\widetilde{B}(e^*,e) = 1$ et $\widetilde{B}(e^*,\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}) = \{0\} = \widetilde{B}(e,\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e)$ est une super-algèbre associative symétrique. La super-algèbre associative symétrique ainsi obtenue est dite une double extension généralisée paire (resp. impaire) de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f,x_0,γ_0) (resp. (f,x_0)) si e est un élément homogène paire (resp. impaire).

Remarque 5. Dans le cas où $x_0 = 0$ et $\gamma_0 = 0$, on a $\mathbb{K}e$ est une sous-super-algèbre de $\mathcal{A}$. Dans ce cas, on appelle la double extension généralisée paire (resp. impaire) une double extension paire (resp. impaire) si e est un élément homogène paire (resp. impaire).

Preuve. On montre que la double extension généralisée définie dans le Théorème 2.3.1 est une extension centrale suivie d'un produit semi-direct généralisé. D'après l'associativité de la forme B et le fait que $f \circ L_x = L_{f(x)}$, on déduit que la forme bilinéaire $\psi : \mathcal{W}\times\mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\psi(x,y) = (-1)^{|e|}B(f(x),y)$, $\forall x,y \in \mathcal{W}$ est associative. Par conséquent, on peut considérer $\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}$ l'extension centrale de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e^*$ au moyen de ψ. Ensuite, on considère le triplet $(X_0,F,G) \in (\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{W})_{\bar{0}} \times (End(\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{W}))_{|e|} \times (End(\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{W}))_{|e|}$ défini par

$$\begin{cases}
F(x+\alpha e^*) := f(x) + (-1)^{|e|}B(x,x_0)e^* + (-1)^{|e|}\alpha\alpha_0 e^*, \ \forall x \in \mathcal{W}_{|x|}, \alpha \in \mathbb{K}\\
G(x+\alpha e^*) := g(x) + B(x,x_0)e^* + \alpha\alpha_0 e^*\\
X_0 = x_0 + \gamma_0 e^*.
\end{cases}$$

En utilisant les conditions (2.6), on vérifie facilement que (F,G,X_0) satisfait les conditions $(p_1)-(p_7)$. Par conséquent, on peut considérer le produit semi-direct généralisé de $\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (F,G,X_0). On peut voir facilement que le produit sur $(\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{W})\oplus\mathbb{K}e$ coïncide avec celui du Théorème 2.3.1. D'autre part, il est clair que $\widetilde{B}$ est super-symétrique et non-dégénérée. De plus, on vérifie aisément que $\widetilde{B}$ définit un produit scalaire associatif sur $\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{W}\oplus\mathbb{K}e$.

Maintenant, supposons que $(\mathcal{W},B)$ une super-algèbre associative symétrique et $(\widetilde{\mathcal{W}},\widetilde{B})$ une double extension généralisée de $(\mathcal{W},B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul (c'est à dire $\alpha_0 = 0$) au moyen de (f,x_0). Si en particulier, $(\mathcal{W},B)$ est une super-algèbre de Novikov symétrique alors $(\widetilde{\mathcal{W}},\widetilde{B})$ est une super-algèbre de Novikov symétrique si et seulement si

$$\begin{array}{ll}
(Q_1)\ g(x*y) = (-1)^{|e||y|}g(x)*y, & (Q_2)\ x*g(y) = (-1)^{|x||y|}y*g(x),\\
(Q_3)\ g^2 = f^2, & (Q_4)\ (f\circ g)(x) = (-1)^{|e||x|}x*x_0,\\
(Q_5)\ (1-(-1)^{|e|})g^2 = 0, & (Q_6)\ (1-(-1)^{|e|})f(x_0) = 0,
\end{array}$$

où x et y sont deux éléments homogènes de $\mathcal{W}$.

Corollaire 2.3.2. Soit $(\widetilde{\mathcal{W}}, ., \widetilde{B})$ une super-algèbre associative symétrique obtenue à partir d'une double extension généralisée paire ou impaire d'une super-algèbre de Novikov symétrique $(\mathcal{W}, B)$ par une super-algèbre de dimension 1 et à produit nul (au moyen de (f, x_0)). Si (f, x_0) vérifie de plus les conditions (Q_1)-(Q_6), alors $(\widetilde{\mathcal{W}}, ., \widetilde{B})$ est une super-algèbre de Novikov symétrique appelée la double extension généralisée de Novikov paire (resp. impaire) de la super-algèbre de Novikov symétrique $(\mathcal{W}, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, x_0) si e est un élément homogène paire (resp. impaire).

2.3.2 Description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques

Dans ce paragraphe, on montre le Théorème 2.3.6 suivant. Ce théorème va jouer un rôle important dans la description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques.

Lemme 2.3.3. Soit $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre de Novikov symétrique B-irréductible non-simple de dimension $n > 1$. Soient I un idéal bilatère gradué de dimension 1 de $\mathcal{A}$ et J son orthogonal relativement à B. Alors J/I muni de la multiplication

$$(x + I).(y + I) \quad = \quad (x.y) + I\,, \quad \forall x, y \in J \tag{2.7}$$

est une super-algèbre de Novikov symétrique.

Preuve. Le fait que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre B-irréductible non-simple de dimension $n > 1$, implique que $I \subseteq J$. Il est clair que J/I muni du produit (3.18) est une super-algèbre associative. Choisissons deux éléments homogènes x et y de J, on a $[R_{\overline{x}}, R_{\overline{y}}] = (R_{\overline{x}} \circ R_{\overline{y}}) - (-1)^{|x||y|}(R_{\overline{y}} \circ R_{\overline{x}}) = \overline{[R_x, R_y]} = \overline{0}$. D'où, J/I est une super-algèbre de Novikov. Considérons maintenant la forme bilinéaire Q sur J/I définie par $Q(x+I, y+I) = B(x, y)$, $\forall x, y \in J$. Par définition, Q est une forme bilinéaire paire, super-symétrique et associative. De plus, pour $x \in J$ tel $Q(x + I, y + I) = 0$, $\forall y \in J$, on a $B(x, y) = 0$, $\forall y \in J$. D'où, $x \in I$ et par conséquent la non-dégénérescence de Q.

Lemme 2.3.4. Soit$(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre de Novikov symétrique B-irréductible non-simple de dimension $n > 1$. Soient J un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ de co-dimension 1 et e un élément homogène de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}e$. Alors $\mathcal{H} := I \oplus \mathbb{K}e$, où I est l'orthogonal de J relativement à B, est un sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}^{\perp}$ est une super-algèbre de Novikov symétrique. En outre, l'application linéaire $\theta : \mathcal{H}^{\perp} \longrightarrow J/I$ définie par $\theta(x) = x + I$, $\forall x \in \mathcal{H}^{\perp}$ est un isomorphisme de super-algèbres de Novikov.

Lemme 2.3.5. Soit$(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre de Novikov symétrique B-irréductible non-simple de dimension $n > 1$. Supposons que J un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ de co-dimension 1 et e un élément homogène de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}e$. Alors $\mathcal{A}$ est isomorphe à une double extension généralisée de Novikov paire (resp. impaire) de J/I par $\mathbb{K}e$ si e est un élément homogène paire

(resp. impaire).

Le théorème suivant résulte des trois lemmes ci-dessus.

Théorème 2.3.6. Soit$(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre de Novikov symétrique B-irréductible non-simple de dimension $n > 1$. Supposons que J un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ de co-dimension 1 et e un élément homogène de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}e$. Alors $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée de Novikov paire (resp. impaire) de J/I par $\mathbb{K}e$ si e est un élément homogène paire (resp. impaire).

Proposition 2.4. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre de Novikov symétrique B-irréductible non-simple de dimension $n > 1$ telle que $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$ (c'est le cas quand $\mathcal{A}$ est non super-commutative). Alors $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée de Novikov paire ou impaire.*

Preuve. Supposons que e est un élément homogène non-nul de $Ann(\mathcal{A})$ et notons $I := \mathbb{K}e$. Le fait que $(\mathcal{A}, B)$ est B-irréductible de dimension $n > 1$, implique que I est un idéal bilatère gradué totalement isotrope de $\mathcal{A}$. D'autre part, d'après la parité et la non-dégénérescence de B, il existe $d \in \mathcal{A}_{|e|}$ tel que $B(e, d) = 1$ et $\mathcal{A} = I^{\perp} \oplus \mathbb{K}d$. En appliquant le Théorème 2.3.6, on déduit que $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée de Novikov paire (resp. impaire) si d est un élément homogène paire (resp. impaire).

Remarque 6. Toutes les super-algèbres de Novikov symétriques de dimension 2 sont super-commutatives. En revanche, il existe des super-algèbres de Novikov symétriques non supercommutatives de dimension 3. Ces super-algèbres sont obtenues à partir d'une double extension généralisée de Novikov impaire d'une algèbre de dimension 1. Plus généralement, on peut donner une description inductive des super-algèbres de Novikov symétriques de dimension 3. On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble formé par $\{0\}$, $\mathbb{K}$ et l'algèbre de dimension 1 à produit nul. Toute super-algèbre de Novikov symétrique de dimension 3 est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$ par une double extension généralisée paire ou une double extension généralisée impaire ou une double extension généralisée de Novikov impaire et/ou une somme directe orthogonale.

Corollaire 2.3.7. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre de Novikov symétrique non super-commutative. Alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'un nombre fini de super-algèbres associatives super-commutatives symétriques par une série finie de double extensions généralisées de Novikov paires et/ou double extensions généralisées de Novikov impaires et/ou sommes directes orthogonales.

Preuve. On raisonne par récurrence sur n la dimension de $\mathcal{A}$. Comme toutes les super-algèbres de Novikov symétriques de dimension 1 et 2 sont super-commutatives, on vérifie l'hypothèse de récurrence pour $n = 3$. Il est clair, d'après la Remarque 6 ci-dessus, que si $n = 3$ alors $\mathcal{A}$ est obtenue comme dans le Corollaire 2.3.7. Supposons maintenant que toute super-algèbre de Novikov symétrique de dimension n non super-commutative s'obtient comme le Corollaire 2.3.7 et montrons que toutes super-algèbres de Novikov symétriques non super-commutatives de

dimension $n+1$ s'obtient aussi de la même manière. Soit $(\mathcal{A}', B)$ une super-algèbre de Novikov symétrique de dimension $n+1$ non super-commutative.

1er cas : Supposons que $\mathcal{A}'$ est $B-$irréductible. Alors d'après la Proposition 2.4, $\mathcal{A}'$ est une double extension généralisée de Novikov paire ou impaire d'une super-algèbre de Novikov symétrique $(\mathcal{W}, \widetilde{B})$ telle que $dim\mathcal{W} = n-1$. Si $\mathcal{W}$ est une super-algèbre de Novikov symétrique non super-commutative, alors on applique l'hypothèse de récurrence sur $\mathcal{W}$ et on conclut que $\mathcal{A}$ est obtenue comme dans le Corollaire 2.3.7.

2ème cas : Supposons maintenant que $\mathcal{A}'$ n'est pas irréductible. Alors d'après la Proposition 1.3, on a $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}'_r$ telle que $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$, $\mathcal{A}'_i$ est une super-algèbre de Novikov symétrique $B-$irréductible. Soit $i \in \{1, \cdots, r\}$ tel que $\mathcal{A}'_i$ n'est pas super-commutative. D'après le 1er cas de cette démonstration, on déduit que $\mathcal{A}'_i$ est obtenue comme dans le Corollaire 2.3.7. D'où le résultat.

Proposition 2.5. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique telle que $\mathcal{A} \notin \mathcal{E}$. Alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$ par une série finie de doubles extensions généralisées paires et/ou doubles extensions généralisées impaires et/ou sommes directes orthogonales.*

En conclusion, on déduit que toute super-algèbre de Novikov symétrique est un élément de $\mathcal{E}$ ou obtenue à partir d'un nombre finie d'éléments de $\mathcal{E}$ par une série finie de sommes directes orthogonales de super-algèbres de Novikov symétriques et/ou double extensions généralisées paires et/ou double extensions généralisées impaires et/ou double extensions généralisée de Novikov paires et/ou de double extensions généralisées de Novikov impaires.

Comme application, on peut déduire une description inductive de l'algèbre de Novikov symétrique non commutative de dimension 6 donnée dans [37]. Rappelons que l'algèbre de Novikov symétrique non commutative de dimension 6 donnée dans [37] est définie par $\mathcal{A} :=< e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 >$ telle que $e_4.e_5 = e_3, \quad e_5.e_6 = e_1, \quad e_6.e_4 = e_2$ et le produit "." est nul ailleurs et la matrice de sa structure symétrique B relativement à la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après [37] et la Proposition 2.2, on déduit que $\mathcal{A}$ est B-irréductible. De plus, le fait que $\mathcal{A}$ est non-commutative il vient que $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. Choisissons $e_1 \in Ann(\mathcal{A})$ et notons $I := \mathbb{K}e_1$. Il est clair, d'après la définition de B, que I est totalement isotrope et que son orthogonal est $J =< e_1, e_2, e_3, e_5, e_6 >$. D'où, $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}e_4$. Maintenant, en appliquant le Théorème 2.3.6, on conclut

que $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée de Novikov paire de l'algèbre de Novikov symétrique $(J/I, Q)$ par l'algèbre $\mathbb{K}e_4$ à produit nul. Plus explicitement, le produit de $J/I :=< \bar{e_2}, \bar{e_3}, \bar{e_5}, \bar{e_6} >$ est nul et sa structure symétrique Q est définie par $Q(\bar{e_i}, \bar{e_j}) = B(e_i, e_j), \forall i, j \in \{2, 3, 5, 6\}$. Posons $\mathfrak{u} := \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ la base de J/I définie par

$$u_1 := \bar{e_2} + \bar{e_5}, \quad u_2 := \bar{e_2} - \bar{e_5}, \quad u_3 := \bar{e_3} + \bar{e_6}, \quad u_4 := \bar{e_3} - \bar{e_6}.$$

La matrice de la forme Q relativement à cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $\mathbb{K}u_i$, où $i \in \{1, \cdots, 4\}$, est un idéal bilatère non-dégénéré de J/I et $J/I = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{K}u_i$. On conclut que $\mathcal{A} = \mathbb{K}e_1 \oplus (\bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{K}u_i) \oplus \mathbb{K}e_4$ obtenue à partir d'une somme direct orthogonale suivie d'une double extension généralisée de Novikov paire.

Chapitre 3

Super-algèbres associatives symétriques homogènes

Ce chapitre est consacré à l'étude des super-algèbres associatives symétriques homogènes. Dans la première section, on montre que toute super-algèbre associative à produit non nul ne peut pas posséder simultanément une structure symétrique paire et une structure symétrique impaire. En particulier, dans la deuxième section, on montre que contrairement aux super-algèbres de Lie simples [34], toutes les super-algèbres associatives simples possèdent des structures symétriques homogènes en donnant explicitement dans chaque cas la structure symétrique homogène. Dans la troisième section de ce chapitre, on donne une description inductive des super-algèbres associatives $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ avec des structures symétriques homogènes telles que leurs parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples. En particulier, dans le cas des super-algèbres associatives symétriques impaires dont les parties paires sont des bimodules semi-simples, on donne une description intéressante de ces super-algèbres sans utiliser la notion de la double extension. Finalement, dans la dernière section, on introduit la notion de la double extension généralisée des super-algèbres symétriques paires et la notion de la double extension généralisée des super-algèbres symétriques impaires dans le but de donner des descriptions inductives de ces deux types de super-algèbres.

3.1 Incompatibilité des structures symétriques paires et des structures symétriques impaires

Rappelons qu'une structure symétrique homogène (paire ou impaire) sur une super-algèbre associative est une forme bilinéaire homogène (paire ou impaire), super-symétrique, associative et non-dégénérée. Dans la suite, on va voir quelle(s) condition(s) doit satisfaire une super-algèbre associative $\mathcal{A}$ pour qu'il ne possède pas simultanément une structure symétrique paire et une structure symétrique impaire. On commence par donner une caractérisation des super-algèbres associatives symétriques paires et une caractérisation des super-algèbres associatives symétriques impaires.

3.1.1 Caractérisations des super-algèbres associatives symétriques homogènes

Rappelons que si $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ est une super-algèbre associative, alors les deux espaces vectoriels $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ ainsi que leurs espaces duaux $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}}^*$ possèdent des structures de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules. Les représentations de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ dans $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et dans $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ (resp. dans $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ et dans $\mathcal{A}_{\bar{1}}^*$) sont données par (L, R) (resp. par (L^*, R^*)) telle que pour tous $x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, $y \in \mathcal{A}_i$ et $f \in \mathcal{A}_i^*$ où $i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ on a

$$L(x)(y) := L_x(y) = x.y \quad \text{et} \quad R(x)(y) := R_x(y) = y.x,$$

$$(\text{resp.} \quad L^*(x)(f) := f \circ R_x \quad \text{et} \quad R^*(x)(f) = f \circ L_x.)$$

Proposition 3.1. *Une super-algèbre associative* $(\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}, .)$ *est munie d'une structure symétrique paire si et seulement s'il existe deux isomorphismes de* $\mathcal{A}_{\bar{0}}-$*bimodules* $\phi_{\bar{0}} : \mathcal{A}_{\bar{0}} \longrightarrow {\mathcal{A}_{\bar{0}}}^*$ *et* $\phi_{\bar{1}} : \mathcal{A}_{\bar{1}} \longrightarrow {\mathcal{A}_{\bar{1}}}^*$ *tels que :*

$$\begin{aligned} \phi_i(x)(y) &= (-1)^i \phi_i(y)(x), \forall x, y \in \mathcal{A}_i, \forall i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}, \\ \phi_{\bar{1}}(x.y)(z) &= \phi_{\bar{0}}(x)(y.z), \ \forall x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, \ y, z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}. \end{aligned}$$

Preuve. Soit B une structure symétrique paire sur $\mathcal{A}$. Alors, il vient que $B_{\bar{0}} := B\,|_{\mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}}$ est une structure symétrique sur $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $B_{\bar{1}} := B\,|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}}}$ est une forme bilinéaire non-dégénérée associative et anti-symétrique sur $\mathcal{A}_{\bar{1}}$. Considérons les deux applications linéaires $\phi_i : \mathcal{A}_i \longrightarrow {\mathcal{A}_i}^*$ définies par $\phi_i(x) := B_i(x, .)$, $\forall\, x \in \mathcal{A}_i$, où $i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Il est clair, d'après la parité et la non-dégénérescence de B_i, que $\phi_{\bar{0}}$ et $\phi_{\bar{1}}$ sont deux isomorphismes d'espaces vectoriels. De plus, d'après la symétrie de $B_{\bar{0}}$ et l'anti-symétrie de $B_{\bar{1}}$, il vient que $\phi_i(x)(y) = (-1)^i \phi_i(y)(x)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}_i$ et que d'après l'associativité de B, il s'ensuit que $\phi_{\bar{1}}(x.y)(z) = \phi_{\bar{0}}(x)(y.z)$, $\forall\, x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, $y, z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Maintenant, il reste à vérifier que ϕ_i, où $i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$, est un morphisme de $\mathcal{A}_{\bar{0}}-$bimodules. Soient $y \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $x, z \in \mathcal{A}_i$, où $i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$$\phi_i(R_y(x))(z) = \phi_i(x.y)(z) = B_i(x.y, z) = (B_i(x, .) \circ L_y)(z) = R^*(y)(\phi_i(x))(z),$$

$$\phi_i(L_y(x))(z) = \phi_i(y.x)(z) = B_i(y.x, z) = B_i(x, z.y) = (\phi_i(x) \circ R_y)(z) = L^*(y)(\phi_i(x))(z).$$

Par conséquent, on déduit que $\phi_{\bar{0}}$ et $\phi_{\bar{1}}$ sont deux isomorphismes de $\mathcal{A}_{\bar{0}}-$bimodules. Réciproquement, supposons qu'il existe deux isomorphismes de $\mathcal{A}_{\bar{0}}-$bimodules $\phi_{\bar{0}} : \mathcal{A}_{\bar{0}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ et $\phi_{\bar{1}} : \mathcal{A}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{1}}^*$ tels que $\phi_i(x)(y) = (-1)^i \phi_i(y)(x)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}_i$ où $i \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ et $\phi_{\bar{1}}(x.y)(z) = \phi_{\bar{0}}(x)(y.z)$, $\forall\, x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, $y, z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$. On considère la forme bilinéaire $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $B(x, y) := \phi_i(x)(y)$,$\forall x, y \in \mathcal{A}_i$ et $B(\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}) = \{0\}$. Il est clair, par définition, que B est paire, super-symétrique et non-dégénérée. De plus, pour $x, y, z \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, on a

$$B(x.y, z) = \phi_{\bar{0}}(R_y(x))(z) = (\phi_{\bar{0}}(x) \circ L_y)(z) = B(x, y.z).$$

D'autre part, pour $x, z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $y \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, on a

$$B(x.y, z) = \phi_{\bar{1}}(R_y(x))(z) = (\phi_{\bar{1}}(x) \circ L_y)(z) = B(x, y.z)$$

Par conséquent, $(\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre associative symétrique paire.

Proposition 3.2. *Une super-algèbre associative* $(\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}, .)$ *est munie d'une structure symétrique impaire si et seulement s'il existe un isomorphisme de* $\mathcal{A}_{\bar{0}}$*-bimodules* $\phi : \mathcal{A}_{\bar{1}} \longrightarrow {\mathcal{A}_{\bar{0}}}^*$ *tel que* $\phi(x)(y.z) = \phi(z)(x.y)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$.

Preuve. Supposons que B est une structure symétrique impaire sur $\mathcal{A}$ et considérons l'application linéaire $\phi : \mathcal{A}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ définie par $\phi(x) := B(x, .)$, $\forall x \in \mathcal{A}$. Le fait que B est une forme bilinéaire impaire et non-dégénérée implique que ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, d'après l'associativité et la symétrie de B, il est clair que ϕ vérifie $\phi(x)(y.z) = \phi(z)(x.y)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Il reste maintenant à vérifier que ϕ est un morphisme de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules. Soient $y, z \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $x \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$,

$$\phi(R_y(x))(z) = B(x.y, z) = B(x, y.z) = B(x, L_y(z)) = (B(x, .) \circ L_y)(z) = R^*(y)(\phi(x))(z)$$

$$\phi(L_y(x))(z) = B(y.x, z) = B(x, z.y) = B(x, R_y(z)) = (B(x, .) \circ R_y)(z) = L^*(y)(\phi(x))(z).$$

Par conséquent, ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{A}_{\bar{0}}-$bimodules. Réciproquement, soit $\phi : \mathcal{A}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ un isomorphisme de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules tel que $\phi(x)(y.z) = \phi(z)(x.y)$, $\forall x, y, z \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$. On considère la forme bilinéaire $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $B(\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{0}}) = B(\mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}) = \{0\}$ et $B(x, y) = B(y, x) = \phi(x)(y)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{\bar{1}}, y \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Par définition, B est une forme bilinéaire impaire, symétrique et non-dégénérée. De plus, pour $x \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $y, z \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ on a :

$$B(x.y, z) = \phi(x.y)(z) = \phi(R_y(x))(z) = (\phi(x) \circ L_y)(z) = \phi(x)(y.z) = B(x, y.z),$$

$$B(z, y.x) = B(y.x, z) = \phi(L_y(x))(z) = (\phi(x) \circ R_y)(z) = B(x, z.y) = B(z.y, x).$$

D'où, $(\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre associative symétrique impaire.

En utilisant la Proposition 3.1 et la Proposition 3.2 on montre, dans la proposition suivante, quelle condition doit satisfaire une super-algèbre associative, pour qu'il ne possède pas simultanément une structure symétrique paire et une structure symétrique impaire.

Proposition 3.3. *Une super-algèbre associative à produit non-nul ne peut pas posséder simultanément une structure symétrique paire et une structure symétrique impaire.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative qui possède simultanément une structure symétrique paire B et une structure symétrique impaire $\bar{B}$ et montrons que $\mathcal{A}$ est à produit nul. D'après la Proposition 3.1 et la Proposition 3.2, on déduit que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules au moyen de $\psi = \phi^{-1} \circ \phi_{\bar{0}}$, où ϕ^{-1} est la fonction réciproque de ϕ. Par conséquent, on peut considérer la forme bilinéaire $f : \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $f(x, y) = B_{\bar{1}}(\psi(x), \psi(y))$, $\forall x, y \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Le fait que $B_{\bar{1}}$ est une forme bilinéaire antisymétrique et non-dégénérée sur $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ et que ψ est un isomorphisme, implique que la forme bilinéaire f est antisymétrique et non-dégénérée. De plus, en utilisant le fait que $B_{\bar{1}}$ est $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-associative, on déduit

que

$$\begin{aligned} f(x.y,z) &= B_{\bar{1}}(\psi(x.y),\psi(z)) = B_{\bar{1}}(\psi(R_y(x)),\psi(z)) = B_{\bar{1}}(R_y(\psi(x)),\psi(z)) \\ &= B_{\bar{1}}(\psi(x),L_y(\psi(z))) = B_{\bar{1}}(\psi(x),\psi(L_y(z))) = B_{\bar{1}}(\psi(x),\psi(y.z)) = f(x,y.z), \end{aligned}$$

$\forall x,y,z \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$. D'où, il s'ensuit que f est associative. Maintenant, en utilisant l'anti-symétrie et l'associativité de f, on peut vérifier facilement que ${\mathcal{A}_{\bar{0}}}^2 \subseteq Ker(f)$. Ce qui implique d'après la non-dégénérescence de f que ${\mathcal{A}_{\bar{0}}}^2 = \{0\}$. Finalement, d'après l'associativité et la non-dégénérescence de $\bar{B}$, on a $\mathcal{A}_{\bar{0}}\mathcal{A}_{\bar{1}} = \{0\} = \mathcal{A}_{\bar{1}}\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et d'après l'associativité et la non-dégénérescence de B, on a ${\mathcal{A}_{\bar{1}}}^2 = \{0\}$ ce qui achève la démonstration.

Remarque 7. Rappelons que les super-algèbres de Lie classique ne possèdent pas simultanément de structures quadratiques paires et de structures quadratiques impaires (voir [34]). Puis, dans [2], il a été prouvé que toute super-algèbre de Lie parfaite avec une partie paire réductive ne possède pas simultanément une structure quadratique paire et une structure quadratique impaire. Plus généralement, on montre dans le chapitre 5 d'une manière analogue à la proposition précédente que toute super-algèbre de Lie non abélienne ne peut pas posséder simultanément une structure quadratique paire et une structure quadratique impaire.

3.2 Super-algèbres associatives symétriques homogènes simples

D'après la Proposition 3.3, il est clair que les super-algèbres associatives simples ne possèdent pas simultanément des structures symétriques paires et des structures symétriques impaires.

Dans cette section, on montre que toutes les super-algèbres associatives simples possèdent des structures symètriques homogènes en déterminant d'une manière explicite les super-algèbres associatives simples qui admettent des structures symétriques paires et celles qui admettent des structures symétriques impaires.

Proposition 3.4. *$M_{r,s}(\mathbb{K})$, où $r \geq 1$ et $s \geq 0$, sont les uniques super-algèbres associatives symétriques paires simples à isomorphismes près. En particulier, le corps $\mathbb{K}$ est l'unique super-algèbre associative super-commutative symétrique paire à isomorphisme près.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative simple, alors $\mathcal{A} \in \{M_{r,s}(\mathbb{K}), Q_n(\mathbb{K})\}$.

1er cas : Supposons que $\mathcal{A} = Q_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, alors comme $dim(Q_1(\mathbb{K}))_{\bar{1}} = 1$, on déduit que $Q_1(\mathbb{K})$ ne possède pas de structures symétriques paires. Supposons maintenant que $n > 1$ et considérons la base $\mathcal{F}$ de $Q_n(\mathbb{K})$ formée par

$$\left\{ E_{ij} := \begin{pmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & e_{ij} \end{pmatrix}, F_{ij} := \begin{pmatrix} 0 & e_{ij} \\ e_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } (e_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \text{ est la base canonique de } M_n(\mathbb{K}) \right\}.$$

Il est clair que $E_{ij}E_{lk} = \delta_{jl}E_{ik}$, $F_{ij}F_{lk} = \delta_{jl}E_{ik}$, $E_{ij}F_{lk} = \delta_{jl}F_{ik}$, et $F_{ij}E_{lk} = \delta_{jl}F_{ik}$. On suppose que $\mathcal{A}$ possède une structure symétrique paire B. Par conséquent d'après l'associativité

de B on obtient que

$$B(E_{11}, E_{11}) \quad = \quad B(E_{11}, F_{11}F_{11}) = B(E_{11}F_{11}, F_{11}) = B(F_{11}, F_{11}) = 0,$$

car $B|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}}}$ est antisymétrique. Maintenant soit $m \in \{2, \cdots, n\}$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$, alors

$$\begin{aligned} B(E_{11}, E_{1m}) &= B(E_{11}, E_{11}E_{1m}) = B(E_{11}, E_{1m}E_{11}) = 0 \\ \text{et} \quad B(E_{11}, E_{mk}) &= B(E_{11}, E_{m1}E_{1k}) = B(E_{11}E_{m1}, E_{1k}) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on déduit que E_{11} est dans l'orthogonal de $\mathcal{A}$ relativement à B. Ceci contredit le fait que B est paire et non-dégénérée. On conclut que $Q_n(\mathbb{K})$ ne possède pas de structures symétriques paires.

2ème cas : Supposons que $\mathcal{A} = M_{r,s}(\mathbb{K})$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}$ et considérons la forme bilinéaire $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$B(M, N) = tr(aa') - tr(bb'), \ \forall\, M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, \tag{3.1}$$

$$B(\bar{M}, \bar{N}) = tr(cd') - tr(dc'), \ \forall\, \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}, \ \bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & c' \\ d' & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{\bar{1}}, \tag{3.2}$$

$$B(\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}) = \{0\}. \tag{3.3}$$

Il est clair que B est une forme bilinéaire paire super-symétrique telle que $B\,|_{\mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}}$ est non-dégénérée. Maintenant montrons que $B|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}}}$ est non-dégénérée. Soit $c = (c_{mn})_{1 \leq m \leq r, 1 \leq n \leq s}$ telle que $tr(cd) = 0$, $\forall d \in M_{s \times r}(\mathbb{K})$. Soient $i_0 \in \{1, \cdots, s\}$ et $j_0 \in \{1, \cdots, r\}$ et considérons $d = e_{i_0 j_0}$, où $(e_{ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r}$ est la base canonique de $M_{s \times r}(\mathbb{K})$. Par conséquent, $ce_{i_0 j_0} = (a_{pq})_{1 \leq p \leq r, 1 \leq q \leq r}$ tel que $a_{pp} = 0$ si $p \neq j_0$ et $a_{j_0 j_0} = c_{j_0 i_0}$. Cela veut dire que $tr(ce_{i_0 j_0}) = 0$ implique que $c_{j_0 i_0} = 0$, $\forall\, 1 \leq j_0 \leq r$, et $1 \leq i_0 \leq s$, d'où $c = 0$. On conclut que $B|_{\mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}}}$ est une forme bilinéaire non-dégénérée. Ensuite, pour $M \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ défini comme dans (3.1) et $\bar{M}, \bar{N} \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ définis comme dans (3.2), on a $B(M.\bar{M}, \bar{N}) = tr(acd') - tr(bdc') = B(M, \bar{M}\bar{N})$. On conclut que $(\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre associative simple symétrique paire.

Proposition 3.5. *$Q_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$, sont les uniques super-algèbres associatives symétriques impaires simples à isomorphismes près. En particulier, $Q_1(\mathbb{K})$ est l'unique super-algèbre associative commutative symétrique impaire à isomorphisme près.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative simple, alors $\mathcal{A} \in \{M_{r,s}(\mathbb{K}), Q_n(\mathbb{K})\}$.

1er cas : Soit $\mathcal{A} = M_{r,s}(\mathbb{K})$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}$. Si on suppose que B est une structure symétrique impaire sur $\mathcal{A}$, alors il vient que $dim\mathcal{A}_{\bar{0}} = dim\mathcal{A}_{\bar{1}}$ et par conséquent $r = s$. Posons

$r = s = n$ et considérons $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$, où $c, d \in M_n(\mathbb{K})$. D'après l'associativité de B, on a

$$\begin{aligned} B(\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) &= B(\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &+ B(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $B(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{\bar{1}}) = \{0\}$. Le fait que B est impaire, implique que $B(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{\bar{0}}) = \{0\}$. On conclut que $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans l'orthogonal de $M_{n,n}(\mathbb{K})$ relativement à B. Ceci contredit le fait que B est une non-dégénérée.

2ème cas : Supposons maintenant que $\mathcal{A} = Q_n(\mathbb{K})$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et considérons la forme bilinéaire B sur $\mathcal{A}$ définie par $B(\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{0}}) = \{0\} = B(\mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{A}_{\bar{1}})$ et $B(\tilde{a}, \bar{b}) = B(\bar{b}, \tilde{a}) := tr(ab)$, où $\tilde{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que $a, b \in M_n(\mathbb{K})$. Il est clair que B est une forme bilinéaire impaire, super-symétrique et non-dégénérée. De plus, pour $a, a', b, b', b'' \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

$$B(\tilde{a}\tilde{a'}, \bar{b}) = B(\widetilde{aa'}, \bar{b}) = tr((aa')b) = tr(a(a'b)) = B(\tilde{a}, \overline{a'b}) = B(\tilde{a}, \tilde{a'}\bar{b}),$$

$$B(\bar{b}\bar{b'}, \bar{b''}) = B(\widetilde{bb'}, \bar{b''}) = tr((bb')b'') = tr(b(b'b'')) = B(\bar{b}, \widetilde{b'b''}) = B(\bar{b}, \bar{b'}\bar{b''}).$$

D'où, $(Q_n(\mathbb{K}), B)$ est une super-algèbre associative symétrique impaire simple.

Remarque 8. Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique paire (resp. symétrique impaire) simple et B' une autre structure symétrique paire (resp. symétrique impaire) sur $\mathcal{A}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $B' = \lambda B$. En effet, comme B et B' sont deux formes bilinéaires non-dégénérées de même degré, alors il existe un automorphisme paire φ de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ tel que $B'(x, y) = B(\varphi(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. En Utilisant l'associativité de B et de B', on déduit que

$$\begin{aligned} B(\varphi(x)y, z) &= B(\varphi(x), y.z) = B'(x, y.z) = B'(x.y, z) = B(\varphi(x.y), z) \\ B(x.\varphi(y), z) &= (-1)^{|z|(|x|+|y|)} B(zx, \varphi(y)) = (-1)^{|x|(|y|+|z|)} B(\varphi(y), zx) \\ &= (-1)^{|x|(|y|+|z|)} B'(y, zx) = (-1)^{|x|(|y|+|z|)} B'(yz, x) \\ &= B'(xy, z) = B(\varphi(xy), z). \end{aligned}$$

Ceci implique, d'après la non-dégénérescence de B, que φ est un morphisme de $\mathcal{A}$-bimodules. Par conséquent, on peut vérifier facilement que $Ker(\varphi - \lambda id)$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$. Comme $Ker(\varphi - \lambda id)$ est non-nul, alors d'après la simplicité de $\mathcal{A}$, on conclut que $\mathcal{A} = Ker(\varphi - \lambda id)$ c'est à dire $\varphi = \lambda id$.

3.3 Super-algèbres associatives $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ symétriques homogènes telles que leurs parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples

Cette section est constituée de deux parties. La première partie est réservée à l'étude des super-algèbres associatives symétriques impaires dont les parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples. Plus précisément, on donne une description inductive de ces super-algèbres sans utiliser la notion de la double extension. Dans la deuxième partie, on étudie les super-algèbres associatives symétriques paires dont les parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples. Plus précisément, on donne une description inductive de ces super-algèbres en utilisant la notion de la double extension. Les deux lemmes suivants vont être utiles dans la deuxième partie de cette section et dans la section suivante où on donne une description inductive des super-algèbres associatives symétriques homogènes.

Lemme 3.3.1. Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique homogène et I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$, alors I est simple ou I est à produit nul tel que $\mathcal{A}I = I = I\mathcal{A}$ ou $I = \mathbb{K}x$, où x est un élément homogène de $Ann(\mathcal{A})$.

Preuve. Soient I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et J son orthogonal relativement à B. Comme $I \cap J$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ contenu dans I, alors d'après la minimalité de I, on a $I \cap J \in \{\{0\}, I\}$. Si $I \cap J = \{0\}$, alors $\mathcal{A} = I \oplus J$. Il s'ensuit que tout idéal bilatère de I est un idéal bilatère de $\mathcal{A}$. D'où, I est simple. Maintenant, si $I \cap J = I$, alors d'après Lemme 1.3.1 on a I est à produit nul. D'autre part, on vérifie facilement que $\mathcal{A}I$ et $I\mathcal{A}$ sont deux idéaux bilatères de $\mathcal{A}$ contenus dans I. Par conséquent, on a $\mathcal{A}I \in \{\{0\}, I\}$ et $I\mathcal{A} \in \{\{0\}, I\}$. Supposons que $\mathcal{A}I = \{0\}$ et $I\mathcal{A} = I$. En utilisant le fait que $B(\mathcal{A}I, \mathcal{A}) = B(\mathcal{A}, I\mathcal{A})$ et la non dégénérescence de B, on déduit que $I = \{0\}$. D'où la contradiction puisque I est un idéal bilatère gradué minimal. De la même manière, on montre qu'on ne peut pas avoir $\mathcal{A}I = I$ et $I\mathcal{A} = \{0\}$. On conclut que $\mathcal{A}I = I = I\mathcal{A}$ ou bien $\mathcal{A}I = \{0\} = I\mathcal{A}$. Par conséquent, I est un idéal bilatère gradué à produit nul tel que $\mathcal{A}I = I = I\mathcal{A}$ ou $I = \mathbb{K}x$ où x est un élément homogène de $Ann(\mathcal{A})$.

Remarque 9. Si $(\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre associative symétrique homogène B-irréductible non simplede dimension $n > 1$, alors tout idéal bilatère gradué minimal I de $\mathcal{A}$ est totalement isotrope et par conséquent I n'est pas simple.

Lemme 3.3.2. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique homogène B-irréductible non simplede dimension $n > 1$. Si I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et J son orthogonal relativement à B, alors

(i) $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre associative simple ou une super-algèbre de dimension 1 à produit nul.

(ii) $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre de dimension 1 à produit nul si et seulement si $I = \mathbb{K}x$, où x est un élément homogène de $Ann(\mathcal{A})$.

Preuve. (i) Comme I est un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$, alors J un idéal bilatère gradué maximal de $\mathcal{A}$ et par conséquent l'ensemble des idéaux de $\mathcal{A}/J$ est formé par $\{\{0\}, \mathcal{A}/J\}$. Ceci implique que $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre associative simple ou une super-algèbre de dimension 1 à produit nul. (ii) Supposons que $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre de dimension 1 à produit nul. Alors, il s'ensuit que $I := \mathbb{K}x$ et d'après les hypothèses on déduit que x est un élément homogène de J. Comme $I \subseteq J$ et B est non-dégénérée, alors il existe un élément homogène y de $\mathcal{A}$ de même degré que x tel que $B(x, y) = 1$. Le fait que $y \notin J$, on déduit que $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}y$. Il est clair d'après le Lemme 1.3.1, que $x.J = \{0\} = J.x$. D'autre part, $B(x.y, \mathcal{A}) = B(x.y, J \oplus \mathbb{K}y) = B(x.y, y) = \{0\}$ car $y^2 \in J$. D'où $x.y = y.x = 0$ et par conséquent $x \in Ann(\mathcal{A})$. Réciproquement, soient $I = \mathbb{K}x$, où x est un élément homogène de $Ann(\mathcal{A})$, et J son l'orthogonal relativement à B. Il est clair, d'après la Remarque 9, que I est totalement isotrope. Par conséquent, d'après la non dégénérescence de B, il existe un élément y de $\mathcal{A}$ homogène de même degré que x tel que $B(x, y) = 1$ et $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}y$. Montrons que $\mathbb{K}y$ est une super-algèbre associative à produit nul (c'est à dire $y^2 \in J$). Posons $y^2 = j + ky$, où $j \in J$ et $k \in \mathbb{K}$. Comme $0 = B(x.y, y) = B(x, y^2) = kB(x, y)$, alors il s'ensuit que $k = 0$ et par la suite on conclut que $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre associative de dimension 1 à produit nul.

3.3.1 Super-algèbres associatives symétriques impaires telles que leurs parties paires sont des bimodules semi-simples

On commence cette section par un exemple qui sera utile pour la suite.

Exemple 3.3.3. Soit $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ une super-algèbre associative et $P(\mathcal{A}^*)$ l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué obtenu à partir de $\mathcal{A}^*$, où $\mathcal{A}^*$ est l'espace dual de $\mathcal{A}$.

• Supposons que $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \{0\}$. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A} \oplus P(\mathcal{A}^*)$ muni du produit $\star$ et la forme bilinéaire B définis respectivement par

$$(x + f) \star (y + h) = x.y + L^*(x)(h) + R^*(y)(f), \ \forall x, y \in \mathcal{A}, \quad f, h \in P(\mathcal{A}^*), \tag{3.4}$$

$$B(f, x) = B(x, f) = f(x) \ \text{ et } \ B(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \{0\} = B(P(\mathcal{A}^*), P(\mathcal{A}^*)). \tag{3.5}$$

est une super-algèbre associative symétrique impaire appelée le produit semi-direct de $\mathcal{A}$ par $P(\mathcal{A}^*)$ au moyen de (L^*, R^*), où (L^*, R^*) est définie comme dans la Proposition 3.1.

• Supposons maintenant que $\mathcal{A}_{\bar{0}} = \{0\}$ et $\gamma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow P(\mathcal{A}^*)$ une application bilinéaire qui satisfait $\gamma(x, y)(z) = \gamma(y, z)(x), \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $P(\mathcal{A}^*) \oplus \mathcal{A}$ muni du produit $\star$ et la forme bilinéaire B définis respectivement par

$$(f + x) \star (g + y) = \gamma(x, y), \ \forall x, y \in \mathcal{A}, \quad f, h \in (P(\mathcal{A}^*), \tag{3.6}$$

$$B(f, x) = B(x, f) = f(x) \text{ et } \ B(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \{0\} = B(P(\mathcal{A}^*), P(\mathcal{A}^*)), \tag{3.7}$$

est une super-algèbre associative symétrique impaire appelée la produit semi-direct généralisé de $P(\mathcal{A}^*)$ par $\mathcal{A}$ au moyen de γ.

Notre but est de donner une description inductive des super-algèbres associatives symétriques impaires dont les parties paires sont des bimodules semi-simples. Pour cela, on commence par étudier des cas particuliers de ces super-algèbres. Plus précisément, on commence par donner une description inductive des super-algèbres associatives symétriques impaires dont les parties paires sont des algèbres associatives semi-simples.

Lemme 3.3.4. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple, alors $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$.

Preuve. Il est clair que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \subseteq Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$. Par conséquent $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} = \{0\}$ puisque $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple. D'autre part, pour $x \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}$ on a $B(x, \mathcal{A}) = B(x, \mathcal{A}_{\bar{0}}) = B(x\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{0}}) = \{0\}$. Par conséquent, d'après la non dégénérescence de B, on obtient que $x = 0$. D'où le résultat.

Proposition 3.6. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire B-irréductible non simpletelle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple. Alors I est un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ si et seulement si I est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule irréductible non-trivial de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $I.\mathcal{A}_{\bar{0}} = I = \mathcal{A}_{\bar{0}}.I$.*

Preuve. Soit I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$. Le fait que $\mathcal{A}$ est B-irréductible, implique que I est totalement isotrope. D'où, d'après le Lemme 1.3.1, I est à produit nul. Comme $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple, alors $I_{\bar{0}} = \{0\}$. Par conséquent $I \subseteq \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $I.\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{1}}.I = \{0\}$. En utilisant le fait que $I.\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{1}}.I = \{0\}$, on montre facilement que $I.\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\mathcal{A}_{\bar{0}}.I$ sont deux idéaux bilatères gradués de $\mathcal{A}$ contenus dans I. D'où, d'après la minimalité de I, on a $I.\mathcal{A}_{\bar{0}} \in \{\{0\}, I\}$ et $\mathcal{A}_{\bar{0}}.I \in \{\{0\}, I\}$. Au moyen d'un calcul simple, on vérifie qu'on a uniquement $\mathcal{A}_{\bar{0}}.I = I = I.\mathcal{A}_{\bar{0}}$. Maintenant, pour vérifier la simplicité de I en tant que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$, on suppose que J est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule de I. D'où $\mathcal{A}J = \mathcal{A}_{\bar{0}}J \subseteq J$ (resp. $J\mathcal{A} = J\mathcal{A}_{\bar{0}} \subseteq J$) et par conséquent on déduit que J est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ contenu dans I. En appliquant la minimalité de I, on déduit que $J \in \{\{0\}, I\}$. D'où la simplicité de I. Réciproquement, soient I un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule irréductible non-trivial de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $I.\mathcal{A}_{\bar{0}} = \mathcal{A}_{\bar{0}}.I = I$ et J un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ tel que $J \subseteq I$. Il est clair que J est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ contenu dans I. D'où, d'après la simplicité de I, on a $J = \{0\}$ ou $J = I$ et il s'ensuit que I est minimal.

Lemme 3.3.5. Soient $(\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire B-irréductible non simpletelle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple et I un idéal minimal de $\mathcal{A}$. Si on considère $S' = \mathcal{A}_{\bar{0}} \cap J$, où J est l'orthogonal de I relativement à B, alors $\mathcal{A}_{\bar{0}} = S' \oplus S$, où S est un idéal semi-simple de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. De plus on a $I = S.I = I.S$ et $dimI = dimS = dimS.\mathcal{A}_{\bar{1}}$.

Preuve. Il est clair que $S' = \mathcal{A}_{\bar{0}} \cap J = \{x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, B(x, I) = \{0\}\}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. Par conséquent il existe un idéal bilatère S de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $\mathcal{A}_{\bar{0}} = S \oplus S'$. Le fait que I est idéal minimal de $\mathcal{A}$ implique, d'après la Proposition 3.6, que $B(S'.I, \mathcal{A}) = B(S'.I, \mathcal{A}_{\bar{0}}) = B(S', I.\mathcal{A}_{\bar{0}}) = B(S', I) = \{0\}$. D'où $S'.I = \{0\}$. De la même manière on vérifie que $I.S' = \{0\}$. Il s'ensuit que $S.I = I.S = I$ ce qui achève la démonstration de (i). Maintenant montrons (ii).

Comme B est impaire et $I \subseteq \mathcal{A}_{\bar{1}}$, alors $\mathcal{A}_{\bar{1}} \subseteq J$ et il vient que $\mathcal{A} = S \oplus S' \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}} = S \oplus J$. Par conséquent, $dimS = dimI$. Il est clair d'après $S.I = I.S = I$ que $dimI \leq dimS.\mathcal{A}_{\bar{1}}$. Pour montrer que $dimS.\mathcal{A}_{\bar{1}} \leq dimS$, on considère l'application bilinéaire $\nu : S.\mathcal{A}_{\bar{1}} \longrightarrow S^*$ définie par $\nu(x) = B(x, .)$, $\forall\, x \in S.\mathcal{A}_{\bar{1}}$. Comme $B(S.\mathcal{A}_{\bar{1}}, S' \oplus \mathcal{A}_1) = \{0\}$, alors pour $x \in S.\mathcal{A}_{\bar{1}}$ on a $B(x, S) = \{0\}$ si est seulement si $B(x, \mathcal{A}) = \{0\}$. Donc, d'après la non-dégénérescence de B, ν est injective.

Lemme 3.3.6. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ une super-algèbre associative telle que $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple, alors $\mathcal{A}_{\bar{1}} = {\mathcal{A}_{\bar{1}}}^{\mathcal{A}_{\bar{0}}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{0}}\mathcal{A}_{\bar{1}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}\mathcal{A}_{\bar{0}}$, où ${\mathcal{A}_{\bar{1}}}^{\mathcal{A}_{\bar{0}}} := \{x \in \mathcal{A}_{\bar{1}},\ x.\mathcal{A}_{\bar{0}} = \{0\} = \mathcal{A}_{\bar{0}}.x\}$.

