



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Université Paul Verlaine de Metz

*École Doctorale de Lorraine
d'Informatique, Automatique, Électronique et Mathématiques*

THESE DE DOCTORAT

Spécialité: Génie Électrique

présentée par

Vicente AUCEJO – GALINDO

pour obtenir le grade de DOCTEUR

Méthode tensorielle générale pour une modélisation multiphysique de dispositifs magnétomécaniques rapides

soutenue publiquement à l'ENIM le 16 avril de 2010 devant le Jury composé de:

M. P. PADILLA	École Nationale d'Ingénieurs de Metz	Président
M. S. ALLANO	École Normale Supérieure de Cachan	Rapporteur
M. R. BARGALLÓ	Université Polytechnique de Catalogne	Examineur
M. H. FAYARD	École Nationale d'Ingénieurs de Metz	Examineur
M. R. SANCHÉZ GRANDÍA	Université Polytechnique de Valence	Rapporteur
M. N. REZG	Université Paul Verlaine de Metz	Examineur
M. R. VIVES FOS	Université Polytechnique de Valence	Examineur

Travaux scientifiques réalisée au :

**LGIPM – Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz
GREa - Groupe de Recherche en Électromécanique Avancée (Espagne)**

Résumé

Actuellement la connaissance objectif de dispositifs électromagnétiques est achevée par diverses approches complémentaires. D'une part l'approche physique avec ses formulations mathématiques des forces magnétiques. D'autre part, les approches multiphysiques afin d'aboutir à une connaissance plus fine, et plus réelle, des phénomènes physiques associés aux interactions qui agissent dans le dispositifs. Et finalement, l'approche interdisciplinaire qui tiendrait en compte le cycle de vie du produit, l'éco-conception. Une conception d'un micromoteur ultra rapide à aimantation induite et flux axial est présentée dans ce mémoire avec l'approche physique montrant les limites de celle-ci . Partant donc de l'approche physique, une nouvelle méthode tensorielle générale est développée comme apport à une modélisation multiphysique de dispositifs électromagnétiques, regroupant ainsi les diverses formulations numériques de forces magnétiques. Une caractérisation du nouveau tenseur est présentée et appliquée pour le calcul des forces valable aussi sur des milieux en contact.

MOTS-CLES

Méthode de calcul de forces, Formulation Tensorielle, Modélisation multiphysique, Densité des forces

Summary

Currently the goal of knowledge electromagnetic devices is completed by means of several complementary approaches. On one hand the physical approach with mathematical formulations of magnetic forces. On the other hand, multiphysic approaches to achieve a deeper insight and more real, physical phenomena associated with interactions that act in the devices. And finally, the interdisciplinary approach that takes into account the lifecycle of the product, so called eco-design. A design of an ultra fast micromotor with induced magnetization and axial flux is presented in this work with the physical approach showing the restrictions thereof. Accordingly therefore, the physical approach, a new tensor method is developed as a general contribution to a multiphysic modeling of electromagnetic devices, bringing together the several numerical formulations of magnetic forces. A characterization of the new tensor is presented and it can be also applied to the computation of the forces on bodies in contact.

KEY WORDS

Forces computation methods, Tensor Formulation, Multiphysics modelisation, Force densities

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été conduits au sein du groupe de recherche en électromécanique avancée (GREA) à l'Université Polytechnique de Valence (Espagne) et au sein du Laboratoire Gestion et Production Mécanique (LGIPM) de l'École Nationale d'Ingénieurs de Metz et de l'Université Paul Verlaine de Metz.

Je remercie donc Monsieur Rafael VIVES FOS, Directeur du GREA, de m'avoir accueilli au sein du GREA et à Monsieur Nidhal REZG, Directeur du LGIPM.

Les travaux de recherche réalisés ont été encadrés par :

Monsieur le Professeur Rafael VIVES FOS, à qui je souhaiterai tout d'abord exprimer, envers sa personne, ma plus sincère reconnaissance compte tenu qu'il a été le responsable de toute ma formation universitaire. Avec patience et disponibilité toujours présents, et par ses judicieux conseils scientifiques et personnels, il m'a encouragé dans cette formation à la recherche, en me proposant un sujet de recherche passionnant. Merci encore de m'avoir constamment guidé dans mon travail et de m'avoir soutenu dans mes différentes initiatives.

Monsieur le Professeur Nidhal REZG, que je souhaite remercier pour ses conseils scientifiques et pour sa gentillesse ainsi que pour l'encouragement constant qu'il délivre à tous les chercheurs du Laboratoire. De même, merci de m'avoir permis de travailler dans d'excellentes conditions.

J'adresse mes sincères et chaleureux remerciements aux membres du Jury de Thèse qui ont bien voulu examiner mon travail :

- À Monsieur Pierre PADILLA, Professeur et Directeur de l'ENIM, qui m'a fait le grand honneur d'accepter de présider le jury, pour tout le support matériel et surtout humain qu'il constamment manifesté et pour que nos travaux de recherche aboutissent finalement. Qu'il en soit vivement remercié !

- À Monsieur Sylvain ALLANO, Professeur de l'École Normale Supérieure de Cachan et Directeur Scientifique du Groupe PSA, pour l'intérêt constant qu'il a porté à nos travaux scientifiques, dont il en est l'origine, et pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant la charge de rapporteur ainsi que pour ses différentes remarques constructives.

- À Monsieur Rafael SANCHEZ GRANDIA, Professeur de l'Université Polytechnique de Valencia, qui nous a fait l'honneur de participer à notre jury ainsi que pour l'intérêt qu'il a toujours montré pour nos travaux en acceptant la charge de rapporteur. Je tiens aussi à le remercier tout particulièrement pour le temps, la passion et l'enthousiasme dont il a fait preuve lors de la relecture de ce mémoire. Sa passion de la recherche et son dynamisme m'ont été d'une aide précieuse.

- À Monsieur Ramón BARGALLO, Professeur de l'Université Polytechnique de Cataluña, qui m'a fait l'honneur de participer au jury et qui a démontré un grand intérêt aux recherches présentées dans ce mémoire.

- À Monsieur Henri Fayard, Professeur Agrégé de l'ENIM, que je dois non seulement remercier pour avoir participé au jury mais aussi pour sa contribution, petite mais significative, à nos travaux de recherche.

Mes remerciements s'adressent aussi tout particulièrement aux autres personnes qui m'ont soutenu et qui furent toujours d'une grande disponibilité:

- À Monsieur Alejandro USIETO, Ingénieur Industriel au GREA, par son aide précieuse et son bon humour.

- À Monsieur Valentin PRÉAULT, Élève-Ingénieur de l'ENIM, en stage scientifique au GREA, qui m'a énormément aidé par ses simulations et son expertise.

- À Monsieur Olivier BISTORIN, Directeur d'Exportation de l'ENIM et chercheur du LGIPM, par son amitié et pour toute son aide logistique. Qu'il en soit vivement remercié.

- À Monsieur Rémy RENAULD, Directeur de la Formation Permanente de l'ENIM et chercheur du LGIPM, par son amitié et son intérêt dans nos recherches.

- À Monsieur Juanjo SALAVERT, ingénieur industriel de la société INDIELEC par sa très précieuse aide dans les simulations réalisées.

- À l'ensemble des Élèves-Ingénieurs de l'ENIM, qui sous la direction de Monsieur Henri FAYARD, par leurs excellents travaux et générosité, ont contribué à nos travaux de recherche. Parmi : Hugo PFEFER, Guillaume PERRIN, Yann LE FLOCH, Paul BENOIT, Medhi ZINOUN, Thomas HALLEREAU, Charlotte THOUVENOT, Yoan HAMON et Sébastien MAGAJA, entre autres.

- À l'ensemble des mes collègues enseignants et à mes élèves de l'Université de Floride (Valencia) et tout particulièrement à Monsieur Jaume Llorca qui m'a toujours encouragé dans ma formation doctorale.

- Je pense également à tout le personnel de l'ENIM et du LGIPM en particulier, du GREA de l'Université Polytechnique de Valencia, les enseignants, les chercheurs, le personnel administratif, les doctorants, les stagiaires et plus particulièrement: à Béatrice SALVÊQUE et Cathy JUNG pour leur travail indispensable au fonctionnement du LGIPM.

- Je remercie aussi tous mes élèves-ingénieurs de l'Université Polytechnique de Valencia,

- Je tiens à remercier tous les amis qui m'ont soutenu durant ces travaux, autant dans les bons que les mauvais moments.

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille en Espagne. Mes parents, pour leur soutien et leur encouragement illimité durant ces longues années d'études. Je voudrais leur témoigner ma plus profonde reconnaissance. Je tiens beaucoup à remercier aussi les membres de ma famille, mon épouse Gemma, mes enfants Natalia et Raquel, par leur patience et leur compréhension.

Sommaire

INTRODUCTION GÉNÉRALE	11
CHAPITRE 1 : UN ETAT DE L'ART SUR DES APPROCHES DE CONCEPTION DE DISPOSITIFS MAGNETOMECANIQUES.....	15
1.1 Approches physiques : calcul de forces magnétiques	15
1.1.1 Méthode des Courants Équivalents.....	16
1.1.2 Méthode des Charges Magnétiques Équivalentes	20
1.1.3 Méthode de Maxwell.....	23
1.1.4 Méthode de Kelvin.....	26
1.1.5 Méthode des Travaux virtuels ou variation de l'énergie	27
1.1.6 Conclusions sur les différentes procédures de calcul des forces dans les milieux magnétiques	28
1.2 Approches multiphysiques	30
1.2.1 Pourquoi a-t-on besoin d'outils multiphysiques ?	30
1.2.2 Différents types d'interactions physiques	31
1.2.3 Les limites de faisabilité industrielle enfin repoussées	32
1.2.4 Approches et couplages multiphysiques	33
1.3 Approches interdisciplinaires: l'exemple de l'éco-conception	36
1.4 Une approche conceptuelle des dispositifs magnéto-mécaniques à base de champs magnétiques générés ou induits	37
1.5 Un bref état de l'art des matériaux magnétiques pour des dispositifs rapides à aimantation induite	38
1.5.1 Les matériaux magnétiques laminés	39
1.5.2 Les matériaux composites ou poudres magnétiques douces.....	41
CHAPITRE 2 : LA CONCEPTION D'UN MICROMOTEUR RAPIDE À AIMANTATION INDUITE ET FLUX AXIAL.....	43
2.1 Micromoteurs rapides à aimantation induite : un état de l'art	43
2.1.1 Expériences basées sur des principes électrostatiques.....	44
2.1.2 Expériences basées sur des principes magnétiques avec aimantation induite...45	
2.1.3 Expériences basées sur les principes magnétiques à aimantation générée	47
2.2. Quelques modèles	48
2.2.1 Modèle analytique linéaire.....	48
2.2.2 Modèle magnétique par schéma électrique équivalent (réluctances)	52
2.2.3 Modèles par Éléments Finis	54
2.3 Conception d'un micromoteur ultra-rapide à aimantation induite.....	55
2.3.1 Cahier des charges; choix d'une structure à flux axial et pré-dimensionnement analytique d'un micromoteur ultra rapide à aimantation induite et flux axial	55
2.3.2 Modélisation par Éléments Finis.....	55

2.3.3 Caractérisation numérique 3D du champ magnétique: Évaluation du couple en régime permanent.....	61
2.3.4 Analyse paramétrique du micromoteur.....	61
2.3.5 Résultats en Régime Permanent.....	64
2.4 Conclusions.....	69
CHAPITRE 3 : APPROCHE MULTIPHYSIQUE : UNE CONTRIBUTION « TENSORIELLE UNIFIÉE ».....	71
3.1 Obtention d'un tenseur d'unification des formulations classiques des forces	77
3.1.1 Une réflexion portant sur les concepts d'énergie magnétique et de co-énergie d'un point de vue thermodynamique.....	78
3.1.2 Obtention d'un nouveau tenseur magnétostatique par application du principe des Travaux Virtuels aux densités d'énergie et de co-énergie.....	80
3.1.3 Dédution de la densité de force volumétrique à partir du nouveau tenseur obtenu.....	84
3.2 Dédution du champ de forces magnétiques à partir du nouveau tenseur dans un système physique constitué par des milieux magnétiques « en contact », non limités par le vide.....	85
3.3 Dédution, à partir du nouveau tenseur de chaque formulation classique de calcul des forces magnétiques, dans un milieu quelconque limité par le vide	87
3.3.1 Dédution du tenseur de Maxwell.....	89
3.3.2 Dédution de l'expression de la force de Lorentz.....	90
3.3.3 Dédution de la force totale, en termes de densités de forces associées aux méthodes de Charges Équivalentes et Courants Équivalents, sur un corps dans le vide	91
3.3.4 Dédution de la force totale en fonction de la densité de force associée a la méthode de Kelvin.....	100
3.4 Quelques considérations épistémologiques sur la méthode Tensorielle Généralisée.....	103
3.5 Conclusions.....	107
CHAPITRE 4 : CARACTÉRISATION NUMÉRIQUE DE L'APPROCHE « TENSORIELLE UNIFIÉE».....	109
4.1 Hypothèses des simulations numériques réalisées et outil numérique développé pour le calcul des forces magnétiques à partir des grandeurs magnétiques d'induction et de champ	109
4.2 Étude comparative des méthodes classiques et du nouveau tenseur sur un dispositif magnétique entouré par le vide.....	110
4.2.1 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanent et non permanent	111
4.2.2 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanents.....	111
4.3 Étude comparative des méthodes classiques et du nouveau tenseur dans un dispositif magnétique avec des milieux continus en contact.....	112
4.3.1 Adaptation du tenseur pour le calcul des forces d'origine magnétique sur des corps en contact	112

4.3.2 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanent et non permanent.....	116
4.3.3 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanents.....	117
4.5 Conclusions	119
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....	121
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	123
ANNEXE 1 : PRÉDIMENSIONNEMENT DU MICRO-MOTEUR À FLUX AXIAL ET À AIMANTATION INDUITE	131

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le vecteur électricité est un élément clé de l'évolution des sociétés humaines et sa maîtrise a permis d'améliorer les conditions de vie et de développer les activités industrielles. Étant disponible n'importe où sur la planète, l'énergie électrique doit être produite, transportée, distribuée puis utilisée, le tout en prenant en considération des contraintes environnementales variées. Ces différentes opérations pour être optimisées, nécessitent des recherches scientifiques interdisciplinaires, allant des différents matériaux aux systèmes physiques sans oublier « l'écologie humaine ».

Aussi les recherches actuelles doivent s'organiser principalement autour de plusieurs thématiques verticales : les matériaux, les constituants et les systèmes, auxquels se rajoutent deux groupes transversaux, l'éco-conception tenant compte du cycle de vie et le groupe associé à la sûreté-fiabilité du propre système physique. C'est ainsi que depuis quelques années, de nombreuses recherches et développements de nouveaux matériaux et dispositifs magnéto-mécaniques ont été engagés marquant une tendance plus large de l'utilisation et une meilleure maîtrise de l'énergie électrique.

Deux problèmes majeurs se sont dès lors posés en conception intégrée de dispositifs magnétomécaniques¹ : celui de l'analyse des performances du produit, et celui de la conception propre du produit. Ces deux problèmes contribuent à la phase de fabrication du produit et aussi à une meilleure connaissance de sa réalité et de son influence sur l'environnement. Dans les deux cas, il est généralement nécessaire de prendre en compte l'intégration des interactions des phénomènes physiques, de différente nature, qui se manifestent dans le procédé complexe de la conversion magnéto-mécanique de l'énergie. Une recherche des répercussions de ces interactions physiques sur le procédé de fabrication, sur la gestion du cycle de vie, sur la maintenance et finalement son influence sur l'environnement, sont actuellement d'un grand intérêt scientifique et industriel, relevant de même des sciences humaines. La contribution scientifique présentée dans ce mémoire de thèse de doctorat se situe dans ce contexte interdisciplinaire.

À partir d'un besoin technologique, auquel nous avons essayé de répondre avec le savoir faire existant, nous a permis d'identifier des problèmes qui limitent les outils de calcul de champ magnétique. Nous avons donc entrepris des recherches pour combler cette lacune.

En effet, le terme d'interaction physique est quantifié classiquement avec la grandeur "force". Quand on étudie la conversion magnéto-mécanique de l'énergie, on est alors en train d'étudier un processus où les forces de nature magnétique ou mécanique se confondent, aussi bien dans leur origine que dans leurs manifestations. L'objectif de nos recherches est donc centré sur l'obtention d'un formalisme unifié de forces magnétiques associées aux interactions physiques dans les dispositifs magnéto-mécaniques. Une « percée scientifique », propre de la physique théorique est proposée par la suite avec l'obtention d'un tenseur unifié pour le calcul des forces magnétiques en vue d'une approche multiphysique imposée par l'étude des dispositifs magnéto-mécaniques rapides.

¹ Dans le mémoire a été employé fréquemment le concept de dispositif magnétomécanique qui se correspond avec celui de dispositif électromagnétique, avec aucun, ou avec un ou plusieurs degrés de liberté, dans la mesure où les "actions mécaniques" présentes dans le dispositif sont en rapport avec un champ magnétique résultant, généré ou induit. Cette notion de "magnétomécanique" montre bien que l'on est face à des dispositifs, vivant ou pas, où la propulsion est d'origine magnétique, induite ou générée dans des matériaux magnétiques divers, solides, fluides, etc. Il est évident qu'un dispositif électromagnétique a beaucoup plus de synergies avec d'autres disciplines de la physique.

Dans le premier chapitre sont présentées différentes approches employées en vue de caractériser numériquement les forces magnétiques. Ce sont des approches contemporaines, dites de Landau ou de Feymann, qui ont permis d'avoir un « regard » sur la réalité étudiée. Ce sont des approches physiques (magnétiques, électriques, thermiques, ...) limitées à certains comportements des matériaux, ce qui pour certaines applications, nous poussent à des recherches scientifiques d'approches ou « regards » multiphysiques mais aussi interdisciplinaires sur la base d'une intelligente synergie entre les sciences expérimentales et les sciences humaines.

En ce qui concerne l'approche physique, différentes formulations classiques pour le calcul de forces magnétiques sont présentées. Un élément essentiel qui influe sur la conception est le choix du mode de calcul des forces magnétiques. En ce sens, il est connu qu'un premier « iter » afin d'évaluer les forces d'origine magnétique peut être fait à partir de la variation d'énergie : concept utilisé par les scientifiques au XIX siècle en vue d'unifier les différentes disciplines physiques. Par ailleurs, un deuxième « iter » est l'astucieux emploi du tenseur de Maxwell², méthode qui ne nécessite pas, contrairement à la première, l'évaluation de l'énergie magnétique de la structure.

Ainsi naît au stade de la phase initiale de la conception un problème qui n'est pas évident à résoudre : le choix du modèle mathématique à employer en vue d'une modélisation des interactions physiques agissants dans les matériaux du dispositif magnéto-mécanique. Le modèle choisi aura en effet une influence non seulement au niveau de la modélisation multiphysique mais aussi par la suite, sur la modélisation de la fabrication, de la maintenance et finalement du cycle de vie du produit.

Finalement sont présentées dans ce premier chapitre, en fonction des matériaux employés dans des dispositifs magnéto-mécaniques, matériaux magnétiques ou électriques, et aussi en fonction de la nature du champ magnétique requis, les différentes solutions fonctionnelles possibles de dispositifs magnéto-mécaniques. On aboutit très facilement à une classification physique fonctionnelle des dispositifs magnéto-mécaniques, et des dispositifs magnétiques, qui nous permet de mieux cerner non seulement la conception du produit, mais aussi la connaissance a priori de certaines performances.

Sont décrits aussi les matériaux actuels pouvant être soumis à des hautes fréquences de fonctionnement et donc d'intérêt pour des « micro dispositifs » magnéto-mécaniques.

Dans le deuxième chapitre, quelques approches de « modèles physiques » de dispositifs électromagnétiques sont rappelées, aussi bien pour la conception proprement dite comme pour l'analyse des performances : le modèle linéaire, le modèle exprimé en termes de réluctances et les différents modèles par éléments finis.

Finalement, une conception d'un micro dispositif magnéto-mécanique ultra-rapide à aimantation induite est réalisée. Ainsi, une étude de comportements statiques des matériaux du dispositif magnéto-dynamique a été réalisée avec Flux 3D. Les travaux de conception réalisés nous permettent d'aboutir aux limites des modèles physiques utilisés puisqu'ils nous ne fournissent pas de connaissances sur les contraintes magnéto-mécaniques auxquelles sont soumis les matériaux du dispositif ultra-rapide. Se justifie ainsi la recherche d'une approche multiphysique qui nous mène peu à peu à la recherche d'une formulation physico-mathématique unifiée des interactions magnétostatiques et mécaniques.

² RIOUX C., Cours d'Électrotechnique DEA Génie Électrique Paris, Paris VI, 1986

Les résultats des recherches sur cette formulation unifiée présentée dans le chapitre 3, sont divisés en 4 parties:

1.- Présentation de l'obtention d'un tenseur des contraintes magnétostatiques dans un milieu matériel quelconque, à partir de l'application du principe des Travaux Virtuels pour la densité de co-énergie.

2.- Présentation du procédé tensoriel d'obtention de la force totale exercée sur un corps entouré d'un milieu magnétique quelconque, (comme l'intégration des densités volumique et surfacique obtenues à partir du tenseur général des contraintes).

3.- Ce qui démontre que l'application de la méthode tensorielle générale appliquée au cas particulier de corps entourés par le vide reproduit les méthodes classiques de Maxwell, des sources équivalentes (courants et charges) et de Kelvin. Ainsi l'application de cette procédure à un élément de courant dans le vide permet d'obtenir l'expression de la force de Lorentz.

Pour introduire le chapitre 3, on présente une "réflexion" sur les méthodes classiques d'obtention des forces, analysée selon des hypothèses théoriques et leur développement. On a constaté dans cette "révision" analytique qu'il existe un désaccord basé sur la distribution locale des forces magnétiques, alors que les expressions de la force totale coïncident dans tous les cas.

La première partie du chapitre 3 est centrée sur l'obtention d'un tenseur symétrique des contraintes magnétostatiques, pour un milieu quelconque. Il est évident que le tenseur obtenu par application du principe des Travaux Virtuels ne dépend pas du choix d'énergie ou de co-énergie comme grandeur qui définit l'état du système.

La seconde partie de ce chapitre propose une méthodologie d'application du tenseur obtenu par le calcul de la force totale exercée sur un corps quelconque entouré par un milieu magnétique arbitraire. Et on présente une expression générale de la force avec des composantes volumiques et surfaciques. Pour cela on a déduit les densités de force de volume et de surface à partir du tenseur général.

La 3ème partie du chapitre est destinée à la validation théorique de la méthodologie proposée. On a validé que l'application de ce formalisme au cas des corps entourés par le vide reproduit, sans aucune hypothèse supplémentaire, les expressions classiques des (méthodes) des sources équivalentes (charges et courants) et de Kelvin. Ainsi on a montré qu'à partir de cette application, sont immédiatement obtenues les résultats classiques du tenseur de Maxwell et de la force de Lorentz.

Pour finir on présente dans ce chapitre quelques considérations à caractère épistémologique sur la procédure proposée. On contrastera cette méthode avec les méthodes classiques et on conclura que contrairement à celles-ci, la méthode tensorielle générale ne requiert aucune modélisation du modèle continu conduisant à une expression de la force. Cette procédure est fondée sur un principe général : celui des Travaux Virtuels, qui ne nécessitent pas l'expression formelle d'une force magnétique. D'autre part on mettra en valeur le fait que le tenseur obtenu est validé pour un milieu matériel quelconque, ce qui nous mènera à pouvoir calculer le champ de forces de corps en contact.

Le chapitre 4 de ce rapport est ainsi consacré à la vérification numérique de la méthodologie proposée. Les résultats ont été obtenus pour des configurations simples de deux corps à des distances différentes, en observant que la force totale obtenue par la Méthode du Tenseur unifié coïncide avec celle obtenue en utilisant la Méthode du

Tenseur de Maxwell, des Courants Équivalents, des Charges Équivalentes, de Kelvin et des Travaux Virtuels. A partir de ces résultats on propose, comme dernière contribution, une méthode pour calculer les forces entre les corps en contact, à partir du tenseur généralisé en admettant l'hypothèse de continuité des forces entre corps proches.

CHAPITRE 1 : UN ETAT DE L'ART SUR DES APPROCHES DE CONCEPTION DE DISPOSITIFS MAGNETOMECHANQUES

1.1 Approches physiques : calcul de forces magnétiques

Dans ce chapitre sont présentées et comparées différentes méthodes permettant de calculer la force globale agissant sur un dispositif électromagnétique. Pour chaque méthode, les bases des expressions de la densité de force sont rappelées³. Les répartitions des densités de force ainsi que la force globale obtenues à l'aide de chaque méthode seront comparées et présentées dans le chapitre 4 en utilisant un code de calcul par Éléments Finis.

Comme un moteur est un système trop complexe pour l'analyse précise des phénomènes physiques élémentaires, les efforts doivent porter sur l'étude d'un autre système, le plus simple possible, pour ne pas introduire de phénomènes mal maîtrisés ou impossibles à prendre en compte. Imposer un système ayant un comportement linéaire est certes restrictif mais permet toutefois d'effectuer une comparaison des formulations.

Dérivée de l'énergie, tenseur de Maxwell, courant équivalent.... que de formulations différentes pour un même phénomène. Celui de la force engendrée sur un matériau présentant des propriétés magnétiques lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique. Ce phénomène physique peut-être analysé sous plusieurs angles de vue différents et à chaque analyse, une formulation lui est adjointe. Dans ce chapitre, la présentation des formulations associées au calcul des forces d'origine magnétique est faite progressivement. Toutefois, la méthode dite du tenseur de Maxwell n'est prise en compte qu'à la fin du chapitre car elle présente des particularités qu'il convient de souligner.

En introduction, deux approches sont citées pour présenter la classification des matériaux. R. FEYNMAN⁴ propose d'observer le comportement du matériau vis à vis de l'induction magnétique. D. SIVOUKHINE⁵, comme L. LANDAU⁶, restent très théoriques et utilisent des considérations énergétiques au niveau atomique. Ces deux principes de description se retrouvent aussi au niveau du calcul des forces d'origine magnétique. L'aspect comportemental induit les méthodes associées aux sources équivalentes et l'approche énergétique donne naissance à la dérivée de l'énergie.

La première partie de ce chapitre est mise à profit pour introduire les notions de base conduisant au calcul des forces pour toutes les méthodes usuellement employées.

Les quelques lignes précédentes semblent opposer deux grandes écoles de physique. Il faut noter que les physiciens russes ne nient pas l'hypothèse des sources équivalentes, mais ils ne l'utilisent pas pour déterminer les forces d'origine magnétique. De même, R.P. FEYNMAN est très célèbre pour son cours de mécanique de Princeton où les aspects énergétiques sont très loin d'être oubliés.

³ BARRE O., « Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale » Thèse de Doctorat École Central de Lille et Université des Sciences et Technologies de Lille. 2003.

⁴ FEYNMAN, R. physicien américain, prix Nobel de physique en 1965

⁵ SIVOUKHINE, D. Cours de physique générale, Tome 3 Électricité, édition MIR 1983

⁶ LANDAU, L., physicien russe, prix Nobel de physique en 1962

Un champ magnétique est avant tout connu par l'intermédiaire des effets physiques qu'il engendre. C'est à partir de cette remarque que le principe d'équivalence est introduit. Un aimant engendre un champ magnétique, de même qu'un courant circulant dans des spires. Si une source de champ magnétique, constituée d'un conducteur parcouru par des courants, engendre la même répartition spatiale de champ qu'un aimant, alors ces deux entités sont équivalentes, car aucun moyen de mesure ne peut les différencier. Si ces deux sources sont maintenant plongées dans un autre champ magnétique, elles doivent se comporter de la même manière. En conséquence, tout calcul traduisant un phénomène physique associé à la première source (comme le calcul des forces par l'intermédiaire de la loi de Laplace) peut être utilisé pour rendre compte du phénomène physique rencontré sur la deuxième source. A partir de ce principe d'équivalence, deux entités virtuelles supposées engendrer les mêmes effets qu'un champ magnétique sont créées : les courants et les masses magnétiques équivalentes.

Ces sources équivalentes sont présentes dans des documents de référence comme les publications de G. FOURNET⁷, E. DURAND⁸ où encore, dans des documents plus récents⁹. Dans tous les cas, elles sont supposées interpréter l'effet de la perméabilité des matériaux pour expliquer l'accroissement de l'induction magnétique. En conclusion, le solide est assimilé à un matériau amagnétique contenant ces sources de champ. Toutefois, les deux remarques suivantes ne doivent pas être oubliées :

- Le principe d'équivalence est associé à des effets extérieurs au solide. Donc il sera peut-être difficile de l'utiliser par rapport au solide lui-même.
- La source virtuelle du champ magnétique est associée au solide. En supprimant la source de champ extérieure, le solide n'engendre pas de champ magnétique. Cette source est donc aussi fictive.

1.1.1 Méthode des Courants Équivalents

L'idée centrale de cette méthodologie consiste à pouvoir obtenir une modification d'un champ magnétique par l'ajout d'un nouveau domaine créé par un courant. Considérons à cet effet un volume de matériau V_1 avec une perméabilité relative μ_1 , entourant un volume de matériau V_2 , ayant une perméabilité magnétique μ_2 . Le fait que la perméabilité du volume V_2 soit différente de l'environnement extérieur peut causer la variation de l'intensité du champ magnétique d'un milieu à un autre. Si l'on suppose en outre que la perméabilité de V_2 est $\mu_2 = \mu_r \cdot \mu_0$ avec $\mu_r \gg 1$, il se produira une augmentation du flux au sein de V_2 , c'est à dire qu'il y aura une forte concentration des lignes de champ.

Sur les deux milieux l'intensité du champ magnétique se manifeste par un intensité $\mathbf{H}_2$ dans le milieu 2 et un intensité $\mathbf{H}_1$ à l'intérieur du milieu 1. Nous appellerons $\mathbf{n}$, le vecteur normal à la surface du volume V_2 (voir Figure 1.1).

⁷ FOURNET G., « Électromagnétisme à partir des équations locales ». Masson Paris 1985

⁸ DURAND E., « Magnétostatique » Masson Paris, 1968

⁹ LACHEISSERIE E. de, « Magnétisme - Tome 1 Fondements », Collection Grenoble Science 1999

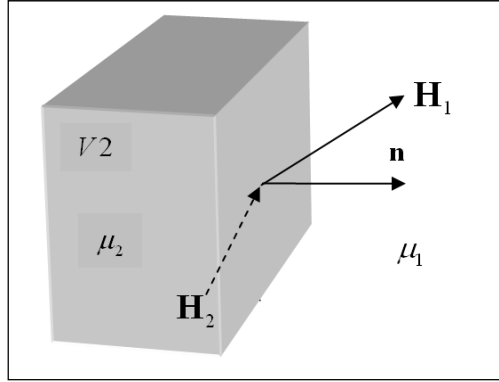


Figure 1.1

La méthode des Courants Équivalents propose de reproduire cette distribution en supposant que V_2 aurait une perméabilité μ_0 (comparé à un solide sans propriétés magnétiques) traversé par deux distributions de courant, l'un superficiel et l'autre volumétrique. Ces deux distributions équivaldraient à considérer que V_2 a présenté une perméabilité μ_2 .

De toute évidence, ce modèle équivalent est conçu pour utiliser la loi de Laplace et calculer la force totale exercée par une induction externe sur V_2 . Cette méthode établit donc clairement une première approximation pour le calcul des forces magnétiques dans le milieu, à partir des extrapolations de la procédure de calcul des forces de courant.

Sur la base de l'intensité du champ magnétique créé par une densité de courant surfacique sur un conducteur *infiniment long* cylindrique creux (Fig.1.2)

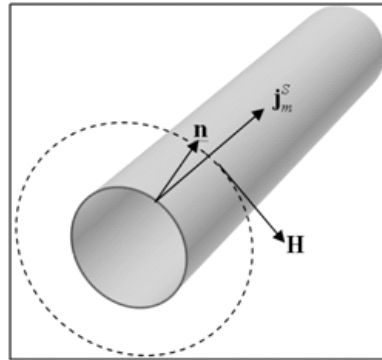


Figure 1.2

et en appliquant le théorème d'Ampère à une courbe située à l'extérieur de la surface (de manière à englober l'ensemble de la surface actuelle), nous avons:

$$\mathbf{H} = \mathbf{j}_m^S \wedge \mathbf{n} \quad (1.1)$$

De cette équation, nous pouvons résoudre la densité de courant de surface, comme:

$$\mathbf{j}_m^S = -\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \quad (1.2)$$

L'objectif est de remplacer le milieu magnétique par un autre milieu non magnétique en utilisant une densité de courant superficielle. Cette densité de courant

gène au sein du milieu une intensité de champ magnétique égale à celui que nous voulons générer avec le milieu magnétique.

Considérons donc un milieu particulier de perméabilité $\mu_2 = \mu_{r2} \cdot \mu_0$ auquel on applique une intensité de champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_1$. En conséquence, il y a dans le corps une induction $\mathbf{B}_2$. Le vecteur aimantation $\mathbf{m}_2$ serait celui qui nous donne l'équation suivante pour le même milieu qu'on considère comme non-magnétique:

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2 \cdot \mathbf{H}_2 = \mu_0 \cdot (\mathbf{H}_2 + \mathbf{m}_2) \quad (1.3)$$

Autrement dit, on peut considérer $\mathbf{m}_2$ comme l'induction supplémentaire ajouté pour assumer une diminution de la perméabilité au milieu.

Revenons à notre volume V_1 . Suite à notre notation, si il est vérifié que $\mu_2 > \mu_1$, V_1 peut être considéré comme non-magnétique et on peut alors écrire :

$$\mathbf{B}_2 = \mu_2 \cdot \mathbf{H}_2 = \mu_1 \cdot (\mathbf{H}_2 + \mathbf{m}_2) \quad (1.4)$$

La discontinuité du champ magnétique représentée par la densité de courant de surface peut donc s'écrire:

$$\mathbf{m}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_1} - \mathbf{H}_2 = \frac{\mu_2 \cdot \mathbf{H}_2}{\mu_1} - \mathbf{H}_2 = (\mu_r - 1) \cdot \mathbf{H}_2 \quad (1.5)$$

De l'équation de continuité de l'induction, nous en déduisons:

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_1 \cdot \mathbf{j}_m^S \quad (1.6)$$

$$\mathbf{n} \wedge (\mu_1 \cdot \mathbf{H} - \mu_2 \cdot \mathbf{H}) = \mu_1 \cdot \mathbf{j}_m^S \quad (1.7)$$

$$\mathbf{n} \wedge (\mu_1 \cdot \mathbf{H} - \mu_1 \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{m}_2)) = \mu_1 \cdot \mathbf{j}_m^S \quad (1.8)$$

$$\mathbf{n} \wedge (-\mathbf{m}_2) = \mathbf{j}_m^S \quad (1.9)$$

$$\mathbf{j}_m^S = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}_2 \quad (1.10)$$

La densité de courant de surface est donc égale au produit vectoriel entre le vecteur unitaire normal à la frontière et le vecteur aimantation présent dans le milieu 2.

Enfin, la densité de courant surfacique qui produit la même distribution spatiale de champ magnétique équivalent à celle produite par un incrément de la perméabilité est :

$$\mathbf{j}_m^S = (\mu_r - 1) \cdot \mathbf{H}_2 \wedge \mathbf{n} \quad (1.11)$$

On peut considérer que l'intensité du champ magnétique a une composante tangentielle et une normale. Puisque la composante normale du vecteur est colinéaire avec le vecteur $\mathbf{n}$, son apport à la densité de courant de surface est nul. Ainsi, la dernière expression peut prendre la forme :

$$\mathbf{j}_m^S = (\mu_r - 1) \cdot \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \quad (1.12)$$

De plus, il peut être démontré que:

$$\mathbf{j}_m = \vec{\nabla} \times ((\mu_r - 1) \cdot \mathbf{H}) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{j}_m = (\mu_r - 1) \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{H} + \vec{\nabla} \cdot (\mu_r - 1) \times \mathbf{H} \quad (1.14)$$

Pour un milieu homogène et linéaire (dans lequel il n'y a aucune modification de la perméabilité):

$$\mathbf{j}_m = (\mu_r - 1) \cdot \vec{\nabla} \times \mathbf{H} \quad (1.15)$$

La densité volumétrique peut aussi être exprimée en fonction du vecteur aimantation, sur la base de l'expression générale ci-dessus appliquée à notre milieu 2:

$$\mathbf{j}_m = \vec{\nabla} \times ((\mu_r - 1) \cdot \mathbf{H}_2) \quad (1.16)$$

$$\mathbf{j}_m = \vec{\nabla} \times \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right) \cdot \mathbf{H}_2 \right) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{j}_m = \vec{\nabla} \times \left(\left(\frac{\mu_2 \cdot \mathbf{H}_2}{\mu_1} - \mathbf{H}_2 \right) \right) \quad (1.18)$$

$$\mathbf{j}_m = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_1} - \mathbf{H}_2 \right) \quad (1.19)$$

$$\mathbf{j}_m = \vec{\nabla} \times \mathbf{m}_2. \quad (1.20)$$

Autrement dit, la densité volumétrique de courant équivalent est obtenu comme le rotationnel de l'aimantation dans le milieu. Une fois que l'on a calculé les deux densités de courant (surfactive et volumétrique), la force totale est calculée en utilisant la loi de Laplace. Le courant total est obtenu en intégrant les densités surfaciques et volumétriques de ces expressions ci-dessus. En appliquant la loi de Laplace à la densité de courant surfactive, on considère l'induction externe comme valeur moyenne à l'intérieur et à l'extérieur du milieu. Ainsi, l'expression générale de la force sur un support de milieu 2 entouré par un milieu 1 serait donné, en utilisant le modèle actuel équivalent, par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^{(j)} &= \int_{V_2} ((\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{B}_2) dV + \oint_{S_2} \left(-(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}_2) \left(\frac{\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1}{2} \right) \right) dS_2 = \\ &= \int_{V_2} (\mathbf{j}_m \wedge \mathbf{B}_2) dV + \oint_{S_2} \left(\mathbf{j}_m^S \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1}{2} \right) \right) dS_2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.1.2 Méthode des Charges Magnétiques Équivalentes

L'idée centrale de cette méthode est aussi de trouver une source qui reproduit la même distribution spatiale du champ magnétique dans le milieu **2** considéré comme non-magnétique. La méthode de Charges Magnétiques Équivalentes, aussi connue sous le nom de Masses Magnétiques Équivalentes, est développée dans l'objectif d'avoir une similitude formelle avec le champ électrostatique.

Rappelons qu'une charge électrique ponctuelle produit une divergence de valeur:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (1.22)$$

ou ρ est une distribution volumétrique de charge et ε_0 est la permittivité du vide.

Toutefois, dans le cas du champ magnétique, la divergence de la densité de flux est égale à zéro

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.23)$$

Pour comprendre la notion de « charge magnétique », nous nous concentrons sur la Figure 1.3. La charge magnétique est représentée par le corps brun. Cette masse est soumise à une induction externe $\mathbf{B}$. Si l'on définit une surface S contenant une masse magnétique, nous voyons que les lignes de champ entrantes et sortantes à la surface sont identiques, comme en témoigne l'expression mathématique (1.23).

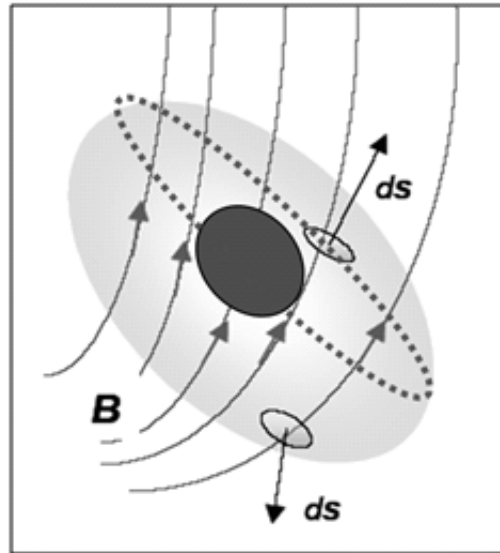


Figure 1.3

Nous coupons virtuellement la surface S ainsi que la masse magnétique par le plan contenant l'ellipse marquée en pointillés rouges. Dans cette situation, représentée par la Figure 1.4, nous trouvons seulement les lignes de champ sortant par rapport à S et il n'y a pas de ligne d'arrivée. De cette façon, la divergence ne peut être nulle.

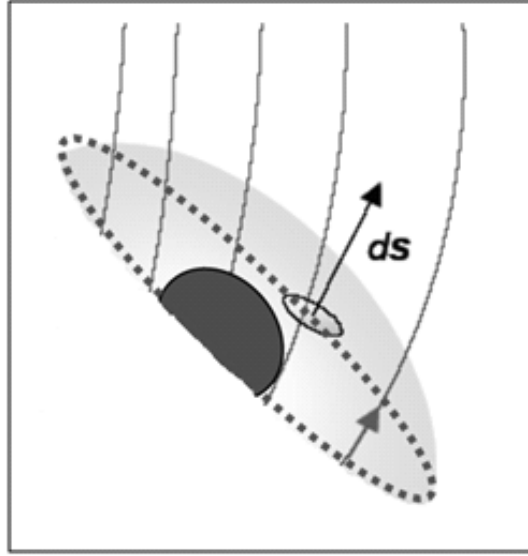


Figure 1.4

C'est précisément le rôle de la masse magnétique. Après la coupe, nous obtenons la moitié de la masse magnétique, nous avons éliminé la partie supposée responsable de l'équilibre du flux sortant. Si nous voulons vérifier l'expression (1.23), cette demie masse magnétique supprimée doit satisfaire la formule de la divergence ci-dessous :

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = -\rho_m \quad (1.24)$$

En supposant un milieu linéaire:

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \cdot \mathbf{H}) = \mu \cdot \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} = -\rho_m \quad (1.25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} = -\rho_m / \mu \quad (1.26)$$

Cette interprétation que nous avons faite avec une masse magnétique de nature volumétrique pourrait également être développée avec une distribution de masse de nature superficielle.

La procédure est similaire à celle suivie par la méthode des Courants Équivalents. Nous considérons le corps comme un volume V_2 solide non magnétique, mais avec une distribution volumétrique et superficielle des masses magnétiques produisant la même distribution d'induction qu'aurait le volume V_2 avec sa vraie perméabilité.

La similitude de cette procédure avec le problème électrostatique est de nouveau évidente et peut permettre une extrapolation pour calculer la force magnétique sur les corps, comme le montre le tableau 1.1

<i>Électrostatique</i>	<i>Magnétostatique</i>
$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$	$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} = -\rho_m / \mu$
$\mathbf{F}_{\text{électrostatique}} = q_{\text{électrique}} \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{F}_{\text{magnétostatique}} = \rho_{\text{magnétique}} \cdot \mathbf{H}$

Tableau 1.1

Tel que présenté, la masse magnétique est identifiée comme une source de champ magnétique ayant pour effet que la divergence de la force du champ n'est pas nul.

$$\rho_m = -\mu \cdot \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} \quad (1.27)$$

L'étape suivante est très similaire à ce que nous avons fait pour la méthode des Courants Équivalents. La valeur de la masse précédente est donnée pour un milieu d'une perméabilité magnétique μ . Si le milieu est désormais considéré comme non-magnétique, la masse magnétique devrait fournir une intensité de champ magnétique équivalent qui aurait existé si le milieu possédait sa perméabilité initiale. Comme indiqué dans le paragraphe précédent, la valeur de l'intensité du champ n'est autre que le vecteur aimantation $\mathbf{m}$. Ainsi, l'équivalence peut être exprimée par la relation suivante :

$$\rho_m = -\mu \cdot \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \mathbf{m} = -\mu_0 \cdot \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} \right) \quad (1.28)$$

Selon les notations générales utilisées dans ce rapport, on peut écrire :

$$\rho_m = -\mu_1 \cdot \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_1} - \mathbf{H}_2 \right) \quad (1.29)$$

$$\rho_m = -\mu_1 \cdot \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{m}_2) \quad (1.30)$$

Dans cette équation ρ_m est la masse magnétique par *unité de volume* qui permet de prendre en compte l'augmentation de la densité de flux dans le solide non magnétique équivalent. Il est représenté comme la divergence de l'aimantation du matériau. L'aimantation est exprimée par le terme :

$$\mathbf{m}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_1} - \mathbf{H}_2 \quad (1.31)$$

S'agissant de la répartition de la masse magnétique par unité de surface, sa présence est justifiée pour garantir la discontinuité de l'intensité du champ en raison du changement de milieu. La masse magnétique surfacique tend à augmenter la composante normale de l'intensité du champ, de la forme :

$$\rho_s = \mu_1 \cdot (\mathbf{H}_{1n} - \mathbf{H}_{2n}) \quad (1.32)$$

$$\rho_s = \mu_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{B}_{1n}}{\mu_1} - \mathbf{H}_{2n} \right) \quad (1.33)$$

comme $\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$,

$$\rho_s = \mu_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{B}_{2n}}{\mu_1} - \mathbf{H}_{2n} \right) \quad (1.34)$$

$$\rho_s = \mu_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_1} - \mathbf{H}_2 \right) \cdot \mathbf{n} \quad (1.35)$$

$$\rho_s = \mu_1 \cdot \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (1.36)$$

La répartition surfacique est obtenue comme la projection de l'aimantation de la matière sur les points de la surface et orientée suivant la composante normale à la surface.

Les expressions qui fournissent les forces par unité de volume ou de surface sont:

$$\mathbf{F}_v = \rho_m \cdot \mathbf{H} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{F}_s = \rho_s \cdot \mathbf{H} \quad (1.38)$$

La force totale est obtenue par la somme de l'intégrale de volume et de surface des deux densités des forces :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^{(\rho)} &= \int_{V_2} -\mu_0 (\bar{\nabla} \cdot \mathbf{m}_2) \cdot \mathbf{H}_2 dV + \oint_{S_2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1}{2} \right) dS_2 = \\ &= \int_{V_2} \rho_m \mathbf{H}_2 dV + \oint_{S_2} \rho_m^s \left(\frac{\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1}{2} \right) dS_2 \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.1.3 Méthode de Maxwell

L'origine de cette formulation théorique est basée sur les équations de Maxwell. Elle est nommée de telle manière car sa formulation utilise la divergence du Tenseur de Maxwell. Il est important de noter que le résultat de cette méthode fournit la force exercée par un différentiel de volume sous l'action d'un champ magnétique.

