Thèse

présentée à

L'Université Paul Verlaine - Metz

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Paul Verlaine - Metz

Spécialité

Informatique

Systèmes formels et systèmes fonctionnels pédagogiques

par

David Michel

Soutenue le 24 octobre 2008 devant le jury composé de :

Patrick Cégielski .... rapporteur ;
Loïc Colson .... directeur de thèse ;
Gilles Dowek .... rapporteur ;
Serge Grigorieff .... président du jury ;
Maurice Margenstern .... examinateur.

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon directeur de thèse Loïc Colson, qui m'a encadré tout le long de ma formation universitaire, du DEUG au doctorat. Son soutien indéfectible, sa bonne humeur et ses encouragements m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions.

J'exprime toute ma gratitude à Patrick Cégielski et Gilles Dowek d'avoir rapporté cette thèse et pour le temps qu'ils ont consacré à l'analyse de ce document.

Je tiens à remercier Serge Grigorieff d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance, ainsi que pour ses encouragements et son soutien.

Je remercie également Maurice Margenstern pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Ma reconnaissance s'adresse à tous les enseignants, techniciens et personnels administratifs qui m'ont accueilli au LITA pendant quatre ans. Je pense en particulier à mes amis doctorants, Mathieu, Thomas, Michaël et Mihaela, sans oublier les stagiaires que j'ai côtoyés, Serge et Jérôme.

Un grand merci aussi au secrétaire du LITA, Damien Aignel, sans qui les inévitables tracasseries de l'administration auraient eu raison de moi.

Merci également à tous les membres du département informatique de l'IUT de Fontainebleau, qui m'ont accueilli parmi eux depuis que je suis ATER à l'Université Paris 12.

Bien sûr, je tiens à remercier mes parents, mon frère, mes sœurs et toute ma famille pour leur soutien sans faille depuis toujours.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance envers toutes les personnes que je n'ai pas citées ; elles sont nombreuses et se reconnaîtront.

Introduction

Il est commun dans la pratique des mathématiques de fournir des exemples d'objets mathématiques afin d'illustrer des concepts abstraits. Cette observation a fait l'objet d'études en philosophie des mathématiques ; en particulier, Henri Poincaré suggérait dans [34] que toute définition devrait être immédiatement suivie d'un exemple lui donnant un sens. Malgré cette injonction, les systèmes formels utilisés dans le cadre des fondements des mathématiques, comme les systèmes axiomatiques de Hilbert ou les calculs des séquents, ignorent totalement le dictum de Poincaré. Parallèlement, George Francois Cornelis Griss proposait dans une série d'articles, [15], [16], [17] et [18], que les mathématiques devraient être développées sans l'aide de la négation. Il avançait que les définitions mathématiques devraient être limitées à celles basées sur des constructions effectives : si une telle construction est impossible, alors la définition n'a pas de sens. Malheureusement, aussi bien chez Poincaré que chez Griss, les motivations philosophiques et scientifiques sont très peu développées et semblent alors assez faibles : Griss considérait que les mathématiques sans négation pouvaient être traitées comme un pur problème mathématique.

La présente thèse constitue une introduction à une catégorie de systèmes formels destinés à rendre compte des desiderata de Poincaré. Nous proposons d'ajouter aux systèmes formels une contrainte que nous appelons *contrainte pédagogique*. Le cadre d'étude choisi est constitué des systèmes de déduction naturelle, introduits à l'origine par Gerhard Gentzen [11] et Dag Prawitz [35] ; de tels systèmes manipulent des *jugements* $\Gamma \vdash F$, où Γ est un ensemble fini $\{G_1, \ldots, G_n\}$ de formules et F une formule, avec la signification intuitive que la formule F est valide sous les hypothèses Γ. Les systèmes de déduction naturelle ne proposent aucun outils pour manipuler des définitions ; en substitut, quand on souhaite introduire un objet x satisfaisant une définition, on postule dans le contexte Γ un ensemble de formules dans lesquelles apparaît la variable x, cet ensemble de formules décrivant les propriétés que doit posséder x pour satisfaire la définition. Nous observons que la seule règle d'inférence permettant d'introduire de nouvelles formules dans le contexte Γ est la *règle de l'hypothèse* :

$$\frac{F \in \Gamma}{\Gamma \vdash F} \text{(Hyp)}$$

Dans cette règle, le contexte Γ a pour seule contrainte d'être un ensemble de formules, éventuellement non motivé ou même contradictoire. Nous introduisons alors la contrainte pédagogique comme suit : nous demandons à ce qu'au moins une instance $\sigma{\cdot}\Gamma$ de Γ soit prouvable, c'est-à-dire que les jugements $\vdash \sigma{\cdot}G_1 \ldots \vdash \sigma{\cdot}G_n$ soient dérivables, avec σ une substitution remplaçant certaines variables de Γ par quelques objets idoines (des formules, des entiers ou tout autres termes selon le cas). Ainsi, la règle de l'hypothèse se trouve modifiée en une *règle de l'hypothèse pédagogique* :

$$\frac{F \in \Gamma \quad \vdash \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash F} \text{(P-Hyp)}$$

La contrainte pédagogique a d'importantes conséquences sur les raisonnements possibles en déduction naturelle : par exemple, le *raisonnement par contradiction* n'est plus autorisé puisque pour prouver F en supposant $\neg F$ afin d'en déduire une absurdité, on doit en premier lieu postuler $\neg F$ n'admettant aucun exemple σ tel qu'on puisse prouver $\vdash \sigma \cdot \neg F$. Ainsi les systèmes pédagogiques se révèlent naturellement *intuitionnistes*. Plus radicalement, nous observons que la preuve d'une assertion négative $\neg F$, défini par la formule $F \rightarrow \bot$, le symbole $\bot$ dénotant l'absurdité, ne peut plus être menée car on doit supposer F afin d'en déduire $\bot$; mais nous ne pouvons fournir un exemple σ tel que $\sigma \cdot F$ soit prouvable, F étant une formule contradictoire. Ainsi les systèmes pédagogiques sont non seulement intuitionnistes mais également *positifs*, c'est-à-dire exempts de négation.

Dans un premier temps, nous étudions l'aspect purement logique des systèmes pédagogiques. L'éventail des systèmes étudiés se limitent aux cas propositionnels. Nous commençons par considérer le plus simple des systèmes de déduction naturelle, le calcul propositionnel minimal, auquel nous ajoutons la contrainte pédagogique de différentes manières. Puis nous ajoutons à ces systèmes les règles régissant la négation afin de mettre en évidence les propriétés formelles de la contrainte pédagogique face à la présence de formules absurdes. Ensuite, nous abordons des systèmes plus complexes dans lesquels la négation est définissable : le calcul propositionnel du second-ordre nous amène à la présentation de plusieurs variantes pédagogiques et à l'enrichissement de la contrainte initiale ; les conséquence sur la définissabilité des connecteurs logiques est étudiée. Enfin, la contrainte pédagogique est appliquée aux calculs propositionnels d'ordre supérieurs et les différentes variantes de calculs pédagogiques sont étudiés en détails. Dans tous les cas, des plus simples aux plus complexes, les liens avec les calculs usuels sont mis en évidences : des traductions des systèmes usuels dans les systèmes pédagogiques sont proposés afin de mesurer l'expressivité des systèmes contraints.

Dans un second temps, nous proposons une sémantique des systèmes pédagogiques sous la forme de systèmes fonctionnels, c'est-à-dire de λ-calculs. Usuellement, à chaque système formel correspond un système fonctionnel : au calcul propositionnel minimal est associé le λ-calcul simplement typé et au calcul propositionnel du second ordre est associé le λ-calcul polymorphe du second ordre. Dans chaque cas nous étudions la stabilité par β-réduction et la normalisation dans les systèmes pédagogiquement contraints. Nous introduisons la notion de λ-*termes utiles* comme le pendant fonctionnel de l'absence de négation en logique. Les traductions entre les systèmes logiques usuels et pédagogiques se muent au niveau fonctionnel en traductions CPS.

Présentation synthétique

Historique

Depuis l'apparition des premières notions de démonstration dans la Grèce Antique jusqu'au dix-neuvième siècle, le cadre formel du développement des mathématiques était assez flou : personne ne savait précisément, formellement, ce qu'était une preuve ou un théorème ; on en avait une vague idée mais sans plus. Au dix-neuvième siècle, les mathématiciens se sentent de plus en plus concernés par cette absence de fondations rigoureuses ; le raisonnement mathématique devient peu à peu un objet mathématique à part entière : la logique mathématique se dégage comme une discipline formelle au même titre que l'arithmétique ou la géométrie. Les premiers systèmes formels destinés à fonder les mathématiques, comme la théorie naïve des ensembles, se révèlent incohérents ; tout un bestiaire de paradoxes entache les modes de raisonnements que l'on croyait valides ; il s'ensuit alors, au début du vingtième siècle, ce qu'on appelle aujourd'hui la crise des fondements : il devenait urgent de donner aux mathématiques des fondements corrects, complets et surtout cohérents.

Parmi les mathématiciens ayant participé aux réflexions sur les raisonnements sûrs, on compte en particulier Henri Poincaré, qui nous a légué quelques ouvrages sur le sujet ; dans « dernières pensées » [34], on peut lire un passage qui ne semble justifié par aucune de ses réflexions, ni par celles des autres mathématiciens de son époque, comme si elle relevait du simple bon sens :

> « La définition par postulat n'a de valeur que quand on a démontré l'existence de l'objet défini ; dans le langage mathématique, cela veut dire que le postulat n'implique pas contradiction ; on n'a pas le droit de négliger cette condition ; il faut bien admettre l'absence de contradiction comme une vérité intuitive, comme un axiome, par une sorte d'acte de foi ; mais alors il faut se rendre compte de ce qu'on fait et savoir qu'on a allongé la liste des axiomes indémontrables ; ou bien il faut construire une démonstration en règle, soit par l'exemple, soit par l'emploi du raisonnement par récurrence. Ce n'est pas que cette démonstration soit moins nécessaire quand il s'agit d'une définition

directe, mais elle est généralement plus facile. »

Rejetant les définitions imprédicatives, c'est-à-dire les définitions d'objets faisant appel implicitement ou explicitement à la totalité des objets de même nature, Poincaré énonce ici un principe tout-à-fait en accord avec le reste de ses préoccupations ; mais on peut constater que tous les développements logiques ultérieurs se réclamant de la pensée de Poincaré, en particulier dans le domaine des systèmes formels prédicatifs, ce principe est systématiquement ignoré.

Lors de la crise des fondements, Luitzen Egbertus Jan Brouwer développa les mathématiques intuitionnistes, formalisés plus tard par Arend Heyting en tant qu'alternative aux systèmes formels dits « classiques ». Les systèmes formels intuitionnistes sont supposés rendre fidèlement compte de l'activité intellectuelle du mathématicien au travers des objets qu'il manipule. Ces systèmes ont la propriété d'être constructifs, c'est-à-dire que tous les objets dont on peut prouver l'existence sont représentables par des termes. Cependant, rien n'interdit à ces systèmes de manipuler des objets non instanciables, dont la définition n'est pas motivable ou même incohérente. Cette observation a mené George Francois Cornelis Griss à développer des mathématiques dans lesquelles tous les objets utilisés dans une démonstration sont définis par des postulats non contradictoires, des mathématiques sans négation. Il affirmait que les notions mathématiques devraient être limitées à celles basées sur des constructions ; si la construction s'avère impossible, on ne peut avoir une idée claire de la nature de l'objet et la notion ne véhicule alors aucun sens. Les arguments avancés par Griss sont assez pauvres et, à l'instar des arguments de Poincaré, ils semblent relever du simple bon sens pour son auteur. Bien qu'il y ait une certaine familiarité entre le principe énoncé par Poincaré et les considérations de Griss, nous ne savons pas si le premier a inspiré le second ou si ces deux approches sont apparues indépendamment. Quoi qu'il en soit, Griss étoffa ses recherches et publia dans une séries d'articles, [15], [16], [17] et [18], une ébauche informelle de ce que pourraient être une arithmétique, une géométrie et une analyse sans négation.

Plusieurs tentatives de formalisation des idées de Griss ont été menées ; on peut citer les travaux de Vredenduin [39], Gilmore [12] et Valpola [37] ; mais la première formalisation la plus aboutie semble avoir été celle de David Nelson [31], [32]. Il introduisit la notion d'implication nulle : une implication $A \rightarrow B$ est dite nulle si la formule A est fausse pour toute instance. Puis il développa une logique des prédicats du premier ordre dans laquelle toutes les implications sont non-nulles ; pour cela, il fut contraint de remplacer l'implication usuelle $A \rightarrow B$ par une nouvelle notion d'implication $A \rightarrow_{\overline{x}} B$ dans laquelle $\overline{x}$ dénote une liste de variables $x_1, \ldots, x_m$ quantifiées. Une telle implication quantifiée possède une traduction dans les systèmes usuels par la formule $\exists \overline{x}.A \wedge \forall \overline{x}.A \rightarrow B$. Nelson définit alors toute une collections de règles plus ou moins intuitives, plus ou moins compliquées, afin de garantir pour chaque formule A apparaissant dans une implication quantifiée $A \to_{\overline{x}} B$ que la formule $\exists\overline{x}.A$ est démontrable. De même, il remplace la disjonction usuelle $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ par une disjonction quantifiée $\sigma\overline{x}.(A_1, \ldots, A_n)$. En plus de ces nouveaux connecteurs logiques, il subsiste dans ce système quelques points délicats, comme la présence d'un principe de contradiction affaiblie que Nelson juge à la limite de la respectabilité pour un raisonnement sans négation.

Dans la continuité du travail de Nelson, Victor Krivtsov enrichit le système formel sans négation existant en une arithmétique simple [25], puis en une arithmétique d'ordre supérieur [26]. Il conserve les implications quantifiées mais laisse en suspend les disjonctions quantifiées, jugées techniquement trop pesantes. Il utilise un jeu de règles d'inférence un peu plus simple que celui de Nelson au prix d'une nouvelle complication : chaque démonstration se mue en un couple (σ_1, σ_2) de démonstrations menées dans un système intermédiaire, σ_2 servant à dériver directement le théorème recherché σ_1 servant à garantir la non-nullité des implications dérivées en démontrant la clôture existentielle de la conjonction de toutes les suppositions apparaissant dans σ_1. Krivtsov proposa une traduction des systèmes intuitionnistes usuels dans ses systèmes sans négation. Dans le cas de l'arithmétique, sa traduction est basée sur le fait que l'implication usuelle $A \to B$ est équivalente à la formule $\forall x.(A \vee x = 0) \to (B \vee x = 0)$, qui peut être écrite $A \to_x B$ puisque la formule $A \vee x = 0$ est démontrable pour $x = 0$. Il met ainsi en évidence que l'abandon de la négation ne grève en rien l'expressivité des systèmes formels. Cependant, une traduction systématique des théorèmes usuels ne permet pas d'obtenir à coup sûr un théorème pertinent dans un système sans négation, sans compter le sens modifié des connecteurs logiques quantifiés.

Valeriya Mezhlumbekova [27] s'est inspirée des travaux de Nelson afin de construire une arithmétique sans négation. Elle reprend et modifie le système de Nelson basé sur l'implication quantifiée et elle l'enrichit avec des fonctionnelles du système T de Gödel. Elle démontre alors que l'arithmétique intuitionniste peut être plongée dans son arithmétique sans négation au prix d'une interprétation *dialectica* des formules arithmétiques : chaque formule A intuitionniste est transformée en une formule $\exists\overline{x}\forall\overline{y}.\phi$ dans laquelle ϕ est une formule sans quantificateurs. Cette formule ϕ est alors interprétée sous la forme d'une égalité $f = 0$ dans laquelle f est une fonctionnelle de type entier. les fonctionnelles sont éliminées en utilisant le prédicat T de Kleene [22] : on commence par coder les fonctionnelles t et u par des entiers $\#t$ et $\#u$; l'application d'une fonctionnelle t à une fonctionnelle u est alors codable sous la forme d'une égalité $\mathrm{T}(\#t, \#u, y) = 0$, avec $\mathrm{T}(\#t, \#u, y)$ un terme récursif primitif égal à 0 si et seulement si l'entier y code un calcul terminant de l'application de t à u, le résultat du calcul étant codable par un terme récursif primitif $\mathrm{U}(y)$. L'application d'une fonctionnelle t à une fonctionnelle u dans une formule A est ensuite codée par la formule $\exists y.\mathrm{T}(\#t, \#u, y) \wedge A(\{t\}u \backslash \mathrm{U}(y))$, avec

$A(\{t\}u \backslash \mathrm{U}(y))$ dénotant la formule A dans laquelle les applications $\{t\}u$ de t à u sont remplacées par le terme $\mathrm{U}(y)$. En itérant ces transformations, on obtient une formule $\exists\overline{x}\forall\overline{y}.r(\overline{x},\overline{y}) = 0$ avec $r(\overline{x},\overline{y})$ un terme récursif primitif. Mezhlumbekova définit alors pour chaque type σ une formule $a \in V_\sigma$ signifiant que a est le code d'une fonctionnelle de type σ ; on remarque que V_σ représente un ensemble non vide quel que soit le type σ. Au final, la traduction de la formule intuitionniste A est la formule $\exists\overline{x}.(\overline{x} \in V_{\overline{\sigma}}) \wedge (\overline{y} \in V_{\overline{\tau}} \rightarrow_{\overline{y}} .r(\overline{x},\overline{y}) = 0)$, démontrable dans le système sans négation de Mezhlumbekova. Ce résultat très technique a le mérite de mettre en évidence l'expressivité des systèmes sans négation : il est toujours possible de traduire un théorème arithmétique usuel en un théorème équivalent sans négation dont, malheureusement, la pertinence est quelque peu noyée dans un arsenal technique assez peu intuitif.

Dans un travail plus récent [28], Mezhlumbekova propose un calcul des prédicats du premier ordre sans négation dans lequel ni l'implication, ni la disjonction ne sont quantifiées. Cependant, elle introduit un nouveau quantificateur logique unaire] qu'elle nomme la *signifiance* (*meaningfulness* en anglais) : en particulier, la clôture existentielle d'une formule A est démontrable dès que la formule $]A$ l'est. Ainsi la notion de *signifiance* permet d'internaliser et de préciser la notion de non-nullité définie par Nelson. L'ensemble des règles de déduction est malgré tout alourdi par les règles structurelles régissant le comportement de la *signifiance* ; ce que l'on gagne en supprimant les implications et les disjonctions quantifiées, on le perd par l'ajout de la *signifiance*.

Motivations

On peut supposer qu'à l'origine la logique a été inventée dans le but de codifier les raisonnements corrects et rigoureux, se préserver de l'erreur permettant de construire un savoir pertinent et efficace. Les systèmes formels se sont peu à peu distingués comme l'aboutissement le plus épuré de cette recherche d'exactitude. Il convient cependant de trouver un moyen de lier les formules des systèmes formels, qui sont de simples juxtaposition de symboles, à une représentation qui leur donne un sens : les systèmes formels ont besoin d'une *sémantique*. Parmi toutes les sémantiques développées dans le cadre de l'étude mathématique des systèmes formels, certaines décrivent mieux que d'autres le sens *ontologique* à donner aux formules, selon le bon sens de chacun. Mais le *bon sens* comptant parmi les choses les moins partagées, plusieurs approches se distinguent les unes des autres.

Parmi les sémantiques les plus utilisées, la notion de *modèle* est incontournable. Un modèle est une structure mathématique fournissant une interprétation à chaque symbole constituant les formules : chaque symbole de fonction est représenté par une fonction, chaque symbole de relation est interprété par une relation, etc ; puis chaque connecteur logique est interprété directement : par exemple, l'interprétation d'une formule conjonctive $A \wedge B$ est la conjonction, au sens mathématique, des interprétations de A et de B. On cherche essentiellement à plonger le système formel de manière tautologique dans notre propre système de raisonnement. Ce mode de représentation a l'inconvénient d'être fondé sur notre propre système intuitif de représentation, alors que paradoxalement le système formel est destiné à pallier les imperfections de l'intuition. On est alors conduit à valider le système formel sur la base d'un méta-système strictement plus puissant – notre propre système de raisonnement – qui doit être validé par un méta-méta-système encore plus puissant, qui doit lui aussi être validé par... etc. Le principe même de ce mode de représentation, bien que mathématiquement correct, est ontologiquement mal fondé. En particulier, il permet de justifier certaines règles du système par leur simple présence dans le méta-système ; prenons l'exemple de la règle du tires exclu, qui permet de déduire la formule $A \vee \neg A$ pour toute formule A ; sémantiquement, elle signifie que tout modèle est soit un modèle de A, soit un modèle de $\neg A$. Ceci entre en désaccord avec l'existence de formules indécidables dans le cadre de systèmes suffisamment expressifs (par exemple l'arithmétique de Peano) : il existe une formule G admettant un modèle et telle que $\neg G$ admette également un modèle ; quand une telle formule G correspond à l'énoncé de la validité d'une formule A dans un modèle donné, il n'est plus possible de prouver que ce modèle satisfait A ou $\neg A$. Bien sûr, on peut étudier la sémantique dans un système plus puissant, mais aucun n'échappe à l'existence de formules indécidables : quelle que soit la puissance de la logique utilisée pour étudier la sémantique, il y a toujours des formules dont la valeur de vérité reste indéterminée. Cependant, quand le tiers exclu est une règle valide du méta-système, ce dernier servant de canon, le tiers exclu au niveau du système est alors justifié de manière *ad hoc*. On se retrouve face à une contradiction ontologique, bien que cette construction logique soit formellement cohérente. Il convient de mentionner le statut de la cohérence formelle, car elle n'est pas exempte des problèmes mentionnés ci-dessus ; en effet, la cohérence formelle, quand est est exprimée dans un système formel supposé cohérent, s'exprime sous la forme d'une formule indécidable : on ne peut justifier la cohérence d'un système que par la cohérence du méta-système, sa cohérence étant elle-même justifiée par un méta-méta-système... Pire, un système formel cohérent peut très bien affirmer l'incohérence d'un de ses sous-systèmes, de même qu'un système incohérent peut très bien affirmer la cohérence d'un de ses sous-systèmes. On a le sentiment d'avoir affaire à une sémantique bâtie sur du sable.

Face aux paradoxes que génèrent les sémantiques basées sur les modèles, on rencontre plusieurs attitudes : certains jugent que la cohérence formelle est en elle-même la garantie de l'existence du sens des formules et décident alors qu'il n'est pas nécessaire de fouiller plus en avant, tandis que d'autres considèrent que la présence d'une contradiction ontologique est inadmissible et qu'il faut alors abandonner la sémantique fautive au profit d'une nouvelle dont la pertinence seraient garantie par certaines propriétés plus contraintes que la simple cohérence formelle. L'un des principaux problèmes de la sémantique basée sur les modèles est qu'elle prétend donner un sens aux formules à l'aide d'objets discursifs de même nature. Comme on peut difficilement justifier une proposition par elle-même, il devient nécessaire d'introduire de nouveaux objets, non discursifs, rendant compte du sens des formules. Le principe du tiers exclu, en plus d'être dans certains cas la source d'incohérences ontologiques, a la propriété d'intervenir dans des preuves de formules du type $\exists x.P(x)$ telles qu'aucun objet x vérifiant la propriété P ne puisse être exhibé. On a alors introduit des systèmes formels ne vérifiant pas le principe du tiers exclu ; ceux-ci sont dits *constructifs* car si on les utilise pour démontrer une formule $\exists x.P(x)$, alors on peut toujours exhiber un objet x tel que $P(x)$. La preuve d'une telle formule se révèle être le mode d'emploi pour construire cet objet x : les preuves constructives sont isomorphes à des programmes de nature informatique, via un isomorphisme dit de Curry-Howard. La généralisation aux formules non-existentielles permet alors de justifier les formules par le programme informatique dont elles décrivent les propriétés : une formule $A \to B$ représente un programme qui, pour tout programme décrit par A, construit un programme décrit par B ; de même, une formule $A \wedge B$ décrit un couple de deux programmes, A décrivant le premier et B le second. Chaque connecteur logique est ainsi interprété sous la forme d'une construction informatique : les formules sont maintenant justifiées par des objets de nature différentes à travers une sémantique dite *fonctionnelle* ; on sait maintenant de quoi parlent les formules : elles parlent d'actions automatisables, d'une capacité à concrétiser l'objet du discours. Bien que la sémantique fonctionnelle donne un sens bien défini aux formules démontrables, la signification apportée aux formules non démontrables semble assez floue. Dans les systèmes constructifs, la négation $\neg A$ d'une formule A est usuellement définie par l'implication $A \to \bot$, avec $\bot$ la formule *absurde*, celle qui n'admet aucune représentation. La formule A est réfutable quand sa négation est démontrable ; alors $A \to \bot$ est représenté sous la forme d'une fonction qui attend un programme décrit par A et qui calcule un programme décrit par $\bot$. La formule $\bot$ n'ayant pas de représentation fonctionnelle, A en est également dépourvue : la fonction décrite par $\neg A$ est parfaitement inutile car elle ne peut être appliquée à aucun programme ; un programme utilisant une telle fonction en est réduit à la passer de fonctions en fonctions sans jamais l'appliquer à quoi que ce soit, telle qu'il agirait face à un objet neutre sans aucun contenu algorithmique. Même si une formule peut avoir un sens dans la sémantique fonctionnelle, certaines de ses sous-formules n'en ont pas forcément, dans le sens où elles sont dénuées de représentation fonctionnelle ; de plus, il n'existe aucun moyen de donner un sens aux formules indécidables, si tant est qu'elle en ont un.

De même que le principe du tiers exclu est rejeté par les constructivistes en raison de ses conséquences ontologiques, quelques logiciens rejettent les formules n'admettant aucune représentation fonctionnelle apte à leur donner un sens. En effet, la raison d'être d'une sémantique est de donner un sens aux formules ; il est clair qu'une sémantique autorisant l'occurrence de formules n'ayant pas de sens échoue dans sa mission. On pourrait objecter le fait que de telles formules, à l'instar de $\perp$ dénotant l'absurde, ont pour sens de ne pas avoir de sens ; mais l'expression de cette absence de sens, au niveau du méta-système, nécessite de donner un sens à la négation, donc de garantir que l'absurdité au niveau du méta-système est également dénuée de sens, une notion équivalente à la cohérence. Or, on a observé dans le cas des sémantiques basées sur les modèles que la cohérence d'un système donné échappe inévitablement à ce système. On se retrouve de nouveau à tenter justifier une formule dans un système par une formule de même nature dans le méta-système, elle même fondée par une formule analogue dans un méta-méta-système, etc, selon un principe mal fondé demandant une régression le long d'une suite infinie de systèmes de plus en plus puissants, et donc *a priori* de plus en plus douteux. Le comportement relatif aux programmes décrits par $\perp$ – qui n'est pas censé exister, mais ceci ne saurait être ontologiquement pertinent – est entièrement résumé dans la règle du *ex falso* dont voici l'énoncé : de l'absurde on peut déduire toutes les formules. Quand cette règle fait partie des règles de base du système formel, rien ne nous permet de comprendre sa raison d'être ; mais quand elle est dérivable à partir des autres règles, comme dans la logique propositionnelle du second ordre ou l'arithmétique, on dispose d'un moyen d'investigation en étudiant sa démonstration… qui se révèle d'une grande pauvreté : dans la logique propositionnelle du second ordre, la fonction associée à la règle du *ex falso* est l'identité, qui plus est une fonction dont le domaine est vide. Rien n'est dit sur le programme associé à $\perp$, rien sur sa structure interne, rien sur son contenu algorithmique, rien sur ses arguments : son existence – ou plutôt sa non existence – est postulée de manière purement discursive sans jamais être justifiée par un objet sémantique. Puisque les formules absurdes, de même que les formules indécidables, ne semblent pouvoir être associé à un programme, une solution possible consiste à restreindre la notion de formules, qu'on appelle la *morphologie*, de manière à ce que les formules sans représentation fonctionnelle en soient exclues. Pour construire cette morphologie, il faut faire appel aux règles du système formel, la *syntaxe* du système, afin de garantir par certaines démonstrations que les formules sont associées à certains programmes ; mais la construction de la syntaxe présuppose habituellement la donnée d'une morphologie ; on est alors contraint d'introduire une syntaxe de laquelle on peut dériver la morphologie : la syntaxe doit *subsumer* la morphologie [5]. De cette manière, aucune formule dénuée de sens ne peut apparaître dans une démonstration et on obtient la propriété recherchée : toute formule a un sens donné par le programme dont elle décrit les propriétés. Bien sûr, la négation disparaît totalement de toutes les formules ; c'est pourquoi de tels systèmes formels sont dits *sans négation*, ou *positifs*.

Il n'est pas nécessaire de s'engager dans des réflexions philosophiques pour constater l'intérêt que suscite la contrainte de ne parler que d'objets concrets ou d'abstractions portant sur des objets concrets. Dans l'enseignement, en particulier en mathématiques, plus d'un étudiant se sent troublé par la donnée d'objets incohérents dans le cadre de la règle du *ex falso* ; la question revient souvent : « Comment peut-on avoir le droit de supposer des choses fausses ? ». Manifestement, l'énoncé faux ne fait pas sens dans leur esprit : ils n'ont rien à manipuler, rien à toucher. Il est fréquent dans l'enseignement des mathématiques de faire appel à des exemples illustrant des notions abstraites trop éthérées pour être saisies telles-quelles. Ces exemples fournissent aux étudiants un guide concret, un tuteur, le long duquel se développera un savoir général. La formalisation de cette pratique pédagogique est un passage obligé dans l'étude scientifique de l'apprentissage. En dégageant rigoureusement les propriétés de l'intégration du savoir abstrait, il devient possible de l'appliquer en dehors de son milieu naturel afin de ne plus le limiter aux être humains. De même que la formalisation de la notion de calcul a permis de la rendre indépendant de l'esprit humain et ainsi de concevoir des machines universelles (du moins Turing-complètes), la formalisation d'une partie de l'apprentissage et la construction d'une sémantique formelle adaptée, c'est-à-dire une sémantique positive, mène à l'expérimentation de l'acquisition du savoir à travers des processus automatiques. Ce projet est très ambitieux ; on espère dans un premier temps dégager clairement et rigoureusement certaines propriétés du savoir abstrait. Un exemple serait l'implémentation d'une méthode de raisonnement par généralisation dans le cadre de l'intelligence artificielle. La machine commence par extraire une représentation d'une partie de son environnement par mesure directe via des capteurs, qu'elle conserve en mémoire à l'aide de formules. Ces formules sont nécessairement closes, c'est-à-dire qu'elle ne porte que sur des objets concrets. Puis la machine construit des formules destinées à représenter un savoir abstrait en substituant certains sous-termes des formules concrètes par des variables libres. Il ne reste plus qu'à démontrer les formules abstraites ; la machine peut s'aider de stratégies de preuve automatiques, mais elle dispose de l'information contenue dans le processus suivi lors de la construction des formules concrètes : la dérivations des propriétés concrètes de l'environnement servirait alors de guide lors de la démonstration des propriétés abstraites. Il s'agit ici de redéfinir le *raisonnement par induction* dans le cadre d'un système formel positif ; par là même on redéfinit la notion d'abstraction : conformément aux sémantiques positives, toute notion abstraite doit nécessairement porter sur quelque objet concret ; inversement, de toute propriété concrète on peut extraire des propriétés abstraites valables dans des classes d'objet plus vastes.

En génie logiciel, les systèmes formels sont utilisés pour garantir que les programmes développés sont exempts d'erreurs. On rédige une spécification formelle composée de formules correspondant au cahier des charges du programme ; parmi ces formules, certaines décrivent l'environnement d'exécution et d'autres correspondent à des invariants, des formules devant toujours être vérifiées quel que soit l'état d'exécution du programme. On construit alors le programme pas à pas à l'aide d'outils garantissant que pour tout environnement décrit par la spécification, le programme respecte les invariants. On distingue plusieurs types de propriétés parmi lesquels on compte la *sûreté*, la *cohérence* et la *vivacité*. Un programme est sûr quand il vérifie les invariants qui lui sont associés. La cohérence concerne les spécifications comme suit : on souhaite que toute spécification admette un environnement la respectant. En effet, quand une spécification est incohérente, elle permet de valider n'importe quel invariant : un programme quelconque est alors jugé sûr bien qu'il soit inutilisable en pratique faute d'un environnement adéquat. Un tel programme, issu d'une spécification inadaptée au dispositif qu'elle est censée représenter, peut causer des dégâts matériellement et humainement très coûteux. La vivacité correspond à une propriété dynamique du programme ; un programme ne faisant rien est trivialement sûr, mais n'est d'aucune utilité : on souhaite alors que les programme vérifie fatalement certaines propriétés à un moment donné de son exécution. L'expression des propriétés de vivacité nécessite généralement la formalisation de la manière dont s'exécute le programme, en utilisant par exemple des traces d'exécution ; mais les systèmes formels usuels ne disposent d'aucun moyen de représentation de la manière dont un programme s'exécute : ils ne rendent compte que de ce que calcule le programme. La plupart des systèmes formels, comme la méthode B ou le calcul des constructions inductif, ne disposent que d'outils garantissant la sûreté ; celle-ci émerge naturellement de tout système formel supposé correct, les autres propriétés étant très difficilement exprimables. Certains systèmes de certification, comme TLA+, permettent de rendre compte des propriétés de vivacité. Mais aucun système ne dispose de méthodes intégrées concernant la cohérence des spécifications. Faire appel à un système formel positif afin de certifier les programmes offre la garantie de la cohérence des spécifications puisque les formules y apparaissant sont justifiées par un objet les satisfaisant. Cet objet fournit un outil supplémentaire de certification qui permet de construire les spécifications par raffinement et de vérifier à chaque étape l'adéquation de la spécification avec le dispositif réel à piloter : il constitue un *prototype formel* de l'appareil à spécifier. De plus, l'absence d'absurdité permet d'imposer une forme affaiblie de vivacité que nous appelons l'*utilité* : supposons qu'un programme vérifie une propriété ; l'existence de témoins rendant compte des spécifications est conservée quel que soit l'état d'exécution du programme ; c'est-à-dire que l'existence de témoins correspond à l'existence d'un raffinement de l'environnement d'exécution tel que le programme vérifie la propriété ; on obtient dans tous les cas la garantie que tout état du programme peut être atteint dans un environnement d'exécution adéquat. Dans le cas de la vivacité, on demande à ce qu'un état du programme soit fatalement atteint ; tandis que dans le cas de l'utilité, on demande à ce qu'un état du programme puisse être atteint. Dans les systèmes positifs, les programmes sont utiles quel que soit la propriété exprimée.

Les systèmes pédagogiques

L'origine des systèmes pédagogiques remontent au milieu des années 1980. Dans le mémoire de DEA de Loïc Colson [5], on peut lire dans la conclusion la description informelle de ce qui deviendra vingt ans plus tard l'objet du présent mémoire : il évoque l'idée que la syntaxe (*i.e.* la notion de programme/preuve) puisse *subsumer* la morphologie (*i.e.* la notion de type/formule) afin que les types émergent de l'objet qui leur donne une signification, menant ainsi à un calcul sans absurdité. L'idée de base était d'ajouter une contrainte à la génération des formules : si le terme t est de type A, alors A est un type ; mais elle ne fonctionne pas car elle contraint tous les types à être habités. Bien que le concept ne fut pas clairement défini, il me fut présenté par son auteur sous le nom de système formel *pédagogique*. Seule la composante logique du calcul était maintenant prise en compte. L'idée avait évolué ; elle consistait alors à remplacer la règle (Hyp) dans le calcul des séquents intuitionnistes :

$$\frac{F \in \Gamma}{\Gamma \vdash F}\ (\text{Hyp})$$

par la règle pédagogique (P-Hyp) :

$$\frac{F \in \Gamma \qquad \vdash \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash F}\ (\text{P-Hyp})$$

dans laquelle σ est une substitution des variables libres des formules du contexte Γ. Le terme « pédagogique » fut choisi à cause de l'analogie entre l'utilisation d'exemples dans la pratique de l'enseignement et la motivation des formules à l'aide de substitutions les rendant prouvables. Avec cette seule altération du système, aucun jugement ne peut être dérivé puisqu'il n'existe plus aucune règle sans prémisse. La solution proposée était d'ajouter au système la règle (N-Ax) :

$$\frac{}{\vdash \top}\ (\text{N-Ax})$$

dans laquelle la constante propositionnelle $\top$ dénote la formule trivialement vraie, représentable dans les calculs des prédicats par les formules atomiques telles que

$t = t$, avec t un terme du premier ordre. C'est sous cette forme que j'ai récupéré les systèmes pédagogiques.

La première étape fut d'étudier la tentative initiale de construction d'un système pédagogique basé sur le calcul propositionnel minimal : le calcul pédagogique minimal *naïf.* Tout d'abord, on remarque que toutes les formules sont *motivables*, c'est-à-dire que pour toute formule F il existe une substitution σ telle que la formule $\sigma \cdot F$ soit prouvable. On montre alors que tous les théorèmes dans le calcul minimal sont des théorèmes dans la version naïve du calcul pédagogique associé. Malheureusement, ce qui est vrai pour les théorèmes ne l'est plus pour les jugements : le jugement $\top \to \top \vdash \top$ n'est pas dérivable dans le calcul naïf. La solution est de modifier la règle (Ax) sous la forme de la règle (P-Ax) :

$$\frac{\vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash \top}\ (\text{P-Ax})$$

On obtient alors le calcul pédagogique minimal, dans lequel on peut dériver tous les jugements dérivables dans le calcul usuel. L'observation de la preuve de ce résultat met en évidence l'identité structurelle entre les preuves usuelles et les preuves pédagogiques dans lesquelles on remplace les occurrences de la règle (P-Hyp) par des applications de la règle (Hyp). Comme la structure des preuves est conservée, il en est forcément de même pour les λ-termes dans le cadre des systèmes fonctionnels issus de l'isomorphisme de Curry-Howard. On obtient alors un λ-calcul pédagogique simplement typé à partir du λ-calcul simplement typé.

Après avoir construit un système formel pédagogique viable, la seconde étape fut d'observer son comportement en présence de la négation. Pour cela, on ajoute au calcul pédagogique minimal les règles régissant la constante propositionnelle $\bot$ dénotant l'*absurdité*. Dans le premier cas, on ajoute la règle $(\bot_\mathrm{i})$:

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_\mathrm{i})$$

afin d'obtenir la version pédagogique du calcul propositionnel intuitionniste sur l'implication et la négation. Dans le second cas, on définit la négation $\neg F$ d'une formule F par la formule $F \to \bot$, puis on ajoute la règle $(\bot_\mathrm{c})$:

$$\frac{\Gamma, \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\bot_\mathrm{c})$$

afin d'obtenir la version pédagogique du calcul propositionnel classique. Dans les deux cas, le calcul pédagogique obtenu se révèle équivalent au calcul pédagogique minimal car la contrainte pédagogique interdit toute occurrence du symbole $\bot$ dans les formules. Par l'isomorphisme de Curry-Howard, il est alors possible de donner un sens informatique à la disparition de l'absurdité : puisque tous les types sont motivables, pour tous les λ-termes t de type $A \to B$ clos, il existe toujours un λ-terme u de type A pouvant être passé en paramètre à t : on dit alors que tous les λ-termes typables sont *utiles* car leur contenu algorithmique peut toujours être utilisé pour manipuler leur paramètre. Ainsi, l'utilité est le pendant fonctionnel de la contrainte pédagogique.

Le calcul propositionnel minimal pose assez peu de problèmes parce que d'une part l'absurdité y est définie de manière *ad hoc* et d'autre part il est décidable. La confrontation de la contrainte pédagogique avec un calcul indécidable dans lequel l'absurde est naturellement définissable constitue un passage obligatoire afin de juger sa robustesse ; c'est pourquoi la pédagogisation du calcul propositionnel du second ordre s'impose naturellement. L'absurde y est définissable par la formule $\forall\alpha.\alpha$, que nous notons alors $\perp$. Dans un premier temps, il convient d'étudier le système dans lequel on se contente d'introduire les règles (P-Ax) et (P-Hyp), comme cela a été fait avec le calcul minimal. Le système obtenu est appelé le calcul propositionnel du second ordre *faiblement* pédagogique ; il est dit *faible* car il est possible d'y démontrer des théorème contenant la formule $\perp$, comme par exemple $\perp \to \perp$. Cependant, la formule $\perp$ ne possède pas les propriétés usuelle de l'absurde ; tout d'abord, la règle $(\perp_{\mathsf{i}})$ n'est pas dérivable dans le calcul pédagogique ; ensuite, la formule $\forall\alpha.\perp \to \alpha$ n'est pas un théorème du calcul pédagogique. Ainsi la formule $\perp$ se comporte comme une constante propositionnelle neutre : dans tous les théorèmes, elle peut être remplacée par une variable propositionnelle quelconque. Ce calcul, bien qu'il autorise des occurrences de la formule $\perp$, semble appartenir à la famille des systèmes *paraconsistents*, qui sont des systèmes dits *non explosifs* dans lesquels aucune formule ne peut impliquer toutes les autres formules. Cette propriété de paraconsistence est pour l'instant de l'ordre de la conjecture ; en effet, la bonne définition de la négation dans le calcul faiblement pédagogique est la formule $\forall\alpha.\top \to \alpha$, car on montre que si la formule $\forall\alpha.\beta \to \alpha$ est motivable – β est alors la définition internalisée de l'absurde – alors elle est motivable par la substitution remplaçant la variable β par $\forall\alpha.\top \to \alpha$. Malgré le fait que ce calcul soit strictement plus faible que le calcul intuitionniste usuel, il existe une traduction permettant de plonger le calcul usuel dans le calcul faiblement pédagogique ; ainsi le calcul pédagogique ne souffre d'aucune perte d'expressivité. Il subsiste cependant un problème : ce calcul n'est pas associé à un λ-calcul viable car certaines preuves, tel que la dérivation du théorème $\perp \to \perp$, n'admettent aucune forme normale ; les programmes y sont alors très mal représentés. Pour obtenir un calcul pédagogique du second-ordre ayant de bonnes propriétés, en particulier l'absence d'occurrences de formules non motivables dans les dérivations, auquel est associé un λ-calcul normalisant, il est nécessaire de contraindre encore plus le calcul. La solution proposée est de remplacer la règle ($\forall_e$) :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash [\alpha\backslash U]\cdot A}\,(\forall_e)$$

par la règle (P-$\forall_e$) :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall\alpha.A \quad \vdash \sigma\cdot U}{\Gamma \vdash [\alpha\backslash U]\cdot A}\,(\text{P-}\forall_e)$$

dans laquelle on demande à ce que la variable quantifiée soit instanciée par une formule motivable. On obtient alors le calcul propositionnel pédagogique du second ordre. L'altération de la règle ($\forall_e$) est naturelle en considérant qu'un jugement $\gamma \vdash F$ permet de dériver un jugement $\vdash \forall\gamma.\gamma \rightarrow F$: si on remplace γ par une formule dans le premier jugement, les règles (P-Ax) et (P-Hyp) lui imposent d'être motivable ; ainsi la variable γ doit être instanciée par une formule motivable dans le second jugement pour conserver les bonnes propriétés des systèmes pédagogiques. Dans le système obtenu, l'absurdité disparaît complètement dans le sens où aucune formule apparaissant dans une dérivation ne peut contenir une sous-formule non motivable : on dit que les formules sont *héréditairement motivables*. Ce système a la particularité de pouvoir motiver *trivialement* toutes les formules motivables : une motivation *triviale* est une substitution remplaçant les variables propositionnelles par des formules prouvables ; en particulier, toute formule motivable est motivable par la substitution remplaçant toutes les variables par $\top$. Ce résultat est à mettre en parallèle avec remarque de Heyting dans [20] suggérant que, dans un système formel sans négation, seules les propositions vraies créent du sens. La signification de cette remarque se trouve alors précisé formellement par la propriété qu'ont les formules d'être héréditairement trivialement motivables. Cette fois-ci, le λ-calcul associé normalise. On peut également plonger le calcul usuel dans le calcul pédagogique à l'aide d'une traduction des formules ; la contrainte pédagogique n'occasionne alors aucune perte d'expressivité.

Afin d'achever l'étude des systèmes pédagogiques propositionnels, il ne restait plus qu'à considérer les calculs propositionnels d'ordre supérieur. Comme dans le cas du second ordre, le premier système construit fut le calcul propositionnel d'ordre supérieur faiblement pédagogique, obtenu à partir du calcul intuitionniste usuel et des règles (P-Ax) et (P-Hyp). Dans ce système, tous les théorèmes du calcul usuel sont des théorèmes du calcul faiblement pédagogique. Mais on a vu que certains théorèmes du second ordre ne sont pas des théorèmes pédagogiques du second ordre. La raison est que chaque théorème à l'ordre n est un théorème pédagogique à l'ordre $n + 1$: il y a toujours un écart d'exactement un ordre ; ainsi, tous les théorèmes du second ordre sont des théorèmes pédagogiques au troisième ordre, mais pas en dessous. Comme dans le cas du calcul pédagogique minimal naïf, ce qui est vrai pour les théorèmes est faux pour les jugements : la contrainte pédagogique impose que toute formule dérivée soit motivable quel que soit le contexte ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash \bot$ n'est dérivable pour aucun contexte Γ alors que dans le cas usuel, par exemple, le jugement $\bot \vdash \bot$ est aisément dérivable. En remplaçant la règle $(\forall_e)$ par la règle (P-$\forall_e$), comme dans le cas du second ordre, on obtient le calcul propositionnel pédagogique *contraint*. Dans les calculs d'ordre supérieur, les formules sont généralisés en prédicats, qui sont des fonctions dont le type est décrit par leur genre κ : il y a le genre des formules, noté $\star$, et le genre $\kappa \Rightarrow \iota$ des fonctions consommant les prédicats de genre κ et produisant des prédicats de genre ι. La notion de motivation est étendue aux prédicats : un prédicat P est motivable si il produit une formule motivable quel que soit les prédicats qui lui sont passés en argument ; plus formellement, si on note $\kappa_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \kappa\star$ le genre de P, alors P est motivable quand la formule $\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n.P\alpha_1 \ldots \alpha_n$ est motivable. Dans ce système, les formules apparaissant dans les dérivations ne sont pas forcément héréditairement motivables ; cependant, toutes les sous-formules de ces formules sont vraies pour au moins une distribution de valeurs de vérités, au sens de la sémantique booléenne binaire : ainsi ce calcul est dénué de négation ; mais il n'est pas pour autant pédagogique au sens fort. On observe ici une différence importante entre les systèmes pédagogiques et les systèmes sans négation : la contrainte pédagogique et les bonnes propriétés qu'on lui demande sont fondamentalement syntaxiques car les motivations, qui sont les témoins du sens des formules, sont des objets finis construits à partir des formules ; tandis que dans les systèmes sans négation, la contrainte peut n'être que sémantique. On note que ces deux calculs, le faible et le contraint, ne sont pas associés à un λ-calcul normalisant ; dans les deux cas, on peut construire une dérivation d'un jugement $\vdash F \to F$ dans lequel la formule F n'est pas motivable ; mais la mise en forme normale de cette dérivation nécessite de pouvoir dériver le jugement $F \vdash F$, ce qui n'est possible que si F est une formule motivable. L'ajout d'un principe d'extentionnalité résout ce problème ; on définit l'égalité extensionnelle $P =_\kappa Q$ de deux prédicats P et Q par le fait qu'ils produisent des formules équivalentes quel que soit les arguments qu'on leur passe en paramètres : $P =_\kappa Q$ signifie que P et Q sont indiscernables du point de vue du calcul. On ajoute alors au calcul la règle d'extentionnalité (Ext) :

$$\frac{\Gamma \vdash [\alpha^\kappa \backslash U]\cdot A \quad \Gamma \vdash U =_\kappa}{\Gamma \vdash [\alpha^\kappa \backslash V]\cdot A}\ (\mathrm{Ext})$$

On obtient le calcul propositionnel pédagogique du second ordre, dans lequel tous les prédicats sont héréditairement trivialement motivables. Malheureusement, il n'y a pas à notre connaissance de λ-calcul prenant en compte la règle d'extentionnalité ; sa construction dépasse le cadre de cette thèse et donc nous n'en parlerons pas. Comme dans le cas du second ordre, on peut plonger le calcul usuel dans le calcul pédagogique à l'aide d'une traduction des formules ; on montre que ce plongement opère même dans le cas d'un calcul classique.

Première partie

Systèmes formels pédagogiques

Chapitre 1

Calculs propositionnels pédagogiques du premier ordre

1.1 Rappels sur le calcul propositionnel minimal

Le calcul propositionnel minimal est sans doute l'un des plus simples systèmes formels connus. Il décrit le comportement d'un seul connecteur logique, l'implication, opérant sur des propositions logiques. Cependant, il est suffisamment puissant pour simuler le comportement d'autres connecteurs logiques tels que la conjonction, la disjonction et la négation. En effet, certaines traductions comme celle que nous présenterons au chapitre 3 permettent de plonger le calcul propositionnel classique dans le calcul propositionnel minimal.

Nous définissons tout d'abord les formules du calcul :

Définition 1.1.1. *Les* formules propositionnelles du premier ordre*, que nous appelons* formules *dans ce chapitre en l'absence d'ambiguïté, sont définies par récurrence comme suit :*

- *la constante propositionnelle $\top$ (la formule* vraie*) est une formule ;*
- *les variables propositionnelles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des formules ;*
- *si A et B sont des formules, alors $A \to B$ est une formule.*

Afin d'alléger l'écriture des formules, nous écrivons $A \to B \to C$ les formules de la forme $A \to (B \to C)$.

Les formules seront toujours prouvées dans le cadre d'un contexte représentant l'ensemble des hypothèses nécessaires au raisonnement :

Définition 1.1.2. *Un* contexte propositionnel du premier ordre *est un ensemble fini de formules, et dans ce chapitre nous les appelons* contextes *quand aucune ambiguïté n'est à craindre. Un* jugement propositionnel du premier ordre *est un* *triplet noté* $\Gamma \vdash_{\mathrm{id}} F$*, avec* Γ *un contexte,* F *une formule et* id *un identifiant textuel. Dans ce chapitre, les jugements propositionnels du premier ordre sont appelés* jugements *quand cela ne prête pas à confusion.*

Le contexte vide est représenté par le mot vide ; ainsi, pour toute formule F et tout identifiant id, le jugement $\emptyset \vdash_{\mathrm{id}} F$ s'écrit également $\vdash_{\mathrm{id}} F$. De plus, pour tous contextes Γ et Δ, le contexte $\Gamma \cup \Delta$ est noté Γ, Δ. En particulier, pour toute formule A, le jugement $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{id}} F$ est noté $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{id}} F$.

Ensuite, nous définissons le calcul proprement dit, sa morphologie et sa syntaxe. Nous nous plaçons dans le cadre des systèmes de déduction naturelle développés par Gentzen [11], puis par Prawitz [35] sous la forme d'un calcul des séquents intuitionniste. Nous l'avons choisi car il offre une présentation fidèle du raisonnement hypothético-déductif intuitif.

Définition 1.1.3. *Le* calcul propositionnel minimal*, abrégé en CPM, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles suivantes :*

$$\frac{}{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} \top}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash_{\mathrm{m}} F}\ (\mathrm{Hyp})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathrm{m}} B}{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} A \to B}\ (\to_{\mathrm{i}}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} A \to B \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{m}} A}{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} B}\ (\to_{\mathrm{e}})$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans CPM dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

Enfin, nous proposons un exemple de dérivation afin de rendre plus explicite le fonctionnement du calcul. La dérivation choisie est celle du théorème $\vdash_{\mathrm{m}} \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$ correspondant à la règle du *modus ponens* :

Exemple. dérivation du jugement $\vdash_{\mathrm{m}} \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$:
1) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash_{\mathrm{m}} \alpha \to \beta$ par (Hyp) ;
2) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash_{\mathrm{m}} \alpha$ par (Hyp) ;
3) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash_{\mathrm{m}} \beta$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 1 et 2 ;
4) $\alpha \vdash_{\mathrm{m}} (\alpha \to \beta) \to \beta$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\vdash_{\mathrm{m}} \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 4.