Preuve. Il est clair que ${\mathcal{A}_{\bar{1}}}^{\mathcal{A}_{\bar{0}}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$. Par conséquent, il existe un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule M de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $\mathcal{A}_{\bar{1}} = {\mathcal{A}_{\bar{1}}}^{\mathcal{A}_{\bar{0}}} \oplus M$. Si M est irréductible, alors $M = \mathcal{A}_{\bar{0}}M \oplus M\mathcal{A}_{\bar{0}}$ puisque $\mathcal{A}_{\bar{0}}M \oplus M\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule non-nul de M. D'où le résultat. Maintenant si M n'est pas irréductible, alors $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, tel que $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, M_i est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule simple de M. En appliquant la première étape pour chaque M_i, on obtient $\mathcal{A}_{\bar{1}} = {\mathcal{A}_{\bar{1}}}^{\mathcal{A}_{\bar{0}}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{0}}M \oplus M\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et on en déduit que $\mathcal{A}_{\bar{1}} = {\mathcal{A}_{\bar{1}}}^{\mathcal{A}_{\bar{0}}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{0}}\mathcal{A}_{\bar{1}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}\mathcal{A}_{\bar{0}}$.

Proposition 3.7. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire B-irréductible non simple telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple. Alors $\mathcal{A} = S \oplus P(S^*)$ est un produit semi-direct d'une certaine algèbre associative simple S par $P(S^*)$ au moyen de (L^*, R^*).*

Preuve. Comme $\mathcal{A}$ est B-irréductible non simple, il existe un idéal bilatère gradué I minimal de $\mathcal{A}$. D'après la Proposition 3.6, I est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule irréductible non-trivial de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $I.\mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathcal{A}_{\bar{1}}.I = \{0\}$. Posons $S' = \mathcal{A}_{\bar{0}} \cap J$, où J est l'orthogonal de I relativement à B. D'après le Lemme 3.3.5, on a $\mathcal{A}_{\bar{0}} = S \oplus S'$, où S est un idéal semi-simple de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$, et I est un S-bimodule de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$. Par conséquent il existe un S-sous-bimodule M de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $\mathcal{A}_{\bar{1}} = I \oplus M$. Par le Lemme 3.3.6 on a $\mathcal{A}_{\bar{1}} = I \oplus M^S \oplus S.M \oplus M.S$, où $M^S = \{x \in M,\ x.S = S.x = \{0\}\}$. Comme $S.\mathcal{A}_{\bar{1}} = S.I + S.M$, alors $dimS.M = dimS.\mathcal{A}_{\bar{1}} - dimS.I = 0$. De même, on vérifie que $dimM.S = 0$. Par conséquent, $\mathcal{A} = (S \oplus I) \oplus (S' \oplus M^S)$. Au moyen d'un calcul simple, on vérifie que $S \oplus I$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$. De plus, comme $B(S \oplus I, S' \oplus M^s) = \{0\}$ et B est une forme bilinéaire non-dégénérée sur $\mathcal{A}$, alors $S \oplus I$ est un idéal non-dégénéré de $\mathcal{A}$. D'où, $\mathcal{A} = S \oplus I$ et S est une algèbre associative simple. Maintenant, on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \quad &: \mathcal{A} = S \oplus I \longrightarrow S \oplus P(S^*) \\ &\quad s + i \longmapsto s + B(i, .), \end{aligned}$$

où $(S \oplus P(S^*), \star, \widetilde{B})$ est le produit semi-direct de S par $P(S^*)$ d'éfini comme dans l'Exemple 3.3.3. Comme B est impaire, non-dégénérée et associative, alors Δ est un isomorphisme de super-algèbres associatives tel que $\widetilde{B}(\Delta(x), \Delta(y)) = B(x, y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$.

D'après la Proposition 1.3 et la Proposition 3.7, on donne dans le corollaire suivant une description inductive des super-algèbres associatives symétriques impaires dont les parties paires sont

des algèbres associatives semi-simples.

Corollaire 3.3.7. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple, alors $\mathcal{A}$ est une somme directe orthogonale des super-algèbres associatives symétriques impaires $\mathcal{A}_i$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $\mathcal{A}_i$ est la super-algèbre $Q_n(\mathbb{K})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ où un produit semi-direct de $M_n(\mathbb{K})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) par $P((M_n(\mathbb{K}))^*)$ au moyen de (L^*, R^*).

On considère, maintenant, le cas général où $(\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre associative symétrique impaire dont la partie paire $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. On donne dans ce qui suit, une description inductive de ces superalgèbres. On montre que la cas particulier où $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative semi-simple et l'Exemple 3.3.3 sont utiles pour établir cette description inductive.

Lemme 3.3.8. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire, alors :

$\mathcal{A}_{\bar{1}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple si et seulement si $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple.

Preuve. D'après la Proposition 3.2, on a $\mathcal{A}_{\bar{1}} \cong {\mathcal{A}_{\bar{0}}}^*$ en tant que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules. En utilisant cet argument, montrer le Lemme 3.3.8 revient à montrer que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple si et seulement si $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. On suppose que $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple et M un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. Dans la suite, on cherche à trouver un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule N de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $\mathcal{A}_{\bar{0}} := M \oplus N$. Notons $\tilde{M} := \{f \in {\mathcal{A}_{\bar{0}}}^*, f\mid_M = 0\}$. On vérifie facilement que $\tilde{M}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule de $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ tel que $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*/\tilde{M} \cong M^*$ en tant qu'espaces vectoriels au moyen de l'application linéaire $\alpha : \mathcal{A}_{\bar{0}}^* \longrightarrow M^*$ définie par $\alpha(f) = f\mid_M$. D'où,

$$dim\mathcal{A}_{\bar{0}} \quad = \quad dimM + dim\tilde{M}. \tag{3.8}$$

De plus, il existe un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule T de $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ tel que $\mathcal{A}_{\bar{0}}^* = T \oplus \tilde{M}$. On vérifie facilement que $\tilde{T} := \{X \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, f(X) = 0, \forall f \in T\}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $\mathcal{A}_{\bar{0}}/\tilde{T} \cong T^*$ en tant qu'espaces vectoriels au moyen de l'application linéaire $\beta : \mathcal{A}_{\bar{0}} \longrightarrow T^*$ définie par $\beta(X) = \tilde{X}$, où $\tilde{X}(g) := g(X)$, $\forall g \in T^*$ et $X \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$. D'où, il s'ensuit que

$$dim\mathcal{A}_{\bar{0}} \quad = \quad dimT + dim\tilde{T}. \tag{3.9}$$

D'autre part, pour $x \in \tilde{T} \cap M$, on a $f(x) = 0$, $\forall f \in \mathcal{A}_{\bar{0}}^*$. D'où, $x = 0$ et par conséquent $\tilde{T} \cap M = \{0\}$. Maintenant, d'après les équations (3.8), (3.9) et le fait que $\tilde{T} \cap M = \{0\}$, on conclut que $\mathcal{A}_{\bar{0}} = \tilde{T} \oplus M$. Réciproquement, supposons maintenant que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. Alors, $\mathcal{A}_{\bar{0}} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n \oplus Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$, où S_i est un idéal bilatère simple de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ est l'annulateur de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. Considérons la structure symétrique γ définie sur $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ par

$$\begin{aligned} \gamma\mid_{S_i \times S_j} &= \{0\} = \gamma\mid_{S_i \times Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})}, \forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \text{ tels que } i \neq j \\ \gamma\mid_{S_i \times S_i} &:= f_i \text{ et } \gamma\mid_{Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}}) \times Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})} := g, \end{aligned}$$

où $f_i(x,y) = tr(R_x R_y)$, $\forall x, y \in S_i$ et g une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée arbitraire sur $Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$. Il est clair que l'application linéaire $\psi : \mathcal{A}_{\bar{0}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ définie par $\psi(x) := \gamma(x,.)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules. Il s'ensuit que $\mathcal{A}_{\bar{0}}^*$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple.

Lemme 3.3.9. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple, alors :

$$\mathcal{A} \quad = \quad S_1 \oplus \cdots \oplus S_n \oplus N \oplus \hat{S}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{S}_n \oplus \hat{N}, \tag{3.10}$$

où $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, S_i est un idéal bilatère simple de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$, $\hat{S}_i$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule irréductible de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$, $N = Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ et $\hat{N}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule trivial de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ (c'est à dire $\mathcal{A}_{\bar{0}}.\hat{N} = \{0\} = \hat{N}.\mathcal{A}_{\bar{0}}$). De plus, on a :

(i) $\hat{S}_i\hat{S}_j = \{0\} = \hat{S}_j\hat{S}_i$, pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $i \neq j$,

(ii) $\hat{S}_i\hat{S}_i \in \{\{0\}, S_i\}$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$,

(iii) $\hat{N}\hat{S}_i = \{0\} = \hat{S}_i\hat{N}$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$,

(iv) $\hat{N}\hat{N} \subseteq N$.

Preuve. D'après le Lemme 3.3.8, on a $(\mathcal{A}_{\bar{0}}, \gamma)$ (où γ est définie comme dans le Lemme 3.3.8) est une algèbre associative symétrique. De plus, d'après le Lemme 3.3.8 et la Proposition 3.2, il vient que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ sont isomorphes en tant que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules au moyen de $\eta : \mathcal{A}_{\bar{0}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{1}}$ défini par $\eta := \phi^- \circ \psi$, où $\psi(x) := \gamma(x,.)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\phi(y) := B(y,.)$, $\forall y \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$. Pour $x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, on note $\eta(x) := \hat{x}$ tel que $\gamma(x,.) = B(\hat{x},.)$. Par conséquent, $\mathcal{A} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n \oplus N \oplus \hat{S}_1 \oplus \cdots \oplus \hat{S}_n \oplus \hat{N}$, où $\hat{S}_i := \eta(S_i)$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule irréductible de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $\hat{N} := \eta(N)$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-sous-bimodule trivial de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$. De plus, il est clair que

$$B(S_i, \hat{S}_j) = \{0\}, \quad B(S_i, \hat{N}) = B(N, \hat{S}_i) = \{0\}, \ \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}, \text{ tels que } i \neq j.$$

En utilisant le fait que B est associative et non-dégénérée et que $\hat{S}_i$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule irréductible de $\mathcal{A}_{\bar{1}}$, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} N &\subseteq Ann(\mathcal{A}), \\ \{0\} &= S_i.\hat{N} = \hat{N}.S_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ \{0\} &= S_i.\hat{S}_j = \hat{S}_j.S_i, \ \forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \quad \text{tels que } i \neq j, \\ \hat{S}_i &= S_i.\hat{S}_i = \hat{S}_i.S_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}. \end{aligned}$$

Maintenant, à l'aide de ces égalités, on va montrer les assertions $(i) - (iv)$ du Lemme 3.3.9. Soient $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $i \neq j$, alors $\hat{S}_i\hat{S}_j = (\hat{S}_iS_i)\hat{S}_j = \hat{S}_i(S_i\hat{S}_j) = \{0\}$ et de même on a $\hat{S}_j\hat{S}_i = \{0\}$. D'autre part, $B(\hat{S}_i\hat{S}_i, \hat{S}_j) = B(\hat{S}_i\hat{S}_i, S_j\hat{S}_j) = B(\hat{S}_i(\hat{S}_iS_j), \hat{S}_j) = \{0\}$ et $B(\hat{S}_i\hat{S}_i, \hat{N}) = B(\hat{S}_i(\hat{S}_iS_i), \hat{N}) = B(\hat{S}_i\hat{S}_i, S_i\hat{N}) = \{0\}$, d'où $\hat{S}_i\hat{S}_i \subseteq S_i$. Comme $\hat{S}_i\hat{S}_i$ est un idéal bilatère de S_i, alors d'après la simplicité et S_i, on a $\hat{S}_i\hat{S}_i \in \{\{0\}, S_i\}$. Maintenant, $\hat{N}\hat{S}_i = \hat{N}(S_i\hat{S}_i) = (\hat{N}S_i)\hat{S}_i = \{0\}$. De même on vérifie que $\hat{S}_i\hat{N} = \{0\}$. Finalement, le fait que $B(\hat{N}\hat{N}, S_i) = B(\hat{N}(\hat{N}S_i), S_i) = \{0\}$ implique que $\hat{N}\hat{N} \subseteq N$.

Par le lemme précédent, on conclut que toute super-algèbre associative symétrique impaire $\mathcal{A}$ dont la partie paire est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple est une somme directe orthogonale d'idéaux bilatères gradués non-dégénérés. Plus précisément :

$$\mathcal{A} = (S_1 \oplus \hat{S}_1) \oplus \cdots \oplus (S_n \oplus \hat{S}_n) \oplus (N \oplus \hat{N}),$$

où $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $(I_i := S_i \oplus \hat{S}_i, B_i)$, où $B_i := B\mid_{I_i \times I_i}$, est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ B_i-irréductible. En particulier,

- Si $\hat{S}_i\hat{S}_i = S_i$, on vérifie facilement que I_i est simple et qu'il est isomorphe à $Q_n(\mathbb{K})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
- Par contre, si $\hat{S}_i\hat{S}_i = \{0\}$ alors $I_i := S_i \oplus P({S^*}_i)$ est le produit semi-direct de S_i par $P({S^*}_i)$ au moyen de (L^*, R^*).

D'autre part, l'idéal bilatère gradué $N \oplus \hat{N} := L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$, tel que pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, $L_j = (L_j)_{\bar{0}} \oplus (L_j)_{\bar{1}}$ est un idéal bilatère gradué de $N \oplus \hat{N}$ B_j-irréductible avec $B_j := B\mid_{L_j \times L_j}$.

- Si $(L_j)_{\bar{1}}.(L_j)_{\bar{1}} = \{0\}$, alors L_j est la super-algèbre associative symétrique impaire de dimension 2 à produit nul.
- Par contre, si $(L_j)_{\bar{1}}.(L_j)_{\bar{1}} \neq \{0\}$ alors $L_j := P({(L_j)_{\bar{1}}}^*) \oplus (L_j)_{\bar{1}}$ est le produit semi-direct généralisé de $P({(L_j)_{\bar{1}}}^*)$ par $(L_j)_{\bar{1}}$ au moyen de $\gamma_j : (L_j)_{\bar{1}} \times (L_j)_{\bar{1}} \longrightarrow P({(L_j)_{\bar{1}}}^*)$ défini par $\gamma_j(x, y) = B(x.y, .)$, $\forall x, y \in (L_j)_{\bar{1}}$.

On conclut que toute super-algèbre associative symétrique impaire $(\mathcal{A}, B)$ telle que la partie paire $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple est obtenue de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \text{ telle que } \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \ \mathcal{A}_i \in \left\{\{0\}, \mathcal{R}, Q_n(\mathbb{K}), M_n(\mathbb{K}) \oplus P((M_n(\mathbb{K}))^*), P(M^*) \oplus M\right\},$$

où $\mathcal{R}$ est la super-algèbre associative symétrique impaire de dimension 2 à produit nul, $M_n(\mathbb{K}) \oplus P((M_n(\mathbb{K}))^*)$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, est le produit semi-direct de $M_n(\mathbb{K})$ par $P((M_n(\mathbb{K}))^*)$ au moyen de (L^*, R^*) et $P(M^*) \oplus M$ est le produit semi-direct généralisé d'une super-algèbre associative $M = M_{\bar{1}}$ par $P(M^*)$ au moyen de γ définie comme dans l'Exemple 3.3.3.

3.3.2 Super-algèbres associatives symétriques paires telles que leurs parties paires sont des bimodules semi-simples

On commence cette section par donner une caractérisation d'un idéal bilatère gradué minimal d'une super-algèbre associative symétrique paire.

Proposition 3.8. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique paire, B-irréductible non simple telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. Si $\mathcal{A}$ est différente de l'algèbre de dimension 1 à produit nul, alors I est un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ si et seulement si $I = \mathbb{K}x$ où x est un élément homogène de $Ann(\mathcal{A})$.*

Preuve. Soit I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et notons J son orthogonal relativement à B. Le fait que $\mathcal{A}$ est B-irréductible, non simple et différente de l'algèbre de dimension 1 à produit nul implique que I est totalement isotrope. Par conséquent I est à produit nul. Comme I est minimal, alors $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre de dimension 1 à produit nul ou une super-algèbre associative simple. Supposons que $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre associative simple. L'idéal gradué minimal I est à produit nul, il s'ensuit que $I_{\bar{0}} = I \cap Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ car $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $A_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple c'est à dire $\mathcal{A}_{\bar{0}} = S \oplus Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ où S est le plus grand idéal bilatère semi-simple de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. En utilisant maintenant l'associativité (resp. la parité) de la forme B, on obtient que $B(S, Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})) = \{0\}$ (resp. $B(S, \mathcal{A}_{\bar{1}}) = \{0\}$). D'où $S \subseteq J$ et il s'ensuit que $(\mathcal{A}/J)_{\bar{0}} \cong Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})/J \cap Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ en tant qu'algèbres associatives. Ceci contredit le fait que $((\mathcal{A}/J)_{\bar{0}})^2 \neq \{0\}$ car $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre associative simple. Si maintenant $\mathcal{A}/J$ est une super-algèbre de dimension 1 à produit nul, d'après Lemme 3.3.2 (ii), on a $I = \mathbb{K}x$ où x est un élément homogène de $Ann(\mathcal{A})$.

Proposition 3.9. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique-paire telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. Si $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$ alors $\mathcal{A}$ est une somme directe orthogonale de super-algèbres associatives symétriques paires simples.*

Preuve. Dans cette preuve on distingue deux cas.

1er cas : On suppose que $\mathcal{A}$ est B-irréductible telle que $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$. Si $\mathcal{A}_{\bar{1}} = \{0\}$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et par conséquent $\mathcal{A}$ est une algèbre associative simple. Dans la suite on suppose que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$ et on suppose que $\mathcal{A}$ n'est pas simple. Il est clair que $\mathcal{A}$ est différente de l'algèbre de dimension 1 à produit nul. Par conséquent d'après, la Proposition 3.8, il existe un idéal bilatère gradué minimal I de $\mathcal{A}$ tel que $I = \mathbb{K}x$ où $x \in Ann(\mathcal{A})$. Or, le fait que $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$ implique que $I = \{0\}$ et ceci contredit le fait que I est minimal. Il s'ensuit que $\mathcal{A}$ est simple.

2ème cas : Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ n'est pas B-irréductible telle que $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$. D'après la Proposition 1.3, $\mathcal{A} = \oplus^n{}_{k=1}\mathcal{A}_k$, où $\mathcal{A}_k$, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, est une super-algèbre associative B-irréductible telle que $(\mathcal{A}_k)_{\bar{0}}$ est un $(\mathcal{A}_k)_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple et $Ann(\mathcal{A}_k) = \{0\}$. En utilisant la première étape de la preuve, on obtient que $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathcal{A}_k$ est une super-algèbre associative symétrique paire simple. D'où le résultat.

Dans la suite on donne une description inductive des super-algèbres associatives symétriques paires telles que leurs parties paires sont des $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodules semi-simples. Selon la proposition précédente, l'étude de ces super-algèbres se réduit à celles qui sont B-irréductibles d'annulateurs non nuls. En utilisant les doubles extensions généralisées paires et impaires introduites dans le Théorème 2.3.1 du chapitre précédent, on peut obtenir une description inductive de ces super-algèbres. Soit $\mathcal{W}$ une super-algèbre associative symétrique paire telle que sa partie paire $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{W}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. D'après le Théorème 2.3.1, la partie paire $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$ de la double extension généralisée impaire de $\mathcal{W}$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle coïncide avec $\mathcal{W}_{\bar{0}}$. Par conséquent, on déduit que $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$ est un $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. Cependant, la partie paire $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$ de la double extension généralisée paire de $\mathcal{W}$ par l'algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul n'est pas

en générale un $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. Afin d'obtenir une double extension généralisée paire $\widetilde{\mathcal{W}}$ de partie paire $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$ est un $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple, on introduit une notion particulière de le double extension généralisée paire dite la double extension paire élémentaire. Pour cela, on considère $(\mathcal{W}, B)$ une super-algèbre associative symétrique paire telle que $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{W}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple, $\mathbb{K}e$ l'algèbre de dimension 1 à produit nul et $f \in (End(\mathcal{W}))_{\bar{0}}$ tels que

$$f\mid_{\mathcal{W}_{\bar{0}}} = 0,\ f^2 = 0,\ \ f \circ f^* = f^* \circ f, \tag{3.11}$$

$$f(\mathcal{W}_{\bar{1}}) * \mathcal{W}_{\bar{1}} = \{0\},\ f(\mathcal{W}_{\bar{0}} * \mathcal{W}_{\bar{1}}) = \{0\},\ f(\mathcal{W}_{\bar{1}} * \mathcal{W}_{\bar{0}}) = f(\mathcal{W}_{\bar{1}}) * \mathcal{W}_{\bar{0}}, \tag{3.12}$$

où f^* est l'adjoint de f relativement à B défini par $B(f^*(x), y) = B(x, f(y)), \forall x, y \in \mathcal{W}$. L'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{W}} = \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W} \oplus \mathbb{K}e$ muni de l'application bilinéaire $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$e^* \in Ann(\widetilde{\mathcal{W}}),\ \ e \star e = 0,\ \ e \star x = f(x),\ \ x \star e = f^*(x),\ \ \ x \star y = x * y + B(f(x), y)e^*, \tag{3.13}$$

et de la forme bilinéaire super-symétrique $\widetilde{B} : \widetilde{\mathcal{W}} \times \widetilde{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\widetilde{B}\mid_{\mathcal{W}\times\mathcal{W}} := B,\ \widetilde{B}(e^*, e) := 1,\ \widetilde{B}(e^*, \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{W}) = \{0\} = \widetilde{B}(e, \mathcal{W} \oplus \mathbb{K}e), \tag{3.14}$$

est une super-algèbre associative symétrique paire telle que $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$ est un $\widetilde{\mathcal{W}}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. $(\widetilde{\mathcal{W}}, \widetilde{B})$ est dite la double extension paire élémentaire de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de f. On constate que tout homomorphisme paire f de $\mathcal{W}$ qui satisfait les conditions (3.11) et (3.12), il vérifie aussi les conditions (2.6) avec $G = f^*$ et $x_0 = 0$. Il s'ensuit que la double extension paire élémentaire de $\mathcal{W}$ par l'algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul au moyen de f coïncide avec la double extension paire de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(f, 0, 0)$.

Lemme 3.3.10. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique paire B-irréductible différente de l'algèbre de dimension 1 à produit nul. Supposons que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple telle que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \neq \{0\}$, alors $Ann(\mathcal{A})$ est inclus strictement dans $Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ (c'est à dire $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \subsetneq Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$).

Preuve. Il est clair que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \subseteq Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$. Si on suppose que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} = Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$, alors on obtient que $Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ est un idéal bilatère gradué non-nul de $\mathcal{A}$. Le fait que $\mathcal{A}$ est B-irréductible différente de l'algèbre de dimension 1 à produit nul implique que $Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ est un idéal dégénéré de $\mathcal{A}$ c'est à dire il existe $x \in Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}}) \setminus \{0\}$ tel que $B(x, Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})) = \{0\}$. Par conséquent $B(x, \mathcal{A}) = B(x, \mathcal{A}_{\bar{0}}) = B(x, S \oplus Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})) = \{0\}$. Donc, on obtient que $x \neq 0$ est dans l'orthogonal de $\mathcal{A}$ relativement à B et ceci contredit le fait que B est non-dégénérée.

Proposition 3.10. *Soit $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre associative symétrique paire B-irréductible différente de l'algèbre de dimension 1 à produit nul et telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. Si $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ (resp. $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$), alors $\mathcal{A}$ est une double extension paire élémentaire (resp. une double extension généralisée impaire) d'une super-algèbre associative $\mathcal{W}$ symétrique paire dont la partie paire $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{W}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple par l'algèbre de dimension 1 à produit nul (resp. la super-algèbre de dimension 1 avec une partie paire nulle).*

Preuve. On considère les deux cas suivants :

1er cas : Supposons que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ et notons $I := \mathbb{K}e^*$, où $e^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \setminus \{0\}$ et J son orthogonal relativement à B. Il est clair d'après l'associativité (resp. la parité) de la forme B que $S \subseteq J$ (resp. $\mathcal{A}_{\bar{1}} \subseteq J$) où S est le plus grand idéal bilatère semi-simple de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$. Par conséquent d'après la minimalité de I et la non dégénérescence de la forme B, il existe $e \in Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$ tel que $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}e$ et $B(e^*, e) = 1$. Comme $e \in Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$, alors $\mathbb{K}e$ est une sous super-algèbre à produit nul de $\mathcal{A}$. D'où, d'après le Théorème 2.3.6 du chapitre précédent et la Remarque 5, $\mathcal{A}$ est une double extension paire de la super-algèbre associative symétrique paire $\mathcal{W} := J/I$ par $\mathbb{K}e$ à produit nul au moyen de l'endomorphisme f de $\mathcal{W}$ défini par $f(\bar{x}) := \overline{e.x}$, $\forall x \in J$. En utilisant l'associativité de $\mathcal{A}$ et le fait que $e \in Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}})$, on vérifie facilement que f satisfait les conditions (3.11) et (3.12). D'où, $\mathcal{A}$ est une double extension paire élémentaire de $\mathcal{W}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de f. De plus, il est clair que la partie paire $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ de la super-algèbre associative symétrique paire $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{W}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple.

2ème cas : Supposons maintenant que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$ et notons $I := \mathbb{K}e^*$, où $e^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ et J son orthogonal relativement à B. D'une manière analogue au 1er cas de cette preuve, il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $\mathcal{A} = J \oplus \mathbb{K}e$ et $B(e, e^*) = 1$. En appliquant à nouveau le Théorème 2.3.6 du chapitre précédent, on obtient que $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée impaire de la super-algèbre associative symétrique paire $\mathcal{W} := J/I$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de l'endomorphisme f de $\mathcal{W}$ défini par $f(\bar{x}) := \overline{e.x}$, $\forall x \in J$ et $x_0 := e.e \in \mathcal{W}_{\bar{0}}$. De plus, la partie paire $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ de la super-algèbre associative symétrique paire $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{W}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple car elle coïncide avec $\mathcal{A}_{\bar{0}}$.

Remarque 10. Toute super-algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ associative symétrique paire de dimension 2 est une algèbre associative symétrique paire de dimension 2 ou la super-algèbre associative symétrique paire de dimension 2 (c'est à dire $\mathcal{A}_{\bar{0}} = \{0\}$). De plus, si $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple, alors on déduit que $\mathcal{A}$ est obtenue de l'une des deux manières suivantes :

- Si $\mathcal{A}$ est B-irréductible, alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de $\{0\}$ par une double extension paire élémentaire par l'algèbre de dimension 1 à produit nul ou une double extension généralisée impaire par la super-algèbre de dimension 1 de partie paire nulle.
- Si $\mathcal{A}$ n'est pas irréductible, alors $\mathcal{A}$ est obtenue par une somme directe orthogonale de deux copies du corps $\mathbb{K}$ ou une somme directe orthogonale du corps $\mathbb{K}$ avec l'algèbre de dimension 1 à produit nul.

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble formé par $\{0\}$, l'algèbre de dimension 1 à produit nul et $M_{r,s}(\mathbb{K})$ où $r \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}$.

Corollaire 3.3.11. Soit $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre associative symétrique paire telle que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{A}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple. Si $\mathcal{A} \notin \mathcal{O}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}$ par une série finie de double extensions paires élémentaires et/ou doubles extensions généralisées impaires et/ou sommes directes orthogonales.

Preuve. On montre ce corollaire par récurrence sur la dimension de $\mathcal{A}$. Si $dim(\mathcal{A}) = 1$, alors $\mathcal{A}$ est le corps $\mathbb{K}$ ou l'algèbre de dimension 1 à produit nul et dans les deux cas, on a $\mathcal{A} \in \mathcal{O}$. Si $dim(\mathcal{A}) = 2$, d'après la Remarque 10, $\mathcal{A}$ est obtenue comme dans Corollaire 3.3.11. On suppose que le Corollaire 3.3.11 est vrai si $dim(\mathcal{A}) < n$ où $n \geq 2$. Supposons maintenant que $dim(\mathcal{A}) = n$.

1er cas : Supposons que $\mathcal{A}$ est B-irréductible. Si $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$, alors d'après la Proposition 3.9, $\mathcal{A}$ est simple. Si maintenant $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$, alors d'après la Proposition 3.4.3.1, $\mathcal{A}$ est une double extension paire élémentaire (resp. une double extension généralisée impaire) d'une super-algèbre associative symétrique paire $\mathcal{W}$ dont la partie paire $\mathcal{W}_{\bar{0}}$ est un $\mathcal{W}_{\bar{0}}$-bimodule semi-simple (telle que $dim(\mathcal{W}) = dim(\mathcal{A}) - 2$) par l'algèbre de dimension 1 à produit nul (resp. par la super-algèbre de dimension 1 de partie paire nulle). D'où le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence pour $\mathcal{W}$.

2ème cas : Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ n'est pas B-irréductible. Alors $\mathcal{A} = \bigoplus^{m}{}_{k=1}\mathcal{A}_k$ où $\{A_k,\ 1 \leq k \leq m\}$ est un ensemble d'idéaux bilatères gradués B-irréductible tels que $B(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{k'}) = \{0\}$, $\forall k \neq k'$. Il est clair que $(\mathcal{A}_k)_{\bar{0}}$ est un $(\mathcal{A}_k)_{\bar{0}}$-bimodule irréductible et $dim(\mathcal{A}_k) < n$, $\forall k \in \{1, \cdots, m\}$. En appliquant l'hypothèse de la récurrence pour tout $\mathcal{A}_k$ avec $k \in \{1, \cdots, m\}$ on obtient le résultat.

3.4 Descriptions inductives des super-algèbres associatives symétriques homogènes

D'après la Proposition 1.3, décrire les super-algèbres associatives symétriques homogènes revient à décrire celles qui sont B-irréductibles non-simples.

Dans le chapitre précédent, on a introduit le concept de la double extension généralisée d'une super-algèbre de Novikov symétrique par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul dans le but d'étudier les super-algèbres de Novikov symétriques B-irréductibles non simples.

Dans la suite, on va donner une description inductive des super-algèbres associatives symétriques homogènes. On commence par définir quelques extensions de super-algèbres associatives.

Définition 31. Soient $(\mathcal{W}, *)$ une super-algèbre associative, $\mathcal{V}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué et $\psi : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ une application bilinéaire paire qui satisfait $\psi(x*y, z) = \psi(x, y*z), \forall x, y, z \in \mathcal{W}$. L'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ muni de l'application bilinéaire "." : $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \times \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ définie par

$$(v + x).(w + y) := x * y + \psi(x, y),\ \forall (v + x) \in (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})_{|x|}, (w + y) \in (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})_{|y|}, \tag{3.15}$$

est une super-algèbre associative dite une extension centrale de $\mathcal{W}$ par $\mathcal{V}$ au moyen de ψ. Il est clair que $\mathcal{V}$ est dans l'annulateur de $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ et par conséquent dans son centre. C'est pour cette raison qu'on appelle ce genre d'extension une extension centrale.

Définition 32. Soient $(\mathcal{W}, *)$ et $(\mathcal{W}, \star)$ deux super-algèbres associatives. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{P} := \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, on définit l'application bilinéaire "." : $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ par

$$(v + x).(w + y) = v \star w + x * y + \eta(v)(y) + \eta'(w)(x) + \epsilon(v, w),$$

où $\eta(v) \in (End(\mathcal{W}))_{|v|}$, $\eta'(w) \in (End(\mathcal{W}))_{|w|}$ et $\epsilon : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est une application bilinéaire paire. Muni de ce produit $\mathcal{P}$ est une super-algèbre associative si et seulement si :

$$\begin{cases} (p_1) & \eta'(v)(x * y) = x * \eta'(v)(y) \\ (p_2) & \eta'(v)(x) * y = x * \eta(v)(y)) \\ (p_3) & \eta(v)(x) * y = \eta(v)(x * y) \\ (p_4) & \eta'(v') \circ \eta(v) = \eta(v) \circ \eta'(v') \\ (p_5) & (\eta'(v') \circ \eta'(v))(x) = x * \epsilon(v, v') + \eta'(v \star v')(x) \\ (p_6) & (\eta(v) \circ \eta(v'))(x) = \epsilon(v, v') * x + \eta(v \star v')(x) \\ (p_7) & \eta'(v'')(\epsilon(v, v')) + \epsilon(v \star v', v'') = \eta(v)(\epsilon(v', v'')) + \epsilon(v, v' \star v''). \end{cases}$$

Soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ deux super-algèbres associatives et η, η' et ϵ trois applications définies comme ci-dessus qui satisfont les conditions (p_1)-(p_7), alors (η, η', ϵ) est appelé un triplet admissible et la super-algèbre associative $\mathcal{P}$ décrite ci-dessus est dite le produit semi-direct généralisé de $\mathcal{W}$ par $\mathcal{V}$ au moyen de (η, η', ϵ).

3.4.1 Structures et description inductive des super-algèbres associatives symétriques paires

3.4.1.1 Double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique paire

Dans ce paragraphe, on généralise la notion de la double extension introduite dans [4] au cas des super-algèbres associatives. Soient $(\mathcal{W}, *, \widetilde{B})$ une super-algèbre associative symétrique et $\mathcal{V}$ une super-algèbre(pas nécessairement symétrique). Soient $\mu : \mathcal{V} \to End(\mathcal{W})$ une application linéaire paire et $\lambda : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ une application bilinéaire paire telles que pour $x, y \in \mathcal{W}$ et $v, v', v'' \in \mathcal{V}$, on a

(1) $\mu'(v)(x * y) = x * \mu'(v)(y)$,

(2) $\mu'(v') \circ \mu(v) = \mu(v) \circ \mu'(v')$,

(3) $(\mu'(v') \circ \mu'(v))(x) = x * \lambda(v, v') + \mu'(v \star v')(x)$,

(4) $\mu'(v'')(\lambda(v, v')) + \lambda(v \star v', v'') = \mu(v)(\lambda(v', v'')) + \lambda(v, v' \star v'')$,

où $\mu' : \mathcal{V} \to End(\mathcal{W})$ qui satisfait $\widetilde{B}(\mu(v)(x), y) = (-1)^{|v|(|x|+|y|)}\widetilde{B}(x, \mu'(v)(y))$, $\forall v \in \mathcal{V}_{|v|}, x \in \mathcal{W}_{|x|}, y \in \mathcal{W}_{|y|}$. De plus considérons les deux applications bilinéaires paires suivantes

$$\begin{array}{lll} \nu : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{V}^* & \text{telle que} & \nu(v, x)(v') = (-1)^{|v|(|x|+|v'|)}\widetilde{B}(x, \lambda(v', v)) \\ \nu' : \mathcal{W} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}^* & \text{telle que} & \nu'(x, v)(v') = \widetilde{B}(x, \lambda(v, v')), \end{array}$$

où $x \in \mathcal{W}$ et $v, v' \in \mathcal{V}$. Notons la représentation de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}^*$ par $f.v = f \circ L_v$ et $v.f = (-1)^{|v||f|} f \circ R_v$, $\forall v \in \mathcal{V}_{|v|}$ et $f \in \mathcal{V}^*{}_{|f|}$. Ensuite, soit $\gamma : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ une application bilinéaire paire qui vérifie

(5) $\gamma(v, v')(v'') = (-1)^{|v|(|v'|+|v''|)}\gamma(v', v'')(v)$,

(6) $-\widetilde{B}(\lambda(v, v'), \lambda(v'', v''')) + (-1)^{|v|(|v'|+|v''|+|v'''|)}\widetilde{B}(\lambda(v', v''), \lambda(v''', v))$
$= \gamma(v \star v', v'')(v''') + \gamma(v, v')(v'' \star v''') - \gamma(v, v' \star v'')(v''')$
$- (-1)^{|v|(|v'|+|v''|+|v'''|)}\gamma(v', v'')(v''' \star v)$.

Finalement, soit $\phi : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{V}^*$ une application bilinéaire paire définie par

$$\phi(x, y)(v) = \widetilde{B}(x, \mu'(v)(y)), \forall x, y \in \mathcal{W}, v \in \mathcal{V}. \tag{3.16}$$

On regroupe toutes ces notions dans la définition suivante.

Définition 33. Soient $(\mathcal{W}, \widetilde{B})$ une super-algèbre associative symétrique, $\mathcal{V}$ une super-algèbre associative et μ, λ, γ trois applications paires définies comme ci-dessus qui satisfont les équations (3.4.1.1)-(3.4.1.1) . L'ensemble formé par $\left\{\mathcal{W}, \widetilde{B}, \mathcal{V}, \mu, \lambda, \gamma\right\}$ est appelé un contexte de la double extension généralisée de $\mathcal{W}$ par $\mathcal{V}$.

Théorème 3.4.1. Soit $\left\{\mathcal{W}, \widetilde{B}, \mathcal{V}, \mu, \lambda, \gamma\right\}$ un contexte de la double extension généralisée de la super-algèbre associative symétrique $(\mathcal{W}, \widetilde{B})$ par la super-algèbre associative $\mathcal{V}$. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A} := \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*$ muni du produit

$$\begin{aligned}
(x + f).(y + g) &= x * y + \phi(x, y), \\
v.(x + f) &= \mu(v)(x) + \nu(v, x) + -1^{|x||y|} f \circ R_v, \\
(x + f).v &= \mu'(v)(x) + \nu'(x, v) + f \circ L_v, \\
v.v' &= v \star v' + \lambda(v, v') + \gamma(v, v'),
\end{aligned}$$

et de la forme bilinéaire paire $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$B(v + x + f, v' + y + g) := \widetilde{B}(x, y) + (-1)^{|x||y|} g(v) + f(v'), \tag{3.17}$$

$\forall\ (v + x + f) \in \mathcal{A}_{|x|}$, $(w + y + g) \in \mathcal{A}_{|y|}$ est une super-algèbre associative symétrique telle que $\mathcal{V}^*$ est un idéal bilatère gradué totalement isotrope de $\mathcal{A}$ et le sous espace $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*$ son orthogonal relativement à B. La super-algèbre associative symétrique ainsi obtenue $\mathcal{A}$ est dite la double extension généralisée de la super-algèbre associative symétrique $(\mathcal{W}, \widetilde{B})$ par la super-algèbre associative $\mathcal{V}$ au moyen de (μ, λ, γ).

Preuve. D'après les équations (3.4.1.1) et (5.4), ϕ est associative. Par conséquent, on peut considérer l'extension centrale de $\mathcal{W}$ par $\mathcal{V}^*$ au moyen de ϕ. Plus explicitement, la structure de super-algèbre associative définie sur $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*$ est donnée par

$$(x + f).(y + g) = x * y + \phi(x, y), \quad \forall x + f \in (\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*)_{|x|},\ y + g \in (\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*)_{|y|}.$$

Fixons v un élément homogène dans $\mathcal{V}$ et considérons $\eta(v), \eta'(v) \in End(\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*)_{|v|}$ et $\epsilon : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*$ telles que les trois applications sont définies par

$$\begin{cases} \eta(v)(x+f) := \mu(v)(x) + \nu(v,x) + (-1)^{|f||v|} f \circ R_v, \forall x + f \in (\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*)_{|x|}, \\ \eta'(v)(x+f) := \mu'(v)(x) + \nu'(x,v) + f \circ L_v, \\ \epsilon(v,v') = \lambda(v,v') + \gamma(v,v'), \ \forall v' \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

En utilisant les équations (3.4.1.1)-(3.4.1.1), on vérifie facilement que (η, η', ϵ) forme un triplet admissible. Par conséquent, on peut considérer le produit semi-direct généralisé de $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*$ par $\mathcal{V}$ au moyen de (η, η', ϵ). On vérifie facilement que le produit de $\mathcal{A} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}^*$ coïncide avec celui du Théorème 3.4.1. Il est clair par définition que B est non-dégénérée et super-symétrique. De plus, il est facile de voir que B est un produit scalaire associatif sur $\mathcal{A}$.

3.4.2 Description inductive des super-algèbres associatives symétriques paires

Lemme 3.4.2. Soit $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre associative symétrique paire B-irréductible non simplede dimension $n > 1$. Soient I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et J son orthogonal relativement à B. Alors J/I muni de la multiplication naturelle

$$(x+I).(y+I) \quad = \quad (x.y) + I\,, \quad \forall x, y \in J \tag{3.18}$$

est une super-algèbre associative symétrique paire.

Preuve. Il est clair que $I \subseteq J$ et que J/I muni du produit (3.18) est une super-algèbre associative. Considérons maintenant la forme bilinéaire Q sur J/I définie, comme dans le Lemme 2.3.3 du chapitre 1, par $Q(x+I, y+I) = B(x,y)$, $\forall x, y \in J$. En raisonnant de la même manière que dans la preuve du Lemme 2.3.3, on déduit que $(J/I, Q)$ est une super-algèbre associative symétrique paire.

Lemme 3.4.3. Soit $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre associative symétrique paire B-irréductible non simplede dimension $n > 1$. Supposons que I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A} := \mathcal{I}^\perp \oplus \mathcal{V}$. Alors $\mathcal{H} := \mathcal{I} \oplus \mathcal{V}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ et son orthogonal est une super-algèbre associative symétrique paire. De plus l'application linéaire $\theta : \mathcal{H}^\perp \longrightarrow J/I$ définie par $\theta(x) = x + I$, $\forall x \in \mathcal{H}^\perp$ est un isomorphisme de super-algèbres associatives.

Preuve. Le fait que I est un idéal bilatère totalement isotrope de $\mathcal{A}$ implique que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué non-dégénéré de $\mathcal{A}$. Par conséquent, $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp = I \oplus \mathcal{H}^\perp \oplus \mathcal{V}$ et $B_{\mathcal{H}^\perp} := B_{|\mathcal{H}^\perp \times \mathcal{H}^\perp}$ est non-dégénérée. Comme $I \subseteq J$, $\mathcal{H}^\perp \subseteq J$ et $dim(I \oplus \mathcal{H}^\perp) = dim\mathcal{A} - dim\mathcal{V} = dimJ$, alors $J := I \oplus \mathcal{H}^\perp$. Soient $x, y \in \mathcal{H}^\perp$, alors $x.y = \alpha(x,y) + \beta(x,y)$, où $\alpha(x,y) \in \mathcal{H}^\perp$ et $\beta(x,y) \in I$. En utilisant l'associativité de $\mathcal{A}$ et l'associativité de la forme B, on déduit que $(\mathcal{H}^\perp, \alpha)$ est une super-algèbre associative et que $B_{\mathcal{H}^\perp}$ est une forme bilinéaire associative sur

$\mathcal{W}^{\perp}$. Par conséquent $(\mathcal{H}^{\perp}, \alpha, B_{\mathcal{H}^{\perp}})$ est une super-algèbre associative symétrique impaire. De plus, la restriction de la surjection canonique $s : J \longrightarrow J/I$ à $\mathcal{H}^{\perp}$ est un isomorphisme de super-algèbres associatives.

Lemme 3.4.4. Soit$(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique B-irréductible non simplede dimension $n > 1$. Supposons que I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A} := \mathcal{I}^{\perp} \oplus \mathcal{V}$. Alors $\mathcal{A}$ est isomorphe à une double extension généralisée de J/I par $\mathcal{V}$.

Preuve. D'après le Lemme 3.4.3, on a $\mathcal{A} := I \oplus \mathcal{H}^{\perp} \oplus \mathcal{V}$, où $\mathcal{H}^{\perp}$ est l'orthogonal de $\mathcal{H} := I \oplus \mathcal{V}$. De plus, $\mathcal{H}^{\perp}$ et J/I sont isomorphes en tant que super-algèbres associatives symétriques paires. Dans la suite, on cherche à trouver un contexte d'une double extension symétrique paire généralisée de J/I par $\mathcal{V}$. Pour cela, on définit les trois applications paires suivantes :

$$\mu \ : \ \mathcal{V} \to End(J/I) \ ; \ \mu(v)(X + I) = v.X + I \tag{3.19}$$

$$\lambda \ : \ \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to J/I \ ; \ \lambda(v, w) = v.w + I \tag{3.20}$$

$$\gamma \ : \ \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}^* \ ; \ \gamma(u, v)(w) = B(u.v, w). \tag{3.21}$$

D'après l'associativité de $\mathcal{A}$ et l'associativité de la forme B, on vérifie facilement que $\{J/I, Q, \mathcal{V}, \mu, \lambda, \gamma\}$ forme un contexte de double extension généralisée symétrique paire de J/I par $\mathcal{V}$. Par conséquent, d'après Théorème 3.4.1, on peut considérer $(\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{V} \oplus J/I \oplus P(\mathcal{V}^*), \widetilde{B})$ la double extension symétrique paire généralisée de J/I par $\mathcal{V}$ au moyen de (μ, λ, γ). Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Delta \ : \ \mathcal{A} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}^{\perp} \oplus I & \to & \widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{V} \oplus J/I \oplus P(\mathcal{V}^*) \\ v + X + a & \mapsto & v + s(X) + \varpi(a); \end{array}$$

où $\varpi : I \to \mathcal{V}^*$ définie par $\varpi(a) = B(a, .)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué. On vérifie que Δ est un isomorphisme de super-algèbres associatives qui vérifie $\widetilde{B}(\Delta(X), \Delta(Y)) = B(X, Y), \ \forall X, Y \in \mathcal{A}$. D'où le résultat.

Théorème 3.4.5. Soit$(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique B-irréductible non simplede dimension $n > 1$. Supposons que I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A} := \mathcal{I}^{\perp} \oplus \mathcal{V}$. Alors $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée de J/I par $\mathcal{V}$.

Proposition 3.11. *Toute super-algèbre associative symétrique paire B-irréductible non simplede dimension $n > 1$ est obtenue de l'une des deux manières suivantes.*

(i) Une double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique paire par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul.

(ii) une double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique paire par un élément de $\{M_{r,s}(\mathbb{K}), Q_n(\mathbb{K})\}$.

Preuve. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique paire B-irréductible non simplede dimension $n > 1$. On distingue les deux cas suivants.

1er cas : Supposons que $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. Ce cas a été présenté dans la Proposition 2.4 du chapitre précédent. Plus précisément, dans la Proposition 2.4, on a obtenu que $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique paire par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul. D'où l'assertion (i).

2ème cas : Supposons maintenant que $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$. Comme $\mathcal{A}$ est non simple, alors il existe un iéal bilatère minimal I de $\mathcal{A}$. Le fait que $\mathcal{A}$ est B-irréductible de dimension $n > 1$, implique que I est un idéal bilatère totalement isotrope (c'est à dite $I \subseteq J$, où J est l'orthogonal de I relativement à B). D'autre part, d'après la non-dégénérescence de B, il existe un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ tel que $B|_{I\times\mathcal{V}}$ est non-dégénérée. Par le Théorème 3.4.5, on a $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée de J/I par $\mathcal{V}$ au moyen de (μ, λ, γ) défini comme dans le Théorème 3.4.5. D'où l'assertion (ii)

Le corollaire suivant est une conséquence de la Proposition 1.3 et la Proposition 3.11.

Corollaire 3.4.6. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique paire. Si $\mathcal{A} \notin \mathcal{O}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}$ par une série finie de double extensions généralisées par des éléments de $\{M_{r,s}(\mathbb{K}), Q_n(\mathbb{K})\}$ et/ou double extensions généralisées paire par l'algèbre de dimension 1 à produit nul et/ou double extensions généralisées impaire par la super-algèbre de dimension 1 telle que sa partie paire nulle et/ou sommes directs orthogonales.