Pour entrer dans la formulation de cette méthode, il est donc nécessaire de donner une idée des équations de Maxwell. Cet ensemble d'expressions, qui sont le résumé de la théorie électromagnétique d'un point de vue macroscopique, comportent les termes suivants:

- E : Champ électrique créé par des charges.
- D : Induction électrique.
- H : Champ magnétique engendré par des courants.

- $\mathbf{B}$: Induction magnétique.
- ρ : Densité de charge.
- $\mathbf{j}$: Densité de courant.

et, leurs expressions différentielles :

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.41)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.42)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.43)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.44)$$

Les équations de Maxwell ne sont pas suffisantes pour définir une magnétodynamique, car elles sont exprimées comme étant l'expression de la force sur un courant dans un champ magnétique. La force magnétique sur une charge en mouvement est donnée par la loi de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.45)$$

ou, par une densité de courant,

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.46)$$

De la loi de Laplace (1.46):

$$(F_x, F_y, F_z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.47)$$

Pour rendre le développement plus agile, il est possible de se concentrer sur un seul élément, par exemple:

$$F_x = J_y \cdot B_z - J_z \cdot B_y \quad (1.48)$$

A ce stade, on peut établir l'hypothèse que le courant apparu dans la loi de Laplace peut être calculé à partir du rotationnel de l'intensité du champ. Mathématiquement, il est facile d'utiliser la quatrième équation de Maxwell sans tenir compte de la variation temporelle:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.49)$$

Comme:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (1.50)$$

Cela nous permet d'exprimer $\vec{j}$ en fonction des dérivées partielles de $\vec{H}$. Tenant compte de l'équation (1.50), la loi de Laplace peut être formulée par :

$$\mathbf{F} = (\vec{\nabla} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} \quad (1.51)$$

Le fait d'admettre cette hypothèse, physiquement, c'est admettre que la force qui apparaît sur un courant est due au champ magnétique engendré par ce même courant, généralisant ainsi le traitement initial de la loi de Lorentz qui exprime la force sur un élément de courant placé dans un champ magnétique extérieure. En développant l'équation (1.47) :

$$\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (1.52)$$

Considérant uniquement la composante x, et étant donné la relation entre l'induction magnétique et le champ magnétique,

$$B_z = \mu \cdot H_z \quad (1.53)$$

$$B_y = \mu \cdot H_y \quad (1.54)$$

La force peut être exprimée en fonction des 2 composantes du champ magnétique :

$$F_x = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cdot \mu \cdot H_z - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \mu \cdot H_y \quad (1.55)$$

Maintenant, en utilisant la troisième équation de Maxwell, et compte tenu de la grandeur suivante nulle :

$$H_x \cdot \nabla \cdot \vec{B} = \mu \cdot H_x \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.56)$$

et qui peut être ajoutée à la composante F_x sans en altérer sa valeur, nous obtenons:

$$\begin{aligned} F_x = & \mu \cdot \left(H_x \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} - H_y \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x} - H_z \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \\ & + \mu \cdot \left(H_y \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x \cdot \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \mu \cdot \left(H_z \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z} + H_x \cdot \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.57)$$

L'utilisation de cette même notation pour les deux autres composantes, F_y et F_z nous donne :

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\
F_y &= \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\
F_z &= \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}
\end{aligned} \quad (1.58)$$

en généralisant:

$$T_{ij} = \mu \cdot \left[H_i \cdot H_j - \frac{\delta_{ij}}{2} \cdot H^2 \right] \quad (1.59)$$

avec i, j pouvant prendre les valeurs x, y, z et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ ou $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

L'expression (1.59) définit le dit Tenseur de Maxwell,

$$\mathbf{T} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mu \cdot \left[H_x \cdot H_x - \frac{H^2}{2} \right] & \mu \cdot [H_x \cdot H_y] & \mu \cdot [H_x \cdot H_z] \\ \mu \cdot [H_y \cdot H_x] & \mu \cdot \left[H_y \cdot H_y - \frac{H^2}{2} \right] & \mu \cdot [H_y \cdot H_z] \\ \mu \cdot [H_z \cdot H_x] & \mu \cdot [H_z \cdot H_y] & \mu \cdot \left[H_z \cdot H_z - \frac{H^2}{2} \right] \end{array} \right\} \quad (1.60)$$

L'obtention de ce tenseur permet naturellement d'établir le théorème de Maxwell. En effet, l'intégration de ce tenseur sur n'importe quelle surface entourant un corps particulier doit fournir la force totale exercée sur ce corps.

1.1.4 Méthode de Kelvin

La masse volumique de la force dans un milieu continu peut aussi être exprimée¹⁰ sous la forme :

$$\mathbf{f} = \mu_0 \cdot (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} \quad (1.61)$$

On l'obtient à partir de l'expression de la force de Lorentz et la relation entre l'aimantation et la densité de courant lié (1.20). La densité de force (1.61) est connue comme la densité de Kelvin.

L'expression actuelle de cette méthode est :

$$\mathbf{F}_2 = \int_{V_2} \mu_0 \cdot (\mathbf{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \cdot \mathbf{H}_2 \cdot dV + \oint_{S_2} \mu_0 \cdot \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2}{2} \cdot dS_2 \quad (1.62)$$

Cette expression donne la force exercée sur un milieu magnétique homogène 2, quand le milieu extérieur est le vide. L'expression de surface de la force a été obtenue récemment¹¹.

¹⁰ JACKSON J.D., "Electrodinámica clásica". Editorial Alhambra, Madrid, 1966

1.1.5 Méthode des Travaux virtuels ou variation de l'énergie

Le principe des Travaux virtuels, basé sur la mécanique analytique, peut être facilement étendu à tout milieu continu :¹²

$$\delta E = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{l} \quad (1.63)$$

Avec δE la variation de l'énergie totale, $\mathbf{F}$ la force extérieure, et $\delta \mathbf{l}$ le vecteur différentiel de déplacement virtuel. Dans la formulation initiale de ce principe, limitée au domaine de la mécanique, la variation virtuelle de la position doit être compatible avec les restrictions ou les contraintes imposées au système. La prise en compte de cette hypothèse est celle qui historiquement a donné le nom de déplacement virtuel. En effet, ce principe consiste à un déplacement fictif dans un état d'équilibre mécanique. Ce principe, d'une grande puissance dans la résolution des problèmes statiques, consiste à obtenir l'expression analytique de la force en termes de coordonnées généralisées ou les degrés de liberté du système. Les forces et moments appliqués aux divers éléments mécaniques, qui constituent le système, produisent, par un changement de sa configuration, un ensemble de travaux. Ces travaux, connus comme virtuels, selon le principe de la Méthode, doivent être nuls. Selon cette hypothèse, on peut déterminer une (ou plusieurs) réactions ainsi que des liens internes (ou externes), ou la valeur d'une (ou plusieurs) coordonnées dans la position d'équilibre.

La généralisation de ce principe mécanique dans son application à des dispositifs électromagnétiques dans le milieu continu a été réalisée de manière formelle dans le contexte de la thermodynamique classique.

En premier lieu, l'application à un milieu continu nécessite l'extension de la notion d'énergie totale du système à la densité de l'énergie dans le milieu continu. La densité d'énergie en un point dans le contexte thermodynamique, est considérée comme une fonction d'état, elle dépend d'un ensemble de grandeurs, connu sous le nom de déplacements généralisés et formellement équivalentes aux coordonnées généralisées dans la formulation Lagrangienne de la mécanique. Chaque déplacement généralisé ou variable au sein du système a une force généralisée associée. Tant les déplacements généralisés et leurs forces correspondantes généralisées sont des grandeurs tensorielles, scalaires, vectorielles ou d'ordre supérieur. La contraction tensorielle entre chaque force généralisée et son déplacement généralisé correspondant par une variation virtuelle, constitue une variation virtuelle de la densité de l'énergie dans un point du système. L'extension du principe du travail virtuel vers le magnétisme dans le milieu continu se conclut finalement avec le transfert de la notion thermodynamique d'état réversible au concept mécanique d'équilibre.

En effet, la thermodynamique classique a eu son plus grand potentiel de développement dans l'étude des processus réversibles. En tant que tels, ils comprennent des procédés dans lesquels une variation des valeurs des variables d'état peut se produire de telle manière que l'évolution du système peut retourner à l'état initial. Dans un processus réversible, l'entropie du système est nulle, et de ce fait définit l'état d'un système grâce à la fonction d'état dépendant des déplacements généralisés ou variables d'état. Cet état est l'analogie formel de l'état d'équilibre mécanique.

La généralisation de l'approche thermodynamique pour le magnétisme dans le milieu continu peut clairement définir un schéma formel dans lequel on peut envisager de

¹¹ ENGEL A., "Comment on "Invalidation of the Kelvin Force in Ferrofluids"", *Physical Review Letters*, 86, 21, p. 4978, 2001

¹² GOLDSTEIN H., "Classical mechanics", Addison-Wesley, 1959

faire des modèles de couplage entre les interactions de natures différentes, c'est à dire, des modèles multiphysiques. Il s'agit essentiellement d'une évidence: l'énergie est une quantité physique commune à tous les types d'interactions. Le couplage entre les interactions de natures différentes, doit permettre de définir une densité d'énergie qui n'est pas décrite comme une somme d'énergies associées aux différentes interactions, ce qui est un modèle découplé. En revanche, un modèle couplé doit inclure des termes d'énergie décrites en fonction de forces et de déplacements généralisés correspondant aux différentes interactions envisagées. Afin de développer un modèle unifié, puissant, tel que noté ci-dessus, il est nécessaire d'avoir un tenseur de tensions magnétiques, d'une manière semblable à celle de la mécanique des milieux continus, dont la formalisation commence à partir de la description du tenseur de tensions mécaniques en un point donné.

L'application de la Méthode des Travaux Virtuels dans la résolution de problèmes magnétostatiques dans le milieu continu a été une recherche continue et importante pour son implantation dans des outils de simulation par Éléments Finis, de sorte que la plupart des logiciels utilisés dans la résolution de problèmes magnétiques se basent sur ce principe. Ont été publiés, comme déjà indiqué, un grand nombre d'articles de recherche qui optimisent les algorithmes appliquant la Méthode des Travaux Virtuels pour les Éléments Finis. En effet, le point de départ est simple, après l'obtention de la distribution du champ magnétique H et la densité de flux B dans un matériau, il est possible de déterminer la variation de l'énergie magnétique en ce point et à partir de cette variation, la densité de la force magnétique.

Toutefois, il convient de noter à cet égard, deux considérations essentielles, qui sont observées lors de l'analyse des travaux développés pour la mise en œuvre de cette procédure. En premier lieu, le calcul des forces avec la Méthode des Travaux Virtuels est fait numériquement, de sorte que leur extrapolation analytique n'a pas encore été obtenue sous forme générale.

En deuxième lieu, il faut noter qu'il existe une confusion relative autour du calcul des forces par la Méthode des Travaux Virtuels. En effet, il peut être fait à partir de la densité d'énergie magnétique en un point ou alors de la densité de co-énergie en ce même point. Certains travaux ont eu pour but de montrer les différences relatives entre ces deux procédures de calcul, causant ainsi une certaine ambiguïté de la définition de la force magnétostatique. De toute évidence, la force d'origine magnétostatique doit être unique et ne peut engendrer des valeurs différentes que la grandeur de départ dans l'application de la Méthode des Travaux Virtuels soit la densité d'énergie ou la densité de la co-énergie.

1.1.6 Conclusions sur les différentes procédures de calcul des forces dans les milieux magnétiques

Conformément à celle décrite au paragraphe 1.1 du présent rapport, les considérations suivantes peuvent être déduites autour de la procédure actuelle de calcul des forces magnétiques:

- 1 Il est possible de classer ces procédures en trois niveaux:
 - a. Procédures fondées sur la définition de densités de volume et de surface de la force dans un milieu magnétique entouré par le vide: la force totale est obtenue par intégration dans le milieu. Les densités de forces sont obtenues à partir de diverses hypothèses ou modélisations

indépendantes : Méthode des Sources Équivalents^{13, 14} (Méthode des Courants Équivalents^{15, 16}, Méthode des Charges Équivalents¹⁷ et Méthode de Kelvin^{18, 19}.

- b. Procédure basée sur l'application du théorème de Maxwell pour des corps entourés par le vide : La force totale est calculée en intégrant le tenseur de Maxwell sur une surface arbitraire qui entoure le corps: Méthode du Tenseur de Maxwell.
 - c. Procédures variationnelles. Elles permettent d'obtenir la densité de force numériquement en appliquant les principes variationnels à l'énergie ou à la co-énergie (Méthode des Travaux Virtuels), à l'action (lagrangien magnétique) ou aux fonctionnements particuliers.
- 2 Les méthodes les plus généralement utilisées sont les méthodes des Sources Équivalentes (Méthode des Courants Équivalents, Méthode des Charges Équivalents), la Méthode de Kelvin, la Méthode du Tenseur de Maxwell et la Méthode des Travaux Virtuels.
 - 3 Les méthodes décrites dans la conclusion 2 ne peuvent obtenir que la force totale sur un corps quand il est entouré par le vide. Il n'y a pas eu de procédures générales pour l'obtention des forces de corps en contact.
 - 4 Les forces totales obtenues par application des méthodes ci-dessus pour un corps entouré par le vide conduisent à la même valeur.
 - 5 Les densités de force de volume et de surface obtenues par les méthodes décrites dans le paragraphe 1.a sont différentes et les vérifications expérimentales de ces densités, à travers les déformations élastiques produites, ne sont pas concluantes.
 - 6 Les Méthodes du Tenseur de Maxwell et des Travaux Virtuels ne sont pas valables lors du développement des formulations analytiques intégrées des interactions (modèles couplés).
 - 7 L'élaboration de modèles analytiques intégrés magnéto-mécaniques nécessitent l'obtention d'un tenseur de tension magnétique générale en chaque point d'un milieu magnétique continu.
 - 8 On a décrit les divers tenseurs de tension magnétiques en certains points d'un milieu continu magnétique à partir de différentes hypothèses. Il n'existe, pour

¹³ BOBBIO S., DELFINO F., ALOTTO P., GIRDINO P., MOLFINO P., "Equivalent Source Methods for the Numerical Evaluation of Magnetic Force with Extension to Non-Linear Materials", IEEE Transaction on Magnetics, 36, 4, July 2000, pp. 663-666

¹⁴ DELFINO F., MANELLA A., MOLFINO P., ROSSI M., "Numerical Calculation of Total Force upon Permanent Magnets using Equivalent Sources Methods", COMPEL, 20, 2, pp. 431-447, 2001

¹⁵ KABASHIMA T., KAWAHARA A., GOTO T., Force calculation using magnetizing currents. IEEE Transaction on Magnetics (Vol. 24 No.1 January 1988)

¹⁶ HENNEBERGER G., SATTTLER Ph K., SHEN D., "Nature of the equivalent magnetizing current for the force calculation", IEEE Transaction on magnetic, Vol 28 N°2 March 1992 , pp. 1068-1071

¹⁷ ZHONG-QING YOU, YU-SHI SUN, ZHONG-WEI JIANG. "Determination of the current equivalent parameters for the fictitious magnetic monopole model of magnetostatic problems". IEEE Transaction on Magnetics (Vol 24 N°1 January 1988)

¹⁸ ENGEL A., "Comment on "Invalidation of the Kelvin Force in Ferrofluids"", *Physical Review Letters*, 86, 21, p. 4978, 2001

¹⁹ ENGEL A., FRIEDERICHS R., "On the electromagnetic force on a polarizable body". *American Journal of Physics*, 70, 4, p. 428, 2002

l'instant, aucun accord général sur l'expression d'un tenseur de tension magnétostatique dans un milieu magnétique quelconque.

Comme on l'observe à partir de ces conclusions, l'état actuel des connaissances sur la distribution des forces locales dans un milieu continu présente des lacunes importantes. En général, on peut affirmer que cette distribution est, actuellement, toujours inconnue. Autrement dit, on ne connaît pas de tenseur de tension magnétostatique en un point donné dans un milieu continu, cela fait que la formulation des modèles couplés se frotte à de graves difficultés supplémentaires. Pour finir, le fait que les méthodes décrites ne permettent pas de calculer les forces entre les milieux en contact montre également une lacune conceptuelle significative.

Dans le chapitre 3 de ce présent rapport nous expliquerons une nouvelle procédure de calcul des forces locales et totales de manière tensoriel, dérivant de l'application de la Méthode des Travaux Virtuels. Cette méthode sera appliquée dans toutes les procédures précédemment décrites dans ce rapport: Méthode des Sources Équivalents, Méthode de Kelvin et Méthode du Tenseur de Maxwell. Cette méthode de calcul permettra également, comme nous le verrons dans le chapitre 4 de ce rapport, le calcul des forces de milieux en contact. La méthode proposée est obtenue à partir d'un tenseur de tension magnétostatique dans un milieu, par la Méthode des Travaux Virtuels. De plus, et pour finir, le tenseur obtenu permet des formulations couplées avec le tenseur des contraintes élastiques.

1.2 Approches multiphysiques

1.2.1 Pourquoi a-t-on besoin d'outils multiphysiques ?

Chercheurs, ingénieurs et industriels s'intéressent depuis longtemps à la simulation numérique de systèmes faisant intervenir plusieurs phénomènes couplés. La plupart des systèmes faisant l'objet de simulations en phase de conception industrielle entrent dans cette catégorie, qu'il s'agisse de microstructures soumises aux lois de la mécanique et de l'électromagnétisme, de grands ponts soumis aux effets du vent, ou d'un simple essuie-glace dont l'usure résulte à la fois du frottement avec le pare-brise, du contact avec la pluie et de l'impact avec l'air. En fait, tous les problèmes rencontrés dans la vie réelle sont, par essence même, multiphysiques. Tout objet est en permanence soumis de façon plus ou moins intense à un ensemble de phénomènes physiques, incluant mouvements, efforts, écoulements fluides, vibrations, transferts thermiques, réactions chimiques et électromagnétisme. Ces phénomènes ne sont pas indépendants les uns des autres, et il s'avère souvent indispensable de ne pas négliger leurs influences mutuelles dans le cadre de la simulation numérique.

Par ailleurs la modélisation multiphysique et multi-échelle est une approche de R&D relativement récente née de la nécessité de prendre en compte, dans la modélisation d'un système dont on cherche à prédire le comportement, tous les phénomènes, dans la pratique couplés entre eux, agissant sur (ou présents dans) ce système. C'est la forme la plus complète de modélisation d'un enchaînement de phénomènes divers et d'ordres de grandeur très différents puisqu'il en intègre toute la connaissance théorique comme empirique, et ce à différentes échelles, dans des briques élémentaires qu'il s'agit d'assembler. Sur le plan physique, elle prend en compte les couplages entre phénomènes élémentaires de nature différente. Dans le domaine de la physique des réacteurs, on couple par exemple la mécanique des structures, la neutronique et la thermohydraulique. Ce type de modélisation vise aussi à donner une description des phénomènes à différentes échelles. Dans le domaine de la physique des

matériaux, il s'agira par exemple de déduire les propriétés macroscopiques d'un matériau polycristallin à partir de sa description à l'échelle la plus microscopique.

1.2.2 Différents types d'interactions physiques

Certains domaines de la physique présentent des interactions évidentes. C'est notamment le cas d'un fluide et d'une structure magnétique. La structure peut souvent être considérée comme un obstacle au fluide, sur lequel ce dernier vient exercer une force de pression. Le comportement d'une structure magnétique, en l'absence ou en présence de fluide, peut varier considérablement, c'est pourquoi il s'avère souvent nécessaire de prendre en compte ce type d'interaction. Aujourd'hui le marché de la simulation fluide-structure en général, connaît un fort développement. Les domaines d'application concernés sont nombreux : étude de l'impact du vent sur les grandes constructions, analyse de l'écoulement de l'air autour de profils d'ailes d'avions ou dans les turbomachines rapides, simulation de l'écrasement de réservoirs contenant du liquide, étude de la déformation des vaisseaux sous l'afflux sanguin, etc. Classiquement, dans ce genre d'applications, la pression exercée par le fluide provoque la déformation de la structure, avec pour conséquence la modification du domaine d'écoulement du fluide. Celle-ci peut alors entraîner à son tour, si elle est suffisamment importante, de nouveaux changements au niveau de la structure, et ainsi de suite jusqu'à ce que le système atteigne un état d'équilibre. « Un autre exemple d'application très parlant d'interaction fluide-structure est le dimensionnement des bouteilles d'eau en plastique. Celles-ci doivent être suffisamment solides pour résister à la palettisation et à l'empilement, sans toutefois que la quantité de plastique utilisée ne soit trop importante, car les industriels sont taxés de façon proportionnelle. Dans ce cas l'objectif de la simulation est de déterminer, avec la meilleure précision possible, la quantité de plastique nécessaire pour que chaque bouteille puisse résister à une pression verticale de 130 kg sans que le col ne plie.

L'interaction fluide-structure intervient également dans l'étude des explosions, qui sont des phénomènes essentiellement régis par les lois de la dynamique des gaz. On trouve là aussi des applications industrielles, notamment pour les marchés sécuritaires tels que celui des portes blindées, des bâtiments militaires ou celui de la démolition (mines, explosifs, détonateurs, etc.).

Mais on rencontre d'autres types de couplages : l'interaction thermique/électromagnétisme/structure par exemple. Celle-ci intervient typiquement dans le cas d'un moteur électrique, qui est non seulement soumis à des forces électromagnétiques, mais encore à un phénomène de transfert de chaleur du aux pertes d'énergies par effet joule et par frottements. L'échauffement du moteur peut entraîner des modifications au niveau de la structure mécanique du moteur, et a une influence non négligeable sur les forces électromagnétiques en présence, lesquelles peuvent, si elles subissent de trop importantes dégradations, provoquer le blocage du moteur.

De nombreux autres exemples pourraient être cités, relevant d'interactions aussi diverses que : thermique-structure, acoustique-structure, thermique-électrique, fluide-électrostatique, fluide/magnétostatique, etc... Mais malgré l'intérêt de prendre en compte de telles interactions, la simulation multiphysique a durant longtemps été considérée comme difficilement réalisable dans les milieux industriels. L'émergence des nouvelles technologies informatiques et les progrès réalisés au cours de ces dernières années en terme de vitesse de calcul ont quelque peu changé la donne et permis de repousser enfin les limites de faisabilité.

1.2.3 Les limites de faisabilité industrielle enfin repoussées

On peut dire, en exagérant à peine, que les technologies numériques permettent depuis de nombreuses années déjà de reproduire virtuellement le fonctionnement de n'importe quel système. « Aujourd'hui nous sommes capables de modéliser quasiment tous les phénomènes physiques ou chimiques. Même les comportements dont nous ne connaissons a priori pas les équations physiques peuvent être modélisés, grâce à des algorithmes d'identification très performants ».

On obtient ainsi des lois comportementales sous la forme d'équations mathématiques implantables, mais qu'il convient néanmoins de manipuler avec précaution car celles-ci possèdent en général des domaines de validité limités. Quoi qu'il en soit, dès lors que les modèles mathématiques décrivant les phénomènes physiques mis en jeu sont connus et implantables sous forme numérique, la simulation est possible. Aujourd'hui la fiabilité et l'efficacité des modèles deviennent telles, que la simulation numérique tend à supplanter toute autre forme d'expérimentation. Elle constitue parfois même la seule forme d'expérimentation possible, notamment dans le cas de systèmes très petits mettant en jeu des mécanismes complexes pour lesquels il est impossible ou trop coûteux de réaliser un prototype physique. C'est typiquement le cas des microsystèmes, qui sont des systèmes de la taille d'un grain de sable, intégrant divers éléments mécaniques et électroniques microscopiques sur un substrat de silicium.

Toutefois, pendant longtemps les logiciels de simulation industriels ont partagé un défaut commun : celui d'être parfaitement incapables de coupler de manière simple les résultats d'analyses issus des différents modèles physiques mis en jeu. Pourtant, les concepts informatiques permettant de réaliser ce genre d'opérations sont connus. Ils consistent en un échange cyclique des informations entre les différents solveurs, par le biais de fichiers ou en utilisant des commandes de passage de messages disponibles dans des bibliothèques de communication. Seulement, jusqu'à récemment ces opérations étaient très coûteuses en temps de calcul et devaient par ailleurs dans la plupart des cas être réalisées par l'utilisateur.

Par ailleurs, les premiers programmes de simulation, dont les algorithmes étaient implantés en C ou en Fortran, étaient développés de façon spécifique à chaque application. Ces logiciels ne présentaient aucune flexibilité, et lorsque l'utilisateur souhaitait modifier un paramètre, ou ajouter une interaction physique, c'est la totalité du code qui était à revoir. Ceci n'est plus vrai aujourd'hui, car les développeurs ont pris conscience de la nécessité de disposer d'un code ouvert, modulaire et évolutif. Grâce aux nouvelles technologies informatiques, et notamment aux technologies de programmation orientées objet, les concepteurs disposent de bibliothèques dédiées, pouvant être partagées par toute la communauté, ainsi que des interfaces génériques permettant de combiner des portions de code écrits dans des langages différents.

Durant longtemps, la puissance de calcul a également constitué un premier frein à l'adoption d'outils de simulation avancés par la communauté industrielle, car les temps de calcul nécessaires à la résolution des problèmes étaient trop importants. Aujourd'hui, les performances informatiques permettent d'atteindre des temps acceptables pour la plupart des applications. L'émergence de ces technologies et de ces nouveaux outils a profondément modifié la façon de concevoir les logiciels et permis de repousser les limites de faisabilité industrielle de nombreux projets informatiques, en particulier celles de la simulation multiphysique.

1.2.4 Approches et couplages multiphysiques

1.2.4.1 Différentes approches multiphysiques

Différentes approches contribuent aujourd'hui à simuler, en partie, le monde réel. L'intégration de l'aspect multiphysique permet aux chercheurs d'obtenir des résultats toujours plus proches de la réalité. Mais si la complexité grandissante des systèmes étudiés a donné lieu à l'émergence de nombreuses solutions industrielles de simulation multiphysiques, les approches du problème diffèrent en fonction des éditeurs.

En effet, alors que la complexité des systèmes étudiés augmente, la nécessité grandissante de pouvoir faire interagir facilement plusieurs modèles de physiques différentes au sein d'un seul et même environnement de calcul a poussé de nombreux éditeurs de logiciels à proposer des solutions de simulation dites multiphysiques.

Couplage Direct	Applications
Pression-structure	Acoustique, Sonar, SAW
Piézoélectrique	Microphones, Capteurs
Piezorésistif	Capteurs de Pression, Jauges de contraintes, Accéléromètres
Electromagnétique	Moteurs, MEMS
Electrostatique-structure	MEMS
Electro-thermique-structure-magnétique	Circuits Intégrés, Circuits Imprimés
Fluide-thermique	Réseaux de Tuyauterie, Collecteurs
Couplages Séquentiels	Applications
Thermique-structure	Tout ce qui implique une structure, Turbines a gaz
Electromagnétique-structure	Chauffage à induction, Radio Fréquence
Electrostatique-structure-fluide	MEMS
Electrostatique-particule chargée	Optique, Technologies d'Affichage FED, Instruments Analytiques
Magnétique-structure	Machines Electromagnétiques
Fluide-solide	Aérospatial, Automobile, Systemes Hydrauliques, MEMS

Tableau 1.2 : Différents types de couplages directs et séquentiels, avec des exemples d'applications associées²⁰.

Mais si l'ensemble des solutions reposent sur des techniques similaires et bien connues de résolution, elles diffèrent de manière importante dans la mise en œuvre de l'analyse multiphysique à proprement parler. Pour caricaturer, il existe deux manières de traiter les couplages multiphysiques.

²⁰ Cad.magazine n° 121. Novembre 2004.

La première solution consiste à résoudre de façon simultanée toutes les équations couplées en combinant de façon monolithique l'ensemble des degrés de libertés associés à chaque modèle au sein d'une seule et même matrice de résolution multiphysique. Un tel couplage est alors qualifié de fort.

La seconde méthode consiste à résoudre les équations de manière séquentielle, en fixant tour à tour l'ensemble des paramètres d'un modèle, durant l'itération de l'autre modèle. C'est ce que l'on appelle un couplage faible. L'avantage de la première méthode est qu'elle est susceptible de fournir des résultats plus précis, mais au prix de temps de calcul plus élevés. La seconde méthode, quant à elle, permet de bénéficier de la vitesse de calcul de solveurs spécialisés, mais avec des risques d'instabilité plus grands ainsi qu'une précision sur les résultats plus aléatoire.

Ainsi dans le domaine électromagnétique, mais aussi dans d'autres disciplines physiques, ces outils s'appuient principalement sur le formalisme des Éléments Finis qui demandent une compétence particulière de l'utilisateur. Cependant, dans les phases de prédimensionnement, il n'est pas nécessaire d'avoir des modèles précis. Souvent, un modèle approché sous forme analytique permet de gagner du temps. Pour l'électromagnétisme, un formalisme basé sur une représentation par circuit équivalent permet d'élaborer de tels modèles. Mais l'optimisation tient également une partie importante dans le processus de conception du produit, en particulier dans la phase de prédimensionnement. Dans ce sens, des algorithmes peuvent être exploités.

1.2.4.2 Différents types de couplage multiphysique

Le couplage physique entre deux phénomènes donnés est intrinsèque à leurs comportements. Il est imposé par le niveau d'interdépendance entre les grandeurs physiques mises en jeu. Par exemple, un couplage fort est mis en évidence à travers des lois de comportement qui font apparaître des termes relatifs à chacun des deux phénomènes. Un couplage faible correspond à une action unidirectionnelle d'un phénomène sur un autre.

Les modèles de couplage sont des couplages de résolution numérique qui consiste à adopter un certain « ordre » pour le calcul des grandeurs couplées. Un modèle unidirectionnel est adopté quand l'influence d'un phénomène sur l'autre n'est pas réciproque. Dans le cas où les deux phénomènes interagissent mutuellement, c'est le modèle bidirectionnel qui permet d'évaluer l'incidence de cette interaction sur le comportement global du système.

Trois modèles sont à distinguer:

- Couplage faible ou unidirectionnel, appelé aussi modèle non couplé,
- Couplage « mou » ou bidirectionnel,
- Couplage fort.

Dans notre méthodologie de conception des machines électriques, l'étude des différents couplages est sous-jacente à la modélisation des phénomènes électromagnétiques régissant la conversion électromécanique. Nous nous intéressons à deux formes d'interactions : magnéto-mécanique et thermique-électromagnétique.

1.2.4.3 Couplage unidirectionnel

Ce type de couplage est préconisé dans le cas où les propriétés physiques des phénomènes considérés sont faiblement couplées. C'est le cas de l'interaction magnétique-mécanique au sein d'une machine électrique. En effet, on considère que la déformation des tôles (FeSi 3%) sous l'effet des forces magnétiques est suffisamment faible pour ne pas modifier leurs propriétés magnétiques.

Il suffit alors de calculer séparément la distribution du champ magnétique, la répartition des forces magnétiques et les déformations ou déplacements induits. La figure 1.5 représente le synoptique du modèle de couplage unidirectionnel.

Le problème électromagnétique est résolu en premier temps pour déterminer la distribution du champ magnétique et par la suite les forces qui en résultent. Ensuite, la réponse mécanique de la structure de l'actionneur suite à l'excitation des forces magnétiques est évaluée. Le champ de déformations est supposé être sans conséquences sur l'état magnétique de la structure.

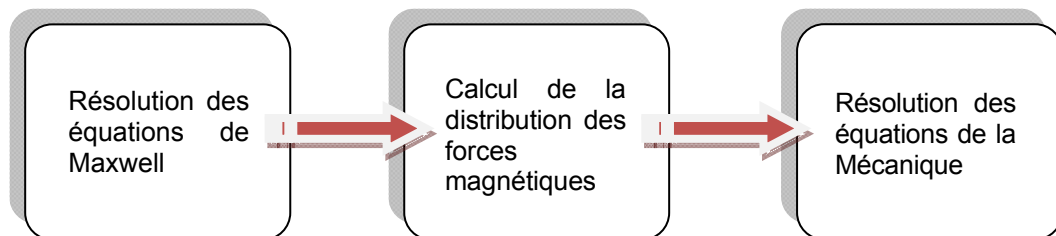


Fig. 1.5 : Synoptique du modèle de couplage unidirectionnel

1.2.4.4 Couplage bidirectionnel

Le couplage bidirectionnel est dit « fort » si les grandeurs physiques relatives aux deux phénomènes sont calculées simultanément et il est dit « mou » si ces grandeurs sont évaluées successivement. Dans le deuxième cas de figure, l'évaluation de leur interaction est assurée par un processus itératif de calcul. La procédure itérative permet la prise en compte de la variation d'une grandeur physique (par exemple le champ magnétique) en fonction de l'autre (distribution de température). Le processus itératif s'arrêtera lorsque l'une des grandeurs n'évolue plus.

Ce modèle est utilisé²¹ pour l'analyse numérique du phénomène de magnétostriction. Le problème couplé magnéto-mécanique est résolu en deux étapes parallèles mais séparées. A l'itération i les problèmes magnétique et mécanique sont résolus en utilisant le jeu de paramètres déterminé à l'itération $i-1$.

1.2.4.5 Couplage fort

Le modèle de couplage fort consiste à calculer simultanément les grandeurs relatives à chacun des phénomènes physiques mis en jeu. Le recours à ce modèle se justifie quand l'interaction est importante. Par exemple, la prise en compte de l'interaction électromagnétique-thermique suivant un modèle de couplage fort revient à calculer les valeurs de champ magnétique, les pertes induites et la température des

²¹ AZOUM K., "Contribution à la modélisation numérique de phénomènes magnéto-élastiques, étude de dispositif à base de matériaux magnétostrictifs", Thèse de doctorat, juillet 2005, Université Paris XI

matériaux au cours d'un même pas de calcul. Dans un modèle analytique ce couplage est mis en œuvre en employant des techniques de gestion d'implicites.

1.3 Approches interdisciplinaires: l'exemple de l'éco-conception

Nous allons par la suite faire un point à la fois sur les méthodologies de conception et d'éco-conception.

L'ingénierie numérique des systèmes électrotechniques a spectaculairement progressé ces dernières années, d'une part dans le domaine de la simulation par Éléments Finis, d'autre part dans le domaine de la conception numérique où les techniques de l'optimisation ont trouvé un large champ d'application. Ces techniques s'imposent dans un monde globalisé et compétitif, où l'avantage concurrentiel est décisif. Cependant, les préoccupations environnementales notamment de développement durable viennent également complexifier le problème de la conception donnant naissance au modèle de l'éco-conception où l'éthique, les valeurs humaines prennent place dans le processus de conception.

Le développement simultané des méthodologies de conception et d'éco-conception n'est vraiment pas dû au seul hasard. Le lien est évident : la mise en œuvre du développement durable dans la démarche de conception d'un produit nécessite des outils sophistiqués tels que la modélisation multiphysique et surtout interdisciplinaire, comme l'optimisation multi-objectif sous contrainte. Inversement ces outils trouvent dans l'éco-conception un champ d'application exigeant qui justifie pleinement des recherches méthodologiques avancées.

La problématique du développement durable est un axe de recherche non négligeable actuellement en éco-conception. En effet, la production d'énergie électrique consomme 30% de l'énergie primaire mondiale dont 82% d'origine non-renouvelable. Dans la mesure où les ressources en énergie apparaissent limitées, l'analyse du cycle de vie des dispositifs électrotechniques et la prise en compte de l'énergie fossile équivalente consommée sont nécessaires que ce soit pour les systèmes de production, de transformation ou de consommation de l'énergie électrique. Dans la recherche de compromis avec d'autres critères techniques comme le taux de délestage ou la masse, l'influence des profils de mission est déterminante. Raisons pour lesquelles l'éco-conception nécessite aussi la prise en compte de facteurs sociologiques.

Par ailleurs des expériences concrètes en éco-conception sont déjà initiées. En effet, dans l'industrie automobile, il s'agit de reconcevoir les moteurs électriques des accessoires automobiles (20 à 60 par véhicule) pour améliorer la recyclabilité du véhicule. Le cuivre des bobinages contaminant l'acier recyclé, il est nécessaire de mettre au point des structures de machine capable de libérer le cuivre des bobinages lors du broyage du véhicule. Une autre solution est de remplacer le cuivre par l'aluminium. Ces alternatives sont testées et évaluées et ne sauraient tarder à se répandre dans le monde automobile.

Dans le domaine de l'efficacité énergétique du génie électrique, des études scientifiques ont montré que l'énergie électrique est un vecteur intrinsèquement optimal de transport d'énergie. Paradoxalement sa mise en œuvre est loin de l'être: entre la source d'énergie primaire et l'énergie effectivement utilisée, les pertes atteignent 73% ! Les systèmes de production, de transport, de distribution et les utilisations de l'énergie électrique peuvent donc tous être optimisés au regard de leur efficacité énergétique. Un exemple très parlant est celui du placement et de la forme des bus-bars dont

l'optimisation pourrait conduire à économiser jusqu'à 30% de l'énergie consommée. Les premières investigations sur l'éco-conception d'appareillage de distribution montrent l'impact des profils d'utilisation.

Il est évident que les thèmes des méthodologies de conception et d'éco-conception correspondent à une préoccupation forte aussi bien dans la communauté industrielle qu'académique et que l'on assiste à une véritable émergence du secteur des nouvelles technologies environnementales.

1.4 Une approche conceptuelle des dispositifs magnéto-mécaniques à base de champs magnétiques générés ou induits

Parmi les principaux concepts de conversion électromécaniques de l'énergie, l'interaction électromagnétique a toujours joué un rôle majeur. Depuis près de cent cinquante ans, concepteurs et industriels n'ont cessé de définir, diversifier et développer des systèmes magnéto-mécaniques, avec un ou plusieurs degrés de liberté. Dont l'exploitation reste incontournable au quotidien dans la production ou le transport, comme dans les domaines innovateurs tel que le médical, le militaire ou le spatial.

Cependant, les divers procédés d'interaction magnétique exploitables et les contraintes sévères auxquelles sont confrontés les matériaux composites nous obligent à remettre en question la conception des systèmes magnétiques conventionnels. Il est clair que de nombreux progrès sont à venir dans la conception de systèmes magnéto-mécaniques grâce à l'utilisation de matériaux magnétiques composites. Ces matériaux combinent des avantages technologiques et économiques. Ils ouvrent non seulement un grand champ de recherche en matière de conception de systèmes magnétique, mais sont aussi potentiellement en mesure de pallier des problèmes au sein de structures classiques, comme la réduction et la dissipation des pertes électromagnétiques. Par exemple, pour un dispositif magnéto-mécanique à haute vitesse de rotation à aimantation induite, l'utilisation de poudres magnétiques est d'un grand intérêt pour diminuer les pertes électromagnétiques.

Face à la multitude des dispositifs magnéto-mécaniques dont nous disposons aujourd'hui, une approche physique, centrée sur la nature des matériaux employés, sur la nature du courant ou du type aimantation et sur les champs magnétiques qui interagissent, nous permet d'obtenir non seulement un classement synthétique des dispositifs magnéto-mécaniques mais aussi d'accéder dans un deuxième temps à une compréhension fonctionnelle plus physique et technologique de ceux-ci.

Dans le cas des moteurs à flux radial, un cylindre fixe (stator), de perméabilité supposée très grande devant celle de l'air supporte une armature polyphasée où circulent des courants générant dans l'entrefer un champ tournant H_{ext} . À l'intérieur, un cylindre mobile (rotor), placé au centre du stator, suivant son axe de symétrie axiale est assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique permanent m_p . Le moment du couple Γ qu'exerce le champ H_{ext} sur la partie mobile de moment permanent magnétique m_p , vaut par conséquent :

$$\Gamma = \mu_0 \cdot \vec{m}_p \wedge \vec{H}_{ext} \quad (1.64)$$

Ce moment magnétique m_p peut être indifféremment généré par un corps aimanté ou par un courant. Le type de couplage mis en jeu peut être décrit en fonction de la nature des sources impliquées : couplage de type « aimantation » ou « courant ». Par ailleurs, considérant que ces sources dérivent soit d'un moment magnétique « généré »,

soit d'un moment magnétique « induit », un deuxième niveau de classification peut être déduit des caractéristiques du moment magnétique mis en jeu.

Un moment magnétique est considéré comme « généré » si celui-ci est directement imposé par le biais d'un aimant permanent ou d'un circuit conducteur au sein duquel circule un courant contrôlé. Inversement, il sera considéré comme « induit » s'il est directement généré à partir du champ statorique. Tel est le cas d'un noyau ferromagnétique plongé dans le champ magnétique stator qui se polarise sous son action ou d'un milieu conducteur se déplaçant dans le champ, ou soumis à un champ variable (induction électromagnétique).

En conséquence, on peut classer les dispositifs magnéto-mécaniques selon la nature des champs magnétiques en interaction et selon les matériaux magnétiques et/ou électriques employés :

1.- Champ magnétique résultant totalement « généré » : Dans ce cas on peut utiliser soit des matériaux uniquement magnétiques, soit des matériaux uniquement électriques ou enfin, des matériaux magnétiques combinés avec des matériaux électriques.

2.- Champ magnétique résultant « induit » : Les trois combinaisons précédentes peuvent aussi être utilisées.

Dans les deux cas précédents, deux grandes catégories classiques peuvent aussi être considérées : les dispositifs magnéto-mécaniques hétéropolaires et les dispositifs magnéto-mécaniques homopolaires. Les premiers soumis à un champ variable au cours d'une révolution et les seconds soumis à un champ magnétique constant lors d'une révolution complète du rotor. La puissance volumique d'un dispositif magnéto-mécanique homopolaire est très élevée mais avec l'inconvénient, entre autres, d'obtenir des tensions faibles avec donc des courants élevés²².

1.5 Un bref état de l'art des matériaux magnétiques pour des dispositifs rapides à aimantation induite

Face au spectre très large des applications couvertes par les machines à aimantation induites, les critères sélectifs de conception en terme notamment de matériaux magnétiques constitutifs sont très diversifiés. Ainsi pour des applications grande série et faible puissance, par exemple le domaine électroménager, on privilégiera plutôt des matériaux à faible coût de production au détriment des performances. Ainsi le scénario s'inverse si l'on considère des applications touchant des domaines de pointe, comme le militaire et le spatial, pour lesquelles les choix s'orientent vers des matériaux à hautes performances, donc faibles pertes et haute perméabilité.

En outre, les normes européennes récemment mises en vigueur en matière de recyclage et surtout de protection de l'environnement nécessitent de reconsidérer les matériaux magnétiques usuels tels que les matériaux laminés, d'autant plus que les technologies de fabrication des matériaux composites s'améliorent régulièrement.

²² CHABRERIE J.P., « Applications des supraconducteurs à l'électrotechnique », Revue de physique appliquée, tome 4, décembre 1969, pages 565 à 568

Les paragraphes suivants nous rappellent les avantages et inconvénients inhérents aux deux grandes familles de matériaux magnétiques qui sont : les matériaux laminés d'une part et les matériaux composites d'autre part.

1.5.1 Les matériaux magnétiques laminés

Les dispositifs magnéto-mécaniques soumettent dans la plupart des cas les matériaux magnétiques à des champs alternatifs, qu'ils soient hétéropolaires ou homopolaires. Afin de limiter les courants induits dans les matériaux magnétiques sous l'effet de la conductivité, on utilise généralement les alliages magnétiques sous forme de tôles isolées. Trois familles d'alliages ont percé le marché des matériaux laminés : les alliages Fer-Silicium, les alliages Fer-Cobalt et les alliages Fer- Nickel²³.

L'alliage Fer-Si est l'alliage le plus répandu dans le domaine de la conversion d'énergie. De par ses volumes de production et son ancienneté, l'alliage Fer-Silicium a bénéficié des plus forts développements en recherche et en matière de process de fabrication (qualité « semi-process » ou « fully process »).

Les tôles à grain non orientés, prédominantes sur le marché, offrent un panel très large de produits à épaisseur et niveau de saturation variables. Du fait de la nécessité de limiter les pertes énergétiques au sein de la structure magnétique, les pertes massiques constituent toujours un critère sélectif prépondérant, notamment pour les dispositifs à aimantation induite. Cependant si les valeurs correspondantes restent acceptables à faible fréquence, elles deviennent inacceptables lorsque la fréquence augmente. Certains constructeurs comme Arcelor Mittal proposent depuis peu des tôles spécifiquement destinées à des fréquences plus élevées, utilisées notamment en aéronautique, combinant saturation élevée et faibles pertes massiques. Le prix de ces tôles de faible épaisseur (0.02 mm) est naturellement proportionnel avec l'augmentation des performances²⁴.

De production d'un tiers inférieur à celui des tôles à grains non orientés, les tôles à grains orientés privilégient la direction de laminage comme direction de facile aimantation. Ce qui a priori les destinent à des structures de conversion dans lesquelles le flux garde une direction fixe, ce qui exclut naturellement les machines à courant continu. Ceci étant, leurs niveaux de saturation élevés (2 T) les rendent aussi attractives pour des machines tournantes. La société Alstom par exemple les a intégrées dans leur machine de traction ferroviaire. Cette même famille de tôles a donné lieu à des alliages à haute perméabilité obtenus par une ultime étape de laminage à froid avec un taux de déformation très important, qui traitées au laser, fournissent des résultats très satisfaisants en termes d'induction. Soulignons cependant que la minimisation des pertes massiques doit résulter d'un compromis entre l'épaisseur et le niveau de saturation. Dans ces conditions les tôles à haute perméabilité sont remises en cause comme en témoigne la figure ci-dessous :

²³ DUHAYON E., HENAU C., ALHASSOUN Y., NOGAREDE B., « Design of a high speed switched reluctance generator for aircraft applications », ICEM 2002, Brugge-Belgium.

