



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs

## MÉMOIRE

présenté et soutenu publiquement le 15 décembre 2010

pour l'obtention du

Doctorat de

l'Université Paul Verlaine de Metz

et de

l'Université de Sfax

(Spécialité Mathématiques)

par

Imen Ellouze

### Composition du jury

*Président :* Hammadi Jerbi

*Rapporteurs :* Azgal Abichou  
Chengzhong Xu

*Examineurs :* Jean-Claude Vivalda  
Mohamed Ali Hammami  
Jean-François Couchouron  
Mohamed Chaabane

Mis en page avec la classe thloria.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Etude des systèmes à retard</b>	<b>1</b>
	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Généralités</b>	<b>7</b>
1.1	Notions fondamentales de la stabilité . . . . .	7
1.2	Théorie de Lyapunov . . . . .	9
1.3	Les systèmes perturbés . . . . .	11
1.4	Problème de Lur'e . . . . .	12
1.5	Introduction aux systèmes à retard . . . . .	13
1.5.1	Exemple introductif . . . . .	13
1.5.2	Solution d'un système à retard . . . . .	14
1.5.3	Extension de la seconde méthode de Lyapunov . . . . .	16
1.6	Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles . . . . .	18
1.6.1	Analyse convexe . . . . .	19
1.6.2	Problèmes classiques de LMI . . . . .	19
1.6.3	Complément de Schur . . . . .	19
1.6.4	S-procédure . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Etude des systèmes de Lur'e à retard</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Stabilité du système de Lur'e à retard . . . . .	22
2.2.1	Critère de stabilité dépendant d'un retard constant . . . . .	22
2.2.2	Critère de stabilité du système dépendant d'un retard variable . . . . .	23
2.2.3	Exemples numériques . . . . .	27
2.3	Stabilisation du système de Lur'e à retard . . . . .	28
2.3.1	Stabilisation du système contrôlé à retard constant . . . . .	28
2.3.2	Stabilisation dans le cas du retard variable . . . . .	29
2.3.3	Exemple numérique . . . . .	34

**3 Stabilité exponentielle pratique d'un système non linéaire à retard**  
**35**

3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Caractérisation de la stabilité exponentielle pratique . . . . .	36
3.3	Exemples . . . . .	42
3.3.1	Exemple 1 . . . . .	42
3.3.2	Exemple 2 . . . . .	44

**II Etude des systèmes impulsifs** **47**

**Introduction** **49**

**4 Sur la stabilité pratique des systèmes impulsifs à retard multiple** **53**

4.1	Généralités . . . . .	53
4.1.1	Description du système . . . . .	53
4.1.2	Existence des solutions . . . . .	55
4.1.3	Propriétés générales des solutions du système linéaire . . . . .	56
4.1.4	Solution du système linéaire perturbé . . . . .	59
4.2	Stabilité des systèmes impulsifs . . . . .	59
4.2.1	Système de comparaison . . . . .	60
4.2.2	Stabilité des systèmes linéaires impulsifs . . . . .	61
4.3	Stabilité pratique exponentielle du système impulsif contrôlé à retard multiple . . . . .	67
4.3.1	Introduction . . . . .	67
4.3.2	Système impulsif à retard multiple . . . . .	68
4.3.3	Etude de la stabilité pratique des systèmes impulsifs contrôlés à retard . . . . .	69
4.3.4	Discussion . . . . .	74
4.3.5	Stabilisation pratique exponentielle des systèmes impulsifs contrôlés . . . . .	75
4.3.6	Exemples numériques . . . . .	76

**5 Sur l'observation des systèmes impulsifs** **79**

5.1	Introduction . . . . .	79
5.2	Observabilité - Observateurs . . . . .	79
5.2.1	Critères d'observabilité . . . . .	79
5.2.2	Définition et rôle d'un observateur . . . . .	83
5.3	Conception d'observateurs pour les systèmes impulsifs . . . . .	83

5.3.1	Différents types d'observateurs continus : état de l'art . . . . .	83
5.3.2	Observateur du type Luenberger pour les systèmes impulsifs . . .	84
5.3.3	Observateurs pour des systèmes impulsifs non linéaires . . . . .	90

<b>Bibliographie</b>	<b>101</b>
----------------------	------------



Première partie

Etude des systèmes à retard





# Introduction

Un système dynamique est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné. Elle nécessite, dans cet objectif, un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié. Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Et par conséquent, elle conditionne les méthodes qui seront utilisées par la suite, pour analyser ses propriétés.

La majorité des systèmes physiques non-linéaires peuvent être représentés comme une interconnection par feedback d'un système dynamique linéaire et d'un autre non-linéaire. Le problème de la stabilité absolue consiste à trouver des conditions suffisantes qui portent sur le système linéaire pour que l'origine soit globalement uniformément asymptotiquement stable (ou GUAS) pour une classe de non-linéarités bien déterminée. Ce problème a été posé pour la première fois par Lur'e en 1944 et puis plusieurs efforts ont été consacrés à l'étude de ce dernier. Le lecteur peut se référer aux travaux [7], [1], [37], [46], [50], [56], [81], [60] et [72].

Le grand problème d'un mathématicien est de représenter les systèmes physiques réels avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de celui-ci à une forme mathématiquement exploitable.

De point de vue pur pratique, plus particulièrement en science de l'ingénieur, on constate que les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans les processus physiques. Et même si un parmi eux ne contient pas de retards intrinsèques, bien souvent ils apparaissent dans la boucle de commande. Parmi les principales sources induisant des retards, on cite les temps de réactions des capteurs ou des actionneurs, les temps de transmissions des informations, les temps de transferts des matières ou encore les temps de mesures. Alors dans le but de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation consiste à concevoir "les systèmes à retard"([37]), où interviennent des équations différentielles dont l'évolution, contrairement aux systèmes ordinaires, dépend non seulement de la valeur courante de leurs variables d'état à l'instant présent  $t$ , mais aussi d'une partie de leurs valeurs passées. Dans ce cas, il est nécessaire de mémoriser une partie de "l'histoire" du système pour connaître son évolution. Cette caractéristique leur vaut également la dénomination de systèmes "héréditaires" et sont généralement représentés par des équations de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \text{ où } h > 0$$

où  $f$  est à présent une fonctionnelle, c'est à dire fonction de fonction. Un cas particulier du système précédent, mais néanmoins très étudié, est le cas des systèmes linéaires stationnaires (en anglais : Linear Time Invariant, LTI). En effet, de nombreux systèmes physiques peuvent, sous certaines hypothèses et approximations, être décrits par le modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - h_i) + \sum_{j=1}^k B_j u(t - \tau_j).$$

Vu l'importance théorique et pratique d'un tel système, sa conception datte du 18<sup>me</sup> siècle. Une étude systématique à l'aide des équations différentielles fonctionnelles de celui-ci a été introduite pour la première fois dans les années 20 du 20<sup>me</sup> siècle par V. Volterra en entamant les problèmes de "viscoélasticité" (en 1909) et de "prédateur-proi" (en 1928), ensuite dans les années 40 du même siècle par A. Myshkis et R. Bellman.

La seconde méthode de Lyapunov concerne l'analyse de la stabilité interne d'un système dynamique. L'originalité de la méthode directe de Lyapunov consiste à étudier la convergence de l'état  $x(t)$  vers l'origine à travers une fonction scalaire  $V$  de l'état.  $V$ , appelée fonction candidate à Lyapunov, peut être appréhendée comme une représentation énergétique du système. Bien que la méthode soit abstraite, on conçoit naturellement qu'en "mouvement", le système possède une certaine quantité d'énergie mesurée par  $V$  et qu'à l'équilibre, en phase statique, celle-ci soit minimale. Sommairement, dans le cas des systèmes sans retard, ceci se traduit mathématiquement par les conditions :

- $V(x(t)) > 0, \forall t > 0, \forall x(t) \neq x_{\text{équilibre}},$
- $V(x(t)) = 0, \text{ si } x(t) = x_{\text{équilibre}},$
- $\|x(t)\| \rightarrow \infty \implies V(x(t)) \rightarrow \infty.$

Intuitivement, on comprend alors que si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement avec le temps, alors ce système tend à rejoindre sa position d'équilibre.

- $\frac{dV(x(t))}{dt} = < 0, \forall t > 0, \forall x(t) \neq x_{\text{équilibre}},$

Enfin, si la fonction candidate  $V(x(t))$  vérifie le long des trajectoires du système  $x(t)$  la condition ci-dessus alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable et  $V$  est une fonction de Lyapunov pour le système considéré.

Etant de dimension infinie, la seconde méthode de Lyapunov, ainsi énoncée, n'est pas directement applicable aux systèmes héréditaires d'état  $x_t$ . Deux extensions ont alors été développées dans le cadre des équations différentielles à retards : la méthode de Lyapunov-Krasovskii et la méthode de Lyapunov-Razumikhin [37]. Cette dernière, moins utilisée dans la littérature et non abordée dans cette thèse, sera tout de même brièvement introduite. Pour la classe de systèmes linéaires avec retard dans l'état il existe deux types de critères pour l'analyse de stabilité :

- Celles qui sont indépendantes du retard
- Celles qui sont dépendantes du retard.

Dans le premier cas, les critères sont capables de tester la stabilité globale uniforme asymptotique du système pour toute valeur positive arbitraire de  $h$ . Il est intuitivement évident qu'un tel critère va être très conservatif si le retard  $h$  est déjà connu ou petit. De plus, ces critères sont utiles si le comportement du système est dominé par le terme sans retard (c'est à dire les matrices du système  $A_i, i=1,..,m$  sont plutôt suffisamment petits) ou encore si on veut obtenir une assurance rapide que ce retard ne va pas détériorer la stabilité du système. Cependant, les critères dépendant du retard permettent de garantir la stabilité pour toutes les valeurs du retard  $h \in [0, \bar{h}]$ , où  $\bar{h}$  dénote la valeur maximale que peut prendre  $h$ . Il s'avère alors que ces derniers critères sont moins conservatifs, ce qui nous a motivé à fournir des conditions dépendantes du retard le long du deuxième et

troisième chapitre.

Vu que le retard est très souvent à l'origine des dégradations des performances du système ainsi que de son instabilité, on aurait aimé qu'il n'apparaît plus dans la modélisation. Néanmoins, dans certains cas, on dispose d'un système nominal

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

initialement instable mais le fait de concevoir un feedback induisant un petit retard, dû en général aux mesures, le transforme en un système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h)$$

qui est stable. On cite à titre d'exemple celui énoncé dans [31].

Un autre point à signaler relatif à ce type de systèmes, c'est que ses propriétés intrinsèques peuvent apporter des informations sur les valeurs admissibles du retard. En effet, nous avons dégagé trois catégories principales de retard, à savoir :

- (a) Retards inconnus : Dans ce premier cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérée. Qu'il soit constant ou variant dans le temps, il peut prendre toutes les valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .
- (b) Retards majorés : Cette seconde classe suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard

$$0 \leq h(t) \leq h_{max}.$$

Si  $h(t) = h$  est constant, il reste en pratique incertain et la contrainte ci-dessus assure un intervalle borné. Ce cas de figure a été très largement considéré dans la littérature.

- (c) Retards bornés : Moins abordée que le cas précédent, cette dernière catégorie suppose que le retard vérifie la contrainte

$$h_{min} \leq h(t) \leq h_{max}.$$

Le phénomène de retard souvent induit par le transport d'information, impose dans ce cas un délai (dû au temps de propagation) minimum incompressible. La littérature concernant ce type de système est moins vaste.

Dans le cas des retards variant dans le temps, une contrainte supplémentaire relative à sa dérivée peut être ajoutée

$$|\dot{h}(t)| \leq d, d \in \mathbb{R}_+$$

indiquant alors une limitation sur la vitesse de variation du retard  $h(t)$ . En pratique, la contrainte  $d \leq 1$  est souvent utilisée afin d'assurer que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique. Par ailleurs, de nos jours, indépendamment du procédé physique et du type de retard associé, beaucoup d'auteurs se sont intéressés à la robustesse de la stabilité d'un système vis-à-vis du retard. Il s'agit dans ce cas d'estimer les intervalles sur le retard tel que le système reste stable ou encore de trouver la valeur maximale du retard telle que la stabilité du système soit préservée.

Par mesure de simplicité, on s'intéresse, dans le deuxième chapitre, uniquement à étudier la stabilité du système à état retardé (c'est à dire le retard n'est pas porté sur la

commande) et avec un seul retard. Plus précisément, notre étude est menée sur le système de Lur'e à retard de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h(t)) + B\omega(t)$$

où la non-linéarité  $\omega(t)$  vérifie une condition du secteur.

En se basant aussi sur la seconde méthode de Lyapunov, qui est orientée pour l'étude des systèmes à retards on a pu fournir des critères de stabilité globale exponentielle uniforme pratique pour une classe de systèmes non linéaires à retard multiple de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h(t))).$$

L'étude de la stabilité pratique joue un rôle très important lorsque l'origine du système ne présente pas un point d'équilibre. Dans ce cas, l'objectif se ramène à l'étude de stabilité de toute une boule centrée en l'origine.

L'objectif de ce travail, consiste à résoudre certains problèmes qui sont d'une importance majeure dans la théorie du contrôle, à savoir le problème de la stabilité et la stabilisation des systèmes de Lur'e à retard variant dans le temps et aussi la stabilité pratique des systèmes non linéaires à retard.

A l'issue de cette introduction, cette partie est articulée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons un état de l'art sur les différents types de stabilité pour les équations différentielles ordinaires et celles du type retardé. Pour cela, nous rappelons quelques concepts théoriques classiques, tels que la méthode de Lyapunov et les outils d'analyse robuste, à savoir les inégalités linéaires matricielles (LMIs), le complément de Schur et la S-procédure, qui nous serviront pour la suite. Nous présentons également un exemple de système à retard induit par un réseau de communication. Dans le deuxième chapitre, nous présentons des critères de stabilité et de stabilisation du système de Lur'e à retard variant dans un intervalle. Ces critères sont fournis en termes d'inégalités linéaires matricielles (LMIs). Ces résultats sont approuvés par des exemples déjà étudiés dans la littérature, et par suite une comparaison a été faite. Dans le troisième chapitre, des caractérisations de la stabilité uniforme pratique exponentielle ont été établies pour des systèmes non linéaires non autonomes à retard constant et variable. Cette approche se heurte toutefois à une difficulté intrinsèque due aux retards multiples. Deux exemples sont traités, afin de valider la théorie exposée précédemment.

# 1

## Généralités

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions [50]. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov. Les résultats que nous développerons aux Chapitres 2 et 3 s'appuieront sur ces concepts pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes à retards étudiés.

### 1.1 Notions fondamentales de la stabilité

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$\dot{x} = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

avec  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue en  $t$ , localement Lipchitzienne en  $x$  et telle que  $f(t, 0) = 0$ , pour tout  $t \geq 0$ , de sorte que l'origine soit un point d'équilibre. On désigne tout au long de ce mémoire la condition initiale  $x(t_0)$  par  $x_0$ . Le paragraphe suivant est dédié à la définition de quelques concepts fondamentaux de stabilité.

**Définition 1.1.1 (Stabilité).** On dit que  $x = 0$  est un point d'équilibre stable, si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \text{ tel que } \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Autrement dit, la stabilité au sens de Lyapunov de l'origine du système veut dire que pour tout  $t \geq t_0$ , la solution de condition initiale  $(t_0, x_0)$  reste au voisinage de l'origine si  $x_0$  est au voisinage de l'origine. En d'autres termes, pour tout  $t \geq t_0$ , une petite perturbation de la condition initiale  $x_0$  autour de l'origine donne naissance à une solution  $x(t)$  qui reste proche de l'origine.

Notons bien que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. On définit alors la notion d'attractivité.

**Définition 1.1.2 (Attractivité).** On dit que l'origine  $x = 0$  est

- un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine  $U(0)$ , tel que

$$\forall x_0 \in U(0), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

- un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

**Définition 1.1.3 (Stabilité asymptotique).** On dit que l'origine  $x = 0$  est

- un point d'équilibre asymptotiquement stable (ou AS), s'il est stable et attractif.
- un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.

**Définition 1.1.4 (Bornitude uniforme).** Les solutions du système (1.1) sont dites uniformément bornées, si :  $\exists a \geq 0$  et une fonction croissante  $c : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall \alpha \in ]0, a[$ ,

$$\|x_0\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| < c(\alpha), \quad \forall t \geq t_0.$$

Les solutions sont dites globalement uniformément bornées, si la propriété précédente est vraie pour  $a = +\infty$ .

**Définition 1.1.5 (Stabilité uniforme).** On dit que

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément stable (noté US) si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , tel que  $\forall t_0 \geq 0$ ,

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

- l'origine est un point d'équilibre globalement uniformément stable (noté GUS), s'il est uniformément stable et les solutions du système sont globalement uniformément bornées.

**Définition 1.1.6 (Attractivité uniforme).** On dit que

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément attractif (noté UA), si :  $\exists c > 0 / \forall \|x_0\| < c, \forall \varepsilon > 0, \exists T := T(\varepsilon, c)$  tel que,

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T + t_0.$$

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement uniformément attractif (noté GUA), si  $\forall c > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists T := T(\varepsilon, c)$ , tel que

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T + t_0.$$

**Définition 1.1.7 (Stabilité asymptotique uniforme).** On dit que

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable (noté UAS), s'il est uniformément stable et uniformément attractif.
- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable (noté GUAS), s'il est globalement uniformément stable et globalement uniformément attractif.

**Définition 1.1.8 (Stabilité exponentielle).** On dit que

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable (noté ES), s'il existe un voisinage de l'origine noté  $U(0)$ ,  $\exists \lambda_1 > 0$  et  $\exists \lambda_2 > 0$ , tels que

$$\|x(t)\| \leq \lambda_1 \|x_0\| e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \quad \forall x_0 \in U(0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Dans ce cas, la constante  $\lambda_2$  est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

- l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable (noté GES), si  $U(0) = \mathbb{R}^n$ .

*Remarque 1.1.9.* Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraîne nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier.

## 1.2 Théorie de Lyapunov

L'utilisation des fonctions définies positives est une technique parmi les plus efficaces pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire.

**Définition 1.2.1 (Fonction de classe  $\mathcal{K}$ ).** Une fonction continue  $\alpha : [0, a[ \rightarrow [0, +\infty[$  est dite de classe  $\mathcal{K}$ , si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Elle est dite de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , si de plus, on a  $a = +\infty$  et  $\alpha(r) \rightarrow +\infty$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .

**Définition 1.2.2 (Fonction de classe  $\mathcal{KL}$ ).** Une fonction continue  $\beta : [0, a[ \times [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est dite de classe  $\mathcal{KL}$ , si pour tout  $s$  fixé, l'application  $r \mapsto \beta(r, s)$  est de classe  $\mathcal{K}$  et pour tout  $r$  fixé, l'application  $s \mapsto \beta(r, s)$  est décroissante et  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow +\infty$ .

Voici une autre reformulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{KL}$  ; les démonstrations des propositions suivantes peuvent être consultées dans l'ouvrage [41].

**Proposition 1.2.3.** *L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre*

- i. *Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction  $\alpha(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$  et une constante positive  $c$  indépendante de  $t_0$  telle que,*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x_0\| < c.$$

- ii. *Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .*

**Proposition 1.2.4.** *L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre*

- i. *Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction  $\beta(\cdot, \cdot)$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une constante positive  $c$  indépendante de  $t_0$  telle que,*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x_0\| < c.$$

- ii. *Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .*

**Proposition 1.2.5.** *L'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre*

- i. *Exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec*

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0, \quad \forall \|x_0\| < c.$$

- ii. *Globalement exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale  $x_0$ .*

**Définition 1.2.6.** Une fonction continue  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite :

- définie positive, s'il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(t, x) \geq \alpha(\|x\|).$$

- définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  avec une fonction  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$ .
- limitée ou decrescent, s'il existe une fonction  $\gamma$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad V(t, x) \leq \gamma(\|x\|).$$



**Définition 1.2.7 (Fonction de Lyapunov).** On considère le système (1.1). Soit  $U(0)$  un voisinage de zéro et  $V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et différentiable sur  $U(0)$ .

- On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov au sens large en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  - i.  $V$  est définie positive.
  - ii.  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  pour tout  $x \in U(0)$ .
- On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov stricte en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
  - i.  $V$  est définie positive.
  - ii.  $\dot{V}(t, x) < 0$  pour tout  $x \in U(0) \setminus \{0\}$ .

L'utilisation de ces fonctions fournit des critères qui permettent de conclure à la stabilité ou à la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre sans que l'intégration des équations du système considéré soit nécessaire. Les résultats datent du 19<sup>e</sup> siècle et sont dus à Lyapunov. Pour une démonstration, le lecteur pourra se référer à [50].

**Théorème 1.2.8.** *On considère le système (1.1). Si le système admet une fonction de Lyapunov au sens large sur  $U(0)$ , alors l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre stable. Si de plus  $V$  est décroissante, alors  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément stable.*

**Théorème 1.2.9.** *Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système (1.1) et  $U(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ . Soit  $V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle qu'il existe des fonctions de classe  $\mathcal{K}$   $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  définies sur  $[0, r[$  vérifiant :  $\forall t \geq t_0$  et  $\forall x \in U(0)$ ,*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (1.2)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|). \quad (1.3)$$

*Alors,  $x = 0$  est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. Si  $U(0) = \mathbb{R}^n$  et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , alors  $x = 0$  est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.*

**Théorème 1.2.10.** *Considérons le système (1.1). Supposons que ce système admet une fonction de Lyapunov  $V(t, x)$  et supposons qu'il existe des constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4 > 0$ , telles que,  $\forall x \in U(0)$ ,  $\forall t \geq t_0$  on a :*

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2 \quad (1.4)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3\|x\|^2 \quad (1.5)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right\| \leq c_4\|x\|, \quad (1.6)$$

*alors,  $x = 0$  est un point d'équilibre exponentiellement stable. Si  $U(0) = \mathbb{R}^n$ , alors l'origine est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable.*

### 1.3 Les systèmes perturbés

Etant donné que les systèmes physiques sont souvent complexes et difficilement exploitables pour le contrôle, leurs représentations avec une précision et un modèle de structure simple, reste un grand souci pour garantir la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable. En effet, beaucoup de dynamiques sont décrites par des systèmes perturbés de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)). \quad (1.7)$$

Pour ce système, on suppose que  $f(t, 0) = 0$ ,  $g(t, 0) = 0; \forall t \geq 0$  et que les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues par rapport à  $t$ , localement lipschitziennes en  $x$  pour assurer l'existence et l'unicité des solutions. Un tel système est vu comme étant la somme du système nominal  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  et du terme de perturbation  $g(t, x(t))$ . Ce dernier terme représente les erreurs de modélisation du système réel vu la présence des incertitudes. Généralement, on ne connaît pas cette fonction mais on dispose de quelques informations sur elle, comme par exemple la borne supérieure de  $\|g(t, x(t))\|$  (où  $\| \cdot \|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ ). Parmi les problèmes classiques qu'on peut se poser pour cette classe de systèmes, le problème de la stabilité. En effet, si on suppose que le système nominal est uniformément exponentiellement stable (ou encore UES), alors on se demandera si le système perturbé gardera le même comportement ou non. L'idée de résolution de ce problème revient à utiliser la fonction de Lyapunov du système nominal comme étant une fonction de Lyapunov candidate pour le second [50]. Cette approche est très pertinente pour l'étude de la stabilité locale du système

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)),$$

lors de sa linéarisation, pourvu la condition que  $F$  soit continûment différentiable et  $\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|$  soit localement bornée et Lipschitizienne, uniformément en  $t$ . Cette méthode est appelée méthode indirecte de Lyapunov, vu que la stabilité de ce dernier système (c'est à dire du système initial  $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ ) est déduite de celle de son linéarisé

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

où  $A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) |_{x=0}$ . Les limitations de cette méthode, résident dans le fait que le terme de perturbation considéré dans la linéarisation vérifie l'hypothèse

$$\|g(t, x(t))\| \leq L\|x\|^2 \quad \forall \|x(t)\| \leq r,$$

ce qui n'est pas le cas en général. De plus, le résultat obtenu reste toujours local, autrement dit, on désire plus prouver une stabilité globale. Néanmoins, on peut assurer la stabilité exponentielle du système perturbé tout en imposant à la fonction  $g(t, x(t))$  de vérifier une condition bien déterminée de sorte que ce terme  $g(t, x(t))$ , qui est supposé un terme destabilisant, n'influe pas sur la stabilité du système nominal. Il suffit par exemple de supposer la condition suivante :

$$\|g(t, x(t))\| \leq \gamma\|x(t)\|; \quad \forall t \geq 0, \quad (1.8)$$

avec  $\gamma$  une constante positive assez petite. Notons que les fonctions qui tendent vers zéro quand  $\|x(t)\|$  tend vers zéro et qui sont localement lipschitziennes en  $x$ , uniformément en  $t$  pour tout  $t \geq 0$  sont situées dans ce dernier cadre (c'est à dire elles vérifient l'inégalité

(1.8)). Cependant, il est souvent souhaitable d'établir des résultats plutôt du type global et ceci n'est plus possible si la contrainte (1.8) est locale. Une autre façon pour surmonter l'inconvénient de la méthode indirecte de Lyapunov et dans le but de fournir un résultat de stabilité globale, on optera l'idée de construire une fonction de Lyapunov qui sera la combinaison de celle candidate pour le système nominal et d'un terme additif  $\psi(t, x)$  qui sera choisi afin de compenser l'effet de la perturbation.

*Exemple 1.3.1.* Soit le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)x,$$

avec  $A(t)$  est supposée une matrice continue bornée sur  $[0, +\infty[$ ,  $B(t)$  continue et vérifie  $\|B(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . On suppose de plus que l'origine du système nominal est globalement uniformément exponentiellement stable (ou encore GUES). Alors d'après ce qui précède, l'origine est encore globalement uniformément exponentiellement stable (ou encore GUES).

Le système étudié dans la suite de ce mémoire est un système particulier dont la perturbation  $g(t, x(t))$  vérifie une certaine condition dite : condition du secteur.

## 1.4 Problème de Lur'e

**Description du système** On décrit le système de Lur'e comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \\ u &= -\phi(t, y) \end{aligned} \tag{1.9}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $y \in \mathbb{R}^m$  est la sortie et  $u \in \mathbb{R}^m$  est le contrôle du système. On suppose que  $m < n$ , qui est une hypothèse naturelle.

Le problème de la stabilité absolue est considéré un des sujets les plus classiques de la théorie du contrôle. Il a été évoqué depuis 1944, pour la première fois par le scientifique russe Lur'e ([1], [60], [72]). Pour cette raison, il est connu sous le nom de : « problème de Lur'e » et le système traité est dit « système de Lur'e ». Ce dernier est représenté comme étant l'interconnection par feedback d'un système dynamique linéaire et d'un autre non linéaire. Il peut également être vu comme un système linéaire perturbé avec une perturbation  $\phi$  qui appartient à un secteur donné. Le problème de la stabilité absolue consiste à trouver des conditions suffisantes qui portent sur le système linéaire de sorte que l'origine soit globalement uniformément stabilisable par une famille de contrôleurs qui dépendent de la sortie et qui appartiennent au secteur  $[K_1, K_2]$  (voir la définition ci-dessous), ce qui nous amène à assimiler la stabilité absolue à une stabilité robuste, dans le sens que l'origine sera stable pour toute une classe de non-linéarités vérifiant la condition du secteur.

On s'intéresse dans ce mémoire à étudier les problèmes de la stabilité et de la stabilisation d'un système de Lur'e à retard variable. Pour ce faire, il est indispensable de rappeler la définition d'une condition du secteur.

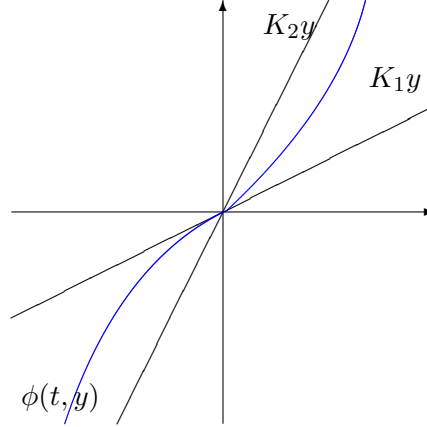
**Définition 1.4.1.** Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux matrices réelles  $m \times m$ , telles que  $K = K_2 - K_1$  soit une matrice symétrique définie positive. On dit qu'une fonction continue  $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est dans le secteur  $[K_1, K_2]$ , si  $\phi(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$  et

$$(\phi(t, y) - K_1 y)^T (\phi(t, y) - K_2 y) \leq 0, \forall t \geq 0 \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}^p.$$

**Définition 1.4.2.** On dit qu'une fonction non linéaire continue  $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  appartient au secteur  $[0, K]$ , où  $K$  est une matrice symétrique définie positive, si  $\phi$  satisfait

$$\phi^\top(t, y) [\phi(t, y) - Ky] \leq 0, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p, \quad (1.10)$$

Pour avoir une meilleure interprétation géométrique sur une telle fonction, on l'a présentée dans le cas particulier où  $p = 1$  par la figure ci-dessous.



**Définition 1.4.3 (Stabilité Absolue).** On dit que le système (1.9) est absolument stable sur le secteur  $[0, K]$  (resp sur  $[K_1, K_2]$ ), si  $x = 0$  est GUAS pour toute non-linéarité  $\phi(t, y)$  appartenant au secteur  $[0, K]$  (resp  $[K_1, K_2]$ ).

## 1.5 Introduction aux systèmes à retard

### 1.5.1 Exemple introductif

Dans ce paragraphe, nous allons présenter un exemple de système à retard tout en précisant ses sources [69]. Avant de l'aborder, il faut introduire tout d'abord la notion du robot autonome, afin de pouvoir mieux comprendre ce qui suit. En effet, un robot autonome est un système automoteur, disposant à la fois de moyens de traitement de l'information permettant une capacité décisionnelle suffisante et de moyens matériels adaptés de façon à pouvoir exécuter, sous contrôle humain réduit, un certain nombre de tâches précises, dans un environnement variable non complètement connu à l'avance.

On considère l'exemple d'une flotte constituée de  $N$  robots autonomes distants coopérants dans le but de réaliser une action ou une tâche commune. Et vu que cette collaboration suppose un partage de tâches et d'informations, on dit qu'il s'agit bien d'un réseau de communication. Pour représenter son évolution, on peut suivre l'hypothèse classique dans la modélisation mathématique qui suppose que le comportement futur peut être caractérisé uniquement à l'instant présent (noté  $t$ ), par un vecteur  $x(t)$  appartenant à un espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{R}^n$ . On appelle alors  $x(t)$  le vecteur d'état de l'ensemble des  $N$  robots se déplaçant dans un espace donné. Ce vecteur  $x(t)$  rend compte de l'état de chacun des robots pris individuellement, c'est à dire,

$$x(t) = [x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_N(t)].$$

La composante  $x_i(t)$  du  $i^{me}$  robot contient notamment sa position et sa vitesse. Si nous négligeons les caractéristiques du réseau et les problèmes de communication entre les différents agents coopérants, l'évolution de l'état de chacune des entités sera décrite par le

système d'équation :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad \dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_N(t)) \quad (I)$$

Mais de point de vue réalité, on constate qu'il existe des retards intrinsèques, induits par le réseau de communication, ce qui rend cette représentation peu convenable et très peu réaliste. En effet, les informations provenant des autres robots ne parviennent qu'à un certain laps de temps après leur émission. La cause majeure de ce retard est due aux canaux de communication entre les robots. Ces derniers sont des éléments physiques induisant un retard dépendant de leurs propriétés structurelles et surtout des algorithmes mis en place pour la gestion du trafic sur le réseau et aussi apparaissant lors de la conversion d'un signal de mesure physique en unités d'information transmises au réseau. De plus, lors de l'émission, la gestion des données dépend du protocole utilisé. On distingue essentiellement trois types de protocoles, selon le domaine d'application dans lequel ils sont utilisés :

1. Bus de terrain C.A.N (Controller Area Network) : caractérisé par l'utilisation de niveaux de priorité pour l'émission des messages ( $2^{29}$  niveaux). Son débit est au maximum de  $1\text{Mbit/s}$  pour une longueur de  $40\text{m}$ . Un noeud peut émettre à tout instant si le bus est silencieux, mais c'est le message à plus haut niveau de priorité qui a l'accès au bus (au travers du contrôleur central du bus), si deux noeuds tentent d'émettre au même instant.
2. Réseaux locaux L.A.N (Local Area Network) : largement répandus et habituellement utilisés pour connecter des ordinateurs dans les réseaux privés. Ils ont un taux de transmission élevé. Leur taille limitée, rend le retard connu et borné. Ils ont aussi un taux de transmission très élevé.
3. Réseaux longue distance W.A.N (Wide Area Network) : sont caractérisés par la présence d'un ou plusieurs routeurs et de commutateurs qui gèrent et distribuent l'information. La principale influence du routeur est d'induire une file d'attente où sont stockés les messages avant d'être retransmis. Etant donnée sa structure chaînée, la file d'attente présente alors une source de retard.

Ainsi, vu la cumulation des retards induits par chaque robot et puisque leurs tailles deviennent significatives au regard des performances du système, il s'avère indispensable d'en tenir compte dans la modélisation du système initial et par suite de modifier le système (I) en un système plus complexe mais plus adéquat, dit système à retard et représenté comme suit :  $\forall i = 1, \dots, N$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t - h_1), \dots, x_{i-1}(t - h_{i-1}), x_i(t - h_i), x_{i+1}(t - h_{i+1}), \dots, x_N(t - h_N)) \quad (II)$$

### 1.5.2 Solution d'un système à retard

Avant d'aborder le concept des équations différentielles fonctionnelles, il est susceptible de définir l'ensemble  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$  comme étant l'ensemble des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Plus précisément, notons  $\mathcal{C} =: \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ . Pour une fonction  $\phi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , on définit la norme continue  $\| \cdot \|_c$  par :

$$\| \phi \|_c = \max_{a \leq \theta \leq b} \| \phi(\theta) \|$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme Euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\psi \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$  et  $\psi_t$  une restriction de  $\psi$  dans  $\mathcal{C}$ , c'est à dire

$$\psi_t(\theta) = \psi(t + \theta), \quad \forall -r \leq \theta \leq 0.$$

Les systèmes à retard sont des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles fonctionnelles. On peut distinguer deux types de systèmes à retard, à savoir le type retardé et neutre. Néanmoins, on s'intéresse, uniquement dans ce mémoire à étudier les équations différentielles fonctionnelles du type retardés notées aussi EDFR décrites par le modèle mathématique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t) \quad (1.11)$$

D'après cette description, on constate que la dérivée de l'état  $x$  au temps  $t$  dépend de  $t$  et de  $x(\xi)$  avec  $t - r \leq \xi \leq t$ . En d'autres termes, la détermination de la future évolution de l'état exige la spécification des états initiaux  $x(t)$  dans un intervalle de temps de longueur  $r$ . De plus, à l'instant  $t = 0$ , la fonction  $x_t = x_0$  nécessite la connaissance des valeurs de  $x(t)$  sur l'intervalle de temps  $[-r, 0]$ . En d'autres termes, une condition initiale doit être précisée. Si la condition initiale à l'instant  $t_0$  d'une équation différentielle ordinaire est un point  $x(t_0)$ , celle d'une équation différentielle retardée est une fonction appartenant à l'ensemble  $\mathcal{C}$ .

$$x_0 = \phi, \quad \phi \in \mathcal{C}. \quad (1.12)$$

De ce fait, les systèmes à retards appartiennent à la classe des systèmes de dimension infinie.

Pour  $A > 0$ , une fonction  $x$  est dite solution du système (1.11) dans  $[t_0 - r, t_0 + A]$ , si dans cet intervalle,  $x$  est dérivable et satisfait l'EDFR (1.11).

Si de plus, la solution vérifie (1.12), alors elle est dite solution de l'équation avec la condition initiale (1.12). Dans ce cas, elle est notée  $x(t_0, \phi, f)$ . Enonçons tout d'abord le théorème d'existence et unicité de la solution pour les systèmes à retard [37].