3.4.3 Structures et description inductive des super-algèbres associatives symétriques impaires

3.4.3.1 Double extension généralisée d'une super-algèbre associaitve symétrique impaire

Soient $(\mathcal{W}, *, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire et $(\mathcal{V}, \star)$ une super-algèbre associative (non nécessairement symétrique impaire). Supposons que $\mu : \mathcal{V} \to End(\mathcal{W})$ est une application linéaire paire et $\lambda : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est une application bilinéaire paire telles que :

(1) $\mu(v)(x * y) = \mu(v)(x) * y$,

(2) $\mu(v) \circ \mu(v')^* = \mu(v')^* \circ \mu(v)$,

(3) $(\mu(v) \circ \mu(v'))(x) = \lambda(v, v') * x + \mu(v \star v')(x)$,

(4) $\lambda(v, v' \star v'') + \mu(v)(\lambda(v', v'')) = \mu(v'')^*(\lambda(v, v')) + \lambda(v'' \star v, v')$, $\forall x, y \in \mathcal{W}$ et $v, v', v'' \in \mathcal{V}$,

où $\mu(v)^*$ est l'adjoint de $\mu(v)$ relativement à B. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $P(\mathcal{V}^*)$, où $\mathcal{V}^*$ est l'espace dual de $\mathcal{V}$, tel que :

$$(P(\mathcal{V}^*))_{\bar{0}} := \mathcal{V}^*{}_{\bar{1}} \quad \text{et} \quad (P(\mathcal{V}^*))_{\bar{1}} := \mathcal{V}^*{}_{\bar{0}}.$$

A l'aide d'un calcul simple, on vérifie facilement que $P(\mathcal{V}^*)$ possède une structure de $\mathcal{V}$-bimodule au moyen de (l^*, r^*) telle que

$$l^* : \mathcal{V} \longrightarrow Hom(P(\mathcal{V}^*)) \text{ définie par } \; l^*(v)(f) := (-1)^{|v||f|} f \circ R_v$$

$$r^* : \mathcal{V} \longrightarrow Hom(P(\mathcal{V}^*)) \text{ définie par } \; r^*(v)(f) := f \circ L_v,$$

où $v \in \mathcal{V}_{|v|}$ et $f \in P(\mathcal{V}^*)_{|f|}$. Ensuite, on considère les deux applications bilinéaires paires suivantes :

$$\begin{array}{lll} \nu : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \longrightarrow P(\mathcal{V}^*) & \text{définie par} & \nu(v,x)(v') := B(x, \lambda(v', v)); \\ \nu' : \mathcal{W} \times \mathcal{V} \longrightarrow P(\mathcal{V}^*) & \text{définie par} & \nu'(x,v)(v') := B(x, \lambda(v, v')). \end{array}$$

De plus, on considère l'application bilinéaire $\psi : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow P(\mathcal{V}^*)$ définie par $\psi(x,y)(v) := B(\mu(v)(x), y)$. Finalement, soit $\gamma : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow P(V^*)$ une application bilinéaire paire qui satisfait :

(5) $\gamma(v, v')(v'') = \gamma(v', v'')(v)$,

(6) $\gamma(v \star v', v'')(v''') + \gamma(v, v')(v'' \star v''') - \gamma(v, v' \star v'')(v''') - \gamma(v', v'')(v''' \star v)$
$= B(\lambda(v''', v), \lambda(v', v'')) - B(\lambda(v, v'), \lambda(v'', v''')).$

On regroupe toutes ces notions dans la définition suivante.

Définition 34. L'ensemble formé par $\{\mathcal{W}, B, \mathcal{V}, \mu, \lambda, \gamma\}$ où $(\mathcal{W}, B)$ est une super-algèbre associative symétrique impaire, $\mathcal{V}$ une super-algèbre associative et μ, λ, γ trois applications définies comme ci-dessus qui satisfont les conditions (3.4.3.1)-(3.4.3.1) est dit un contexte d'une double extension généralisée de $\mathcal{W}$ par $\mathcal{V}$.

Théorème 3.4.7. Soient $\left\{\mathcal{W}, \widetilde{B}, \mathcal{V}, \mu, \lambda, \gamma\right\}$ un contexte de la double extension généralisée de la super-algèbre associative symétrique impaire $(\mathcal{W}, *, \widetilde{B})$ par la super-algèbre associative $(\mathcal{V}, \star)$. Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A} := P(\mathcal{V}^*) \oplus \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}$ muni de l'application bilinéaire "." : $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$\begin{aligned} (x+f).(y+g) &= x * y + \psi(x,y) \\ v.(x+f) &= \mu(v)(x) + \nu(v)(x) + (-1)^{|v||x|} f \circ R_v, \\ (x+f).v &= \mu^*(v)(x) + \nu'(v)(x) + f \circ L_v, \\ v.v' &= v \star v' + \lambda(v, v') + \gamma(v, v'). \end{aligned}$$

est une super-algèbre associative. Si de plus la super-algèbre associative est munie de la forme bilinéiare super-symétrique B définie par

$$B(v + x + f, v' + y + g) := \widetilde{B}(x, y) + f(v') + g(v), \tag{3.22}$$

où $(v + x + f) \in \mathcal{A}_{|x|}$ et $(v' + y + g) \in \mathcal{A}_{|y|}$, alors $(\mathcal{A}, ., B)$ est une super-algèbre associative symétrique impaire dite la double extension généralisée de $\mathcal{W}$ par $\mathcal{V}$ au moyen de (μ, λ, γ).

3.4.3.2 Description inductive des super-algèbres associatives symétriques impaires

Théorème 3.4.8. Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire B-irréductible non simple, I un idéal bilatère gradué minimal de $\mathcal{A}$ et J son orthogonal relativement à B. On suppose que $\mathcal{A} = J \oplus \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est isomorphe à la double extension généralisée symétrique impaire de J/I par $\mathcal{V}$ au moyen de (μ, λ, γ).

Preuve. La preuve de ce théorème est analogue à celle du Théorème 3.4.5 dans le cas où B est une structure symétrique paire.

Proposition 3.12. *Toute super-algèbre associative symétrique impaire B-irréductible non simpleest obtenue de l'une des deux manières suivantes :*

(i) Une double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique impaire par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul.

(ii) Une double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique impaire par un élément de $\{M_{r,s}(\mathbb{K}), Q_n(\mathbb{K})\}$.

Preuve. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire B-irréductible non-simple. On distingue les deux cas suivants :

1er cas : On suppose que $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$ et on considère e^* un élément homogène de $Ann(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$. Il est clair que l'idéal $I := \mathbb{K}e^*$ est totalement isotrope et par conséquent $I \subseteq J$, où J est l'orthogonal de I relativement à B. Comme B est une forme bilinéaire impaire et non-dégénérée, alors il existe un élément homogène e de $\mathcal{A}$ de degré $\mid e^* \mid +1$ tel que $B(e^*, e) = 1$. D'où, $\mathcal{A} := J \oplus \mathbb{K}e$. Maintenant, par le Théorème 3.4.8, on a $\mathcal{A}$ est isomorphe à $(\widetilde{\mathcal{A}} := P(\mathcal{V}^*) \oplus J/I \oplus \mathcal{V}, \widetilde{B})$ la double extension généralisée de J/I par $(\mathcal{V} := \mathbb{K}e, \star)$ au moyen de $D := \mu(e)$, $x_0 = \lambda(e, e) \in (J/I)_{\bar{0}}$ et $\gamma_0 = \gamma(e, e)(e) \in (\mathbb{K})_{|e|+1}$.

2ème cas : Supposons maintenant que $Ann(\mathcal{A}) = \{0\}$. Comme $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative symétrique impaire B-irréductible non simple, alors il existe I un idéal bilatère gradué minimal totalement isotorpe de $\mathcal{A}$. D'après la non-dégénérescence de B, il existe $\mathcal{V}$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ tel que $B|_{I \times \mathcal{V}}$ est non-dégénérée. Par conséquent, on déduit que $\mathcal{A} := J \oplus \mathcal{V}$, où J est l'orthogonal de I relativement à B. En appliquant le Théorème 3.4.8, on obtient que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $(\widetilde{\mathcal{A}} := P(\mathcal{V}^*) \oplus J/I \oplus \mathcal{V}, \widetilde{B})$ la double extension généralisée de J/I par $\mathcal{V}$ au moyen de (μ, λ, γ) qui sont définies respectivement comme dans le Théorème 3.4.5 en échangeant $\mathcal{V}^*$ par $P(\mathcal{V}^*)$. D'où l'assertion (ii).

Le corollaire suivant est une conséquence de la Proposition 1.3 et la Proposition 3.12.

Théorème 3.4.9. Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative symétrique impaire. Si $\mathcal{A} \notin \mathcal{U} := \{\{0\}, Q_n(\mathbb{K}), n \in \mathbb{N}^*\}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}$ par une série finie de double extensions généralisées par des éléments de $\{M_{r,s}(\mathbb{K}), Q_n(\mathbb{K})\}$ et/ou double extensions généralisées par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul et/ou sommes directes orthogonales.

Chapitre 4

Super-algèbres associatives super-commutatives avec des structures homogènes

Ce chapitre est consacré à l'étude des des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes symplectiques homogènes. Les résultats de ce chapitre seront utilisés dans le chapitre 6 pour comprendre la structure des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes.

La double extension généralisée d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique homogène par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul est un cas particulier de la double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique homogène introduite dans le chapitre précédent. Ce cas particulier va être très utile dans ce chapitre.

Ce chapitre est composé essentiellement de deux sections. Dans la première section, on généralise aux cas des super-algèbres la double extension symplectique d'une algèbre associative commutative symplectique par l'algèbre de dimension 1 à produit nul introduite dans [11]. Ensuite, on introduit la double extension généralisée d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul. On utilise ces double extensions afin de donner une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques homogènes nilpotentes. Dans la deuxième section de ce chapitre, on s'intéresse aux super-algèbres associatives super-commutatives qui sont munies simultanément des structures symétriques homogènes et des structures symplectiques homogènes. On utilise les résultats obtenus dans [11] et on développe d'autres concepts de double extensions dans le but de donner une description inductive de ce type de super-algèbres.

4.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques homogènes

4.1.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques paires

Dans le but d'étudier les super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques paires et de donner une description inductive de celles qui sont nilpotentes, on généralise au cas des super-algèbres associatives super-commutatives l'étude des algèbres associatives commutatives symplectiques faite dans [11]. Soient $(\mathcal{A}, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire et $\mathbb{K}e$ une super-algèbre à produit nul. Dans la proposition suivante, on définit l'extension centrale de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{K}e^*$, où $\{e^*\}$ est la base duale de $\{e\}$.

Proposition 4.1. *Soient $(\mathcal{A}, *, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre à produit nul et $f \in (End(\mathcal{A}))_{|e|}$ qui satisfait*

$$f \circ L_x = L_{f(x)}, \forall x \in \mathcal{A}. \tag{4.1}$$

Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A}$ muni du produit "." défini par

$$(ae^* + x).(be^* + y) = x * y + \gamma(x, y)e^*, \forall x, y \in \mathcal{A}, a, b \in \mathbb{K}$$

où $\gamma(x, y) = -(-1)^{|e|}\omega(\Big[f - (-1)^{|e||x|}f^*\Big](x), y)$ est une super-algèbre associative super-commutative dite une extension centrale de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{K}e^*$ au moyen de f.

Dans le théorème suivant on définit le produit semi direct généralisé de l'extension centrale $\mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A}$ par $\mathbb{K}e$. Autrement, on définit la double extension généralisée de la super-algèbre associative super-commutative symplectique paire $(\mathcal{A}, \omega)$ par $\mathbb{K}e$.

Théorème 4.1.1. Soient $(\mathcal{A}, *, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre à produit nul et $f \in (End(\mathcal{A}))_{|e|}$ qui satisfait (4.1). S'il existe $(a_0, z_0) \in \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que

$$\begin{aligned}
0 &= 2f^2 - (1 + (-1)^{|e|})L_{a_0}, && (4.2)\\
0 &= (1 + (-1)^{|e|})(3f^*(a_0) - 2f(a_0)), && (4.3)\\
0 &= (1 + (-1)^{|e|})(f^2 + f^{*2} - 2f^* \circ f), && (4.4)\\
0 &= (1 - (-1)^{|e|})f^*(z_0), && (4.5)\\
0 &= (1 - (-1)^{|e|})\Big[-\omega(z_0, x * y) + (-1)^{|x|}\omega(f(x), f(y))\Big], \forall x, y \in \mathcal{A}, && (4.6)
\end{aligned}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ muni du produit suivant défini par

$$\begin{aligned}
e^* &\in Ann(\widetilde{\mathcal{A}}), \quad xy = x * y + \gamma(x, y)e^*, \quad ee = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})a_0,\\
ex &= f(x) - \frac{1}{4}(1 + (-1)^{|e|})\omega(a_0, x)e^* + \frac{1}{2}(1 - (-1)^{|e|})\omega(z_0, x)e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

est une super-algèbre associative super-commutative. De plus, la forme bilinéaire super-anti-symétrique Ω sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par $\Omega|_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}} := \omega$, $\Omega(e^*, e) = 1$ et Ω est nulle ailleurs est une forme symplectique paire sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. La super-algèbre $(\widetilde{\mathcal{A}}, \Omega)$ est appelée la double extension (resp. la double extension généralisée) de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, z_0) (resp. (f, a_0)) si e est un élément homogène impair (resp. pair).

Proposition 4.2. *Toute super-algèbre associative super-commutative symplectique paire non-nulle différente de la super-algèbre de dimension 1 de partie paire nulle et dont l'annulateur non-nul est obtenue de l'une des trois manières suivantes :*

(i) Une double extension généralisée d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire par l'algèbre de dimension 1 à produit nul,

(ii) Une double extension d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire par la super-algèbre de dimension 1 de partie paire nulle,

(iii) Une somme directe orthogonale d'un idéal bilatère gradué non-dégénéré de dimension 1 et de partie paire nulle et d'un idéal bilatère gradué non-dégénéré d'annulateur nul.

Preuve. Soit $(\mathcal{A}, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire telle que $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. On distingue les deux cas suivants.

1er cas : Supposons que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ et considérons $I := \mathbb{K}e^*$, où $e^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \setminus \{0\}$, et J son orthogonal relativement à ω. Le fait que ω est paire et super-antisymétrique, implique que $I \subseteq J$. D'après la non-dégénérescence et la parité de ω, il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. Comme l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ est non-dégénéré, on obtient que $\mathcal{A} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ et $\omega_{\mathcal{H}} := \omega|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée , où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Comme $\mathcal{H} \subseteq J$ et $dim(\mathcal{H} \oplus I) = dim J$, il s'ensuit que $J := I \oplus \mathcal{H}$. Par conséquent on obtient

$$x.y = x * y + \gamma(x, y)e^*, \quad e.x = f(x) + \beta(x)e^*, \quad e.e = \alpha e^* + a_0 + \alpha' e, \ \forall x, y \in \mathcal{H},$$

où $x*y, f(x) \in \mathcal{H}$, $a_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x, y), \beta(x), \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. Comme $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative super-commutative, alors $(\mathcal{H}, *)$ est aussi une super-algèbre associative super-commutative. De plus, il est facile de vérifier que $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme symplectique paire sur $\mathcal{H}$. En utilisant le fait que ω satisfait

$$(-1)^{|x||z|}\omega(x, y.z) + (-1)^{|x||y|}\omega(y, z.x) + (-1)^{|y||z|}\omega(z, x.y) = 0, \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, z \in \mathcal{A}_{|z|},$$

on déduit que $\alpha = \alpha' = 0$, $\beta(x) = \frac{1}{2}\omega(x, a_0)$ et $\gamma(x, y) = \omega(\Big(f^* - f\Big)(x), y)$. De plus, d'après l'associativité de ".", on obtient que $L_{f(x)} = f \circ L_x$, $f^2 = L_{a_0}$, $3f^*(a_0) = 2f(a_0)$ et $2f^* \circ f = f^2 + {f^*}^2$. Par le Théorème 4.1.1, on déduit que $(\mathcal{A}, \omega)$ est une double extension généralisée de $(\mathcal{H}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, a_0).

2ème cas : Supposons maintenant que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} = \{0\}$. Comme $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$, alors on a $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$.

• Supposons que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e^*$ tel que $\omega(e^*, e^*) = k$, où $k \in \mathbb{K}$. Si $k \neq 0$, alors $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal bilatère gradué non-dégénéré. Par conséquent $\mathcal{A} := I \oplus J$ est une somme directe

orthogonale de I et son orthogonal J. Le fait que J est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ et $Ann(\mathcal{A}) = \mathbb{K}e^*$, implique que J est non-dégénéré tel que $Ann(J) = \{0\}$. Si maintenant $k = 0$, alors $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal gradué totalement isotrope (c'est à dire $I \subseteq J$). D'après la non-dégénérescence et la parité de ω, il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. Comme l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ est non-dégénéré, alors $\mathcal{A} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ et $\omega_{\mathcal{H}} := \omega|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Il est clair que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ contenu dans J. Par conséquent pour $x, y \in \mathcal{H}$ on obtient

$$x.y = x * y + \gamma(x, y)e^*, \quad e.x = f(x) + \beta(x)e^*,$$

où $x * y, f(x) \in \mathcal{H}$ et $\gamma(x, y), \beta(x) \in \mathbb{K}$. Comme $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative super-commutative, on déduit facilement que $(\mathcal{H}, *)$ est aussi une super-algèbre associative super-commutative. De plus, il est facile de vérifier que $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme symplectique paire sur $\mathcal{H}$. En utilisant le fait que ω satisfait

$$(-1)^{|x||z|}\omega(x, y.z) + (-1)^{|x||y|}\omega(y, z.x) + (-1)^{|y||z|}\omega(z, x.y) = 0, \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, z \in \mathcal{A}_{|z|},$$

implique que $\gamma(x, y) = \omega(\Big(f - (-1)^{|x|}f^*\Big)(x), y)$. De plus, d'après l'associativité de ".", on a $L_{f(x)} = f \circ L_x$, $f^2 = 0$, $\beta \circ f = 0$ et $\beta(x * y) = (-1)^{|x|}\omega(f(x), f(y))$. Comme $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme bilinéaire paire non-dégénérée de $\mathcal{H}$ et $\beta \in \mathcal{H}_{\bar{0}}^*$, alors il existe $z_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ tel que $\beta = \omega_{\mathcal{H}}(z_0, .)$. Maintenant en appliquant le Théorème 4.1.1, on conclut que $(\mathcal{A}, \omega)$ est une double extension de $(\mathcal{H}, *, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, z_0).

• Supposons maintenant que $dim(Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}) \geq 2$. Le fait que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos implique qu'il existe $e^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tel que $\omega(e^*, e^*) = 0$. En raisonnant de la même manière que dans le 1ème cas, où $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal gradué totalement isotrope, on conclut que $\mathcal{A}$ est une double extension d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire $(\mathcal{H}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle.

En utilisant la proposition précédente, on donne dans le corollaire suivant une description d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire nilpotente différente de la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

Corollaire 4.1.2. Toute super-algèbre associative super-commutative symplectique paire nilpotente différente de la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle est obtenue comme l'assertion (i) ou l'assertion (ii) de la Proposition 4.2.

On remarque que si $(\mathcal{A}, \omega)$ est une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire nilpotente différente de la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle, alors $(\mathcal{H}, \omega_{\mathcal{H}})$ obtenue dans la preuve de la Proposition 4.2 est aussi une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire nilpotente. Par conséquent, on peut donner une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques paires nilpotentes.

Notons $\mathfrak{m}$ la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

Corollaire 4.1.3. Toute super-algèbre associative super-commutative symplectique paire nilpotente non-nulle et différente de $\mathfrak{m}$ est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments de $\{\{0\}, \mathfrak{m}\}$ par une série finie de double extensions généralisées par l'algèbre de dimension 1 à produit nul et/ou double extensions par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

4.1.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques impaires

Dans ce paragraphe, on introduit la double extension (généralisée) d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire par une super-algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul afin de donner une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques impaires nilpotentes.

Proposition 4.3. *Soient $(\mathcal{A}, *, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre à produit nul et $f \in (End(\mathcal{A}))_{|e|}$ qui satisfait la condition (4.1). Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{A}$ muni du produit "." défini par*

$$(ae^* + x).(be^* + y) = x * y + \gamma'(x, y)e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A}, \forall a, b \in \mathbb{K},$$

où $\gamma'(x, y) := -\omega(\Big[f - (-1)^{|e||x|} f^*\Big](x), y)$ est une super-algèbre associative super-commutative dite une extension centrale de $\mathcal{A}$ par $P(\mathbb{K}e^*)$ au moyen de f.

Théorème 4.1.4. Soient $(\mathcal{A}, *, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre à produit nul et $f \in (End(\mathcal{A}))_{|e|}$ qui satisfait la condition (4.1). S'il existe $(a_0, z_0) \in \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que les conditions (4.2)-(4.5) et la condition suivante

$$0 = (1 - (-1)^{|e|})\Big[\omega(z_0, x * y) + (-1)^{|x|}\omega(f(x), f(y))\Big], \forall x, y \in \mathcal{A}. \tag{4.7}$$

sont satisfaites, alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ muni du produit suivant défini par

$$\begin{aligned} e^* &\in Ann(\widetilde{\mathcal{A}}), \quad xy = x * y + \gamma'(x, y)e^*, \quad ee = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})a_0, \\ ex &= f(x) - \frac{1}{4}(1 + (-1)^{|e|})\omega(a_0, x)e^* + \frac{1}{2}(1 - (-1)^{|e|})\omega(z_0, x)e^*, \end{aligned}$$

est une super-algèbre associative super-commutative. De plus, la forme bilinéaire super-antisymétrique Ω de $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par $\Omega|_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}} := \omega$, $\Omega(e^*, e) = 1$ et Ω est nulle ailleurs est une forme symplectique impaire sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. La super-algèbre $(\widetilde{\mathcal{A}}, \Omega)$ est appelée la double extension (resp. la double extension généralisée) de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, z_0) (resp. (f, a_0)) si e est un élément homogène impair (resp. pair).

Proposition 4.4. *Tout super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire dont l'annulateur est non-nul est obtenue à partir d'une super-algèbre associative super-commutative*

symplectique impaire par une double extension par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle ou une double extension généralisée par l'algèbre de dimension 1 à produit nul.

Preuve. Notons $I := \mathbb{K}e^*$, où e^* est un élément homogène non-nul de $Ann(\mathcal{A})$ et J son orthogonal relativement à ω. D'après la parité de ω, il est clair que $I \subseteq J$. Ensuite, en utilisant la non dégénérescence et la parité de ω, on déduit qu'il existe $e \in \mathcal{A}_{|e^*|+\bar{1}}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. Comme l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ est non-dégénéré, alors $\mathcal{A} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ et $\omega_{\mathcal{H}} := \mathcal{H}|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Il est clair que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ contenu dans J. Par conséquent, pour $x, y \in \mathcal{H}$, on a

$$xy = x * y + \gamma'(x, y)e^*, \quad ex = f(x) + \beta(x)e^*, \quad ee = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})(a_0 + \alpha e),$$

où $x * y, f(x) \in \mathcal{H}$, $a_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma'(x, y), \beta(x), \alpha \in \mathbb{K}$. Comme $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative super-commutative, alors $(\mathcal{H}, *)$ est aussi une super-algèbre associative super-commutative. De plus, il est facile de vérifier que $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme symplectique impaire sur $\mathcal{H}$. En utilisant le fait que ω satisfait

$$(-1)^{|x||z|}\omega(x, y.z) + (-1)^{|x||y|}\omega(y, z.x) + (-1)^{|y||z|}\omega(z, x.y) = 0, \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}, z \in \mathcal{A}_{|z|}$$

on déduit que $\beta(x) = \frac{1}{4}(1 + (-1)^{|e|})\omega_{\mathcal{H}}(x, a_0)$ et $\gamma'(x, y) = -\omega_{\mathcal{H}}(\Big(f - (-1)^{|e||x|}f^*\Big)(x), y)$. De plus, en utilisant l'associativité de ".", on obtient que $L_{f(x)} = f \circ L_x$, $2f^2 = (1 + (-1)^{|e|})L_{a_0}$, $0 = (1 + (-1)^{|e|})(f^2 + f^{*2} - 2f^* \circ f)$, $\beta \circ f = 0$ et $\beta(x * y) = (-1)^{|x|}\omega(f(x), f(y))$. Comme $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme bilinéaire impaire et non-dégénérée et $\beta \in \mathcal{H}^*_{\bar{1}}$, alors il existe $z_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ tel que $\beta = \omega_{\mathcal{H}}(z_0, .)$. Par conséquent, en appliquant le Théorème 4.1.4, $(\mathcal{A}, \omega)$ est une double extension (resp. une double extension généralisée) de $(\mathcal{H}, *, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, z_0) (resp. (f, a_0)) si e est un élément homogène impair (resp. pair).

Si on considère maintenant que $(\mathcal{A}, \omega)$ est une super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire nilpotente non-nulle, alors la super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire $(\mathcal{H}, \omega_{\mathcal{H}})$ obtenue dans la Proposition 4.4 est aussi nilpotente. Par conséquent, on peut donner une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symplectiques impaires nilpotentes.

Corollaire 4.1.5. Toute super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire nilpotente non-nulle est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions généralisées par l'algèbre de dimension 1 à produit nul et/ou double extensions par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

4.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes symplectiques homogènes

Dans cette section, on complète l'étude des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes symplectiques homogènes commencée dans [11] dans le cas non-gradué.

Proposition 4.5. *Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre associative super-commutative. Si $\mathcal{A}$ possède une super-dérivation homogène (paire ou impaire) inversible, alors $\mathcal{A}$ est nilpotente.*

Preuve. Soit Δ une super-dérivation de $\mathcal{A}$ inversible et homogène de degré γ, où $\gamma \in \mathbb{Z}_2$.

1er cas : Supposons que $\gamma = \bar{0}$. Comme la restriction $\Delta_{|\mathcal{A}_{\bar{0}}}$ de Δ à $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une dérivation inversible de $\mathcal{A}_{\bar{0}}$, il s'ensuit d'après [11], que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est nilpotente. Par conséquent il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que ${\mathcal{A}_{\bar{0}}}^{n_0} = \{0\}$. Posons $n := 2n_0$. En utilisant l'associativité et la super-commutativité de $\mathcal{A}$, on peut réordonner le produit de n éléments homogènes $a_1, \cdots, a_n$ de $\mathcal{A}$ de la manière suivante $a_1.\cdots.a_n = a_{i_1}.\cdots.a_{i_p}.a_{i_{p+1}}.\cdots.a_{i_n}$, où $a_{i_1}, \cdots, a_{i_p}$ sont p éléments homogènes paires et $a_{i_{p+1}}, \cdots, a_{i_n}$ sont $n-p$ éléments homogènes impaires. Si $p \geq n_0$ alors il est clair que $a_1.\cdots.a_n = 0$. Sinon, pour que $a_1.\cdots.a_n = 0$ il faut que

$$\left[\frac{n-p}{2}\right] \geq n_0 - p,$$

où $[k]$ désigne la partie entière de $k \in \mathbb{Q}$. En effet, si $p = 2q$, où $q \in \mathbb{N}^*$, alors $\left[\frac{n-p}{2}\right] = [n_0 - q] = n_0 - q \geq n_0 - 2q = n_0 - p$ et si $p = 2q+1$, alors $\left[\frac{n-p}{2}\right] = \left[n_0 - q - \frac{1}{2}\right] = n_0 - q - 1 \geq n_0 - 2q - 1 = n_0 - p$.

2ème cas : Supposons maintenant que $\gamma = \bar{1}$. Dans ce cas le résultat découle immédiatement du 1er cas de cette démonstration puisque $[\Delta, \Delta]$ est une super-dérivation paire inversible de $\mathcal{A}$.

Corollaire 4.2.1. Soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique homogène symplectique homogène, alors $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. Plus précisément,

(i) Si $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est symétrique impaire symplectique impaire, alors $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} \neq \{0\}$.

(ii) Si $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est symétrique paire symplectique impaire (resp. symétrique impaire symplectique paire), alors $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} \neq \{0\}$, $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}} \neq \{0\}$ et $dim(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} = dim(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}}$.

Preuve. Il est clair, d'après la Proposition 1.4, qu'il existe une super-dérivation Δ de $\mathcal{A}$ homogène (paire ou impaire) et inversible telle que $\omega(x, y) := B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Ensuite, en appliquant la Proposition 4.5, il s'ensuit que $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$.
(i) Supposons que $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire. Comme $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative commutative nilpotente, on a d'une manière triviale $Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}}) \neq \{0\}$. En outre, d'après l'associativité de B, il s'ensuit que $Ann(\mathcal{A}_{\bar{0}}) \subseteq Ann(\mathcal{A})_{\bar{0}}$. D'où le résultat.
L'assertion (ii) découle immédiatement du fait que $\Delta(Ann(\mathcal{A})) = Ann(\mathcal{A})$, où Δ est l'unique super-dérivation impaire de $\mathcal{A}$ inversible, super-antisymétrique qui satisfait (1.4).

Remarque 11. Si $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique homogène symplectique homogène sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos, alors on déduit d'après le Corollaire 4.2.1, qu'il existe une valeur propre non-nul λ et un vecteur propre homogène de $\Delta|_{Ann(\mathcal{A})}$ associé à la valeur propre λ.

4.2.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires avec des structures symplectiques homogènes

4.2.1.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques paires

Dans le cas non-gradué, les algèbres associatives commutatives symétriques symplectiques ont été étudiées dans [11]. En particulier, le concept de la double extension généralisée d'une algèbre associative commutative symétrique symplectique par l'algèbre associative de dimension 1 à produit nul a été introduite dans [11]. En utilisant les résultats obtenus dans [11] et en développant d'autres concepts de double extensions, on obtient des descriptions inductives des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques paires.

Rappelons un cas particulier de la double extension des super-algèbres associatives symétriques paires introduite dans le Théorème 2.3.1 du chapitre 2.

Corollaire 4.2.2. Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre associative à produit nul, $f \in End(\mathcal{A})_{|e|}$ et $a_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tels que

$$f^2 = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})L_{a_0}, \quad L_{f(x)} = f \circ L_x \quad \text{et} \quad B(f(x), y) = (-1)^{|x|}B(x, f(y)), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$, possède une structure de super-algèbre associative super-commutative symétrique paire définie par

$$e.e = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})(a_0 + ke^*), \quad e.x := f(x) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})B(a_0, x)e^*, \quad \forall\, k \in \mathbb{K}, \tag{4.8}$$

$$x.y := x * y + (-1)^{|e|}B(f(x), y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \text{"."} \quad \text{est nul ailleurs}$$

$$\widetilde{B}|_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}} := B, \ \widetilde{B}(e^*, e) = 1 \text{ et } \widetilde{B} \quad \text{est nulle ailleurs.} \tag{4.9}$$

Si e est un élément homogène pair (resp. impair), on appelle la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ la double extension généralisée (resp. la double extension) de $(\mathcal{A}, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, a_0, k) (resp. f).

Maintenant soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire. Dans la proposition suivante, on montre comment on peut prolonger la structure symplectique paire ω sur la super-algèbre associative super-commutative symétrique

paire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ du Corollaire 4.2.2.

Proposition 4.6. *Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire et δ l'unique super-dérivation paire inversible super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ telle que $\omega(x, y) = B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Considérons $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ une double extension de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{K}e = \mathbb{K}e_{\bar{1}}$ (au moyen de f). S'il existe $c_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que*

$$[\delta, f] + \lambda f = L_{c_1}, \tag{4.10}$$

alors l'application linéaire Δ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par

$$\Delta(e^*) := \lambda e^*, \quad \Delta(e) := \beta e^* + c_1 - \lambda e, \quad \Delta(x) := \delta(x) + B(c_1, x)e^*, \ \forall x \in \mathcal{A}, \tag{4.11}$$

est une super-dérivation paire inversible super-antisymétrique de $\widetilde{\mathcal{A}}$. Par conséquent, la forme bilinéaire $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par $\widetilde{\omega}(x, y) := \widetilde{B}(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ est une forme symplectique paire sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. La super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension symétrique paire symplectique paire de $(\mathcal{A}, B, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, c_1, λ).

Preuve. Il est clair, par définition, que Δ est paire et inversible. Ensuite, à l'aide d'un calcul simple, on vérifie facilement que Δ est $\widetilde{B}-$super-antisymétrique. Il reste à montrer que Δ est une super-dérivation de $\widetilde{\mathcal{A}}$. En utilisant (4.10) et le fait que $B(f(x), y) = (-1)^{|x|}B(x, f(y))$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$, on déduit que $\Delta(ex) = \Delta(e)x + e\Delta(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}$. Finalement en utilisant (4.10), le fait que δ est une super-dérivation paire et B-super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ et que B est non-dégénérée et associative il s'ensuit que $\Delta(xy) = \Delta(x)y + (-1)^{|x|}x\Delta(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. D'où, on conclut que Δ est une super-dérivation de $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Proposition 4.7. *Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire et δ l'unique super-dérivation paire inversible super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ telle que $\omega(x, y) = B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Considérons $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ une double extension généralisée de $(\mathcal{A}, B)$ par l'algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul (au moyen de (f, a_0, k)). S'il existe $c_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que*

$$L_{c_0} = \lambda f + [\delta, f] \quad \text{et} \quad \delta(a_0) = 2f(c_0) - 2\lambda a_0, \tag{4.12}$$

alors l'endomorphisme Δ défini sur $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ par

$$\Delta(e^*) := \lambda e^*, \quad \Delta(e) := c_0 - \lambda e, \quad \Delta(x) := \delta(x) - B(c_0, x)e^*, \ \forall x \in \mathcal{A} \tag{4.13}$$

est une super-dérivation paire inversible et $\widetilde{B}$-super-antisymétrique. Par conséquent, la forme bilinéaire $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par $\widetilde{\omega}(x, y) := \widetilde{B}(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ est une forme symplectique paire sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. La super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension généralisée symétrique paire symplectique paire de $(\mathcal{A}, B, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(f, a_0, k, c_0, \lambda)$.

Preuve. La preuve est analogue à celle de la Proposition 4.6 ci-dessus.

Proposition 4.8. *Soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire. Alors, $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$, où $dim\mathcal{H} = dim\mathcal{A} - 2$, par une double extension généralisée par l'algèbre de dimension 1 à produit nul ou par une double extension par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.*

Preuve. D'après le Corollaire 4.2.1, on a $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$.

1er cas : Supposons que $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} = Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \neq \{0\}$. Soit Δ l'unique super-dérivation paire inversible super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ telle que $\omega(x, y) = B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Comme $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}}$ est stable par Δ et le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors il existe un vecteur non nul e^* de $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}}$ et un scalaire non nul λ tels que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Le fait que $\omega(e^*, e^*) = \lambda B(e^*, e^*)$ implique que $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal totalement isotrope relativement à B. D'après la non dégénérescence et la parité de B, il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $B(e^*, e) = 1$. Posons $\mathcal{W} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$. Comme $\mathcal{W}$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ non dégénéré, alors $\mathcal{A} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. De plus, on a $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non dégénérée. Comme $\mathcal{H} \subseteq I^{\perp}$ et $dimI^{\perp} := dim\mathcal{A} - 1 = dim\mathcal{H} + 1$, alors $I^{\perp} = \mathcal{H} \oplus I$ et il s'ensuit que pour tous $x, y \in \mathcal{W}$,

$$x.y = \alpha(x, y) + \beta(x, y)e^*, \qquad e.x = f(x) + \nu(x)e^* \quad \text{et} \quad e.e = ke^* + a_0 + k'e,$$

où $\alpha(x, y), f(x) \in \mathcal{H}$, $a_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\beta(x, y), \nu(x), k, k' \in \mathbb{K}$. D'après le Théorème 2.3.6 du chapitre 2, on a $(\mathcal{W}, \alpha, B_{\mathcal{W}})$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire. De plus, $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée de $(\mathcal{H}, \alpha, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, a_0, k). Maintenant, comme $\Delta(I) \subseteq I$ et Δ est B-super-antisymétrique, alors $\Delta(I^{\perp}) \subseteq I^{\perp}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\Delta(x) := \delta(x) + \gamma(x)e^* \quad \text{et} \quad \Delta(e) := \alpha e^* + c_0 + \beta e,$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Le fait que Δ est B-super-antisymétrique implique que δ est $B_{\mathcal{H}}$-superantisymétrique, $\alpha = 0$, $\beta = -\lambda$ et $\gamma(x) = -B_{\mathcal{H}}(c_0, x)$. Comme Δ est une super-dérivation paire, alors δ est une super-dérivation paire de $\mathcal{H}$, $\delta(a_0) = 2f(c_0) - 2\lambda a_0$ et $[\delta, f] + \lambda f = L_{c_0}$. D'où, δ définit une structure symplectique paire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ et la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension généralisée symétrique paire symplectique paire de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(f, a_0, k, c_0, \lambda)$.

2ème cas : Supposons que $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}} = Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$. Soit Δ l'unique super-dérivation inversible paire de $\mathcal{A}$ qui vérifie $B(x, y) = \omega(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Comme $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}}$ est stable par Δ et le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $e^* \in (Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tels que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Il est clair, d'après la parité de B, que l'idéal $I := \mathbb{K}e^*$ est totalement isotrope relativement à B. Ensuite, le fait que B est paire et non dégénérée implique qu'il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $B(e^*, e) \neq \{0\}$. Posons $B(e^*, e) = 1$. Puisque $e \notin I^{\perp}$ et $dimI^{\perp} = dim\mathcal{A} - 1$, on obtient que $\mathcal{A} := I^{\perp} \oplus \mathbb{K}e$. Considérons $\mathcal{W} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ et notons $\mathcal{H}$ son l'orthogonal relativement

à B. Comme $\mathcal{W}$ est un sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué non dégénéré de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{W}$ et $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non dégénérée. Comme $\mathcal{H} \subseteq I^{\perp}$ et $dimI^{\perp} := dim\mathcal{A} - 1 = dim\mathcal{H} + 1$, alors $I^{\perp} = \mathcal{H} \oplus I$ et il s'ensuit que pour tous $x, y \in \mathcal{W}$,

$$x.y = \alpha(x, y) + \beta(x, y)e^* \quad \text{et} \quad e.x = f(x) + \nu(x)e^*,$$

où $\alpha(x, y), f(x) \in \mathcal{H}$ et $\beta(x, y), \nu(x) \in \mathbb{K}$. D'après le Théorème 2.3.6 du chapitre 2, on a $(\mathcal{W}, \alpha, B_{\mathcal{W}})$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire. De plus, $\mathcal{A}$ est une double extension de $(\mathcal{H}, \alpha, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de f. Maintenant, comme $\Delta(I) \subseteq I$ et Δ est B-super-antisymétrique, on obtient que $\Delta(I^{\perp}) \subseteq I^{\perp}$. Par conséquent pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\Delta(x) := \delta(x) + \gamma(x)e^* \quad \text{et} \quad \Delta(e) := \beta e^* + c_1 + ke,$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_1 \in \mathcal{H}_{\bar{1}}$ et $\gamma(x), \beta, k \in \mathbb{K}$. Le fait que Δ est B-super-antisymétrique implique que δ est $B_{\mathcal{H}}$-super-antisymétrique, $k = -\lambda$ et $\gamma(x) = B_{\mathcal{H}}(c_1, x)$. Comme Δ est une super-dérivation paire, alors δ est une super-dérivation paire de $\mathcal{H}$ et $[\delta, f] + \lambda f = L_{c_1}$. D'où, δ définit une structure symplectique paire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ et la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension symétrique paire symplectique paire de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, c_1, λ).

D'après la proposition précédente, on donne dans le corollaire suivant une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques paires.

Corollaire 4.2.3. Toute super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire non nulle est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions généralisées par l'algèbre associative de dimension 1 à produit nul et/ou double extensions par la super-algèbre associative de dimension 1 et de partie paire nulle.

Supposons maintenant que $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire telle que $\mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$. Le fait que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative commutative nilpotente implique qu'il existe $x \in \mathcal{A}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tel que $x\mathcal{A}_{\bar{0}} = \mathcal{A}_{\bar{0}}x\ \{0\}$. Ensuite, en utilisant l'associativité de B, on conclut que $x \in (Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}}$. D'où, on déduit une autre description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques paires.

Corollaire 4.2.4. Toute super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire non-nulle est une algèbre associative commutative symétrique symplectique ou obtenue à partir d'une algèbre associative commutative symétrique symplectique par une série finie de double extensions par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

On conclut, d'après le Corollaire V.3.9 de [11] et le Corollaire 4.2.4 ci-dessus, que toute super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique paire non-nulle est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions par la super-algèbre de dimension 1 et

de partie paire nulle et/ou double extensions généralisées par l'algèbre de dimension 1 à produit nul.

4.2.1.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques impaires

Dans le but de donner une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques impaires, on commence par introduire la double extension généralisée d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire par la super-algèbre associative $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ à produit nul.

Proposition 4.9. *Soient $(\mathcal{A}, *, B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire. S'il existe $f_i \in End(\mathcal{A})_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$, tels que*

$$B(f_i(x), y) = (-1)^{i|x|} B(x, f_i(y)) \quad et \quad f_i \circ L_x = L_{f_i(x)},\ \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{4.14}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathcal{A}$ possède une structure de super-algèbre associative définie par

$$(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x).(\beta e_0^* + \beta' e_1^* + y) = x * y + B(f_0(x), y)e_0^* - B(f_1(x), y)e_1^*, \tag{4.15}$$

$\forall \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathcal{A}$. La super-algèbre $\mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathcal{A}$ obtenue est dite une extension centrale de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ au moyen de f_0 et f_1.

Preuve. A l'aide d'un calcul direct, on montre qu'a partir de la super-commutativité de $\mathcal{A}$ et l'équation $B(f_i(x), y) = (-1)^{i|x|} B(x, f_i(y))$ on a la super-commutativité du produit "." de $\mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathcal{A}$. De plus, on déduit l'associativité du produit "." de $\mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathcal{A}$ en utilisant l'associativité de $\mathcal{A}$ et le fait que $f_i \circ L_x = L_{f_i(x)},\ \forall x \in \mathcal{A}$.

Théorème 4.2.5. Soient $(\mathcal{A}, *, B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire et $f_i \in (End(\mathcal{A}))_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$, qui satisfont (4.14). S'il existe $a_i \in \mathcal{A}_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$ et $k \in \mathbb{K}$ tels que

$$f_i^2 = \frac{1}{2}(1 + (-1)^i) L_{a_0},\ \forall i \in \{0,1\}, \tag{4.16}$$

$$f_0 \circ f_1 = f_1 \circ f_0 = L_{a_1},\ f_0(a_1) = f_1(a_0),\ f_1(a_1) = 0, \tag{4.17}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{t} := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ possède une structure de super-algèbre associative super-commutative définie par

$$\begin{aligned}
(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x)(\beta e_0^* + \beta' e_1^* + y) &:= x * y + B(f_0(x), y)e_0^* - B(f_1(x), y)e_1^*, \\
\eta e_0(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x) &:= \eta\big[f_0(x) + B(a_0, x)e_0^* + B(x, a_1)e_1^*\big] \\
\eta' e_1(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x) &:= \eta'\big[f_1(x) + B(a_1, x)e_0^*\big] \\
(\eta e_0 + \eta' e_1)(\eta e_0 + \eta' e_1) &:= \eta^2\big[k e_0^* + a_0\big] + 2\eta\eta' a_1,
\end{aligned}$$

$\forall \alpha, \alpha', \beta, \beta', \eta, \eta' \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathcal{A}$. De plus, la forme bilinéaire γ définie sur $\mathfrak{t}$ par

$$\gamma|_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}} := B,\ \gamma(e_0^*, e_0) = 1 = \gamma(e_1^*, e_1),\ \text{et } \gamma \text{ est nulle ailleurs},$$

est une structure symétrique paire sur $\mathfrak{t}$. La super-algèbre associative super-commutative symétrique paire $(\mathfrak{t}, ., \gamma)$ est appelée la double extension généralisée de $\mathcal{A}$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ à produit nul au moyen de (f_i, a_i, k), où $i \in \{0, 1\}$.

Le Théorème 4.2.5 ci-dessus, peut être réécrit de la manière suivante.

Proposition 4.10. *Sous les même conditions du Théorème 4.2.5, la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire* $(\mathfrak{t}, \gamma)$ *coïncide avec une succession d'une double extension par la super-algèbre* $\mathbb{K}e_1$ *de partie paire nulle et d'une double extension généralisée par l'algèbre* $\mathbb{K}e_0$ *à produit nul ou inversement.*

Preuve. On montre que la super-algèbre $(\mathfrak{t}, \gamma)$, obtenue dans le Théorème 4.2.5, est une double extension par $\mathbb{K}e_1$ suivie d'une double extension généralisée par $\mathbb{K}e_0$. Comme l'endomorphisme impaire f_1 de $\mathcal{A}$ satisfait $f_1^2 = 0$, $L_{f_1(x)} = f_1 \circ L_x$ et $B(f_1(x), y) = (-1)^{|x|}B(x, f_1(y))$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, $y \in \mathcal{A}_{|y|}$, alors d'après le Corollaire 4.2.2 , on peut considérer $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ la double extension de $(\mathcal{A}, B)$ par $\mathbb{K}e_1$ au moyen de f_1. Maintenant sur $\widetilde{\mathcal{A}}$, on considère l'endomorphisme paire $\widetilde{f}_0$ défini par

$$\widetilde{f}_0(x) := f_0(x) + B(x, a_1)e_1^*,\quad \widetilde{f}_0(e_1) := a_1,\quad \widetilde{f}_0(e_1^*) := 0,\ \forall x \in \mathcal{A}.$$

En utilisant le fait que f_0 vérifie $f_0^2 = L_{a_0}$, $L_{f_0(x)} = f_0 \circ L_x$ et $f_0^* = f_0$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, on déduit que $\widetilde{f}_0$ vérifie aussi $\widetilde{f}_0^2 = L_{a_0}$, $L_{\widetilde{f}_0(x)} = \widetilde{f}_0 \circ L_x$ et $\widetilde{f}_0^* = \widetilde{f}_0$, $\forall x \in \widetilde{\mathcal{A}}_{|x|}$. Par conséquent, d'après la Proposition V.3.5 [11], on peut considérer $(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}, \widetilde{\widetilde{B}})$ la double extension généralisée de $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ par $\mathbb{K}e_0$ au moyen de $(\widetilde{f}_0, a_0, k)$, où $k \in \mathbb{K}$. D'après la Proposition V.3.5 de [11], le produit de la super-algèbre associative super-commutative $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$ est donné par

$$\begin{cases} e_0^* \in Ann(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}),\quad (\eta e_0)(\eta' e_0) = \eta\eta'(ke_0^* + a_0),\ \forall \eta, \eta' \in \mathbb{K}, \\ \eta e_0(\alpha e_1^* + x + \alpha' e_1) = \eta\big[\widetilde{f}_0(x) + \widetilde{B}(a_0, x)e_0^*\big] + \eta\alpha'\widetilde{f}_0(e_1),\ \forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathcal{A}, \\ (\alpha e_1^* + x + \alpha' e_1)(\beta e_1^* + y + \beta' e_1) = x.y + \widetilde{B}(\widetilde{f}_0(x), y)e_0^* + \alpha'\big[f_1(y) + \widetilde{B}(a_1, y)e_0^*\big], \end{cases}$$

$\forall \beta, \beta' \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathcal{A}$. De plus, sa structure symétrique paire $\widetilde{\widetilde{B}}$ est donnée par $\widetilde{\widetilde{B}}|_{\widetilde{\mathcal{A}}\times\widetilde{\mathcal{A}}} := \widetilde{B}$, $\widetilde{\widetilde{B}}(e_0^*, e_0) = 1$ et $\widetilde{\widetilde{B}}$ est nulle ailleurs. D'où, on conclut que la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire $(\mathfrak{t}, \gamma)$ coïncide avec la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire $(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}, \widetilde{\widetilde{B}})$.

Maintenant, on est dans la mesure d'introduire la notion de la double extension généralisée symétrique paire symplectique impaire d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire par la super-algèbre associative de dimension 2 à produit nul.