1.2 Calcul propositionnel pédagogique minimal

1.2.1 Tentative initiale

L'idée initiale pour pédagogiser CPM est de remplacer la règle (Hyp) :

$$\frac{F \in \Gamma}{\Gamma \vdash F}\ \text{(Hyp)}$$

par la règle (P-Hyp) :

$$\frac{F \in \Gamma \quad \vdash \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash F}\ \text{(P-Hyp)}$$

avec σ une substitution opérant sur les formules contenues dans Γ. Il nous faut alors définir ce qu'est une substitution :

Définition 1.2.1. *Une* substitution σ *est une application des formules dans les formules, déterminée par un ensemble de variables propositionnelles noté* $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *et par une application* f *des variables dans les formules. Pour toute formule F l'image de F par σ, notée $\sigma{\cdot}F$, est définie par récurrence sur F comme suit :*
$F = \top$: $\sigma{\cdot}F = \top$;
$F = \alpha$: $\sigma{\cdot}F = \mathrm{f}(\alpha)$ *si* $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$, *et* $\sigma{\cdot}F = \alpha$ *sinon ;*
$F = A \to B$: $\sigma{\cdot}F = (\sigma{\cdot}A) \to (\sigma{\cdot}B)$.
L'ensemble $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *est appelé le* domaine *de la substitution* σ.

Pour tout contexte Γ, pour toute substitution σ et tout identifiant id, l'ensemble des jugements $\vdash_{\mathrm{id}} \sigma{\cdot}F$ tels que $F \in \Gamma$ est noté $\vdash_{\mathrm{id}} \sigma{\cdot}\Gamma$.

La règle (Ax) constitue une règle sans prémisse ; mais elle n'est pas en accord avec la conception intuitive des systèmes pédagogiques à cause de la présence d'un contexte arbitraire. Nous avons besoin d'une règle sans prémisse ; en effet, la règle (P-Hyp) possédant des prémisses, il nous faut une règle (Ax) adaptée. La règle (N-Ax) constitue un candidat potentiel :

$$\frac{}{\vdash \top}\ \text{(N-Ax)}$$

Nous pouvons alors définir une version pédagogique de CPM :

Définition 1.2.2. *Le* calcul propositionnel pédagogique minimal naïf, *abrégé en N-CPM, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash_{\mathrm{n}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles* ($\to_{\mathrm{i}}$) *et* ($\to_{\mathrm{e}}$)*, ainsi que des deux règles suivantes :*

$$\frac{}{\vdash_{\mathrm{n}} \top}\ \text{(N-Ax)}$$

$$\frac{F \in \Gamma \quad \vdash_{\mathrm{n}} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{n}} F} \text{ (P-Hyp)}$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{n}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans N-CPM dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

N-CPM permet déjà de construire des dérivations de théorèmes bien connus, tels que $\vdash_{\mathrm{n}} \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$ dont la dérivation dans CPM a été donnée dans la section précédente :

Exemple. dérivation du jugement $\vdash_{\mathrm{n}} \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$:
1) $\vdash_{\mathrm{n}} \top$ par (N-Ax) ;
2) $\top \vdash_{\mathrm{n}} \top$ par (P-Hyp) et 1 ;
3) $\vdash_{\mathrm{n}} \top \to \top$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash_{\mathrm{n}} \alpha \to \beta$ par (P-Hyp), 1 et 3 ;
5) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash_{\mathrm{n}} \alpha$ par (P-Hyp) et 1 ;
6) $\alpha, \alpha \to \beta \vdash_{\mathrm{n}} \beta$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 4 et 5 ;
7) $\alpha \vdash_{\mathrm{n}} (\alpha \to \beta) \to \beta$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 6 ;
8) $\vdash_{\mathrm{n}} \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 7.

Les systèmes pédagogiques induisent des objets propres à la notion d'exemple. Les motivations sont des objets satisfaisant une définition, des exemples la motivant. Dans CPM et N-CPM, cette notion est formalisée comme suit :

Définition 1.2.3. *Soit C un calcul dont la morphologie est constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash_{\mathrm{id}} F$*. Pour tout contexte* Δ*, une* motivation *de* Δ *dans C est une substitution* σ *telle que les jugements* $\vdash_{\mathrm{id}} \sigma \cdot \Delta$ *soient dérivables. Quand un contexte admet une motivation dans C, on dit qu'il est* motivable*. De plus, une motivation d'une formule F dans C est une motivation du singleton* $\{F\}$ *dans C.*

Pour toute formule F, on note $F_\top$ la formule F dans laquelle toutes les variables propositionnelles sont remplacées par $\top$. De même, pour tout contexte Γ, on note $\Gamma_\top$ l'ensemble des formules $F_\top$ telles que $F \in \Gamma$.

Il convient tout d'abord de caractériser les formules motivables dans N-CPM ; on prouve ci-dessous que toutes les formules sont motivables dans N-CPM :

Lemme 1.2.1. *Pour toute formule F, le jugement* $\vdash_{\mathrm{n}} F_\top$ *est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur F :
- $F = \top$: on a $\top_\top = \top$; ainsi le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} F_\top$ est dérivable par la règle (N-Ax) ;
- $F = \alpha$: on a $\alpha_\top = \top$ et on conclut comme dans le cas précédent ;
- $F = A \to B$: on a $F_\top = A_\top \to B_\top$, donc nous avons juste à dériver le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} A_\top \to B_\top$:

1) $\vdash_{\mathrm{n}} A_\top$ par hypothèse de récurrence ;
2) $\vdash_{\mathrm{n}} B_\top$ par hypothèse de récurrence ;
3) $B_\top, A_\top \vdash_{\mathrm{n}} B_\top$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
4) $B_\top \vdash_{\mathrm{n}} A_\top \to B_\top$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\vdash_{\mathrm{n}} B_\top \to (A_\top \to B_\top)$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 4 ;
6) $\vdash_{\mathrm{n}} A_\top \to B_\top$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 5 et 2.

□

Nous allons maintenant comparer l'expressivité de CPM et de N-CPM. On remarque immédiatement que N-CPM ne permet pas de prouver plus de choses que CPM, puisque il est une restriction de CPM :

Lemme 1.2.2. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{n}} F$ *dérivable, le jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} F$ *est dérivable.*

Démonstration. Immédiate par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{n}} F$. □

Réciproquement, tout ce qui est prouvable dans CPM est prouvable dans N-CPM :

Lemme 1.2.3. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} F$ *dérivable, le jugement* $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to F$ *est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} F$:

$\dfrac{}{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} \top}$ (Ax) : nous avons juste à dériver le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to \top$:

1) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma_\top$ par le lemme 1.2.1 ;
2) $\vdash_{\mathrm{n}} \top$ par (N-Ax) ;
3) $\top, \Gamma \vdash_{\mathrm{n}} \top$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
4) $\vdash_{\mathrm{n}} \top \to \Gamma \to \top$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to \top$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 2 et 4 ;

$\dfrac{}{\Gamma, F \vdash_{\mathrm{m}} F}$ (Hyp) : nous avons juste à dériver le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} (\Gamma, F) \to F$:

1) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma_\top$ par le lemme 1.2.1 ;
2) $\vdash_{\mathrm{n}} F_\top$ par le lemme 1.2.1 ;
3) $\Gamma, F \vdash_{\mathrm{n}} F$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
4) $\vdash_{\mathrm{n}} (\Gamma, F) \to F$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash_{\mathrm{m}} B}{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} A \to B}$ $(\to_{\mathrm{i}})$: par hypothèse de récurrence le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to A \to B$ est dérivable, et comme $\Gamma \to A \to B = (\Gamma, A) \to B$ le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} (\Gamma, A) \to B$ est dérivable ;

$\dfrac{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} A \to B \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{m}} A}{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} B}$ $(\to_{\mathrm{e}})$: nous avons juste à dériver le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to B$:

1) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma_{\top}$ par le lemme 1.2.1 ;
2) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma_{\top} \to (A \to B)_{\top}$ par le lemme 1.2.1 ;
3) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma_{\top} \to A_{\top}$ par le lemme 1.2.1 ;
4) $\Gamma, \Gamma \to (A \to B), \Gamma \to A \vdash_{\mathrm{n}} \Gamma$ par (P-Hyp), 1, 2 et 3 ;
5) $\Gamma, \Gamma \to (A \to B), \Gamma \to A \vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to (A \to B)$ par (P-Hyp), 1, 2 et 3 ;
6) $\Gamma, \Gamma \to (A \to B), \Gamma \to A \vdash_{\mathrm{n}} A \to B$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 5 et 4 ;
7) $\Gamma, \Gamma \to (A \to B), \Gamma \to A \vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to A$ par (P-Hyp), 1, 2 et 3 ;
8) $\Gamma, \Gamma \to (A \to B), \Gamma \to A \vdash_{\mathrm{n}} A$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 7 et 4 ;
9) $\Gamma, \Gamma \to (A \to B), \Gamma \to A \vdash_{\mathrm{n}} B$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 6 et 8 ;
10) $\Gamma \to (A \to B), \Gamma \to A \vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to B$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 9 ;
11) $\Gamma \to (A \to B), \vdash_{\mathrm{n}} (\Gamma \to A) \to \Gamma \to B$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 10 ;
12) $\vdash_{\mathrm{n}} (\Gamma \to (A \to B)) \to (\Gamma \to A) \to \Gamma \to B$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 11 ;
13) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to (A \to B)$ par hypothèse de récurrence ;
14) $\vdash_{\mathrm{n}} (\Gamma \to A) \to \Gamma \to B$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 12 et 13 ;
15) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to A$ par hypothèse de récurrence ;
16) $\vdash_{\mathrm{n}} \Gamma \to B$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 14 et 15.

□

Proposition 1.2.4. *Pour toute formule F, le jugement $\vdash_{\mathrm{n}} F$ est dérivable si et seulement si le jugement $\vdash_{\mathrm{m}} F$ est dérivable.*

Démonstration. Immédiate à l'aide des lemmes 1.2.2 et 1.2.3. □

Bien que CPM et N-CPM soient équivalents du point de vue des théorèmes, nous ne savons encore rien sur les jugements de N-CPM quand leur contexte n'est pas vide : nous allons montrer qu'il existe des jugements dérivables dans CPM qui ne sont pas dérivables dans N-CPM. On définit deux ensembles de formules, $\mathcal{N}_{\mathrm{v}}$ et $\mathcal{N}_{\mathrm{f}}$, avec $\mathcal{N}_{\mathrm{v}}$ construit à la manière de l'ensemble des formules vraies et $\mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ à la manière de l'ensemble des formules fausses : la seule différence consiste à faire de la formule $\top$ un élément de $\mathcal{N}_{\mathrm{f}}$.

Définition 1.2.4. *Pour toute formule F, les relations $F \in \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$ et $F \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ sont définies simultanément par récurrence sur F :*
$F = \top$: $F \notin \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$ et $F \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$;
$F = \alpha$: $F \notin \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$ et $F \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$;
$F = A \to B$: $F \in \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$ si et seulement si $A \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ ou $B \in \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$, et $F \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ si et seulement si $A \in \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$ et $B \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$.

Lemme 1.2.5. *Pour toute formule F, $F \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ si et seulement si $F \notin \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$.*

Démonstration. Par récurrence sur F :
$F = \top$: nous avons $\top \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ et $\top \notin \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$;
$F = \alpha$: nous avons $\alpha \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ et $\alpha \notin \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$;

$F = A \to B$: nous traitons les deux sens de l'équivalence séparément :
- supposons que $A \to B \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$: par définition nous avons $A \in \mathcal{N}_\mathrm{v}$ et $B \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$, donc par hypothèse de récurrence nous avons $A \notin \mathcal{N}_\mathrm{f}$ et $B \notin \mathcal{N}_\mathrm{v}$; ainsi $A \to B \notin \mathcal{N}_\mathrm{v}$;
- supposons que $A \to B \notin \mathcal{N}_\mathrm{v}$: par définition nous avons $A \notin \mathcal{N}_\mathrm{f}$ et $B \notin \mathcal{N}_\mathrm{v}$, donc par hypothèse de récurrence nous avons $A \in \mathcal{N}_\mathrm{v}$ et $B \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$; ainsi $A \to B \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$.

□

L'ensemble $\mathcal{N}_\mathrm{f}$ est conçu pour qu'il hérite de certaines propriétés des formules réfutables ; en particulier, dans tout système cohérent, si on peut dériver une formule réfutable F sous les hypothèses Γ, alors Γ contient une formule réfutable :

Lemme 1.2.6. *Pour tout jugement $\Gamma \vdash_\mathrm{n} F$ dérivable, si $F \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$ et $\Gamma \neq \emptyset$ alors l'ensemble $\Gamma \cap \mathcal{N}_\mathrm{f}$ est habité (*i.e. *non vide).*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_\mathrm{n} F$:

$\dfrac{}{\vdash_\mathrm{n} \top}$ (N-Ax) : par hypothèse nous avons $\Gamma = \emptyset$, ce qui est absurde ;

$\dfrac{F \in \Gamma \quad \vdash_\mathrm{n} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash_\mathrm{n} F}$ (P-Hyp) : par hypothèse nous avons $F \in \Gamma$ et $F \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$, donc $F \in \Gamma \cap \mathcal{N}_\mathrm{f}$;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash_\mathrm{n} B}{\Gamma \vdash_\mathrm{n} A \to B}$ ($\to_\mathrm{i}$) : par définition de $F \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$ nous avons $A \in \mathcal{N}_\mathrm{v}$ et $B \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$; par hypothèse de récurrence l'ensemble $(\Gamma \cup \{A\}) \cap \mathcal{N}_\mathrm{f}$ est habité, donc deux cas se présentent :
- $A \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$: d'après le lemme 1.2.5 nous avons $A \notin \mathcal{N}_\mathrm{v}$, mais nous avons $A \in \mathcal{N}_\mathrm{v}$ par définition de $F \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$, ce qui est absurde ;
- $\Gamma \cap \mathcal{N}_\mathrm{f}$ est habité : ce cas est immédiat ;

$\dfrac{\Gamma \vdash_\mathrm{n} A \to B \quad \Gamma \vdash_\mathrm{n} A}{\Gamma \vdash_\mathrm{n} B}$ ($\to_\mathrm{e}$) : deux cas se présentent :
- $A \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$: par hypothèse de récurrence sur $\Gamma \vdash_\mathrm{n} A$ l'ensemble $\Gamma \cap \mathcal{N}_\mathrm{f}$ est habité ;
- $A \notin \mathcal{N}_\mathrm{f}$: d'après le lemme 1.2.5 nous avons $A \in \mathcal{N}_\mathrm{v}$ et par hypothèse nous avons $B \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$, donc $A \to B \in \mathcal{N}_\mathrm{f}$; ainsi, par hypothèse de récurrence sur $\Gamma \vdash_\mathrm{n} A \to B$, l'ensemble $\Gamma \cap \mathcal{N}_\mathrm{f}$ est habité.

□

Comme la formule $\top$ est dans $\mathcal{N}_\mathrm{f}$, elle se comporte comme une formule réfutable ; plus précisément, si $\top$ est dérivable sous un ensemble non vide d'hypothèses, alors l'une des hypothèses est dans $\mathcal{N}_\mathrm{f}$; mais dans certain cas, une telle hypothèse ne peut advenir sans contradiction, dans le cas par exemple ou elle est la formule $\top \to \top$. Le jugement $\top \to \top \vdash_\mathrm{n} \top$ n'est donc pas dérivable :

Proposition 1.2.7. *Le jugement* $\top \to \top \vdash_{\mathrm{n}} \top$ *n'est pas dérivable.*

Démonstration. Nous avons $\top \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$, donc d'après le lemme 1.2.6 nous avons $\top \to \top \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$. Comme $\top \in \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ nous avons $\top \to \top \in \mathcal{N}_{\mathrm{v}}$, donc $\top \to \top \notin \mathcal{N}_{\mathrm{f}}$ d'après le lemme 1.2.5, ce qui est absurde. □

1.2.2 Tentative améliorée

Le comportement du calcul N-CPM ne possède pas des propriétés souhaitables ; puisque toutes les formules sont motivables dans N-CPM, on s'attend à ce que tous les jugements dérivables dans CPM le soient également dans N-CPM. Le problème est causé par la règle (N-Ax) ; en effet, cette règle contraint beaucoup trop les contextes des jugements qu'elle permet de dériver : elle les contraint à être vide. Pourtant, il suffirait que le contexte introduit soit seulement motivable pour obtenir une règle plus en adéquation avec les autres. On décide alors de remplacer la règle (N-Ax) par la règle (P-Ax) :

$$\frac{\vdash \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} \top}\ \text{(P-Ax)}$$

afin d'obtenir un système pédagogique ayant de bonnes propriétés :

Définition 1.2.5. *Le* calcul propositionnel pédagogique minimal*, abrégé en P-CPM, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles (P-Hyp), (*$\to_{\mathrm{i}}$*) et (*$\to_{\mathrm{e}}$*), ainsi que de la règle suivante :*

$$\frac{\vdash_{\mathrm{p}} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} \top}\ \text{(P-Ax)}$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans P-CPM dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

Nous allons tout de suite vérifier que le jugement $\top \to \top \vdash_{\mathrm{p}} \top$ est dérivable afin de se rendre compte que le nouveau système est plus expressif que l'ancien :

Exemple. dérivation du jugement $\top \to \top \vdash_{\mathrm{p}} \top$:
1) $\vdash_{\mathrm{p}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\top \vdash_{\mathrm{p}} \top$ par (P-Hyp) et 1 ;
3) $\vdash_{\mathrm{p}} \top \to \top$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 2 ;
4) $\top \to \top \vdash_{\mathrm{p}} \top$ par (P-Ax) et 3.

De plus, puisque N-CPM est une restriction de P-CPM, toutes les formules sont motivables dans P-CPM : il suffit pour chaque formule de mener dans P-CPM la preuve qu'elle est motivable dans N-CPM. Il reste à vérifier que tout jugement dérivable dans CPM est également dérivable dans P-CPM :

Proposition 1.2.8. *Pour tout contexte* Γ *et toute formule* F*, le jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ *est dérivable si et seulement si le jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} F$ *est dérivable.*

Démonstration. Nous démontrons successivement les deux sens de l'équivalence :

$\Leftarrow$) nous démontrons cette implication par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} F$; tous les cas sont immédiats excepté pour les règles (Ax) et (Hyp) :

$\dfrac{}{\Gamma \vdash_{\mathrm{m}} \top}$ (Ax) : le jugement $\vdash_{\mathrm{p}} \Gamma_\top$ est dérivable d'après le lemme 1.2.1 ; ainsi nous pouvons appliquer la règle (P-Ax) afin de dériver le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} \top$;

$\dfrac{}{\Gamma, F \vdash_{\mathrm{m}} F}$ (Hyp) : les jugements $\vdash_{\mathrm{p}} \Gamma_\top$ et $\vdash_{\mathrm{p}} F_\top$ sont dérivables d'après le lemme 1.2.1 ; ainsi nous pouvons appliquer la règle (P-Hyp) afin de dériver le jugement $\Gamma, F \vdash_{\mathrm{p}} F$;

$\Rightarrow$) la démonstration de cette implication est immédiate par récurrence sur la dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$.

□

1.3 À propos de la négation

1.3.1 Calculs propositionnels classiques et intuitionnistes

Maintenant que l'on dispose d'une méthode produisant un calcul propositionnel pédagogique minimal satisfaisant, nous allons l'appliquer à des calculs sur l'implication et la négation afin d'observer le comportement de la contrainte pédagogique en présence de formules absurdes. Nous enrichissons la notion de formule à l'aide du symbole $\perp$ dénotant la formule absurde :

Définition 1.3.1. *Les* $\perp$-formules propositionnelles du premier ordre*, abrégées en* $\perp$-formules*, sont définies par récurrence comme suit :*

- *la constante propositionnelle* $\top$ *(la* $\perp$*-formule* vraie*) est une* $\perp$*-formule ;*
- *la constante propositionnelle* $\perp$ *(la* $\perp$*-formule* absurde*) est une* $\perp$*-formule ;*
- *les variables propositionnelles* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *sont des* $\perp$*-formules ;*
- *si* A *et* B *sont des* $\perp$*-formules, alors* $A \rightarrow B$ *est une* $\perp$*-formule.*

Pour toute $\perp$-formule F, la $\perp$-formule $F \rightarrow \perp$ est appelée la *négation* de F et elle est notée $\neg F$. On définit ensuite les contextes constitués de $\perp$-formules et les substitutions sur les $\perp$-formules, afin de disposer de tous les objets nécessaires à la définition de calculs sur l'implication et la négation :

Définition 1.3.2. *Les* $\perp$-contextes *et les* $\perp$-jugements *sont définis à partir des $\perp$-formules de manière analogue aux contextes et au jugements (voir la définition 1.1.2).*

Définition 1.3.3. *Les* $\perp$-substitutions *sont définis à partir des $\perp$-formules de manière analogue aux substitutions (voir la définition 1.2.1), en ajoutant que l'image de la constante $\perp$ par une $\perp$-substitution σ est $\perp$.*

Il y a essentiellement deux manières de décrire le comportement de la négation ; la première correspond à la négation dans les calculs intuitionnistes et la seconde à la négation dans les calculs classiques. Dans les calculs intuitionnistes, la règle $(\perp_\mathrm{i})$ est la seule régissant le symbole $\perp$:

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash F}\ (\perp_\mathrm{i})$$

et elle correspond à la formalisation de la règle du *ex falso*. Elle nous permet de construire le calcul propositionnel intuitionniste :

Définition 1.3.4. *Le* calcul propositionnel intuitionniste*, abrégé en CPI, est défini par :*

- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des $\perp$-jugements de la forme $\Gamma \vdash_\mathrm{i} F$;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles (Ax), (Hyp), $(\rightarrow_\mathrm{i})$ et $(\rightarrow_\mathrm{e})$, ainsi que de la règle suivante :*

$$\frac{\Gamma \vdash_\mathrm{i} \perp}{\Gamma \vdash_\mathrm{i} F}\ (\perp_\mathrm{i})$$

On dit qu'un $\perp$-jugement $\Gamma \vdash_\mathrm{i} F$ est dérivable *quand il existe une dérivation dans CPI dont la dernière règle utilisée produit ce $\perp$-jugement.*

De même, dans les calculs classiques, la règle $(\perp_\mathrm{c})$ est la seule régissant le symbole $\perp$:

$$\frac{\Gamma, \neg F \vdash \perp}{\Gamma \vdash F}\ (\perp_\mathrm{c})$$

et elle correspond à la formalisation de la règle d'élimination de la double négation. Elle nous permet de construire le calcul propositionnel classique :

Définition 1.3.5. *Le* calcul propositionnel classique*, abrégé en CPC, est défini par :*

- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des $\bot$-jugements de la forme $\Gamma \vdash_{\mathrm{c}} F$;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles (Ax), (Hyp), ($\to_{\mathrm{i}}$) et ($\to_{\mathrm{e}}$), ainsi que de la règle suivante :*

$$\frac{\Gamma, \neg F \vdash_{\mathrm{c}} \bot}{\Gamma \vdash_{\mathrm{c}} F}\ (\bot_{\mathrm{c}})$$

On dit qu'un $\bot$-jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{c}} F$ est dérivable *quand il existe une dérivation dans CPC dont la dernière règle utilisée produit ce $\bot$-jugement.*

Notons que CPC est suffisamment puissant pour que la conjonction et la disjonction y soient définissables ; pour deux formules A et B la conjonction $A \wedge B$ est définissable par la formule $\neg(A \to \neg B)$ et la disjonction $A \vee B$ est définissable par la formule $\neg A \to B$. La situation est différente dans CPI car la conjonction et la disjonction n'y sont pas définissables. Cependant, nous sommes seulement intéressés par la présence de la négation ; l'expressivité de CPI est donc suffisante.

1.3.2 Pédagogisation de la négation

La pédagogisation des calculs CPI et CPC se fait comme celle de CPM : en remplaçant respectivement les règles (Ax) et (Hyp) par les règles (P-Ax) et (P-Hyp) :

Définition 1.3.6. *Le* calcul propositionnel pédagogique intuitionniste*, abrégé en P-CPI, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des $\bot$-jugements de la forme $\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F$;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles (P-Ax), (P-Hyp), ($\to_{\mathrm{i}}$), ($\to_{\mathrm{e}}$) et ($\bot_{\mathrm{i}}$).*

On dit qu'un $\bot$-jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F$ est dérivable *quand il existe une dérivation dans P-CPI dont la dernière règle utilisée produit ce $\bot$-jugement.*

Définition 1.3.7. *Le* calcul propositionnel pédagogique classique*, abrégé en P-CPC, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des $\bot$-jugements de la forme $\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F$;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles (P-Ax), (P-Hyp), ($\to_{\mathrm{i}}$), ($\to_{\mathrm{e}}$) et ($\bot_{\mathrm{c}}$).*

On dit qu'un $\bot$-jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F$ est dérivable *quand il existe une dérivation dans P-CPC dont la dernière règle utilisée produit ce $\bot$-jugement.*

Nous allons démontrer que dans CPI et CPC, les dérivations contiennent uniquement des formules, c'est-à-dire des $\bot$-formules ne contenant pas le symbole $\bot$. On démontre d'abord que pour toute formule $\sigma{\cdot}F$, F est une formule, ce qui nous permettra de vérifier l'absence de $\bot$ dans les $\bot$-formules motivées dans les règles (P-Ax) et (P-Hyp) :

Lemme 1.3.1. *Pour toute $\bot$-formule F et pour toute $\bot$-substitution σ, si $\sigma{\cdot}F$ est une formule alors F est une formule.*

Démonstration. Par récurrence sur F :

$F = \top$: $\top$ est une formule ;

$F = \bot$: soit σ une $\bot$-substitution et supposons que $\sigma \cdot \bot$ soit une formule ; nous avons $\sigma{\cdot}\bot = \bot$ donc $\bot$ est une formule, ce qui est absurde ;

$F = \alpha$: α est une formule ;

$F = A \to B$: soit σ une $\bot$-substitution et supposons que $\sigma{\cdot}F$ soit une formule ; nous avons $\sigma{\cdot}F = \sigma{\cdot}A \to \sigma{\cdot}B$, et par hypothèse de récurrence A et B sont des formules, donc $A \to B$ est une formule.

$\square$

Puis on démontre l'absence de $\bot$ dans les dérivations de CPI :

Lemme 1.3.2. *Pour tout $\bot$-jugement dérivable $\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F$, tous les éléments de l'ensemble $\Gamma \cup \{F\}$ sont des formules.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F$:

$\dfrac{\vdash_{\mathrm{pi}} \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} \top}$ (P-Ax) : par hypothèse de récurrence les éléments de $\sigma{\cdot}\Gamma$ sont des formules, donc d'après le lemme 1.3.1 les éléments de Γ sont des formules ; ainsi $\Gamma \cup \{F\}$ est un ensemble de formules ;

$\dfrac{F \in \Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F}$ (P-Hyp) : par hypothèse de récurrence les éléments de $\sigma \cdot \Gamma$ sont des formules, donc d'après le lemme 1.3.1 les éléments de Γ sont des formules ; ainsi Γ est un ensemble de formules ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash_{\mathrm{pi}} B}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} A \to B}$ ($\to_{\mathrm{i}}$) : par hypothèse de récurrence les éléments de $\Gamma \cup \{A, B\}$ sont des formules, donc $\Gamma \cup \{A \to B\}$ est un ensemble de formules ;

$\dfrac{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} A \to B \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} A}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} B}$ ($\to_{\mathrm{e}}$) : par hypothèse de récurrence les éléments de $\Gamma \cup \{A \to B\}$ sont des formules, donc $\Gamma \cup \{B\}$ est un ensemble de formules ;

$\dfrac{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} \bot}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F}$ ($\bot_{\mathrm{i}}$) : par hypothèse de récurrence $\bot$ est une formule, ce qui est absurde.

$\square$

Enfin, on démontre de même que les $\perp$-formules dans les dérivations de CPC sont des formules :

Lemme 1.3.3. *Pour tout $\perp$-jugement dérivable $\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F$, tous les éléments de l'ensemble $\Gamma \cup \{F\}$ sont des formules.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F$. La démonstration est analogue à celle du lemme précédent, donc nous ne traitons que le cas de la règle $(\perp_{\mathrm{c}})$:

$\dfrac{\Gamma, \neg F \vdash_{\mathrm{pc}} \perp}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F}\,(\perp_{\mathrm{c}})$: par hypothèse de récurrence $\perp$ et $\neg F$ sont des formules, ce qui est absurde.

□

L'absence du symbole $\perp$ dans les dérivations de CPI et CPC a une conséquence importante sur les versions pédagogiques respectives de ces systèmes : les règles $(\perp_{\mathrm{i}})$ et $(\perp_{\mathrm{c}})$ ne peuvent plus être utilisées car elles requièrent la présence de la formule $\perp$ dans les jugements constituant leurs prémisses. Les calculs P-CPI et P-CPC sont donc équivalents à CPM :

Proposition 1.3.4. *Pour tout $\perp$-jugement dérivable $\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F$, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ est un jugement dérivable.*

Démonstration. D'après le lemme 1.3.2 les éléments de $\Gamma \cup \{F\}$ sont des formules, donc le $\perp$-jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ est un jugement. Montrons par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F$ que $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ est dérivable ; la démonstration est immédiate sauf pour le cas de la règle $(\perp_{\mathrm{i}})$:

$\dfrac{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} \perp}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pi}} F}\,(\perp_{\mathrm{i}})$: $\perp$ est une formule d'après le lemme 1.3.2, ce qui est absurde.

□

Proposition 1.3.5. *Pour tout $\perp$-jugement dérivable $\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F$, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ est un jugement dérivable.*

Démonstration. D'après le lemme 1.3.3 les éléments de $\Gamma \cup \{F\}$ sont des formules, donc le $\perp$-jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ est un jugement. Montrons par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F$ que $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}} F$ est dérivable ; la démonstration est immédiate sauf pour le cas de la règle $(\perp_{\mathrm{c}})$:

$\dfrac{\Gamma, \neg F \vdash_{\mathrm{pc}} \perp}{\Gamma \vdash_{\mathrm{pc}} F}\,(\perp_{\mathrm{c}})$: $\perp$ et $\neg F$ sont des formules d'après le lemme 1.3.3, ce qui est absurde.

□

Ces deux résultats achèvent notre étude des calculs P-CPM, P-CPI et P-CPC, tous les trois équivalents à CPM. Le calcul propositionnel minimal est donc dans un sens implicitement pédagogique ; la présence de la contrainte pédagogique montre son utilité dans la construction de calculs sans négation. Mais le symbole $\perp$ représentant l'absurdité est un élément *ad hoc* : le retirer des $\perp$-formules ne pose aucun problème. il n'en est pas de même dans les calculs où l'absurdité est définissables ; par exemple, le calcul propositionnel intuitionniste du second ordre est un calcul indécidable dans lequel l'absurdité est définissable : l'élimination de l'absurdité y est un problème impossible à résoudre algorithmiquement. La contrainte pédagogique est un moyen d'ajouter suffisamment d'informations dans les preuves afin de résoudre ce problème. L'étude de ce calcul, dans le chapitre suivant, va nous permettre d'éprouver la contrainte pédagogique et en plus de déduire les règles pédagogiques régissant la conjonction, la disjonction et l'existence car ces trois opérateurs logiques sont définissables au second ordre.

Chapitre 2

Calculs propositionnels pédagogiques du second ordre

2.1 Rappels sur le calcul propositionnel du second ordre

Le calcul propositionnel intuitionniste du second ordre porte sur l'implication et le quantification universelle des variables propositionnelles. Son apparente simplicité cache une grande expressivité ; on peut y définir la conjonction, la disjonction, le quantificateur existentiel et la négation ; c'est un calcul indécidable, donc très complexe. Nous allons tenter de le pédagogiser.

Comme toujours, on définit les formules en premier :

Définition 2.1.1. *Les* formules propositionnelles du second ordre*, que nous appelons* formules *dans ce chapitre en l'absence d'ambiguïté, sont définies par récurrence comme suit :*
- *la constante propositionnelle* $\top$ *(la formule* vraie*) est une formule ;*
- *les variables propositionnelles* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *sont des formules ;*
- *si* A *et* B *sont des formules, alors* $A \to B$ *est une formule ;*
- *si* α *est une variable propositionnelle et* A *est une formule, alors* $\forall\alpha.A$ *est une formule.*

On note $\mathcal{F}$ *l'ensemble des formules et* $\mathcal{V}$ *l'ensemble des variables propositionnelles.*

Afin d'alléger l'écriture des formules, nous écrivons $A \to B \to C$ les formules de la forme $A \to (B \to C)$. De même, nous écrivons $\forall\alpha.A \to B$ les formules de la forme $\forall\alpha.(A \to B)$.

Puis on définit les ensembles d'hypothèses, c'est-à-dire les contextes :

Définition 2.1.2. *Un* contexte propositionnel du second ordre *est un ensemble fini de formules, et dans ce chapitre nous les appelons* contextes. *Un* jugement propositionnel du second ordre *est un triplet noté* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} F$*, avec* Γ *un contexte,* F *une formule et* id *un identifiant textuel. Dans ce chapitre, les jugements propositionnels du second ordre sont appelés* jugements.

Le contexte vide est représenté par le mot vide ; ainsi, pour toute formule F et tout identifiant id, le jugement $\emptyset \vdash^2_{\mathrm{id}} F$ s'écrit également $\vdash^2_{\mathrm{id}} F$. De plus, pour tous contextes Γ et Δ, le contexte $\Gamma \cup \Delta$ est noté Γ, Δ. En particulier, pour toute formule A, le jugement $\Gamma \cup \{A\} \vdash^2_{\mathrm{id}} F$ est noté $\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{id}} F$.

Dans une formule, chaque quantificateur lie une variable à une formule, de manière à ce que cette variable n'ait d'occurrences significatives qu'à l'intérieur de la formule sous le quantificateur : toute occurrence de la variable quantifiée à l'extérieur de la formule sous le quantificateur correspond à une variable distincte, l'identité des symboles étant considéré comme un hasard syntaxique. Nous allons introduire les définitions permettant de distinguer les variables quantifiées des variables non quantifiées :

Définition 2.1.3. *Pour toute formule* F*, l'ensemble* $\mathrm{Vl}(F)$ *des variables* libres *de* F *est un ensemble de variables propositionnelles défini par récurrence sur* F *:*

$F = \top$: $\mathrm{Vl}(F) = \emptyset$;
$F = \alpha$: $\mathrm{Vl}(F) = \{\alpha\}$;
$F = A \to B$: $\mathrm{Vl}(F) = \mathrm{Vl}(A) \cup \mathrm{Vl}(B)$;
$F = \forall\alpha.A$: $\mathrm{Vl}(F) = \mathrm{Vl}(A) \setminus \{\alpha\}$.

Par extension, pour tout contexte Γ *nous notons* $\mathrm{Vl}(\Gamma)$ *l'ensemble* $\bigcup_{G\in\Gamma} \mathrm{Vl}(G)$*. Quand* $\mathrm{Vl}(F) = \emptyset$*, nous disons que la formule* F *est* close.

Définition 2.1.4. *Pour toute formule* F*, l'ensemble* $\mathrm{Vq}(F)$ *des variables* quantifiées *de* F *est un ensemble de variables propositionnelles défini par récurrence sur* F *:*

$F = \top$: $\mathrm{Vq}(F) = \emptyset$;
$F = \alpha$: $\mathrm{Vq}(F) = \emptyset$;
$F = A \to B$: $\mathrm{Vq}(F) = \mathrm{Vq}(A) \cup \mathrm{Vq}(B)$;
$F = \forall\alpha.A$: $\mathrm{Vq}(F) = \{\alpha\} \cup \mathrm{Vq}(A)$.

Le propre d'une variable quantifiée universellement est de représenter de manière uniforme n'importe quelle formule. Nous avons donc besoin de substitutions :

Définition 2.1.5. *Une substitution* σ *est une fonction de domaine fini* $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *à valeurs dans l'ensemble des formules.*

Pour toute substitution σ, on note $\mathrm{Vl}(\sigma)$ l'union des ensembles $\mathrm{Vl}(\sigma(\alpha))$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Chaque variable devra pouvoir être substituée à une formule du moment qu'il n'y a aucune confusion entre les variables libres et les variables quantifiées ; ainsi chaque substitution devra être adaptée à la formule à laquelle elle est appliquée :

Définition 2.1.6. *Pour toute substitution σ et pour toute formule F, on dit que σ est* adaptée *à F quand l'ensemble* $\mathrm{Vl}(\sigma) \cap \mathrm{Vq}(F)$ *est vide.*

Définition 2.1.7. *Pour toute formule F et pour toute substitution σ adaptée à F, l'application de σ à F, notée $\sigma{\cdot}F$, est définie par récurrence sur F comme suit :*
$F = \top$: $\sigma{\cdot}F = \top$;
$F = \alpha$: $\sigma{\cdot}F = \begin{cases} \sigma(\alpha) & \text{si } \alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)\,; \\ \alpha & \text{sinon}\,; \end{cases}$
$F = A \to B$: $\sigma{\cdot}F = \sigma{\cdot}A \to \sigma{\cdot}B$;
$F = \forall\alpha.A$: $\sigma{\cdot}F = \forall\alpha.\sigma_{\setminus\alpha}{\cdot}A$.

Pour éviter toute confusion, nous écrivons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}F$ les applications de substitutions de la forme $\mu{\cdot}(\sigma{\cdot}F)$. Pour alléger la manipulation des applications de substitutions, nous introduisons une fonction de composition des substitutions :

Lemme 2.1.1. *Soient F une formule, σ une substitution adaptée à F et μ une substitution adaptée à $\sigma{\cdot}F$. Notons $\mu \odot \sigma$ la substitution $[\mu{\cdot}\sigma; \mu_{|(\mathrm{Dom}(\mu)\setminus\mathrm{Dom}(\sigma))}]$; alors $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}F = \mu \odot \sigma{\cdot}F$.*

Démonstration. Par récurrence sur F :
$F = \top$: nous avons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\top = \top$ et $\top = \mu \odot \sigma{\cdot}\top$, donc $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\top = \mu \odot \sigma{\cdot}\top$;
$F = \alpha$: trois cas se présentent :
- $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$: nous avons $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\mu) \setminus \mathrm{Dom}(\sigma)$, donc $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\alpha = \mu \odot \sigma{\cdot}\alpha$ par définition de $\odot$;
- $\alpha \in \mathrm{Dom}(\mu) \setminus \mathrm{Dom}(\sigma)$: nous avons $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\sigma)$, donc $\sigma{\cdot}\alpha = \alpha$, $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\alpha = \mu{\cdot}\alpha$ et ainsi $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\alpha = \mu \odot \sigma{\cdot}\alpha$ par définition de $\odot$;
- $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\mu) \cup \mathrm{Dom}(\sigma)$: nous avons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\alpha = \alpha$ et $\mathrm{Dom}(\mu \odot \sigma) = \mathrm{Dom}(\mu) \cup \mathrm{Dom}(\sigma)$, donc $\mu \odot \sigma{\cdot}\alpha = \alpha$ et ainsi $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\alpha = \mu \odot \sigma{\cdot}\alpha$;

$F = A \to B$: par hypothèse de récurrence nous avons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}A = \mu \odot \sigma{\cdot}A$ et $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}B = \mu \odot \sigma{\cdot}B$, donc $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}(A \to B) = \mu \odot \sigma{\cdot}(A \to B)$;
$F = \forall\alpha.A$: deux cas se présentent :
- $\alpha \in \mathrm{Dom}(\mu \odot \sigma)$: nous avons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\forall\alpha.A = \forall\alpha.A$ et $\mu \odot \sigma{\cdot}\forall\alpha.A = \forall\alpha.A$, donc $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\forall\alpha.A = \mu \odot \sigma{\cdot}\forall\alpha.A$;
- $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\mu \odot \sigma)$: nous avons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\forall\alpha.A = \forall\alpha.\mu{\cdot}\sigma{\cdot}A$, et par hypothèse de récurrence nous avons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}A = \mu \odot \sigma{\cdot}A$, donc $\mu \odot \sigma{\cdot}\forall\alpha.A = \forall\alpha.\mu \odot \sigma{\cdot}A$; ainsi $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}\forall\alpha.A = \mu \odot \sigma{\cdot}(\forall\alpha.A)$.

□

Il est fréquent d'avoir recours à des variables libres de toute contrainte, qui ne sont ni quantifiées et qui n'ont aucune propriété imposée ; de telles variables sont dites fraîches :

Définition 2.1.8. *Une variable* fraîche *pour une formule F est une variable n'apparaissant pas dans F. Par extension, une variable fraîche pour un ensemble de formules Γ est une variable fraîche pour chacun des éléments de Γ. L'ensemble des variables fraîches d'un contexte Γ est noté* $\mathrm{Fr}(\Gamma)$.

Les variables liées sont destinées à représenter n'importe quelle formule ; ainsi leur nom importe peu ; on est même parfois obligé de les renommer pour éviter qu'elle ne prennent le nom de variables libres. Pour pouvoir librement renommer les variables liées d'une formule, on introduit la relation d'α-équivalence ; deux formules sont α-équivalentes quand elles ne diffèrent que par le nom de leurs variables liées :

Définition 2.1.9. *Pour toutes formules A et B, la relation d'α-*équivalence *entre A et B, notée $A =_\alpha B$, est définie par les règles suivantes :*

$$\frac{}{\top =_\alpha \top}\ (\alpha_\top)$$

$$\frac{}{\alpha =_\alpha \alpha}\ (\alpha_{\mathrm{var}})$$

$$\frac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\ (\alpha_\to)$$

$$\frac{[\alpha\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha [\beta\backslash\gamma]\cdot B \quad \gamma \in \mathrm{Fr}(A, B)}{\forall\alpha.A =_\alpha \forall\beta.B}\ (\alpha_\forall)$$

*Quand la relation $A =_\alpha B$ est vérifiée, on dit que les formules A et B sont α-*équivalentes.

Enfin, nous définissons les règles de déduction du calcul propositionnel intuitionniste du second ordre :

Définition 2.1.10. *Le* calcul propositionnel du second ordre*, abrégé en* CP^2*, est défini par :*

- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^2 F$;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles suivantes :*

$$\frac{}{\Gamma \vdash^2 \top}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash^2 F}\ (\text{Hyp})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash^2 B}{\Gamma \vdash^2 A \to B}\ (\to_{\mathrm{i}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^2 A \to B \quad \Gamma \vdash^2 A}{\Gamma \vdash^2 B}\ (\to_{\mathrm{e}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash^2 A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2 \forall\alpha.A}\ (\forall_{\mathrm{i}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^2 \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash^2 [\alpha\backslash U]{\cdot}A}\ (\forall_{\mathrm{e}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash^2 A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^2 B}\ (=_\alpha)$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash^2 F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* CP^2 *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

2.2 Calcul propositionnel du second ordre faiblement pédagogique

2.2.1 Présentation du calcul

L'étude du calcul CPM dans le chapitre précédent nous a permis de dégager une méthode de pédagogisation : remplacer les règles (Ax) et (Hyp) par les règles (P-Ax) et (P-Hyp) ; nous allons appliquer directement cette méthode au calcul CP^2 :

Définition 2.2.1. *Le* calcul propositionnel du second ordre faiblement pédagogique*, abrégé en* F-CP^2*, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles* $(\to_{\mathrm{i}})$, $(\to_{\mathrm{e}})$, $(\forall_{\mathrm{i}})$, $(\forall_{\mathrm{e}})$ *et* $(=_\alpha)$*, ainsi que des deux règles suivantes :*

$$\frac{\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \top}\ (\text{P-Ax})$$

$$\frac{F \in \Gamma \quad \vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F}\ (\text{P-Hyp})$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* F-CP^2 *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

La contrainte pédagogique n'est pas toujours facile à utiliser quand on n'y est pas habitué ; c'est pourquoi nous proposons un exemple simple de dérivation dans F-CP^2 :

Exemple. dérivation du jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.(\forall\beta.\beta \to \alpha) \to \alpha$:

1) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\beta \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) et 1 ;
3) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \beta \to \top$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 2 ;
4) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\beta.\beta \to \top$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 3 ;
5) $\forall\beta.\beta \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\beta.\beta \to \alpha$ par (P-Hyp) et 4 ;
6) $\forall\beta.\beta \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \top \to \alpha$ par ($\forall_{\mathrm{e}}$) et 5 ;
7) $\forall\beta.\beta \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) et 4 ;
8) $\forall\beta.\beta \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 6 et 7 ;
9) $\vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\beta.\beta \to \alpha) \to \alpha$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 8 ;
10) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.(\forall\beta.\beta \to \alpha) \to \alpha$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 9.

L'objet indispensable pour un système pédagogique est la motivation, que nous définissons de suite :

Définition 2.2.2. *Soit C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} F$. Pour tout contexte Δ, une* motivation *de Δ dans C est une substitution σ telle que les jugements $\vdash^2_{\mathrm{id}} \sigma{\cdot}\Gamma$ soient dérivables. Quand un contexte admet une motivation dans C, on dit qu'il est* motivable *dans C. De plus, une motivation d'une formule F dans C est une motivation du singleton $\{F\}$ dans C.*

La première question qui vient à l'esprit concerne la nature des motivations : sont-elles composées de formules closes ou non ? Intuitivement, une substitution close correspond à un exemple concret, entièrement déterminé, comme par exemple un numéral en arithmétique : 0, 1, 2... Au contraire, une substitution ouverte représente un exemple générique n'étant pas suffisamment contraint pour représenter un objet unique ; dans le cas de l'arithmétique, un tel exemple pourrait correspondre à la donnée d'un entier pair quelconque. Il est légitime de se demander si une formule motivable par une substitution ouverte peut toujours être motivée par une substitution close qui préciserait l'exemple, comme on peut toujours choisir un numéral divisible par 2, par exemple 12, pour compléter une motivation consistant en la donnée d'un entier pair quelconque. Pouvoir toujours compléter les motivations incomplètes est une propriété souhaitable ; nous démontrons ci-dessous que F-CP^2 possède cette propriété :

Lemme 2.2.1. *Pour toute formule F, si σ est une motivation de F dans* F-CP^2*, alors pour toute substitution μ adaptée à $\sigma{\cdot}F$ la substitution $\mu{\odot}\sigma$ est une motivation de F dans* F-CP^2.

Démonstration. Par récurrence sur n le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathrm{Vl}(\sigma{\cdot}F)$:

$n = 0$: dans ce cas la formule F est close, donc $\mu \odot \sigma \cdot F = \sigma \cdot F$; le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}F$ est dérivable par hypothèse, donc le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \mu{\odot}\sigma{\cdot}F$ est dérivable ;

$n = n' + 1$: soient W l'ensemble à n' éléments et α la variable tels que $\mathrm{Vl}(\sigma \cdot F) = W \cup \{\alpha\}$; par hypothèse le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma \cdot F$ est dérivable, et nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\sigma{\cdot}F$ par la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$; par hypothèse de récurrence le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \mu_{|W} \cdot (\forall\alpha.\sigma \cdot F)$ est dérivable, et nous avons $\mu_{|W} \cdot (\forall\alpha.\sigma \cdot F) = \forall\alpha.\mu_{|W} \odot \sigma{\cdot}F$ car $\alpha \notin W$ par définition ; finalement nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \mu \odot \sigma \cdot F$ par la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$.

□

2.2.2 Non-nullité syntaxique des jugements

Dans [31], Nelson introduit le concept d'*implication nulle* : une implication $A \to B$ est nulle quand la formule A est fausse quel que soit l'instanciation de ses variables libres. Dans le cas contraire, l'implication est dite *non-nulle*. La nullité est principalement un concept sémantique car il fait intervenir la notion de vérité. Comme nous travaillons dans un contexte purement syntaxique, nous introduisons le concept d'*implication syntaxiquement nulle* : une implication $A \to B$ est syntaxiquement nulle quand la formule A n'est pas motivable ; dans le cas contraire, l'implication est *syntaxiquement non-nulle*. La non-nullité est une propriété très forte qui n'est évidemment pas toujours vérifiée ; en particulier, le calcul F-CP^2 admet des occurrences d'implications nulles dans certaines dérivations :

Exemple. dérivation du jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha)$:
1) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\beta \vdash^2_{\mathrm{f}} \beta$ par (P-Hyp) et 1 ;
3) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \beta \to \beta$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\beta.\beta \to \beta$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha)$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 4.

La formule $\forall\alpha.\alpha$, définissant l'absurde dans CP^2, n'est évidemment pas motivable car CP^2 est un calcul cohérent ; l'implication $(\forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha)$ est donc nulle dans F-CP^2 ; elle l'est également dans CP^2. Comme $\forall\alpha.\alpha$ est une formule close, elle n'est pas motivable ; donc l'implication $(\forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha)$ est aussi syntaxiquement nulle.

La propriété de nullité des jugements est définissable de la même manière que la nullité des implications : un jugement $\Gamma \vdash F$ est nul quand la conjonction des formules de Γ est fausse quel que soit l'instanciation de ses variables libres. De même, le jugement $\Gamma \vdash F$ est syntaxiquement nul quand le contexte Γ n'est pas motivable. Nous allons démontrer que dans F-CP^2, tous les jugements apparaissant dans les dérivations sont non-nuls. Définissons d'abord formellement la non-nullité des jugements :

Définition 2.2.3. *Soit C un calcul dont la morphologie est constitué par l'ensemble* *des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} F$*. Un jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} F$ *est* syntaxiquement non-nul *quand son contexte* Γ *est motivable dans C.*

On prouve maintenant la non-nullité des jugements dérivables dans F-CP^2 :

Lemme 2.2.2. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *dérivable, le contexte* Γ *est motivable dans* F-CP^2.

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$, les cas des règles $(\to_{\mathrm{e}})$, $(\forall_{\mathrm{i}})$, $(\forall_{\mathrm{e}})$ et $(=_\alpha)$ étant analogues :

$\dfrac{\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \top}$ (P-Ax) : σ est une motivation de Γ dans F-CP^2 ;

$\dfrac{F \in \Gamma \quad \vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F}$ (P-Hyp) : cas analogue à (P-Ax) ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B}$ $(\to_{\mathrm{i}})$: par hypothèse de récurrence le contexte $\Gamma \cup \{A\}$ est motivable dans F-CP^2, donc Γ est motivable dans F-CP^2 ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B \quad \Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B}$ $(\to_{\mathrm{e}})$: par hypothèse de récurrence le contexte Γ est motivable.