**Théorème 1.5.1.** [37] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. Supposons de plus que  $f(t, \phi)$  est Lipschitzienne par rapport à  $\phi$  dans tout compact de  $\Omega$ , c'est à dire pour tout compact  $\Omega_0 \subset \Omega$ , il existe une constante  $L$  telle que

$$\| f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2) \| \leq L \| \phi_1 - \phi_2 \|_c$$

pour tout  $(t, \phi_1), (t, \phi_2) \in \Omega_0$ .

Si  $(t_0, \phi) \in \Omega$ , alors il existe une unique solution de (1.11) passant par  $(t_0, \phi)$ .

**Définition 1.5.2.** – La solution triviale du système (1.11) est dite stable si  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ , tel que

$$\| x_{t_0} \|_c < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

- Elle est dite asymptotiquement stable (ou AS), si elle est stable et  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ , tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  quand  $\| x_{t_0} \|_c < \delta$ .
- Elle est dite uniformément stable (ou US), si elle est stable et  $\delta(t_0, \varepsilon)$  peut être choisie indépendamment de  $t_0$ .
- Elle est dite uniformément asymptotiquement stable (ou UAS) si elle est uniformément stable et il existe  $\delta > 0$ , tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $T = T(\delta, \eta)$  de sorte qu'on ait

$$\| x_{t_0} \|_c < \delta \Rightarrow \| x(t) \| < \eta \quad \text{pour tout } t \geq t_0 + T, \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

- Elle est dite globalement (uniformément) asymptotiquement stable (ou GAS), si elle est (uniformément) asymptotiquement stable et  $\delta$  peut être choisie arbitrairement.

**Remarques :**

- Il est clair que les notions de stabilité, énoncées ci-dessus, ne diffèrent pas trop de celles des systèmes sans retard, sauf pour les hypothèses concernant les conditions initiales.
- Dans ce mémoire, l'étude des systèmes à retard appartenant au type neutre ne sera pas abordée. Cependant, il est important de signaler la différence avec le type retardé. En effet, pour ce type, les arguments du champ de vecteurs  $f$  font intervenir la dérivée de l'état  $x_t$  et par conséquent des dérivées retardées. Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage [37].

**1.5.3 Extension de la seconde méthode de Lyapunov**

Soit  $x = 0$  le point d'équilibre du système (1.11). Comme pour les équations différentielles ordinaires, la stabilité de l'origine concerne le comportement du système quand la trajectoire de ce dernier dévie du point  $x = 0$ .

Sans perte de généralité, on suppose que  $x(t) = 0$  est une solution de l'équation différentielle fonctionnelle (1.11), qu'on va appeler solution triviale. En effet, si on désire étudier la stabilité d'une solution non triviale  $y(t)$ , on fera le changement suivant :  $z(t) = x(t) - y(t)$ . Le système ainsi obtenu est alors :

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t)$$

qui admet la solution triviale  $z(t) = 0$ .

La seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction  $V$  définie positive, telle que le long des trajectoires du système (1.11), on ait  $\frac{dV}{dt} < 0$ , si  $x \neq 0$ . Cette méthode directe n'est valable que pour une classe restreinte de systèmes à retard, puisque  $\frac{dV}{dt}$  dépend des valeurs passées  $x_t$ . Elle est donc très difficile à appliquer dans le cas général des systèmes à retards. Deux extensions à la seconde méthode de Lyapunov ont été développées. En effet, dans le cas retardé, deux types d'approches sont possibles  $V = V(t, x(t))$  ou  $V = V(t, x_t)$ . Le premier cas conduit à une difficulté d'analyse liée au fait que la dérivée dépend des instants passés. Le second cas reporte cette difficulté dans la conception de la fonction  $V$ . Ces deux approches développées par Razumikhin et Krasovskii vont être rappelées dans la suite.

**1.5.3.1 Théorème de Lyapunov-Krasovskii**

Puisque l'étude de stabilité des systèmes sans retard nécessite la construction d'une fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$  qui est, en quelque sorte, la mesure potentielle quantifiant la déviation de l'état  $x(t)$  de la solution triviale, et puisqu'on a besoin que  $x(t)$  spécifie la future évolution du système au delà de  $t$ , il s'avère alors très évident le besoin que l'état  $x_t$ , qui désigne la valeur de  $x(t)$  sur l'intervalle  $[t - r, t]$ , accomplisse la même tâche, pour les systèmes à retard. Et par conséquence, la fonction de Lyapunov correspondante à un tel système sera dépendante de  $x_t$ . Autrement,  $V = V(t, x_t)$ . Une telle fonction est appelée alors : fonction de Lyapunov-Krasovskii. Soient  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable et  $x_t(t_0, \phi)$  la solution de l'équation (1.11) de condition initiale  $x_{t_0} = \phi$ , alors on évalue la dérivée de  $V(t, x_t)$  par rapport à  $t$  au point  $(t_0, \phi)$  comme suit :

$$\dot{V}(t_0, \phi) = \frac{d}{dt} (V(t, x(t, x_t)))|_{t=t_0, x_t=\phi} = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t_0 + h, x_{t_0+h}(t_0, \phi)) - V(t_0, \phi)]$$

On énonce maintenant le théorème de Lyapunov-Krasovskii, qui représente une condition suffisante pour la stabilité des systèmes à retard [37].

**Théorème 1.5.3.** *Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$  où  $\mathcal{C}_0$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) est un ensemble borné de  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ). Supposons qu'il existe des fonctions  $u, v, \omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues, non-décroissantes et vérifiant :  $u(s)$  et  $v(s)$  strictement positives pour  $s > 0$ , et  $u(0) = v(0) = 0$ . S'il existe une fonction continue différentiable  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ , telle que*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c)$$

et

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -\omega(\|\phi(0)\|)$$

alors la solution triviale de (1.11) est uniformément stable. Si  $\omega(s) > 0, \forall s > 0$ , alors cette solution est uniformément asymptotiquement stable. Si de plus,  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$  alors elle est globalement uniformément asymptotiquement stable.

A ce niveau, on peut envisager un cas particulier pour lequel la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est quadratique bornée, et par suite on obtient une autre version du théorème de Lyapunov-Krasovskii énoncée sous la forme suivante [37].

**Corollaire 1.5.4.** *Le système (1.11) est asymptotiquement stable s'il existe une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii quadratique bornée  $V(\phi)$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$V(\phi) \geq \varepsilon \|\phi(0)\|^2,$$

et sa dérivée le long des trajectoires

$$\dot{V}(\phi) = \dot{V}(x_t) |_{x_t=\phi},$$

satisfait

$$\dot{V}(\phi) \leq -\varepsilon \|\phi(0)\|^2.$$

*Démonstration.* En comparant les conditions du théorème à celles du corollaire, on remarque bien que la seule hypothèse enlevée est

$$V(\phi) \leq v(\|\phi\|_c)$$

mais, vu que  $V$  est une fonctionnelle quadratique par rapport à  $\phi$  et bornée, on peut assurer la relation suivante :

$$v(\|\phi\|_c) = K(\|\phi\|_c)^2$$

pour  $K > 0$  suffisamment grand. □

### 1.5.3.2 Théorème de Razumikhin

Du moment que la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii exige que l'état du système  $x(t)$  appartienne à l'intervalle  $[t-r, t]$ , il est inévitable de manipuler des fonctionnelles. Ce qui entraîne une difficulté dans l'application du théorème de Lyapunov-Krasovskii. Cette difficulté peut être parfois surmontée et dépassée grâce au théorème de Razumikhin, qui contrairement à l'autre, introduit essentiellement des fonctions au lieu des fonctionnelles. L'idée derrière ce théorème est aussi de trouver une fonction  $V(x)$  représentant la grandeur de  $x(t)$ . Voici alors le théorème de Razumikhin [37] :



**Théorème 1.5.5.** Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathcal{D}$  où  $\mathcal{C}_0$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) est un ensemble borné de  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ). Supposons qu'il existe des fonctions  $u, v, \omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues, non-décroissantes et vérifiant :  $u(s)$  et  $v(s)$  sont strictement positives pour  $s > 0$ ,  $u(0) = v(0) = 0$  et  $v$  est strictement croissante. S'il existe une fonction continue différentiable  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , telle que

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

et la dérivée de  $V$  le long des trajectoires de (1.11), satisfait

$$\dot{V}(t, x) \leq -\omega(\|x\|) \quad \text{si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)) \quad (1.13)$$

$\forall \theta \in [-r, 0]$ , alors la solution triviale de (1.11) est uniformément stable. Si  $\omega(s) > 0$  pour tout  $s > 0$  et il existe une fonction continue, non-décroissante  $p(\cdot)$  vérifiant :  $p(s) > s$  pour tout  $s > 0$  telle que (4.3) devient :

$$\dot{V}(t, x) \leq -\omega(\|x\|) \quad \text{si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t)))$$

$\forall \theta \in [-r, 0]$ , alors cette solution est uniformément asymptotiquement stable. Si de plus,  $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = +\infty$  alors elle est globalement uniformément asymptotiquement stable.

De même, si on voudrait revenir au cas où la fonction de Lyapunov est quadratique et bornée, on aura le résultat suivant [37] :

**Corollaire 1.5.6.** Le système (1.11) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction de Lyapunov quadratique bornée  $V(\phi)$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$V(x) \geq \varepsilon \|x\|^2,$$

et sa dérivée le long des trajectoires satisfait

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\varepsilon \|x(t)\|^2$$

où

$$V(x(t + \theta)) \geq pV(x(t)), \quad \forall \theta \in [-r, 0]$$

pour toute constante  $p > 1$ .

*Démonstration.* En comparant les conditions du théorème à celles du corollaire, on constate que la seule condition négligée est

$$V(x) \leq v(x).$$

Or, étant donné que  $V$  est une fonction quadratique par rapport à  $x$  et bornée, alors on peut assurer l'existence d'une constante  $K > 0$  suffisamment grande telle que :

$$V(x) \leq K \|x\|^2$$

Par conséquent, pour  $v(x) = K \|x\|^2$ , les conditions du théorème sont satisfaites.  $\square$

## 1.6 Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles

L'introduction de l'outil LMI (Linear Matrix Inequality) dans l'analyse des systèmes dynamiques date depuis 1890, quand Lyapunov avait publié son travail fondamental introduisant la théorie de Lyapunov. En effet, la première LMI formulée, connue sous le nom de l'inégalité de Lyapunov en  $P$ , était de trouver une matrice  $P > 0$  telle que  $A^T P + P A < 0$  et ceci pour caractériser la stabilité du système  $\dot{x} = Ax$ .

### 1.6.1 Analyse convexe

La notion de convexité tient dans ce mémoire une place plus ou moins importante. En effet, les problèmes d'analyse et de synthèse dont nous nous proposons d'étudier, sont formulés en termes d'optimisation convexe [13]. Un tel problème s'énonce donc de la façon suivante :

$$\min_{x \in \mathcal{E}} (f(x))$$

où  $\mathcal{E}$  est un ensemble convexe et  $f$  est une fonction convexe. La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage :

1. les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables.
2. il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser ; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique (puisque la fonction coût  $f$  est convexe).

### 1.6.2 Problèmes classiques de LMI

Depuis quelques années, de nombreux travaux ayant pour principal objectif de réduire une grande variété de problèmes de synthèse ou d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des LMIs ont vu le jour. Parallèlement, des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation convexe ont été développées. Citons à ce niveau, la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives.

**Définition 1.6.1.** Etant données une famille de matrices symétriques  $P_i$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  de  $\mathbb{R}^{p \times p}$  et un vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , une LMI stricte (resp. non stricte) en  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  s'écrit sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i > 0 \text{ (resp. } \geq 0 \text{)}.$$

#### Remarque

L'ensemble  $E$  défini par  $E = \{x \in \mathbb{R}^n; F(x) > 0\}$  est convexe, ce qui permet de considérer une contrainte LMI comme convexe. On peut aussi énumérer dans ce cadre les trois problèmes d'optimisation fréquemment rencontrés sous forme de LMI :

- Le problème de réalisabilité (ou faisabilité).
- Problème de valeurs propres (EVP).
- Problème des valeurs propres généralisées (GEVP).

### 1.6.3 Complément de Schur

Les théorèmes issus des techniques de Lyapunov conduisent généralement à des contraintes non linéaires. Les difficultés rencontrées proviennent de la transformation de ces contraintes non linéaires en LMIs. On cite alors la formulation basée sur le complément de Schur comme étant la méthode la plus simple et la plus utilisée.

**Théorème 1.6.2.** Soient trois matrices  $R(x) = R^T(x)$ ,  $Q(x) = Q^T(x)$ ,  $S(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ . Alors, la LMI

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{pmatrix} > 0$$

est équivalente à ces deux relations

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0$$

**1.6.4 S-procédure**

De même et dans ce même contexte, on rappelle la S-procédure :

**Théorème 1.6.3.** *Soit une famille de matrices  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i=0,1,2,\dots,p$ . S'ils existent des réels  $\varepsilon_i \geq 0$ ,  $i=1,\dots,p$ , tels que  $F_0 - \sum_{i=1}^p \varepsilon_i F_i > 0$ , alors  $\forall \xi \neq 0$*

$$\xi^T F_1 \xi > 0, \dots, \xi^T F_p \xi > 0 \implies \xi^T F_0 \xi > 0.$$

*Pour le cas particulier  $p = 1$ , on a l'équivalence.*

# Etude des systèmes de Lur'e à retard

## 2.1 Introduction

Les premières tendances de l'étude de stabilité des systèmes à retard concernaient principalement des retards constants. Depuis le milieu des années 90, différentes conditions de stabilité robustes de systèmes linéaires à retard constant, mais incertain, ont été développées. On cite ([11],[17], [46], [45]). Ces tendances trouvent leur justification dans le cas où, seule une partie récente du passé exerce une influence sur le comportement du système. On parle alors d'équations à retards majorés ou bornés, s'il existe un nombre réel  $\tau > 0$  tel que dans l'équation  $\dot{x} = f(t, x_t)$  la fonctionnelle  $x_t$  est définie sur  $[-\tau, 0]$  ([69]).

Dans ce chapitre, contrairement aux travaux [30] et [32], nous nous sommes intéressés à étudier la stabilité des systèmes linéaires à retard bouclés par un terme non linéaire  $\psi(t, y(t))$  dépendant du temps et de la sortie, vérifiant une condition du secteur. Ce chapitre est l'objet du travail établi dans [27], dont l'objectif est non seulement de fournir un nouveau critère dépendant du retard pour la stabilité absolue du système de Lur'e avec retard variant dans un intervalle et de montrer son raffinement vis à vis de celui proposé par [46], mais aussi de stabiliser une classe de systèmes à retard, via un contrôle linéaire. Nous prouverons l'efficacité de ce critère par des exemples numériques déjà traités par Han et Fridman pour voir de près l'avantage. Une des étapes du travail de l'automaticien consiste essentiellement à établir des critères de stabilité pour le système en question. Face à la diversité des travaux consacrés à l'étude de stabilité des systèmes à retard dans la littérature, un mathématicien ou automaticien se charge naturellement de comparer ces derniers entre eux, de savoir la différence et de déterminer le meilleur parmi eux pour l'adopter dans le futur. En effet ce chapitre se situe dans le cadre de raffinement du critère déjà établi dans [7] pour les systèmes de Lur'e à retard constant. En effet, pour des soucis d'ordre pratique, et dans le but de se rapprocher du comportement des processus réels, il nous paraît intéressant, voir utile, de proposer des modèles dont le retard est une fonction du temps, vu que la constance du retard est une hypothèse rarement vérifiée dans la réalité (pour mieux comprendre, il suffit de considérer le cas de la communication internet...[69]). De plus, on distingue qu'une majorité des résultats existants (qui traitent le cas du retard variable) suppose que les retards varient dans un intervalle  $[0, h_M]$  (voir [32], [78], [77]). Et étant donné que, ces derniers apparaissant dans les processus réels, sont le plus souvent dûs à des phénomènes de transfert d'information ou de matière, il se révèle alors conservatif, le fait d'autoriser le retard à prendre la valeur 0. Réellement, cette dernière hypothèse, revient à supposer qu'à un moment, le transfert se fait de manière instantanée. Or ce n'est pas vrai.

En outre, dans beaucoup de résultats récents, les informations issues du retard comme sa borne inférieure ou encore la borne supérieure de sa dérivée, sont négligées et même si dans quelques uns on tenait compte de cette dernière, elle est très souvent supposée inférieure ou égale à 1 (voir [32], [47], [78], [77], [87]).

Dans ce contexte et à condition bien sûr que cela conduise à un critère moins restrictif, il est très avantageux de se donner une borne inférieure du retard (c'est à dire  $h_m > 0$ ) et de faire intervenir l'information issue de sa dérivée, sans contrainte supplémentaire sur la vitesse de variation du retard. Autrement dit, sans se restreindre au cas où  $\dot{h}(t) < 1$ . En effet, cette condition assure que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans un ordre chronologique. Ce que nous ne font pas ici. Ainsi, avec cet esprit critique, nous avons fourni des résultats meilleurs que ceux dans [47], [78], [87]. Ceci était l'objectif du papier [27].

**Notations :** Tout le long de ce chapitre,  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels,  $\mathbb{R}^n$  l'espace Euclidien de dimension  $n$  et  $\mathbb{R}^{n \times m}$  l'ensemble des  $n \times m$  matrices réelles.  $I$  est la matrice identité. L'ensemble  $\mathcal{C}_{n, \tau_M} := \mathcal{C}([-\tau_M, 0], \mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle  $[-\tau_M, 0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . La notation  $A > 0$  désigne une matrice symétrique définie positive  $A$  et  $A^T$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

## 2.2 Stabilité du système de Lur'e à retard

### 2.2.1 Critère de stabilité dépendant d'un retard constant

On considère le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + B\omega(t), \\ y(t) &= C_0 x(t) + C_1 x(t-h), \\ \omega(t) &= -\varphi(t, y(t)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système ;  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie mesurée et  $h > 0$  le retard constant. On suppose de plus que :

- La non linéarité  $\varphi(.,.) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est continue et vérifie la condition du secteur  $[0, K]$  c'est à dire  $\varphi$  satisfait

$$\varphi^T(t, y)[\varphi(t, y) - Ky] \leq 0, \forall (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p, \tag{2.2}$$

avec  $K$  une matrice définie positive.

- Les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $C_0$  et  $C_1$  sont réelles de dimensions appropriées.
- La condition initiale du système (2.1) est donnée par

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad \phi \in \mathcal{C}_{n, h} := \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n).$$

On suppose aussi qu'on est bien soumis sous les conditions d'existence et unicité des solutions pour toute condition initiale  $\phi$ .

Le développement de cette partie est basé essentiellement sur le résultat suivant

**Proposition 2.2.1.** [87] Soit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  une fonction avec une dérivée de premier ordre continue. Alors cette inégalité intégrale est vérifiée pour toutes matrices :  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X > 0$  et  $h(t) \geq 0$  :

$$-\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) X \dot{x}(s) ds \leq \xi^T(t) \Upsilon \xi(t) + h(t) \xi^T(t) \Gamma^T X^{-1} \Gamma \xi(t) \tag{2.3}$$

où

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^T := \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix}; \quad \xi(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix}.$$

Cette proposition joue un rôle très important dans le développement du calcul qui suivra. On énonce maintenant un résultat qui représente une condition suffisante pour la stabilité du système (2.1).

**Théorème 2.2.2.** [7] *Pour  $h > 0$ , le système (2.1) avec une fonction non linéaire vérifiant la condition (2.2) est absolument stable, s'il existe  $\varepsilon > 0$ , des matrices  $P > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $R > 0$ ,  $M_1$  et  $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tels que la LMI suivante est vérifiée*

$$E_1 = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & hA_0^T R & hM_1^T \\ * & E_{22} & -\varepsilon C_1^T K & hA_1^T R & hM_2^T \\ * & * & -2\varepsilon I & hB^T R & 0 \\ * & * & * & -hR & 0 \\ * & * & * & * & -hR \end{pmatrix} < 0 \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} E_{11} &= A_0^T P + P A_0 + Q + M_1^T + M_1 \\ E_{12} &= P A_1 - M_1^T + M_2, \\ E_{13} &= P B - \varepsilon C_0^T K, \\ E_{22} &= -Q - M_2^T - M_2. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Critère de stabilité du système dépendant d'un retard variable

**Description du système :** On considère le système à retard variant avec le temps de cette forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - h(t)) + B \omega(t), \\ y(t) &= C_0 x(t) + C_1 x(t - h(t)), \\ \omega(t) &= -\varphi(t, y(t)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie mesurée. On suppose que :

- La fonction non linéaire  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est continue et appartient au secteur  $[0, K]$ . Autrement  $\varphi$  satisfait

$$\varphi^\top(t, y) [\varphi(t, y) - Ky] \leq 0, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p, \quad (2.6)$$

où  $K$  est une matrice définie positive.

- $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $C_0$  et  $C_1$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées.
- Le retard  $h(t)$  est une fonction de temps supposée dérivable et satisfaisant

$$0 \leq h_m \leq h(t) < h_M \quad \text{et} \quad \dot{h}(t) < \mu, \quad (2.7)$$

avec  $h_m$ ,  $h_M$  et  $\mu$  sont des réels constants.

- La condition initiale du système est donnée par

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_M, 0], \quad \phi \in \mathcal{C}_{n, h_M}.$$

Notons que la borne inférieure du retard qu'on a notée  $h_m$ , peut être différente de zéro, puisqu'en pratique, le plus souvent,  $h_m$  est strictement positive.

On suppose aussi qu'on est bien soumis sous les conditions d'existence et unicité des solutions pour toute condition initiale  $\phi$ .

On a alors le résultat suivant.

**Théorème 2.2.3.** [26] *Pour des scalaires donnés  $0 \leq h_m < h_M$ , le système (2.5) avec une fonction non linéaire satisfaisant la condition (2.6) est absolument stable s'il existe un scalaire  $\varepsilon > 0$  et des matrices définies positives  $P > 0$ ,  $Q_i > 0$ ,  $R_i > 0$ ,  $i=1,2,3$  et des matrices réelles  $M_i, N_i, S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i=1,2$  tels que la LMI*

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & h_M A_0^T R_1 & h_M M_1^T & \Xi_{18} & 0 & h_M A_0^T R_3 & h_M S_1^T \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & \Xi_{25} & h_M A_1^T R_1 & 0 & \Xi_{28} & 0 & h_M A_1^T R_3 & h_M S_2^T \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{39} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & h_M M_2^T & 0 & \Xi_{49} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & h_M B^T R_1 & 0 & \Xi_{58} & 0 & h_M B^T R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h_M R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -h_M R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{99} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -h_M R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -h_M R_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.8)$$

avec

$$\Xi_{11} = A_0^T P + P A_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + M_1^T + M_1 + S_1^T + S_1,$$

$$\Xi_{12} = P A_1 - S_1^T + S_2,$$

$$\Xi_{14} = -M_1^T + M_2,$$

$$\Xi_{15} = P B - \varepsilon C_0^T K,$$

$$\Xi_{22} = -(1 - \mu) Q_3 - S_2^T - S_2,$$

$$\Xi_{25} = -\varepsilon C_1^T K,$$

$$\Xi_{33} = -Q_1 + N_1^T + N_1,$$

$$\Xi_{34} = -N_1^T + N_2,$$

$$\Xi_{44} = -Q_2 - M_2^T - M_2 - N_2^T - N_2,$$

$$\Xi_{55} = -2\varepsilon I,$$

$$\Xi_{18} = (h_M - h_m) A_0^T R_2,$$

$$\Xi_{28} = (h_M - h_m) A_1^T R_2,$$

$$\Xi_{58} = (h_M - h_m) B^T R_2,$$

$$\Xi_{88} = -(h_M - h_m) R_2,$$

$$\Xi_{39} = (h_M - h_m) N_1^T,$$

$$\Xi_{49} = (h_M - h_m) N_2^T,$$

$$\Xi_{99} = -(h_M - h_m) R_2,$$

soit vérifiée.

*Démonstration.* : On considère la fonction de Lyapunov-Krassovskii candidate suivante :

$$\begin{aligned} V(t, x_t) &= x^T(t) P x(t) + \int_{t-h_m}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-h_M}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds \\ &\quad + \int_{t-h(t)}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds + \int_{-h_M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s) ds d\theta \\ &\quad + \int_{-h_M}^{-h_m} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s) ds d\theta \\ &\quad + \int_{-h(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) R_3 \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned}$$

En la dérivant le long des trajectoires du système (2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(t, x_t) = \dot{V}(t, x_t) = & 2\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)Q_1x(t) - x^T(t - h_m)Q_1x(t - h_m) \\
& + x^T(t)Q_2x(t) - x^T(t - h_M)Q_2x(t - h_M) \\
& + x^T(t)Q_3x(t) - (1 - \dot{h}(t))x^T(t - h(t))Q_3x(t - h(t)) \\
& + h_M\dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \int_{t-h_M}^t \dot{x}^T(s)R_1\dot{x}(s)ds \\
& + (h_M - h_m)\dot{x}^T(t)R_2\dot{x}(t) - \int_{t-h_M}^t -h_m\dot{x}^T(s)R_2\dot{x}(s)ds \\
& + h(t)\dot{x}^T(t)R_3\dot{x}(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R_3\dot{x}(s)ds. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Si nous utilisons les hypothèses (2.7) et nous appliquons l'inégalité (2.3) aux termes avec integral de l'équation (2.9), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) \leq & 2\dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)[Q_1 + Q_2 + Q_3]x(t) - x^T(t - h_m)Q_1x(t - h_m) \\
& - x^T(t - h_M)Q_2x(t - h_M) - (1 - \mu)x^T(t - h(t))Q_3x(t - h(t)) \\
& + \dot{x}^T(t)[h_MR_1 + (h_M - h_m)R_2 + h_MR_3]\dot{x}(t) \\
& + \xi_1^T(t)\Upsilon_1\xi_1(t) + h_M\xi_1^T(t)\Gamma_1^TR_1^{-1}\Gamma_1\xi_1(t) \\
& + \xi_2^T(t)\Upsilon_2\xi_2(t) + (h_M - h_m)\xi_2^T(t)\Gamma_2^TR_2^{-1}\Gamma_2\xi_2(t) \\
& + \xi_3^T(t)\Upsilon_3\xi_3(t) + h_M\xi_3^T(t)\Gamma_3^TR_3^{-1}\Gamma_3\xi_3(t)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h_M) \end{bmatrix}; \Gamma_1^T = \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix}; \Upsilon_1 = \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix}, \\
\xi_2(t) &= \begin{bmatrix} x(t - h_m) \\ x(t - h_M) \end{bmatrix}; \Gamma_2^T = \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_2^T \end{bmatrix}; \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} N_1^T + N_1 & -N_1^T + N_2 \\ * & -N_2^T - N_2 \end{bmatrix}, \\
\xi_3(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix}; \Gamma_3^T = \begin{bmatrix} S_1^T \\ S_2^T \end{bmatrix}; \Upsilon_3 = \begin{bmatrix} S_1^T + S_1 & -S_1^T + S_2 \\ * & -S_2^T - S_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

après avoir arrangé les termes de l'inégalité, nous avons ceci

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) \Pi \eta(t), \tag{2.10}$$

où

$$\Pi := \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & \Pi_{14} & \Pi_{15} \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & \Pi_{25} \\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} \end{bmatrix}, \eta(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \\ x(t - h_m) \\ x(t - h_M) \\ \omega(t) \end{bmatrix},$$



avec

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} &= A_0^T P + P A_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + h_M A_0^T R_1 A_0 + (h_M - h_m) A_0^T R_2 A_0 \\
&\quad + h_M A_0^T R_3 A_0 + M_1^T + M_1 + h_M M_1^T R_1^{-1} M_1 + h_M S_1^T R_3^{-1} S_1 + S_1^T + S_1, \\
\Pi_{12} &= P A_1 + h_M A_0^T R_1 A_1 + (h_M - h_m) A_0^T R_2 A_1 + h_M A_0^T R_3 A_1 - S_1^T + S_2 + h_M S_1 R_3^{-1} S_2, \\
\Pi_{14} &= -M_1^T + M_2 + h_M M_1^T R_1^{-1} M_2, \\
\Pi_{15} &= P B + h_M A_0^T R_1 B + (h_M - h_m) A_0^T R_2 B + h_M A_0^T R_3 B, \\
\Pi_{22} &= -(1 - \mu) Q_3 - S_2^T - S_2 + h_M A_1^T R_1 A_1 + (h_M - h_m) A_1^T R_2 A_1 + h_M A_1^T R_3 A_1 \\
&\quad + h_M S_2^T R_3^{-1} S_2, \\
\Pi_{25} &= h_M A_1^T R_1 B + (h_M - h_m) A_1^T R_2 B + h_M A_1^T R_3 B, \\
\Pi_{33} &= -Q_1 + N_1^T + N_1 + (h_M - h_m) N_1^T R_2^{-1} N_1, \\
\Pi_{34} &= -N_1^T + N_2 + (h_M - h_m) N_1^T R_2^{-1} N_1, \\
\Pi_{44} &= -Q_2 - M_2^T - M_2 + h_M M_2^T R_1^{-1} M_2 + (h_M - h_m) N_2^T R_2^{-1} N_2 - N_2^T - N_2, \\
\Pi_{55} &= h_M B^T R_1 B + (h_M - h_m) B^T R_2 B + h_M B^T R_3 B.
\end{aligned}$$

Une condition suffisante pour la stabilité absolue de notre système (2.5) est l'existence de matrices réelles  $P > 0$ ,  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$ ,  $Q_3 > 0$ ,  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$  et  $R_3 > 0$  de sorte que

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t) \Pi \eta(t) < 0, \quad (2.11)$$

pour tout  $\eta(t) \neq 0$ .

Or, la condition du secteur (2.6) implique que

$$\omega^T(t) \omega(t) + \omega^T(t) [K C_0 x(t) + K C_1 x(t - h(t))] \leq 0.$$

Et puis d'après la  $\mathcal{S}$ -procédure (1.6.3), il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\eta^T(t) \Pi \eta(t) - 2\varepsilon \omega^T(t) \omega(t) - 2\varepsilon \omega^T(t) [K C_0 x(t) + K C_1 x(t - h)] < 0, \quad (2.12)$$

pour tout  $\eta(t) \neq 0$ . On réécrit alors de manière équivalente l'inégalité (2.12) comme suit

$$\eta^T(t) \Sigma \eta(t) < 0, \quad (2.13)$$

avec

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} & \Sigma_{15} \\ * & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} & \Sigma_{25} \\ * & * & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} & \Sigma_{35} \\ * & * & * & \Sigma_{44} & \Sigma_{45} \\ * & * & * & * & \Sigma_{55} \end{bmatrix},$$

où les termes de la LMI sont donnés par

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ij} &= \Pi_{ij}, (i, j = 1, 2, 3, 4), & \Sigma_{15} &= \Pi_{15} - \varepsilon C_0^T K, & \Sigma_{25} &= \Pi_{25} - \varepsilon C_1^T K, \\
\Sigma_{35} &= \Pi_{35}, & \Sigma_{45} &= \Pi_{45}, & \Sigma_{55} &= \Pi_{55} - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Enfin, grâce au complément de Shur (1.6.2), la LMI ( $\Sigma < 0$ ) est équivalente à la LMI (2.8). Ce qui achève la preuve.  $\square$

### 2.2.3 Exemples numériques

#### Exemple 1

Considérons le système à retard (2.5) avec une nonlinéarité vérifiant la condition du secteur (2.6) où

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 160 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 7.5 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Pour  $\mu$  donné, les bornes supérieures admissibles calculées de  $h_M$ , afin de garantir la stabilité du système (2.6) pour des bornes inférieures fixées  $h_m$ , sont énumérées dans le Tableau 1. Lorsque  $h_m = 0$ , il est clair que notre résultat est meilleure par rapport à ceux de [33, Fridman et Shaked] et [47, Han and Jiang]. Cette comparaison prouve, effectivement le mérite du Théorème 2.2.3.

$h_m$	$h_M$ (Fridman et Shaked)	$h_M$ (Han et Jiang)	$h_M$ (nouveau critère)
0	0.7692	0.8654	0.8963022
0.05	-	0.8763	0.8847
0.10	-	0.8873	0.88866
0.15	-	0.8984	0.98248
0.20	-	0.9097	0.91412
0.30	-	0.9330	0.95324
0.40	-	0.9575	0.9724

Tableau 1 : Valeurs admissibles de  $h_M$  pour des valeurs données de  $h_m$

#### Exemple 2

Considérons le système avec les paramètres suivants

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$B = C_0 = C_1 = K = 0.$$

Le Tableau 2 résume des résultats déjà obtenus dans la littérature et les compare avec les bornes supérieures admissibles de  $h_M$  obtenues en utilisant le résultat du Théorème 2.2.3, présenté dans [26].  $h_M$  étant le retard maximal autorisé et prouvé par chaque méthode citée. Ce dernier est obtenu par une recherche linéaire. De toute évidence, notre méthode fournit des résultats beaucoup moins conservatifs, ce qui révèle nettement sa validité. Cet exemple montre aussi l'efficacité du critère proposé dans [26] même pour les systèmes

linéaires à retard variant dans un intervalle.

$h_m$	Méthodes	$h_M$
0	Li et De Sousa(1997)	0.8571
	Niculescu et al(1995)	0.99
	Notre méthode	1.5309
0.01	Li et De Sousa(1997)	-
	Niculescu et al(1995)	-
	Notre méthode	1.5323
1	Jiang et Han(2005)	1.64
	He,Wang,Lin et Wu(2006)	1.74
	Notre méthode	1.88

Tableau 2 : Valeurs admissibles de  $h_M$  pour des valeurs données de  $h_m$  et  $\mu$  inconnu

## 2.3 Stabilisation du système de Lur'e à retard

### 2.3.1 Stabilisation du système contrôlé à retard constant

On considère maintenant le système contrôlé suivant

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + B\omega(t) + Gu(t), \\ y(t) &= C_0x(t) + C_1x(t-h), \\ \omega(t) &= -\varphi(t, y(t)),\end{aligned}\tag{2.15}$$

avec  $K$  une matrice définie positive. Les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  et  $G$  sont réelles de dimensions appropriées. On suppose de plus que la non linéarité  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est continue et vérifie la condition du secteur  $[0, K]$ . Autrement dit,  $\varphi$  satisfait l'inégalité

$$\varphi^T(t, y)[\varphi(t, y) - Ky] \leq 0, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p.\tag{2.16}$$

La condition initiale du système (2.15) est donnée par

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad \phi \in \mathcal{C}_{n,h} := \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n).$$

On suppose aussi qu'on est bien soumis sous les conditions d'existence et unicité des solutions pour toute condition initiale  $\phi$ . On voudrait dans ce paragraphe donner une condition suffisante pour assurer la stabilisation de ce système et estimer le contrôle stabilisant. Imposons le contrôle d'être sous la forme suivante

$$u(t) = Nx(t).\tag{2.17}$$

Dans ce cas, le système en boucle fermée devient comme suit

$$\dot{x}(t) = (A_0 + GN)x(t) + A_1x(t-h) + B\omega(t)\tag{2.18}$$

Introduisons tout d'abord la définition suivante.

**Définition 2.3.1.** On dit que le système (2.15) est absolument stabilisable dans le secteur  $[0, K]$  s'il existe un contrôle  $u(t) = Nx(t)$  tel que le système en boucle fermée (2.18) soit globalement uniformément asymptotiquement stable pour toute fonction non linéaire  $\varphi(t, y(t))$  vérifiant la condition (2.16).

Le théorème qui suit donne une condition suffisante pour pouvoir stabiliser le dernier système via un feedback.