Proposition 4.11. *Soient* $(\mathcal{A}, B)$ *une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire et* $(\mathfrak{t}, \gamma)$ *une double extension généralisée de* $\mathcal{A}$ *par la super-algèbre* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *à produit*

nul au moyen de (f_0, f_1, a_0, a_1, k). *Supposons que* $\mathcal{A}$ *possède une structure symplectique impaire* ω *et notons* δ *l'unique super-dérivation impaire, inversible et* B*-super-antisymétrique de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\omega(x, y) = B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. *S'il existe* $c_i \in \mathcal{A}_{\bar{i}}$, *où* $i \in \{0, 1\}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *et* $\beta \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$
\begin{aligned}
L_{c_1} &= [\delta, f_0] - \lambda f_1, && (4.18)\\
L_{c_0} &= [\delta, f_1] + \lambda f_0, && (4.19)\\
\delta(a_1) &= -\lambda a_0 + f_0(c_0) - f_1(c_1), && (4.20)\\
\delta(a_0) &= 2\lambda a_1 + 2 f_0(c_1), && (4.21)\\
\lambda k &= B(c_0, a_0) + 2B(c_1, a_1), && (4.22)
\end{aligned}
$$

où L_{c_i} *désigne la multiplication gauche de* $\mathcal{A}$ *par* c_i, *avec* $i \in \{0, 1\}$, *alors l'endomorphisme* Δ *de* $\mathfrak{t}$ *défini par*

$$\Delta(e_0^*) := \lambda e_1^*, \quad \Delta(e_1^*) := \lambda e_0^* \quad \Delta(e_0) := \beta e_1^* + c_1 + \lambda e_1, \quad \Delta(e_1) := -\beta e_0^* + c_0 - \lambda e_0,$$

$$\Delta(x) := -B(c_1, x)e_0^* + \delta(x) - B(c_0, x)e_1^*, \forall x \in \mathcal{A},$$

est une super-dérivation impaire, inversible et γ*-super-antisymétrique de* $\mathfrak{t}$. *Par conséquent, la forme bilinéaire* Ω *sur* $\mathfrak{t}$ *définie par* $\Omega(x, y) := \gamma(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{t}$ *est une forme symplectique impaire sur* $\mathfrak{t}$. *Dans ce cas* $(\mathfrak{t}, \gamma, \Omega)$ *est appelée une double extension généralisée symétrique paire symplectique impaire de* $(\mathcal{A}, B, \omega)$ *par* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *au moyen de* (f_i, a_i, c_i, λ), *où* $i \in \{0, 1\}$.

Preuve. Par définition, il est clair que Δ est impaire et inversible. Ensuite à l'aide d'un calcul simple on vérifie que Δ est γ-super-antisymétrique. Il reste à montrer que

$$\Delta(xy) = \Delta(x)y + (-1)^{|x|}x\Delta(y), \forall x, y \in \mathfrak{t}.$$

En analysant chaque terme de l'égalité ci-dessus, on obtient que les équations (4.21) et (4.22) implique que $\Delta(e_0e_0) = 2e_0\Delta(e_0)$. Ensuite, les équations (4.20) et (4.22) implique que $\Delta(e_0e_1) = \Delta(e_0)e_1 + e_0\Delta(e_1)$. En utilisant les équations (4.18), (4.20) et (4.21) (resp. (4.19) et (4.20)) et le fait que B est non-dégénérée, il s'ensuit que $\Delta(e_0x) = \Delta(e_0)x + e_0\Delta(x)$ (resp. $\Delta(e_1x) = \Delta(e_1)x - e_1\Delta(x)$), $\forall x \in \mathcal{A}$. Finalement, comme δ est une super-dérivation impaire de $\mathcal{A}$ et les conditions (4.18) et (4.19) sont satisfaites, alors on a $\Delta(xy) = \Delta(x)y + (-1)^{|x|}x\Delta(y)$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}$. D'où le résultat.

Proposition 4.12. *Soit* $(\mathcal{A}, B)$ *une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire. Alors,* $\mathcal{A}$ *est obtenue à partir d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire par une double extension généralisée symétrique paire symplectique impaire par la super-algèbre associative de dimension 2 à produit nul.*

Preuve. Soit Δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ qui satisfait la condition (1.4). Le fait que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et que $Ann(\mathcal{A})$ est un idéal bilatère gradué non-nul de $\mathcal{A}$ stable par Δ, implique qu'il existe un scalaire non-nul λ et un

vecteur non-nul e^* de $Ann(\mathcal{A})$ telle que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Plus précisément, on a $e^* = e_0^* + e_1^*$ avec $e_0^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \backslash \{0\}$ et $e_1^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \backslash \{0\}$ tel que $\Delta(e_0^*) = \lambda e_1^*$ et $\Delta(e_1^*) = \lambda e_0^*$. En utilisant la condition (1.4), la super-antisymétrie de ω et la super-symétrie de B, on déduit facilement que $I := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ totalement isotrope relativement à B. D'après la parité et la non-dégénérescence de B, il existe $e_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que $B(e_0^*, e_0) \neq 0$ et $B(e_1^*, e_1) \neq 0$. On peut choisir $e_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que

$$B(e_0, e_0) = 0 \quad \text{et} \quad B(e_0^*, e_0) = 1 = B(e_1^*, e_1).$$

Maintenant, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := I \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$. Le fait que $\mathcal{W}$ est non-dégénéré implique que $\mathcal{A} := \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. En outre, on a aussi $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée. On vérifie que $J := I \oplus \mathcal{H}$, où J est l'orthogonal de I relativement à B. Par conséquent, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$x.y := x * y + \phi(x, y)e_0^* + \psi(x, y)e_1^*,$$

où $x * y \in \mathcal{H}$, et $\phi(x, y), \psi(x, y) \in \mathbb{K}$. En utilisant le fait que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative super-commutative, il s'ensuit que $(\mathcal{H}, *)$ est aussi une super-algèbre associative super-commutative. De plus, en appliquant l'associativité de B pour x, y et z trois éléments homogènes de $\mathcal{H}$, on déduit l'associativité de $B_{\mathcal{H}}$. D'où, $(\mathcal{H}, *, B_{\mathcal{H}})$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire. Maintenant, pour $x \in \mathcal{H}$, on a

$$e_0.x = f_0(x) + \eta(x)e_0^* + \eta'(x)e_1^* \quad \text{et} \quad e_1.x = f_1(x) + \overline{\eta}(x)e_0^* + \overline{\eta'}(x)e_1^*,$$

où $f_0(x), f_1(x) \in \mathcal{H}$ et $\eta(x), \eta'(x), \overline{\eta}(x), \overline{\eta'}(x) \in \mathbb{K}$. Finalement, on a

$$e_0.e_1 = le_1^* + a_1 + l'e_1 \quad \text{et} \quad e_1.e_1 = ke_0^* + a_0 + k'e_0,$$

où $a_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, $a_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $l, l', k, k' \in \mathbb{K}$. En appliquant l'associativité de B pour e_i, où $i \in \{0, 1\}$, et x, y deux éléments homogènes de $\mathcal{H}$, on déduit que $\phi(x, y) := B_{\mathcal{H}}(f_0(x), y)$, $\psi(x, y) := -B_{\mathcal{H}}(f_1(x), y)$ et $B_{\mathcal{H}}(f_i(x), y) = (-1)^{i|x|}B_{\mathcal{H}}(x, f_i(y))$, où $i \in \{0, 1\}$. Ensuite, en appliquant l'associativité de B pour les autres cas qui restes, on déduit que $\eta(x) = B_{\mathcal{H}}(a_0, x)$, $\overline{\eta'}(x) = 0$ et $\overline{\eta}(x) = (-1)^{|x|}\eta'(x) = B_{\mathcal{H}}(a_1, x)$. En outre, d'après l'associativité de ".", on déduit que $L_{f_i(x)} = f_i \circ L_x$, $(f_i)^2 = \frac{1}{2}(1 + (-1)^i)L_{a_0}$, $f_0 \circ f_1 = f_1 \circ f_0 = L_{a_1}$, $f_0(a_1) = f_1(a_0)$ et $f_1(a_1) = 0$. D'où, d'après le Théorème 4.2.5, $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension généralisée de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (f_i, a_i, k), où $i \in \{0, 1\}$. Maintenant, le fait que Δ est super-antisymétrique et $\Delta(I) \subseteq I$ implique que $\Delta(J) \subseteq J$. Par conséquent, on obtient que

$$\Delta(x) := \nu(x)e_0^* + \nu'(x)e_1^* + \delta(x), \quad \Delta(e_0) := me_1^* + c_1 + m'e_1 \ \text{ et } \ \Delta(e_1) := ne_0^* + c_0 + n'e_0, \forall x \in \mathcal{A},$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$, $c_1 \in \mathcal{H}_{\bar{1}}$ et $\nu(x), \nu'(x), m, m', n, n' \in \mathbb{K}$. Comme Δ est un endomorphisme impaire et inversible de $\mathcal{A}$, alors δ est un endomorphisme impaire et inversible de $\mathcal{H}$. D'après la super-antisymétrie se Δ, on déduit que δ est $B_{\mathcal{H}}$-super-antisymétrique, $\nu(x) = -B_{\mathcal{H}}(c_1, x)$, $\nu'(x) = -B_{\mathcal{H}}(c_0, x)$, $m' = -n' = \lambda$ et $m = -n$. Ensuite, le fait que Δ est une super-dérivation de $\mathcal{A}$, implique que δ est aussi une super-dérivation de $\mathcal{H}$ et que les conditions (4.18)-(4.22) sont

satisfaites. D'où, on conclut qu'il existe une structure symplectique impaire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ définie par $\omega_{\mathcal{H}}(x,y) := B_{\mathcal{H}}(\delta(x),y)$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$. En outre, la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire $(\mathcal{A},B,\omega)$ est une double extension généralisée symétrique paire symplectique impaire de $(\mathcal{H},B_{\mathcal{H}},\omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (f_i,a_i,c_i,λ,m).

Remarque 12. Les super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques impaires de dimension n, où $n \in \mathbb{N}^*$, existent à partir de $n \geq 4$. En outre, toute super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire de dimension 4 est obtenue à partir de $\{0\}$ par une double extension généralisée symétrique paire symplectique impaire par la super-algèbre associative de dimension 2 à produit nul. En effet, soit $(\mathcal{A} := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}f_1, ., B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire. Comme $Ann(\mathcal{A})_{\bar{0}} \neq \{0\}$ et $Ann(\mathcal{A})_{\bar{1}} \neq \{0\}$, on peut supposer que $e_0 \in Ann(\mathcal{A})_{\bar{0}}$ et $e_1 \in Ann(\mathcal{A})_{\bar{1}}$. De plus, le fait que $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre associative nilpotente implique que $f_0.f_0 = \alpha e_0$, où $\alpha \in \mathbb{K}$. En utilisant l'associativité de B, on obtient que $B(f_0.f_1, \mathcal{A}_{\bar{1}}) = \{0\}$. Par conséquent, en appliquant la non-dégénérescence de B, $f_0.f_1 = 0$. D'où, $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée symétrique paire symplectique impaire de $\{0\}$ par $\mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}f_1$ au moyen de $(0,0,0,\alpha,\alpha')$, où $\alpha' \in \mathbb{K}$.

Le corollaire suivant résulte de la Proposition 4.12 et la Remarque 12.

Corollaire 4.2.6. Toute super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions généralisées symétriques paires symplectiques impaires par la super-algèbre de dimension 2 à produit nul.

4.2.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques impaires avec des structures symplectiques homogènes

On commence, cette sous-section, par rappeler un cas particulier de la double extension généralisée d'une super-algèbre associative symétrique impaire introduite dans le chapitre précédent. C'est la double extension généralisée d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul. Cette notion de double extension va être très utile dans la suite.

Corollaire 4.2.7. Soient $(\mathcal{A},*,B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire et $\mathbb{K}e$ une super-algèbre associative de dimension 1 à produit nul. S'il existe $f \in End(\mathcal{A})_{|e|}$ et $a_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tels que

$$f^2 = \frac{1}{2}(1+(-1)^{|e|})L_{a_0}, \quad L_{f(x)} = f \circ L_x \quad \text{et} \quad f^*(x) = (-1)^{|e||x|}f(x),\ \forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, \tag{4.23}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ possède une structure de super-algèbre associative super-commutative définie pour x et y deux éléments homogènes de $\mathcal{A}$ par :

$$e^* \in Ann(\widetilde{\mathcal{A}}), \quad e.e = \frac{1}{2}(1+(-1)^{|e|})a_0, \quad e.x = f(x) + B(a_0,x)e^*, \quad x.y = x*y + B(f(x),y)e^*.$$

De plus la forme bilinéaire symétrique $\widetilde{B}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par

$$\widetilde{B}|_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}} := B, \quad \widetilde{B}(e^*, e) = 1 \quad \text{et} \quad B \ \text{ est nulle ailleurs},$$

est une structure symétrique impaire sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. La super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ est appelée la double extension généralisée (resp. la double extension) de $(\mathcal{A}, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, a_0) (resp. au moyen de f) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

4.2.2.1 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques impaires symplectiques impaires

Dans ce paragraphe, on donne une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques paires symplectiques impaires en utilisant uniquement la double extension symétrique impaire symplectique impaire par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle. Ceci dû au fait que $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} \neq \{0\}$ pour toute super-algèbre associative super-commutative symétrique paire symplectique impaire $(\mathcal{A}, B, \omega)$.

Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire et $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ une double extension de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle. Dans la proposition suivante, on montre comment on peut prolonger la structure symplectique impaire ω en une structure symplectique impaire $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Proposition 4.13. *Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire et $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ une double extension de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e := \mathbb{K}e_{\bar{1}}$ (au moyen de f). Supposons que $\mathcal{A}$ possède une structure symplectique impaire ω et notons δ l'unique super-dérivation paire, inversible et B-super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ telle que $\omega(x, y) = B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. S'il existe $c_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que*

$$[\delta, f] + \lambda f = L_{c_1}, \tag{4.24}$$

alors l'endomorphisme Δ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ défini par

$$\Delta(e^*) := \lambda e^*, \quad \Delta(e) := c_1 - \lambda e, \quad \Delta(x) := \delta(x) - B(c_1, x)e^*, \forall x \in \mathcal{A} \tag{4.25}$$

est une super-dérivation paire, inversible et $\widetilde{B}$-super-antisymétrique de $\widetilde{\mathcal{A}}$. Par conséquent, la forme bilinéaire $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{\mathcal{A}}$ définie par $\widetilde{\omega}(x, y) := \widetilde{B}(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ est une forme symplectique impaire sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. Dans ce cas $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension symétrique impaire symplectique impaire de $(\mathcal{A}, B, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, c_1, λ).

Proposition 4.14. *Soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire. Alors, $\mathcal{A}$ est une double extension symétrique impaire symplectique impaire d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire par la super-algèbre de dimension 1 de partie paire nulle.*

Preuve. Soit Δ l'unique super-dérivation paire, B-super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ qui satisfait la condition (1.4). Le fait que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et que $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}}$ est un idéal bilatère gradué non-nul de $\mathcal{A}$ stable par Δ implique qu'il existe un scalaire non-nul λ et un vecteur non-nul e^* de $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tels que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Il est clair, d'après la parité de B, que $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal bilatère gradué totalement isotrope. D'après la non-dégénérescence de B, il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $B(e^*, e) \neq \{0\}$. Posons $B(e^*, e) = 1$ et considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$. Comme $\mathcal{W}$ est non-dégénéré, on obtient que $\mathcal{A} := \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. En outre, il vient que $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée. On vérifie facilement que $\mathcal{A} := J \oplus \mathbb{K}e$ et $J := I \oplus \mathcal{H}$, où J est l'orthogonal de I relativement à B. Par conséquent, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$x.y := x * y + \phi(x, y)e^*,$$

où $x * y \in \mathcal{H}$, et $\phi(x, y) \in \mathbb{K}$. Comme $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative super-commutative, il s'ensuit que $(\mathcal{H}, *)$ est aussi une super-algèbre associative super-commutative. De plus, en appliquant l'associativité de B pour x, y et z trois éléments homogènes de $\mathcal{H}$, on déduit l'associativité de $B_{\mathcal{H}}$. D'où, $(\mathcal{H}, *, B_{\mathcal{H}})$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire. Maintenant, pour $x \in \mathcal{H}$, on a

$$e.x = f(x) + \eta(x)e^*,$$

où $f(x) \in \mathcal{H}$ et $\eta(x) \in \mathbb{K}$. En appliquant le Théorème 3.4.8, on déduit que $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de f. Plus explicitement, $\mathcal{A} := P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ avec $J = P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{H}$. Maintenant, le fait que Δ est B-super-antisymétrique et $\Delta(I) \subseteq I$ implique que $\Delta(J) \subseteq J$. Par conséquent, on obtient que

$$\Delta(x) := \nu(x)e^* + \delta(x) \quad \text{et} \quad \Delta(e) := me^* + c_1 + m'e, \ \forall x \in \mathcal{A},$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_1 \in \mathcal{H}_{\bar{1}}$ et $\nu(x), m, m' \in \mathbb{K}$. Comme Δ est un endomorphisme paire et inversible de $\mathcal{A}$, alors δ est un endomorphisme paire et inversible de $\mathcal{H}$. D'après la super-antisymétrie de Δ, on déduit que δ est $B_{\mathcal{H}}$-super-antisymétrique, $\nu(x) = -B_{\mathcal{H}}(c_1, x)$, $m' = -\lambda$ et $m = 0$. Ensuite, le fait que Δ est une super-dérivation de $\mathcal{A}$ implique que δ est une super-dérivation de $\mathcal{H}$ et que la condition (4.24) est satisfaite. D'où, il existe une structure symplectique impaire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ définie par $\omega_{\mathcal{H}}(x, y) := B_{\mathcal{H}}(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$. En outre, la super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension généralisée symétrique impaire symplectique impaire de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (f, c_1, λ).

D'après l'assertion (ii) du Corollaire 4.2.1, on déduit que toute super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire de dimension 2 est à produit nul. Par conséquent, toute super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une double extension symétrique impaire symplectique impaire par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

On donne dans le corollaire suivant une description inductive des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques impaires symplectiques impaires.

Corollaire 4.2.8. Toute super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique impaire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions symétriques impaires symplectiques impaires par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

4.2.2.2 Super-algèbres associatives super-commutatives symétriques impaires symplectiques paires

Ce paragraphe est consacré à l'introduction de la notion de la double extension généralisée symétrique impaire symplectique paire d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique paire par la super-algèbre associative de dimension 2 à produit nul.

Proposition 4.15. *Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire et $f_i \in (End(\mathcal{A}))_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$, tels que*

$$f_i^*(x) = (-1)^{i|x|} f_i(x) \quad \text{et} \quad L_{f_i(x)} = f_i \circ L_x, \quad \forall x \in \mathcal{A}. \tag{4.26}$$

Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $P(\mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*) \oplus \mathcal{A}$ muni du produit "." défini par

$$(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x).(\beta e_0^* + \beta' e_1^* + y) = x * y + B(f_0(x), y)e_1^* + B(f_1(x), y)e_0^*,$$

$\forall x, y \in \mathcal{A}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, où $i \in \{0,1\}$ est une super-algèbre associative super-commutative appelée l'extension centrale de $\mathcal{A}$ par $P(\mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*)$ au moyen de f_0 et f_1.

Théorème 4.2.9. Soient $(\mathcal{A}, *, B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire et $f_i \in (End(\mathcal{A}))_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$, tels que les conditions (4.26) sont satisfaites. S'il existe $a_i \in \mathcal{A}_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$, et $k \in \mathbb{K}$ tels que les conditions (4.16) et (4.17) sont satisfaites, alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{t} := P((\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1)^*) \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ possède une structure de super-algèbre associative super-commutative définie par

$$\begin{aligned}
(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x)(\beta e_0^* + \beta' e_1^* + y) &:= x * y + B(f_0(x), y)e_1^* + B(f_1(x), y)e_0^*, \\
\eta e_0(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x) &:= \eta\big[f_0(x) + B(x, a_1)e_0^* + B(a_0, x)e_1^*\big], \\
\eta' e_1(\alpha e_0^* + \alpha' e_1^* + x) &:= \eta'\big[f_1(x) + B(a_1, x)e_1^*\big], \\
(\eta e_0 + \eta' e_1)(\eta e_0 + \eta' e_1) &:= \eta^2\big[k e_0^* + a_0\big] + 2\eta\eta'\big[k e_1^* + a_1\big],
\end{aligned}$$

$\forall \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \mathcal{A}$. De plus, la forme bilinéaire γ définie sur $\mathfrak{t}$ par

$$\gamma|_{\mathcal{A}\times\mathcal{A}} := B, \ \gamma(e_0^*, e_0) = 1 = \gamma(e_1^*, e_1), \ \text{et } \gamma \text{ est nulle ailleurs},$$

est une structure symétrique impaire sur $\mathfrak{t}$. La super-algèbre $(\mathfrak{t}, \gamma)$ est appelée la double extension généralisée de $\mathcal{A}$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ à produit nul au moyen de (f_i, a_i, k), où $i \in \{0,1\}$.

Le Théorème 4.2.9 ci-dessus, peut être réécrit de la manière suivante.

Proposition 4.16. *La double extension généralisée* $(\mathfrak{t}, \gamma)$ *d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire* $(\mathcal{A}, *, B)$ *par la super-algèbre* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *à produit nul définie dans le Théorème 4.2.9 coïncide avec une succession d'une double extension par la super-algèbre* $\mathbb{K}e_1$ *de partie paire nulle et d'une double extension généralisée par l'algèbre* $\mathbb{K}e_0$ *à produit nul ou inversement.*

Preuve. On montre que la super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire $(\mathfrak{t}, \gamma)$ coïncide avec une double extension par la super-algèbre $\mathbb{K}e_1$ de partie paire nulle suivie d'une double extension généralisée par l'algèbre $\mathbb{K}e_0$ à produit nul. D'après les hypothèses du Théorème 4.2.9, on a $f_1^*(x) = (-1)^{|x|} f_1(x)$, $L_{f_1(x)} = f_1 \circ L_x$ et $(f_1)^2 = 0$, $\forall x \in \mathcal{A}$. D'où, d'après le Corollaire 4.2.7, on peut considérer $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ la double extension de $(\mathcal{A}, B)$ par $\mathbb{K}e_1$ au moyen de f_1. On pose $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e_1$ (c'est à dire $P(\mathbb{K}e_1^*) := \mathbb{K}e_0^*$). Ensuite, sur $\widetilde{\mathcal{A}}$, on considère l'endomorphisme paire $\widetilde{f}_0$ défini par :

$$\widetilde{f}_0(x) := f_0(x) + B(x, a_1)e_0^*, \quad \widetilde{f}_0(e_1) := a_1, \quad \widetilde{f}_0(e_0^*) := 0, \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

On vérifie facilement que l'endomorphisme $\widetilde{f}_0$ satisfait $\widetilde{f}_0^* = \widetilde{f}_0$, $\widetilde{f}_0 \circ L_x = L_{\widetilde{f}_0(x)}$ et $\widetilde{f}_0^2 = L_{a_0}$. Par conséquent, en appliquant de nouveau le Corollaire 4.2.7, on peut considérer $(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}, \widetilde{\widetilde{B}})$ la double extension généralisée de $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ par $\mathbb{K}e_0$ au moyen de $(\widetilde{f}_0, a_0)$. Dans ce cas, on pose $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}} := \mathbb{K}e_1^* \oplus \widetilde{\mathcal{A}} \oplus \mathbb{K}e_0$ (c'est à dire $P(\mathbb{K}e_0^*) := \mathbb{K}e_1^*$). Selon le corollaire 4.2.7, le produit "." de la super-algèbre $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$ est donné par

$$\begin{cases} e_1^* \in Ann(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}), \quad (\eta e_0)(\eta' e_0) = \eta\eta'(ke_0^* + a_0), \forall \eta, \eta' \in \mathbb{K}, \\ \eta e_0.(\alpha e_0^* + x + \alpha' e_1) = \eta\big[\widetilde{f}_0(x) + B(a_0, x)e_1^*\big] + \eta\alpha'\big[\widetilde{f}_0(e_1) + ke_1^*\big], \\ (\alpha e_0^* + x + \alpha' e_1).(\beta e_0^* + y + \beta' e_1) = x * y + \widetilde{B}(\widetilde{f}_0(x), y)e_1^* + \alpha'\big[f_1(y) + \widetilde{B}(a_1, y)e_1^*\big], \end{cases}$$

$\forall x, y \in \mathcal{A}$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. En outre, la forme bilinéaire $\widetilde{\widetilde{B}}$ est définie par $\widetilde{\widetilde{B}}|_{\widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}}} := \widetilde{B}$, $\widetilde{\widetilde{B}}(e_1^*, e_0) = 1$ et $\widetilde{\widetilde{B}}$ est nulle ailleurs. D'où, on conclut que $(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}, \widetilde{\widetilde{B}})$ coïncide avec la super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire $(\mathfrak{t}, \gamma)$.

Maintenant, on est dans la mesure de définir la double extension généralisée symétrique impaire symplectique paire d'une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique paire par la super-algèbre associative de dimension 2 à produit nul.

Proposition 4.17. *Soient* $(\mathcal{A}, B)$ *une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire et* $(\mathfrak{t}, \gamma)$ *une double extension généralisée de* $\mathcal{A}$ *par la super-algèbre* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *à produit nul au moyen de* (f_i, a_i, k)*, où* $i \in \{0, 1\}$*. Supposons que* $\mathcal{A}$ *possède une structure symplectique paire* ω *et notons* δ *l'unique super-dérivation impaire, inversible et super-antisymétrique de* $\mathcal{A}$

telle que $\omega(x,y) = B(\delta(x),y)$, $\forall x,y \in \mathcal{A}$. *S'il existe* $c_i \in \mathcal{A}_{\bar{i}}$, $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ *et* $\beta \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$\begin{aligned}
\lambda k &= B(a_0,c_1), && (4.27)\\
L_{c_1} &= [\delta, f_0] + \lambda f_1, && (4.28)\\
L_{c_0} &= [\delta, f_1] - \lambda f_0, && (4.29)\\
\delta(a_0) &= -2\lambda a_1 + 2f_0(c_1), && (4.30)\\
\delta(a_1) &= +\lambda a_0 + f_0(c_0) - f_1(c_1), && (4.31)
\end{aligned}$$

alors, l'endomorphisme Δ *de* $\mathfrak{t}$ *défini par :*

$$\Delta(e_0^*) := \lambda e_1^*, \quad \Delta(e_1^*) := \lambda e_0^*, \quad \Delta(e_0) := c_1 - \lambda e_1, \quad \Delta(e_1) := \beta e_0^* + c_0 + \lambda e_0,$$

$$\Delta(x) := \delta(x) + B(c_0,x)e_0^* - B(c_1,x)e_1^*, \forall x \in \mathcal{A}$$

est une super-dérivation impaire, inversible et γ*-super-antisymétrique de* $\mathfrak{t}$. *Par conséquent, la forme bilinéaire* Ω *sur* $\mathfrak{t}$ *définie par* $\Omega(x,y) := \gamma(\Delta(x),y)$, $\forall x,y \in \mathfrak{t}$ *est une forme symplectique paire sur* $\mathfrak{t}$. *Dans ce cas,* $(\mathfrak{t},\gamma,\Omega)$ *est appelée la double extension généralisée symétrique impaire symplectique paire de* $(\mathcal{A},B,\omega)$ *par* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *au moyen de* (f_i,a_i,c_i,λ), *où* $i \in \{0,1\}$.

Proposition 4.18. *Toute super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique paire est une double extension généralisée symétrique impaire symplectique paire d'une super-algèbre de même type par la super-algèbre associative de dimension 2 à produit nul.*

Preuve. Soit Δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ qui satisfait la condition (1.4). Le fait que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et que $Ann(\mathcal{A})$ est un idéal bilatère gradué non-nul de $\mathcal{A}$ stable par Δ implique qu'il existe un scalaire non-nul λ et un vecteur non-nul e^* de $Ann(\mathcal{A})$ telle que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Plus précisément, on a $e^* = e_0^* + e_1^*$ avec $e_0^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \setminus \{0\}$ et $e_1^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tel que $\Delta(e_0^*) = \lambda e_1^*$ et $\Delta(e_1^*) = \lambda e_0^*$. En utilisant la condition (1.4) et la super-symétrie de B, on déduit que $I := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ totalement isotrope relativement à B. D'autre part, d'après la parité et la non-dégénérescence de B, il existe $e_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que $B(e_0^*,e_1) \neq 0$ et $B(e_1^*,e_0) \neq 0$. On peut choisir $e_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que

$$B(e_0,e_1) = 0 \quad \text{et} \quad B(e_0^*,e_1) = 1 = B(e_1^*,e_0).$$

Maintenant, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := I \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$. Le fait que $\mathcal{W}$ est non-dégénéré, implique que $\mathcal{A} := \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. En outre, on a $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée. On vérifie facilement que $J := I \oplus \mathcal{H}$, où J est l'orthogonal de I relativement à B. Par conséquent, pour $x,y \in \mathcal{H}$, on a :

$$x.y := x * y + \phi(x,y)e_0^* + \psi(x,y)e_1^*,$$

où $x * y \in \mathcal{H}$, et $\phi(x,y), \psi(x,y) \in \mathbb{K}$. En utilisant le fait que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre associative super-commutative, il s'ensuit que $(\mathcal{H}, *)$ est aussi une super-algèbre associative super-commutative. De plus, en appliquant l'associativité de B pour x, y et z trois éléments homogènes de $\mathcal{H}$, on déduit l'associativité de $B_{\mathcal{H}}$. Par conséquent, $(\mathcal{H}, *, B_{\mathcal{H}})$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire. Maintenant, pour $x \in \mathcal{H}$, on a

$$e_0.x = f_0(x) + \eta(x)e_0^* + \eta'(x)e_1^* \quad \text{et} \quad e_1.x = f_1(x) + \overline{\eta}(x)e_0^* + \overline{\eta'}(x)e_1^*,$$

où $f_0(x), f_1(x) \in \mathcal{H}$ et $\eta(x), \eta'(x), \overline{\eta}(x), \overline{\eta'}(x) \in \mathbb{K}$. Finalement, on a

$$e_0.e_1 = le_1^* + a_1 + l'e_1 \quad \text{et} \quad e_0.e_0 = ke_0^* + a_0 + k'e_0,$$

où $a_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$, $a_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ et $l, l', k, k' \in \mathbb{K}$. En appliquant l'associativité de B pour e_i, où $i \in \{0,1\}$, et x, y deux éléments homogènes de $\mathcal{H}$, on déduit que $\phi(x,y) := B_{\mathcal{H}}(f_1(x), y)$, $\psi(x,y) := B_{\mathcal{H}}(f_0(x), y)$ et $f_i^*(x) = (-1)^{i|x|} f_i(x)$ où $i \in \{0,1\}$. Ensuite, en appliquant l'associativité de B pour les autres cas qui restes, on déduit que $\overline{\eta'}(x) = (-1)^{|x|}\eta(x) = B_{\mathcal{H}}(a_1, x)$, $\eta'(x) = B_{\mathcal{H}}(a_0, x)$, $\overline{\eta}(x) = 0$, $l = k$ et $l' = k' = 0$. En outre, d'après l'associativité de ".", on a $L_{f_i(x)} = f_i \circ L_x$, $(f_i)^2 = \frac{1}{2}(1 + (-1)^i)L_{a_0}$, $f_0 \circ f_1 = f_1 \circ f_0 = L_{a_1}$, $f_0(a_1) = f_1(a_0)$ et $f_1(a_1) = 0$. D'où on, d'après le Théorème 4.2.9, $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension généralisée de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (f_i, a_i, k), où $i \in \{0,1\}$. Maintenant, le fait que Δ est B-super-antisymétrique et que $\Delta(I) \subseteq I$ implique que $\Delta(J) \subseteq J$. Par conséquent, on obtient pour $x \in \mathcal{H}$ que

$$\Delta(x) := \nu(x)e_0^* + \nu'(x)e_1^* + \delta(x), \quad \Delta(e_0) := me_1^* + c_1 + m'e_1 \quad \text{et} \quad \Delta(e_1) := ne_0^* + c_0 + n'e_0,$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$, $c_1 \in \mathcal{H}_{\bar{1}}$ et $\nu(x), \nu'(x), m, m', n, n' \in \mathbb{K}$. Comme Δ est un endomorphisme impaire et inversible de $\mathcal{A}$, alors δ est un endomorphisme impaire et inversible de $\mathcal{H}$. D'après la super-antisymétrie de Δ, on a δ est $B_{\mathcal{H}}$-super-antisymétrique, $\nu(x) = B_{\mathcal{H}}(c_0, x)$, $\nu'(x) = -B_{\mathcal{H}}(c_1, x)$ $n' = -m' = \lambda$ et $m = 0$. Ensuite, le fait que Δ est une super-dérivation de $\mathcal{A}$, implique que δ est aussi une super-dérivation de $\mathcal{H}$ et que les conditions (4.27)-(4.31) sont satisfaites. D'où, il existe une structure symplectique paire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ définie par $\omega_{\mathcal{H}}(x,y) := B_{\mathcal{H}}(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$. En outre, la super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique paire $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension généralisée symétrique impaire symplectique paire de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (f_i, a_i, c_i, λ).

Remarque 13. Les super-algèbres associatives super-commutatives symétriques impaires symplectiques paires de dimension n, où $n \in \mathbb{N}^*$, existent à partir de $n \geq 4$. De plus, toute super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique paire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une double extension généralisée symétrique impaire symplectique paire par la super-algèbre associative de dimension 2 à produit nul. En effet, soit $(\mathcal{A} := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}f_1, ., B, \omega)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique paire. D'après l'asertion (iii) du Corollaire 4.2.1 , on peut supposer que $e = e_0 + e_1 \in Ann(\mathcal{A})$. Comme $\mathcal{A}_{\bar{0}}$ est une algèbre nilpotente, alors on a $f_0.f_0 = \alpha e_0$, où $\alpha \in \mathbb{K}$. Le fait que $\omega(f_0, f_0.f_0) = 0$ et que ω et non-dégénérée implique que $\alpha = 0$. Maintenant supposons que $f_0.f_1 = \beta e_1 + \gamma f_1$, où $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$. D'après l'associativité du produit ".", on a $f_0(f_0.f_1) = 0$ et il s'ensuit que $\gamma = 0$. On conclut que $\mathcal{A}$ est une double extension généralisée symétrique impaire symplectique paire

de $\{0\}$ par $\mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}f_1$ au moyen de $(0, 0, 0, \alpha)$.

Corollaire 4.2.10. Toute super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire symplectique paire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions généralisées symétriques impaires symplectiques paires par la super-algèbre de dimension 2 à produit nul.

Chapitre 5

Super-algèbres de Lie avec des structures homogènes

Ce chapitre est consacré à l'étude des des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes. Les résultats de ce chapitre seront utilisés dans le chapitre 6 pour comprendre la structure des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes.

Ce chapitre est constitué de trois sections. Dans la première section on montre que les seules super-algèbres de Lie qui possèdent simultanément des structures quadratiques paires et des structures quadratiques impaires sont les super-algèbres de Lie abéliennes. Ensuite, on donne des exemples qui montrent qu'il existe des super-algèbres de Lie non-abéliennes qui possèdent à la fois des structures symplectiques paires et des structures symplectiques impaires. Dans la deuxième section, on généralise au cas des super-algèbres de Lie symplectiques paires la double extension symplectique introduite dans [4] dans le cas des algèbres de Lie symplectiques. Ensuite, on introduit la double extension (généralisée) symplectique impaire des super-algèbres de Lie symplectiques impaires dans le but de donner une description inductive des super-algèbres de Lie symplectiques homogènes nilpotentes. Finalement, dans la troixième section on complète l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes commencée dans [12].

5.1 La compatibilité et l'incompatibilité de certaines structures homogènes

En commençant l'étude des super-algèbres de Lie avec des structures homogènes une question naturelle se pose : Qu'en est-il de la compatibilité de ses structures ? Une réponse à cette question dans le cas des super-algèbres de Lie parfaites telles que leurs parties paires sont des algèbres de

Lie réductives a été donnée dans [2] . Dans la proposition suivante, on améliore ce résultat de [2] .

Proposition 5.1. *Soit* $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}})$ *une super-algèbre de Lie.* $\mathfrak{g}$ *possède simultanément une structure quadratique paire et une structure quadratique impaire si et seulement si* $\mathfrak{g}$ *est une super-algèbre de Lie abélienne telle que* $dim\mathfrak{g}_{\bar{0}} = dim\mathfrak{g}_{\bar{1}}$.

Preuve. Supposons que $\mathfrak{g}$ est munie simultanément d'une structure quadratique paire B et d'une structure quadratique impaire $\bar{B}$ et montrons que $\mathfrak{g}$ est abélienne. Le fait que B et $\bar{B}$ sont deux formes bilinéaires invariantes et non-dégénérées implique que les deux applications suivantes $\phi : \mathfrak{g}_{\bar{0}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$ et $\psi : \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$ définies respectivement par $\phi(x) = B(x, .)$ et $\psi(y) = \bar{B}(y, .)$, $\forall x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ sont deux isomorphismes de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-modules. Par conséquent, $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ sont isomorphes en tant que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-modules au moyen de $\Phi := \psi^{-1} \circ \phi$, où ψ^{-1} est la fonction réciproque de ψ. Comme $(\mathfrak{g}_{\bar{1}}, B_{\bar{1}} := B|_{\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}}})$ est un espace vectoriel symplectique tel que $B_{\bar{1}}$ est $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-invariante, alors la forme bilinéaire

$$T : \mathfrak{g}_{\bar{0}} \times \mathfrak{g}_{\bar{0}} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ définie par } \quad T(x, y) := B_{\bar{1}}(\Phi(x), \Phi(y)),$$

est anti-symétrique, invariante et non-dégénérée. Par conséquent, pour $x, y, z \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} T([x, y], z) &= T(x, [y, z]) = -T(x, [z, y]) = -T([x, z], y) \\ &= T([z, x], y) = T(z, [x, y]) = -T([x, y], z). \end{aligned}$$

D'où, d'après la non-dégénérescence de $B_{\bar{1}}$, on obtient que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie abélienne. Ensuite, en utilisant le fait que $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}] = \{0\}$ et que $\bar{B}$ est invariante et non-dégénérée, on déduit que $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \{0\}$. Finalement, en utilisant le fait que $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \{0\}$ et que B est invariante et non-dégénérée, il s'ensuit que $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \{0\}$. Par conséquent, $\mathfrak{g}$ est une super-algèbre de Lie abélienne. Le fait que $\bar{B}$ est impaire et non-dégénérée implique que $dim\mathfrak{g}_{\bar{0}} = dim\mathfrak{g}_{\bar{1}}$.

Remarque 14. Une super-algèbre de Lie quadratique homogène peut avoir simultanément une structure symplectique paire et une structure symplectique impaire. En effet, considérons $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. quadratique impaire) symplectique impaire (resp. symplectique paire). D'après la Proposition 1.4, il existe une super-dérivation Δ impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{g}$ qui satisfait l'équation (1.4). Il est clair que $\tilde{\Delta} := [\Delta, \Delta]$ est une super-dérivation paire, super-anisymétrique et inversible de $\mathfrak{g}$. Donc, en appliquant de nouveau la Proposition 1.4, $\mathfrak{g}$ possède aussi une structure symplectique paire (resp. symplectique impaire).

Les algèbres de Lie symplectiques et les algèbres de Lie quadratiques symplectiques ont été étudiées dans [4] et [10] où plusieurs exemples de ces algèbres ont été donnés. Dans le but d'étudier les super-algèbres de Lie symplectiques homogènes et les super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes, dans la suite, on donne quelques exemples intéressants de ces super-algèbres. Parmi les exemples qu'on va les donnés, il existe des super-algèbres de Lie non-abélienne qui possèdent simultanément une structure symplectique paire et une structure

symplectique impaire. Ce phénomène est différent aux super-algèbres de Lie quadratiques homogènes. En effet, il a été montré dans la Proposition 5.1 que seules les super-algèbres de Lie abéliennes qui possèdent à la fois une structure quadratique paire et une structure quadratique impaire.

Exemple 5.1.1. Il est clair que la super-algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ de dimension 1 et de partie paire nulle est une super-algèbre de Lie symplectique paire.

Exemple 5.1.2. On considère la super-algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tel que $\mathfrak{g}_{\bar{0}} := \mathbb{K}e_0$, $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$ et $[e_0, e_1] = e_1$. Il est clair que la forme bilinéaire super-antisymétrique ω sur $\mathfrak{g}$ définie par $\omega(e_0, e_1) = 1$ et ω est nulle ailleurs est une structure symplectique impaire sur $\mathfrak{g}$. Il est facile de voir que toute super-algèbre de Lie symplectique impaire de dimension 2 est abélienne ou isomorphe à $\mathfrak{g}$.

Exemple 5.1.3. Soit $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire. Les super-algèbres associatives de dimension 2 données dans le chapitre 3 sont des exemples de ce type de super-algèbres. Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \otimes \mathcal{A}$, où $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}}\omega)$ est une algèbre de Lie symplectique, possède une structure de super-algèbre de Lie définie par

$$[x \otimes a, y \otimes b] := [x, y]_{\mathfrak{h}} \otimes a.b, \forall x, y \in \mathfrak{h},\ a, b \in \mathcal{A}. \tag{5.1}$$

De plus, la forme bilinéaire super-antisymétrique Ω sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$\Omega(x \otimes a, y \otimes b) := \omega(x, y)B(a, b),\ \forall x, y \in \mathfrak{h} \text{ et } a, b \in \mathcal{A}$$

est une structure symplectique impaire sur $\mathfrak{g}$.

Pour donner d'autres exemples intéressants de super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes, on rappelle les notions suivantes.

Définition 35. Soit $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ une super-algèbres de Lie.

(i) La double extension triviale paire de $\mathfrak{h}$ (c'est à dire la double extension de $\{0\}$ par $\mathfrak{h}$) est la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*, [,]_1, B_1)$ telle que pour $(x + f) \in (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)_{|x|}$ et $(x' + f') \in (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)_{|x'|}$ on a,

$$[x + f, x' + f']_1 := [x, y]_{\mathfrak{h}} - (-1)^{|x||x'|} f' \circ ad_x + f \circ ad_{x'}, \tag{5.2}$$

$$B_1(x + f, x' + f') := f(x') + (-1)^{|x||x'|} f'(x). \tag{5.3}$$

(ii) La double extension triviale impaire de $\mathfrak{h}$ (c'est à dire la double extension impaire de $\{0\}$ par $\mathfrak{h}$) est la super-algèbre de Lie quadratique impaire $(\mathfrak{h} \oplus P(\mathfrak{h}^*), [,]_2, B_2)$ telle que $[,]_2$ est égale à $[,]_1$ et le produit scalaire impaire invariant est donné pour $(x + f) \in (\mathfrak{h} \oplus P(\mathfrak{h}^*))_{|x|}$, et $(x' + f') \in (\mathfrak{h} \oplus P(\mathfrak{h}^*))_{|x'|}$ par

$$B_2(x + f, x' + f') := f(x') + f'(x). \tag{5.4}$$

Lemme 5.1.4. ([15]) Soit $\mathfrak{h}$ une super-algèbre de Lie et $\mathfrak{g}$ la double extension triviale (paire ou impaire) de $\mathfrak{h}$. Soient D une super-dérivation de $\mathfrak{h}$ inversible et homogène de degré d et D^* l'endomorphisme de $\mathfrak{h}^*$ homogène de degré d défini par $D^*(f)(x) := -(-1)^{\alpha d} f \circ D(x)$, $\forall f \in \mathfrak{h}^*_\alpha$ et $x \in \mathfrak{h}$. Alors, l'application linéaire $\widetilde{D}$ de $\mathfrak{g}$ définie par

$$\widetilde{D}(x+f) := D(x) + D^*(f), \quad \forall (x+f) \in \mathfrak{g}_{|x|} \tag{5.5}$$

est une super-dérivation de $\mathfrak{g}$ inversible, homogène de degré d et super-antisymétrique.

En appliquant la Remarque 14, on déduit que les super-algèbres de Lie non-abéliennes des deux exemples suivants possèdent simultanément des structures symplectiques paires et des structures symplectiques impaires.

Exemple 5.1.5. Considérons la super-algèbre de Lie 2-nilpotente $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{L}_{\bar{1}}$ telle que $\mathcal{L}_{\bar{0}} := \mathbb{K}l_0 \oplus \mathbb{K}k_0$, $\mathcal{L}_{\bar{1}} := \mathbb{K}l_1 \oplus \mathbb{K}k_1$, $[l_0, l_1] = k_1$, $[l_1, l_1] = k_0$ et $[,]$ est nul ailleurs. Sur $\mathcal{L}$, on définit les deux applications linéaires D et Δ respectivement par

$$D(l_i) = l_i, \quad D(k_i) = 2k_i, \quad \text{où } i \in \{0, 1\},$$

$$\Delta(l_0) = l_1, \quad \Delta(l_1) = l_0, \quad \Delta(k_0) = 2k_1, \quad \Delta(k_1) = k_0.$$

Par définition, il est clair que D et Δ sont deux applications linéaires inversibles respectivement paire et impaire. En outre, à l'aide d'un calcul simple, on déduit facilement que D et Δ sont deux super-dérivations de $\mathcal{L}$. Par conséquent, en appliquant le Lemme 5.1.4, on obtient que

(i) $(\mathcal{L} \oplus P(\mathcal{L}^*), B_2, \widetilde{D})$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire,

(ii) $(\mathcal{L} \oplus P(\mathcal{L}^*), B_2, \widetilde{\Delta})$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire,

(iii) $(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^*, B_1, \widetilde{\Delta})$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire.

Exemple 5.1.6. Soit $A :=< e_1, \cdots, e_n > \oplus < f_1, \cdots, f_n >$,où $n \geq 1$, un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué tel que $A_{\bar{0}} :=< e_1, \cdots, e_n >$ et $A_{\bar{1}} :=< f_1, \cdots, f_n >$. Sur l'espace A, on définit l'application bilinéaire "." : $A \times A \longrightarrow A$ par

$$\begin{aligned} e_i.e_j &:= \begin{cases} e_{i+j}, \ i+j \leq n \\ 0 \text{ elsewhere} \end{cases} \\ e_i.f_j &:= \begin{cases} f_{i+j}, \ i+j \leq n \\ 0 \text{ elsewhere} \end{cases} \\ f_i.f_j &:= 0, \ \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que A muni du "." est une super-algèbre associative super-commutative. Ensuite, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \otimes A$, où $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie. D'après l'Exemple 5.1.3, $\mathfrak{g}$ est une super-algèbre de Lie. Maintenant sur $\mathfrak{g}$, on considère l'endomorphisme Δ défini par

$$\Delta(x \otimes e_i) = ix \otimes f_i, \quad \Delta(x \otimes f_i) = x \otimes e_i, \ \forall x \in \mathfrak{h}.$$

Un calcul simple montre que Δ est une super-dérivation impaire inversible de $\mathfrak{g}$. Par conséquent, en appliquant le Lemme 5.1.4, on obtient que

(i) $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*, B_1, \widetilde{\Delta})$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire,

(ii) $(\mathfrak{g}\otimes P(\mathfrak{g}^*), B_2, \widetilde{\Delta})$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplecique paire.

Remarque 15. Toutes les super-algèbres de Lie de dimension 4 de l'Exemple 5.1.6 sont abéliennes. Par conséquent, les super-algèbres de Lie de l'Exemple 5.1.5 ne peuvent pas être obtenues comme celles de l'Exemple 5.1.6.

5.2 Super-algèbres de Lie symplectiques homogènes

5.2.1 Super-algèbres de Lie symplectiques paires

Proposition 5.2. *Soient $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}}, \omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique paire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre de Lie et $D \in (Der(\mathfrak{g}))_{|e|}$. Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$ muni du crochet suivant*

$$[ae^* + x, be^* + y] := \gamma(x,y)e^* + [x,y]_{\mathfrak{g}}, \forall (ae^* + x), (be^* + y) \in \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g},$$

où $\gamma(x,y) = -(-1)^{|e|}\omega\Big(\Big[D+(-1)^{|e||x|}D^*\Big](x), y\Big)$, est une super-algèbre de Lie appelée l'extension centrale de $\mathfrak{g}$ par $\mathbb{K}e^*$ au moyen de D.