²⁴ GIROUD, « Applications des matériaux magnétiques durs ou doux: domaines, processus d'aimantation, conséquences pratiques », MPA 2001

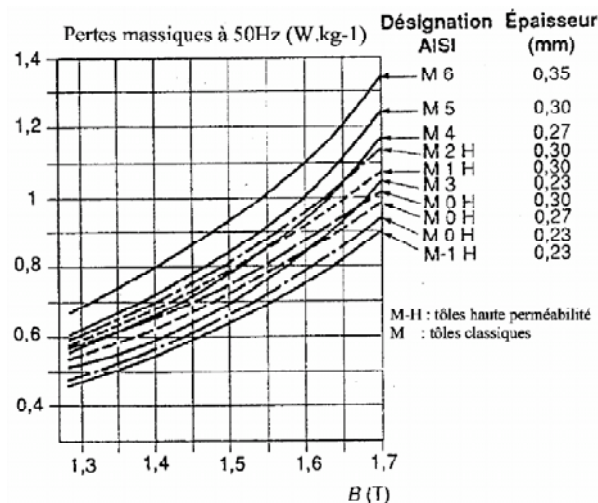


Figure 1.6 : Comparaison tôles haute perméabilité/tôles classiques

Sans comparaison avec les alliages Fer-Silicium, les alliages Fer-Nickel sont conçus avec des taux de charge en Nickel variant de 36% à 80%. On distingue trois groupes bien définis ayant chacun des caractéristiques et des domaines d'application bien spécifiques regroupés dans le tableau ci-dessous.

Taux de Nickel	Induction de saturation (T)	Perméabilité	Pertes massiques (50Hz) (W /kg)
36-40%	1.3	2000-3000	2 T=>0.55-1.1
45-50%	1.55	5000-12000	2 T=>0.25-0.75
75-80%	0.8	35000-80000	0.5 T=>0.025

Tableau 1.3 : Caractéristiques magnétiques des alliages Fer-Nickel

Leur structure cubique à faces centrées ne présente pas de transformation de phase à l'état solide, ce qui leur confère une grande facilité de laminage à froid et de traitements thermiques et donc permet de développer leurs propriétés magnétiques au mieux²⁵. Dans le contexte des dispositifs magnéto-mécaniques fonctionnant à hautes vitesses, les tôles Fer-Nickel dont les performances globales paraissent attrayantes restent en retrait car leurs caractéristiques, (haute perméabilité et faibles pertes) ne sont pas suffisamment rentable pour un même taux de Nickel. Leur prix les oriente vers des applications spécialisées où on met souvent en œuvre, non seulement leurs propriétés magnétiques remarquables, mais également des propriétés complémentaires (faible dilatation, facilité de mise en forme etc.)²⁶. Dans de nombreux cas, on préfère utiliser les alliages fer-nickel à 48% Ni dont les constantes électromagnétiques sont mieux adaptées. On utilise ainsi ces alliages à l'état massif (barres, fils, tôles épaisses) dans les systèmes où une faible puissance de commande impose un alliage à bas champ coercitif (relais travaillant au décollage, écouteurs téléphoniques, etc.). D'un point de vue électromagnétique, les alliages Fer-Cobalt offrent des caractéristiques les plus attractives. Pour un taux de cobalt variant de 25 à 30%, cet alliage présente le plus haut niveau de saturation (2 à 2.3T) pour une perméabilité comprise entre 1000 et 8000²⁷.

²⁵ COUDERCHON G., PORTESIL J.L., « les Alliages de fer et de nickel, ch. 1. Quelques propriétés des alliages FeNi riche en nickel », Lavoisier Tec et Doc., 1996

²⁶ COUDERCHON G., « Alliages fer et fer cobalt. Propriétés magnétiques. Traité Génie électrique ». D2 130, 1994

²⁷ COUDERCHON G., Techniques de l'Ingénieur «alliages magnétiques doux», (M350-16), (M350-25), (M350-21)

Bien que ses pertes soient supérieures à celles des alliages Fer-Silicium, sa résistance à la chaleur en fait le produit phare pour les applications en milieux difficiles, application qui, en raison du prix de ces tôles ne relèvent cependant pas de la grande série. Elles se cantonnent donc au domaine des machines tournantes pour des applications aéronautiques, ferroviaires ou militaires.

Taux de Cobalt	Induction de saturation (T)	Perméabilité	Pertes massiques
25-28%	2.4	3000	2T->10
50%	2.35	8000-20000	2T->5

Tableau 1.4. Caractéristiques magnétiques des alliages Fer Cobalt

Ces alliages trouvent aussi leur place dans des dispositifs nécessitant une absence de magnétostriction et une grande perméabilité, (composants magnétiques sous alimentation découpée, capteurs, transformateurs spéciaux pour l'aéronautique, têtes magnétiques, blindage des câbles, etc.).

1.5.2 Les matériaux composites ou poudres magnétiques douces

Si les niveaux de saturation et les propriétés mécaniques des matériaux laminés sont très attractifs, le coût de fabrication, de recyclage ainsi que les pertes massiques à haute fréquence constituent encore une source de problèmes. Dans ce contexte, les progrès effectués dans le domaine des poudres magnétiques composites sont susceptibles de répondre, dans un futur proche, à ce type de contraintes technico-économiques. Ainsi d'un point de vue purement économique, leurs procédés de fabrication comptent un nombre d'étapes deux fois inférieur à celui des matériaux laminés. Par ailleurs, ces process permettent non seulement le mélange de composants complémentaires, mais aussi le moulage par compression ou injection de pièces actives à structures complexes, élargissant ainsi le champ de recherche des structures envisageables. Ces innovations technologiques ouvrent enfin la voie à une optimisation poussée de la forme et du comportement des circuits magnétiques.

Afin de mieux cerner leurs caractéristiques globales, on peut les confronter aux matériaux laminés dont ils sont les concurrents directs. Les additifs caractéristiques des matériaux magnétiques composites ainsi que le taux de charge dénaturent logiquement les performances magnétiques des poudres de fer, les produits finaux ne jouissant pas nécessairement de l'homogénéité des matériaux laminés²⁸.

Le développement des poudres de fer s'oriente parallèlement vers une diminution des pertes massiques. L'enrobage préalable des grains qui doit naturellement augmenter la résistivité en faveur de la diminution des pertes par courant induits, s'effectue cependant au détriment de la perméabilité²⁹. Un compromis s'impose donc. Ce léger handicap reste apparent dans le domaine des basses fréquences pour le quel le niveau des pertes massiques est supérieur à celui des matériaux laminés, mais la tendance semble a priori s'inverser lorsque les fréquences dépassent le kilohertz, la

²⁸ ALHASSOUN, Y., « Etude et mise en œuvre de machines à aimantation induite fonctionnant à haute vitesse » Thèse de doctorat INP Toulouse. 2005

²⁹ Quebec Metal Powders, ATOMET-EM1, technical specifications, 2001

pente de la caractéristique des pertes dans les matériaux magnétiques composites étant légèrement inférieure à celle des matériaux laminés³⁰.

Si dans le domaine des hautes vitesses, l'utilisation des poudres de fer semble justifiée vis à vis des pertes électromagnétiques, elle reste très incertaine si l'on considère les propriétés mécaniques. Contrairement aux limites élastiques caractérisant les tôles, les essais en traction effectués sur les poudres de fer sont pour l'instant peu probants. L'addition de certains liants contribue certainement à la rigidification du produit final, mais au détriment des propriétés magnétiques.

En revanche l'isotropie thermique des matériaux magnétiques composites constitue sans nul doute un atout à exploiter. La bonne conductivité thermique (20 W/K·m) alliée à un transfert de chaleur tridimensionnel laisse penser que même si les pertes sont significatives elles sont néanmoins mieux réparties (disparition de points chauds) et mieux dissipées. Dans ces conditions, on peut envisager de combler une relative faiblesse sur l'induction à saturation par une augmentation conséquente de la densité de courant au sein de la structure sans pour autant risquer un échauffement critique.

³⁰ ALHASSOUN, Y., « Etude et mise en œuvre de machines à aimantation induite fonctionnant à haute vitesse » Thèse de doctorat INP Toulouse. 2005

CHAPITRE 2 : LA CONCEPTION D'UN MICROMOTEUR RAPIDE À AIMANTATION INDUITE ET FLUX AXIAL

Dans ce deuxième chapitre, nous présenterons la conception d'un micromoteur à aimantation induite et à flux axial, pour une application d'usinage à grande vitesse.

Pour une application de micromoteur si exigeante, nous soulignerons la difficulté d'utiliser les techniques classiques de conception des machines électriques. Nous insisterons sur la nécessité d'une formulation multiphysique qui prend en compte les différentes interactions, comme les interactions magnétiques-thermique, magnétiques-élastique ou électriques-thermique, sans pour autant négliger d'autres interactions comme l'alimentation et le contrôle du dispositif.

À l'heure actuelle, les outils et techniques de conception se concentrent uniquement sur une seule discipline. Par exemple, pour la conception de moteurs électriques, on prend en compte uniquement les effets magnétiques, négligeant ainsi les interactions avec d'autres disciplines ou en se limitant à l'interaction la plus simple. Toutefois, dans une application si exigeante, telle que l'usinage à grande vitesse, il est nécessaire de considérer pendant la conception, non seulement l'aspect magnétique, mais aussi d'autres interactions qui peuvent être pris en considération, de ce fait tous les problèmes qui se présentent par la conception d'une application de telles caractéristiques.

Ce chapitre sera donc divisé en deux parties. Dans un premier temps, un état de l'art des micromoteurs et des technologies sera dressé, et dans une deuxième partie, un micromoteur rapide à flux axial sera conçu pour montrer des limitations des méthodes classiques de conception de moteurs appliqués à ce type de dispositifs magnétiques.

2.1 Micromoteurs rapides à aimantation induite : un état de l'art

Selon R. Belmans et K. Hameyer³¹, les micromoteurs peuvent être définis comme les moteurs qui sont dans l'échelle millimétrique ou submillimétrique.

D'autre part, on peut définir un moteur ultrarapide, comme celui qui a une vitesse périphérique telle que le matériau se trouve proche de sa limite élastique.

Il y a différentes technologies de micromoteurs qui ont été développées. Ils sont basées sur les principes des actionneurs électrostatiques^{32, 33}, électromagnétiques^{34, 35}, aimants permanents³⁶, et ultrasoniques^{37, 38}.

³¹ BELMANS R., HAMEYER K., "Computer modeling techniques for microstructures", IEE half day Colloquium on [Computer Modelling Techniques for Microstructures](#), pp. 2/1-2/3, May 1997.

³² FAN L.S., TAI Y.C., MULLER R.S., "IC Processed electrostatic micromotors". Sensors and Actuators, vol. 20, pp. 41-47, 1989.

³³ MEHEREGANY M., NAGARKAR P., SENTURIA S.D., LANG J.H., "Operation of microfabricated and ordinary side-drive motors." IEEE Microelectromechanical Systems Workshop, pp 1-8, 1990

³⁴ AHN C.H., KIM Y.J., ALLEN M.G., "A Planar Variable Reluctance Magnetic Micromotor with fully integrated stator and coils," Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 2, No. 4, 1993.

³⁵ SUZUKI K., TANIGAWA H., "Single crystal Silicon Rotational Micromotors," Proceedings of the IEEE Microelectromechanical Systems, pp. 15-20, 1991

³⁶ WAGNER B., KREUTZER M., BENECKE W., "Permanent Magnet Micromotors on Silicon Substrates," Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 2, 1993

La génération d'efforts d'origine électrostatique a différents avantages, en particulier du point de vue de la fabrication, car ce type de structure favorise l'utilisation de techniques de microfabrication. Par contre les densités de puissance qui peuvent être atteintes sont inférieures à celles obtenues avec des efforts d'origine magnétiques, comme le démontre par exemple D. Niarchos³⁹.

Le micromoteur magnétique se compose d'un rotor, d'un stator et de bobines sur le stator. Un rotor est fabriqué dans un matériau tel qu'un alliage nickel-fer. Il tourne de manière synchrone avec le champ magnétique tournant généré par les bobines du stator en substrat de silicium. La figure 2.1 illustre le micromoteur magnétique avec aimantation induite, fabriqué par Georgia Tech.

Différents chercheurs commencent aussi à examiner les questions découlant des hautes vitesses de rotation⁴⁰. Ils étudient les forces de frottement à l'échelle micrométrique et⁴¹ analysent aussi la dynamique des micromoteurs.

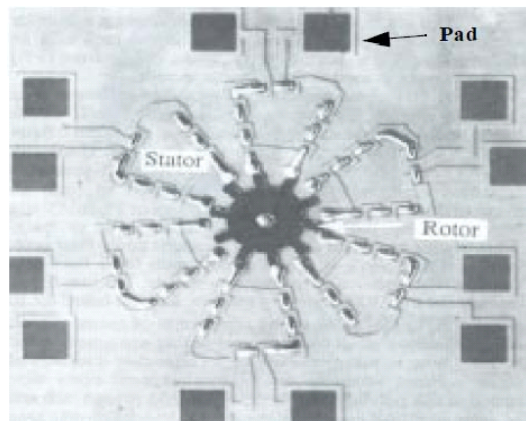


Figure 2.1 : image au microscope du micromoteur de Georgia Tech

2.1.1 Expériences basées sur des principes électrostatiques

Le Massachusetts Institute of Technology (MIT), aux États-Unis, a présenté une conception⁴², des procédés de fabrication et performances d'un micromoteur électrostatique avec un rotor de 4 mm de diamètre^{43, 44}.

³⁷ MORITA T., KUROSAWA M., HIGUCHI T., "An Ultrasonic Motor using Bending Cylindrical Transducer Based On PZT Thin Film," Proceedings IEEE Micromechanical Systems (MEMS), 1995

³⁸ UDAYAKUMAR K.R., BART S.F., FLYNN A.M., CHEN J., TAVROW L.S., CROSS L.E., BROOKS R.A., EHRLICH D.J., "Ferroelectric thin film ultrasonic motor", IEEE Microelectro mechanical Systems Workshop, pp. 109-113, 1991.

³⁹ NIARCHOS D., "Magnetic MEMS: key issues and some applications". Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 109, p. 166-173, 2003.

⁴⁰ MATHIESON D., YANG S.J., FLOCKHART S., "Friction forces on the microscale: implications for micromotors". IEE Colloquium on Methods of Materials Measurement in Microengineering, Volume , Issue , 30 Nov 1995 Page(s):3/1 - 3/4

⁴¹ GOEMANS P.A.F.M., KAMERBEEK E.M.H., KLIJN P.L.A.J., "Measurement of the pull-out torque of synchronous micromotors with P.M. rotor". Sixth International Conference on Electrical Machines and Drives, 1993. (Conf. Publ. No. 376) Volume , Issue , 8-10 Sep 1993 Page(s):4 - 8

⁴² LIVERMORE C., FORTE A. R., LYSZCZARZ T., UMANS S. D. , AYON A. A., LANG J. H., "A high-power MEMS electric induction motor". IEEE Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 13, N° 3, June 2003, pp.465-471

⁴³ ARNOLD D. P., "Magnetic machines for microengine power generation". These de doctorat Georgia Institute of Technology. 2004

2.1.2 Expériences basées sur des principes magnétiques avec aimantation induite

Dans les années 80, apparaissent les premières publications sur les micromoteurs. Depuis cette date, diverses équipes de centres de recherche présentent leurs prototypes. Dès lors, plusieurs propositions pour micromoteurs seront rapidement diffusées. Une des premières fut celle de l'Université du Wisconsin⁴⁵, elle fournit des essais au sujet d'un micromoteur à réluctance magnétique du type 6:4, capable de tourner à 30.000 tr/min grâce à de la lévitation magnétique. Il est construit par des techniques de microfabrication. Le micromoteur a été fabriqué avec deux rotors de 285 et 423 μm de diamètre. La figure 2.2 montre une photo du micromoteur.

Le Massachusetts Institute of Technology (MIT) aux États-Unis, a aussi travaillé très activement depuis 1995 sur des microstructures rapides. Leurs travaux présentent différents microactionneurs allant de petites pompes à turbines pour la production d'énergie portable⁴⁶ avec un rapport détaillé sur la fabrication et les caractéristiques d'une microturbine tournant à 1.000.000 t/min avec des paliers à gaz de 10 mm de diamètre. Ils incluent également une comparaison de structures électromagnétiques à aimantation induite et générée, pour la production d'électricité. L'étude détaille aussi les processus de fabrication en utilisant des techniques de microfabrication.

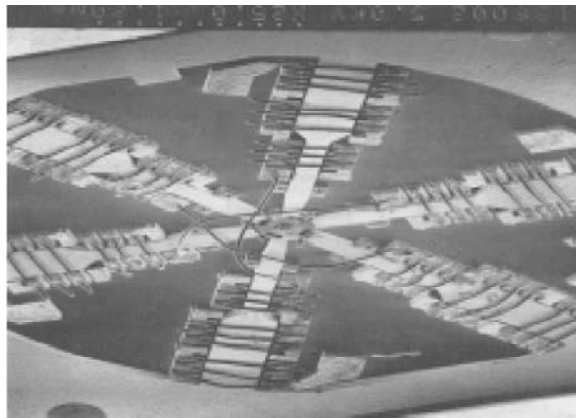


Fig.2.2 : Micromoteur à aimantation induite développé à l'Université de Wisconsin

À cette date, commencèrent aussi les comparaisons entre les différents types de structures à aimantation induite et aimantation générée. Par exemple, le Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble (LEG, devenu G2ELab)^{47,48,49,50} a présenté nombreuses

⁴⁴ STEYN J. L., LIVERMORE C., KHANNA R., LANG J. H., UMANS S. D., WARREN E. P., "Micro Electric Machines for Micro Turbomachinery". http://mtlweb.mit.edu/research/annual_reports/2002/02_mems/micro_electric_machines.pdf

⁴⁵ H. GUCKEL, T.R. CHRISTENSON, K.J. SKROBIS, T.S. JUNG, J. KLEIN, K.V. HARTOJO, AND I. WIDJAJA., "A first functional current excited planar rotational magnetic micromotor". IEEE Micro Electro Mechanical system, 1993

⁴⁶ D.P. ARNOLD., "Magnetic machines for microengine power generation". Thèse de doctorat à Georgia Institute of Technology. 2004

⁴⁷ G. REYNE, J. DELAMARE, O. CUGAT., "Magnetic Micro Actuators (MAGMAS)".

⁴⁸ REYNE G., DELAMARE J., CUGAT O., ROSTAING H., "Novel magnetic micro-actuators and systems (MAGMAS) using permanent magnets". 5th European Magnetic Sensors & Actuators Conference - EMSA 2004, Cardiff, UK, 4-6 July 2004. 2006, vol. 129, n°1-2, pp. 265-269

⁴⁹ RAISIGEL H., « Micro-générateur magnétique planaire et microconvertisseur intégré ». Thèse de doctorat. INP Grenoble. 2006

⁵⁰ RAISIGEL H., CUGAT O., DELAMARE J., « Permanent Magnet planar micro-generators". Sensors and Actuators A: Physical, vol. 130-131, pp. 438-444, (2006)

publications, en montrant des résultats intéressants sur les différents types d'interactions électromagnétiques. Cugat et al³⁸, rapportent que les MAGMAS (MAGnetic Micro-Actuators and Systems) offrent une plus grande force, un meilleur contrôle à distance et une meilleure robustesse par rapport aux MEMS (Micro Electro Mechanical Systems). Ils montrent également la possibilité d'avoir des densités de courant très hautes à petite échelle (autour de 1000 A/mm²), avec le développement de couches minces, d'alimentations spécifiques et d'une réfrigération appropriée. Cela laisse à penser que les MAGMAS ont une perspective de développement spectaculaire dans un avenir proche.

Bien que le développement des micromoteurs commence vers la deuxième moitié des années 80, le premier document qui montre la faisabilité d'un actionneur électrostatique supporté par des paliers à gaz pour la conversion électromécanique est présenté en 2001 par une publication de Luc G. Fréchette, Steven F. Nagle, et al⁵¹.

Les techniques de fabrication jouent également un rôle important dans le développement des micromoteurs ultra-rapide. Peu à peu, il apparaît de nombreux documents relatifs aux différentes techniques de fabrication.

Les dispositifs électromagnétiques peuvent aussi être classés en fonction de la direction dans laquelle le flux circule: flux radial ou axial.

Dans les structures magnétiques à flux axial, le stator et le rotor sont disposés en parallèle, créant un flux magnétique circulant dans la même direction que l'axe principal.

Selon la façon dont le courant magnétisant est généré au sein des machines à flux axial, on peut distinguer les machines synchrones à aimants permanents et les machines à induction. Dans les premières, le champ est créé par des aimants permanents situés sur le rotor, la synchronisation de la vitesse du champ statorique et la vitesse du rotor est donc assurée. Par contre les machines à induction fonctionnent grâce couple dû au glissement entre la la vitesse champ statorique et celle du rotor (moteur asynchrone).

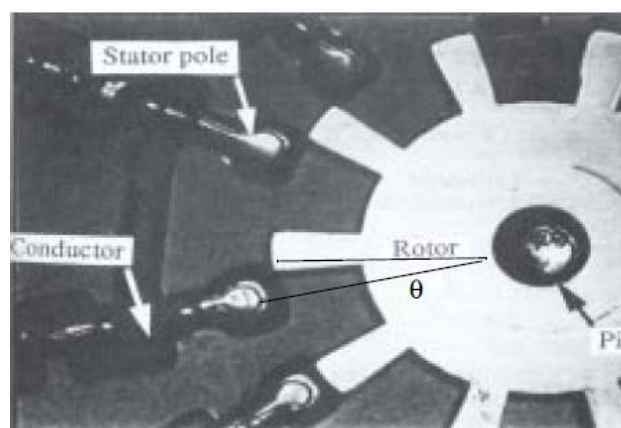


Fig. 2.3 : Détails du micromoteur à aimantation induite développé par Georgia Tech.

⁵¹ FRECHETTE L.G., NAGLE S.F., GHODSSI R., UMANS S.D., SCHMIDT M.A., LANG J.H., "An electrostatic induction micromotor supported on gas lubricated bearings", IEEE 14th International Micro Electro Mechanical Systems Conference, MEMS 2001, Interlaken, Switzerland, January 2001

Ahn *et. al.* à Georgia Tech⁵² ont expliqués la conception d'un rotor à reluctance variable intégré dans un substrat silicium. Sur les Figures 2.1 et 2.3, on observe une image de ce micromoteur.

D'autres expériences sur des moteurs à réluctance à flux axial pour des applications biomédicales telles que des cathéters mesurant de 0,5 à 2 mm de diamètre, ont été présentés par l'Université de Caroline du Nord⁵³. L'Université de Pise⁵⁴ a présenté un ensemble de micro-robots ayant un volume de 1 cm³, dont chacun paire de micro moteurs fournit un couple de 350 $\mu\text{N}\cdot\text{m}$ à une vitesse de 180 tr / min. On peut voir dans la Figure 2.4 une image de la version la plus réduite de ces micro-robots.

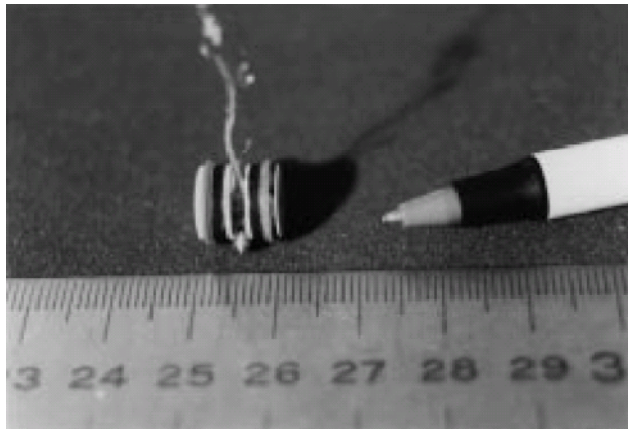


Fig. 2.4: microrobot de l'Université de Pise

2.1.3 Expériences basées sur les principes magnétiques à aimantation générée

De nombreux articles liés à ce type de technologie ont été publiés, principalement pour des applications telles que le générateur.

Différents auteurs^{55,56} ont présentés les résultats d'un prototype à flux axial, d'un micromoteur à aimants permanents. Aussi Agüero et al⁵⁷ présentent des techniques de simulation de micro-moteurs. Raisigel et al⁵⁸ présentent un prototype d'un micro turbo générateur à aimants permanents à une vitesse maximale de 260 000 tr/min.

⁵² AHN C.H., KIM Y.J., ALLEN M.G., "A Planar Variable Reluctance Magnetic Micromotor with fully integrated stator and coils," Journal. of Microelectromechanical Systems, Vol. 2 N° 4, 1993

⁵³ JUNGREIS A. M., KELLEY A. W., "The axial air gap wobble motor-an appropriate topology for magnetic micromotors", IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, Part 1 (1995), pp. 781-788.

⁵⁴ DARIO P., CARROZZA M. C., STEFANINI C., D'ATTANASIO S., "A mobile microrobot actuated by a new electromagnetic wobble micromotor", IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 3, No. 1, March 1998

⁵⁵ AGÜERO A., MOYANO R., "Application of rare earth magnets in a micromotor". 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference, Milwaukee, Wisconsin, États Unis, 1997, IEEE Catalog Number 97TH8282, pp. MB2-7.1.

⁵⁶ SHEARWOOD C., YATES R.B., "Development of an electromagnetic microgenerator", Sheffield University. IEEE Electronics Letters. 23 Oct 1997.

⁵⁷ AGÜERO A. C., ACTIS F. A. "Finite element analysis of a synchronous permanent magnet micromotor through axisymmetric and transverse planar simulations", IEEE Transactions on Magnetics, Vol 34, No. 5, September 1998

⁵⁸ RAISIGEL H., CUGAT O., DELAMARE J., WISS O., ROSTAING H., "Magnetic planar micro generator", 13 International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems. Seoul Korea, June, 5-9, 2005

Un autre domaine d'applications industrielles qui bénéficie de cette technologie est celui des applications biomédicales^{59, 60}, parce qu'elles utilisent des très basse tension.

Gilles et al⁶¹ propose des micro-moteurs à aimantation générée avec des diamètres qui varient des de 3 mm à 8 mm en mode moteur. Zang et al⁶² présentent les effets de la longueur de l'entrefer, de l'épaisseur du rotor, du nombre des couches du bobinage et le nombre de pôles, sur un micro-moteur à flux axial avec une taille de rotor de 1mm de diamètre.

2.2. Quelques modèles

2.2.1 Modèle analytique linéaire

Voici quelques détails et hypothèses de travail pour développer le principe du moteur à induction à flux axial, afin de se rendre compte des premières difficultés occasionnées par la conception de tels dispositifs. Nous supposons que le dimensionnement ne se fait qu'à partir du point de vue électromagnétique. Les contraintes mécaniques, thermiques ou liées à la fabrication, par exemple, ne seront pas considérées à ce stade de la conception. La figure 2.5 montre des coupes transversales du moteur à induction à flux axial que nous voulons concevoir.

Dans la conception analytique, seule la composante axiale (l'axe z est également montré dans la figure 2.5) de la densité du flux sera prise en compte. Cette composante est prépondérante dans le fonctionnement de ce type de moteurs.

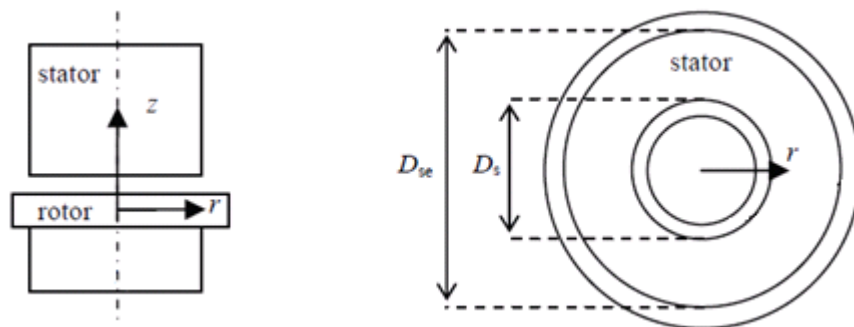


Fig. 2.5. Vues du moteur 3D. Les paramètres D_{se} et D_s sont les diamètres extérieur et intérieur du noyau du stator.

Dans la conception de la machine à induction à flux axial, le rapport entre les diamètres intérieur et extérieur du stator, D_s et D_{se} montré dans la Figure 2.5 est appelé k_d . Il peut être calculé par l'expression:

⁵⁹ SUZUKI S., KATANE T., SAOTOME H., SAITO O., "A proposal of electric power generating system for implanted medical devices". IEEE Transactions on Magnetics. Vol. 35, No. 5, September 1991

⁶⁰ SENDOH M., YAMAZAKI A., CHIBA A., SOMA M., ISHIYAMA K., ARAI K. I., "Spiral type magnetic micro actuators for medical applications"

⁶¹ GILLES P.-A., DELAMARE J., CUGAT O., SCHANEN, J.-L., "Design of a permanent magnet planar synchronous micromotor", Proceedings of the IAS, Roma, 2000, , Italy, October (2000), pp. 223–227.

⁶² ZANG M., CAI B., YANG C., "Optimization of $\varnothing$ 1 mm permanent magnet axial-field micromotor", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 5,

$$k_D = \frac{D_s}{D_{se}} \quad (2.1)$$

Selon Campbell⁶³, le diamètre optimal pour la machine à flux axial à aimant permanent est 0,58. Cette valeur est également utilisée pour des machines à induction à flux axial. Aussi la surface de l'entrefer S_r (région capable de produire couple) et la longueur du noyau du stator (longueur active du moteur) peuvent être calculées à partir des valeurs de diamètres sélectionnés, D_{se} et D_s .

La taille correcte du rotor pour la production du couple exercé sur le rotor peut être facilement calculée à partir de la contrainte tangentielle σ_{tan} . La constante de la machine C , qui exprime la valeur de la puissance apparente ou de la puissance active pour un volume donnée du rotor de la machine, peut également être utilisée comme une méthode alternative à la contrainte tangentielle dans l'entrefer dans le calcul de la taille du rotor. Selon Vogt⁶⁴, la constante des machines à induction s'écrit sous la forme:

$$C = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} k_{w1} A \hat{B}_\delta \quad (2.2)$$

Où A est la densité linéaire de courant, $\hat{B}_\delta$ est la valeur de crête de densité de flux à l'entrefer et k_{w1} est le facteur de bobinage.

Dans le cas des machines à induction à flux axial, la constante de la machine peut être écrite comme une fonction de la contrainte tangentielle sous la forme:

$$C = \sqrt{2} \sigma_{tan} \pi^2 k_{w1} \quad (2.3)$$

Ainsi, à partir des équations (2.1) et (2.2), la contrainte tangentielle dans les machines à induction à flux axial peut s'écrire sous la forme:

$$\sigma_{tan} = \frac{A \hat{B}_\delta}{2} \quad (2.4)$$

L'étape suivante consiste à déterminer la valeur de la contrainte tangentielle. Vogt a défini les valeurs limites des efforts tangentiels pour les machines à induction. La contrainte tangentielle dans l'entrefer au point de fonctionnement nominale du moteur peut être calculée en utilisant:

$$\sigma_{tan} = \frac{T}{R_{av} S_r} \quad (2.5)$$

où R_{av} est le rayon géométrique moyen du moteur, S_r est la surface du rotor en contact avec l'entrefer et T est le couple.

La force tangentielle F_{tan} peut être calculée avec:

$$F_{tan} = \sigma_{tan} S_r \quad (2.6)$$

⁶³ CAMPBELL P., "Principles of a permanent-magnet axial-field DC machine". Proceedings of the IEE, Vol. 121, No. 12, pp. 1489–1494. 1974

⁶⁴ VOGT K., "Berechnung elektrischer Maschinen". VCH Verlagsgesellschaft mbH Weinheim

La longueur de l'entrefer, δ doit être choisi avec une attention particulière, car lorsque la longueur de l'entrefer devient trop importante, les pertes dans le bobinage du stator sont accrues, tandis que les courants induits dans le matériau magnétique du rotor sont réduits. La valeur minimale des pertes est le compromis entre l'augmentation des pertes dans le cuivre du stator et la réduction des courants induits dans le rotor. Lorsque l'on veut concevoir un moteur à induction à flux axial à haut rendement, on utilise souvent les valeurs de crête de la densité du flux élevées dans l'entrefer. Une importante densité de flux dans l'entrefer implique également une importante densité de flux dans le stator. La valeur élevée de la densité de flux dans l'entrefer est intéressante car elle permet d'obtenir un couple électromagnétique maximal.

Pour obtenir des résultats acceptables avec des calculs analytiques au cours de la conception, les conducteurs du rotor et du stator est divisé en un certain nombre de sous-zones concentriques, comme le montre la figure 2.6. Ainsi, nous supposons que la courbe de la machine n'a pas d'effet sur les performances des différentes sous-machines.

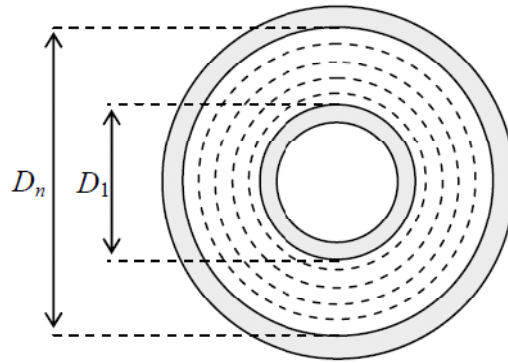


Fig. 2.6. La région active du moteur est divisée en zones concentriques. D_1 et D_n sont les diamètres intérieur et extérieur du moteur

Les valeurs de densité de flux dans le rotor et le stator sont étudiées dans chaque zone. Lors du dimensionnement des encoches du rotor, b_r , et du pas des encoches du rotor, $\tau_r(1...n)$, le concepteur doit tenir compte du fait que les parties internes du moteur ne sont pas saturées. La densité de flux dans les dents du rotor peut être calculée à partir de:

$$\hat{B}_{dr(1...n)} = \frac{\hat{B}_\delta \cdot \tau_{r(1...n)}}{\tau_{r(1...n)} - b_r} \quad (2.7)$$

Selon Vogt, la densité de flux admissible dans une dent du rotor (B_{dr}) dans le cas des machines à induction à flux radial est de 1.5-2.2 T. Dans notre cas, pour minimiser les pertes fer, on adoptera la valeur maximal de 0.6 T. La longueur de chaque dent du rotor peut être calculée, en supposant que les dents de la machine ne sont pas saturées et que presque tout le flux généré par le stator passe ensuite par les dents déjà citées de la machine et il n'y a donc pas de flux dans les encoches ni dans les isolants des encoches.

$$w_{dr(1...n)} = \frac{\tau_{r(n)} \cdot \hat{B}_\delta}{\hat{B}_{dr(n)}} \quad (2.8)$$

Avec ces méthodes analytiques, la profondeur de la culasse du rotor peut être calculée en utilisant l'expression:

$$w_{yr} = \frac{\hat{\Phi}}{2 \cdot \hat{B}_{yr} \cdot k_{rFE} \cdot l_e} \quad (2.9)$$

Où $\hat{B}_{yr}$ est la valeur de crête de la densité du flux dans la culasse du rotor. k_{rFe} est le coefficient d'empilement des tôles du rotor qui dépend de l'épaisseur relative d'isolation des tôles électriques et de la pression exercée sur l'empilement. Et $\hat{\Phi}$ est la valeur de crête du flux principal passant par les bobines du stator et les conducteurs du rotor.

Selon Vogth, la densité de flux admissible dans la culasse du rotor dans le cas des machines à induction radiale est de 0,4-1,6 T. Les efforts mécaniques du noyau massif du rotor ne constituent pas un problème contrairement à ce qui se passe dans les moteurs laminés, où les contraintes mécaniques sont importantes pour déterminer l'épaisseur minimale de la culasse du rotor.

Par conséquent, les équations (2.7) - (2.9) peuvent aussi être utilisées pour dimensionner le noyau du stator. Toutefois, dans le cas du moteur à induction à flux axial proposé dans cette étude, les valeurs de densité de flux dans le stator et dans l'entrefer ne doivent pas être trop élevées pour limiter les pertes dans le fer.

La valeur de la résistance des bobines parcourues par un courant continu dans chacune des phases de l'enroulement du stator, à température ambiante, peut être déterminée en utilisant l'expression:

$$R_{S(DC)} = \frac{N \cdot l_m}{\sigma \cdot a \cdot S_c} \quad (2.10)$$

où a est le nombre de conducteurs en parallèle, l_m est la longueur d'un tour de la bobine, N est le nombre de tours en série dans le bobinage du stator par phase, S_c est la section transversale d'un conducteur et σ est la conductivité électrique du matériau de la bobine. D'après Vogt, la longueur de la bobine dépend du noyau du stator l_e , du pas polaire τ_p , du facteur de raccourcissement χ , qui représente la relation entre le pas de la bobine W et le pas polaire τ_p , et de la distance moyenne de la tête de bobine l_{ew} .

$$l_m = p \cdot (2 \cdot l_e + \chi \tau_{pin} + \chi \tau_{pout} + 2 \cdot l_{ew}) \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) peut directement être utilisée lorsque la longueur de la bobine est déterminée pour la machine à flux axial.

Le flux de dispersion des têtes de la bobine résulte de tout les courants circulant dans les têtes de la bobine. Il n'existe pas de méthode à la fois précise et simple pour déterminer les inductances de dispersion dans les têtes de la bobine, parce que la géométrie des têtes de la bobine est généralement difficile à analyser, de plus les phases de machines polyphasés influent sur le reste dès lors que l'on considère le flux de dispersion. Les têtes de bobine sont habituellement relativement loin des parties du noyau, et donc les valeurs des inductances des têtes de bobine ne sont généralement pas trop élevées.

Toutefois, dans certains cas, il est possible d'utiliser les facteurs de forme empirique, λ_E et λ_W pour déterminer ...

Richter⁶⁵ présente le calcul détaillé des facteurs d'inductance qui sont valables pour des machines à induction. Dans le cas des machines à induction à flux axial, les inductances de dispersion des têtes de bobine L_w doivent être calculées pour les diamètres extérieurs et intérieurs. Elles peuvent être calculées avec :

$$l_{wsin} = \frac{4m}{Q_s} q \cdot N^2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu_0 (2 \cdot l_{ew} \cdot \lambda_E + \chi \cdot \tau_{pin} + \lambda_W) \quad (2.12)$$

$$l_{wsout} = \frac{4m}{Q_s} q \cdot N^2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu_0 (2 \cdot l_{ew} \cdot \lambda_E + \chi \cdot \tau_{pout} + \lambda_W) \quad (2.13)$$

où f est la fréquence, q est le nombre d'encoches par pôle et par phase et μ_0 est la perméabilité du vide.

Dans l'annexe 1, on peut trouver un exemple de processus de conception détaillée d'un moteur à induction à flux axial de 1 000 000 tr/min destiné à l'usinage à grande vitesse.

2.2.2 Modèle magnétique par schéma électrique équivalent (réluctances)

La définition de la réluctance repose sur les expressions intégrales des équations de Maxwell en régime magnétostatique^{66, 67, 68} (on ne prend pas en compte les effets induits dans les conducteurs) :

- celle de Maxwell-Gauss donne la définition du flux magnétique (2.14), où S est la section associée au tube d'induction considéré (figure 2.7) :

$$\varphi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.14)$$

- celle de Maxwell-Ampère donne la définition du potentiel magnétique entre deux points d'une ligne de champ (2.15) :

$$\theta_A^B = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (2.15)$$

⁶⁵ RICHTER. "Electrische Maschinen: Band IV ». 2. Auflage. Birkhäuser Verlag, Basel. p.440.

⁶⁶ JUFER M., « Électromécanique », vol. 9 of Traité d'Électricité. Lausanne, Suisse : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1995

⁶⁷ JUFER M., « Circuits magnétiques », in Techniques de l'Ingénieur, vol. D 1 050-1, pp. 1-30.

⁶⁸ PELOUX du, Bertrand. « Modélisation des actionneurs électromagnétiques par réseaux de réluctances. Création d'un outil métier dédié au predimensionnement par optimisation ». Thèse de Doctorat à l'Université Joseph Fourier. 2006

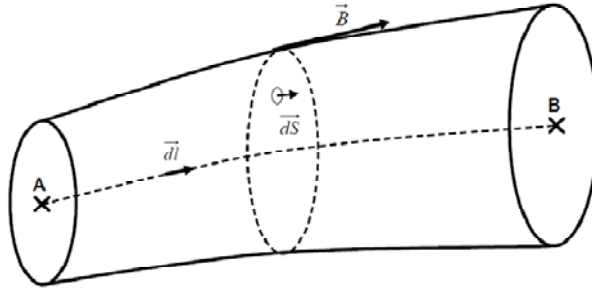


Fig. 2.7: Tube d'induction magnétique

Considérant la relation entre les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$, et sachant que sur un tube d'induction $\vec{H}$ et $d\vec{l}$ sont colinéaires, (2.15) peut s'écrire :

$$\theta_A^B = \int_A^B \frac{\vec{B} \cdot d\vec{l}}{\mu} = \int_A^B B S \frac{dl}{\mu S} = \int_A^B \varphi \frac{dl}{\mu S} \quad (2.16)$$

Le flux étant conservatif, on peut donc le sortir de l'intégrale :

$$\theta_A^B = \varphi \int_A^B \frac{dl}{\mu S} \quad (2.17)$$

A partir de 2.17, qui est en fait l'expression de la loi d'Ohm magnétique, on définit la réluctance comme le rapport du potentiel et du flux (2.18). Elle est donc caractéristique de la géométrie et des matériaux du tube de flux considéré.

$$\mathfrak{R}_A^B = \frac{\theta_A^B}{\varphi} = \int_A^B \frac{dl}{\mu S} \quad (2.18)$$

On définit aussi la perméance comme l'inverse de la réluctance :

$$P = \frac{1}{\mathfrak{R}_A^B} \quad (2.19)$$

Il existe une analogie entre les circuits électriques résistifs et les circuits magnétiques ; la table 2.1 donne les équivalences correspondantes. Elle est à la base de l'analyse par réseaux des réluctances qui consiste à décomposer un circuit magnétique en sous-éléments (réluctances ou sources de potentiel) puis à résoudre ce circuit comme un circuit électrique en utilisant les lois de Kirchhoff pour trouver les flux dans les différentes branches du circuit.

Circuit magnétique	Circuit électrique
Champ magnétique $\vec{H}$	Champ électrique $\vec{E}$
Induction magnétique $\vec{B}$	Densité de courant $\vec{j}$
Perméabilité μ	Conductivité σ
Flux magnétique φ	Courant I
Potentiel magnétique θ	Potentiel V
Réductance $\mathfrak{R}$	Résistance R

Tab. 2.1 : Analogies entre grandeurs magnétiques et électriques

La principale difficulté de ce type de modélisation réside donc dans l'identification des différents tubes d'induction. Ce qui demande au concepteur un certain savoir-faire.

En identifiant les différents tubes de flux associés à un circuit magnétique, et en utilisant les analogies de la table 2.1, il est donc possible d'obtenir un schéma électrique équivalent du circuit magnétique. On peut alors appliquer le théorème d'Ampère sur le contour de chaque maille du réseau électrique équivalent correspondant.

L'analyse classique du circuit électrique équivalent permet ensuite d'établir les expressions analytiques des courants. Qui sont en réalité dans notre cas des flux magnétiques dans chacune des branches du réseau. Moyennant une certaine connaissance des chemins empruntés par les flux dans un dispositif, on est donc en mesure d'obtenir un modèle analytique.

La pertinence du modèle dépend toutefois de la précision avec laquelle on décrit les différents flux parcourant le dispositif.

2.2.3 Modèles par Éléments Finis

En partant des équations de Maxwell en régime stationnaire (2.20)-(2.22) (on néglige les courants de déplacement) et des lois de comportement des matériaux (2.23), (2.24), le système électromagnétique peut se décrire par un système d'équations aux dérivées partielles dont les conditions aux limites sont connues.

$$\text{rot}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} \quad (2.21)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (2.22)$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \vec{H} \quad (2.23)$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.24)$$

Étant donnés les géométries parfois très complexes et le caractère non linéaire des matériaux, la résolution analytique de tels systèmes est impossible dans le cas général, le recours à des méthodes numériques est donc impératif. De manière

générale, ces méthodes numériques permettent de ramener le problème à un système d'équations algébriques en discrétisant le domaine d'étude (maillage). On dispose alors d'une solution approchée sur une grille discrète de points.

La méthode des Éléments Finis^{69, 70} est l'une d'entre elles, elle permet d'obtenir le système d'équations discret en minimisant (condition de stationnarité) une fonction globale liée à l'énergie du système, appelée fonctionnelle, vérifiant les équations aux dérivées partielles sur le domaine d'étude et définie par parties sur chacun des éléments du maillage.

2.3 Conception d'un micromoteur ultra-rapide à aimantation induite

2.3.1 Cahier des charges; choix d'une structure à flux axial et pré-dimensionnement analytique d'un micromoteur ultra rapide à aimantation induite et flux axial

Les principales contraintes imposées par le cahier des charges du micromoteur électrique ultra rapide à aimantation induite et flux axial pour application à l'usinage à grande vitesse, sont exposées ci-dessous :

- Vitesse de rotation nominale très élevée, 1 000 000 t/min,
- un couple nominal de près de 4mN·m, suffisant pour effectuer des opérations de micro polissage des surfaces de matériaux à haute résistance comme le titane,
- un diamètre extérieur maximum du rotor de 10 mm,
- La valeur de l'induction maximale dans le matériau magnétique est de 0,6 T, pour ne pas saturer la machine et que les pertes dans le fer restent dans des valeurs aussi faibles que possible.

2.3.2 Modélisation par Éléments Finis

Une fois qu'on a obtenu les principales dimensions du micromoteur, on définit le modèle par Éléments Finis pour corroborer les résultats de la simulation et permettre également d'obtenir des informations complémentaires.

Cette méthode est basée sur la division d'un milieu continu, sur lequel est défini certaines équations intégrales qui caractérisent le comportement physique du système, en une série de sous domaine qui n'interagissent pas entre eux, appelés Éléments Finis. Les éléments sont liées en eux par des points appelés nœuds. Deux nœuds sont adjacents s'ils appartiennent au même élément fini. De plus, un nœud sur la frontière d'un élément fini peut appartenir à plusieurs éléments. Un ensemble de nœuds contigus formant un volume élémentaire est appelée maille.