□

La non-nullité d'un jugement $\Gamma \vdash F$ ne concerne que le contexte Γ ; mais on peut montrer que la motivation de Γ constitue par déduction une motivation de F :

Lemme 2.2.3. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *dérivable et pour toute substitution* σ *adaptée à* Γ*, si les jugements* $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}\Gamma$ *sont dérivables alors le jugement* $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}F$ *est dérivable.*

Démonstration. Posons $\Gamma = \{F_1 \dots F_n\}$ et $\mathrm{Dom}(\sigma) = \{\alpha_1 \dots \alpha_m\}$. Nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} F_1 \to \dots \to F_n \to F$ par applications successives de la règle $(\to_{\mathrm{i}})$. Puis nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha_1 \dots \forall\alpha_m.F_1 \to \dots \to F_n \to F$ par applications successives de la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$. Puis nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}F_1 \to \dots \to \sigma{\cdot}F_n \to \sigma{\cdot}F$ par applications successives de la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$. Enfin, nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma{\cdot}F$ par applications successives de la règle $(\to_{\mathrm{e}})$. □

Ainsi, tout jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ dérivable, en plus de sa non-nullité, admet une propriété plus forte : les formules dans Γ ainsi que F sont motivables par la même motivation :

Proposition 2.2.4. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *dérivable, l'ensemble* $\Gamma \cup \{F\}$ *est motivable dans* F-CP^2*. En particulier,* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *est syntaxiquement non-nul.*

Démonstration. D'après le lemme 2.2.2 le contexte Γ est motivable dans F-CP^2, et donc d'après le lemme 2.2.3 la formule F est motivable dans F-CP^2. □

2.2.3 La règle d'affaiblissement

Dans le calcul F-CP^2, la règle usuelle d'affaiblissement :

$$\frac{\Gamma \vdash^2 F}{\Gamma, U \vdash^2 F}\ (\text{Aff})$$

n'est plus dérivable car la formule U ajoutée au contexte Γ n'est pas forcément motivable, par exemple quand $U = \forall\alpha.\alpha$. Même dans le cas où U est une formule motivable, le nouveau contexte $\Gamma \cup \{U\}$ ne l'est pas forcément, par exemple quand $\Gamma = \{\top \to \alpha\}$ et $U = \alpha \to \bot$, comme l'atteste le lemme suivant :

Lemme 2.2.5. *Le jugement* $\top \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha$ *est dérivable et la formule* $\alpha \to \bot$ *est motivable dans* F-CP^2*, mais le jugement* $\top \to \alpha, \alpha \to \bot \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha$ *n'est pas dérivable.*

Démonstration. Voici la dérivation du jugement $\top \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha$:
1) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\top \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) et 1 ;
3) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \top \to \top$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 2 ;
4) $\top \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \top \to \alpha$ par (P-Hyp) et 3 ;
5) $\top \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) et 3 ;
6) $\top \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 4 et 5.
La formule $\alpha \to \bot$ est motivable dans F-CP^2 car le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \bot \to \bot$ est dérivable. Supposons que le jugement $\top \to \alpha, \alpha \to \bot \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha$ soit dérivable. Le contexte $\{\top \to \alpha, \alpha \to \bot\}$ est motivable dans F-CP^2 d'après la proposition 2.2.4. Soit $[\alpha \leftarrow U]$ une motivation de $\{\top \to \alpha, \alpha \to \bot\}$ dans F-CP^2 ; les jugements $\vdash^2_{\mathrm{f}} \top \to U$ et $\vdash^2_{\mathrm{f}} U \to \bot$ sont dérivable, donc le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \top \to \bot$ est dérivable, ce qui est absurde compte tenu de la consistance de F-CP^2. □

On peut dériver des règles d'affaiblissements dans F-CP^2, mais elles doivent prendre en compte la contrainte pédagogique, comme toutes les règles manipulant le contexte des jugements. Nous proposons en remplacement de la règle (Aff) la règle d'affaiblissement faiblement pédagogique (F-Aff) :

$$\frac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F \qquad \vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma\cdot(\Gamma, U)}{\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{f}} F}\ (\text{F-Aff})$$

et nous allons démontrer qu'elle est dérivable dans F-CP^2. Dans ce but, nous prouvons ci-dessous une propriété des contextes motivables séparément ; si Γ et Δ sont deux contexte motivables séparément, le contexte $\Gamma \cup \Delta$ est motivable dès que leurs ensembles respectifs de variables libres sont disjoints ; dans ce cas, on peut toujours dériver $\Gamma, \Delta \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ à partir d'une dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ quand Δ ne partage aucune variable libre avec Γ et F :

Lemme 2.2.6. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *dérivable et pour tout contexte* Δ *motivable dans* F-CP^2 *par une substitution* μ, *si* $\mathrm{Vl}(\Gamma, F) \cap \mathrm{Vl}(\Delta) = \emptyset$ *alors le jugement* $\Gamma, \Delta \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$, les seuls cas non-immédiats étant ceux des règles (P-Ax), (P-Hyp) et $(\forall_{\mathrm{i}})$:

$\dfrac{\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \top}$ (P-Ax) : par hypothèse nous avons $\mathrm{Vl}(\Gamma) \cap \mathrm{Vl}(\Delta) = \emptyset$; donc les jugements $\vdash^2_{\mathrm{f}} [\sigma_{|\mathrm{Vl}(\Gamma)}; \mu_{|\mathrm{Vl}(\Delta)}]\cdot\Gamma$ et $\vdash^2_{\mathrm{f}} [\sigma_{|\mathrm{Vl}(\Gamma)}; \mu_{|\mathrm{Vl}(\Delta)}]\cdot\Delta$ sont dérivables, et ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma, \Delta \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ par la règle (P-Ax) ;

$\dfrac{F \in \Gamma \quad \vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F}$ (P-Hyp) : ce cas est analogue à (P-Ax) ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.A}$ $(\forall_{\mathrm{i}})$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma, \Delta \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ est dérivable ; par hypothèse, nous avons $\mathrm{Vl}(A) \cap \mathrm{Vl}(\Delta) = \emptyset$; donc $\alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma, \Delta)$; ainsi on dérive le jugement $\Gamma, \Delta \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.A$ par la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$.

□

On peut alors prouver la validité de la règle (F-Aff) dans F-CP^2 :

Proposition 2.2.7. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *dérivable et pour toute formule* U *telle que* $\Gamma \cup \{U\}$ *soit motivable dans* F-CP^2, *le jugement* $\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *est dérivable.*

Démonstration. Nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \Gamma \to F$ par la règle $(\to_{\mathrm{i}})$. Définissons la substitution μ comme étant un renommage des variables contenues dans l'ensemble $\mathrm{Vl}(\Gamma, F)$ telle que nous ayons une dérivation du jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \mu\cdot(\Gamma \to F)$ dans laquelle aucune des variables contenues dans $\mathrm{Vl}(\Gamma, U)$ n'apparaisse. Posons $\mathrm{Dom}(\mu) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ et $\beta_i = \mu\cdot\alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$:

1) $\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{f}} \mu \cdot (\Gamma \to F)$ d'après le lemme 2.2.6 ;
2) $\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\beta_1. \cdots \forall\beta_n.\mu \cdot (\Gamma \to F)$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 1 ;
3) $\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{f}} \Gamma \to F$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 2 ;
4) $\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{f}} \Gamma$ par (P-Hyp) sachant que $\Gamma \cup \{U\}$ est motivable dans F-CP^2 ;
5) $\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 3 et 4.

□

2.2.4 $\forall\alpha.\alpha$ ne définit pas l'absurde

On sait, grâce à la proposition 2.2.4, que certains jugements dérivables dans CP^2 ne sont pas dérivables dans F-CP^2, par exemple le jugement $\forall\alpha.\alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\alpha$ car la formule $\forall\alpha.\alpha$ n'est pas motivable. Mais on ne sait pas encore si on peut prouver ou non tous les théorèmes de CP^2 dans F-CP^2. C'est pourquoi nous allons exhiber un théorème de CP^2 qui n'est pas prouvable dans F-CP^2. Nous allons en fait démontrer un résultat plus fort en caractérisant dans F-CP^2 le comportement de la constante $\bot$ définie par la formule $\forall\alpha.\alpha$.

Notation 2.2.1. *La formule $\forall\alpha.\alpha$ est notée $\bot$. Pour toute formule F, la formule $F \to \bot$ est appelée la* négation *de F et elle est notée $\neg F$.*

Nous comptons mettre en évidence l'impossibilité de faire de $\bot$ une formule absurde dans F-CP^2, en montrant qu'on peut la remplacer par une variable fraîche dans toutes les dérivations. Pour cela, nous définissons une transformation qui remplace dans chaque formule les occurrences de la formule $\bot$ par une variable fraîche :

Définition 2.2.4. *Pour toute formule F et pour toute variable γ fraîche pour F, nous définissons la formule F_γ par récurrence sur F :*
$F = \top$: $F_\gamma = \top$;
$F = \alpha$: $F_\gamma = \alpha$;
$F = A \to B$: $F_\gamma = A_\gamma \to B_\gamma$;
$F = \forall\alpha.A$: $F_\gamma = \begin{cases} \gamma & \text{si } A = \alpha\,; \\ \forall\alpha.A_\gamma & \text{sinon.} \end{cases}$

La preuve du résultat attendu sera faite par récurrence sur les dérivations ; pour traiter le cas de la règle ($\forall_\mathrm{e}$), nous avons besoin d'un lemme de substitution :

Lemme 2.2.8. *Pour toutes formules F et U, et pour toute variable γ fraîche pour F et U, si la substitution $[\beta\backslash U]$ est adaptée à F alors $([\beta\backslash U]\cdot F)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot F_\gamma$.*

Démonstration. La substitution $[\beta\backslash U_\gamma]$ est adaptée à F_γ quand $[\beta\backslash U]$ est adaptée à F car $\mathrm{Vl}(U)\cap\mathrm{Vq}(F) = \mathrm{Vl}(U_\gamma)\cap\mathrm{Vq}(F_\gamma)$. Nous démontrons maintenant le lemme par récurrence sur F :

$F = \top$: nous avons $([\beta\backslash U]\cdot\top)_\gamma = \top$ et $\top = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot\top_\gamma$, donc $([\beta\backslash U]\cdot\top)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot\top_\gamma$;

$F = \alpha$: deux cas se présentent :
- $\alpha = \beta$: nous avons $([\beta\backslash U]\cdot\alpha)_\gamma = U_\gamma$ et $[\beta\backslash U_\gamma]\cdot\alpha_\gamma = U_\gamma$, donc $([\beta\backslash U]\cdot\alpha)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot\alpha_\gamma$;
- $\alpha \neq \beta$: nous avons $([\beta\backslash U]\cdot\alpha)_\gamma = \alpha$ et $[\beta\backslash U_\gamma]\cdot\alpha_\gamma = \alpha$, donc $([\beta\backslash U]\cdot\alpha)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot\alpha_\gamma$;

$F = A \to B$: par hypothèse de récurrence nous avons $([\beta\backslash U]\cdot A)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot A_\gamma$ et $([\beta\backslash U]\cdot B)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot B_\gamma$, donc $([\beta\backslash U]\cdot(A \to B))_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot(A_\gamma \to B_\gamma)$; par définition $(A \to B)_\gamma = A_\gamma \to B_\gamma$, donc $([\beta\backslash U]\cdot(A \to B))_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot(A \to B)_\gamma$;

$F = \forall\alpha.A$: deux cas se présentent :
- $A = \alpha$: nous avons $\forall\alpha.A = \bot$, $([\beta\backslash U]\cdot\bot)_\gamma = \gamma$ et $[\beta\backslash U_\gamma]\cdot\bot_\gamma = \gamma$, donc $([\beta\backslash U]\cdot\forall\alpha.A)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma]\cdot(\forall\alpha.A)_\gamma$;

- $A \neq \alpha$: deux cas sont à considérer :
  - $\alpha = \beta$: nous avons $([\beta\backslash U] \cdot \forall\alpha.A)_\gamma = \forall\alpha.A)_\gamma$ et $[\beta\backslash U_\gamma] \cdot (\forall\alpha.A)_\gamma = (\forall\alpha.A)_\gamma$, donc $([\beta\backslash U] \cdot \forall\alpha.A)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma] \cdot (\forall\alpha.A)_\gamma$;
  - $\alpha \neq \beta$: nous avons $([\beta\backslash U] \cdot \forall\alpha.A)_\gamma = \forall\alpha.([\beta\backslash U] \cdot A)_\gamma$, et par hypothèse de récurrence nous avons $([\beta\backslash U] \cdot A)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma] \cdot A_\gamma$, donc $([\beta\backslash U] \cdot \forall\alpha.A)_\gamma = \forall\alpha.[\beta\backslash U_\gamma] \cdot A_\gamma$ et ainsi $([\beta\backslash U] \cdot \forall\alpha.A)_\gamma = [\beta\backslash U_\gamma] \cdot (\forall\alpha.A)_\gamma$.

$\square$

De même, nous avons besoin du lemme suivant pour traiter le cas de la règle $(=_\alpha)$:

Lemme 2.2.9. *Pour toutes formules F et G, si $F =_\alpha G$ alors $F_\gamma =_\alpha G_\gamma$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $F =_\alpha G$:

$\dfrac{}{\top =_\alpha \top}\,(\alpha_\top)$: par définition nous avons $\top_\gamma = \top$, donc $\top_\gamma =_\alpha \top_\gamma$;

$\dfrac{}{\alpha =_\alpha \alpha}\,(\alpha_{\mathrm{var}})$: par définition nous avons $\alpha_\gamma = \alpha$, donc $\alpha_\gamma =_\alpha \alpha_\gamma$;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\,(\alpha_\to)$: par hypothèse de récurrence nous avons $A_\gamma =_\alpha A'_\gamma$ et $B_\gamma =_\alpha B'_\gamma$, et par définition nous avons $(A \to B)_\gamma = A_\gamma \to B_\gamma$ et $(A' \to B')_\gamma = A'_\gamma \to B'_\gamma$, donc $(A \to B)_\gamma =_\alpha (A' \to B')_\gamma$ par la règle $(\alpha_\to)$;

$\dfrac{[\alpha\backslash\delta] \cdot A =_\alpha [\beta\backslash\delta] \cdot B \quad \delta \in \mathrm{Fr}(A, B)}{\forall\alpha.A =_\alpha \forall\beta.B}\,(\alpha_\forall)$: deux cas se présentent :

- $A = \alpha$: par hypothèse nous avons $\delta =_\alpha [\beta\backslash\delta] \cdot B$, donc $[\beta\backslash\delta] \cdot B = \delta$ et $B = \beta$; ainsi $(\forall\alpha.A)_\gamma = \gamma$ et $(\forall\beta.B)_\gamma = \gamma$; nous en déduisons que $(\forall\alpha.A)_\gamma =_\alpha (\forall\beta.B)_\gamma$ par la règle (α_{var}) ;
- $A \neq \alpha$: par hypothèse de récurrence nous avons $([\alpha\backslash\delta] \cdot A)_\gamma =_\alpha ([\beta\backslash\delta] \cdot B)_\gamma$, et d'après le lemme 2.2.8 nous avons $([\alpha\backslash\delta] \cdot A)_\gamma = [\alpha\backslash\delta] \cdot A_\gamma$ et $([\beta\backslash\delta] \cdot B)_\gamma = [\beta\backslash\delta] \cdot B_\gamma$, donc $\forall\alpha.A_\gamma =_\alpha \forall\beta.B_\gamma$ par la règle $(\alpha_\forall)$; par définition nous avons $\forall\alpha.A_\gamma = (\forall\alpha.A)_\gamma$ et $\forall\beta.B_\gamma = (\forall\beta.B)_\gamma$, donc $(\forall\alpha.A)_\gamma =_\alpha (\forall\beta.B)_\gamma$.

$\square$

Le dernier lemme nécessaire à la preuve par récurrence concerne le cas des règles (P-Ax) et (P-Hyp) ; en effet, il nous faut garantir que la transformation substituant les occurrences de la formule $\perp$ ne produit pas des formules non motivables à partir de formules motivables :

Lemme 2.2.10. *Pour toute formule F et pour toute variable γ fraîche pour F, si F est motivable dans* F-CP^2 *alors F_γ est motivable dans* F-CP^2.

Démonstration. Supposons que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma \cdot F$ est dérivable. Nous avons $F = [\gamma\backslash\perp] \cdot F_\gamma$, donc le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma \cdot [\gamma\backslash\perp] \cdot F_\gamma$ est dérivable. Ainsi F_γ est motivable dans F-CP^2 par $\sigma \odot [\gamma\backslash\perp]$. $\square$

On montre enfin que le remplacement de $\bot$ par une variable fraîche dans les formules d'une dérivation produit une dérivation valide :

Lemme 2.2.11. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *dérivable, le jugement* $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F_\gamma$ *est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F$:

$\dfrac{\vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \top}$ (P-Ax) : Γ est motivable dans F-CP^2, donc Γ_γ est motivable d'après le lemme 2.2.10 ; ainsi nous dérivons $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \top_\gamma$ avec la règle (P-Ax) ;

$\dfrac{F \in \Gamma \quad \vdash^2_{\mathrm{f}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} F}$ (P-Hyp) : cas analogue à (P-Ax) ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B}$ $(\to_{\mathrm{i}})$: par hypothèse de récurrence $\Gamma_\gamma, A_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B_\gamma$ est dérivable, ainsi nous dérivons $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A_\gamma \to B_\gamma$ par la règle $(\to_{\mathrm{i}})$; par définition $A_\gamma \to B_\gamma = (A \to B)_\gamma$ donc nous avons une dérivation de $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (A \to B)_\gamma$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B \quad \Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B}$ $(\to_{\mathrm{e}})$: par hypothèse de récurrence $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A_\gamma$ et $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (A \to B)_\gamma$ sont dérivables ; par définition $A_\gamma \to B_\gamma = (A \to B)_\gamma$ donc nous avons une dérivation de $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A_\gamma \to B_\gamma$; ainsi nous dérivons $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B_\gamma$ par la règle $(\to_{\mathrm{e}})$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.A}$ $(\forall_{\mathrm{i}})$: deux cas se présentent :

- $A = \alpha$: dans ce cas nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \bot$, et d'après la proposition 2.2.4 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \bot$ est dérivable, ce qui est absurde compte tenu de la concistance de F-CP^2 ;
- $A \neq \alpha$: par hypothèse de récurrence le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A_\gamma$ est dérivable, et ainsi nous dérivons $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.A_\gamma$ par application de la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$; par définition $(\forall\alpha.A)_\gamma = \forall\alpha.A_\gamma$, donc nous avons une dérivation de $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\alpha.A)_\gamma$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\alpha\backslash U]\cdot A}$ $(\forall_{\mathrm{e}})$: par hypothèse de récurrence le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\alpha.A)_\gamma$ est dérivable ; deux cas se présentent :

- $A = \alpha$: dans ce cas nous avons une dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \bot$, ce qui est absurde ;
- $A \neq \alpha$: par définition $(\forall\alpha.A)_\gamma = \forall\alpha.A_\gamma$; ainsi nous avons une dérivation de $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.A_\gamma$ et nous dérivons $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\alpha\backslash U_\gamma]\cdot A_\gamma$ avec la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$; d'après le lemme 2.2.8 nous avons $([\alpha\backslash U]\cdot A)_\gamma = [\alpha\backslash U_\gamma]\cdot A_\gamma$, donc nous avons une dérivation de $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} ([\alpha\backslash U]\cdot A)_\gamma$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B}$ $(=_\alpha)$: par hypothèse de récurrence $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A_\gamma$ est dérivable ;

d'après le lemme 2.2.9 nous avons $A_\gamma =_\alpha B_\gamma$, et ainsi nous dérivons $\Gamma_\gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B_\gamma$ par la règle $(=_\alpha)$.

□

La proposition 2.2.11 traite des jugements ; cependant, on peut le restreindre en un résultat sur les théorèmes :

Proposition 2.2.12. *Le jugement* $\vdash^2_{\mathrm{f}} F$ *est dérivable si et seulement si le jugement* $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.F_\gamma$ *est dérivable.*

Démonstration. Nous traitons séparément les deux sens de l'équivalence :

$\Rightarrow$) cas immédiat par le lemme 2.2.11 ;

$\Leftarrow$) supposons que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.F_\gamma$ soit dérivable ; nous dérivons $\vdash^2_{\mathrm{f}} [\gamma\backslash\bot]\cdot F_\gamma$ par la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$, et comme $[\gamma\backslash\bot]\cdot F_\gamma = F$ nous avons une dérivation de $\vdash^2_{\mathrm{f}} F$.

□

Comme la formule $\bot$ peut toujours être remplacée par une variable fraîche, elle perd complètement ce qui la distingue d'une constante indéfinie : on ne peut plus prouver dans F-CP^2 que $\bot$ implique toutes les formules. En particulier, $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\bot \to \alpha$ n'est pas un théorème de F-CP^2 :

Proposition 2.2.13. *Le jugement* $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\bot \to \alpha$ *n'est pas dérivable.*

Démonstration. Supposons que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\bot \to \alpha$ soit dérivable. Le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.\forall\alpha.\gamma \to \alpha$ est dérivable d'après la proposition 2.2.11, ce qui est absurde compte tenu de la consistance de F-CP^2. □

Ce résultat peut paraître étonnant compte tenu de la dérivabilité de $\vdash^2_{\mathrm{f}} \bot \to \forall\alpha.\alpha$. On constate alors que la quantification universelle ne commute pas avec l'implication : pour toutes formules F et G telles que $\alpha \notin \mathrm{Vl}(G)$, la formule $\forall\alpha.F \to G$ n'est pas équivalente à la formule $F \to \forall\alpha.G$.

Même si $\bot$ ne définit pas l'absurde dans F-CP^2, nous ne savons pas si il existe une formule B telle que $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.B \to \gamma$. Si une telle formule existe, alors elle est équivalente à la formule $\forall\alpha.\top \to \alpha$:

1) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.B \to \alpha$ par hypothèse ;
2) $\forall\alpha.\beta \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\beta \to \alpha$ par (P-Hyp) et 1 ;
3) $\forall\alpha.\beta \to \alpha \vdash^2_{\mathrm{f}} \beta \to \gamma$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 2 ;
4) $\vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\alpha.\beta \to \alpha) \to \beta \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\beta.(\forall\alpha.\beta \to \alpha) \to \beta \to \gamma$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 4 ;
6) $\vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\alpha.\top \to \alpha) \to \top \to \gamma$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 5 ;
7) $\vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\delta\forall\gamma.(\delta \to \top \to \gamma) \to (\delta \to \gamma$ aisément dérivable ;
8) $\vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\alpha.\top \to \alpha) \to \gamma$ par instantiation de 7, et 6 ;

9) $\vdash_{\mathrm{f}}^2 \forall\gamma.(\forall\alpha.\top \to \alpha) \to \gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 8.
La méthode utilisée pour montrer que $\forall\alpha.\alpha$ ne définit pas l'absurde ne peut malheureusement pas être appliquée à $\forall\alpha.\top \to \alpha$: contrairement à $\forall\alpha.\alpha$, la formule $\forall\alpha.\top \to \alpha$ est décomposable sous la forme $[\beta\backslash U]\cdot V$, avec $U \neq \forall\alpha.\top \to \alpha$; on a par exemple $\forall\alpha.\top \to \alpha = [\beta\backslash\top]\cdot\forall\alpha.\beta \to \alpha$; cela signifie que cette formule ne peut pas être considérée comme un élément atomique du calcul.

2.3 Calcul propositionnel pédagogique du second ordre

2.3.1 Présentation du calcul

Nous avons constaté que le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^2 \perp \to \perp$ est dérivable, ce qui est gênant pour un système pédagogique. Il n'est pas souhaitable que des formules non motivables puissent apparaître dans les formules des dérivations d'un calcul pédagogique. On remarque que la preuve de $\vdash_{\mathrm{f}}^2 \perp \to \perp$ demande aux variables quantifiées de pouvoir être instanciées par des formules non motivables. Pour éviter de rencontrer des sous-formules non motivables dans une dérivation, il suffit de n'autoriser que l'instanciation des variables quantifiées par des formules motivables. Ainsi, nous allons remplacer la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$ par la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^2 \forall\alpha.A \qquad \vdash_{\mathrm{p}}^2 \sigma\cdot U}{\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^2 [\alpha\backslash U]\cdot A}\ (\text{P-}\forall_{\mathrm{e}})$$

afin de définir le calcul propositionnel pédagogique du second ordre :

Définition 2.3.1. *Le* calcul propositionnel pédagogique du second ordre*, abrégé en* P-CP^2*, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^2 F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles (P-Ax), (P-Hyp),* $(\to_{\mathrm{i}})$, $(\to_{\mathrm{e}})$, $(\forall_{\mathrm{i}})$ *et* $(=_\alpha)$*, ainsi que de la règle suivante :*

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^2 \forall\alpha.A \qquad \vdash_{\mathrm{p}}^2 \sigma\cdot U}{\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^2 [\alpha\backslash U]\cdot A}\ (\text{P-}\forall_{\mathrm{e}})$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^2 F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* P-CP^2 *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

2.3.2 Non-nullité syntaxique des implications

Dans F-CP^2, tous les jugements sont syntaxiquement non-nuls. Nous allons montrer que dans P-CP^2, toutes les implications sont syntaxiquement non-nulles. Formellement, on définit la non-nullité des implications comme suit :

Définition 2.3.2. *Soit C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} F$*. Une implication* $A \to B$ *est* syntaxiquement non-nulle *quand la formule* A *est motivable dans C.*

Nous allons en fait prouver un résultat plus fort que la non-nullité syntaxique des implications : la motivabilité de toutes les sous-formules des formules apparaissant dans une dérivation de P-CP^2. Toutes ces sous-formules sont de plus motivables par la même motivation, c'est-à-dire qu'il existe des motivations qui motivent toutes les formules motivables ; il s'agit des motivations triviales, et les formules sont alors dites héréditairement trivialement motivables :

Définition 2.3.3. *Soit C un calcul dont la morphologie est constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} F$ *:*
- *une substitution* σ *est* triviale *dans C quand le jugement* $\vdash^2_{\mathrm{id}} \sigma\cdot\alpha$ *est dérivable pour toute variable* $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ *;*
- *un contexte* Γ *est* trivialement motivable *(TM) dans C quand* Γ *est motivable par une substitution triviale dans C ;*
- *un contexte* Γ *est* héréditairement trivialement motivable *(HTM) dans C quand l'ensemble de toutes les sous-formules des éléments de* Γ *est TM dans C.*

Pour toute formule F, nous écrivons $F_\top$ la formule F dans laquelle toutes les variables libres sont remplacées par $\top$.
On montre tout d'abord dans les deux lemmes qui suivent que le calcul P-CP^2 partage des propriétés avec F-CP^2 :

Lemme 2.3.1. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F$ *dérivable et pour toute substitution* σ *triviale dans* P-CP^2 *adaptée aux éléments de* $\Gamma \cup \{F\}$*, si* σ *est une motivation de* Γ *dans* P-CP^2 *alors* σ *est une motivation de* F *dans* P-CP^2*.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 2.2.3. Quelques précautions doivent être prises lors de l'utilisation de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle ($\forall_{\mathrm{e}}$) : comme la substitution σ est supposée triviale dans P-CP^2, elle peut être utilisée sans danger lors de l'application de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$). □

Lemme 2.3.2. *Soit* F *une formule motivable dans* P-CP^2 *par la substitution* σ*. Pour toute substitution* μ *triviale dans* P-CP^2*, la substitution* $\mu \odot \sigma$ *est une motivation de* F *dans* P-CP^2*.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 2.2.1. Quelques précautions doivent être prises lors de l'utilisation de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle ($\forall_{\mathrm{e}}$) : comme la substitution μ est supposée triviale dans P-CP^2, elle peut être utilisée sans danger lors de l'application de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$). □

Puis on démontre que toute motivation triviale reste triviale quand on lui applique une motivation triviale, ce qui nous permettra de les compléter et éventuellement de les rendre closes :

Lemme 2.3.3. *Pour toutes substitutions μ et σ triviales dans* P-CP^2 *telles que μ soit adaptées aux formules $\sigma \cdot \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$, la substitution $\mu \odot \sigma$ est triviale dans* P-CP^2.

Démonstration. Soit α une variable contenue dans $\mathrm{Dom}(\sigma)$. Par hypothèse, le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot \alpha$ est dérivable, et d'après le lemme 2.3.2 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \mu \odot \sigma \cdot \alpha$ est dérivable. Ainsi la substitution $\mu \odot \sigma$ est triviale dans P-CP^2. □

De même que le calcul F-CP^2, le calcul P-CP^2 permet de dériver la règle d'affaiblissement faiblement pédagogique (F-Aff) :

Lemme 2.3.4. *Pour tout jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F$ dérivable et pour toute formule U telle que $\Gamma \cup \{U\}$ soit motivable dans* P-CP^2*, le jugement $\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{p}} F$ est dérivable.*

Démonstration. Analogue à la preuve de la proposition 2.2.7. □

Pour montrer que toutes les motivations triviales motivent les formules motivables, il faut pouvoir les substituer les unes aux autres ; pour cela, on démontre un lemme permettant de remplacer dans une formule toute sous-formule prouvable par n'importe quelle formule prouvable :

Lemme 2.3.5. *Soit $\Gamma \cup \{F\}$ un ensemble de formules HTM dans* P-CP^2*. Pour toutes substitutions σ et μ triviales dans* P-CP^2 *et adaptées à F telles que $\mathrm{Dom}(\sigma) = \mathrm{Dom}(\mu)$, si le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot F$ est dérivable alors le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu \cdot F$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur F :

$F = \top$: supposons que $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot \top$ soit dérivable ; nous avons $\sigma \cdot \top = \top$ et $\top = \mu \cdot \top$, donc nous avons une dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot \top$;

$F = \alpha$: supposons que $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot \alpha$ soit dérivable ; deux cas se présentent :

- $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$: par hypothèse la substitution μ est triviale dans P-CP^2, donc le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \mu \cdot \alpha$ est dérivable ; par hypothèse le contexte Γ est motivable dans P-CP^2, donc le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu \cdot \alpha$ est dérivable d'après le lemme 2.3.4 ;
- $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\sigma)$: dans ce cas nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \alpha$; par hypothèse $\mathrm{Dom}(\sigma) = \mathrm{Dom}(\mu)$, donc $\mu \cdot \alpha = \alpha$ et nous avons une dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu \cdot \alpha$;

$F = A \to B$: supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma\cdot(A \to B)$ soit dérivable ; le contexte Γ est HTM dans P-CP^2, donc il existe une substitution π triviale qui motive Γ dans P-CP^2 et d'après le lemme 2.3.3 la substitution $\pi \odot \mu$ est triviale dans P-CP^2 ; la formule A est HTM dans P-CP^2, donc il existe une substitution ρ triviale qui motive A dans P-CP^2, et d'après les lemmes 2.3.2 et 2.3.3 nous pouvons supposer les domaines $\mathrm{Dom}(\pi)$ et $\mathrm{Dom}(\rho)$ suffisamment grands pour que nous ayons $\mathrm{Dom}(\rho) = \mathrm{Dom}(\pi \odot \mu)$; par hypothèse de récurrence sur le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \rho{\cdot}A$ le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \pi \odot \mu{\cdot}A$ est dérivable, donc π motive l'ensemble $\Gamma \cup \{\mu\cdot A\}$ dans P-CP^2 et ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma, \mu{\cdot}A \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma{\cdot}(A \to B)$ à l'aide du lemme 2.3.4 ; le jugement $\Gamma, \mu{\cdot}A \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}A$ est dérivable par la règle (P-Hyp), donc par hypothèse de récurrence le jugement $\Gamma, \mu \cdot A \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot A$ est dérivable et ainsi nous dérivons $\Gamma, \mu{\cdot}A \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma{\cdot}B$ par la règle $(\to_{\mathrm{e}})$; par hypothèse de récurrence $\Gamma, \mu{\cdot}A \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}B$ est dérivable, et ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}(A \to B)$ par la règle $(\to_{\mathrm{i}})$;

$F = \forall\alpha.A$: supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma\cdot\forall\alpha.A$ soit dérivable ; deux cas se présentent :
- $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$:
- $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\sigma)$: nous avons $\sigma{\cdot}\forall\alpha.A = \forall\alpha.\sigma{\cdot}A$ et nous dérivons alors $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma{\cdot}A$ par la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) ; par hypothèse de récurrence le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}A$ est dérivable et ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \forall\alpha.\mu\cdot A$ par la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$; nous avons $\mathrm{Dom}(\sigma) = \mathrm{Dom}(\mu)$, donc $\mu\cdot\forall\alpha.A = \forall\alpha.\mu\cdot A$ et ainsi nous avons une dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}\forall\alpha.A$.

□

La preuve que toutes les formules présentes dans les dérivations de P-CP^2 sont HTM se fera par récurrence sur les dérivations. Le lemme suivant nous permettra de traiter les cas des règles (P-Ax), (P-Hyp) et (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), qui sont les règles nécessitant de motiver le contexte de leurs prémisses :

Lemme 2.3.6. *Soient F une formule et σ une substitution adaptée à F. Si $\sigma\cdot F$ est HTM dans* P-CP^2 *alors F est HTM dans* P-CP^2.

Démonstration. Posons $\sigma' = \sigma_{|\mathrm{Dom}(\sigma)\cap \mathrm{Vl}(F)}$; ainsi nous avons $\sigma\cdot F = \sigma'\cdot F$. Soit G une sous-formule de F. La formule $\sigma'{\cdot}G$ est une sous-formule de $\sigma'\cdot F$, donc $\sigma'\cdot G$ est HTM : il existe une substitution triviale ρ telle que $\vdash^2_{\mathrm{p}} \rho \odot \sigma'{\cdot}G$ soit dérivable. D'après le lemme 2.3.5 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \tau_{|\mathrm{Dom}(\rho)} \odot \sigma'\cdot G$ est dérivable. D'après la proposition 2.3.2 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \tau \odot \sigma'\cdot G$ est dérivable. Nous démontrons de manière analogue que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \tau \odot \sigma'\cdot\alpha$ est dérivable pour toute variable $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma')$. Ainsi la substitution $\tau \odot \sigma'$ est triviale. D'après le lemme 2.3.5 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \tau{\cdot}G$ est dérivable, donc G est TM. □

Le lemme suivant servira à traiter le cas de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) :

Lemme 2.3.7. *Pour toutes formules U et F HTM dans* P-CP^2*, et pour toute variable α telles que la substitution $[\alpha\backslash U]$ soit adaptée à F, la formule $[\alpha\backslash U]\cdot F$ est HTM dans* P-CP^2*.*

Démonstration. Soit H une sous-formule de $[\alpha\backslash U]\cdot F$. Deux cas se présentent :

- H est une sous-formule de U : la formule U est HTM donc H est TM ;
- il existe une sous-formule G de F telle que $H = [\alpha\backslash U]\cdot G$: la formule U est HTM donc il existe une substitution triviale ρ telle que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \rho\cdot U$ soit dérivable. D'après le lemme 2.3.5 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \tau_{|\mathrm{Dom}(\rho)}\cdot U$ est dérivable. D'après la proposition 2.3.2 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} U_\top$ est dérivable. De même, le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} G_\top$ est dérivable. Posons $\mu = [\alpha\backslash U_\top; \tau_{|\mathrm{Vl}(G)\backslash\{\alpha\}}]$. La substitution μ de domaine $\mathrm{Vl}(G)$ est triviale, donc d'après le lemme 2.3.5 le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \mu\cdot G$ est dérivable. Nous avons $\mu\cdot G = ([\alpha\backslash U]\cdot G)_\top$, donc nous avons une dérivation de $\vdash^2_{\mathrm{p}} ([\alpha\backslash U]\cdot G)_\top$. Ainsi la formule $[\alpha\backslash U]\cdot G$ est TM.

□

Le cas de la règle $(=_\alpha)$ nécessite le lemme suivant :

Lemme 2.3.8. *Pour toutes formules F et G, et pour toute substitution σ adaptée à F et G, si $F =_\alpha G$ alors $\sigma\cdot F =_\alpha \sigma\cdot G$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $F =_\alpha G$:

$\dfrac{}{\top =_\alpha \top}\,(\alpha_\top)$: nous avons $\sigma\cdot\top =_\alpha \sigma\cdot\top$ car la relation $=_\alpha$ est réflexive ;

$\dfrac{}{\alpha =_\alpha \alpha}\,(\alpha_{\mathrm{var}})$: nous avons $\sigma\cdot\alpha =_\alpha \sigma\cdot\alpha$ car la relation $=_\alpha$ est réflexive ;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\,(\alpha_\to)$: par hypothèse de récurrence nous avons $\sigma\cdot A =_\alpha \sigma\cdot A'$ et $\sigma\cdot B =_\alpha \sigma\cdot B'$, et par définition nous avons $\sigma\cdot(A \to B) = \sigma\cdot A \to \sigma\cdot B$ et $\sigma\cdot(A' \to B') = \sigma\cdot A' \to \sigma\cdot B'$, donc $\sigma\cdot(A \to B) =_\alpha \sigma\cdot(A' \to B')$ par la règle $(\alpha_\to)$;

$\dfrac{[\alpha\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha [\beta\backslash\gamma]\cdot B \quad \gamma \in \mathrm{Fr}(A,B)}{\forall\alpha.A =_\alpha \forall\beta.B}\,(\alpha_\forall)$: par hypothèse de récurrence nous avons $\sigma_{\backslash\{\gamma\}}\cdot[\alpha\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha \sigma_{\backslash\{\gamma\}}\cdot[\beta\backslash\gamma]\cdot B$;

$$\begin{array}{rcl}\sigma_{\backslash\{\gamma\}} \odot [\alpha\backslash\gamma] & = & [\alpha\backslash\sigma_{\backslash\{\gamma\}}\cdot\gamma; \sigma_{\backslash\{\gamma,\alpha\}}] \\ & = & [\alpha\backslash\gamma; \sigma_{\backslash\{\gamma,\alpha\}}] \\ & = & [\alpha\backslash\gamma] \odot \sigma_{\backslash\{\gamma,\alpha\}}\end{array}$$

de même $\sigma_{\backslash\{\gamma\}}\odot[\beta\backslash\gamma] = [\beta\backslash\gamma]\odot\sigma_{\backslash\{\gamma,\beta\}}$, donc $[\alpha\backslash\gamma]\sigma_{\backslash\{\gamma,\alpha\}}\cdot A =_\alpha [\beta\backslash\gamma]\sigma_{\backslash\{\gamma,\beta\}}\cdot B$; ainsi par la règle $(\alpha_\forall)$ nous obtenons $\forall\alpha.\sigma_{\backslash\{\gamma,\alpha\}}\cdot A =_\alpha \forall\beta.\sigma_{\backslash\{\gamma,\beta\}}\cdot B$; par conséquent $\sigma_{\backslash\{\gamma\}}\cdot(\forall\alpha.A) =_\alpha \sigma_{\backslash\{\gamma\}}\cdot(\forall\beta.B)$, mais comme γ est une variable fraîche pour $\forall\alpha.A$ et $\forall\beta.B$ nous avons $\sigma\cdot(\forall\alpha.A) =_\alpha \sigma\cdot(\forall\beta.B)$.

□

Enfin, voici le lemme principal, celui qui démontre que toutes les formules contenues dans les dérivations de P-CP^2 sont HTM :

Proposition 2.3.9. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F$ *dérivable, l'ensemble* $\Gamma \cup \{F\}$ *est HTM dans* P-CP^2.

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F$:

$\dfrac{\vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \top}$ (P-Ax) : Soit F' un élément de Γ ; par hypothèse de récurrence $\sigma \cdot F'$ est HTM, donc d'après le lemme 2.3.6 la formule F' est HTM ; ainsi l'ensemble $\Gamma \cup \{\top\}$ est HTM ;

$\dfrac{F \in \Gamma \quad \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F}$ (P-Hyp) : le raisonnement est analogue à celui du cas (P-Ax) ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{p}} B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \to B}$ $(\to_{\mathrm{i}})$: par hypothèse de récurrence l'ensemble $\Gamma \cup \{A, B\}$ est HTM, et la formule $A \to B$ est TM d'après la proposition 2.3.1 ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \to B \quad \Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} B}$ $(\to_{\mathrm{e}})$: par hypothèse de récurrence l'ensemble $\Gamma \cup \{A, B\}$ est HTM ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \forall \alpha.A}$ $(\forall_{\mathrm{i}})$: le raisonnement est analogue à celui du cas $(\to_{\mathrm{i}})$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \forall \alpha.A \quad \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot U}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} [\alpha \backslash U] \cdot A}$ (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) : par hypothèse de récurrence $\sigma \cdot U$ est HTM, donc d'après le lemme 2.3.6 la formule U est HTM ; par hypothèse de récurrence l'ensemble $\Gamma \cup \{A\}$ est HTM, donc d'après le lemme 2.3.7 la formule $[\alpha \backslash U] \cdot A$ est HTM ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} B}$ $(=_\alpha)$: par hypothèse de récurrence A est HTM, donc B est HTM d'après le lemme 2.3.8.

□

Parmi toutes les motivations triviales, on distingue la motivation remplaçant toutes les variables libres des formules par la constante $\top$, qui représente la plus simple des motivations triviales ; on l'appelle par abus de langage la *motivation* $\top$. Elle est déjà présente dans le chapitre 1 car dans P-CPM, toutes les formules sont motivables par $\top$. Le lemme 2.3.9 nous permet de montrer qu'il en est de même dans P-CP^2, à la différence que dans P-CP^2, il n'y a que les formules motivables qui le sont par $\top$, c'est-à-dire toutes les sous-formules des formules contenues dans les dérivations de P-CP^2 :

Proposition 2.3.10. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F$ *dérivable, les jugements* $\vdash^2_{\mathrm{p}} G_\top$ *sont dérivables pour toute sous-formule* G *d'une formule appartenant à* $\Gamma \cup \{F\}$.

Démonstration. Soit G une sous-formule d'une formule dans $\Gamma \cup \{F\}$. D'après la proposition 2.3.9, la formule G est HTM dans P-CP^2 : il existe une substitution σ triviale dans P-CP^2 telle que $\vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot G$ soit dérivable. D'après le lemme 2.3.5, le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} \tau_{|\mathrm{Dom}(\sigma)} \cdot G$ est dérivable. Par la proposition 2.3.2, $\vdash^2_{\mathrm{p}} \tau \cdot G$ est dérivable. Ainsi $\vdash^2_{\mathrm{p}} G_\top$ est dérivable. □

Ce résultat nous permet d'affirmer, à l'instar de Heyting [20] mais pour des raisons totalement différentes, que seules les propositions vraies apportent du sens dans les logiques propositionnelles sans négation. On notera qu'à la différence de Heyting, nous pensons que les logiques propositionnelles sans négation ont un contenu très riche et sont aussi expressives que les logiques propositionnelles usuelles, ce que nous vérifierons dans la section 2.5.

Comme toutes les formules motivables sont motivables par une substitution commune, par exemple la substitution $\top$, la règle d'affaiblissement faiblement pédagogique peut être grandement simplifiée dans P-CP^2 ; par conséquent, la règle d'affaiblissement pédagogique (P-Aff) :

$$\frac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F \qquad \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot U}{\Gamma, U \vdash^2_{\mathrm{p}} F} \text{ (P-Aff)}$$

est dérivable dans P-CP^2.

Il nous semble important de remarquer que le calcul P-CP^2 capture toutes les propriétés démontrables usuellement dans le calcul usuel CP^2, même si la preuve du résultat n'est pas d'une grande profondeur ; en effet, la notion de formule motivable est destinée à constituer la « bonne » notion de formules dans les systèmes pédagogiques, puisque les formules non motivables sont totalement absentes de toute dérivation :

Proposition 2.3.11. *Pour toute formule close* F *HTM dans* P-CP^2, *le jugement* $\vdash^2 F$ *est dérivable si et seulement si le jugement* $\vdash^2_{\mathrm{p}} F$ *est dérivable.*

Démonstration.

$\Rightarrow$) la formule F est close et HTM dans P-CP^2, donc $\vdash^2_{\mathrm{p}} F$ est dérivable ;

$\Leftarrow$) si $\vdash^2_{\mathrm{p}} F$ est dérivable alors $\vdash^2 F$ est dérivable.

□

2.4 Définition des connecteurs logiques

Dans CP^2, en tant que calcul du second ordre, la conjonction, a disjonction et l'existence sont définissables [35]. Il en est de même dans F-CP^2 ; mais dans P-CP^2, les règles régissant la disjonction sont altérées par la contrainte pédagogiques. Nous allons exposer cela en détail pour chaque connecteur logique en reprenant leur définition usuelle dans le cadre des calculs pédagogiques. Notons que la négation est également définissable dans CP^2 ; mais on ne peut pas l'exprimer dans le calcul P-CP^2 à cause de la non-nullité syntaxique des implications apparaissant dans les dérivations. Dans F-CP^2, la situation est plus complexe car nous ignorons si oui ou non une formule absurde y est définissable ; considérant la définition usuelle de l'absurde à l'aide le la formule $\forall\alpha.\alpha$, la proposition 2.2.13 nous permet de répondre par la négative dans ce cas particulier.

2.4.1 Conjonction

Nous allons prouver que les règles d'introduction et d'éliminations de la conjonction restent les mêmes dans F-CP^2 et P-CP^2.

Définition 2.4.1. *La* conjonction $A \wedge B$ *des formules* A *et* B *est définie par la formule* $\forall\gamma.(A \to B \to \gamma) \to \gamma$*, dans laquelle* γ *est une variable fraîche pour* A *et* B*.*

Règle d'introduction

Dans le cas de F-CP^2, la règle d'introduction de la conjonction est dérivable :

Proposition 2.4.1. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \quad \Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \wedge B}\,(\wedge_{\mathrm{i}})$ *est valide dans* F-CP^2.

Démonstration. Supposons que les jugements $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ et $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B$ soient dérivables. À l'aide de la proposition 2.2.4 le contexte $\Gamma \cup \{A, B\}$ est motivable dans F-CP^2.

1) $\Gamma, A, B \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\Gamma, A, B \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B \to \top$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 1 ;
3) $\Gamma, A, B, A \to B \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B \to \gamma$ par (P-Hyp) et 2 ;
4) $\Gamma, A, B, A \to B \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ par (P-Hyp) ;
5) $\Gamma, A, B, A \to B \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 3 et 4 ;
6) $\Gamma, A, B, A \to B \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B$ par (P-Hyp) ;
7) $\Gamma, A, B, A \to B \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 5 et 6 ;
8) $\Gamma, A, B \vdash^2_{\mathrm{f}} (A \to B \to \gamma) \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 7 ;
9) $\Gamma, A, B \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(A \to B \to \gamma) \to \gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 8 ;
10) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B \to \forall\gamma.(A \to B \to \gamma) \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 9 ;
11) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ par hypothèse ;
12) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B \to \forall\gamma.(A \to B \to \gamma) \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 10 et 11 ;
13) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B$ par hypothèse ;
14) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(A \to B \to \gamma) \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 12 et 13 ;

15) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \wedge B$ par définition et 14.

$\square$

Il en est de même dans le cas de P-CP^2 :

Proposition 2.4.2. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \quad \Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \wedge B}$ $(\wedge_{\mathrm{i}})$ *est valide dans* P-CP^2.

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle de la proposition 2.4.1. $\square$

Règles d'élimination

Dans le cas de F-CP^2, les règles d'éliminations de la conjonction sont dérivables ; on ne traite que le cas de la règle d'élimination gauche, la règle d'élimination droite étant analogue :

Proposition 2.4.3. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \wedge B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A}$ $(\wedge_{\mathrm{el}})$ *est valide dans* F-CP^2.

Démonstration. Supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \wedge B$ soit dérivable. À l'aide de la proposition 2.2.4 le contexte $\Gamma \cup \{A \wedge B\}$ est motivable dans F-CP^2.

1) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(A \to B \to \gamma) \to \gamma$ par hypothèse ;
2) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (A \to B \to A) \to A$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 1 ;
3) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
4) $\Gamma, \alpha, \beta \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha$ par (P-Hyp) et 3 ;
5) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \alpha \to \beta \to \alpha$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 4 ;
6) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\forall\beta.\alpha \to \beta \to \alpha$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 5 ;
7) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to B \to A$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 6 ;
8) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 2 et 7.

$\square$

Il en est de même dans le cas de P-CP^2 :

Proposition 2.4.4. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \wedge B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A}$ $(\wedge_{\mathrm{el}})$ *est valide dans* P-CP^2.

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle de la proposition 2.4.3. Cependant, aux lignes 2 et 7, nous devons motiver dans P-CP^2 les formules A et B pour appliquer la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$; mais A et B sont des formules motivables dans P-CP^2 d'après la proposition 2.3.9. $\square$

2.4.2 Disjonction

Nous allons prouver que les règles d'introductions et d'élimination de la disjonction restent les mêmes dans F-CP^2. Cependant, même si la règle d'élimination usuelle de la disjonction est valide P-CP^2, ce n'est pas le cas pour les règles d'introductions.

Définition 2.4.2. *La* disjonction $A \vee B$ *des formules* A *et* B *est définie par la formule* $\forall\gamma.(A \to \gamma) \to (B \to \gamma) \to \gamma$*, dans laquelle* γ *est une variable fraîche pour* A *et* B*.*

Règles d'introduction

Dans le cas de F-CP^2, les règles d'introductions de la disjonction sont dérivables ; on ne traite que le cas de la règle d'introduction gauche, la règle d'introduction droite étant analogues :

Proposition 2.4.5. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \vee B}\ (\vee_{\mathrm{il}})$ *est valide dans* F-CP^2.

Démonstration. Supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ soit dérivable. À l'aide de la proposition 2.2.4 le contexte $\Gamma \cup \{A\}$ est motivable dans F-CP^2.

1) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\Gamma, \beta \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Hyp) et 1 ;
3) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \beta \to \top$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 2 ;
4) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\beta.\beta \to \top$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 3 ;
5) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B \to \top$ par ($\forall_{\mathrm{e}}$) et 4 ;
6) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to \top$ par ($\forall_{\mathrm{e}}$) et 4 ;
7) $\Gamma, A \to \gamma, B \to \gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to \gamma$ par (P-Hyp), 5 et 6 ;
8) $\Gamma, A \to \gamma, B \to \gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ par (P-Hyp), 5 et 6 ;
9) $\Gamma, A \to \gamma, B \to \gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} \gamma$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 7 et 8 ;
10) $\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} (A \to \gamma) \to (B \to \gamma) \to \gamma$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 9 ;
11) $\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(A \to \gamma) \to (B \to \gamma) \to \gamma$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 10 ;
12) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to \forall\gamma.(A \to \gamma) \to (B \to \gamma) \to \gamma$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 11 ;
13) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A$ par hypothèse ;
14) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(A \to \gamma) \to (B \to \gamma) \to \gamma$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 12 et 13 ;
15) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \vee B$ par définition et 14.

□

Dans le cas de P-CP^2, la règle usuelle ne fonctionne plus. Si du jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A$ on veut dériver le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \vee B$, la proposition 2.3.10 impose à la formule B d'être motivable ; mais dans la règle usuelle, la formule B est arbitraire, éventuellement non motivable. Il faut alors altérer les règles d'introductions afin de garantir que la formule introduite est motivable, ce que permettent les règles pédagogiques d'introduction de la disjonction ($\vee_{\mathrm{il}}$) et ($\vee_{\mathrm{ir}}$) :

Proposition 2.4.6. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \quad \vdash^2_{\mathrm{p}} \sigma \cdot B}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \vee B}$ (P-$\vee_{\mathrm{il}}$) *est valide dans* P-CP^2.

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle de la proposition 2.4.5. Cependant, aux lignes 5 et 6, nous devons motiver dans P-CP^2 les formules A et B pour appliquer la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle ($\forall_{\mathrm{e}}$) ; mais A est une formule motivable dans P-CP^2 d'après la proposition 2.3.9 et B est une formule motivable dans P-CP^2 par hypothèse. □

Règle d'élimination

Dans le cas de F-CP^2, la règle d'élimination de la disjonction est dérivable :

Proposition 2.4.7. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \vee B \quad \Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} C \quad \Gamma, B \vdash^2_{\mathrm{f}} C}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} C}$ ($\vee_{\mathrm{e}}$) *est valide dans* F-CP^2.

Démonstration. Supposons que les jugements $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \vee B$, $\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ et $\Gamma, B \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ soient dérivables.

1) $\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ par hypothèse ;
2) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to C$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 1 ;
3) $\Gamma, B \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ par hypothèse ;
4) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} B \to C$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 3 ;
5) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(A \to \gamma) \to (B \to \gamma) \to \gamma$ par hypothèse ;
6) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (A \to C) \to (B \to C) \to C$ par ($\forall_{\mathrm{e}}$) et 5 ;
7) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (B \to C) \to C$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 2 et 6 ;
8) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ par ($\to_{\mathrm{e}}$),4 et 7.

□

Il en est de même dans le cas de P-CP^2 :

Proposition 2.4.8. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A \vee B \quad \Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{p}} C \quad \Gamma, B \vdash^2_{\mathrm{p}} C}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} C}$ ($\vee_{\mathrm{e}}$) *est valide dans* P-CP^2.

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle de la proposition 2.4.7. Cependant, à la ligne 6, nous devons motiver dans P-CP^2 la formules C pour appliquer la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle ($\forall_{\mathrm{e}}$) ; mais C est une formule motivable dans P-CP^2 d'après la proposition 2.3.9. □

2.4.3 Existence

Tout comme la conjonction, le quantificateur existentiel est un opérateur sans histoire dans les calculs F-CP^2 et P-CP^2 : les règles usuelles d'introduction et d'éliminations y sont dérivables.

Définition 2.4.3. *Pour toute formule A, la formule $\exists\epsilon.A$ est définie par la formule $\forall\gamma.(\forall\epsilon.A \to \gamma) \to \gamma$, dans laquelle γ est une variable fraîche pour A.*

Règle d'introduction

Dans le cas de F-CP^2, la règle d'introduction du quantificateur existentiel est dérivable :

Proposition 2.4.9. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\epsilon\backslash U]\cdot A}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \exists\epsilon.A}$ $(\exists_{\mathrm{i}})$ *est valide dans* F-CP^2.

Démonstration. Supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\epsilon\backslash U]\cdot A$ est dérivable. À l'aide de la proposition 2.2.4 le contexte $\Gamma \cup \{[\epsilon\backslash U]\cdot A, A\}$ est motivable dans F-CP^2.

1) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A, A \vdash^2_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to \top$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 1 ;
3) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\epsilon.A \to \top$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A, \forall\epsilon.A \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\epsilon.A \to \gamma$ par (P-Hyp) et 3 ;
5) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A, \forall\epsilon.A \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\epsilon\backslash U]\cdot A \to \gamma$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 4 ;
6) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A, \forall\epsilon.A \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\epsilon\backslash U]\cdot A$ par (P-Hyp) et 3 ;
7) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A, \forall\epsilon.A \to \gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 5 et 6 ;
8) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A \vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\epsilon.A \to \gamma) \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 7 ;
9) $\Gamma, [\epsilon\backslash U]\cdot A \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(\forall\epsilon.A \to \gamma) \to \gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 8 ;
10) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\epsilon\backslash U]\cdot A \to \forall\gamma.(\forall\epsilon.A \to \gamma) \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 9 ;
11) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} [\epsilon\backslash U]\cdot A$ par hypothèse ;
12) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(\forall\epsilon.A \to \gamma) \to \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 10 et 11 ;
13) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \exists\epsilon.A$ par définition et 12.