**Théorème 2.3.2.** [7] Pour  $h > 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1,2$ ; s'il existe un scalaire  $\varepsilon > 0$ , des matrices  $\bar{P} > 0$ ,  $\bar{Q} > 0$ ,  $\bar{R} > 0$  et une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{n \times r}$ , tels que la LMI (3.5) soit vérifiée, alors l'origine du système (2.15) est stabilisable par le feedback linéaire (2.17) avec  $N = Y(\bar{P})^{-1}$  et

$$E_2 = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & h\lambda_1\bar{R} \\ * & E_{22} & E_{23} & E_{24} & h\lambda_2\bar{R} \\ * & * & -2\varepsilon I & E_{34} & 0 \\ * & * & * & -h\bar{R} & 0 \\ * & * & * & * & -h\bar{R} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} E_{11} &= \bar{P}(A_0 + \lambda_1 I)^T + (A_0 + \lambda_1 I)\bar{P} + GY + Y^T G^T + \bar{Q}, \\ E_{12} &= A_1 \bar{P} + (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{P}, \\ E_{13} &= B - \varepsilon \bar{P} C_0^T K, \\ E_{14} &= h \bar{P} A_0^T + h Y^T G^T, \\ E_{22} &= -\bar{Q} - 2\lambda_2 \bar{P}, \\ E_{23} &= -\bar{P} \varepsilon C_1^T K, \\ E_{24} &= h \bar{P} A_1^T, \\ E_{34} &= h B^T \bar{R}. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Stabilisation dans le cas du retard variable

Considérons le système contrôlé décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau(t)) + B\omega(t) + Gu(t) \\ y(t) &= C_0 x(t) + C_1 x(t - \tau(t)) \\ \omega(t) &= -\varphi(t, y(t)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie mesurée et la fonction non linéaire  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est supposée être continue et appartenant au secteur  $[0, K]$ , c'est à dire  $\varphi$  vérifie la condition

$$\varphi^\top(t, y) [\varphi(t, y) - Ky] \leq 0, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p, \quad (2.21)$$

avec  $K$  une matrice définie positive. Les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $C_0$ , et  $C_1$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Le retard  $\tau(t)$  est supposé une fonction continue vérifiant

$$0 \leq \tau_m \leq \tau(t) < \tau_M \text{ et } \dot{\tau}(t) < \mu, \quad (2.22)$$

avec  $\tau_m, \tau_M$  et  $\mu$  sont des constantes réelles inconnues. Notons aussi que  $\tau_m$  peut être différent de zéro. La condition initiale du système (2.20) est donnée par

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau_M, 0], \quad \phi \in \mathcal{C}_{n, \tau_M}.$$

Il est supposé que le côté droit de l'équation (2.20) est continue et satisfait les conditions suffisantes d'existence et unicité de la solution pour toute condition initiale  $\phi \in \mathcal{C}_{n, \tau_M}$ . Le système en boucle fermée avec le feedback suivant

$$u(t) = \tilde{K}x(t), \quad (2.23)$$

est donné par

$$\dot{x}(t) = \left( A_0 + G\tilde{K} \right) x(t) + A_1 x(t - \tau(t)) + B\omega(t). \quad (2.24)$$

Le théorème qui suit fournit une condition suffisante pour la stabilisation du système précédent par un feedback lorsque la non linéarité  $\varphi(t, y)$  appartient au secteur  $[0, K]$ .

**Théorème 2.3.3.** [27] *Pour des scalaires donnés  $0 \leq \tau_m < \tau_M$ ,  $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , s'il existe un scalaire  $\epsilon > 0$ , des matrices définies positives  $\bar{P} > 0$ ,  $\bar{Q}_1 > 0$ ,  $\bar{Q}_2 > 0$ ,  $\bar{Q}_3 > 0$ ,  $\bar{R}_1 > 0$ ,  $\bar{R}_2 > 0$ ,  $\bar{R}_3 > 0$  et une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{r \times n}$  tels que la LMI suivante*

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \Xi_{17} & \Xi_{18} & 0 & \Xi_{110} & \Xi_{111} \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & \Xi_{25} & \Xi_{26} & 0 & \Xi_{28} & 0 & \Xi_{210} & \Xi_{211} \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{39} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & \Xi_{47} & 0 & \Xi_{49} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -2\epsilon I & \tau_M B^T & 0 & \Xi_{58} & 0 & \tau_M B^T & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_M \bar{R}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_M \bar{R}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{99} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\tau_M \bar{R}_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\tau_M \bar{R}_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.25)$$

avec

$$\Xi_{11} = \bar{P}(A_0 + (\lambda_1 + \alpha_1)I)^\top + (A_0 + (\lambda_1 + \alpha_1)I)\bar{P} + GY + Y^\top G^\top + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_3,$$

$$\Xi_{12} = A_1 \bar{P} + (\alpha_2 - \alpha_1) \bar{P},$$

$$\Xi_{14} = (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{P},$$

$$\Xi_{15} = B - \epsilon \bar{P} C_0^\top K,$$

$$\Xi_{16} = \tau_M \bar{P} A_0^\top + \tau_M Y^\top G^\top,$$

$$\Xi_{17} = \lambda_1 \tau_M \bar{R}_1,$$

$$\Xi_{18} = (\tau_M - \tau_m) \bar{P} A_0^\top + (\tau_M - \tau_m) Y^\top G^\top,$$

$$\Xi_{110} = \tau_M \bar{P} A_0^\top + \tau_M Y^\top G^\top,$$

$$\Xi_{111} = \alpha_1 \tau_M \bar{R}_3,$$

$$\Xi_{22} = -(1 - \mu) \bar{Q}_3 - 2\alpha_2 \bar{P},$$

$$\Xi_{25} = -\epsilon \bar{P} C_1^\top K,$$

$$\Xi_{26} = \tau_M \bar{P} A_1^\top,$$

$$\Xi_{28} = (\tau_M - \tau_m) \bar{P} A_1^\top,$$

$$\Xi_{210} = \tau_M \bar{P} A_1^\top,$$

$$\Xi_{211} = \alpha_2 \tau_M \bar{R}_3,$$

$$\Xi_{33} = -\bar{Q}_1 + 2\beta_1 \bar{P},$$

$$\Xi_{34} = (\beta_2 - \beta_1) \bar{P},$$

$$\Xi_{39} = \beta_1 (\tau_M - \tau_m) \bar{R}_2,$$

$$\Xi_{44} = -\bar{Q}_2 - 2(\lambda_2 + \beta_1) \bar{P},$$

$$\Xi_{47} = \lambda_2 \tau_M \bar{R}_1,$$

$$\Xi_{49} = \beta_2 (\tau_M - \tau_m) \bar{R}_2,$$

$$\Xi_{58} = (\tau_M - \tau_m) B^T,$$

$$\Xi_{88} = -(\tau_M - \tau_m) \bar{R}_2,$$

$$\Xi_{99} = -(\tau_M - \tau_m) \bar{R}_2,$$

soit vérifiée, alors l'origine du système contrôlé (2.20) est stabilisable par le feedback linéaire (2.23) avec

$$\tilde{K} = Y\bar{P}^{-1}.$$

*Démonstration.* Soient  $0 \leq \tau_m < \tau_M$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  des réels fixés. Supposons qu'il existe un scalaire  $\epsilon > 0$ , des matrices symétriques définies positives  $\bar{P} > 0$ ,  $\bar{Q}_1 > 0$ ,  $\bar{Q}_2 > 0$ ,  $\bar{Q}_3 > 0$ ,  $\bar{R}_1 > 0$ ,  $\bar{R}_2 > 0$ ,  $\bar{R}_3 > 0$  et une matrice  $Y \in \mathbb{R}^{r \times n}$  tels que l'inégalité linéaire matricielle (2.25) soit vérifiée. Notons à ce stade  $\Xi'_2$  la nouvelle matrice obtenue après avoir fait les changements suivants dans la matrice  $\Xi_2$  :

$$\bar{P}^{-1} = P, \quad \bar{P}^{-1} \bar{Q}_1 \bar{P}^{-1} = Q_1, \quad \bar{P}^{-1} \bar{Q}_2 \bar{P}^{-1} = Q_2, \quad \bar{P}^{-1} \bar{Q}_3 \bar{P}^{-1} = Q_3, \quad \bar{R}_1^{-1} = R_1, \quad \bar{R}_2^{-1} = R_2, \quad \bar{R}_3^{-1} = R_3, \quad \tilde{K}P^{-1} = Y, \quad M_i = \lambda_i P, \quad N_i = \beta_i P, \quad S_i = \alpha_i P, \quad i = 1, 2.$$

Ainsi, la LMI 2.25 devient équivalente à la faisabilité de la LMI qui suit

$$T^\top \Xi'_2 T = \Xi_1 < 0, \quad (2.26)$$

avec  $T = \text{diag}\{P, P, P, P, I, R_1, R_1, R_2, R_2, R_3, R_3\}$  et

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \tau_M M_1^T & \Xi_{18} & 0 & \Xi_{110} & \tau_M S_1^T \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & \Xi_{25} & \tau_M A_1^T R_1 & 0 & \Xi_{28} & 0 & \tau_M A_1^T R_3 & \tau_M S_2^T \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{39} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & \tau_M M_2^T & 0 & \Xi_{49} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \tau_M B^T R_1 & 0 & \Xi_{58} & 0 & \tau_M B^T R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_M R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_M R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{88} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{99} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\tau_M R_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\tau_M R_3 \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= (A_0 + G\tilde{K})^\top P + P(A_0 + G\tilde{K}) + Q_1 + Q_2 + Q_3 + M_1^\top + M_1 + S_1^\top + S_1, \\ \Xi_{12} &= PA_1 - S_1^\top + S_2, \\ \Xi_{14} &= -M_1^\top + M_2, \\ \Xi_{15} &= PB - \epsilon C_0^\top K, \\ \Xi_{16} &= \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^T R_1, \\ \Xi_{110} &= \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^T R_3, \\ \Xi_{22} &= -(1 - \mu)Q_3 - S_2^\top - S_2, \\ \Xi_{25} &= -\epsilon C_1^\top K, \\ \Xi_{33} &= -Q_1 + N_1^\top + N_1, \\ \Xi_{34} &= -N_1^\top + N_2, \\ \Xi_{44} &= -Q_2 - M_2^\top - M_2 - N_2^\top - N_2, \\ \Xi_{55} &= -2\epsilon I, \\ \Xi_{18} &= (\tau_M - \tau_m)(A_0 + G\tilde{K})^T R_2, \\ \Xi_{28} &= (\tau_M - \tau_m)A_1^T R_2, \\ \Xi_{58} &= (\tau_M - \tau_m)B^T R_2, \\ \Xi_{88} &= -(\tau_M - \tau_m)R_2, \\ \Xi_{39} &= (\tau_M - \tau_m)N_1^T, \\ \Xi_{49} &= (\tau_M - \tau_m)N_2^T, \\ \Xi_{99} &= -(\tau_M - \tau_m)R_2. \end{aligned}$$

Considérons par la suite comme fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii candidate

$$\begin{aligned}
V(t, x_t) = & x^\top(t)Px(t) + \int_{t-\tau_m}^t x^\top(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-\tau_M}^t x^\top(s)Q_2x(s)ds \\
& + \int_{t-\tau(t)}^t x^\top(s)Q_3x(s)ds + \int_{-\tau_M}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^\top(s)R_1\dot{x}(s)dsd\theta \\
& + \int_{-\tau_M}^{-\tau_m} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^\top(s)R_2\dot{x}(s)dsd\theta \\
& + \int_{-\tau(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^\top(s)R_3\dot{x}(s)dsd\theta.
\end{aligned}$$

Rappelons que les matrices  $P, Q_i, R_i, i = 1, 2, 3$  sont symétriques définies positives aussi bien que les matrices  $\bar{P}, \bar{Q}_i, \bar{R}_i, i = 1, 2, 3$ . Alors la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (2.24) est donnée par

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) = & 2\dot{x}^\top(t)Px(t) + x^\top(t)Q_1x(t) - x^\top(t - \tau_m)Q_1x(t - \tau_m) \\
& + x^\top(t)Q_2x(t) - x^\top(t - \tau_M)Q_2x(t - \tau_M) \\
& + x^\top(t)Q_3x(t) - (1 - \dot{\tau}(t))x^\top(t - \tau(t))Q_3x(t - \tau(t)) \\
& + \tau_M\dot{x}^\top(t)R_1\dot{x}(t) - \int_{t-\tau_M}^t \dot{x}^\top(s)R_1\dot{x}(s)ds \\
& + (\tau_M - \tau_m)\dot{x}^\top(t)R_2\dot{x}(t) - \int_{t-\tau_M}^t -\tau_m\dot{x}^\top(s)R_2\dot{x}(s)ds \\
& + \tau(t)\dot{x}^\top(t)R_3\dot{x}(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^\top(s)R_3\dot{x}(s)ds
\end{aligned} \tag{2.27}$$

En se servant des conditions (2.22) et en appliquant l'inégalité intégrale (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) \leq & 2\dot{x}^\top(t)Px(t) + x^\top(t)[Q_1 + Q_2 + Q_3]x(t) - x^\top(t - \tau_m)Q_1x(t - \tau_m) \\
& - x^\top(t - \tau_M)Q_2x(t - \tau_M) - (1 - \mu)x^\top(t - \tau(t))Q_3x(t - \tau(t)) \\
& + \dot{x}^\top(t)[\tau_MR_1 + (\tau_M - \tau_m)R_2 + \tau_MR_3]\dot{x}(t) \\
& + \xi_1^\top(t)\Upsilon_1\xi_1(t) + \tau_M\xi_1^\top(t)\Gamma_1^\top R_1^{-1}\Gamma_1\xi_1(t) \\
& + \xi_2^\top(t)\Upsilon_2\xi_2(t) + (\tau_M - \tau_m)\xi_2^\top(t)\Gamma_2^\top R_2^{-1}\Gamma_2\xi_2(t) \\
& + \xi_3^\top(t)\Upsilon_3\xi_3(t) + \tau_M\xi_3^\top(t)\Gamma_3^\top R_3^{-1}\Gamma_3\xi_3(t)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau_M) \end{bmatrix}; \Gamma_1^\top = \begin{bmatrix} M_1^\top \\ M_2^\top \end{bmatrix}; \Upsilon_1 = \begin{bmatrix} M_1^\top + M_1 & -M_1^\top + M_2 \\ * & -M_2^\top - M_2 \end{bmatrix}, \\
\xi_2(t) &= \begin{bmatrix} x(t - \tau_m) \\ x(t - \tau_M) \end{bmatrix}; \Gamma_2^\top = \begin{bmatrix} N_1^\top \\ N_2^\top \end{bmatrix}; \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} N_1^\top + N_1 & -N_1^\top + N_2 \\ * & -N_2^\top - N_2 \end{bmatrix}, \\
\xi_3(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \end{bmatrix}; \Gamma_3^\top = \begin{bmatrix} S_1^\top \\ S_2^\top \end{bmatrix}; \Upsilon_3 = \begin{bmatrix} S_1^\top + S_1 & -S_1^\top + S_2 \\ * & -S_2^\top - S_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes de droite de l'inégalité précédente, on trouve

$$\dot{V}(t) \leq \eta^\top(t) \Pi \eta(t), \tag{2.28}$$

où

$$\Pi := \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & \Pi_{14} & \Pi_{15} \\ * & \Pi_{22} & 0 & 0 & \Pi_{25} \\ * & * & \Pi_{33} & \Pi_{34} & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} \end{bmatrix}, \eta(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - \tau_m) \\ x(t - \tau_M) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= (A_0 + G\tilde{K})^\top P + P(A_0 + G\tilde{K}) + Q_1 + Q_2 + Q_3 + \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^\top R_1(A_0 + G\tilde{K}) \\ &\quad + (\tau_M - \tau_m)(A_0 + G\tilde{K})^\top R_2(A_0 + G\tilde{K}) + \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^\top R_3(A_0 + G\tilde{K}), \\ &\quad + M_1^\top + M_1 + \tau_M M_1^\top R_1^{-1} M_1 + \tau_M S_1^\top R_3^{-1} S_1 + S_1^\top + S_1 \\ \Pi_{12} &= P A_1 + \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^\top R_1 A_1 + (\tau_M - \tau_m)(A_0 + G\tilde{K})^\top R_2 A_1 + \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^\top R_3 A_1 \\ &\quad - S_1^\top + S_2 + \tau_M S_1 R_3^{-1} S_2, \\ \Pi_{14} &= -M_1^\top + M_2 + \tau_M M_1^\top R_1^{-1} M_2, \\ \Pi_{15} &= P B + \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^\top R_1 B + (\tau_M - \tau_m)(A_0 + G\tilde{K})^\top R_2 B + \tau_M(A_0 + G\tilde{K})^\top R_3 B, \\ \Pi_{22} &= -(1 - \mu)Q_3 - S_2^\top - S_2 + \tau_M A_1^\top R_1 A_1 + (\tau_M - \tau_m)A_1^\top R_2 A_1 + \tau_M A_1^\top R_3 A_1 \\ &\quad + \tau_M S_2^\top R_3^{-1} S_2, \\ \Pi_{25} &= \tau_M A_1^\top R_1 B + (\tau_M - \tau_m)A_1^\top R_2 B + \tau_M A_1^\top R_3 B, \\ \Pi_{33} &= -Q_1 + N_1^\top + N_1 + (\tau_M - \tau_m)N_1^\top R_2^{-1} N_1, \\ \Pi_{34} &= -N_1^\top + N_2 + (\tau_M - \tau_m)N_1^\top R_2^{-1} N_1, \\ \Pi_{44} &= -Q_2 - M_2^\top - M_2 + \tau_M M_2^\top R_1^{-1} M_2 + (\tau_M - \tau_m)N_2^\top R_2^{-1} N_2 - N_2^\top - N_2, \\ \Pi_{55} &= \tau_M B^\top R_1 B + (\tau_M - \tau_m)B^\top R_2 B + \tau_M B^\top R_3 B. \end{aligned}$$

À ce stade là, pour avoir la stabilité asymptotique du système (2.24), il suffit de montrer que

$$\dot{V}(t) \leq \eta^\top(t) \Pi \eta(t) < 0, \quad (2.29)$$

pour tout  $\eta(t) \neq 0$ .

En effet, en utilisant le Complément de Shur (Théorème 1.6.2), on démontre que la LMI (2.26) est équivalente à la suivante

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} & \Sigma_{15} \\ * & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} & \Sigma_{25} \\ * & * & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} & \Sigma_{35} \\ * & * & * & \Sigma_{44} & \Sigma_{45} \\ * & * & * & * & \Sigma_{55} \end{bmatrix} < 0,$$

avec

$$\Sigma_{ij} = \Pi_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad \Sigma_{15} = \Pi_{15} - \epsilon C_0^\top K,$$

$$\Sigma_{25} = \Pi_{25} - \epsilon C_1^\top K, \quad \Sigma_{35} = \Pi_{35},$$

$$\Sigma_{45} = \Pi_{45}, \quad \Sigma_{55} = \Pi_{55} - 2\epsilon I.$$

D'autre part, en utilisant la  $S$ -procédure (Théorème 1.6.3) ainsi que la condition du secteur (2.21), on obtient

$$\eta^\top(t) \Sigma \eta(t) = \eta^\top(t) \Pi \eta(t) - 2\epsilon \omega^\top(t) \omega(t) - 2\epsilon \omega^\top(t) [K C_0 x(t) + K C_1 x(t - \tau)] < 0 \quad (2.30)$$



pour tout  $\eta(t) \neq 0$ .

Ce qui achève la preuve. □

### 2.3.3 Exemple numérique

Considérons le système à retard (2.20) avec une non linéarité vérifiant la condition (2.21) avec

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Fixons les paramètres supplémentaires comme suit

$$\tau_m = 10^{-4}, \tau_M = 0.088, \mu = 0.01, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1.2,$$

$$\alpha_1 = -0.2, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0.$$

Alors, d'après le Théorème 2.3.3, on trouve  $\epsilon = 0.6809$  et

$$\overline{Q_1} = \begin{bmatrix} 0.9955 & 0.1991 \\ 0.1991 & 0.9955 \end{bmatrix}, \overline{Q_2} = \begin{bmatrix} 2.4678 & -0.5239 \\ -0.5239 & 2.0589 \end{bmatrix}, \overline{Q_3} = \begin{bmatrix} 1.1643 & 0.0690 \\ 0.0690 & 1.1153 \end{bmatrix},$$

$$\overline{R_1} = \begin{bmatrix} 4.2714 & 0.4606 \\ 0.4606 & 4.1847 \end{bmatrix}, \overline{R_2} = \begin{bmatrix} 13.6586 & -0.0274 \\ -0.0274 & 13.6260 \end{bmatrix}, \overline{R_3} = \begin{bmatrix} 13.1236 & -0.0336 \\ -0.0336 & 13.0996 \end{bmatrix},$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0.4781 & -0.3380 \\ -0.3380 & 0.3095 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1.1971 & 1.6605 \end{bmatrix}, \tilde{K} = \begin{bmatrix} 27.6255 & 35.5345 \end{bmatrix}.$$

# Stabilité exponentielle pratique d'un système non linéaire à retard

## 3.1 Introduction

Les systèmes à retard constituent des modèles mathématiques qui sont à la base de phénomènes réels tels que les réacteurs nucléaires, les systèmes biologiques, et la dynamique des populations, etc. Ils sont souvent une source d'instabilité et de dégradation des performances dans les problèmes de contrôle. Pour mieux voir cet effet, le lecteur intéressé est invité à consulter les ouvrages [43] et [37]. L'analyse de la stabilité de ces systèmes dynamiques avec un retard a fait l'objet de plusieurs efforts de recherche considérables voir par exemples [5], [37], [54], [79] et [67]. Récemment, des améliorations de performances ont été signalées à l'aide des méthodes de Lyapunov-Krasovskii et des techniques des inégalités linéaires matricielles (LMI), (voir [6], [7], [10], [15], [16], [18], [48], [51], [57], [74] et [87]). La majorité des travaux existants concernent des classes particulières de systèmes dynamiques à retard, mais dans le cas général, une équation différentielle fonctionnelle non linéaire avec retards multiples est peu étudiés dans la littérature. Ainsi, motivés par les problèmes de la stabilité des systèmes non linéaires non autonomes à retards multiples, nous étudions la stabilité pratique déjà introduite et étudiée par plusieurs auteurs (voir [8], [21], [20], [22] et les références citées). C'est dans ce cadre se situe l'objectif de cette section. En outre, nous traitons le problème de la stabilité globale uniforme pratique exponentielle pour une classe de systèmes à retard, dont l'origine n'est pas nécessairement un point d'équilibre. Plus précisément, nous montrons que notre système en question reste globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable, si le système sans retard ait cette propriété lorsque le retard est assez petit. En outre, nous établissons des résultats plus généraux, en introduisant deux extras paramètres permettant de conserver la propriété de stabilité pour un retard plus grand. Enfin, nous donnons quelques exemples en deux dimensions.

**Notation :** Dans ce chapitre, on considère les notations suivantes :  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres réels positifs,  $\mathbb{R}_+$  est l'ensemble des nombres réels nonnegatifs,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace euclidien de dimension  $n$ . La norme vectorielle adoptée  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne. L'ensemble  $\mathcal{C}_{n,\tau} := \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , où  $\tau$  est une constante positive.

## 3.2 Caractérisation de la stabilité exponentielle pratique

On considère dans  $\mathbb{R}^n$  le système à retard décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t > t_0, \\ x(t) &= \varphi(t-t_0), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue en tous ses arguments,  $\tau > 0$  est le retard et  $\varphi = \{\varphi(s) : -\tau \leq s \leq 0\} \in \mathcal{C}_{n,\tau}$  est la condition initiale du système. On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{C}_{n,\tau}$  est équipé de la norme continue donnée par

$$\|\varphi\|_c = \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\|.$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour un temps initial  $t_0 \geq 0$  et une condition initiale  $\varphi \in \mathcal{C}_{n,\tau}$  donnés, on définit  $x(t; t_0, \varphi)$  l'unique solution du système à retard (3.1) qui vérifie  $x(t_0 + \theta; t_0, \varphi) = \varphi(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ . On rappelle dans la suite la définition clé et primordiale de cette partie.

**Définition 3.2.1.** On dit que le système (3.1) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable s'il existe un rayon  $R > 0$ , tel que la boule  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$  soit globalement uniformément exponentiellement stable, c'est à dire : il existe un réel  $R > 0$ , tel que pour tout  $t \geq t_0$  et  $\varphi \in \mathcal{C}_{n,\tau}$ , on ait

$$\|x(t; t_0, \varphi)\| \leq R + \lambda_1 \|\varphi\| \exp(-\lambda_2(t - t_0)),$$

avec  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . D'après cette écriture  $R$  est appelé le rayon de convergence

Afin d'établir un résultat de stabilité, il est susceptible d'introduire les deux hypothèses suivantes :

( $\mathcal{H}_1$ ). On suppose qu'il existe des constantes positives  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\xi$  telles que

$$\|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| \leq \alpha_1 \|x - \bar{x}\| + \alpha_2 \|y - \bar{y}\|,$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $(x, y, \bar{x}, \bar{y}) \in (\mathbb{R}^n)^4$ . De plus, on suppose que  $\|f(t, 0, 0)\| \leq \xi$ ,  $\forall t \geq 0$ . Notons bien que sous l'hypothèse ( $\mathcal{H}_1$ ), le système (3.1) admet une unique solution notée  $x(t; t_0, \varphi)$ ,  $\forall t \geq t_0 - \tau$ , (voir [37],[43]). On remarque aussi d'après l'hypothèse ( $\mathcal{H}_1$ ) que  $x(t; t_0, 0) = 0$ , n'est pas forcément un point d'équilibre pour notre système (3.1), sauf lorsque  $\xi = 0$ . Dans ce cas particulier, on retrouve le sens classique de la stabilité globale uniforme exponentielle de l'origine. Or, notre objectif est plus général. Il consiste à étudier le problème de la stabilité globale uniforme exponentielle d'un voisinage de l'origine, qu'on estime plus tard. D'autre part, on considère l'équation différentielle ordinaire sans retard correspondante au système (3.1), donnée par

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= f(t, y(t), y(t)), \quad t > t_0, \\ y(t_0) &= \varphi(0).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Soit la condition suivante

( $\mathcal{H}_2$ ). On suppose que l'équation (3.2) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable (ou convergente vers une boule de rayon  $r > 0$ ). Autrement, on suppose qu'il existe une paire de constantes positives  $\beta$  et  $\gamma$  telle que

$$\|y(t; t_0, \varphi(0))\| \leq r + \beta \|\varphi(0)\| \exp(-\gamma(t - t_0)), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

pour toute condition initiale  $\varphi(0) \in \mathbb{R}^n$ . Nous montrons dans la suite, que sous les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$ , le système à retard (3.1) reste globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable, si le retard  $\tau$  est suffisamment petit. Avant d'énoncer le résultat principal, nous rappelons l'inégalité de Gronwall suivante.

**Lemme 3.2.2.** *Si pour  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $\phi(t) \geq 0$  et  $\psi(t) \geq 0$  sont des fonctions continues qui vérifient :*

$$\phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s) \phi(s) ds,$$

où  $K$  et  $L$  sont des constantes positives, alors :

$$\phi(t) \leq K \exp(L \int_{t_0}^t \psi(s) ds),$$

pour  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

**Lemme 3.2.3.** [50] *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \quad t > t_0, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec  $f$  une fonction continue en  $t$  et localement Lipschitzienne en  $x$ . Soit  $y(t)$  une fonction continue vérifiant

$$\dot{y}(t) \leq f(t, y(t)), \quad \forall t > t_0, \quad y(t_0) \leq x_0,$$

alors  $y(t) \leq x(t)$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

**Théorème 3.2.4.** [4] *Si les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$  sont vérifiées et si  $0 \leq \tau < \inf\left(\frac{\delta}{2}, \tau^*\right)$ , alors le système (3.1) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement convergent*

*vers la boule  $B(0, 2r)$ , avec  $\delta = \frac{\ln\left(\frac{\beta}{0.9}\right)}{0.9\gamma}$ ,  $\beta > 0.9$  et  $\tau^*$  est l'unique racine de l'équation*

$$\frac{1.8 \exp(\gamma \tau^*)}{\left(\frac{\beta}{0.9}\right)^{\frac{1}{9}}} + 4\alpha_2 \tau^* (1 + \delta(\alpha_1 + \alpha_2)) \exp(2\delta(\alpha_1 + \alpha_2)) = 1. \tag{3.4}$$

*Démonstration.* Nous répartissons la preuve en deux étapes.

*Etape 1.* Fixons les données initiales  $t_0 \geq 0$  et  $\varphi = \{\varphi(s) : -\tau \leq s \leq 0\} \in \mathcal{C}_{n,\tau}$ . Ecrivons  $x(t; t_0, \varphi) = x(t)$  et  $y(t; t_0, \varphi(0)) = y(t)$  les solutions respectives des équations (3.1) et (3.2). D'après les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$  décrites précédemment, il découle immédiatement des équations (3.1) et (3.2), que  $\forall t \geq t_0$ , on a

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq (\alpha_1 + \alpha_2) \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \\ &\quad + \alpha_2 \int_{t_0}^t \|x(s) - x(s - \tau)\| ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall du lemme 3.2.2, on obtient

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \left[ \alpha_2 \int_{t_0}^t \|x(s) - x(s - \tau)\| ds \right] \exp((\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)).$$

D'où,

$$\|x(t)\| \leq \|y(t)\| + \left[ \alpha_2 \int_{t_0}^t \|x(s) - x(s - \tau)\| ds \right] \exp(2\delta(\alpha_1 + \alpha_2)), \quad (3.5)$$

si  $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\delta$ .

Ensuite, si  $t \geq t_0 + \tau$  on peut déduire de l'équation (3.1) que

$$\int_{t_0+\tau}^t \|x(s) - x(s - \tau)\| ds \leq \int_{t_0+\tau}^t \int_{s-\tau}^s (\alpha_1 \|x(u)\| + \alpha_2 \|x(u - \tau)\|) du ds.$$

Par suite, avec un simple calcul, nous obtenons les deux inégalités suivantes :

$$\int_{t_0+\tau}^t \int_{s-\tau}^s \alpha_1 \|x(u)\| du ds \leq \alpha_1 \tau \int_{t_0+\tau}^t \left( \sup_{s-\tau \leq u \leq s} \|x(u)\| \right) ds, \quad (3.6)$$

et

$$\int_{t_0+\tau}^t \int_{s-\tau}^s \alpha_2 \|x(u - \tau)\| du ds \leq \alpha_2 \tau \int_{t_0+\tau}^t \left( \sup_{s-2\tau \leq u \leq s-\tau} \|x(u)\| \right) ds, \quad (3.7)$$

si  $t \geq t_0 + \tau$ . D'autre part,

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \|x(s) - x(s - \tau)\| ds \leq 2\tau \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0+\tau} \|x(t)\| \right). \quad (3.8)$$

Ainsi, des inégalités (3.6) et (3.7), il s'ensuit que

$$\int_{t_0+\tau}^t \|x(s) - x(s - \tau)\| ds \leq (\alpha_1 + \alpha_2) \tau \int_{t_0+\tau}^t \left( \sup_{s-2\tau \leq u \leq s} \|x(u)\| \right) ds,$$

si  $t \geq t_0 + \tau$ . D'après l'inégalité (3.8), si  $t \geq t_0 + \tau$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|x(s) - x(s - \tau)\| ds &\leq 2\tau \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0+\tau} \|x(t)\| \right) \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2) \tau \int_{t_0+\tau}^t \left( \sup_{s-2\tau \leq u \leq s} \|x(u)\| \right) ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nous nous restreignons maintenant au cas où  $t \in [t_0 - \tau + \delta, t_0 - \tau + 2\delta]$ . En substituant (3.9) dans (3.5) et en utilisant l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq r + \beta \|\varphi(0)\| \exp(-\gamma(\delta - \tau)) \\ &\quad + 2\alpha_2 \tau (1 + \delta(\alpha_1 + \alpha_2)) \exp(2\delta(\alpha_1 + \alpha_2)) \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0-\tau+2\delta} \|x(t)\| \right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la définition de  $\delta$ , il résulte que

$$\|x(t)\| \leq r + C_0 \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0-\tau+2\delta} \|x(t)\| \right), \quad (3.10)$$

si  $t_0 - \tau + \delta \leq t \leq t_0 - \tau + 2\delta$ , où

$$C_0 = \frac{0.9 \exp(\gamma\tau)}{\left(\frac{\beta}{0.9}\right)^{\frac{1}{9}}} + 2\alpha_2 \tau (1 + \delta(\alpha_1 + \alpha_2)) \exp(2\delta(\alpha_1 + \alpha_2)). \quad (3.11)$$

Il est facile de vérifier d'après l'équation (3.4), que  $C_0 < \frac{1}{2}$ , (du moment que  $\tau < \tau^*$ ). En utilisant l'inégalité (3.10), il s'ensuit que

$$\left( \sup_{t_0-\tau+\delta \leq t \leq t_0-\tau+2\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right) \leq r + C_1 \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0-\tau+\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right), \quad (3.12)$$

où  $C_1 = \frac{C_0}{1-C_0}$ . Notons ainsi, que la constante  $C_1$  satisfait  $C_1 < 1$ . Si on écrit  $C_1 = \exp(-\varepsilon\delta)$  avec  $\varepsilon = -\frac{\ln(C_1)}{\delta}$ , alors d'après l'inégalité (3.12) précédente, on obtient

$$\left( \sup_{t_0-\tau+\delta \leq t \leq t_0-\tau+2\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right) \leq r + \exp(-\varepsilon\delta) \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0-\tau+\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right), \quad (3.13)$$

ce qui est vérifié pour tout  $t_0 \geq 0$  et  $\varphi \in \mathcal{C}_{n,\tau}$ .

*Etape 2.* Fixons arbitrairement  $t_0 \geq 0$  et  $\varphi \in \mathcal{C}_{n,\tau}$ . Soit  $k = 1, 2, \dots$ . Notons

$$\hat{x}(t_0 + (k-1)\delta; t_0, \varphi) = \{x(t_0 + (k-1)\delta + s; t_0, \varphi) : -\tau \leq s \leq 0\}.$$

D'après l'inégalité (3.13), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left( \sup_{t_0-\tau+k\delta \leq t \leq t_0-\tau+(k+1)\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right) \\ &= \left( \sup_{t_0+(k-1)\delta-\tau+\delta \leq t \leq t_0+(k+1)\delta-\tau+2\delta} \|x(t; t_0 + (k-1)\delta, \hat{x}(t_0 + (k-1)\delta; t_0, \varphi))\| \right) \\ &\leq r + \exp(-\varepsilon\delta) \left( \sup_{t_0-\tau+(k-1)\delta \leq t \leq t_0-\tau+k\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right). \end{aligned}$$

Inductivement, on peut facilement obtenir

$$\begin{aligned} & \left( \sup_{t_0-\tau+k\delta \leq t \leq t_0-\tau+(k+1)\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right) \\ &\leq r(1 + \exp(-\varepsilon(k-1)\delta)) + \exp(-\varepsilon k\delta) \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0-\tau+\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right) \\ &\leq 2r + \exp(-\varepsilon k\delta) \left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0-\tau+\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ensuite, il est facile de montrer l'existence d'une constante positive  $C_2 > 0$ , telle que

$$\left( \sup_{t_0-\tau \leq t \leq t_0-\tau+\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right) \leq C_2 \left( \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(s)\| \right).$$

En remplaçant dans l'inégalité (3.14), on trouve

$$\left( \sup_{t_0-\tau+k\delta \leq t \leq t_0-\tau+(k+1)\delta} \|x(t; t_0, \varphi)\| \right) \leq 2r + C_2 \exp(-\varepsilon k\delta) \left( \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(s)\| \right). \quad (3.15)$$

Maintenant, pour tout  $t > t_0 - \tau + \delta$ , nous pouvons trouver un entier  $k$  telle que

$$t_0 - \tau + k\delta \leq t \leq t_0 - \tau + (k+1)\delta,$$

et par suite, on a

$$\|x(t; t_0, \varphi)\| \leq 2r + C_2 \exp(\varepsilon\delta - \varepsilon(t - t_0)) \left( \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\varphi(s)\| \right). \quad (3.16)$$

Rappelons que ceci est aussi vérifié pour tout  $t_0 \leq t \leq t_0 - \tau + \delta$ . Ceci entraîne que l'équation (3.1) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.  $\square$

*Remarque 3.2.5.* Notons que si  $r$  peut être remplacé par une fonction  $r(t)$ , qui tend exponentiellement vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini, alors la solution du système (3.1) va aussi tendre exponentiellement vers zéro. Dans le Théorème 3.2.4,  $\delta$  est choisie de sorte que  $\beta \exp(-0.9\gamma\delta) = 0.9$ . Evidemment, ceci n'est pas le mieux qu'on peut faire. En effet, pour avoir un résultat meilleur et plus général, nous pouvons choisir deux paramètres libres et auxiliaires

$\theta_1$  et  $\theta_2 \in ]0, 1]^2$ . On définit alors  $\delta = \frac{\ln\left(\frac{\beta}{\theta_2}\right)}{\theta_1\gamma}$ , ceci équivaut à dire que  $\beta \exp(-\theta_1\gamma\delta) = \theta_2$ . Dans ce cas, on a

$$\beta \exp(-\gamma(\delta - \gamma)) = \frac{\theta_2 \exp(\gamma\tau)}{\left(\frac{\beta}{\theta_2}\right)^{\left(\frac{1-\theta_1}{\theta_1}\right)}},$$

et  $C_0$  devient

$$C_0 = \frac{\theta_2 \exp(\gamma\tau)}{\left(\frac{\beta}{\theta_2}\right)^{\left(\frac{1-\theta_1}{\theta_1}\right)}} + 2\alpha_2\tau(1 + \delta(\alpha_1 + \alpha_2)) \exp(2\delta(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

Ainsi, si le retard  $\tau$  est choisi suffisamment petit de sorte que  $C_0 < \frac{1}{2}$ , alors l'équation (3.1) sera globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable. Nous établissons ainsi un résultat plus général donné dans le théorème qui suit.