⁶⁹ COULOMB J.L., SABONNADIÈRE J.C., « Éléments finis et CAO en électrotechnique », Hermes publishing, 1985

⁷⁰ DHATT G., TOUZOT G., « Une représentation de la méthode des Éléments Finis », Collection Université de Compiègne. Maloine, 1984

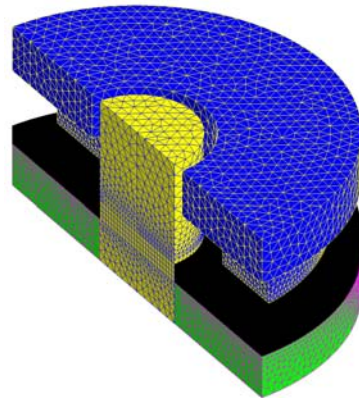


Fig.2.8. Géométrie et maillage du micromoteur à flux axial

La méthode par Éléments Finis a été utilisée pour concevoir le micromoteur. Grâce à l'utilisation des méthodes Magnétiques Transitoires, Magnétiques en Régime Permanent sinusoïdal AC, Couplée avec l'Équation du Circuit et avec la Cinématique de Rotation on est capable de résoudre simultanément les équations magnétiques, électriques et cinématiques.

Définition du micromoteur

Le processus de modélisation par la méthode des Éléments Finis peut être divisé en six étapes ou phases:

- Description géométrique de la structure électromagnétique : à partir de laquelle on définit les dimensions géométriques du micromoteur et les symétries et périodicités (pour réduire le domaine d'études et donc le temps de calcul). On définit aussi les paramètres géométriques, les systèmes de coordonnées et d'institutions, des points, des lignes, des visages et des volumes,
- Maillage : il est utilisé pour discrétiser le moteur en petits éléments, qui permet l'utilisation de la méthode des Éléments Finis,
- Définition des propriétés physiques du moteur : comme les matériaux utilisés, les régions, la définition des parties fixes et mobiles et du couplage du circuit électrique externe d'alimentation,
- Assignation des propriétés physiques : On va définir le type d'analyse en fonction des résultats attendus. Cette analyse peut être magnétostatique, magnétique en régime permanent sinusoïdal ou magnétique transitoire. Elle lie les parties de la géométrie avec les matériaux, le circuit électrique, les ensembles cinématiques, ...,
- Résolution : où l'utilisateur définit les plages de fonctionnement souhaitées pour les paramètres d'entrée et de sortie intéressants pour l'étude, et résolvants le problème en fonctions de ceux-ci,
- L'analyse des résultats : une fois le problème résolu, l'utilisateur peut afficher les courbes 2D, les cartographies et iso valeurs des régions des plans de coupe, etc.

Ce qui suit décrit les tâches de création du modèle dans le logiciel par Éléments Finis, alors que la résolution et l'analyse ultérieure des résultats est montré au paragraphe 2.3.2.

Une fois la géométrie définie, la prochaine phase est le maillage. Le but du maillage est la discrétisation des volumes, en vue d'obtenir un nombre fini d'éléments, ce qui converti le problème continu en un problème discret. Cela permet la résolution du problème en appliquant les équations de Maxwell, d'une manière très précise, à condition que l'on ait effectué un bon maillage.

Une fois la géométrie et le maillage définis, la phase suivante consiste à définir les propriétés physiques du problème. Ça correspond au choix des matériaux, à la définition des régions de volume et de son allocation à la suite de volumes existants, à l'identification et la caractérisation des enroulements statoriques, à la création de systèmes mécaniques fixes et mobiles, et enfin à la définition d'un circuit électrique externe, utilisé pour l'alimentation du micromoteur.

Les matériaux utilisés dans la construction du micromoteur sont au nombre de trois:

- Cuivre: utilisé à la fois pour l'inducteur et pour l'induit, c'est à dire pour le bobinage du stator et les deux couches de cuivre déposées sur le rotor.
- alliage FeNi composite: matériau magnétique doux fritté, utilisé pour le stator et le rotor, particulièrement approprié pour les applications où de faibles pertes sont souhaités à des fréquences élevées.
- Acier au carbone AlSi 1010: utilisé pour l'arbre.

Pour inclure ces matières dans le projet créé au sein du logiciel de conception, il ya deux différentes façons de le faire. La première consiste à importer directement le matériau de la base de données incluse dans le programme, ses propriétés sont alors directement définies. Si le matériau ne se trouve pas dans la base de données, il existe une deuxième façon, qui consiste à la création du matériau par l'utilisateur, en attribuant les propriétés à partir des données du catalogue.

Les propriétés du matériau magnétique doux fritté ont été définies à partir des données du catalogue fournies par la société AMES. Pour définir la caractéristique BH du matériau, on peut le faire de deux manières: par des paires de points (B , H) ou en l'ajustant à l'aide de 3 paramètres (μ_r , B_s , A). Dans ce cas, pour simplifier, le matériau est considéré isotrope saturé et défini par 3 paramètres: une perméabilité relative de 31000, une induction à saturation de 0,8 Tesla, et un coefficient d'ajustement de 0,2, qui est utilisé pour obtenir le coude de saturation.

Comme décrit dans les spécifications de conception, on a pris la décision de mettre en œuvre un bobinage triphasé à une couche avec bobines concentrées. Le nombre de tours par bobine est de 6, et ils sont répartis comme le montre la figure 2.9, en fonction des résultats de l'annexe 1 du présent document.

Selon ces informations, nous procéderons à la mise en place du bobinage dans l'environnement du logiciel de simulation. Cela crée trois bobines, correspondant aux trois phases U, V et W. En utilisant les symétries et périodicité, on crée le bobinage complet, comme le montre la figure 2.9.

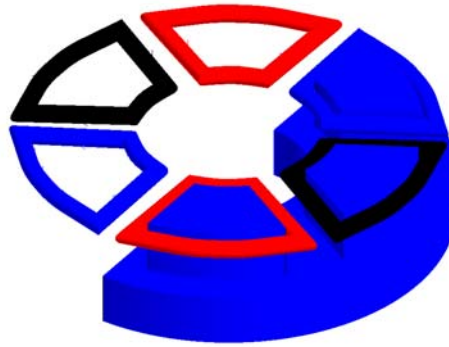


Fig.2.9. Enroulements statoriques (bobinage) et stator

Une fois que nous avons conçu la géométrie du moteur et que les propriétés physiques sont définies, il reste à définir l'alimentation de celui-ci, qui est réalisée par un circuit électrique.

Afin de rejoindre le domaine des Éléments Finis avec le circuit électrique d'alimentation externe, on place un composant correspondant à l'enroulement du moteur, appelé conducteur bobiné, dans le circuit électrique.

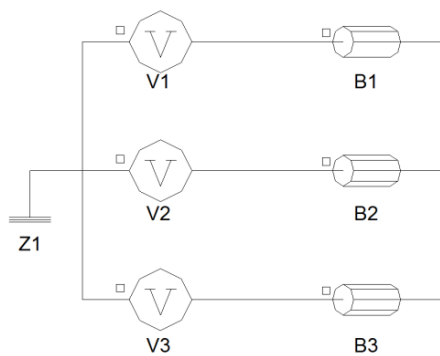


Fig.2.10. Circuit électrique couplé.

L'information à fournir dans ce circuit est la source de tension et la résistance de chaque enroulement. Ces informations sont estimées à partir des calculs en Annexe 1 du document, avec des tensions de phase efficaces d'amplitude 8 Volt, et une résistance d'enroulement $8,5 \text{ m}\Omega$.

Une fois le micromoteur complètement défini, l'étape suivante consiste à choisir l'application. Dans ce cas c'est le régime permanent.

Il est ensuite nécessaire de définir quelques paramètres caractéristiques de chaque application, comme la fréquence de fonctionnement, qui est de 18 kHz.

Nous devons aussi configurer les sources de tension du circuit électrique. Dans cette application, elles sont définies par la valeur efficace de la tension et le déphasage.

Une fois que l'application est définie, on doit réfléchir aux résultats attendus et créer autant de paramètres d'entrée / sortie que nécessaires dans le but de résoudre le problème en fonctions de ces paramètres.

Dans le cas présent, le but est d'obtenir certaines grandeurs en fonctions du glissement, comme le sont l'induction, le couple et les courants. Pour cela, on crée un paramètre d'entrée / sortie, commandé par un scénario, appelé «glissement».

Par la suite, on a aussi réalisé des études en fonction de la température du moteur, la résistivité du cuivre et de certaines dimensions géométriques du moteur. Pour cela, il est nécessaire de créer des paramètres d'entrée / sortie « température » et « résistivité », alors que dans le cas de différentes dimensions géométriques, on utilisera les paramètres géométriques définis dans le tableau 2.2.

Après avoir défini les paramètres nécessaires, on doit créer un scénario de résolution, qui fait référence aux paramètres de l'étude. On définit des bornes afin que le programme puisse résoudre le problème.

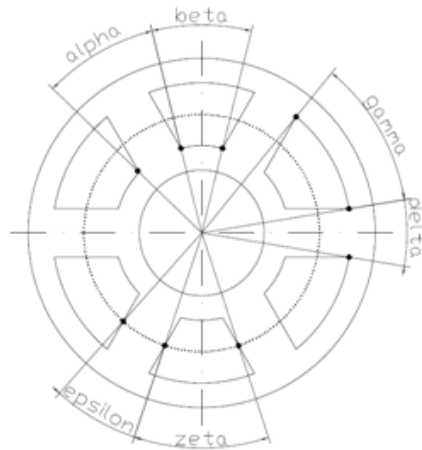
Le premier scénario créé vise à résoudre le problème en fonction du paramètre « glissement ». Pour ce faire, on doit indiquer la limite inférieure, la limite supérieure et le pas ou l'intervalle. Pour ce scénario, on peut définir le glissement entre 0,001 et 1, avec un intervalle de 0,1. On peut également introduire différents intervalles, avec une valeur distincte de pas. Ce qui est intéressant par exemple pour la représentation de la courbe couple en fonction du glissement, qui présente une pente initiale positive très prononcée. Alors qu'elle a une pente négative beaucoup moins prononcée après que le couple maximal ait été atteint, phénomène qui nécessite moins de points.

Enfin, il faut sélectionner l'option de résolution, et le logiciel commence alors les calculs souhaités, en fonction des informations saisies par l'utilisateur. Une fois le processus de résolution fini, on est alors capable d'analyser et de vérifier les résultats.

Nous avons effectué une simulation en régime permanent à courant alternatif avec une fréquence de 18 kHz et avec la variation du glissement de 0,001 à 1. Pour cela, on a créé un paramètre d'entrée / sortie "glissement" et on a créé un scénario de résolution défini en fonction de ce paramètre. Tous les autres scénarios créés, associés avec les différents paramètres de l'étude sont les suivants:

Nom du scénario	Limite inférieure	Limite supérieure	Pas
Épaisseur_entrefer	0.15	0.50	0.05
Épaisseur_rotor	0.88	1.60	0.12
Épaisseur_couche_cuivre	0.20	1.00	0.10
Épaisseur_dents	0.50	1.50	0.25
Épaisseur_culasse	0.80	1.60	0.10
Rayon_moteur	0.50	0.75	0.05
Température	80	160	10

Tableau 2.2. Autres scénarios créés.

Fig.2.11. Détails des paramètres α , β , δ , γ , ε et ζ .

Nom	Description	Valeur
$R_{in_culasse}$	Rayon intérieur de la culasse du stator	1.8 mm
R_{int_dent}	Rayon intérieur des dents du stator	2.5 mm
R_{ext_dent}	Rayon extérieur des dents du stator	4.3 mm
R_{moy_dent}	Rayon moyenne des dents du stator	$\frac{R_{int_dent} + R_{out_dent}}{2}$
R_{ext_moteur}	Rayon extérieur du rotor et du stator	5 mm
R_{axe}	Rayon de l'axe	1.5 mm
$H_{culasse}$	Épaisseur de la culasse du stator	1.2 mm
H_{rotor}	½ de l'auteur du rotor	1.12 mm
$H_{entrefer}$	Épaisseur de l'entrefer	0.25 mm
H_{cuivre}	Épaisseur de la couche du cuivre	0.5 mm
D_{dents}	Distance entre 2 dents	1.385 mm
N_{dents}	Nombre totale de dents	6 dents
H_{dent}	Auteur des dents	1.25 mm
N_{poles}	Nombre de poles	2
Alpha (α)	Voir figure 2.12	$2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{D_{dents}}{2 \cdot R_{int_dent}} \right)$
Beta (β)	Voir figure 2.12	$\frac{360 - 6\alpha}{N_{poles}}$
Delta (δ)	Voir figure 2.12	$2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{D_{dents}}{2 \cdot R_{ext_dent}} \right)$
Gamma (γ)	Voir figure 2.12	$\frac{360 - 6\delta}{N_{poles}}$
Epsilon (ε)	Voir figure 2.12	$2 \cdot \sin^{-1} \left(\frac{D_{dents}}{2 \cdot R_{moy_dent}} \right)$
Zeta (ζ)	Voir figure 2.11	$\frac{360 - 6\varepsilon}{N_{poles}}$

Tableau 2.3. Les paramètres géométriques du micromoteur.

Les dimensions du micromoteur, définies par paramétrage sont indiqués à le tableau 2.3.

2.3.3 Caractérisation numérique 3D du champ magnétique: Évaluation du couple en régime permanent

Pour étudier comment la tension d'alimentation influe sur le couple électromagnétique, on effectue des simulations en régime permanent sinusoïdal. Elles consistent en une analyse multiparamétrique avec tension d'alimentation variable, en maintenant le nombre de spires à 6 : comme le montre la famille suivante de courbes Couple-Glissement.

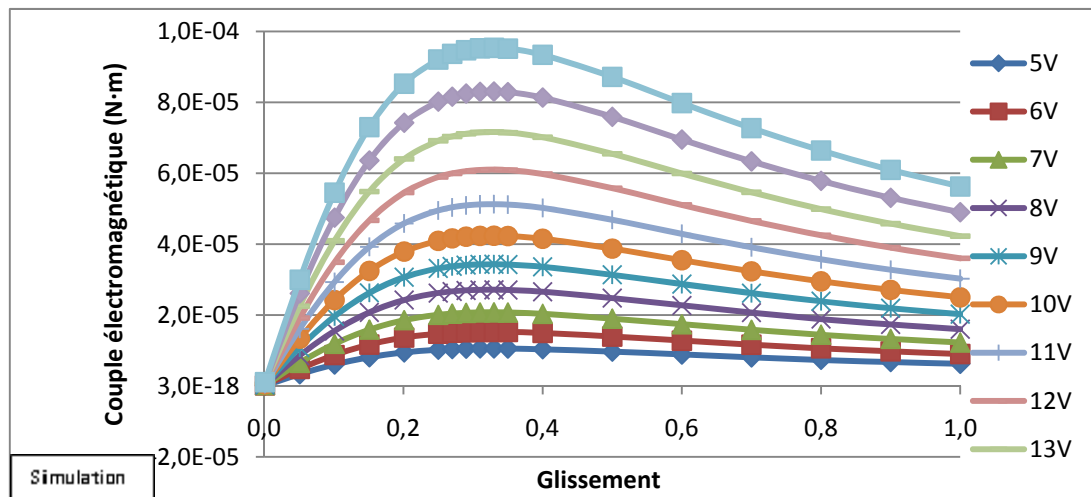


Fig.2.12. Famille de courbes Couple glissement avec tension d'alimentation variable.

Comme prévu, en augmentant la tension d'alimentation, on augmente aussi le couple électromagnétique. Si l'on veut un couple maximal de 4 mN·m, avec 6 spires par bobine, il est nécessaire d'appliquer une tension d'alimentation de 7 V.

2.3.4 Analyse paramétrique du micromoteur

Dans cette partie, on souhaite étudier l'évolution du couple en fonction des paramètres du moteur. L'étude se fera à travers plusieurs simulations du micromoteur tournant à sa vitesse nominale, c'est à dire avec une valeur de glissement $s = 0,074$, et dans lesquelles nous ferons varier les paramètres suivants:

- Les paramètres géométriques: épaisseur de l'entrefer, épaisseur de la couche de cuivre, épaisseur du rotor, dimension des dents du stator, épaisseur de la culasse du stator et du rayon du moteur.
- Température de fonctionnement.

INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DU ROTOR

Le premier essai est effectué avec une variation de l'épaisseur du rotor de 0,88 à 1,6 mm. Compte tenu des résultats, nous pouvons dire que le couple est à peu près constant avec la variation de l'épaisseur du rotor.

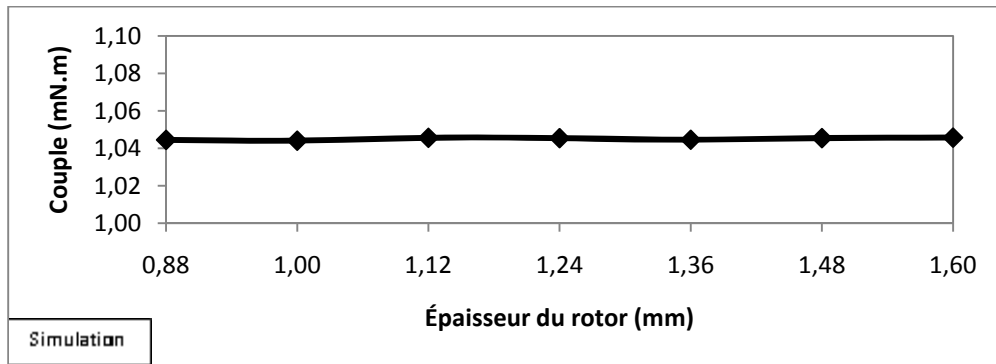


Fig.2.14. Évolution du couple en fonction de l'épaisseur du rotor

INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE DE CUIVRE

Cet essai examine l'évolution du couple causé par la variation de l'épaisseur de la couche de cuivre déposée sur le rotor. Comme en témoignent les résultats ci-dessous, une augmentation de l'épaisseur de la couche de cuivre entraîne une augmentation du couple électromagnétique.

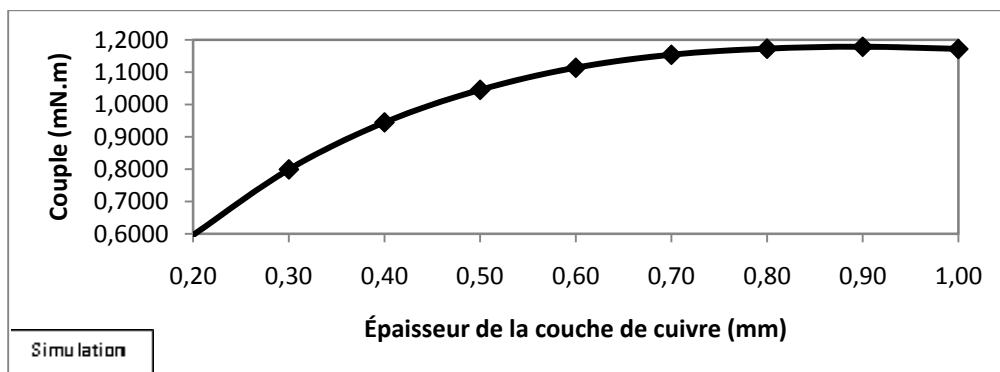


Fig.2.15. Évolution du couple électromagnétique en fonction de l'épaisseur de la couche de cuivre du rotor

INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE L'ENTREFER

Comme on peut le voir sur les résultats de cette simulation, lorsque l'entrefer augmente, le couple diminue linéairement. Lorsque l'entrefer devient plus important, le courant nécessaire pour magnétiser d'autant le circuit doit être augmenté. Si le courant est constant, alors le couple électromagnétique développé par le rotor diminue.

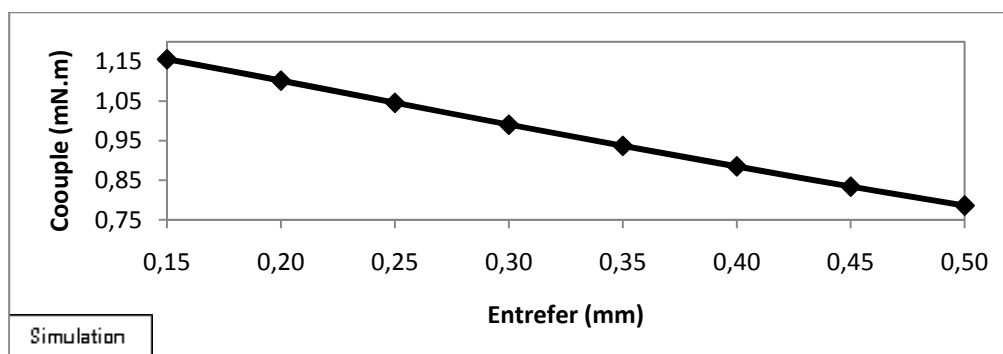


Fig.2.16. Évolution du couple en fonction de l'épaisseur de l'entrefer.

INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA CULASSE

Comme cela s'est produit avec l'épaisseur du rotor, la variation du couple produite par de petites variations de l'épaisseur du stator est négligeable. Ceci est dû au fait que le circuit magnétique n'est pas saturé.

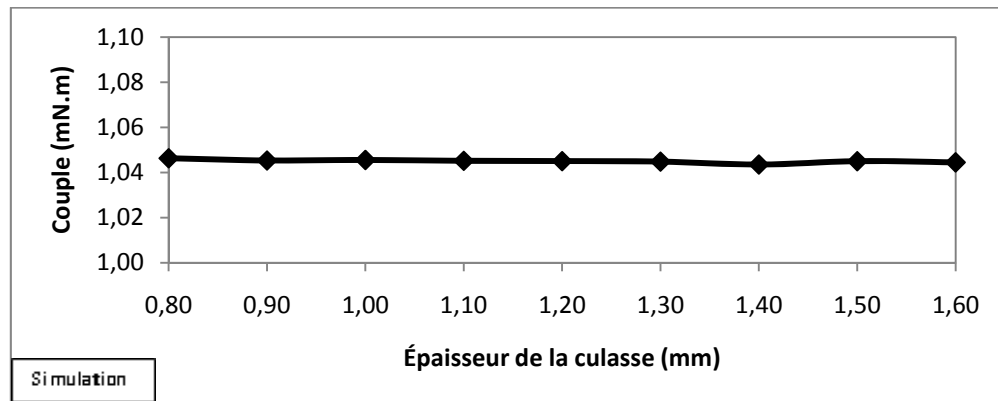


Fig.2.17. Variation du couple en fonction de l'épaisseur de la culasse du stator

INFLUENCE DU RAYON DU MOTEUR

Cet essai consiste à modifier le rayon extérieur du moteur, mais en laissant les dents à une distance constante par rapport au rayon extérieur. Ainsi, avec l'augmentation du rayon du moteur et du rayon moyen des dents, la distance entre les bobines logées dans les dents et l'arbre augmente.

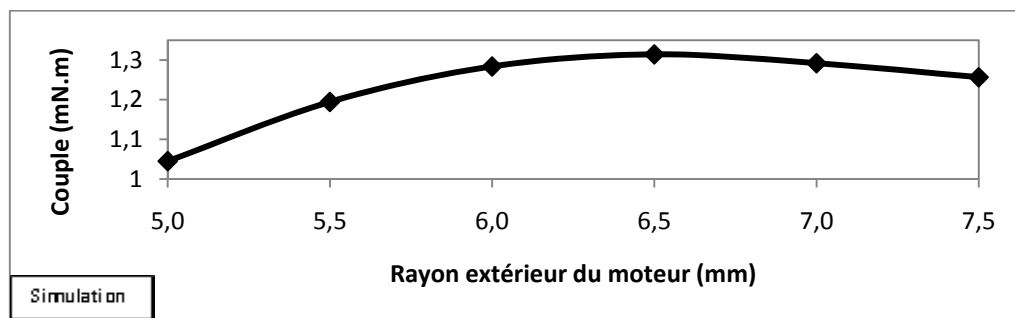


Fig.2.18. Évolution du couple en fonction du rayon du moteur

A priori, on s'attend à ce que le couple augmente quand cette distance augmente. C'est bien ce qui se passe dans un premier temps. Mais on remarque un point d'inflexion, pour une valeur de rayon de 6,5 millimètres, à partir de laquelle le couple commence à diminuer.

Ce changement se produit car en augmentant le rayon du moteur, on augmente aussi le volume du stator et du rotor, et donc la section que traverse le flux aussi. Pour une valeur de flux constante, l'augmentation de la dite section entraîne la diminution de l'induction, ce qui provoque ainsi une chute du couple.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE DE FONCTIONNEMENT

La variation de la température de fonctionnement provoque des changements sur les performances du moteur. On étudie ici le changement de la résistivité électrique (voir

Figure 2.19), qui varie linéairement avec la température. Puis, on observe l'effet de ces variations sur le couple électromagnétique.

Comme on peut le voir ci-dessous, si la température augmente alors le couple diminue. Par conséquent, il est important de garder le moteur en dessous de sa température maximale, qui est définie par le cahier des charges à 155 ° C.

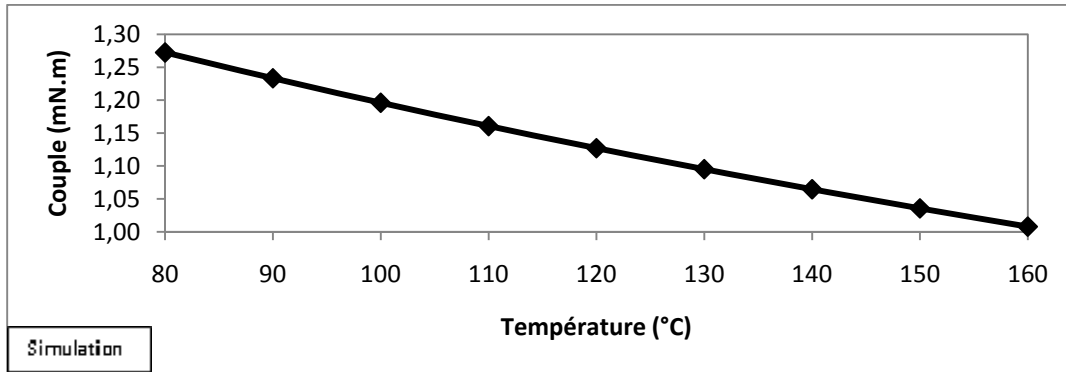


Fig.2.19. Évolution du couple en fonction de la température de fonctionnement du moteur.

2.3.5 Résultats en Régime Permanent

Cette partie a pour but de donner les résultats les plus significatifs du micromoteur, pour ensuite les analyser et les comparer avec les résultats obtenus dans le prédimensionnement du micromoteur.

Dans un premier temps, on visualise le couple électromagnétique du micromoteur en fonction du glissement. Les valeurs obtenues sont indiquées dans la figure 2.20.

Comme on peut l'observer, pour un glissement $s = (n_s - n_n) / n_s = 0,074$, correspondant à une vitesse de rotation de 1 000 000 t/min, le couple est de 1.071 mN.m. Comme présenté plus haut, on a modélisé seulement un quart du moteur, en lui appliquant une symétrie et une périodicité. Ce couple correspond donc à un quart du couple total. Par conséquent, le couple total du moteur est d'environ 4 mN.m, ce qui coïncide avec le couple imposé par le cahier des charges.

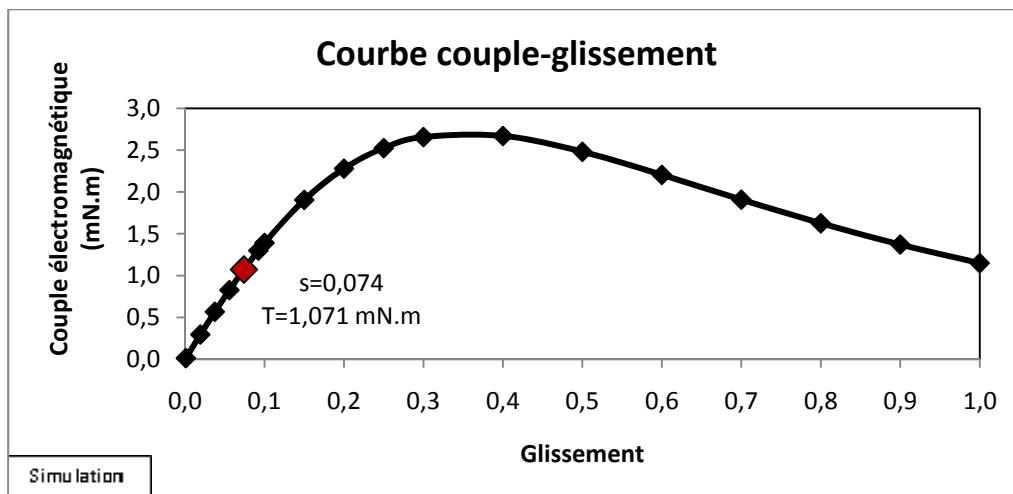


Fig.2.20. Courbe Couple-glissement du micromoteur

On se penche à présent sur l'étude des courants du stator. À cet effet, on représente l'évolution des courants de phase des bobines en fonction du glissement.

Les courants pour un glissement de 0,074 sont d'approximativement de 53 ampères, alors que la valeur obtenue par calcul analytique à l'annexe 1, est de 60 A.

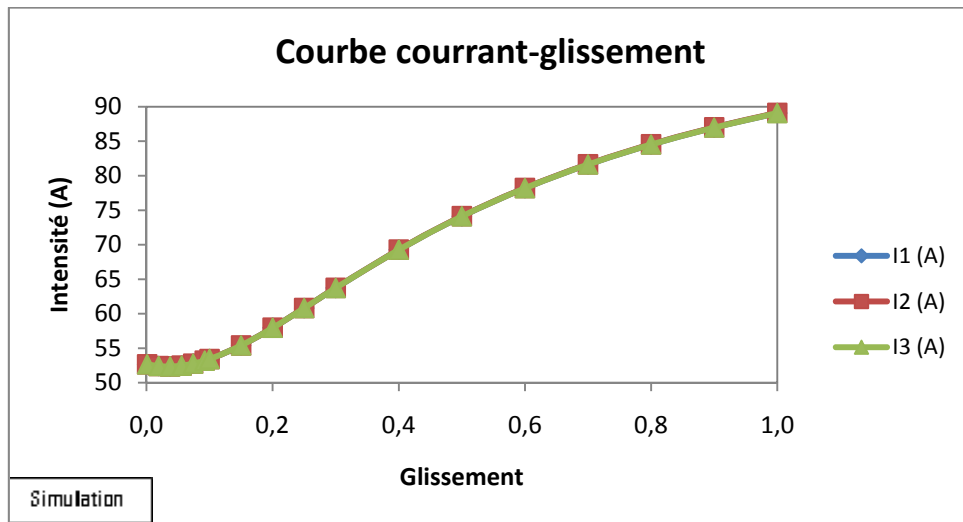


Fig.2.21. Courbes Courant-Glissement du micromoteur

Après l'analyse du couple et de la puissance, on doit étudier l'induction dans les différentes parties du moteur, afin de vérifier qu'elle se trouve dans la fourchette définie, et ainsi que le matériau magnétique ne soit pas saturé.

A partir de ce paragraphe, on peut obtenir plusieurs cartographies représentant la distribution du flux à travers chaque pièce du micromoteur

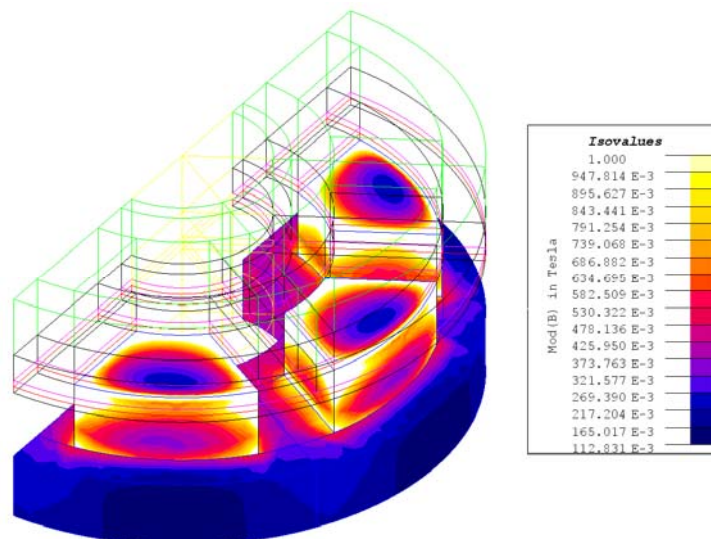


Fig.2.22. Cartographie des inductions dans le stator

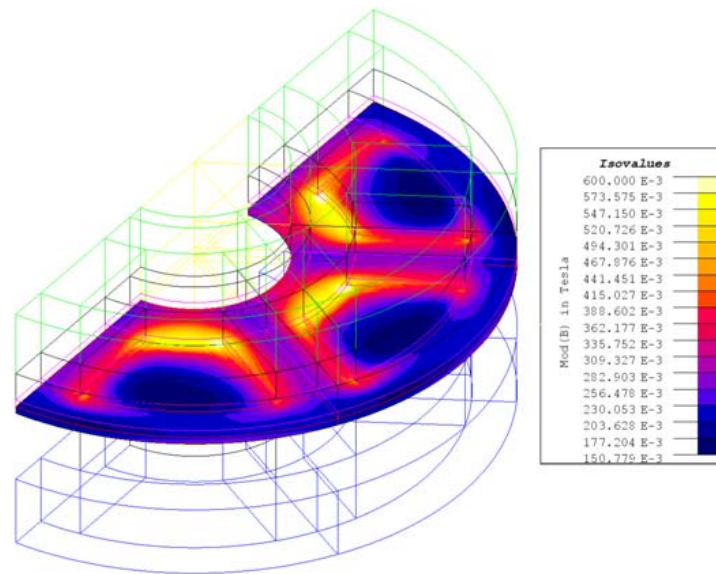


Fig.2.23. Cartographie des inductions dans l'entrefer

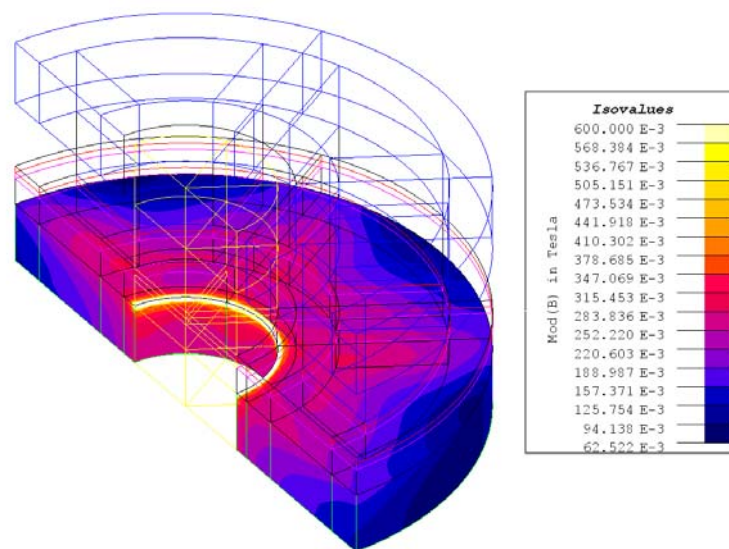


Fig.2.24. Cartographie des inductions dans le rotor

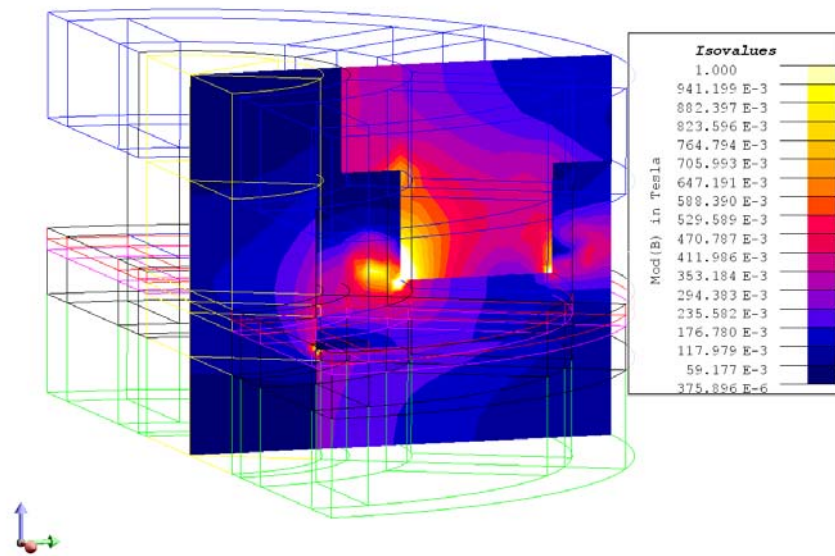


Fig.2.25. Cartographie des inductions dans une section du micromoteur

Dans ces cartographies, on observe facilement la fourchette dans laquelle varie l'induction dans chacune des parties de la structure électromagnétique. Pour obtenir des valeurs numériques d'induction plus précises, l'analyse doit s'effectuer sur une ligne circulaire passant par le centre de chaque partie de la géométrie. Pour ce faire, on crée différents « chemins », qui donnent des courbes comme le montrées à les figures 2.27 à 2.30, qui permettent d'évaluer l'induction en fonction de la position du rotor.

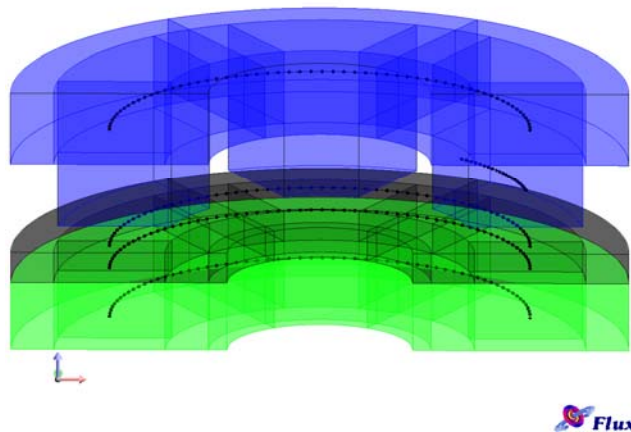


Fig. 2.26 : Représentation des chemins ou la grandeur B est évaluée

Le premier graphique représente l'induction dans le rotor, qui varie de 0,47 à 0,54 Tesla, en fonction de la position du rotor. La valeur moyenne est d'environ 0,505 Tesla. Elle est légèrement inférieure à la valeur maximale de 0.6 Tesla imposée par le cahier des charges.

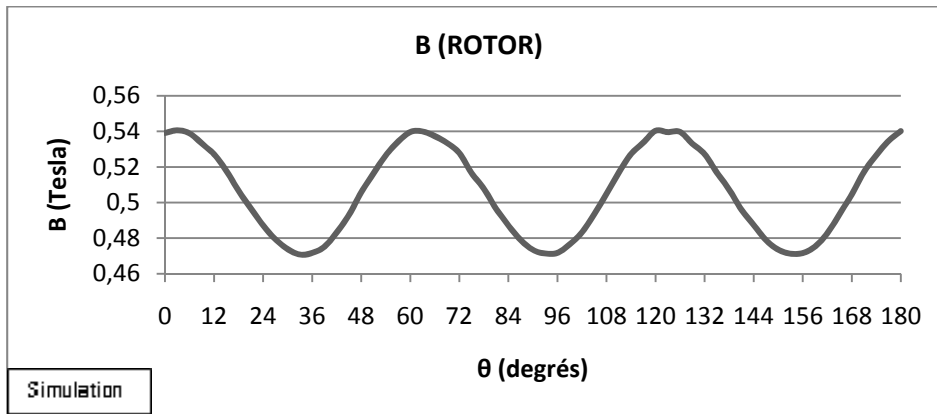


Fig.2.27. Courbe d'induction dans la ligne moyenne du rotor

Le second graphique correspond à la variation d'induction de l'entrefer, dont la valeur fluctue autour de 0,25 Tesla, une valeur qui est dans la limite des 0,3 T imposées par le cahier des charges.

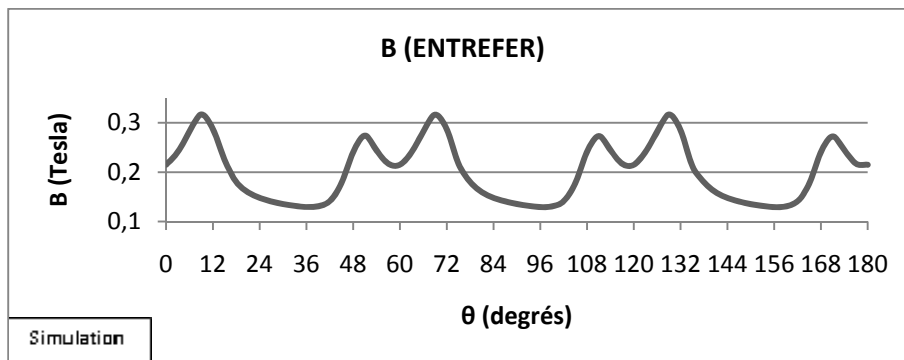


Fig.2.28. Courbe d'induction dans la ligne moyenne de l'entrefer

Dans le stator, comme dans le rotor, l'induction maximale pour laquelle le moteur est conçu correspond à 0,6 Tesla, une valeur qui n'est dépassé ni dans la culasse, dont la valeur maximale est de 0,58 (figure 2.30), ni dans les dents, dont la valeur maximale est de 0,6 T (figure 2.31).

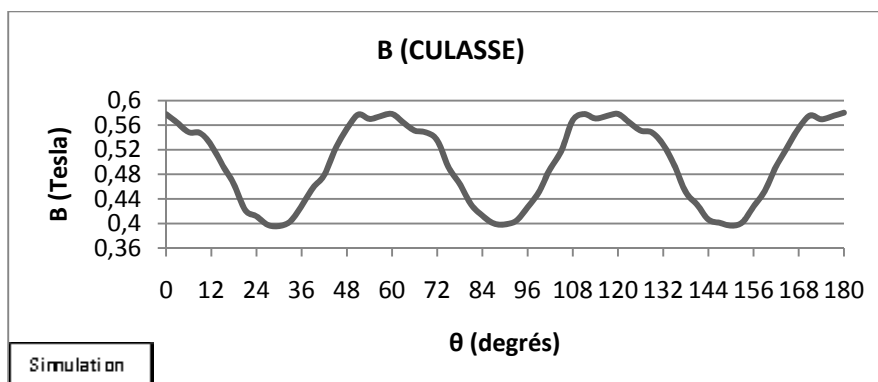


Fig. 2.29. Courbe d'induction dans la ligne moyenne de la culasse du stator

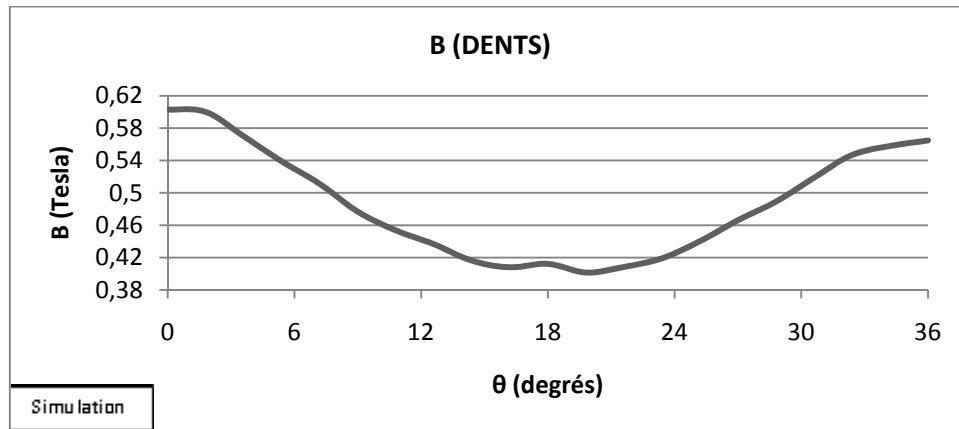


Fig. 2.30. Courbe d'induction dans la ligne moyenne d'une dent de stator

En résumé, on peut constater dans le tableau 2.4, une comparaison entre les calculs analytiques pour le prédimensionnement initial et les résultats de simulations obtenus à l'aide du logiciel Éléments Finis.

Paramètre	Description	Spécifications du CDCF	Simulation Éléments Finis
V_1, V_2, V_3	Tension de phase du stator	8 V	8 V
I_1, I_2, I_3	Courant de phase du stator	60 A	53 A
C_{em}	Couple électromagnétique à vitesse nominal	4 mN·m	4,28 mN·m
B_{rotor}	Induction dans le rotor	0,60 T	0,50 T
$B_{entrefer}$	Induction dans l'entrefer	0,30 T	0,25 T
$B_{culasse}$	Induction dans la culasse statorique	0,60 T	0,58 T
B_{dents}	Induction dans les dents du stator	0,60 T	0,60 T

Tableau 2.4. Tableau comparatif des spécifications.

2.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les différents types de structures électromagnétiques d'un point de vue fonctionnel, ainsi nous pouvons fournir de plus amples informations sur les phénomènes physiques qui se produisent lors de la conversion magnétomecanique de l'énergie.

Par la suite on a présenté un état de l'art, mettant l'accent sur les matériaux composites et sur des micro-moteurs, dont certains à grande vitesse et à flux axial.

Différentes techniques ont été présentées pour montrer les diverses approches actuelles du problème de conception et de caractérisation des dispositifs électromagnétiques.

Finalement, nous avons effectué les calculs nécessaires au prédimensionnement et aussi à la validation par Éléments Finis de la structure électromagnétique du micromoteur.

Les grandeurs analysées par les outils de conception classiques, tiennent compte de l'influence de la fréquence sur les performances du dispositif. Toutefois, de nombreux

effets n'ont pas été pris en compte, comme les effets thermiques ou élastiques ainsi que leurs interactions.

Avec ces techniques classiques, les résultats obtenus avec les équations linéaires et la méthode d'analyse par éléments finis sont similaires. Mais il est important de noter que ces résultats ont été obtenus en faisant des hypothèses. Nous ne savons pas si elles sont efficaces pour les appareils de petite taille et soumis à des contraintes mécaniques importantes, comme celles qui surviennent lorsque le rotor du micromoteur tourne à 1 000 000 tr / min.

Il est donc indispensable, pour être plus précis, de concevoir une nouvelle méthodologie qui prenne en compte le plus grand nombre d'interactions possible.

CHAPITRE 3 : APPROCHE MULTIPHYSIQUE : UNE CONTRIBUTION « TENSORIELLE UNIFIÉE »

Aujourd'hui, le niveau de complexité des nouvelles conceptions de structures et dispositifs électromécaniques est de plus en plus élevé. Cela exige une production de deux connaissances en parallèle, d'une part d'aider à accroître la compréhension des dispositifs existants et d'autre part, à renforcer les bases des nouvelles conceptions.