□

Il en est de même dans le cas de P-CP^2 :

Proposition 2.4.10. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} [\epsilon\backslash U]\cdot A}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \exists\epsilon.A}$ $(\exists_{\mathrm{i}})$ *est valide dans* P-CP^2.

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle de la proposition 2.4.9. Cependant, à la ligne 5, nous devons motiver dans P-CP^2 la formules U pour appliquer la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$; mais U est une formule motivable dans P-CP^2 d'après la proposition 2.3.9. □

Règle d'élimination

Dans le cas de F-CP^2, la règle d'élimination du quantificateur existentiel est dérivable :

Proposition 2.4.11. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \exists\epsilon.A \quad \Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} C \quad \epsilon \notin \mathrm{Vl}(\Gamma, C)}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} C}\,(\exists_{\mathrm{e}})$ *est valide dans* F-CP^2.

Démonstration. Supposons que les jugements $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \exists\epsilon.A$ et $\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ soient dérivables.

1) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.(\forall\epsilon.A \to \gamma) \to \gamma$ par hypothèse ;
2) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} (\forall\epsilon.A \to C) \to C$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$, 1 et $\epsilon \notin \mathrm{Vl}(\Gamma, C)$;
3) $\Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ par hypothèse ;
4) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} A \to C$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\epsilon.A \to C$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 4 ;
6) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{f}} C$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 2 et 5.

□

Il en est de même dans le cas de P-CP^2 :

Proposition 2.4.12. *La règle* $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \exists\epsilon.A \quad \Gamma, A \vdash^2_{\mathrm{p}} C \quad \epsilon \notin \mathrm{Vl}(\Gamma, C)}{\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} C}\,(\exists_{\mathrm{e}})$ *est valide dans* P-CP^2.

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle de la proposition 2.4.11. Cependant, à la ligne 2, nous devons motiver dans P-CP^2 la formules C pour appliquer la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$; mais C est une formule motivable dans P-CP^2 d'après la proposition 2.3.9. □

2.5 Traductions

Comparer l'expressivité respective de CP^2 et des calculs pédagogiques n'est pas immédiat puisque, d'après les propositions 2.2.13 et 2.3.10, il existe des théorèmes de CP^2 qui ne sont pas prouvables dans F-CP^2 ni dans P-CP^2. La contrainte pédagogique change la signification des opérateurs logiques ; par exemple, la quantification universelle dans P-CP^2 porte uniquement sur les formules motivables ; ces calculs ne partagent plus exactement les mêmes notions : il est alors nécessaire de passer par l'intermédiaire d'une traduction pour les comparer.

2.5.1 γ-traduction

Friedman [10] définit une traduction, la A-traduction, permettant entre autres de plonger le calcul propositionnel intuitionniste dans le calcul propositionnel minimal. Nous définissons ci-dessous la γ-traduction en nous inspirant du travail de Friedman pour plonger le calcul CP^2 dans F-CP^2 et P-CP^2. Notons que plonger F-CP^2 et P-CP^2 dans CP^2 est trivial puisque ces deux calculs pédagogiques sont des restrictions du calcul intuitionniste.

Définition 2.5.1. *Soit F une formule et γ une variable fraîche pour F. La γ-traduction de F, notée F^γ, est définie par récurrence sur F :*
$F = \top$: $F^\gamma = \top$;
$F = \alpha$: $F^\gamma = \alpha \vee \gamma$;
$F = A \to B$: $F^\gamma = A^\gamma \to B^\gamma$;
$F = \forall\alpha.A$: $F^\gamma = \forall\alpha.A^\gamma$.

La γ-traduction doit préserver l'équivalence des formules par rapport aux dérivations ; en particulier, deux formules α-équivalentes doivent rester α-équivalentes après traduction :

Lemme 2.5.1. *Pour toutes formules F et G, si $F =_\alpha G$ alors $F^\gamma =_\alpha G^\gamma$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $F =_\alpha G$:

$\dfrac{}{\top =_\alpha \top}\,(\alpha_\top)$: par définition nous avons $\top^\gamma = \top$, donc $\top^\gamma =_\alpha \top^\gamma$;

$\dfrac{}{\alpha =_\alpha \alpha}\,(\alpha_{\mathrm{var}})$: par définition nous avons $\alpha^\gamma = \alpha \vee \gamma$, donc $\alpha^\gamma =_\alpha \alpha^\gamma$;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\,(\alpha_\to)$: par hypothèse de récurrence nous avons $A^\gamma =_\alpha A'^\gamma$ et $B^\gamma =_\alpha B'^\gamma$, et par définition nous avons $(A \to B)^\gamma = A^\gamma \to B^\gamma$ ainsi que $(A' \to B')^\gamma = A'^\gamma \to B'^\gamma$; donc $(A \to B)^\gamma =_\alpha (A' \to B')^\gamma$ par la règle $(\alpha_\to)$;

$\dfrac{[\alpha\backslash\delta]\cdot A =_\alpha [\beta\backslash\delta]\cdot B \quad \delta \in \mathrm{Fr}(A, B)}{\forall\alpha.A =_\alpha \forall\beta.B}\,(\alpha_\forall)$: par hypothèse de récurrence nous avons $([\alpha\backslash\delta]\cdot A)^\gamma =_\alpha ([\beta\backslash\delta]\cdot B)^\gamma$. Par une récurrence immédiate sur A nous avons $([\alpha\backslash\delta]\cdot A)^\gamma = [\alpha\backslash\delta]\cdot A^\gamma$; de même nous avons $([\beta\backslash\delta]\cdot B)^\gamma = [\beta\backslash\delta]\cdot B^\gamma$; donc $\forall\alpha.A^\gamma =_\alpha \forall\beta.B^\gamma$ par la règle $(\alpha_\forall)$; par définition nous avons $\forall\alpha.A^\gamma = (\forall\alpha.A)^\gamma$ et $\forall\beta.B^\gamma = (\forall\beta.B)^\gamma$, donc $(\forall\alpha.A)^\gamma =_\alpha (\forall\beta.B)^\gamma$.

□

Pour plonger CP^2 dans ses variantes pédagogiques, il faut que la γ-traduction transforme toute formule en une formule motivables, ce que nous démontrons dans les deux lemmes suivant :

Lemme 2.5.2. *Pour toute formule F et pour toute variable γ fraîche pour F, le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F^\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur F :

$F = \top$: le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \top$ est aisément dérivable ;

$F = \alpha$: le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \alpha \vee \gamma$ est facilement dérivable ;

$F = A \to B$: par hypothèse de récurrence le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} B^\gamma$ est dérivable. Dérivons maintenant le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot A^\gamma$:

1) $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A^\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
2) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \gamma \to A^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 1 ;
3) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \forall\gamma.\gamma \to A^\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \top$ par (P-Ax) ;
5) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \top \to [\gamma\backslash\top]\cdot A^\gamma$ par (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), 3 et 4 ;
6) $\vdash^2_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot A^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 4 et 5.

Ainsi A^γ est motivable dans P-CP^2 ; et nous dérivons $\gamma, A^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} B^\gamma$ avec la règle (P-Aff). Nous dérivons alors le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (A \to B)^\gamma$ par application de la règle $(\to_{\mathrm{i}})$.

$F = \forall\alpha.A$: par hypothèse de récurrence le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A^\gamma$ est dérivable. Nous avons $\gamma \neq \alpha$ car γ est une variable fraîche pour $\forall\alpha.A$; ainsi nous dérivons le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\forall\alpha.A)^\gamma$ par application de la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$.

□

Lemme 2.5.3. *Pour toute formule F et pour toute variable γ fraîche pour F, le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot F^\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Voici la dérivation du jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot F^\gamma$:

1) $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F^\gamma$ par le lemme 2.5.2 ;
2) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \gamma \to F^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 1 ;
3) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \forall\gamma.\gamma \to F^\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \top$ par (P-Ax) ;
5) $\vdash^2_{\mathrm{p}} \top \to [\gamma\backslash\top]\cdot F^\gamma$ par (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), 3 et 4 ;
6) $\vdash^2_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot F^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 4 et 5.

□

Pour que la γ-traduction soit compatible avec les règles $(\forall_{\mathrm{e}})$ et (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), il faut qu'elle commute avec l'application des substitutions :

Lemme 2.5.4. *Soient F et U deux formules, Γ un contexte HTM et γ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{F, U\}$ distincte de α. Le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} [\alpha\backslash U^\gamma]F^\gamma$ est dérivable si et seulement si le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} ([\alpha\backslash U]\cdot F)^\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Notons μ la substitution $[\alpha\backslash U]$, et μ^γ la substitution $[\alpha\backslash U^\gamma]$. Nous allons prouver le lemme par récurrence sur F :

$F = \top$: nous avons $\mu^\gamma \cdot \top^\gamma = \top$ et $(\mu \cdot \top)^\gamma = \top$;
$F = \beta$: deux cas se présentent :
– $\beta = \alpha$: nous avons $(\mu \cdot \alpha)^\gamma = U^\gamma$ et $U^\gamma \alpha^\gamma = U^\gamma \vee \gamma$. Si $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} U^\gamma$ est dérivable alors $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} U^\gamma \vee \gamma$ est dérivable. D'après le lemme 2.5.2, le jugement $\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} U^\gamma$ est dérivable ; donc si $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} U^\gamma \vee \gamma$ est dérivable alors $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} U^\gamma$ est dérivable.
– $\beta \neq \alpha$: nous avons $(\mu \cdot \beta)^\gamma = \beta^\gamma$ et $\mu^\gamma \cdot \beta^\gamma = \beta^\gamma$;

$F = A \to B$: – supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot (A \to B)^\gamma$ soit dérivable. La formule $(\mu \cdot A)^\gamma$ est motivable dans P-CP^2 d'après le lemme 2.5.3 ; donc elle est HTM d'après la proposition 2.3.9.
1) $\Gamma, (\mu \cdot A)^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot A)^\gamma$ par (P-Hyp) ;
2) $\Gamma, (\mu \cdot A)^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot A^\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
3) $\Gamma, (\mu \cdot A)^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot (A \to B)^\gamma$ par hypothèse ;
4) $\Gamma, (\mu \cdot A)^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot A^\gamma \to \mu^\gamma \cdot B^\gamma$ par définition ;
5) $\Gamma, (\mu \cdot A)^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot B^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 2 et 4 ;
6) $\Gamma, (\mu \cdot A)^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot B)^\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
7) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot A)^\gamma \to (\mu \cdot B)^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 6 ;
8) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot (A \to B))^\gamma$ par définition.

– supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot (A \to B))^\gamma$ soit dérivable. Les formules U^γ et A^γ sont motivables dans P-CP^2 d'après le lemme 2.5.3 ; donc elles sont HTM d'après la proposition 2.3.9. Ainsi la formule $\mu^\gamma \cdot A^\gamma$ est HTM d'après le lemme 2.3.7.
1) $\Gamma, \mu^\gamma \cdot A^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot (A \to B))^\gamma$ par hypothèse ;
2) $\Gamma, \mu^\gamma \cdot A^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot A)^\gamma \to (\mu \cdot B)^\gamma$ par définition ;
3) $\Gamma, \mu^\gamma \cdot A^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot A^\gamma$ par (P-Hyp) ;
4) $\Gamma, \mu^\gamma \cdot A^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot A)^\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
5) $\Gamma, \mu^\gamma \cdot A^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot B)^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 2 et 4 ;
6) $\Gamma, \mu^\gamma \cdot A^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot B^\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
7) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot A^\gamma \to \mu^\gamma \cdot B^\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 6 ;
8) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot (A \to B)^\gamma$ par définition.

$F = \forall \beta . A$: – supposons que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot (\forall \beta . A)^\gamma$ soit dérivable.
1) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot (\forall \beta . A)^\gamma$ par hypothèse ;
2) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot \forall \beta . A^\gamma$ par définition ;
3) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma \cdot A^\gamma$ par (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) et 2 ;
4) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot A)^\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
5) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \forall \beta . (\mu \cdot A)^\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 4.

Par α-équivalence nous pouvons supposer que $\beta \notin \mathrm{Vl}(U)$. Nous avons alors $\forall \beta . (\mu \cdot A)^\gamma = (\mu \cdot \forall \beta . A)^\gamma$. Ainsi nous avons une dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot \forall \beta . A)^\gamma$.

– Supposons que $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu \cdot \forall \beta . A)^\gamma$ soit dérivable. Par α-équivalence nous pouvons supposer que $\beta \notin \mathrm{Vl}(\Gamma, U)$. Nous avons alors $\forall \beta . (\mu \cdot A)^\gamma = (\mu \cdot \forall \beta . A)^\gamma$.

1) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu{\cdot}\forall\beta.A)^\gamma$ par (P-Hyp) ;
2) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \forall\beta.(\mu{\cdot}A)^\gamma$ par définition ;
3) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\mu{\cdot}A)^\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 2 ;
4) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma{\cdot}A^\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
5) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma{\cdot}\forall\beta.A^\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$, 4 et $\beta \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)$;
6) $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \mu^\gamma{\cdot}(\forall\beta.A)^\gamma$ par définition.

□

Nous pouvons maintenant démontrer que la γ-traduction plonge CP^2 dans P-CP^2, et également dans F-CP^2 puisque toutes les dérivations dans P-CP^2 sont valides dans F-CP^2 :

Lemme 2.5.5. *Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2 F$, le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F^\gamma$ est dérivable, avec γ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{F\}$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2 F$; les cas des règles $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$, $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$ et $(\forall_{\mathrm{i}})$ sont immédiats, et les cas des règles (Ax) et (Hyp) sont analogues :

$\dfrac{}{\Gamma \vdash^2 \top}$ (Ax) : d'après le lemme 2.5.3, les jugements $\vdash^2_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}\Gamma^\gamma$ sont dérivables. Ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} \top^\gamma$ est dérivable avec la règle (P-Ax).

$\dfrac{\Gamma \vdash^2 \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash^2 [\alpha\backslash U]{\cdot}A}$ $(\forall_{\mathrm{e}})$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} (\forall\alpha.A)^\gamma$ est dérivable. D'après le lemme 2.5.3, le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}U^\gamma$ est dérivable. Ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} [\alpha\backslash U^\gamma]{\cdot}A^\gamma$ avec la règle $(\mathrm{P}\text{-}\forall_{\mathrm{e}})$. Ainsi, d'après le lemme 2.5.4, le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} ([\alpha\backslash U]{\cdot}A)^\gamma$ est dérivable.

$\dfrac{\Gamma \vdash^2 A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^2 B}$ $(=_\alpha)$: par hypothèse de récurrence $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} A^\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 2.5.1 nous avons $A^\gamma =_\alpha B^\gamma$, et ainsi nous dérivons $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} B^\gamma$ avec la règle $(=_\alpha)$.

□

Il nous reste à démontrer la réciproque du plongement de CP^2 dans P-CP^2 via la γ-traduction.

Définition 2.5.2. *Pour toute formule F, nous définissons la formule $F^\perp$ comme étant la formule $[\gamma\backslash\perp]{\cdot}F^\gamma$.*

Nous montrons alors que les deux formules F et $F^\perp$ sont équivalentes CP^2 :

Proposition 2.5.6. *Pour toute formule F, le jugement $\vdash^2 F \leftrightarrow F^\perp$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur F :
$F = \top$: le jugement $\vdash^2 \top \leftrightarrow \top$ est dérivable ;

$F = \alpha$: le jugement $\vdash^2 \alpha \leftrightarrow (\alpha \vee \bot)$ est aisément dérivable ;
$F = A \to B$: – dérivons le jugement $\vdash^2 (A \to B) \to (A \to B)^\perp$:
1) $A \to B, A^\perp \vdash^2 A^\perp$ par (Hyp) ;
2) $A \to B, A^\perp \vdash^2 A^\perp \to A$ par hypothèse de récurrence ;
3) $A \to B, A^\perp \vdash^2 A$ par $(\to_\mathrm{e})$, 1 et 2 ;
4) $A \to B, A^\perp \vdash^2 A \to B$ par (Hyp) ;
5) $A \to B, A^\perp \vdash^2 B$ par $(\to_\mathrm{e})$, 3 et 4 ;
6) $A \to B, A^\perp \vdash^2 B \to B^\perp$ par hypothèse de récurrence ;
7) $A \to B, A^\perp \vdash^2 B^\perp$ par $(\to_\mathrm{e})$, 5 et 6 ;
8) $A \to B \vdash^2 (A \to B)^\perp$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 7 ;
9) $\vdash^2 (A \to B) \to (A \to B)^\perp$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 8.

– dérivons le jugement $\vdash^2 (A \to B)^\perp \to (A \to B)$:
1) $(A \to B)^\perp, A \vdash^2 A$ par (Hyp) ;
2) $(A \to B)^\perp, A \vdash^2 A \to A^\perp$ par hypothèse de récurrence ;
3) $(A \to B)^\perp, A \vdash^2 A^\perp$ par $(\to_\mathrm{e})$, 1 et 2 ;
4) $(A \to B)^\perp, A \vdash^2 (A \to B)^\perp$ par (Hyp) ;
5) $(A \to B)^\perp, A \vdash^2 B^\perp$ par $(\to_\mathrm{e})$, 3 et 4 ;
6) $(A \to B)^\perp, A \vdash^2 B^\perp \to B$ par hypothèse de récurrence ;
7) $(A \to B)^\perp, A \vdash^2 B$ par $(\to_\mathrm{e})$, 5 et 6 ;
8) $(A \to B)^\perp \vdash^2 A \to B$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 7 ;
9) $\vdash^2 (A \to B)^\perp \to (A \to B)$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 8.

$F = \forall\alpha.A$: – dérivons le jugement $\vdash^2 (\forall\alpha.A) \to (\forall\alpha.A)^\perp$:
1) $\forall\alpha.A \vdash^2 \forall\alpha.A$ par (Hyp) ;
2) $\forall\alpha.A \vdash^2 A$ par $(\forall_\mathrm{e})$ et 1 ;
3) $\forall\alpha.A \vdash^2 A \to A^\perp$ par hypothèse de récurrence ;
4) $\forall\alpha.A \vdash^2 A^\perp$ par $(\to_\mathrm{e})$, 2 et 3 ;
5) $\forall\alpha.A \vdash^2 \forall\alpha.A^\perp$ par $(\forall_\mathrm{i})$ et 4 ;
6) $\vdash^2 (\forall\alpha.A) \to (\forall\alpha.A)^\perp$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 5.

– dérivons le jugement $\vdash^2 (\forall\alpha.A)^\perp \to (\forall\alpha.A)$:
1) $(\forall\alpha.A)^\perp \vdash^2 (\forall\alpha.A)^\perp$ par (Hyp) ;
2) $(\forall\alpha.A)^\perp \vdash^2 A^\perp$ par $(\forall_\mathrm{e})$ et 1 ;
3) $(\forall\alpha.A)^\perp \vdash^2 A^\perp \to A$ par hypothèse de récurrence ;
4) $(\forall\alpha.A)^\perp \vdash^2 A$ par $(\to_\mathrm{e})$, 2 et 3 ;
5) $(\forall\alpha.A)^\perp \vdash^2 \forall\alpha.A$ par $(\forall_\mathrm{i})$ et 4 ;
6) $\vdash^2 (\forall\alpha.A)^\perp \to (\forall\alpha.A)$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 5.

□

Ainsi nous pouvons prouver la réciproque du lemme 2.5.5 :

Lemme 2.5.7. *Pour tout jugement* $\Gamma^\gamma \vdash^2_\mathrm{p} F^\gamma$ *dérivable, le jugement* $\Gamma \vdash^2 F$ *est dérivable, avec* γ *une variable fraîche pour* $\Gamma \cup \{F\}$.

Démonstration. Le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F^\gamma$ est dérivable par hypothèse, donc le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2 F^\gamma$ est dérivable. De $\Gamma^\gamma \vdash^2 F^\gamma$ nous dérivons $\vdash^2 \Gamma^\perp \to F^\perp$. Les jugements $\vdash^2 \Gamma \to \Gamma^\perp$ et $\vdash^2 F^\perp \to F$ sont dérivables d'après la proposition 2.5.6. Ainsi le jugement $\vdash^2 \Gamma \to F$ est dérivable, de même que le jugement $\Gamma \vdash^2 F$. □

Grâce aux lemmes 2.5.5 et 2.5.7, nous avons les outils pour démontrer que la γ-traduction préserve la notion de dérivation :

Proposition 2.5.8. *Le jugement $\Gamma \vdash^2 F$ est dérivable si et seulement si le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\mathrm{p}} F^\gamma$est dérivable, avec γ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{F\}$.*

Démonstration. Conséquence immédiate des lemmes 2.5.5 et 2.5.7. □

Ainsi, les calculs CP^2, F-CP^2 et P-CP^2 sont aussi puissants les uns que les autres du point de vue de la dérivabilité.

2.5.2 Traduction de CP^2 dans F-CP^2

Pour qu'une traduction soit pertinente, il faut non seulement qu'elle préserve la dérivabilité, mais aussi que les formules restent équivalentes même après traduction. Le lemme 2.5.6 atteste que pour toute formule F, la formule $F^\perp$ est équivalente à F. Il reste à prouver que F est un théorème de CP^2 si et seulement si $F^\perp$ est un théorème de F-CP^2, afin de montrer que $F^\perp$ est une traduction fidèle de F dans F-CP^2 :

Proposition 2.5.9. *Pour toute formule F, le jugement $\vdash^2 F$ si et seulement si le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} F^\perp$ est dérivable.*

Démonstration. Deux cas sont à considérer :

$\Rightarrow$) supposons que le jugement $\vdash^2 F$ est dérivable. D'après la proposition 2.5.8, le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^\gamma$ est dérivable. Donc le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} F^\gamma$ est dérivable. Nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\gamma.F^\gamma$ avec la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$, puis nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} F^\perp$ avec la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$.

$\Leftarrow$) supposons que le jugement $\vdash^2 F^\perp$ soit dérivable. Alors le jugement $\vdash^2 F^\perp$ est dérivable. Nous dérivons le jugement $\vdash^2 F$ à l'aide de la proposition 2.5.6.

□

Ainsi F-CP^2 est un calcul qui a la même puissance expressive que CP^2, compte-tenu de la traduction des formules F en $F^\perp$.

2.5.3 Traduction de CP^2 dans $\mathrm{P\text{-}CP}^2$

Dans $\mathrm{F\text{-}CP}^2$, la formule $F^\perp$ est une traduction fidèle de la formule F ; mais elle peut contenir des occurrences de la formule $\perp$, ce qui rend cette traduction inapplicable dans le cas de $\mathrm{P\text{-}CP}^2$. En remplacement, nous définissons la formule F^* par la formule $\forall\gamma.F^\gamma$. On remarque d'abord que la traduction de F en F^* préserve les théorèmes :

Proposition 2.5.10. *Pour toute formule F, le jugement $\vdash^2 F$ est dérivable si et seulement si le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^*$ est dérivable.*

Démonstration. Deux cas sont à considérer :

$\Rightarrow$) supposons que le jugement $\vdash^2 F$ soit dérivable. D'après la proposition 2.5.8, le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^\gamma$ est dérivable. Nous dérivons le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^*$ avec la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$.

$\Leftarrow$) supposons que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^*$ soit dérivable. Alors le jugement $\vdash^2 F^*$ est dérivable. Nous dérivons le jugement $\vdash^2 F^\perp$ avec la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$, puis nous dérivons le jugement $\vdash^2 F$ à l'aide de la proposition 2.5.6.

□

Dans le cas des formules dérivables, la traduction de F en F^* préserve l'équivalence des formules :

Proposition 2.5.11. *Pour toute formule F, si l'un des deux jugements $\vdash^2 F$ et $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^*$ est dérivable, alors le jugement $\vdash^2 F \leftrightarrow F^*$ est dérivable.*

Démonstration. Deux cas se présentent :

- supposons que le jugement $\vdash^2 F$ soit dérivable. Le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^*$ est dérivable d'après la proposition 2.5.10. Le jugement $F^* \vdash^2 F$ est alors aisément dérivable, de même que le jugement $F \vdash^2 F^*$. Nous dérivons ainsi les jugements $\vdash^2 F \to F^*$ et $\vdash^2 F^* \to F$ avec la règle $(\to_{\mathrm{i}})$.
- supposons que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{p}} F^*$ soit dérivable. Le jugement $\vdash^2 F$ est dérivable d'après la proposition 2.5.10. Nous concluons alors comme dans le cas précédent.

□

Malheureusement, l'équivalence des formules n'est pas préservé pour toutes les formules ; c'est le cas de la formule $(\alpha \to \beta) \to \beta$:

Proposition 2.5.12. *Il existe une formule F telle que le jugement $\vdash^2 F \leftrightarrow F^*$ ne soit pas dérivable.*

Démonstration. Posons $F = (\alpha \to \beta) \to \beta$ et supposons que le jugement $\vdash^2 F \leftrightarrow F^*$ soit dérivable. Dons $\vdash^2 F \to F^\gamma$ est dérivable. Ainsi le jugement $(\alpha \to \beta) \to \beta \vdash^2 ((\alpha \vee \gamma) \to (\beta \vee \gamma)) \to (\beta \vee \gamma)$ est dérivable. En substituant γ par α et β par $\perp$, nous obtenons une dérivation du jugement $(\alpha \to \perp) \to \perp \vdash^2 ((\alpha \vee \alpha) \to (\perp \vee \alpha)) \to (\perp \vee \alpha)$. La formule $(\alpha \vee \alpha) \to (\perp \vee \alpha)$ est dérivable dans CP^2 et la formule $\perp \vee \alpha$ est équivalente à α dans CP^2 ; donc le jugement $(\alpha \to \perp) \to \perp \vdash^2 \alpha$ est dérivable, ce qui est absurde. Nous concluons par contradiction que le jugement $\vdash^2 F \leftrightarrow F^*$ n'est pas dérivable. □

Cependant, on peut faire en sorte que les formules F et F^* soient toujours équivalentes ; mais il faut alors se placer dans un calcul classique :

Proposition 2.5.13. *Posons $B = (\top \to \gamma) \vee (\gamma \to \perp)$. Pour toute formule F, le jugement $\vdash^2 F \leftrightarrow \forall\gamma.B \to F^\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Deux cas sont à considérer :

$\Leftarrow$)

1) $\forall\gamma.B \to F^\gamma \vdash^2 \forall\gamma.B \to F^\gamma$ par (Hyp) ;
2) $\forall\gamma.B \to F^\gamma \vdash^2 ((\top \to \perp) \vee (\perp \to \perp)) \to F^\perp$ par $(\forall_\mathrm{e})$ et 1 ;
3) $\forall\gamma.B \to F^\gamma \vdash^2 (\top \to \perp) \vee (\perp \to \perp)$ aisément dérivable ;
4) $\forall\gamma.B \to F^\gamma \vdash^2 F^\perp$ par $(\to_\mathrm{e})$, 2 et 3 ;
5) $\forall\gamma.B \to F^\gamma \vdash^2 F$ par la proposition 2.5.6 et 4 ;
6) $\vdash^2 (\forall\gamma.B \to F^\gamma) \to F$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 5.

$\Rightarrow$)

1) $F, B \vdash^2 (\top \to \gamma) \vee (\gamma \to \perp)$ par (Hyp) ;
2) $F, B, \top \to \gamma \vdash^2 [\gamma\backslash\top]\cdot F^\gamma$ par le lemme 2.5.3 ;
3) $F, B, \top \to \gamma \vdash^2 F^\gamma$ car γ et $\top$ sont supposés équivalents ;
4) $F, B, \gamma \to \perp \vdash^2 F$ par (Hyp) ;
5) $F, B, \gamma \to \perp \vdash^2 F^\perp$ par la proposition 2.5.6 and 4)
6) $F, B, \gamma \to \perp \vdash^2 F^\gamma$ car γ et $\top$ sont supposés équivalents ;
7) $F, B \vdash^2 F^\gamma$ par $(\vee_\mathrm{e})$, 1, 3 et 6 ;
8) $F \vdash^2 B \to F^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 7 ;
9) $F \vdash^2 \forall\gamma.B \to F^\gamma$ par $(\forall_\mathrm{i})$ et 8 ;
10) $\vdash^2 F \to \forall\gamma.B \to F^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 9.

□

Ce résultat laisse penser qu'il existe une traduction fidèle entre CP^2 et $\mathrm{P\text{-}CP}^2$. Nous étudierons ce point dans la section 3.5 du chapitre 3.

Chapitre 3

Calculs propositionnels pédagogiques d'ordre supérieur

3.1 Rappel sur les calculs propositionnels d'ordre supérieur

Dans le calcul propositionnel du second ordre, la quantification universelle porte uniquement sur des variables représentant des formules. On voudrait pouvoir également manipuler à l'intérieur du calcul des objets représentant des propriétés portant sur des formules, qu'on appelle des *prédicats propositionnels*. Les objets sur lesquels portent un prédicat ainsi que la nature des objets produits par le prédicat sont décrits par son *genre* :

Définition 3.1.1. *Les* genres *sont définis par récurrence comme suit :*
- *la constante $\star$ (le genre des* formules*) est un genre ;*
- *si κ et ι sont des genres, alors $\kappa \Rightarrow \iota$ est un genre.*

Afin d'alléger l'écriture des genres, nous écrivons $\kappa \Rightarrow \iota \Rightarrow \theta$ les genres de la forme $\kappa \Rightarrow (\iota \Rightarrow \theta)$. Tous les genres sont de la forme $\kappa_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \kappa_n \Rightarrow \star$, et sont notés $\overrightarrow{\kappa_n} \Rightarrow \star$; quand $n = 0$, cette notation représente le genre $\star$. Les formules sont de genre $\star$ et les prédicats portant sur des objets de genre κ et produisant des objets de genre ι ont pour genre $\kappa \Rightarrow \iota$. Il ne reste plus qu'à définir les prédicats :

Définition 3.1.2. *Les* prédicats *sont définis par récurrence comme suit :*
- *la constante $\top$ est un prédicat de genre $\star$;*
- *les* variables propositionnelles *$\alpha^\kappa, \beta^\iota, \gamma^\nu, \ldots$ sont des prédicats de genre $\kappa, \iota, \nu, \ldots$;*
- *si A et B sont des prédicats de genre $\star$, alors $A \rightarrow B$ est un prédicat de genre $\star$;*

- *si* α^κ *est une variable propositionnelle de genre* κ *et* A *un prédicat de genre* $\star$*, alors* $\forall\alpha^\kappa.A$ *est un prédicat de genre* $\star$ *;*
- *si* α^κ *est une variable propositionnelle de genre* κ *et* A *un prédicat de genre* ι*, alors* $\lambda\alpha^\kappa.A$ *est un prédicat de genre* $\kappa \Rightarrow \iota$ *;*
- *si* A *est un prédicat de genre* $\kappa \Rightarrow \iota$ *et* B *un prédicat de genre* κ*, alors* AB *est un prédicat de genre* ι*.*

Pour tout prédicat P et tout genre κ, la notation $P : \kappa$ signifie que le prédicat P est de genre κ. Toute variable propositionnelle α^κ pourra être notée α en l'absence d'ambiguïté sur son genre. Afin d'alléger l'écriture des prédicats, nous écrivons $A \to B \to C$ les prédicats de la forme $A \to (B \to C)$ et $\forall\alpha^\kappa.A \to B$ les prédicats de la forme $\forall\alpha.(A \to B)$. De même, nous écrivons ABC les prédicats de la forme $A(BC)$ et $\lambda\alpha^\kappa.AB$ les prédicats de la forme $\forall\alpha.(AB)$. Les prédicats de la forme AB ont la précédence la plus forte : le prédicat $AB \to C$ dénote le prédicat $(AB) \to C$. Les prédicats de la forme $\lambda\alpha_1^{\kappa_1}.\cdots\lambda\alpha_n^{\kappa_n}.P$ sont notés $\lambda\overrightarrow{\alpha_n^{\kappa}}.P$, et quand $n = 0$ cette notation représente le prédicat P. Les prédicats de la forme $PQ_1 \cdots Q_n$ sont notés $P\overrightarrow{Q_n}$, et quand $n = 0$ cette notation représente le prédicat P.
On remarque que les formules sont des prédicats particuliers ne portant sur aucun objet :

Définition 3.1.3. *Les* formules propositionnelles d'ordre supérieur*, que nous appelons* formules *dans ce chapitre en l'absence d'ambiguïté, sont les prédicats de genre* $\star$*.*

Selon la complexité des genres des prédicats, ceux-ci seront plus ou moins expressifs ; cette expressivité est représentée par l'*ordre* des prédicats : plus l'ordre est grand, plus le prédicat est capable d'exprimer des propriétés d'un haut niveau d'abstraction ; en particulier, l'ordre des arguments pouvant être passés en argument à un prédicat est toujours strictement inférieur à l'ordre de ce prédicat ; la notion d'ordre dépend donc essentiellement des genres :

Définition 3.1.4. *Pour tout genre* κ*, l'*ordre $\mathrm{Ord}(\kappa)$ *de* κ *est un entier défini par récurrence sur* κ *:*
  $\kappa = \star$ *:* $\mathrm{Ord}(\kappa) = 2$ *;*
  $\kappa = \iota \Rightarrow \theta$ *:* $\mathrm{Ord}(\kappa) = \max(\mathrm{Ord}(\iota) + 1, \mathrm{Ord}(\theta))$*.*

Nous écrivons $\mathbb{N}_\omega$ le compactifié de l'ensemble $\mathbb{N}$. Pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}_\omega^2$, nous écrivons $[\![m; n]\!]$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}_\omega \,|\, m \leq i \text{ et } i \leq n\}$, c'est-à-dire l'intervalle des éléments de $\mathbb{N}_\omega$ compris entre m et n.
Une fois qu'un ordre est associé à chaque genre, on peut définir ce qu'est l'ordre d'un prédicat :

Définition 3.1.5. *Pour tout prédicat P et pour tout n élément de $[\![2;\omega]\!]$, le prédicat P est dit d'ordre n si l'ordre de tous les genres des sous-prédicats de P est inférieur à n.*

Comme toujours dans les calculs hypothético-déductifs à la Gentzen-Prawitz, nous avons besoin de contextes, qui sont des ensembles d'hypothèses :

Définition 3.1.6. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Un* contexte propositionnel d'ordre *n est un ensemble fini de formules d'ordre n. Dans ce chapitre nous les appelons* contextes d'ordre *n, ou plus concisément* contextes *en l'absence d'ambiguïté. Dans le cas où n est égal à ω, les contextes d'ordre ω sont également appelés* contextes propositionnels d'ordre supérieur.

Un jugement propositionnel d'ordre *n est un triplet noté $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$, avec Γ un contexte d'ordre n, F une formule d'ordre n et* id *un identifiant textuel. Dans ce chapitre, les jugements propositionnels d'ordre n sont appelés* jugements d'ordre *n, ,ou plus concisément* jugements *en l'absence d'ambiguïté. Dans le cas où n est égal à ω, les jugements d'ordre ω sont également appelés* jugements propositionnels d'ordre supérieur.

Le contexte vide est représenté par le mot vide ; ainsi, pour tout élément n de $[\![2;\omega]\!]$, pour toute formule F d'ordre n, et pour tout identifiant id, le jugement $\emptyset \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$ s'écrit également $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$. De plus, pour tous contextes Γ et Δ d'ordre n, le contexte $\Gamma \cup \Delta$ est noté Γ, Δ. En particulier, pour toute formule A d'ordre n, le jugement $\Gamma \cup \{A\} \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$ est noté $\Gamma, A \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$.
Les variables propositionnelles sont destinées à être éventuellement quantifiées universellement : il nous faut distinguer les variables libres des variables quantifiées comme dans le cas du calcul propositionnel du second ordre, étudié dans le chapitre précédent :

Définition 3.1.7. *Pour tout prédicat P, l'ensemble $\mathrm{Vl}(P)$ des variables* libres *de P est un ensemble de variables propositionnelles défini par récurrence sur P :*
$P = \top$: $\mathrm{Vl}(P) = \emptyset$;
$P = \alpha^\kappa$: $\mathrm{Vl}(P) = \{\alpha\}$;
$P = A \to B$: $\mathrm{Vl}(P) = \mathrm{Vl}(A) \cup \mathrm{Vl}(B)$;
$P = \forall \alpha^\kappa.A$: $\mathrm{Vl}(P) = \mathrm{Vl}(A) \setminus \{\alpha\}$;
$P = \lambda \alpha^\kappa.A$: $\mathrm{Vl}(P) = \mathrm{Vl}(A) \setminus \{\alpha\}$;
$P = AB$: $\mathrm{Vl}(P) = \mathrm{Vl}(A) \cup \mathrm{Vl}(B)$.
Par extension, pour tout contexte Γ nous notons $\mathrm{Vl}(\Gamma)$ l'ensemble $\bigcup_{G\in\Gamma} \mathrm{Vl}(G)$. Quand $\mathrm{Vl}(F) = \emptyset$, nous disons que le prédicat F est clos.

Définition 3.1.8. *Pour tout prédicat P, l'ensemble $\mathrm{Vq}(P)$ des variables* quantifiées *de P est un ensemble de variables propositionnelles défini par récurrence sur P :*

$P = \top$: $\mathrm{Vq}(P) = \emptyset$;
$P = \alpha^\kappa$: $\mathrm{Vq}(P) = \emptyset$;
$P = A \to B$: $\mathrm{Vq}(P) = \mathrm{Vq}(A) \cup \mathrm{Vq}(B)$;
$P = \forall\alpha^\kappa.A$: $\mathrm{Vq}(P) = \{\alpha\} \cup \mathrm{Vq}(A)$;
$P = \lambda\alpha^\kappa.A$: $\mathrm{Vq}(P) = \{\alpha\} \cup \mathrm{Vq}(A)$;
$P = AB$: $\mathrm{Vq}(P) = \mathrm{Vq}(A) \cup \mathrm{Vq}(B)$.

Pour instancier les variables quantifiées dans les prédicats, on a besoin de substitutions :

Définition 3.1.9. *Une substitution σ est une fonction de domaine fini $\mathrm{Dom}(\sigma)$ à valeurs dans l'ensemble des prédicats.*

Pour toute substitution σ, on note $\mathrm{Vl}(\sigma)$ l'union des ensembles $\mathrm{Vl}(\sigma(\alpha))$ pour tout $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Définition 3.1.10. *Pour toute substitution σ et pour tout prédicat P, on dit que σ est adaptée à P quand l'ensemble $\mathrm{Vl}(\sigma) \cap \mathrm{Vq}(P)$ est vide.*

Définition 3.1.11. *Pour tout prédicat P et pour toute substitution σ adaptée à P, l'application de σ à P, notée $\sigma{\cdot}P$, est définie par récurrence sur P comme suit :*
$P = \top$: $\sigma\cdot P = \top$;
$P = \alpha^\kappa$: $\sigma\cdot P = \begin{cases} \sigma(\alpha) & \text{si } \alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)\,; \\ \alpha & \text{sinon}\,; \end{cases}$
$P = A \to B$: $\sigma\cdot P = \sigma\cdot A \to \sigma\cdot B$;
$P = \forall\alpha.A$: $\sigma\cdot P = \forall\alpha.\sigma_{\backslash\alpha}\cdot A$;
$P = \lambda\alpha.A$: $\sigma\cdot P = \lambda\alpha.\sigma_{\backslash\alpha}\cdot A$;
$P = AB$: $\sigma\cdot P = (\sigma\cdot A)(\sigma\cdot B)$.

Pour éviter toute confusion, nous écrivons $\mu{\cdot}\sigma{\cdot}F$ les applications de substitutions de la forme $\mu{\cdot}(\sigma{\cdot}F)$. Ci-dessous nous démontrons que la composition des substitutions est correctement définissable :

Lemme 3.1.1. *Soient F une formule, σ une substitution adaptée à F et μ une substitution adaptée à $\sigma\cdot F$. Notons $\mu \odot \sigma$ la substitution $[\mu\cdot\sigma; \mu_{|(\mathrm{Dom}(\mu)\backslash\mathrm{Dom}(\sigma))}]$; alors $\mu\cdot\sigma\cdot F = \mu \odot \sigma\cdot F$.*

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme 2.1.1. □

Nous savons distinguer les variables libres des variables liées ; mais certaines variables libres doivent parfois représenter des objets les plus généraux possibles ; à cet effet, nous introduisons la notion de variables fraîches d'ordre supérieur :

Définition 3.1.12. *Une variable* fraîche *pour un prédicat P est une variable n'apparaissant pas dans P. Par extension, une variable fraîche pour un ensemble de prédicats Δ est une variable fraîche pour chacun des éléments de Δ. L'ensemble des variables fraîches d'un contexte Γ est noté* $\mathrm{Fr}(\Gamma)$*.*

Les variables quantifiées ne représentent que des positions dans les prédicats : leur nom n'a aucune importance sinon pour les distinguer des autres variables et nous considérons que deux prédicats ne différant que par le nom de leurs variables quantifiées ont la même signification ; on dit alors qu'ils sont α-équivalents :

Définition 3.1.13. *Pour tous les prédicats P et Q, la relation d'α-*équivalence *entre P et Q, notée $P =_\alpha Q$, est définie par les règles suivantes :*

$$\frac{}{\top =_\alpha \top}\ (\alpha_\top)$$

$$\frac{}{\alpha^\kappa =_\alpha \alpha^\kappa}\ (\alpha_{\mathrm{var}})$$

$$\frac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\ (\alpha_\to)$$

$$\frac{[\alpha^\kappa\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha [\beta^\kappa\backslash\gamma]\cdot B \quad \gamma \in \mathrm{Fr}(A,B)}{\forall\alpha^\kappa.A =_\alpha \forall\beta^\kappa.B}\ (\alpha_\forall)$$

$$\frac{[\alpha^\kappa\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha [\beta^\kappa\backslash\gamma]\cdot B \quad \gamma \in \mathrm{Fr}(A,B)}{\lambda\alpha^\kappa.A =_\alpha \lambda\beta^\kappa.B}\ (\alpha_\lambda)$$

$$\frac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{AB =_\alpha A'B'}\ (\alpha_{\mathrm{app}})$$

*Quand la relation $P =_\alpha Q$ est vérifiée, on dit que les prédicats P et Q sont α-*équivalentes*.*

Les prédicats sont définis comme des fonctions opérant sur d'autres prédicats ; leur évaluation produit des prédicats syntaxiquement différents mais ayant la même signification ; on dit alors qu'ils sont β-équivalents :

Définition 3.1.14. *Pour tous les prédicats P et Q, la relation de β-*équivalence *entre P et Q, notée $P =_\beta Q$, est définie par les règles suivantes :*

$$\frac{}{\top =_\beta \top}\ (\beta_\top)$$

$$\frac{}{\alpha^\kappa =_\beta \alpha^\kappa}\ (\beta_{\mathrm{var}})$$

$$\frac{A =_\beta A' \quad B =_\beta B'}{A \to B =_\beta A' \to B'}\ (\beta_\to)$$

$$\frac{A =_\beta A'}{\forall\alpha^\kappa.A =_\beta \forall\alpha^\kappa.A'}\ (\beta_\forall)$$

$$\frac{A =_\beta A'}{\lambda\alpha^\kappa.A =_\beta \lambda\alpha^\kappa.A'}\ (\beta_\lambda)$$

$$\frac{A =_\beta A' \quad B =_\beta B'}{AB =_\beta A'B'}\ (\beta_{\mathrm{app}})$$

$$\frac{A =_\beta B}{B =_\beta A}\ (\beta_{\mathrm{sym}})$$

$$\frac{A =_\beta B \quad B =_\beta C}{A =_\beta C}\ (\beta_{\mathrm{trans}})$$

$$\frac{}{(\lambda\alpha^\kappa.A)B =_\beta [\alpha^\kappa\backslash B]\cdot A}\ (\beta_{\mathrm{red}})$$

*Quand la relation $P =_\beta Q$ est vérifiée, on dit que les prédicats P et Q sont β-*équivalents.

Après toutes ces définitions, nous pouvons maintenant définir les calculs propositionnels d'ordre supérieur :

Définition 3.1.15. *Pour tout n élément de $[\![2;\omega]\!]$, le* calcul propositionnel d'ordre *n, abrégé en CP^n, est défini par :*

- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} F$;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles suivantes :*

$$\frac{}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} \top}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash^{\mathrm{n}} F}\ (\mathrm{Hyp})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash^{\mathrm{n}} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \to B}\ (\to_{\mathrm{i}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \to B \quad \Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} B}\ (\to_{\mathrm{e}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \quad \alpha^\kappa \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} \forall\alpha^\kappa.A}\ (\forall_{\mathrm{i}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} \forall\alpha^\kappa.A}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} [\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A}\ (\forall_{\mathrm{e}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} B}\ (=_\alpha)$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \quad A =_\beta B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} B}\ (=_\beta)$$

Le calcul CP^ω *est également appelé le* calcul propositionnel d'ordre supérieur. *On dit qu'un jugement* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* CP^n *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

3.2 Calculs propositionnels faiblement pédagogiques d'ordre supérieur

3.2.1 Présentation des calculs

Nous allons reprendre notre première méthode de pédagogisation, introduite dans le chapitre 1, afin de l'appliquer au calcul CP^n. Dans le chapitre 2, nous avons utilisé cette méthode pour pédagogiser le calcul CP^2 et nous avons obtenu le calcul $\mathrm{F\text{-}CP}^2$ dans lequel l'absurdité $\perp$, définie par la formule $\forall\alpha.\alpha$, est autorisée à apparaître dans les formules des dérivations, tandis que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{f}} \forall\alpha.\perp \to \alpha$ n'est pas dérivable. Nous sommes alors tentés de penser que $\mathrm{F\text{-}CP}^2$ n'est pas un calcul dans lequel l'absurdité est définissable. Nous allons voir ce qu'il en est dans le cas des calculs d'ordre supérieur.

Définition 3.2.1. *Pour tout* n *élément de* $[\![2;\omega]\!]$*, le* calcul propositionnel faiblement pédagogique d'ordre n*, abrégé en* $\mathrm{F\text{-}CP}^n$*, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{f}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles* $(\to_{\mathrm{i}})$, $(\to_{\mathrm{e}})$, $(\forall_{\mathrm{i}})$, $(\forall_{\mathrm{e}})$, $(=_\alpha)$ *et* $(=_\beta)$*, ainsi que des deux règles suivantes :*

$$\frac{\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{f}} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{f}} \top}\ (\text{P-Ax})$$

$$\frac{F \in \Gamma \quad \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{f}} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{f}} F}\ (\text{P-Hyp})$$

Le calcul $\mathrm{F\text{-}CP}^\omega$ *est également appelé le* calcul propositionnel faiblement pédagogique d'ordre supérieur. *On dit qu'un jugement* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{f}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* $\mathrm{F\text{-}CP}^n$ *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

Dans les dérivations, il convient de motiver les contextes introduits, comme dans l'exemple suivant :

Exemple. dérivation du jugement $\vdash^{\omega}_{\mathrm{f}} \forall\beta^{\star\Rightarrow\star}.(\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha)) \to \beta(\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha))$:
1) $\vdash^{\omega}_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\alpha \vdash^{\omega}_{\mathrm{f}} (\lambda\alpha^\star.\top)\alpha$ par (P-Ax) et 1 ;
3) $\vdash^{\omega}_{\mathrm{f}} \alpha \to (\lambda\alpha^\star.\top)\alpha$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $\vdash^{\omega}_{\mathrm{f}} \forall\alpha^\star.(\alpha \to (\lambda\alpha^\star.\top)\alpha)$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 3 ;

5) $\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha) \vdash^\omega_{\mathrm{f}} \forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha)$ par (P-Hyp) et 4 ;
6) $\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha) \vdash^\omega_{\mathrm{f}} (\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha)) \to \beta(\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha))$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 5 ;
7) $\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha) \vdash^\omega_{\mathrm{f}} \beta(\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha))$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 5 et 6 ;
8) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} (\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha)) \to \beta(\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha))$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 7 ;
9) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} \forall\beta^{\star\Rightarrow\star}.((\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha)) \to \beta(\forall\alpha^\star.(\alpha \to \beta\alpha)))$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 8.

Bien que la notion de motivation soit bien définie dans le cas des formules, elle ne l'est pas encore dans le cas général des prédicats. Pour l'instant, nous ne disposons pas des résultats nécessaires pour justifier le choix d'une définition de la motivabilité des prédicats ; la définition suivante est donnée par anticipation car nous en avons besoin dans certaines preuves ; nous justifierons plus tard le fait que la motivation d'un prédicat P corresponde à la motivation de la formule $\overline{P}$:

Définition 3.2.2. *Pour tout genre κ et pour tout prédicat $P : \kappa$, la formule $\overline{P}$ est définie par récurrence sur κ :*
$\kappa = \star$: $\overline{P} = P$;
$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: $\overline{P} = \forall\alpha^\iota.\overline{P\alpha}$.
Si $\Delta = \{P_1, \cdots, P_n\}$ est un ensemble de prédicats, alors $\overline{\Delta}$ dénote l'ensemble $\{\overline{P_1}, \cdots, \overline{P_n}\}$.

Les calculs d'ordre supérieur font beaucoup appel aux applications de substitutions, ne serait-ce qu'à cause de la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$; la preuve que l'application des substitutions commute avec la transformation $\overline{P}$ constitue une propriété technique incontournable :

Lemme 3.2.1. *Soit σ une substitution. Pour tout prédicat $P : \kappa$, nous avons $\sigma\cdot\overline{P} = \overline{\sigma\cdot P}$.*

Démonstration. Par récurrence sur κ :
$\kappa = \star$: nous avons $P = \overline{P}$ et $\sigma\cdot P = \overline{\sigma\cdot P}$ par définition ; donc $\sigma\cdot\overline{P} = \overline{\sigma\cdot P}$;
$\kappa = \theta \Rightarrow \iota$:

$$\begin{array}{rcll}
\sigma\cdot\overline{P} & = & \sigma\cdot\forall\alpha^\theta.\overline{P\alpha} & \\
& = & \forall\alpha^\theta.\sigma\cdot\overline{P\alpha} & \\
& = & \forall\alpha^\theta.\overline{\sigma\cdot(P\alpha)} & \text{par hypothèse de récurrence} \\
& = & \forall\alpha^\theta.\overline{(\sigma\cdot P)\alpha} & \text{car } \alpha \notin \mathrm{Dom}(\sigma) \\
& = & \overline{\sigma\cdot P} &
\end{array}$$

□

Comme la transformation $\overline{P}$ constitue une formule représentant P du point de vue de la motivabilité, il est nécessaire qu'elle ne change pas le sens des prédicats, en particulier par rapport à la β-équivalence :

Lemme 3.2.2. *Soit κ un genre. Pour tout prédicats $P : \kappa$ et $Q : \kappa$, si $P =_\beta Q$ alors $\overline{P} =_\beta \overline{Q}$.*

Démonstration. Par récurrence sur κ :
$\kappa = \star$: nous avons $P = \overline{P}$ et $Q = \overline{Q}$; donc $\overline{P} =_\beta \overline{Q}$;
$\kappa = \theta \Rightarrow \iota$:
1) $P =_\beta Q$ par hypothèse ;
2) $\alpha^\theta =_\beta \alpha^\theta$ par (β_{var}) ;
3) $P\alpha =_\beta Q\alpha$ par (β_{app}), 1 et 2 ;
4) $\overline{P\alpha} =_\beta \overline{Q\alpha}$ par hypothèse de récurrence ;
5) $\forall\alpha^\kappa.\overline{P\alpha} =_\beta \forall\alpha^\kappa.\overline{Q\alpha}$ par $(\beta_\forall)$ et 4.
Ainsi $\overline{P} =_\beta \overline{Q}$.

□

Voici donc comment on définit les motivations des prédicats :

Définition 3.2.3. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$. Pour tout ensemble Δ de prédicats, une* motivation *de Δ dans C est une substitution σ telle que les jugements $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} \sigma{\cdot}\overline{\Gamma}$ soient dérivables. Quand un ensemble de prédicats admet une motivation dans C, on dit qu'il est* motivable *dans C. De plus, une motivation d'un prédicat P dans C est une motivation du singleton $\{P\}$ dans C.*

Chaque motivation peut être close ou non, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent. Dans le cas ces calculs d'ordre supérieur, dès qu'un prédicat est motivable par une motivation ouverte, alors on peut toujours la motiver par une motivation close ; on a alors la garantie qu'un exemple abstrait peut toujours être précisé en un exemple concret :

Proposition 3.2.3. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour toute formule F d'ordre n, si σ est une motivation de F dans* F-CP^n*, alors pour toute substitution μ d'ordre n adaptée à $\sigma{\cdot}F$ la substitution $\mu \odot \sigma$ est une motivation de F dans* F-CP^n.