Preuve. D'après le Lemme (3.6) du [13], on déduit que γ est un 2-cocyle scalaire de $\mathfrak{g}$. D'où le résultat.

Théorème 5.2.1. Soient $(\mathfrak{g}, \omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique paire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre de Lie et $D \in (Der(\mathfrak{g}))_{|e|}$. S'il existe $(x_0, z_0) \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \times \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ tel que

$$\begin{aligned}
0 &= (1-(-1)^{|e|})D(x_0), && (5.6)\\
0 &= (1-(-1)^{|e|})\omega(x_0, x_0), && (5.7)\\
0 &= (1-(-1)^{|e|})(D^2 - \frac{1}{2}[x_0, .]), && (5.8)\\
0 &= (1+(-1)^{|e|})\Big(\omega(z_0, [x,y]) + \omega(\big[D^*(D+D^*) + (D+D^*)D\big](x), y)\Big), && (5.9)
\end{aligned}$$

où $x, y \in \mathfrak{g}$ et D^* est l'adjoint de D relativement à ω, alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e$ possède une structure de super-algèbre de Lie définie par

$$\begin{aligned}
e^* &\in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \quad [e,e] = \frac{1}{2}(1-(-1)^{|e|})x_0, \quad [x,y] = [x,y]_{\mathfrak{g}} + \gamma(x,y)e^*, \ \forall x, y \in \mathfrak{g},\\
[e,x] &= D(x) + \frac{1}{4}(1-(-1)^{|e|})\omega(x_0, x)e^* + \frac{1}{2}(1+(-1)^{|e|})\omega(z_0, x)e^*.
\end{aligned}$$

De plus, la forme bilinéaire super-antisymétrique $\Omega : \widetilde{\mathfrak{g}}\times\widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\Omega_{|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}}} = \omega,\ \ \Omega(e^*, e) = 1$ et Ω est nulle ailleurs est une forme symplectique paire sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$. La super-algèbre $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \Omega)$ est appelée la double extension (resp. la double extension généralisée) de $(\mathfrak{g}, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, z_0) (resp. (D, x_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

Preuve. La preuve consiste à montrer que $\widetilde{D} : \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$ défini par $\widetilde{D}(ae^* + x) := D(x) + \frac{1}{4}(1 - (-1)^{|e|})\omega(x_0, x)e^* + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})\omega(z_0, x)e^*$, $\forall(ae^* + x) \in \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$ est une super-dérivation de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$ homogène de même degré que D telle que $0 = (1 - (-1)^{|e|})\widetilde{D}(x_0)$ et $0 = (1 - (-1)^{|e|})(\widetilde{D}^2 - \frac{1}{2}[x_0, .]_{\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}})$.

1er cas : Supposons que D est paire. Le fait que D est une super-dérivation et que la condition (5.9) est satisfaite implique que $\widetilde{D}$ est une super-dérivation paire de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$. Par conséquent, on peut considérer le produit semi-direct de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $\widetilde{D}$.

2ème cas : Supposons que D est impaire. Par définition de $\widetilde{D}$, il est clair que $\widetilde{D}^2 = \frac{1}{2}ad_{(\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g})}(x_0)$. En outre, à l'aide des conditions (5.6) et (5.7), on déduit que $\widetilde{D}(x_0) = 0$. Il reste à montrer que

$$\widetilde{D}\big[ae^* + x, be^* + y\big]_{\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}} = \Big[\widetilde{D}(ae^* + x), be^* + y\Big]_{\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}} + (-1)^{|x|}\Big[ae^* + x, \widetilde{D}(be^* + y)\Big]_{\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}}, \tag{5.10}$$

$$\forall(ae^* + x) \in (\mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g})_{|x|},\ \ (be^* + y) \in \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$$

En analysant chaque terme de l'égalité (5.10), on obtient que le terme à gauche est égale à

$$[D(x), y] + (-1)^{|x|}\,[x, D(y)] + \omega(D^2(x), y)e^* + \omega(x, D^2(y))e^*$$

et que le terme à droite est égale à

$$D([x, y]) + \frac{1}{2}\omega(x_0, [x, y]).$$

En utilisant le fait que D est une super-dérivation, $D^2 = \frac{1}{2}ad_{\mathfrak{g}}(x_0)$ et que ω est un 2-cocycle scalaire de $\mathfrak{g}$, on déduit l'égalité (5.10). D'où, on peut considérer le produit semi-direct généralisé de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{g}$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(\widetilde{D}, x_0)$.

Proposition 5.3. *Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique paire différente de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, alors $(\mathfrak{g}, \omega)$ est obtenue de l'une des trois manières suivantes :*

(i) Une double extension d'une super-algèbre de Lie symplectique paire par l'algèbre de Lie de dimension 1

(ii) Une double extension généralisée d'une super-algèbre de Lie symplectique paire par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.

(iii) Une somme directe orthogonale d'un idéal gradué non-dégénéré de $\mathfrak{g}$ de dimension 1 et de partie paire nulle et d'un idéal gradué non-dégénéré de $\mathfrak{g}$ de centre nul.

Preuve. Comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, alors on distingue les deux cas suivants.

1er cas : Supposons que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{g}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ et considérons $I := \mathbb{K}e^*$, où $e^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{g}_{\bar{0}}\setminus\{0\}$, et J son orthogonal relativement à ω. Le fait que ω est paire et super-antisymétrique implique que $I \subseteq J$. D'autre part, d'après la non-dégénérescence et la parité de ω, il existe $e \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. Comme l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^*\oplus\mathbb{K}e$ est non-dégénéré, on obtient que $\mathfrak{g} := \mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathbb{K}e$ et $\omega_{\mathfrak{h}} := \omega|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée , où $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Comme $\mathfrak{h} \subseteq J$ et $dim(\mathfrak{h} \oplus I) = dimJ$, alors $J = I \oplus \mathfrak{h}$ et par conséquent pour deux éléments homogènes x et y de $\mathfrak{h}$, on obtient que

$$[x, y] = [x, y]_{\mathfrak{h}} + \gamma(x, y)e^*, \quad [e, x] = D(x) + \beta(x)e^*, \quad [e, e] = 0,$$

où $[x, y]_{\mathfrak{h}}, D(x) \in \mathfrak{h}$, et $\gamma(x, y), \beta(x), \in \mathbb{K}$. Comme $\mathfrak{g}$ est une super-algèbre de Lie, alors il est clair que $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ est aussi une super-algèbre de Lie. De plus, il est facile de vérifier que $\omega_{\mathfrak{h}}$ est une forme symplectique paire sur $\mathfrak{h}$. En utilisant le fait que ω est un 2-cocycle scalaire de $\mathfrak{g}$, on déduit que $\gamma(x, y) := -\omega_{\mathfrak{h}}((D + D^*)(x), y)$. D'après l'identité de Jacobi graduée, on a D est une super-dérivation paire de $\mathfrak{h}$ et $\omega_{\mathfrak{h}}(z_0, [x, y]) = -\omega_{\mathfrak{h}}(\big[D^*(D + D^*) + (D + D^*)D\big](x), y)$, où z_0 est l'unique élément de $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ tel que $\beta = \omega_{\mathfrak{h}}(z_0, .)$. Maintenant en appliquant le Théorème 5.2.1, on déduit que $(\mathfrak{h}, \omega)$ est une double extension de $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, z_0).

2ème cas : Supposons maintenant que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\}$. Comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{g}_{\bar{1}} \neq \{0\}$.

• Supposons que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e^*$ et $\omega(e^*, e^*) = k$, où $k \in \mathbb{K}$. Si $k \neq 0$, alors $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal gradué non-dégénéré. Par conséquent $\mathfrak{g} := I \oplus J$ est une somme directe orthogonale de I et son orthogonal J. Le fait que J est un idéal gradué de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}e^*$ implique que J est non-dégénéré tel que $\mathfrak{z}(J) = \{0\}$. Par contre si $k = 0$, alors $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal gradué de $\mathfrak{g}$ totalement isotrope. D'où, d'après la non-dégénérescence et la parité de ω, il existe $e \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. Comme l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ est non-dégénéré, alors $\mathfrak{g} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}e$ et $\omega_{\mathfrak{h}} := \omega|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée , où $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Il s'ensuit que $\mathfrak{h}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathfrak{g}$ contenu dans J et par conséquent on obtient que

$$[x, y] = [x, y]_{\mathfrak{h}} + \gamma(x, y)e^*, \quad [e, x] = D(x) + \beta(x)e^*, \quad [e, e] = x_0, \forall x, y \in \mathcal{H},$$

où $[x, y]_{\mathfrak{h}}, D(x) \in \mathfrak{h}$, $x_0 \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x, y), \beta(x) \in \mathbb{K}$. Comme $(\mathfrak{g}, [])$ est une super-algèbre de Lie, alors $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ est aussi une super-algèbre de Lie. De plus, il est facile de vérifier que $\omega_{\mathfrak{h}}$ est une forme symplectique paire sur $\mathfrak{h}$. En utilisant le fait que ω est un 2-cocycle scalaire de $\mathfrak{g}$, on déduit que $\beta(x) = \frac{1}{2}\omega_{\mathfrak{h}}(x_0, x)$ et $\gamma(x, y) = \omega_{\mathfrak{h}}(\big[D + (-1)^{|x|}D^*\big](x), y)$. De plus, d'après l'identité de Jacobi gradué, on déduit que $D(x_0) = 0$, $\omega_{\mathfrak{h}}(x_0, x_0) = 0$, $D^2 = \frac{1}{2}ad_{\mathfrak{g}}(x_0)$ et D est une super-dérivation impaire de $\mathfrak{h}$. En appliquant le Théorème 5.2.1, on conclut que $(\mathfrak{h}, \omega)$ est une double extension généralisée de $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, x_0).

• Supposons maintenant que $dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}}) \geq 2$. Le fait que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, implique qu'il existe $e^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathcal{A}_{\bar{1}}\setminus\{0\}$ tel que $\omega(e^*, e^*) = 0$. En raisonnant de la même manière que dans le 2ème cas, où $I := \mathbb{K}e^*$ est une idéal gradué totalement isotrope, on conclut que $\mathfrak{g}$ est une double extension généralisée d'une super-algèbre de Lie symplectique paire $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e = (\mathbb{K}e)_{\bar{1}}$.

Par la proposition précédente, on donne dans le corollaire suivant une description d'une super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente.

Corollaire 5.2.2. Si $(\mathfrak{g}, \omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente différente de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{g}$ est obtenue comme l'assertion (i) ou l'assertion (ii) de la Proposition 5.3.

On remarque que si $(\mathfrak{g}, \omega)$ est une super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente différente de $\mathfrak{m}$, alors $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ obtenue dans lapreuve de la Proposition 5.3 est aussi une super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente. Par conséquent, on peut donner une description inductive des super-algèbres de Lie symplectiques paires nilpotentes.

Corollaire 5.2.3. Toute super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente non-nulle et différente de $\mathfrak{m}$ est obtenue à partir de $\{\{0\}, \mathfrak{m}\}$ par une série finie de double extensions par l'algèbre de Lie de dimension 1 et/ou double extensions généralisées par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.

Preuve. Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente de dimension n. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors, d'après la super-antisymétrie de ω, on déduit que $\mathfrak{g}$ est la super-algèbre de Lie de partie paire nulle. On suppose maintenant que le Corollaire 5.2.3 est vrai pour toutes super-algèbre $\mathfrak{g}$ telle que $dim\mathfrak{g} < n$ avec $n \geq 2$. D'après la Proposition 5.3 et le Corollaire 5.2.2, on a $(\mathfrak{g}, \omega)$ est une double extension d'une super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par l'algèbre de Lie de dimension 1 ou ou une double extension généralisée d'une super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle. Dans ce cas, on a $dim\mathfrak{h} = dim\mathfrak{g} - 2 < n$. Si la super-algèbre de Lie symplectique paire nilpotente $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ est ni l'algèbre nulle ni la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle, alors on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{h}$. D'où le résultat.

5.2.2 Super-algèbres de Lie symplectiques impaires

Proposition 5.4. *Soient $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}}, \omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique impaire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre de Lie et $D \in (Der(\mathfrak{g}))_{|e|}$. Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathfrak{g}$ muni du crochet $[,]$ suivant défini par*

$$[ae^* + x, be^* + y] := \gamma(x, y)e^* + [x, y]_{\mathfrak{g}}, \quad \forall (ae^* + x), (be^* + y) \in P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathfrak{g}, \tag{5.11}$$

où $\gamma(x, y) = -\omega\big([D + (-1)^{|e||x|}D^*](x), y\big)$, est une super-algèbre de Lie appelée une extension centrale de $\mathfrak{g}$ par $P(\mathbb{K}e^*)$ au moyen de D.

Preuve. La preuve est analogue à celle de la Proposition 5.2.

Théorème 5.2.4. Soient $(\mathfrak{g},\omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique impaire, $\mathbb{K}e$ une super-algèbre de Lie et $D\in(Der(\mathfrak{g}))_{|e|}$. S'il existe $(x_0,z_0)\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}\times\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ tel que les conditions (5.6) et (5.8) sont satisfaites et si de plus on a

$$0=(1+(-1)^{|e|})\Big[\omega(z_0,[x,y])+\omega\big([D^*(D+D^*)+(D+D^*)D](x),y)\big]\Big], \tag{5.12}$$

où D^* est l'adjoint de D relativement à ω, alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{t}=P(\mathbb{K}e^*)\oplus\mathfrak{g}\oplus\mathbb{K}e$ possède une structure de super-algèbre de Lie définie par

$$\begin{aligned}[e,e] &= \frac{1}{2}(1-(-1)^{|e|})x_0, \qquad [x,y]=[x,y]_{\mathfrak{g}}+\gamma(x,y)e^*,\ \forall x,y\in\mathfrak{g},\\ [e,x] &= D(x)-\frac{1}{4}(1-(-1)^{|e|})\omega(x_0,x)e^*+\frac{1}{2}(1+(-1)^{|e|})\omega(z_0,x).\end{aligned}$$

De plus, la forme bilinéaire anti-supersymétrique Ω de $\mathfrak{t}$ définie par $\Omega_{|\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}}=\omega$, $\Omega(e^*,e)=1$ et Ω est nulle ailleurs est une forme symplectique impaire sur $\mathfrak{t}$. La super-algèbre de Lie $(\mathfrak{t},\Omega)$ est appelée la double extension (resp. la double extension généralisée) de $(\mathfrak{g},\omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D,z_0) (resp. (D,x_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

Preuve. La preuve consiste à montrer que l'endomorphisme $\widetilde{D}:\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}$ défini par $\widetilde{D}(ae^*+x):=D(x)-\frac{1}{4}(1-(-1)^{|e|})\omega(x_0,x)e^*+\frac{1}{2}(1+(-1)^{|e|})\omega(z_0,x)$, $\forall(ae^*+x)\in\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}$ est une super-dérivation de $\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}$ homogène de même degré que D telle que $0=(1-(-1)^{|e|})\widetilde{D}(x_0)$ et $0=(1-(-1)^{|e|})(\widetilde{D}^2-\frac{1}{2}[x_0,.]_{\mathbb{K}e^*\oplus\mathfrak{g}})$. En raisonnant de la même manière que dans la preuve du Théorème 5.2.1, on déduit le résultat.

Proposition 5.5. *Soit $(\mathfrak{g},\omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique impaire. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\neq\{0\}$, alors $(\mathfrak{g},\omega)$ est obtenue à partir d'une super-algèbre de Lie symplectique impaire par une double extension par l'algèbre de Lie de dimension 1 ou une double extension généralisée par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.*

Preuve. Notons $I:=\mathbb{K}e^*$, où $e^*\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\setminus\{0\}$. D'après la parité de ω, on déduit que I est un idéal gradué totalement isotrope de $\mathfrak{g}$. En outre, le fait que ω est non-dégénérée implique qu'il existe $e\in\mathfrak{g}_{|e^*|+1}$ tel que $\omega(e^*,e)=1$. En utilisant une deuxième fois la non-dégénérescence de ω, on déduit l'existence d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\omega(e^*,\mathfrak{h})=\{0\}=\omega(e,\mathfrak{h}), I^\perp=I\oplus\mathfrak{h}$ et $\omega_{\mathfrak{h}}=\omega_{|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est une forme bilinéaire non-dégénérée de $\mathfrak{h}$. Comme $I^\perp$ est un idéal gradué de $\mathfrak{g}$ qui contient l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{h}$ alors pour $x,y\in\mathfrak{h}$, on a

$$[x,y] = \gamma(x,y)e^*+\alpha(x,y), \qquad [e,x]=D(x)+\beta(x)e^*, \quad \text{et} \quad [e,e]=\frac{1}{2}(1-(-1)^{|e|})(ke^*+x_0),$$

où $\alpha(x,y),D(x)\in\mathfrak{h}$, $x_0\in\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x,y),\beta(x),k\in\mathbb{K}$. Comme $\mathfrak{g}$ est une super-algèbre de Lie on déduit facilement que $(\mathfrak{h},\alpha)$ est une super-algèbre de Lie. De plus, il est facile de vérifier que $\omega_{\mathfrak{h}}$ est une forme symplectique impaire de $\mathfrak{h}$. En utilisant le fait que ω est un 2-cocyle scalaire de $\mathfrak{g}$, on obtient que $k=0$, $(1-(-1)^{|e|})\big(\beta(x)+\frac{1}{2}\omega_{\mathfrak{h}}(x_0,x)\big)=0$ et

$$\gamma(x,y)=-\Big[\omega_{\mathfrak{h}}\big(D(x),y\big)+(-1)^{|e||x|}\omega_{\mathfrak{h}}\big(x,D(y)\big)\Big],\forall x,y\in\mathfrak{h}.$$

En outre, d'après l'identité de Jacobi graduée, il s'ensuit que $(1-(-1)^{|e|})D(x_0) = 0$, $(1-(-1)^{|e|})(D^2 - \frac{1}{2}[x_0,.]) = 0$, D est une super-dérivation homogène de $\mathfrak{h}$ de degré $\mid e \mid$ et pour deux éléments homogènes x et y dans $\mathfrak{h}$, on a

$$\beta([x,y]) = -\omega_{\mathfrak{h}}(\Big[D^*((-1)^{|e||x|}D + D^*) + (D + (-1)^{|e|(|x|+1)}D^*)D\Big](x), y). \tag{5.13}$$

Ceci implique que si D est une super-dérivation impaire, alors la condition (5.13) est trivialement vérifier puisque $D^2 = \frac{1}{2}ad_{\mathfrak{g}}(x_0)$ et $\beta(x) = -\frac{1}{2}\omega_{\mathfrak{h}}(x_0, x)$. Par contre, si D est une super-dérivation paire, alors la condition (5.13) implique que la forme bilinéaire θ définie par

$$\theta(x,y) := -\omega_{\mathfrak{h}}(\Big[D^*(D+D^*) + (D+D^*)D\Big](x), y), \forall x, y \in \mathfrak{h},$$

est un 2-cobord scalaire de $\mathfrak{h}$. Comme $\omega_{\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée impaire et $\beta \in \mathfrak{h}_{\bar{1}}^*$, il existe $z_0 \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ tel que $\beta = \omega_{\mathfrak{h}}(z_0, .)$. Maintenant, en appliquant le Théorème 5.2.4, on obtient que $\mathfrak{g}$ est une double extension (resp. une double extension généralisée) de la super-algèbre de Lie symplectique impaire $(\mathfrak{h}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, z_0) (resp. (D, x_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

Comme une application de la Proposition 5.5 ci-dessus, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.5. Soit $(\mathfrak{g}, \omega)$ une super-algèbre de Lie symplectique impaire nilpotente non-nulle. Alors, $(\mathfrak{g}, \omega)$ est obtenue à partir d'une super-algèbre de Lie symplectique impaire nilpotente par une double extension par l'algèbre de Lie de dimension 1 ou une double extension généralisée par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.

Comme une super-algèbre de Lie symplectique impaire nilpotente est obtenue à partir d'une super-algèbre de Lie symplectique impaire nilpotente, alors on peut donner dans le corollaire suivant une description inductive de ces super-algèbres.

Corollaire 5.2.6. Toute super-algèbre de Lie symplectique impaire nilpotente non-nulle est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions par l'algèbre de Lie de dimension 1 et /ou double extensions généralisées par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.

5.3 Super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes

Dans ce paragraphe, on va compléter l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes commencée dans [12].

Le lemme suivant est très utile dans l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes.

Lemme 5.3.1. Soit $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique homogène symplectique homogènes, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Plus précisément,

(i) Si $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire, alors $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))_{\bar{0}} \neq \{0\}$.

(ii) Si $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. quadratique impaire) symplectique impaire (resp. symplectique paire), alors $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))_{\bar{0}} \neq \{0\}$, $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))_{\bar{1}} \neq \{0\}$ et $dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))_{\bar{0}} = dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))_{\bar{1}}$.

Preuve. D'après la Proposition 1.4, il existe Δ une super-dérivation de $\mathfrak{g}$ homogène paire ou impaire super-antisymétrique et inversible telle que $\omega(x, y) := B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.

1er cas : Supposons que Δ est paire. Comme la restriction $\Delta|_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}$ de Δ à $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ est une dérivation inversible de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, alors d'après [27], on a $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie nilpotente. Par conséquent, d'après [28], $\mathfrak{g}$ est une super-algèbre de Lie résoluble. D'où, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ puisque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp}$ relativement à B. En particulier, si B est impaire, on montre facilement d'après la parité et l'invariance de B que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \subseteq (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))_{\bar{0}}$. D'où l'assertion (i).

2ème cas : On suppose que Δ est impaire et on considère $\widetilde{\Delta} := [\Delta, \Delta]$. Il est clair que $\widetilde{\Delta}$ est une super-dérivation de $\mathfrak{g}$ paire inversible, de super-antisymétrique. Par conséquent, d'après le 1er cas, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. D'où l'assertion (ii) car $\Delta(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

5.3.1 Super-algèbres de Lie quadratiques impaires avec des structures symplectiques homogènes

5.3.1.1 Super-algèbres de Lie quadratiques impaires symplectiques impaires

La notion de la double extension impaire généralisée des super-algèbres de Lie quadratiques impaires par la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle a été introduite dans [2] . Cette notion va être très utile dans cette section pour donner une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques impaires symplectiques impaires. Pour cela, on commence par rappeler la double extension impaire généralisée des super-algèbres de Lie quadratiques impaires introduite dans [2] . Soient $(\mathfrak{g}, B)$ une super-algèbre de Lie quadratique impaire, $k \in \mathbb{K}$, $x_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $D_1 \in (Der_a(\mathfrak{g}))_{\bar{1}}$ tels que $D_1(x_0) = 0$ et $(D_1)^2 = \frac{1}{2} ad_{\mathfrak{g}}(x_0)$. Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathfrak{g}} := P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e$, où $\mathbb{K}e = (\mathbb{K}e)_{\bar{1}}$, muni de l'application bilinéaire $[,]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} : \widetilde{\mathfrak{g}} \times \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ définie par

$$[e, e]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := x_0 + ke^*, \quad [e, x]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := D_1(x) + B(x_0, x)e^*, \quad [x, y]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := [x, y]_{\mathfrak{g}} + B(D_1(x), y)e^*, \forall x \in \mathfrak{g}$$

et la forme bilinéaire super-symétrique $\widetilde{B} : \widetilde{\mathfrak{g}} \times \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\widetilde{B}|_{\widetilde{\mathfrak{g}} \times \widetilde{\mathfrak{g}}} := B, \quad \widetilde{B}(e^*, e) = 1 \text{ et } \widetilde{B} \text{ est nulle ailleurs,}$$

est une super-algèbre de Lie quadratique impaire. D'après [2] , $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ est dite la double extension impaire généralisée de $(\mathfrak{g}, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D_1, x_0, k).

Maintenant, on suppose que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire. D'après la Proposition 1.4, il existe une unique super-dérivation paire δ de $\mathfrak{g}$ super-antisymétrique inversible qui satisfait (1.4). Afin de donner une description inductive d'une telle super-algèbre, dans la proposition suivante, on introduit la notion de la double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée d'une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle. Il consiste à prolonger la structure symplectique impaire ω en une structure symplectique impaire sur une double extension impaire généralisée de $(\mathfrak{g}, B)$ par $\mathbb{K}e$ rappeler ci-dessus.

Proposition 5.6. *Soient $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire et δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible qui satisfait $\omega(x, y) := B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. Considérons $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ une double extension impaire généralisée de $(\mathfrak{g}, B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle (au moyen de (D_1, x_0, k)). S'il existe $c_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que*

$$B(c_1, x_0) = \lambda k, \quad 2D_1(c_1) = \delta(x_0) + 2\lambda x_0, \quad [\delta, D_1] + \lambda D_1 = ad_{\mathfrak{g}}(c_1), \tag{5.14}$$

alors, l'application linéaire Δ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ définie par

$$\Delta(e^*) := \lambda e^*, \quad \Delta(x) := \delta(x) - B(c_1, x)e^*, \quad \Delta(e) := -\lambda e + c_1, \tag{5.15}$$

est une super-dérivation paire, super-antisymétrique et inversible de $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$. D'où, $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\omega})$, où $\widetilde{\omega}(.,.) := \widetilde{B}(\Delta(.), .)$, est une super-algèbre de Lie symplectique impaire. La super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée une double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée de $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D_1, x_0, c_1, λ).

Remarque 16. D'après l'assertion (i) du Lemme 5.3.1, on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} \neq \{0\}$. C'est pour cette raison qu'on considère uniquement la double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisé par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.

Preuve. Il est clair, par définition, que Δ est paire et inversible. D'après la B-super-antisymétrie de δ, on déduit la $\widetilde{B}$-super-antisymétrie de Δ. Finalement, en utilisant les conditions (5.14) et le fait que δ est une super-dérivation de $\mathfrak{g}$, il s'ensuit que Δ est une super-dérivation de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Ce qui achève le résultat.

La proposition suivante est l'inverse de la proposition précédente.

Proposition 5.7. *Soit $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire. Alors, $\mathfrak{g}$ est obtenue à partir d'une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique*

impaire $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ *par une double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.*

Preuve. Soit Δ l'unique super-dérivation paire inversible super-antisymétrique de $\mathfrak{g}$ telle que la condition (1.4) est satisfaite. Le fait que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et $\Delta\big(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}\big) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, implique qu'il existe un scalaire non-nul λ et un vecteur non-nul e^* de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ tel que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Notons I l'idéal gradué engendré par e^* et J son orthogonal relativement à B. D'après la parité de B, il est clair que $I \subseteq J$. Ensuite, le fait que B est impaire et non-dégénérée, implique qu'il existe $e \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tel que $B(e^*, e) \neq 0$. Posons $B(e^*, e) = 1$ et $\mathcal{W} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$. Comme $\mathcal{W}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué non-dégénéré de $\mathfrak{g}$, alors on a $\mathfrak{g} = \mathcal{W} \oplus \mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h} = \mathcal{W}^{\perp}$ relativement à B. De plus, on a $B_{\mathfrak{h}} := B_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée. D'après la preuve de la Proposition 2.15 de [2] , on a $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}} := p \circ [,]\,|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}})$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire où $p : \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}e^* \longrightarrow \mathfrak{h}$ est la projection canonique définie par $p(x + \alpha e^*) = x$, pour tous $x \in \mathfrak{h}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. En appliquant à nouveau la Proposition 2.15 de [2] , on déduit que $\mathfrak{g}$ est une double extension impaire généralisée de $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}e$ au moyen de (D_1, x_0, k), où $D_1 := p \circ ad_{\mathfrak{g}}(e)|_{\mathfrak{h}}$ et $[e, e] = x_0 + ke^*$. Il s'ensuit que $\mathfrak{g} = P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}e$ et $J = P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathfrak{h}$. Maintenant comme $\Delta(I) \subseteq I$ et Δ est super-antisymétrique, alors on facilement que $\Delta(J) \subseteq J$. Par conséquent, pour $x \in \mathfrak{h}$ on a

$$\Delta(e) = c_1 + \alpha e \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \mu(x)e + \delta(x),$$

où $\alpha, \mu(x) \in \mathbb{K}$, $c_1 \in \mathfrak{h}_{\bar{1}}$ et $\delta(x) \in \mathfrak{h}$. D'après la super-antisymétrie de Δ, on déduit que δ est super-antisymétrique relativement à $B_{\mathfrak{h}}$, $\alpha = -\lambda$ et $\mu(x) = -B_{\mathfrak{h}}(c_1, x)$. De plus, le fait que Δ est une super-dérivation paire inversible de $\mathfrak{g}$ implique que

$$\Delta([x, y]) = [\Delta(x), y] + [x, \Delta(y)]\,, \quad \Delta([e, x]) = [\Delta(e), x] + [e, \Delta(x)] \quad \text{et} \quad \Delta([e, e]) = 2\,[e, \Delta(e)]\,,\ \forall x, y \in \mathfrak{h}.$$

Ce qui implique que δ est une super-dérivation paire et inversible de $\mathfrak{h}$, $[\delta, D_1] + \lambda D_1 = ad_{\mathfrak{h}}(c_1)$ et $\delta(x_0) + 2\lambda x_0 = 2D_1(c_1)$ et $B_{\mathfrak{h}}(x_0, c_1) = \lambda k$. D'où, on conclut qu'il existe une structure symplectique impaire $\omega_{\mathfrak{h}}$ sur $\mathfrak{h}$ définie par $\omega_{\mathfrak{h}}(x, y) = B_{\mathfrak{h}}\big(\delta(x), y\big)$, $\forall x, y \in \mathfrak{h}$. En outre, la super-algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée de $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}e$ au moyen de (D_1, x_0, c_1, λ).

Soit $(\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}, B, \omega)$, où $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathbb{K}y_0$ et $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathbb{K}y_1$, une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire. En utilisant l'invariance de B, on déduit que $B(y_0, [y_0, y_1]) = 0$. Par conséquent, d'après la non-dégénérescence de B, on a $[y_0, y_1] = 0$. Ensuite, le fait que $\omega(y_1, [y_1, y_1]) = 0$ implique, d'après la non-dégénérescence de ω, que $[y_1, y_1] = 0$. D'où, $\mathfrak{g}$ est une super-algèbre de Lie abélienne obtenue à partir de $\{0\}$ par la double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle au moyen de $(0, 0, 0, 0)$. Dans le corollaire suivant, on donne une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques impaires symplectiques impaires.

Corollaire 5.3.2. Toute super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire non-nulle est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions quadratiques impaires

symplectiques impaires généralisées par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.

5.3.1.2 Super-algèbres de Lie quadratiques impaires symplectiques paires

Dans ce paragraphe, on va voir que la double extension impaire généralisée par une droite est insuffisante pour donner une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques impaires symplectiques paires. Afin d'obtenir une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques impaires symplectiques paires, on introduit une nouvelle notion de double extension : "la double extension impaire généralisée par un plan".

Théorème 5.3.3. Soient $(\mathfrak{g}, B)$ une super-algèbre de Lie quadratique impaire, $D_i \in (Der_a(\mathfrak{g}))_{\bar{i}}$ et $x_i \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$, tels que

$$(D_1)^2 = \frac{1}{2} ad_{\mathfrak{g}}(x_0) \quad D_1(x_0) = 0, \tag{5.16}$$

$$[D_0, D_1] = ad_{\mathfrak{g}}(x_1), \quad D_0(x_0) = 2D_1(x_1), \quad B(x_0, x_1) = 0. \tag{5.17}$$

Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{t} := P((\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1)^*) \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$, où $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ est la super-algèbre de Lie abélienne, muni de l'application bilinéaire paire super-antisymétrique $[,] : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{t}$ définie par

$$\begin{aligned}
[x, y] &:= [x, y]_{\mathfrak{g}} + B(D_1(x), y)e_0^* + B(D_0(x), y)e_1^*, \ \forall x, y \in \mathfrak{g}, \\
[e_0, x] &:= D_0(x) - B(x_1, x){e_0}^*, \\
[e_1, x] &:= D_1(x) + B(x_0, x){e_0}^* + B(x_1, x){e_1}^*, \\
[e_0, e_1] &:= x_1, \quad [e_1, e_1] := k{e_0}^* + x_0, \ k \in \mathbb{K},
\end{aligned}$$

est une super-algèbre de Lie. De plus la forme bilinéaire super-symétrique $\gamma : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\gamma|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} := B, \quad \gamma(e_0^*, e_0) = 1 = \gamma(e_1^*, e_1) \ \text{ et } \gamma \ \text{ est nulle ailleurs}, \tag{5.18}$$

est une structure quadratique impaire sur $\mathfrak{t}$. Dans ce cas $(\mathfrak{t}, \gamma)$ est appelée la double extension impaire généralisée de $(\mathfrak{g}, B)$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (D_i, x_i, k), où $i \in \{0,1\}$.

D'après les hypothèses du Théorème 5.3.3 ci-dessus, on constate qu'on peut considérer la double extension impaire généralisée de $\mathfrak{g}$ par la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}e_1$ au moyen de (D_1, x_0, k) ou la double extension impaire de $\mathfrak{g}$ par l'algèbre de Lie $\mathbb{K}e_0$ au moyen de D_0. Par conséquent, le théorème ci-dessus peut être réécrit de la manière suivante.

Proposition 5.8. *Soit* $(\widetilde{\mathfrak{g}} := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e_1, [,]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}, \widetilde{B})$ *une double extension impaire généralisée de la super-algèbre de Lie quadratique impaire* $(\mathfrak{g}, B)$ *par la super-algèbre de Lie de partie paire nulle* $\mathbb{K}e_1$ *au moyen de* (D_1, x_0, k) *(On suppose que* $P(\mathbb{K}e_1^*) := \mathbb{K}e_0^*$*). S'il existe* $D_0 \in Der_a(\mathfrak{g})_{\bar{0}}$

et $x_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ *tels que*

$$[D_0, D_1] = ad_{\mathfrak{g}}(x_1), \quad D_0(x_0) = 2D_1(x_1), \quad B(x_0, x_1) = 0, \tag{5.19}$$

alors on peut considérer la double extension impaire $(\mathfrak{t} := \mathbb{K}e_1^* \oplus \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{K}e_0, \gamma)$ *de* $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ *par l'algèbre de Lie* $\mathbb{K}e_0$ *au moyen de la super-dérivation* $\widetilde{D}_0$ *paire super-antisymétrique de* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ *définie par*

$$\widetilde{D}_0(e_0^*) := 0, \quad \widetilde{D}_0(e_1) := x_1, \quad \widetilde{D}_0(x) := D_0(x) - B(x_1, x)e_0^*, \ \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Preuve. Au moyen d'un calcul simple, où on utilise les conditions (6.23), on montre facilement que $\widetilde{D}_0$ est une super-dérivation paire super-anti-symétrique de $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$. Par conséquent, d'après le Théorème 2.2 du [2] , on peut considérer $(\mathfrak{t}, \gamma)$ la double extension impaire de $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ par $\mathbb{K}e_0$ au moyen de $\widetilde{D}_0$. Le crochet de la super-algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ est donné par :

$$\begin{aligned} [x, y] &:= [x, y]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} + \widetilde{B}(\widetilde{D}_0(x), y)e_1^*, \quad [e_1, x] := [e_1, x]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} + \widetilde{B}(\widetilde{D}_0(e_1), x)e_1^*, \\ [e_1, e_1] &:= [e_1, e_1]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} + \widetilde{B}(\widetilde{D}_0(e_1), e_1)e_1^*, \quad [e_0, x] := \widetilde{D}_0(x), \quad [e_0, e_1] := \widetilde{D}_0(e_1), \end{aligned}$$

et la forme bilinéaire $\gamma : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\gamma|_{\widetilde{\mathfrak{g}} \times \widetilde{\mathfrak{g}}} := \widetilde{B}$, $\gamma(e_0^*, e_0) := 1$ et γ est nulle ailleurs. D'où le crochet $[,]$ et le produit scalaire-impaire invariant sur $\mathfrak{t}$ coïncident avec ceux du théorème 5.3.3 ci-dessus.

Dans la suite, on introduit la double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée d'une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.

Proposition 5.9. *Soient* $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ *une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire et* δ *l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\omega(x, y) = B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. *On considère* $(\mathfrak{t}, \gamma)$ *une double extension impaire généralisée de* $(\mathfrak{g}, B)$ *par la super-algèbre de Lie abélienne* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *(au moyen de* (D_0, D_1, x_0, x_1, k)*). S'il existe* $c_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, $c_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$ad_{\mathfrak{g}}(c_0) := [\delta, D_1] - \lambda D_0, \tag{5.20}$$

$$ad_{\mathfrak{g}}(c_1) := [\delta, D_0] + \lambda D_1, \tag{5.21}$$

$$\delta(x_0) := -2D_1(c_0) + 2\lambda x_1, \tag{5.22}$$

$$\delta(x_1) := D_0(c_0) + D_1(c_1) - \lambda x_0, \tag{5.23}$$

$$\lambda k := B(c_1, x_0) - 2B(x_1, c_0), \tag{5.24}$$

alors l'application linéaire Δ *de* $\mathfrak{t}$ *définie par :*

$$\Delta(e_0^*) := \lambda e_1^*, \quad \Delta(e_1^*) := \lambda e_0^*, \ \Delta(e_0) := c_1 - \lambda e_1, \quad \Delta(e_1) := \alpha e_0^* + c_0 + \lambda e_0,$$

$$\Delta(x) := B(c_0, x)e_0^* + \delta(x) - B(c_1, x)e_1^*.$$

est une super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $(\mathfrak{t}, \gamma)$*. Par conséquent, la forme bilinéaire* $\Omega : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie par* $\Omega(x, y) := \gamma(\Delta(x), y),\ \forall x, y \in \mathfrak{t}$ *est une structure symplectique paire sur* $\mathfrak{t}$*. La super-algèbre de Lie* $\mathfrak{t}$ *est appelée la double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée de* $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ *par la super-algèbre de Lie abélienne* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *au moyen de* $(D_0, D_1, x_0, x_1, c_0, c_1, \lambda)$*.*

Preuve. Comme δ est impaire et inversible, alors on a de même pour Δ. Dans la suite, on montre que

$$\Delta\left[x, y\right] = \left[\Delta(x), y\right] + (-1)^{|x|}\left[x, \Delta(y)\right],\ \forall x \in \mathfrak{t}_{|x|}, y \in \mathfrak{t}. \tag{5.25}$$

En analysant chaque terme de l'égalité (5.25), on obtient que pour $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\Delta\left[x, y\right] = \delta([x, y]_{\mathfrak{g}}) + B(c_0, [x, y]_{\mathfrak{g}})e_0^* - B(c_1, [x, y]_{\mathfrak{g}})e_1^* + \lambda B(D_1(x), y)e_1^* + \lambda B(D_0(x), y)e_0^*.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\left[\Delta(x), y\right] + (-1)^{|x|}\left[x, \Delta(y)\right] &= \left[\delta(x), y\right]_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|x|}[x, \delta(y)]_{\mathfrak{g}} + B(D_1(\delta(x)), y)e_0^* \\ &+ B(D_0(\delta(x)), y)e_1^* + B(D_1(x), \delta(y))e_0^* + B(D_0(x), \delta(y))e_1^*.\end{aligned}$$

Le fait que δ est super-dérivation impaire et super-antisymétrique de $\mathfrak{g}$ et que les conditions (5.20), (5.21) sont satisfaites, implique que l'équation (5.25) est vérifiée pour tous $x \in \mathfrak{g}_{|x|}$ et $y \in \mathfrak{g}$. D'une manière analogue, on montre que d'apès les conditions (5.21) et (5.23), on déduit que l'équation (5.25) est vérifiée pour e_0 et $x \in \mathfrak{g}$. De même on a aussi l'équation (5.25) est vérifiée pour e_1 et $x \in \mathfrak{g}$ si et seulement si les conditions (5.20) et (5.23) sont satisfaites. Finalement, en utilisant les conditions (5.23) et (5.24) (resp. (5.22) et (5.24)), on conclut que (5.25) est satisfaite pour tous e_0 et e_1 (resp. e_1 et e_1).

Pour compléter la preuve, on vérifie que la super-dérivation impaire Δ est super-antisymétrique. Comme δ une super-dérivation impaire super-antisymétrique de $(\mathfrak{g}, B)$, alors $B(\Delta(x), y) = -(-1)^{|x|}B(x, \Delta(y)),\ \forall x \in \mathfrak{g}_{|x|}, y \in \mathfrak{g}$. Les autres cas sont trivialement vérifier. D'où le résultat.

Proposition 5.10. *Toute super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire* $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ *est une double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée d'une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire* $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$*, où* $dim\mathfrak{h} = dim\mathfrak{g} - 4$*, par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.*

Preuve. Soit Δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{g}$ telle que $\omega(x, y) = B(\Delta(x), y),\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$. Le fait que $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, Δ est inversible et $\Delta(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, implique qu'il existe un scalaire non-nul λ et $e^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ tel que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Plus précisément, on a $e^* = e_0^* + e_1^*$, où $e_0^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} \setminus \{0\}$ et $e_1^* \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$, tel que $\Delta(e_0^*) = \lambda e_1^*$ et $\Delta(e_1^*) = \lambda e_0^*$. Notons $I := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ et J son orthogonal relativement à B. Comme $B(e_1^*, e_0^*) = \frac{1}{\lambda}B(\Delta(e_0^*), e_0^*) = \frac{1}{\lambda}\omega(e_0^*, e_0^*)$, alors, d'après la super-antisymétrie de ω, on a

$B(e_0^*, e_1^*) = 0$. Par conséquent I est un idéal gradué de $\mathfrak{g}$ totalement isotrope relativement à B (c'est à dire $I \subseteq J$). Maintenant, en utilisant la parité et la non-dégénérescence de B, il existe $e_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tels que $B(e_0^*, e_1) \neq 0$ et $B(e_1^*, e_0) \neq 0$. On peut choisir $e_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tels que

$$B(e_0, e_1^*) = 1 = B(e_1, e_0^*) \quad \text{et} \quad B(e_0, e_1) = 0.$$

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := I \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathcal{W}$ est non-dégénéré, alors $\mathfrak{g} = \mathcal{W} \oplus \mathfrak{h}$ et $B_{\mathfrak{h}} := B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée, où $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. On vérifie facilement que $\mathfrak{g} := J \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ et que $J = I \oplus \mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel gradué de $\mathfrak{g}$ contenu dans J, alors

$$[x, y] = \alpha(x, y) + \nu(x, y)e_0^* + \nu'(x, y)e_1^*, \ \forall\, x, y \in \mathfrak{h}$$

où, $\alpha(x, y) \in \mathfrak{h}$ et $\nu(x, y), \nu'(x, y) \in \mathbb{K}$. Le fait que $(\mathfrak{g}, [,])$ est une super-algèbre de Lie, implique que $(\mathfrak{h}, \alpha)$ est aussi une super-algèbre de Lie. De plus, d'après l'invariance de B, on obtient que $B_{\mathfrak{h}}(\alpha(x, y), z) = B_{\mathfrak{h}}(x, \alpha(y, z))$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{h}$. D'où, $(\mathfrak{h}, \alpha, B_{\mathfrak{h}})$ est une super-algèbre Lie quadratique impaire. Le reste du crochet de $\mathfrak{g}$ s'exprime par

$$[e_0, x] = D_0(x) + \eta(x)e_0^* + \eta'(x)e_1^* \quad \text{et} \quad [e_1, x] = D_1(x) + \bar{\eta}(x)e_0^* + \bar{\eta}'(x)e_1^*, \ \forall x \in \mathfrak{h},$$

où, $D_0(x), D_1(x) \in \mathfrak{h}$ et $\eta(x), \eta'(x), \bar{\eta}(x), \bar{\eta}'(x) \in \mathbb{K}$. En outre, d'après l'invariance de B, on déduit que

$$[e_0, e_1] = x_1 \quad \text{et} \quad [e_1, e_1] = ke_0^* + x_0,$$

où $x_1 \in \mathfrak{h}_{\bar{1}}$, $x_0 \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ et $k \in \mathbb{K}$. En appliquant de nouveau l'invariance de la forme B, on obtient que $\nu(x, y) = B_{\mathfrak{h}}(D_1(x), y)$, $\nu'(x, y) = B_{\mathfrak{h}}(D_0(x), y)$, $B_{\mathfrak{h}}(D_i(x), y) = -(-1)^{i|x|}B_{\mathfrak{h}}(x, D_i(y))$, où $i \in \{0, 1\}$, $\eta(x) = -(-1)^{|x|}\bar{\eta}'(x) = B_{\mathfrak{h}}(x_1, x)$, $\bar{\eta}(x) = B_{\mathfrak{h}}(x_0, x)$ et $\eta'(x) = 0$. Dans la suite, on montre que $D_i \in (Der(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}}))_{\bar{i}}$, où $i \in \{0, 1\}$ et que les conditions (5.16) et (5.17) sont satisfaites. Il est clair que D_0 et D_1 sont deux endomorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont respectivement paire et impaire. Ensuite, l'identité de Jacobi graduée appliquée à e_0, $x, y \in \mathfrak{h}$ (resp. e_1, $x, y \in \mathfrak{h}$), et l'invariance de B impliquent que D_0 et D_1 sont deux super-dérivations de $\mathfrak{h}$ tels que les conditions (5.16) sont satisfaites. En appliquant à nouveau l'identité de Jacobi graduée à e_0, e_1 et $x \in \mathfrak{h}$ et puis à e_0, e_0 et e_1, on déduit facilement que les conditions (5.17) sont satisfaites. Par conséquent, d'après le Théorème 5.3.3, on a $(\mathfrak{g}, B)$ est une double extension généralisée de la super-algèbre de Lie quadratique impaire $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$. Maintenant, le fait que Δ est super-antisymétrique telle que $\Delta(I) \subseteq I$ implique que $\Delta(J) \subseteq J$. Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned}
\Delta(e_0) &:= ie_1^* + c_1 + je_1 \\
\Delta(e_1) &:= le_0^* + c_0 + me_0 \\
\Delta(x) &:= \mu(x)e_0^* + \delta(x) + \mu'(x)e_1^*, \quad \forall x \in \mathfrak{h},
\end{aligned}$$

où $\delta(x) \in \mathfrak{h}$, $c_0 \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$, $c_1 \in \mathfrak{h}_{\bar{1}}$ $i, j, l, m, \mu(x), \mu'(x) \in \mathbb{K}$. Comme Δ est B-super-antisymétrique, alors δ est $B_{\mathfrak{h}}$-super-antisymétrique relativement à $B_{\mathfrak{h}}$, $i = 0$, $j = -\lambda$, $m = \lambda$, $\mu(x) = B_{\mathfrak{h}}(c_0, x)$ et $\mu'(x) = -B_{\mathfrak{h}}(c_1, x)$. En outre, le fait que Δ est une super-dérivation impaire inversible implique

que δ est une super-dérivation impaire inversible de $\mathfrak{h}$ et que les conditions (5.20)-(5.24) sont satisfaites. D'où, on conclut que la forme bilinéaire $\omega_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h}\times\mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\omega_{\mathfrak{h}}(x,y) = B_{\mathfrak{h}}(\delta(x),y)$, $\forall x,y \in \mathfrak{h}$ est une structure symplectique paire sur $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}})$ et que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée de $(\mathfrak{h}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de $(D_i, x_i, c_i, \lambda, l)$, où $i \in \{0,1\}$.

Comme les super-algèbres de Lie quadratiques impaires de dimension 2 ne possèdent pas des structures symplectiques paires, alors les super-algèbres de Lie quadratiques impaires symplectiques paires existent à partir de la dimension 4. Comme application de la Proposition 5.10 ci-dessus, on obtient que toute super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire de dimension 4 est obtenue à partir de $\{0\}$ par une double extension quadratique impaire symétrique paire généralisée par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2. En effet, soit $(\mathfrak{g} := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}f_1, B, \omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire. D'après la Proposition 5.10, il existe un idéal I de $\mathfrak{g}$ de dimension 2 gradué central et totalement isotrope relativement à B. Posons $I := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$. D'après l'invariance de B, on a $B(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, [f_0, f_1]) = \{0\}$. D'où, d'après la non-dégénérescence de B, on dédduit que $[f_0, f_1] = 0$. Ensuite, le fait que $B(e_1, [f_1, f_1]) = 0$, I est totalement isotrope et B est non-dégénérée, implique que $[f_1, f_1] = \alpha e_0$, où $\alpha \in \mathbb{K}$. D'où, $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée de $\{0\}$ par $\mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}f_1$ au moyen de $(0,0,0,\alpha)$.