Pour effectuer cette tâche, on dispose à l'heure actuelle de méthodes numériques pour le calcul des champs. A mesure qu'on développe ces notions, l'existence de liens entre les différents phénomènes physiques qui régissent le fonctionnement des dispositifs magnéto mécaniques devient de plus en plus évidente. Autrement dit, les formulations et méthodes numériques doivent englober dans certains cas plus d'un phénomène physique. Cette voie mène à des modèles dits multiphysiques. Ce travail fait partie du domaine magnétostatique.

Par ailleurs, le calcul des forces magnétiques dans les matériaux est désormais un axe important de la recherche théorique et appliquée. En effet, la conception de dispositifs magnétiques, avec l'introduction de nouveaux matériaux et de nouvelles structures, nécessite aujourd'hui une révision des procédures actuelles de calcul et la modélisation théorique. C'est pourquoi il est nécessaire de fournir une méthodologie unifiée capable de traiter les interactions de nature différente apparaissant dans ces dispositifs. Il est en particulier, indispensable de mieux comprendre les interactions magnétiques, les propriétés mécaniques et thermiques agissant dans les milieux magnétiques, puisque ce sont elles qui semblent les plus importantes dans le fonctionnement des dispositifs magnétiques.

La recherche de modèles multiphysiques est mentionnée dans plusieurs références bibliographiques au premier chapitre. Le terme multiphysique, est censé signifier précisément l'intégration, dans un modèle unique, des interactions physiques de toutes sortes. À l'heure actuelle, de puissants logiciels de simulation magnétique, statique ou dynamique, existent déjà avec de grands avantages dans le calcul du champ magnétique H et de l'induction magnétique B pour toute sorte de structure magnétique. Il existe également d'autres logiciels capables de résoudre complètement le problème de la répartition des contraintes d'origine mécanique.

Les exigences de performance actuelles des nouveaux dispositifs magnétiques dynamiques –avec un ou plusieurs degrés de liberté- sont très élevées et ont conduit à une recherche technologique importante centrée sur trois axes fondamentaux: la fabrication et le comportement des nouveaux matériaux, la conception de nouvelles structures magnétiques et la création et l'adaptation de nouveaux procédés de contrôle.

Nous sommes de l'avis que la conception de nouveaux dispositifs doit prendre en compte l'interaction de ces trois aspects, entre autres, sans oublier l'intégration de dimensions sociétales et éthiques dans l'objectif développement durable⁷¹, dans le processus de conception. Ces recherches génèrent ainsi un vaste domaine

⁷¹ Lesquels peuvent se regrouper sous le concept d'écologie humaine d'usage très courant. En effet, le respect de la nature ne consiste pas seulement en une préservation des espèces ou en des comportements limitant l'impact de nos activités sur le climat. La nature n'a pas de raison d'être sans l'homme. Ce concept désigne en réalité une écologie prise dans son intégralité, qui doit se soucier en tout premier lieu de la vie des hommes. Elle amène donc à une plus grande solidarité entre eux mais aussi entre l'homme et la nature. Ainsi, nous ne pouvons pas limiter nos efforts à une simple recherche de moyens pour consommer de manière plus responsable. Si cette recherche est nécessaire, elle ne doit pas nous faire oublier que dans notre monde, la dignité d'hommes et de femmes reste bafouée et que notre devoir est d'œuvrer à ce que cette dignité soit respectée.

interdisciplinaire de connaissances⁷² bien connu sous le nom de conception intégrée de dispositifs magnéto-mécaniques. Donc, et juste à titre d'illustration, au cours des trois dernières décennies, on retrouve des recherches très intenses dans le développement des dispositifs magnétiques, rapides ou non et avec un ou plusieurs degrés de liberté, recherchant non seulement une intégration fonctionnelle plus avancée, mais aussi avec une simplification matérielle du produit : tel est le cas des paliers magnétiques intégrés, passifs ou actifs.

Grâce à ces nouvelles technologies, des percées importantes ont été achevées en grande vitesse dans le domaine de la machine-outil. Le besoin de nouveaux matériaux, capables de résister aux contraintes mécaniques associées aux vitesses linéaires élevées et de diffuser correctement les flux de chaleur qui se manifestent dans le fonctionnement de ces structures, est nécessaire. Une première conclusion que l'on peut extraire d'une analyse des recherches menées dans ce domaine, est l'intérêt d'une modélisation correcte des phénomènes physiques dans ces dispositifs.

En effet, la force mécanique est fréquemment tirée de la mise en œuvre des procédures fondées sur le tenseur de Maxwell dans le vide (Méthode du Tenseur de Maxwell), en appliquant des expressions basées sur la formulation classique de la force de Lorentz ou par application des méthodes d'énergie -par exemple en appliquant le principe des Travaux Virtuels-. Dans ces cas, les modèles théoriques ne développent que le calcul des forces externes pour les différents éléments du dispositif et n'intègre pas les différentes contraintes locales résultant des actions extérieures et des déformations internes.

Nous nous retrouvons ainsi –dans le cas de ces modèles permettant d'obtenir les forces- face à une limitation, concernant la conception initiale, imposée par le choix de la modélisation du système physique, ou plutôt par le choix de la méthode de calcul des forces magnétiques. Plus précisément, la question soulevée concerne surtout le choix du modèle théorique de la force magnétique. Il s'agit d'une question qui est très difficile à élucider.

Toutefois, les deux procédures de calcul des forces énumérées ci-dessus sont basées sur des hypothèses théoriques distinctes, mais, comme déjà indiqué, conduisent aux mêmes résultats expérimentaux. Cette considération est évidente, puisque la force générée sur un dispositif magnétique est unique et ne peut pas dépendre de la méthode de calcul utilisée pour l'obtenir. Toutefois, il est important dans le développement de nos recherches scientifiques, de constater l'inexistence d'un argument solide et déterminant dans le choix du modèle de calcul des forces, selon des caractéristiques propres au dispositif que l'on souhaite concevoir. Nous considérons qu'un argument, décrit dans la présente introduction, est indispensable dans une procédure de conception intégrée tenant même compte de « l'écologie humaine ».

Dans le chapitre 1 de ce mémoire, on a décrit les principales méthodes d'obtention des forces, et leurs limites qui ont été identifiées. Une des conclusions était de corroborer la méconnaissance actuelle sur la « vraie distribution » de la densité de force, de volume et de surface dans un corps magnétique. Cela empêche d'aborder efficacement l'obtention de modèles multiphysiques (principalement le couplage mécanique, ou plus précisément, élastique). Cela implique aussi l'impossibilité de calculer des forces sur les corps en « contact », et également l'absence d'accord sur la définition d'un tenseur unique de contraintes magnétostatiques dans un point

⁷² AFEISSA H.S., « Qu'est-ce que le écologie ? », J. VRIN, Paris, 2009

quelconque. Ces trois limites sont évidemment un sérieux obstacle pour la recherche scientifique poussée de nouveaux modèles de couplage magnéto-élastique.

Par ailleurs quand on aborde le problème du calcul des forces magnétiques dans un milieu continu, en particulier à l'état solide, la situation est beaucoup plus complexe que lorsque l'on calcule simplement la force totale exercée sur un corps entouré de vide. En effet, l'obtention de forces sur des milieux continus isolés dans le vide, ou dans l'air, repose sur l'application de plusieurs procédures de base :

1. la méthode basée sur l'utilisation du Tenseur de Maxwell, qui ne peut se développer que lorsque le milieu sur lequel on souhaite calculer la force magnétique est effectivement isolé de tout milieu continu, sauf l'air. Il a souvent été utilisé dans les calcul des forces magnétiques^{73, 74}.
2. la méthode des Travaux Virtuels, qui consiste à calculer l'énergie totale du système et sa variation virtuelle en fonction d'une variable particulière. Cette méthode a été largement étudiée par Coulomb^{75, 76} et est actuellement la méthode par excellence pour le calcul de la force magnétique. De même elle a été largement appliquée dans certains outils de calcul par éléments finis dans une variété de configurations magnétiques^{77, 78, 79, 80}, ou seulement sur des aspects théoriques de calcul^{81, 82, 83, 84, 85, 86}.

À ce stade, nous ne citons que quelques références importantes sur l'application des méthodes dites d'énergie pour résoudre des problèmes magnétostatiques. La littérature scientifique disponible sur ce sujet est extrêmement large et variée, mais

⁷³ WIGNALL A.N., GILBERT A.J., YANG. S.J. "Calculation of forces on magnetised ferrous cores using the maxwell stress method". IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 January 1988)

⁷⁴ HEMMI S., "Nodal forces due to the Maxwell's stress tensor in the FEM analysis", Electromagnetic Force and Application, Elsevier Science Publishers, 1992

⁷⁵ COULOMB J.L., "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness", IEEE Transaction on Magnetism, vol. 16, pp. 2514-2519, Nov. 1983

⁷⁶ COULOMB J.L., MEUNIER G., "Finite Element Implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", IEEE Transaction on Magnetism, 20, p. 1894, 1985

⁷⁷ REYNE G., SABONNADIÈRE J.C., COULOMB J.L., BRISSONNEAU P.. "A survey of the main aspects of magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials under magnetisation", IEEE Transaction on Magnetism vol.23, N° 5, pp.3765-3767, Sept. 1987.

⁷⁸ REYNE G., SABONNADIÈRE J.C., IMHOFF J.F., "Finite element modeling of electromagnetic force densities in DC machines". IEEE Transaction on magnetism vol. 24, issue 6, November 1988 pp. 3171-3173

⁷⁹ G. REYNE, MEUNIER G., IMHOFF J.H., EUXIBIE E., "Magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials. Presentation and results on the theoretical, experimental and numerical approaches". IEEE Transaction on magnetism (Vol 24 N°1 January 1988)

⁸⁰ HENROTTE F., SANDE H. V., DELIÉGE G., HAMEYER K., "Electromagnetic Force Density in a Ferromagnetic Material", IEEE Transaction on Magnetism, Vol 40, N°2, March 2004, pp. 553-556

⁸¹ REN Z., RAZEK A., "Local force computation in deformable bodies using edge element", IEEE Transaction on Magnetism, vol.28, pp.1212-1215, 1992

⁸² REN Z., BESBES M., BOUKHTACHE S., "Calculation of local magnetic forces in magnetised materials". Proceeding of International Workshop on Electrical and Magnetic from Numerical Models to Industrial Applications, pp.64.1-64.6, Liège, 1992

⁸³ MCFEE S., WEBB J., LOWTHER D.A., "A tunable volume integration formulation for force calculation in finite-element based computational magnetostatics", IEEE Transaction on Magnetism, 24, p. 439, 1988

⁸⁴ HENROTTE F., DELIEGE G., HAMEYER K.. "The eggshell method for the computation of electromagnetic forces in 2D and 3D". EMF-2003, Aachen 6-9 October 2003

⁸⁵ BOSSAVIT A., "Forces in magnetostatics and their computation", Journal of Applied Physics, 67(9):5812-5814, 1990.

⁸⁶ BOSSAVIT A., "On local computation of the electromagnetic force field in deformable bodies". International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, 2, 333-343, Elsevier, 1992

aucune de ces procédures n'exige la modélisation des propriétés magnétiques des milieux continus. Autrement dit, les forces peuvent être obtenues:

- indépendamment des propriétés magnétiques des corps isolés, en utilisant la Méthode du Tenseur de Maxwell.
- ou bien en intégrant la densité d'énergie, dépendant celle-ci des valeurs des champs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$, et avec la dérivation virtuelle ultérieure de l'énergie dans la Méthode des Travaux Virtuels.

Autrement dit, chacune de ces méthodes ne nécessite ni la connaissance de la densité de force en chaque point du milieu continu, ni la modélisation de l'interaction du champ extérieur avec les propriétés magnétiques en chaque point.

Des travaux scientifiques ont été publiés comparant ces deux méthodes^{87, 88}. Ils se situent dans le contexte global du problème de la détermination de la distribution physique des forces locales. Toutefois, ces méthodes sont basées sur deux hypothèses nettement différentes mais partagent le fait qu'elles ne nécessitent aucune hypothèse sur l'apparition de forces dans chacun des points d'un milieu continu présentant des propriétés magnétiques.

Elles présentent toutes les deux le même problème : ne pas permettre d'obtenir la valeur des forces internes, aussi appelées, la distribution locale des forces. Ainsi, les déformations causées par la présence d'une densité de flux ne peuvent dans aucun cas être traitées analytiquement avec ces deux procédures.

En outre, les études publiées sur l'application de la Méthode des Travaux Virtuels ont mis en doute la nature des forces magnétiques lorsque le principe s'applique à l'énergie ou à la co-énergie^{89, 90, 91}. Ces publications ont établi des liens entre l'application de la Méthode des Travaux Virtuels à l'énergie ou la co-énergie et l'élection comme variable d'état du potentiel scalaire ou vecteur magnétique^{92, 93}.

On retrouve également d'autres procédures, qui sont fondées sur des méthodes variationnelles. En effet, le formalisme de la mécanique analytique de Lagrange a été étendu au domaine de l'électrodynamique des milieux continus^{94, 95} et plus récemment, à

⁸⁷ HENROTTE F., HAMEYER K., "Computation of electromagnetic force densities: Maxwell stress tensor vs virtual work principle", Journal of Computational and Applied Mathematics, June, 2003, Volume 168 Issue 1-2, pp. 235-243

⁸⁸ MARINESCU M., "Numerical computation of torques in permanent magnet motors by maxwell stresses and energy method". IEEE Transaction on Magnetism (Vol 24 N°1 January 1988)

⁸⁹ DELFINO F., PROCORPIO R., ROSSI, M., "Evaluation of forces in magnetic materials by means of energy and co-energy methods", European Physical Journal – B, 25(1), Jan. 2002 pp. 31-38

⁹⁰ SÁNCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., AUCEJO-GALINDO V., GALAN N., CIUMBULEA G., "Theoretical elements for energetic models and physical design of electromechanical devices. Part I: Thermodynamic methods", EDP Sciences, Revue Romaine des Sciences Techniques, vol 4, 2005. ISSN: 0035-4066

⁹¹ SÁNCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., AUCEJO-GALINDO V., GALAN N., CIUMBULEA G., "Theoretical elements for energetic models and physical design of electromechanical devices. Part II: Variational methods on energy, co-energy and action", EDP Sciences, Revue Romaine des Sciences Techniques, vol 2, 2006. ISSN: 0035-4066

⁹² MEDEIROS L.H. de, REYNE G., MEUNIER G., "A Unique Distribution of Forces in Permanent Magnets Using Scalar and Vector Potential Formulations". IEEE Transaction on Magnetism, Vol.36, pp.3345-3348, 2000

⁹³ SANCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., AUCEJO-GALINDO V., "Magnetostatic Maxwell's tensors in magnetic media applying virtual works method from either energy or co-energy". Euro. Phys. J. A.P. 35, p. 61, 2006

⁹⁴ FORMISANO A., MARTONE R. VILLONE F., "A Lagrangian approach to shape inverse electromagnetic problems", IEEE Transaction on Magnetism, vol. 32, N° 3, pp. 1314-1317, May 1996

⁹⁵ TRIMARCO C., "A Lagrangian approach to electromagnetic bodies", Technische Mechanik, vol.22(3), pp.175-180, 2002

la méthode connue sous le nom « Continuum Design Sensitivity Analysis », déjà appliquée dans la mécanique des milieux continus a fourni des résultats mitigés^{96, 97}.

La connaissance de la distribution locale de la force magnétique dans un milieu continu est essentielle dans la formalisation de modèles intégrés d'interactions magnétiques et mécaniques, qui est définie en utilisant un formalisme tensoriel, propre de la mécanique des milieux continus.

Il est ainsi possible d'établir une deuxième conclusion quant à la mise en œuvre des procédures de calcul des forces : la méthode du Tenseur de Maxwell et la méthode des Travaux Virtuels ne peuvent pas générer, dans leurs formulations actuelles, des modèles couplés de contraintes magnétiques et mécaniques.

Par ailleurs, la modélisation des densités de force qui apparaissent, en chaque point du milieu continu magnétique, soumis à un champ magnétique externe est un champ de connaissance très spécifique. À ce jour, trois modèles généraux ont été développé pour résoudre ce problème, en référence au chapitre 1 :

- la **Méthode des Courants Équivalents**,
- la **Méthode des Charges Équivalentes**
- la **Méthode de Kelvin**,

Même si la force totale sur un milieu, obtenue avec chacune de ces trois méthodes à travers une intégrale volumique de la densité de force et une intégrale surfacique de la densité superficielle, donne des résultats similaires, la contribution de chaque intégrale diffère. Il est clairement établi que la force totale exercée sur un corps isolé, obtenu en utilisant ces trois procédures fournissent la même valeur que celles obtenues en utilisant la méthode du **Tenseur de Maxwell** ou la méthode des **Travaux Virtuels**. Par conséquent, d'un point de vue strictement expérimental du calcul de la force totale, ce sont des méthodes équivalentes. Toutefois, leur équivalence théorique doit être démontrée, toujours dans le contexte du calcul de la force totale. Apparaît ainsi, comme troisième conséquence, un problème théorique important:

Les méthodes décrites sont basées sur des hypothèses différentes, retrouvant ainsi différentes modélisation des interactions. La méthode du Tenseur de Maxwell et des Travaux Virtuels donnent une valeur globale et ne s'appuient pas sur une définition de la force locale. Par contre, les méthodes des Courants Équivalents, des Charges Équivalents et de Kelvin sont basées sur des définitions de la force locale absolument différentes.

Les deux premières méthodes ne permettent donc pas de traiter les forces locales et les trois dernières donnent des valeurs différentes de la force locale. Ainsi, les deux premières méthodes doivent être rejetées. Toutefois, il faut clairement indiquer qu'il ne peut y avoir qu'une seule distribution locale des forces. Ceci nous mènent à nous faut poser la question : y a-t-il une méthode aboutissant au bon résultat, et si oui, laquelle ?

C'est dans ces objectifs que des recherches expérimentales ont été menées^{98, 99},
¹⁰⁰ afin de déterminer laquelle de ces méthodes fournit la meilleure approximation des

⁹⁶ KIM D.H., LOWTHER D.A., SYKULSKI J.K., "Efficient force calculations based on continuum sensitivity analysis", IEEE Transaction on Magnetics, 41, p.1404, 2005

⁹⁷ KIM D.H., LOWTHER D.A., SYKULSKI J.K., "Efficient global and local force calculations based on continuum sensitivity analysis", IEEE Transaction on Magnetics, 43, 4, p.1177-1180, 2007

résultats expérimentaux de la déformation d'un milieu solide en présence d'un champ externe. Dans notre cas, dû au fait de la faible importance de ces déformations pour des champs usuels, c'est une expérience très complexe qui a donné plusieurs résultats, qui cependant, ne peuvent être considérés dans l'état actuel, comme concluants.

Par conséquent, aucun des résultats expérimentaux ne démontre la nature exacte de la répartition locale des forces magnétiques dans un milieu. De toute évidence, il s'agit d'un problème complexe, définit dans un premier temps comme un quatrième point important de cette analyse préliminaire : la grande difficulté de développer des modèles magnéto-mécaniques au niveau local, c'est-à-dire, des modèles mettant en jeu des distributions locales de la force magnétique et des contraintes mécaniques.

Il a été suggéré précédemment, l'importance de proposer un nouveau formalisme tensoriel facilitant l'élaboration d'un modèle multiphysique pour la formulation théorique du couplage magnéto-mécanique dans une première approche et par la suite, la formulation conjointe avec la perte d'énergie sous forme de chaleur.

En effet, l'état de contrainte dans un milieu continu est décrit à travers le tenseur des contraintes symétriques et la déformation à l'aide du tenseur des déformations. Il y a de nombreuses références bibliographiques, placées dans le contexte de la mécanique des milieux continus, qui proposent des modèles de couplage des contraintes mécaniques avec les déformations plastiques associées. Il y a également de nombreux modèles qui cherchent à définir le couplage de la déformation élastique ou plastique, avec les déformations causées par des endommagements du matériau.

La puissance de ces méthodes est basée sur la description du tenseur de tous les processus d'interaction (ou de couplage), tenseur que nous essayons de formuler dans nos travaux scientifiques. Pour cette raison, on a estimé qu'un modèle intégré magnéto-mécanique nécessite le développement d'un tenseur dont les composantes magnétiques déterminent les contraintes magnétiques dans un milieu continu. Cependant, il y a eu divers propositions de tenseurs magnéto-mécanique^{101, 102, 103, 104 et 105} obtenus à partir de plusieurs hypothèses théoriques. La variété de ces tenseurs est représentative de la difficulté de le définir ou, en d'autres termes, de la difficulté de connaître la répartition exacte des contraintes ou forces magnétiques locales dans le milieu.

L'intérêt de trouver la nature des contraintes mécaniques résultant du comportement magnétique d'un milieu n'est pas récent. Une publication¹⁰⁶ intéressante

⁹⁸ BARRE O., BROCHET P., "Discrimination of stress formulae induced by magnetic field experimentation and numerical simulation", Proceedings of the 6th international symposium on electric and magnetic field, EMF' 2003, Aachen, October 2003, pp. 277-278.

⁹⁹ LEE S.H., HE X., KIM D., ELBORAI S., CHOI H., PARK I., ZAHN M., "Evaluation of the mechanical deformation in incompressible linear and no linear magnetic materials using various electromagnetic force density methods", *Journal of Applied Physics*, Volume 97, Issue 10, pp. 10E108-10E108-3 (2005)

¹⁰⁰ BARRE O., BROCHET P., HECQUET M., "Experimental Validation of Magnetic and Electric Local Force Formulations Associated to Energy Principle", *IEEE Transaction on Magnetics*, N° 42, Vol. 4, 2006, pp. 1475-1478

¹⁰¹ HENROTTE F., SANDE H.V., DELIÉGE G., HAMEYER K., "Electromagnetic Force Density in a Ferromagnetic Material", *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol 40, N°2, March 2004, pp. 553-556

¹⁰² HENROTTE F., HAMEYER K., "Electromagnetic force densities in a continuous medium". *Mathematics in Industry*. Berlin, SPRINGER SCIENCE + BUSINESS MEDIA, VOL 4, pages 214-222, 2004, ISSN: 1612-3956

¹⁰³ BECKER R., SAUTER F., "*Theorie der Elektrizität*", Teubner, 1973

¹⁰⁴ SANCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., AUCEJO-GALINDO V., "Magnetostatic Maxwell's tensors in magnetic media applying virtual works method from either energy or co-energy". *Euro. Phys. J. A.P.* 35, p. 61, 2006

¹⁰⁵ AUCEJO-GALINDO V., SANCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., "General Formulation for Magnetic Forces in Linear Materials and Permanent Magnets", *IEEE Transaction on Magnetics*. VOL. 44, NO. 9, SEPTEMBER 2008 pp.2134-2140

¹⁰⁶ SLEPIAN J., "Electromagnetic ponderomotive forces within material bodies", *Physics*, 36, 485 (1950)

qui tente d'obtenir les contraintes mécaniques internes avec l'application de la Méthode du Tenseur de Maxwell a été réalisée. Cette application constitue un axe de recherche très important, qui a obtenu par ailleurs un grand nombre de publications^{107, 108, 109, 110, 111, 112, 113}, pour ne citer que quelques références.

C'est ainsi que l'on arrive à mieux comprendre le but de ce troisième chapitre : celui de développer une nouvelle procédure, que l'on a appelé « méthode Général Tensorielle », fondée sur l'obtention d'un tenseur des contraintes magnétostatiques dans un point quelconque d'un corps magnétique. À partir de ce tenseur, nous déduisons par la suite l'expression générale de la force totale exercée sur un corps magnétique entouré par n'importe quel milieu magnétique. Nous montrons ainsi la cohérence de cette procédure avec les méthodes dites classiques du Tenseur de Maxwell, des Sources Équivalents et celle de Kelvin, qui ne seront ensuite que des cas particuliers de cette nouvelle procédure lorsque le milieu est entouré par le vide. Le tenseur obtenu permettra, dans les recherches postérieures, de formuler des modèles couplés avec le tenseur des contraintes élastiques.

3.1 Obtention d'un tenseur d'unification des formulations classiques des forces

Les parties suivantes décrivent en détail l'obtention d'un tenseur généralisé des contraintes magnétostatiques. Il peut être appliqué en un point quelconque de n'importe quel milieu dans une configuration magnétique. Dans la première partie, 3.2.1, on mettra en place le formalisme nécessaire pour l'obtention de ce tenseur, avec la définition du système magnétostatique, de ses fonctions énergétiques et des densités d'énergie et de co-énergie. Au paragraphe 3.2.2, on développera le principe des Travaux Virtuels pour des densités d'énergie et de co-énergie, basé sur un formalisme algébrique qui permettra d'obtenir un tenseur des contraintes magnétostatiques général. Au paragraphe 3.2.3, on indiquera la procédure d'obtention, à partir de ce tenseur, de la force totale sur tout le corps entouré d'un quelconque ensemble de milieu. Par la suite, ce procédé sera appelé **Méthode Générale Tensorielle**. La procédure de calcul est détaillée dans le diagramme ci-dessous.

¹⁰⁷ MEDEIROS L.H. de, REYNE, MEUNIER G., YONNET J.P., "Magnetic and mechanical modelling used to discuss magnetic energy in permanent magnets", PROCEEDINGS CEFC'98, Tucson, USA, 1998. v. 1. p. 411

¹⁰⁸ MEDEIROS L.H. de, REYNE, MEUNIER G., "About the distribution of forces in permanent magnets", IEEE Transaction on Magnetism, vol. 35, N° 3, pp.1215-1218, May 1999.

¹⁰⁹ MAUGIN G.A., TRIMARCO C., "Material mechanics of electromagnetic solids", CISM Lecture Notes, 427, Springer Verlag, pp.129-171, 2000

¹¹⁰ MAUGIN G.A., TRIMARCO C., "Elements of field theory in inhomogeneous and defective materials". G.Maugin, R.Kienzler, C.Tasso, ed., Configurational Mechanics of Materials (Cism International Centre for Mechanical Sciences, 427, pp.55-128, Springer Verlag, Wien, 2001

¹¹¹ REN Z., BESBES M., BOUKHTACHE S., "Calculation of local magnetic forces in magnetised materials". Proceeding of International Workshop on Electrical and Magnetic from Numerical Models to Industrial Applications, pp.64.1-64.6, Liège, 1992

¹¹² VANDEVELDE L., GYSELINCK J., WULF M.A.C. DE, JMEKEBEEK .A.A., "Finite-Element Computation of the Deformation of Ferromagnetic Material Taking Into Account Magnetic Forces and Magnetostriction", IEEE Transaction on Magnetism, 40, 2, pp. 565-568, 2004

¹¹³ BOBBIO S., *Electrodynamics of Materials. Forces, Stresses and Energies in Solids and Fluids*, Academic Press, ISBN: 978-0-12-108260-4, 1999

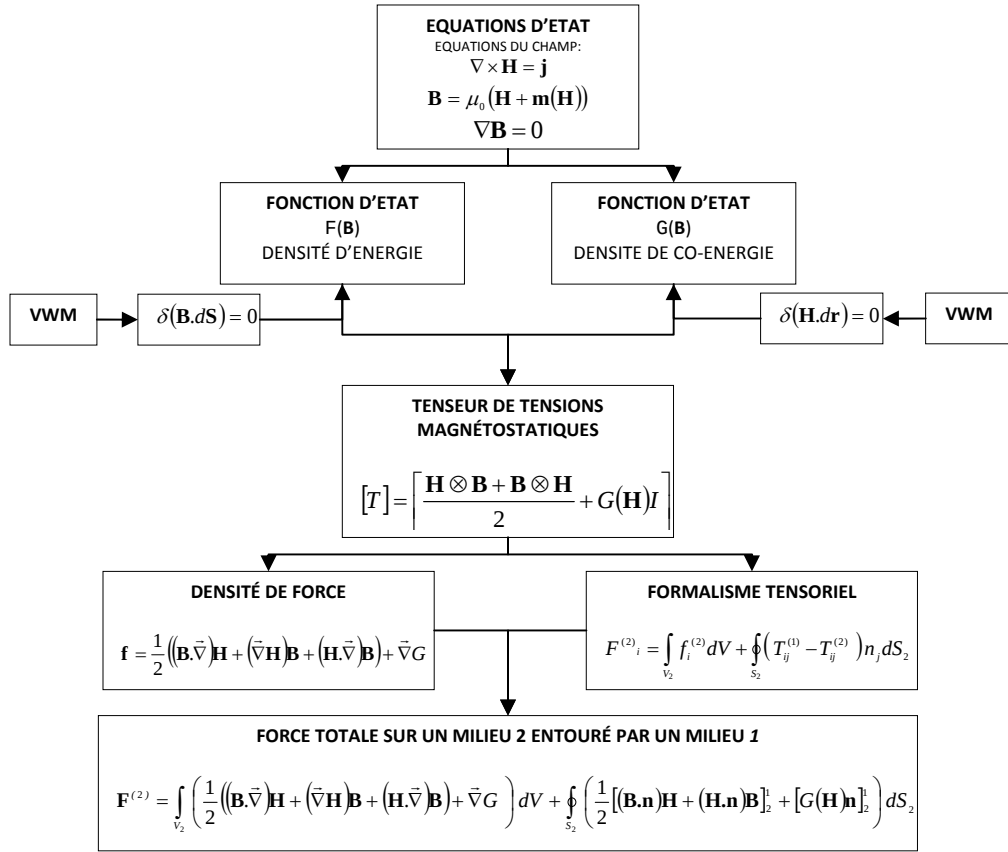


Figure 3.1: Schéma d'obtention de la Méthode Générale Tensorielle

3.1.1 Une réflexion portant sur les concepts d'énergie magnétique et de co-énergie d'un point de vue thermodynamique

L'exigence du développement d'une méthodologie qui permet la formulation, à partir d'un modèle multiphysique considérant les interactions magnétiques, mécaniques et thermiques. Ainsi que la non existence expliqué ci-dessus, d'une approche unique pour l'étude des forces magnétiques locales impliquent nécessairement que ces interactions ne doivent pas être formulées à partir de la force. En effet, cette grandeur est directement liée à la notion physique de l'interaction. Au contraire, la grandeur commune à tout type d'interaction, indépendamment de leur origine ou nature, est l'énergie. Par conséquent, le modèle que nous allons développer s'appuie sur la définition, dans un contexte thermodynamique, des interactions dans un milieu continu, dans lequel se situe la notion de densité d'énergie en un point donné de ce milieu. Dans le domaine thermodynamique, une définition, générale et logique, de la force peut être considérée comme une variation virtuelle, pour une variable donnée, de la densité d'énergie. Ainsi, on adoptera uniquement l'hypothèse que les densités de force doivent être obtenues par une variation de la densité d'énergie.

Un milieu continu soumis à un système de champ magnétostatique est caractérisé par l'ensemble des grandeurs et relations suivantes :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}) \quad (3.2)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

L'équation (3.1) détermine le champ magnétique $\mathbf{H}$ créé par une densité de courant $\mathbf{j}$. L'équation (3.2) définit l'induction magnétique $\mathbf{B}$ comme la somme du champ $\mathbf{H}$ provoqué par une distribution de courant donnée et du champ d'aimantation $\mathbf{m}$, qui représente les propriétés magnétiques du milieu. Enfin, l'équation (3.3) détermine l'induction magnétique $\mathbf{B}$. Les trois relations précédentes représentent l'ensemble minimal d'équations définissant un système soumis aux interactions magnétostatiques. Nous ne considérerons pas, dans cette étude, d'autres grandeurs magnétiques, comme le vecteur potentiel $\mathbf{A}$ et le potentiel scalaire ϕ , largement utilisées dans les applications et développements théoriques dans le domaine du magnétisme.

L'équation (3.1) constitue l'expression différentielle du théorème d'Ampère, selon lequel le champ magnétique $\mathbf{H}$ généré par une densité de courant $\mathbf{j}$ est tel que : la circulation du champ magnétique $\mathbf{H}$ le long d'une ligne fermée coïncide avec la densité de courant $\mathbf{j}$ traversant la surface formée par cette ligne.

L'équation (3.3) est l'expression différentielle du théorème de Gauss, qui indique que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul, indiquant ainsi l'absence de charges magnétiques.

L'équation (3.2) introduit le champ d'aimantation $\mathbf{m}$ du milieu. Ce champ est considéré, dans le cas général, comme la somme de deux aimantations: une générée par un champ $\mathbf{H}$ existant au point considéré $\mathbf{m}_i(\mathbf{H})$ et l'autre de type permanente $\mathbf{m}_p$, non générée par un champ extérieur, existant au même point :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_i(\mathbf{H}) + \mathbf{m}_p \quad (3.4)$$

L'aimantation induite $\mathbf{m}_i(\mathbf{H})$ est toujours un vecteur parallèle au champ inducteur $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{m}_i(\mathbf{H}) = \chi(\mathbf{H})\mathbf{H} \quad (3.5)$$

Où le scalaire $\chi(\mathbf{H})$ est appelé susceptibilité magnétique du milieu. L'expression générale du champ $\mathbf{B}$ est alors :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi(\mathbf{H})\mathbf{H} + \mathbf{m}_p) = \mu_0[(1 + \chi(\mathbf{H}))\mathbf{H} + \mathbf{m}_p] = \mu_0[\mu_r(\mathbf{H})\mathbf{H} + \mathbf{m}_p] = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H} + \mathbf{m}_p \quad (3.6)$$

dans lequel le scalaire $\mu(\mathbf{H})$ est appelé la perméabilité magnétique du milieu et $\mu_r(\mathbf{H})$ la perméabilité magnétique relative du milieu.

Considérons un système magnétostatique comme un système constitué par des distributions de courants et des milieux magnétiques, de telle sorte que l'induction magnétique $\mathbf{B}$ varie lentement. En ce sens, on comprend que l'augmentation de l'énergie du système peut seulement être due à une augmentation de l'énergie cinétique des électrons qui constituent la matière du système : des électrons issus des distributions de courant et des électrons figurant dans le milieu continu. De plus, toute augmentation d'énergie est causée par la présence d'un champ électrique $\mathbf{E}$, provoqué par la variation temporelle de l'induction magnétique, est régie par l'équation suivante :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.7)$$

De telle sorte qu'une variation de l'énergie libre du système ne pourrait seulement être causée par une variation de l'induction magnétique $\mathbf{B}$. On peut facilement vérifier

que la variation d'énergie magnétique engendrée par une augmentation différentielle de l'induction $\mathbf{B}$ est donnée par:

$$dF(\mathbf{B}) = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (3.8)$$

où $F(\mathbf{B})$ est la densité d'énergie libre magnétique en un point donné du système. Si l'on analyse cette relation dans un contexte thermodynamique, $\mathbf{H}$ a le sens de la force généralisée et l'induction $\mathbf{B}$ du déplacement généralisée. Dans cette relation, la densité d'énergie libre est fonction de la variable thermodynamique $\mathbf{B}$. Dans divers modélisations magnétostatiques on utilise la densité de co-énergie. D'un point de vue thermodynamique, la densité de la co-énergie doit être comprise comme la densité d'enthalpie magnétique libre, dont la relation avec l'énergie magnétique libre est :

$$G(\mathbf{H}) = F(\mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (3.9)$$

La densité d'enthalpie magnétique libre est fonction de la variable thermodynamique $\mathbf{H}$. Selon (3.8) et (3.9), on obtient la relation :

$$dG(\mathbf{H}) = -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \quad (3.10)$$

3.1.2 Obtention d'un nouveau tenseur magnétostatique par application du principe des Travaux Virtuels aux densités d'énergie et de co-énergie

La densité d'énergie magnétostatique F , en un point donné, est fonction de l'induction magnétique $\mathbf{B}$. Si l'on considère un volume infinitésimal dV , l'énergie libre de ce volume est aussi infinitésimale et est donnée par la relation :

$$dF = F(\mathbf{B}) \cdot dV \quad (3.11)$$

Considérons une variation virtuelle de la géométrie du milieu. Dans cette variation virtuelle, l'élément différentiel de distance entre deux points, $d\mathbf{r}$, se transforme en un vecteur que nous noterons $\delta\mathbf{r}$. Cette transformation varie en chaque point et est donnée par un tenseur de second ordre, le tenseur de variation virtuelle $[D]$, de façon à ce que :

$$\delta\mathbf{r} = [D]\delta\mathbf{r} \Leftrightarrow \delta r_i = D_{ij} dr_j \quad (3.12)$$

Le tenseur $[D]$ est formellement analogue au tenseur des déformations élastiques dans un milieu solide continu. Il s'agit d'un tenseur symétrique et sa trace (somme de ses éléments diagonaux) détermine la relation entre la variation virtuelle du volume δV et le volume propre dV :

$$\delta V = \text{Tr}[D]dV \quad (3.13)$$

Nous allons analyser la variation virtuelle de la densité d'énergie libre (3.11) dans un élément de volume dV lorsqu'on effectue une variation virtuelle de la géométrie virtuelle, donnée par (3.12). En dérivant l'expression (3.11), on obtient :

$$\delta F = \delta F(\mathbf{B})dV + F(\mathbf{B})\delta V \quad (3.14)$$

Où $\delta F(\mathbf{B})$ est la variation virtuelle qui représente la densité d'énergie libre lorsque l'on réalise cette transformation virtuelle. En utilisant dans (3.14) la condition (3.13), on a :

$$\delta F = \delta F(\mathbf{B})dV + F(\mathbf{B})Tr[D]dV \quad (3.15)$$

Selon la définition de la densité d'énergie libre (3.8), une variation virtuelle de celle-ci est donnée par l'expression :

$$\delta F(\mathbf{B}) = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \quad (3.16)$$

où $\delta \mathbf{B}$ est une variation virtuelle de l'induction magnétique, résultant de la variation virtuelle de la géométrie. Elle doit donc être réalisée de sorte que l'équation (3.3) soit vérifiée en chaque point. Exiger cette dernière condition équivaut à exiger que la variation virtuelle d'un différentiel de flux soit égale à zéro, c'est-à-dire :

$$\delta(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \delta \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{B} \cdot \delta d\mathbf{S} = 0 \quad (3.17)$$

Il est nécessaire d'évaluer la variation virtuelle $\delta d\mathbf{S}$ de l'élément différentiel $d\mathbf{S}$. Pour ce faire, l'élément de volume différentiel dV doit être exprimé comme :

$$dV = d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.18)$$

Où l'élément différentiel $d\mathbf{r}$ n'est pas coplanaire avec l'élément différentiel de surface $d\mathbf{S}$. Selon (3.13) et (3.18), on a :

$$\delta V = \delta d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{S} \cdot \delta d\mathbf{r} = \delta d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{S} \cdot [D]d\mathbf{r} = Tr[D]d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.19)$$

L'équation (3.19) doit être valable pour tout vecteur $d\mathbf{r}$ ne figurant pas dans $d\mathbf{S}$, de sorte que l'équation vectorielle soit satisfaite :

$$\delta d\mathbf{S} = -d\mathbf{S}[D] + Tr[D]d\mathbf{S} \quad (3.20)$$

Et comme le tenseur $[D]$ est symétrique,

$$\delta d\mathbf{S} = [-D + Tr[D]I]d\mathbf{S} \quad (3.21)$$

En utilisant cette dernière expression dans (3.17), on peut trouver l'expression de la variation virtuelle exprimée par le vecteur d'induction :

$$\delta \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot [D - Tr[D]I]d\mathbf{S} \quad (3.22)$$

En utilisant à nouveau le fait que l'expression (3.22) doit être valable pour tout élément différentiel de surface et que le tenseur $[-D + Tr[D]I]$ est aussi symétrique, on obtient immédiatement :

$$\delta \mathbf{B} = [D - Tr[D]I]\mathbf{B} \quad (3.23)$$

L'expression (3.23) indique la variation virtuelle exprimée par l'induction magnétique en un point lorsque l'on réalise une variation virtuelle de la géométrie.

En utilisant l'égalité (3.16), on trouve la variation virtuelle d'énergie libre en un point, tel que:

$$\delta F(\mathbf{B}) = \mathbf{H} \cdot [D - Tr[D]I]\mathbf{B} \quad (3.24)$$

Ainsi, la variation totale de la densité d'énergie libre (3.15) devient :

$$\frac{\delta F}{dV} = \mathbf{H} \cdot [D - \text{Tr}[D]I] \mathbf{B} + F(\mathbf{B}) \text{Tr}[D] = \mathbf{H} \cdot [D] \mathbf{B} + (-\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + F(\mathbf{B})) \text{Tr}[D] \quad (3.25)$$

La relation précédente peut être exprimée comme :

$$\frac{\delta F}{dV} = [D] [\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + (F(\mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})I] \quad (3.26)$$

L'équation (3.26) indique que le tenseur :

$$[T]_F = [\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + (F(\mathbf{B}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})I] \quad (3.27)$$

peut être interprété comme le tenseur des contraintes magnétostatiques dans un milieu magnétique quelconque obtenu à partir de l'application du principe des Travaux Virtuels à la densité d'énergie libre en un point donné du milieu. Il peut aussi s'exprimer sous une forme réduite en utilisant l'équation (3.9):

$$[T]_F = [\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + G(\mathbf{H})I] \quad (3.28)$$

Toutefois, l'expression obtenue en (3.26), et ses conséquences (3.27) et (3.28) doivent être remises en question. En effet, dans (3.26) on montre la densité d'énergie en un point comme la contraction du tenseur symétrique $[D]$ avec la somme de deux tenseurs. Le premier représenté par l'expression $[\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}]$ est un tenseur asymétrique. Puisque tout tenseur peut être décomposé comme la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique, on a alors :

$$[\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}] = [\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}]_s + [\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}]_a \quad (3.29)$$

où les indices s et a font référence au caractère symétrique ou antisymétrique. De l'expression (3.29), on a :

$$[\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}] = [\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}]_s + [\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}]_a = [\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}]_s - [\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}]_a \quad (3.30)$$

À partir des expressions (3.29) et (3.30), on en déduit que:

$$[\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}]_s = \frac{[\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}] + [\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}]}{2} \quad (3.31)$$

La contraction du tenseur $[D]$ avec le tenseur antisymétrique $[\mathbf{H} \otimes \mathbf{B}]_a$ est nulle, de sorte que ce dernier tenseur ne contribue pas à la densité d'énergie en chaque point. Par conséquent, l'expression correcte pour (3.28) s'écrit :

$$[T]_F = \left[\frac{\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{H}}{2} + G(\mathbf{H})I \right] \quad (3.32)$$

Qui s'appellera tenseur des contraintes magnétostatiques obtenu à partir de la densité d'énergie.

Une procédure similaire est développée pour obtenir le tenseur magnétostatique à partir de la densité de co-énergie.

$$dG = G(\mathbf{H})dV \quad (3.33)$$

$$\delta G = \delta G(\mathbf{H})dV + G(\mathbf{H})\delta V \quad (3.34)$$

$$\delta G(\mathbf{H}) = -\mathbf{B}.\delta\mathbf{H} \quad (3.35)$$

On doit maintenant obtenir la variation du champ magnétique $\mathbf{H}$ à partir d'un changement virtuel de la configuration spatiale. Cette variation doit se faire en satisfaisant le principe des travaux virtuels et en maintenant les liens du système. Ces liens admettent la variable $\mathbf{H}$ comme une variable d'état et se réduisent en laissant l'équation (3.1) inchangée. Sous forme différentielle, il ne peut y avoir de variations dans la circulation du vecteur $\mathbf{H}$, pour laquelle la variation virtuelle doit vérifier la condition :

$$\delta(\mathbf{H}.d\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \delta\mathbf{H}.d\mathbf{r} + \mathbf{H}.\delta\mathbf{r} = 0 \quad (3.36)$$

Par l'équation (3.12), on obtient :

$$\delta\mathbf{H}.d\mathbf{r} + \mathbf{H}.[D]d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \delta H_i dr^i + H_j [D]_j^i dr_i = 0 \quad (3.37)$$

et du fait que l'équation précédente doit être vérifiée pour tout vecteur $d\mathbf{r}$, en prenant également en compte la symétrie du tenseur $[D]$, on en conclut que :

$$\delta\mathbf{H} = -[D]\mathbf{H} \quad (3.38)$$

L'expression générale (3.34) peut alors s'exprimer comme :

$$\delta G = -\mathbf{B}.\delta\mathbf{H}dV + G(\mathbf{H})Tr[D]dV = \mathbf{B}.[D]\mathbf{H}dV + G(\mathbf{H})Tr[D]dV \quad (3.39)$$

Autrement dit,

$$\frac{\delta G}{dV} = \mathbf{B}.[D]\mathbf{H} + G(\mathbf{H})Tr[D] \quad (3.40)$$

Par les mêmes évidences que celles appliquées dans le cas de l'énergie, l'équation (3.39) peut alors s'écrire comme la contraction du tenseur symétrique $[D]$ avec le tenseur symétrique :

$$[T]_G = \left[\frac{\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{H}}{2} + G(\mathbf{H})I \right] \quad (3.41)$$

Comme on le voit, l'expression des tenseurs est obtenue à partir des densités d'énergie et de co-énergie coïncidentes. Pour cette raison, la référence à l'origine du tenseur des contraintes magnétostatiques n'a plus de sens, on peut ainsi adopter l'expression :

$$[T] = \left[\frac{\mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{H}}{2} + G(\mathbf{H})I \right] \quad (3.42)$$

3.1.3 Dédution de la densité de force volumétrique à partir du nouveau tenseur obtenu

Comme il a déjà été convenu, la force magnétostatique qui apparaît sur un élément de surface $dS = \mathbf{n}.dS$ en un point du milieu continu est :

$$d\mathbf{f}_S = [T]\mathbf{n} \quad (3.43)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normale à la surface. La force totale exercée sur un volume homogène V délimité par une surface S est alors obtenue comme :

$$F = \oint_S d\mathbf{f}_S dS = \oint_S [T]dS \quad (3.44)$$

Où le vecteur $d\mathbf{S}$ est orienté sortant au volume.