Démonstration. Analogue à la preuve de la proposition 2.2.1. □

3.2.2 Non-nullité syntaxique des jugements

La notion de non-nullité syntaxique des jugements, introduite dans le chapitre précédent, se généralise facilement aux calculs d'ordre supérieur :

Définition 3.2.4. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et C un calcul dont la morphologie est constitué par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$. Un jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$ est* syntaxiquement non-nul *quand son contexte Γ est motivable dans C.*

Nous démontrons de suite que dans les calculs F-CP^n tous les jugements sont syntaxiquement non-nuls :

Lemme 3.2.4. *Soit* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{f}}^{\omega} F$ *dérivable, le contexte* Γ *est motivable dans* F-CP^n.

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme 2.2.2. □

Nous avons également la propriété que les motivations se propagent par dérivabilité des hypothèses aux conclusions :

Lemme 3.2.5. *Soit* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} F$ *dérivable et pour toute substitution* σ *adaptée à* Γ, *si les jugements* $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} \sigma\cdot\Gamma$ *sont dérivables, alors le jugement* $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} \sigma\cdot F$ *est dérivable.*

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme 2.2.3. □

Ainsi, dans tout jugement dérivable, le contexte et la conclusion sont motivables par la même motivation ; ceci signifie que toutes les variables libres sont représentables par le même exemple dans toutes les formules d'un jugement :

Proposition 3.2.6. *Soit* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} F$ *dérivable, l'ensemble* $\Gamma \cup \{F\}$ *est motivable dans* F-CP^n. *En particulier,* $\Gamma \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} F$ *est syntaxiquement non-nul.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2.4 le contexte Γ est motivable dans F-CP^n, et donc d'après le lemme 3.2.5 la formule F est motivable dans F-CP^n. □

3.2.3 La règle d'affaiblissement

La règle d'affaiblissement usuelle :

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} F}{\Gamma, U \vdash^{\mathrm{n}} F}\,(\mathrm{Aff})$$

n'est plus dérivable dans les calculs F-CP^n car la formule U introduite dans le contexte n'est pas forcément motivable.

Lemme 3.2.7. *Soit* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$. *Le jugement* $\top \to \alpha \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} \alpha$ *est dérivable et la formule* $\alpha \to \bot$ *est motivable dans* F-CP^n, *mais le jugement* $\top \to \alpha, \alpha \to (\forall\alpha^{\star}.\alpha) \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} \alpha$ *n'est pas dérivable.*

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme 2.2.5. □

Nous démontrons alors que la règle d'affaiblissement faiblement pédagogique :

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} F \quad \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} \sigma\cdot(\Gamma, U)}{\Gamma, U \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} F} \text{(F-Aff)}$$

est valide dans les calculs F-CP^n.

Proposition 3.2.8. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} F$ dérivable et pour toute formule U telle que $\Gamma \cup \{U\}$ soit motivable dans* F-CP^n*, le jugement $\Gamma, U \vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} F$ est dérivable.*

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme 2.2.7. □

3.2.4 Les théorèmes de CP^n sont prouvables dans F-CP^{n+1}

La proposition 2.2.13 affirme que le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{2} \forall\alpha.\bot \to \alpha$ n'est pas dérivable ; donc F-CP^2 ne démontre pas tous les théorèmes de CP^2. Cependant, nous allons démontrer que pour tout $n > 2$, les théorèmes de CP^{n-1} sont des théorèmes de F-CP^n. Pour cela, il suffit d'exprimer toutes les preuves des théorèmes de CP^n sous la forme de preuves *à la Hilbert*, dans lesquelles il n'y a pas besoin de contextes, et donc il n'y a pas besoin de les motiver :

Lemme 3.2.9. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} F$ dérivable, le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to F$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation du jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} F$:

$\dfrac{}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} \top}$ (Ax) :

1) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \forall\overrightarrow{\gamma_n^\star}.\overrightarrow{\gamma_n} \to \top$ aisément dérivable ;
2) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to \top$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 1 ;

$\dfrac{F \in \Gamma}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} F}$ (Hyp) :

1) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \forall\overrightarrow{\gamma_n^\star}.\overrightarrow{\gamma_n} \to \gamma_i$ aisément dérivable avec $1 \leq i \leq n$;
2) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to F$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 1 ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash^{\mathrm{n}} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \to B}$ $(\to_{\mathrm{i}})$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to A \to B$ est dérivable ; donc nous avons une dérivation du jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} (\Gamma, A) \to B$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \to B \quad \Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} B}$ $(\to_{\mathrm{e}})$:

1) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \forall\overrightarrow{\gamma_n^\star}.\forall\alpha^\star.\forall\beta^\star.(\overrightarrow{\gamma_n} \to \alpha \to \beta) \to (\overrightarrow{\gamma_n} \to \alpha) \to (\overrightarrow{\gamma_n} \to \beta)$ immédiat ;
2) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} (\Gamma \to A \to B) \to (\Gamma \to A) \to (\Gamma \to B)$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 1 ;

3) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to A \to B$ par hypothèse de récurrence ;
4) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} (\Gamma \to A) \to (\Gamma \to B)$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 2 et 3 ;
5) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to A$ par hypothèse de récurrence ;
4) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to B$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 4 et 5 ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} \forall \alpha^{\kappa}.A}\ (\forall_{\mathrm{i}})$:

1) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \forall \overrightarrow{\gamma_n^{\star}}.\forall \delta^{\kappa \Rightarrow \star}.\forall \alpha^{\star}.(\overrightarrow{\gamma_n} \to \delta\alpha) \to (\overrightarrow{\gamma_n} \to \forall \alpha^{\kappa}.\delta\alpha)$ aisément dérivable ;
2) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} (\Gamma \to (\lambda\alpha^{\kappa}.A)\alpha) \to (\Gamma \to \forall \alpha^{\kappa}.(\lambda\alpha^{\kappa}.A)\alpha)$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 1 ;
3) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} (\Gamma \to A) \to (\Gamma \to \forall \alpha^{\kappa}.A)$ par $(=_{\beta})$ et 2 ;
4) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to A$ par hypothèse de récurrence ;
5) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to \forall \alpha^{\kappa}.A$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 3 et 4 ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} \forall \alpha^{\kappa}.A}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} [\alpha^{\kappa} \backslash U]\cdot A}\ (\forall_{\mathrm{e}})$:

1) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \forall \overrightarrow{\gamma_n^{\star}}.\forall \delta^{\kappa \Rightarrow \star}.(\overrightarrow{\gamma_n} \to \forall \alpha^{\kappa}.\delta\alpha) \to (\overrightarrow{\gamma_n} \to \delta U)$ aisément dérivable ;
2) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} (\Gamma \to \forall \alpha^{\kappa}(\lambda\alpha^{\kappa}.A)\alpha) \to (\Gamma \to (\lambda\alpha^{\kappa}.A)U)$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$ et 1 ;
3) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} (\Gamma \to \forall \alpha^{\kappa}.A) \to (\Gamma \to [\alpha^{\kappa} \backslash U]\cdot A)$ par $(=_{\beta})$ et 2 ;
4) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to \forall \alpha^{\kappa}.A$ par hypothèse de récurrence ;
5) $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to [\alpha^{\kappa} \backslash U]\cdot A$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 3 et 4 ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \quad A =_{\alpha} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} B}\ (=_{\alpha})$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to A$ est dérivable ; nous avons $A =_{\alpha} B$ par hypothèse ; donc nous avons $\Gamma \to A =_{\alpha} \Gamma \to B$ par la règle $(\alpha_{\to})$; ainsi nous dérivons le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to B$ par la règle $(=_{\alpha})$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} A \quad A =_{\beta} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} B}\ (=_{\beta})$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to A$ est dérivable ; nous avons $A =_{\beta} B$ par hypothèse ; donc nous avons $\Gamma \to A =_{\beta} \Gamma \to B$ par la règle $(\beta_{\to})$; ainsi nous dérivons le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} \Gamma \to B$ par la règle $(=_{\beta})$.

□

Grâce au lemme précédent, nous pouvons démontrer que pour $n \geq 2$, tout théorème de CP^n est un théorème de $\mathrm{F\text{-}CP}^{n+1}$:

Proposition 3.2.10. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour toute formule F, si le jugement $\vdash^{\mathrm{n}} F$ est dérivable alors le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n+1}} F$ est dérivable.*

Démonstration. Immédiat par le lemme 3.2.9. □

Ainsi, dans les calculs $\mathrm{F\text{-}CP}^n$ pour $n \geq 3$, le jugement $\vdash_{\mathrm{f}}^{\mathrm{n}} \forall \alpha.\bot \to \alpha$ est dérivable : la négation est définissable dans ces calculs $\mathrm{F\text{-}CP}^n$. Le calcul $\mathrm{F\text{-}CP}^2$ fait exception. Quand $n = \omega$, nous avons donc un résultat encore plus fort : tout théorème de CP^{ω} est un théorème de $\mathrm{F\text{-}CP}^{\omega}$.

3.3 Calculs propositionnels pédagogiques contraints d'ordre supérieur

3.3.1 Présentation des calculs

Malgré la non-nullité syntaxique des jugements dans les calculs F-CP^n, la négation y est définissable dès que n est supérieur ou égal à 3. Pour obtenir un calcul dans lequel la négation disparaît, nous allons appliquer aux calculs CP^n la méthode de pédagogisation qui nous a permis de construire le calcul pédagogique P-CP^2 dans le chapitre précédent. P-CP^2 est un calcul dans lequel toutes les formules et sous-formules apparaissant dans les dérivations sont motivables. Nous souhaitons obtenir des calculs d'ordre supérieur jouissant des mêmes propriétés que P-CP^2. Il faut d'abord donner un sens à la notion de motivation appliquée aux prédicats d'ordre supérieur pour pouvoir remplacer la règle ($\forall_{\mathrm{e}}$) par la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$). On remarque que le prédicat $\lambda\alpha^\star.\alpha$ représentant l'identité sur les formules ne doit pas être motivable sous peine de pouvoir dériver $\vdash^{\mathrm{n}} \bot \to \bot$, avec $\bot = \forall\alpha^\star.\alpha$:

1) $\vdash^3 \top$ par (P-Ax) ;
2) $\vdash^3 [\gamma^{\star\Rightarrow\star}\backslash\lambda\beta^\star.\top]\cdot\forall\alpha^\star.\gamma\alpha$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 1 ;
3) $\forall\alpha^\star.\gamma\alpha \vdash^{\mathrm{n}} \forall\alpha^\star.\gamma\alpha$ par (P-Hyp) et 2 ;
4) $\vdash^3 (\forall\alpha^\star.\gamma\alpha) \to (\forall\alpha^\star.\gamma\alpha)$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 3 ;
5) $\vdash^3 \forall\gamma^{\star\Rightarrow\star}.(\forall\alpha^\star.\gamma\alpha) \to (\forall\alpha^\star.\gamma\alpha)$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 4 ;
6) $\vdash^3 (\forall\alpha^\star.(\lambda\beta^\star.\beta)\alpha) \to (\forall\alpha^\star.(\lambda\beta^\star.\beta)\alpha)$ par (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), 5 et $\lambda\beta^\star.\beta$ motivable ;
7) $\vdash^3 (\forall\alpha^\star.\alpha) \to (\forall\alpha^\star.\alpha)$ par ($=_\beta$) et 6.

Ne pas avoir le droit de motiver l'identité impose de très fortes restrictions sur la notion de motivation ; on ne peut pas se contenter d'imposer la motivabilité du prédicat pour seulement certains arguments, par exemple ceux qui sont motivables : il faut que le prédicat soit motivable quelque soit ses arguments. C'est pourquoi nous avons choisi de définir qu'un prédicat P est motivable quand la formule $\overline{P} = \forall\alpha^\kappa.\forall\beta^\iota\cdots.P\alpha\beta\cdots$ est motivable. Avec cette définition, nous obtenons une version de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) adaptée aux calculs d'ordre supérieur :

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} \forall\alpha^\kappa.A \quad \vdash^{\mathrm{n}} \sigma\cdot\overline{U}}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}} [\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A}\ (\text{P-}\forall_{\mathrm{e}})$$

Cependant, nous ne pouvons toujours pas appliquer cette méthode de pédagogisation sans précaution ; la présence d'objets d'ordre supérieur pose d'autres difficultés ; par exemple la règle ($=_\beta$) permet de faire apparaître la formule $\bot$ dans l'importe quelle dérivation par β-expansion :

1) $\vdash^3 \top$ par (P-Ax) ;
2) $\vdash^3 (\lambda\alpha^\star.\top)\bot$ par ($=_\beta$) et 1.

De même, la règle ($=_\beta$) peut générer dans les formules des prédicats d'ordre supérieur non motivables :

1) $\vdash^3 \top$ par (P-Ax) ;
2) $\top \vdash^3 \top$ par (P-Ax) et 1 ;
3) $\vdash^3 \top \to \top$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 2 ;
4) $\top \to \top \vdash^\omega_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) et 3 ;
5) $\vdash^3 (\top \to \top) \to \top$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 4 ;
6) $\vdash^3 (\lambda\alpha^\star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha)\top$ par ($=_\beta$) et 5.

Dans ce jugement, le prédicat non motivable est $\lambda\alpha^\star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha$:

Lemme 3.3.1. *Le prédicat $\lambda\alpha^\star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha$ n'est pas motivable dans* F-CP$^\omega$.

Démonstration. Supposons que le prédicat $\lambda\alpha^\star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha$ soit motivable dans F-CP$^\omega$. Alors le jugement $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} \forall\alpha^\star.(\lambda\alpha^\star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha)\alpha$ est dérivable.

1) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} \forall\alpha^\star.(\lambda\alpha^\star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha)\alpha$
2) $\top \vdash^\omega_{\mathrm{f}} \forall\alpha^\star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha$ par ($=_\beta$) et 1 ;
3) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} (\alpha \to \alpha) \to \alpha$ par ($\forall_{\mathrm{e}}$) et 2 ;
4) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} \top$ par (P-Ax) ;
5) $\alpha \vdash^\omega_{\mathrm{f}} \alpha$ par (P-Hyp) et 4 ;
6) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} \alpha \to \alpha$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 5 ;
7) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} \alpha$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 3 et 6 ;
8) $\vdash^\omega_{\mathrm{f}} \forall\alpha^\star.\alpha$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 7.

F-CP$^\omega$ est un sous-système de CP$^\omega$; donc le jugement $\vdash^\omega \forall\alpha^\star.\alpha$ est dérivable, ce qui est absurde compte tenu de la cohérence de CP$^\omega$. □

Nous sommes alors conduits à contraindre la relation de β-équivalence pour ne pas qu'elle puisse décomposer des prédicats motivables en plusieurs prédicats éventuellement non motivables :

Définition 3.3.1. *Soit C un calcul dont la morphologie est composée des jugements de la forme $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}}$, avec n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et* id *un identifiant textuel. Pour tous les prédicats P et Q, la relation de β'-*équivalence *entre P et Q, notée $P =_{\beta'} Q$, est définie par les règles ($\beta_\top$), (β_{var}), ($\beta_\to$), ($\beta_\forall$), (β_λ), (β_{app}), (β_{sym}) et (β_{trans}), ainsi que de la règle suivante :*

$$\frac{\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} \sigma\cdot\forall\alpha^\kappa.\overline{A} \qquad \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} \sigma\cdot\overline{B}}{(\lambda\alpha^\kappa.A)B =_{\beta'} [\alpha^\kappa\backslash B]\cdot A}\ (\text{P-}\beta_{\mathrm{red}})$$

*Quand la relation $P =_{\beta'} Q$ est vérifiée, on dit que les prédicats P et Q sont β'-*équivalents.

Compte-tenu de toutes ces observations, nous sommes en mesure de définir des calculs pédagogiques d'ordre supérieur dans lesquels, nous verrons cela plus loin, tout sous-prédicat P tel que la formule $\overline{P}$ soit absurde disparaît des formules apparaissant dans les dérivations :

Définition 3.3.2. *Pour tout* n *élément de* $[\![2;\omega]\!]$*, le* calcul propositionnel pédagogique contraint d'ordre n*, abrégé en* PC-CP^n*, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles (*P-Ax*), (*P-Hyp*), (*$\rightarrow_{\mathrm{i}}$*), (*$\rightarrow_{\mathrm{e}}$*), (*$\forall_{\mathrm{i}}$*) et (*$=_\alpha$*) ainsi que des deux règles suivantes :*

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} \forall\alpha^\kappa.A \qquad \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} \sigma\cdot\overline{U}}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} [\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A}\ (\text{P-}\forall_{\mathrm{e}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} A \qquad A =_{\beta'} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} B}\ (=_{\beta'})$$

Le calcul PC-CP$^\omega$ *est également appelé le* calcul propositionnel pédagogique contraint d'ordre supérieur*. On dit qu'un jugement* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* PC-CP^n *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

3.3.2 Non-nullité sémantique des implications

Les calculs PC-CP^n satisfont la propriété de non-nullité des implications ; en particulier, pour tout sous-prédicat P des formules apparaissant dans les dérivations, la formule $\overline{P}$ est instanciable en une formule vraie au sens de la sémantique booléenne à deux valeurs de vérité :

Proposition 3.3.2. *Soit* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$*. Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{pc}} F$ *dérivable et pour tout sous-formule* G *d'une formule de* $\Gamma \cup \{F\}$*, il existe une substitution* σ *telle que la formule* $\sigma\cdot G$ *soit vraie dans la sémantique booléenne.*

Démonstration. Afin de prouver la présente proposition, nous avons besoin du système P-CP^n défini dans la section suivante. En effet, d'après la proposition 3.4.20, il existe une substitution σ telle que la formule $\sigma{\cdot}G$ soit close et démontrable dans le calcul P-CP^n. Le calcul P-CP$^\omega$ est une extension consistante du calcul PC-CP^n dans la sémantique booléenne ; donc la formule $\sigma\cdot G$ est vraie dans la sémantique booléenne. □

3.3.3 Certaines implications sont syntaxiquement nulles

Il est regrettable que les calculs PC-CP^n pour $n \in [\![3;\omega]\!]$ ne satisfassent pas la propriété de non-nullité syntaxique des implications. En effet, nous allons construire un jugement $\vdash^3_{\mathrm{pc}} G \rightarrow G$ dérivable tel que la formule G, close, ne soit pas motivable dans PC-CP$^\omega$. Tout d'abord, nous construisons la formule G requise :

Lemme 3.3.3. *Soient $V = \forall\alpha^\star.\alpha \to \alpha$, $H = \forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha)$ et $G = \forall\gamma^{\star\Rightarrow\star}.H \to \gamma V$. Le jugement $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} G$ n'est pas dérivable.*

Démonstration. Toutes les dérivations dans le système CP$^\omega$ admettent une forme normale (voir [13]). Supposons qu'il existe une dérivation en forme normale du jugement $\vdash^\omega G$. Ainsi le jugement $H \vdash^\omega \gamma V$ possède une dérivation en forme normale dans laquelle une application de la règle (Hyp) dérive le jugement $H \vdash^\omega H$, suivie par une séquence d'applications des $(\to_{\mathrm{e}})$ et $(\forall_{\mathrm{e}})$. Nous pouvons uniquement appliquer la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$ sur le jugement $H \vdash^\omega H$ afin de dériver un jugement de la forme $H \vdash^\omega \gamma(\top \to U)$. Nous ne pouvons appliquer ni la règle $(\to_{\mathrm{e}})$ ni la règle $(\forall_{\mathrm{e}})$ sur le jugement $H \vdash^\omega_\gamma (\top \to U)$; donc nous avons $\gamma(\top \to U) = \gamma V$, ce qui est contradictoire puisque la formule V n'est pas de la forme $\top \to U$. Ainsi le jugement $\vdash^\omega G$ n'est pas dérivable. Comme PC-CP$^\omega$ est un sous-système de CP$^\omega$, le jugement $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} G$ n'est pas dérivable. □

Ensuite, nous dérivons le jugement $\vdash^3_{\mathrm{pc}} G \to G$:

Lemme 3.3.4. *Soient $F = \forall\gamma^{\star\Rightarrow\star}(\forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha)) \to \gamma\beta$ et $G = [\beta\backslash\forall\alpha^\star.\alpha \to \alpha]{\cdot}F$. Le jugement $\vdash^3_{\mathrm{pc}} G \to G$ est dérivable.*

Démonstration.

1) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} (\lambda\beta^\star.\top)(\top \to \alpha)$ par $(=_\beta)$ et 1 ;
3) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} [\gamma^\star\backslash\lambda\beta^\star.\top]{\cdot}\forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha)$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $\forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha) \vdash^\omega_{\mathrm{pc}} \forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha)$ par (P-Hyp) et 3 ;
5) $\forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha) \vdash^\omega_{\mathrm{pc}} \gamma(\top \to \top)$ par (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), 4 et 1 ;
6) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} (\forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha)) \to \gamma(\top \to \top)$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 5 ;
7) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} [\beta^\star\backslash\top \to \top]{\cdot}F$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 6 ;
8) $F \vdash^\omega_{\mathrm{pc}} F$ par (P-Hyp) et 7 ;
9) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} F \to F$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 8 ;
10) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} \forall\beta^\star.F \to F$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 9 ;
11) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} \forall\alpha^\star.\alpha \to \alpha$ aisément dérivable ;
12) $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} G \to G$ par (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), 10 et 11.

□

Enfin, nous démontrons que pour tout $n \in [\![3;\omega]\!]$ le calcul PC-CP^n admet au moins une implication syntaxiquement nulle :

Proposition 3.3.5. *Il existe une formule G close telle que le jugement $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} G \to G$ soit dérivable et que le jugement $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} G$ ne soit pas dérivable.*

Démonstration. Soit $G = \forall\gamma^{\star\Rightarrow\star}(\forall\alpha^\star.\gamma(\top \to \alpha)) \to \gamma(\forall\alpha^\star.\alpha \to \alpha)$. D'après le lemme 3.3.4, le jugement $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} G \to G$ est dérivable. D'après le lemme 3.3.3, le jugement $\vdash^\omega_{\mathrm{pc}} G$ n'est pas dérivable. □

3.4 Calculs propositionnels pédagogiques d'ordre supérieur

3.4.1 Présentation des calculs

Nous avons construit dans le lemme 3.3.3 une formule G non dérivable dans PC-CP$^\omega$ telle que le jugement $\vdash^3_{\mathrm{pc}} G \to G$ soit dérivable. Par conséquent, aucun des calculs PC-CP^n pour $n \in [\![3;\omega]\!]$ ne vérifie la non-nullité syntaxique des implications. Cependant, la formule G n'est pas non plus dérivables dans CP$^\omega$; donc la contrainte pédagogique n'est pas trop restrictive, ce n'est pas à cause d'elle que G n'est pas dérivable. De plus, le calcul PC-CP^2, équivalent à P-CP^2, admet la non-nullité syntaxique des implications. En observant la preuve du lemme 3.3.3, on se rend compte que l'impossibilité de démontrer la formule G est due au fait de ne pas pouvoir substituer des prédicats équivalents dans les formules prouvables ; or, il se trouve que PC-CP^2 admet cette propriété. Nous allons donc enrichir les calculs PC-CP^2 afin que tous les prédicats équivalents soient librement substituables dans les formules démontrables. La notion de prédicats équivalents n'est correctement définie que dans le cas des formules ; pour généraliser cette notion, nous définissons l'égalité extensionnelle entre les prédicats :

Définition 3.4.1. *Soit κ un genre. Pour tous les prédicats $P : \kappa$ et $Q : \kappa$, l'*égalité extensionnelle *entre P et Q, notée $P =_\kappa Q$, est une formule définie par récurrence sur κ :*
$\kappa = \star$: *$A =_\kappa B$ est définie par la formule $A \leftrightarrow B$;*
$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: *$A =_\kappa B$ est définie par la formule $\forall \alpha^\iota . A\alpha =_\theta B\alpha$.*

Nous définissons alors les calculs pédagogiques extensionnels d'ordre supérieur :

Définition 3.4.2. *Pour tout n élément de $[\![2;\omega]\!]$, le* calcul propositionnel pédagogique d'ordre *n, abrégé en* P-CP^n, *est défini par :*

- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles* (P-Ax), (P-Hyp), ($\to_{\mathrm{i}}$), ($\to_{\mathrm{e}}$), ($\forall_{\mathrm{i}}$), (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), ($=_\alpha$) *et* ($=_{\beta'}$), *ainsi que de la règle suivante :*

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa \backslash A] \cdot F \quad \Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A =_\kappa B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa \backslash B] \cdot F} \text{(Ext)}$$

Le calcul P-CP$^\omega$ *est également appelé le* calcul propositionnel pédagogique d'ordre supérieur. *On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* P-CP^n *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

3.4.2 Non-nullité syntaxique des implications

Nous allons démontrer que pour tout n élément de $[\![2;\omega]\!]$, les calculs P-CP^2 respectent la propriété de non-nullité syntaxique des implications, dont la définition est facilement généralisée à l'ordre supérieur :

Définition 3.4.3. *Soient n élément de $[\![2;\omega]\!]$ et C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$. Une implication $A \to B$ est* syntaxiquement non-nul *quand la formule A est motivable dans C.*

Nous allons en fait prouver un résultat plus fort : tous les sous-prédicats des formules apparaissant dans les dérivations des calculs P-CP^n sont motivables par une seule et même motivation, la motivation $\top$ qui remplace toutes les variables libres α^κ par les prédicats $\top_\kappa$ définis ci-dessous :

Définition 3.4.4. *Pour tout genre κ, le prédicat $\top_\kappa$ est défini par récurrence sur κ :*
$\kappa = \star$: $\top_\kappa = \top$;
$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: $\top_\kappa = \lambda\alpha^\iota.\top_\theta$.
Nous observons que le prédicat $\top_\kappa$ est de genre κ.

Pour toute formule F, nous écrivons $F_\top$ la formule F dans laquelle toute variable libre α^κ est remplacée par $\top_\kappa$. Une substitution triviale est une substitution dont toutes les formules constitutives sont démontrables. Dans le chapitre 2, nous avons introduit la notion de formules héréditairement trivialement motivables, c'est-à-dire des formules dont toutes les sous-formules sont motivables par une substitution triviales. Il est fréquent pour prouver un théorème sur une propriété simple de faire appel à des propriétés plus complexes ; c'est notre cas ici, car pour montrer que toutes les sous-formules dans les dérivations des calculs P-CP^n sont motivables par $\top$, il faut prouver un résultat plus fort : que toutes les formules dans les dérivations sont uniformément trivialement motivables. Une formule est uniformément motivable quand toutes ses sous-formules sont motivables par des motivations dont les objets associés aux mêmes variables sont identiques ; ceci signifie qu'une motivation uniforme associe les mêmes exemples aux mêmes variables quelque soit la sous-formule. Comme les motivations uniformes sont très proches de la structure des formules, elles permettent de mener des preuves plus naturelles :

Définition 3.4.5. *Soient n élément de $[\![2;\omega]\!]$ et C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{id}} F$. Pour tout prédicat P et pour toute substitution σ triviale dans C, on définit par récurrence sur P la propriété d'être* uniformément trivialement motivable *par σ (abrégé en σ-UTM) dans C :*
$P = \top$: *P est σ-UTM dans C ;*

$P = \alpha^\kappa$: *si* $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ *alors* P *est* σ*-UTM dans* C *;*
$P = A \to B$: *si* σ *motive* P *dans* C *et si* A *et* B *sont* σ*-UTM dans* C*, alors* P *est* σ*-UTM dans* C *;*
$P = \forall\alpha^\kappa.A$: *si* σ *motive* P *dans* C *et si* A *est* $[\sigma_{\setminus\alpha};\alpha\backslash U]$*-UTM dans* C *pour toute formule* U *dérivable dans* C*, alors* P *est* σ*-UTM dans* C *;*
$P = \lambda\alpha^\kappa.A$: *si* σ *motive* P *dans* C *et si* A *est* $[\sigma_{\setminus\alpha};\alpha\backslash U]$*-UTM dans* C *pour toute formule* U *dérivable dans* C*, alors* P *est* σ*-UTM dans* C *;*
$P = AB$: *si* σ *motive* P *dans* C *et si* A *et* B *sont* σ*-UTM dans* C*, alors* P *est* σ*-UTM dans* C*.*

On démontre ci-dessous que la composition de deux substitutions triviales est une substitution triviale :

Proposition 3.4.1. *Soit* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$*. Pour toutes substitutions* σ *et* μ *triviales dans* P-CP^n *telles que, pour tout* $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$*, la substitution* μ *soit adaptée aux formules* $\sigma\cdot\alpha$*, la substitution* $\mu \odot \sigma$ *est triviale dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathrm{Dom}(\mu \odot \sigma)$; deux cas se présentent :

- $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$: par hypothèse, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma\cdot\alpha$ est dérivable ; posons $\mathrm{Dom}(\mu) = \{\beta^\kappa_i \,|\, 1 \leq i \text{ et } i \leq n\}$; le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\overrightarrow{\beta^\kappa_n}.\sigma\cdot\alpha$ est dérivable à l'aide de la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$; ainsi, comme μ est une substitution triviale, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \mu \odot \sigma\cdot\alpha$ est dérivable à l'aide de la règle $(\mathrm{P} - \forall_{\mathrm{e}})$;
- $\alpha \in \mathrm{Dom}(\mu) \setminus \mathrm{Dom}(\sigma)$: nous avons $\mu \odot \sigma\cdot\alpha = \mu\cdot\alpha$; comme μ est une substitution triviale, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \mu \odot \sigma\cdot\alpha$ est dérivable.

□

Il est important de pouvoir compléter les motivations ouvertes et des motivations closes. La proposition suivante garantit que c'est toujours le cas pour les motivations triviales :

Proposition 3.4.2. *Soient* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$ *et* F *une formule motivable dans* P-CP^n *par la substitution* σ*. Pour toute substitution* μ *triviale dans* P-CP^n*, la substitution* $\mu \odot \sigma$ *est une motivation de* F *dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par hypothèse, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma F$ est dérivable. Posons $\mathrm{Dom}(\mu) = \{\beta^\kappa_i \,|\, 1 \leq i \text{ et } i \leq n\}$; à l'aide de la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$, nous dérivons le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\overrightarrow{\beta^\kappa_n}.\sigma F$; ainsi, à l'aide de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), nous dérivons le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \mu \odot \sigma\cdot F$. □

De même que dans les calculs F-CP^n, la règle d'affaiblissement faiblement pédagogique (F-Aff) est valide dans les calculs P-CP^n :

Lemme 3.4.3. *Soit* n *un élément de* $[\![2;\omega]\!]$*. Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ *dérivable et pour toute formule* U *telle que* $\Gamma \cup \{U\}$ *soit motivable dans* P-CP^n*, le jugement* $\Gamma, U \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ *est dérivable.*

Démonstration. Analogue à la preuve de la proposition 3.2.8. □

Dans tout jugement pédagogiquement dérivable, on s'attend à ce que les formules admettent une motivation qui associe le même objet à toutes les variables libres identiques apparaissant dans le jugement. Le lemme suivant garantit que les motivations des hypothèses sont également des motivations des conséquences :

Lemme 3.4.4. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ dérivable et pour toute substitution σ triviale dans* P-CP^n *adaptée aux éléments de $\Gamma \cup \{F\}$, si σ est une motivation de Γ dans* P-CP^n *alors σ est une motivation de F dans* P-CP^n.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 3.2.5. Quelques précautions doivent être prises lors de l'utilisation de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) à la place de la règle ($\forall_{\mathrm{e}}$) : comme la substitution σ est supposée triviale dans P-CP^n, elle peut-être utilisée sans danger lors de l'application de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$). □

Pour tout prédicat P, $\overline{P}$ est la représentation de P sous la forme d'une formule ; ainsi, démontrer $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ pour deux prédicats P et Q garantit qu'ils sont extensionnellement égaux :

Lemme 3.4.5. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Soient Γ un contexte trivialement motivable, κ un genre, et $F : \kappa$ et $G : \kappa$ deux prédicats. Si les jugements $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \overline{F}$ et $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \overline{G}$ sont dérivables, alors le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F =_\kappa G$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur κ :

- $\kappa = \star$: les jugements $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ et $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} G$ sont dérivables par hypothèse ; les ensembles $\Gamma \cup \{F\}$ et $\Gamma \cup \{G\}$ sont trivialement motivables d'après le lemme 3.4.4 ; donc les jugements $\Gamma, F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} G$ et $\Gamma, G \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ sont dérivables d'après le lemme 3.4.3. Les jugements $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F \to G$ et $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} G \to F$ sont dérivables par la règle ($\to_{\mathrm{i}}$) ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F =_\star G$ est dérivable.
- $\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: les jugements $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \overline{F}$ et $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \overline{G}$ sont dérivables par hypothèse. Nous avons $\overline{F} = \forall \alpha^\iota . \overline{F\alpha}$; donc $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \overline{F\alpha}$ est dérivable par la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$). De même, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \overline{G\alpha}$ est dérivable. Par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F\alpha =_\theta G\alpha$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F =_\kappa G$ est dérivable par la règle ($\forall_{\mathrm{i}}$).

□

Dans les calculs P-CP^n, on peut substituer une sous-formule prouvable par une autre formule prouvable dans l'importe quelle dérivation, ce qui nous permettra de remplacer n'importe quelle motivation triviale par la motivation $\top$:

Lemme 3.4.6. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Soient Γ un contexte trivialement motivable dans* P-CP^n *et F une formule. Pour toutes substitutions σ et μ triviales dans* P-CP^n *et adaptées à $\Gamma \cup \{F\}$ telles que* $\mathrm{Dom}(\sigma) \cap \mathrm{Vl}(F) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$*, si le jugement $\Gamma \vdash^{\omega}_{\mathrm{p}} \sigma{\cdot}F$ est dérivable, alors le jugement $\Gamma \vdash^{\omega}_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}F$ est dérivable.*

Démonstration. σ et μ sont deux substitutions triviales dans P-CP^n ; donc, d'après le lemme 3.4.1, $\mu \odot \sigma$ est une substitution triviale dans P-CP^n. D'après le lemme 3.4.5, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \mu \odot \sigma{\cdot}\alpha =_{\kappa} \mu{\cdot}\alpha$ est dérivable pour tout $\alpha^{\kappa} \in \mathrm{Dom}(\mu)$. Par hypothèse, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma{\cdot}F$ est dérivable ; donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \mu \odot \sigma{\cdot}F$ est dérivable d'après le lemme 3.4.2. Ainsi, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}F$ est dérivable par la règle (Ext). □

Nous allons maintenant démontrer les propriétés attendues des motivations uniformes ; la première propriété est que toute motivation uniforme est une motivation :

Lemme 3.4.7. *Soit n élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout prédicat P et pour toute substitution σ triviale dans* P-CP^n*, si P est σ-UTM dans* P-CP^n *alors σ motive P dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur P ; nous traitons uniquement les cas $P = \top$ et $P = \alpha^{\kappa}$, les autres cas étant immédiats d'après la définition 3.4.5 :
- $P = \top$: nous avons $\sigma{\cdot}\top = \top$; donc σ motive P dans P-CP^n ;
- $P = \alpha^{\kappa}$: nous avons $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ et σ est triviale ; donc σ motive P dans P-CP^n.

□

La seconde propriété est que toute motivation uniforme d'un prédicat est une motivation uniforme de tous les sous-prédicats de ce prédicat :

Lemme 3.4.8. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et σ une substitution triviale dans* P-CP^n*. Pour tout prédicat $U : \kappa$ et P tel que $\alpha^{\kappa} \in \mathrm{Vl}(P)$ et que $[\alpha^{\kappa}\backslash U]$ soit adaptée à P, si $[\alpha^{\kappa}\backslash U]{\cdot}P$ est σ-UTM dans* P-CP^n *alors U est σ-UTM dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur P :
- $P = \top$: ce cas est immédiat ;
- $P = \beta^{\iota}$: deux cas se présentent :
  - $\beta = \alpha$: nous avons $[\alpha^{\kappa}\backslash U]{\cdot}P = U$; comme $[\alpha^{\kappa}\backslash U]{\cdot}P$ est σ-UTM dans P-CP^n, U est également μ-UTM dans P-CP^n ;
  - $\beta \neq \alpha$: nous avons $\alpha \notin \mathrm{Vl}(P)$, ce qui est contradictoire ; on en déduit alors le résultat par l'absurde ;
- $P = A \to B$: comme $\alpha \in \mathrm{Vl}(P)$, nous avons soit $\alpha \in \mathrm{Vl}(A)$, soit $\alpha \in \mathrm{Vl}(B)$; dans chacun des deux cas, le prédicat U est σ-UTM dans P-CP^n par hypothèse de récurrence ;

$P = \forall\beta^\iota.A$: par α-équivalence, on peut supposer que $\beta \neq \alpha$; soit V une formule dérivable dans P-CP^n ; comme $\alpha \in \mathrm{Vl}(P)$, nous avons $\alpha \in \mathrm{Vl}(A)$; par hypothèse de récurrence, le prédicat U est $[\sigma_{\backslash\beta}; \beta\backslash V]$-UTM dans P-CP^n ; comme la substitution $[\alpha\backslash U]$ est adaptée à P, nous avons $\beta \notin \mathrm{Vl}(U)$; ainsi, d'après le lemme 3.4.11, le prédicat U est σ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \lambda\beta^\iota.A$: analogue au cas précédent ;

$P = AB$: analogue au cas $P = A \to B$.

□

La troisième propriété est qu'une motivation uniforme est une motivation instanciant toutes les variables libres des prédicats qu'elle motive :

Lemme 3.4.9. *Soit n élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout prédicat P et pour toute substitution σ triviale dans* P-CP^n*, si P est σ-UTM dans* P-CP^n *alors* $\mathrm{Vl}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Démonstration. Immédiate par récurrence sur P. □

Enfin, la quatrième propriété restaure le statut de représentant de chaque formule $\overline{P}$ en montrant que pour qu'un prédicat P soit uniformément motivable, il suffit que la formule $\overline{P}$ soit uniformément motivable :

Lemme 3.4.10. *Soit n élément de $[\![2;\omega]\!]$. Soit κ un genre. Pour tout prédicat $P : \kappa$ et pour toute substitution σ triviale dans* P-CP^n*, si $\overline{P}$ est σ-UTM dans* P-CP^n *alors P est σ-UTM dans* P-CP^n.

Démonstration. Par récurrence sur κ :

$\kappa = \star$: nous avons $P = \overline{P}$; donc P est σ-UTM dans P-CP^n ;

$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: nous avons $\overline{P} = \forall\alpha^\iota.\overline{P\alpha}$; donc pour toute formule U dérivable dans P-CP^n la formule $\overline{P\alpha}$ est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, pour toute formule U dérivable dans P-CP^n, le prédicat $P\alpha$ est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; ainsi P est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; par α-équivalence, on peut supposer que $\alpha \notin \mathrm{Vl}(P)$; ainsi le prédicat P est σ-UTM d'après le lemme 3.4.11.

□

La propriété suivante est spécifique aux calculs pédagogiques propositionnels ; elle affirme que toutes les motivations triviales uniformes sont équivalentes, donc interchangeables :

Lemme 3.4.11. *Soit n élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout prédicat P et pour toute substitution σ triviale dans* P-CP^n*, si P est σ-UTM alors pour toute substitution triviale μ telle que* $\mathrm{Vl}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$*, P est μ-UTM.*

Démonstration. Par récurrence sur P :

$P = \top$: soit μ une substitution triviale telle que $\mathrm{Vl}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$; P est μ-UTM dans P-CP^n ;
$P = \alpha^\kappa$: soit μ une substitution triviale telle que $\mathrm{Vl}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$; nous avons $\alpha \in \mathrm{Dom}(\mu)$; donc le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \mu{\cdot}\alpha$ est dérivable ;
$P = A \to B$: soit μ une substitution triviale telle que $\mathrm{Vl}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$;
- σ motive P dans P-CP^n ; donc, d'après le lemme 3.4.6, μ motive P dans P-CP^n ;
- A et B sont σ-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, A et B sont μ-UTM dans P-CP^n ;

ainsi P est μ-UTM dans P-CP^n ;
$P = \forall\alpha^\kappa.A$: soit μ une substitution triviale telle que $\mathrm{Vl}(P) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$;
- σ motive P dans P-CP^n ; donc, d'après le lemme 3.4.6, μ motive P dans P-CP^n ;
- soit U une formule dérivable dans P-CP^n ; A est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, A est $[\mu_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ;

ainsi P est μ-UTM dans P-CP^n ;
$P = \lambda\alpha^\kappa.A$: analogue au cas $P = \forall\alpha^\kappa.A$;
$P = AB$: analogue au cas $P = A \to B$.

□

La preuve que toutes les formules des dérivations des calculs P-CP^n sont uniformément trivialement motivables se fait par récurrence sur les dérivations ; le lemme suivant concerne les cas des règles contenant des preuves de motivations, comme les règles (P-Ax) et (P-Hyp) :

Lemme 3.4.12. *Soit n un élément de $[\![2; \omega]\!]$. Soient P un prédicat, et σ et μ deux substitutions triviales dans* P-CP^n*. Si le prédicat $\sigma \cdot P$ est μ-UTM dans* P-CP^n*, alors pour toute substitution ρ triviale dans* P-CP^n *telle que* $\mathrm{Dom}(\rho) = \mathrm{Dom}(\sigma) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$*, P est ρ-UTM dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur P :
$P = \top$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = \mathrm{Dom}(\sigma) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$; P est ρ-UTM dans P-CP^n ;
$P = \alpha^\kappa$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = \mathrm{Dom}(\sigma) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$; nous avons $\alpha \in \mathrm{Dom}(\rho)$; donc le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \rho \cdot \alpha$ est dérivable ; ainsi P est ρ-UTM dans P-CP^n ;
$P = A \to B$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = \mathrm{Dom}(\sigma) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$;
- μ motive $\sigma{\cdot}P$ dans P-CP^n ; donc $\mu \odot \sigma$ motive P dans P-CP^n ; nous avons $\mathrm{Dom}(\mu \odot \sigma) = \mathrm{Dom}(\sigma) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$; donc, d'après le lemme 3.4.6, ρ motive P dans P-CP^n ;

– $\sigma\cdot A$ et $\sigma\cdot B$ sont μ-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, A et B sont ρ-UTM dans P-CP^n ;

ainsi P est ρ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \forall\alpha^\kappa.A$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = \mathrm{Dom}(\sigma) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$;

– μ motive $\sigma\cdot P$ dans P-CP^n ; donc $\mu \odot \sigma$ motive P dans P-CP^n ; nous avons $\mathrm{Dom}(\mu \odot \sigma) = \mathrm{Dom}(\sigma) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$; donc, d'après le lemme 3.4.6, ρ motive P dans P-CP^n ;

– soit U une formule dérivable dans P-CP^n ; $\sigma\cdot A$ est $[\mu_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, A est $[\rho_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ;

ainsi P est ρ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \lambda\alpha^\kappa.A$: analogue au cas $\forall\alpha^\kappa.A$;

$P = AB$: analogue au cas $P = A \to B$.

□

Le lemme suivant concerne les cas des règles faisant appel à des substitutions, comme les règles (Ext) et (P-$\forall_e$) :

Lemme 3.4.13. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$, κ un genre et α^κ une variable. Soient P et $U : \kappa$ deux prédicats. Pour toutes substitutions σ et μ triviales dans* P-CP^n*, si P est σ-UTM dans* P-CP^n *et U μ-UTM dans* P-CP^n*, alors pour toute substitution ρ triviale dans* P-CP^n *telle que* $\mathrm{Dom}(\rho) = (\mathrm{Dom}(\sigma) \setminus \{\alpha\}) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$*, le prédicat $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est ρ-UTM dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur P :

$P = \top$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = (\mathrm{Dom}(\sigma) \setminus \{\alpha\}) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$; le prédicat $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est ρ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \beta^\kappa$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = (\mathrm{Dom}(\sigma) \setminus \{\alpha\}) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$; deux cas se présentent :

– $\beta = \alpha$: d'après le lemme 3.4.11, U est ρ-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.7, ρ motive U dans P-CP^n ; nous avons $U = [\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$, donc ρ motive $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ dans P-CP^n ; ainsi $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est ρ-UTM dans P-CP^n ;

– $\beta \neq \alpha$: le prédicat P est σ-UTM dans P-CP^n ; comme P-CP^n est cohérent, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P$ n'est pas dérivable ; donc $\beta \in \mathrm{Dom}(\sigma)$; ainsi $\beta \in \mathrm{Dom}(\rho)$ et le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \rho\cdot P$ est dérivable ; comme $P = [\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$, le prédicat $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est ρ-UTM dans P-CP^n ;

$P = A \to B$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = (\mathrm{Dom}(\sigma) \setminus \{\alpha\}) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$;

– d'après le lemme 3.4.11, P est ρ-UTM dans P-CP^n ; donc ρ motive P dans P-CP^n d'après le lemme 3.4.7 ; de même, ρ motive U dans P-CP^n ; donc la substitution $[\alpha^\kappa\backslash\rho\cdot U]$ est triviale dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.6, le

jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\rho_{\setminus\alpha}; \alpha^\kappa\backslash\rho{\cdot}U]{\cdot}P$ est dérivable ; nous avons $[\alpha^\kappa\backslash\rho{\cdot}U; \rho_{\setminus\alpha}]{\cdot}P = \rho{\cdot}[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}P$; ainsi ρ motive $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}P$ dans P-CP^n ;
– A et B sont σ-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}A$ et $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}B$ sont ρ-UTM dans P-CP^n ;

ainsi $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}P$ est ρ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \forall\beta^\kappa.A$: soit ρ une substitution triviale dans P-CP^n telle que $\mathrm{Dom}(\rho) = (\mathrm{Dom}(\sigma) \setminus \{\alpha\}) \cup \mathrm{Dom}(\mu)$;
– d'après le lemme 3.4.11, P est ρ-UTM dans P-CP^n ; donc ρ motive P dans P-CP^n d'après le lemme 3.4.7 ; de même, ρ motive U dans P-CP^n ; donc la substitution $[\alpha^\kappa\backslash\rho{\cdot}U]$ est triviale dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.6, le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\rho_{\setminus\alpha}; \alpha^\kappa\backslash\rho{\cdot}U]{\cdot}P$ est dérivable ; nous avons $[\alpha^\kappa\backslash\rho{\cdot}U; \rho_{\setminus\alpha}]{\cdot}P = \rho{\cdot}[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}P$; ainsi ρ motive $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}P$ dans P-CP^n ;
– soit U une formule dérivable dans P-CP^n ; A est $[\sigma_{\setminus\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}A$ est $[\rho_{\setminus\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ;

ainsi $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}P$ est ρ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \lambda\alpha^\kappa.A$: analogue au cas $P = \forall\beta^\kappa.A$;

$P = AB$: analogue au cas $P = A \to B$.

□

Les deux lemmes suivants concernent le cas de la règle (Ext) :

Lemme 3.4.14. *Soit n élément de $[\![2;\omega]\!]$. Soit κ un genre. Pour tout prédicat $P : \kappa$ et $Q : \kappa$, et pour toute substitution σ triviale dans* P-CP^n*, si $P =_\kappa Q$ est σ-UTM dans* P-CP^n *alors P et Q sont σ-UTM dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur κ :

$\kappa = \star$: supposons que la formule $P \leftrightarrow Q$ soit σ-UTM dans P-CP^n ; donc P et Q sont σ-UTM dans P-CP^n ;

$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: supposons que la formule $\forall\alpha^\iota.P\alpha =_\theta Q\alpha$ soit σ-UTM dans P-CP^n, avec $\alpha \in \mathrm{Fr}(A, B)$; soit U une formule dérivable dans P-CP^n ; la formule $P\alpha =_\theta Q\alpha$ est $[\sigma_{\setminus\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, les prédicats $P\alpha$ et $Q\alpha$ sont $[\sigma_{\setminus\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; donc P et Q sont $[\sigma_{\setminus\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; ainsi, d'après le lemme 3.4.11, les prédicats P et Q sont σ-UTM dans P-CP^n.

□

Lemme 3.4.15. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et σ une substitution triviale dans* P-CP^n*. Pour tous prédicats P, $U : \kappa$ et $V : \kappa$, si $[\alpha^\kappa\backslash U]{\cdot}P$, U et V sont σ-UTM dans* P-CP^n *alors $[\alpha^\kappa\backslash V]{\cdot}P$ est σ-UTM dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur P :

$P = \top$: ce cas est immédiat ;

$P = \beta^\iota$: deux cas se présentent :
- $\beta = \alpha$: nous avons $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot P = V$; comme V est σ-UTM dans P-CP^n, $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot P$ est également μ-UTM dans P-CP^n ;
- $\beta \neq \alpha$: nous avons $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P = [\alpha^\kappa\backslash V]\cdot P$; comme $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est σ-UTM dans P-CP^n, $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot P$ est également σ-UTM dans P-CP^n ;

$P = A \to B$: par hypothèse de récurrence, $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot A$ et $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot B$ sont σ-UTM dans P-CP^n ; $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est motivable par σ dans P-CP^n ; donc, d'après le lemme 3.4.6, $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est motivable par σ dans P-CP^n ; ainsi $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot P$ est σ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \forall\beta^\iota.A$: par α-équivalence, on peut supposer que $\beta \neq \alpha$; soit W une formule dérivable dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot A$ est $[\sigma_{\backslash\beta};\beta\backslash W)$-UTM dans P-CP^n ; $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est motivable par σ dans P-CP^n ; donc, d'après le lemme 3.4.6, $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot P$ est motivable par σ dans P-CP^n ; ainsi $[\alpha^\kappa\backslash V]\cdot P$ est σ-UTM dans P-CP^n ;

$P = \lambda\beta^\iota.A$: analogue au cas précédent ;

$P = AB$: analogue au cas $P = A \to B$.

□

Les deux lemmes qui suivent sont liés au cas de la règle $(=_\alpha)$:

Lemme 3.4.16. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et σ une substitution triviale dans* P-CP^n. *Pour tout prédicat P et pour tout prédicat U dérivable dans* P-CP^n*, si P est $[\sigma_{\backslash\alpha};\alpha\backslash U]$-UTM dans* P-CP^n *alors $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]$-UTM dans* P-CP^n.

Démonstration. Par récurrence sur P :

$P = \top$: nous avons $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P = \top$; donc $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ;

$P = \beta^\kappa$: deux cas se présentent :
- $\beta = \alpha$: nous avons $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P = \gamma$; donc $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ;
- $\beta \neq \alpha$: nous avons $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P = \beta$ et $\beta \in \mathrm{Dom}(\sigma)$ car P est $[\sigma_{\backslash\alpha};\alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; donc $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ;

$P = A \to B$: immédiat par récurrence sur A et B ;

$P = \forall\beta^\kappa.A$: supposons que P soit $[\sigma_{\backslash\alpha};\alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; soit V un prédicat dérivable dans P-CP^n ; par α-équivalence on peut supposer que $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\sigma)\cup\{\alpha\}$; ainsi A est $[\sigma_{\backslash\alpha};\alpha\backslash U;\beta\backslash V]$-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, $[\alpha\backslash\gamma]\cdot A$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U;\beta\backslash V]$-UTM ; le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]\cdot[\alpha\backslash\beta]\cdot P$ est dérivable dans P-CP^n car $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]\cdot[\alpha\backslash\beta]\cdot P = [\sigma_{\backslash\alpha};\alpha\backslash U]\cdot P$; ainsi $[\alpha\backslash\gamma]\cdot P$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ;

$P = \lambda\beta^\kappa.A$: analogue au cas précédent ;

$P = AB$: immédiat par récurrence sur A et B.