Corollaire 5.3.4. Toute super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire non-nulle est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions quadratiques impaires symplectiques paires généralisées par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.

5.3.2 Super-algèbres de Lie quadratiques paires avec des structures symplectiques homogènes

L'étude des super-algèbres de Lie quadratiques paires symplectiques paires a été faite dans [12]. Il a été démontré dans [12] que toute super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique paire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions quadratiques paires symplectiques paires par l'algèbre de Lie de dimension 1 et/ou double extensions quadratiques paires symplectiques paires généralisées par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.

Dans la suite, on va étudier les super-algèbre de Lie quadratiques paires symplectiques impaires afin de compléter l'étude des super-algèbres de Lie quadratiques paires qui sont munies des structures symplectiques homogènes.

Théorème 5.3.5. Soient $(\mathfrak{g}, B)$ une super-algèbre de Lie quadratique paire, $D_i \in Der_a(\mathfrak{g})_{\bar{i}}$ et $x_i \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$, où $i \in \{0,1\}$, tels que

$$(D_1)^2 = \frac{1}{2} ad_{\mathfrak{g}}(x_0) \quad D_1(x_0) = 0, \quad B(x_0, x_0) = 0, \tag{5.26}$$

$$[D_0, D_1] = ad_{\mathfrak{g}}(x_1), \quad D_0(x_0) = 2D_1(x_1). \tag{5.27}$$

Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{t} := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$, où $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ est la super-algèbre de Lie abélienne, muni de l'application bilinéaire super-antisymétrique $[,] : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{t}$ définie par

$$\begin{aligned}
[x,y] &:= [x,y]_{\mathfrak{g}} - B(D_1(x),y)e_1^* + B(D_0(x),y)e_0^*, \ \forall x,y \in \mathfrak{g}, \\
[e_0,x] &:= D_0(x) + B(x_1,x){e_1}^*, \\
[e_1,x] &:= D_1(x) - B(x_0,x){e_1}^* + B(x_1,x){e_0}^*, \\
[e_1,e_1] &:= k{e_0}^* + x_0, \quad [e_0,e_1] := ke_1^* + x_1, \ k \in \mathbb{K},
\end{aligned}$$

est une super-algèbre de Lie. De plus, la forme bilinéaire super-antisymétrique $\gamma : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\gamma|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} := B$, $\gamma(e_0^*, e_0) = 1 = \gamma(e_1^*, e_1)$ et γ est nulle ailleurs est une structure quadratique paire sur $\mathfrak{t}$. Dans ce cas, $(\mathfrak{t}, \gamma)$ est appelée la double extension généralisée de $(\mathfrak{g}, B)$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (D_i, x_i, k), où $i \in \{0,1\}$.

Exemple 5.3.6. On considère la super-algèbre de Lie $\mathfrak{L} = \mathbb{K}k_0 \oplus \mathbb{K}l_0 \oplus \mathbb{K}k_1 \oplus \mathbb{K}l_1$ telle que $[l_0, l_1] = k_1$, $[l_1, l_1] = k_0$ et $[,]$ est nul ailleurs introduite dans l'Exemple 5.1.5 et $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}^* \oplus \mathfrak{L}$ la double extension triviale paire de $\mathfrak{L}$. Rappelons, d'après l'Exemple 5.1.5, que $\mathfrak{L}$ possède une super-dérivation paire D définie par

$$D(l_i) = l_i, \quad D(k_i) = 2k_i, \quad i \in \{0,1\}$$

Ensuite, on considère l'application linéaire impaire $\bar{D}$ sur $\mathfrak{L}$ définie par

$$\bar{D}(l_0) = 0, \quad \bar{D}(k_0) = 2k_1, \quad \bar{D}(l_1) = l_0, \quad \bar{D}k_1 = 0.$$

A l'aide d'un calcul simple, on peut vérifie facilement que $\bar{D}$ est une super-dérivation impaire de $\mathfrak{L}$ telle que $\bar{D}^2 = 0$ et $\left[D, \bar{D}\right] = \{0\}$. En appliquant le Lemme 5.1.4, on déduit que $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\bar{D}}$ sont deux super-dérivations de $\mathfrak{g}$ qui sont respectivement paire et impaire telles que $\widetilde{\bar{D}}^2 = 0$ et $\left[\widetilde{D}, \widetilde{\bar{D}}\right] = \{0\}$. Donc, d'après le Théorème 5.3.5, on peut considèrer la double extension généralisée de $\mathfrak{g}$ par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2 au moyen de $(\widetilde{D}, \widetilde{\bar{D}}, 0, 0, 0)$.

Dans la proposition suivante, on montre que la double extension d'une super-algèbre de Lie quadratique paire par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2 définie dans le Théorème 5.3.5 est une succession de double extensions généralisées par une super-algèbre de Lie de dimension 1.

Proposition 5.11. *Soient $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}}, B)$ une super-algèbre de Lie quadratique paire et $(\widetilde{\mathfrak{g}} := \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}e_1, [,]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}, \widetilde{B})$ la double extension généralisée de $(\mathfrak{g}, B)$ par $\mathbb{K}e_1 := (\mathbb{K}e_1)_{\bar{1}}$ au moyen de (D_1, x_0, k). S'il existe $D_0 \in (Der_a(\mathfrak{g}))_{\bar{0}}$ et $x_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tels que les conditions (5.27) sont satisfaites, alors on peut considérer $(\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}, \widetilde{\widetilde{B}})$ la double extension de $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ par l'algèbre de Lie $\mathbb{K}e_0$. De plus, la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ coïncide avec la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\mathfrak{t}, \gamma)$ définie dans le Théorème 5.3.5.*

Preuve. D'après [9], le crochet $[,]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ de la super-algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est défini pour tous x et y deux éléments homogènes de $\mathfrak{g}$ par

$$[x,y]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := [x,y]_{\mathfrak{g}} - B(D_1(x),y)e_1^*, \quad [e_1,x]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := D_1(x) - B(x_0,x)e_1^*, \quad [e_1,e_1]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := x_0.$$

De plus, son produit scalaire invariant $\widetilde{B}$ est défini par $\widetilde{B}|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} := B$, $\widetilde{B}(e_1^*,e_1) = 1$ et $\widetilde{B}$ est nulle ailleurs. Maintenant sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ on considère l'application linéaire paire $\widetilde{D}_0$ définie par :

$$\widetilde{D}_0(e_1^*) = 0, \quad \widetilde{D}_0(e_1) = x_1, \quad \widetilde{D}_0(x) = D_0(x) + B(x_1,x)e_1^*.$$

Il est clair par définition que $\widetilde{D}_0$ est $\widetilde{B}$-super-antisymétrique. D'après les conditions (5.27), on vérifie facilement que $\widetilde{D}_0$ est une super-dérivation paire de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Par conséquent, en appliquant le Théorème 1 de [13], on peut considérer $(\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}},\widetilde{\widetilde{B}})$ la double extension de $(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{B})$ par l'algèbre de Lie $\mathbb{K}e_0$ au moyen de $\widetilde{D}_0$. Plus précisément, le crochet $[,]_{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}}$ et le produit scalaire invariant $\widetilde{\widetilde{B}}$ de la super-algèbre de Lie $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ sont définis respectivement par

$$[e_1,x]_{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}} := [e_1,x]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} + \widetilde{B}(\widetilde{D}_0(e_1),x)e_0^*, \quad [x,y]_{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}} := [x,y]_{\widetilde{\mathfrak{g}}} + \widetilde{B}(\widetilde{D}_0(x),y)e_0^*, \ \forall x,y \in \mathfrak{g},$$

$$[e_1,e_1]_{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}} := [e_1,e_1]_{\widetilde{\mathfrak{g}}}, \quad [e_0,x]_{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}} := \widetilde{D}_0(x), \quad [e_0,e_1]_{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}}} := \widetilde{D}_0(e_1).$$

et

$$\widetilde{\widetilde{B}}|_{\widetilde{\mathfrak{g}}\times\widetilde{\mathfrak{g}}} := \widetilde{B}, \quad \widetilde{\widetilde{B}}(e_0^*,e_0) = 1 \ \text{ et } \ \widetilde{\widetilde{B}} \ \text{ est nulle ailleurs.}$$

A l'aide d'un calcul simple, on conclut que la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\widetilde{\widetilde{\mathfrak{g}}},\widetilde{\widetilde{B}})$ coïncide avec la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\mathfrak{t},\gamma)$ définie dans le Théorème 5.3.5.

Dans la proposition suivante, on introduit la double extension généralisée d'une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.

Proposition 5.12. *Soient $(\mathfrak{g},B,\omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire et δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{g}$ telle que $\omega(x,y) = B(\delta(x),y)$, $\forall x,y \in \mathfrak{g}$. On considère $(\mathfrak{t},\gamma)$ une double extension généralisée de $(\mathfrak{g},B)$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (D_i,x_i,k). S'il existe $c_i \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$, $c_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, où $i \in \{0,1\}$, tels que*

$$\begin{aligned}
ad_{\mathfrak{g}}(c_1) &= [\delta,D_0] - \lambda D_1, && (5.28)\\
ad_{\mathfrak{g}}(c_0) &= [\delta,D_1] + \lambda D_0, && (5.29)\\
\delta(x_0) &= -2\lambda x_1 - 2D_1(c_0), && (5.30)\\
\delta(x_1) &= \lambda x_0 + D_0(c_0) + D_1(c_1), && (5.31)\\
\lambda k &= B(c_0,x_0), && (5.32)
\end{aligned}$$

alors l'application linéaire Δ définie sur $\mathfrak{t}$ par

$$\Delta(e_0^*) := \lambda e_1^*, \quad \Delta(e_1^*) := \lambda e_0^*, \ \Delta(e_0) := \alpha e_1^* + c_1 + \lambda e_1, \quad \Delta(e_1) := -\alpha e_0^* + c_0 - \lambda e_0,$$

$$\Delta(x) := -B(c_1,x)e_0^* + \delta(x) - B(c_0,x)e_1^*,$$

est une super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $(\mathfrak{t}, \gamma)$*. Par conséquent, la forme bilinéaire* $\Omega : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{K}$ *est définie par* $\Omega(x, y) := B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{t}$ *est une structure symplectique impaire sur* $\mathfrak{t}$*. D'où, la super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire* $(\mathfrak{t}, \gamma, \Omega)$ *est appelée la double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de* $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ *par la super-algèbre de Lie abélienne* $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ *au moyen de* (D_i, x_i, c_i, λ)*, où* $i \in \{0, 1\}$*.*

Preuve. La preuve de cette proposition est analogue à celle de la Proposition 5.10.

Dans la proposition suivante on établit l'inverse de la Proposition 5.12.

Proposition 5.13. *Soient* $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ *une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire et* δ *l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique, inversible et qui satisfait* $\omega(x, y) = B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$*. Alors,* $\mathfrak{g}$ *est une double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée d'une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire* $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$*, où* $dim\mathfrak{h} = dim\mathfrak{g} - 4$*, par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.*

Preuve. En raisonnant d'une manière analogue à celle de la Proposition 5.10, on déduit qu'il un idéal $I := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ gradué de $\mathfrak{g}$ central, stable par Δ et totalement isotrope relativement à B. En outre, il existe $e_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ tels que $B(e_0, e_0) = 0$ et $B(e_1^*, e_1) = 1 = B(e_0^*, e_0)$. D'où, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathbb{K}e_1$ est non-dégénéré et $\mathfrak{g} = \mathcal{W} \oplus \mathfrak{h}$, où $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. Il s'ensuit que $B_{\mathfrak{h}} = B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$. De la même manière que la Proposition 5.10, en déduit que $(\mathfrak{h}, [,]\,|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire telle que $\omega_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\omega_{\mathfrak{h}}(x, y) := B_{\mathfrak{h}}(\delta(x), y), \forall x, y \in \mathfrak{h},$$

où $\delta := p_1 \circ \Delta|_{\mathfrak{h}}$ et $p_1 : \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \longrightarrow \mathfrak{h}$ est la projection canonique définie par $p_1(x + \alpha e_0^* + \beta e_1^*) = x$, pour tous $x \in \mathfrak{h}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. En appliquant de nouveau le même raisonnement de la preuve de la Proposition 5.10, on conclut que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}} := [,]\,|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (D_i, x_i, c_i, λ) avec $i \in \{0, 1\}$, où $D_i = p_1 \circ ad_{\mathfrak{g}}(e_i)|_{\mathfrak{h}}$, $[e_1, e_1] = x_0 + ke_0^*$, $[e_0, e_1] = x_1 + ke_1^*$, $c_0 = p_2 \circ \Delta(e_1)$ et $c_1 = p_2 \circ \Delta(e_0)$, où $p_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ est la projection cononique définie par $p_2(\alpha e_0^* + \beta e_1^* + x + \alpha' e_0 + \beta' e_1) = x$, pour tous $x \in \mathfrak{h}$ et $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{K}$.

Comme les super-algèbres de Lie symplectiques impaires de dimension 2 ne possèdent pas des structures quadratiques paires, alors les super-algèbres de Lie quadratiques paires symplectiques impaires existent à partir de la dimension 4. Comme application de la Proposition 5.13 ci-dessus, on déduit que toute super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire de dimension 4 est obtenue à partir de $\{0\}$ par une double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2. En effet, soit $(\mathfrak{g} := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}f_1, B, \omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire. D'après la Proposition 5.13, il existe un idéal gradué I de $\mathfrak{g}$ de dimension 2 central et totalement isotrope relativement à B. Supposons que $I := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$,

$[f_0, f_1] = \alpha e_1 + \beta f_1$ et $[f_1, f_1] = \alpha' e_0 + \beta' f_0$, où $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{K}$. Le fait que I est totalement isotrope et que $B(e_0, [f_1, f_1]) = 0 = B(e_1, [f_0, f_1])$, on déduit que $\beta = \beta' = 0$. Comme $B(f_0, [f_1, f_1]) = B([f_0, f_1], f_1)$, alors $\alpha = \alpha'$. On conclut que $\mathfrak{g}$ est une double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de $\{0\}$ par $\mathbb{K}f_0 \oplus \mathbb{K}f_1$ au moyen de $(0, 0, 0, \alpha)$.

Corollaire 5.3.7. Soit $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire non-nulle. Alors, $\mathfrak{g}$ est obtenue à partie de $\{0\}$ par une série finie de double extensions quadratiques paires symplectiques impaires généralisées par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.

5.4 Super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes et les super-algèbres de Manin homogènes

Dans [12], il a été démontré que toute super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique paire sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos est une super-algèbre de Manin paire symplectique paire spéciale. En outre, dans le même article, le concept de la double extension des super-algèbres de Manin paires symplectiques paires a été introduit et il a été utilisé pour donner une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques paires symplectiques paires. Dans cette section, on procède de la même manière que dans [12] pour donner une description inductive des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes symplectiques homogènes en utilisant les super-algèbres de Manin homogènes.

Définition 36. Une super-algèbre de Manin homogène (paire ou impaire) $\mathfrak{g}$ est une super-algèbre de Lie qui satisfait les deux conditions suivantes.

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ en tant que somme directe d'espaces vectoriels avec $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux sous-super-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

(ii) Il existe une structure quadratique homogène (paire ou impaire) B sur $\mathfrak{g}$ telle que $B(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = B(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \{0\}$.

Définition 37. Une super-algèbre de Manin homogène $(\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, B)$ est dite une super-algèbre de Manin homogène symplectique homogène spéciale s'il existe une structure symplectique homogène ω sur $\mathfrak{g}$ telle que $\omega(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \omega(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \{0\}$.

Le lemme suivant peut être prouver de la même manière que le Lemme 5.6 de [12].

Lemme 5.4.1. Une super-algèbre de Manin homogène symplectique homogène $(\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Manin homogène symplectique homogène spéciale si et seulement si l'unique super-dérivation homogène Δ de $\mathfrak{g}$ qui définie la structure symplectique homogène ω vérifie $\Delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ et $\Delta(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$.

Théorème 5.4.2. Toute super-algèbre de Lie quadratique homogène symplectique homogène $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos est une super-algèbre de Manin homogène symplectique homogène spéciale (c'est à dire $(\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, B, \omega)$ telle que $B(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = B(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \{0\}$ et $\omega(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \omega(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \{0\}$). En outre, on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ ou $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} \neq \{0\}$.

Preuve. On suppose que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique impaire. Dans ce cas, en raisonnant de la même manière que la preuve du Théorème 5.7 de [12], on déduit la preuve du Théorème 5.4.2. Ceci est dû au fait que l'invariance de B ne dépend pas de sa parité. En outre, la preuve du Théorème 5.4.2 quand $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire symplectique impaire est équivalente à celle lorsque $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire symplectique paire. D'où, dans la suite on montre le Théorème 5.4.2 uniquement lorsque $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ quadratique paire symplectique impaire. Notons Δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{g}$ telle que $\omega(x, y) = B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ et considérons $\widetilde{\Delta} := [\Delta, \Delta]$. Comme $\widetilde{\Delta}$ est super-dérivation paire, super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{g}$, alors d'après la preuve du Théorème 5.7 de [12], on a $(\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, B)$ est une super-algèbre de Manin paire, où $\mathfrak{a} := \bigoplus_{\lambda \in Sp(\widetilde{\Delta})^+} \mathfrak{g}^\lambda$, $\mathfrak{b} := \bigoplus_{\lambda \in Sp(\widetilde{\Delta})^-} \mathfrak{g}^\lambda$ et $\mathfrak{g}^\lambda := \left\{ x \in \mathfrak{g}, (\widetilde{\Delta} - \lambda id)^n (x) = 0, \text{ pour n assez grand} \right\}$ (Pour plus de détail, on peut voir le Théorème 5.7 [12]). Par le Théorème 5.7 [12], on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ ou $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} \neq \{0\}$. Il est facile de voir que $\Delta(\mathfrak{g}^\lambda) \subseteq \mathfrak{g}^\lambda$, pour tout λ dans $Sp(\widetilde{\Delta})$. D'où, $\Delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ et $\Delta(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$. En appliquant, le Lemme 5.4.1, on déduit que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Manin paire symplectique impaire spéciale.

Dans la suite, on donne une description inductive des super-algèbres de Manin impaires symplectiques impaires spéciales et une description inductive des super-algèbres de Manin paires (resp. impaires) symplectiques impaires (resp. paires) spéciales.

5.4.1 Description inductive des super-algèbres de Manin impaires symplectiques impaires spéciales

Soient $(\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, B, \omega)$ une super-algèbre de Manin impaire symplectique impaire spéciale et δ l'unique super-dérivation paire de $\mathfrak{g}$, super-antisymétrique, inversible et qui satisfait

$$\omega(x, y) = B(\delta(x), y), \ \forall x, y \in \mathfrak{g}, \ \delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a} \ \text{ et } \ \delta(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}. \tag{5.33}$$

Rappelons que s'il existe $D_1 \in (Der_a(\mathfrak{g}))_{\bar{1}}$ et $x_0 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ tels que $D_1(x_0) = 0$ et $(D_1)^2 = \frac{1}{2} ad_{\mathfrak{g}}(x_0)$. Alors d'après [2] , on peut considérer $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ la double extension impaire généralisée de $(\mathfrak{g}, B)$ par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle au moyen de (D_1, x_0, k), où $k \in \mathbb{K}$. Si, en particulier, on a $D_1(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$, $x_0 \in \mathfrak{b}_{\bar{0}}$ et $k = 0$, on vérifie facilement que $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$ est une super-algèbre de Manin impaire telle que $\widetilde{\mathfrak{g}} := \widetilde{\mathfrak{a}} \oplus \widetilde{\mathfrak{b}}$, où $\widetilde{\mathfrak{a}} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathfrak{a}$ et $\widetilde{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b} \oplus \mathbb{K}e$.

Maintenant, si on suppose qu'il existe, de plus, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $c_1 \in \mathfrak{b}_{\bar{1}}$ tels que les conditions (5.14) sont satisfaites, alors d'après la Proposition 5.6, la super-algèbre de Manin impaire $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{B})$

possède une structure symplectique impaire $\omega_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ qui vérifie $\omega_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(\widetilde{\mathfrak{a}},\widetilde{\mathfrak{a}}) = \omega_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(\widetilde{\mathfrak{b}},\widetilde{\mathfrak{b}}) = \{0\}$. D'où, $(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{B})$ est une super-algèbre de Manin impaire symplectique impaire spéciale qu'on appelle la double extension de Manin impaire symplectique impaire spéciale généralisée de $(\mathfrak{g},B,\omega)$ par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle au moyen de (D_1,x_0,c_1,λ).

A l'aide de la double extension de Manin impaire symplectique impaire spéciale généralisée définie ci-dessus, on donne une description des super-algèbres de Manin impaires symplectiques impaires spéciales. c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 5.14. *Soient* $(\mathfrak{g} := \mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}, B, \omega)$ *une super-algèbre de Manin impaire symplectique impaire spéciale et* Δ *l'unique super-dérivation paire, super-antisymétrique inversible de* $\mathfrak{g}$ *qui satisfait (5.33). Si* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{a}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ *ou* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{b}_{\bar{0}} \neq \{0\}$*, alors* $\mathfrak{g}$ *est une double extension de Manin impaire symplectique impaire spéciale généralisée d'une super-algèbre de Manin impaire symplectique impaire spéciale* $(\mathfrak{h},B_{\mathfrak{h}},\omega_{\mathfrak{h}})$*, où* $dim\mathfrak{h} = dim\mathfrak{g}-2$*, par la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle.*

Preuve. On suppose que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{a}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ (le cas où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{b}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ se résout de la même manière). Comme le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et $\Delta(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{a}_{\bar{0}}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{a}_{\bar{0}}$, alors il existe un scalaire λ non-nul et un vecteur non-nul e^* de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ tels que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Notons $I := \mathbb{K}e^*$ et J son orthogonal relativement à B. D'après la parité de B, on a I est un idéal totalement isotrope relativement à B. Ensuite, le fait que B est impaire, non-dégénérée telle que $B(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = \{0\}$ implique qu'il existe $e \in \mathfrak{b}_{\bar{1}}$ tel que $B(e^*,e) = 1$. Posons $\mathcal{W} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$. Il est clair que $\mathcal{W}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué non-dégénéré. D'où $\mathfrak{g} = \mathcal{W}\oplus\mathfrak{h}$ et $B_{\mathfrak{h}} := B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée, où $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. En appliquant le Proposition 2.15 [2] , on déduit que $(\mathfrak{h},[,]_{\mathfrak{h}},B_{\mathfrak{h}})$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire, où $[,]_{\mathfrak{h}} := p\circ[,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ avec $p : \mathfrak{h}\oplus\mathbb{K}e^* \longrightarrow \mathfrak{h}$ définie par $p(x+\alpha e^*) = x$, pour tous $x\in\mathfrak{h}$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. De nouveau d'après la Proposition 2.15 [2] , il s'ensuit que $(\mathfrak{g},B)$ est une double extension impaire généralisée de $(\mathfrak{h},B_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre de Lie $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de $(D_1,x_0,k) \in Der_a(\mathfrak{g})_{\bar{1}}\times\mathfrak{g}_{\bar{0}}\times\mathbb{K}$ tel que $D_1 := p\circ[e,]|_{\mathfrak{h}}$ et $[e,e] := x_0 + ke^*$.

Dans la suite, on montre que $(\mathfrak{h},B_{\mathfrak{h}})$ est une super-algèbre de Manin impaire qui possède une structure symplectique impaire spéciale $\omega_{\mathfrak{h}}$ et que $(\mathfrak{g},B,\omega)$ est une double extension de Manin impaire symplectique impaire spéciale généralisée de $(\mathfrak{h},B_{\mathfrak{h}},\omega_{\mathfrak{h}})$.

Posons $\widetilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}$ et $\widetilde{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b}\cap\mathfrak{h}$. A l'aide d'un calcul simple, on vérifie facilement que $\widetilde{\mathfrak{a}}$ et $\widetilde{\mathfrak{b}}$ sont deux sous-super-algèbres de Lie de $\mathfrak{h}$ telles que $B_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = B_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) = \{0\}$ et que $\mathfrak{h} = \widetilde{\mathfrak{a}}\oplus\widetilde{\mathfrak{b}}$ en tant qu'espaces vectoriels. D'où, $(\mathfrak{h},B_{\mathfrak{h}})$ est une super-algèbre de Manin impaire. Ensuite, le fait que $\mathfrak{b}$ est une sous-super-algèbre de $\mathfrak{g}$ et que $e\in\mathfrak{b}_{\bar{1}}$ implique que $x_0 \in \widetilde{\mathfrak{b}}_{\bar{0}}$, $k = 0$ et $D_1(x) = p\circ([e,x]) \in \widetilde{\mathfrak{b}}$, $\forall x\in\widetilde{\mathfrak{b}}$. Par conséquent, $(\mathfrak{g},B)$ est une double extension de Manin impaire de la super-algèbre de Manin impaire $(\mathfrak{h},B_{\mathfrak{h}})$ par $\mathbb{K}e$ la super-algèbre de Lie de dimension 1 et de partie paire nulle au moyen de (D_1,x_0). Maintenant, en appliquant la Proposition 5.7, on obtient que la super-algèbre $(\mathfrak{h},B_{\mathfrak{h}})$ possède une structure symplectique impaire $\omega_{\mathfrak{h}}$ définie par $\omega_{\mathfrak{h}}(x,y) = B_{\mathfrak{h}}(\delta(x),y)$, où $\delta := p\circ\Delta|_{\mathfrak{h}}$, $\forall x,y\in\mathfrak{h}$ est une super-dérivation paire super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{h}$. En outre, en utilisant le fait que $\Delta(\mathfrak{a})\subseteq\mathfrak{a}$ et $\Delta(\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{b}$, on

déduit facilement que $\delta(\widetilde{\mathfrak{a}}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{a}}$ et que $\delta(\widetilde{\mathfrak{b}}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{b}}$. D'où le résultat.

5.4.2 Description inductive des super-algèbres de Manin paires (resp. impaires) symplectiques impaires (resp. paires) spéciales

Dans cette sous-section, on introduit la notion de la double extension généralisée d'une super-algèbre de Manin paire (resp. impaire) symplectique impaire (resp. paire) spéciale par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2. Cette notion est un cas particulier de la double extension généralisée d'une super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. impaire) symplectique impaire (resp. impaire) par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.

Soient $(\mathfrak{g} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, B, \omega)$ une super-algèbre de Manin paire (resp. impaire) symplectique impaire (resp. paire) spéciale et δ l'unique super-dérivation impaire de $\mathfrak{g}$, super-antisymétrique, inversible et qui satisfait

$$\omega(x, y) = B(\delta(x), y), \ \forall x, y \in \mathfrak{g}, \ \delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a} \ \text{ et } \ \delta(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}.$$

Rappelons que s'il existe un triplet $(D_i, x_i, k) \in Der_a(\mathfrak{g})_{\bar{i}} \times \mathfrak{g}_{\bar{i}} \times \mathbb{K}$, où $i \in \{0, 1\}$, qui satisfait les conditions (5.26) et (5.27) (resp. (5.16) et (5.17)), alors, d'après le Théorème 5.3.5 (resp. le Théorème 5.3.3), on peut considérer $(\mathfrak{t}, \gamma)$ la double extension généralisée (resp. la double extension impaire généralisée) de $(\mathfrak{g}, B)$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (D_i, x_i, k). En particulier, si on a $D_i(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$, $x_i \in \mathfrak{b}_{\bar{i}}$ et $k = 0$, alors on vérifie facilement que $(\mathfrak{t}, \gamma)$ est une super-algèbre de Manin paire (resp. impaire) telle que $\mathfrak{t} = \widetilde{\mathfrak{a}} \oplus \widetilde{\mathfrak{b}}$, où $\widetilde{\mathfrak{a}} := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathbb{K}e_1^*$ et $\widetilde{\mathfrak{b}} := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbb{K}e_1$. La super-algèbre de Manin paire (resp. impaire) $(\mathfrak{t} = \widetilde{\mathfrak{a}} \oplus \widetilde{\mathfrak{b}}, \gamma)$ est appelée la double extension de Manin paire généralisée (resp. la double extension de Manin impaire généralisée) de $(\mathfrak{g}, B)$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ (au moyen de (D_i, x_i)).

Maintenant supposons qu'il existe, de plus, $c_i \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que les conditions (5.28)-(5.32) (resp. (5.20)-(5.24)), alors d'après la Proposition 5.12 (resp. la Proposition 5.9), on déduit que la double extension de Manin paire généralisée (resp. la double extension de Manin impaire généralisée) possède une structure symplectique paire (resp. impaire) Ω. On vérifie facilement que si $c_i \in \mathfrak{b}_{\bar{i}}$, alors on a $\Omega(\widetilde{\mathfrak{a}}, \widetilde{\mathfrak{a}}) = \Omega(\widetilde{\mathfrak{b}}, \widetilde{\mathfrak{b}}) = \{0\}$. D'où, $(\mathfrak{t}, \gamma, \Omega)$ est une super-algèbre de Manin paire symplectique impaire spéciale (resp. une super-algèbre de Manin impaire symplectique paire spéciale) qu'on appelle la double extension de Manin paire symplectique impaire spéciale généralisée (resp. la double extension de Manin impaire symplectique paire spéciale généralisée) de $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$.

Proposition 5.15. *Soit $(\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}, B, \omega)$ une super-algèbre de Manin paire (resp. impaire) symplectique impaire (resp. paire) spéciale. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ ou $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} \neq \{0\}$, alors $\mathfrak{g}$ est une double extension de Manin paire symplectique impaire généralisée (resp. une double extension de Manin impaire symplectique paire généralisée) d'une super-algèbre de Manin paire (resp. impaire) symplectique impaire (resp. paire) spéciale $(\mathfrak{h} = \widetilde{\mathfrak{a}} \oplus \widetilde{\mathfrak{b}}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par la super-algèbre de Lie abélienne de dimension 2.*

Preuve. On suppose que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ (en raisonnant de la même manière on déduit le cas où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b} \neq \{0\}$). On note par Δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique, inversible de $\mathfrak{g}$ et qui satisfait $\omega(x,y) = B(\Delta(x),y)$, $\forall x,y \in \mathfrak{g}$, $\Delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ et $\Delta(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$. Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, $\Delta(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a}$ et Δ est inversible, alors il existe un scalaire non-nul λ, $e_0^* \in (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a})_{\bar{0}} \setminus \{0\}$ et $e_1^* \in (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{a})_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tels que $\Delta(e_0^*) = \lambda e_1^*$ et $\Delta(e_1^*) = \lambda e_0^*$. Notons $I := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ et J son orthogonal relativement à B. Le fait que B est paire (resp. impaire), non-dégénérée et $B(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = \{0\}$, implique qu'il existe $e_0 \in \mathfrak{b}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathfrak{b}_{\bar{1}}$ tels que $B(e_0^*, e_0) \neq 0$ et $B(e_1^*, e_1) \neq 0$ (resp. $B(e_0^*, e_1) \neq 0$ et $B(e_1^*, e_0) \neq 0$). Comme l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := I \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ de $\mathfrak{g}$ est non-dégénéré, alors on obtient que $\mathfrak{g} = \mathcal{W} \oplus \mathfrak{h}$ et que $B_{\mathfrak{h}} = B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ est non-dégénérée, où $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. Muni du crochet $[,]_{\mathfrak{h}}$ défini par $[,]_{\mathfrak{h}} := p_1 \circ [,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$, on vérifie facilement que $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}}, B_{\mathfrak{h}})$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. quadratique impaire), où $p_1 : \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^* \oplus \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ définie par $p_1(\alpha e_0^* + x + \beta e_1^*) = x$, pour tous $x \in \mathfrak{h}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Maintenant, comme $I \subseteq \mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a} \subseteq J$. Par conséquent, $\mathfrak{a} = I \oplus \widetilde{\mathfrak{a}}$ où $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$. En outre, en posant $\widetilde{\mathfrak{b}} := \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$, il n'est pas difficile de voir que $\mathfrak{h} := \widetilde{\mathfrak{a}} \oplus \widetilde{\mathfrak{b}}$ est une super-algèbre de Manin paire (resp. impaire).

1er cas : On suppose que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une algèbre de Manin paire symplectique impaire spéciale. En appliquant la Proposition 5.13, on déduit que $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}})$ possède une structure symplectique impaire $\omega_{\mathfrak{h}}$ définie par $\omega_{\mathfrak{h}}(x,y) := B_{\mathfrak{h}}(\delta)(x), y$, $\forall x,y \in \mathfrak{h}$, où $\delta := p_1 \circ \Delta|_{\mathfrak{h}}$ est une super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{h}$. En outre, $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de $(D_i, x_i, c_i, k) \in Der_a(\mathfrak{h})_{\bar{i}} \times \mathfrak{h}_{\bar{i}} \times \mathfrak{h}_{\bar{i}} \times \mathbb{K}$, où $i \in \{0,1\}$, tel que $D_i := p_1 \circ ad_{\mathfrak{h}}(e_i)|_{\mathfrak{h}}$, $[e_1, e_1] := x_0 + ke_0^*$, $[e_0, e_1] := x_1 + ke_1^*$ et $c_i := p_2 \circ \Delta(e_i)$ avec $p_2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ définie par $p_2(\alpha e_0^* + \beta e_1^* + x + \alpha' e_0 + \beta' e_1) = x$ pour tous $x \in \mathfrak{h}$ et $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{K}$. Le fait que $e_i \in \mathfrak{b}_{\bar{i}}$ pour $i \in \{0,1\}$ et $\mathfrak{b}$ est une sous-super-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ implique que $D_i(\widetilde{\mathfrak{b}}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{b}}$, $x_i \in \widetilde{\mathfrak{b}}_{\bar{i}}$ et $k = 0$. Comme $\Delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ et $\Delta(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$, alors $\delta(\widetilde{\mathfrak{a}}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{a}}$, $\delta(\widetilde{\mathfrak{b}}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{b}}$ et $c_i \in \widetilde{\mathfrak{b}}_{\bar{i}}$. On conclut que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une double extension de Manin paire de $(\mathfrak{h}, B_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}})$ par $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ au moyen de (D_i, x_i, c_i), où $i \in \{0,1\}$.

2ème cas : On suppose maintenant que $(\mathfrak{g}, B, \omega)$ est une super-algèbre de Manin impaire symplectique paire spéciale. En utilisant la Proposition 5.9 et en raisonnant comme le 1er cas de cette preuve, on obtient le résultat.

Chapitre 6

Super-algèbres Poisson-admissibles avec des structures homogènes

Dans ce chapitre, on exploite toutes les techniques de double extensions introduites dans les chapitres précédents afin de définir des double extensions généralisées des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes et/ou symplectiques homogènes. En utilisant ces nouvelles notions de double extensions, on obtient des descriptions inductives des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes.

6.1 Super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques homogènes

Dans cette section on introduit les notions de double extensions des super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques homogènes par une super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul. Ensuite, on utilise ces notions de double extensions pour donner des descriptions inductives des super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques homogènes nilpotentes.

6.1.1 Super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques paires

Dans cette section on introduit le concept de la double extension généralisée d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire par une super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul dans le but de donner une description inductive de celles qui sont nilpotentes. Le Théorème 4.1.1 et le Théorème 5.2.1 qui introduisent respectivement la double extension (généralisée) d'une super-algèbre associative super-commutative symplectique paire par une super-algèbre associative de dimension 1 à produit nul et la double extension (généralisée) d'une

super-algèbre de Lie symplectique paire par une super-algèbre de Lie de dimension 1 vont être très utiles dans de ce concept.

Soient $(\mathcal{A},\omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire et $\mathbb{K}e$ une super-algèbre Poisson-admissible à produit nul. Rappelons que :

• S'il existe $(f,a_0,z_0)\in(End(\mathcal{A}^+))_{|e|}\times\mathcal{A}^+_{\bar{0}}\times\mathcal{A}^+_{\bar{0}}$ tel que les conditions (4.1)-(4.6) sont satisfaites, alors d'après le Théorème 4.1.1 on peut considérer la double extension généralisée (resp. la double extension) $(\widetilde{\mathcal{A}}^+,\widetilde{\omega})$ de la super-algèbre associative super-commutative symplectique paire $(\mathcal{A}^+,\omega)$ par $\mathbb{K}e$ à produit nul au moyen de (f,a_0) (resp. (f,z_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

• S'il existe $(D,x_0,z_0)\in(Der(\mathcal{A}^-))_{|e|}\times\mathcal{A}^-_{\bar{0}}\times\mathcal{A}^-_{\bar{0}}$ tel que les conditions (5.6)-(5.9) sont satisfaites, alors d'après le Théorème 5.2.1 on peut considérer la double extension (resp. la double extension généralisée) $(\widetilde{\mathcal{A}}^-,\widetilde{\omega})$ de la super-algèbre de Lie symplectique paire $(\mathcal{A}^-,\omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D,z_0) (resp. (D,x_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

Dans le Théorème 6.1.1 (resp. le Théorème 6.1.2) suivant, on définit une structure de super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire sur l'espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{A}}:=\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{A}\oplus\mathbb{K}e$, où $\mathbb{K}e$ est l'algèbre Poisson-admissible à produit nul (resp. la super-algèbre Poisson-admissible de partie paire nulle).

Théorème 6.1.1. Soient $(\mathcal{A},.,\omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire et $\mathbb{K}e$ l'algèbre Poisson-admissible à produit nul. S'il existe $(D,f,a_0,z_0)\in Der(\mathcal{A})_{\bar{0}}\times End(\mathcal{A}^+)_{\bar{0}}\times\mathcal{A}_{\bar{0}}\times\mathcal{A}_{\bar{0}}$, tel qu'on peut considérer $(\widetilde{\mathcal{A}}^+,\circ_{\widetilde{\mathcal{A}}^+},\widetilde{\omega})$ la double extension généralisée de $(\mathcal{A}^+,\omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f,a_0) et $(\widetilde{\mathcal{A}}^-,[,]_{\widetilde{\mathcal{A}}^-},\widetilde{\omega})$ la double extension de $(\mathcal{A}^-,\omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D,z_0) et que les conditions suivantes sont satisfaites

$$0 = D(a_0),\quad \omega(z_0,a_0)=0, \tag{6.1}$$

$$0 = 2f^*(z_0)+D^*(a_0),\quad D\circ f=f\circ D, \tag{6.2}$$

$$0 = \omega(z_0,x*y)-\omega(\big[D^*(f^*-f)+(f^*-f)D\big](x),y), \tag{6.3}$$

$$0 = f\circ D-\frac{1}{2}ad_{\mathcal{A}^-}(a_0),\quad [x,f(y)]=-D(x)*y+f([x,y]),\forall x,y\in\mathcal{A}. \tag{6.4}$$

Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}}:=\mathbb{K}e^*\oplus\mathcal{A}\oplus\mathbb{K}e$ possède une structure de super-algèbre Poisson-admissible définie par

$$e^*\in Ann(\mathcal{A}),\quad e\star e=a_0,\quad x\star y=x.y-\omega(\Phi(x),y)e^*+\omega(x,\Psi(y))e^*,\ \forall x,y\in\mathcal{A},$$

$$e\star x=\Phi(x)+\frac{1}{2}\omega(z_0-a_0,x)e^*,\quad x\star e=\Psi(x)-\frac{1}{2}\omega(z_0+a_0,x)e^*,$$

où $\Phi=\frac{1}{2}D+f$, $\Psi=-\frac{1}{2}D+f$. La super-algèbre obtenue $(\widetilde{\mathcal{A}},\star,\widetilde{\omega})$ est appelée la double extension symplectique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A},\omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D,f,a_0,z_0).

Preuve. La preuve consiste à montrer que pour tous $x\in\mathcal{A}_{|x|},y\in\mathcal{A}_{|y|}$ et $z\in\mathcal{A}$,

$$\big[x,y\circ_{\widetilde{\mathcal{A}}^+}z\big]_{\widetilde{\mathcal{A}}^-}=[x,y]_{\widetilde{\mathcal{A}}^-}\circ_{\widetilde{\mathcal{A}}^+}z+(-1)^{|x||y|}y\circ_{\widetilde{\mathcal{A}}^+}[x,z]_{\widetilde{\mathcal{A}}^-},$$

si et seulement si les conditions (6.1)-(6.4) sont satisfaites.

Proposition 6.1. *Soit $(\mathcal{A}, \star, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire différente de la super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 et de partie paire nulle. Si $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \neq \{0\}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire par une double extension symplectique paire généralisée de Poisson par l'algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul.*

Preuve. Supposons que $e^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{0}} \setminus \{0\}$ et notons $I := \mathbb{K}e^*$. Il est clair d'après la super-antisymétrie de ω que I est un idéal bilatère gradué totalement isotrope de $\mathcal{A}$. D'où, $I \subseteq J$, où J est l'orthogonal de I relativement à ω. D'après la parité et la non-dégénérescence de ω, il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ est non-dégénéré, par conséquent on obtient que $\mathcal{A} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ et que $\omega_{\mathcal{H}} := \omega|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Comme $\mathcal{H} \subseteq J$ et $dim(\mathcal{H} \oplus I) = dimJ$, on déduit que $J = I \oplus \mathcal{H}$. D'après le Lemme 1.3.2, on a J est un idéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$. Par conséquent, pour $x, y \in \mathcal{H}$, on a

$$x \star y = x.y + \gamma(x, y)e^*, \quad e \star x = \Phi(x) + \alpha(x)e^*, \quad x \star e = \Psi(x) + \beta(x)e^*, \quad e \star e = ke^* + a_0 + k'e,$$

où $x.y, \Phi(x), \Psi(x) \in \mathcal{H}$, $a_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x, y), \alpha(x), \beta(x), k, k' \in \mathbb{K}$. Le fait que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre Poisson-admissible implique que $(\mathcal{H}, .)$ est aussi une super-algèbre Poisson-admissible. De plus, on vérifie facilement que $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme symplectique paire sur $\mathcal{H}$. Par conséquent, $(\mathcal{H}, ., \omega_{\mathcal{H}})$ est une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire. En utilisant maintenant le fait que ω est un 2-cocyle scalaire paire, on déduit que $k = k' = 0$, $\alpha + \beta = -\omega_{\mathcal{H}}(a_0, .)$ et $\gamma(x, y) = \omega_{\mathcal{H}}\big((\Psi^* - \Phi)(x), y\big)$, où Ψ^* est l'adjoint de Ψ relativement à ω. Par conséquent :

• Le crochet $[,]$ de la super-algèbre de Lie symplectique paire $(\mathcal{A}^-, \omega)$ est de la forme

$$\begin{cases} e^* \in \mathfrak{z}(\mathcal{A}^-), \ [e, e] = 0, \ [e, x] = D(x) + (\alpha - \beta)(x)e^*, \\ [x, y] = [x, y]_{\mathcal{H}} - \omega_{\mathcal{H}}(D(x), y)e^* - \omega_{\mathcal{H}}(x, D(y))e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $[x, y]_{\mathcal{H}} := x.y - (-1)^{|x||y|}y.x$ et $D := \Phi - \Psi$. D'après la Proposition 5.3, on a $(\mathcal{A}^-, \omega)$ est une double extension de $(\mathcal{H}^-, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, z_0), où z_0 est l'unique élément de $\mathcal{H}_{\bar{0}}$ qui satisfait $\omega_{\mathcal{H}}(z_0, .) = \alpha - \beta$.

• Le produit " $\circ$ " de la super-algèbre associative super-commutative symplectique paire $(\mathcal{A}^+, \omega)$ est de la forme

$$\begin{cases} e^* \in Ann(\mathcal{A}^+), \ e \circ e = a_0, \ e \circ x = f(x) - \frac{1}{2}\omega(a_0, x)e^*, \\ x \circ y = x * y - \omega_{\mathcal{H}}(f(x), y)e^* + \omega_{\mathcal{H}}(x, f(y))e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $x * y := \frac{1}{2}\big(x.y + (-1)^{|x||y|}y.x\big)$ et $f := \frac{1}{2}\big(\Phi + \Psi\big)$. D'après la Proposition 4.2, on déduit que $(\mathcal{A}^+, \omega)$ est une double extension généralisée de $(\mathcal{H}^+, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, a_0).

Maintenant, en utilisant les expressions de " $[,]$ " et " $\circ$" données ci-dessus et le fait que $ad_{\mathcal{A}^-}(x) \in (Der(\mathcal{A}^+))_{|x|}$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, on conclut que les conditions (6.1)-(6.4) sont satisfaites. D'après le

Théorème 6.1.1, on conclut que $(\mathcal{A}, \star, \omega)$ est une double extension symplectique paire généralisée de Poisson de la super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire $(\mathcal{H}, ., \omega_{\mathcal{H}})$ par l'algèbre $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, f, a_0, z_0).

Théorème 6.1.2. Soient $(\mathcal{A}, ., \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire et $\mathbb{K}e$ la super-algèbre Poisson-admissible de partie paire nulle. S'il existe $(D, f, x_0, z_0) \in Der(\mathcal{A})_{\bar{1}} \times End(\mathcal{A}^+)_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$, tel qu'on peut considérer $(\widetilde{\mathcal{A}}^+, \widetilde{\omega})$ la double extension de $(\mathcal{A}^+, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, z_0) et $(\widetilde{\mathcal{A}}^-, \widetilde{\omega})$ la double extension généralisée de $(\mathcal{A}^-, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, x_0) et que les conditions suivantes sont satisfaites

$$
\begin{aligned}
L_{x_0} &= D \circ f + f \circ D, && (6.5)\\
2D^*(z_0) &= 3f^*(x_0) - 2f(x_0), && (6.6)\\
[x, f(y)] &= -(-1)^{|x|}D(x) * y + (-1)^{|x|}f([x, y]), \forall x, y \in \mathcal{A}, && (6.7)\\
\frac{1}{2}\omega(x_0, x * y) &= \omega\big([(f + (-1)^{|x|}f^*)D - D^*(f^* - (-1)^{|x|}f)](x), y\big), && (6.8)\\
\omega(z_0, [x, y]) &= \omega\big([f^*(D^* + (-1)^{|x|}D) + (f + (-1)^{|x|}f^*)D](x), y\big), && (6.9)
\end{aligned}
$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ possède une structure de super-algèbre Poisson-admissible définie par

$$e^* \in Ann(\mathcal{A}), \quad e \star e = \frac{1}{2}x_0, \quad x \star y = x.y + \omega(\Phi(x), y)e^* - (-1)^{|x|}\omega(x, \Psi(y))e^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{A},$$

$$e \star x = \Phi(x) + \omega(z_0 + \frac{1}{4}x_0, x)e^*, \quad x \star e = (-1)^{|x|}\Psi(x) + (-1)^{|x|}\omega(z_0 - \frac{1}{4}x_0, x)e^*,$$

où $\Phi = \frac{1}{2}D + f$ et $\Psi = -\frac{1}{2}D + f$. La super-algèbre obtenue $(\widetilde{\mathcal{A}}, \star, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension symplectique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, f, x_0, z_0).

Preuve. La preuve est analogue à celle du Théorème 6.1.1.

Soit $\mathfrak{m}$ la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle. Il est clair que $\mathfrak{m}$ est une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire.

Proposition 6.2. *Soit $(\mathcal{A}, \star, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire différente de $\mathfrak{m}$. Si $Ann(\mathcal{A}) = Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \neq \{0\}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue de l'une des deux manières suivantes :*

1. *Une double extension symplectique paire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire par la super-algèbre de dimension 1 de partie paire nulle.*
2. *Une somme directe orthogonale d'un idéal bilatère gradué non-dégénéré de dimension 1 et de partie paire nulle et d'un idéal bilatère gradué non-dégénéré d'annulateur nul.*

Preuve. On distingue les deux cas suivants.