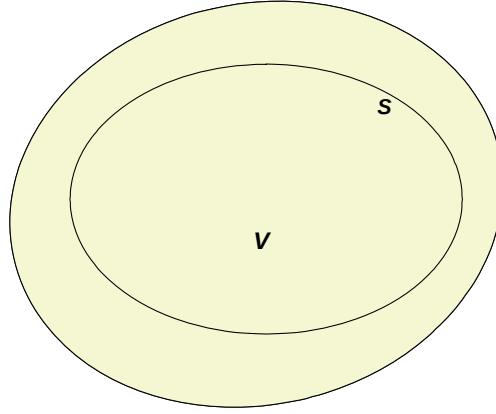


Fig.3.2: Application du tenseur des contraintes dans un milieu homogène magnétostatique

Par application du théorème de la divergence, l'expression (3.44) peut être exprimée comme une intégrale de volume:

$$F = \oint_S [T]dS = \int_V \vec{\nabla}[T]dV \quad (3.45)$$

Dans l'expression (3.45), $(\vec{\nabla}[T])_i = \partial_j T_i^j$ permet de définir la densité volumétrique de la force comme :

$$\mathbf{f} = \vec{\nabla}[T] \Leftrightarrow f_i = \partial_j [T]_i^j \quad (3.46)$$

Selon l'expression (3.46), l'expression générale de la densité de force magnétostatique dans un milieu continu est donnée par :

$$f_i = \frac{1}{2} \left((\partial_j H_i) B^j + (\partial_j B^j) H_i + (\partial_j H_j) B^i + (\partial_j B^i) H_j \right) + \partial_i G \quad (3.47)$$

Sous une forme symbolique, et en considérant l'équation (3.3),

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B} + (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} \right) + \nabla G \quad (3.48)$$

L'équation (3.48) représente la densité volumétrique de la force en un point du milieu continu. Cette densité de force est tirée de la relation (3.45). Cette dernière relation indique que la dérivée du tenseur des contraintes magnétostatique est une grandeur qui, si on l'intègre à l'ensemble du volume du corps, reproduit la même force totale que celle obtenue lors de l'intégration des éléments différentiels de force qui apparaissent sur chaque élément différentiel de surface entourant le corps. Nous devons aussi considérer que l'expression (3.48) n'a été obtenue que par l'application du principe des Travaux Virtuels sur l'énergie ou la co-énergie, on n'a donc considéré aucune autre hypothèse sur l'origine des forces magnétostatiques.

3.2 Dédution du champ de forces magnétiques à partir du nouveau tenseur dans un système physique constitué par des milieux magnétiques « en contact », non limités par le vide

Le Théorème de Maxwell permet de calculer la force exercée sur un corps entouré par le vide. On ne peut donc pas trouver la force agissant sur un corps quand il est en contact partiel ou total avec un autre milieu. La figure 3.3 présente une configuration dans laquelle le corps 2 est entouré par deux milieux magnétiques différents, dont l'un pourrait être le vide.

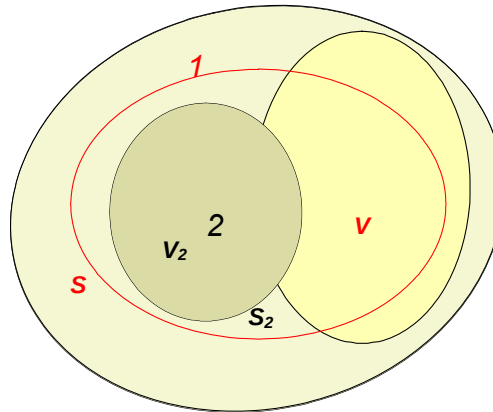


Fig. 3.3: Application du tenseur des contraintes magnétostatiques dans un milieu hétérogène

Dans la figure précédente, on a représenté le milieu 1, comme un milieu pouvant être composé par différents milieux, qui entoure entièrement le corps 2. Il s'agit d'une situation générale pour laquelle nous allons calculer la force totale exercée sur un corps mais dans ce cas le théorème de Maxwell ne pourrait pas être appliqué.

Comme indiqué dans le paragraphe 3.2.2, le tenseur des contraintes de Maxwell peut être appliqué pour trouver la force totale qui s'exerce sur un milieu entouré par le vide car la densité de force présente dans le vide est nulle. Elle n'intervient donc pas dans la force totale du volume de vide compris entre le corps et la surface arbitraire qui est utilisée dans l'intégration du tenseur. L'obtention du tenseur des contraintes magnétostatiques pour tout milieu, tel que mentionné au point 1.2.1, nous permet désormais d'avoir de nouveaux résultats.

En effet, l'intégration du tenseur des contraintes magnétostatiques (3.42) sur la surface fermée S , représente la force totale exercée sur le système interne de cette surface par le système qui lui est extérieur. Ce tenseur n'est pas une fonction continue sur tout le domaine d'intégration. Sa divergence, la densité de force, est une fonction discontinue sur les surfaces de séparation entre les différents milieux. Toutefois, la force totale calculée, en intégrant le tenseur (3.42) le long de la surface S , peut être décomposée comme la force agissant sur chacun des sous-systèmes matériels du volume V . Ces sous-systèmes se composent de volumes et de surfaces de séparation. La force agissant sur chaque volume peut être obtenue par l'intégration de la densité de force correspondante. Cette densité est obtenue par la divergence du tenseur des contraintes internes. La force sur chaque surface de séparation est, en valeur absolue, égale à la différence des forces de surface obtenues par l'application des tenseurs correspondants aux deux milieux séparateurs.

De cette manière, la force totale exercée sur le corps 2 est obtenue, par l'intégration volumétrique de la densité de force correspondante au milieu 2 et par l'intégration surfacique de la différence des forces obtenues à partir des tenseurs extérieur et intérieur. C'est à dire:

$$F^{(2)}_i = \int_{V_2} f_i^{(2)} dV + \oint_{S_2} (T_{ij}^{(1)} - T_{ij}^{(2)}) n_j dS_2 \quad (3.49)$$

où l'exposant (2) se réfère au corps sur lequel la force est calculée et l'exposant (1) au milieu extérieur, celui-ci pouvant, comme on l'a déjà décrit, être formé par différents milieux matériels. En tenant compte des expressions (3.48) et (3.42),

$$\begin{aligned} F_i^{(2)} = & \int_{V_2} \left(\frac{1}{2} ((\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) H_i + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) B_i + (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) B_i) + \partial_i G \right) dV + \\ & + \oint_{S_2} \left(\left[\frac{H_i B_j + B_i H_j}{2} + G(\mathbf{H}) \delta_{ij} \right]_2^1 n^j \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Expression dans laquelle la formulation $[A]_2^1 = A^{(1)} - A^{(2)}$ indique le saut ou la discontinuité de la grandeur A sur la surface de séparation entre les corps (1) et (2). L'expression (3.50) constitue le résultat principal de ce travail et représente la force totale exercée sur un corps magnétique entouré par un ou plusieurs milieux différents. Le terme de surface peut être exprimé comme :

$$\left[\frac{H_i B_j + B_i H_j}{2} + G(\mathbf{H}) \delta_{ij} \right]_2^1 n^j = \frac{1}{2} [H_i (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + B_i (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})]_2^1 + [G(\mathbf{H}) n_i]_2^1 \quad (3.51)$$

de sorte que la relation (3.50), exprimée vectoriellement, soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(2)} = & \int_{V_2} \left(\frac{1}{2} ((\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B} + (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}) + \vec{\nabla} G \right) dV + \\ & + \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}]_2^1 + [G(\mathbf{H}) \mathbf{n}]_2^1 \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Dans l'expression (3.52), il convient de tenir compte de la condition générale aux limites : la conservation de la composante normale de l'induction magnétique $\mathbf{B}$ sur la surface séparant les deux milieux:

$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]_2^1 = 0 \quad (3.53)$$

L'application de l'expression (3.52) doit maintenant permettre le calcul des forces d'origine magnétostatique pour les corps en contact, situation pour laquelle le théorème de Maxwell ne peut être utilisé.

3.3 Dédution, à partir du nouveau tenseur de chaque formulation classique de calcul des forces magnétiques, dans un milieu quelconque limité par le vide

Il est nécessaire de comparer l'expression (3.52) avec les procédures généralement appliquées pour le calcul des forces magnétiques. Toutefois, de telles procédures, comme celles décrites au paragraphe 1 de ce rapport, sont fondées sur différentes hypothèses sur l'origine des forces magnétiques dans les milieux matériels. En effet, on a constaté jusqu'à présent, qu'en appliquant le principe des Travaux Virtuels aux densités d'énergie et de co-énergie, on peut obtenir un tenseur des contraintes magnétostatiques symétrique, tenseur valable pour n'importe quel milieu matériel.

On doit vérifier en premier lieu que l'application du nouveau tenseur générale, à un cas où l'on peut utiliser le théorème de Maxwell, reproduit précisément la même expression. On montrera par la suite l'équivalence entre les procédures des Travaux Virtuels et de Maxwell pour le cas des corps isolés par le vide. De même, la seule hypothèse admissible dans ce procédé, sur l'origine des forces magnétostatiques, est que ces forces sont obtenues par l'application du principe des travaux virtuels. On montrera ensuite que l'expression de la force de Lorentz, sur lequel est basée traditionnellement la démonstration du théorème de Maxwell, est également reproduite en appliquant cette méthode de calcul des forces.

De cette façon, on procédera dans les deux paragraphes suivants à l'obtention des expressions des forces, à partir de l'expression générale (3.52), dans laquelle la densité volumique de la force correspond à celle des méthodes traditionnelles, c'est-à-dire, aux expressions suivantes :

$$\mathbf{f} = (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) \wedge \mathbf{B} \quad \text{dans la Méthode des Courants Équivalents}$$

$$\mathbf{f} = -\mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{H} \quad \text{dans la Méthode des Charges Équivalents}$$

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} \quad \text{dans la Méthode de Kelvin}$$

On obtiendra ces expressions à partir de l'équation (3.52) dans laquelle les termes de volume correspondent à ceux de densité. On obtiendra également les termes de surface associés à chacune de ces procédures dans le cas général où les corps restent en contact. Ces termes surfaciques s'appliqueront au contexte le plus réduit où le milieu entourant le corps est le vide, et on vérifiera que les termes généraux déduits reproduisent les termes surfaciques pour ce cas particulier.

Cela démontrera que la procédure développée dans ce rapport reproduit les mêmes résultats, dans le cas où le corps est entouré par le vide, que toutes les

méthodes habituelles pour l'obtention des forces (Méthode des Travaux Virtuels, Méthode du Tenseur de Maxwell, Méthode des Courants Équivalents, Méthode des Charges Équivalentes et Méthode de Kelvin).

Le schéma suivant décrit les différentes séquences de la démarche du précédent paragraphe :

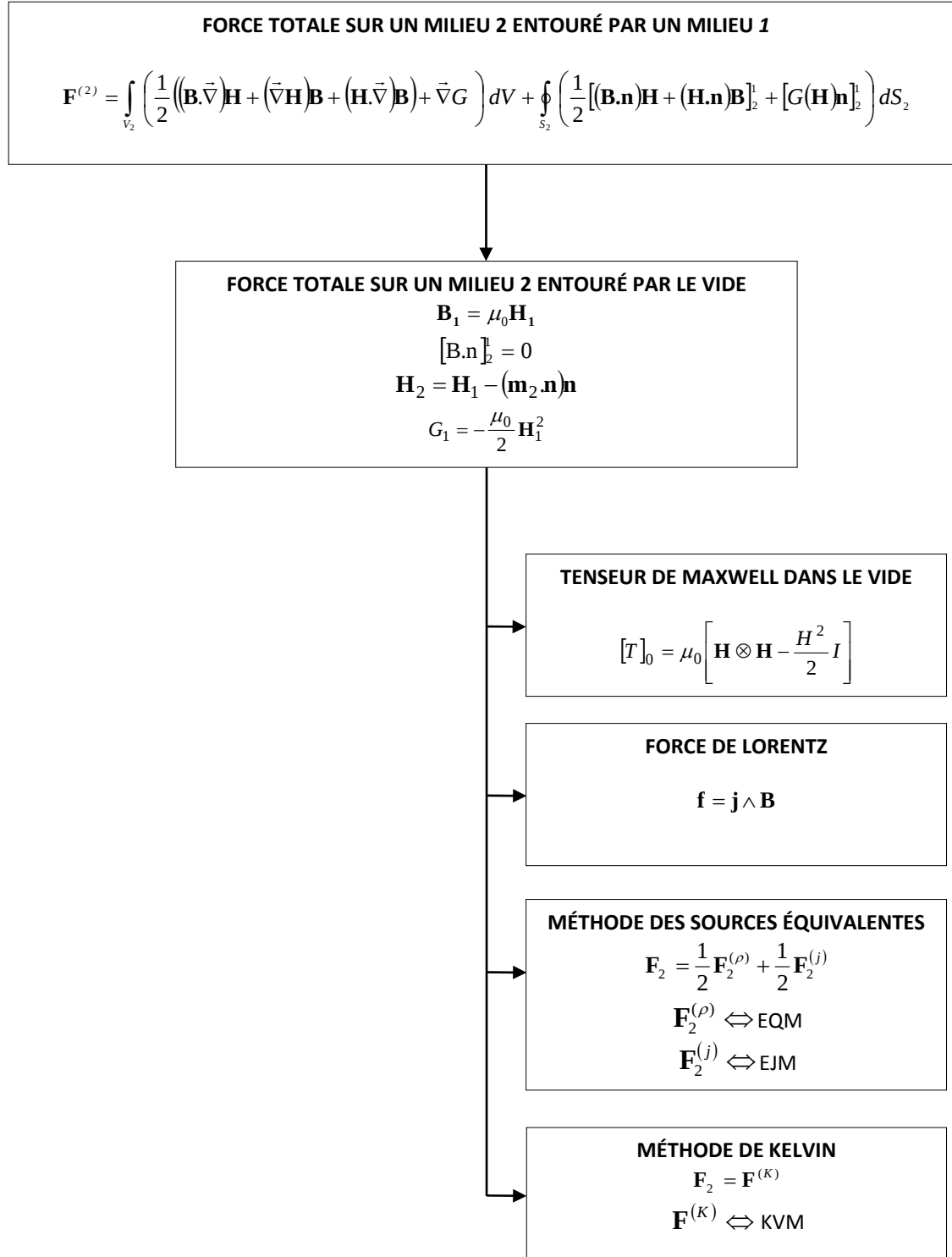


Fig. 3.4: Séquence des étapes pour la comparaison des différentes méthodes

3.3.1 Dédution du tenseur de Maxwell

Dans le vide, la relation entre l'induction et le champ magnétique est :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3.54)$$

Compte tenu de cette relation linéaire, l'équation :

$$dG(\mathbf{H}) = -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} \quad (3.55)$$

peut être intégrée. On admet la condition que la densité de co-énergie en un point est nulle lorsque le champ magnétique en ce point est nul, tel que :

$$G(\mathbf{H}) = \int_0^{\mathbf{H}} -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} = -\mu_0 \int_0^{\mathbf{H}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = -\mu_0 \frac{H^2}{2} \quad (3.56)$$

Considérant les expressions (3.54) et (3.56), le tenseur des contraintes magnétostatiques (3.42) dans le vide prend la forme :

$$[T]_0 = \mu_0 \left[\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{H^2}{2} \mathbf{I} \right] \quad (3.58)$$

il coïncide avec l'expression classique du tenseur magnétostatique de Maxwell. Il faut considérer ici que l'expression (3.58) est déduite avec l'hypothèse que les forces magnétiques sont obtenues par l'expression connue de la force de Lorentz.

En conclusion, le tenseur (3.42) permet de calculer les forces d'origine magnétostatiques sur n'importe quel élément de volume dans un même milieu continu homogène ainsi que la densité de force en chaque point, par l'application du théorème de Gauss ainsi que la divergence de ce tenseur.

Le théorème de Maxwell nous donne la force totale sur tout corps entouré par le vide en intégrant le tenseur (3.46) sur chaque surface qui entoure ce corps. En effet, en considérant le corps 2 entouré d'un milieu 1, qui est dans ce cas le vide et une surface arbitraire S située dans le milieu 1 et qui entoure entièrement le corps 2. L'intégration sur S , du tenseur (3.42) ou de son expression particulière (3.58) permet d'obtenir la force totale exercée par le système extérieur à la surface S sur le système interne à cette même surface.

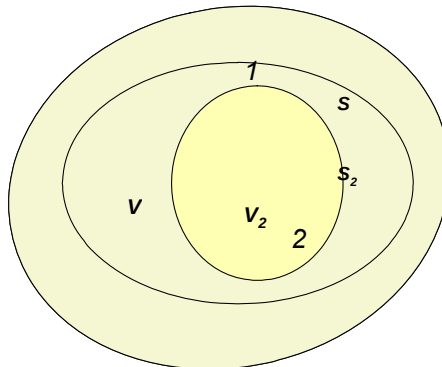


Fig. 3.5: Application du théorème de Maxwell

Toutefois, l'intérieur de la surface S est composé d'un volume de vide compris entre S_2 et S et le milieu matériel délimité par S_2 . La densité de la force magnétique dans le volume de vide entre la surface S arbitraire et le corps 2 peut être obtenue à partir du tenseur appliqué dans le vide,

$$f_{0,i} = \partial^j T_{ij} = \mu_0 \partial^j \left(H_i H_j - \frac{H^2}{2} \right) = \mu_0 \left((\partial^j H_i) H_j + (\partial^j H_j) H_i - \partial^j \frac{H^2}{2} \right) \quad (3.59)$$

qui, sous forme vectoriel est :

$$\mathbf{f}_0 = \mu_0 \left((\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \nabla \frac{H^2}{2} \right) \quad (3.60)$$

et, en utilisant le calcul vectoriel, on a :

$$\mathbf{f}_0 = -\mu_0 \mathbf{H} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \mathbf{H}) \quad (3.61)$$

Avec (3.1), on peut écrire :

$$\mathbf{f}_0 = -\mu_0 \mathbf{H} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (3.62)$$

Si, comme on le suppose, la zone comprise entre le corps et la surface arbitraire d'intégration est bien du vide, la densité de la force, selon (3.18) doit être nulle. Ainsi, cela confirme le choix arbitraire de la surface d'intégration, puisque dans tous les cas, la force exercée sur le volume de vide, entourant le corps étudié et inclus sous la surface d'intégration, est nulle.

Par conséquent, l'intégrale :

$$F = \oint_S [T]_0 dS \quad (3.63)$$

représente la force totale exercée sur un corps entouré par le vide. Avec S , la surface d'intégration arbitraire entourant le corps, reproduisant ainsi le tenseur de Maxwell.

3.3.2 Dédution de l'expression de la force de Lorentz

L'expression classique de la force de Lorentz, qui fournit la force sur un élément de courant dans le vide, peut être reproduite en appliquant le résultat précédent. En effet, si l'on intègre le Tenseur de Maxwell (3.14) sur toute surface arbitraire qui comprend seulement une distribution de courants, alors la force totale sur ce système de courants, en appliquant le théorème de la divergence, est donnée par :

$$F = \oint_S [T] dS = \int_V \bar{\nabla} [T] dV = \int_V \mu_0 \left((\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \nabla \frac{H^2}{2} \right) dV = \int_V -\mu_0 \mathbf{H} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \mathbf{H}) dV = \int_V \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} dV \quad (3.64)$$

Où ont été prises en compte les relations (3.16) (3.17) et (3.18).

3.3.3 Dédution de la force totale, en termes de densités de forces associées aux méthodes de Charges Équivalentes et Courants Équivalents, sur un corps dans le vide

Considérant l'égalité vectorielle suivante :

$$\vec{\nabla}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{H}) + \mathbf{H} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B}) \quad (3.65)$$

En isolant le terme:

$$(\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B} = \vec{\nabla}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{H} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B}) \quad (3.66)$$

pour l'insérer dans l'expression générale de la force magnétostatique tirée du nouveau tenseur de Maxwell (3.48) :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{H} + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H})\mathbf{B} + (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B} \right] + \nabla G \quad (3.67)$$

conduit à l'expression :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{H} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B}) + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H})\mathbf{B} \right] + \nabla G \quad (3.68)$$

On supposera dans ce qui suit que la densité de courant, dans le milieu matériel dans lequel le calcul de la force est nulle, sous la forme :

$$\vec{\nabla} \wedge \mathbf{H} = 0 \quad (3.69)$$

En supposant que :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}) \quad (3.70)$$

et en remplaçant :

$$\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B} = \vec{\nabla} \wedge [\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m})] \quad (3.71)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B} = \vec{\nabla} \wedge \mu_0 \mathbf{H} + \vec{\nabla} \wedge \mu_0 \mathbf{m} \quad (3.72)$$

Enfin, en tenant compte de (3.69):

$$\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B} = \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) \quad (3.73)$$

Partant de:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{m} \quad (3.74)$$

et en remplaçant:

$$\vec{\nabla} \mathbf{H} = \vec{\nabla} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \vec{\nabla} \mathbf{m} \quad (3.75)$$

en tenant compte de (3.3):

$$\vec{\nabla} \mathbf{H} = -\vec{\nabla} \mathbf{m} \quad (3.76)$$

A l'aide des expressions (3.69) (3.73) et (3.76), on obtient l'expression (3.68) aussi en fonction du vecteur aimantation :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} \wedge \mu_0 (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{B} \right] + \vec{\nabla} G \quad (3.77)$$

Qui nous donne l'expression (3.78) :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[-\mu_0 \mathbf{H} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{B} \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G \right] \quad (3.78)$$

L'expression ci-dessus, en utilisant (3.2), c'est à dire en supposant les égalités :

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}) \quad (3.79)$$

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{m} \quad (3.80)$$

Devient :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[-(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{m}) \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}) \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G \right] \quad (3.81)$$

Ce qui nous permet d'écrire l'expression suivante :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\mu_0 \mathbf{m} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{m} \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G \right] \quad (3.82)$$

Pour poursuivre le développement de l'équation, on admettra l'identité vectorielle suivante :

$$\vec{\nabla} \frac{\mathbf{m}^2}{2} = (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} + \mathbf{m} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) \quad (3.83)$$

En remplaçant on obtient :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\mu_0 \left(\vec{\nabla} \frac{\mathbf{m}^2}{2} - (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} \right) - \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{m} \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G \right] \quad (3.84)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\mu_0 \vec{\nabla} \frac{\mathbf{m}^2}{2} - \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} - \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{m} \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G \right] \quad (3.85)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\mu_0 \vec{\nabla} \frac{\mathbf{m}^2}{2} - \mu_0 [(\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} + (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{m}] - \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G \right] \quad (3.86)$$

À ce stade, on introduit un nouveau tenseur noté :

$$[M]_{ij} = m_i m_j \quad (3.87)$$

de sorte que sa divergence soit :

$$\partial_j m^i m^j = (m^j \partial_j) m^i + (\partial_j m^j \partial_j) m^i \Leftrightarrow \vec{\nabla} [M] = (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{m} \quad (3.88)$$

Prenant en compte (3.83) et (3.88), l'expression (3.82) est :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[\mu_0 \vec{\nabla} \frac{\mathbf{m}^2}{2} - \mu_0 \vec{\nabla} [M] - \mathbf{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G \right] \quad (3.89)$$

c'est à dire,

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}) \wedge \mathbf{B} - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} \right] + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + G + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\mathbf{m}^2}{2} - \frac{1}{2} \mu_0 [M] \right] \quad (3.90)$$

Cette densité de force peut être placée dans l'expression générale de la force (3.52),

$$\begin{aligned} F_2 = & \int_{V_2} \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}_2) \mathbf{H}_2 \right] dV_2 + \\ & + \int_{V_2} \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + G + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{2} - \frac{1}{2} \mu_0 [\mathbf{M}_2] \right] dV_2 \quad (3.91) \\ & + \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}]_2 + [G(\mathbf{H}) \mathbf{n}]_2 \right) dS_2 \end{aligned}$$

où nous avons introduit des indices pour indiquer le milieu qui se réfère aux champs concernés, pour avoir une forme plus simple.

Le deuxième terme de l'équation (3.91) peut être entièrement transformé en une intégrale de surface, utilisant de nouveau le théorème de la divergence et en tenant compte du fait que :

$$\vec{\nabla} [\mathbf{M}_2] = (\mathbf{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m}_2 + (\vec{\nabla} \mathbf{m}_2) \mathbf{m}_2 \quad (3.92)$$

$$[\mathbf{M}_2] = \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2 \quad (3.93)$$

nous arrivons à l'expression :

$$\int_{V_2} \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + G + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{2} - \frac{1}{2} \mu_0 [\mathbf{M}_2] \right] dV_2 =$$

$$+ \oint_{S_2} \left[\left(G_2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{2} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 \right] dS_2 \quad (3.94)$$

de tel sorte que la force totale puisse être exprimée comme :

$$\mathbf{F}_2 = \int_{V_2} \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}_2) \mathbf{H}_2] dV_2 +$$

$$+ \oint_{S_2} \left[\left(G_2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{2} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 \right] dS_2 \quad (3.95)$$

$$+ \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}]_2^1 + [G(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}]_2^1 \right) dS_2$$

Et en tenant compte du fait que :

$$[G(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}]_2^1 = G(\mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{n} - G(\mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} = G_1 n - G_2 n \quad (3.96)$$

Dans l'expression suivante, nous voyons que le terme G_2 s'annule

$$\mathbf{F}_2 = \int_{V_2} \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}_2) \mathbf{H}_2] dV_2 +$$

$$+ \oint_{S_2} \left(\left(G_1 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{2} [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}]_2^1 - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 \right) dS_2 \quad (3.97)$$

L'expression ci-dessus représente la force totale exercée sur un corps 2, entouré d'un système de milieux matériels 1, comme la somme d'une contribution volumique exprimée en fonction des densités propres des méthodes des Charges Équivalentes et des Courants Équivalents.

Si l'on considère que le milieu 1 est le vide, on adoptera également l'hypothèse que la composante tangentielle du champ magnétique est conservée sur la surface de séparation avec le milieu. L'ensemble suivant de relations est alors applicable dans ce cas :

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1 \quad (3.99)$$

$$G_1 = -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}_1^2 \quad (3.100)$$

Considérons maintenant le développement du terme surfacique de l'expression (3.97)

$$\begin{aligned}
& \left(G_1 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{2} \left(((\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 + (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1) - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 \right) = \\
& \left(G_1 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{2} ((\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2 + (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) = \\
& (3.101)
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression (3.98) et l'égalité des composantes normales de l'induction dans les deux milieux, nous pouvons développer l'expression :

$$\begin{aligned}
& \left(G_1 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{2} ((\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) = \\
& \left(G_1 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{2} ((\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 + \mathbf{B}_2 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) = \\
& \left(G_1 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) = \\
& (3.102)
\end{aligned}$$

En introduisant l'expression (3.100) et en regroupant les termes que multiplie le vecteur normal:

$$\begin{aligned}
& \left(-\mu_0 \frac{\mathbf{H}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} + \\
& + \frac{1}{2} ((\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) = \\
& (3.103)
\end{aligned}$$

Comme

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 (\mathbf{H}_2 + \mathbf{m}_2) \quad (3.104)$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \left(-\mu_0 \frac{\mathbf{H}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{H}_2 + \mathbf{m}_2) \cdot \mathbf{H}_2 + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} + \\
& + \frac{1}{2} ((\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) = \\
& (3.105)
\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau l'expression (3.98):

$$\begin{aligned}
& \left(-\mu_0 \frac{\mathbf{H}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{m}_2) \cdot (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} + \\
& + \frac{1}{2} ((\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) = \\
& (3.106)
\end{aligned}$$

Centrons nous maintenant sur le premier terme :

$$\left(-\mu_0 \frac{\mathbf{H}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mathbf{m}_2) \cdot (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} \quad (3.107)$$

En développant les produits scalaires :

$$\left(-\mu_0 \frac{\mathbf{H}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{H}_1^2 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1) - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2) + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} \quad (3.108)$$

En résolvant :

$$\left(\frac{1}{2} \mu_0 (-2 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1)) \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} \quad (3.109)$$

$$\left(-\mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1) + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} \quad (3.110)$$

en supposant désormais que le milieu 1 est le vide et que la composante normale de l'induction se conserve :

$$-\mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) = -(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1) = -(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2) \quad (3.111)$$

ainsi

$$\left(-(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2) + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1) + \mu_0 \frac{\mathbf{m}_2^2}{4} + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} \quad (3.112)$$

le second terme peut être exprimée comme :

$$\left(\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1) + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} \quad (3.113)$$

Retournons maintenant à l'équation de départ, mais en tenant compte de la nouvelle expression du premier terme. Elle devient :

$$\left(\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1) + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \right) \mathbf{n} + \frac{1}{2} ((\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_1 - (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2) \quad (3.113)$$

travaillons maintenant avec le second terme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left((\mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - \left(\left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{m}_2 \right) \cdot \mathbf{n} \right) \mu_0 (\mathbf{H}_2 + \mathbf{m}_2) - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left((\mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} \cdot \mathbf{n} \right) \mu_0 \mathbf{H}_2 - \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} \cdot \mathbf{n} \right) \mu_0 \mathbf{m}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mu_0 \mathbf{H}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mu_0 \mathbf{m}_2 - \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} ((\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 + \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2) \quad (3.114)$$

et comme

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (3.115)$$

on peut écrire:

$$= \frac{1}{2} ((\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 + \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2) = \quad (3.116)$$

$$= \frac{1}{2} ((\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 + (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 + \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2) = \quad (3.117)$$

Du fait de l'égalité : $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}$, au final, le deuxième terme est équivalent à:

$$\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2 \quad (3.118)$$

La nouvelle expression des deux sommes réunies donne :

$$\left(\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_1 + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2 \right) \quad (3.119)$$

Le terme $\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2$ de l'équation (3.119) peut s'écrire comme:

$$\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (2\mathbf{H}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \quad (3.120)$$

Revenant à l'utilisation de l'égalité

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (3.121)$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{H}_2 = \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} = \quad (3.122)$$

$$= \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \quad (3.123)$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \right) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \quad (3.124)$$

Les trois termes restants de (3.119) peuvent également être développés de la manière suivante.

Partant de :

$$\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{n} + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 = \quad (3.125)$$

et en tenant compte du fait que :

$$\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \right) = \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}}{2} \right) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.127)$$

On peut écrire (3.125) comme :

$$\frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 = \quad (3.128)$$

$$= \frac{1}{4} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mu_0 \mathbf{H}_1 + \mu_0 \mathbf{H}_2) + \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 = (3.129)$$

$$= \frac{1}{4} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 \mathbf{n} - \frac{1}{4} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 - \frac{1}{4} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 = \quad (3.130)$$

$$= \frac{1}{4} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 \mathbf{n} - \frac{1}{4} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 - \frac{1}{4} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 = \quad (3.131)$$

$$= \frac{1}{4} [(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) - (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2 - (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_2] + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 \mathbf{n} = \quad (3.132)$$

$$= \frac{1}{4} [((\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \mathbf{m}_2) \mathbf{n} - ((\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \mathbf{n}) \mathbf{m}_2] + \frac{1}{4} \mu_0 \mathbf{m}_2^2 \mathbf{n} \quad (3.133)$$

Sachant que :

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{ac}) \mathbf{b} - (\mathbf{ab}) \mathbf{c} \quad (3.134)$$

On peut écrire :

$$= \frac{1}{4} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}_2) + \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \quad (3.135)$$

de sorte que l'expression générale (3.97) puisse s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & \int_{V_2} \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}_2) \mathbf{H}_2] dV_2 + \\ & + \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \right) - \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2} \right) + \frac{1}{4} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & \int_{V_2} \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{B}_2 - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}_2) \mathbf{H}_2] dV_2 + \\ & + \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \right) - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2} \right) \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.137)$$

La procédure des Charges Magnétiques Équivalentes conduit à l'expression de la force totale :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^{(\rho)} = & \int_{V_2} -\mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{m}_2) \mathbf{H}_2 dV + \oint_{S_2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1}{2} \right) dS_2 = \\ & = \int_{V_2} \rho_m \mathbf{H}_2 dV + \oint_{S_2} \rho_m^s \left(\frac{\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1}{2} \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.138)$$

où $\rho_m = -\mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{m}_2)$ et $\rho_m^s = \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})$ sont respectivement les densités volumique et surfacique de la méthode des Charges Magnétiques Équivalentes.

En outre, la méthode des courants magnétiques aboutit à l'expression de la force totale comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^{(j)} = & \int_{V_2} ((\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{B}_2) dV + \oint_{S_2} \left(-(\mathbf{n} \wedge \mathbf{m}_2) \left(\frac{\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1}{2} \right) \right) dS_2 = \\ & = \int_{V_2} (\mathbf{j}_m \wedge \mathbf{B}_2) dV + \oint_{S_2} \left(\mathbf{j}_m^s \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1}{2} \right) \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.139)$$

où $\mathbf{j}_m = (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{m}_2)$ et $\mathbf{j}_m^s = (\mathbf{m}_2 \wedge \mathbf{n})$ sont respectivement les densités volumique et surfacique de la méthode des Courants Magnétiques Équivalents.

En substituant les expressions des densités volumétriques (3.139), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & \int_{V_2} \frac{1}{2} [\mathbf{j}_m \wedge \mathbf{B}_2 + \rho_m \mathbf{H}_2] dV_2 + \\ & + \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} \rho_m^s \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{j}_m^s \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2} \right) \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.140)$$

Autrement dit,

$$\mathbf{F}_2 = \int_{V_2} \frac{1}{2} \mathbf{j}_m \wedge \mathbf{B}_2 dV_2 + \oint_S \frac{1}{2} \mathbf{j}_m^S \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2} \right) dS_2 + \int_{V_2} \frac{1}{2} \rho_m \mathbf{H}_2 dV_2 + \oint_{S_2} \frac{1}{2} \rho_m^S \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \right) dS_2 \quad (3.141)$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} \left[\int_{V_2} \mathbf{j}_m \wedge \mathbf{B}_2 dV_2 + \oint_S \mathbf{j}_m^S \wedge \left(\frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2} \right) dS \right]_2 + \frac{1}{2} \left[\int_{V_2} \rho_m \mathbf{H}_2 dV_2 + \oint_{S_2} \rho_m^S \left(\frac{\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2}{2} \right) dS_2 \right] \quad (3.142)$$

Ainsi, la force totale exercée sur un corps, exprimée en fonction des densités volumétriques de charge et courant équivalents, dans l'équation (3.97) et appliquée au cas particulier dans lequel le corps est entouré par le vide, conduit à l'expression (3.142) qui peut, selon (3.138) et (3.139) s'écrire comme :

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{F}_2^{(\rho)} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_2^{(j)} \quad (3.143)$$

Cela donne ainsi un résultat significatif. Le calcul de la force magnétique sur un corps entouré par le vide créé par l'application de la procédure générale définie par l'équation (3.52) ne conduit pas directement à une l'égalité avec la méthode des Charges Équivalentes ou la méthode des Courants Équivalents, basées sur des hypothèses de force différentes. Mais à la valeur moyenne de l'application des deux procédures. Ce résultat est cohérent avec le fait que seule l'hypothèse sur l'origine des forces magnétostatiques a été suivie dans le calcul avec l'application du principe des travaux virtuels, soit l'énergie ou la co-énergie du système. Par conséquent, il serait contradictoire que cette méthode mène uniquement à une seule des deux méthodes de charges ou de courants équivalents. Ce serait donc faux d'un point de vue théorique.

Expérimentalement, les Méthode des Courants Équivalents et Méthode des Charges Équivalentes entraînent les mêmes valeurs pour les forces magnétostatiques sur les corps. L'expression (3.99) montre donc que son application pratique donnera les mêmes résultats que ceux obtenus avec l'application de l'une ou l'autre de ces deux procédures.

3.3.4 Dédution de la force totale en fonction de la densité de force associée a la méthode de Kelvin

La densité de force magnétostatique dérivant de l'application du principe des travaux virtuels a la densité d'énergie ou de co-énergie, donné par l'équation (1.6) peut être exprimé, en tenant compte de (3.2), par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{2} \left(2\mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B} \right) + \vec{\nabla} G = \\ &= \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \frac{1}{2} \left(\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B} \right) + \vec{\nabla} G \end{aligned} \quad (3.144)$$

Appliquant la propriété vectorielle :

$$\vec{\nabla} \frac{\mathbf{a}^2}{2} = (\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{a}) \quad (3.145)$$

Le premier terme de l'égalité (3.144) peut se développer comme :

$$\mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} = \mu_0 \vec{\nabla} \frac{\mathbf{H}^2}{2} - \mu_0 \mathbf{H} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{H}) \quad (3.146)$$

en admettant que la densité de courant est nul dans le milieu, ce qui s'écrit :

$$(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{j} = 0 \quad (3.147)$$

Nous avons :

$$\mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} = \mu_0 \vec{\nabla} \frac{\mathbf{H}^2}{2} \quad (3.148)$$

Ainsi, la densité de force (3.144) prend la forme:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} (\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \left(G + \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) \quad (3.149)$$

Du fait que :

$$\vec{\nabla} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) = \vec{\nabla} \wedge (\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}) \wedge \mathbf{H}) = \vec{\nabla} \wedge (\mu_0 \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}) + \vec{\nabla} \wedge (\mu_0 \mathbf{m} \wedge \mathbf{H}) \quad (3.150)$$

Et avec la propriété du produit vectoriel:

$$\vec{\nabla} \wedge (\mu_0 \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}) = 0 \quad (3.151)$$

Alors:

$$\vec{\nabla} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) = \vec{\nabla} \wedge (\mu_0 \mathbf{m} \wedge \mathbf{H}) \quad (3.152)$$

Par propriété du produit vectoriel:

$$\vec{\nabla} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\vec{\nabla} \mathbf{b}) \mathbf{a} + (\mathbf{b} \vec{\nabla}) \mathbf{a} - (\vec{\nabla} \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \vec{\nabla}) \mathbf{b} \quad (3.153)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) = \mu_0 \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{m} \wedge \mathbf{H}) = \mu_0 ((\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} - (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H}) \quad (3.153)$$

Sachant que:

$$\mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} = \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) + \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} \quad (3.154)$$

l'expression de la densité de force (3,150) peut alors être transformée en:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} (\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{m} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \left(G + \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) \quad (3.155)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} (\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) + \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \left(G + \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) \quad (3.156)$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} (2\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) - \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B}) + \vec{\nabla} \left(G + \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) \quad (3.157)$$

Étant donné que le terme:

$$-\mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{B} \quad (3.158)$$

Peut être développé comme:

$$-\mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} + (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{m}) = -\mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{m}) \mathbf{H} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{H} + \mu_0 (\vec{\nabla} \mathbf{H}) \mathbf{m} = \mu_0 \vec{\nabla} (\mathbf{H} + \mathbf{m}) \mathbf{H} = \vec{\nabla} (\mathbf{B}) \mathbf{H} = 0 \quad (3.159)$$

Le dernier terme étant nul en raison de (3.3). L'expression (3.157) est donc simplifiée en :

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{m} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{H}) + \vec{\nabla} \left(G + \mu_0 \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) \quad (3.160)$$

Cette expression (3.160) représente la densité volumique de la force dans tout milieu exprimé en termes de densité de force de Kelvin. Pour obtenir l'expression générale de la force totale exercée sur un corps, on va maintenant utiliser la relation (3.52)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & \int_{V_2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H}_2 dV + \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{H}_2) + G_2 \mathbf{n} + \mu_0 \frac{1}{2} \mathbf{H}_2^2 \mathbf{n} \right) dS_2 \\ & + \oint_{S_2} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H}_1 (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{B}_1 (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{H}_2 (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{B}_2 (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n})) + (G_1 - G_2) \mathbf{n} \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.161)$$

Le deuxième terme de l'expression (3.161) provient de la conversion de l'intégrale de volume que contient l'élément à intégrer (3.160) en une intégrale de surface, au moyen du théorème de la divergence.

Et du fait que :

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{B}_2 \wedge \mathbf{H}_2) = \mathbf{B}_2 (\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{H}_2 (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) \quad (3.162)$$

la force totale (3.161) peut finalement être exprimée comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & \int_{V_2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H}_2 dV + \\ & + \oint_{S_2} \left(\left(G_1 + \mu_0 \frac{1}{2} \mathbf{H}_2^2 \right) \mathbf{n} - \mathbf{H}_2 (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_1 (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{B}_1 (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n})) \right) dS_2 \end{aligned} \quad (3.163)$$

L'expression (3.160) représente la force magnétostatique totale, exercée sur un corps entouré par un milieu magnétique arbitraire, en fonction de la densité volumique de Kelvin.

Si l'on considère que le milieu 1 est le vide, on adoptera à nouveau l'hypothèse que la composante tangentielle du champ magnétique se conserve sur la surface de séparation entre les milieux. Les relations (3.98) à (3.100) sont donc valables. Considérons maintenant le développement du terme de surface dans l'expression (3.163):

$$\begin{aligned}
 & \left(G_1 + \mu_0 \frac{1}{2} \mathbf{H}_2^2 \right) \mathbf{n} - \mathbf{H}_2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_1 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{B}_1 (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n})) = \\
 & = \left(-\mu_0 \frac{1}{2} \mathbf{H}_1^2 + \mu_0 \frac{1}{2} \mathbf{H}_2^2 \right) \mathbf{n} - \mu_0 (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mu_0 \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) = \\
 & = \left(-\mu_0 \frac{1}{2} \mathbf{H}_1^2 + \mu_0 \frac{1}{2} (\mathbf{H}_1 - (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n})^2 \right) \mathbf{n} + \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \\
 & = \left(-(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \mu_0 \frac{1}{2} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \right) + \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \\
 & = \mu_0 \frac{1}{2} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{3.164}$$

avec cette expression simplifiée de la densité de surface de la force, la force totale sur un milieu entouré par le vide, est, d'après (3.163) :

$$\mathbf{F}_2 = \int_{V_2} \mu_0 (\mathbf{m}_2 \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{H}_2 dV + \oint_{S_2} \mu_0 \frac{1}{2} (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} dS_2 \tag{3.165}$$

qui est l'expression classique de Kelvin de la force sur un corps entouré par le vide.

Il a ensuite été vérifié que l'application de la procédure générale définie par l'expression (3.52) reproduit la valeur de la force calculée par la méthode de Kelvin lorsque le corps est entouré par le vide.

3.4 Quelques considérations épistémologiques sur la méthode Tensorielle Généralisée

Conformément au thème abordé dans ce chapitre on proposera une nouvelle méthodologie pour déterminer des forces d'origine magnétostatique qui apparaissent sur un corps plongé dans un champ magnétique donné. Cette méthodologie part d'un principe général, celui des Travaux Virtuels, appliqués à la densité d'énergie ou de co-énergie en un point donné du milieu magnétique. Suite à l'application de cette méthode, on obtient un tenseur de contraintes magnétiques généralisé applicable en milieu magnétique quelconque. L'application de ce tenseur permet d'obtenir des densités de force, de volume et de surface, dont l'intégration donne la force totale exercée sur le corps. En outre, il apparaît que son application fournit la même valeur de force totale celles obtenues par l'application d'autres méthodes traditionnelles telles que la méthode des Charges Équivalentes, des Courants Équivalents et de la méthode de Kelvin. De plus, à part la mise en œuvre du formalisme appliqué au cas d'un corps isolé dans le vide, il n'y a finalement rien de plus que la reproduction de la méthode classique de Maxwell.

Au-delà des répercussions scientifiques découlant de l'application de cette méthode, il est intéressant d'analyser, même brièvement, ses aspects de nature épistémologique. En effet, elle propose une méthodologie générale, fondée sur une hypothèse très générale (Qualification du principe des Travaux Virtuels comme une procédure pour le calcul des forces) qui diffère sensiblement des hypothèses sur lesquelles sont bâties le reste des procédures classiques pour l'obtention des forces électromagnétique.

En effet, la méthode qui été nommée dans le présent rapport comme Méthode Tensorielle Généralisée ne part pas d'aucune modélisation de l'interaction électrostatique. C'est à dire, d'aucune expression de la force magnétostatique appliquée sur un matériau magnétique. Autrement dit, la méthode proposée ne nécessite aucune hypothèse sur l'interaction magnétostatique dans un milieu et ne comporte donc pas de modélisation des milieux magnétiques. Ainsi, avec l'adoption de cette nouvelle procédure, il est proposé une avancée qualitative pour le fondement épistémologique du calcul de forces magnétiques sur le milieu continu. Les méthodes classiques ont besoin d'une modélisation du milieu magnétique. En effet, la modélisation d'un milieu magnétique, nécessaire pour définir une expression de la densité de force, peut être établie selon deux hypothèses:

1. La modélisation doit répondre à un principe méthodologique qui vise à « former une image » du support magnétique en vertu d'une demande ontologique d'adaptation maximale à la structure réelle du milieu. Ce principe, comme dans de nombreux autres domaines de la physique des milieux continus, nécessite une extrapolation statistique des propriétés. Elles sont, dans le cas du magnétisme, observables ou quantifiables sur le domaine microscopique. Suivant ainsi la perspective traditionnelle avec laquelle la physique a abordé la matière, qui est constituée à la base, de particules possédant un ensemble de propriétés magnétiques définies.
2. La modélisation doit répondre à un principe de compatibilité avec d'autres procédures, méthodes, démonstrations ou lois acceptées dans d'autres domaines et puisse être testée expérimentalement.

Il importe de souligner la différence fondamentale dans l'approche épistémologique des ces deux procédures. La première peut être considérée comme inscrite dans le contexte de la théorie scientifique qui est développé à partir de la nécessité de la connaissance intrinsèque ou essentielle de la matière. Cette connaissance doit être suffisante pour expliquer chacune des réactions que le milieu matériel, ou milieu continu, pourrait exprimer sous l'emprise de sollicitations de différentes natures (mécaniques, magnétiques, thermiques, dans notre cas). La seconde hypothèse peut toutefois se situer dans un domaine qui pourrait être qualifié de technique.

Les méthodes classiques de calcul, basées sur la description de cette interaction, c'est à dire dans l'expression formelle d'une densité de force, répondent à ce second point de vue. Ainsi, la méthode des Courants Équivalents est basée sur l'extension de la densité de force de Lorentz, initialement conçu pour des densités de courant dans le vide, à des milieux matériels, en admettant l'hypothèse que les propriétés magnétiques soient déterminées par des densités de courant liés. De cette manière, on obtient avec cette modélisation du milieu magnétique comme une distribution, volumétrique et surfacique de densités de courants liés, qui se trouvent maintenant dans le vide. De ce fait, dû à cette hypothèse, l'extrapolation de la procédure de calcul basée sur la loi de Lorentz est immédiate. Mais, est-ce que l'adoption de cette hypothèse de travail est

soutenu par la nature même du milieu, c'est à dire qu'elle donne une réponse au problème de la description ontologique des propriétés magnétiques de la matière? Une réponse à cette question ne peut être abordée qu'en considérant deux aspects : premièrement, nous avons besoin d'analyser si la description du champ magnétique en termes de courants liés peut être tirée des propriétés magnétiques de ses particules constitutives élémentaires. Deuxièmement, il est nécessaire d'évaluer si ce mécanisme d'interaction est extrapolable à d'autres domaines. Cette exploration n'a pas été développée dans ce travail. Il est vérifié, néanmoins, que la majeure partie des articles se limitent à la vérification expérimentale de cette hypothèse. De cette première vision, il peut être conclu que cette approche ne permet pas un progrès ontologique de rigueur dans la compréhension des propriétés magnétiques des milieux continus. Ceci est un fait d'importance majeure, qui devient encore plus flagrant lorsqu'on regarde les différences entre les expressions des densités de force ou les forces locales parmi les différentes méthodes classiques non-énergétiques.