□

Lemme 3.4.17. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et σ une substitution triviale dans* P-CP^n*. Pour tout prédicat A et B, si $A =_\alpha B$ alors A est σ-UTM dans* P-CP^n *si et seulement si B est σ-UTM dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $A =_\alpha B$:

$\dfrac{}{\top =_\alpha \top}\,(\alpha_\top)$ ce cas est immédiat ;

$\dfrac{}{\alpha^\kappa =_\alpha \alpha^\kappa}\,(\alpha_{\text{var}})$ ce cas est immédiat ;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\,(\alpha_\to)$ supposons que la formule $A \to B$ soit σ-UTM dans P-CP^n. Ainsi les formules A et B sont σ-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, les formules A' et B' sont σ-UTM dans P-CP^n. Le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma\cdot(A' \to B')$ est aisément dérivable par la règle $(=_\alpha)$. Ainsi la formule $A' \to B'$ est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

$\dfrac{[\alpha^\kappa\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha [\beta^\kappa\backslash\gamma]\cdot B \quad \gamma \in \mathrm{Fr}(A,B)}{\forall\alpha^\kappa.A =_\alpha \forall\beta^\kappa.B}\,(\alpha_\forall)$ supposons que la formule $\forall\alpha^\kappa.A$ soit σ-UTM dans P-CP^n. Soit U une formule dérivable dans P-CP^n. La formule A est $[\sigma_{\backslash\alpha};\alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n. D'après le lemme 3.4.16, la formule $[\alpha\backslash\gamma]\cdot A$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]$-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, la formule $[\beta\backslash\gamma]\cdot B$ est $[\sigma_{\backslash\gamma};\gamma\backslash U]$-UTM dans P-CP^n. D'après le lemme 3.4.16, la formule B est $[\sigma_{\backslash\beta};\beta\backslash U]$-UTM dans P-CP^n. Le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma\cdot\forall\beta^\kappa.B$ est aisément dérivable par la règle $(=_\alpha)$. Ainsi la formule $\forall\beta^\kappa.B$ est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

$\dfrac{[\alpha^\kappa\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha [\beta^\kappa\backslash\gamma]\cdot B \quad \gamma \in \mathrm{Fr}(A,B)}{\lambda\alpha^\kappa.A =_\alpha \lambda\beta^\kappa.B}\,(\alpha_\lambda)$ analogue au cas précédent ;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{AB =_\alpha A'B'}\,(\alpha_{\text{app}})$ supposons que le prédicat AB soit σ-UTM dans P-CP^n. Les prédicats A et B sont σ-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, les prédicats A' et B' sont σ-UTM dans P-CP^n. Le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma\cdot(A'B')$ est aisément dérivable par la règle $(=_\alpha)$. Ainsi le prédicat $A'B'$ est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

□

Le lemme suivant concerne le cas de la règle $(=_{\beta'})$:

Lemme 3.4.18. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et σ une substitution triviale dans* P-CP^n*. Pour tout prédicat A et B, si $A =_{\beta'} B$ et si tous les prédicats motivés dans la dérivation de $A =_{\beta'} B$ par une substitution μ sont μ-UTM, alors A est σ-UTM dans* P-CP^n *si et seulement si B est σ-UTM dans* P-CP^n*.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $A =_{\beta'} B$:

$\dfrac{}{\top =_{\beta'} \top}$ $(\beta_\top)$ ce cas est immédiat ;

$\dfrac{}{\alpha^\kappa =_{\beta'} \alpha^\kappa}$ (β_{var}) ce cas est immédiat ;

$\dfrac{A =_{\beta'} A' \quad B =_{\beta'} B'}{A \to B =_{\beta'} A' \to B'}$ $(\beta_\to)$ supposons que la formule $A \to B$ soit σ-UTM dans P-CP^n. Ainsi les formules A et B sont σ-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, les formules A' et B' sont σ-UTM dans P-CP^n. Le jugement $\vdash^{\text{n}}_{\text{p}} \sigma\cdot(A' \to B')$ est aisément dérivable par la règle $(=_{\beta'})$. Ainsi la formule $A' \to B'$ est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

$\dfrac{A =_{\beta'} A'}{\forall\alpha^\kappa.A =_{\beta'} \forall\alpha^\kappa.A'}$ $(\beta_\forall)$ supposons que la formule $\forall\alpha^\kappa.A$ soit σ-UTM dans P-CP^n. Soit U une formule dérivable dans P-CP^n. La formule A est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, la formule A' est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n. Le jugement $\vdash^{\text{n}}_{\text{p}} \sigma\cdot\forall\alpha^\kappa.A'$ est aisément dérivable par la règle $(=_{\beta'})$. Ainsi la formule $\forall\alpha^\kappa.A'$ est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

$\dfrac{A =_{\beta'} A'}{\lambda\alpha^\kappa.A =_{\beta'} \lambda\alpha^\kappa.A'}$ (β_λ) analogue au cas précédent ;

$\dfrac{A =_{\beta'} A' \quad B =_{\beta'} B'}{AB =_{\beta} A'B'}$ (β_{app}) supposons que le prédicat AB soit σ-UTM dans P-CP^n. Les prédicats A et B sont σ-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, les prédicats A' et B' sont σ-UTM dans P-CP^n. Le jugement $\vdash^{\text{n}}_{\text{p}} \sigma\cdot(A'B')$ est aisément dérivable par la règle $(=_{\beta'})$. Ainsi le prédicat $A'B'$ est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

$\dfrac{A =_{\beta'} B}{B =_{\beta'} A}$ (β_{sym}) supposons que le prédicat A soit σ-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, le prédicat B est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

$\dfrac{A =_{\beta'} B \quad B =_{\beta'} C}{A =_{\beta'} C}$ (β_{trans}) supposons que le prédicat A soit σ-UTM dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, le prédicat B est σ-UTM dans P-CP^n ; donc, par hypothèse de récurrence, le prédicat C est σ-UTM dans P-CP^n. L'autre sens de l'implication est analogue.

$\dfrac{\vdash^{\text{n}}_{\text{p}} \mu\cdot\forall\alpha^\kappa.\overline{A} \quad \vdash^{\text{n}}_{\text{p}} \mu\cdot\overline{B}}{(\lambda\alpha^\kappa.A)B =_{\beta'} [\alpha^\kappa\backslash B]\cdot A}$ (P-β_{red})

- $\Rightarrow$) supposons que le prédicat $(\lambda\alpha^\kappa.A)B$ soit σ-UTM dans P-CP^n. Pour toute formule U dérivable dans P-CP^n, le prédicat A est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n et le prédicat B est σ-UTM dans P-CP^n. D'après le lemme 3.4.13, le prédicat $[\alpha^\kappa\backslash B]\cdot A$ est σ-UTM dans P-CP^n.

$\Leftarrow$) supposons que le prédicat $[\alpha^\kappa\backslash B]{\cdot}A$ soit σ-UTM dans P-CP^n. D'après le lemme 3.4.9, nous avons $\mathrm{Vl}(\forall\alpha^\kappa.\overline{A}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$. Nous avons $\mathrm{Vl}(\forall\alpha^\kappa.\overline{A}) \subseteq \mathrm{Vl}([\alpha^\kappa\backslash B]{\cdot}A)$. D'après le lemme 3.4.9, nous avons $\mathrm{Vl}([\alpha^\kappa\backslash B]{\cdot}A) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$. Ainsi $\mathrm{Vl}(\forall\alpha^\kappa.\overline{A}) \subseteq \mathrm{Dom}(\sigma)$; d'après le lemme 3.4.11, la formule $\forall\alpha^\kappa.\overline{A}$ est σ-UTM. Pour toute formule U dérivable dans P-CP^n, la formule $\overline{A}$ est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM ; ainsi, d'après le lemme 3.4.10, pour toute formule U dérivable dans P-CP^n, le prédicat A est $[\sigma_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM. De même, le prédicat B est σ-UTM dans P-CP^n. D'après le lemme 3.4.7, σ motive $\forall\alpha^\kappa.\overline{A}$ dans P-CP^n ; donc σ motive $\forall\alpha^\kappa.\overline{(\lambda\alpha^\kappa.A)\alpha}$ dans P-CP^n grâce à la règle $(=_{\beta'})$; ainsi le prédicat $\lambda\alpha^\kappa.A$ est σ-UTM dans P-CP^n. Ainsi le prédicat $(\lambda\alpha^\kappa.A)B$ est σ-UTM dans P-CP^n.

□

Voici enfin le lemme principal, celui qui montre que toutes les formules dans les dérivations des calculs P-CP^n sont uniformément trivialement motivables :

Proposition 3.4.19. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ et pour toute substitution μ triviale adaptée à $\Gamma \cup \{F\}$, si* $\mathrm{Vl}(\Gamma \cup \{F\}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$ *alors $\Gamma \cup \{F\}$ est μ-UTM dans* P-CP^n.

Démonstration. Soit μ une substitution triviale adaptée à $\Gamma\cup\{F\}$ telle que $\mathrm{Vl}(\Gamma\cup\{F\}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mu)$. Montrons par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ que $\Gamma\cup\{F\}$ est μ-UTM dans P-CP^n :

$\dfrac{\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \top}$ (P-Ax) : notons ρ la substitution dont le domaine est $\mathrm{Vl}(\sigma\cdot\Gamma)$ telle que $\rho\cdot\alpha = \top_\kappa$ pour toute variable $\alpha^\kappa \in \mathrm{Dom}(\rho)$. Soit $G \in \Gamma$; par hypothèse de récurrence, la formule $\sigma\cdot G$ est ρ-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.12, la formule G est $\mu_{\restriction\mathrm{Dom}(\sigma)}$-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.11, la formule G est μ-UTM dans P-CP^n ; ainsi $\Gamma\cup\{\top\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ;

$\dfrac{F \in \Gamma \quad \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F}$ (P-Hyp) : analogue au cas précédent ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A \to B}$ $(\to_{\mathrm{i}})$: par hypothèse de récurrence, les formules dans $\Gamma\cup\{A, B\}$ sont μ-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.7, la substitution μ motive Γ dans P-CP^n ; donc μ motive la formule $A \to B$ dans P-CP^n d'après le lemme 3.4.4 ; ainsi $\Gamma \cup \{A \to B\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A \to B \quad \Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} B}$ $(\to_{\mathrm{e}})$: par hypothèse de récurrence, $\Gamma \cup \{A, B\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A \quad \alpha^\kappa \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\alpha^\kappa.A}$ $(\forall_{\mathrm{i}})$: soit U une formule dérivable dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, $\Gamma \cup \{A\}$ est $[\mu_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash U]$-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.7, la substitution μ motive Γ dans P-CP^n ; donc μ motive la formule $\forall\alpha^\kappa.A$ dans P-CP^n d'après le lemme 3.4.4 ; par conséquent, $\forall\alpha^\kappa.A$ est μ-UTM dans P-CP^n ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\alpha^\kappa.A \quad \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma\cdot\overline{U}}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A}$ (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) : notons ρ la substitution dont le domaine est $\mathrm{Vl}(\sigma\cdot\overline{U})$ telle que $\rho\cdot\alpha = \top_\kappa$ pour toute variable $\alpha^\kappa \in \mathrm{Dom}(\rho)$. par hypothèse de récurrence, la formule $\sigma\cdot U$ est ρ-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.12, la formule U est $\mu_{\restriction\mathrm{Dom}(\sigma)}$-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.11, la formule U est μ-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, $\Gamma \cup \{\forall\alpha^\kappa.A\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ; donc A est $[\mu_{\backslash\alpha}; \alpha\backslash\top_\kappa]$-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.13, la formule $[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A$ est μ-UTM dans P-CP^n ; ainsi $\Gamma \cup \{[\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa\backslash A]\cdot F \quad \Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A =_\kappa B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa\backslash B]\cdot F}$ (Ext) : par hypothèse de récurrence, Γ est μ-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, la formule $A =_\kappa B$ est μ-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.14, les prédicats A et B sont μ-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, la formule $[\alpha^\kappa\backslash A]\cdot F$ est μ-UTM dans P-CP^n ; par hypothèse de récurrence, la formule A est μ-UTM dans P-CP^n ; donc, d'après le lemme 3.4.15, la formule $[\alpha^\kappa\backslash B]\cdot F$ est μ-UTM dans P-CP^n ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} B}$ ($=_\alpha$) : par hypothèse de récurrence, $\Gamma \cup \{A\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.17, la formule B est μ-UTM dans P-CP^n ; ainsi $\Gamma \cup \{B\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A \quad A =_{\beta'} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} B}$ ($=_{\beta'}$) : par hypothèse de récurrence, $\Gamma \cup \{A\}$ est μ-UTM dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.4.17, la formule B est μ-UTM dans P-CP^n ; ainsi $\Gamma \cup \{B\}$ est μ-UTM dans P-CP^n.

□

Par conséquent, nous avons la propriété de non-nullité syntaxique des jugements dans les calculs P-CP^n par la proposition suivante :

Proposition 3.4.20. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (\overline{G})_\top$ est dérivable pour tout sous-prédicat G des formules dans $\Gamma \cup \{F\}$.*

Démonstration. Soit τ la substitution qui à toute variable α^κ associe le prédicat $\top_\kappa$. D'après la proposition 3.4.19, l'ensemble $\Gamma \cup \{F\}$ est τ-UTM dans P-CP^n. Soit G un sous-prédicat d'une formule dans $\Gamma \cup \{F\}$. D'après la proposition 3.4.8, la formule G est τ-UTM dans P-CP^n. Ainsi, d'après le lemme 3.4.7, G est motivable par τ dans P-CP^n. □

En particulier, toutes les formules motivables sont motivables par $\top$, ce qui nous permet de simplifier la règle d'affaiblissement faiblement pédagogique (F-Aff) à l'aide de la règle d'affaiblissement pédagogique (P-Aff) :

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F \qquad \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \sigma \cdot U}{\Gamma, U \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F}\ (\text{P-Aff})$$

Le dernier résultat important concerne les propriétés des formules motivables exprimables dans les calculs P-CP^n ; le résultat est que toutes les propriétés des formules motivables exprimables usuellement, c'est-à-dire dans CP^n, sont exprimables dans P-CP^n ; ainsi ces calculs pédagogiques capturent toutes les propriétés qui concernent la bonne notion de formules dans les systèmes pédagogiques :

Proposition 3.4.21. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et σ une substitution triviale dans* P-CP^n. *Pour toute formule F close et σ-UTM dans* P-CP^n*, le jugement* $\vdash^{\mathrm{n}} F$ *est dérivable si et seulement si le jugement* $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ *est dérivable.*

Démonstration.
- $\Rightarrow$) la formule F est close et UTM dans P-CP^n ; donc le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ est dérivable ;
- $\Leftarrow$) supposons que le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ soit dérivable ; P-CP^n est un sous-système de CP^n, donc le jugement $\vdash^{\mathrm{n}} F$ est dérivable.

□

3.5 Traductions

Nous introduisons ici une traduction inspirée d'une part de la A-traduction de Friedman [10] et d'autre part des traductions négatives de Gödel-Kolmogorov-Kuroda servant à plonger le calcul propositionnel classique dans la logique minimale. Notre but est de montrer que les calculs CP^n et P-CP^n sont équivalents modulo notre traduction. Nous commençons par définir les calculs propositionnels classiques d'ordre supérieur :

Définition 3.5.1. *Pour tout n élément de $[\![2;\omega]\!]$, le* calcul propositionnel classique d'ordre n*, abrégé en* CCP^n*, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles* (Ax)*,* (Hyp)*,* ($\rightarrow_{\mathrm{i}}$)*,* ($\rightarrow_{\mathrm{e}}$)*,* ($\forall_{\mathrm{i}}$)*,* ($\forall_{\mathrm{e}}$)*,* ($=_\alpha$)*,* ($=_\beta$) *et* (Ext)*, ainsi que de la règle suivante :*

$$\frac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \neg\neg F}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F}\ (\neg\neg_{\mathrm{e}})$$

Le calcul CCP$^\omega$ *est également appelé le* calcul propositionnel classique d'ordre supérieur. *On dit qu'un jugement* $\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* CCP^n *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

Pour toute formule F et pour toute variable $\gamma^\star$, la formule $F \to \gamma$ est notée $\neg_\gamma F$ et la formule $\neg_\gamma\neg_\gamma F$ est notée $\neg\!\neg_\gamma F$. Dans les traductions négatives, la double négation $\neg\neg F$, ici remplacée par la double pseudo-négation $\neg\!\neg_\gamma F$, joue un rôle primordial ; nous avons besoin de la généraliser pour pouvoir lui donner un sens dans le cadre des prédicats d'ordre supérieur ; ainsi, l'équivalent de la double négation d'un prédicat P est représenté par une double pseudo-négation généralisée $\Theta_\gamma(P)$:

Définition 3.5.2. *Pour tout prédicat P de genre κ et pour toute variable $\gamma^\star$ fraîche pour P, le prédicat $\Theta_\gamma(P)$ est défini par récurrence sur κ :*
$\kappa = \star$: $\Theta_\gamma(P) = \neg\!\neg_\gamma P$;
$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: $\Theta_\gamma(P) = \lambda\alpha^\iota.\Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\alpha))$.

Nous définissons maintenant notre traduction de CCP^c dans P-CP^n, la γ-traduction d'ordre supérieur :

Définition 3.5.3. *Pour tout prédicat P et pour toute variable $\gamma^\star$ fraîche pour P, le prédicat P_γ est défini par récurrence sur P :*
$P = \top$: $P_\gamma = P$;
$P = \alpha^\kappa$: $P_\gamma = \Theta_\gamma(P)$;
$P = A \to B$: $P_\gamma = A_\gamma \to B_\gamma$;
$P = \forall\alpha^\kappa.A$: $P_\gamma = \forall\alpha^\kappa.A_\gamma$;
$P = \lambda\alpha^\kappa.A$: $P_\gamma = \lambda\alpha^\kappa.A_\gamma$;
$P = AB$: $P_\gamma = A_\gamma B_\gamma$.

Pour que la γ-traduction fonctionne bien, il faut qu'elle possède de bonnes propriétés ; il faut tout d'abord qu'elle transforme tout prédicat en un prédicat motivable ; la preuve de ceci est l'objet des deux lemmes suivants :

Lemme 3.5.1. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout prédicat P de genre κ et pour toute variable $\gamma^\star$ fraîche pour P, si P est motivable dans* P-CP^n *alors le prédicat $\Theta_\gamma(P)$ est motivable dans* P-CP^n *par la substitution* $[\gamma\backslash\top]$.

Démonstration. Par récurrence sur κ :
$\kappa = \star$: Nous avons $[\gamma\backslash\top]\cdot\Theta_\gamma(P) = (P \to \top) \to \top$, donc il suffit de dériver le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (P \to \top) \to \top$:
1) $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \sigma\cdot P$ par hypothèse ;
2) $P \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \top$ par (P-Ax) et 1 ;
3) $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P \to \top$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 2 ;
4) $P \to \top \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \top$ par (P-Ax) et 3 ;

5) $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (P \to \top) \to \top$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 4.

$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: Le prédicat P est motivable par hypothèse, donc il existe une substitution σ telle que le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \sigma{\cdot}\forall\alpha^{\iota}.\overline{P\alpha}$ soit dérivable. Ainsi le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \forall\alpha^{\iota}.\sigma\cdot\overline{P\alpha}$ est dérivable. Par hypothèse de récurrence, le prédicat $\Theta_\gamma(\alpha)$ est motivable dans P-CP^n, donc le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \sigma\cdot\overline{P\Theta_\gamma(\alpha)}$ est dérivable par la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) ; ainsi le prédicat $P\Theta_\gamma(\alpha)$ est motivable dans P-CP^n. Par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot\overline{\Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\alpha))}$ est dérivable. Nous dérivons le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot\forall\alpha^{\iota}\overline{\Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\alpha))}$ par la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$. Nous avons $\overline{\Theta_\gamma(P)} =_\beta \forall\alpha^{\iota}.\Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\alpha))$; ainsi le prédicat $\Theta_\gamma(P)$ est motivable dans P-CP^n.

□

Lemme 3.5.2. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout prédicat P et pour toute variable $\gamma^\star$ fraîche pour P, le prédicat P_γ est motivable dans* P-CP^n *par la substitution* $[\gamma\backslash\top]$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur P que le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot\overline{P_\gamma}$ est dérivable :

$P = \top$: $[\gamma\backslash\top]\cdot\overline{\top_\gamma} = \top$ et le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \top$ est dérivable avec la règle (Ax) ;

$P = \alpha^\kappa$: d'après le lemme 3.5.1, le prédicat α_γ est motivable dans P-CP^n par la substitution $[\gamma\backslash\top]$.

$P = A \to B$:

1) $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot A_\gamma$ par hypothèse ;
2) $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot B_\gamma$ par hypothèse ;
3) $[\gamma\backslash\top]\cdot B_\gamma, [\gamma\backslash\top]\cdot A_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot B_\gamma$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
4) $[\gamma\backslash\top]\cdot B_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot(A \to B)_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot B_\gamma \to [\gamma\backslash\top]\cdot(A \to B)_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ 4 ;
6) $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot(A \to B)_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 5 et 2.

$P = \forall\alpha^\kappa.A$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot A_\gamma$ est dérivable. Nous avons $\gamma \neq \alpha$; ainsi nous dérivons le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot(\forall\alpha^\kappa.A)_\gamma$ avec la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$;

$P = \lambda\alpha^\kappa.A$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot\overline{A_\gamma}$ est dérivable. Nous avons $\gamma \neq \alpha$; ainsi nous dérivons le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot\forall\alpha^\kappa.\overline{(A_\gamma)}$ avec la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$; nous avons $A_\gamma =_{\beta'} (\lambda\alpha^\kappa.A_\gamma)\alpha$; donc le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot \forall\alpha^\kappa.\overline{(\lambda\alpha^\kappa.A_\gamma)\alpha}$ est dérivable par la règle $(=_{\beta'})$; ainsi la formule $\overline{P_\gamma}$ est motivable par $[\gamma\backslash\top]$ dans P-CP^n ;

– $P = AB$: soit $\kappa \Rightarrow \iota$ le genre du prédicat A ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot\forall\alpha^\kappa.\overline{A_\gamma\alpha}$ est dérivable et B_γ est motivable dans P-CP^n ; donc le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot\overline{A_\gamma B_\gamma}$ est dérivable avec la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) ; ainsi le prédicat P est motivable par $[\gamma\backslash\top]$ dans P-CP^n.

□

Les deux lemmes suivants servent à prouver que notre double pseudo-négation généralisée peut-être éliminée lors de l'application de substitutions :

Lemme 3.5.3. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout prédicat $P : \kappa$, pour tout ensemble Γ motivable dans* P-CP^n *et pour toute variable $\gamma^\star$ fraîche pour P, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P)) =_\kappa \Theta_\gamma(P)$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur κ :

$\kappa = \star$: nous avons $\Theta_\gamma(P) = \neg_\gamma P$ et $\Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P)) = \neg_\gamma\neg_\gamma P$;

1) $\Gamma, \neg_\gamma P, \neg_\gamma P, \neg_\gamma\neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma P$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
2) $\Gamma, \neg_\gamma P, \neg_\gamma P, \neg_\gamma\neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma P$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
3) $\Gamma, \neg_\gamma\neg_\gamma P, \neg_\gamma P, \neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 1 et 2 ;
4) $\Gamma, \neg_\gamma\neg_\gamma P, \neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\neg_\gamma P$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 3 ;
5) $\Gamma, \neg_\gamma\neg_\gamma P, \neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\neg_\gamma P$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
6) $\Gamma, \neg_\gamma\neg_\gamma P, \neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 4 et 5 ;
7) $\Gamma, \neg_\gamma\neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma P$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 6 ;
8) $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\neg_\gamma P \to \neg_\gamma P$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 7 ;

donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P)) \to \Theta_\gamma(P)$ est dérivable ;

1) $\Gamma, \neg_\gamma P, \neg_\gamma\neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\neg_\gamma P$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
2) $\Gamma, \neg_\gamma P, \neg_\gamma\neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma P$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
3) $\Gamma, \neg_\gamma P, \neg_\gamma\neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 1 et 2 ;
4) $\Gamma, \neg_\gamma P \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\neg_\gamma P$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 3 ;
5) $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma P \to \neg_\gamma\neg_\gamma P$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 4 ;

donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P) \to \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P))$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P)) =_\kappa \Theta_\gamma(P)$ est dérivable ;

$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: soit β^ι une variable fraîche pour Γ et P ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\beta))) =_\theta \Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\beta))$; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(\beta)) =_\iota \Theta_\gamma(\beta)$; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\Theta_\gamma(\beta)))) =_\theta \Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\beta))$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ; le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\Theta_\gamma(\beta))) =_{\beta'} \Theta_\gamma(P)\Theta_\gamma(\beta)$ est aisément dérivable ; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P)\Theta_\gamma(\beta)) =_\theta \Theta_\gamma(P\Theta_\gamma(\beta))$ à l'aide de la règle ($=_{\beta'}$) ; par la règle ($=_{\beta'}$) nous dérivons également le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P))\beta =_\kappa \Theta_\gamma(P)\beta$; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(P)) =_\kappa \Theta_\gamma(P)$ est dérivable à l'aide de la règle ($\forall_{\mathrm{i}}$).

□

Lemme 3.5.4. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et Γ un ensemble motivable dans* P-CP^n*. Pour tout prédicat $P : \kappa$, pour tout prédicat $U : \iota$ motivable dans* P-CP^n *tel que la substitution $[\alpha^\iota \backslash \Theta_\gamma(U)]$ soit adaptée à P et pour toute variable $\gamma^\star$ fraîche pour P, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\iota \backslash \Theta_\gamma(U)] \cdot P_\gamma =_\kappa [\alpha^\iota \backslash U] \cdot P_\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur P ; le cas $P = \beta^\kappa$ est le seul cas non immédiat :

$P = \beta^\kappa$: deux cas se présentent :

- $\beta = \alpha$: nous avons $[\alpha^\iota \backslash U] \cdot \alpha_\gamma = \Theta_\gamma(U)$ et $[\alpha^\iota \backslash \Theta_\gamma(U)] \cdot \alpha_\gamma = \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(U))$; d'après le lemme 3.5.3, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(U)) =_\kappa \Theta_\gamma(U)$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\iota \backslash \Theta_\gamma(U)] \cdot P_\gamma =_\kappa [\alpha^\iota \backslash U] \cdot P_\gamma$ est dérivable par la règle (Ext) ;
- $\beta \neq \alpha$: nous avons $[\alpha^\iota \backslash \Theta_\gamma(U)] \cdot \beta_\gamma = \beta_\gamma$; donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\iota \backslash \Theta_\gamma(U)] \cdot P_\gamma =_\kappa [\alpha^\iota \backslash U] \cdot P_\gamma$ est aisément dérivable.

□

Dans les traductions négatives, les traductions des formules admettent l'élimination de la double négation ; dans notre cas, la double négation d'un prédicat transformé P s'écrit $\Theta_\gamma(P_\gamma)$; il faut alors que $\Theta_\gamma(P_\gamma)$ soit extensionnellement égale à P_γ :

Lemme 3.5.5. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout prédicat $P : \kappa$, pour tout ensemble Γ motivable dans* P-CP^n *et pour toute variable $\gamma^\star$ fraîche pour P, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P_\gamma) =_\kappa P_\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur P :

$P = \top$: nous avons $\top_\gamma = \top$ et $\Theta_\gamma(\top_\gamma) = (\top \to \gamma) \to \gamma$; ainsi le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(\mathit{top}) =_\kappa \top_\gamma$ est aisément dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P) =_\kappa P_\gamma$ à l'aide de la règle (P-Aff) ;

$P = \alpha^\kappa$: nous avons $\alpha_\gamma = \Theta_\gamma(\alpha)$ et $\Theta_\gamma(\alpha_\gamma) = \Theta_\gamma(\Theta_\gamma(\alpha))$; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P) =_\kappa P_\gamma$ est dérivable d'après le lemme 3.5.3 ;

$P = A \to B$: nous avons $\Theta_\gamma(A \to B_\gamma) = \neg_\gamma (A \to B)_\gamma$ et $(A \to B)_\gamma = A_\gamma \to B_\gamma$;

1) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma, (A \to B)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (A \to B)_\gamma$ par (P-Hyp) et 3.5.2 ;
2) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma, (A \to B)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma$ par (P-Hyp) et 3.5.2 ;
3) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma, (A \to B)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} B_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 1 et 2 ;
4) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma, (A \to B)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma B_\gamma$ par (P-Hyp) et 3.5.2 ;
5) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma, (A \to B)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 3 et 4 ;
6) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma(A \to B)_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 5 ;
7) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma(A \to B)_\gamma$ par (P-Hyp) et 3.5.2 ;
8) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma B_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$ et 7 ;
9) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\neg_\gamma B_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 8 ;
10) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (\neg_\gamma B_\gamma) \to B_\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
11) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma, A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} B_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 9 et 10 ;
12) $\Gamma, \neg_\gamma(A \to B)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (A \to B)_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 11 ;
13) $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (\neg_\gamma(A \to B)_\gamma) \to (A \to B)_\gamma$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 12 ;

donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P_\gamma) =_\kappa P_\gamma$ est dérivable ;

1) $\Gamma, P_\gamma, \neg_\gamma P_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma P_\gamma$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
2) $\Gamma, P_\gamma, \neg_\gamma P_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P_\gamma$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
3) $\Gamma, P_\gamma, \neg_\gamma P_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$, 1 et 2 ;
4) $\Gamma, P_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg\neg_\gamma P_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P_\gamma \rightarrow \neg\neg_\gamma P_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 4 ;

donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P_\gamma \rightarrow \Theta_\gamma(P_\gamma)$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P_\gamma) =_\kappa P_\gamma$ est dérivable ;

$P = \forall\alpha^\iota.A$: nous avons $\Theta_\gamma(\forall\alpha^\iota.A) = \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)$ et $(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma = \forall\alpha^\iota.A_\gamma$;

1) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, (\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\alpha^\iota.A_\gamma$ par (P-Hyp) et 3.5.2 ;
2) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, (\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \top$ par (P-Ax) et 3.5.2 ;
3) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, (\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma$ par (P-$\forall_{\mathrm{e}}$), 1 et 2 ;
4) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, (\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma A_\gamma$ par (P-Hyp) et 3.5.2 ;
5) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, (\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$, 3 et 4 ;
6) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 5 ;
7) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma$ par (P-Hyp) et 3.5.2
8) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$,6 et 7 ;
9) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg\neg_\gamma A_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 8 ;
10) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (\neg\neg_\gamma A_\gamma) \rightarrow A_\gamma$ par hypothèse de récurrence ;
11) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$, 9 et 10 ;
12) $\Gamma, \neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\alpha^\iota.A_\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 11 ;
13) $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (\neg\neg_\gamma(\forall\alpha^\iota.A)_\gamma) \rightarrow \forall\alpha^\iota.A_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 12 ;

donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P_\gamma) =_\kappa P_\gamma$ est dérivable ; comme dans le cas précédent, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P_\gamma \rightarrow \Theta_\gamma(P_\gamma)$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(P_\gamma) =_\kappa P_\gamma$ est dérivable ;

$P = \lambda\alpha^\iota.A$: nous avons $(\lambda\alpha^\iota.A)_\gamma = \lambda\alpha^\iota.A_\gamma$ et $\Theta_\gamma((\lambda\alpha^\iota.A)_\gamma) = \lambda\alpha^\iota.\Theta_\gamma((\forall\alpha^\iota.A_\gamma)\Theta_\gamma(\alpha))$; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(A_\gamma) =_\kappa A_\gamma$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \lambda\alpha^\iota.\Theta_\gamma(A_\gamma) =_\kappa \lambda\alpha^\iota.A_\gamma$ est dérivable ; à l'aide du lemme 3.5.4, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \lambda\alpha^\iota.\Theta_\gamma([\alpha\backslash\Theta_\gamma(\alpha)]\cdot A_\gamma) =_\kappa \lambda\alpha^\iota.A_\gamma$ est dérivable par la règle (Ext) ; le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha\backslash\Theta_\gamma(\alpha)]\cdot A_\gamma =_{\beta'} (\lambda\alpha^\iota.A_\gamma)\Theta_\gamma(\alpha)$ est aisément dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma((\lambda\alpha^\iota.A)_\gamma) =_\kappa \lambda\alpha^\iota.A_\gamma$ est dérivable par la règle $(=_{\beta'})$; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(p_\gamma) =_\kappa P_\gamma$;

$P = AB$: soit $\iota \Rightarrow \kappa$ le genre du prédicat A ; nous avons $(AB)_\gamma = A_\gamma B_\gamma$ et $\Theta_\gamma((AB)_\gamma) = \Theta_\gamma(A_\gamma B_\gamma)$; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(A_\gamma) =_{\iota\Rightarrow\kappa} A_\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 3.5.2, le prédicat B_γ est motivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(A_\gamma)B_\gamma =_\kappa A_\gamma B_\gamma$ est motivable ; comme $\Theta_\gamma(A_\gamma) = \lambda\alpha^\iota.\Theta_\gamma(A_\gamma\Theta_\gamma(\alpha))$, nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \lambda\alpha^\iota.\Theta_\gamma(A_\gamma\Theta_\gamma(\alpha))B_\gamma =_\kappa A_\gamma B_\gamma$; le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \lambda\alpha^\iota.\Theta_\gamma(A_\gamma\Theta_\gamma(\alpha))B_\gamma =_{\beta'} \Theta_\gamma(A_\gamma\Theta_\gamma(B_\gamma))$; est aisément dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(A_\gamma\Theta_\gamma(B_\gamma)) =_\kappa A_\gamma B_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle $(=_{\beta'})$; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \Theta_\gamma(B_\gamma) =_\iota B_\gamma$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \Theta_\gamma(A_\gamma B_\gamma) =_\kappa A_\gamma B_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \Theta_\gamma(p_\gamma) =_\kappa P_\gamma$;

□

Pour que les substitutions se comportent bien après traduction, il est nécessaire que la γ-traduction et l'application de substitution commutent :

Lemme 3.5.6. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Soient $P : \kappa$ et $U : \iota$ deux prédicats. Soient $\gamma^\star$ une variable fraîche pour P et U, et α^ι une variable différente de γ. Le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\alpha^\iota \backslash U_\gamma]\cdot P_\gamma =_\kappa ([\alpha^\iota \backslash U]\cdot P)_\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Notons μ la substitution $[\alpha^\iota \backslash U]$ et μ_γ la substitution $[\alpha^\iota \backslash U_\gamma]$. Nous prouvons le lemme par récurrence sur P :

$P = \top$: nous avons $\mu_\gamma\cdot\top_\gamma = \top$ et $(\mu\cdot\top)_\gamma = \top$; de plus le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \top =_\star \top$ est dérivable ; ainsi le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \mu_\gamma\cdot P_\gamma =_\kappa (\mu\cdot P)_\gamma$ est dérivable ;

$P = \beta^\kappa$: deux cas sont à considérer :

- $\beta = \alpha$: nous avons $\mu_\gamma\cdot\alpha_\gamma = \Theta_\gamma(U_\gamma)$ et $(\mu\cdot\alpha)_\gamma = U_\gamma$; d'après le lemme 3.5.5, le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \Theta_\gamma(U_\gamma) =_\iota U_\gamma$ est dérivable ; ainsi le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \mu_\gamma\cdot P_\gamma =_\kappa (\mu\cdot P)_\gamma$ est dérivable ;
- $\beta \neq \alpha$: nous avons $\mu_\gamma\cdot\beta_\gamma = \beta_\gamma$ et $(\mu\cdot\beta)_\gamma = \beta_\gamma$; d'après le lemme 3.5.2, le prédicat β_γ est motivable ; ainsi le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \beta_\gamma =_\kappa \beta_\gamma$ est aisément dérivable ; donc le jugement $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \mu_\gamma\cdot P_\gamma =_\kappa (\mu\cdot P)_\gamma$ est dérivable ;

$P = A \to B$: le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} (\mu\cdot(A \to B))_\gamma =_\star (\mu\cdot(A \to B))_\gamma$ est aisément dérivable ; nous avons $(\mu\cdot(A \to B))_\gamma = (\mu\cdot A)_\gamma \to (\mu\cdot B)_\gamma$; donc nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} (\mu\cdot A)_\gamma \to (\mu\cdot B)_\gamma =_\star (\mu\cdot(A \to B))_\gamma$; par hypothèse de récurrence, les jugements $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot A_\gamma =_\star (\mu\cdot A)_\gamma$ et $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot B_\gamma =_\star (\mu\cdot B)_\gamma$ sont dérivables ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot A_\gamma \to \mu_\gamma\cdot B_\gamma =_\star (\mu\cdot(A \to B))_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ; nous avons $\mu_\gamma\cdot(A \to B)_\gamma = \mu_\gamma\cdot A_\gamma \to \mu_\gamma\cdot B_\gamma$; ainsi nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot(A \to B)_\gamma =_\star (\mu\cdot(A \to B))_\gamma$; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot P_\gamma =_\star (\mu\cdot P)_\gamma$;

$P = \forall\beta^\theta.A$: le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} (\mu\cdot\forall\beta^\theta.A)_\gamma =_\star (\mu\cdot\forall\beta^\theta.A)_\gamma$ est aisément dérivable ; par α-équivalence, nous pouvons supposer que $\beta \neq \alpha$; ainsi nous avons $(\mu\cdot\forall\beta^\theta.A)_\gamma = \forall\beta^\theta.(\mu\cdot A)_\gamma$; donc nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \forall\beta^\theta.(\mu\cdot A)_\gamma =_\star \forall\beta^\theta.(\mu\cdot A)_\gamma$; le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} (\mu\cdot A)_\gamma =_\star (\mu\cdot A)_\gamma$ est alors aisément dérivable ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot A_\gamma =_\star (\mu\cdot A)_\gamma$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot A_\gamma =_\star (\mu\cdot A)_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ; le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \forall\beta^\theta.(\mu_\gamma\cdot A_\gamma) =_\star \forall\beta^\theta.(\mu\cdot A)_\gamma$ est alors aisément dérivable ; nous avons $\mu_\gamma\cdot(\forall\beta^\theta.A)_\gamma = \forall\beta^\theta.(\mu_\gamma\cdot A_\gamma)$; ainsi nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_\gamma\cdot\forall\beta^\theta.A)_\gamma =_\star$

$(\mu\cdot\forall\beta^{\theta}.A)_{\gamma}$; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{e}}^{\mathrm{p}} \mu_{\gamma}\cdot P_{\gamma} =_{\star} (\mu\cdot P)_{\gamma}$;

$P = \lambda\beta^{\theta}.A$: analogue au cas précédent ;

$P = AB$: analogue au cas $P = A \to B$.

□

De même, il est souhaitable que la γ-traduction et l'égalité extensionnelle commutent :

Lemme 3.5.7. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et Γ un ensemble motivable dans* P-CP^n. *Soient $P : \kappa$ et $Q : \kappa$ deux prédicats. Soient $\gamma^{\star}$ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{P, Q\}$. Si le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (P =_{\kappa} Q)_{\gamma}$ est dérivable, alors le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_{\gamma} =_{\kappa} Q_{\gamma}$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur κ :

$\kappa = \star$: supposons que le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (P \leftrightarrow Q)_{\gamma}$ soit dérivable ; soit $\delta^{\star}$ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{P, Q\}$; par définition, nos avons $P_{\gamma} \leftrightarrow Q_{\gamma} = \forall\delta^{\star}.((A_{\gamma} \to B_{\gamma}) \to (B_{\gamma} \to A_{\gamma}) \to \neg_{\gamma}\delta) \to \neg_{\gamma}\delta$;

1) $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \forall\delta^{\star}.((A_{\gamma} \to B_{\gamma}) \to (B_{\gamma} \to A_{\gamma}) \to \neg_{\gamma}\delta) \to \neg_{\gamma}\delta$ par hypothèse ;
2) $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\cdot B_{\gamma}$ par le lemme 3.5.2 et la règle (P-Aff) ;
3) $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} ((A_{\gamma} \to B_{\gamma}) \to (B_{\gamma} \to A_{\gamma}) \to \neg_{\gamma}(A_{\gamma} \to B_{\gamma})) \to \neg_{\gamma}(A_{\gamma} \to B_{\gamma})$ par $(\mathrm{P}-\forall_{\mathrm{e}})$, 1 et 2 ;
4) $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \neg_{\gamma}(A_{\gamma} \to B_{\gamma}) \leftrightarrow (A_{\gamma} \to B_{\gamma})$ par le lemme 3.5.5 ;
5) $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} ((A_{\gamma} \to B_{\gamma}) \to (B_{\gamma} \to A_{\gamma}) \to (A_{\gamma} \to B_{\gamma})) \to (A_{\gamma} \to B_{\gamma})$ par (Ext), 3 et 4 ;
6) $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (A_{\gamma} \to B_{\gamma}) \to (B_{\gamma} \to A_{\gamma}) \to (A_{\gamma} \to B_{\gamma})$ aisément dérivable ;
7) $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} A_{\gamma} \to B_{\gamma}$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 5 et 6 ;

donc le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} A_{\gamma} \to B_{\gamma}$ est dérivable ; de même, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} B_{\gamma} \to A_{\gamma}$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} a_{\gamma} \leftrightarrow b_{\gamma}$; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} A_{\gamma} =_{\star} B_{\gamma}$;

$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: supposons que le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (P =_{\kappa} Q)_{\gamma}$ soit dérivable ; soit α^{ι} une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{P, Q\}$; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \forall\alpha^{\iota}.(P\alpha =_{\theta} Q\alpha)_{\gamma}$; ainsi le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (P\alpha =_{\theta} Q\alpha)_{\gamma}$ est dérivable à l'aide de la règle $(\mathrm{P}-\forall_{\mathrm{e}})$; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P\alpha_{\gamma} =_{\theta} Q\alpha_{\gamma}$ est dérivable ; d'après le lemme 3.5.5, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_{\gamma} =_{\kappa} \Theta_{\gamma}(P_{\gamma})$ est dérivable ; ainsi nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_{\gamma} =_{\kappa} \lambda\alpha^{\iota}.\Theta_{\gamma}(P_{\gamma}\Theta_{\gamma}(\alpha))$; le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_{\gamma}\alpha =_{\kappa} (\lambda\alpha^{\iota}.\Theta_{\gamma}(P_{\gamma}\Theta_{\gamma}(\alpha)))\alpha$ est dérivable à l'aide de la règle $(\mathrm{P}-\forall_{\mathrm{e}})$; le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (\lambda\alpha^{\iota}.\Theta_{\gamma}(P_{\gamma}\Theta_{\gamma}(\alpha)))\alpha =_{\beta'} \Theta_{\gamma}(P_{\gamma}\Theta_{\gamma}(\alpha))$ est aisément dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} A_{\gamma}\alpha =_{\kappa} \Theta_{\gamma}(P_{\gamma}\Theta_{\gamma}(\alpha))$ à l'aide de la règle $(=_{\beta'})$; nous avons $\alpha_{\gamma} = \Theta_{\gamma}(\alpha)$; ainsi nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_{\gamma}\alpha =_{\kappa} \Theta_{\gamma}((P\alpha)_{\gamma})$; d'après le lemme 3.5.5, le jugement

$\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P\alpha_\gamma =_\kappa \Theta_\gamma((P\alpha)_\gamma)$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P_\gamma\alpha =_\kappa (P\alpha)_\gamma$ à l'aide de la règle (Ext) ; de même, nous dérivons le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} Q_\gamma\alpha =_\kappa (Q\alpha)_\gamma$; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P_\gamma\alpha =_\theta Q_\gamma\alpha$ à l'aide de la règle (Ext) ; le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\alpha^\iota.P_\gamma\alpha =_\theta Q_\gamma\alpha$ à l'aide de la règle ($\forall_{\mathrm{i}}$) ; ainsi nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$.

□

Parmi toutes les propriétés qui doivent être conservées après traduction, on compte évidemment l'α-équivalence :

Lemme 3.5.8. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Soient $P : \kappa$ et $U : \kappa$ deux prédicats. Soit $\gamma^\star$ une variable fraîche pour P et Q. Si $P =_\alpha Q$ est dérivable alors $P_\gamma =_\alpha Q_\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $P =_\alpha Q$:

$\dfrac{}{\top =_\alpha \top}$ ($\alpha_\top$) ce cas est immédiat car $\top_\gamma = \top$;

$\dfrac{}{\alpha^\kappa =_\alpha \alpha^\kappa}$ (α_{var}) la relation $=_\alpha$ est réflexive ; donc nous avons $\alpha_\gamma =_\alpha \alpha_\gamma$;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}$ ($\alpha_\to$) par hypothèse de récurrence, nous avons $A_\gamma =_\alpha {A'}_\gamma$ et $B_\gamma =_\alpha {B'}_\gamma$; nous avons alors $A_\gamma \to B_\gamma =_\alpha {A'}_\gamma \to {B'}_\gamma$ par la règle ($\alpha_\to$) ; ainsi nous avons $P_\gamma =_\alpha Q_\gamma$;

$\dfrac{[\alpha^\iota \backslash \delta]\cdot A =_\alpha [\beta^\iota \backslash \delta]\cdot B \quad \delta \in \mathrm{Fr}(A, B)}{\forall\alpha^\iota.A =_\alpha \forall\beta^\iota.B}$ ($\alpha_\forall$) par hypothèse de récurrence, nous avons $([\alpha^\kappa \backslash \delta]\cdot A)_\gamma =_\alpha ([\beta^\kappa \backslash \delta]\cdot B)_\gamma$; par une récurrence immédiate sur A nous avons $([\alpha^\iota \backslash \delta]\cdot A)_\gamma = [\alpha^\iota \backslash \delta]\cdot A_\gamma$; de même, nous avons $([\beta^\iota \backslash \delta]\cdot B)_\gamma = [\beta^\iota \backslash \delta]\cdot B_\gamma$; nous avons alors $\forall\alpha^\iota.A_\gamma =_\alpha \forall\beta^\iota.B_\gamma$ par la règle ($\alpha_\forall$) ; ainsi nous avons $P_\gamma =_\alpha Q_\gamma$;

$\dfrac{[\alpha^\iota \backslash \delta]\cdot A =_\alpha [\beta^\iota \backslash \delta]\cdot B \quad \delta \in \mathrm{Fr}(A, B)}{\lambda\alpha^\iota.A =_\alpha \lambda\beta^\iota.B}$ (α_λ) analogue au cas ($\alpha_\forall$) ;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{AB =_\alpha A'B'}$ (α_{app}) analogue au cas ($\alpha_\to$).

□

Pour montrer que la β'-équivalence est stable par traduction, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.5.9. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et Γ un ensemble motivable dans* P-CP^n*. Soient $P : \kappa$ et $Q : \kappa$ deux prédicats motivables dans* P-CP^n*. Si $P =_{\beta'} Q$ alors le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} P =_\kappa Q$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur κ :

$\kappa = \star$: comme P et Q sont motivables, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P =_\star P$ est aisément dérivable ; par hypothèse nous avons $P =_{\beta'} Q$; donc le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P =_\star Q$ est dérivable à l'aide de la règle $(=_{\beta'})$;

$\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: soit α^ι une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{P, Q\}$; par hypothèse nous avons $P =_{\beta'} Q$; donc nous avons $P\alpha =_{\beta'} Q\alpha$ par la règle (β_{app}) ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P\alpha =_\theta Q\alpha$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P =_\kappa Q$ à l'aide de la règle $(\forall_{\mathrm{i}})$.

□

Lemme 3.5.10. *Soient n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et Γ une ensemble motivable de formules. Soient $P : \kappa$ et $Q : \kappa$ deux prédicats. Soit $\gamma^\star$ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{P, Q\}P$. Si $P =_{\beta'} Q$ est dérivable alors le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $P =_{\beta'} Q$:

$\dfrac{}{\top =_{\beta'} \top}\,(\beta_\top)$ nous avons $P_\gamma =_{\beta'} Q_\gamma$ car $\top_\gamma = \top$; les prédicats P_γ et Q_γ sont motivables dans P-CP^n d'après le lemme 3.5.2 ; ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\star Q_\gamma$ à l'aide du lemme 3.5.9 ;

$\dfrac{}{\alpha^\kappa =_{\beta'} \alpha^\kappa}\,(\beta_{\mathrm{var}})$ la relation $=_{\beta'}$ est réflexive ; donc nous avons $\alpha_\gamma =_{\beta'} \alpha_\gamma$; les prédicats P_γ et Q_γ sont motivables dans P-CP^n d'après le lemme 3.5.2 ; ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$ à l'aide du lemme 3.5.9 ;

$\dfrac{A =_{\beta'} A' \quad B =_{\beta'} B'}{A \to B =_{\beta'} A' \to B'}\,(\beta_\to)$ par hypothèse de récurrence, nous avons $A_\gamma =_{\beta'} A'_\gamma$ et $B_\gamma =_{\beta'} B'_\gamma$; nous avons alors $A_\gamma \to B_\gamma =_{\beta'} A'_\gamma \to B'_\gamma$ par la règle $(\beta_\to)$; nous avons $P_\gamma =_{\beta'} Q_\gamma$; les prédicats P_γ et Q_γ sont motivables dans P-CP^n d'après le lemme 3.5.2 ; ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$ à l'aide du lemme 3.5.9 ;

$\dfrac{A =_{\beta'} A'}{\forall\alpha^\iota.A =_{\beta'} \forall\alpha^\iota.A'}\,(\beta_\forall)$ par hypothèse de récurrence, nous avons $A_\gamma =_{\beta'} A'_\gamma$; nous avons alors $\forall\alpha^\iota.A_\gamma =_{\beta'} \forall\alpha^\iota.A'_\gamma$ par la règle $(\beta_\forall)$; nous avons $P_\gamma =_{\beta'} Q_\gamma$; les prédicats P_γ et Q_γ sont motivables dans P-CP^n d'après le lemme 3.5.2 ; ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$ à l'aide du lemme 3.5.9 ;

$\dfrac{A =_{\beta'} A'}{\lambda\alpha^\iota.A =_{\beta'} \lambda\alpha^\iota.A'}\,(\beta_\lambda)$ analogue au cas $(\beta_\forall)$;

$\dfrac{A =_{\beta'} A' \quad B =_{\beta'} B'}{AB =_\beta A'B'}\,(\beta_{\mathrm{app}})$ analogue au cas $(\beta_\to)$;

$\dfrac{A =_{\beta'} B}{B =_{\beta'} A}\,(\beta_{\mathrm{sym}})$ par hypothèse de récurrence, nous avons $A_\gamma =_{\beta'} B_\gamma$; nous avons alors $B_\gamma =_{\beta'} A_\gamma$ par la règle (β_{sym}) ; les prédicats P_γ et Q_γ sont motivables dans P-CP^n d'après le lemme 3.5.2 ; ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$ à l'aide du lemme 3.5.9 ;

$\dfrac{A =_{\beta'} B \quad B =_{\beta'} C}{A =_{\beta'} C}$ (β_{trans}) par hypothèse de récurrence, nous avons $A_\gamma =_{\beta'} B_\gamma$ et $B_\gamma =_{\beta'} C_\gamma$; nous avons alors $A_\gamma =_{\beta'} C_\gamma$ par la règle (β_{trans}) ; les prédicats P_γ et Q_γ sont motivables dans P-CP^n d'après le lemme 3.5.2 ; ainsi nous dérivons $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$ à l'aide du lemme 3.5.9 ;

$\dfrac{\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \mu{\cdot}\forall\alpha^\iota.\overline{A} \quad \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \mu{\cdot}\overline{B}}{(\lambda\alpha^\iota.A)B =_{\beta'} [\alpha^\iota\backslash B]{\cdot}A}$ (P-β_{red}) nous avons $P_\gamma = (\lambda\alpha^\iota.A_\gamma)B_\gamma$; d'après le lemme 3.5.2, les formules $\overline{A_\gamma}$ et $\overline{B_\gamma}$ sont motivables dans P-CP^n par la substitution $[\gamma\backslash\top]$; comme $\gamma \neq \alpha$, la formule $\forall\alpha^\iota.\overline{A_\gamma}$ est motivable dans P-CP^n par la substitution $[\gamma\backslash\top]$; ainsi nous avons $P_\gamma =_{\beta'} [\alpha\backslash B_\gamma]\cdot A_\gamma$; les prédicat P_γ et $([\alpha\backslash B]{\cdot}A)_\gamma$ sont motivables d'après le lemme 3.5.2 ; d'après le lemme 3.5.6, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\alpha\backslash B_\gamma]\cdot A_\gamma =_\kappa ([\alpha\backslash B]{\cdot}A)_\gamma$ est dérivable ; ainsi le prédicat $[\alpha\backslash B_\gamma]\cdot A_\gamma$ est motivable ; d'après le lemme 3.5.9, le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa [\alpha\backslash B_\gamma]\cdot A_\gamma$ est dérivable ; nous dérivons le jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa [\alpha\backslash B]{\cdot}A_\gamma$ à l'aide de la règle (Ext) ; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} P_\gamma =_\kappa Q_\gamma$.