**Théorème 3.2.6.** [4] *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$  sont vérifiées. Soit  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux réels arbitrairement choisis dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Alors l'équation (3.1) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement convergent vers la boule  $B(0, 2r)$ , si*

*$0 \leq \tau < \inf\left(\frac{\delta}{2}, \tau^*\right)$ , où  $\delta = \frac{\ln\left(\frac{\beta}{\theta_2}\right)}{\theta_1\gamma}$  avec  $\beta > \theta_2$  et  $\tau^*$  est l'unique racine de l'équation suivante*

$$\frac{2\theta_2 \exp(\gamma\tau^*)}{\left(\frac{\beta}{\theta_2}\right)^{\left(\frac{1-\theta_1}{\theta_1}\right)}} + 4\alpha_2\tau^*(1 + \delta(\alpha_1 + \alpha_2)) \exp(2\delta(\alpha_1 + \alpha_2)) = 1. \quad (3.17)$$

Le Théorème 3.2.4 est un cas particulier du Théorème 3.2.6 quand  $\theta_1 = \theta_2 = 0.9$ . Notons que les réels  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont deux paramètres libres à choisir, vérifiant la seule condition  $\theta_2 < \beta$ , qui assurent l'optimalité du résultat. Les deux résultats précédents peuvent être généralisés d'avantage, dans le cas où le retard intervenant dans le système est une fonction bornée. Plus précisément, considérons  $\tau : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \bar{\tau}]$  une fonction mesurable, où  $\bar{\tau} > 0$ . Considérons maintenant, l'équation différentielle avec retard variable décrite par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad t > t_0, \\ x(t) &= \varphi(t - t_0), \quad t_0 - \bar{\tau} \leq t \leq t_0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $f$  est la même fonction définit précédemment et  $\varphi = \{\varphi(s) : -\bar{\tau} \leq s \leq 0\} \in \mathcal{C}_{n, \bar{\tau}}$ . Pour ce type de systèmes, nous établissons le résultat suivant.

**Théorème 3.2.7.** [4] *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_2)$  sont vérifiées. Soit  $\theta_1$  et  $\theta_2 \in (0, 1)$  deux réels arbitrairement choisis dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Alors le système (2.23) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement convergent vers la boule  $B(0, 2r)$  si*

$$0 \leq \sup_{t \geq 0} \tau(t) < \inf \left( \frac{\delta}{2}, \tau^* \right),$$

où  $\delta$  et  $\tau^*$  sont définis comme dans le Théorème 3.2.6.

*Remarque 3.2.8.* Il est important de signaler que les conditions de dérivabilités de la fonction retard  $\tau(t)$  ainsi que de la bornitude de sa dérivée première, autrement dit  $\dot{\tau}(t) < 1$ , sont très souvent nécessaires pour établir des critères de stabilité, dans plusieurs travaux qui se rapportent au problème de stabilité des systèmes dynamiques avec un retard variable, par contre nous, dans cette partie, nous supposons seulement que le retard  $\tau(t)$  soit une fonction continue bornée.

Si nous nous plaçons dans le cas où l'origine n'est pas un point d'équilibre pour le système (3.1) (ou encore  $\varepsilon = 0$ ) et si de plus nous remplaçons l'hypothèse  $(\mathcal{H}_2)$  par une autre donnée ci-dessous par l'hypothèse  $(\mathcal{H}_3)$ , on obtient des résultats analogues.

$(\mathcal{H}_3)$  Supposons que l'équation (3.2) est globalement uniformément exponentiellement stable. C'est à dire, il existe une paire de constantes positives  $\beta$  et  $\gamma$  telles que

$$\|y(t; t_0, \varphi(0))\| \leq \beta \|\varphi(0)\| \exp(-\gamma(t - t_0)),$$

Pour tout  $t_0 \geq 0$  et  $\varphi(0) \in \mathbb{R}^n$ .

Ce cas a été déjà traité par Mao dans [79]. En effet, on a les résultats suivants.

**Corollaire 3.2.9.** *Supposons que  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_3)$  soient vérifiées. Alors, le système (3.1) est globalement uniformément exponentiellement stable si*

$$0 \leq \tau < \inf \left( \frac{\delta}{2}, \tau^* \right), \quad \text{où } \delta = \frac{\ln \left( \frac{\beta}{0.9} \right)}{0.9\gamma} \text{ avec } \beta > 0.9, \text{ et } \tau^* \text{ est l'unique racine de l'équation (3.4).}$$

Nous avons aussi le résultat suivant.

**Corollaire 3.2.10.** *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_3)$  sont vérifiées. Soit  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux paramètres réels arbitrairement choisis dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Alors l'équation (3.1) est globalement uniformément exponentiellement stable si*



$0 \leq \tau < \inf \left( \frac{\delta}{2}, \tau^* \right)$ , où  $\delta = \frac{\ln \left( \frac{\beta}{\theta_2} \right)}{\theta_1 \gamma}$  avec  $\beta > \theta_2$ , et  $\tau^*$  l'unique racine de l'équation (3.17).

Finalement, pour le système à retard variable (3.18), nous déduisons le résultat suivant.

**Corollaire 3.2.11.** *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_1)$  et  $(\mathcal{H}_3)$  sont vérifiées. Soit  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux paramètres réels arbitrairement choisis dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Alors l'équation (3.18) est globalement uniformément exponentiellement stable si*

$$0 \leq \sup_{t \geq 0} \tau(t) < \inf \left( \frac{\delta}{2}, \tau^* \right),$$

où  $\delta$  et  $\tau^*$  sont les mêmes variables définies dans le Corollaire 3.2.10.

### 3.3 Exemples

#### 3.3.1 Exemple 1

Considérons le système dans le plan décrit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + x_2(t - \tau) + \cos(x_2(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t - \tau) - 2x_2(t), \quad t > t_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

avec la condition initiale  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top = \varphi(t - t_0)$  on  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ , où  $\varphi \in \mathcal{C}_{2,\tau}$ . Par un simple calcul, on peut vérifier que la condition  $(\mathcal{H}_1)$  est satisfaite avec les paramètres

$$\alpha_1 = 4 \text{ et } \alpha_2 = 2.$$

L'équation différentielle (sans retard) correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -2y_1(t) + y_2(t) + \cos(y_2(t)), \\ \dot{y}_2(t) &= -y_1(t) - 2y_2(t), \quad t > t_0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

avec la condition initiale  $y(t_0) = (y_1(t_0), y_2(t_0))^\top = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))^\top = \varphi(t_0)$ . Notons  $y(t; t_0, \varphi(0))$  la solution du système (3.20). En utilisant le lemme 3.2.3 de comparaison, on obtient

$$y(t; t_0, \varphi(0)) \leq z(t; t_0, \varphi(0)),$$

avec  $z(t; t_0, \varphi(0))$  est la solution du système sans retard suivant

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -2z_1(t) + z_2(t) + 1, \\ \dot{z}_2(t) &= -z_1(t) - 2z_2(t), \quad t > t_0. \end{aligned}$$

avec la condition initiale  $z(t_0) = (z_1(t_0), z_2(t_0))^\top = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))^\top = \varphi(0)$ .

La solution explicite du système précédent est donnée par :

$$\begin{aligned} z_1(t; t_0, \varphi(0)) &= \left[ \left( \varphi_2(0) + \frac{1}{5} \right) \sin(t - t_0) + \left( \varphi_1(0) - \frac{2}{5} \right) \cos(t - t_0) \right] \times \\ &\quad \exp(-2(t - t_0)) + \frac{2}{5}, \\ z_2(t; t_0, \varphi(0)) &= \left[ \left( \varphi_2(0) + \frac{1}{5} \right) \cos(t - t_0) - \left( \varphi_1(0) - \frac{2}{5} \right) \sin(t - t_0) \right] \times \\ &\quad \exp(-2(t - t_0)) - \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

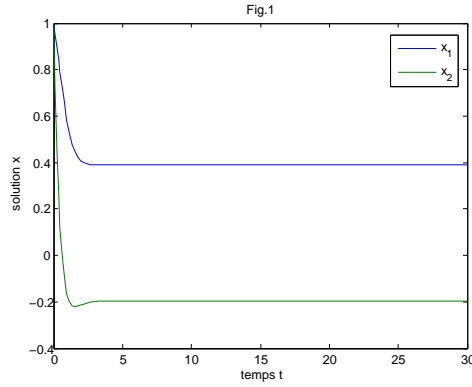
Notons que, cette dernière expression peut être facilement retrouvée en utilisant **Matlab Symbolic Math Toolbox**, voir [40]. Ainsi, on a

$$\|y(t; t_0, \varphi(0))\| \leq \|z(t; t_0, \varphi(0))\| \leq r + \beta \|\varphi(0)\| \exp(-\gamma(t - t_0)), \quad t \geq t_0,$$

avec

$$r = \frac{3\sqrt{10}}{5}, \quad \beta = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \gamma = 2.$$

En appliquant le Théorème 3.2.6 avec  $\theta_1 = \theta_2 = 0.7$ , calculons  $\delta = 0.433$  et la solution de l'équation (3.17) est  $\tau^* = 4.42 \times 10^{-5}$ . Le résultat de simulation de cet exemple est représenté par la figure Fig.1. L'évolution des états  $x_1$  et  $x_2$  est aussi donnée. Il est clair d'après Fig.1 que le système dynamique à retard (3.19) est effectivement globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable.



**3.3.2 Exemple 2**

Considérons le système à retard suivant

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t - \tau) - \frac{1}{5(1 + |x_2(t)|)} + \frac{1}{2}, \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t - \tau), \quad t > t_0,\end{aligned}\tag{3.21}$$

avec la condition initiale  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top = \varphi(t - t_0)$  sur  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ , où  $\varphi \in \mathcal{C}_{2,\tau}$ . Par un simple calcul, on peut voir que l'hypothèse  $(\mathcal{H}_1)$  est satisfaite avec

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{2}.$$

L'équation différentielle sans retard correspondante est

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -y_1(t) - \frac{1}{5(1 + |y_2(t)|)} + \frac{1}{2}, \\ \dot{y}_2(t) &= -y_1(t) - \frac{1}{2}y_2(t), \quad t > t_0,\end{aligned}\tag{3.22}$$

avec les valeurs initiales  $y(t_0) = (y_1(t_0), y_2(t_0))^\top = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))^\top = \varphi(0)$ . Notons  $y(t; t_0, \varphi(0))$  la solution du système (3.22). Alors, du lemme 3.2.3, il s'ensuit que

$$y(t; t_0, \varphi(0)) \leq z(t; t_0, \varphi(0)),$$

où  $z(t; t_0, \varphi(0))$  est la solution du système sans retard suivant

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= -z_1(t) + \frac{1}{2}, \\ \dot{z}_2(t) &= -z_1(t) - \frac{1}{2}z_2(t), \quad t > t_0,\end{aligned}$$

vérifiant les conditions initiales  $z(t_0) = (z_1(t_0), z_2(t_0))^\top = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))^\top = \varphi(0)$ .

La solution explicite du système précédent est donnée par :

$$\begin{aligned}z_1(t; t_0, \varphi(0)) &= \left(\varphi_1(0) - \frac{1}{2}\right) \exp(-(t - t_0)) + \frac{1}{2}, \\ z_2(t; t_0, \varphi(0)) &= 2 \left(\varphi_1(0) - \frac{1}{2}\right) \exp(-(t - t_0)) \\ &\quad + (\varphi_2(0) - 2\varphi_1(0) + 2) \exp\left(-\frac{1}{2}(t - t_0)\right) - 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|y(t; t_0, \varphi(0))\| \leq \|y(t; t_0, \varphi(0))\| \leq r + \beta \|\varphi(0)\| \exp(-\gamma(t - t_0)), \quad t \geq t_0,$$

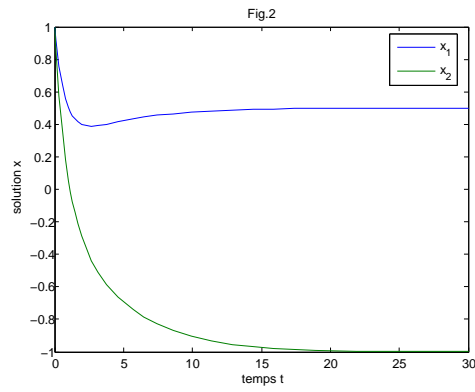
où

$$r = \sqrt{19}, \quad \beta = 2\sqrt{11} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Afin d'appliquer le Théorème 3.2.6 avec  $\theta_1 = 0.9$  et  $\theta_2 = 0.3$ , calculons  $\delta = 2.988$  et la racine de l'équation (3.17) est  $\tau^* = 0.49 \times 10^{-9}$ .

Le résultat de la simulation de cet exemple est illustré dans la figure Fig.2. L'évolution

des états  $x_1$  et  $x_2$  est aussi donnée. La figure Fig.2 révèle bien la convergence globale uniforme exponentielle du système dynamique avec retard (3.21) vers une boule de rayon bien déterminé.





Deuxième partie

Etude des systèmes impulsifs



# Introduction

Les innovations technologiques ont eu un impact considérable sur l'apparition des processus dynamiques ayant une nature hétérogène mélangeant le continu et le discret. Ces progrès technologiques ont un impact similaire dans le domaine de la recherche scientifique où on constate un intérêt particulier pour l'étude de ces systèmes dits "hybrides". De tels systèmes sont caractérisés par l'interaction des parties continues régies par des équations différentielles et des parties discrètes.

En automatique, les systèmes physiques sont souvent représentés par un modèle dynamique continu ou par un modèle à événements discrets. La nature de chaque modèle est définie selon les variables utilisées pour décrire l'état du système et la variable caractérisant le temps. Il est important dans de nombreux cas d'utiliser l'une de ces deux catégories de modèles. Cependant la majorité des systèmes complexes réalistes mélangeant le continu et le discret ne peuvent pas être classés ni dans la catégorie "système continu" ni dans la catégorie "système discret". Il est nécessaire alors d'utiliser des modèles hybrides permettant la prise en compte à la fois des variables continues et des variables discrètes ainsi que l'interaction entre elles. Dans ce contexte, une attention particulière s'est portée sur les systèmes dynamiques hybrides ces dernières années, on peut citer [75],[59] etc... Les systèmes hybrides se retrouvent dans beaucoup de disciplines, comme par exemple l'automobile, l'avionique, la robotique et la génétique, pour en citer quelques-unes.

Une classe particulière de systèmes hybrides sont les systèmes impulsifs, qui présentent une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle ordinaire (EDO) et des sauts instantanés de l'état ou impulsions. Les systèmes différentiels impulsifs ont été observés naturellement dans plusieurs modèles et phénomènes. Par exemples, dans le modèle de choc Bautin, d'un mécanisme de l'horloge, dans l'étude de la distribution des médicaments dans le corps humain, dans le contrôle des modèles de Lotka-Volterra, ...etc. Ces systèmes sont décrits par

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= x(t_k^+) - x(t_k^-) = J_k(x), \\ x(t_0^+) &= x_0, & t_0 \geq 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Ces systèmes subissent des changements brusques de l'état à des instants dans l'intervalle de leurs évolutions continues. La durée de ces changements est souvent négligeable par rapport à celui de toute l'évolution du processus et donc les changements brusques peuvent être rapprochés en termes de changements d'état instantanés, à savoir des impulsions.

Il est important de signaler, que contrairement à une équation différentielle ordinaire, un système impulsif peut ne pas avoir une solution pour toute condition, même si  $f$  est continue ou continûment différentiable, puisque la solution  $x(t)$  du système peut rester



totale sur une surface.

D'autre part, la présence d'un effet impulsif peut influencer le comportement des solutions et causer de nouveaux phénomènes tels que le phénomène de confluence et les coups rythmiques. Plus que cela, la présence des effets impulsifs peuvent entraîner l'instabilité de l'équation différentielle et inversement sa stabilité.

De nos jours, ces systèmes sont devenus de plus en plus importants dans certains processus réels et phénomènes étudiés en physique, en pathologie [53] en technologie chimique [19], dans la dynamique des populations [70], [71], dans la biotechnologie, surtout dans les réseaux de neurones biologiques [49] et l'économie [25]. Ces dernières années, il y a eu un développement important dans la théorie des équations différentielles impulsives avec des moments fixes, voir les ouvrages [55], [68] et [84].

Il est bien connu que la théorie de la stabilité dans le sens de Lyapunov a obtenu des résultats riches et la fonction de Lyapunov a joué un rôle essentiel et indispensable pour déterminer les propriétés qualitatives de l'origine des systèmes d'équations différentielles.

L'analyse et la synthèse des systèmes à retard deviennent de plus en plus des sujets de recherche en constante évolution, comme peut le montrer la littérature abondante. Ceci est principalement dû au fait que le retard est fréquemment rencontré dans les systèmes technologiques et peut affecter leur fonctionnement de manière significative. Dans le cas des systèmes linéaires, l'analyse de la stabilité aussi bien que le problème de stabilisation d'état ont été largement étudiés. Contrairement au cas linéaire, très peu de résultats ont été établis dans le cas non linéaire. En définissant le retard et d'autres concepts relatifs, des critères de la stabilité uniforme et de la stabilité asymptotique uniforme pour les systèmes dynamiques impulsifs avec retard ont été construits dans [86] et [58] en utilisant le théorème de Razumikhin. Les mêmes auteurs ont appliqué ces résultats pour analyser la stabilité des systèmes impulsifs non linéaires à retard. Ils ont aussi considéré une large classe de systèmes et ont fourni des résultats de stabilité ainsi que des théorèmes inverses en employant une fonction définie positive discontinue. Ils ont établi que si la fonctionnelle est délimitée entre les discontinuités et elle décroît «convenablement» au point de discontinuité alors on obtient une notion «appropriée» de stabilité (tels que la stabilité uniforme, stabilité asymptotique ou la stabilité exponentielle). Parmi les conditions suffisantes pour les différentes notions de stabilité, on peut exiger que la fonctionnelle de Lyapunov ait une dérivée négative entre les impulsions et d'être décroissante aux points de discontinuité. Pour une étude détaillée, le lecteur intéressé est invité à se reporter aux ouvrages [55], [68],[84] et [37].

Ainsi, motivés par le fait que les retards apparaissent naturellement et intrinsèquement dans les processus réels, nous sommes intéressés à étudier des systèmes impulsifs à retard. En effet, dans cette partie de la thèse nous nous proposons de stabiliser, autour d'un voisinage de l'origine, une classe de systèmes non linéaires non autonomes à retard, via un contrôle impulsif ([28]). Ces systèmes étudiés se présentent comme étant une partie linéaire autonome perturbée par une fonction non linéaire  $f$  faisant intervenir un retard multiple et vérifiant une certaine condition, de sorte qu'on ne dispose pas de l'information  $f(t, 0, 0, \dots, 0) = 0, \forall t \geq 0$ . Autrement dit, on ne peut pas affirmer que l'origine est un point d'équilibre. Ceci nous a motivés pour étudier la convergence de la solution du système, dit

perturbé et décrit par l'équation

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + f(t, x(t), x(t - r_1(t)), \dots, x(t - r_m(t))), & t \neq t_k \\ \Delta x &= U(k, x(t_k^-)) = B_k x(t_k^-), & t = t_k, \quad k \in \mathbb{N} \\ x(t) &= \phi(t), & -\tau \leq t \leq 0,\end{aligned}\tag{2}$$

vers une boule de rayon bien déterminé. La convergence uniforme exponentielle vers cette boule caractérise par conséquent la stabilité pratique exponentielle du modèle considéré.

Pour ce type de systèmes impulsifs contrôlés avec retard, nous établissons un résultat de stabilité pratique uniforme exponentielle, en employant une fonctionnelle avec des discontinuités dans un ensemble dénombrable, qui représente l'ensemble des instants du contrôle impulsif. Le problème de la stabilisation des systèmes à été l'objet de motivation de beaucoup de travaux, lorsque l'origine est un point d'équilibre pour le système, citons par exemples [52],[56],[73], etc... Ceci est dû à ce que la synthèse d'un contrôleur ou d'une loi de commande est généralement faite de manière à atteindre des performances que le système ne pourrait fournir en boucle ouverte. Il est bien connu que les performances visées sont à considérer en regard de la robustesse du système commandé.

Un deuxième thème abordé dans cette partie est l'observation. Il s'agit d'un thème majeur dans l'étude d'un système quelconque. Il trouve sa justification dans les problèmes du contrôle. En effet, le contrôle d'un système nécessite souvent la connaissance de l'état complet alors qu'en pratique, la mesure de l'ensemble des variables est difficile. En d'autres termes, la connaissance entière ou partielle de l'état d'un système est une exigence importante qui intervient dans les domaines de la commande, du diagnostic et de la surveillance des systèmes. Sur le plan pratique, cette exigence s'avère difficile à satisfaire directement dans la plupart des cas. Ceci est dû, d'une part, au fait que leur mesure directe est impossible à réaliser. D'autre part, lorsqu'une variable d'état existe physiquement, sa mesure peut être délicate à effectuer d'un point de vue technique (capteur nécessaire indisponible ou de précision insuffisante...). De plus d'un point de vue économique, il est souvent souhaitable d'installer un minimum de capteurs afin de réduire les coûts d'instrumentation et de maintenance. Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande, de diagnostic ou de surveillance demande l'utilisation de variables d'état non mesurées, il est indispensable, de reconstruire entièrement ou partiellement, le vecteur d'état du système. Ce problème peut être résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire, appelé observateur d'état, dont le rôle est de fournir, en temps réel, et avec une précision garantie, une estimation du vecteur d'état du système étudié en fonction des entrées connues, des sorties et du modèle dynamique de celui-ci. En fait cet observateur est synthétisé de telle sorte que la différence entre l'état du système et son estimé tende vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Plus précisément, il faut que la dynamique de l'erreur d'observation soit plus rapide que celle du système lui-même.

La recherche d'observateurs linéaires, en temps continu ou discret a suscité une littérature abondante, on cite à titre d'exemples ([34],[44], [12], [35], [23],[9] [3],[14],...), en raison d'applications potentielles dans divers domaines, comme le diagnostic ou la cryptographie. Dans le cadre de l'extension des observateurs continus du type Luenberger, le Filtre de Kalman Étendu [36], ainsi que l'observateur de Hammouri [35], nous construisons des observateurs pour une classe de systèmes linéaires impulsifs et d'autres systèmes non linéaires.

Il est bien connu dans la théorie du contrôle que la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée par retour d'état n'implique pas nécessairement la stabilité globale asymptotique par retour de sortie. Même dans les cas où l'hypothèse d'observabilité détient, en général, seulement la stabilisabilité semi-globale détient. Par contre, en se restreignant à une classe de systèmes spécifique ou en imposant des conditions sur les contrôles, des approches différentes pour des principes de séparation linéaires et non linéaires ont été proposées, dans la littérature, dans le cas des systèmes continus. Dans ce sens, dans cette partie de la thèse, nous établissons aussi un principe de séparation pour les systèmes impulsifs linéaires.

A l'issue de cette introduction, cette partie s'articule comme suit :

Dans le premier chapitre et dans le but de faciliter la lecture et pour mieux placer nos résultats dans leur cadre, nous commençons par rappeler et exposer les principales notions et résultats classiques de la théorie des systèmes impulsifs, à savoir l'expression explicite de la solution, les outils fondamentaux servant à l'étude de stabilité dans le cas linéaire et non linéaire, qui nous seront utiles pour réaliser les objectifs principaux de cette partie. Ces notions sont à la base de la théorie des systèmes dynamiques dont le but principal est l'analyse qualitative des solutions le long d'un intervalle de temps. Nous étudions par la suite le problème de la stabilisation pratique uniforme exponentielle d'une classe de systèmes non linéaires impulsifs contrôlés à retards multiples, dont l'origine n'est pas nécessairement un point d'équilibre. Ceci veut dire que notre étude porte sur l'étude de la stabilité et la stabilisation autour d'un petit voisinage de l'origine. Nous donnons à la suite un algorithme pour la construction de la loi de commande impulsive. Ce chapitre est clôturé par deux exemples illustratifs. Les résultats énoncés dans ce chapitre sont issus de [28].

Dans le deuxième chapitre, nous abordons des notions de base de l'automatique, à savoir l'observabilité, la contrôlabilité, la stabilisation par retour d'état estimé, le principe de séparation et le reconstruteur de l'état ou encore l'observateur. Nous commençons par définir et citer, de la littérature connue, quelques critères d'observabilité pour les équations différentielles ordinaires (sans impulsions) dans le cas linéaire et non linéaire. Nous expliquons à la suite le rôle pratique d'un observateur. Dans une deuxième section, nous présentons un état de l'art des observateurs les plus fréquents dans la littérature. Ensuite, motivés par le fait que la conception d'observateurs pour les systèmes dynamiques impulsifs n'est pas encore abordée, sauf peut être Medina dans [61] a construit un dans le cas linéaire via une approche géométrique. Nous avons contribué à adopter et généraliser les observateurs de Luenberger ainsi que ceux construits par Hammouri dans [35] et Kupka dans [36], dans le cas des systèmes impulsifs, sous l'hypothèse d'observabilité du système continu. Ces observateurs se basent sur une sortie disponible en temps continu. Il s'agit d'une généralisation de quelques observateurs continus pour certaines classes de systèmes impulsifs. Nous faisons remarquer que, contrairement à notre résultat, Medina a pu construire un observateur linéaire via une approche géométrique et sous l'hypothèse de l'observabilité forte.

# Sur la stabilité pratique des systèmes impulsifs à retard multiple

## 4.1 Généralités

La plupart des systèmes techniques sont des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) composés d'une partie continue et d'une partie discrète, qui agissent en permanence une sur l'autre. Ce type de systèmes font intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et événementiel sont appelés systèmes impulsifs. Ces derniers sont classiquement constitués de processus continus interagissant avec ou supervisés par des processus discrets. Ils résultent également de l'organisation hiérarchique des systèmes de contrôle / commande complexes ou des algorithmes continus de commande. Dans cette section, nous allons nous intéresser aux systèmes impulsifs, nous suivons ci-dessous le formalisme de Lakshmikantham [55].

### 4.1.1 Description du système

Un système impulsif est la donnée

- i. d'une équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad (4.1)$$

avec  $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace euclidien de dimension  $n$  et  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des réels positifs. Soit aussi

- ii. d'applications :  $(t, x) \mapsto M(t, x)$  et  $(t, x) \mapsto N(t, x)$  de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  dans l'ensemble des parties de  $\Omega$ .
- iii. d'une famille d'applications  $A(t, x) : M(t, x) \rightarrow N(t, x)$ .

On note  $x(t, t_0, x_0)$  la solution du système  $\dot{x}(t) = f(t, x)$  de condition initiale  $(t_0, x_0)$ . Une solution du système impulsif ci-dessus est une fonction de  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ , notée  $x_I(t, t_0, x_0)$  telle que  $x_I(t_0, t_0, x_0) = x_0$  et qui vérifie  $\dot{x}_I(t, t_0, x_0) = f(t, x_I(t, t_0, x_0))$  tant que le point  $x(t, t_0, x_0)$  n'appartient pas à l'ensemble  $M(t, x(t, t_0, x_0))$ . Si la trajectoire  $x(t, t_0, x_0)$  intersecte l'ensemble  $M(t, x)$  au temps  $t = t_1$ , l'application  $A(t_1, P_{t_1})$  transfère le point  $P_{t_1} = x(t_1, t_0, x_0)$  (appartenant à l'ensemble  $M(t_1, P_{t_1})$ ) en un point  $P_{t_1}^+ = A(t_1, P_{t_1})P_{t_1}$  de l'ensemble  $N(t_1, P_{t_1})$ . Pour les temps  $t > t_1$ ,  $x_I(t, t_0, x_0)$  est solution de  $\dot{x}(t) = f(t, x)$  de condition initiale  $(t_1, P_{t_1}^+)$ . Nous avons donc  $x_I(t, t_0, x_0) = x(t, t_1, P_{t_1}^+)$  pour  $t > t_1$  et ceci tant que  $x_I(t, t_0, x_0)$  n'appartient pas à l'ensemble  $M(t, x_I(t, t_0, x_0))$ . S'il existe un

temps  $t_2 > t_1$ , tel que  $P_{t_2} \in M(t_2, P_{t_2})$ , le point  $P_{t_2}$  sera transféré en  $P_{t_2}^+ \in N(t_2, P_{t_2})$  par l'application  $A$ . Ainsi, le processus d'évolution continue à avancer tant que la solution du système (4.1) existe. Une solution d'un système impulsif peut être ou bien

- une fonction continue, si la courbe intégrale n'intersecte aucun des ensembles  $M(t, x)$  ou encore si elle l'intersecte en un point fixe de l'opérateur  $A(t, x)$ .
- une fonction continue par morceaux admettant un nombre fini de discontinuités du premier type, si la courbe intégrale intersecte l'ensemble  $M(t, x)$  en un nombre fini de points, qui ne sont pas des points fixes de l'opérateur  $A(t, x)$ .
- une fonction continue par morceaux admettant un nombre dénombrable de discontinuités du premier type, si la courbe intégrale intersecte l'ensemble  $M(t, x)$  en un nombre dénombrable de points, qui ne sont pas aussi des points fixes de l'opérateur  $A(t, x)$ .

*Remarque 4.1.1.* Soit  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  les instants pendant lesquels  $P_t$  rencontre l'ensemble  $M(t, x)$ . Ces instants sont dits les instants d'impulsion. Il pourrait se faire que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = T < +\infty$ .

Nous conviendrons dans toute la suite que les solutions  $x(t)$  du système différentiel impulsif sont continues à gauche aux instants  $t_k, k = 1, 2, \dots$ , c'est à dire  $x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h) = x(t_k)$ .

Ce cadre général étant posé, nous allons décrire ci-dessous plusieurs types particuliers de systèmes impulsifs.

- I. Systèmes avec temps d'impulsions fixés :** Pour ce premier type de systèmes, on se donne une suite strictement croissante  $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$  tendant vers l'infini, d'instants impulsifs. Les ensembles  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  sont

$$\begin{cases} M(t, x) = N(t, x) = \emptyset, & \text{si } t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ M(t, x) = N(t, x) = \Omega, & \text{si } t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Les applications  $A(t, x)$  ne sont définies alors que pour les instants  $t = t_k$  par la donnée d'une suite d'applications  $(A_k)_{k \geq 0}$ , que l'on écrit

$$\begin{aligned} A_k : \Omega &\rightarrow \Omega \\ x &\mapsto A_k(x) = x + I_k(x) \end{aligned}$$

avec  $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$ . Ainsi, avec ce choix de  $M$ ,  $N$  et  $A$ , nous pouvons décrire simplement un système différentiel impulsif dont les impulsions se produisent à des instants fixés par le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Delta x(t) = I_k(x), & t = t_k, \\ x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

On note aussi  $x(t_k^+) = x(t_k) + I_k(x(t_k))$ . Dans la suite de ce chapitre, on s'intéressera en fait à l'étude de ce type de systèmes impulsifs dans le cas linéaire et non linéaire.

- II. Systèmes avec temps d'impulsion variables :** Ces systèmes constituent une généralisation des systèmes à instants d'impulsion fixés. Pour ce type de systèmes impulsifs, on se donne une infinité dénombrable de fonctions  $\tau_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k(x) = +\infty$ , pour tout  $x$ . Les ensembles  $M(t, x)$  et  $N(t, x)$  sont

$$\begin{cases} M(t, x) = N(t, x) = \emptyset, & \text{si } t \neq \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \\ M(t, x) = N(t, x) = \Omega, & \text{si } t = \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

et les applications  $A(t, x)$  sont définies pour les instants  $t = \tau_k(x)$ . Ainsi, un tel système est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x(t) = I_k(x), & t = \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Comme les instants d'impulsion dépendent à travers l'état  $x$  de la solution, ce type de systèmes présente plus de difficultés que les systèmes à temps d'impulsion fixés. Par exemple, le point  $Q_t = (t, x_I(t, t_0, x_0))$  peut rencontrer l'ensemble  $S_k = \{(\tau_k(x), x) / x \in \Omega\}$  plusieurs fois, ce qui donne naissance à un phénomène de battement. Notons en outre que, tout comme dans le cas des systèmes à instants d'impulsion fixés, il peut se produire le phénomène de confluence : deux solutions issues de conditions initiales différentes peuvent coïncider après un certain nombre d'impulsions et se comporter comme une seule solution. Un système à temps d'impulsion variables peut s'écrire de façon encore plus générale sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & h(t, x) \neq 0, \\ \Delta x(t) = I_0(t, x), & h(t, x) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, si l'équation  $h(t, x) = 0$  admet un nombre dénombrable de racines  $t = \tau_k(x)$ , alors on définit  $I_k(x) = I_0(\tau_k(x), x)$  et on retrouve dans ce cas le système précédent. Si d'autre part, l'équation  $h(t, x) = 0$  admet les racines données par  $\{(t_k, x)\}$  telles que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ , ce système se ramène au premier type énoncé dans ce paragraphe.

**III. Systèmes impulsifs autonomes :** Pour ce cas particulier de systèmes, on se donne des ensembles  $M(t, x) := M$ ,  $N(t, x) := N$  et des applications  $A(t) := A : M \rightarrow N$  et  $I : \Omega \rightarrow \Omega$ . On trouve alors la description suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x), & x \in M, \\ \Delta x(t) = I(x), & x \notin M. \end{cases}$$

Parmi les problèmes les plus classiques et les plus triviaux, qu'on peut se poser avant toute étude de n'importe quel système dynamique, on peut citer les problèmes d'existence et unicité des solutions, leurs dépendances des conditions initiales, leurs différentiabilités relatives aussi aux conditions initiales etc... Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

#### 4.1.2 Existence des solutions

Nous nous restreignons ici aux systèmes avec temps d'impulsions fixés (4.2).

**Définition 4.1.2.** Une fonction  $x : [t_0, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \geq 0$ ,  $a > 0$  est dite solution du système (4.2) si

- i.  $x(t_0^+) = x_0$  et  $(t, x(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ ,  $\forall t \in [t_0, t_0 + a)$ ,
- ii.  $x(t)$  est continûment différentiable sur  $[t_0, t_0 + a) \setminus \{t_1, t_2, \dots\}$  et vérifie l'équation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + a) \text{ et } \forall t \neq t_k,$$

- iii. Pour tout  $t_k \in [t_0, t_0 + a)$ ,  $x(t_k^+) = x(t_k) + I_k(x(t_k))$ .
- iv. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x(t)$  est continue à gauche aux instants  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Remarquons que la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  pour les équations différentielles ordinaires sans impulsions est remplacée pour les équations différentielles impulsives par  $x(t_0^+) = x_0$ . L'existence des solutions est évidente. En général, il n'y a pas unicité de solution, vu le problème de confluence qui peut se produire. En effet, si on prend l'équation dans le plan donnée par :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \quad t \neq t_k,$$

$$x(t_k^+) = x(t_k) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t_k)$$

et deux conditions initiales situées sur deux cercles différents :

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \tan(\tau) \end{pmatrix} \text{ avec } \tau > 0 \text{ un temps donné,}$$

alors,  $\forall t \in [0, \tau)$ , les solutions du système précédent évoluent suivant les trajectoires

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) \cos t - x_2(0) \sin t \\ x_2(t) = x_2(0) \cos t + x_1(0) \sin t. \end{cases}$$

Au bout du temps  $t_1 = \tau$ , les deux trajectoires subissent une réinitialisation et se confondent à partir de la nouvelle condition initiale, telle que

$$\begin{cases} x_1(t_1^+) = \bar{x}_1(t_1^+) = 0 \\ x_2(t_1^+) = \bar{x}_2(t_1^+) = 2 \cos \tau + 4 \sin \tau \end{cases}$$

Comme dans le cas continu, les systèmes linéaires impulsifs présentent des conditions plus favorables pour établir certains résultats et beaucoup de propriétés qui ne sont pas, généralement vérifiées dans le cas non linéaire. Dans ce qui suit, nous présentons quelques propriétés qui nous seront utiles par la suites.