La formulation du modèle des Charges Magnétiques a été réalisée à partir d'approches très différentes de celles utilisées dans la méthode des Courants Équivalents. Notez toutefois, que les deux méthodes sont généralement désignées sous le concept unifié de méthode des Sources Équivalentes. Les deux ont comme objectif de décrire les forces dans un milieu plongé au sein d'un champ magnétique extérieur comme l'interaction de ce champ avec des sources de champ magnétique propres du milieu, qui sont des charges ou des courants. Épistémologiquement, se reproduit le modèle d'interaction d'un champ avec une source, de façon similaire avec laquelle se pose l'interaction gravitationnelle ou électromagnétique dans le vide. Même si c'est le point commun entre ces deux procédures, il faut cependant noter les profondes différences initiales. En effet, la méthode de Charges Magnétiques Équivalentes est fondée, et est décrite de cette manière dans les travaux qui l'exposent ou l'utilisent, dans la puissance formelle de son analogie avec l'interaction électrique. Dans ce cas, d'un point de vue ontologique, son origine est encore plus éloignée que celle de la méthode des Courants liés. De même, le mécanisme de cette interaction avec un champ extérieur, la densité de la force, en analogie à la densité de force électrique située dans le cadre d'un champ électrique n'a pas de fondement épistémologique du moment que cette interaction n'est soutenue par aucun type d'argument phénoménologique. C'est donc une puissante méthode de calcul qui est également vérifiée à titre expérimental et qui peut être considérée, mais à un degré plus important, dans le domaine de la modélisation de nature technologique.

La méthode de Kelvin est basée sur l'extension du processus d'interaction d'un dipôle magnétique avec un champ externe. Étant différente des deux procédures précédentes, elle ne reproduit pas le modèle d'interaction champ-source. C'est donc un processus avec ses propres connotations épistémologiques.

Effectivement, les modèles de charge magnétique et courants magnétiques liés sont basés sur l'interaction du champ extérieur avec la divergence ou le rotationnel de l'aimantation du milieu, c'est à dire avec la variation spatiale des propriétés magnétiques du milieu. En revanche, la densité de force de Kelvin est en relation avec la variation spatiale du champ extérieur. Ainsi cette dernière procédure est lointaine de la modélisation classique d'interaction champ-source caractéristique d'un point de vue épistémologique classique des forces à distance.

En fin de compte, aucun des modèles développés à partir des différentes épistémologies, ne fournit d'éléments qui nous rapprochent d'une conception ontologique de la nature magnétique des milieux continus. Ils ont cependant en commun, le fait d'avoir été développés à partir d'un point de vue technologique. Cela

suffit à reproduire expérimentalement les résultats de la force magnétique totale exercée sur un corps plongé dans un champ extérieur, mais ne fournit aucune explication du mécanisme d'interaction. Par conséquent, depuis la mise en œuvre de ces procédures, on obtient des forces locales et surfaciques, différentes pour chaque méthode, sans avoir d'arguments permettant d'estimer le degré d'approximation par rapport aux valeurs réelles de ces densités de force.

La méthode classique de Maxwell permet de déterminer la force totale exercée sur un corps isolé. On l'obtient suite à la mise en œuvre de la densité de force de Lorentz, mais elle peut aussi être obtenue à partir d'autres procédures. Dans la méthode proposée dans le présent rapport, le tenseur des contraintes peut être obtenu dans n'importe quel milieu magnétique en appliquant le principe des Travaux Virtuels que ce soit pour la densité d'énergie ou de co-énergie. Donc, on obtient également le tenseur classique de Maxwell, mais dans un cas particulier. Il a également été constaté que l'expression de la densité de force de Lorentz peut être obtenue comme un cas particulier de la méthode proposée. Par conséquent, une première conclusion apparaît : la méthode du Tenseur Généralisé a été obtenue à partir d'une supposition épistémologique différente de modélisation de la force magnétique, et apparaît donc dans un cadre conceptuel plus large : l'énergie. En effet, le recours à la notion d'énergie a historiquement permis de développer des mécanismes de résolution plus simples des problèmes d'interaction, qui sont pénalisés par une forte difficulté de traitement due au modèle de la force d'interaction. C'est aussi une grandeur commune à toutes les interactions, quelle que soit leur nature. Le modèle de tenseur généralisé n'est basé sur aucune supposition ou mécanisme explicatif de l'interaction magnétique, mais s'appuie sur un principe plus général: la variation de l'énergie comme une quantification de l'interaction, renonçant ainsi, en principe, à toute prétention ontologique, car il nécessite un modèle explicite de milieu continu magnétique. À cet égard, du point de vue ontologique, cette méthode ne fournit pas d'amélioration par rapport aux méthodes traditionnelles, mais en diffère cependant fortement par delà sa connotation épistémologique.

Effectivement, la méthode du tenseur généralisée n'a pas été obtenue à partir d'une modélisation de caractère technologique, mais à été fondée sur un principe puissant de la modélisation de la réalité physique, comme c'est le cas des Travaux Virtuels. Ce modèle est encadré dans le contexte plus large de la physique théorique, car il constitue en fait une application de ses procédures générales dans un contexte physique particulier. Pour cette même raison, c'est une procédure plus générale que les procédures classiques, car il est démontré que son application, dans des cas particuliers, reproduit les expressions classiques fournis soit par les méthodes de Sources Équivalentes, soit par la méthode de Kelvin. Le chemin inverse par contre semble impossible.

Il est évident que l'axiomatisation inhérente à une théorie scientifique ne peut être construite qu'après un long processus d'analyse des résultats empiriques, ou de faible niveau, dans une grande variété de situations ou de configurations particulières. Mais c'est précisément le fait, de faire abstraction des résultats spécifiques vers des résultats généraux, qui soustrait la puissance explicative ou ontologique à la théorie finale quand elle tend à s'appliquer à une situation ou configuration particulière. Les exemples de ce dernier fait sont nombreux et bien connus. La loi qui lie les contraintes mécaniques et les déformations peut être déduite à partir d'un formalisme thermodynamique. Mais une grande partie des informations expérimentales propre à la matière est perdue lorsque l'on renonce à l'application de la loi de Hooke, qui est obtenue par la méthode inductive. Elle représente le comportement élastique du milieu. Par conséquent, dans ce contexte, la formulation présentée dans ce rapport fournit un argument clair: l'obtention des forces

sur un milieu magnétique ne nécessite pas une explication ontologique propre de son comportement. Cela ouvre la voie à l'élaboration de modèles unifiés des interactions de différente nature, qui ne nécessiteraient pas non plus, d'exigences théoriques spécifiques. Ainsi, dans le cas concernant directement le sujet du présent rapport de recherche, l'interaction couplée magnéto-élastique ne nécessite pas une connaissance explicite des mécanismes provoquant une déformation élastique ou plastique due à des contraintes mécaniques. Ces mécanismes exigeraient seulement, dans le cas d'une interaction magnétique, l'expression de la densité d'énergie mécanique, comme la contraction du tenseur de contraintes et de déformations.

Deux considérations épistémologiques en outre peuvent être établies en relation à la procédure décrit dans ce travail. En premier lieu, le tenseur des contraintes magnétiques exposé dépend de la densité d'énergie ou de co-énergie de la matière. C'est contraire à d'autres formulations de contraintes magnétiques proposées dans la littérature. En fait, lorsque l'on a déduit des expressions classiques à partir du formalisme générique, on a admis une valeur spécifique de la densité d'énergie : zéro en l'absence de champs. La déduction d'un tenseur générale de forces dans un milieu quelconque, qui dépend explicitement de la densité d'énergie, permet une approche plus expérimentale à la situation spécifique de chaque milieu et chaque configuration magnétique. C'est aussi une constatation supplémentaire de la capacité déductive d'un contexte théorique général, et cela a été utilisé comme base de la méthodologie proposée.

Pour finir, cette procédure a été appliquée pour le calcul des forces sur des milieux en contact. Une réalité est devenue évidente à ce stade: il est impossible d'obtenir l'expression d'une telle force sans l'admission d'une hypothèse supplémentaire: il est nécessaire de connaître la valeur des forces avec une faible séparation pour obtenir la continuité de la valeur de la force de contact. On montre de cette manière que la méthode proposée est insuffisante pour décrire ce processus, qui aurait toujours besoin d'hypothèses supplémentaires. Pour ce travail, nous avons à nouveau choisi ne pas introduire d'hypothèse explicative spécifique pour des milieux en contact. Pour ce faire on admet que les valeurs doivent s'adapter à la validation expérimentale de la continuité des forces.

3.5 Conclusions

Suite au développement des points précédents, on peut tirer les conclusions suivantes :

- L'application du principe des Travaux Virtuels pour les densités volumiques d'énergie libre magnétique et d'enthalpie libre magnétique (ou co-énergie) conduit à un même tenseur des contraintes magnétostatiques, dont l'expression est donnée par (3.42), où $G(\mathbf{H})$ est la densité de co-énergie au point considéré. Le tenseur obtenu est symétrique.
- Le tenseur (3.42) obtenu reproduit le tenseur classique de Maxwell lorsque l'on considère le vide comme le milieu magnétique (3.58).
- L'obtention d'un tenseur unique pour tout milieu matériel permet la définition d'une procédure dans laquelle les forces magnétiques peuvent être calculées sur un corps **2** quand il est entouré d'un milieu hétérogène magnétique **1**. La force magnétique obtenue par ce procédé se décompose en une intégrale de volume et une autre de surface, comme indiqué dans l'expression (3.52).

- Dans l'expression (3.52), on n'a considéré aucune condition aux limites, parce qu'elle est valable dans toutes les configurations de milieu magnétique entourant les corps. L'application de l'expression (3.52) nous permet de trouver la force magnétique totale exercée sur des corps en contact. La force générale (3.52) peut être exprimée en termes de densités volumiques de force correspondant aux méthodes des Charges et des Courants Équivalents (3.97). Cette expression constitue une généralisation des méthodes des Charges Équivalentes et des Courants Équivalents pour des corps non entourés par le vide.
- L'application du terme (3.97) dans le cas où le corps est entouré par le vide entraîne les relations (3.143), (3.138) (3.139), reproduisant ainsi les expressions classiques de calcul des forces utilisant les méthodes des Courants Équivalents et des Charges Équivalentes.
- La force générale (3.139) s'exprime en fonction des termes de la densité volumétrique de Kelvin (3.163) qui est une généralisation de la procédure de Kelvin pour les corps qui ne sont pas entourés par le vide.
- L'application du terme (3.163) à un corps entouré par le vide conduit à l'expression (3.165), reproduisant ainsi l'expression classique du calcul de forces utilisant la Méthode de Kelvin.

CHAPITRE 4 : CARACTÉRISATION NUMÉRIQUE DE L'APPROCHE « TENSORIELLE UNIFIÉE »

Dans les sections précédentes on a montré l'équivalence théorique entre la Méthode du Tenseur Général proposé dans ce rapport et la Méthode des Courants Équivalents, la Méthode des Charges Équivalentes et la Méthode de Kelvin lorsqu'elles sont appliquées à des corps entourés par le vide.

Pour confirmer numériquement ce résultat, on a effectué la simulation d'un système assez simple, mais significatif, au moyen de l'outil commercial Éléments Finis FLUX 3D.

Le système simulé est composé de deux parallélépipèdes l'un en face de l'autre. Il a été considéré que ces parallélépipèdes sont dans un cas, constitué par deux aimants, et dans l'autre par un fer doux et un aimant.

La simulation magnétique nous permet de connaître les valeurs de force au moyen de la Méthode des Travaux Virtuels, qui est implantée dans le progiciel commercial FLUX 3D. Il nous permet aussi d'obtenir les valeurs du champ magnétique et de l'induction magnétique nécessaires pour le calcul des forces avec chacune des différentes méthodes classiques et de les comparer avec celles fournies par le nouveau tenseur.

Finalement, nous proposons une application du nouveau tenseur dans le cas de corps en contact, ce qui est impossible à effectuer avec les méthodes actuelles, car la condition nécessaire et indispensable est qu'ils soient totalement entourés par le vide.

4.1 Hypothèses des simulations numériques réalisées et outil numérique développé pour le calcul des forces magnétiques à partir des grandeurs magnétiques d'induction et de champ

Afin d'effectuer la vérification numériquement, deux dispositifs ont vu le jour:

- l'une basée sur une interaction magnétique de type champ produit et induit,
- et l'autre basée sur une interaction magnétique de type deux champs produits.

La géométrie qu'on a utilisée dans tous les cas est la même: deux parallélépipèdes, de dimensions identiques de $50 \times 50 \times 50 \text{ mm}^3$, et la distance relative entre les deux peut varier.

Dans la figure 4.1, on peut observer le dispositif considéré. Le parallélépipède de gauche représente un aimant, et celui de droite représente, d'une part l'autre aimant permanent et d'autre part, une pièce composée de fer doux possédant une caractéristique magnétique linéaire.

Le matériau pour le dispositif avec un champ produit est un aimant avec une caractéristique magnétique linéaire, avec une magnétisation permanente $m_p = 1,2 \text{ T}$.

Dans tous les cas où il intervient, le fer doux a une perméabilité magnétique relative constante de valeur $\mu_r = 1000$.

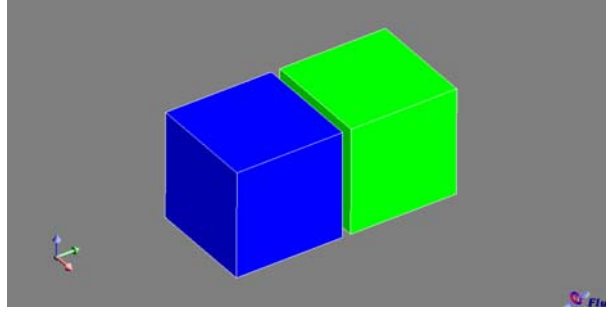


Figure 4.1. Système magnétique composé de deux pièces cubiques (le fer en vert, et l'aimant en bleu)

Pour comparer les différentes formulations, on a effectué des simulations, en utilisant l'application magnétostatique 3D, employant un calcul paramétrique en fonction de la position des deux corps, et ainsi, obtenir les valeurs de la force ainsi que celle du champ magnétique et de l'induction magnétique en fonction de la distance relative des deux pièces.

Une fois ces valeurs écrites sous la forme d'un tableau, il a été nécessaire de développer un outil de calcul qui nous a permis de traiter ces valeurs, de manière semi-automatique, pour obtenir les valeurs des forces surfaciques et volumétriques selon les trois axes de l'espace.

Cet outil a été développé dans le but de calculer, d'une manière indépendante que celle de l'outil de calcul par Éléments Finis, les valeurs des forces, selon les expressions des différentes méthodes, car il est nécessaire d'intégrer et de différencier les valeurs du champ magnétique et d'induction magnétique, obtenues par le biais de la simulation numérique.

Dans le cas particulier de la Méthode des Travaux Virtuels, cela n'a pas été nécessaire puisque l'outil commercial FLUX 3D utilise cette méthode pour fournir les valeurs des forces.

Pour extraire les valeurs du champ magnétique et d'induction magnétique, il est nécessaire de créer une grille, uniforme, de sorte qu'elle coïncide avec la position des nœuds du maillage. De cette façon, nous ne sommes pas sûrs que la valeur obtenue corresponde à une valeur calculée (et non pas à une valeur interpolée).

4.2 Étude comparative des méthodes classiques et du nouveau tenseur sur un dispositif magnétique entouré par le vide

Nous avons comparé les résultats fournies par les Méthodes du Tenseur Générale, de Kelvin, des Courants Équivalents et des Charges Équivalentes avec la valeur donnée par le logiciel FLUX 3D qui calcule la valeur de la force totale en se basant sur le principe des Travaux Virtuels. Il est à noter qu'il existe une excellente concordance entre toutes ces procédures, comme le démontrent les résultats présentés ci-après.

4.2.1 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanent et non permanent

Dans ce cas, nous avons simulé le comportement d'un aimant permanent avec un morceau de fer doux. La direction de magnétisation de l'aimant permanent coïncide avec la direction de l'axe Y.

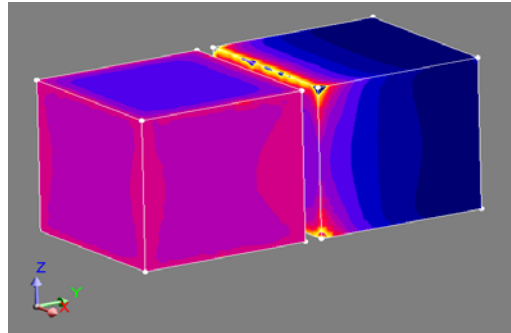


Figure 4.2 : distribution de l'induction dans le dispositif (aimant-fer doux)

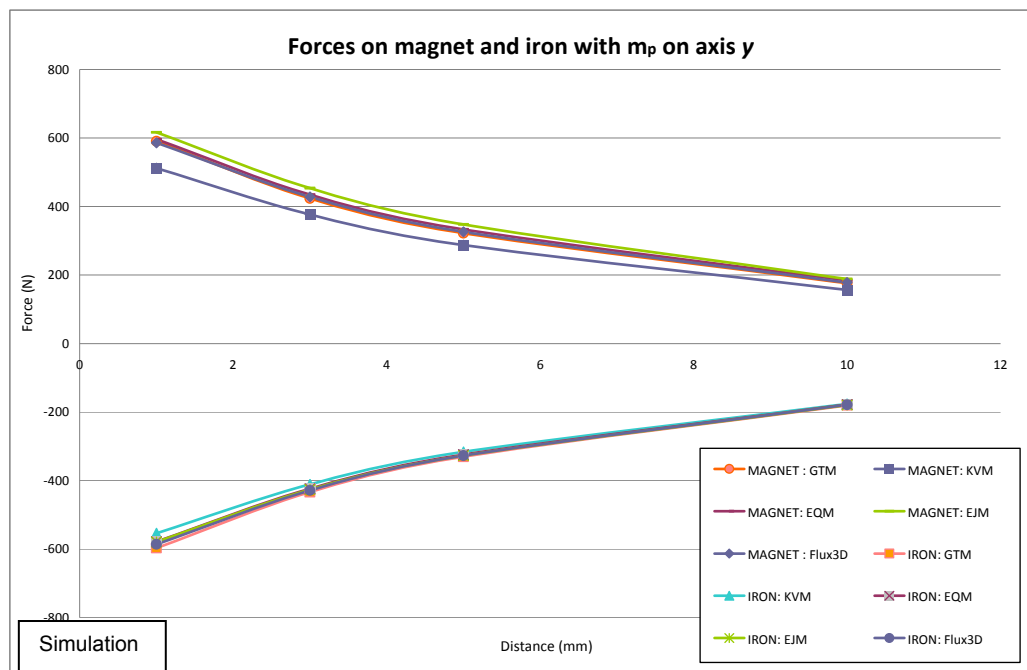


Figure 4.3: Forces d'attraction entre l'aimant et le fer avec une aimantation permanente suivant l'axe Y, en fonction de la distance

4.2.2 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanents

Dans ce cas, le dispositif simulé est constitué de deux aimants permanents à aimantation opposée, orientée selon l'axe Y.

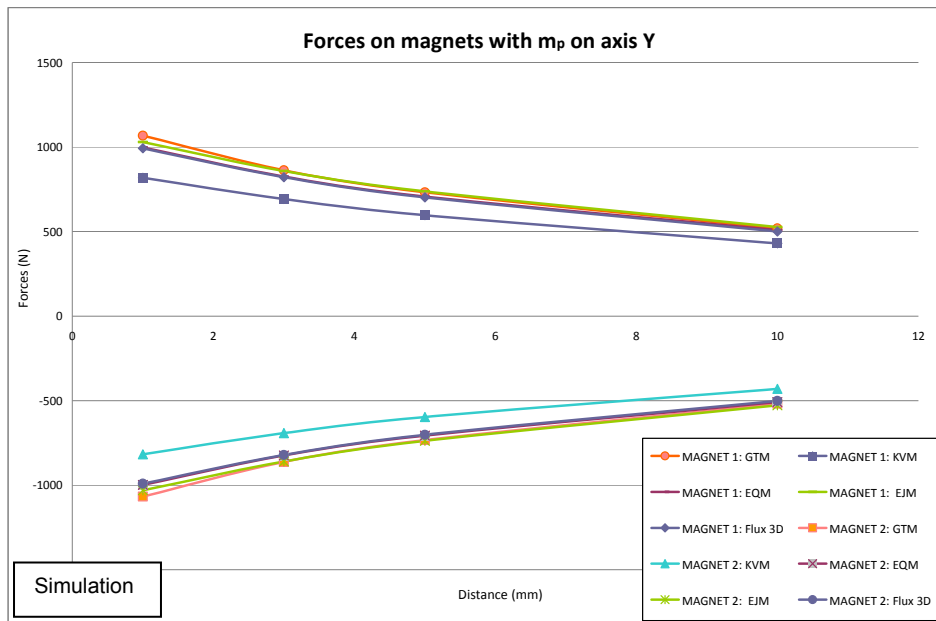


Figure 4.4: Forces d'attraction (axe Y) de deux aimants à aimantation suivant l'axe Y, en fonction de la distance

4.3 Étude comparative des méthodes classiques et du nouveau tenseur dans un dispositif magnétique avec des milieux continus en contact

Comme nous l'avons vu antérieurement, aucune des procédures telles que la Méthode de Kelvin, la Méthode des Courants Équivalents et la Méthode des Charges Équivalentes ne permettent le calcul des forces magnétiques entre deux corps en contact, puisque leurs expressions correspondantes de calcul (3.138) (3.139) et (3.171) ont été obtenues seulement dans le cas où les corps se trouvent entourés par le vide.

Il n'est pas non plus possible d'obtenir ces forces par la mise en œuvre de la Méthode des Travaux Virtuels. Comme l'outil commercial par Éléments Finis Flux 3D utilise la méthode des Travaux Virtuels, les résultats fournis dans ce cas par le logiciel n'ont aucune signification physique.

4.3.1 Adaptation du tenseur pour le calcul des forces d'origine magnétique sur des corps en contact

La procédure de la Méthode du Tenseur Générale décrit dans ce document permet le calcul des forces de corps en contact. Pour illustrer cette méthode, il faut considérer que le système est composé de deux corps magnétiques, **2** et **3**, situés sur un autre milieu magnétique quelconque **1**.

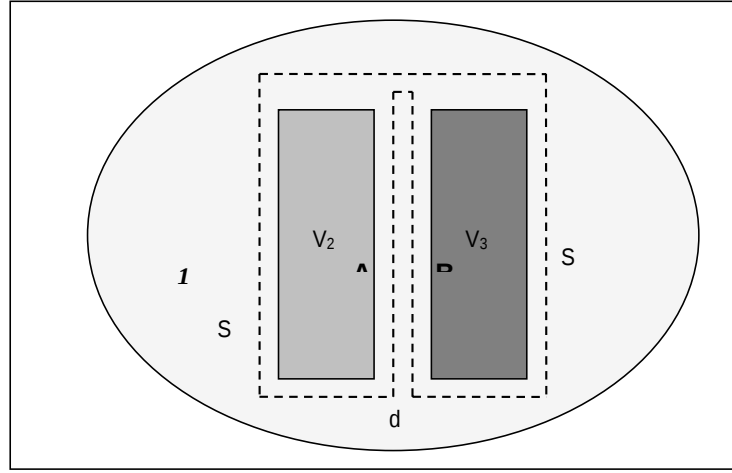


Figure 4.5: Procédure pour calculer les forces de contact

Pour une présentation plus commode, l'expression (3.52) peut s'écrire schématiquement ainsi :

$$\mathbf{F}^{(i)} = \int_{V_i} \vec{\nabla}[T_i] dV + \oint_{S_i} ([T_j] - [T_i]) \mathbf{n} dS_i \quad (4.1)$$

dans laquelle, i est le milieu sur lequel la force est calculée lorsque qu'il est entouré par le milieu j . Quand on réalise l'intégrale du tenseur du milieu **1** sur la surface en pointillés qui entoure entièrement le système des corps **2** et **3**, on a une force totale nulle, puisque le système formé par ces deux corps est isolé.

$$\mathbf{F}^{(1+2)} = \oint_S [T_1] \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Quand l'on approche la surface arbitraire de la périphérie des corps, l'expression (4.2) devient, selon (4.1), l'expression suivante, où sont distinguées les zones **A** et **B**, qui sont les superficies en contact lorsque la distance d est nulle, de façon à ce que les intégrales de surface se décomposent, comme indiqué dans l'expression (4.3) suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{S_{2-A,1}} ([T_1] - [T_2]) \mathbf{n}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla}[T_2] dV_2 + \int_{S_{3-B,1}} ([T_1] - [T_3]) \mathbf{n}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla}[T_3] dV_3 + \\ & + \int_{S_{A,1}} ([T_1] - [T_2]) \mathbf{n}_2 dS + \int_{S_{3,1}} ([T_1] - [T_3]) \mathbf{n}_3 dS_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ce résultat se vérifie numériquement dans l'application de l'expression (4.1) du système décrit dans la partie précédente et conduit à ce que les forces totales sur l'aimant et le fer soient de valeur absolue égale et de sens différent.

Considérons maintenant la distance d tendant vers zéro. On peut prendre la limite de l'expression (4.3) qui restera nulle dans chacune des positions jusqu'à ce que $d = 0$:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \begin{aligned} & \int_{S_{2-A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{h}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla} [T_2(d)] dV_2 + \int_{S_{3-B,1}} ([T_1(d)] - [T_3(d)]) \mathbf{h}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla} [T_3(d)] dV_3 + \\ & + \int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{h}_2 dS + \int_{S_{3,1}} ([T_1(d)] - [T_3(d)]) \mathbf{h}_3 dS \end{aligned} \right\} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

Les quatre premiers termes de l'égalité (4.4) converge vers une valeur correspondante pour $d = 0$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} & \int_{S_{2-A,1}} ([T_1(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{h}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla} [T_2(0)] dV_2 + \int_{S_{3-B,1}} ([T_1(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{h}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla} [T_3(0)] dV_3 \\ & + \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{h}_2 dS + \int_{S_{3,1}} ([T_1(d)] - [T_3(d)]) \mathbf{h}_3 dS \right\} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La limite des deux derniers termes ne peut être calculée par continuité, puisque pour $d = 0$, il n'existe aucun milieu **1**. Selon l'expression (4.5), les forces sur les milieux **2** et **3** seraient, respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \int_{S_{2-A,1}} ([T_1(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{h}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla} [T_2(0)] dV_2 + \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{h}_2 dS \right\} \\ \mathbf{F}_3 &= \int_{S_{2-B,1}} ([T_1(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{h}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla} [T_3(0)] dV_3 + \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_{B,1}} ([T_1(d)] - [T_3(d)]) \mathbf{h}_3 dS \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

En outre, la suite des termes de l'expression (4.5) doivent, pour une valeur de $d = 0$, converger vers l'expression résultante de l'élimination de la valeur du tenseur dans le milieu **1**, puisque pour des valeurs de d suffisamment proche de zéro, la différence entre les tenseurs du milieu **1** aux points des surfaces **A** et **B** doivent également être proche de zéro. Par conséquent, la relation suivante doit être vérifiée :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_{A,1}} [T_1(d)] \mathbf{h}_2 dS + \int_{S_{B,1}} [T_1(d)] \mathbf{h}_3 dS \right\} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

Nous penserons également à satisfaire les équations de continuité :

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} [T_2(d)] &= [T_2(0)] \\ \lim_{d \rightarrow 0} [T_3(d)] &= [T_3(0)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

A partir de (4.7) et (4.8), l'équation (4.5) s'exprime comme :

$$\begin{aligned} & \int_{S_{2-A,1}} ([T_1(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{h}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla} [T_2(0)] dV_2 + \int_{S_{3-B,1}} ([T_1(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{h}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla} [T_3(0)] dV_3 \\ & + \int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{h}_2 dS = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ou :

$$\begin{aligned}
& \int_{S_{2-A,1}} ([T_1(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla} [T_2(0)] dV_2 + \int_{S_{3-B,1}} ([T_1(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{n}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla} [T_3(0)] dV_3 \\
& + \int_{S_{AB,2}} ([T_2(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{n}_3 dS = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

Pour trouver une forme d'équations (4.9) (4.10) semblable à celle de l'équation (4.5), il est commode de l'exprimer comme :

$$\begin{aligned}
& \int_{S_{2-A,1}} ([T_1(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla} [T_2(0)] dV_2 + \int_{S_{3-B,1}} ([T_1(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{n}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla} [T_3(0)] dV_3 \\
& + \alpha \int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS + (1 - \alpha) \int_{S_{AB,2}} ([T_2(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{n}_3 dS = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

Où l'on devra prendre en compte la relation :

$$\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_3 \tag{4.12}$$

Ainsi, les forces agissant sur le corps **2** et **3** sont désormais :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2 &= \int_{S_{2-A,1}} ([T_1(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS + \int_{V_2} \vec{\nabla} [T_2(0)] dV_2 + \alpha \int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS \\
\mathbf{F}_3 &= \int_{S_{2-B,1}} ([T_1(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{n}_3 dS + \int_{V_3} \vec{\nabla} [T_3(0)] dV_3 + (1 - \alpha) \int_{S_{AB,2}} ([T_2(0)] - [T_3(0)]) \mathbf{n}_3 dS
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

Dans ces expressions, la force sur la surface commune AB est désormais exprimée seulement en fonction des valeurs des tenseurs des milieux qui séparent cette surface. C'est pourquoi nous avons une meilleure cohérence avec la formule tensorielle de ce document.

Il reste, cependant, à déterminer le paramètre α représentant la mesure dans laquelle la différence tensorielle des forces sur la surface de contact est répartie sur chacun des corps. La valeur du paramètre α peut être seulement déterminée d'une manière générale, en imposant la condition de continuité avec la situation expérimentale propre de la séparation des deux corps.

En effet, la force exercée sur le corps **2**, par exemple, lors du contact avec le corps **3**, ne peut pas montrer une discontinuité avec la force exprimée lorsque commence la séparation avec le corps **3** et le corps **2** est, alors, complètement entourée par le milieu **1**. Il nous faut donc admettre l'équation de continuité calculée en comparant des équations (4.6) et (4.13), à savoir :

$$\alpha \int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS = \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{n}_2 dS \right\} \tag{4.14}$$

En tenant compte de l'équation de continuité (4.8),

$$\alpha \int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS = \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS \right\} \quad (4.15)$$

l'équation (4.15) détermine le paramètre α , qui exprime, grâce à cette équation, le rapport entre les discontinuités à la surface du corps entre les tenseurs intérieur et extérieur, quand les deux corps sont infiniment proches et quand ils sont en contact. Dans la pratique, on obtiendra des valeurs très proches de la force sur chaque corps en réalisant une analyse magnétique d'une configuration supplémentaire. Dans cette configuration supplémentaire les deux corps sont séparés par la plus petite distance possible pour déterminer les valeurs du tenseur dans le milieu 1 qui joue le rôle de séparateur. Dans le cas général, ce milieu sera le vide et dans ce cas, le paramètre α , pour des propriétés magnétiques données des deux corps, ne dépendra que de la géométrie des deux corps.

4.3.2 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanent et non permanent

Le calcul des forces se trouve soumis aux corps 2 et 3. Quand ils sont en contact, il est réalisé à partir des valeurs de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$, obtenues par une simulation par éléments finis, lorsque les deux corps se trouvent en contact, et en suivant les hypothèses décrites au paragraphe 4.2 de ce chapitre.

Avec ces valeurs de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$, on a obtenu la valeur numérique de l'expression $\int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS$ et la valeur de l'expression $\int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{n}_2 dS$ pour des valeurs de $d = 1$ mm et de $d = 2$ mm. Les résultats de la simulation sont présentés dans le Tableau 4.2. Dans celui-ci, les surfaces de contact sont indiquées avec le chiffre 3 pour le cube de gauche et avec le 4 pour le parallélépipède de droite.

		Aimant Permanent				Fer doux			
		Force de la Integrale Volumetrique (N)	Force de la Integrale superficielle (N)		Force Totale (N)	Force de la Integrale Volumetrique (N)	Force de la Integrale superficielle (N)		Force Totale (N)
			1,2,4,5 et 6	3			1,2,3,5 et 6	4	
d = 0 mm	selon X axe	-0,05	2,14	0,00		0,00	0,65	0,00	
	selon Y axe	-335,90	-947,94	1270,70		0,00	11,55	1270,70	
	selon Z axe	-0,13	0,08	0,00		0,00	-0,35	0,00	
d = 1 mm	selon X axe	0,00	0,08	0,09	0,17	0,00	0,00	0,08	0,08
	selon Y axe	-277,87	-981,96	1850,03	590,20	0,00	16,00	-612,49	-596,49
	selon Z axe	0,01	1,48	-0,03	1,46	0,00	0,26	-0,05	0,21
d = 3 mm	selon X axe	-0,16	-0,50	0,04	-0,62	0,00	0,14	0,00	0,14
	selon Y axe	-203,00	-1040,28	1666,84	423,56	0,00	15,96	-449,42	-433,46
	selon Z axe	-0,10	-0,08	-0,21	-0,39	0,00	0,04	-0,02	0,02

Tableau 4.2 : résultats de forces volumétriques et surfaciques, selon les axes X, Y et Z, dans le cas d'un aimant et d'une pièce en fer doux

Il est à noter que la valeur $\int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS$ est, pour le cas aimant-fer égale à 1270,7 N suivant la direction de l'axe des ordonnées y. Cependant, la valeur pour $d = 1$ mm de l'expression $\int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{n}_2 dS$ est de 1850.03 N suivant la direction de l'axe

des ordonnées y. Notons aussi également que la variation de cette valeur avec la valeur directement précédente de $d = 2$ mm est important (1850,03 à 1666,84 = 183,19 N). Compte tenu de cette modification, on ne peut alors pas obtenir une valeur suffisamment

approximative pour $d = 0$ à partir de ces résultats. Dans le cadre de ce travail et à des fins seulement illustratives, on peut estimer qu'au moins la valeur minimale de référence pour la distance $d = 0$ pourrait être fixé à une valeur approchée de 2050 N (soit, 200 N de plus que la valeur de $d = 1$ mm). Selon cette estimation, la force totale exercée sur l'aimant est égal à 766,16 N et le paramètre α prend une valeur égale à $\alpha \cong 2050/1270 = 1,6$.

Pour le fer, ce même coefficient prend la valeur $1 - \alpha \cong -812/1270 = -0,6$, admettant également une augmentation minimale de 200 N de la valeur pour $d = 1$. Sur la Figure 4.6, on a représenté la variation des forces en fonction de la distance considérant cette valeur limite selon la procédure de Méthode du Tenseur Générale.

Les résultats de cette table, ainsi que ceux précédemment obtenus pour des formulations différentes, dans différentes positions, sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

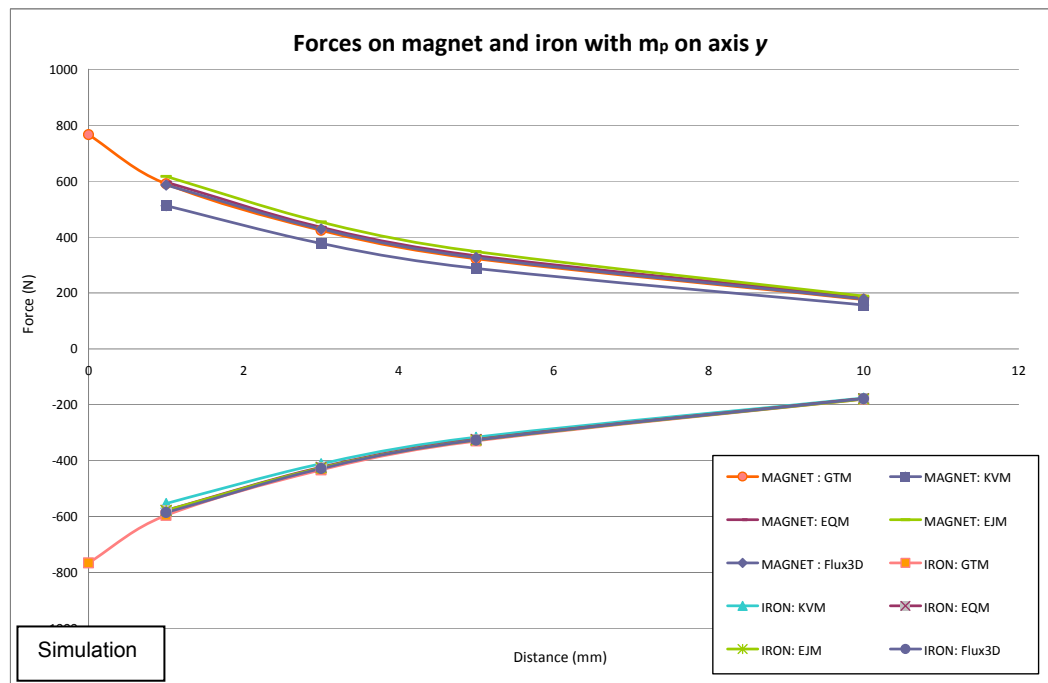


Figure 4.7: Forces d'attraction (axe Y) sur l'aimant et le fer à aimantation suivant l'axe des abscisses X, en fonction de la distance

4.3.3 Application à deux milieux continus soumis à des champs magnétiques permanents

Enfin, nous avons obtenu les valeurs numériques correspondant aux deux aimants cubiques de 50 mm de côté avec une aimantation permanente $m_p = 1,2$ T dans la direction de l'axe y pour chacun d'eux. Les résultats sont présentés dans la Figure 5.

À partir des résultats des forces obtenus entre deux aimants à même aimantation, on peut voir que la valeur que prend l'expression $\int_{S_{AB,3}} ([T_3(0)] - [T_2(0)]) \mathbf{n}_2 dS$ dans ce cas est égal à zéro, puisque les deux milieux ont les mêmes caractéristiques magnétiques. Cependant, à une distance $d = 1$ mm, la force sur la surface de contact est de

$\int_{S_{A,1}} ([T_1(d)] - [T_2(d)]) \mathbf{n}_2 dS = 2324 \mathbf{n}_y \text{ N}$, tandis que cette même donnée, pour $d = 2\text{mm}$ est

égale en $2126 \mathbf{n}_y \text{ N}$. Une estimation similaire pour le cas aimant-fer nous donnerait une valeur minimale de la force sur la surface de contact de $2570 \mathbf{n}_y \text{ N}$. Les résultats de cette approche sont présentés dans la figure 7.

		Aimant Permanent 1				Aimant Permanent 2			
		Force de la Integrale Volumetrique (N)	Force de la Integrale superficielle (N)	Force Totale (N)		Force de la Integrale Volumetrique (N)	Force de la Integrale superficielle (N)	Force Totale (N)	
			1,2,4,5 et 6	3			1,2,3,5 et 6	4	
d = 0 mm	selon X axe	-0,05	1,66	0,00		-0,02	0,66	0,00	
	selon Y axe	-500,20	-814,35	0,00		500,29	815,63	0,00	
	selon Z axe	-0,07	-0,12	0,00		0,00	0,13	0,00	
d = 1 mm	selon X axe	0,00	0,17	0,05	0,22	0,00	0,13	-0,06	-0,42
	selon Y axe	-454,11	-862,48	2324,19	1007,60	454,08	862,80	-2324,23	-1007,35
	selon Z axe	0,00	1,41	0,00	1,40	0,00	-0,18	0,05	-0,13
d = 3 mm	selon X axe	-0,16	-0,68	0,00	-0,84	0,00	-0,22	0,00	-0,22
	selon Y axe	-381,92	-925,47	2125,90	818,51	382,13	925,90	-2125,89	-817,86
	selon Z axe	-0,09	-0,13	0,00	-0,22	0,00	0,00	-0,02	-0,02

Tableau 4.3: Résultats des forces volumétriques et surfaciques, selon les axes X, Y et Z, dans le cas de deux aimants

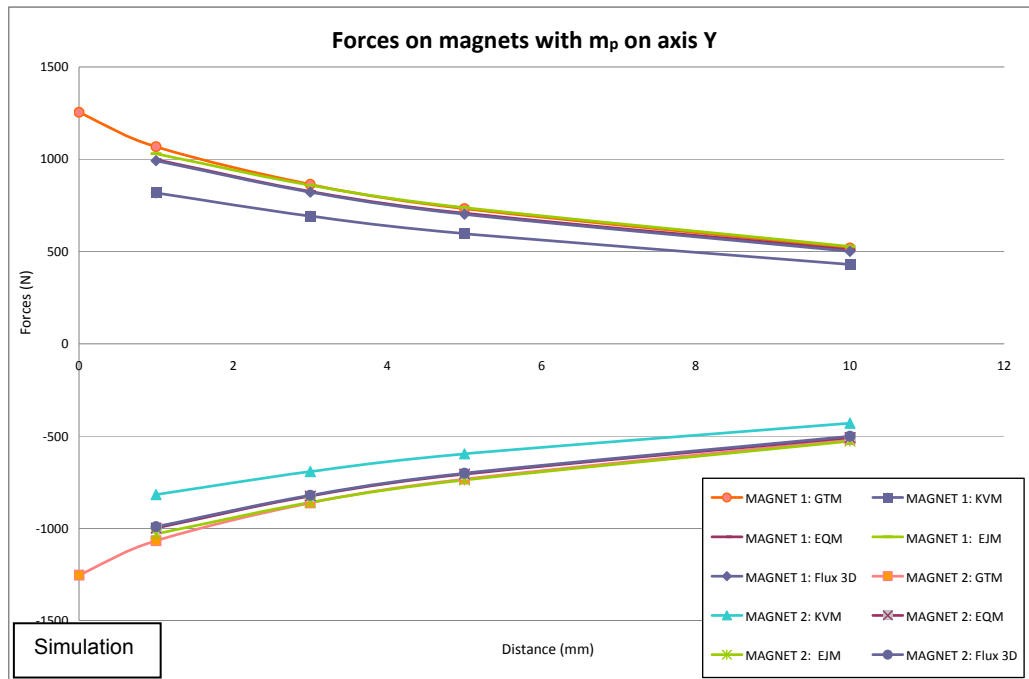


Figure 4.8: Forces d'attraction (axe Y) sur l'aimant et le fer à aimantation suivant l'axe des abscisses X, en fonction de la distance

De toute évidence, à partir d'une situation dans laquelle la force résultante sur la surface de contact entre les deux aimants à même aimantation est égale à zéro, elle n'a pas de sens pour analyser la valeur prise par le paramètre α dans ce cas. Toutefois, il s'ouvre ici un nouveau champ d'application de cette méthode de calcul de la tension interne d'un matériau magnétique. Effectivement, on pourrait induire l'hypothèse que le tenseur des contraintes mécaniques en un point donné du milieu magnétique **2** entourée d'un milieu magnétique **1** vient d'être noté:

$$[T^{(m)}] = \lim_{d \rightarrow 0} ([T_1(d)] - [T_2(0)]) \quad (4.16)$$

où les tenseurs $[T_1], [T_2]$ sont les tenseurs des contraintes magnétiques calculés en un point donné et $[T^{(m)}]$ le tenseur des contraintes mécaniques en ce même point.

4.5 Conclusions

On a conçu, à partir de ce formalisme tensoriel, une méthodologie pour le calcul de forces sur des corps en contact, fondée sur la continuité des forces entre ces corps lorsque de cette position de contact, ils se séparent. On a déterminé la procédure pour laquelle la force qui apparaît sur la surface de contact entre les deux corps se décompose en forces s'exerçant sur chacun d'eux. Pour finir, l'application de cette procédure à des corps de mêmes propriétés magnétiques peut être utilisée pour calculer le tenseur des contraintes mécaniques dans tout milieu. Tous les résultats présentés ont été reproduits numériquement à l'aide du logiciel FLUX3D. Les résultats exposés dans ce document ouvrent, sur, les trois champs d'études suivantes :

- Le calcul des forces de corps en contact dépend de l'obtention des résultats du tenseur dans le milieu de séparation. Il serait intéressant d'explorer la possibilité d'intégrer une procédure pour obtenir les valeurs des forces sans avoir à faire la simulation pour des corps ayant une séparation très petite. C'est à dire, en utilisant uniquement la simulation pour les corps en contact ou dans tous les cas, en utilisant les algorithmes déjà conçus pour obtenir les valeurs des champs aux points proches des surfaces. Comme cela se passe, par exemple, quand on applique la procédure du tenseur de Maxwell classique sur une surface de vide très fine qui entoure le corps.
- La formulation proposée permet aujourd'hui une étude comparative de l'influence des facteurs géométriques des corps en contact (volume, forme, surface de contact...) sur les forces de la surface de ces deux corps.
- On a établi une procédure pour déterminer la répartition des contraintes mécaniques internes dans un corps magnétique en équilibre. Il est nécessaire de réaliser des études numériques et de comparer ces résultats avec les simulations numériques des déformations et des tensions mécaniques dans les corps soumis à des efforts magnétostatiques.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce mémoire nous a été présenté un travail scientifique visant à proposer une approche tensorielle générale dans le domaine du génie électrique et plus particulièrement celui des dispositifs électromagnétiques, en améliorant et en enrichissant le potentiels d'outils de conception mettant en œuvre des calculs de flux électromagnétiques.

De l'ensemble des travaux qui viennent d'être présentés, on peut dégager, en guise de conclusion, trois idées fortes :

1.- Les besoins d'outils, pour une approche multiphysique de la conception de dispositifs électromagnétiques à hautes performances, ont été mis en évidence.

En effet, après avoir présenté un exposé de l'art dans le domaine des approches physiques, multiphysiques et interdisciplinaires pour la conception de dispositifs magnéto-mécaniques, une étude spécifique de conception d'un micromoteur rapide a été présentée.