□

Nous pouvons maintenant prouver la première moitié de la propriété de préservation de la déductibilité par γ-traduction ; si un jugement est dérivable dans CCP^n, alors sa traduction est dérivable dans P-CP^n :

Lemme 3.5.11. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} F$, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} F_\gamma$ est dérivable, avec $\gamma^\star$ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{F\}$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} F$:

$\dfrac{}{\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} \top}$ (Ax) d'après le lemme 3.5.2, les jugements $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\Gamma_\gamma$ sont dérivables ; ainsi le jugement $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} \top_\gamma$ est dérivable par la règle (P-Ax) ;

$\dfrac{F \in \Gamma}{\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} F}$ (Hyp) d'après le lemme 3.5.2, les jugements $\vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} [\gamma\backslash\top]\Gamma_\gamma$ sont dérivables ; ainsi le jugement $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} F_\gamma$ est dérivable par la règle (P-Hyp) ;

$\dfrac{\Gamma, A \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} B}{\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} A \to B}$ $(\to_{\mathrm{i}})$ par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma, A_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} B_\gamma$ est dérivable ; le jugement $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} A_\gamma \to B_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle $(\to_{\mathrm{i}})$; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} A \to B_\gamma$;

$\dfrac{\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} A \to B \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} A}{\Gamma \vdash_{\mathrm{c}}^{\mathrm{n}} B}$ $(\to_{\mathrm{e}})$ par hypothèse de récurrence, les jugements $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} (A \to B)_\gamma$ et $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} A_\gamma$ sont dérivables ; le jugement $\Gamma_\gamma \vdash_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}} B_\gamma$ est alors dérivable à l'aide de la règle $(\to_{\mathrm{i}})$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \forall\alpha^\kappa.A}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} [\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A}$ $(\forall_{\mathrm{e}})$ par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (\forall\alpha^\kappa.A)_\gamma$ est dérivable ; ainsi nous avons une dérivation du jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\alpha^\kappa.A_\gamma$; d'après le lemme 3.5.2, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot\overline{U_\gamma}$ est dérivable ; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa\backslash U_\gamma]\cdot A_\gamma$ à l'aide de la règle (P-$\forall_{\mathrm{e}}$) ; d'après le lemme 3.5.6, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa\backslash U_\gamma]\cdot A_\gamma =_\star ([\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A)_\gamma$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} ([\alpha^\kappa\backslash U]\cdot A)_\gamma$ avec la règle (Ext) ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A \quad \alpha^\kappa \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \forall\alpha^\kappa.A}$ $(\forall_{\mathrm{i}})$ par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma$ est dérivable ; nous avons $\alpha^\kappa \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)$; donc $\alpha^\kappa \notin \mathrm{Vl}(\Gamma_\gamma)$; le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \forall\alpha^\kappa.A_\gamma$ est alors dérivable à l'aide de la règle $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} [\alpha^\kappa\backslash A]\cdot F \quad \Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A =_\kappa B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} [\alpha^\kappa\backslash B]\cdot F}$ (Ext) par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (A)_\kappa B)_\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 3.5.7, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma =_\kappa B_\gamma$ est dérivable ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} ([\alpha^\kappa\backslash A]\cdot F)_\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 3.5.6, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa\backslash A_\gamma]\cdot F_\gamma =_\star ([\alpha^\kappa\backslash A]\cdot F)_\gamma$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} [\alpha^\kappa\backslash A_\gamma]\cdot F_\gamma$ à l'aide de la règle (Ext) ; ainsi le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} [\alpha^\kappa\backslash B_\gamma]\cdot F_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ; d'après le lemme 3.5.6, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} [\alpha^\kappa\backslash B_\gamma]\cdot F_\gamma =_\star ([\alpha^\kappa\backslash B]\cdot F)_\gamma$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} [\alpha^\kappa\backslash B]\cdot F_\gamma$ à l'aide de la règle (Ext) ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} B}$ $(=_\alpha)$ par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A_\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 3.5.8, nous avons $A_\gamma =_\alpha B_\gamma$; ainsi le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} B_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle $(=_\alpha)$;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A \quad A =_{\beta'} B}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} B}$ $(=_{\beta'})$ par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A_\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 3.5.2, les formules A_γ et B_γ sont motivables dans P-CP^n ; d'après le lemme 3.5.10, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma =_\star B_\gamma$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} B_\gamma$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \neg\neg A}{\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A}$ $(\bot\bot_{\mathrm{e}})$ par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} (\neg\neg A)_\gamma$ est dérivable ; nous avons $(\neg\neg A)_\gamma = (A_\gamma \rightarrow \bot_\gamma) \rightarrow \bot_\gamma$ et $\bot_\gamma = \forall\alpha^\star.\neg_\gamma\alpha$;

1) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma\alpha \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
2) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma\alpha \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma A_\gamma$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
3) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, A_\gamma, \neg_\gamma\alpha \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$, 1 et 2 ;
4) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\alpha$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \bot_\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{i}})$ et 4 ;
6) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma \rightarrow \bot_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 5 ;
7) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} (A_\gamma \rightarrow \bot_\gamma) \rightarrow \bot_\gamma$ par hypothèse de récurrence et (P-Aff) ;

8) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \bot_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$, 6 et 7 ;
9) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \top$ par (P-Ax) et le lemme 3.5.2 ;
10) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma\gamma$ par $(\forall_{\mathrm{e}})$, 8 et 9 ;
11) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma, \gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par (P-Hyp) et le lemme 3.5.2 ;
12) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma \rightarrow \gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 11 ;
13) $\Gamma_\gamma, \neg_\gamma A_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$, 10 et 12 ;
14) $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma A_\gamma$ par $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ et 13 ;
ainsi le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \neg_\gamma A_\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 3.5.5, le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} \Theta_\gamma(A_\gamma) =_\kappa A_\gamma$; nous avons $\Theta_\gamma(A_\gamma) = \neg_\gamma A_\gamma$; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} A_\gamma$ à l'aide de la règle (Ext).

□

Pour démontrer la seconde moitié de la propriété de préservation de la déductibilité par γ-traduction, nous faisons appel aux deux lemmes qui vont suivre ; pour tout prédicat P, nous notons $P_\bot$ le prédicat $[\gamma\backslash\bot]\cdot P_\gamma$ et $\Theta_\bot(P)$ le prédicat $[\gamma\backslash\bot]\cdot \Theta_\gamma(P)$:

Proposition 3.5.12. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$ et Γ un ensemble de formules. Pour tout prédicat $P : \kappa$ d'ordre n, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} P =_\kappa P_\bot$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur P :

- $P = \top$: le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \top =_\star \top$ est aisément dérivable ;
- $P = \alpha^\kappa$: par récurrence sur κ :
  - $\kappa = \star$: le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \alpha =_\star \neg\neg\alpha$ est aisément dérivable ;
  - $\kappa = \iota \Rightarrow \theta$: nous avons $\alpha_\bot = \lambda\beta^\iota.\Theta_\bot(\alpha\Theta_\bot(\beta))$; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \beta =_\iota \Theta_\bot(\beta)$ est dérivable ; le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \alpha_\bot =_\kappa \alpha_\bot$ est aisément dérivable ; donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \alpha_\bot =_\kappa \lambda\beta^\iota.\Theta_\bot(\alpha\beta)$ est dérivable par la règle (Ext) ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \alpha\beta =_\theta \Theta_\bot(\alpha\beta)$ est dérivable ; donc le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \alpha_\bot =_\kappa \lambda\beta^\iota.\alpha\beta$ est dérivable par la règle (Ext) ; le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \alpha_\bot =_\kappa \alpha$ est alors aisément dérivable ;
- $P = A \rightarrow B$: par hypothèse de récurrence, les jugements $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A =_\star A_\bot$ et $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} B =_\star B_\bot$ sont dérivable ; le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A \rightarrow B =_\star A \rightarrow B$ est aisément dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A \rightarrow B =_\star A_\bot \rightarrow B_\bot$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A \rightarrow B =_\star (A \rightarrow B)_\bot$;
- $P = \forall\beta^\iota.A$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A =_\star A_\bot$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \forall\beta^\iota.A =_\star \forall\beta^\iota.A_\bot$ est dérivable ; nous avons alors une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \forall\beta^\iota.A =_\star (\forall\beta^\iota.A)_\bot$;
- $P = \lambda\beta^\iota.A$: soit θ le genre du prédicat A ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} A =_\theta A_\bot$ est dérivable ; nous avons $A =_\beta (\lambda\beta^\iota.A)\beta$ et $A_\bot =_\beta (\lambda\beta^\iota.A)_\bot\beta$; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} (\lambda\beta^\iota.A)\beta =_\theta (\lambda\beta^\iota.A)_\bot\beta$ est dérivable par

la règle $(=_\beta)$; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \lambda\beta^\iota.A =_\theta (\lambda\beta^\iota.A)_\perp$ à l'aide de la règle $(\forall_\mathrm{i})$;

$P = AB$: analogue au cas $P = A \to B$.

□

Lemme 3.5.13. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour tout jugement dérivable $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F_\gamma$, le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F$ est dérivable, avec $\gamma^\star$ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{F\}$.*

Démonstration. Supposons que le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F_\gamma$ soit dérivable ; donc le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\gamma$ est dérivable car P-CP^n est un sous système de CCP^n ; le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \Gamma_\gamma \to F_\gamma$ est dérivable par la règle $(\to_\mathrm{i})$; le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \forall\gamma^\star.\Gamma_\gamma \to F_\gamma$ est dérivable par la règle $(\forall_\mathrm{i})$; le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \Gamma_\perp \to F_\perp$ est dérivable par la règle $(\forall_\mathrm{e})$; d'après le lemme 3.5.12, les jugements $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \Gamma =_\star \Gamma_\perp$ et $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F =_\star F_\perp$ sont dérivables ; ainsi le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \Gamma \to F$ est dérivable à l'aide de la règle (Ext) ; nous dérivons alors aisément le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F$. □

Nous pouvons alors grâce aux lemmes 3.5.11 et 3.5.13 prouver la préservation de la dérivabilité des jugements par γ-traduction :

Proposition 3.5.14. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Le jugement $\Gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F$ est dérivable si et seulement si le jugement $\Gamma_\gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F_\gamma$ est dérivable, avec $\gamma^\star$ une variable fraîche pour $\Gamma \cup \{F\}$.*

Démonstration. D'après les lemmes 3.5.11 et 3.5.13. □

La γ-traduction, bien que très utile pour traduire les jugements, ne permet pas de traduire les théorèmes car il existe des formules F qui ne sont pas équivalentes à leur γ-traduction F_γ. Prenons une variable $\alpha^\star$, sa γ-traduction $(\alpha \to \gamma) \to \gamma$, puis supposons que le jugement $\vdash^{\omega}_{\mathrm{c}} ((\alpha \to \gamma) \to \gamma) =_\star \alpha$ soit dérivable ; alors le jugement $\vdash^{\omega}_{\mathrm{c}} ((\alpha \to \gamma) \to \gamma) \to \alpha$ est dérivable, de même que le jugement $\vdash^{\omega}_{\mathrm{c}} ((\alpha \to \top) \to \top) \to \alpha$ par instanciation de γ ; comme le jugement $\vdash^{\omega}_{\mathrm{c}} (\alpha \to \top) \to \top$ est dérivable, on obtient une dérivation de $\vdash^{\omega}_{\mathrm{c}} \alpha$ ce qui contredit la cohérence de CCP$^\omega$. C'est pourquoi il nous faut définir une autre traduction, dérivée de la γ-traduction :

Définition 3.5.4. *Pour tout prédicat P, on définit le prédicat $P_\star$ comme étant $\forall\gamma^\star.\overline{P_\gamma}$.*

Nous avons deux propriétés à démontrer : la première est la préservation de la dérivabilité par notre traductions et la seconde est l'équivalence dans CCP^n des formules et de leur traduction. Voici d'abord la démonstration de la préservation de la dérivabilité :

Proposition 3.5.15. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour toute formule F, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F$ est dérivable si et seulement si le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{p}} F_\star$ est dérivable.*

Démonstration. D'après la proposition 3.5.14. □

Enfin, voici la preuve de l'équivalence dans CCP^n des formules et de leur traduction :

Proposition 3.5.16. *Soit n un élément de $[\![2;\omega]\!]$. Pour toute formule F d'ordre n, le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F =_\star F_\star$ est dérivable.*

Démonstration. 1) $F_\star \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \forall\gamma.F_\gamma$ par (Hyp) ;
2) $F_\star \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\bot$ par ($\forall_{\mathrm{e}}$) et 1 ;
3) $F_\star \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F =_\star F_\bot$ d'après la proposition 3.5.12 ;
4) $F_\star \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F$ par (Ext), 2 et 3 ;
5) $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\star \to F$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 4 ;
ainsi le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\star \to F$ est dérivable ; dans CCP^n la règle du tiers-exclu est dérivable ; plus précisément, le jugement $F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} ((\gamma \to \bot) \to F_\gamma) \to (\gamma \to F_\gamma) \to F_\gamma$ est dérivable ;
1) $F, \gamma \to \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F$ par (Hyp) ;
2) $F, \gamma \to \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F =_\star F_\bot$ d'après la proposition 3.5.12 ;
3) $F, \gamma \to \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\bot$ par (Ext), 1 et 2 ;
4) $F, \gamma \to \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \gamma \to \bot$ par (Hyp) ;
5) $F, \gamma \to \bot, \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \bot$ par (Hyp) ;
6) $F, \gamma \to \bot, \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \gamma$ par ($\forall_{\mathrm{e}}$) et 5 ;
7) $F, \gamma \to \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \bot \to \gamma$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 6 ;
8) $F, \gamma \to \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \gamma =_\star \bot$ par 4 et 7 ;
9) $F, \gamma \to \bot \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\gamma$ par (Ext), 3 et 8 ;
10) $F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} (\gamma \to \bot) \to F_\gamma$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 9 ;
11) $F, \gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} [\gamma\backslash\top]\cdot F_\gamma$ d'après le lemme 3.5.2 ;
12) $F, \gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \top$ par (Ax) ;
13) $F, \gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \gamma \to \top$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 12 ;
14) $F, \gamma, \top \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \gamma$ par (Hyp) ;
15) $F, \gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \top \to \gamma$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 14 ;
16) $F, \gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \gamma =_\star \top$ par 13 et 15 ;
17) $F, \gamma \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\gamma$ par (Ext), 11 et 16 ;
18) $F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} \gamma \to F_\gamma$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 17 ;
19) $F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} ((\gamma \to \bot) \to F_\gamma) \to (\gamma \to F_\gamma) \to F_\gamma$ par la règle du tiers-exclu ;
20) $F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} (\gamma \to F_\gamma) \to F_\gamma$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 19 et 10 ;
21) $F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\gamma$ par ($\to_{\mathrm{e}}$), 20 et 18 ;
22) $F \vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F_\star$ par ($\forall_{\mathrm{i}}$) et 21 ;
23) $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F \to F_\star$ par ($\to_{\mathrm{i}}$) et 22 ; ainsi le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F \to F_\star$ est dérivable ; le jugement $\vdash^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}} F =_\star F_\star$ est alors dérivable.

□

On en conclut que les calculs classiques d'ordre supérieur et les calculs pédagogiques d'ordre supérieur partagent la même expressivité via une traduction dont la pertinence par rapport au sens intuitif des formules reste malheureusement assez faible : le fait qu'il existe une traduction qui fonctionne ne signifie pas qu'on puisse l'appliquer systématiquement à des théorèmes classiques afin d'obtenir à peu de frais un équivalent positif. La possibilité de reformulation existe, mais c'est au mathématicien de choisir la bonne manière de reformuler ses théorèmes de manière satisfaisante par rapport aux objets qu'il étudie.

Deuxième partie

Systèmes fonctionnels pédagogiques

Chapitre 4

λ-calcul pédagogique simplement typé

4.1 λ-calcul simplement typé

Le λ-calcul a été créé par Alonzo Church [3] dans les années 1930 pour tenter de fournir un fondement aux mathématiques plus naturel que la théorie des ensembles. Il est composé de variables $x, y, z, \ldots$ représentant des fonctions, d'applications tu de fonctions t à des fonctions u, et d'abstractions $\lambda x.t$ qui à toute fonction x associe la fonction t, x étant une variable. Il y a une analogie très forte entre le λ-calcul et la théorie naïve des ensembles : les fonctions correspondent à des ensembles, les applications tu sont associées aux appartenances $u \in t$ et les abstractions $\lambda x.t$ représentent les définitions d'ensembles $\{x \mid t\}$. Le λ-calcul hérite alors de tous les paradoxes entachant la théorie naïve des ensembles ; mais dans ce cas précis, ce qui est un inconvénient pour les ensembles est un avantage pour les fonctions ; l'existence de points fixes pour tous les ensembles produit des incohérences, comme dans le paradoxe de Russell, mais dans le cas des fonctions cela nous permet de programmer récursivement et ainsi de représenter tout ce qui est *calculable* : le λ-calcul est le prototype des langages de programmation *fonctionnels*.

Toujours dans les années 1930, Arendt Heyting [19] et indépendamment Andreii Kolmogorov [23] explicitèrent la signification informelle des opérateurs logiques dans la logique intuitionniste, donnant ainsi naissance à l'interprétation de Brouwer-Heyting-Kolmogorov, ou *BHK-interprétation*. Chaque connecteur logique est interprété en termes de preuves : une preuve de $A \wedge B$ est un couple composé d'une preuve de A et d'une preuve de B, une preuve de $A \vee B$ est composée soit d'une preuve de A, soit d'une preuve de B, une preuve de $A \to B$ est une construction qui transforme toute preuve de A en une preuve de B, etc. Chaque preuve intuitionniste possède alors un contenu algorithmique qui laisse présager l'existence de processus associés aux preuves. À la fin des années 1960, William Howard [21] exprima clairement le lien entre les preuves intuitionnistes et les processus en identifiant les preuves à des fonctions du λ-calcul, lien déjà en gestation dans les travaux de Haskell Curry [8] : il porte aujourd'hui le nom d'*isomorphisme de Curry-Howard*.

L'identification des preuves et des programmes fonctionnels motiva la construction de systèmes dans lesquels les preuves sont représentés par des fonctions du λ-calcul et les formules sont des *spécifications* des fonctions, c'est-à-dire des descriptions du contenu informatique des fonctions : ce qu'elles calculent, comment on peut les utiliser, avec quelles données, etc ; dans ce contexte, les formules sont appelés *types* ; de tels systèmes sont dits *fonctionnels*. Le plus simple des systèmes fonctionnels est sans doute le λ-calcul simplement typé, introduit par Church [4] à la fin des années 1930 ; il correspond via l'isomorphisme de Curry-Howard au calcul propositionnel minimal décrit dans le chapitre 1 ; nous allons le présenter dans cette section.

Nous commençons par définir les types des fonctions :

Définition 4.1.1. *Les* types simples*, que nous appelons* types *dans ce chapitre en l'absence d'ambiguïté, sont définis par récurrence comme suit :*
- *la constante* $\top$ *est un type ;*
- *les variables* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *sont des types ;*
- *si* A *et* B *sont des types, alors* $A \to B$ *est un type.*

Afin d'alléger l'écriture des types, nous écrivons $A \to B \to C$ les types de la forme $A \to (B \to C)$.
Puis nous définissons les λ-termes, qui sont les fonctions du λ-calcul correspondant aux preuves :

Définition 4.1.2. *Les* λ-termes propositionnels du premier ordre*, que nous appelons* λ-termes *dans ce chapitre en l'absence d'ambiguïté, sont définis par récurrence comme suit :*
- *la* λ*-constante* o *est un* λ*-terme ;*
- *les* λ*-variables* $x, y, z, \ldots$ *sont des* λ*-termes ;*
- *si* x *est une* λ*-variable,* A *un type et* t *un* λ*-terme, alors* $\lambda x^A.t$ *est un* λ*-terme ;*
- *si* t *et* u *sont des* λ*-termes, alors* tu *est un* λ*-terme.*

Afin d'alléger l'écriture des λ-termes, nous écrivons tuv les λ-termes de la forme $(tu)v$. De même, nous écrivons $\lambda x^A.tu$ les λ-termes de la forme $\lambda x^A.(tu)$. Les dérivations dans les systèmes fonctionnels ont la même structure que celle dans les systèmes formels ; comme nous utilisons la déduction naturelle à la Gentzen-Prawitz pour écrire les dérivations, nous avons besoin d'une notion de contexte adaptée :

Définition 4.1.3. *Un* λ-contexte propositionnel du premier ordre *est un ensemble fini de couples* $x : A$*, ou* x *est une* λ*-variable et* A *un type, tel que pour tout* $x : A \in \Gamma$ *et pour tout* $y : B \in \Gamma$*, si* $x = y$ *alors* $A = B$ *; dans ce chapitre nous les appelons* contextes *quand aucune ambiguïté n'est à craindre. Un* λ-jugement propositionnel du premier ordre *est un triplet noté* $\Gamma \vdash^1_{\mathrm{id}} t : F$*, avec* Γ *un contexte,* t *un* λ*-terme,* F *un type et* id *un identifiant textuel. Dans ce chapitre, les* λ*-jugements propositionnels du premier ordre sont appelés* jugements *quand cela ne prête pas à confusion.*

Le contexte vide est représenté par le mot vide ; ainsi, pour tout λ-terme t, pour tout type F et tout identifiant id, le jugement $\emptyset \vdash^1_{\mathrm{id}} t : F$ s'écrit également $\vdash_{\mathrm{id}} t : F$. De plus, pour tous contextes Γ et Δ, le contexte $\Gamma \cup \Delta$ est noté Γ, Δ. En particulier, pour tout type A, le jugement $\Gamma \cup \{A\} \vdash^1_{\mathrm{id}} t : F$ est noté $\Gamma, A \vdash^1_{\mathrm{id}} t : F$. Nous avons alors tous les pérequis nécessaires à la définition du λ-calcul simplement typé :

Définition 4.1.4. *Le* λ-calcul simplement typé*, abrégé en* $\lambda\mathrm{C}^1$*, est défini par :*
- *sa morphologie, constituée par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^1_\lambda t : F$ *;*
- *sa syntaxe, constituée par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles suivantes :*

$$\frac{}{\Gamma \vdash^1_\lambda o : \top}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash^1_\lambda x : F}\ (\mathrm{Hyp})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^1_\lambda t : B}{\Gamma \vdash^1_\lambda \lambda x^A.t : A \to B}\ (\to_{\mathrm{i}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^1_\lambda t : A \to B \quad \Gamma \vdash^1_\lambda u : A}{\Gamma \vdash^1_\lambda tu : B}\ (\to_{\mathrm{e}})$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash^1_\lambda t : F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* $\lambda\mathrm{C}^1$ *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

Les dérivations y sont analogues à celles du calcul CPM, excepté qu'elles servent à typer des λ-termes :

Exemple. dérivation du jugement $\vdash^1_\lambda \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$:
1) $x : \alpha, y : \alpha \to \beta \vdash^1_\lambda y : \alpha \to \beta$ par (Hyp) ;
2) $x : \alpha, y : \alpha \to \beta \vdash^1_\lambda x : \alpha$ par (Hyp) ;
3) $: x\alpha, y : \alpha \to \beta \vdash^1_\lambda yx\beta$ par $(\to_{\mathrm{e}})$, 1 et 2 ;
4) $x : \alpha \vdash^1_\lambda \lambda y^{\alpha\to\beta}.yx : (\alpha \to \beta) \to \beta$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 3 ;
5) $\vdash^1_\lambda \lambda x^\alpha.\lambda y^{\alpha\to\beta}.yx : \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 4.

4.2 λ-calcul pédagogique simplement typé

La méthode de pédagogisation introduite dans le chapitre 1 est directement applicable à λC^1 grâce à l'isomorphisme de Curry-Howard. Nous avons juste besoin de définir ce qu'est une motivation dans le cadre des λ-calculs typés. Une motivation est essentiellement une substitution, qu'il nous faut alors définir sur les types mais aussi sur les λ-termes, puisqu'ils sont annotés par des types :

Définition 4.2.1. *Une substitution σ est une application des types dans les types, déterminée par un ensemble de variables noté* $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *et par une application* f *des variables dans les types. Pour tout type F l'image de F par σ, notée $\sigma{\cdot}F$, est définie par récurrence sur F comme suit :*
$F = \top$: $\sigma{\cdot}F = \top$;
$F = \alpha$: $\sigma{\cdot}F = \mathrm{f}(\alpha)$ *si* $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$, *et* $\sigma{\cdot}F = \alpha$ *sinon ;*
$F = A \to B$: $\sigma{\cdot}F = (\sigma{\cdot}A) \to (\sigma{\cdot}B)$.
L'ensemble $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *est appelé le* domaine *de la substitution σ.*

Définition 4.2.2. *Pour tout λ-terme t et pour toute substitution σ, l'*application *de σ à t, notée $\sigma{\cdot}t$, est définie par récurrence sur t comme suit :*
$t = o$: $\sigma{\cdot}t = t$;
$t = x$: $\sigma{\cdot}t = t$;
$t = \lambda x^A.u$: $\sigma{\cdot}t = \lambda x^{\sigma A}.u$;
$t = uv$: $\sigma{\cdot}t = \sigma{\cdot}u\sigma{\cdot}v$.

Les types simples ne contiennent aucune sorte de quantification sur les variables ; en revanche, les λ-variables sont quantifiées par la λ-abstraction : il nous faut donc définir ce que sont les λ-variables libres et quantifiées :

Définition 4.2.3. *Pour tout λ-terme t, l'ensemble* $\mathrm{Vl}(t)$ *des λ-variables* libres *de t est un ensemble de λ-variables défini par récurrence sur t :*
$t = o$: $\mathrm{Vl}(t) = \emptyset$;
$t = x$: $\mathrm{Vl}(t) = \{x\}$;
$t = \lambda x^A.u$: $\mathrm{Vl}(t) = \mathrm{Vl}(u) \setminus \{x\}$;
$t = uv$: $\mathrm{Vl}(t) = \mathrm{Vl}(u) \cup \mathrm{Vl}(v)$.
Quand $\mathrm{Vl}(t) = \emptyset$, *nous disons que le λ-terme t est* clos.

Définition 4.2.4. *Pour tout λ-terme t, l'ensemble* $\mathrm{Vq}(t)$ *des λ-variables* quantifiées *de t est un ensemble de λ-variables défini par récurrence sur t :*
$t = o$: $\mathrm{Vq}(t) = \emptyset$;
$t = x$: $\mathrm{Vq}(t) = \emptyset$;
$t = \lambda x^A.u$: $\mathrm{Vq}(t) = \{x\} \cup \mathrm{Vq}(u)$;
$t = uv$: $\mathrm{Vq}(t) = \mathrm{Vq}(u) \cup \mathrm{Vq}(v)$.

De même que nous avons défini les substitutions sur les types, nous allons définir les substitutions sur les λ-termes :

Définition 4.2.5. *Une* λ-substitution σ *est une fonction de domaine fini* $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *à valeurs dans l'ensemble des λ-termes.*

Pour toute λ-substitution σ, on note $\mathrm{Vl}(\sigma)$ l'union des ensembles $\mathrm{Vl}(\sigma(x))$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Définition 4.2.6. *Pour toute λ-substitution σ et pour tout λ-terme t, on dit que σ est adaptée à t quand l'ensemble* $\mathrm{Vl}(\sigma) \cap \mathrm{Vq}(t)$ *est vide.*

Définition 4.2.7. *Pour tout λ-terme t et pour toute λ-substitution σ adaptée à t, l'application de σ à t, notée $\sigma \cdot t$, est définie par récurrence sur t comme suit :*

$t = o \ : \ \sigma \cdot t = o \, ;$

$t = x \ : \ \sigma \cdot t = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \mathrm{Dom}(\sigma)\,; \\ x & \text{sinon}\,; \end{cases}$

$t = \lambda x^A.u \ : \ \sigma \cdot t = \lambda x^A.\sigma_{\backslash x} \cdot u \, ;$

$t = uv \ : \ \sigma \cdot t = \sigma \cdot u \sigma \cdot v.$

Soient Γ un contexte, F un type, σ une substitution et id un identifiant. On note $\vdash^1_{\mathrm{id}} \sigma{\cdot}F$ les jugements de la forme $\vdash^1_{\mathrm{id}} t : \sigma{\cdot}F$. De même, les ensembles de jugements $\vdash^1_{\mathrm{id}} \sigma{\cdot}F$ avec $x : F \in \Gamma$ sont notés $\vdash^1_{\mathrm{id}} \sigma{\cdot}\Gamma$.
Équipés de substitutions, nous pouvons maintenant pédagogiser $\lambda\mathrm{C}^1$:

Définition 4.2.8. *Le* λ-calcul pédagogique simplement typé*, abrégé en* $\mathrm{P}\text{-}\lambda\mathrm{C}^1$*, est défini par :*

- *sa morphologie, constituée par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constituée par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles* $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$ *et* $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$*, ainsi que des deux règles suivantes :*

$$\frac{\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} \sigma \cdot \Gamma}{\vdash^1_{\Gamma\lambda\mathrm{p}} o : \top} \ (\text{P-Ax})$$

$$\frac{x : F \in \Gamma \qquad \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} \sigma \cdot \Gamma}{\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} x : F} \ (\text{P-Hyp})$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* $\mathrm{P}\text{-}\lambda\mathrm{C}^1$ *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

Sans dérivation pédagogique, il nous était impossible de définir les motivations puisque celles-ci font appel à la notion de preuve ; nous sommes maintenant en mesure de les introduire :

Définition 4.2.9. *Soit C un calcul dont la morphologie est constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^1_{\mathrm{id}} F$*. Pour tout contexte* Δ*, une* motivation *de* Δ *dans C est une substitution* σ *telle que pour tout* $x : F \in \Delta$ *il existe un* λ*-terme* t *tel que le jugement* $\vdash^1_{\mathrm{id}} t : \sigma{\cdot}F$ *soit dérivable. Quand un contexte admet une motivation dans C, on dit qu'il est* motivable*. De plus, une motivation d'une formule* F *dans C est une motivation du singleton* $\{F\}$ *dans C.*

4.3 Traduction

Nous avons montré dans le chapitre 1 que le calcul pédagogique P-CPM est équivalent au calcul usuel CPM ; il en est de même dans les systèmes formels. Pour tout type F, la notation $F_\top$ représente le type F dans lequel toutes les variables ont été remplacées par $\top$. De même, pour tout λ-terme t, on note $t_\top$ le λ-terme t dans lequel tous les types A y apparaissant sont remplacés par $A_\top$. Pour tout contexte Γ, on note $\Gamma_\top$ l'ensemble des couples $x : F_\top$ tels que $x : F \in \Gamma$. Dans P-CPM, toutes les formules sont motivables ; de même, dans P-λC^1, tous les types admettent une instance typant un λ-terme :

Lemme 4.3.1. *Pour tout type* F*, il existe un* λ*-terme* t *tel que le jugement* $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F_\top$ *soit dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur F :

$F = \top$: nous avons $\top_\top = \top$; ainsi le jugement $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} o : F_\top$ est dérivable par la règle (P-Ax) ;

$F = \alpha$: nous avons $\alpha_\top = \top$ et on conclut comme dans le cas précédent ;

$F = A \to B$: nous avons $F_\top = A_\top \to B_\top$;

1) $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} u : A_\top$ par hypothèse de récurrence ;
2) $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} v : B_\top$ par hypothèse de récurrence ;
3) $x : B_\top, y : A_\top \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} x : B_\top$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
4) $x : B_\top \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} \lambda y^{A_\top}.x : A_\top \to B_\top$ par ($\to_\mathrm{i}$) et 3 ;
5) $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} \lambda x^{B_\top}.\lambda y^{A_\top}.x : B_\top \to (A_\top \to B_\top)$ par ($\to_\mathrm{i}$) et 4 ;
6) $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} (\lambda x^{B_\top}.\lambda y^{A_\top}.x)v : A_\top \to B_\top$ par ($\to_\mathrm{e}$), 5 et 2.

ainsi il existe un λ-terme t tel que le jugement $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : (A \to B)_\top$ soit dérivable.

□

Ce résultat a pour conséquence l'équivalence de la typabilité dans λC^1 et P-λC^1 :

Proposition 4.3.2. *Soient* Γ *un contexte,* t *un* λ*-terme et* F *un type. Le jugement* $\Gamma \vdash^1_\lambda t : F$ *est dérivable si et seulement si le jugement* $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ *est dérivable.*

Démonstration. Nous démontrons successivement les deux sens de l'équivalence :

$\Leftarrow$) immédiat par récurrence sur la dérivation du jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F$;

$\Rightarrow$) par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^1_{\lambda} t : F$; les cas $(\to_\mathrm{i})$ et $(\to_\mathrm{e})$ sont immédiats :

$\dfrac{}{\Gamma \vdash^1_{\lambda} o : \top}$ (Ax) : d'après le lemme 4.3.1, nous pouvons dériver $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} \Gamma_\top$; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} \top$ est dérivable à l'aide de la règle (P-Ax) ;

$\dfrac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash^1_{\lambda} x : F}$ (Hyp) : d'après le lemme 4.3.1, nous pouvons dériver $\vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} \Gamma_\top$; ainsi le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} F$ est dérivable à l'aide de la règle (P-Hyp).

$\square$

Notons que $\lambda\mathrm{C}^1$ et P-$\lambda\mathrm{C}^1$ typent exactement les mêmes λ-termes : ils représentent non seulement la même logique mais également le même langage de programmation, dont les programmes sont spécifiés à l'identique.

4.4 Normalisation

En tant que programmes, les λ-termes sont des processus exécutables ; leur évaluation consiste essentiellement à instancier les paramètres dans les abstractions par les termes qu'ils représentent : quand une application est de la forme $(\lambda x.t)u$, on sait que la λ-variable x représente le λ-terme u, l'évaluation d'une telle application produit alors le λ-terme $[x\backslash u]\cdot t$. Cette manière d'exécuter les λ-termes se nomme *β-réduction* :

Définition 4.4.1. *Pour tous les λ-termes t et t', la relation de β-*réduction *entre t et t', notée $t \rightsquigarrow_\beta t'$, est définie par les règles suivantes :*

$$\frac{}{o \rightsquigarrow_\beta o}\ (\beta_o)$$

$$\frac{}{x \rightsquigarrow_\beta x}\ (\beta_{\lambda\mathrm{var}})$$

$$\frac{u \rightsquigarrow_\beta u'}{\lambda x^A.u \rightsquigarrow_\beta \lambda x^A.u'}\ (\beta_\lambda)$$

$$\frac{u \rightsquigarrow_\beta u' \quad v \rightsquigarrow_\beta v'}{uv \rightsquigarrow_\beta u'v'}\ (\beta_{\lambda\mathrm{app}})$$

$$\frac{t \rightsquigarrow_\beta t' \quad t' \rightsquigarrow_\beta t''}{t \rightsquigarrow_\beta t''}\ (\beta_{\mathrm{trans}})$$

$$\frac{}{(\lambda x^A.u)v \rightsquigarrow_\beta [x\backslash v]\cdot u}\ (\beta_{\lambda\mathrm{red}})$$

Quand on ne peut plus réduire un λ-terme, cela signifie que le programme associé a achevé son exécution et on obtient alors la donnée correspondant au résultat de l'évaluation. Un λ-terme qui représente un résultat est dit en *forme normale* :

Définition 4.4.2. *Un λ-terme t est en* forme normale *quand pour tout λ-terme u tel que $t \rightsquigarrow_\beta u$ on a $t = u$.*

Quand on évalue un λ-terme, ses propriétés statiques ne changent pas : il calcule toujours la même chose, il admet toujours les mêmes arguments et on peut toujours s'en servir de la même manière. cela signifie que le type d'un λ-terme doit rester stable par β-réduction :

Proposition 4.4.1. *Soient Γ un contexte, t et u deux λ-termes et F un type. Si le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ est dérivable et $t \rightsquigarrow_\beta u$, alors le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} u : F$ est dérivable.*

Démonstration. Supposons que le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ soit dérivable ; d'après la proposition 4.3.2, le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda} t : F$ est dérivable ; $\lambda\mathrm{C}^1$ est stable par β-réduction ; donc le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda} u : F$ est dérivable ; ainsi, d'après la proposition 4.3.2, le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} u : F$ est dérivable. $\square$

Le type d'un λ-terme représente ce qui est calculé par ce terme ; comme quelque chose est calculé, on s'attend à obtenir cette chose à la fin de l'évaluation ; cela implique que toute évaluation termine ; on dit alors que les λ-termes typables sont *normalisables* :

Proposition 4.4.2. *Soient Γ un contexte, t un λ-terme et F un type. Si le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ est dérivable alors il existe un λ-terme u en forme normale tel que $t \rightsquigarrow_\beta u$ et que le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} u : F$ soit dérivable.*

Démonstration. Supposons que le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ soit dérivable ; d'après la proposition 4.3.2, le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda} t : F$ est dérivable ; tous les λ-termes typables dans $\lambda\mathrm{C}^1$ admettent une forme normale ; donc il existe un λ-terme u tel que $t \rightsquigarrow_\beta u$ et que le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda} u : F$ soit dérivable ; d'après la proposition 4.3.2, le jugement $\Gamma \vdash^1_{\lambda\mathrm{p}} u : F$ est dérivable. $\square$

La normalisation des termes n'est pas une propriété qui va de soi : il existe des termes qui n'admettent aucune forme normale, comme par exemple $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ qui se réduit nécessairement en lui-même mais qui n'est pas en forme normale ; cependant, ce terme n'est pas typable : tous les termes typables sont normalisables.

Chapitre 5

λ-calcul pédagogique du second ordre

5.1 λ-calcul du second-ordre

Dans le calcul propositionnel minimal, quand on cherche à prouver le théorème $A \to A$, on passe généralement par les étapes suivantes :

1) $A \vdash_{\mathrm{m}} A$ par (Hyp) ;

2) $\vdash_{\mathrm{m}} A \to A$ par $(\to_{\mathrm{i}})$ et 1.

Le λ-terme isomorphe à cette preuve est la fonction identité $\lambda x^A.x$ sur les λ-termes de type A. On remarque qu'on peut démontrer de même n'importe quel théorème de la forme $\alpha \to \alpha$, dont la preuve correspond au λ-terme $\lambda x^\alpha.x$: en substituant n'importe quelle formule B à la variable propositionnelle α, on obtient un λ-terme de type $B \to B$. Intuitivement, pour toute formule α, nous disposons d'un processus construisant une preuve de $\alpha \to \alpha$: ceci correspond à une BHK-interprétation de la quantification universelle de la variable α appliquée à la formule $\alpha \to \alpha$, c'est-à-dire la formule $\forall\alpha.\alpha \to \alpha$. Au niveau des λ-termes, pour tout type α, le λ-terme $\lambda x^\alpha.x$ est de type $\alpha \to \alpha$: le processus décrit par la BHK-interprétation de la quantification universelle correspond à l'application d'un λ-terme à un type qui s'évalue de la même manière d'une β-réduction ; en notant $\Lambda\alpha.\lambda x^\alpha x$ le λ-terme de type $\forall\alpha.\alpha \to \alpha$, on exprime la production d'un λ-terme de type $A \to A$ de la manière suivante :

$$(\Lambda\alpha.\lambda x^\alpha x)A \rightsquigarrow [\alpha\backslash A]\cdot\lambda x^\alpha x$$

On remarque que le symbole Λ joue un rôle analogue au symbole λ. En intégrant cette construction aux λ-termes, on obtient un λ-calcul typé par des formules propositionnelles du second ordre ; ce système formel correspond via l'isomorphisme de Curry-Howard au calcul CP^2 ; il a été introduit indépendamment par Jean-Yves

Girard et John Reynolds dans les années 1970 sous le nom de λ-*calcul polymorphe du second-ordre*. Nous allons le présenter dans cette section. On commence par définir les types :

Définition 5.1.1. *Les* types du second ordre*, que nous appelons* types *dans ce chapitre en l'absence d'ambiguïté, sont définis par récurrence comme suit :*
- *la constante $\top$ est un type ;*
- *les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des types ;*
- *si A et B sont des types, alors $A \to B$ est un type ;*
- *si α est une variable et A un type, alors $\forall\alpha.A$ est un type.*

Afin d'alléger l'écriture des types, nous écrivons $A \to B \to C$ les types de la forme $A \to (B \to C)$. De même, nous écrivons $\forall\alpha.A \to B$ les types de la forme $\forall\alpha.(A \to B)$.
Puis on distingue les variables libres des variables quantifiées :

Définition 5.1.2. *Pour tout type F, l'ensemble* $\mathrm{Vl}(F)$ *des variables* libres *de F est un ensemble de variables défini par récurrence sur F :*
$F = \top$: $\mathrm{Vl}(F) = \emptyset$;
$F = \alpha$: $\mathrm{Vl}(F) = \{\alpha\}$;
$F = A \to B$: $\mathrm{Vl}(F) = \mathrm{Vl}(A) \cup \mathrm{Vl}(B)$;
$F = \forall\alpha.A$: $\mathrm{Vl}(F) = \mathrm{Vl}(A) \setminus \{\alpha\}$.
Par extension, pour tout contexte Γ nous notons $\mathrm{Vl}(\Gamma)$ *l'ensemble* $\bigcup_{x:G\in\Gamma} \mathrm{Vl}(G)$. *Quand* $\mathrm{Vl}(F) = \emptyset$*, nous disons que le type F est* clos.

Définition 5.1.3. *Pour tout type F, l'ensemble* $\mathrm{Vq}(F)$ *des variables* quantifiées *de F est un ensemble de variables défini par récurrence sur F :*
$F = \top$: $\mathrm{Vq}(F) = \emptyset$;
$F = \alpha$: $\mathrm{Vq}(F) = \emptyset$;
$F = A \to B$: $\mathrm{Vq}(F) = \mathrm{Vq}(A) \cup \mathrm{Vq}(B)$;
$F = \forall\alpha.A$: $\mathrm{Vq}(F) = \{\alpha\} \cup \mathrm{Vq}(A)$.

Définition 5.1.4. *Une variable* fraîche *pour un type F est une variable α telle que $\alpha \notin \mathrm{Vl}(F) \cup \mathrm{Vq}(F)$. Par extension, une variable fraîche pour un contexte Γ est une variable fraîche pour chacun des types apparaissant dans Γ. L'ensemble des variables fraîches d'un contexte Γ est noté* $\mathrm{Fr}(\Gamma)$.

Enfin, on définit les substitutions sur les types :

Définition 5.1.5. *Une substitution σ est une fonction de domaine fini* $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *à valeurs dans l'ensemble des types.*

Notation 5.1.1. *Pour toute substitution σ, on note* $\mathrm{Vl}(\sigma)$ *l'union des ensembles* $\mathrm{Vl}(\sigma(\alpha))$ *pour tout* $\alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Définition 5.1.6. *Pour toute substitution σ et pour tout type F, on dit que σ est adaptée à F quand l'ensemble* $\mathrm{Vl}(\sigma) \cap \mathrm{Vq}(F)$ *est vide.*

Définition 5.1.7. *Pour tout type F et pour toute substitution σ adaptée à F, l'application de σ à F, notée $\sigma{\cdot}F$, est définie par récurrence sur F comme suit :*
$F = \top$: $\sigma{\cdot}F = \top$;
$F = \alpha$: $\sigma{\cdot}F = \begin{cases} \sigma(\alpha) & \text{si } \alpha \in \mathrm{Dom}(\sigma)\,; \\ \alpha & \text{sinon}\,; \end{cases}$
$F = A \to B$: $\sigma{\cdot}F = \sigma{\cdot}A \to \sigma{\cdot}B$;
$F = \forall\alpha.A$: $\sigma{\cdot}F = \forall\alpha.\sigma_{\setminus\alpha}{\cdot}A$.

Après avoir défini les types, on introduit les λ-termes qu'ils vont typer :

Définition 5.1.8. *Les* λ-termes propositionnels du second ordre*, que nous appelons* λ-termes *dans ce chapitre en l'absence d'ambiguïté, sont définis par récurrence comme suit :*
- *la λ-constante o est un λ-terme ;*
- *les λ-variables $x, y, z, \ldots$ sont des λ-termes ;*
- *si x est une λ-variable, A un type et t un λ-terme, alors $\lambda x^A.t$ est un λ-terme ;*
- *si t et u sont des λ-termes, alors tu est un λ-terme ;*
- *si α est une variable et t un λ-terme, alors $\Lambda\alpha.t$ est un λ-terme ;*
- *si t est un λ-terme et A un type, alors tA est un λ-terme.*

Afin d'alléger l'écriture des λ-termes, nous écrivons tuv les λ-termes de la forme $(tu)v$ et $\lambda x^A.tu$ les λ-termes de la forme $\lambda x^A.(tu)$, avec u et v des λ-termes ou des types selon les circonstances. De même, nous écrivons $\Lambda\alpha.tu$ les λ-termes de la forme $\Lambda\alpha.(tu)$. Puis on distingue les λ-variables libres des λ-variables quantifiées :

Définition 5.1.9. *Pour tout λ-terme t, l'ensemble* $\mathrm{Vl}(t)$ *des λ-variables* libres *de t est un ensemble de λ-variables défini par récurrence sur t :*
$t = o$: $\mathrm{Vl}(t) = \emptyset$;
$t = x$: $\mathrm{Vl}(t) = \{x\}$;
$t = \lambda x^A.u$: $\mathrm{Vl}(t) = \mathrm{Vl}(u) \setminus \{x\}$;
$t = uv$: $\mathrm{Vl}(t) = \mathrm{Vl}(u) \cup \mathrm{Vl}(v)$;
$t = \Lambda\alpha.u$: $\mathrm{Vl}(t) = \mathrm{Vl}(u)$;
$t = uA$: $\mathrm{Vl}(t) = \mathrm{Vl}(u)$.
Quand $\mathrm{Vl}(t) = \emptyset$*, nous disons que le λ-terme t est* clos.

Définition 5.1.10. *Pour tout λ-terme t, l'ensemble* $\mathrm{Vq}(t)$ *des λ-variables* quantifiées *de t est un ensemble de λ-variables défini par récurrence sur t :*
$t = o$: $\mathrm{Vq}(t) = \emptyset$;
$t = x$: $\mathrm{Vq}(t) = \emptyset$;

$t = \lambda x^A.u$: $\mathrm{Vq}(t) = \{x\} \cup \mathrm{Vq}(u)$;
$t = uv$: $\mathrm{Vq}(t) = \mathrm{Vq}(u) \cup \mathrm{Vq}(v)$;
$t = \Lambda\alpha.u$: $\mathrm{Vq}(t) = \mathrm{Vq}(u)$;
$t = uA$: $\mathrm{Vq}(t) = \mathrm{Vq}(u)$.

Comme pour les types, il nous faut introduire les substitution sur les types ; en premier lieu, les λ-termes étant annotés par des types, nous allons donner un sens à l'application d'une substitution sur les formules à un λ-terme :

Définition 5.1.11. *Pour tout λ-terme t et pour toute substitution σ adaptée aux types apparaissant dans t, l'*application *de σ à t, notée σt, est définie par récurrence sur t comme suit :*
$t = o$: $\sigma{\cdot}t = t$;
$t = x$: $\sigma{\cdot}t = t$;
$t = \lambda x^A.u$: $\sigma{\cdot}t = \lambda x^{\sigma A}.u$;
$t = uv$: $\sigma{\cdot}t = \sigma{\cdot}u\sigma{\cdot}v$;
$t = \Lambda\alpha.u$: $\sigma{\cdot}t = \Lambda\alpha.\sigma_{\backslash\alpha}{\cdot}u$;
$t = uA$: $\sigma{\cdot}t = \sigma{\cdot}u\sigma{\cdot}A$.

Puis nous définissons les substitutions sur les λ-termes :

Définition 5.1.12. *Une* λ-substitution *σ est une fonction de domaine fini* $\mathrm{Dom}(\sigma)$ *à valeurs dans l'ensemble des λ-termes.*

Pour toute λ-substitution σ, on note $\mathrm{Vl}(\sigma)$ l'union des ensembles $\mathrm{Vl}(\sigma(x))$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}(\sigma)$.

Définition 5.1.13. *Pour toute λ-substitution σ et pour tout λ-terme t, on dit que σ est* adaptée *à t quand l'ensemble* $\mathrm{Vl}(\sigma) \cap \mathrm{Vq}(t)$ *est vide.*

Définition 5.1.14. *Pour tout λ-terme t et pour toute λ-substitution σ adaptée à t, l'*application *de σ à t, notée $\sigma{\cdot}t$, est définie par récurrence sur t comme suit :*
$t = o$: $\sigma{\cdot}t = o$;
$t = x$: $\sigma{\cdot}t = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \mathrm{Dom}(\sigma) ; \\ x & \text{sinon} ; \end{cases}$
$t = \lambda x^A.u$: $\sigma{\cdot}t = \lambda x^A.\sigma_{\backslash x}{\cdot}u$;
$t = uv$: $\sigma{\cdot}t = \sigma{\cdot}u\sigma{\cdot}v$;
$t = \Lambda\alpha.u$: $\sigma{\cdot}t = \Lambda\alpha.\sigma{\cdot}u$;
$t = uA$: $\sigma{\cdot}t = \sigma{\cdot}uA$.

Le système fonctionnel associé au calcul CP^2 doit contenir une notion de contexte pour qu'il reste en accord avec la structure des systèmes de déduction naturelle à la Gentzen-Parwitz :

Définition 5.1.15. *Un* λ-contexte propositionnel du second ordre *est un ensemble fini de couples* $x : A$*, ou* x *est une* λ*-variable et* A *un type, tel que pour tout* $x : A \in \Gamma$ *et pour tout* $y : B \in \Gamma$*, si* $x = y$ *alors* $A = B$ *; dans ce chapitre nous les appelons* contextes *quand aucune ambiguïté n'est à craindre. Un* λ-jugement propositionnel du second ordre *est un triplet noté* $\Gamma \vdash^2_{\text{id}} t : F$*, avec* Γ *un contexte,* t *un* λ*-terme,* F *un type et* id *un identifiant textuel. Dans ce chapitre, les* λ*-jugements propositionnels du second ordre sont appelés* jugements *quand cela ne prête pas à confusion.*

Le contexte vide est représenté par le mot vide ; ainsi, pour tout λ-terme t, pour tout type F et tout identifiant id, le jugement $\emptyset \vdash^2_{\text{id}} t : F$ s'écrit également $\vdash^2_{\text{id}} t : F$. De plus, pour tous contextes Γ et Δ, le contexte $\Gamma \cup \Delta$ est noté Γ, Δ. En particulier, pour tout type A, le jugement $\Gamma \cup \{A\} \vdash^2_{\text{id}} t : F$ est noté $\Gamma, A \vdash^2_{\text{id}} t : F$. Dans les types, le nom des variables quantifiées ne sert qu'à les distinguer des autres variables puisqu'elle représente potentiellement n'importe quel type ; deux type ne différant que par le nom de leur variables libres ont la même signification ; ceci est formalisé par la relation d'α-équivalence :

Définition 5.1.16. *Pour tout type* A *et* B*, la relation d'*α-équivalence *entre* A *et* B*, notée* $A =_\alpha B$*, est définie par les règles suivantes :*

$$\frac{}{\top =_\alpha \top}\ (\alpha_\top)$$

$$\frac{}{\alpha =_\alpha \alpha}\ (\alpha_{\text{var}})$$

$$\frac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\ (\alpha_\to)$$

$$\frac{[\alpha\backslash\gamma]\cdot A =_\alpha [\beta\backslash\gamma]\cdot B \quad \gamma \in \text{Fr}(A, B)}{\forall\alpha.A =_\alpha \forall\beta.B}\ (\alpha_\forall)$$

Quand la relation $A =_\alpha B$ *est vérifiée, on dit que les termes* A *et* B *sont* α-équivalents*.*

Nous avons enfin tous les outils nécessaire à la définition du λ-calcul du second ordre :

Définition 5.1.17. *Le* λ-calcul du second ordre*, abrégé en* λC^2*, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$ *;*

– *sa syntaxe, constituée par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles suivantes :*

$$\frac{}{\Gamma \vdash^2_\lambda o : \top}\ (\mathrm{Ax})$$

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash^2_\lambda x : F}\ (\mathrm{Hyp})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^2_\lambda t : B}{\Gamma \vdash^2_\lambda \lambda x^A.t : A \to B}\ (\to_\mathrm{i}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^2_\lambda t : A \to B \quad \Gamma \vdash^2_\lambda u : A}{\Gamma \vdash^2_\lambda tu : B}\ (\to_\mathrm{e})$$

$$\frac{\Gamma \vdash^2_\lambda t : A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2_\lambda \Lambda\alpha.t : \forall\alpha.A}\ (\forall_\mathrm{i}) \qquad \frac{\Gamma \vdash^2_\lambda t : \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash^2_\lambda tU : [\alpha \backslash U]{\cdot}A}\ (\forall_\mathrm{e})$$

$$\frac{\Gamma \vdash^2_\lambda t : A \quad A =_\alpha B}{\Gamma \vdash^2_\lambda t : B}\ (=_\alpha)$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* $\lambda\mathrm{C}^2$ *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

5.2 λ-calcul pédagogique du second-ordre

Pour pédagogiser $\lambda\mathrm{C}^2$, il faut prendre soin que le λ-calcul obtenu ait de bonnes propriétés. Deux méthodes de pédagogisation ont été utilisées dans le chapitre 2 pour pédagogiser le calcul CP^2 : la première a engendré le calcul $\mathrm{F\text{-}CP}^2$; mais ce calcul n'admet pas la propriété de normalisation des preuves. Voici la preuve du théorème $\vdash^2_\mathrm{f} (\forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha)$:

1) $\vdash^2_\mathrm{f} \top$ par (P-Ax) ;
2) $\alpha \vdash^2_\mathrm{f} \alpha$ par (P-Hyp) et 1 ;
3) $\vdash^2_\mathrm{f} \alpha \to \alpha$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 2 ;
4) $\vdash^2_\mathrm{f} \forall\alpha.\alpha \to \alpha$ par $(\forall_\mathrm{i})$ et 3 ;
5) $\vdash^2_\mathrm{f} (\forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha)$ par $(\forall_\mathrm{e})$ et 4.