#### 4.1.3 Propriétés générales des solutions du système linéaire

Dans cette section, nous allons considérer le système linéaire impulsif décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= D_k x(t_k^-), \\ x(t_0^+) &= x_0, & t_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Avec  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice continue par morceaux et  $(D_k)_{k \geq 1}$  une suite de matrices constantes dans  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .  $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ ,  $t_0 < t_1 < \dots \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ .

**Théorème 4.1.3.** *Si on suppose que  $A(t)$  est définie et continue sur  $[0, +\infty)$ , alors les solutions sont définies sur  $[0, +\infty)$ . Si de plus,  $\det(I + D_k) \neq 0$ ,  $\forall k \geq 1$ , alors il y a unicité de la solution.*

Tout le long de ce chapitre, nous allons considérer des systèmes qui vérifient les deux conditions suivantes :

- Tout intervalle compact  $[a, b]$  contient uniquement un nombre fini d'instants d'impulsion  $t_k$ .
- $\forall k \geq 1$ , les matrices  $(I + D_k)$  sont inversibles.

Sous ces deux conditions, on a le résultat suivant.

**Théorème 4.1.4.** [68]. *L'ensemble  $\chi$  des solutions du système linéaire impulsif (4.3), qui sont définies sur l'intervalle  $[a, b]$ , est un espace vectoriel de dimension  $n$ .*

Une base de l'espace  $\chi$  est dite un système fondamental de solutions de (4.3). Notons  $X(t)$  la matrice, dont les colonnes sont formées par les solutions du système fondamental. Cette dernière est appelée la matrice fondamentale associée au système (4.3). Il est clair que toute fonction de la forme

$$x(t) = X(t)c$$

est aussi une solution du système (4.3) pour tout vecteur constant  $c \in \mathbb{R}^n$ . Il s'ensuit alors que la matrice  $X(t)$  vérifie l'équation matricielle suivante

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(t)X, \text{ si } t \neq t_k, \\ \Delta X|_{t=t_k} &= D_k X, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Toutes les solutions non dégénérées du système matriciel (4.4) sont données par l'expression  $X(t) = X_0(t)C$ , avec  $X_0(t)$  est une solution non dégénérée de (4.4) et  $C$  une matrice inversible. En particulier, la solution  $X(t)$  du système (4.4) qui vérifie la condition  $X(t_0) = I$  est appelée la résolvante du système (4.3) et elle est notée  $X(t, t_0)$ . Soit  $\Phi(t, s)$ ,  $t, s \in [t_{k-1}, t_k)$ , la résolvante du système continu

$$\dot{x}(t) = A(t)x, \quad t \in [t_{k-1}, t_k),$$

qui vérifie  $\Phi(t, t) = I$ . L'expression explicite du système (4.3) est donnée dans la proposition qui suit.

**Proposition 4.1.5.** *La solution du système (4.3) est donnée par*

$$x(t) := x(t; t_0, x_0) = X(t, t_0^+)x_0$$

avec

$$X(t, s) = \begin{cases} \Phi(t, s), & \text{si } t_{k-1} < s \leq t \leq t_k, \\ \Phi(t, t_k) \left( \prod_{j=1}^{k-i} (I + D_{k+1-j}) \Phi(t_{k+1-j}, t_{k-j}^+) \right) (I + D_i) \Phi(t_i, s), & \text{si } t_{i-1} < s \leq t_i \leq t_k < t \leq t_{k+1} \end{cases}$$

*Démonstration.* Il est clair que  $X(t, s) = \Phi(t, s)$ ,  $\forall t_{k-1} < s \leq t \leq t_k$ . Pour montrer le deuxième cas, il suffit de raisonner par récurrence sur  $k$ . En effet

- i. si  $k = i$  c'est à dire  $t_{i-1} < s \leq t_i < t \leq t_{k+1}$ , la solution s'écrit

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_i)x(t_i^+) \\ &= \Phi(t, t_i)(I + D_i)x(t_i) \\ &= \Phi(t, t_i)(I + D_i)\Phi(t_i, s)x(s) \end{aligned}$$

d'où  $X(t, s) = \Phi(t, t_i)(I + D_i)\Phi(t_i, s)$ .



- ii. Supposons maintenant que la relation est vraie à l'ordre  $k$ , c'est à dire si  $t_{i-1} < s \leq t_i \leq t_k < t \leq t_{k+1}$ , on a

$$X(t, s) = \Phi(t, t_k) \left( \prod_{j=1}^{k-i} (I + D_{k+1-j}) \Phi(t_{k+1-j}, t_{k-j}^+) \right) (I + D_i) \Phi(t_i, s)$$

et vérifions la à l'ordre  $k+1$ . En effet,

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_{k+1}) x(t_{k+1}^+) \\ &= \Phi(t, t_{k+1}) (I + D_{k+1}) x(t_{k+1}) \\ &= \Phi(t, t_{k+1}) (I + D_{k+1}) \Phi(t_{k+1}, s) x(s) \\ &= \Phi(t, t_{k+1}) (I + D_{k+1}) \left[ \Phi(t_{k+1}, t_k) \left( \prod_{j=1}^{k-i} (I + D_{k+1-j}) \Phi(t_{k+1-j}, t_{k-j}^+) \right) (I + D_i) \Phi(t_i, s) \right] x(s) \\ &= \Phi(t, t_{k+1}) \left( \prod_{j=1}^{k-i+1} (I + D_{k+1-j}) \Phi(t_{k+1-j}, t_{k-j}^+) \right) (I + D_i) \Phi(t_i, s) x(s), \end{aligned}$$

et par suite, on déduit que si  $t_{i-1} < s \leq t_i \leq t_k < t_{k+1} < t \leq t_{k+2}$ , on a

$$X(t, s) = \Phi(t, t_{k+1}) \left( \prod_{j=1}^{k-i+1} (I + D_{k+1-j}) \Phi(t_{k+1-j}, t_{k-j}^+) \right) (I + D_i) \Phi(t_i, s).$$

□

D'après l'expression de la résolvante et puisque  $\forall k \geq 1$ , les matrices  $(I + D_k)$  sont inversibles, on peut déduire les propriétés suivantes. Pour plus de détails, on peut se référer à [68] et [84].

**Corollaire 4.1.6.** *La résolvante du système linéaire vérifie les propriétés suivantes*

1.  $X(t, t) = I, \forall t \geq 0$
2.  $X(t, s)$  est inversible si  $t_{i-1} < s \leq t_i \leq t_k < t \leq t_{k+1}$  avec

$$X(t, s)^{-1} = \Phi^{-1}(t_i, s) \left( \prod_{j=1}^{k-i} (I + D_{k+1-j})^{-1} \Phi^{-1}(t_{k+1-j}, t_{k-j}^+) \right) (I + D_i)^{-1} \Phi^{-1}(t, t_k)$$

3.  $X(t_k^+, s) = (I + D_k) X(t_k, s)$
4.  $X(s, t_k^+) = (I + D_k)^{-1} X(s, t_k), \quad s \neq t_k^+,$
5. Si  $t_{i-j-2} < t_0 \leq t_{i-j-1} < t_{i-1} < s \leq t_i \leq t_k < t \leq t_{k+1}$ ,  $X(t, t_0) X^{-1}(s, t_0) = X(t, s)$

**Corollaire 4.1.7.** [68] Si  $A(t) = A$  et  $\forall k \geq 1, D_k = D$ , alors la résolvante du système linéaire impulsif (4.3) avec des coefficients constants est donnée par

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \left( \prod_{j=k}^{j=1} (I + D) e^{A(t_j - t_{j-1})} \right).$$

Si on suppose que  $A(t) = A, \forall k \geq 1, D_k = D$ , et que les matrices  $A$  et  $D$  commutent, on peut simplifier d'avantage l'expression de la solution du système linéaire. Le résultat est illustré dans le corollaire suivant.

**Corollaire 4.1.8.** *Si  $A(t) = A$  et  $\forall k \geq 1$ ,  $D_k = D$ , et si  $A$  et  $D$  commutent, alors la résolvante du système linéaire impulsif (4.3) avec des coefficients constants est donnée par*

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}(I + D)^{i(t, t_0)}.$$

avec  $i(t, t_0)$  est le nombre d'impulsions entre les instants  $t$  et  $t_0$ . Pour plus de précision, ceci veut dire si  $t_k < t < t_{k+1}$ , alors  $i(t, t_0) = k$ .

Comme pour les systèmes continus, les notions de stabilité pour les systèmes impulsifs sont identiquement celles énoncées dans le premier chapitre.

#### 4.1.4 Solution du système linéaire perturbé

Ayant déjà établi l'expression de la solution du système linéaire impulsif non autonome, nous allons aussi expliciter celle du système perturbé qui se présente comme étant un système linéaire impulsif perturbé par une partie non linéaire et en chaque instant d'impulsion  $t_k$ , on lui ajoute un vecteur constant  $b_k$  qui dépend de  $k$ . Ce type de système décrit, en pratique, une large famille de systèmes non linéaires, dont l'étude et la détermination de la solution restent toujours une tâche plus difficile. Dans ce mémoire, on s'intéresse aussi à construire un observateur moyennant celui du système linéaire. Soit alors le système différentiel impulsif suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + f(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= D_k x(t_k^-) + b_k, \\ x(t_0^+) &= x_0, & t_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

où les matrices  $A(t)$  et  $D_k$  sont celles du système (4.3), ainsi que les instants d'impulsion. La fonction  $f(t)$  est supposée continue ou continue par morceaux et  $b_k$  sont des vecteurs constants de  $\mathbb{R}^n$ . On a alors le résultat dû à [68] suivant.

**Théorème 4.1.9.** *[68] La solution du système (4.5) est donnée par*

$$x(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)f(s)ds + \sum_{t_0 < t_k < t} X(t, t_k^+)b_k,$$

avec  $X(t, s)$  est la résolvante du système linéaire nominal définie dans la proposition 4.1.5.

## 4.2 Stabilité des systèmes impulsifs

Tout comme les équations différentielles ordinaires, nous disposons de plusieurs outils théoriques pour étudier la stabilité des solutions des systèmes impulsifs. Dans le cas non linéaire, nous avons des résultats qui sont en majorité dûs à Lyapunov et qui se basent essentiellement sur la méthode de comparaison. Tandis que pour le cas linéaire, nous présentons dans cette section des résultats récents qui sont dûs à J.O. Alzabut [2]. Nous citons ces résultats de stabilité, du moment que l'objectif final de ce chapitre est de concevoir différents types d'observateurs. Et pour se faire, il faut et il suffit de montrer que l'origine de l'équation de l'erreur est asymptotiquement ou exponentiellement stable.

**4.2.1 Système de comparaison**

Considérons le système impulsif non linéaire non autonome décrit par l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= I_k(x(t_k^-)), \\ x(t_0^+) &= x_0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

où  $f$  est supposée continue sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ , avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Dans le but de clarté, nous commençons d'abord par définir quelques notions de base qui nous seront utiles par la suite.

**Définition 4.2.1.** Une fonction  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite de classe  $\nu_0$  si

1.  $V$  est continue sur l'intervalle  $(t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^n$  et pour tout  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} V(t, y) = V(t_k^+, x) \text{ existe ;}$$

2.  $V$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x$  et  $V(t, 0) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Nous définissons les deux dérivées généralisées d'une fonction de Lyapunov comme suit :

$$\begin{aligned} D^+V(t, x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \frac{V(t + \delta, x + \delta f(t, x)) - V(t, x)}{\delta}, \\ D_-V(t, x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \sup \frac{V(t + \delta, x + \delta f(t, x)) - V(t, x)}{\delta}. \end{aligned}$$

Si de plus,  $V$  est supposée continûment différentiable sur  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ , nous avons

$$D^+V(t, x) = D_-V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x).$$

**Définition 4.2.2.** (Système de comparaison.) Soit  $V \in \nu_0$  et supposons que

$$\begin{cases} D^+V(t, x) &\leq g(t, V(t, x)), & t \neq t_k, \\ V(t_k, x(t_k^-) + I_k(x(t_k^-))) &\leq \psi_k(V(t_k, x(t_k^-))), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

avec

- $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue de  $(t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , on a  $\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} g(t, y) = g(t_k^+, x)$  existe.
- $\psi_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction non décroissante.

Alors, le système ci-dessous est dit système de comparaison pour le système (4.6)

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= g(t, w), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ w(t_k^+) &= \psi_k(w(t_k)), \\ w(t_0^+) &= w_0 \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Considérons maintenant le système (4.7) en supposant de plus que la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Nous avons ainsi la définition suivante.

**Définition 4.2.3.** Une fonction notée  $w_{max}(t) = w_{max}(t, t_0, w_0)$  est dite solution maximale du système (4.7), si

- i.  $w_{max}(t)$  est une solution du système (4.7) définie sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T)$

- ii. pour toute solution  $w(t) = w(t, t_0, w_0)$  du système (4.7) sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T)$ , on a

$$w(t) \leq w_{\max}(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T).$$

**Théorème 4.2.4.** [84] Soit  $w_{\max}(t) = w_{\max}(t, t_0, w_0)$  la solution maximale du système de comparaison (4.7) sur l'intervalle  $[t_0, \infty)$ , alors pour toute solution  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ ,  $t \in [t_0, \infty)$ , du système (4.6), si on a  $V(t_0^+, x_0) \leq w_0$  alors  $V(t, x(t)) \leq w_{\max}(t)$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

**Théorème 4.2.5.** [84] Supposons que

1.  $f(t, 0) = 0$ ,  $g(t, 0) = 0$  et  $I(0) = 0 \forall k \geq 1$ ,
2.  $V : \mathbb{R}^+ \times B_\rho \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\rho > 0$ , et  $V \in \nu_0$ , tel que  $D^+V(t, x(t)) \leq g(t, V(t, x(t)))$ ,  $t \neq t_k$ ;
3. Il existe un réel  $\rho_0 > 0$  tel que (si  $x \in B_{\rho_0}$  alors  $x + I(x) \in B_\rho$  pour tout  $k$ ) et  $V(t, x + I(x)) \leq \psi_k(V(t, x))$ , pour  $t = t_k$  et  $x \in B_{\rho_0}$ ;
4.  $\beta(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha(\|x\|)$ ,  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho$  où  $\alpha(\cdot)$ ,  $\beta(\cdot) \in \mathcal{K}$ .

Alors les propriétés de stabilité de la solution triviale du système de comparaison (4.7) impliquent celles de la solution triviale du système (4.6)

Notons que  $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \rho\}$  et les fonctions de classe  $\mathcal{K}$  citées dans le théorème précédent sont celles déjà définies dans le premier chapitre (voir Définition 1.2.1).

**Corollaire 4.2.6.** Sous les conditions du Théorème 4.2.4 avec

- i.  $g(t, w) = -\gamma w$ ,  $\gamma > 0$ ,
- ii.  $\psi_k(w) = d_k w$ ,  $d_k > 0$ ,  $\forall k \geq 1$ ,

il résulte que

$$V(t, x) \leq (V(t_0^+, x_0) \prod_{t_0 < t_k < t} d_k) e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Ce corollaire nous servira par la suite pour montrer la convergence exponentielle d'un observateur pour une classe de systèmes impulsifs, dont le système de comparaison trouvé, aura cette forme. Ainsi que le Théorème 4.2.5 est fondamental pour montrer la convergence de l'erreur des observateurs construits. Pour les systèmes linéaires, on dispose de quelques outils supplémentaires pour étudier de la stabilité.

### 4.2.2 Stabilité des systèmes linéaires impulsifs

Nous revenons à nouveau aux systèmes linéaires impulsifs, pour citer quelques résultats de stabilité. Nous considérons dans cette section le système décrit par (4.3) en supposant que la matrice  $A(t)$  est continue et bornée pour tout  $t \geq t_0$  et les matrices  $D_k$  sont uniformément bornées par rapport à  $k$ . Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 4.2.7.** [68] Une solution du système (4.3) est

1. stable si et seulement si la résolvante  $X(t, t_0)$  est bornée pour tout  $t \geq t_0$ ,
2. asymptotiquement stable si et seulement si la résolvante du système vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t, t_0) = 0,$$

3. instable si et seulement si la résolvante  $X(t, t_0)$  est non bornée.

### 4.2.2.1 Généralisation du théorème de Perron

Depuis 1930 et grâce à Perron (voir [66]), il y avait un résultat de stabilité pour les équations différentielles linéaires autonomes décrits par le système suivant.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (4.8)$$

avec  $A(t)$  une matrice dépendant continûment de la variable  $t$ . Ce théorème affirme que

**Théorème 4.2.8 (Perron, [66]).** *Si, pour toute fonction bornée  $g$ , la solution issue de la condition initiale  $x(0) = 0$  du système*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

*est bornée, alors l'origine est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système linéaire (4.8).*

Ensuite, ce résultat a été étendu au cas des systèmes linéaires à retard (voir [42]). Récemment, précisément en 2007, ce résultat a déjà été généralisé par Alzabut dans [2], mais cette généralisation a été faite dans le cadre des systèmes linéaires impulsifs avec retard. Or la présence d'un retard sur la partie discrète du système (la seconde équation de (4.3)) impose l'hypothèse d'inversibilité des matrices  $(I + D_k)$  et c'est en utilisant cette hypothèse que la démonstration de la généralisation du théorème de Perron est faite dans [2]. Dans notre cas, nous pouvons définir une solution de (4.3) sans avoir à faire cette hypothèse d'inversibilité et nous donnons donc ci-dessous une démonstration de la généralisation du théorème de Perron aux systèmes (4.3) qui ne suppose pas l'inversibilité des matrices  $(I + D_k)$ . Nous avons alors la définition suivante.

**Définition 4.2.9.** Nous dirons que le système (4.3) satisfait la condition de Perron si pour toute application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  essentiellement bornée et toute suite bornée  $(\beta)_{k \geq 1}$  les solutions du système

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + g(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= D_k x(t_k^-) + \beta_k, & k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.9)$$

issue de la condition initiale  $x(0) = 0$  est bornée sur  $[0, +\infty)$ .

Avant d'énoncer le théorème principal de cette section, nous allons voir que l'on peut exprimer les solutions du système (4.9) à l'aide de la résolvante  $X(t, \tau)$ .

Supposons que  $\tau \in ]t_{i-1}, t_i[$  et remarquons que, pour tout  $j \geq i$  et tout  $t \in ]t_j, t_{j+1}]$  nous avons

$$\Phi(t, t_j)(I + D_j)X(t_j, \tau) = X(t, \tau). \quad (4.10)$$

Cette formule se montre aisément en revenant à la définition de la résolvante  $X$ . De plus, il est facile de voir que pour tout triplet  $\tau \leq \mu \leq t$ , nous avons

$$X(t, \tau) = X(t, \mu) \circ X(\mu, \tau).$$

Montrons maintenant que pour tout  $j \geq i - 1$  et tout  $t \in ]\max(\tau, t_j), t_{j+1}]$ , nous avons

$$x(t) = X(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X(t, s)f(s) ds + \sum_{k=i}^j X(t, t_k^-)\beta_k \quad (4.11)$$

où la notation  $X(t, t_j^-)$  désigne la limite  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_j \\ t < t_j}} X(t, t_j)$  et où nous faisons la convention que

la somme  $\sum_{k=i}^j a_k$  est nulle, si  $i < k$ .

Nous allons raisonner par récurrence sur  $j$ , si  $j = i - 1$ , pour  $t \in ]\tau, t_i]$ , nous avons

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, s)f(s) \, ds \\ &= X(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X(t, s)f(s) \, ds \quad \text{par définition de } X. \end{aligned}$$

La formule (4.11) est donc vraie à l'ordre  $i - 1$ , supposons la vraie à l'ordre  $j$  et soit  $t \in ]t_{j+1}, t_{j+2}]$ , tout d'abord nous avons

$$\begin{aligned} x(t_{j+1}^+) &= (I + D_{j+1})x(t_{j+1}) + \beta_{j+1} \\ &= (I + D_{j+1})X(t_{j+1}, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^{t_{j+1}} (I + D_{j+1})X(t_{j+1}, s)f(s) \, ds \\ &\quad + (I + D_{j+1}) \sum_{k=i}^j X(t_{j+1}, t_k^-) \beta_k + \beta_{j+1} \end{aligned}$$

donc, pour  $t \in ]t_{j+1}, t_{j+2}]$  :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_{j+1})x(t_{j+1}^+) + \int_{t_{j+1}}^t \Phi(t, s)f(s) \, ds \\ &= \Phi(t, t_{j+1})(I + D_{j+1})X(t_{j+1}, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^{t_{j+1}} \Phi(t, t_{j+1})(I + D_{j+1})X(t_{j+1}, s)f(s) \, ds \\ &\quad + \sum_{k=i}^j \Phi(t, t_{j+1})(I + D_{j+1})X(t_{j+1}, t_k^-) \beta_k + \Phi(t, t_{j+1})\beta_{j+1} + \int_{t_{j+1}}^t \Phi(t, s)f(s) \, ds \\ &= X(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^{t_{j+1}} X(t, s)f(s) \, ds + \sum_{k=i}^j X(t, t_k^-) \beta_k + \Phi(t, t_{j+1})\beta_{j+1} + \int_{t_{j+1}}^t X(t, s)f(s) \, ds \\ &\quad \text{par définition de } X \text{ et en vertu de la formule (4.10)} \\ &= X(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X(t, s)f(s) \, ds + \sum_{k=i}^{j+1} X(t, t_k^-) \beta_k. \end{aligned}$$

Du fait que la formule (4.10) est vraie lorsqu'on remplace  $\tau$  par  $t_{i-1}$ , le même raisonnement montre que la formule (4.11) est encore vraie si on y remplace  $\tau$  par  $t_{i-1}$ . En notant  $n(t)$  le plus petit index  $i$  tel que  $t_i \geq t$ , la formule précédente peut se réécrire

$$x(t) = X(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X(t, s)f(s) \, ds + \sum_{k=n(\tau)}^{n(t)-1} X(t, t_k^-) \beta_k$$

Nous énonçons maintenant notre théorème :

**Théorème 4.2.10.** *Supposons que les familles de matrices  $(A(t))_{t \geq t_0}$  et  $(D_i)_{i \geq 0}$  soient bornées. Le système différentiel impulsif (4.3) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si il vérifie la condition de Perron.*

Nous commençons par établir les majorations suivantes.

**Lemme 4.2.11.** *Si le système (4.3) vérifie la condition de Perron, il existe une constante  $K$  telle que l'on ait pour tout couple de réels  $(\tau, t)$  tel que  $t_0 \leq \tau \leq t$ .*

$$\int_{t_0}^t \|X(t, s)\| \, ds + \sum_{k=n(\tau)}^{n(t)} \|X(t, t_k^-)\| \leq K.$$

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des applications mesurables et essentiellement bornées de  $[t_0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\ell^\infty$  l'ensemble des suites bornées de  $\mathbb{R}^n$ ; muni de la norme

$$\|(f, \beta)\| = \sup_{t \geq t_0} \|f(t)\| + \sup_{k \geq 0} \|\beta_k\|$$

l'ensemble  $\mathcal{B} \times \ell^\infty$  est un espace de Banach. Considérons alors les  $n$  familles d'applications linéaires  $(U_t^i)_{t \geq t_0}$  de  $\mathcal{B} \times \ell^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$U_t^i(f, \beta) = \int_{t_0}^t (X(t, s)f(s))_i \, ds + \sum_{k=n(t_0)}^{n(t)} (X(t, t_k^-)\beta_k)_i$$

où  $g(s)_i$  désigne la  $i^{\text{e}}$  composante de  $g(s)$ . Pour  $(f, \beta)$  fixé, la condition de Perron implique l'existence d'une borne  $d$  (dépendant de  $(f, \beta)$ ) telle que  $\|U_t(f, \beta)\| \leq d$  pour tout  $t \geq t_0$ , le théorème de Banach-Steinhaus implique alors l'existence de  $K_i > 0$  tel que  $\|U_t^i\| \leq K_i$  pour tout  $t \geq t_0$ . Choisissons alors la fonction  $f$  définie par  $f(s) = 0$  si  $s \geq t$  et, pour  $s \in [t_0, t]$ ,  $f_j(s) = \text{signe}(X_{i,j}(s))$ ; choisissons aussi la suite  $(\beta_i)_{i \geq 0}$  telle que  $\beta_k^i = \text{signe}(X_{i,j}(t, t_k^-))$ . Avec ce choix de  $(f, \beta)$  nous avons

$$U_t^i(f, \beta) = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |X_{i,j}(t, s)| \, ds + \sum_{k=n(t_0)}^{n(t)} \sum_{j=1}^n |X_{i,j}(t, t_k^-)|$$

nous en déduisons que

$$\int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n |X_{i,j}(t, s)| \, ds + \sum_{k=n(t_0)}^{n(t)} \sum_{j=1}^n |X_{i,j}(t, t_k^-)| \leq 2K_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \text{ et tout } t \geq t_0.$$

puis, en faisant la somme de ces  $n$  inégalités que

$$\int_{t_0}^t \left\| \|X_{i,j}(t, s)\|_1 \right\|_1 \, ds + \sum_{k=n(t_0)}^{n(t)} \left\| \|X_{i,j}(t, t_k^-)\|_1 \right\|_1 \leq 2 \sum_{i=1}^n K_i \triangleq K \quad \text{pour tout } t \geq t_0$$

où  $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$ . Cette inégalité reste évidemment vraie pour toute autre norme choisie sur  $\mathbb{R}^{n \times n}$  en raison de l'équivalence des normes en dimension finie.  $\square$

Le lemme suivant permet d'établir la stabilité uniforme de l'équilibre pour le système (4.3).

**Lemme 4.2.12.** *Il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout couple  $(t, \tau)$  avec  $t_0 \leq \tau \leq t$  nous avons  $\|X(t, \tau)\| \leq M$ .*

*Démonstration.* Soit  $i \geq 1$  l'indice tel que  $\tau \in [t_{i-1}, t_i[$ , nous avons  $X(t, \tau) = X(t, t_i^-) \circ X(t_i^-, \tau)$  donc

$$\|X(t, \tau)\| \leq \|X(t, t_i^-)\| \|X(t_i^-, \tau)\|$$

mais

$$\|X(t, t_i^-)\| \leq \int_{t_0}^t \|X_{i,j}(t, s)\|_1 ds + \sum_{k=n(t_0)}^{n(t)} \|X_{i,j}(t, t_k^-)\|_1 \leq K$$

et  $X(t_i^-, \tau) = \Phi(t_i, \tau)$ . Or si le système (4.3) vérifie la condition de Perron, il est clair que le système linéaire continu (4.8) la vérifie aussi et le théorème de Perron [66] permet alors d'affirmer l'existence d'une constante  $K'$  (indépendante de  $\tau$ ,  $t_i$  et  $t$  telle que  $\|\Phi(t_i, \tau)\| \leq K'$ . Nous pouvons donc écrire

$$\|X(t, \tau)\| \leq K K' \triangleq M.$$

□

La conséquence de ce lemme est que, si  $t \mapsto x(t) = X(t, \tau)x(\tau)$  est une solution du système (4.3) de condition initiale  $x(\tau)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|X(t, \tau)\| \|x(\tau)\| \\ &\leq M \|x(\tau)\| \end{aligned}$$

ce qui prouve la stabilité uniforme de l'origine pour le système (4.3).

Nous terminons par un lemme qui démontre l'attractivité uniforme de l'origine pour le système (4.3).

**Lemme 4.2.13.** *L'origine est un point d'équilibre uniformément attractif pour le système (4.3).*

*Démonstration.* Soit  $x(t) = X(t, \tau)x(\tau)$  une solution du système (4.3). Nous pouvons écrire

$$x(t) = X(t, \mu) \circ X(\mu, \tau) \quad \text{pour tout } \mu \in [\tau, t].$$

en intégrant les deux membres de cette égalité par rapport à  $\mu$  sur l'intervalle  $[\tau, t]$ , nous obtenons

$$(t - \tau)x(t) = \int_{\tau}^t X(t, \mu) \circ X(\mu, \tau) d\mu$$

mais  $\|X(\mu, \tau)\| \leq M$  donc nous avons

$$(t - \tau)\|x(t)\| \leq M \int_{\tau}^t \|X(t, \mu)\| d\mu$$

mais, d'après le lemme 4.2.11, l'intégrale figurant dans le second membre de cette inégalité est majorée par  $K$ , par conséquent, nous avons

$$(t - \tau)\|x(t)\| \leq M K$$

d'où

$$\|x(t)\| \leq \frac{M K}{t - \tau},$$

ce qui prouve l'attractivité uniforme .

□



Dans la pratique il existe une grande classe de systèmes non linéaires qui sont modélisés par le système impulsif suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + P(t)x(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= D_k x(t_k^-) + J_k x(t_k), & k \in \mathbb{N}\end{aligned}\quad (4.12)$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice qui peut être continue ou continue par morceaux pour tout  $t \geq t_0$  et  $J_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante. Considérons aussi le système de référence suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= D_k x(t_k^-), & k \in \mathbb{N}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Nous avons un résultat qui assure la stabilité exponentielle du système (4.12) sous les conditions que le système (4.14) possède cette propriété et que les termes de perturbations  $P(t)$  et  $J_k$  soient petits. Nous énonçons le théorème suivant.

**Théorème 4.2.14.** [84] *Supposons que*

- les solutions du système de référence (4.14) sont exponentiellement stables.
- il existe  $\xi$ , il existe  $T$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que,

$$\|P(t)\| < \xi, \quad \text{et} \quad \|J_k\| < \xi \quad \text{pour } k > K$$

.

$$0 < \theta_1 \leq t_{k+1} - t_k \leq \theta_2, \quad k \in \mathbb{N},$$

si  $\xi$  est assez petit.

Alors, les solutions du système impulsif (4.12) sont exponentiellement stables.

Si dans un cas particulier, on considère le système linéaire autonome décrit par

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= Dx(t_k^-), & k \in \mathbb{N} \\ x(t_0^+) &= x_0.\end{aligned}\quad (4.14)$$

D'après le corollaire 4.1.7, on a

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_k)} \left( \prod_{j=k}^{j=1} (I + D) e^{A(t_j - t_{j-1})} \right).$$

D'après cette expression, il s'avère difficile de formuler une conclusion sur la structure et le comportement de la matrice  $X(t, t_0)$  et par conséquent aussi sur la structure et le comportement des solutions du système (4.14), pour des matrices  $A$  et  $D$  arbitraires. En d'autres termes, il n'y a pas de plus élégante description des propriétés des solutions d'un système, en termes de valeurs propres de sa matrice, celle que nous avons pour un système d'équations différentielles ordinaires. La raison en est que les solutions du système (4.14) ne sont pas réellement invariantes par rapport aux changements, vu la présence d'un effet impulsif aux instants  $t_k$ . Et par suite, le système (4.14) n'est pas autonome. Toutefois, dans certains cas l'expression de la résolvante peut être simplifiée et par suite, il sera

possible d'obtenir des informations sur le comportement des solutions du système (4.14). Par exemple, si les matrices  $A$  et  $D$  commutent, la résolvante est alors donnée par

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}(I + D)^{i(t, t_0)}.$$

avec  $i(t, t_0)$  est le nombre d'impulsions entre les instants  $t$  et  $t_0$ . De cette expression, on peut déduire la dépendance du comportement des solutions du système (4.14) à l'infini, des valeurs propres des matrices  $A$  et  $D$  ainsi que de la suite d'impulsions  $(t_k)_{k \geq 1}$ . Pour plus de détails, on peut se référer à [68].

## 4.3 Stabilité pratique exponentielle du système impulsif contrôlé à retard multiple

### 4.3.1 Introduction

De nombreux systèmes du monde réel présentent à la fois des caractéristiques continues et discrètes. Par exemple, des processus évolutifs tels que les réseaux de neurones biologiques, des modèles de rupture dans le rythme pathologie, des modèles de contrôle optimal de l'économie, etc, sont caractérisés par des changements brusques d'états à des instants donnés. Ces changements brusques et vives sont souvent de très courte durée et sont donc censés se produire instantanément sous forme d'impulsions. Pour les progrès récents, le lecteur est renvoyé à [55], [84].

Il est maintenant reconnu que la théorie des systèmes impulsifs présente un cadre naturel pour la modélisation mathématique de beaucoup de ces phénomènes réels. Des progrès significatifs sur la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques impulsifs, avec ou sans retard ont été faites voir par exemples [82], [65], [85]. Cependant, il y a peu de résultats qui concernent le problème de contrôle impulsif pour les systèmes à retard variable, puisque la théorie correspondante aux équations différentielles impulsives à retard n'est pas encore bien développée ([83], [58]).

Les retards apparaissent dans de nombreux systèmes pratiques tels les modèles de population, de la chimie, etc .. Le problème de la stabilité des systèmes dits "à retard" est un sujet de grande importance pratique, qui a suscité beaucoup d'intérêt au cours des décennies, on cite à titre d'exemples les ouvrages [37], [38].

L'idée principale du contrôle impulsif est d'agir, par le biais d'une commande discontinue intervenant à des instants  $t_k$ , sur l'état d'un système dynamique continu, qui est en fait un système de commande hybride [85].

Du moment que les solutions analytiques des équation différentielles non linéaires ne peuvent pas, en générale être obtenue directement, la deuxième méthode de Lyapunov joue un rôle important dans la détermination de la stabilité des systèmes non linéaires, puisque le choix approprié d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est le point-clé pour obtenir des critères de stabilité. Cette méthode sera utilisée dans cette section pour garantir la stabilité exponentielle uniforme pratique pour des systèmes impulsifs contrôlés et perturbés avec retard, dans le cas où l'origine n'est pas un point d'équilibre de la perturbation du système linéaire. Ce genre de stabilité est très important et très utile pour analyser la stabilité ou concevoir des contrôleurs de pratiques pour de tels systèmes, puisque, dans de nombreux cas, le contrôle d'un système à un point idéalisé est soit coûteux, voir impossible, en présence des interruptions. D'où, le meilleur que nous pouvons espérer dans de telles situations est que la solution  $x(t)$  converge vers une boule de rayon déterminé. Le but de cette section est d'étudier une classe de systèmes non linéaires impulsifs contrôlés avec

des retards multiples variables dans le temps et d'établir une condition suffisante pour leur stabilité uniforme exponentielle pratique. En outre, un algorithme de commande impulsive pour la stabilisation est présentée. Enfin, un exemple numérique est donné pour illustrer les avantages des résultats.

**Notation :** On note dans cette section  $\lambda_{\min}(\cdot)$  et  $\lambda_{\max}(\cdot)$  respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique.  $I$  est la matrice identité. L'ensemble  $\mathcal{C}_{n,h_M} := \mathcal{C}([-h_M, 0], \mathbb{R}^n)$  désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle  $[-h_M, 0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . La notation  $A > 0$  veut dire que la matrice  $A$  est définie positive définie et  $A^T$  est sa matrice transposée.

Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , soit  $\|x\|$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ . La norme matricielle induite, ainsi que la mesure d'une matrice sont définies par

$$\|X\| = \sqrt{\lambda_{\max}(X^T X)}$$

$$\mu(X) = \lambda_{\max}(X^T + X)/(2).$$

Pour une application  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , notons

$$D^+ \phi(t) = \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi(t+s) - \phi(t)}{s}.$$

### 4.3.2 Système impulsif à retard multiple

Nous donnons ci-dessous une définition d'un système impulsif contrôlé.