1er cas : Supposons que $dim(Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}) = 1$ et notons $Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e^*$ tel que $\omega(e^*, e^*) = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\alpha \neq 0$, alors $I := \mathbb{K}e^*$ est idéal bilatère gradué non-dégénéré de $\mathcal{A}$.

Par conséquent, $\mathcal{A} = I \oplus J$, où J est l'orthogonal de I relativement à ω. D'après le Lemme 1.3.2 et le fait que $Ann(\mathcal{A}) = \mathbb{K}e^*$, on déduit que J est un idéal bilatère gradué non-dégénéré de $\mathcal{A}$ d'annulateur non-nul. Si maintenant $\alpha = 0$, alors $I := \mathbb{K}e^*$ est totalement isotrope. D'après la parité et la non-dégénérescence de ω, il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ est non-dégénéré, par conséquent on obtient que $\mathcal{A} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ et $\omega_{\mathcal{H}} := \omega|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Le fait que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathcal{A}$ contenu dans J et que J est un idéal gradué de $\mathcal{A}$, implique que

$$x \star y = x.y + \gamma(x,y)e^*, \quad e \star x = \Phi(x) + \alpha(x)e^*, \quad x \star e = \Psi(x) + \beta(x)e^*, \quad e \star e = x_0, \ \forall x, y \in \mathcal{H},$$

où $x.y, \Phi(x), \Psi(x) \in \mathcal{H}$, $x_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x,y), \alpha(x), \beta(x) \in \mathbb{K}$. Comme $\mathcal{A}$ est une super-algèbre Poisson-admissible, alors $(\mathcal{H}, .)$ est aussi une super-algèbre Poisson-admissible. De plus, il est facile de voir que $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme symplectique paire sur $\mathcal{H}$. En utilisant, maintenant, le fait que ω est une structure symplectique paire sur $\mathcal{A}$, on déduit que $(\alpha - (-1)^{|x|}\beta)(x) = (-1)^{|x|}\omega_{\mathcal{H}}(x_0, x)$ et $\gamma(x,y) = \omega_{\mathcal{H}}(\Phi(x), y) + \omega_{\mathcal{H}}(x, \Psi(y))$. Par conséquent :

• Le crochet " $[,]$ " de la super-algèbre de Lie symplectique paire $(\mathcal{A}^-, \omega)$ est donné par :

$$\begin{cases} e^* \in \mathfrak{z}(\mathcal{A}^-), \quad [e,e] = 2x_0, \quad [e,x] = D(x) + \omega_{\mathcal{H}}(x_0, x)e^*, \\ [x,y] = [x,y]_{\mathcal{H}} + \omega_{\mathcal{H}}\big(D(x), y\big)e^* + (-1)^{|x|}\omega_{\mathcal{H}}\big(x, D(y)\big), \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $[x,y]_{\mathcal{H}} := x.y - (-1)^{|x||y|}y.x$ et $D(x) = \Phi(x) - (-1)^{|x|}\Psi(x)$. D'après la Proposition 5.3, on déduit que $(\mathcal{A}^-, \omega)$ est une double extension généralisée de $(\mathcal{H}^-, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(D, 2x_0)$.

• Le produit " $\circ$ " de la super-algèbre associative super-commutative symplectique paire $(\mathcal{A}^+, \omega)$ est de la forme :

$$\begin{cases} e^* \in Ann(\mathcal{A}^+), \quad e \circ e = 0, \quad e \circ x = f(x) + \frac{1}{2}(\alpha + (-1)^{|x|}\beta)(x)e^*, \\ x \circ y = x * y + \omega_{\mathcal{H}}(f(x), y)e^* - (-1)^{|x|}\omega_{\mathcal{H}}(x, f(y))e^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $x * y := x.y + (-1)^{|x||y|}y.x$ et $f(x) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x) + (-1)^{|x|}\Psi(x)\big)$. Comme $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme bilinéaire paire non-dégénérée sur $\mathcal{H}$ et $\frac{1}{2}\big(\alpha + (-1)^{|x|}\beta\big) \in \mathcal{H}^*_{\bar{0}}$, alors il existe un unique $z_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ tel que $\frac{1}{2}\big(\alpha + (-1)^{|x|}\beta\big) = \omega_{\mathcal{H}}(z_0, .)$. Par conséquent, d'après la Proposition 4.2, on a $(\mathcal{A}^+, \omega)$ est une double extension de $(\mathcal{H}^+, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, z_0). Maintenant, à l'aide d'un calcul simple, on montre que $ad_{\mathcal{A}^-}(x)$ est une super-dérivation homogène de degré $\mid x \mid$ de $\mathcal{A}^+$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, si et seulement si les conditions (6.5)-(6.9) sont satisfaites. Il s'ensuit d'après le Théorème 6.1.2, que $(\mathcal{A}, \omega)$ est une double extension symplectique paire généralisée de Poisson de la super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire $(\mathcal{H}, ., \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ au moyen de $(D, f, z_0, 2x_0)$.

2ème cas : Supposons maintenant que $dim(Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}}) \geq 2$. Comme le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors il existe $e^* \in Ann(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tel que $\omega(e^*, e^*) = 0$. Ensuite, en raisonnant de la même manière que dans le 1er cas, où $\omega(e^*, e^*) = 0$, on obtient que $\mathcal{A}$ est une double extension symplectique paire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique

paire par la super-algèbre de dimension 1 de partie paire nulle.

D'après la Proposition 6.1 et la Proposition 6.2, on peut déduire une description des super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques paires nilpotentes.

Corollaire 6.1.3. Toute super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire nilpotente non-nulle et différente de $\mathfrak{m}$ est obtenue à partir d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire nilpotente par une double extension symplectique paire généralisée de Poisson par une super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul.

Le fait que toute super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire nilpotente est obtenue à partir d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire nilpotente, nous permet de déduire une description inductive de ces super-algèbres. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble formé par $\{0\}$ et la super-algèbre $\mathfrak{m}$.

Corollaire 6.1.4. Soit $(\mathcal{A}, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique paire nilpotente. Si $\mathcal{A} \notin \mathcal{U}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}$ par une série finie de double extensions symplectiques paires généralisées de Poisson par l'algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul et/ou double extensions symplectiques paires généralisées de Poisson par la super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 et de partie paire nulle.

6.1.2 Super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques impaires

Théorème 6.1.5. Soient $(\mathcal{A}, ., \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire et $\mathbb{K}e$ l'algèbre Poisson-admissible à produit nul. S'il existe $(D, f, a_0, z_0) \in Der(\mathcal{A})_{\bar{0}} \times End(\mathcal{A}^+)_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$, tel qu'on peut considérer $(\widetilde{\mathcal{A}}^+, \widetilde{\omega})$ la double extension généralisée de $(\mathcal{A}^+, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, a_0) et $(\widetilde{\mathcal{A}}^-, \widetilde{\omega})$ la double extension de $(\mathcal{A}^-, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, z_0) et que les conditions suivantes sont satisfaites

$$0 = D(a_0), \tag{6.10}$$

$$0 = 2f^*(z_0) + D^*(a_0), \quad D \circ f = f \circ D, \tag{6.11}$$

$$0 = \omega(z_0, x * y) - \omega(\big[(f^* - f)D + D^*(f^* - f)\big](x), y), \tag{6.12}$$

$$0 = f \circ D - \frac{1}{2} ad_{\mathcal{A}^-}(a_0), \quad [x, f(y)] = -D(x) * y + f([x, y]), \ \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.13}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ possède une structure de super-algèbre Poisson-admissible définie par

$$e^* \in Ann(\mathcal{A}), \quad e \star e = a_0, \quad x \star y = x.y - \omega(\Phi(x), y)e^* + \omega(x, \Psi(y))e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A},$$

$$e \star x = \Phi(x) + \frac{1}{2}\omega(z_0 - a_0, x)e^*, \quad x \star e = \Psi(x) - \frac{1}{2}\omega(z_0 + a_0, x)e^*,$$

où $\Phi = \frac{1}{2}D + f$, $\Psi = -\frac{1}{2}D + f$. La super-algèbre $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension symplectique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, f, a_0, z_0).

Théorème 6.1.6. Soient $(\mathcal{A}, ., \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire et $\mathbb{K}e$ la super-algèbre Poisson-admissible de partie paire nulle. S'il existe $(D, f, x_0, z_0) \in Der(\mathcal{A})_{\bar{1}} \times End(\mathcal{A}^+)_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$, tel qu'on peut considérer $(\widetilde{\mathcal{A}}^+, \widetilde{\omega})$ la double extension de $(\mathcal{A}^+, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, z_0) et $(\widetilde{\mathcal{A}}^-, \widetilde{\omega})$ la double extension généralisée de $(\mathcal{A}^-, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, x_0) et que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned}
L_{x_0} &= D \circ f - f \circ D, \quad 2D^*(z_0) + 3f^*(x_0) - 2f(x_0) = 0 && (6.14)\\
[x, f(y)] &= -(-1)^{|x|}D(x) * y + (-1)^{|x|}f([x, y]), && (6.15)\\
\omega(z_0, [x, y]) &= -\omega\big(\big(f^*(D + (-1)^{|x|}D^*) + (f^* + (-1)^{|x|}f)D\big)(x), y\big), && (6.16)\\
\frac{1}{2}\omega(x_0, x * y) &= \omega\big(\big((f + (-1)^{|x|}f^*)D - D^*(f^* - (-1)^{|x|}f)\big)(x), y\big), \ \forall x, y \in \mathcal{A}, && (6.17)
\end{aligned}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ possède une structure de super-algèbre Poisson-admissible définie par

$$e^* \in Ann(\mathcal{A}), \quad e \star e = \frac{1}{2}x_0, \quad x \star y = x.y - \omega(\Phi(x), y)e^* + (-1)^{|x|}\omega(x, \Psi(y))e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A},$$

$$e \star x = \Phi(x) + \omega(z_0 - \frac{1}{4}x_0, x)e^*, \quad x \star e = (-1)^{|x|}\Psi(x) + (-1)^{|x|}\omega(z_0 + \frac{1}{4}x_0, x)e^*.$$

où $\Phi = \frac{1}{2}D + f$, $\Psi = -\frac{1}{2}D + f$. La super-algèbre $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension symplectique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(D, f, \frac{1}{2}x_0, z_0)$.

Proposition 6.3. *Soit $(\mathcal{A}, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire. Si $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$, alors $\mathcal{A}$ est obtenue à partir d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire par une double extension symplectique impaire généralisée de Poisson par une super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul.*

Preuve. Soit e^* est une élément homogène non-nul de $Ann(\mathcal{A})$. D'après la parité de ω, on a $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal bilatère gradué totalement isotrope de $\mathcal{A}$. D'après la non-dégénérescence de ω, il existe $e \in \mathcal{A}_{|e^*|+1}$ tel que $\omega(e^*, e) = 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ est non-dégénéré. Par conséquent $\mathcal{A} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ et $\omega_{\mathcal{H}} := \omega|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ relativement à ω. Comme $J := I^{\perp}$ est un iéal bilatère gradué de $\mathcal{A}$ qui contient $\mathcal{H}$, alors pour $x, y \in \mathcal{H}$ on a

$$x \star y = x.y + \gamma(x, y)e^*, \quad e \star x = \Phi(x) + \alpha(x)e^*, \quad x \star e = \Psi(x) + \beta(x)e^*,$$

$$\text{et} \quad e \star e = (1 + (-1)^{|e|})\lambda e + t_0 + \lambda'(1 - (-1)^{|e|})e^*,$$

où $x.y, \Phi(x), \Psi(x) \in \mathcal{H}$, $t_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x, y), \alpha(x), \beta(x), \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. Le fait que $\mathcal{A}$ est une super-algèbre Poisson-admissible, implique que $(\mathcal{H}, .)$ est aussi une super-algèbre Poisson-admissible. De plus, il est facile de voir que $\omega_{\mathcal{H}}$ est une forme symplectique impaire sur $\mathcal{H}$. Ensuite, le fait

que ω est un 2-cocycle scalaire de $\mathcal{A}$, implique que $\lambda = \lambda' = 0$, $(\alpha+\beta)(x) = -\omega_{\mathcal{H}}(t_0, x)$ et $\gamma(x,y) = -\omega_{\mathcal{H}}(\Phi(x), y) + \omega_{\mathcal{H}}(x, \Psi(y))$. Par conséquent :

• Le crochet " $[,]$ " de la super-algèbre de Lie symplectique impaire $(\mathcal{A}^-, \omega)$ est donné par :

$$\begin{cases} e^* \in \mathfrak{z}(\mathcal{A}^-), \quad [e,e] = (1-(-1)^{|e|})t_0, \\ [e,x] = D(x) + (\alpha(x) - (-1)^{|e||x|}\beta(x))e^*, \\ [x,y] = [x,y]_{\mathcal{H}} - \omega_{\mathcal{H}}\big(D(x), y\big)e^* - (-1)^{|e||x|}\omega_{\mathcal{H}}\big(x, D(y)\big), \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $[x,y]_{\mathcal{H}} := x.y - (-1)^{|x||y|}y.x$ et $D(x) = \Phi(x) - (-1)^{|e||x|}\Psi(x)$.

• Le produit "$\circ$" de la super-algèbre associative super-commutative symplectique impaire $(\mathcal{A}^+, \omega)$ s'exprime par :

$$\begin{cases} e^* \in Ann(\mathcal{A}^+), \quad e \circ e = \frac{1}{2}(1+(-1)^{|e|})t_0, \\ e \circ x = f(x) + \frac{1}{2}\big(\alpha(x) + (-1)^{|e||x|}\beta(x)\big)e^*, \\ x \circ y = x * y - \omega_{\mathcal{H}}(f(x), y)e^* + (-1)^{|e||x|}\omega_{\mathcal{H}}(x, f(y))e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $x * y := x.y + (-1)^{|x||y|}y.x$ et $f(x) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x) + (-1)^{|e||x|}\Psi(x)\big)$.

On peut vérifier facilement qu'il existe un unique $z_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ tel que :

$$\alpha(x) - (-1)^{|e||x|}\beta(x) = -\frac{1}{2}(1-(-1)^{|e|})\omega_{\mathcal{H}}(t_0, x) + \frac{1}{2}(1+(-1)^{|e|})\omega_{\mathcal{H}}(z_0, x)$$

et

$$\frac{1}{2}\big(\alpha(x) + (-1)^{|e||x|}\beta(x)\big) = -\frac{1}{4}(1+(-1)^{|e|})\omega_{\mathcal{H}}(t_0, x) + \frac{1}{2}(1-(-1)^{|e|})\omega_{\mathcal{H}}(z_0, x).$$

Il s'ensuit, d'après la Proposition 4.4, que $(\mathcal{A}^+, \omega)$ est une double extension généralisée (resp. une double extension) de $(\mathcal{H}^+, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(f, a_0 := t_0)$ (resp. (f, z_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair). Ensuite, d'après la Proposition 5.5, $(\mathcal{A}^-, \omega)$ est une double extension (resp. une double extension généralisée) de $(\mathcal{H}^-, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, z_0) (resp. $(D, x_0 := 2t_0)$ si e est un élément homgène pair (resp. impair). Finalement à l'aide d'un calcul simple, on montre que $ad_{\mathcal{A}^-}(x)$ est une super-dérivation homogène de degré $\mid x \mid$ de $\mathcal{A}^+$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$, si et seulement si les conditions (6.10)-(6.13) (resp. (6.14)-(6.17)) sont satisfaites si e est un élément homogène pair (resp. impair). D'où, d'après le Théorème 6.1.5 (resp. le Théorème 6.1.6), on conclut que $(\mathcal{A}, \omega)$ est une double extension symplectique impaire généralisée de Poisson de la super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire $(\mathcal{H}, ., \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, f, a_0, z_0) (resp. (D, f, x_0, z_0)).

Comme application de la Proposition 6.3, on donne dans le corollaire suivant une description des super-algèbres Poisson-admissibles symplectiques impaires nilpotentes.

Corollaire 6.1.7. Toute super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire nilpotente et obtenue à partir d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire nilpotente par une double extension généralisée symplectique impaire par l'algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul ou une double extension généralisée symplectique impaire par la super-algèbre

Poisson-admissible de dimension 1 et de partie paire nulle.

Le fait que toute super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire nilpotente est obtenue à partir d'une super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire nilpotente, nous permet de déduire une description inductive de ces super-algèbres.

Corollaire 6.1.8. Toute super-algèbre Poisson-admissible symplectique impaire nilpotente non-nulle est obtenue à partir de $\{0\}$ par série finie de double extensions généralisées symplectiques impaires par l'algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul et/ou double extensions généralisées symplectiques impaires par la super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 et de partie paire nulle.

6.2 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes

6.2.1 Construction des super-algèbres de Lie quaratiques homogènes à partir des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes

Dans ce paragraphe, on montre comment on peut construire des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes à partir des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes. On utilise dans cette construction le concept de la double extension des super-algèbres de Lie quadratiques paires et le concept de le double extension impaire des super-algèbres de Lie quadratiques impaires introduites respectivement dans [9] et [2]. On commence par rappeler le lemme suivant.

Lemme 6.2.1. Soient $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}}, B_{\mathfrak{g}})$ une super-algèbre de Lie quadratique paire et $(\mathcal{A}, \circ, B_{\mathcal{A}})$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire (resp. symétrique impaire). Alors, l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ possède une structure de super-algèbre de Lie définie par

$$[x \otimes a, y \otimes b] := (-1)^{|a||y|}[x, y]_{\mathfrak{g}} \otimes a \circ b, \ \forall x \in \mathfrak{g}_{|x|}, y \in \mathfrak{g}_{|y|}, \forall a \in \mathcal{A}_{|a|}, b \in \mathcal{A}_{|b|}. \tag{6.18}$$

De plus, la forme bilinéaire B définie par

$$B(x \otimes a, y \otimes b) \quad := \quad (-1)^{|a||y|} B_{\mathfrak{g}}(x, y) B_{\mathcal{A}}(a, b), \tag{6.19}$$

où $x \otimes a \in (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A})_{|x|+|a|}, y \otimes b \in (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A})_{|y|+|b|}$, est une structure quadratique paire (resp. quadratique impaire) sur $\mathfrak{g} \oplus \mathcal{A}$. Si $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}}, B_{\mathfrak{g}})$ est une super-algèbre de Lie quadratique impaire, alors $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ munie du produit (6.18) et de la forme (6.19) est une super-algèbre de Lie quadratique impaire (resp. quadratique paire).

Preuve. A l'aide d'un calcul simple, on vérifie que le crochet $[,]$ défini comme dans l'equation (6.18) est un crochet de Lie. De plus, il est clair par définition, que la forme bilinéaire B est

non-dégénérée, paire (resp. impaire) si $B_{\mathcal{A}}$ est paire (resp. impaire) telle que

$$\begin{aligned} B([x\otimes a, y\otimes b], z\otimes c) &= (-1)^{|y||a|}B([x,y]\otimes a\circ b, z\otimes c) \\ &= (-1)^{|y||a|+|z|(|a|+|b|)}B_{\mathfrak{g}}([x,y],z)B_{\mathcal{A}}(a\circ b, c) \\ &= (-1)^{|y||a|+|z|(|a|+|b|)}B_{\mathfrak{g}}(x,[y,z])B_{\mathcal{A}}(a, b\circ c) \\ &= B(x\otimes a, [y\otimes b, z\otimes c]) \end{aligned}$$

Par conséquent, B est un produit scalaire invariant (resp. un produit scalaire invariant impaire) sur $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$. On conclut que $(\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. quadratique impaire) si $B_{\mathcal{A}}$ est une structure symétrique paire (resp. impaire) sur $\mathcal{A}$.

Dans la suite, on considère que $(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ est l'algèbre de Lie simple $(sl_2(\mathbb{K}), \mathcal{K})$, où $\mathcal{K}$ est la forme de Killing de $sl_2(\mathbb{K})$. D'après le Lemme 6.2.1, on a $(sl_2(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. quadratique impaire) si $(\mathcal{A}, B_{\mathcal{A}})$ est une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire (resp. symétrique impaire).

Lemme 6.2.2. Soit $(\mathcal{A}, B_{\mathcal{A}})$ une super-algèbre associative super-commutative symétrique paire (resp. symétrique impaire) admettant une super-dérivation D homogène de degré d et super-anti-symétrique. Alors l'endomorphisme $\bar{D}$ de $(sl_2(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A}, B)$ défini par

$$\bar{D}(x\otimes a) := x\otimes D(a), \quad \forall (x\otimes a)\in sl_2(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A},$$

est une super-dérivation homogène de degré d et super-anti-symétrique relativement à B. De plus, $\bar{D}$ est une super-dérivation intérieure si et seulement si $D=0$.

Preuve. La preuve est analogue à celle du cas non-gradué [16] qui utilise l'existence d'une base $\{E, E, H\}$ de $sl_2(\mathbb{K})$ qui vérifie $[H,E]=E$, $[H,F]=-F$ et $[E,F]=2H$.

Maintenant, soit $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire (resp. quadratique impaire). Il est clair, d'après l'invariance de B, que $\gamma_x := ad_{\mathcal{A}^-}(x)$ est une super-dérivation homogène B-super-antisymétrique de $\mathcal{A}^+$, de degré $\mid x \mid$ telle que γ_x est non-nulle si $x\notin\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-)$. En outre, d'après le Lemme 6.2.1, on déduit que $sl_2(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A}^+$ est une super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. quadratique impaire). Par conséquent, par le Lemme 6.2.2, $\overline{\gamma_x}$ est une super-dérivation homogène de $sl_2(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A}^+$ de degré $\mid x \mid$, super-antisymétrique et qui n'est pas intérieure si $x\notin\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-)$. D'après [9] et [2], on peut considérer $\mathfrak{g}(\mathcal{A})$ la double extension (resp. la double extension impaire) de la super-algèbre de Lie quadratique paire (resp. quadratique impaire) $sl_2(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A}^+$ par la super-algèbre de Lie $\mathcal{A}^-$ au moyen du morphisme de super-algèbres de Lie $\phi : \mathcal{A}^- \longrightarrow Der_a(sl_2(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A}^+)$ défini par $\phi(x)=\overline{\gamma_x}$. On remarque que la dimension de le super-algèbre de Lie obtenue $\mathfrak{g}(\mathcal{A})$ est égale à $5n$, où $n = dim\mathcal{A}$.

Remarque 17. Dans cette construction, on peut remplacer l'algèbre de Lie simple $sl_2(\mathbb{K})$ par une algèbre de Lie simple arbitraire. Une question naturelle se pose : peut-on généraliser cette construction au cas des super-algèbre de Lie simple ? Pour les super-algèbre de Lie simple $spl(1,2)$

et $osp(1,2)$ cette construction reste valable.

6.2.2 Double extensions généralisées des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes

Ce paragraphe est consacré à l'introduction des double extensions généralisées des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes nécessaires pour l'étude des super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes. Les différentes types de double extensions généralisées des super-algèbres de Lie quadratiques homogènes et des super-algèbres associatives super-commutatives symétriques homogènes introduites dans les deux chapitres précédents vont être très utiles dans ce paragraphe.

6.2.2.1 Double extension généralisée d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire par une super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul

Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire et $\mathbb{K}e$ une super-algèbre Poisson-admissible à produit nul. Rappelons que :

• S'il existe $(f, a_0, k) \in (End(\mathcal{A}^+, *))_{|e|} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathbb{K}$ tel que

$$f^2 = L_{a_0}, \quad f \circ L_x = L_{f(x)}, \quad B(f(x), y) = B(x, f(y)), \tag{6.20}$$

$$(\text{resp. } f^2 = 0, \ f \circ L_x = L_{f(x)}, \ B(f(x), y) = (-1)^{|x|} B(x, f(y)),) \ \ \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.21}$$

alors on peut considérer la double extension généralisée (resp. la double extension) $(\widetilde{\mathcal{A}}^+, \widetilde{B})$ de la super-algèbre associative super-commutative symétrique paire $(\mathcal{A}^+, B)$ par l'algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul au moyen de (f, a_0, k) (resp. la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de f). (Pour plus de détail, on peut voir le Corollaire 4.2.2)

• En outre, s'il existe $(D, x_0) \in Der_a(\mathcal{A}^-, [,])_{|e|} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que

$$D^2 = 0, \tag{6.22}$$

$$(\text{resp. } D^2 = ad_{\mathcal{A}^-}(x_0), \ D(x_0) = 0, \ B(x_0, x_0) = 0,) \tag{6.23}$$

alors on peut considérer la double extension (resp. la double extension généralisée) $(\widetilde{\mathcal{A}}^-, \widetilde{B})$ de la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\mathcal{A}^-, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de D (resp. (D, x_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair). (Pour plus de détail, on peut voir la Proposition 3.1.2 [13] (resp. le Théorème 2.3 [9])).

Maintenant, on suppose que toutes les conditions ci-dessus sont satisfaites et on montre dans le Théorème 6.2.3 (resp. le Théorème 6.2.4) suivant comment on peut définir sur l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué, $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ une structure de Poisson-admissible quadratique paire.

Théorème 6.2.3. Soient $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire et $\mathbb{K}e$ la super-algèbre Poisson-admissible de partie paire nulle. Soit $(f, D, x_0) \in End(\mathcal{A}^+)_{\bar{1}} \times Der_a(\mathcal{A}^-)_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}}$ tel que les conditions (6.21) et (6.23) sont satisfaites. De plus, si on a

$$[f, D] = L_{x_0}, \quad D \in (Der(\mathcal{A}^+))_{\bar{1}}, \tag{6.24}$$

$$D(x) * y = f([x, y]) + (-1)^{|x||y|} [f(y), x], \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.25}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ muni de l'application bilinéaire $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$e^* \in Ann(\mathcal{A}), \quad e \star e = \frac{1}{2} x_0, \quad x \star y = x.y - B(\Phi(x), y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$$

$$e \star x = \Phi(x) - \frac{1}{2} B(x_0, x) e^*, \quad x \star e = (-1)^{|x|} \Psi(x) + \frac{1}{2} B(x_0, x) e^*,$$

où $\Phi = \frac{1}{2} D + f$ et $\Psi = -\frac{1}{2} D + f$, est une super-algèbre Poisson-admissible. La super-algèbre Poisson-admissible $\widetilde{\mathcal{A}}$ munie de la forme bilinéaire super-symétrique $\widetilde{B}$, définie comme dans le Corollaire 4.2.2, est une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire appelée la double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de (f, D, x_0).

Preuve. La preuve consiste à montrer que $ad_{\widetilde{\mathcal{A}}^-}(x)$ est une super-dérivation de $(\widetilde{\mathcal{A}}^+, \circ)$ homogène de degré $\mid x \mid$, $\forall x \in (\widetilde{\mathcal{A}}^+)_{|x|}$. Par un calcul simple, on vérifie que $ad_{\widetilde{\mathcal{A}}^-}(e) \in (Der(\widetilde{\mathcal{A}}))_{\bar{1}}$ si et seulement si les conditions (6.24) sont satisfaites. De plus, $ad_{\widetilde{\mathcal{A}}^-}(x) \in (Der(\widetilde{\mathcal{A}}^+))_{|x|}$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$ si et seulement si la condition (6.25) est satisfaite. D'où, $(\widetilde{\mathcal{A}}, [,], \circ)$ est une super-algèbre de Poisson et par conséquent $\widetilde{\mathcal{A}}$ muni du produit $x \star y := \frac{1}{2} [x, y] + x \circ y$, $\forall x, y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ qui coïncide avec celui du Théorème 6.2.3 est une super-algèbre Poisson-admissible.

Théorème 6.2.4. Soient $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire et $\mathbb{K}e$ l'algèbre Poisson-admissible à produit nul. Soit $(f, D, a_0, k) \in End(\mathcal{A}^+)_{\bar{0}} \times Der_a(\mathcal{A}^-)_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathbb{K}$ tel que les conditions (6.20) et (6.22) sont satisfaites. De plus, si on a

$$[f, D] = 0, \quad D(a_0) = 0, \quad D \in (Der(\mathcal{A}^+))_{\bar{0}}, \tag{6.26}$$

$$(f \circ D) = \frac{1}{2} ad_{a_0}, \quad D(x) * y = f([x, y]) + (-1)^{|x||y|} [f(y), x], \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.27}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ muni de l'application bilinéaire $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$e^* \in Ann(\mathcal{A}), \quad e \star e = a_0 + k e^*, \quad x \star y = x.y + B(\Phi(x), y) e^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{A},$$

$$e \star x = \Phi(x) + B(a_0, x) e^*, \; x \star e = \Phi^*(x) + B(a_0, x) e^*,$$

où $\Phi := \frac{1}{2} D + f$ et Φ^* est l'adjoint de Φ relativement à B, est une super-algèbre Poisson-admissible. La super-algèbre Poisson-admissible $\widetilde{\mathcal{A}}$ munie de la forme bilinéaire $\widetilde{B}$, définie comme dans le Corollaire 4.2.2, est une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire appelée la double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $\mathcal{A}$ par l'algèbre $\mathbb{K}e$ au moyen de

(D, f, a_0, k).

Proposition 6.4. *Soit $(\mathcal{A}, \star, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire. S'il existe un élément homogène non nul e^* de $Ann(\mathcal{A})$ tel que $B(e^*, e^*) = 0$, alors $\mathcal{A}$ est une double extension quadratique paire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\mathcal{H}, ., B_{\mathcal{H}})$, où $dim\mathcal{H} = dim\mathcal{A} - 2$, par une super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul.*

Preuve. Notons $I := \mathbb{K}e^*$ et J son orthogonal relativement à B. Il est clair que $I \subseteq J$. D'après la parité et la non-dégénérescence de B, il existe un élément homogène non nul e de $\mathcal{A}$ de même degré que e^* tel que $B(e, e) = 0$ et $B(e^*, e) = 1$. D'où, le sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ de $\mathcal{A}$ est non-dégénéré. Par conséquent, $\mathcal{A} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{W}$ et $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. Comme $I \oplus \mathcal{H} \subseteq J$ et $dim(I \oplus \mathcal{H}) = dimJ$, alors $J = I \oplus \mathcal{H}$ et par conséquent pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$x \star y = x.y + \gamma(x, y)e^*, \quad e \star x = \Phi(x) + \alpha(x)e^*, \quad x \star e = \Psi(x) + \beta(x), \quad e \star e = ke^* + t_0 + k'e,$$

où $x.y, \Phi(x), \Psi(x) \in \mathcal{H}$, $t_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x, y), \alpha(x), \beta(x), k, k' \in \mathbb{K}$ (plus précisément $k, k' \in \mathbb{K}_{|e|}$). Le fait que " $\star$ " est une structure de Poisson-admissible implique que "." est aussi une structure de Poisson-admissible sur $\mathcal{H}$. De plus, en utilisant l'associativité de B pour $x, y, z \in \mathcal{H}$, on déduit que $B_{\mathcal{H}}$ est associative. On conclut que $(\mathcal{H}, ., B_{\mathcal{H}})$ est une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire. En appliquant à nouveau l'invariance de B, on obtient que $\gamma(x, y) = (-1)^{|e|}B_{\mathcal{H}}(\Phi(x), y)$, $B_{\mathcal{H}}(\Psi(x), y) = B_{\mathcal{H}}(x, \Phi(y))$, $\beta(x) = (-1)^{|e|}\alpha(x) = B_{\mathcal{H}}(t_0, x)$ et $k' = 0$. Par conséquent :

• Le crochet $[,]$ de la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\mathcal{A}^-, B)$ peut être exprimé de la façon suivante

$$\begin{cases} e^* \in \mathfrak{z}(\mathcal{A}^-), \quad [e, e] = (1 - (-1)^{|e|})t_0, \\ [e, x] = D(x) - (1 - (-1)^{|e|})B_{\mathcal{H}}(t_0, x)e^*, \\ [x, y] = [x, y]_{\mathcal{H}} + (-1)^{|e|}B_{\mathcal{H}}(D(x), y)e^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $[x, y]_{\mathcal{H}} = x \star y - (-1)^{|x||y|}y \star x$ et $D(x) = \Phi(x) - (-1)^{|e||x|}\Psi(x)$. D'après Le Théorème 2 de [13] (resp. le Théorème 3.1 de [9]), on déduit que $(\mathcal{A}^-, [,], B)$ est une double extension (resp. une double extension généralisée) de $(\mathcal{H}^-, [,]_{\mathcal{H}}, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de D (resp. $(D, x_0 := 2t_0)$) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

• Le produit " $\circ$ " de la super-algèbre associative super-commutative $(\mathcal{A}^+, B)$ est donné par

$$\begin{cases} e^* \in Ann(\mathcal{A}^+), \quad e \circ e = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})(ke^* + t_0), \\ e \circ x = f(x) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{|e|})B_{\mathcal{H}}(t_0, x)e^*, \\ x \circ y = x * y + (-1)^{|e|}B_{\mathcal{H}}(f(x), y)e^*, \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $x * y = x \star y + (-1)^{|x||y|}y \star x$ et $f(x) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x) + (-1)^{|e||x|}\Psi(x)\big)$. D'après la Proposition 4.8, on a $(\mathcal{A}^+, B)$ est une double extension généralisée (resp. une double extension) de $(\mathcal{H}^+, *, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(f, a_0 := t_0, k)$ (resp. f) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

Maintenant, le fait que $ad_{\mathcal{A}^-}(x) \in (Der(\mathcal{A}^+))_{|x|}$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}$ implique que les conditions (6.26) et (6.27) (resp. (6.24) et (6.25)) sont satisfaites. D'où, d'après le Théorème 6.2.4 (resp. le Théorème 6.2.3), $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, f, a_0, k) (resp. (f, D, x_0)) si e est un élément homogène pair (resp. impair).

6.2.2.2 Double extension généralisée d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire par la super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 et de partie paire nulle

Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire et $\mathbb{K}e$ la super-algèbre Poisson-admissible de partie paire nulle. Rappelons que :

• S'il existe $f \in (End(\mathcal{A}^+))_{\bar{1}}$ tel que

$$f^2 = 0, \quad f^*(x) = (-1)^{|x|} f(x), \quad f \circ L_x = L_{f(x)}, \forall x \in \mathcal{A}, \tag{6.28}$$

alors, d'après le Corollaire 4.2.7, on peut considérer la double extension $(\widetilde{\mathcal{A}}^+, \widetilde{B})$ de $(\mathcal{A}^+, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de f.

• En outre, s'il existe $(D, x_0, k) \in (Der_a(\mathcal{A}^-))_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathbb{K}$ tel que

$$D^2 = \frac{1}{2} ad_{x_0}, \ D(x_0) = 0, \tag{6.29}$$

alors, d'après le Théorème 3.2 de [2], on peut considérer la double extension généralisée $(\widetilde{\mathcal{A}}^-, \widetilde{B})$ de $(\mathcal{A}^-, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, x_0, k).

Dans le théorème suivant, on définit la double extension généralisée de la super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle.

Théorème 6.2.5. Soient $(\mathcal{A}, ., B)$ une super-algèbre Poisson-admisible quadratique impaire et $\mathbb{K}e$ la super-algèbre Poisson-admissible de partie paire nulle. Supposons qu'il existe $(f, D, x_0, k) \in (End(\mathcal{A}^+))_{\bar{1}} \times (Der_a(\mathcal{A}^-))_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathbb{K}$ tel que les conditions (6.28) et (6.29) sont satisfaites. Si de plus les conditions suivantes sont satisfaites

$$[D, f] = L_{x_0}, \quad D \in (Dr(\mathcal{A}^+))_{\bar{1}}, \tag{6.30}$$

$$f([x, y]) = D(x) * y + (-1)^{|x|} [x, f(y)], \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.31}$$

alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\widetilde{\mathcal{A}} := P(\mathbb{K}e^*) \oplus \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}e$ muni du produit $\star$ défini par

$$e^* \in Ann(\mathcal{A}), \qquad e \star e = \frac{1}{2}(ke^* + x_0), \qquad x \star y = x.y + B(\Phi(x), y)e^*, \forall x, y \in \mathcal{A}$$

$$e \star x = \Phi(x) + \frac{1}{2} B(x_0, x)e^*, \ x \star e = \Phi^*(x) + \frac{1}{2} B(x_0, x)e^*,$$

où $\Phi = \frac{1}{2}D + f$ et Φ^* est l'adjoint de Φ relativement à B, est une super-algèbre Poisson-admissible. De plus, la forme bilinéaire $\widetilde{B}$, définie comme dans le Corollaire 4.2.7, est une structure quadratique impaire sur $\widetilde{\mathcal{A}}$. La super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ est appelée la double extension quadratique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, D, x_0, k).

Proposition 6.5. *Soit $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire. Si $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} \neq \{0\}$, alors $\mathcal{A}$ est une double extension quadratique impaire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.*

Preuve. Supposons que e^* est un élément non nul de $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}}$ et notons $I := \mathbb{K}e^*$ et J son orthogonal relativement à B. Il est clair d'après le parité de B que $I \subseteq J$. Ensuite, le fait que B est impaire et non dégénérée implique qu'il existe $e \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tel que $B(e^*, e) = 1$. Par conséquent, le sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} := \mathbb{K}e^* \oplus \mathbb{K}e$ de $\mathcal{A}$ est non-dégénéré. D'où, $\mathcal{A} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{W}$ et $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. Comme $I \oplus \mathcal{H} \subseteq J$ et $dim(I \oplus \mathcal{H}) = dimJ$, alors $J = I \oplus \mathcal{H}$. Par conséquent, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$x \star y = x.y + \gamma(x, y)e^*, \quad e \star x = \Phi(x) + \alpha(x)e^*, \quad x \star e = \Psi(x) + \beta(x), \quad e \star e = ke^* + t_0,$$

où $x.y, \Phi(x), \Psi(x) \in \mathcal{W}$, $t_0 \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$ et $\gamma(x, y), \alpha(x), \beta(x), k, \in \mathbb{K}$. On vérifie facilement que $(\mathcal{H}, .)$ est une super-algèbre Poisson-admissible. De plus, d'après l'invariance de B, on a $B_{\mathcal{H}}$ est invariante, $\gamma(x, y) = B_{\mathcal{H}}(\Phi(x), y)$, $\Psi = \Phi^*$ et $\alpha(x) = \beta(x) = B_{\mathcal{H}}(t_0, x)$. Par conséquent :

• Le crochet " $[,]$ " de la super-algèbre de Lie quadratique impaire $(\mathcal{A}^-, B)$ est donné par :

$$\begin{cases} e^* \in \mathfrak{z}(\mathcal{A}^-), \quad [e, e] = 2(t_0 + ke^*), \\ [e, x] = D(x) + 2B_{\mathcal{H}}(t_0, x)e^*, \\ [x, y] = [x, y]_{\mathcal{H}} + B_{\mathcal{H}}(D(x), y)e^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $[x, y]_{\mathcal{H}} := x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x$ et $D(x) = \Phi(x) - (-1)^{|x|}\Psi(x)$. D'après la Proposition 2.15 de [2], on déduit que $(\mathcal{A}^-, B)$ est une double extension généralisée impaire de $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (D, t_0, k).

• Quant à le produit " $\circ$ " de la super-algèbre associative super-commutative symétrique impaire $(\mathcal{A}^+, B)$, il est donné par :

$$\begin{cases} e^* \in Ann(\mathcal{A}^+), \quad e \circ e = 0, \\ e \circ x = f(x), \quad x \circ y = x * y + B_{\mathcal{H}}(f(x), y)e^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $x * y := x \star y + (-1)^{|x||y|} y \star x$ et $f(x) = \frac{1}{2}(\Phi(x) + (-1)^{|x|}\Psi(x))$. D'après le Théorème 3.4.8, on a $(\mathcal{A}^+, B)$ est une double extension de $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de f.

Maintenant le fait que $ad_{\mathcal{A}^-}(x) \in Der(\mathcal{A}^+)$, $\forall x \in \mathcal{A}$ implique que les conditions (6.30) et (6.31) sont satisfaites. Par conséquent, d'après le Théorème 6.2.5, $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension

quadratique impaire généralisée de Poisson de la super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de (f, D, t_0, k).

6.2.2.3 Double extension d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique homogène par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ à produit nul telle que $dim\mathcal{V}_{\bar{0}} = dim\mathcal{V}_{\bar{1}} = 1$

Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire et $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} := \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} := \mathbb{K}e_1$, la super-algèbre Poisson-admissible à produit nul. Rappelons que :

• S'il existe $(f_0, f_1, a_0, a_1, k) \in (End(\mathcal{A}^+))_{\bar{0}} \times (End(\mathcal{A}^+))_{\bar{1}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathbb{K}$ tel que les conditions (4.14), (4.16) et (4.17) sont satisfaites, alors d'après le Théorème 4.2.5, on peut considérer la double extension généralisée $(\mathfrak{t}^+, \gamma)$ de $(\mathcal{A}^+, B)$ par $\mathcal{V}^+$ au moyen de (f_0, f_1, a_0, a_1, k).

• S'il existe $(D_0, D_1, x_0, x_1, k') \in (Der_a(\mathcal{A}^-))_{\bar{0}} \times (Der_a(\mathcal{A}^-))_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{0}} \times \mathcal{A}_{\bar{1}} \times \mathbb{K}$ tel que les conditions (5.26) et (5.27) sont satisfaites, alors d'après le Théorème 5.3.5, on peut considérer la double extension généralisée $(\mathfrak{t}^-, \gamma)$ de $(\mathcal{A}^-, B)$ par $\mathcal{V}^-$ au moyen de (D_0, D_1, x_0, x_1, k').

Dans le théorème suivant, on introduit la notion de la double extension généralisée de la super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V}$ à produit nul.

Théorème 6.2.6. Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire et $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, la super-algèbre Poisson-admissible à produit nul. On suppose qu'on peut considérer $(\mathfrak{t}^+, \gamma)$ la double extension généralisée de $\mathcal{A}^+$ par $\mathcal{V}^+$ (au moyen de (f_0, f_1, a_0, a_1, k)) et $(\mathfrak{t}^-, \gamma)$ la double extension généralisée de $\mathcal{A}^-$ par $\mathcal{V}^-$ (au moyen de (D_0, D_1, x_0, x_1, k')) telles que $B(a_0, x_0) = 2B(x_1, a_1)$ et

$$
\begin{aligned}
0 &= D_0(a_0) && (6.32)\\
L_{x_0} &= [f_1, D_1], && (6.33)\\
D_i &\in (Der(\mathcal{A}^+))_{\bar{i}}, && (6.34)\\
\frac{1}{2}ad_{a_0} &= f_0 \circ D_0 = D_0 \circ f_0, && (6.35)\\
L_{x_1} &= [D_0, f_1] = [f_0, D_1], && (6.36)\\
ad_{a_1} &= f_0 \circ D_1 + f_1 \circ D_0, && (6.37)\\
D_1(a_1) &= f_0(x_0) + f_1(x_1) && (6.38)\\
D_0(a_1) &= D_1(a_0) = -2f_0(x_1) && (6.39)\\
D_i(x) * y &= f_i([x, y]) + (-1)^{|x||y|}[f_i(x), y], \ \forall i \in \{0, 1\}. && (6.40)
\end{aligned}
$$

Alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{t} := \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{V}$ muni du produit $\star : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{t}$ défini par

$$x \star y = x.y + B(\Phi_0(x), y)e_0^* - B(\Phi_1(x), y)e_1^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A},$$

$$e_0 \star x = \Phi_0(x) + B(a_0, x)e_0^* - B(t_1', x)e_1^*, \quad x \star e_0 = \Phi_0^*(x) + B(a_0, x)e_0^* - B(t_1, x)e_1^*,$$

$$e_1 \star x = \Phi_1(x) + B(t_1, x)e_0^* - \frac{1}{2}B(x_0, x)e_1^*, \quad x \star e_1 = (-1)^{|x|}\Psi_1(x) - B(t_1', x)e_0^* + \frac{1}{2}B(x_0, x)e_1^*,$$

$$e_0 \star e_1 = \frac{1}{2}k'e_1^* + t_1, \quad e_1 \star e_0 = -\frac{1}{2}k'e_1^* + t_1', \quad e_0 \star e_0 = ke_0^* + a_0, \quad e_1 \star e_1 = \frac{k'}{2}e_0^* + \frac{x_0}{2},$$

où $\Phi_0 = \frac{1}{2}D_0 + f_0$, $\Phi_1 = \frac{1}{2}D_1 + f_1$, $\Psi_1 = -\frac{1}{2}D_1 + f_1$, $t_1 = \frac{1}{2}x_1 + a_1$ et $t_1' = -\frac{1}{2}x_1 + a_1$, est une super-algèbre Poisson-admissible. De plus, la forme bilinéaire γ, définie comme le Théorème 4.2.5, est une structure quadratique paire sur $\mathfrak{t}$. La super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\mathfrak{t}, \gamma)$ est appelée la double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par $\mathcal{V}$ au moyen de $(f_i, D_i, a_i, x_i, k, k')$, où $i \in \{0, 1\}$.

Maintenant supposons que $(\mathcal{A}, B)$ est une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire et $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} := \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} := \mathbb{K}e_1$, la super-algèbre Poisson-admissible à produit nul. Rappelons que :

• S'il existe $(f_i, a_i, k) \in (End(\mathcal{A}^+))_{\bar{i}} \times \mathcal{A}_{\bar{i}} \times \mathbb{K}$, où $i \in \{0, 1\}$, tel que (4.26), (4.16) et (4.17) sont satisfaites alors, d'après le Théorème 4.2.9, on peut considérer la double extension généralisée $(\mathfrak{t}^+, \gamma)$ de $(\mathcal{A}^+, B)$ par $\mathcal{V}^+$ au moyen de (f_i, a_i, k), où $i \in \{0, 1\}$.

• S'il existe $(D_i, x_i, k') \in (Der_a(\mathcal{A}^-))_{\bar{i}} \times \mathcal{A}_{\bar{i}} \times \mathbb{K}$, où $i \in \{0, 1\}$, tel que (5.16) et (5.17) sont satisfaites, alors, d'après le Théorème 5.3.3, on peut considérer la double extension généralisée $(\mathfrak{t}^-, \gamma)$ de $(\mathcal{A}^-, B)$ par $\mathcal{V}^-$ au moyen de (D_i, x_i, k'), où $i \in \{0, 1\}$.

Dans le théorème suivant, on introduit la notion de la double extension généralisée de la super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V}$ à produit nul.

Théorème 6.2.7. Soient $(\mathcal{A}, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire et $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ la super-algèbre Poisson-admissible à produit nul telle que $dim\mathcal{V}_{\bar{0}} = dim\mathcal{V}_{\bar{1}} = 1$. Supposons qu'on peut considérer la double extension généralisée $(\mathfrak{t}^+, \gamma)$ de $(\mathcal{A}^+, B)$ par $\mathcal{V}^+$ (au moyen de (f_i, a_i, k)) et $(\mathfrak{t}^-, \gamma)$ la double extension impaire généralisée de $(\mathcal{A}^-, B)$ par $\mathcal{V}^-$ (au moyen de (D_i, x_i, k')). Si de plus, on a $B(a_0, x_1) = 0$ et les conditions (6.32)-(6.40) sont satisfaites, alors l'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathfrak{t} := P(\mathcal{V}^*) \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{V}$ muni du produit $\star : \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{t}$ défini par

$$x \star y = x.y + B(\Phi_0(x), y)e_1^* + B(\Phi_1(x), y)e_1^*,$$

$$e_0 \star x = \Phi_0(x) - B(t_1, x)e_0^* + B(a_0, x)e_1^*, \quad x \star e_0 = \Phi_0^*(x) - B(t_1', x)e_0^* + B(a_0, x)e_1^*,$$

$$e_1 \star x = \Phi_1(x) + \frac{1}{2}B(x_0, x)e_0^* + B(t_1, x)e_1^*, \quad x \star e_1 = \Phi_1^*(x) - \frac{1}{2}B(x_0, x)e_0^* - B(t_1', x)e_1^*,$$

$$e_0 \star e_1 = ke_1^* + t_1, \quad e_1 \star e_0 = ke_1^* + t_1', \quad e_0 \star e_0 = ke_0^* + a_0, \quad e_1 \star e_1 = \frac{1}{2}k'e_0^* + \frac{1}{2}x_0,$$

où $\Phi_i = \frac{1}{2}D_i + f_i$, avec $i \in \{0, 1\}$, $t_1 = \frac{1}{2}x_1 + a_1$ et $t_1' = -\frac{1}{2}x_1 + a_1$ est une super-algèbre Poisson-admissible. De plus la forme bilinéaire γ, définie comme dans le Théorème 4.2.9, est une structure quadratique impaire sur $\mathfrak{t}$. La super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\mathfrak{t}, \gamma)$ est appelée la double extension quadratique impaire généralisée de $(\mathcal{A}, B)$ par $\mathcal{V}$ au moyen

de $(f_i, D_i, a_i, x_i, k, k')$, où $i \in \{0,1\}$.