2.- Par ailleurs, la nécessité d'une approche multiphysique pour la détermination des forces nous a menée, en visant des considérations de physique et de thermodynamique avancées, à l'obtention d'un tenseur d'unification ainsi qu'à la caractérisation numérique de ce tenseur avec des outils bien maîtrisés des sciences de l'ingénieur tels que les modélisations, simulations et en particulier la méthode des éléments finis.

3.- L'approche tensorielle unifiée, symétrique, nous permet de calculer surtout des forces en contact pour l'étude de corps quelconques entourés par un milieu magnétique arbitraire. Alors la proposition d'un tenseur symétrique des contraintes magnétostatiques prend toute sa justification

Toutes les méthodes –dites classiques- conduisent à la même valeur de la force totale –calculée avec le tenseur d'unification- qui s'exerce sur un corps magnétique. Mais cependant, on arrive à des valeurs différentes en ce qui concernent les distributions volumétriques et surfaciques de la force magnétostatique. Bien que toutes ces méthodes classiques ont été très largement acceptés, aucune ne résout le problème du calcul des forces sur des corps en contact ce qui est un atout pour le tenseur d'unification obtenu.

En guise de futures perspectives de recherche, plusieurs opérations scientifiques peuvent être dégagées :

1.- Compte tenu de la symétrie du tenseur d'unification, l'étude du couplage magnétoélastique dans différents milieux magnétiques est à développer, en intégrant les caractéristiques magnétoélastique relevant de l'approche expérimentale¹¹⁴.

2.- Compte tenu des résultats d'unification obtenus, il serait intéressant d'explorer judicieusement et prudemment des approches épistémologiques¹¹⁵ et ontologiques concernant la vérité des résultats mathématiques obtenus mais aussi sa correspondance avec la réalité externe.

¹¹⁴ BEN ISMAIL A., " Modélisation de la découpe des tôles magnétiques", Thèse de Doctoral de l'Université de Laval et Université de Compiègne, 2007

¹¹⁵ POLO L., "Théorie de la connaissance", Ed. Eunsa, 2005

Les travaux scientifiques présentés dans ce mémoire aboutissent ainsi non seulement sur une approche multiphysique, comme prévu pour l'étude initiale du micromoteur rapide, mais aussi sur une approche interdisciplinaire fondée sur des études épistémologiques et ontologiques de la « réalité » des dispositifs magnéto-mécaniques.

Références bibliographiques

AFEISSA H.S., « Qu'est-ce que le écologie ? », J. VRIN, PARIS, 2009

AGÜERO A. C., ACTIS F. A., "Finite element analysis of a synchronous permanent magnet micromotor through axisymmetric and transverse planar simulations", IEEE Transactions on Magnetics, Vol 34, No. 5, September 1998

AGÜERO A., MOYANO R., "Application of rare earth magnets in a micromotor". 1997 IEEE International Electric Machines and Drives Conference, Milwaukee, Wisconsin, États Unis, 1997, IEEE Catalog Number 97TH8282, pp. MB2-7.1.

AHN C.H., KIM Y.J., ALLEN M.G., "A Planar Variable Reluctance Magnetic Micromotor with fully integrated stator and coils," Journal. of Microelectromechanical Systems, Vol. 2 N° 4, 1993

ALHASSOUN, Y., « Etude et mise en œuvre de machines à aimantation induite fonctionnant à haute vitesse » Thèse de doctorat INP Toulouse. 2005

ARNOLD D. P., "Magnetic machines for microengine power generation". These de doctorat Georgia Institute of Technology. 2004

AUCEJO-GALINDO V., SANCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., "General Formulation for Magnetic Forces in Linear Materials and Permanent Magnets", IEEE Transaction on Magnetics. VOL. 44, NO. 9, SEPTEMBER 2008 pp.2134-2140

AZOUM K., "Contribution à la modélisation numérique de phénomènes magnéto-élastiques, étude de dispositif à base de matériaux magnétostrictifs", Thèse de doctorat, juillet 2005, Université Paris XI

BARRE O., « Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale » Thèse de Doctorat École Central de Lille et Université des Sciences et Technologies de Lille. 2003.

BARRE O., BROCHET P., "Discrimination of stress formulae induced by magnetic field experimentation and numerical simulation", Proceedings of the 6th international symposium on electric and magnetic field, EMF' 2003, Aachen, October 2003, pp. 277-278.

BARRE O., BROCHET P., HECQUET M., "Experimental Validation of Magnetic and Electric Local Force Formulations Associated to Energy Principle", IEEE Transaction on Magnetics, N° 42, Vol. 4, 2006, pp. 1475-1478

BECKER R., SAUTER F., "*Theorie der Elektrizität*", Teubner, 1973

BELMANS R., HAMEYER K., "Computer modeling techniques for microstructures", IEE half day Colloquium on Computer Modelling Techniques for Microstructures, pp. 2/1-2/3, May 1997.

BEN ISMAIL A., " Modélisation de la découpe des tôles magnétiques", Thèse de Doctoral de l'Université de Laval et Université de Compiègne, 2007

BOBBIO S., DELFINO F., ALOTTO P., GIRDINO P., MOLFINO P., "Equivalent Source Methods for the Numerical Evaluation of Magnetic Force with Extension to Non-Linear Materials", IEEE Transaction on Magnetics, 36, 4, July 2000, pp. 663-666

BOBBIO S., *Electrodynamics of Materials. Forces, Stresses and Energies in Solids and Fluids*, Academic Press, ISBN: 978-0-12-108260-4, 1999

BOSSAVIT A., "Forces in magnetostatics and their computation", Journal of Applied Physics, 67(9):5812-5814, 1990.

BOSSAVIT A., "On local computation of the electromagnetic force field in deformable bodies". International Journal of Applied Electromagnetics in Materials, 2, 333-343, Elsevier, 1992

CAMPBELL P., "Principles of a permanent-magnet axial-field DC machine". Proceedings of the IEE, Vol. 121, No. 12, pp. 1489-1494. 1974

CHABRERIE J.P., « Applications des supraconducteurs à l'électrotechnique », Revue de physique appliquée, tome 4, décembre 1969, pages 565 à 568

COUDERCHON G., « Alliages fer et fer cobalt. Propriétés magnétiques. Traité Génie électrique ». D2 130, 1994

COUDERCHON G., PORTESIL J.L., « les Alliages de fer et de nickel, ch. 1. Quelques propriétés des alliages FeNi riche en nickel », Lavoisier Tec et Doc., 1996

COUDERCHON G., Techniques de l'Ingénieur «alliages magnétiques doux», (M350-16), (M350-25), (M350-21)

COULOMB J.L., "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness", IEEE Transaction on Magnetics, vol. 16, pp. 2514-2519, Nov. 1983

COULOMB J.L., MEUNIER G., "Finite Element Implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", IEEE Transaction on Magnetics, 20, p. 1894, 1985

COULOMB J.L., SABONNADIÈRE J.C., « Éléments finis et CAO en électrotechnique », Hermes publishing, 1985

DARIO P., CARROZZA M. C., STEFANINI C., D'Attanasio S., "A mobile microrobot actuated by a new electromagnetic wobble micromotor", IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 3, No. 1, March 1998

DELFINO F., MANELLA A., MOLFINO P., ROSSI M., "Numerical Calculation of Total Force upon Permanent Magnets using Equivalent Sources Methods", *COMPEL*, 20, 2, pp. 431-447, 2001

DELFINO F., PROCORPIO R., ROSSI, M., "Evaluation of forces in magnetic materials by means of energy and co-energy methods", European Physical Journal – B, 25(1), Jan. 2002 pp. 31-38

DHATT G., TOUZOT G., « Une représentation de la méthode des Éléments Finis », Collection Université de Compiègne. Maloine, 1984

DUHAYON E., HENAU C., ALHASSOUN Y., NOGAREDE B., « Design of a high speed switched reluctance generator for aircraft applications », ICEM 2002, Brugge-Belgium.

DURAND E., « Magnétostatique » Masson Paris, 1968

ENGEL A., "Comment on "Invalidation of the Kelvin Force in Ferrofluids"", *Physical Review Letters*, 86, 21, p. 4978, 2001

ENGEL A., FRIEDERICHS R., "On the electromagnetic force on a polarizable body". *American Journal of Physics*, 70, 4, p. 428, 2002

FAN L.S., TAI Y.C., MULLER R.S., "IC Processed electrostatic micromotors". *Sensors and Actuators*, vol. 20, pp. 41-47, 1989.

FEYNMAN, R. physicien américain, prix Nobel de physique en 1965

FORMISANO A., MARTONE R. VILLONE F., "A Lagrangian approach to shape inverse electromagnetic problems", *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 32, N° 3, pp. 1314-1317, May 1996

FOURNET G., « Electromagnétisme à partir des équations locales ». Masson Paris 1985

FRECHETTE L.G., NAGLE S.F., GHODSSI R., UMANS S.D., SCHMIDT M.A., LANG J.H., "An electrostatic induction micromotor supported on gas lubricated bearings", *IEEE 14th International Micro Electro Mechanical Systems Conference, MEMS 2001, Interlaken, Switzerland, January 2001*

GILLES P.-A., DELAMARE J., CUGAT O., SCHANEN, J.-L., "Design of a permanent magnet planar synchronous micromotor", *Proceedings of the IAS, Roma, 2000, , Italy, October (2000)*, pp. 223–227.

GIROUD, « Applications des matériaux magnétiques durs ou doux: domaines, processus d'aimantation, conséquences pratiques », MPA 2001

GOEMANS P.A.F.M., KAMERBEEK E.M.H., KLIJN P.L.A.J., "Measurement of the pull-out torque of synchronous micromotors with P.M. rotor". *Sixth International Conference on Electrical Machines and Drives, 1993. (Conf. Publ. No. 376) Volume , Issue , 8-10 Sep 1993 Page(s):4 - 8*

GOLDSTEIN H., "Classical mechanics", Addison-Wesley, 1959

GUCKEL H. , CHRISTENSON T.R. , SKROBIS K.J. , JUNG T.S. , KLEIN J. , HARTOJO K.V. , WIDJAJA I., "A first functional current excited planar rotational magnetic micromotor". *IEEE Micro Electro Mechanical system, 1993*

HEMMI S., "Nodal forces due to the Maxwell's stress tensor in the FEM analysis", *Electromagnetic Force and Application, Elsevier Science Publishers, 1992*

HENNEBERGER G., SATTler Ph K., SHEN D., "Nature of the equivalent magnetizing current for the force calculation", IEEE Transaction on magnetic, Vol 28 N°2 March 1992, pp. 1068-1071

HENROTTE F., DELIEGE G., HAMEYER K., "The eggshell method for the computation of electromagnetic forces in 2D and 3D". EMF-2003, Aachen 6-9 October 2003

HENROTTE F., HAMEYER K., "Computation of electromagnetic force densities: Maxwell stress tensor vs virtual work principle", Journal of Computational and Applied Mathematics, June, 2003, Volume 168 Issue 1-2, pp. 235-243

HENROTTE F., HAMEYER K., "Electromagnetic force densities in a continuous medium". Mathematics in Industry. Berlin, SPRINGER SCIENCE + BUSINESS MEDIA, VOL 4, pages 214-222, 2004, ISSN: 1612-3956

HENROTTE F., SANDE H. V., DELIÉGE G., HAMEYER K., "Electromagnetic Force Density in a Ferromagnetic Material", IEEE Transaction on Magnetism, Vol 40, N°2, March 2004, pp. 553-556

HENROTTE F., SANDE H.V., DELIÉGE G., HAMEYER K., "Electromagnetic Force Density in a Ferromagnetic Material", IEEE Transaction on Magnetism, Vol 40, N°2, March 2004, pp. 553-556

JACKSON J.D., "Electrodinámica clásica". Editorial Alhambra, Madrid, 1966

JUFER M., « Circuits magnétiques », in Techniques de l'Ingénieur, vol. D 1 050-1, pp. 1-30.

JUFER M., « Électromécanique », vol. 9 of Traité d'Électricité. Lausanne, Suisse : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1995

JUNGREIS A. M., KELLEY A. W., "The axial air gap wobble motor-an appropriate topology for magnetic micromotors", IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, Part 1 (1995), pp. 781-788.

KABASHIMA T., KAWAHARA A., GOTO T., Force calculation using magnetizing currents. IEEE Transaction on Magnetism (Vol. 24 No.1 January 1988)

KIM D.H., LOWTHER D.A., SYKULSKI J.K., "Efficient force calculations based on continuum sensitivity analysis", IEEE Transaction on Magnetism, 41, p.1404, 2005

KIM D.H., LOWTHER D.A., SYKULSKI J.K., "Efficient global and local force calculations based on continuum sensitivity analysis", IEEE Transaction on Magnetism, 43, 4, p.1177-1180, 2007

LACHEISSERIE E. de, « Magnétisme - Tome 1 Fondements », Collection Grenoble Science 1999

LANDAU, L., physicien russe, prix Nobel de physique en 1962

LEE S.H., HE X., KIM D., ELBORAI S., CHOI H., PARK I., ZAHN M., "Evaluation of the mechanical deformation in incompressible linear and no linear magnetic materials using various electromagnetic force density methods", *Journal of Applied Physics*, Volume 97, Issue 10, pp. 10E108-10E108-3 (2005)

LIVERMORE C., FORTE A. R., LYSZCZARZ T., UMANS S. D. , AYON A. A., LANG J. H., "A high-power MEMS electric induction motor". IEEE Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 13, N° 3, June 2003, pp.465-471

MARINESCU M., "Numerical computation of torques in permanent magnet motors by maxwell stresses and energy method". IEEE Transaction on Magnetism (Vol 24 N°1 January 1988)

MATHIESON D., YANG S.J., FLOCKHART S., "Friction forces on the microscale: implications for micromotors". IEE Colloquium on Methods of Materials Measurement in Microengineering, Volume , Issue , 30 Nov 1995 Page(s):3/1 - 3/4

MAUGIN G.A., TRIMARCO C., "Elements of field theory in inhomogeneous and defective materials". G.Maugin, R.Kienzler, C.Tasso, ed., Configurational Mechanics of Materials (Cism International Centre for Mechanical Sciences, 427, pp.55-128, Springer Verlag, Wien, 2001

MAUGIN G.A., TRIMARCO C., "*Material mechanics of electromagnetic solids*", CISM Lecture Notes, 427, Springer Verlag, pp.129-171, 2000

MCREE S., WEBB J., LOWTHER D.A., "A tunable volume integration formulation for force calculation in finite-element based computational magnetostatics", IEEE Transaction on Magnetism, 24, p. 439, 1988

MEDEIROS L.H. DE, REYNE G., MEUNIER G., "A Unique Distribution of Forces in Permanent Magnets Using Scalar and Vector Potential Formulations". IEEE Transaction on Magnetism, Vol.36, pp.3345-3348, 2000

MEDEIROS L.H. DE, REYNE, MEUNIER G., "About the distribution of forces in permanent magnets", IEEE Transaction on Magnetism, vol. 35, N° 3, pp.1215-1218, May 1999.

MEDEIROS L.H. DE, REYNE, MEUNIER G., YONNET J.P., "Magnetic and mechanical modelling used to discuss magnetic energy in permanent magnets", Proceedings CEFC'98, Tucson, USA, 1998. v. 1. p. 411

MEHEREGANY M., NAGARKAR P., SENTURIA S.D., LANG J.H., "Operation of microfabricated and ordinary side-drive motors." IEEE Microelectromechanical Systems Workshop, pp 1-8, 1990

MORITA T., KUROSAWA M., HIGUCHI T., "An Ultrasonic Motor using Bending Cylindrical Transducer Based On PZT Thin Film," Proceedings IEEE Micromechanical Systems (MEMS), 1995

NIARCHOS D., "Magnetic MEMS: key issues and some applications". Sensors and Actuators A: Physical, Vol. 109, p. 166-173, 2003.

POLO L., "Théorie de la connaissance", Ed. Eunsa, 2005

PELOUX du, B. « Modélisation des actionneurs électromagnétiques par réseaux de réductances. Création d'un outil métier dédié au predimensionnement par optimisation ». Thèse de Doctorat à l'Université Joseph Fourier. 2006

Quebec Metal Powders, ATOMET-EM1, technical specifications, 2001

RAISIGEL H., « Micro-générateur magnétique planaire et microconvertisseur intégré ». Thèse de doctorat. INP Grenoble. 2006

RAISIGEL H., CUGAT O., DELAMARE J., « Permanent Magnet planar micro-generators”. Sensors and Actuators A: Physical, vol. 130–131, pp. 438–444, (2006)

RAISIGEL H., CUGAT O., DELAMARE J., WISS O., ROSTAING H., “Magnetic planar micro generator”, 13 International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems. Seoul Korea, June, 5-9, 2005

REN Z., BESBES M., BOUKHTACHE S., “Calculation of local magnetic forces in magnetised materials”. Proceeding of International Workshop on Electrical and Magnetic from Numerical Models to Industrial Applications, pp.64.1-64.6, Liège, 1992

REN Z., RAZEK A., “Local force computation in deformable bodies using edge element”, IEEE Transaction on Magnetism, vol.28, pp.1212-1215, 1992

REYNE G., DELAMARE J., CUGAT O., “Magnetic Micro Actuators (MAGMAS)”.

REYNE G., MEUNIER G., IMHOFF J.H., EUXIBIE E., “Magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials. Presentation and results on the theoretical, experimental and numerical approaches”. IEEE Transaction on magnetism (Vol 24 N°1 January 1988)

REYNE G., DELAMARE J., CUGAT O., ROSTAING H., “Novel magnetic micro-actuators and systems (MAGMAS) using permanent magnets”. 5th European Magnetic Sensors & Actuators Conference - EMSA 2004, Cardiff, UK, 4-6 July 2004. 2006, vol. 129, n°1-2, pp. 265-269

REYNE G., SABONNADIÈRE J.C., COULOMB J.L., BRISSONNEAU P. “A survey of the main aspects of magnetic forces and mechanical behaviour of ferromagnetic materials under magnetisation”, IEEE Transaction on Magnetism vol.23, N° 5, pp.3765-3767, Sept. 1987.

REYNE G., SABONNADIÈRE J.C., IMHOFF J.F., “Finite element modeling of electromagnetic force densities in DC machines”. IEEE Transaction on magnetism vol. 24, issue 6, November 1988 pp. 3171-3173

RICHTER. “Electrische Maschinen: Band IV ». 2. Auflage. Birkhäuser Verlag, Basel. p.440.

RIOUX C., Cours d'Électrotechnique, DEA de Génie Électrique de Paris, Paris VI, 1986

SANCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., AUCEJO-GALINDO V., “Magnetostatic Maxwell's tensors in magnetic media applying virtual works method from either energy or co-energy”. *Euro. Phys. J. A.P.* 35, p. 61, 2006

SÁNCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., AUCEJO-GALINDO V., GALAN N., CIUMBULEA G., “Theoretical elements for energetic models and physical design of electromechanical devices. Part I: Thermodynamic methods”, EDP Sciences, Revue Romaine des Sciences Techniques, vol 4, 2005. ISSN: 0035-4066

SÁNCHEZ-GRANDIA R., VIVES-FOS R., AUCEJO-GALINDO V., GALAN N., CIUMBULEA G., "Theoretical elements for energetic models and physical design of electromechanical devices. Part II: Variational methods on energy, co-energy and action", EDP Sciences, Revue Romaine des Sciences Techniques, vol 2, 2006. ISSN: 0035-4066

SENDOH M., YAMAZAKI A., CHIBA A., SOMA M., ISHIYAMA K., ARAI K. I., "Spiral type magnetic micro actuators for medical applications"

SHEARWOOD C., YATES R.B., "Development of an electromagnetic microgenerator", Sheffield University. IEEE Electronics Letters. 23 Oct 1997.

SIVOUKHINE, D. Cours de physique générale, Tome 3 Électricité, édition MIR 1983

SLEPIAN J., "Electromagnetic ponderomotive forces within material bodies", Physics, 36, 485 (1950)

STEYN J. L., LIVERMORE C., KHANNA R., LANG J. H., UMANS S. D., WARREN E. P., "Micro Electric Machines for Micro Turbomachinery". http://mtlweb.mit.edu/research/annual_reports/2002/02_mems/micro_electric_machines.pdf

SUZUKI K., TANIGAWA H., "Single crystal Silicon Rotational Micromotors," Proceedings of the IEEE Microelectromechanical Systems, pp. 15-20, 1991

SUZUKI S., KATANE T., SAOTOME H., SAITO O., "A proposal of electric power generating system for implanted medical devices". IEEE Transactions on Magnetics. Vol. 35, No. 5, September 1991

TRIMARCO C., "A Lagrangian approach to electromagnetic bodies", Technische Mechanik, vol.22(3), pp.175-180, 2002

UDAYAKUMAR K.R., BART S.F., FLYNN A.M., CHEN J., TAVROW L.S., CROSS L.E., BROOKS R.A., EHRLICH D.J., "Ferroelectric thin film ultrasonic motor", IEEE Microelectro mechanical Systems Workshop, pp. 109-113, 1991.

VANDEVELDE L., GYSELINCK J., WULF M.A.C. DE, JMELEKEBEEK .A.A., "Finite-Element Computation of the Deformation of Ferromagnetic Material Taking Into Account Magnetic Forces and Magnetostriction", IEEE Transaction on Magnetics, 40, 2, pp. 565-568, 2004

VOGT K., "Berechnung elektrischer Maschinen". VCH Verlagsgesellschaft mbH Weinheim

WAGNER B., KREUTZER M., BENECKE W., "Permanent Magnet Micromotors on Silicon Substrates," Journal of Microelectromechanical Systems, Vol. 2, 1993

WIGNALL A.N., GILBERT A.J., YANG S.J. "Calculation of forces on magnetised ferrous cores using the maxwell stress method". IEEE Transaction on magnetics (Vol 24 N°1 January 1988)

ZANG M., CAI B., YANG C., "Optimization of Ø 1 mm permanent magnet axial-field micromotor", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 5,

ZHONG-QING YOU, YU-SHI SUN, ZHONG-WEI JIANG. "Determination of the current equivalent parameters for the fictitious magnetic monopole model of magnetostatic problems". IEEE Transaction on Magnetics (Vol 24 N°1 January 1988)

Annexe 1 : Prédimensionnement du micro-moteur à flux axial et à aimantation induite

Introduction

Cette annexe cherche à justifier avec des calculs détaillés, le prédimensionnement des aspects géométriques et électromagnétiques des micromoteurs.

Pour ce faire, on énumère tout d'abord les spécifications techniques qui doivent être respectées par le moteur à concevoir : électromagnétiques, thermiques, électriques et géométriques.

Certaines d'entre elles sont imposées par les limites des matériaux, tels que l'induction maximale dans le stator et le rotor, ou la température maximale de fonctionnement du moteur. Il existe aussi des spécifications imposées par l'application, comme le couple et la vitesse nominale.

L'étape suivante consiste à effectuer la préconception géométrique, à faire les calculs géométriques et électromagnétiques analytiques.

La présente partie du document détaille également le bobinage du stator utilisé, et le calcul du moment d'inertie du moteur.

Pré-dimensionnement du micromoteur

SPECIFICATIONS TECHNIQUES.

Les spécifications techniques sur lesquelles était fondée la conception du moteur sont énoncées ci-dessous:

DONNÉES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

• Vitesse nominale	1 000 000 t/min
• Vitesse synchrone	1 080 000 t/min
• Couple électromagnétique à la vitesse nominale	4 mN·m
• induction maximale de l'entrefer	0,3 T
• induction maximale dans le fer ($J_s = 0,8$ T)	0,6 T
• Contrainte tangentielle	4 000 N/m ²
• Nombre de paires de pôles	1
• Nombre de créneaux du stator	6

DONNÉES THERMIQUES

• Température maximale du rotor (température ambiante de 40 °C)	155 °C
---	--------

DONNEES ÉLECTRIQUES

• Tension de phase	10 V
• Courant nominale	60 A
• Nombre de phases	3

DONNEES GÉOMÉTRIQUES.

- Diamètre extérieur du moteur 10 mm
- Diamètre de l'arbre 3 mm
- rapport optimal entre le rayon interne et externe des dents 0,58

CALCUL DES DIMENSIONS GÉOMÉTRIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Les dimensions géométriques d'un moteur sont étroitement liées au cahier des charges électromagnétique déjà présenté. C'est pourquoi la présente section développe conjointement des calculs géométriques et électromagnétiques.

Gardez à l'esprit que la valeur nominale considérée pour les calculs préliminaires d'analyse-conception du moteur prise en compte est 4 mN·m.

Épaisseur de la couche de Cuivre :

L'épaisseur maximale de la couche de cuivre est limitée par l'effet de peau ou « skin effect », qui est lié à la variation spatiale du flux de courant dans un conducteur. Cette épaisseur est connue comme l'épaisseur de peau. Elle est liée à la résistivité et la perméabilité magnétique du conducteur, et aussi à la fréquence des courants induits.

$$\delta_{cu_max} = \sqrt{\frac{\rho_{Cu}}{\pi * \mu_0 * f_s}} \quad \delta_{cu_max} = 5,305 * 10^{-4} m$$

$$\delta_{cu} = 0,5 * 10^{-3} m$$

avec: δ_{cu_max} ... Épaisseur maximale de la couche de cuivre (m)

δ_{cu} ... Épaisseur de la couche de cuivre (m)

$\rho_{Cu} = 2 * 10^{-8}$... Résistivité du cuivre ($\Omega \cdot m$)

$\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7}$... Perméabilité magnétique du vide (T·m/A)

$f_s = 18000$... Fréquence synchrone (Hz)

Épaisseur de l'entrefer:

L'épaisseur de l'entrefer est directement proportionnelle au courant nécessaire à magnétiser le noyau. Par conséquent, diminuer le courant revient donc à diminuer les pertes Joule, l'intérêt est que cette épaisseur soit aussi petite que possible.

D'autre part, il existe des limites mécaniques qui empêchent de réduire au minimum cette grandeur. Dans notre cas, nous avons pris les critères de conception suivants:

$$\delta_{gap} = \frac{\delta_{cu}}{2} \quad \delta_{gap} = 2,5 * 10^{-4} m$$

avec: δ_{gap} ... Épaisseur de l'entrefer (m)

Intensité du champ magnétique dans l'entrefer:

L'intensité du champ magnétique est égale à :

$$H_{gap} = \frac{B_{gap}}{\mu_0} \quad H_{gap} = 2,387 * 10^5 A/m \text{ max}$$

avec: H_{gap} ... Intensité du champ magnétique maximale (A/m)

MMF:

La force magnétomotrice est générée par le champ magnétique, elle est mesurée en ampères-tours

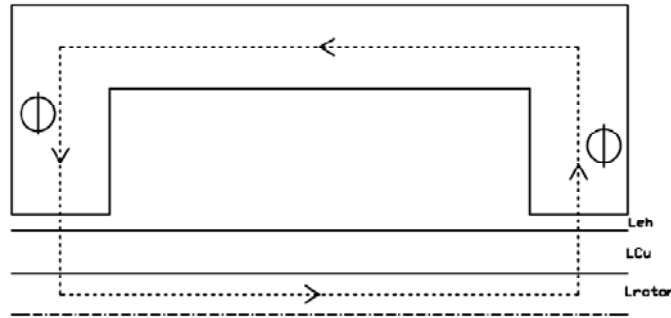


Figure A1.1 : Schéma du chemin du flux magnétique

Conformément à la loi d'Ampère:

$$\sum H * l = N * I = \mathcal{F}$$

$$H_{est} \cdot \delta_{est} + H_{gap} \cdot \delta_{gap} + H_{Cu} \cdot \delta_{Cu} + H_{rot} \cdot \delta_{rot} = N \cdot I$$

En considérant $H_{gap} = H_{Cu} \gg H_{est}, H_{rot}$:

On obtient $H_{gap} * \delta_{gap} + H_{gap} * \delta_{Cu} = N * I$

Par conséquent:

$$N * I = H_{gap} * \delta_{gap} + H_{gap} * \delta_{Cu} \quad N * I = 179,049 \text{ Av}$$

où: $N * I$... MMF maximale (Av)

Dimensions des dents du stator:

De la relation entre le couple électromagnétique et la contrainte tangentielle, on obtient les dimensions de base du stator:

$$T_{em} = \sigma_{tan} * r_{av_dent} * S_{cu}$$

Avec:

$$r_{av_dent} = \frac{(r_{out_dent} + r_{in_dent})}{2} ; S_{cu} = \pi * (r_{out_dent}^2 - r_{in_dent}^2)$$

$$k_{d_{opt}} = \frac{r_{in_dent}}{r_{out_dent}} = 0,58$$

Par conséquent:

$$rout_dent = \sqrt[3]{2 * \frac{Tem}{\pi * \sigma \tan * (1 + kd) * (1 - kd^2)}} \quad rout_dent = 4,234 * 10^{-3}m$$

$$rin_dent = kd * rout_dent \quad rin_dent = 2,494 * 10^{-3}m$$

$$rav_dent = \frac{rout_dent + rin_dent}{2} \quad rav_dent = 3,4 * 10^{-3}m$$

où: rav_dent ... Rayon moyen des dents du stator (m)

$rout_dent$... Rayon extérieur des dents de stator (m)

rin_dent ... Rayon intérieur des dents du stator (m)

$$Ddents = 1,385 * 10^{-3}m$$

$$\delta dent = 1,25 * 10^{-3}m$$

$$Sdent = \frac{1}{6} * [\pi * (rout_{dent}^2 - rin_{dent}^2)] - Ddents * (rout_dent - rin_dent)$$

$$Sdent = 3,916 * 10^{-6}m^2$$

avec: $Ddent$... distance entre les dents du stator (m)

$\delta dent$... épaisseur d'une dent (m)

$Sdent$... section transversale des dents (m²)

Densité linéaire de courant dans les conducteurs:

La densité linéaire de courant dans des conducteurs est liée à la densité de courant linéaire de l'entrefer, par l'équation:

$$J = \frac{A * \lambda}{Fenc * Aenc}$$

où le facteur de remplissage d'encoche (Fenc) est défini comme le rapport entre la section de cuivre et la section totale de l'encoche (Aenc). λ est appelé pas d'encoche, et représente la distance entre deux créneaux.

Dans notre cas:

$$Fenc = 0,4$$

$$Aenc = \delta dent * \frac{Ddents}{2} \quad Aenc = 8,656 * 10^{-7}m^2$$

$$\lambda = \frac{2 * \pi * rav_dent}{2 * p} \quad \lambda = 0,011m$$

$$J = \frac{A * \lambda}{Fenc * Aenc} \quad J = 2,194 * 10^9 A/m^2$$

Flux magnétique par pôle:

Le flux magnétique à travers une surface est défini par le produit de $B \cdot S$, et est pratiquement constant le long d'un chemin fermé. Par conséquent, l'induction maximale passant par la section transversale d'une dent, nous permet d'obtenir la valeur du flux avec:

$$\phi_{max} = \sqrt{2} * B_{dent} * S_{dent} \qquad \phi_{max} = 3,323 * 10^{-6} Wb$$

avec: $B_{dent} = 0,6$... Valeur maximale de l'induction dans les dents du stator (T)

ϕ_{max} ... Valeur maximale du flux magnétique (Wb)

$$r_{out_rotor} = r_{out_moteur}$$

Dimensions de la culasse du stator:

La culasse permet de soutenir les dents dans lequel les bobines sont logées. Il a aussi une fonction magnétique, car le flux créé par les courants dans les enroulements passent par le stator.

On souhaite disposer les dents de manière la plus symétrique possible. Cela définit un critère pour déterminer les rayons intérieure et extérieure de la culasse, par conséquent:

$$r_{out_stator} = r_{out_moteur} \qquad r_{out_stator} = 5 * 10^{-3} m$$

$$\Delta r = r_{out_stator} - r_{out_dent} \qquad \Delta r = 7 * 10^{-4} m$$

$$r_{in_stator} = r_{in_dent} - \Delta r \qquad r_{in_stator} = 1,8 * 10^{-3} m$$

avec: r_{out_stator} ... rayon extérieur du stator (m)

r_{in_stator} ... rayon intérieur du stator (m)

Pour déterminer l'épaisseur de la culasse, on limite l'induction dans ce partie de la structure électromagnétique à 0,6 Tesla pour ne pas saturer le matériau magnétique, connaissant le flux nécessaire nous avons, donc :

$$B_{culasse} = B_{dent} = 0,6 T$$

$$S_{culasse} = \frac{\phi_{max}}{B_{culasse}} \qquad S_{culasse} = 3,916 * 10^{-6} m^2$$

$$\delta_{culasse} = \frac{S_{culasse}}{r_{out_stator} - r_{in_stator}} \qquad \delta_{culasse} = 1,224 * 10^{-3} m \quad \delta_{culasse} = 1,2 * 10^{-3} m$$

avec: $B_{culasse}$... induction dans la culasse du stator (T)

$S_{culasse}$... section transversale de la culasse statorique (m²)

$\delta_{culasse}$... épaisseur de la culasse (m)

Dimensions du rotor:

Les rayons interne et externe du rotor sont fixés par les contraintes mécaniques et par le cahier des charges qui impose le diamètre extérieur du moteur et le diamètre de l'arbre.

$$r_{out_rotor} = 5 * 10^{-3} m$$

$$rin_rotor = r_axe$$

$$rin_rotor = 1,5 * 10^{-3}m$$

avec: $rout_rotor$... Rayon extérieur du rotor (m)

rin_rotor ... Rayon interne du rotor (m)

Pour obtenir l'épaisseur du rotor, on suit la même procédure que celle utilisée pour la culasse du stator, limitant ainsi l'induction du rotor à 0,6 Tesla.

Nous avons, donc :

$$B_{rotor} = B_{dent}$$

$$S_{rotor} = \frac{\phi_{max}}{B_{rotor}}$$

$$S_{rotor} = 3,916 * 10^{-6}m^2$$

$$\delta_{rotor} = \frac{S_{rotor}}{rout_rotor - rin_rotor} \quad \delta_{rotor} = 1,119 * 10^{-3}m \quad \delta_{rotor} = 1,12 * 10^{-3}m$$

avec: B_{rotor} ... induction dans le rotor (T)

S_{rotor} ... section du rotor perpendiculaire à l'entrefer (m²)

δ_{rotor} ... épaisseur du rotor (m)

Comme il a été précisé auparavant, les résultats obtenus jusqu'à ce moment sont réalisés sur une moitié du moteur, l'épaisseur finale du rotor sera le double de ce qui a été obtenu.

Tableau récapitulatif des paramètres géométriques:

Rotor

Paramètre	Description	Mesure
rin_rotor	Rayon du rotor	1,5 mm
$rout_rotor$	Rayon extérieur du rotor	5 mm
δ_{rotor}	Rotor épaisseur	1,1 mm
δ_{cu}	Épaisseur de la couche de cuivre	0,5 mm

Stator

Paramètre	Description	Mesure
rin_stator	Rayon du stator	1,8 mm
$rout_stator$	Rayon extérieur du stator	5 mm
$\delta_{culasse}$	Épaisseur de la culasse du stator	1,2 mm
rin_dent	Rayon intérieur des dents du stator	2,5 mm
$rout_dent$	Rayon extérieur des dents de stator	4,3 mm
δ_{dent}	Épaisseur des dents du stator	1,25 mm
D_{dents}	Distance entre les dents du stator	1,4 mm

Entrefer

Paramètre	Description	Mesure
δ_{gap}	Épaisseur de l'entrefer	0,25 mm

Tableau récapitulatif des paramètres électromagnétiques:

Paramètre	Description	Mesure
n_{nom}	Vitesse nominale du micromoteur	1.000.000 rpm
n_{sinc}	Vitesse synchrone du micromoteur	1.080.000 rpm
T_{em}	La moitié de couple électromagnétique à vitesse nominale	1 mN·m
B_{gap}	Induction maximale dans l'entrefer	0,3 T
B_{fer}	Induction maximale de la culasse du rotor et des dents	0,6 T
σ_{TAN}	Contrainte tangentielle à l'entrefer	4.000 N/m ²
H_{gap}	Intensité du champ magnétique à l'entrefer	$2,4 \times 10^5$ A/m
F_{mm}	MMF Force magnétomotrice	180 Av
J	Densité linéaire de courant dans les conducteurs	$2,2 \times 10^9$ A/m
ϕ_{max}	Flux maximale	$3,3 \times 10^{-6}$ Wb

Enroulements du stator.

Les calculs suivants sont effectués en vue de déterminer en détail les performances de l'enroulement du stator.

Données de départ:

- Nombre d'encoches au stator: $N_{enc} = 6$
- Nombre de phases: $m = 3$
- Nombre de paires de pôles: $p = 1$

Calcul des paramètres de conception:

- Nombre de bobines: $\frac{N_{enc}}{2} = \frac{6}{2} = 3$
- Nombre de bobines par phase: $n_c = \frac{N_{enc}}{2 \cdot m} = \frac{6}{2 \cdot 3} = 1$
- Nombre d'encoches par pôle: $Q_1 = \frac{N_{enc}}{2p} = \frac{6}{2} = 3$
- Nombre d'encoches par pôle et phase: $q_1 = \frac{N_{enc}}{2p \cdot m} = \frac{6}{2 \cdot 3} = 1$

Selon les paramètres de conception, on obtient la disposition des enroulements du micro-moteur suivante:

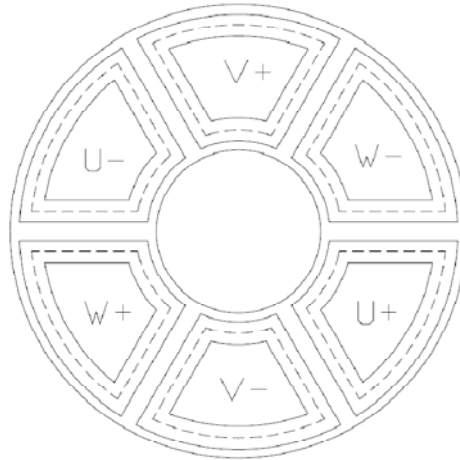


Figure A1.2 : Vue de dessus du bobinage statorique.

Facteur de bobinage pour l'harmonique fondamentale :

Le facteur de bobinage est le produit du facteur de distribution ou "distribution factor" avec le facteur de pas ou "pitch factor".

Le facteur de distribution est défini comme le rapport entre la somme des phaseurs et la somme arithmétique de la force électromotrice induite par chaque bobine, il est calculé par:

$$kd1 = \frac{\sin\left(n \cdot \frac{n_{spp} \cdot \theta_s}{2}\right)}{n_{spp} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\theta_s}{2}\right)} \quad kd1 = 1$$

avec $n = 1$... nombre d'harmonique

$\theta_s = \frac{\pi}{3}$...angle de séparation entre les créneaux, en degrés électriques

$n_{spp} = \frac{6}{2 \cdot 3}$... nombre d'encoches par pôle et par phase

Le facteur de pas pour l'harmonique fondamentale est le rapport entre la somme des phaseurs et la somme arithmétique des forces électromotrices induites pour chaque bobine, il est calculé avec:

$$kp1 = \sin\left(n \cdot \frac{\theta_c}{2}\right) \quad kp1 = 0,866$$

Avec: $n = 1$... nombre d'harmonique

$\theta_c = \frac{2\pi}{3}$...angle de séparation entre les phases, en degrés électriques

Enfin:

$$kw1 = kd1 \cdot kp1 \quad kw1 = 0,866$$

Rayon des conducteurs bobinés:

Le diamètre maximum des spires formant le bobinage du stator est limité par l'effet de peau.

Par conséquent:

$$\delta_{\max_spire} = \sqrt{\frac{\rho C u}{\pi * \mu_0 * f s}} \quad \delta_{\max_spire} = 5,305 * 10^{-4} m$$

$$r_{_spire} = 0,2 * 10^{-3} m$$

Nombre de tours, tension et courant d'alimentation:

Le nombre maximum de tours pouvant être accueillis dans chaque emplacement est limité par la section de la fente. Ainsi, le nombre de tours maximal est:

$$N_{\max} = \frac{A_{enc}}{S_{spire}} \quad N_{\max} = 6,888$$

Il est intéressant de calculer le nombre maximum de tours possible afin de diminuer le courant dans les conducteurs, même si cela conduit à des tensions accrues. Le courant dans les conducteurs, pour $N = 6$, est le suivant pour un demi-moteur est:

$$I = \frac{N * I}{N_{spire}} \quad I = 29,842 A$$

La force électromotrice est directement proportionnelle au nombre de tours:

$$E = 0,97 * \frac{2\pi}{\sqrt{2}} * N_{spire} * f s * \phi_{\max} * k_{w1} \quad E = 1,339 V$$

La tension d'alimentation est :

$$\vec{U} = \vec{E} + \vec{U}_R + \vec{U}_{x_L}$$

$$\vec{U} = \vec{E} + R I \angle(-\varphi) + j \omega L I \angle(-\varphi)$$

$$U \angle 0 = 1,34 \angle \varphi' + 0,6 \angle (-45) + 0,528 \angle 45$$

En résolvant: $\varphi' = 2,33^\circ, U = 1,75 V$

Résistance du bobinage:

La résistance est liée à la résistivité du matériau, à la longueur et à la section transversale du conducteur:

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S}$$

Le calcul de la longueur moyenne d'une spire, elle est illustrée à la figure V3.2 par une ligne pointillée:

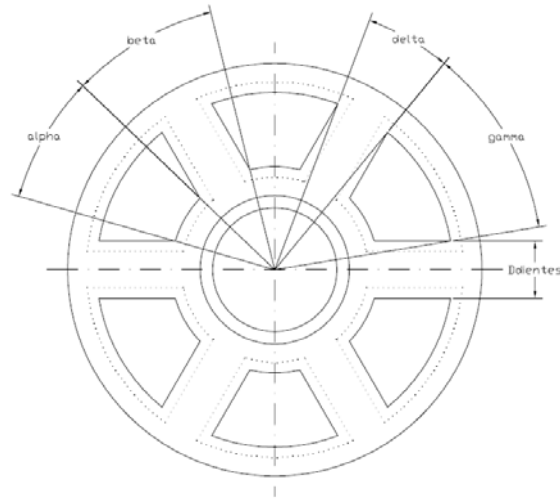


Figure A1.3 : Détails des bobines du stator et de la ligne moyenne.

$$\beta = 2 * \sin^{-1} \left(\frac{D_{dents}}{2 * r_{in_dent}} \right) * \frac{180}{\pi} \quad \beta = 32,162^\circ$$

$$\delta = 2 * \sin^{-1} \left(\frac{D_{dents}}{2 * r_{out_dent}} \right) * \frac{180}{\pi} \quad \delta = 18,535^\circ$$

$$\alpha = \frac{360 - 6 * \beta}{6} \quad \alpha = 27,838^\circ$$

$$\gamma = \frac{360 - 6 * \delta}{6} \quad \gamma = 41,465^\circ$$

$$L_{spira} = 2 * \left[\frac{r_{out_dent} - r_{in_dent}}{\cos \left(\frac{\pi}{180} * \frac{\beta - \delta}{2} \right)} + 2 * \left(r_{spire} + \frac{1}{2} * 0,05 * 10^{-3} \right) \right] + \frac{\alpha * 2\pi * (r_{in_dent} - r_{spire})}{360} + \frac{\gamma * 2\pi * (r_{out_dent} + r_{spire})}{360}$$

$$L_{spire} = 8,9 * 10^{-3} m$$

La section d'une spire, qui a un rayon de 0,2 mm, est la suivante:

$$S_{spire} = \pi * r_{espira}^2 \quad S_{spire} = 1,257 * 10^{-7} m^2$$

Par conséquent, la résistance d'une spire est:

$$R_{spire} = \frac{\rho_T * L_{spire}}{S_{spire}}$$

En prenant: $\rho_0 = 1,543 * 10^{-8}$; $T_{moteur} = 120$

$$\rho_T = \rho_0 * (1 + 0,00427 * T_{moteur}) \quad \rho_T = 2,334 * 10^{-8}$$

$$R_{\text{spire}} = 1,653 * 10^{-3} \Omega$$

Ainsi, la résistance totale d'un enroulement est:

$$N_{\text{tours_phase}} = 2$$

$$R_{\text{bobine}} = N_{\text{spires}} * N_{\text{tours_phase}} * R_{\text{spire}}$$

$$R_{\text{bobine}} = 0,02 \Omega$$

MOMENT D'INERTIE DU MOTEUR.

Le moment d'inertie de la partie mobile du moteur, qui est formé par l'arbre et le rotor, se calcule avec :

$$I = \sum m \cdot r^2$$

Le moment d'inertie du rotor est:

$$V_{\text{rotor}} = \pi * (r_{\text{out_rotor}}^2 - r_{\text{in_rotor}}^2) * (\delta_{\text{rotor}} + \delta_{\text{cu}}) \quad V_{\text{rotor}} = 1,158 * 10^{-7} m^3$$

$$\text{densite_rotor} = 8500 \text{ kg}/m^3$$

$$m_{\text{rotor}} = V_{\text{rotor}} * \text{densite_rotor}$$

$$m_{\text{rotor}} = 9,842 * 10^{-4} \text{ kg}$$

$$I_{\text{rotor}} = m_{\text{rotor}} * r_{\text{out_rotor}}^2$$

$$I_{\text{rotor}} = 2,46 * 10^{-8} \text{ kg} * m^2$$

Le moment d'inertie de l'arbre est:

$$V_{\text{axe}} = \pi * r_{\text{in_rotor}}^2 * (\delta_{\text{rotor}} + \delta_{\text{cu}} + \delta_{\text{gap}} + \delta_{\text{dent}} + \delta_{\text{culasse}}) \quad V_{\text{axe}} = 3,054 * 10^{-8} m^3$$

$$\text{densité_axe} = 7850 \text{ kg}/m^3$$

$$m_{\text{axe}} = V_{\text{axe}} * \text{densité_axe}$$

$$m_{\text{axe}} = 2,397 * 10^{-4} \text{ kg}$$

$$I_{\text{axe}} = m_{\text{axe}} * r_{\text{axe}}^2$$

$$I_{\text{axe}} = 5,393 * 10^{-10} \text{ kg} * m^2$$

Enfin, la valeur de la moitié de l'inertie du moteur est:

$$I_{\text{moteur}} = I_{\text{rotor}} + I_{\text{axe}}$$

$$I_{\text{moteur}} = 2,514 * 10^{-8} \text{ kg} * m^2$$

le moment d'inertie total est deux fois plus grand que le moment d'inertie calculé:

$$I_{\text{total}} = 2 * I_{\text{moteur}}$$

$$I_{\text{total}} = 5,029 * 10^{-8} \text{ kg} * m^2$$