**Définition 4.3.1.** Soit un processus  $\mathcal{P}$  décrit en évolution par  $(t, x(t))$ , où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état. On dit qu'une suite  $(t_k, U(k, x(t_k^-)))_{k \in \mathbb{N}}$  est une loi de contrôle impulsive de  $\mathcal{P}$  si

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$$

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + U(k, x(t_k^-)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Considérons le processus  $\mathcal{P}$  décrit par le système dynamique non linéaire à retard variable suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x(t - r_1(t)), \dots, x(t - r_m(t))) \quad t \geq 0 \quad (4.15)$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système ,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante ,
- le retard  $r_i$  peut être inconnu (constant ou variable dans le temps), mais il est borné par une constante connue, i.e,  $0 \leq r_i(t) \leq \tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $f : \mathbb{R}^+ \times \overbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue telle que :

$$\|f(t, x, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})\| \leq K \|x\| + \sum_{i=1}^m L_i \|\overline{y_i}\| + r, \quad \forall x, \overline{y_i} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (4.16)$$

où  $r$ ,  $K$  et  $L_i > 0$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) sont des constantes positives et  $f(t, 0, \dots, 0) \neq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Dans le but d'étudier le problème de la stabilisation globale uniforme pratique exponentielle du système à retard (4.15), nous considérons la commande impulsive suivante :

$$U(k, x(t_k^-)) = B_k x(t_k^-), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

Nous obtenons alors, un système impulsif contrôlé avec retard décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + f(t, x(t), x(t - r_1(t)), \dots, x(t - r_m(t))), \quad t \neq t_k \\ \Delta x &= U(k, x(t_k^-)) = B_k x(t_k^-), \quad t = t_k, \quad k \in \mathbb{N} \\ x(t) &= \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Où  $\Delta x = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ ,  $\tau = \max_{1 \leq i \leq m} \tau_i$ ,  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et la fonction initiale  $\phi$  est continue en  $t \in [-\tau, 0]$ . Nous supposons toujours que  $x(t)$  est continue à droite en  $t = t_k$ , en fait,  $x(t_k) = x(t_k^+)$ . Par conséquent, les solutions de (4.18) sont des fonctions continues par morceaux avec des discontinuités du premier type seulement en  $t = t_k, k \in \mathbb{N}$ . Par convention, nous notons la classe des fonctions continues par morceaux par  $\mathcal{PC}[J, \Omega] := \{\phi : J \rightarrow \Omega / \phi(t^+) = \phi(t) \text{ pour } t \in J, \phi(t^-) \text{ existe pour } t \in J, \phi(t^-) = \phi(t) \text{ partout sauf des points } t_k \in J\}$ , où  $J \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ , and  $l \in \mathbb{N}$ .

### 4.3.3 Etude de la stabilité pratique des systèmes impulsifs contrôlés à retard

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale uniforme pratique exponentielle du système contrôlé à retard (4.18). Ceci étant en utilisant des inégalités différentielles impulsives à retard. Dans le but d'obtenir les résultats principaux, nous introduisons les définitions et résultats basiques qui nous seront utiles dans la suite.

**Définition 4.3.2.** L'équation (4.18) est dite globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable (ou convergente vers une boule à rayon  $R > 0$ ), s'il existe deux constantes positives  $\beta$  et  $\gamma$  telles que

$$\|x(t; t_0, \varphi(0))\| \leq R + \beta \|\varphi(0)\| \exp(-\gamma(t - t_0)), \quad \forall t \geq t_0,$$

pour tout  $t_0 \geq 0$  et  $\varphi(0) \in \mathbb{R}^n$ .

Dans ce cas, la boule  $B(0, R)$  est dite globalement pratiquement exponentiellement stable.

**Lemme 4.3.3.** Soit  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique définie positive tel que  $P = Q^T Q$ . Pour tout  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , nous avons les propriétés suivantes :

- a)  $x^T (A^T P + P A) x \leq 2\mu(Q A Q^{-1}) x^T P x$ ;
- b)  $x^T P \bar{x} \leq \sqrt{x^T P x} \sqrt{\bar{x}^T P \bar{x}}$ .

Nous présentons, maintenant, quelques résultats concernant la stabilisation globale uniforme pratique exponentielle du système à retard (4.18). Nous fournirons dans la suite un algorithme qui calcule un contrôle impulsif adéquat pour (4.15).

**Théorème 4.3.4.** [28] Soient  $\rho = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{t_k - t_{k-1}\} \leq \infty$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice inversible.

On suppose que

$$\|I + Q B_k Q^{-1}\| \leq \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\log \alpha}{\rho} + \mu(Q A Q^{-1}) + [K + \sum_{i=1}^m \frac{L_i}{\alpha}] \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} < 0 \quad (4.20)$$

alors la solution de (4.18) satisfait

$$\|x(t)\| \leq M e^{\frac{-\lambda t}{2}} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \{\phi(s)\} + R, \quad t \geq 0 \quad (4.21)$$

où

$$R = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)(a - \sum_{i=1}^m b_i)}} \times \frac{r}{\alpha},$$

$$M = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}},$$

$$\lambda = a - \sum_{i=1}^m b_i e^{\lambda \tau_i} \quad (4.22)$$

avec

$$b_i = \frac{L_i}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} \quad \forall 1 \leq i \leq m,$$

et

$$a = -1 - 2 \frac{\log \alpha}{\rho} - 2\mu(QA Q^{-1}) - 2K \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} - \sum_{i=1}^m b_i$$

*Démonstration.* On note  $g(\lambda) = \lambda - a + \sum_{i=1}^m b_i e^{\lambda \tau_i}$ . De l'inégalité (4.20), il est facile de voir que  $a > 0$ ,  $b_i > 0$  ( $1 \leq i \leq m$ ) et  $a - \sum_{i=1}^m b_i > 0$ . Donc  $g(0) = -(a - \sum_{i=1}^m b_i) < 0$ ,  $g(+\infty) > 0$  et

$$g'(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^m b_i \tau_i e^{\lambda \tau_i} > 0.$$

Utilisant le fait que  $g(\lambda)$  est continue monotone, on trouve que l'équation (4.22) admet une solution unique  $\lambda > 0$ . Pour simplifier, on note  $\delta_i = \frac{L_i}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ .

Ecrivant  $P = Q^T Q$ , alors  $P$  est symétrique définie positive .

Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(t) = x^T(t) P x(t).$$

La dérivée de  $V$  le long de la trajectoire  $x(t)$  du système (4.18), est donnée par :

$$\dot{V}(t) = x^T(A^T P + P A)x + 2x^T P f(t, x(t), x(t - r_1(t)), \dots, x(t - r_m(t))).$$

Moyennant le lemme 1 et l'inégalité (4.16), on a :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq 2\mu(QAQ^{-1})x^T Px + 2\sqrt{x^T Px}\sqrt{f^T(t)Pf(t)} \\
&\leq 2\mu(QAQ^{-1})x^T Px + 2\sqrt{x^T Px}\sqrt{\|f\|^2 \cdot \lambda_{\max}(P)} \\
&\leq 2\mu(QAQ^{-1})x^T Px + 2\sqrt{x^T Px}\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\|f\| \\
&\leq 2\mu(QAQ^{-1})x^T Px + 2\sqrt{x^T Px}\sqrt{\lambda_{\max}(P)}(K\|x\| \\
&\quad + \sum_{i=1}^m L_i\|x(t-r_i(t))\| + r) \\
&\leq 2\mu(QAQ^{-1})x^T Px + 2\sqrt{x^T Px}\sqrt{\lambda_{\max}(P)}K\|x\| \\
&\quad + 2\sqrt{x^T Px}\sqrt{\lambda_{\max}(P)}\sum_{i=1}^m L_i\|x(t-r_i(t))\| \\
&\quad + 2\sqrt{x^T Px}\sqrt{\lambda_{\max}(P)}r
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \left(2\mu(QAQ^{-1}) + 2K\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\right)V(t) + \sum_{i=1}^m \delta_i V(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{\max}(P)L_i^2}{\delta_i \lambda_{\min}(P)}V(t-r_i(t)) + V(t) + \lambda_{\max}(P)r^2 \\
&\leq \left(2\mu(QAQ^{-1}) + 2K\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} + \sum_{i=1}^m \delta_i + 1\right)V(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{\max}(P)L_i^2}{\delta_i \lambda_{\min}(P)}V(t-r_i(t)) + \lambda_{\max}(P)r^2
\end{aligned}$$

$$\forall t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De plus

$$\begin{aligned}
V(t_k^+) &= x^T(t_k^+)Px(t_k^+) \\
&= x^T(t_k^-)(I+B_k)^T P(I+B_k)x(t_k^-) \\
&\leq \|Q(I+B_k)Q^{-1}\|^2 x^T(t_k^-)Px(t_k^-) \\
&\leq \alpha^2 V(t_k^-), \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Nous considérons le système de comparaison donné par :

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &= \left(2\mu(QAQ^{-1}) + 2K\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} + \sum_{i=1}^m \delta_i + 1\right)W(t) + \lambda_{\max}(P)r^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{\max}(P)L_i^2}{\delta_i \lambda_{\min}(P)}W(t-r_i(t)), \quad t \neq t_k \\
W(t_k) &= \alpha^2 W(t_k^-), \quad t = t_k, \quad k \in \mathbb{N} \\
W(t) &= \lambda_{\max}(P)\|\phi(t)\|^2, \quad -\tau \leq t \leq 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Soit, alors,  $W(t)$  la solution unique du système impulsif à retard (4.23). Puisque  $x(t) = \phi(t) - \tau \leq t \leq 0$ , alors, on a

$$V(t) = x^T(t)Px(t) \leq \lambda_{\max}(P) \|\phi(t)\|^2 = W(t) \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

Cette inégalité implique que  $V(t) \leq W(t) \quad \forall t \geq 0$ . [37]

De plus, l'expression de la solution du système de comparaison (4.23) est donnée par

$$W(t) = X(t, 0)W(0) + \int_0^t X(t, s) \times \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{\max}(P)L_i^2}{\delta_i \lambda_{\min}(P)} W(t - r_i(t)) + \lambda_{\max}(P)r^2 \right\} ds,$$

$\forall t \geq 0$ , où  $X(t, s)$ ,  $t, s \geq 0$  est la matrice de Cauchy du système linéaire suivant :

$$\dot{W}(t) = \left[ 2\mu(QAQ^{-1}) + 2K \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} + \sum_{i=1}^m \delta_i + 1 \right] W(t), \quad t \neq t_k$$

$$W(t_k^+) = \alpha^2 W(t_k^-), \quad t = t_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Selon la représentation de la matrice de Cauchy et les conditions  $0 < \alpha < 1$  et  $\rho \geq t_k - t_{k-1}$ , nous avons l'estimation vu que :

$$\begin{aligned} X(t, s) &= e^{\left( 2\mu(QAQ^{-1}) + 2K \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} + \sum_{i=1}^m \delta_i + 1 \right)(t-s)} \times \left( \prod_{s < t_k \leq t} \alpha^2 \right) \\ &\leq e^{(-a - 2\frac{\log \alpha}{\rho})(t-s)} (\alpha^2)^{\left( \frac{t-s}{\rho} - 1 \right)} \\ &\leq e^{-a(t-s)} \alpha^{-2}, \quad t \geq s \geq 0. \end{aligned}$$

Soit  $\gamma = \alpha^{-2} \lambda_{\max}(P) \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \{\|\phi(s)\|^2\}$ . Parallèlement,

$$\begin{aligned} W(t) &\leq \alpha^{-2} e^{-at} \lambda_{\max}(P) \|\phi(0)\|^2 \\ &\quad + \int_0^t e^{-a(t-s)} \alpha^{-2} \times \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{\max}(P)L_i^2}{\delta_i \lambda_{\min}(P)} W(s - r_i(s)) + \lambda_{\max}(P)r^2 \right] ds \\ &\leq \alpha^{-2} e^{-at} \lambda_{\max}(P) \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \{\|\phi(s)\|^2\} \\ &\quad + \int_0^t e^{-a(t-s)} \times \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_{\max}(P)L_i^2}{\delta_i \alpha^2 \lambda_{\min}(P)} W(t - r_i(s)) + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2} \right] ds \\ &\leq \gamma e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} \times \left[ \sum_{i=1}^m b_i W(t - r_i(s)) + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2} \right] ds \end{aligned} \quad (4.24)$$

$\forall t \geq 0$ . D'une part,  $W(t) = \lambda_{\max}(P) \|\phi(t)\|^2 \quad -\tau \leq t \leq 0$ .

Dès que  $0 < \alpha < 1$ , il se trouve que

$$W(t) \leq \frac{\lambda_{\max}(P) \|\phi(t)\|^2}{\alpha^2} \leq \gamma < \gamma e^{-\lambda t} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (4.25)$$

Dans la suite, nous prouvons que l'inégalité précédente est vérifiée pour  $t \geq 0$ . Autrement dit, nous prouvons :

$$W(t) < \gamma e^{-\lambda t} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.26)$$

Si l'inégalité précédente n'est pas vérifiée, alors d'après l'estimation (4.25) et le fait que  $W \in \mathcal{PC}[-\tau, \infty), \mathbb{R}^+]$ , il existe  $t^* > 0$  vérifiant

$$W(t^*) \geq \gamma e^{-\lambda t^*} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \quad (4.27)$$

et

$$W(t) < \gamma e^{-\lambda t} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \quad \forall t < t^*. \quad (4.28)$$

D'après (4.22), (4.24), et (4.28), on a

$$\begin{aligned} W(t^*) &\leq \gamma e^{-at^*} + \int_0^{t^*} e^{-a(t^*-s)} \times \left[ \sum_{i=1}^m b_i W(s - r_i(s)) + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2} \right] ds \\ &\leq e^{-at^*} \left[ \gamma + \int_0^{t^*} e^{as} \times \left( \sum_{i=1}^m b_i W(s - r_i(s)) + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2} \right) ds \right] \\ &< e^{-at^*} \left[ \gamma + \int_0^{t^*} e^{as} \times \left[ \sum_{i=1}^m b_i \left( \gamma e^{-\lambda(s-r_i(s))} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \right) + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2} \right] ds \right] \\ &< e^{-at^*} \left[ \gamma + \left( \sum_{i=1}^m b_i \gamma e^{\lambda \tau_i} \right) \times \int_0^{t^*} e^{(a-\lambda)s} ds \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2 \sum_{i=1}^m b_i}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \right) \times \int_0^{t^*} e^{as} ds + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \right] \\ &= e^{-at^*} \left[ \gamma + \left( \sum_{i=1}^m b_i \gamma e^{\lambda \tau_i} \right) \left( \frac{e^{(a-\lambda)t^*} - 1}{a - \lambda} \right) + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2 a}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \left( \frac{e^{at^*} - 1}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \right] \\ &\leq \gamma e^{-\lambda t^*} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)} \end{aligned}$$

Ceci contredit (4.27) et on a par suite, pour tout  $t \geq -\tau$

$$W(t) < \gamma e^{-\lambda t} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)}.$$

Finalement, comme  $W(t) \leq V(t)$ ,  $\forall t \geq -\tau$ , on obtient

$$V(t) \leq \gamma e^{-\lambda t} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2(a - \sum_{i=1}^m b_i)}, \forall t \geq -\tau.$$

D'où,

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\gamma}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda_{\max}(P)r^2}{\alpha^2 \lambda_{\min}(P)(a - \sum_{i=1}^m b_i)}, \forall t \geq -\tau.$$

ce qui implique que la trajectoire de (4.18) vérifie

$$\|x(t)\| \leq \left( \frac{\gamma}{\lambda_{\min}(P)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}t} + \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)(a - \sum_{i=1}^m b_i)}} \times \frac{r}{\alpha}, \forall t \geq -\tau.$$

□



Comme pour le Théorème précédent, nous pouvons obtenir le théorème suivant dans la cas où  $\alpha \geq 1$ .

**Théorème 4.3.5.** *Soit  $\rho = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{t_k - t_{k-1}\} \leq \infty$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice inversible. On suppose que*

$$\|I + QB_kQ^{-1}\| \leq \alpha, \quad \alpha \geq 1 \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\log \alpha}{\rho} + \mu(QAQ^{-1}) + [K + \alpha \sum_{i=1}^m L_i] \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} < 0. \quad (4.30)$$

alors la solution du système (4.18) vérifie

$$\|x(t)\| \leq M e^{\frac{-\lambda t}{2}} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \{\phi(s)\} + R, \quad t \geq 0 \quad (4.31)$$

avec

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)(a - \sum_{i=1}^m b_i)}} \times r\alpha \\ M &= \alpha \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} \\ \lambda &= a - \sum_{i=1}^m b_i e^{\lambda \tau_i} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$b_i = L_i \alpha \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} \quad \forall 1 \leq i \leq m,$$

et

$$a = -1 - 2 \frac{\log \alpha}{\rho} - 2\mu(QAQ^{-1}) - 2K \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} - \sum_{i=1}^m b_i$$

#### 4.3.4 Discussion

Dans le but de discuter la réalisation des conditions (4.19) et (4.20) du théorème, nous essayons de mieux les comprendre afin de leurs trouver un équivalent géométrique. En effet,

- Si les matrices  $B_k$  sont fixées, alors on peut choisir le scalaire  $\alpha \in ]\max_{k \in \mathbb{N}} \rho(I + B_k), +\infty[$ .

En outre,

- Si  $\{B_k\}$  est finie et  $\max_{k \in \mathbb{N}} \rho(I + B_k) < 1$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une matrice inversible

$Q_\varepsilon$  telle que  $\|I + Q_\varepsilon B_k Q_\varepsilon^{-1}\| < \max_{k \in \mathbb{N}} \rho(I + B_k) + \varepsilon < 1$ , on peut choisir  $\alpha < 1$ .

- Si on a un choix pour les  $\{B_k\}$ , nous les choisissons telles que  $B_k = -\frac{1}{2}I$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , c'est à dire on a  $\alpha \in ]0, +\infty[$ ,  $\forall Q$ .

- Si, de plus, on a  $A$  est une matrice de Hurwitz, alors, on peut trouver une matrice inversible  $Q$  telle que  $\mu(QAQ^{-1}) < 0$ . Bien évidemment, ceci est équivalent à résoudre l'équation de Lyapunov du type  $PA + A^T P = -S$  où  $S$  est une matrice définie positive,  $Q = RP^{\frac{1}{2}}$  et  $R$  sont des matrices orthogonaux.

Notons que le scalaire  $\alpha$  dépend de la matrice  $Q$ . Il est difficile de contrôler cette dépendance dans l'inégalité (4.20), puisqu'on a  $\sum_{i=1}^m \frac{L_i}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} > |\mu(QAQ^{-1})|$ . Par conséquent, la condition (4.20) ne sera pas vérifiée.

De plus, l'étude variationnelle de la fonction  $f(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\log \alpha}{\rho} + \mu(QAQ^{-1}) + [K + \sum_{i=1}^m \frac{L_i}{\alpha}] \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}}$ , nous déduisons que  $f(\frac{\rho}{\alpha} \sum_{i=1}^m L_i \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}}) < 0$ , la condition (4.20) sera vérifiée.

Dans la suite, nous présentons l'algorithme suivant qui a pour but de stabiliser globalement uniformément et pratiquement et exponentiellement le système non linéaire à retard multiple.

**Etape1** Choisir la matrice inversible  $Q$ .

**Etape2** Calculer les paramètres  $K, L_i, \tau_i, \mu(QAQ^{-1})$ .

**Etape3** Choisir l'ensemble des matrices  $\{B_k\}$  de (4.17) telles que  $\|I + QB_kQ^{-1}\| \leq \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$ .

**Etape4** Déterminer l'ensemble des instants du contrôle impulsif  $\{t_k, k \in \mathbb{N}^*\}$  comme suit :

1. Si  $\frac{1}{2} + \mu(QAQ^{-1}) + [K + \sum_{i=1}^m \frac{L_i}{\alpha}] \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} \leq 0$ , alors  $\rho > 0$  est arbitrairement choisi.

2. Si  $\frac{1}{2} + \mu(QAQ^{-1}) + [K + \sum_{i=1}^m \frac{L_i}{\alpha}] \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} > 0$ , alors, nous choisissons  $\rho > 0$

$$\text{tel que } \rho < (-\log \alpha) / (\frac{1}{2} + \mu(QAQ^{-1}) + [K + \sum_{i=1}^m \frac{L_i}{\alpha}] \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}}).$$

De plus, si nous voudrions avoir une vitesse de convergence exponentielle de (4.18) plus grande ou égale à un scalaire  $\lambda_0 > 0$ , la procédure ci-dessus peut être appliquée sauf l'étape 4 qui sera remplacée par :

**Etape 4'** Déterminer un ensemble d'instants de contrôle impulsif  $\{t_k, k \in \mathbb{N}\}$  comme suit :

1. Choisir  $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ , tel que

$$\eta := \lambda + \frac{1}{2} + \mu(QAQ^{-1}) + K \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} + \sum_{i=1}^m \frac{L_i}{2\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} [1 + e^{2\lambda\tau_i}] > 0.$$

2. Prendre  $\rho = \frac{-(\log \alpha)}{\eta}$ .

#### 4.3.5 Stabilisation pratique exponentielle des systèmes impulsifs contrôlés

Dans cette section, nous donnons des résultats analogues à ceux obtenus dans la section 2. Autrement dit, nous prenons  $r_i(t) = 0, \forall i = 1, \dots, m$ .

Dans ce cas, nous nous intéressons à l'étude des systèmes non linéaires, qui se présente comme étant l'interconnection d'une partie linéaire et une partie non linéaire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \neq t_k \\ \Delta x &= U(k, x(t_k^-)) = B_k x(t_k^-), \quad t = t_k, \quad k \in \mathbb{N} \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 4.3.6.** Soit  $\rho = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{t_k - t_{k-1}\} \leq \infty$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice inversible. On suppose que :

$$\|I + QB_k Q^{-1}\| \leq \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\log \alpha}{\rho} + \mu(QAQ^{-1}) + K \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} < 0 \quad (4.35)$$

alors, la solution de (4.33) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement stable et vérifie :

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}} \|x_0\| e^{\frac{-at}{2}} + R, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.36)$$

où

$$R = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{a\lambda_{\min}(Q^T Q)}} \times \frac{r}{\alpha},$$

et la vitesse de convergence est  $a = -1 - 2\frac{\log \alpha}{\rho} - 2\mu(QAQ^{-1}) - 2K \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q^T Q)}{\lambda_{\min}(Q^T Q)}}$

*Remarque 4.3.7.* A l'absence des retards, le système précédent se présente comme étant un système linéaire perturbé par une non linéarité  $f$  vérifiant la condition suivante

$$\|f(t, x)\| \leq K \|x\| + r, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (4.37)$$

Le problème de la stabilité pratique de ce système a été déjà étudié dans [24] lequel il suppose que le terme de perturbation vérifie l'inégalité suivante

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma(t) \|x\| + \delta(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \quad (4.38)$$

où  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue non négative et intégrable sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  avec  $\bar{\gamma} := \int_0^{+\infty} \gamma(t) dt$  et  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue non négative bornée. Cette dernière inégalité ressemble en fait à notre hypothèse, sauf que, nous dans notre résultat, on n'a pas à calculer la valeur de l'intégrale  $\bar{\gamma}$  comme dans [24]. Par suite, on peut affirmer que nos hypothèses sont plus faciles à vérifier numériquement. De plus, dans notre travail, on a une certaine liberté au niveau du choix de la matrice  $P = Q^T Q$  (utilisée pour la construction de la fonction de Lyapunov) ainsi que dans le choix de la vitesse de convergence de notre système (comme ça était expliqué dans l'étape 4' de l'algorithme précédent), ce qui n'est pas le cas dans [24]. En effet, Mohsen dans [24], suppose que la matrice  $P$  existe et vérifie certaines conditions faisant intervenir des constantes positives, qui interviennent déjà dans l'expression de la vitesse de convergence.

### 4.3.6 Exemples numériques

*Exemple 4.3.8.* Considérons le système non linéaire de dimension 2 à retard (4.15) avec les paramètres donnés par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(t, x(t), x(t - r_1(t))) = \begin{pmatrix} x_1 + \sin(x_2(t - r_1(t))) + \frac{1}{2} \exp(-t) \\ x_2 + \frac{1}{2} \sin(x_1(t - r_1(t))) + \frac{1}{2} \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, nous avons à stabiliser uniformément pratiquement exponentiellement le système non linéaire (4.15) en appliquant les étapes 1,2,3,4.

Dans le but de simplifier la procédure, nous choisissons  $Q = I$

D'abord, nous calculons les paramètres :

$$K = \sqrt{5}, L_1 = \sqrt{3}, \tau = 0.01, r = \sqrt{\frac{5}{2}}, \text{ et } \mu(A) = 1.$$

Ensuite, nous choisissons la commande du contrôle impulsif (4.17) avec  $B_k = -0.5.I$ , et par suite, nous avons  $\|I + B_k\| \leq \alpha$  avec  $\alpha = 0.5 < 1$ .

Finalement, nous prenons  $\rho < \sup_{k \in \mathbb{N}} \{t_k - t_{k-1}\} = 0.0963$ .

Alors, moyennant le Théorème 4.3.4, nous pouvons stabiliser globalement uniformément pratiquement et exponentiellement le système (4.15) avec  $R = 7.2131$ .

*Exemple 4.3.9.* Considérons maintenant un exemple réel décrit par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \sin(x(t - \tau_1)) - |x(t - \tau_2)| - \frac{1}{1 + |x(t - \tau_3)|}, \quad (4.39)$$

avec  $\tau_1 = 0.05$ ,  $\tau_2 = 0.01$ ,  $\tau_3 = 0.02$ . Il est clair que  $A = -1$  et

$$\begin{aligned} |f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), x(t - \tau_3))| &= |\sin(x(t - \tau_1)) - |x(t - \tau_2)| - \frac{1}{1 + |x(t - \tau_3)|}| \\ &\leq |x(t - \tau_1)| + |x(t - \tau_2)| + 1. \end{aligned} \quad (4.40)$$

D'où, on en déduit que  $K = 0$ ,  $L_1 = L_1 = 1$ ,  $L_3 = 0$ ,  $r = 1$ . Ensuite, en choisissant  $Q = 1$ , on calcule  $\mu(QAQ^{-1}) = -1$ . Si on choisit aussi les matrices du contrôle impulsif  $B_k = -0.5$ , d'où  $|1 + QB_kQ^{-1}| = 0.5 = \alpha < 1$ . Ainsi, pour stabiliser le système (4.39), on tolère des impulsions qui sont assez proches de sorte que  $\rho < \sup_{k \in \mathbb{N}} \{t_k - t_{k-1}\} = 0.085$ .

Finalement, le rayon de convergence calculé est  $R = 7.07$ .

*Remarque 4.3.10.* Selon l'expression du rayon de convergence  $R$ , nous pouvons bien conclure que plus le paramètre  $\alpha$  est plus grand, plus que le rayon  $R$  est petit et inversement. De plus, si nous choisissons la loi de commande  $B_k = s.I$  où  $s$  est un réel négatif, tel que  $-1 < s < -\frac{1}{2}$ , alors  $\alpha$  devient plus petit et par conséquent, le rayon  $R$  sera suffisamment grand. D'autre part, si  $P$  est une matrice telle que le rapport  $\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}$  est suffisamment grand, alors il en serait de même pour  $R$ . De plus, si  $a$  est assez grand, alors il serait bien pour la vitesse de convergence  $\lambda$ , tandis que le rayon  $R$  devient plus petit. Enfin, l'effet des différents paramètres  $B_k$ ,  $\alpha$  et  $Q$  sur le rayon de convergence de  $R$  est très difficile à comprendre du moment que  $\alpha$  dépend à la fois de  $B_k$  et de  $Q$  et si l'on gagne d'un côté, on perd des autres.



# Sur l'observation des systèmes impulsifs

## 5.1 Introduction

Les systèmes hybrides, en particulier les systèmes impulsifs, sont l'objet d'une certaine attention depuis quelques années de la part de la communauté scientifique [75],[58],[86], etc... Au cours des dernières décennies, une part importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème de l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ceci est motivé par le fait que l'estimation de l'état est une étape importante voir indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour le diagnostic ou la supervision des systèmes industriels. Récemment, d'autres applications telles que la synchronisation et le décryptage dans les systèmes de communication, sont devenues l'un des secteurs de recherche les plus dynamiques. Dans ce contexte, nous avons mené des travaux de recherche sur l'estimation de l'état des systèmes impulsifs. Ce problème est très peu abordé pour cette classe de systèmes. En effet, seulement E.A.Medina a considéré dans [63] et [61] un observateur dans le cas de systèmes linéaires impulsifs autonomes, sous la condition de l'observabilité forte, ce que nous ne font pas dans [29].

## 5.2 Observabilité - Observateurs

Comme pour les systèmes différentiels ordinaires, l'observabilité et la reconstruction d'état sont deux notions centrales dans la théorie du contrôle.

### 5.2.1 Critères d'observabilité

L'observabilité d'un processus est un concept très important. En effet, pour reconstruire l'état d'un système, il faut savoir, à priori, si les variables d'état sont observables ou non. En particulier, de point de vue automatique, le problème de l'observabilité consiste à décider si les variables d'état intervenant dans un modèle peuvent être déterminées en fonction des entrées et des sorties supposées parfaitement connues. Nous allons maintenant expliciter des conditions d'observabilité dans le cas général des systèmes différentiels ordinaires, qui vont nous servir lors de la construction d'observateurs dans le cas impulsif par la suite. Soit le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur entrée,  $y \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur sortie,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Définition 5.2.1.** Le système (5.1) est dit observable sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , si toute condition initiale  $x(t_0) = x_0$  est uniquement déterminée par l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$  correspondantes au système pour  $t \in [t_0, t_f]$

Pour mieux définir cette notion d'observabilité, il convient d'abord de définir la notion d'indiscernabilité.

**Définition 5.2.2 (Indiscernabilité).** Deux états initiaux  $x_0$  et  $\bar{x}_0$  distincts sont dit indiscernables si, pour toute fonction d'entrée  $u(t)$  et pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$ , les sorties  $h(x(t, x_0, t_0))$  et  $h(x(t, \bar{x}_0, t_0))$  qui en résultent sont égales.

C'est à dire qu'à partir de deux conditions initiales différentes, la sortie du système est la même dans les deux cas et ceci pour une même commande appliquée. Ainsi

**Définition 5.2.3 (Observabilité).** Le système (5.1) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts indiscernables.

Il existe une caractérisation algébrique très simple de l'observabilité dans le cas des systèmes linéaires autonomes

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax + Bu, \\ y(t) &= Cx. \end{cases} \quad (5.2)$$

Où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimensions respectives  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$ . Dans la littérature, il n'existe pas de critère aussi simple et aussi fort tel que la condition du rang ou encore le critère d'observabilité de Kalman, énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 5.2.4.** *Le système (5.2) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

*est de rang  $n$ . On dit alors que la paire  $(A, C)$  est observable.*

Les systèmes linéaires temps variants

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x + B(t)u, \\ y(t) &= C(t)x \end{cases} \quad (5.3)$$

avec les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $C(t)$  bornées, bénéficient aussi d'un critère assez pratique à vérifier.

**Théorème 5.2.5.** *Le système (5.3) est dit complètement uniformément observable s'il existe  $\alpha > 0$  et  $t_0 > 0$  tels que pour tout  $t \geq 0$ , on ait*

$$\Gamma(t, t + t_0) = \int_t^{t+t_0} X^T(s, t) C^T(s) C(s) X(s, t) ds \geq \alpha I$$

*où  $X(t, t_0)$  est la résolvante vérifiant (5.3).*

La matrice  $\Gamma(t, t + t_0)$  est appelée le Grammien d'observabilité du système (5.3). La complète observabilité signifie que le système est observable à chaque instant, c'est à dire  $\forall x_0, \bar{x}_0, x_0 \neq \bar{x}_0, \exists t > t_0 \geq 0$  tel que  $y(x(t, x_0, t_0)) \neq y(x(t, \bar{x}_0, t_0))$ . De plus, la complète uniforme observabilité garantit que dans un intervalle de temps donné, la sortie  $y(x(t, x_0, t_0))$  fournit toujours assez d'informations pour reconstruire l'état du système.

Lorsque le modèle considéré est non linéaire, la tâche devient plus difficile. En effet, d'une manière générale, l'observabilité de ce type de systèmes ne suffit pas pour synthétiser un observateur dans la suite. Pour pallier à cette difficulté, nous ferons appel à des structures particulières comme les systèmes non linéaires affines en la commande, mono-sortie donnés par l'équation suivante

$$\Gamma \begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) g_i(t) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{cases}$$

avec  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}$  où  $\Omega$  est un domaine physique ouvert, relativement compact dans lequel évolue l'état du système et on s'intéresse au problème d'observabilité.  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des valeurs admissibles de l'entrée. Autrement,  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des entrées  $u(t)$  mesurables et bornées. Dans ce paragraphe, nous cherchons à mettre en évidence une forme normale canonique d'observabilité au moyen de changements de bases. Pour ce faire, considérons d'abord la fonction

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z,$$

où  $L_f^k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$  désigne les dérivées de Lie successives par rapport au champ de vecteur  $f$ :

$$L_f(h) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x),$$

qui transforme le système  $\Gamma$  en

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{z}(t) &= Az + \bar{\varphi}(z) + u\tilde{\varphi}(z) \\ y &= Cz \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ \dots \ 0),$$

$$\bar{\varphi}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\varphi}_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^n h(\phi^{-1}(z)) \end{pmatrix}, \tilde{\varphi}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1(z) \\ \tilde{\varphi}_2(z) \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_g h(\phi^{-1}(z)) \\ L_g L_f h(\phi^{-1}(z)) \\ \vdots \\ L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z)) \end{pmatrix}.$$



Nous allons, dans la suite présenter un résultat très pratique, dû à Gauthier et Bornard ([34]), qui consiste à donner une condition nécessaire et suffisante pour l'observabilité locale uniforme du système  $\Gamma$ .

**Théorème 5.2.6.** ([34])(Gauthier et Bornard 1981) *Supposons que la fonction  $\phi$  choisie soit un difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $\phi(\Omega)$ , que les fonctions  $\phi$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\tilde{\varphi}$  puissent être étendues de  $\Omega$  sur  $\mathbb{R}^n$  par des fonctions globalement lipschitziennes (respectivement à n'importe quelle norme)(ou des fonctions de classe  $C^\infty$ ) et que le système  $(\Sigma)$  soit complet pour toutes les fonctions entrées admissibles (mesurables bornées) à valeurs dans  $\mathcal{U}$ , alors le système  $(\Gamma)$  est uniformément localement observable si et seulement si la fonction  $\tilde{\varphi}$  est de la forme :*

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(z) &= \tilde{\varphi}_1(z_1) \\ \tilde{\varphi}_2(z) &= \tilde{\varphi}_2(z_1, z_2) \\ \vdots & \\ \tilde{\varphi}_n(z) &= \tilde{\varphi}_n(z_1, \dots, z_n) \end{cases}$$

Par analogie, la notion d'observabilité se généralise au cas des systèmes impulsifs, au sens de la définition 5.2.1. Récemment, pour cette classe de systèmes, peu de critères sont fournis dans le cas général, sauf quelques résultats pour le cas linéaire temps-variant et temps-invariant. Pour une étude détaillée de ce concept dans le cas impulsif, le lecteur intéressé est invité à se reporter aux ouvrages [62],[61],[80],[39],[88]. Par exemple le résultat dû à Medina.E.A et Lawrence.D.A ([62],[61]), consiste à caractériser géométriquement des ensembles atteignables et non observables en termes de sous-espaces invariants et à fournir des algorithmes pour leur construction. Avec une même approche géométrique en 2005, G.Xie et L.Wang dans ([80]) ont fourni des critères de contrôlabilité et d'observabilité. En 2002, Z.H.Guan, T.H.Qian et X.Yu, dans [39] ont établi une condition nécessaire et suffisante d'observabilité du système linéaire non autonome décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \Delta x(t_k) &= D_k x(t_k^-), \quad k \in \mathbb{N} \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \end{aligned} \quad (5.4)$$

où  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D(t)$  sont des matrices continues de dimensions appropriées et  $\forall k \geq 1$ ,  $D_k = d_k I$ ,  $d_k \in \mathbb{R}$ . Le résultat est énoncé dans le théorème qui suit

**Théorème 5.2.7.** [39] *Supposons que  $\forall k \geq 1$ ,  $1 + d_k \geq 0$ . Alors le système (5.4) est observable sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , ( $t_f \in (t_k, t_{k+1}]$ ) si et seulement si la matrice*

$$\begin{aligned} M(t_0, t_f) &:= M(t_0, t_0, t_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^i (I + D_j) M(t_0, t_i, t_{i+1}) \\ &\quad + \prod_{j=1}^k (I + D_j) M(t_0, t_k, t_f) \end{aligned}$$

*est inversible. Où*

$$M(t_0, t_i, t_{i+1}) := \int_{t_i}^{t_{i+1}} X^T(s, t_0) C^T(s) C(s) X(s, t_0) ds, \\ i = 0, \dots, k-1$$

$$M(t_0, t_k, t_f) := \int_{t_k}^{t_f} X^T(s, t_0) C^T(s) C(s) X(s, t_0) ds$$

De ce théorème, découle un critère du type de Kalman dans le cas de système autonome est donné dans le corollaire qui suit

**Corollaire 5.2.8.** [39] *Sous les mêmes conditions du théorème 5.2.7 avec  $A(t) = A$  et  $C(t) = C$  des matrices constantes, le système (5.4) est observable si et seulement si la condition du rang est vérifiée.*

### 5.2.2 Définition et rôle d'un observateur

Dans le domaine de la commande, du diagnostic et de la surveillance, la connaissance entière ou partielle de l'état à chaque instant est nécessaire à la réalisation de tels objectifs. Sur le plan pratique, cette exigence s'avère difficile à satisfaire vu que la mesure en ligne de ces variables est le plus souvent très coûteuse et parfois impossible. Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande demande l'utilisation des variables d'état non mesurées, il est indispensable de construire un observateur. Ce dernier est un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  d'un système. L'observateur ou estimateur d'état a pour rôle de donner une estimation  $\hat{x}(t)$  du vecteur d'état  $x(t)$ . Le reconstruteur d'état doit avoir certaines propriétés. Plus particulièrement, l'erreur d'estimation, notée  $e = x - \hat{x}$ , doit tendre vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini, autrement,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$ . Généralement on souhaite que, si l'observateur est initialisé aux mêmes conditions initiales que le système à observer ( $\hat{x}(0) = x(0)$ ) alors pour tout  $t \geq 0$ ,  $\hat{x}(t) = x(t)$ . Finalement, la synthèse d'un observateur reste donc une question difficile bien que très importante en pratique.