Proposition 6.6. *Soit $(\mathcal{A}, \star, B)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique homogène (paire ou impaire). S'il existe un idéal bilatère gradué $I := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ de $\mathcal{A}$ totalement isotrope, où $e_0^* \in (Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} \setminus \{0\}$ et $e_1^* \in (Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}} \setminus \{0\}$, alors $\mathcal{A}$ est une double extension quadratique homogène généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique homogène $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ à produit nul telle que $dim\mathcal{V}_{\bar{0}} = dim\mathcal{V}_{\bar{1}} = 1$.*

Preuve. Dans cette preuve on distingue les deux cas suivants.

1er cas : On suppose que B est une structure quadratique paire sur $\mathcal{A}$. D'après la parité et la non dégénérescence de B, il existe $e_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que $B(e_0, e_0) = 0$ et $B(e_0^*, e_0) = B(e_1^*, e_1) = 1$. Ceci implique que le sous-espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{W} = I \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ de $\mathcal{A}$ est non dégénéré. Par conséquent, $\mathcal{A} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$ et $B_{\mathcal{H}} := B|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ est non-dégénérée, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. On vérifie facilement que $J = I \oplus \mathcal{H}$, où J est l'orthogonal de I relativement à B. D'où, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a

$$x \star y = x.y + \gamma(x,y)e_0^* + \overline{\gamma}(x,y)e_1^*,$$

$$e_0 \star x = \Phi(x) + \alpha(x)e_0^* + \beta(x)e_1^*, \quad x \star e_0 = \overline{\Phi}(x) + \overline{\alpha}(x)e_0^* + \overline{\beta}(x)e_1^*,$$

$$e_1 \star x = \Psi(x) + \alpha'(x)e_0^* + \beta'(x)e_1^*, \quad x \star e_1 = \overline{\Psi}(x) + \overline{\alpha'}(x)e_0^* + \overline{\beta'}(x)e_1^*,$$

$$e_0 \star e_0 = k_1e_0^* + t_0 + k_1'e_0, \quad e_1 \star e_1 = k_2e_0^* + t_0' + k_2'e_0, \quad k_1, k_2, k_1', k_2' \in \mathbb{K},$$

$$e_0 \star e_1 = k_3e_1^* + t_1 + k_3'e_1, \quad e_1 \star e_0 = k_4e_1^* + t_1' + k_4'e_1, \quad k_3, k_4, k_3', k_4' \in \mathbb{K},$$

où $x.y, \Phi(x), \overline{\Phi}(x), \Psi(x), \overline{\Psi}(x) \in \mathcal{H}$, $t_0, t_0' \in \mathcal{H}_{\bar{0}}$, $t_1, t_1' \in \mathcal{H}_{\bar{1}}$ et $\gamma(x,y)$, $\overline{\gamma}(x,y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\overline{\alpha}(x)$, $\overline{\beta}(x)$, $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$, $\overline{\alpha'}(x)$, $\overline{\beta'}(x) \in \mathbb{K}$. D'après l'invariance de la forme B, on obtient que $k_i' = 0$, où $i \in \{1,2,3,4\}$, $k_2 = k_3 = -k_4$, $\alpha(x) = \overline{\alpha}(x) = B_{\mathcal{H}}(t_0, x)$, $\beta'(x) = -\overline{\beta'}(x) = B_{\mathcal{H}}(t_0', x)$, $\alpha'(x) = -\overline{\beta}(x) = B_{\mathcal{H}}(t_1, x)$, $\beta(x) = \overline{\alpha'}(x) = -B_{\mathcal{H}}(t_1', x)$, $\gamma(x,y) = B_{\mathcal{H}}(\Phi(x), y)$, $B_{\mathcal{H}}(\overline{\Phi}(x), y) = B_{\mathcal{H}}(x, \Phi(y))$, $\overline{\gamma}(x,y) = -B_{\mathcal{H}}(\Psi(x), y)$ et $B_{\mathcal{H}}(\overline{\Psi}(x), y) = B_{\mathcal{H}}(x, \Psi(y))$. Par conséquent :

• Le crochet " $[,]$ " de la super-algèbre de Lie quadratique paire $(\mathcal{A}^-, B)$ est donné par :

$$\begin{cases} e_0^*, e_1^* \in Ann(\mathcal{A}^-), \quad [e_0, e_0] = 0, \quad [e_0, e_1] = 2k_2e_1^* + x_1, \quad [e_1, e_1] = 2k_2e_0^* + x_0, \\ [e_0, x] = D_0(x) + B_{\mathcal{H}}(x_1, x)e_1^*, \quad [e_1, x] = D_1(x) + B_{\mathcal{H}}(x_1, x)e_0^* - B_{\mathcal{H}}(x_0, x)e_1^*, \\ [x, y] = [x, y]_{\mathcal{H}} + B_{\mathcal{H}}(D_0(x), y)e_0^* - B_{\mathcal{H}}(D_1(x), y)e_1^*, \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $[x,y]_{\mathcal{H}} = x\star y - (-1)^{|x||y|}y\star x$, $D_0(x) = \Phi(x) - \overline{\Phi}(x)$, $D_1(x) = \Psi(x) - (-1)^{|x|}\overline{\Psi}(x)$, $t_1 - t_1' = x_1$ et $2t_0' = x_0$. D'après la Proposition 5.13, on a $(\mathcal{A}^-, B)$ est une double extension quadratique paire généralisée de $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, au moyen de (D_i, x_i, k_2), où $i \in \{0,1\}$.

• Le produit " $\circ$ " de la super-agèbre associative super-commutative symétrique paire $(\mathcal{A}^+, B)$ est donné par :

$$\begin{cases} e_0^*, e_1^* \in Ann(\mathcal{A}^+), \quad e_1 \circ e_1 = 0, \quad e_0 \circ e_0 = k_1 e_0^* + a_0, \quad e_0 \circ e_1 = a_1, \\ e_0 \circ x = f_0(x) + B_{\mathcal{H}}(a_0, x)e_0^* - B_{\mathcal{H}}(a_1, x)e_1^*, \quad e_1 \circ x = f_1(x) + B_{\mathcal{H}}(a_1, x)e_0^*, \\ x \circ y = x * y + B_{\mathcal{H}}(f_0(x), y)e_0^* - B_{\mathcal{H}}(f_1(x), y)e_1^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $x * y = x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x$, $f_0(x) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x) + \overline{\Phi}(x)\big)$, $f_1(x) = \frac{1}{2}\big(\Psi(x) + (-1)^{|x|}\overline{\Psi}(x)\big)$, $a_0 = t_0$ et $a_1 = \frac{1}{2}(t_1 + t_1')$. D'après la Proposition 4.12, on a $(\mathcal{A}^+, B)$ est une double extension symétrique paire généralisée de $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre associative super-commutative $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, au moyen de (f_i, a_i, k_1), où $i \in \{0, 1\}$.

Maintenant, le fait que $ad_{\mathcal{A}^-}(x) \in Der(\mathcal{A}^+)$, $\forall x \in \mathcal{A}$ implique que les conditions (6.32)-(6.40) sont satisfaites. D'où, d'après le Théorème 6.2.6, $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension quadratique paire généralisée de Poisson de la super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ à produit nul au moyen de $(f_i, D_i, a_i, x_i, k_1, k_2)$, où $i \in \{0, 1\}$.

2ème cas : On suppose maintenant que B est une structure quadratique impaire sur $\mathcal{A}$. Dans ce cas, d'après la parité et la non dégénérescence de B, il existe $e_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $e_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$ tels que $B(e_0, e_1) = 0$, $B(e_0^*, e_1) = B(e_1^*, e_0) = 1$. En posant $\mathcal{W} := I \oplus \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$, on obtient que $\mathcal{A} := \mathcal{W} \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est l'orthogonal de $\mathcal{W}$ relativement à B. De plus le produit $\star$ prend la même forme que celui du 1er cas de cette preuve. En utilisant l'invariance de B, on déduit que $k_i' = 0$, où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $k_1 = k_3 = k_4$, $\beta(x) = \overline{\beta}(x) = B_{\mathcal{H}}(t_0, x)$, $\alpha'(x) = \overline{\alpha'}(x) = B_{\mathcal{H}}(t_0', x)$, $\alpha(x) = \overline{\beta'}(x) = B_{\mathcal{H}}(t_1', x)$, $\overline{\alpha}(x) = \beta'(x) = B_{\mathcal{H}}(t_1, x)$, $\overline{\gamma}(x, y) = B_{\mathcal{H}}(\Phi(x), y)$, $B_{\mathcal{H}}(\overline{\Phi}(x), y) = B_{\mathcal{H}}(x, \Phi(y))$, $\gamma(x, y) = B_{\mathcal{H}}(\Psi(x), y)$ et $B_{\mathcal{H}}(\overline{\Psi}(x), y) = B_{\mathcal{H}}(x, \Psi(y))$. Par conséquent :

• Le crochet " $[,]$ " de la super-algèbre de Lie quadratique impaire $(\mathcal{A}^-, B)$ est de la forme :

$$\begin{cases} e_0^*, e_1^* \in Ann(\mathcal{A}^-), \quad [e_0, e_0] = 0, \quad [e_0, e_1] = x_1, \quad [e_1, e_1] = 2k_2 e_0^* + x_0, \\ [e_0, x] = D_0(x) - B_{\mathcal{H}}(x_1, x)e_0^*, \quad [e_1, x] = D_1(x) + B_{\mathcal{H}}(x_0, x)e_0^* + B_{\mathcal{H}}(x_1, x)e_1^*, \\ [x, y] = [x, y]_{\mathcal{H}} + B_{\mathcal{H}}(D_0(x), y)e_0^* + B_{\mathcal{H}}(D_1(x), y)e_1^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $[x, y]_{\mathcal{H}} := x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x$, $D_0(x) = \Phi(x) - \overline{\Phi}(x)$, $D_1(x) = \Psi(x) - (-1)^{|x|}\overline{\Psi}(x)$, $t_1 - t_1' = x_1$ et $2t_0' = x_0$. D'après la Proposition 5.10, on a $(\mathcal{A}^-, B)$ est une double extension quadratique impaire généralisée de $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, au moyen de (D_i, x_i, k_2), où $i \in \{0, 1\}$.

• Le produit " $\circ$" de la super-agèbre associative super-commutative symétrique impaire $(\mathcal{A}^+, B)$ est donné par :

$$\begin{cases} e_0^*, e_1^* \in Ann(\mathcal{A}^+), \quad e_1 \circ e_1 = 0, \quad e_0 \circ e_0 = k_1 e_0^* + a_0, \quad e_0 \circ e_1 = k_1 e_1^* + a_1, \\ e_0 \circ x = f_0(x) + B_{\mathcal{H}}(a_0, x)e_1^* + B_{\mathcal{H}}(a_1, x)e_0^*, \quad e_1 \circ x = f_1(x) + B_{\mathcal{H}}(a_1, x)e_1^*, \\ x \circ y = x * y + B_{\mathcal{H}}(f_0(x), y)e_0^* + B_{\mathcal{H}}(f_1(x), y)e_1^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $x * y = x \star y - (-1)^{|x||y|} y \star x$, $f_0(x) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x) + \overline{\Phi}(x)\big)$, $f_1(x) = \frac{1}{2}\big(\Psi(x) + (-1)^{|x|}\overline{\Psi}(x)\big)$, $a_0 = t_0$ et $a_1 = \frac{1}{2}(t_1 + t_1')$. D'après la Proposition 4.18, on déduit que $(\mathcal{A}^+, B)$ est une double extension

symétrique impaire généralisée de $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre associative super-commutative $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, au moyen de (f_i, a_i, k_1), où $i \in \{0, 1\}$.

Maintenant, le fait que $ad_{\mathcal{A}^-}(x) \in Der(\mathcal{A}^+)$, $\forall x \in \mathcal{A}$ implique que $B_{\mathcal{H}}(a_0, x_1) = 0$ et que les conditions (6.32)-(6.40) sont satisfaites. Par conséquent, d'après le Théorème 6.2.7, $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension quadratique impaire généralisée de Poisson de la super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} := \mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ à produit nul au moyen de $(f_i, D_i, a_i, x_i, k_1, k_2)$, où $i \in \{0, 1\}$.

6.3 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes

D'après la Proposition 1.4, une super-algèbre Poisson-admissible $(\mathcal{A}, B)$ quadratique homogène possède une structure symplectique homogène ω si et seulement s'il existe une super-dérivation Δ homogène de $\mathcal{A}$ inversible, super-antisymétrique et qui satisfait

$$\omega(x, y) = B(\Delta(x), y), \ \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Au moyen d'un calcul simple, on vérifie que Δ est aussi une super-dérivation homogène inversible et super-antisymétrique de $(\mathcal{A}^-, B)$ et $(\mathcal{A}^+, B)$. Par conséquent, $(\mathcal{A}^-, B)$ et $(\mathcal{A}^+, B)$ possèdent une structure symplectique homogène qui coïncide avec celle du $\mathcal{A}$.

Le lemme suivant nous permet d'obtenir des exemples de super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques homogènes symplectiques homogènes à partir des super-algèbres Poisson-admissibles qui possèdent des super-dérivations homogènes (paires ou impaires) et inversibles.

Lemme 6.3.1. Soient $(\mathcal{A}, .)$ une super-algèbre Poisson-admissible $(\widetilde{\mathcal{A}}, \star)$ la double extension trivial paire ou impaire de $\mathcal{A}$. Soient D une super-dérivation inversible et homogène de $\mathcal{A}$ de degré d et D^* l'endomorphisme de $\mathcal{A}^*$ homogène de degré d défini par $D^*(f)(x) := -(-1)^{\alpha d} f \circ D(x)$, $\forall f \in \mathcal{A}^*_\alpha$ et $x \in \mathcal{A}$. Alors l'application linéaire $\widetilde{D} : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$ définie par

$$\widetilde{D}(x + f) := D(x) + D^*(f), \quad \forall (x + f) \in \widetilde{\mathcal{A}}_{|x|}$$

est une super-dérivation de $\widetilde{\mathcal{A}}$ inversible, homogène de degré d et super-anti-symétrique.

Exemple 6.3.2. L'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{A}_{\bar{0}} := \mathbb{K}l_0 \oplus \mathbb{K}k_0$ et $\mathcal{A}_{\bar{1}} := \mathbb{K}l_1 \oplus \mathbb{K}k_1$, muni de la multiplication $\star$ définie par

$$l_0 \star l_0 = k_0, \quad l_0 \star l_1 = \frac{3}{2}k_1, \quad l_1 \star l_0 = \frac{1}{2}k_1, \quad l_1 \star l_1 = \frac{1}{2}k_0,$$

est une super-algèbre Poisson-admissible. De plus, les deux endomorphismes D et Δ de $\mathcal{A}$ définis respectivement par

$$\begin{aligned} D(l_0) &= l_0, \quad D(l_1) = l_1, \quad D(k_0) = 2k_0, \quad D(k_1) = 2k_1, \\ \Delta(l_0) &= l_1, \quad \Delta(l_1) = l_0, \quad \Delta(k_0) = 2k_1, \quad \Delta(k_1) = k_0, \end{aligned}$$

sont deux super-dérivations inversibles de $\mathcal{A}$ qui sont respectivement paire et impaire.

Proposition 6.7. *L'annulateur d'une super-algèbre Poisson-admissible non nulle quadratique homogène qui possède une super-dérivation homogène et inversible est non nul.*

Preuve. Soit Δ une super-dérivation homogène inversible d'une super-algèbre Poisson-admissible $(\mathcal{A}, .)$. On suppose que Δ est paire. En effet, si Δ est impaire, on travaillera avec $[\Delta, \Delta] = 2\Delta$ qui est une super-dérivation paire et inversible de $\mathcal{A}$. D'après la Proposition 4.5, on a $\mathcal{A}^+$ est une super-algèbre associative super-commutative nilpotente. En outre, d'après la Proposition 1.3.3 [28], on obtient que $\mathcal{A}^-$ est une super-algèbre de Lie résoluble. Le fait que $ad_{\mathcal{A}^-}(x)$ est une super-dérivation homogène de $\mathcal{A}^+$, de degré $\mid x \mid$ (c'est à dire $[x, y \circ z] = [x, y] \circ z + (-1)^{|x||y|} y \circ [x, z]$, $\forall x \in \mathcal{A}_{|x|}, y \in \mathcal{A}_{|y|}$ et $z \in \mathcal{A}$), implique que $Ann(\mathcal{A}^+)$ est un idéal non-nul de $\mathcal{A}^-$. Maintenant supposons que la super-algèbre Poisson-admissible $(\mathcal{A}, .)$ est munie d'une structure quadratique paire B. D'après [15], on a que $\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-) = [\mathcal{A}^-, \mathcal{A}^-]^\perp$ et par conséquent $\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-) \neq \{0\}$. Dans la suite, on note $Ann(\mathcal{A}^+)$ et $\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-)$ respectivement par $\mathcal{N}$ et $\mathcal{Z}$ et on montre que $\mathcal{N} \cap \mathcal{Z} \neq \{0\}$.

1er cas : On suppose que $\mathcal{N}_{\bar{0}} = \{0\}$ (c'est à dire $\mathcal{N}_{\bar{1}} \neq \{0\}$ puisque $\mathcal{N}$ est non nul). Comme $\mathcal{A}^-_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie nilpotente et $[\mathcal{A}_{\bar{0}}, \mathcal{N}_{\bar{1}}] \subseteq \mathcal{N}_{\bar{1}}$, alors d'après le Théorème d'Engel, il existe $u \in \mathcal{N}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tel que $[x, u] = 0$, $\forall x \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$. Le fait que $[\mathcal{A}_{\bar{1}}, \mathcal{N}_{\bar{1}}] \subseteq \mathcal{N}_{\bar{0}} = \{0\}$, implique que $[u, \mathcal{A}_{\bar{1}}] = \{0\}$. D'où, $u \in \mathcal{N}_{\bar{1}} \cap \mathcal{Z}$ et par conséquent $\mathcal{N} \cap \mathcal{Z} \neq \{0\}$.

2ème cas : On suppose que $\mathcal{N}_{\bar{0}} \neq \{0\}$. Comme $\mathcal{N}_{\bar{0}}$ est un idéal non nul de $\mathcal{A}^-_{\bar{0}}$, alors d'après le théorème d'Engel on a $\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-_{\bar{0}}) \cap \mathcal{N}_{\bar{0}} \neq \{0\}$. De plus, on a $\left[\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-_{\bar{0}}) \cap \mathcal{N}_{\bar{0}}, \mathcal{A}\right] = \left[\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-_{\bar{0}}) \cap \mathcal{N}_{\bar{0}}, \mathcal{A}_{\bar{1}}\right] \subseteq \mathcal{N}_{\bar{1}}$. Si $\mathcal{N}_{\bar{1}} = \{0\}$, alors $\mathfrak{z}(\mathcal{A}^-_{\bar{0}}) \cap \mathcal{N}_{\bar{0}} \subseteq \mathcal{Z} \cap \mathcal{N}_{\bar{0}}$ et il s'ensuit que $\mathcal{Z} \cap \mathcal{N} \neq \{0\}$. Par contre, si $\mathcal{N}_{\bar{1}} \neq \{0\}$, alors d'après le Théorème d'Engel, il existe $u' \in \mathcal{N}_{\bar{1}} \setminus \{0\}$ tel que $[\mathcal{A}_{\bar{0}}, u'] = \{0\}$. En utilisant l'invariance de B, on déduit que $B([\mathcal{A}_{\bar{1}}, u'], \mathcal{A}_{\bar{0}}) = B(\mathcal{A}_{\bar{1}}, [u', \mathcal{A}_{\bar{0}}]) = \{0\}$. D'où d'après la non dégénérescence de B, on obtient que $[\mathcal{A}_{\bar{1}}, u'] = \{0\}$ et on conclut que $u' \in \mathcal{N} \cap \mathcal{Z}$.

Maintenant, on suppose que $(\mathcal{A}, ., B)$ est une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire. Il est clair que $Ann((\mathcal{A}^+)_{\bar{0}}) \neq \{0\}$, $\mathfrak{z}((\mathcal{A}^-)_{\bar{0}}) \neq \{0\}$ et $Ann((\mathcal{A}^+)_{\bar{0}}) \cap \mathfrak{z}((\mathcal{A}^-)_{\bar{0}}) \neq \{0\}$. En utilisant le fait que B est impaire et non-dégénérée, on obtient $Ann((\mathcal{A}^+)_{\bar{0}}) \subseteq \mathcal{N}_{\bar{0}}$ et $\mathfrak{z}((\mathcal{A}^-)_{\bar{0}}) \subseteq \mathcal{Z}_{\bar{0}}$. Par conséquent $\{0\} \neq Ann((\mathcal{A}^+)_{\bar{0}}) \cap \mathfrak{z}((\mathcal{A}^-)_{\bar{0}}) \subseteq \mathcal{N}_{\bar{0}} \cap \mathcal{Z}_{\bar{0}}$. Ce qui implique que $\mathcal{N} \cap \mathcal{Z} \neq \{0\}$.

Corollaire 6.3.3. L'annulateur d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique homogènes symplectique homogènes est non nul.

6.3.1 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques paires symplectiques paires

Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique paire et δ l'unique super-dérivation paire inversible et super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ qui satisfait $\omega(x, y) := B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$.

On suppose que $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ est une double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de (f, D, x_0) (pour le détail voir le Théorème 6.2.3). Rappelons que s'il existe $c_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$ad_{\mathcal{A}^-}(c_1) = \lambda D + [\delta, D], \quad \delta(c_1) = \lambda x_0 + \frac{1}{2} D(x_0), \tag{6.41}$$

$$L_{c_1} = \lambda f + [\delta, f], \tag{6.42}$$

où L_{c_1} désigne la multiplication gauche dans $\mathcal{A}^+$ par c_1, alors, d'après le Théorème 4.9 [12] et la Proposition 4.6, l'endomorphisme Δ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ défini par

$$\Delta(e^*) = \lambda e^*, \quad \Delta(e) = -\lambda e + c_1 + \beta e^*, \quad \Delta(x) = \delta(x) - B(x, c_1)e^*, \forall x \in \mathcal{A}, \tag{6.43}$$

est une super-dérivation paire inversible et super-antisymétrique de $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Maintenant, on suppose que $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ est une double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par l'algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul au moyen de (f, D, a_0, k) (pour le détail voir le Théorème 6.2.3). Rappelons que s'il existe $c_0 \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites

$$ad_{\mathcal{A}^-}(c_0) = \lambda D + [\delta, D], \tag{6.44}$$

$$L_{c_0} = \lambda f + [\delta, f], \quad \delta(x_0) = 2f(c_0) - 2\lambda x_0, \tag{6.45}$$

où L_{c_0} désigne la multiplication gauche dans $\mathcal{A}^+$ par c_0, alors, d'après le Théorème 4.7 [12] et la Proposition 4.7, l'endomorphisme Δ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ défini par

$$\Delta(e^*) = \lambda e^*, \quad \Delta(e) = -\lambda e + c_0, \quad \Delta(x) = \delta(x) - B(c_0, x)e^*, \forall x \in \mathcal{A}, \tag{6.46}$$

est une super-dérivation paire inversible et super-antisymétrique de $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Théorème 6.3.4. Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique paire et $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ une double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle (resp. l'algèbre $\mathbb{K}e$ à produit nul). Si les conditions (6.41) et (6.42) (resp. (6.44) et (6.45) sont satisfaites, alors la forme bilinéaire $\widetilde{\omega} : \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\widetilde{\omega}(x, y) = \widetilde{B}(\Delta(x), y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.47}$$

où Δ est défini comme dans l'équation (6.43) (resp. 6.46) est une structure symplectique paire sur la super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$. $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double

extension quadratique paire symplectique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen $(D, f, x_0, c_1, \lambda, \beta)$ (resp. $(D, f, a_0, c_0, \lambda, k)$) si e est un élément homogène impaire (resp. paire).

Proposition 6.8. *Soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique paire. Si $Ann(\mathcal{A})$ est non nul, alors $\mathcal{A}$ est une double extension quadratique paire symplectique paire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique paire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$, où $dim\mathcal{H} = dim\mathcal{A} - 2$, par une super-algèbre Poisson-admissible de dimension 1 à produit nul.*

Preuve. Posons Δ l'unique super-dérivation paire inversible et super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ telle que $\omega(x, y) = B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. D'après la Proposition 6.7, on a $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. En outre, comme $Ann(\mathcal{A})$ est stable par Δ et le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors il existe e^* un élément homogène non nul de $Ann(\mathcal{A})$ et un scalaire λ non nul tel que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Par conséquent, $\lambda B(e^*, e^*) = \omega(e^*, e^*)$ et on déduit facilement que $B(e^*, e^*) = 0$. D'où, $I := \mathbb{K}e^*$ est un idéal bilatère gradué totalement isotrope de $\mathcal{A}$. Ceci nous permet de déduire, d'après la Proposition 6.4, que $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension quadratique paire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par une super-algèbre Poisson-admissible $\mathbb{K}e$ à produit nul au moyen de (f, D, x_0, a_0, k), où f, D, x_0, a_0 et k sont définis comme dans la Proposition 6.4. Plus explicitement, si e est un élément homogène impair (resp. pair), alors $\mathcal{A} = \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{K}e$ obtenue comme le Théorème 6.2.3 (resp. le Théorème 6.2.4). Il reste à montrer que $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ possède une structure symplectique paire $\omega_{\mathcal{H}}$. Ensuite, vérifier que $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire symplectique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$. Le fait que Δ est B-super-antisymétrique et que $\Delta(I) \subseteq I$ implique que $\Delta(J) \subseteq J$, où $J = I^{\perp} = \mathbb{K}e^* \oplus \mathcal{H}$. D'où,

$$\Delta(e^*) = \lambda e^*, \quad \Delta(x) = \gamma(x)e^* + \delta(x), \quad \Delta(e) = \alpha e^* + c_i + \beta e,$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_i \in \mathcal{H}_{\bar{i}}$ avec $i \in \{0, 1\}$ et $\gamma(x), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Comme Δ est une super-dérivation paire B-super-antisymétrique inversible de $(\mathcal{A}^-, [,], B, \omega)$ et $(\mathcal{A}^+, *, B, \omega)$, alors :

• D'après la Proposition 4.8 [12] et la Proposition 4.10 [12], δ définit une structure symplectique paire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}})$ telle que les conditions (6.45) et (6.42) sont satisfaites. D'où, $(\mathcal{A}^-, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire symplectique paire (généralisée) de $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$.

• D'après la Proposition 4.8, δ définit une structure symplectique paire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}})$ telle que les conditions (6.41) et (6.44) sont satisfaites. En outre, $(\mathcal{A}^+, B, \omega)$ est une double extension symétrique paire symplectique paire (généralisée) de $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$.

Par conséquent, en appliquant le Théorème 6.3.4, on conclut que $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire symplectique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$.

Corollaire 6.3.5. Toute super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique paire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions quadratiques paires symplectiques paires généralisées de Poisson par une super-algèbre de dimension 1 à produit nul.

6.3.2 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques impaires symplectiques impaires

Soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique impaire telle que $\omega(x, y) = B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$, où δ est une super-dérivation paire super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$. Supposons que $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ est une double extension quadratique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle (au moyen de (f, D, x_0, k)) introduite dans le Théorème 6.2.5. Rappelons que s'il existe $c_1 \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites

$$B(c_1, x_0) = \lambda k, \quad 2D_1(c_1) = \delta(x_0) + 2\lambda x_0, \quad [\delta, D_1] + \lambda D_1 = ad_{\mathcal{A}^-}(c_1), \tag{6.48}$$

$$[\delta, f] + \lambda f = L_{c_1}, \tag{6.49}$$

alors, d'après la Proposition 5.6 et la Proposition 4.13, l'endomorphisme Δ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ défini par

$$\Delta(e^*) = \lambda e^*, \quad \Delta(e) = -\lambda e + c_1, \quad \Delta(x) = -B(c_1, x)e^* + \delta(x), \forall x \in \mathcal{A}, \tag{6.50}$$

est la super-dérivation paire super-antisymétrique et inversible de $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Théorème 6.3.6. Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique impaire et $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ une double extension quadratique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle. Si les conditions (6.48) et (6.49) sont satisfaites, alors la forme bilinéaire $\widetilde{\omega} : \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\widetilde{\omega}(x, y) = \widetilde{B}(\Delta(x), y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.51}$$

où Δ est défini comme dans l'équation (6.50) est une structure symplectique impaire sur la super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$. $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B, \omega)$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(D, f, x_0, c_1, \lambda)$.

Proposition 6.9. *Soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique impaire. Alors, $\mathcal{A}$ est une double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique impaire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$, où $dim\mathcal{H} = dim\mathcal{A} - 2$, par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.*

Preuve. Notons Δ l'unique super-dérivation paire inversible et B-super-antisymétrique de $\mathcal{A}$ telle que $\omega(x, y) = B(\Delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. D'après la Proposition 6.7, on a $Ann(\mathcal{A}) \neq \{0\}$ (Plus

précisément $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} \neq \{0\}$). Le fait que $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}}$ est stable par Δ et que la corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, implique qu'il existe un vecteur non-nul e^* de $(Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}}$ et un scalaire non-nul λ tels que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Par conséquent, en appliquant la Proposition 6.5, $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension quadratique impaire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de (f, D, x_0, k), où f, D, x_0 et k sont définis comme dans la Proposition 6.5. Il reste à vérifier que $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ possède une structure symplectique impaire. Ensuite, monter que $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée de Poisson. Le fait que Δ est B-super-antisymétrique et que $\Delta(I) \subseteq I$, implique que $\Delta(J) \subseteq J$, où $I := \mathbb{K}e^*$ et $J = I \oplus \mathcal{H}$ l'orthogonal de I relativement à B. D'où,

$$\Delta(e^*) = \lambda e^*, \quad \Delta(x) = \gamma(x)e^* + \delta(x), \quad \Delta(e) = c_1 + \beta e,$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_1 \in \mathcal{H}_{\bar{1}}$ et $\gamma(x), \beta \in \mathbb{K}$. Δ est une super-dérivation paire B-super-anti-symétrique et inversible de $(\mathcal{A}^-, B)$ et $(\mathcal{A}^+, B)$. Par conséquent, d'après la Proposition 5.7, δ définie une structure symplectique impaire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}})$ et que $(\mathcal{A}^-, B, \omega)$ est une double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée de $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de (D, x_0, c_1, λ). En outre, d'après la Proposition 4.14, on obtient que δ définie une structure symplectique impaire $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}})$ et que $(\mathcal{A}^+, B, \omega)$ et une double extension symétrique impaire symplectique impaire de $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre $\mathbb{K}e$ de partie paire nulle au moyen de (f, c_1, λ). D'après le Théorème 6.3.6, on conclut que $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension quadratique impaire symplectique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par $\mathbb{K}e$ au moyen de $(f, D, x_0, c_1, \lambda)$.

Corollaire 6.3.7. Toute super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique impaire est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions quadratiques impaires symplectiques impaires généralisées de Poisson par la super-algèbre de dimension 1 et de partie paire nulle.

6.3.3 Super-algèbres Poisson-admissibles quadratiques paires (resp. quadratiques impaires) symplectiques impaires (resp. symplectiques paires)

Soit $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique impaire telle que $\omega(x, y) = B(\delta(x), y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$, où δ est une super-dérivation paire B-super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$. Supposons que $(\mathfrak{t}, \gamma)$ est une double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ à produit nul (au moyen de $(D_i, f_i, a_i, x_i, k, k')$, où $i \in \{0, 1\}$) introduite dans le Théorème 6.2.6. Rappelons que s'il existe $c_i \in \mathcal{A}_{\bar{i}}$, avec $i \in \{0, 1\}$, et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites

$$ad_{\mathcal{A}^-}(c_1) = [\delta, D_0] - \lambda D_1, \quad ad_{\mathcal{A}^-}(c_0) = [\delta, D_1] + \lambda D_0, \tag{6.52}$$

$$\delta(x_0) = -2\lambda x_1 - 2D_1(c_0), \quad \delta(x_1) = \lambda x_0 + D_0(c_0) + D_1(c_1), \quad \lambda k = B(c_0, x_0), \tag{6.53}$$

$$L_{c_0} = [\delta, f_1] + \lambda f_0, \quad L_{c_1} = [\delta, f_0] - \lambda f_1, \quad \lambda k = B(c_0, a_0) + 2B(c_1, a_1), \tag{6.54}$$

$$\delta(a_0) = 2\lambda a_1 + 2f_0(c_1), \quad \delta(a_1) = -\lambda a_0 + f_0(c_0) - f_1(c_1), \tag{6.55}$$

où L_{c_i} désigne la multiplication gauche dans $\mathcal{A}^+$ par c_i avec $i \in \{0, 1\}$, alors, d'après la Proposition 5.12 et la Proposition 4.11, l'endomorphisme Δ de $\mathfrak{t}$ défini par

$$\Delta(e_0^*) = \lambda e_1^*, \quad \Delta(e_1^*) = \lambda e_0^*, \quad \Delta(e_0) = \alpha e_1^* + c_1 + \lambda e_1, \quad \Delta(e_1) = -\alpha e_0^* + c_0 - \lambda e_0, \tag{6.56}$$

$$\Delta(x) = -B(c_1, x)e_0^* + \delta(x) - B(c_0, x)e_1^*, \forall x \in \mathcal{A},$$

est la super-dérivation impaire super-antisymétrique et inversible de $\mathfrak{t}$.

Théorème 6.3.8. Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique impaire et $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ la double extension quadratique paire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, à produit nul. Si les conditions (6.52), (6.53), (6.54) et (6.55) sont satisfaites, alors la forme bilinéaire $\widetilde{\omega} : \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\widetilde{\omega}(x, y) = \widetilde{B}(\Delta(x), y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.57}$$

où Δ est défini comme dans l'équation (6.56) est une structure symplectique impaire sur la super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$. $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B, \omega)$ par $\mathcal{V}$ au moyen de $(D, f, x_0, c_1, \lambda)$.

Maintenant, on suppose que $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique paire et $(\mathfrak{t}, \gamma)$ une double extension quadratique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathbb{K}e_0 \oplus \mathbb{K}e_1$ à produit nul (au moyen de $(D_i, f_i, a_i, x_i, k, k')$, où $i \in \{0, 1\}$), introduite dans le Théorème 6.2.7. Rappelons que s'il existe $c_i \in \mathcal{A}_{\bar{i}}$, avec $i \in \{0, 1\}$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites

$$ad_{\mathcal{A}^-}(c_0) = [\delta, D_1] - \lambda D_0, \quad ad_{\mathcal{A}^-}(c_1) = [\delta, D_0] + \lambda D_1, \tag{6.58}$$

$$\delta(x_0) = -2D_1(c_0) + 2\lambda x_1, \quad \delta(x_1) = D_0(c_0) + D_1(c_1) - \lambda x_0, \quad \lambda k = B(c_1, x_0) - 2B(x_1, c_0), \tag{6.59}$$

$$L_{c_0} = [\delta, f_1] - \lambda f_0, \quad L_{c_1} = [\delta, f_0] + \lambda f_1, \tag{6.60}$$

$$\delta(a_0) = -2\lambda a_1 + 2f_0(c_1), \quad \delta(a_1) = +\lambda a_0 + f_0(c_0) - f_1(c_1), \quad \lambda k = B(a_0, c_1), \tag{6.61}$$

alors, l'endomorphisme Δ de $\mathcal{A}$ défini par

$$\Delta(e_0^*) = \lambda e_1^*, \quad \Delta(e_1^*) = \lambda e_0^*, \quad \Delta(e_0) = c_1 - \lambda e_1, \quad \Delta(e_1) = \alpha e_0^* + c_0 + \lambda e_0, \tag{6.62}$$

$$\Delta(x) = B(c_0, x)e_0^* + \delta(x) - B(c_1, x)e_1^*, \forall x \in \mathcal{A},$$

est la super-dérivation impaire super-anti-symétrique et inversible de $\mathfrak{t}$

Théorème 6.3.9. theoreme-Poiss-impaire-paire Soient $(\mathcal{A}, B, \omega)$ une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique paire et $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$ la double extension quadratique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B)$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} := \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, à produit nul. Si les conditions (**??**), (**??**), (6.60) et (6.61) sont satisfaites, alors la forme bilinéaire $\widetilde{\omega} : \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\widetilde{\omega}(x, y) = \widetilde{B}(\Delta(x), y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}, \tag{6.63}$$

où Δ est défini comme dans l'équation (**??**) est une structure symplectique impaire sur la super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B})$. $(\widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{B}, \widetilde{\omega})$ est appelée la double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de Poisson de $(\mathcal{A}, B, \omega)$ par $\mathcal{V}$ au moyen de $(D, f, x_0, c_1, \lambda)$.

Proposition 6.10. *Soit $\mathcal{A}$ une super-algèbre Poisson-admissible.*

(i) S'il existe une structure quadratique paire B et une structure symplectique impaire ω sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est une double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique impaire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ à produit nul telle que $dim\mathcal{V}_{\bar{0}} = dim\mathcal{V}_{\bar{1}} = 1$.

(ii) S'il existe une structure quadratique impaire B et une structure symplectique paire ω sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est une double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique impaire symplectique paire $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ à produit nul telle que $dim\mathcal{V}_{\bar{0}} = dim\mathcal{V}_{\bar{1}} = 1$.

Preuve. Notons Δ l'unique super-dérivation impaire, super-antisymétrique et inversible de $\mathcal{A}$ telle que

$$\omega(x, y) = B(\Delta(x), y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}. \tag{6.64}$$

D'après la Proposition 6.7, on a $Ann(\mathcal{A})$ est non nul. Le fait que $Ann(\mathcal{A})$ est stable par Δ et que la corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos implique qu'il existe un vecteur non-nul e^* de $Ann(\mathcal{A})$ et un scalaire non-nul λ tels que $\Delta(e^*) = \lambda e^*$. Plus précisément, $e^* = e_0^* + e_1^*$, où $e_0^* \in (Ann(\mathcal{A}))_{\bar{0}} \setminus \{0\}$ et $e_1^* \in (Ann(\mathcal{A}))_{\bar{1}} \setminus \{0\}$, tel que

$$\Delta(e_0^*) = \lambda e_1^* \quad \text{et} \quad \Delta(e_1^*) = \lambda e_0^*. \tag{6.65}$$

En utilisant la parité de B, la parité de ω et les équations (6.64) et (6.65), on déduit facilement que $I := \mathbb{K}e_0^* \oplus \mathbb{K}e_1^*$ est un idéal gradué de $\mathcal{A}$ totalement isotrope relativement à B. D'où, d'après la Proposition 6.6, on a $(\mathcal{A}, B)$ est une double extension quadratique homogène (paire ou impaire) généralisée de Poisson d'une super-algèbre Poisson-admissible quadratique homogène (paire ou impaire) $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$, où $\mathcal{V}_{\bar{0}} = \mathbb{K}e_0$ et $\mathcal{V}_{\bar{1}} = \mathbb{K}e_1$, à produit nul. Plus explicitement, si B est une structure paire (resp. impaire) sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} := I \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{A} := I \oplus \mathcal{H} \oplus P(\mathcal{V})$). De plus, $J := I \oplus \mathcal{H}$, où J est l'orthogonal de I relativement à B.

Dans la suite, on montre que $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}})$ possède une structure symplectique impaire (resp. paire) $\omega_{\mathcal{H}}$ si $B_{\mathcal{H}}$ est une structure quadratique paire (resp. impaire). Ensuite, on montre que $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire (resp. impaire) symplectique impaire (resp. paire) généralisée de Poisson de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V}$ à produit nul.

Comme $\Delta(I) \subseteq I$ et Δ est super-antisymétrique, alors $\Delta(J) \subseteq J$. D'où, il vient que

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \mu_1(x)e_0^* + \mu_2(x)e_1^* + \delta(x),\ \forall x \in \mathcal{A}, \\
\Delta(e_0) &= \alpha_1 e_1^* + c_1 + \beta_1 e_1, \\
\Delta(e_1) &= \alpha_0 e_0^* + c_0 + \beta_0 e_0, ,
\end{aligned}$$

où $\delta(x) \in \mathcal{H}$, $c_i \in \mathcal{H}_{\bar{i}}$ et $\mu_i(x), \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ avec $i \in \{0, 1\}$. En utilisant le fait que Δ est une super-dérivation, impaire, super-anti-symétrique et inversible de $(\mathcal{A}^+, B)$ et $(\mathcal{A}^-, B)$, implique que :

• D'après la Proposition 5.13 (resp. la Proposition 5.10), δ définie une structure symplectique impaire (resp. symplectique paire) $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ et que $(\mathcal{A}^-, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire symplectique paire généralisée (resp. une double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée) de $(\mathcal{H}^-, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre de Lie abélienne $\mathcal{V}^-$.

• D'après la Proposition 4.12 (resp. la Proposition 4.18), δ définie une structure symplectique impaire (resp. symplectique paire) $\omega_{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{H}$ et que $(\mathcal{A}^+, B, \omega)$ est une double extension symétrique paire symplectique paire généralisée (resp. une double extension symétrique impaire symplectique paire généralisée) de $(\mathcal{H}^+, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre associative super-commutative $\mathcal{V}^+$ à produit nul.

Par conséquent, d'après le Théorème 6.3.8 (resp. le Théorème **??**), on a $(\mathcal{A}, B, \omega)$ est une double extension quadratique paire symplectique impaire généralisée de Poisson (resp. double extension quadratique impaire symplectique paire généralisée de Poisson) de $(\mathcal{H}, B_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V}$ à produit nul.

Corollaire 6.3.10. Toute super-algèbre Poisson-admissible quadratique paire symplectique impaire (resp. quadratique impaire symplectique paire) est obtenue à partir de $\{0\}$ par une série finie de double extensions quadratiques paires symplectiques impaires généralisées de Poisson (resp. double extensions quadratiques impaires symplectiques paires généralisées de Poisson) par la super-algèbre Poisson-admissible $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{V}_{\bar{1}}$ à produit nul telle que $dim\mathcal{V}_{\bar{0}} = dim\mathcal{V}_{\bar{1}} = 1$.

Bibliographie

A

[1] Albuquerque, H., Barreiro, E., and Benayadi, S. (2009). Quadratic Lie superalgebras with a reductive even part. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213(5) :724–731.

[2] Albuquerque, H., Barreiro, E., and Benayadi, S. (2010). Odd-quadratic Lie superalgebras. *Journal of Geometry and Physics*, 60(2) :230–250.

[3] Andruskiewitsch, N. (1993). Lie superbialgebras and Poisson-Lie supergroups. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 63, pages 147–163. Springer.

[4] Aubert, A. (1996). Structures affines et pseudo-métriques invariantes a gauche sur des groupes de Lie. Thèse de doctorat, Université Montpellier II.

[5] Ayadi, I. and Benayadi, S. (2010a). Associative superalgebras with homogeneous symmetric structures. *à paraître dans Communication in Algebras.*

[6] Ayadi, I. and Benayadi, S. (2010b). Symmetric Novikov superalgebras. *Journal of Mathematical Physics*, 51 :023501.

B

[7] Bai, C. and Meng, D. (2001). The classification of Novikov algebras in low dimensions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 34 :1581.

[8] Bai, C. and Meng, D. (2002). Bilinear forms on Novikov algebras. *International Journal of Theoretical Physics*, 41(3) :495–502.

[9] Bajo, I., Benayadi, S., and Bordemann, M. (2007a). Generalized double extension and description of quadratic Lie superalgebras. *Arxiv preprint math-ph/0712.0228 v1 [math-ph].*

[10] Bajo, I., Benayadi, S., and Medina, A. (2007b). Symplectic structures on quadratic Lie algebras. *Journal of Algebra*, 316(1) :174–188.

[11] Baklouti, A. (2007). Structures et descriptions inductives des algèbres de Jordan pseudo-euclidiennes. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.

[12] Barreiro, E. and Benayadi, S. (2009). Quadratic symplectic Lie superalgebras and Lie bi-superalgebras. *Journal of Algebra*, 321(2) :582–608.

[13] Benamor, H. and Benayadi, S. (1999). Double extension of quadratic Lie superalgebras. *Communications in Algebra*, 27(1) :67–88.

[14] Benayadi, S. (2000). Quadratic Lie Superalgebras with the Completely Reducible Action of the Even Part on the Odd Part I. *Journal of Algebra*, 223(1) :344–366.

[15] Benayadi, S. (2003). Socle and some invariants of quadratic Lie superalgebras. *Journal of Algebra*, 261(2) :245–291.

[16] Benayadi, S. (2008a). Construction of symplectic quadratic Lie algebras from Poisson algebras. preprint.

[17] Benayadi, S. (2008b). Poisson structures on some Lie algebras. preprint.

[18] Bordemann, M. (1997). Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. *Acta Math. Univ. Comenianae*, 66(2) :151–201.

C

[19] Chen, Z. and Zhu, F. (2007). Bilinear forms on fermionic Novikov algebras. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40 :4729.

[20] Chen, Z. and Zhu, F. (2008). Pseudo-Riemannian Novikov algebras. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 41 :315207.

D

[21] Drinfel'd, V. (1988). Quantum groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 41(2) :898–915.

E

[22] Elduque, A., Laliena, J., and Sacristan, S. (2008). Maximal subalgebras of Jordan superalgebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212(11) :2461–2478.

[23] Elduque, A. and Myung, H. (1994). *Mutations of alternative algebras*. Springer.

G

[24] Gould, M., Zhang, R., and Bracken, A. (1991). Lie bi-superalgebras and graded classical Yang-Baxter equation. *Reviews Math. Phys*, 3(2) :223–240.

[25] Goze, M. and Remm, E. (2008). Poisson algebras in terms of non-associative algebras. *Journal of Algebra*, 320(1) :294–317.

H

[26] Hegazi, A. (1999). Classification of Nilpotent Lie Superalgebras of Dimension Five. II. *International journal of theoretical physics*, 38(10) :2681–2693.

J

[27] Jacobson, N. (1955). A note on automorphisms and derivations of Lie algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6(2) :281–283.

K

[28] Kac, V. (1977). Lie superalgebras. *Advances in Mathematics*, 26(1) :8–96.

L

[29] Lam, T. (2005). *Introduction to quadratic forms over fields.* Amer Mathematical Society.

[30] Lu, C. (2007). Invariant of finite-dimensional solvable Lie algebras with nondegenerate invariant bilinear forms. *J. Algebra*, 311 :178–201.

M

[31] Markl, M. and Remm, E. (2006). Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras. *Journal of Algebra*, 299(1) :171–189.

[32] Medina, A. (1988). Ph. Revoy, La notion de double extension et les groupes de Lie–Poisson. *Semin. Gaston Darboux Geom. Topologie Differ*, pages 141–171.

[33] Medina, A. and Revoy, P. (1985). Algebres de Lie et produit scalaire invariant. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.(4)*, 18(3) :553–561.

S

[34] Scheunert, M. (1979). *The theory of Lie superalgebras : an introduction.* Springer-Verlag, Berlin ; New York.

W

[35] Wall, C. (1964). Graded Brauer Groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1964(213) :187–199.

X

[36] Xu, X. (2000). Quadratic Conformal Superalgebras I. *Journal of Algebra*, 231(1) :1–38.

Z

[37] Zhu, F. and Chen, Z. (2007). Novikov algebras with associative bilinear forms. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40 :14243.