## 5.3 Conception d'observateurs pour les systèmes impulsifs

### 5.3.1 Différents types d'observateurs continus : état de l'art

Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, pour lesquels les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bons résultats. Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, et l'observateur de Luenberger a été utilisé pour les systèmes linéaires déterministes. Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observation d'état est un peu plus délicate et il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches envisageables sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Dans le premier cas, l'extension est basée sur une linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Pour le cas d'algorithmes non linéaires spécifiques, les nombreuses recherches menées sur ce sujet (voir [76], [64]) ont donné naissance à de nombreux algorithmes d'observation.

1. Méthodes de transformations non linéaires : Cette technique fait appel à un changement de coordonnées afin de transformer un système non linéaire en un système linéaire. Une fois qu'une telle transformation est faite, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système original en utilisant le changement de coordonnées inverse.
2. Observateurs étendus : Dans ce cas, le calcul du gain de l'observateur se fait à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu.

3. Observateurs à grand gain : Ce type d'observateurs est utilisé en général pour les systèmes lipschitziens. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système.
4. Observateurs de Luenberger généralisés (OLG) : C'est un nouveau type d'observateurs qui a été proposé récemment pour la classe des systèmes autonomes. Cette nouvelle conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième gain à l'intérieur de la partie non linéaire du système.
5. Observateurs basés sur la théorie de la contraction : Ce type d'observateurs, comme son nom l'indique, est basé sur la théorie de la contraction utilisée comme outil d'analyse de la convergence. Cette technique mène à de nouvelles conditions de synthèse différentes de celles fournies par les techniques précédentes.

### 5.3.2 Observateur du type Luenberger pour les systèmes impulsifs

L'objectif de cette section est d'étendre des résultats de construction d'observateurs pour les systèmes usuels, à une classe plus générale, qui n'est autre que celle des systèmes impulsifs. Ces observateurs sont basés sur les sorties disponibles en temps continu. Considérons dans cette section le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ x(t_k) &= D_k x(t_k^-), \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \neq t_k, \end{aligned} \tag{5.5}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est le contrôle,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie et les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $D_k$  et  $C$  sont de dimensions appropriées telles que  $\|D_k\| \leq d, \forall k \geq 1$ . Nous supposons que la suite des impulsions  $t_0, t_1, \dots$  est croissante et qu'il existe une constante  $\tau > 0$  telle que  $t_{k+1} - t_k > \tau$ . On suppose de plus que les paires  $(A, B)$  and  $(A^T, C^T)$  vérifient la condition de Kalman déjà énoncée dans le théorème 5.2.4. Dans cette section, on s'intéresse à la construction d'un observateur exponentiel du type Luenberger, qu'on note  $\hat{x}$ , c'est à dire un système dynamique piloté par les observations  $y$  et d'état  $\hat{x}$  tels que  $x(t) - \hat{x}(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini. L'idée consiste à copier la dynamique du système observé et d'y ajouter un terme prenant en compte l'écart entre la prédiction et la réalité. Nous établissons tout d'abord un lemme clé qui nous sera utile dans la construction de l'observateur.

**Lemme 5.3.1.** *Supposons que la paire  $(A, C)$  est observable. Alors, pour tout  $\lambda > 0$ , il existe une matrice de gain  $L$  telle que l'exponentiel de la matrice  $\tilde{A} = A - LC$  vérifie l'inégalité*

$$\|e^{t\tilde{A}}\| \leq \mu e^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \tag{5.6}$$

avec  $\mu e^{-\lambda\tau/2}d \leq 1$ .

*Démonstration.* Puisque la paire  $(A, C)$  est observable, alors on peut trouver une matrice de gain  $L$  telle que la matrice  $A - LC$  soit de Hurwitz et par suite sa matrice exponentielle satisfait l'inégalité (5.6). Dans cette inégalité, les termes  $\mu$  et  $\lambda$  dépendent des matrices  $A$  et  $L$ . Précisément, le réel  $\lambda$  dépend des valeurs propres de la matrice  $A - LC$  et  $\mu$  varie et peut tendre vers l'infini lorsque  $\lambda$  tend aussi vers l'infini. Mais, nous constatons effectivement que le réel  $\mu$  dépend polynomialement de  $\lambda$ .

Pour se faire, nous considérons la forme de Brunowski pour la paire  $(A, C)$ . Pour des raisons de simplicité et sans perte de généralités, nous nous restreignons au cas où  $C$  est

une matrice colonne, c'est à dire ( $m = 1$ ). Vu que la paire  $(A, C)$  est observable, on sait qu'il existe une matrice de passage  $P$  telle qu'on peut écrire  $\bar{A} = P^{-1}AP$  et  $\bar{B} = P^{-1}B$ , et on a

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Choisissons par la suite le spectre  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$  constitué de  $n$  réels négatifs deux à deux distincts et notons  $b_0, \dots, b_{n-1}$  les coefficients du polynôme caractéristique  $Q(x) = (-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$  de  $\bar{A}$ . Ainsi, nous pouvons réécrire le polynôme  $Q(x)$  comme suit

$$Q(x) = (-1)^n(x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0)$$

Choisissons alors comme matrice de gain la matrice  $L = \bar{L}P^{-1}$  avec  $\bar{L} = (-a_0 + b_0, \dots, -a_{n-1} + b_{n-1})$ . Il s'ensuit alors que le polynôme caractéristique de  $\bar{A} - \bar{L}\bar{C}$  est identiquement égal à  $Q(x)$  et le vecteur propre de la matrice  $\bar{A} - \bar{L}\bar{C}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  est donné par

$$v_i = (1, \lambda_i, \dots, \lambda_i^{n-1})^T.$$

Notons maintenant  $T$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres  $v_1, \dots, v_n$ . On obtient alors

$$T^{-1}e^{t(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})}T = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$$

il en résulte que  $\|e^{t(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})}\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| e^{\lambda_n t}$ . De cette dernière inégalité, on peut déduire que

$$\|e^{t(A-LC)}\| \leq \underbrace{\|P\| \|P^{-1}\| \|T\| \|T^{-1}\|}_{\mu} e^{\lambda_n t}. \quad (5.7)$$

Il est clair que les termes  $\|P\| \|P^{-1}\|$  ne dépendent pas du choix des valeurs propres  $\lambda_i$ . De plus, on remarque aussi que le spectre  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  peut être choisi de sorte que le terme  $\|T\| \|T^{-1}\|$  soit majoré par une expression polynomiale en  $\lambda_n$ .

On remarque que les termes de la matrice  $T$  sont des polynômes en les  $\lambda_i$ . De plus, le déterminant  $V$  de la matrice  $T$  est égal à

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \triangleq \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

, et aussi les termes de la matrice  $T^{-1}$  sont des fractions rationnelles dont les dénominateurs sont égaux au polynôme  $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Choisissons maintenant les réels  $\lambda_i$  tels que  $|\lambda_i - \lambda_j| \geq 1$  et  $|\lambda_n - \lambda_1| < \alpha$  (où  $\alpha$  est une constante supérieure à  $n-1$ ). Sous ces conditions, nous pouvons affirmer que les termes des matrices  $T$  et  $T^{-1}$  sont majorés par des polynômes en  $|\lambda_n|$  et par suite ça serait de même pour les normes  $\|T\|$  et  $\|T^{-1}\|$  (évidemment, les coefficients de ces polynômes dépendent seulement de la dimension  $n$ ). Ainsi, on peut réécrire l'inégalité (5.7) comme suit

$$\|e^{t(A-LC)}\| \leq R(-\lambda_n)e^{\lambda_n t}$$

avec  $R$  est un polynôme. Et puisque  $\lim_{|\lambda_n| \rightarrow +\infty} R(-\lambda_n)e^{\lambda_n \tau/2} = 0$ , alors l'inégalité du lemme sera vérifiée si on prend la valeur  $|\lambda_n|$  assez grande.  $\square$

*Remarque 5.3.2.* Il faut remarquer que c'est le choix des valeurs propres  $\lambda_i$  qui conditionne les performances de stabilité et de convergence de l'observateur, que nous construisons dans le paragraphe suivant.

Dans ce sens et analogiquement à l'observateur continu, nous considérons un observateur de Luenberger de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC(x(t) - \hat{x}(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \hat{x}(t_k) &= D_k \hat{x}(t_k^-),\end{aligned}\tag{5.8}$$

Ainsi l'équation de l'erreur est :

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= (A - LC)e(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta e(t_k) &= D_k e(t_k^-),\end{aligned}\tag{5.9}$$

**Théorème 5.3.3.** *Supposons que la paire  $(A, C)$  est observable et qu'il existe des constantes  $d > 0, \tau > 0$  telles que  $\|D_k\| \leq d, t_{k-1} - t_k > \tau, \forall k \geq 1$ . Alors, on peut choisir la matrice de gain  $L$  de sorte que le système (5.9) soit globalement exponentiellement stable. De plus, la vitesse de convergence peut être arbitrairement grande selon le choix de la matrice  $L$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, on sait qu'il existe un réel  $\lambda > 0$  et une matrice de gain  $L$  tels que

$$\|e^{t\tilde{A}}\| \leq e^{-\lambda t} \text{ et } \mu e^{-\lambda\tau/2} d \leq 1$$

avec  $\tilde{A} = A - LC$ . Nous allons dans la suite montrer que l'origine du système linéaire impulsif (5.9) est exponentiellement stable. Notons  $\delta_k = t_{k+1} - t_k$  la durée entre deux instants d'impulsions. Pour  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , la matrice résolvante du système (5.9) est donnée par

$$\phi(t, t_0) = e^{(t-t_k)\tilde{A}} D_k e^{\delta_{k-1}\tilde{A}} D_{k-1} \dots D_1 e^{\delta_0\tilde{A}}$$

par suite

$$\begin{aligned}\|\phi(t, t_0)\| &\leq d^k \|e^{(t-t_k)\tilde{A}}\| \|e^{\delta_{k-1}\tilde{A}}\| \dots \|e^{\delta_0\tilde{A}}\| \\ &\leq d^k \mu^k e^{-\lambda(t-t_k)} e^{-\lambda\delta_{k-1}} \dots e^{-\lambda\delta_0} \\ &= (d\mu e^{-\lambda(t-t_0)/(2k)})^k e^{-\lambda(t-t_0)/2} \\ &\leq (d\mu e^{-\lambda\tau/2})^k e^{-\lambda(t-t_0)/2} && \text{car } t - t_0 \geq k\tau \\ &\leq e^{-\lambda(t-t_0)/2} && \text{car } d\mu e^{-\lambda\tau/2} \leq 1\end{aligned}$$

cette inégalité prouve que la dynamique de l'erreur est exponentiellement convergente. De plus, la vitesse de convergence peut être choisie aussi grande que l'on veut selon le choix du réel  $\lambda$ .  $\square$

### 5.3.2.1 Stabilisation et Principe de séparation

L'origine du terme "Principe de Séparation" vient de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires autonomes commandés par retour d'états estimés. Soit un processus modélisé selon le formalisme d'état par des équations différentielles ordinaires. Soit une commande par retour d'état qui stabilise le procédé considéré. Pour des raisons techniques, de coûts,..., la connaissance de tout l'état n'est pas disponible. On ne peut alors pas calculer cette loi de commande stabilisante. Une issue réside dans la construction d'un estimateur des variables d'état. La question fondamentale qui se pose est la suivante : est-ce que la commande calculée à partir des estimations stabilise encore le système ainsi bouclé ? Pour les systèmes non linéaires ce n'est généralement pas le cas.

**Stabilisation :** Considérons le système linéaire impulsif

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \neq t_k, \\ x(t_k) &= D_k x(t_k^-), \quad k \in \mathbb{N} \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'objectif de cette section est de construire une loi de commande linéaire  $u = Kx$  qui stabilise exponentiellement le système en boucle fermée

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x \\ x(t_k) = D_k x(t_k^-) \end{cases} \quad (5.11)$$

**Théorème 5.3.4.** *Si on suppose que la paire  $(A, B)$  est contrôlable et qu'il existe une constante  $d > 0$  telle que  $\|D_k\| \leq d$ ,  $\forall k \geq 1$ , alors on peut choisir une matrice de gain  $K$  de sorte que le système en boucle fermée (5.11) soit globalement exponentiellement stable. De plus, la vitesse de convergence peut être arbitrairement grande que l'on veut, selon le choix de la matrice  $K$ .*

*Démonstration.* Puisque la paire  $(A, B)$  est contrôlable, alors la paire  $(A^T, B^T)$  est observable. Ainsi, en appliquant le lemme 5.3.1 pour la paire  $(A^T, B^T)$ , on déduit facilement l'existence d'une matrice de gain  $K$  telle que  $\|e^{t(A-BK)}\| \leq \mu e^{-\lambda t}$  avec  $\mu e^{-\lambda \tau} d \leq 1$ . Le reste de la démonstration est analogue à celle du théorème 5.3.3.  $\square$

**Principe de séparation :** Nous avons vu précédemment qu'il est possible, sous certaines hypothèses naturelles, de construire une loi de stabilisation et un observateur pour le système (5.5), dans cette section, nous allons montrer un principe de séparation. Soit  $K$  une matrice de gain de telle sorte que le système (5.11) soit exponentiellement stable et  $L$  une matrice de gain choisie de sorte que le système (5.8) soit un observateur exponentiel de (5.5). Nous considérons le système suivant obtenu en réunion du système (5.11) et (5.5).

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} - L(C\hat{x} - y) \\ x(t_k) = D_k x(t_k^-) \\ \hat{x}(t_k) = D_k \hat{x}(t_k^-) \end{cases}$$

Afin de montrer que l'origine  $(0, 0)$  de ce système est exponentiellement stable, nous pouvons le réécrire en considérant  $e = \hat{x} - x$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x - BKe \\ \dot{e} = (A - LC)e \\ x(t_k) = D_k x(t_k^-) \\ e(t_k) = D_k e(t_k^-) \end{cases} \quad (5.12)$$

**Théorème 5.3.5.** *Supposons que les paires  $(A, B)$  et  $(A, C)$  sont contrôlable et observable respectivement et qu'il existe une constante  $d > 0$  telle que  $\|D_k\| \leq d$ ,  $\forall k \geq 1$ . Ainsi, on peut choisir les matrices de gain  $K$  et  $L$  de sorte que le système (5.12) soit exponentiellement stable.*

*Démonstration.* Choisissons le réel  $\lambda > 0$  et la matrice de gain  $K$  telle que  $\|e^{t\tilde{A}}\| \leq \mu e^{-\lambda t}$  et  $\mu e^{-\lambda\tau/2} d \leq 1$  avec  $\tilde{A} = A - BK$ . Nous choisissons aussi un autre réel  $\lambda' > \lambda$  et une matrice de gain  $L$  telle que,  $e(t)$ , la dynamique de l'erreur de l'observateur (5.5) vérifie  $\|e(t)\| \leq \mu' e^{-\lambda't}$  (et  $\mu' e^{-\lambda'\tau/2} d \leq 1$ ). La formule suivante peut être facilement prouvée par induction :

$$x(t_r) = \left( \prod_{k=0}^{r-1} D_{r-k} e^{\delta_{r-k}\tilde{A}} \right) x(t_0) + \sum_{i=0}^{r-1} \left( \prod_{k=0}^{i-1} D_{r-k} e^{\delta_{r-k}\tilde{A}} \right) D_{n-i} \Phi_{r-i}$$

avec la convention  $\prod_{k=0}^{-1} M_k = I_n$  (où  $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^n$ ) avec

$$\Phi_k = - \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{(t_k-s)\tilde{A}} B K e(s) ds.$$

Pour démontrer que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} x(t_r) = 0$ , commençons d'abord par écrire

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{k=0}^{r-1} D_{r-k} e^{\delta_{r-k}\tilde{A}} \right\| &\leq (d\mu)^r e^{-r\lambda\tau} \\ &\leq (d\mu e^{-\lambda\tau/2})^r e^{-r\lambda\tau/2} \\ &\leq e^{-r\lambda\tau/2}. \end{aligned}$$

Cherchons par suite une estimation de  $\Phi_k$ . En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \|\Phi_k\| &\leq \mu\mu' \|BK\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-\lambda(t_k-s)} e^{-\lambda's} ds \\ &\leq \frac{\mu\mu' \|BK\|}{\lambda - \lambda'} e^{-\lambda t_k} (e^{(\lambda-\lambda')t_k} - e^{(\lambda-\lambda')t_{k-1}}) \\ &\leq \frac{\mu\mu' \|BK\|}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda t_k} e^{(\lambda-\lambda')t_{k-1}} \quad \text{car } \lambda' > \lambda \\ &\leq \frac{\mu\mu' \|BK\|}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda't_{k-1}} \\ &\leq \alpha e^{-\lambda't_{k-1}} \quad \alpha = \frac{\mu\mu' \|BK\|}{\lambda' - \lambda} e^{-\lambda\tau} \end{aligned}$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^{r-1} \left( \prod_{k=0}^{i-1} D_{r-k} e^{\delta_{r-k}\tilde{A}} \right) D_{n-i} \Phi_{r-i} \right\| &\leq \alpha \sum_{i=0}^{r-1} \mu^i d^{i+1} e^{-i\lambda\tau} e^{-\lambda't_{r-i-1}} \\ &\leq \alpha d \sum_{i=0}^{r-1} e^{-i\lambda\tau/2} e^{-\lambda't_{r-i-1}} \\ &= \alpha d \sum_{i=0}^{i_0} e^{-i\lambda\tau/2} e^{-\lambda't_{r-i-1}} + \alpha d \sum_{i=i_0+1}^{r-1} e^{-i\lambda\tau/2} e^{-\lambda't_{r-i-1}} \\ &\leq \alpha d (i_0 + 1) e^{-\lambda't_{r-i_0-1}} + \alpha d \sum_{i=i_0+1}^{r-1} e^{-i\lambda\tau/2} \\ &= \alpha d (i_0 + 1) e^{-\lambda't_{r-i_0-1}} + \alpha d e^{-(i_0+1)\lambda\tau/2} \frac{1 - e^{r-i_0-1}\lambda\tau/2}{1 - e^{-\lambda\tau/2}} \\ &\leq \alpha d ((i_0 + 1) e^{-\lambda't_0} e^{-\lambda'(r-i_0-1)\tau} + \frac{1}{1 - e^{-\lambda\tau/2}} e^{-(i_0+1)\lambda\tau/2}) \end{aligned}$$

Pour un réel  $\epsilon > 0$  donné, nous choisissons un indice  $i_0$  tel que

$$\frac{\alpha d}{1 - e^{-\lambda\tau/2}} e^{-(i_0+1)\lambda\tau/2} < \epsilon/2$$

ainsi, pour un réel  $r$  assez grand, nous obtenons

$$\alpha d(i_0 + 1)e^{-\lambda' t_0} e^{-\lambda'(r-i_0-1)\tau} < \epsilon/2$$

ceci prouve que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} x(t_r) = 0$  et par suite il s'ensuit que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ .  $\square$

### 5.3.2.2 Observateur du type Luenberger pour une classe de systèmes perturbés

Dans cette section, on se propose d'étudier une famille de systèmes autonomes qui se présente comme étant un système linéaire impulsif autonome perturbé par une matrice temps-variant continue ou continue par morceaux. On prétend, en fait, construire un observateur de Luenberger pour le système décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + P(t)x(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= D_k x(t_k^-) + J_k x(t_k^-), \\ x(t_0^+) &= x_0, & t_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice qui peut être continue ou continue par morceaux pour tout  $t \geq t_0$  et  $J_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante. De plus, on a

(H1) pour un rang  $k$  et un temps  $t$  assez grands,  $\|P(t)\| < \xi$ ,  $\|J_k\| < \xi$

(H2)  $0 < \tau_1 \leq t_k - t_{k-1} \leq \tau_2$ ,  $\forall k \geq 1$

Soit alors l'observateur suivant

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + P(t)\hat{x}(t) + LC(x(t) - \hat{x}(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta \hat{x}(t_k) &= D_k \hat{x}(t_k^-) + J_k \hat{x}(t_k^-), \end{aligned} \quad (5.14)$$

En un sens, cet observateur réalise un compromis entre l'information sur l'état apportée par les mesures (plus ou moins entachées d'erreurs) et la prévision de l'état fournie par le système 5.14. Ainsi la dynamique de l'erreur est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) + P(t)e(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta e(t_k) &= D_k e(t_k^-) + J_k e(t_k^-), \end{aligned}$$

**Théorème 5.3.6.** *Supposons que le système (5.13) est observable et que les propriétés (H1) et (H2) sont vérifiées. Soit la matrice  $L$  choisie, telle que les inégalités du lemme 5.3.1 soient vérifiées. Alors, le système (5.14) est un observateur exponentiel pour le système linéaire perturbé (5.13).*

*Démonstration.* D'après le théorème 5.3.3, on sait que le système (5.9) est exponentiellement stable. De plus, les conditions (H1) et (H2) sont vérifiées. D'où, du théorème 4.2.14 découle le résultat.  $\square$



### 5.3.3 Observateurs pour des systèmes impulsifs non linéaires

#### 5.3.3.1 Filtre de Kalman étendu pour une classe de systèmes impulsifs non linéaires

Dans cette section, on s'intéresse au cas des systèmes non linéaires autonomes, qui a été déjà traitée par Gauthier et Kupka, mais avec des impulsions faites aux instants  $(t_k)_{k \geq 1}$  de trois manières différentes. Supposons que

(H1) Le système  $\Gamma$  est globalement sous la forme normale  $(\Sigma)$ .

(H2) Les fonctions  $\varphi$  et  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sont globalement Lipschitziennes respectivement à  $\underline{x}_i = (x_0, \dots, x_i)$ .

Il s'agit d'un système non linéaire auquel on rajoute une quantité de matière  $p > 0$  aux instants de réinitialisations  $(t_k)_{k \geq 1}$ . On s'intéresse précisément dans un premier temps au système décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b(x, u), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ x(t_k^+) &= x(t_k^-) + p, \\ y(t) &= Cx(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad b(x, u) = u \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  et  $p \in \mathbb{R}^+$ .

Soit maintenant,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique définie positive,  $r, \theta$  des réels positifs. Construisons ainsi les matrices  $\Delta_\theta = \text{diag}(1, \frac{1}{\theta}, \dots, (\frac{1}{\theta})^{n-1})$  et  $Q_\theta = \theta^2(\Delta_\theta)^{-1}Q(\Delta_\theta)^{-1}$ . Soit le filtre de Kalman étendu donné par

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + b(z, u) - S^{-1}(t)C^T r^{-1}(Cz - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ z(t_k^+) &= z(t_k^-) + p, \\ \frac{dS(t)}{dt} &= -A^T S - SA + C^T r^{-1}C - SQ_\theta S. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Notons  $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$ . On obtient ainsi le système d'erreur qui est continu et donné par :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) + (b(\varepsilon + z, u) - b(z, u)) + S^{-1}(t)C^T r^{-1}(Cz - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \varepsilon(t_k) &= \varepsilon(t_k^-) \end{aligned} \quad (5.17)$$

**Théorème 5.3.7.** *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour un réel  $\theta > 1$  et pour tout  $t_0 > 0$ , le filtre de Kalman étendu (5.16), vérifie  $\forall t \geq \frac{t_0}{\theta}$*

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \theta^{n-1} k(t_0) \left\| \varepsilon\left(\frac{t_0}{\theta}\right) \right\| e^{-(\theta\omega(t_0) - \mu(t_0))(t - \frac{t_0}{\theta})}$$

pour des fonctions continues  $k(t_0), \omega(t_0), \mu(t_0)$ .

*Démonstration.* Soit  $\theta > 1$  et  $t_0 > 0$ . Vu que le control  $u$  est borné par  $B$ , il s'ensuit du Lemme 2.11 (voir livre de Kupka et Gauthier), qu'il existe des constantes  $0 < \alpha(t_0) < \beta(t_0)$  indépendantes de  $\bar{S}_0$  telles que :

$$\begin{aligned} \alpha(t_0)Id &\leq \bar{S}(t) \leq \beta(t_0)Id \\ \frac{1}{\beta(t_0)}Id &\leq \bar{P}(t) \leq \frac{1}{\alpha(t_0)}Id \end{aligned} \quad (5.18)$$

où  $P(t)$  vérifie l'équation :

$$\frac{dP(t)}{dt} = PA^T + AP - PC^T r^{-1} CP + Q_\theta$$

avec  $\bar{S}(t) = \tilde{S}(\frac{t}{\theta})$  et  $\bar{P}(t) = \tilde{P}(\frac{t}{\theta})$ ,  $\bar{\varepsilon}(t) = \tilde{\varepsilon}(\frac{t}{\theta})$ ,  $\tilde{\varepsilon}(s) = \Delta_\theta \varepsilon(t)$ ,  $\tilde{S}(s) = \theta \Delta_\theta^{-1} S(s) \Delta_\theta^{-1}$ ,  $\tilde{P}(s) = \frac{1}{\theta} \Delta_\theta S(s)^{-1} \Delta_\theta = \frac{1}{\theta} \Delta_\theta P(s) \Delta_\theta$  et  $\tilde{b}(z) = \Delta_\theta b(\Delta_\theta^{-1} z)$

D'après le théorème 2.18 (voir livre de Kupka et Gauthier), pour une condition initiale  $S(0)$  (resp  $P(0)$ ) dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives, on a  $S(t)$  est une matrice définie positive et par suite  $\bar{S}(t)$  l'est aussi (resp  $\bar{P}(t)$ ). Soit la fonction de Lyapunov  $V(t) = \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)$ . Alors, si on dérive on obtient,  $\forall t \neq t_k$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(t) &= 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}(t)) + \bar{\varepsilon}(t)' \frac{d}{dt}(\bar{S}(t)) \bar{\varepsilon}(t) \\ &= 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \left( \Delta_\theta \frac{d}{dt}(\varepsilon(\frac{t}{\theta})) \right) + \bar{\varepsilon}(t)' \left( \theta \Delta_\theta^{-1} \frac{d}{dt}(S(\frac{t}{\theta})) \Delta_\theta^{-1} \right) \bar{\varepsilon}(t) \\ &= 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \Delta_\theta \left( \frac{dz}{dt}(\frac{t}{\theta}) - \frac{dx}{dt}(\frac{t}{\theta}) \right) + \bar{\varepsilon}(t)' \left( \theta \Delta_\theta^{-1} \frac{1}{\theta} \frac{d}{dt}(S(t)) \Delta_\theta^{-1} \right) \bar{\varepsilon}(t) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{2}{\theta} \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \left( A' \bar{\varepsilon} + (\tilde{b}(\bar{z}) - \tilde{b}(\bar{x})) \right) - 2(C\bar{\varepsilon})' r^{-1} C \bar{\varepsilon} \\ &\quad - \frac{2}{\theta} \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) A \bar{\varepsilon}(t) + (C\bar{\varepsilon})' r^{-1} C \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) Q \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) \\ &\leq 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \left( \frac{1}{\theta} (\tilde{b}(\bar{z}) - \tilde{b}(\bar{x})) \bar{\varepsilon} \right) - \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) Q \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) \end{aligned}$$

Si nous notons  $Q_m > 0$ , la plus petite valeur propre de  $Q$ , on aura pour  $t \geq t_0$

$$-\bar{S}(t) Q \bar{S}(t) \leq -Q_m \alpha(t) \bar{S}(t)$$

Il s'ensuit de l'inégalité (5.18), que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{\varepsilon}(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)) &\leq -Q_m \alpha(t_0) \bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) + \frac{2}{\theta} \bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) (\tilde{b}(\bar{z}) - \tilde{b}(\bar{z} + \bar{\varepsilon})) \\ &\leq -Q_m \alpha(t_0) \bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) + 2 \|\bar{S}(t)\| \frac{k}{\theta} \|\bar{\varepsilon}(t)\|^2 \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{d}{dt} (\bar{\varepsilon}(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)) \leq -Q_m \alpha(t_0) \bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) + \|\bar{S}(t)\| \frac{L}{\theta} \|\bar{\varepsilon}(t)\|^2$$

avec  $L = 2k$ . Ensuite, en utilisant (5.18), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\bar{\varepsilon}(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)) &\leq -Q_m \alpha(t_0) (\bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)) + \|\bar{S}(t)\| \frac{L}{\theta} \|\bar{\varepsilon}(t)\|^2 \\ &\leq -Q_m \alpha(t_0) \bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) + \frac{L \beta(t_0)}{\theta} \|\bar{\varepsilon}(t)\|^2 \\ &\leq -\bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0) L}{\alpha(t_0) \theta} \right) \end{aligned}$$

Ce qui implique que : pour tout  $t \geq t_0$ , on a

$$\bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) \leq \bar{\varepsilon}'(t_0) \bar{S}(t_0) \bar{\varepsilon}(t_0) \exp^{-\left(Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0) L}{\alpha(t_0) \theta}\right)(t-t_0)}$$

De plus, d'après (5.18), on a  $\forall t \geq t_0$

$$\bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) \leq \beta(t_0) \|\bar{\varepsilon}(t_0)\|^2 \exp^{-\left(Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0) L}{\alpha(t_0) \theta}\right)(t-t_0)}$$

et aussi

$$\|\bar{\varepsilon}(t)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \bar{\varepsilon}'(t) \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)$$

et par suite  $\forall t \geq t_0$  :

$$\|\bar{\varepsilon}(t)\|^2 \leq \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} \exp^{-\left(Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0) L}{\alpha(t_0) \theta}\right)(t-t_0)} \|\bar{\varepsilon}(t_0)\|^2$$

Il s'ensuit alors du fait que  $\theta > 1$ , que pour tout  $\tau \geq \frac{t_0}{\theta}$ , on a :

$$\|\bar{\varepsilon}(\tau)\|^2 \leq \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} \exp^{-\left(Q_m \alpha(t_0) \theta - \frac{\beta(t_0) L}{\alpha(t_0) \theta}\right)(\tau - \frac{t_0}{\theta})} \|\bar{\varepsilon}(\frac{t_0}{\theta})\|^2$$

et par suite,

$$\|\varepsilon(\tau)\|^2 \leq \theta^{2(n-1)} \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} \exp^{-\left(Q_m \alpha(t_0) \theta - \frac{\beta(t_0) L}{\alpha(t_0) \theta}\right)(\tau - \frac{t_0}{\theta})} \|\varepsilon(\frac{t_0}{\theta})\|^2$$

D'où le système (5.16) est un observateur exponentiel.  $\square$

Si on se place dans un cas plus général de systèmes qui sont décrits par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b(x, u), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= s(x(t_k^-)), \\ y(t) &= Cx(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \tag{5.19}$$

où les matrices  $A$ ,  $C$  et la fonction  $b$  sont définies comme précédemment (dans le premier cas), ainsi que la fonction  $s(\cdot)$  est supposée globalement Lipshitzienne de constante de Lipshitz égale à  $\lambda$ . Soit alors le filtre de Kalman étendu suivant

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + b(\hat{x}, u) - S^{-1}(t)C^T r^{-1}(C\hat{x} - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta \hat{x}(t_k) &= s(\hat{x}(t_k^-)), \\ \frac{dS(t)}{dt} &= -A^T S - SA + C^T r^{-1} C - S Q_\theta S. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Notons par  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . On obtient ainsi l'équation de l'erreur suivante

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) + (b(\varepsilon + \hat{x}, u) - b(\hat{x}, u)) + S^{-1}(t)C^T r^{-1}(C\hat{x} - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta \varepsilon(t_k) &= s(\hat{x}(t_k) + \varepsilon(t_k)) - s(\hat{x}(t_k)) \end{aligned} \tag{5.21}$$

**Théorème 5.3.8.** *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour un réel  $\theta > 1$  et pour tout  $t_0 > 0$ , le filtre de Kalman étendu (5.20) est un observateur exponentiel pour le système (5.19). De plus, il vérifie  $\forall t \geq t_0$*

$$\| \varepsilon(\frac{t}{\theta}) \| \leq \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} \sqrt{\prod_{t_0 < t_k < t} (1 + \lambda)^2} \| \varepsilon(\frac{t_0}{\theta}) \| e^{\frac{-1}{2} \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) (t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

*Démonstration.* Posons comme dans le premier cas la fonction  $V(t) = \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)$ . Alors, quand  $t \neq t_k$ , on a (avec les mêmes calculs déjà faits précédemment)

$$\frac{dV}{dt}(t) \leq - \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) V(t).$$

Et par suite, la deuxième condition du théorème 4.2.5 est satisfaite avec une fonction  $g(t, w) = - \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) w$ . Et puisque

$$\begin{aligned} \| \bar{\varepsilon} + \Delta \bar{\varepsilon}(t_k) \| &= \| \bar{\varepsilon} + s(\bar{\varepsilon} + \hat{x}) - s(\hat{x}) \| \\ &\leq (1 + \lambda) \| \bar{\varepsilon} \| \end{aligned}$$

de plus,  $(1 + \lambda)$  est finie, donc on sait qu'il existe un réel  $\rho_0 > 0$  tel que  $(\bar{\varepsilon} \in S_{\rho_0}) \Rightarrow \bar{\varepsilon} + U(k, \bar{\varepsilon}) \in S_{\rho}, \quad \forall k$ . Pour  $t = t_k$ , on a

$$\begin{aligned} V(t_k, \bar{\varepsilon}(t_k) + \Delta \bar{\varepsilon}(t_k)) &= (\bar{\varepsilon}(t_k) + \Delta \bar{\varepsilon}(t_k))' \bar{S}(t_k) (\bar{\varepsilon}(t_k) + \Delta \bar{\varepsilon}(t_k)) \\ &\leq (\| \bar{\varepsilon}(t_k) \| + \lambda \| \bar{\varepsilon}(t_k) \|) \beta(t_0) (\| \bar{\varepsilon}(t_k) \| + \lambda \| \bar{\varepsilon}(t_k) \|) \\ &\leq (1 + \lambda)^2 \beta(t_0) \| \bar{\varepsilon}(t_k) \|^2 \\ &\leq (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} V(t_k^-, \bar{\varepsilon}(t_k^-)) \end{aligned}$$

et par suite la condition 3 du théorème 4.2.5 est satisfaite avec  $\psi_k(w) = (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} w$ . Nous savons aussi que

$$\alpha(t_0) \| \bar{\varepsilon} \|^2 \leq V(t, \bar{\varepsilon}) \leq \beta(t_0) \| \bar{\varepsilon} \|^2$$

ce qui implique de plus que la condition 4 du même théorème est aussi satisfaite. Ainsi, d'après ce dernier, la propriété de stabilité du système initial (5.21) est déduite de celle du système de comparaison qui suit

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= - \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) w(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ w(t_k^+) &= \left( (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} \right) w(t_k^-) \\ w(t_0^+) &= w_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Et puis, en choisissant  $\theta$  assez grande et la plus petite valeur propre  $Q_m$  de la matrice  $Q$  aussi grande, on aura  $\left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) > 0$ . Il s'ensuit alors du corollaire 3.1 que

$$V(t, \bar{\varepsilon}) \leq \left( V(t_0^+, \bar{\varepsilon}(t_0)) \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)} \right) e^{-\left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) (t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

D'où le système (5.20) est un observateur exponentiel pour (5.19).  $\square$

Considérons maintenant le système décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b(x, u), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ x(t_k^+) &= x(t_k^-) + p_k x(t_k^-), \\ y(t) &= Cx(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (5.23)$$

où les matrices  $A$ ,  $C$  et la fonction  $b$  sont définies comme précédemment (dans le premier cas), ainsi que  $p \geq p_k \geq 0$ . Soit le filtre de Kalman étendu suivant

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) + b(\hat{x}, u) - S^{-1}(t)C^T r^{-1}(C\hat{x} - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \hat{x}(t_k^+) &= \hat{x}(t_k^-) + p_k \hat{x}(t_k^-), \\ \frac{dS(t)}{dt} &= -A^T S - SA + C^T r^{-1} C - SQ_\theta S. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Notons par  $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ . On obtient ainsi l'équation de l'erreur suivante

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) + (b(\varepsilon + \hat{x}, u) - b(\hat{x}, u)) + S^{-1}(t)C^T r^{-1}(C\hat{x} - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \varepsilon(t_k^+) &= \varepsilon(t_k^-) + p_k \varepsilon(t_k^-) \end{aligned} \quad (5.25)$$

**Corollaire 5.3.9.** *Sous les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}2)$ , pour un réel  $\theta > 1$  et pour tout  $t_0 > 0$ , le filtre de Kalman étendu (5.24) est un observateur exponentiel pour le système (5.23). De plus, il vérifie  $\forall t \geq t_0$*

$$\|\varepsilon(\frac{t}{\theta})\| \leq \sqrt{\frac{\beta(t_0)}{\alpha(t_0)}} \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + p) \|\varepsilon(\frac{t_0}{\theta})\| e^{\frac{-1}{2} \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) (t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

*Démonstration.* Posons comme dans le premier cas la fonction  $V(t) = \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t)$ . Alors, quand  $t \neq t_k$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(t) &= 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}(t)) + \bar{\varepsilon}(t)' \frac{d}{dt}(\bar{S}(t)) \bar{\varepsilon}(t) \\ &= 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \left( \Delta_\theta \frac{d}{dt}(\varepsilon(\frac{t}{\theta})) \right) + \bar{\varepsilon}(t)' \left( \theta \Delta_\theta^{-1} \frac{d}{dt}(S(\frac{t}{\theta})) \Delta_\theta^{-1} \right) \bar{\varepsilon}(t) \\ &= 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \Delta_\theta \left( \frac{dz}{dt}(\frac{t}{\theta}) - \frac{dx}{dt}(\frac{t}{\theta}) \right) + \bar{\varepsilon}(t)' \left( \theta \Delta_\theta^{-1} \frac{1}{\theta} \frac{d}{dt}(S(t)) \Delta_\theta^{-1} \right) \bar{\varepsilon}(t) \\ &\leq 2\bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) \left( \frac{1}{\theta} (\tilde{b}(\bar{z}) - \tilde{b}(\bar{x})) \bar{\varepsilon} \right) - \bar{\varepsilon}(t)' \bar{S}(t) Q \bar{S}(t) \bar{\varepsilon}(t) \\ &\leq - \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) V(t). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Et par suite, la deuxième condition du théorème 4.2.5 est satisfaite avec une fonction  $g(t, w) = - \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) w$ . Et puisque

$$\begin{aligned} \|\bar{\varepsilon} + \Delta(\bar{\varepsilon}(t_k^-))\| &= \|\bar{\varepsilon} + p_k \bar{\varepsilon}\| \\ &\leq (1 + p_k) \|\bar{\varepsilon}\| \\ &\leq (1 + p) \|\bar{\varepsilon}\|. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $(1 + p)$  est finie, donc on sait qu'il existe un réel  $\rho_0 > 0$  tel que  $(\bar{\varepsilon} \in S_{\rho_0}) \Rightarrow \bar{\varepsilon} + p_k \bar{\varepsilon} \in S_{\rho}, \forall k$ . Pour  $t = t_k$ , on a

$$\begin{aligned} V(t, \bar{\varepsilon} + p_k \bar{\varepsilon}) &= (\bar{\varepsilon} + p_k \bar{\varepsilon})' \bar{S}(t) (\bar{\varepsilon} + p_k \bar{\varepsilon}) \\ &= (1 + p_k)^2 \bar{\varepsilon}' \bar{S}(t) \bar{\varepsilon} \\ &= (1 + p_k)^2 V(t, \bar{\varepsilon}) \\ &\leq (1 + p)^2 V(t, \bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

et par suite la condition 3 du théorème 4.2.5 est satisfaite avec  $\psi_k(w) = (1 + p_k)^2 w$ . Nous savons aussi que

$$\alpha(t_0) \|\bar{\varepsilon}\|^2 \leq V(t, \bar{\varepsilon}) \leq \beta(t_0) \|\bar{\varepsilon}\|^2$$

ce qui implique de plus que la condition 4 du même théorème est aussi satisfaite. Ainsi, d'après ce dernier, la propriété de stabilité du système initial (5.25) est déduite de celle du système de comparaison qui suit

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= - \left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) w(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \\ w(t_k^+) &= (1 + p)^2 w(t_k^-) \\ w(t_0^+) &= w_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Et puis, en choisissant  $\theta$  assez grande et la plus petite valeur propre  $Q_m$  de la matrice  $Q$  aussi grande, on pourra avoir  $\left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) > 0$ . Il s'ensuit alors du corollaire 3.1 que

$$V(t, \bar{\varepsilon}) \leq (V(t_0^+, \bar{\varepsilon}(t_0))) \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + p)^2 e^{-\left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) (t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

Et par suite

$$V(t, \varepsilon(\frac{t}{\theta})) \leq (V(t_0^+, \varepsilon(\frac{t_0}{\theta}))) \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + p)^2 e^{-\left( Q_m \alpha(t_0) - \frac{\beta(t_0)L}{\alpha(t_0)\theta} \right) (\frac{t}{\theta} - \frac{t_0}{\theta})}, \quad \forall t \geq t_0$$

D'où le système (5.24) est un observateur exponentiel pour (5.23).  $\square$

### 5.3.3.2 Autre type d'observateurs pour une classe de systèmes impulsifs non linéaires

Dans cette section, on donnera d'autres observateurs pour les mêmes classes de systèmes étudiés dans la section précédente. On s'intéresse dans un premier temps au système décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b(x, u), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \\ x(t_k^+) &= x(t_k^-) + p, \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad b(x, u) = u \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$  et  $p \in \mathbb{R}^+$ . Supposons de plus que les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$ ,  $(\mathcal{H}2)$  soient

satisfaites,

(H1) Le système  $\Gamma$  est globalement sous la forme normale  $(\Sigma)$ .

(H2) Les fonctions  $\varphi$  et  $g_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sont globalement Lipschitziennes respectivement à  $x_i = (x_0, \dots, x_i)$ .

Soit  $S_t(\theta) \in \Sigma^+$  : le cône des matrices symétriques définies positives, telle que

$$\dot{S}_t(\theta) = -\theta S_t(\theta) - A' S_t(\theta) - S_t(\theta) A + C' C$$

et notons  $S_\infty(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t(\theta)$ . Soit alors le système dynamique donné par

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + b(z, u) - S_\infty(\theta)^{-1}(t) C' (Cz - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ z(t_k) &= z(t_k^-) + p, \\ 0 &= -\theta S_\infty(\theta) - A' S_\infty(\theta) - S_\infty(\theta) A + C' C. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Notons par  $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$ . On obtient ainsi le système d'erreur qui est continu et donné par :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) + (b(\varepsilon + z, u) - b(z, u)) - S_\infty(\theta)^{-1}(t) C' (Cz - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \varepsilon(t_k^+) &= \varepsilon(t_k^-) \end{aligned} \quad (5.31)$$

**Théorème 5.3.10.** *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour des entrées  $u$  uniformément bornées par  $u_0$ ,  $t_0 > 0$ , le système (5.30) est un observateur exponentiel pour le système (5.29) et pour  $\theta$  suffisamment grand, on a  $\forall t \geq t_0$*

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S_\infty(\theta))}{\lambda_{\min}(S_\infty(\theta))}} \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}(\theta - 2kn\sqrt{C_1 S})(t-t_0)}$$

*Démonstration.* La preuve est basée en fait sur des arguments de Lyapunov standards. On s'intéresse d'abord, à la solution stationnaire  $S_\infty(\theta)$ , de l'équation (5.30). On sait que

$$S_t(\theta) = \exp(-\theta t) \exp(A' t) S_0(\theta) \exp(-A t) + \int_0^t \exp(-\theta(t-s)) \exp(-A'(t-s)) C' C \exp(-A(t-s)) ds$$

D'après cette expression, il est clair que la matrice  $S_t(\theta)$  est symétrique définie positive, du moment que la matrice  $S_0(\theta)$  l'est. De plus,

$$\begin{aligned} S_t(\theta) &\geq \int_{t-\alpha}^t \exp(-\theta(t-s)) \exp(A'(t-s)) C' C \\ &\times \exp(-A(t-s)) ds, \quad \forall \alpha > 0, t > \alpha \\ &\geq \int_{-\alpha}^0 \exp(\theta u) \exp(A' u) C' C \exp(A u) du \\ &\geq \exp(-\theta \alpha) \int_{-\alpha}^0 \exp(A' u) C' C \exp(A u) du \end{aligned}$$

Et puis, de l'observabilité de la paire  $(A, C)$ , on a  $S_t(\theta) \geq \delta I$  avec  $\delta > 0$ . Il s'ensuit alors que  $S_\infty(\theta) \geq \delta I$  aussi. Posons maintenant  $V(t) = \varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t)$ . Si on dérive on aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= 2\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \dot{\varepsilon}(t) \\ &= 2\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) A \varepsilon(t) - 2(C\varepsilon)^2 + 2\varepsilon' S_\infty(\theta) (K(z, u) - K(x, u)) \end{aligned}$$

avec  $K(x, u) = \begin{bmatrix} K_1(\underline{x}_1, u) \\ \vdots \\ K_n(\underline{x}_n, u) \end{bmatrix}$ ,  $\underline{x}_i = (x_1, \dots, x_i)$  et les applications  $K_i(\underline{x}_i, u) : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$

sont Lipschitziennes par rapport à  $\underline{x}_i$  uniformément en  $u$ , de constante de Lipschitz égale à  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Ensuite puisque la matrice  $S_\infty(\theta)$  est solution de l'équation (5.30), on obtient

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\theta \varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \dot{\varepsilon}(t) - (C\varepsilon)^2 + 2\varepsilon' S_\infty(\theta) (K(z, u) - K(x, u))$$

Notons la norme associée à la matrice  $S$ , par  $\|x\|_S = (x' S x)^{\frac{1}{2}}$ . Ainsi d'après l'inégalité de Schwartz, on a

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -\theta \varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t) + 2 \|\varepsilon\|_{S_\infty} \|K(z, u) - K(x, u)\|_{S_\infty} \quad (5.32)$$

Or, on sait que  $\frac{d}{dt}(\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t)) = \frac{d}{dt}(\|\varepsilon\|_{S_\infty}^2) = 2 \|\varepsilon\|_{S_\infty} \frac{d}{dt}(\|\varepsilon\|_{S_\infty})$ . D'où, en multipliant l'inégalité (5.32) par  $\|\varepsilon\|_{S_\infty}^{-1}$ , on aura

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dt}(\|\varepsilon\|_{S_\infty}) &\leq -\theta (\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} + 2 \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} S_\infty(\theta)_{ij} (K_i(\underline{z}_i, u) - K_i(\underline{x}_i, u)) \right. \\ &\quad \left. \times (K_j(\underline{z}_j, u) - K_j(\underline{x}_j, u)) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'autre part, par un calcul explicite de la matrice  $S_\infty(\theta)$  qui est la limite de  $S_t(\theta)$ , on obtient que ses coefficients vérifient

$$(S_\infty(\theta))_{ij} = (S_\infty(1))_{ij} \frac{1}{\theta^{i+j-1}}$$

Ainsi, si on note  $k = \sup_{1 \leq i \leq n} k_i$  et  $S = \sup_{i,j} |S_\infty(1)_{ij}|$ , il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}}) &\leq \frac{-\theta}{2} (\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} + (k^2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} S_\infty(1)_{ij} \frac{1}{\theta^{i+j-1}} \|\varepsilon_i\|_{R^i} \|\varepsilon_j\|_{R^j})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{-\theta}{2} (\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} + (k^2 S \theta \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{\theta^i} \|\varepsilon_i\|_{R^i} \frac{1}{\theta^j} \|\varepsilon_j\|_{R^j})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{-\theta}{2} (\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} + (k^2 S \theta \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|\frac{\varepsilon_i}{\theta^i}\|_{R^i} \frac{1}{\theta^j} \|\frac{\varepsilon_j}{\theta^j}\|_{R^j})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Il est évident que si on note  $\xi = \frac{\varepsilon_i}{\theta^i}$ , alors on aura l'inégalité suivante

$$\|\frac{\varepsilon_i}{\theta^i}\|_{R^i} \leq \|\xi\|_{R^i} \leq \|\xi\|$$

où la norme  $\|\cdot\|_{R^i}$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^i$  et  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Et par suite, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}}) &\leq \frac{-\theta}{2} (\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} + (k^2 S \theta \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{-\theta}{2} (\varepsilon'(t) S_\infty(\theta) \varepsilon(t))^{\frac{1}{2}} + (k^2 S \theta n^2 \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$



De plus, on sait qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que  $\|\xi\|^2 \leq C_1 \|\xi\|_{S_\infty(1)}^2$  et que  $\|\xi\|_{S_\infty(1)}^2 = \frac{1}{\theta} \|\varepsilon\|_{S_\infty(\theta)}^2$ . D'où, il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}((\varepsilon'(t)S_\infty(\theta)\varepsilon(t))^{\frac{1}{2}}) \leq \left(\frac{-\theta}{2} + kn\sqrt{SC_1}\right)((\varepsilon'(t)S_\infty(\theta)\varepsilon(t))^{\frac{1}{2}}).$$

Et finalement, on obtient

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})V(t). \quad (5.33)$$

Ce qui implique que le système (5.30) est un observateur exponentiel pour (5.29).  $\square$

Plaçons nous maintenant dans un cas plus général de systèmes qui sont décrits par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b(x, u), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta x(t_k) &= s(x(t_k^-)), \\ y(t) &= Cx(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \quad (5.34)$$

où les matrices  $A$ ,  $C$  et la fonction  $b$  sont définies comme précédemment et la fonction  $s(t)$  est supposée globalement Lipshitzienne de constante de Lipshitz égale à  $\lambda > 0$ . Soit le système dynamique suivant

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + b(z, u) - S_\infty(\theta)^{-1}(t)C'(Cz - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta z(t_k) &= s(z(t_k^-)), \\ \frac{dS(t)}{dt} &= -A^T S - SA + C^T r^{-1}C - SQ_\theta S. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Notons  $\varepsilon(t) = x(t) - z(t)$ . On obtient ainsi l'équation de l'erreur suivante

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) + (b(\varepsilon + z, u) - b(z, u)) + S^{-1}(t)C^T r^{-1}(Cz - y(t)), & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \Delta \varepsilon(t_k) &= s(z(t_k) + \varepsilon(t_k)) - s(z(t_k)) \end{aligned} \quad (5.36)$$

**Théorème 5.3.11.** *Sous les hypothèses  $(\mathcal{H}1)$  et  $(\mathcal{H}2)$ , pour des entrées  $u$  uniformément bornées par  $u_0$ ,  $t_0 > 0$ , le système (5.35) est un observateur exponentiel pour le système (5.34) et pour  $\theta$  suffisamment grand, on a  $\forall t \geq t_0$*

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \frac{\lambda_{\max}(S_\infty(\theta))}{\lambda_{\min}(S_\infty(\theta))} \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + \lambda) \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\left(\frac{\theta - 2kn\sqrt{SC_1}}{2}\right)(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

*Démonstration.* Posons comme dans le cas précédent, la fonction de Lyapunov  $V(t) = \varepsilon'(t)S_\infty(\theta)\varepsilon(t)$ . Alors, quand  $t \neq t_k$ , on a d'après le même calcul déjà fait dans le premier cas et d'après l'équation (5.33), on a

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})V(t).$$

Et par suite, la deuxième condition du théorème 4.2.5 est satisfaite avec une fonction  $g(t, w) = -(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})w$ . Et puisque

$$\begin{aligned} \|\varepsilon + \Delta(\varepsilon(t_k^-))\| &= \|\varepsilon + s(\varepsilon + z) - s(z)\| \\ &\leq (1 + \lambda) \|\varepsilon\| \end{aligned}$$

de plus,  $(1 + \lambda)$  est finie, donc on sait qu'il existe un réel  $\rho_0 > 0$  tel que  $(\varepsilon \in S_{\rho_0}) \Rightarrow \varepsilon + U(k, \varepsilon) \in S_{\rho}, \forall k$ . Pour  $t = t_k$ , on a

$$\begin{aligned} V(t_k, \varepsilon(t_k) + \Delta\varepsilon(t_k)) &= (\varepsilon(t_k) + \Delta\varepsilon(t_k))' S_{\infty}(\theta)(\varepsilon(t_k) + \Delta\varepsilon(t_k)) \\ &\leq (\|\varepsilon(t_k)\| + \lambda \|\varepsilon(t_k)\|) \beta(\theta) (\|\varepsilon(t_k)\| + \lambda \|\varepsilon(t_k)\|) \\ &\leq (1 + \lambda)^2 \beta(\theta) \|\varepsilon(t_k)\|^2 \\ &\leq (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} V(t_k^-, \varepsilon(t_k^-)) \end{aligned}$$

et par suite la condition 3 du théorème 4.2.5 est satisfaite avec  $\psi_k(w) = (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} w$ . Nous savons aussi que

$$\alpha(\theta) \|\varepsilon\|^2 \leq V(t, \varepsilon) \leq \beta(\theta) \|\varepsilon\|^2$$

ce qui implique de plus que la condition 4 du même théorème () est aussi satisfaite. Ainsi, d'après ce dernier, la propriété de stabilité du système initial (5.36) est déduite de celle du système de comparaison qui suit

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= -(\theta - 2kn\sqrt{SC_1}) w(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ w(t_k^+) &= \left( (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} \right) w(t_k^-) \\ w(t_0^+) &= w_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Et puis, en choisissant  $\theta$  assez grande, on aura  $-(\theta - 2kn\sqrt{SC_1}) > 0$ . Il s'ensuit alors du corollaire que

$$V(t, \bar{\varepsilon}) \leq \left( V(t_0^+, \bar{\varepsilon}(t_0)) \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + \lambda)^2 \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} \right) e^{-(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})(t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

ainsi

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \frac{\lambda_{\max}(S_{\infty}(\theta))}{\lambda_{\min}(S_{\infty}(\theta))} \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + \lambda) \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\left(\frac{\theta - 2kn\sqrt{SC_1}}{2}\right)(t - t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

D'où le système (5.35) est un observateur exponentiel pour (5.34).  $\square$

Comme dans la section précédente, on peut envisager un cas particulier de systèmes décrits par

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b(x, u), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ x(t_k^+) &= x(t_k^-) + px(t_k^-), \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \end{aligned} \tag{5.38}$$

où les matrices  $A$ ,  $C$  et la fonction  $b$  sont définies comme précédemment, ainsi que  $p \geq 0$ . Soit l'observateur suivant

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + b(z, u) - S_{\infty}(\theta)^{-1}(t)C'(Cz - y(t)), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ z(t_k) &= z(t_k^-) + pz(t_k^-), \\ 0 &= -\theta S_{\infty}(\theta) - A'S_{\infty}(\theta) - S_{\infty}(\theta)A + C'C. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Notons par  $\varepsilon(t) = x(t) - z(t)$ . On obtient ainsi le système d'erreur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) + (b(\varepsilon + z, u) - b(z, u)) + S^{-1}(t)C^T r^{-1}(Cz - y(t)), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ \varepsilon(t_k^+) &= \varepsilon(t_k^-) + p\varepsilon(t_k^-) \end{aligned} \tag{5.40}$$

**Corollaire 5.3.12.** *Sous les hypothèses (H1) et (H2), pour des entrées  $u$  uniformément bornées par  $u_0$ ,  $t_0 > 0$ , le système (5.39) est un observateur exponentiel pour le système (5.38) et pour  $\theta$  suffisamment grand, on a  $\forall t \geq t_0$*

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S_\infty(\theta))}{\lambda_{\min}(S_\infty(\theta))}} \prod_{t_0 < t_k < t} (1+p) \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\left(\frac{\theta - 2kn\sqrt{SC_1}}{2}\right)(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

*Démonstration.* Posons comme dans le premier cas la fonction de Lyapunov  $V(t) = \varepsilon'(t)S_\infty(\theta)\varepsilon(t)$ . Alors, quand  $t \neq t_k$ , on a d'après le même calcul déjà fait dans le premier cas et d'après l'équation (5.33), on a

$$\frac{d}{dt}V(t) \leq -(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})V(t).$$

Et par suite, la deuxième condition du théorème 4.2.5 est satisfaite avec une fonction  $g(t, w) = -(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})w$ . Et puisque

$$\begin{aligned} \|\varepsilon + \Delta(\varepsilon(t_k^-))\| &= \|\varepsilon + p\varepsilon\| \\ &\leq (1+p)\|\varepsilon\| \end{aligned}$$

de plus,  $(1+p)$  est finie, donc on sait qu'il existe un réel  $\rho_0 > 0$  tel que  $(\bar{\varepsilon} \in S_{\rho_0}) \Rightarrow \varepsilon + U(k, \varepsilon) \in S_{\rho}, \forall k$ . Pour  $t = t_k$ , on a

$$\begin{aligned} V(t, \varepsilon) &= (\varepsilon + p\varepsilon)' \bar{S}(t)(\varepsilon + p\varepsilon) \\ &= (1+p)^2 \varepsilon' \bar{S}(t) \varepsilon \\ &= (1+p)^2 V(t, \varepsilon) \end{aligned} \tag{5.41}$$

et par suite la condition 3 du théorème () est satisfaite avec  $\psi_k(w) = (1+p)^2 w$ . Nous savons aussi que

$$\alpha(t_0) \|\varepsilon\|^2 \leq V(t, \varepsilon) \leq \beta(t_0) \|\varepsilon\|^2$$

ce qui implique de plus que la condition 4 du même théorème est aussi satisfaite. Ainsi, d'après ce dernier, la propriété de stabilité du système initial (5.40) est déduite de celle du système de comparaison qui suit

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= -(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})w(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ w(t_k^+) &= (1+p)^2 w(t_k^-) \\ w(t_0^+) &= w_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Et puis, en choisissant  $\theta$  assez grande, on aura  $-(\theta - 2kn\sqrt{SC_1}) > 0$ . Il s'ensuit alors du corollaire que

$$V(t, \varepsilon) \leq (V(t_0^+, \varepsilon(t_0))) \prod_{t_0 < t_k < t} (1+p)^2 e^{-(\theta - 2kn\sqrt{SC_1})(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

ainsi

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S_\infty(\theta))}{\lambda_{\min}(S_\infty(\theta))}} \prod_{t_0 < t_k < t} (1+p) \|\varepsilon(t_0)\| e^{-\left(\frac{\theta - 2kn\sqrt{SC_1}}{2}\right)(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

D'où le système (5.39) est un observateur exponentiel pour (5.38).  $\square$

# Bibliographie

- [1] M.A Aizerman and F.R Gantmacher. *Absolute stability of regulator systems*. San Fransisco, CA : Holden-Day, 1964.
- [2] J.O Alzabut. A stability criterion for delay differential equations with impulse effects. *Applied Analysis and Differential Equations*, România :pp.1–10, 2007.
- [3] D Aubry, M Boutayeb, and M Darouach. On extended kalman type observers design with application to the ball and beam system. *In 5th IFAC Symposium of the 15th IMACS. Nonlinear Systems*, Saint-Petersburg, Russia :pp.1431–1436, 2001.
- [4] B Ben Hamed, I Ellouze, and M.A Hammami. Practical uniform stability of nonlinear differential delay equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, June 2010.
- [5] B Ben Hamed and M.A Hammami. Stabilization of uncertain time-varying dynamical systems including control and state delay. *Int. J. Computational and Numerical Analysis and Applications*, 5(4) :pp.301–315, 2004.
- [6] B Ben Hamed and M.A Hammami. Practical stabilization of a class of uncertain time-varying nonlinear delay systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 7 :pp.175–180, 2009.
- [7] A BenAbdallah, B Ben Hamed, and M Chaabane. Absolute stability and application to design of observer-based controller for nonlinear time-delay systems. *Asian Journal of Control*, 9(3) :pp.362–371, 2007.
- [8] A BenAbdallah, I Ellouze, and M.A Hammami. Practical stability of nonlinear time-varying cascade systems. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 15 :pp.45–62, 2009.
- [9] G Besançon. *Nonlinear Observers and Applications*. Springer, 2007.
- [10] P.A Bliman. Lmi characterization of the strong delay-independent stability of linear delay systems via quadratic lyapunov-krasovskii functionals. *Systems and Control Letters*, 43 :pp.263–274, 2001.
- [11] P.A Bliman. Lyapunov-krasovskii functionals and frequency domain : delay-independent absolute stability criteria for delay systems. *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11(8) :pp.771–788, 2001.
- [12] G Bornard and H Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *In Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control , Brighton, England*, 1991.
- [13] S Boyd, L El Ghaoui, E Feron, and V Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. SIAM Studies in applied mathematics, 1994.
- [14] E Busvelle. Sur les observateurs des systems non linéaires. Technical report, Université de Bourgogne, Dijon, 2004.

- [15] J Cao, S Zhang, and Y Hu. Delay-dependent condition for absolute stability of lurie control systems with multiple time delays and nonlinearities,. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338 :pp.497–504, 2008.
- [16] Y.Y Cao, Z Lin, and T Hu. Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 49(2) :pp.233–240, 2002.
- [17] M Chaabane, M.S Saadni, and M Driss. Stability and stabilisation of a class of uncertain dynamical systems with delays. *Int.J. of Applied Mathematics and Computer Science*, 15(3) :pp.321–329, 2005.
- [18] Y Chen, A Xue, R Lu, and S Zhou. On robustly exponential stability of uncertain neutral systems with time-varying delays and nonlinear perturbations. *Nonlinear Analysis*, 68 :pp.2464–2470, 2008.
- [19] Y Chou and K.T Jih. Robust control of a class of time-delay nonlinear processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 45(26) :pp.8963–8972, 2006.
- [20] M Corless. Guaranteed rates of exponential convergence for uncertain systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 64(3) :pp.481–494, 1990.
- [21] M Corless and G Leitmann. Bounded controllers for robust exponential convergence. *J. of Optimization Theory and Applications*, 76 :pp.1–12, 1993.
- [22] M Corless and A.G Soldatos. Stabilizing uncertain systems with bounded control. *Dynamics and Control*, 1 :pp.227–238, 1991.
- [23] F Deza, D Bossanne, E Busvelle, J.P Gauthier, and D Rakotopara. Exponential observers for nonlinear systems. *IEEE. Transaction on Automatic Control*, 38(3) :pp.482–484, 1993.
- [24] M Dlala. *Stability of perturbed dynamical systems and impulsive systems*. PhD thesis, University of Sciences of Sfax, 2008.
- [25] J Eastham and K Hastings. Optimal impulse control of portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 4 :pp.588–605, 1988.
- [26] I Ellouze, A Ben Abdallah, and M.A Hammami. Delay-range-dependant absolute stability for systems with time-varying delay. *to appear in International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications*.
- [27] I Ellouze, A Ben Abdallah, and M.A Hammami. On the absolute stabilization of dynamical-delay systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 10(3) :pp.225–234, 2010.
- [28] I Ellouze and M.A Hammami. On the practical stability of impulsive control systems with multiple time delays. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. *En révision*.
- [29] I Ellouze, J.C Vivalda, and M.A Hammami. A separation principle for linear impulsive systems. *En préparation*.
- [30] E Fridman. Descriptor discretized lyapunov functional method : Analysis and design. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 51, 2006.
- [31] E Fridman. Stability of systems with uncertain delay : a new "complete" lyapunov-krasovskii fonctionnal. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 51 :pp.885–890, 2006.
- [32] E Fridman and U Shaked. An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 47(11) :pp.1931–1937, 2002.

- [33] E Fridman and U Shaked. Delay-dependant stabilisation method for linear time-delay systems. *Int. Journal of Control*, 76 :pp.48–60, 2003.
- [34] J.P Gauthier and G Bornard. Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :pp.922–926, 1981.
- [35] J.P Gauthier, H Hammouri, and S Othman. A simple observer for nonlinear systems-applications to bioreactors. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 37(6) :pp.875–880, 1992.
- [36] J.P Gauthier and I Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [37] K Gu, V.L Kharitonov, and J Chen. *Stability of time delay systems*. Boston : Birkauer, 2003.
- [38] K Gu and S.I Niculescu. Additional dynamics in transformed time-delay systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(3) :pp.572–575, 2000.
- [39] Z.H Guan, T.H Qian, and X Yu. On controllability and observability for a class of impulsive systems. *Systems and Control Letters*, 47(3) :pp.247–257, 2002.
- [40] B Hahn and D.T Valentine. *Essential Matlab for engineers and scientists*. A Macmillan compagny, Chennai, India, third edition edition, 2007.
- [41] W Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, 1967.
- [42] A Halanay. *Differential Equations : Stability, Oscillation, Time Lags*. Academic Press Inc, 1966.
- [43] J.K Hale and S.M.V Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1993.
- [44] H Hammouri and J De Leon Morales. Observer synthesis for state-affine systems. *Proceeding of the 29th IEEE conference on decision and control*, Honolulu :pp.784–785, 1990.
- [45] Q.L Han. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays. *Automatica*, 40 :pp.1791–1796, 2004.
- [46] Q.L Han. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity. *Automatica*, 41 :pp.2171–2176, 2005.
- [47] Q.L Han and X Jiang. Delay-dependant robust stability for uncertain linear systems with interval time-varying delay. *Automatica*, 42 :pp.1059–1065, 2006.
- [48] Y He, M Wu, Q.G Wang, and C Lin. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay. *Automatica*, 2006.
- [49] Z.Y He, Y.F Zhang, L.X Yang, and Y.H Shi. Control chaos in nonautonomous cellular neural networks using impulsive control methods. *International Joint Conference on Neural Networks*, 1 :pp.262–267, 1999.
- [50] H.K Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan, New York, 3<sup>e</sup> edition, 2002.
- [51] S Kim, S.A Campbell, and X Liu. Delay independent stability of linear switching systems with time delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 339 :pp.785–801, 2008.
- [52] A.M Kovalev, N.V Kravchenko, and V.N Nesporny. Problems of control and stabilization of impulsive-control dynamic systems with application to nonholonomic mechanics. *Automation and Remote Control*, 68(8) :pp.1444–1458, 2007.

- [53] E Kruger-Thiemer. Formal theory of drug dosage regiments. *International Journal of Theoretical Biology*, 13, 1966.
- [54] O.M Kwon and J.H Park. Exponential stability of uncertain dynamic systems including state delay. *Applied Mathematics Letters*, 19 :pp.901–907, 2006.
- [55] V Lakshmikantham, D.D Bainov, and P.S Simeonov. *Theory of Impulsive Differential Equations*. World Scientific Publishing, 1989.
- [56] Z.G Li, C.Y Wen, and Y.C Soh. Analysis and design of impulsive control systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 46(6) :pp.894–897, June 2001.
- [57] B Liu, K.L Teo, and X Liu. Robust exponential stabilization for large-scale uncertain impulsive systems with coupling time-delays. *Nonlinear Analysis*, 68 :pp.1169–1183, 2008.
- [58] X Liu. Stability of impulsive control systems with time delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 39 :pp.511–519, 2004.
- [59] X Liu and J Shen. Stability theory of hybrid dynamical systems with time delay. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 51 :pp.903–915, 2006.
- [60] A.I Lur’e. *Some nonlinear problems in the theory of automatic control*. London : H.M. Stationery Office, 1957.
- [61] E.A Medina. *Linear impulsive control systems : A geometric approach*. PhD thesis, Ohio University, School of Electrical Engineering and Computer Science, 2007.
- [62] E.A Medina and D.A Lawrence. Reachability and observability of linear impulsive systems. *Automatica*, 44(5) :pp.1304–1309, 2008.
- [63] E.A Medina and D.A Lawrence. State estimation for linear impulsive systems. *ACC’09 : Proceedings of the 2009 conference on American Control Conference*, 2009.
- [64] E.A Misawa and J.K Hedrick. Nonlinear observers-a state of the art survey. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 111 :pp.344–352, 1989.
- [65] F.L Pereira and G.N Silva. Stability for impulsive control systems. *Dynamic System*, 17 :pp.421–434, 2002.
- [66] O Perron. Die stabilitätsfrage bei differentialgleichungen. *Math. Zeitschrift*, 32 :pp.703–728, 1930.
- [67] J.P Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :pp.1667–1694, 2003.
- [68] A.M Samoilenko and N.A Perestyuk. *Impulsive Differential Equations*, volume 14 of A. World Scientific Publishing, 1995.
- [69] A Seuret. *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [70] R Shi and L Chen. An impulsive predator-prey model with disease in the prey for integrated pest management. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009.
- [71] R Shi, X Jiang, and L Chen. The effect of impulsive vaccination on an sir epidemic model. *Applied Mathematics and Computation*, 212 :pp.305–311, 2009.
- [72] A Somolines. Stability of lurie type functional equations. *Journal of Differential Equations*, 23 :pp.191–199, 1977.
- [73] J Sun, Y Zhang, and Q Wub. Impulsive control for the stabilization and synchronization of lorenz systems. *Physics Letters*, 298 :pp.153–160, 2002.

- [74] M.C Tan. Asymptotic stability of nonlinear systems with unbounded delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337 :pp.1010–1021, 2008.
- [75] A.R Teel. Robust hybrid control systems : An overview of some recent results. *Lecture notes in control and information sciences*, 353 :pp.279–302, 2007.
- [76] B.L Walcott, M.J Corless, and S.H Zak. Comparative study of nonlinear state observation techniques. *International Journal of Control*, 45(6) :pp.2109–2132, 1987.
- [77] M Wu, Y He, J.H She, and G.P Liu. Parameter-dependent lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 49(5) :pp.828–832, 2002.
- [78] M Wu, Y He, J.H She, and G.P Liu. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 40 :pp.1435–1439, 2004.
- [79] Mao. X. Exponential stability of nonlinear differential delay equations. *Systems and Control Letters*, 28 :pp.159–165, 1996.
- [80] G Xie and L Wang. Controllability and observability of a class of linear impulsive systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 304(1) :pp.336–355, 2005.
- [81] X.X.Liao. Absolute stability of nonlinear control systems. *Beijing : Sciences Press*, 1993.
- [82] J Yan and J Shen. Impulsive stabilization of functional differential equations by lyapunov-razumikhin functions. *Nonlinear Analysis Theory Methods and Application*, 37 :pp.245–255, 1999.
- [83] T Yang. Impulsive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :pp.1081–1083, 1999.
- [84] T Yang. *Impulsive Control Theory*, volume 272. Springer, 2001.
- [85] Z Yang and D Xu. Stability analysis and design of impulsive control systems with time delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(8), 2007.
- [86] R Yuan, Z Jing, and L Chen. Uniform asymptotic stability of hybrid dynamical systems with delay. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 48(2) :pp.344–348, 2003.
- [87] X.M Zhang, M Wu, J.H She, and Y He. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays. *Automatica*, 41 :pp.1405–1412, 2005.
- [88] S Zhaoa and J Sun. Controllability and observability for a class of time-varying impulsive systems. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 10(3) :pp.1370–1380, 2009.