Cette preuve correspond au λ-terme $(\Lambda\alpha.\lambda x^\alpha.x)(\forall\alpha.\alpha)$, dont la β-réduction produit le λ-terme $\lambda x^{\forall\alpha.\alpha}.x$; mais ce λ-terme en forme normale ne correspond à aucune dérivation de $\mathrm{F\text{-}CP}^2$; en effet, la dérivation candidate est celle-ci :

1) $\forall\alpha.\alpha \vdash^2_\mathrm{f} \forall\alpha.\alpha$ application de (P-Hyp) incorrecte ;
2) $\vdash^2_\mathrm{f} (\forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha)$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 1.

La ligne (1) de cette preuve demande à ce que la formule $\forall\alpha.\alpha$ soit motivée ; mais ceci impliquerait l'incohérence du calcul. Ainsi la méthode de pédagogisation ayant engendré $\mathrm{F\text{-}CP}^2$ ne convient pas. En revanche, la méthode qui a servi pour construire le calcul $\mathrm{P\text{-}CP}^2$ convient parfaitement ; nous allons l'appliquer à $\lambda\mathrm{C}^2$.

Soient Γ un contexte, F un type, σ une substitution, μ une λ-substitution et id un identifiant. On note $\vdash^2_{\mathrm{id}} \sigma\cdot F$ les jugements de la forme $\vdash^2_{\mathrm{id}} t : \sigma\cdot F$. De même, les ensembles de jugements $\vdash^2_{\mathrm{id}} \sigma\cdot F$ avec $x : F \in \Gamma$ sont notés $\vdash^2_{\mathrm{id}} \sigma\cdot\Gamma$. On dénote l'ensemble des jugements $\vdash^2_{\mathrm{id}} \mu\cdot x : \sigma\cdot F$ avec $x : F \in \Gamma$ par $\vdash^2_{\mathrm{id}} \mu\cdot\sigma\cdot F$. Voici maintenant la définition de la version pédagogique de $\lambda\mathrm{C}^2$:

Définition 5.2.1. *Le* λ-calcul pédagogique du second ordre*, abrégé en* P-$\lambda\mathrm{C}^2$*, est défini par :*
- *sa morphologie, constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} F$ *;*
- *sa syntaxe, constitué par l'ensemble des* dérivations *définies par récurrence à l'aide des règles* $(\rightarrow_{\mathrm{i}})$*,* $(\rightarrow_{\mathrm{e}})$*,* $(\forall_{\mathrm{i}})$ *et* $(=_\alpha)$ *ainsi que des trois règles suivantes :*

$$\frac{\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot\Gamma}{\vdash^2_{\Gamma\lambda\mathrm{p}} o : \top}\ (\text{P-Ax})$$

$$\frac{x : F \in \Gamma \qquad \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} x : F}\ (\text{P-Hyp})$$

$$\frac{\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : \forall\alpha.A \qquad \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot U}{\vdash^2_{\Gamma\lambda\mathrm{p}} tU : [\alpha\backslash U]\cdot A}\ (\text{P-}\forall_{\mathrm{e}})$$

On dit qu'un jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ *est* dérivable *quand il existe une dérivation dans* P-$\lambda\mathrm{C}^2$ *dont la dernière règle utilisée produit ce jugement.*

La notion de motivation est immédiatement transposable dans P-$\lambda\mathrm{C}^2$:

Définition 5.2.2. *Soit C un calcul dont la morphologie est constitué par l'ensemble des jugements de la forme* $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} t : F$*. Pour tout contexte* Δ*, une* motivation *de* Δ *dans C est une substitution* σ *telle que pour tout* $x : F \in \Delta$ *il existe un* λ*-terme* t *tel que le jugement* $\vdash^1_{\mathrm{id}} t : \sigma\cdot F$ *soit dérivable. Quand un contexte admet une motivation dans C, on dit qu'il est* motivable*. De plus, une motivation d'une formule* F *dans C est une motivation du singleton* $\{F\}$ *dans C.*

L'une des conséquences immédiates de l'application de l'isomorphisme de Curry-Howard sur le calcul P-CP^2 est la possibilité de motiver tous les sous-types des types apparaissant dans les dérivations de P-$\lambda\mathrm{C}^2$:

Proposition 5.2.1. *Pour tout jugement* $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ *dérivable, les jugements* $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} G_\top$ *sont dérivables pour tout sous-type* G *d'un type appartenant à* $\Gamma \cup \{F\}$*.*

Démonstration. Analogue à la preuve de la proposition 2.3.10. □

5.3 Normalisation

Après l'introduction des Λ-abstractions dans les λ-termes du second ordre, la β-réduction se trouve altérée par rapport au cas du λ-calcul simplement typé vu dans le chapitre 4. Voici à quoi elle ressemble après modifications :

Définition 5.3.1. *Pour tous les λ-termes t et t', la relation de β-*réduction *entre t et t', notée $t \rightsquigarrow_\beta t'$, est définie par les règles suivantes :*

$$\frac{}{o \rightsquigarrow_\beta o}\ (\beta_o)$$

$$\frac{}{x \rightsquigarrow_\beta x}\ (\beta_{\lambda\text{var}})$$

$$\frac{u \rightsquigarrow_\beta u'}{\lambda x^A.u \rightsquigarrow_\beta \lambda x^A.u'}\ (\beta_\lambda)$$

$$\frac{u \rightsquigarrow_\beta u' \quad v \rightsquigarrow_\beta v'}{uv \rightsquigarrow_\beta u'v'}\ (\beta_{\lambda\text{app}})$$

$$\frac{u \rightsquigarrow_\beta u'}{\Lambda\alpha.u \rightsquigarrow_\beta \Lambda\alpha.u'}\ (\beta_\Lambda)$$

$$\frac{u \rightsquigarrow_\beta u'}{uA \rightsquigarrow_\beta u'A}\ (\beta_{\Lambda\text{app}})$$

$$\frac{t \rightsquigarrow_\beta t' \quad t' \rightsquigarrow_\beta t''}{t \rightsquigarrow_\beta t''}\ (\beta_{\text{trans}})$$

$$\frac{}{(\lambda x^A.u)v \rightsquigarrow_\beta [x\backslash v]\cdot u}\ (\beta_{\lambda\text{red}})$$

$$\frac{}{(\Lambda\alpha.u)A \rightsquigarrow_\beta [\alpha\backslash A]\cdot u}\ (\beta_{\Lambda\text{red}})$$

Nous avons donc deux types d'évaluation des applications : celle associée aux λ-abstractions et celle associée aux Λ-abstractions. Pour chacune d'elles, nous allons démontrer qu'elles préservent le typage des λ-termes réduits. Nous nous occupons premièrement de l'évaluation associée aux λ-abstractions. Par une récurrence immédiate sur les dérivations, on observe que l'application de la règle (λred) à un λ-terme typé par le jugement $\Gamma \vdash^2_\lambda (\lambda x^A.t)u : F$ produit une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_\lambda [x\backslash u]\cdot t : F$: il est construit à partir de la dérivation du jugement $\Gamma, x : A \vdash^2_\lambda t : F$ dans laquelle toutes les occurrences de la règle (Hyp) produisant un jugement $\Gamma, \Delta, x : A \vdash^2_\lambda x : A$ sont remplacées par la dérivation du jugement

$\Gamma, \Delta \vdash^2_\lambda u : A$. On remarque qu'il faut pouvoir affaiblir le contexte de $\Gamma \vdash^2_\lambda u : A$ par le contexte Δ ; ainsi, pour que l'on puisse typer les λ-termes réduits par la règle (λred), il faut pouvoir affaiblir tous les contexte Γ par Δ ; nous avons besoin de dériver la règle d'affaiblissement pédagogique (P-Aff) de la manière suivante :

$$\frac{\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F \quad \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot U}{\Gamma, x : U \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F}\ \text{(P-Aff)}$$

Notons que le λ-terme t reste le même après affaiblissement. Nous allons démontrer que cette règle est dérivable dans P-λC^2 :

Proposition 5.3.1. *Soient Γ un contexte, U un type et x une λ-variable n'apparaissant pas dans Γ. Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$, le jugement $\Gamma, x : U \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$; on ne traite que les cas (P-Ax) et (P-Hyp), les autres cas étant immédiats par récurrence :

$\dfrac{\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot\Gamma}{\vdash^2_{\Gamma\lambda\mathrm{p}} o : \top}$ (P-Ax) d'après la proposition 5.2.1, les jugements $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \Gamma_\top$ sont dérivables ; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma, x : U \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} o : \top$ à l'aide de la règle (P-Ax) ;

$\dfrac{y : F \in \Gamma \quad \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} y : F}$ (P-Hyp) d'après la proposition 5.2.1, les jugements $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \Gamma_\top$ sont dérivables ; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma, x : U \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} y : F$ à l'aide de la règle (P-Hyp).

□

Nous pouvons alors démontrer que l'application de la règle (λred) préserve le typage des λ-termes réduits :

Lemme 5.3.2. *Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} (\lambda x^A.t)u : F$, le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [x\backslash u]\cdot t : F$ est dérivable.*

Démonstration. Par hypothèse, les jugements $\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ et $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} u : A$ sont dérivable ; nous allons prouver par récurrence sur la dérivation de $\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ que le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [x\backslash u]\cdot t : F$ est dérivable :

$\dfrac{\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot(\Gamma, x : A)}{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} o : \top}$ (P-Ax) : nous avons $[x\backslash u]\cdot o = o$; donc nous dérivons $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [x\backslash u]\cdot o : \top$ à l'aide de la règle (P-Ax) ;

$\dfrac{y : F \in (\Gamma, x : A) \quad \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \sigma\cdot(\Gamma, x : A)}{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F}$ (P-Hyp) : il y a deux cas à traiter :

- $y : F = x : A$: par hypothèse le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} u : A$ est dérivable ; de plus $u = [x\backslash u]\cdot y$; donc le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [x\backslash u]\cdot y : F$ est dérivable ;

– $y : F \neq x : A$: nous dérivons le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} y : F$ à l'aide de la règle (P-Hyp) ;

$\dfrac{\Gamma, x : A, y : B \vdash^2_{\lambda p} f : C}{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} \lambda y^B.f : B \to C}$ $(\to_i)$: par hypothèse le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} u : A$ est dérivable et d'après la proposition 5.2.1 le type B est motivable dans P-λC^2 ; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma, y : B \vdash^2_{\lambda p} u : A$ à l'aide de la règle (P-Aff) ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma, y : B \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot f : C$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma, y : B \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot\lambda y^B.f : F$ avec la règle $(\to_i)$;

$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} f : B \to F \quad \Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} g : B}{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} fg : F}$ $(\to_e)$: par hypothèse de récurrence, les jugements $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot f : B \to F$ et $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot g : B$ sont dérivables ; donc nous dérivons le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot(fg) : F$ avec la règle $(\to_e)$;

$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} f : B \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma; x : A)}{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} \Lambda\alpha.f : \forall\alpha.B}$ $(\forall_i)$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot f : B$ est dérivable ; par α-équivalence, nous pouvons supposer que α n'apparaît pas dans u ; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot\Lambda\alpha.f : F$ avec la règle $(\forall_i)$;

$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} f : \forall\alpha.B \quad \vdash^2_{\lambda p} \sigma\cdot U}{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} fU : [\alpha\backslash U]\cdot B}$ (P-$\forall_e$) : par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot f : \forall\alpha.B$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot(fU) : F$ avec la règle (P-$\forall_e$) ;

$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda} t : G \quad G =_\alpha F}{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda} t : F}$ $(=_\alpha)$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot t : G$ est dérivable ; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [x\backslash u]\cdot t : F$ avec la règle $(=_\alpha)$.

□

L'application de la règle (Λred) sur un λ-terme typé par le jugement $\Gamma \vdash^2_\lambda (\Lambda\alpha.t)U : [\alpha\backslash U]\cdot F$ produit une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_\lambda [\alpha\backslash U]\cdot t : [\alpha\backslash U]\cdot F$: il s'agit de la dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$ dans laquelle toutes les occurrences de la variable α sont remplacées par le type U. Dans le cas de P-λC^2, il faut pouvoir motiver les types U dans tous les types $[\alpha\backslash U]\cdot A$ tels que A apparaisse dans la dérivation de $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$; nous allons prouver que c'est toujours le cas :

Lemme 5.3.3. *Pour tout type U et F motivables dans* P-λC^2 *et pour toute variable α tels que la substitution $[\alpha\backslash U]$ soit adaptée à F, le type $[\alpha\backslash U]\cdot F$ est motivable dans* P-CP^2.

Démonstration. analogue à la preuve du lemme 2.3.7. □

Ainsi nous pouvons démontrer que l'application de la règle (Λred) préserve le typage des λ-termes réduits à l'aide des deux lemmes suivants :

Lemme 5.3.4. *Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} t : F$, si le type U est motivable dans* P-λC^2 *alors le jugement $[\alpha\backslash U]\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [\alpha\backslash U]\cdot t : [\alpha\backslash U]\cdot F$ est dérivable.*

Démonstration. Notons μ la substitution $[\alpha\backslash U]$; nous prouvons le lemme par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} t : F$:

- $\dfrac{\vdash^2_{\lambda p} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} o : \top}$ (P-Ax) : nous avons $o = \mu\cdot o$ et $\top = \mu\cdot\top$; le contexte $\mu\cdot\Gamma$ est motivable dans P-λC^2 d'après les lemmes 5.3.3 et 5.2.1 ; nous dérivons alors le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot o : \mu\cdot\top$ avec la règle (P-Ax) ;
- $\dfrac{x : F \in \Gamma \quad \vdash^2_{\lambda p} \sigma\cdot\Gamma}{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} x : F}$ (P-Hyp) : analogue au cas précédent ;
- $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} f : B}{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \lambda x^A.f : A \to B}$ ($\to_i$) : par hypothèse de récurrence, le jugement $\mu\cdot(\Gamma, x : A) \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot f : \mu\cdot B$ est dérivable ; ainsi nous dérivons le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot\lambda x^A.f : \mu\cdot(A \to B)$ avec la règle ($\to_i$) ;
- $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} f : A \to F \quad \Gamma \vdash^2_{\lambda p} g : A}{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} fg : F}$ ($\to_e$) : par hypothèse de récurrence, les jugements $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot f : \mu\cdot(A \to F)$ et $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot g : \mu\cdot A$ sont dérivables ; ainsi nous dérivons le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot(fg) : \mu\cdot F$ avec la règle ($\to_e$) ;
- $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} f : A \quad \beta \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \Lambda\beta.f : \forall\beta.A}$ ($\forall_i$) : par hypothèse de récurrence, le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot f : \mu\cdot A$ est dérivable ; par α-équivalence, nous pouvons supposer que $\alpha \neq \beta$; nous dérivons alors le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot\Lambda\beta.f : \mu\cdot\forall\beta.A$ avec la règle ($\forall_i$) ;
- $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} f : \forall\beta.A \quad \vdash^2_{\lambda p} \sigma\cdot V}{\Gamma \vdash^2_{\lambda p} fV : [\beta\backslash V]\cdot A}$ (P-$\forall_e$) : par hypothèse de récurrence, le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot f : \mu\cdot\forall\beta.A$ est dérivable ; le type $\mu\cdot V$ est motivable dans P-λC^2 d'après les lemmes 5.3.3 et 5.2.1 ; par α-équivalence nous pouvons supposer que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \notin \mathrm{Vl}(U)$; nous dérivons alors le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot(fV) : \mu\cdot([\beta\backslash V]\cdot A)$ avec la règle (P-$\forall_e$) ;
- $\dfrac{\Gamma \vdash^2_{\lambda} t : G \quad G =_\alpha F}{\Gamma \vdash^2_{\lambda} t : F}$ ($=_\alpha$) : par hypothèse de récurrence, le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot t : \mu\cdot G$ est dérivable ; par une récurrence immédiate sur la dérivation de $G =_\alpha F$ nous avons $\mu\cdot G =_\alpha \mu\cdot F$; ainsi nous dérivons le jugement $\mu\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} \mu\cdot t : \mu\cdot F$ avec la règle ($=_\alpha$).

$\square$

Lemme 5.3.5. *Pour tout jugement dérivable* $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} (\Lambda\alpha.t)U : [\alpha\backslash U]{\cdot}F$*, le jugement* $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [\alpha\backslash U]\cdot t : [\alpha\backslash U]\cdot F$ *est dérivable.*

Démonstration. Par hypothèse le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} t : F$ est dérivable et le type U est motivable ; d'après le lemme 5.3.5, le jugement $[\alpha\backslash U]\cdot\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [\alpha\backslash U]\cdot t : [\alpha\backslash U]\cdot F$ est dérivable ; nous avons $\alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)$; donc nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} [\alpha\backslash U]\cdot t : [\alpha\backslash U]\cdot F$. □

On déduit des lemmes 5.3.2 et 5.3.5 la stabilité de P-λC^2 par β-réduction :

Proposition 5.3.6. *Pour tout jugement dérivable* $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} t : F$ *et pour tout λ-terme* u *tel que* $t \rightsquigarrow_\beta u$*, le jugement* $\Gamma \vdash^2_{\lambda p} u : F$ *est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $t \rightsquigarrow_\beta u$; nous ne traitons que les cas des règles (β_λ), $(\beta_{\lambda\mathrm{red}})$ et $(\beta_{\Lambda\mathrm{red}})$, les autres cas étant immédiats ou analogues au cas (β_λ) :

$\dfrac{u \rightsquigarrow_\beta u'}{\lambda x^A.u \rightsquigarrow_\beta \lambda x^A.u'}\ (\beta_\lambda)$: posons $F = A \to B$; par hypothèse, le jugement $\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} u : B$ est dérivable ; par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} u' : B$ est dérivable ; ainsi le jugement $\Gamma, x : A \vdash^2_{\lambda p} \lambda x^A.u' : B$ est dérivable à l'aide de la règle $(\to_\mathrm{i})$;

$\dfrac{}{(\lambda x^A.u)v \rightsquigarrow_\beta [x\backslash v]\cdot u}\ (\beta_{\lambda\mathrm{red}})$: immédiat d'après le lemme 5.3.2 ;

$\dfrac{}{(\Lambda\alpha.u)A \rightsquigarrow_\beta [\alpha\backslash A]\cdot u}\ (\beta_{\Lambda\mathrm{red}})$: immédiat d'après le lemme 5.3.5.

□

5.4 Utilité

L'isomorphisme de Curry-Howard permet de transporter des propriétés des systèmes formels dans les systèmes fonctionnels. En particulier, le fait que dans le calcul P-CP^2 toutes les formules apparaissant dans les dérivations soient motivables a comme contrepartie dans P-λC^2 une propriété des λ-termes typables que nous appelons l'*utilité*. Intuitivement, une fonction sert en tant que programme – est utile – dès qu'on est capable de faire appel à son contenu algorithmique pour calculer des objets. Pour un λ-terme, cela signifie qu'il existe des λ-termes qu'on puisse lui passer en arguments. Notons qu'un λ-terme n'a apparemment qu'un seul paramètre, celui qui est quantifié par une λ-abstraction ou une Λ-abstraction. Cependant, les fonctions à plusieurs paramètres sont représentables en considérant qu'une suite d'abstractions définit une suite de paramètres : par exemple, le λ-terme $\Lambda\alpha.\lambda x^\alpha.x$ peut représenter une fonction à deux paramètres, α et x. Pour cela, il faut étendre l'utilité à la lumière de cette représentation en exigeant que toute fonction utile appliquée à l'argument témoin de cette utilité produise une fonction également utile.

La définition de l'utilité dans les λ-calculs du second ordre n'est pas immédiate car ces systèmes sont *imprédicatifs* : on peut instancier une variable quantifiée par n'importe quel type ; ainsi le λ-terme $\Lambda\alpha.\lambda x^\alpha.x$, d'arité deux en apparence, se révèle ne pas avoir d'arité précise ; en effet, si on l'applique à son propre type $\forall\alpha.\alpha \to \alpha$, puis à lui-même, on obtient par réduction le même λ-terme $\Lambda\alpha.\lambda x^\alpha.x$. Cette difficulté nous a poussé à définir l'utilité à l'aide d'un point fixe, celui de la propriété définie ci-dessous :

Définition 5.4.1. *Soit C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} t : F$. Soit $\mathcal{U}(t, F)$ une propriété portant sur t un λ-terme et F un type. Pour tout λ-terme t et tout type F, on définit la propriété $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ par récurrence sur F :*

- *$F = \top$: $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ si et seulement si le jugement $\vdash^2_{\mathrm{id}} t : F$ est dérivable ;*
- *$F = \alpha$: $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ si et seulement si le jugement $\vdash^2_{\mathrm{id}} t : F$ est dérivable ;*
- *$F = A \to B$: $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ si et seulement si il existe un λ-terme u clos tel que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{id}} tu : B$ soit dérivable et que $\mathcal{H}(\mathcal{U}, tu, B)$;*
- *$F = \forall\alpha.A$: $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ si et seulement si il existe un type U clos tel que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{id}} tU : [\alpha\backslash U]\cdot A$ soit dérivable et que $\mathcal{U}(tU, [\alpha\backslash U]\cdot A)$.*

Nous souhaitons faire appel au théorème de point fixe de Knaster-Tarski ; il nous faut alors prouver que la propriété $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ est croissante par rapport à l'argument $\mathcal{U}$:

Lemme 5.4.1. *Soit C un calcul dont la morphologie est constitué par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^2_{\mathrm{id}} t : F$. Soient $\mathcal{U}(t, F)$ et $\mathcal{U}'(t, F)$ deux propriétés portant sur t un λ-terme et F un type. Si pour tout λ-terme t et tout type F on a $\mathcal{U}(t, F)$ implique $\mathcal{U}'(t, F)$, alors $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ implique $\mathcal{H}(\mathcal{U}', t, F)$.*

Démonstration. Par récurrence sur F :

- $F = \top$: $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$ ne dépend pas de $\mathcal{U}$; donc le résultat est immédiat ;
- $F = \alpha$: analogue au cas précédent ;
- $F = A \to B$: supposons que $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$; par définition, il existe un λ-terme u clos tel que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{id}} tu : B$ soit dérivable et que $\mathcal{H}(\mathcal{U}, tu, B)$; par hypothèse de récurrence, $\mathcal{H}(\mathcal{U}', tu, B)$; ainsi $\mathcal{H}(\mathcal{U}', t, F)$;
- $F = \forall\alpha.A$: supposons que $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$; par définition, il existe un type U clos tel que le jugement $\vdash^2_{\mathrm{id}} tU : [\alpha\backslash U]\cdot A$ soit dérivable et que $\mathcal{U}(tU, [\alpha\backslash U]\cdot A)$; donc $\mathcal{U}'(tU, [\alpha\backslash U]\cdot A)$; ainsi $\mathcal{H}(\mathcal{U}', t, F)$.

□

Nous pouvons ainsi construire le point fixe de la propriété $\mathcal{H}(\mathcal{U}, t, F)$:

Lemme 5.4.2. *Soit C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^2_{\text{id}} t : F$. Il existe une propriété $\mathcal{U}(t,F)$ portant sur t un λ-terme et F un type telle que pour tout λ-terme t et tout type F, $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si $\mathcal{H}(\mathcal{U},t,F)$.*

Démonstration. D'après le lemme 5.4.1, la propriété $\mathcal{H}(\mathcal{U},t,F)$ est croissante par rapport à $\mathcal{U}$; ainsi, d'après le théorème de point fixe de Knaster-Tarski, il existe une propriété $\mathcal{U}(t,F)$ telle que pour tout λ-terme t et tout type F, $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si $\mathcal{H}(\mathcal{U},t,F)$. □

Le prédicat $\mathcal{U}$, défini dans le précédent lemme, possède des propriétés qui ne sont pas exprimables par récurrence sur ses arguments car elles seraient alors mal fondées ; elles motivent la construction de $\mathcal{U}$ par point fixe :

Lemme 5.4.3. *Soit C un calcul supposé cohérent dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^2_{\text{id}} t : F$. Soit $\mathcal{U}(t,F)$ la propriété définie dans le lemme 5.4.2 ; pour tout λ-terme t et pour tout type F :*
- *si $F = \top$ ou $F = \alpha$ alors $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si le jugement $\vdash^2_{\text{id}} t : F$ est dérivable ;*
- *si $F = A \rightarrow B$ alors $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si il existe un λ-terme u clos tel que le jugement $\vdash^2_{\text{id}} tu : B$ soit dérivable et que $\mathcal{U}(tu,B)$;*
- *si $F = \forall\alpha.A$ alors $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si il existe un type U clos tel que le jugement $\vdash^2_{\text{id}} tU : [\alpha\backslash U]\cdot A$ soit dérivable et que $\mathcal{U}(tU,[\alpha\backslash U]\cdot A)$.*

Démonstration. Par cas sur F :
- $F = \top$: par définition de $\mathcal{H}(\mathcal{U},t,F)$, $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si le jugement $\vdash^2_{\text{id}} t : F$ est dérivable ;
- $F = \alpha$: analogue au cas précédent ;
- $F = A \rightarrow B$: par définition de $\mathcal{H}(\mathcal{U},t,F)$, $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si il existe un λ-terme u clos tel que le jugement $\vdash^2_{\text{id}} tu : B$ soit dérivable et que $\mathcal{H}(\mathcal{U},tu,B)$, et par définition de $\mathcal{U}(tu,B)$, nous avons $\mathcal{H}(\mathcal{U},tu,B)$ si et seulement si $\mathcal{U}(tu,B)$;
- $F = \forall\alpha.A$: par définition de $\mathcal{H}(\mathcal{U},[],t,F)$, $\mathcal{U}(t,F)$ si et seulement si il existe un type U clos tel que le jugement $\vdash^2_{\text{id}} tU : [\alpha\backslash U]\cdot A$ soit dérivable et que $\mathcal{U}(tU,[\alpha\backslash U]\cdot A)$.

□

Grâce à la propriété $\mathcal{U}$ construite dans le lemme 5.4.2, nous sommes en mesure de définir formellement ce que signifie être utile pour un λ-terme du second ordre :

Définition 5.4.2. *Soit C un calcul dont la morphologie est constituée par l'ensemble des jugements de la forme $\Gamma \vdash^2_{\text{id}} t : F$. Soit $\mathcal{U}(t,F)$ la propriété définie dans le lemme 5.4.2. Soit t un λ-terme tel qu'il existe un jugement $\Gamma \vdash^2_{\text{id}} t : F$ dérivable.*

Le λ-terme t est utile *dans C quand $\mathcal{U}(\Lambda\overline{\alpha}.\lambda\overline{x}^{\Gamma}.t, \forall\overline{\alpha}.\Gamma \to F)$. Le λ-terme t est* inutile *dans C quand il n'est pas utile.*

On se rend compte immédiatement qu'il existe des λ-termes inutiles dans $\lambda\mathrm{C}^2$, en particulier ceux qui font intervenir des types absurdes :

Proposition 5.4.4. *Il existe un λ-terme inutile dans $\lambda\mathrm{C}^2$.*

Démonstration. Le jugement $\vdash^2_\lambda \lambda x^\perp.x : \perp \to \perp$ est aisément dérivable ; comme $\lambda\mathrm{C}^2$ est cohérent, il n'existe aucun terme u tel que le jugement $\vdash^2_\lambda u : \perp$ soit dérivable ; donc le terme $\lambda x^\perp.x$ est inutile dans $\lambda\mathrm{C}^2$. □

En revanche, comme nous le supposions, tous les λ-termes apparaissant dans les dérivations de P-$\lambda\mathrm{C}^2$ sont utiles. On commence par prouver l'utilité dans P-$\lambda\mathrm{C}^2$ de tous les λ-termes clos typables :

Lemme 5.4.5. *Pour tout jugement dérivable $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$, tel que le λ-terme t soit clos, la propriété $\mathcal{U}(t, F)$ est vérifiée.*

Démonstration. Par récurrence sur la longueur de F ; nous présentons la récurrence par cas sur F :

- $F = \top$: par hypothèse, le jugement $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$ est dérivable ; donc $\mathcal{U}(t, F)$;
- $F = \alpha$: analogue au cas précédent ;
- $F = A \to B$: A est motivable dans P-$\lambda\mathrm{C}^2$ d'après la proposition 5.2.1 ; comme A est clos, il existe un λ-terme u tel que le jugement $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} u : A$ est dérivable ; donc le jugement $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} tu : B$ est dérivable ; de plus, $\mathcal{U}(tu, B)$ par hypothèse de récurrence ; ainsi $\mathcal{U}(t, F)$;
- $F = \forall\alpha.A$: le jugement $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : \forall\alpha.A$ est dérivable par hypothèse ; donc le jugement $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t\top : [\alpha\backslash\top]{\cdot}A$ est dérivable ; de plus $\mathcal{U}(t\top, [\alpha\backslash\top]{\cdot}A)$ par hypothèse de récurrence ; ainsi $\mathcal{U}(t, F)$.

□

Puis on généralise l'utilité des termes clos à celle des termes quelconques :

Proposition 5.4.6. *Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} t : F$, le λ-terme t est utile dans* P-$\lambda\mathrm{C}^2$.

Démonstration. Le λ-terme $\Lambda\overline{\alpha}.\lambda\overline{x}^{\Gamma}.t$ est clos ; donc $\mathcal{U}(\Lambda\overline{\alpha}.\lambda\overline{x}^{\Gamma}.t, \forall\overline{\alpha}.\Gamma \to F)$ d'après le lemme 5.4.5 ; ainsi le λ-terme t est utile dans P-$\lambda\mathrm{C}^2$. □

5.5 Traduction CPS

Les traductions CPS (*Continuations Passing Style*) constituent une technique de compilation utilisée pour simplifier la compilation des langages de programmation fonctionnels [1]. Au niveau des types, les traductions CPS correspondent à des interprétations de la logique classique dans la logique intuitionniste fondées sur les traductions négatives de Gödel, Kolmogorov ou Kuroda. Nous allons adapter la γ-traduction étudiée dans le chapitre 2 pour plonger λC^2 dans P-λC^2 en nous inspirant de la traduction négative de Kolmogorov [24] telle qu'elle est utilisée dans le travail de De Groote [9] :

Définition 5.5.1. *Soit F un type et γ une variable fraîche pour F. Nous définissons la γ-traduction F^γ du type F par récurrence sur F :*
$F = \top : F^\gamma = \neg_\gamma \top$;
$F = \alpha : F^\gamma = \neg_\gamma \alpha$;
$F = A \to B : F^\gamma = \neg_\gamma (A^\gamma \to B^\gamma)$;
$F = \forall\alpha.A \;\; F^\gamma = \neg_\gamma(\forall\alpha.A^\gamma)$.
Nous définissons le type $F^{\gamma--}$ par l'unique type tel que $F^\gamma = \neg_\gamma F^{\gamma--}$, et nous écrivons $F^{\gamma-}$ le type $\neg_\gamma F^{\gamma--}$.

Pour que les λ-termes typables par F dans λC^2 puisse être typé par F^γ, nous devons les modifier selon la transformation CPS suivante, basée sur la traduction CPS en appel par nom de Plotkin [33] :

Définition 5.5.2. *Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$ nous définissons la* traduction CPS $\underline{t}$ *du λ-terme t par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$; les λ-variables k et m utilisées dans cette définitions sont deux variables distinctes fraîches pour t :*

$$\frac{}{\Gamma \vdash^2_\lambda o : \top}\,(\mathrm{Ax}) \;:\; \underline{o} = \lambda k^{\top^{\gamma-}}.ko\,;$$

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash^2_\lambda x : F}\,(\mathrm{Hyp}) \;:\; \underline{x} = \lambda k^{F^{\gamma-}}.xk\,;$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^2_\lambda f : B}{\Gamma \vdash^2_\lambda \lambda x^A.t : A \to B}\,(\to_{\mathrm{i}}) \;:\; \underline{\lambda x^A.f} = \lambda k^{(A\to B)^{\gamma-}}.k(\lambda x^{A^\gamma}.\underline{f})\,;$$

$$-\;(\frac{\Gamma \vdash^2_\lambda f : A \to F \quad \Gamma \vdash^2_\lambda g : A}{\Gamma \vdash^2_\lambda fg : F}\,(\to_{\mathrm{e}}) \;:]\; \underline{fg} = \lambda k^{F^{\gamma-}}.\underline{f}(\lambda m^{A^\gamma \to F^\gamma}.m\underline{g}k)\,;$$

$$\frac{\Gamma \vdash^2_\lambda f : A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2_\lambda \Lambda\alpha.f : \forall\alpha.A}\,(\forall_{\mathrm{i}}) \;:\; \underline{\Lambda\alpha.f} = \lambda k^{\forall\alpha.A^{\gamma-}}.k(\Lambda\alpha.\underline{f})\,;$$

$$\frac{\Gamma \vdash^2_\lambda f : \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash^2_\lambda fU : [\alpha\backslash U]\cdot A}\,(\forall_{\mathrm{e}}) \;:\; \underline{fU} = \lambda k^{([\alpha\backslash U]\cdot A)^{\gamma-}}.\underline{f}(\lambda m^{\forall\alpha.A^\gamma}.mU^{\gamma--}k)\,;$$

$$\frac{\Gamma \vdash^2_\lambda t : G \quad G =_\alpha F}{\Gamma \vdash^2_\lambda t : F}\,(=_\alpha) \;:\; \underline{t} = \underline{t}\,;$$

Les traductions CPS ont la propriété de ne pas altérer la relation de β-équivalence : deux λ-termes sont β-équivalents si et seulement si leurs traductions CPS le sont. De plus, l'évaluation des λ-termes est correctement simulée par l'évaluation de leurs traductions CPS. L'étude complète de ces propriétés dépasse le cadre de cette thèse ; nous encourageons le lecteur à se référer aux travaux menés dans [1], [9], [30] et [35]. Le résultat principal de cette section est contenu dans la proposition 5.5.6 : pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$, le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{t} : F^\gamma$ est dérivable. Compte tenu des propriétés algorithmiques des traductions CPS, ce résultat met en évidence la possibilité de représenter fidèlement et pédagogiquement les programmes typables dans $\lambda\mathrm{C}^2$ à l'intérieur de P-$\lambda\mathrm{C}^2$. Comme toujours dans les systèmes d'ordre supérieur, nous avons besoin d'un lemme de substitution :

Lemme 5.5.1. *Pour tout type F et U, nous avons $[\gamma \backslash U^{\gamma--}] \cdot F^\gamma = ([\alpha \backslash U] \cdot F)^\gamma$.*

Démonstration. Immédiat par induction sur F. □

Dans notre contexte pédagogique, il convient que les types soient tous motivables ; il faut alors prouver que la γ-traduction transforme n'importe quel type en un type motivable :

Lemme 5.5.2. *Notons μ la substitution $[\gamma \backslash \top]$. Soient F un type et Γ un contexte motivable dans* P-$\lambda\mathrm{C}^2$*. Pour toute variable γ fraîche pour $\Gamma \cup \{F\}$, le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot F^\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur F :

$F = \top$: nous avons $\mu \cdot \top^\gamma = (\top \to \top) \to \top$ et le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} (\top \to \top) \to \top$ est aisément dérivable ;

$F = \alpha$: nous avons $\mu \cdot \alpha^\gamma = (\alpha \to \top) \to \top$ et le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} (\alpha \to \top) \to \top$ est aisément dérivable ;

$F = A \to B$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot A^\gamma$ est dérivable ; le contexte $\Gamma \cup \{x : \mu \cdot A^\gamma\}$ est motivable dans P-$\lambda\mathrm{C}^2$; ainsi, par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma, x : \mu \cdot A^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot B^\gamma$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot (A^\gamma \to B^\gamma)$ avec la règle $(\to_\mathrm{i})$; d'après le lemme 5.2.1, le type $\mu \cdot (A^\gamma \to B^\gamma)$ est motivable dans P-$\lambda\mathrm{C}^2$; donc le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} (\mu \cdot (A^\gamma \to B^\gamma) \to \top) \to \top$ est aisément dérivable ; nous avons $(\mu \cdot (A^\gamma \to B^\gamma) \to \top) \to \top = \mu \cdot (A \to B)^\gamma$; ainsi nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot (A \to B)^\gamma$;

$F = \forall \alpha.A$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot A^\gamma$ est dérivable ; nous dérivons alors le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \forall \alpha.\mu \cdot A^\gamma$ avec la règle $(\forall_\mathrm{i})$; nous avons $\gamma \neq \alpha$; donc nous avons $\forall \alpha.\mu \cdot A^\gamma = \mu \cdot \forall \alpha.A^\gamma$; ainsi nous avons une dérivation de $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot \forall \alpha.A^\gamma$; le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} (\mu \cdot (\forall \alpha.A^\gamma) \to \top) \to \top$ est aisément dérivable ; nous avons $(\mu \cdot (\forall \alpha.A^\gamma) \to \top) \to \top = \mu \cdot (\forall \alpha.A)^\gamma$; donc nous avons une dérivation du jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu \cdot (\forall \alpha.A)^\gamma$.

□

Pour des raisons techniques, pour tout type F il faut également pouvoir motiver les types $F^{\gamma-}$ et $F^{\gamma--}$:

Lemme 5.5.3. *Notons μ la substitution $[\gamma\backslash\top]$. Soient F un type et Γ un contexte motivable dans* P-λC². *Pour toute variable γ fraîche pour $\Gamma \cup \{F\}$, le jugement $\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \mu\cdot F^{\gamma-}$ est dérivable.*

Démonstration. Analogue à la preuve du lemme précédent. □

Lemme 5.5.4. *Pour tout type F et pour toute variable γ fraîche pour F, le type $F^{\gamma--}$ est motivable dans* P-λC².

Démonstration. Par cas sur F : quand $F = \top$ ou $F = \alpha$, le type $F^{\gamma--}$ est aisément motivable, et les autres cas sont la conséquence des lemmes 5.5.2 et 5.2.1. □

La γ-traduction ne doit pas altérer le sens des formules relatif aux variables quantifiées ; donc notre traduction doit rester stable par rapport aux renommage des variables quantifiées :

Lemme 5.5.5. *Pour tout type F et G, si $F =_\alpha G$ alors $F^\gamma =_\alpha G^\gamma$.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $F =_\alpha G$:

$\dfrac{}{\top =_\alpha \top}\ (\alpha_\top)$: nous avons $\top^\gamma = \top^\gamma$; ainsi nous avons $\top^\gamma =_\alpha \top^\gamma$;

$\dfrac{}{\alpha =_\alpha \alpha}\ (\alpha_{\mathrm{var}})$: nous avons $\alpha^\gamma = \alpha^\gamma$; ainsi nous avons $\alpha^\gamma =_\alpha \alpha^\gamma$;

$\dfrac{A =_\alpha A' \quad B =_\alpha B'}{A \to B =_\alpha A' \to B'}\ (\alpha_\to)$: par hypothèse de récurrence, nous avons $A^\gamma =_\alpha A'^\gamma$ et $B^\gamma =_\alpha B'^\gamma$; ainsi nous avons $(A \to B)^\gamma =_\alpha (A' \to B')^\gamma$ à l'aide de la règle $(\alpha_\to)$;

$\dfrac{[\alpha\backslash\delta]\cdot A =_\alpha [\beta\backslash\delta]\cdot B \quad \delta \in \mathrm{Fr}(A, B)}{\forall\alpha.A =_\alpha \forall\beta.B}\ (\alpha_\forall)$: nous pouvons supposer que $\delta \neq \gamma$; par hypothèse de récurrence, nous avons $[\alpha\backslash\delta]\cdot A^\gamma =_\alpha [\beta\backslash\delta]\cdot B^\gamma$; d'après le lemme 5.5.1, nous avons $[\alpha\backslash\delta]\cdot A^\gamma = [\alpha\backslash\delta^{\gamma--}]\cdot A^\gamma$ et $[\beta\backslash\delta]\cdot A^\gamma = [\beta\backslash\delta^{\gamma--}]\cdot B^\gamma$; nous avons $\delta^{\gamma--} = \delta$; ainsi nous avons $[\alpha\backslash\delta]\cdot A^\gamma =_\alpha [\beta\backslash\delta]\cdot B^\gamma$; nous avons $\forall\alpha.A^\gamma =_\alpha \forall\beta.B^\gamma$ à l'aide de la règle $(\alpha_\forall)$; ainsi nous dérivons aisément $\forall\alpha.A^\gamma =_\alpha \forall\beta.B^\gamma$.

□

Nous démontrons maintenant la proposition principale :

Proposition 5.5.6. *Pour tout jugement dérivable $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$, le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{t} : F^\gamma$ est dérivable.*

Démonstration. Par récurrence sur la dérivation de $\Gamma \vdash^2_\lambda t : F$:

$$\frac{}{\Gamma \vdash^2_\lambda o : \top}\ (\mathrm{Ax}) \quad :$$

1) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}\Gamma^\gamma$ d'après le lemme 5.5.2 ;
2) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}\top^{\gamma-}$ d'après le lemme 5.5.3 ;
3) $\Gamma^\gamma, k : \top^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k : \top^{\gamma-}$ par (P-Hyp),1 et 2 ;
4) $\Gamma^\gamma, k : \top^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} o : \top$ par (P-Ax),1 et 2 ;
5) $\Gamma^\gamma, k : \top^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} ko : \gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$,3 et 4 ;
6) $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda k^{\top^{\gamma-}}.ko : \top^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 5 ;

ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{o} : \top^\gamma$ est dérivable ;

$$\frac{x : F \in \Gamma}{\Gamma \vdash^2_\lambda x : F}\ (\mathrm{Hyp}) :$$ 1) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}\Gamma^\gamma$ d'après le lemme 5.5.2 ;
2) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}F^{\gamma-}$ par le lemme 5.5.3 ;
3) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k : F^{\gamma-}$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
4) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} x : F^\gamma$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
5) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} xk : \gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$, 3 et 4 ;
6) $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda k^{F^{\gamma-}}.xk : F^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 5 ;

ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{x} : F^\gamma$ est dérivable ;

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash^2_\lambda f : B}{\Gamma \vdash^2_\lambda \lambda x^A.f : A \to B}\ (\to_\mathrm{i}) :$$ 1) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}(\Gamma^\gamma, A^\gamma)$ d'après le lemme 5.5.2 ;
2) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}(A \to B)^{\gamma-}$ d'après le lemme 5.5.3 ;
3) $\Gamma^\gamma, k : (A \to B)^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k : (A \to B)^{\gamma-}$ par (P-Hyp), 1 et 2 ;
4) $\Gamma^\gamma, k : (A \to B)^{\gamma-}, x : A^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{f} : B^\gamma$ par hypothèse de récurrence et (P-Aff) ;
5) $\Gamma^\gamma, k : (A \to B)^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda x^{A^\gamma}.\underline{f} : (A \to B)^{\gamma--}$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 4 ;
6) $\Gamma^\gamma, k : (A \to B)^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k(\lambda x^{A^\gamma}.\underline{f}) : \gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$,3 et 5 ;
7) $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda k^{(A\to B)^{\gamma-}}.k(\lambda x^{(A\to B)^{\gamma--}}.\underline{f}) : (A \to B)^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 6 ;

ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{\lambda x^A.f} : F^\gamma$ est dérivable ;

$$\frac{\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} f : A \to F \quad \Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} g : A}{\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} fg : F}\ (\to_\mathrm{e}) \quad :$$

1) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}\Gamma^\gamma$ d'après le lemme 5.5.2 ;
2) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}F^{\gamma-}$ d'après le lemme 5.5.3 ;
3) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]{\cdot}(A^\gamma \to F^\gamma)$ d'après le lemme 5.5.4 ;
4) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{f} : (A \to F)^\gamma$ par hypothèse de récurrence et (P-Aff) ;
5) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : A^\gamma \to F^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} m : A^\gamma \to F^\gamma$ par (P-Hyp)1, 2 et 3 ;
6) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : A^\gamma \to F^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{g} : A^\gamma$ par hypothèse de récurrence et (P-Aff) ;
7) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : A^\gamma \to F^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} m\underline{g} : F^\gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$,5 et 6 ;
8) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : A^\gamma \to F^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k : F^{\gamma-}$ par (P-Hyp), 1, 2 et 3 ;

9) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : A^\gamma \to F^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} m\underline{g}k : \gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$,7 et 8 ;
10) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda m^{A^\gamma \to F^\gamma}.m\underline{g}k : (A \to F)^{\gamma-}$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 9 ;
11) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{f}(\lambda m^{A^\gamma \to F^\gamma}.m\underline{g}k) : \gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$, 4 et 10 ;
12) $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda k^{F^{\gamma-}}.\underline{f}(\lambda m^{A^\gamma \to F^\gamma}.m\underline{g}k) : F^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 11 ;
ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{fg} : F^\gamma$ est dérivable ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_\lambda f : A \quad \alpha \notin \mathrm{Vl}(\Gamma)}{\Gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \Lambda\alpha.f : \forall\alpha.A}$ $(\forall_\mathrm{i})$: 1) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot\Gamma^\gamma$ d'après le lemme 5.5.2 ;
2) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot(\forall\alpha.A)^{\gamma-}$ d'après le lemme 5.5.3 ;
3) $\Gamma^\gamma, k : (\forall\alpha.A)^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k : \forall\alpha.A^{\gamma-}$ par (P-Hyp),1 et 2 ;
4) $\Gamma^\gamma, k : (\forall\alpha.A)^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{f} : A^\gamma$ par hypothèse de récurrence et (P-Aff) ;
5) $\Gamma^\gamma, k : (\forall\alpha.A)^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \Lambda\alpha.\underline{f} : (\forall\alpha.A)^{\gamma--}$ par $(\forall_\mathrm{i})$ et 4 ;
6) $\Gamma^\gamma, k : (\forall\alpha.A)^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k(\Lambda\alpha.\underline{f}) : \gamma$ apr $(\to_\mathrm{e})$,3 et 5 ;
7) $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda k^{(\forall\alpha.A)^{\gamma-}}.k(\Lambda\alpha.\underline{f}) : (\forall\alpha.A)^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 6 ;
ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{\Lambda\alpha.f} : (\forall\alpha.A)^\gamma$ est dérivable ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_\lambda f : \forall\alpha.A}{\Gamma \vdash^2_\lambda fU : [\alpha\backslash U]\cdot A}$ $(\forall_\mathrm{e})$: 1) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot\Gamma^\gamma$ d'après le lemme 5.5.2 ;
2) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot F^{\gamma-}$ d'après le lemme 5.5.3 ;
3) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top]\cdot(\forall\alpha.A^\gamma)$ d'après le lemme 5.5.4 ;
4) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{f} : (\forall\alpha.A)^\gamma$ par hypothèse de récurrence et (P-Aff) ;
5) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : \forall\alpha.A^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} m : \forall\alpha.A^\gamma$ par (P-Hyp),1, 2 et 3 ;
6) $\vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} [\gamma\backslash\top] \cdot U^{\gamma--}$ d'après le lemme 5.5.4 ;
7) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : \forall\alpha.A^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} mU^{\gamma--} : F^\gamma$ par $(\forall_\mathrm{e})$, 5, 6 et le lemme 5.5.1 ;
8) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : \forall\alpha.A^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} k : F^{\gamma-}$ par (P-Hyp),1, 2 et 3 ;
9) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-}, m : \forall\alpha.A^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} mU^{\gamma--}k : \gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$, 7 et 8 ;
10) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda m^{\forall\alpha.A^\gamma}.mU^{\gamma--}k : (\forall\alpha.A)^{\gamma-}$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 9 ;
11) $\Gamma^\gamma, k : F^{\gamma-} \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{f}(\lambda m^{A^\gamma \to F^\gamma}.mU^{\gamma--}k) : \gamma$ par $(\to_\mathrm{e})$, 4 et 10 ;
12) $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \lambda k^{F^{\gamma-}}.\underline{f}(\lambda m^{A^\gamma \to F^\gamma}.mU^{\gamma--}k) : F^\gamma$ par $(\to_\mathrm{i})$ et 11 ;
ainsi le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{fU} : ([\alpha\backslash U]\cdot A)^\gamma$ est dérivable ;

$\dfrac{\Gamma \vdash^2_\lambda t : G}{\Gamma \vdash^2_\lambda t : F}$ $(=_\alpha)$: par hypothèse de récurrence, le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{t} : G^\gamma$ est dérivable ; d'après le lemme 5.5.5, nous avons $G^\gamma =_\alpha F^\gamma$; ainsi nous dérivons le jugement $\Gamma^\gamma \vdash^2_{\lambda\mathrm{p}} \underline{t} : F^\gamma$ avec la règle $(=_\alpha)$.

□

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons construit toute une série de systèmes formels propositionnels qui nous ont aidés à mieux comprendre la nature et les propriétés méta-mathématiques de la contrainte pédagogique. Du calcul minimal au calculs d'ordre supérieur, chaque petite altération montre à quel point une logique est un édifice fragile et le moindre détail peut détruire des propriétés importantes : à chaque étape, nous avons tenté de vérifier méta-mathématiquement les attentes que nous avions face aux systèmes pédagogiques, quitte à exhiber des contre-exemples quand elles n'étaient pas satisfaites. Dans tous les cas, nous avons étudié la non-nullité des jugements, des implications, syntaxiquement et parfois sémantiquement ; nous avons également jaugé l'expressivité des nouveaux systèmes par rapport aux anciens ; tout cela afin d'obtenir des systèmes pédagogiques solides et expressifs.

Parmi tous les systèmes formels introduits, les plus intéressants sont les systèmes P-CPM et P-CP^n pour $n \in [\![2;\omega]\!]$: ils méritent pleinement d'être qualifiés de pédagogiques. Ils admettent tous la non-nullité des implications tout en restant aussi expressifs que les systèmes intuitionnistes usuels dont ils sont issus : CPM et CP^n. En cours d'étude, nous nous sommes rendus compte de l'importance de certaines notions, comme par exemple les motivations triviales ; en effet, dans tout ces systèmes pédagogiques, toutes les formules motivables admettent la même motivation, la plus simple de toutes : la motivation $\top$. Cette caractéristique a de nombreuses contreparties, philosophiques tout d'abord car elle constitue l'expression mathématique que pour un énoncé sensé il n'y a qu'une seule manière d'être vrai : les objets effectifs n'ont qu'une seule modalité d'existence ; formelles ensuite car c'est grâce à elle que l'isomorphisme de Curry-Howard est applicable aux systèmes formels pédagogiques, permettant ainsi l'apparition de systèmes fonctionnels pédagogiques sous la forme de λ-calculs typés : nous sommes alors en mesure de spécifier pédagogiquement des programmes informatiques. À notre connaissance, aucun système fonctionnel sans négation n'a été conçu avant les λ-calculs pédagogiques, excepté le λ-calcul simplement typé puisqu'il est naturellement positif. De plus, les propriétés des systèmes formels se transportent dans les systèmes fonctionnels, ce qui nous a permis d'introduire la notion d'utilité dans les λ-calculs :

un programme est utile quand son contenu algorithmique est utilisable.

Il est notable que tous les chercheurs s'étant penchés sur les mathématiques sans négation n'aient jamais commencé par l'étude des logiques propositionnelles : leur travail concerne exclusivement les logiques des prédicats. De ce point de vue, une remarque de Heyting dans [20] est frappante : il y affirme que, sans négation, il n'y aurait aucun calcul propositionnel parce que dans ce cas seules les propositions vraies ont un sens. À ce niveau de notre étude, nous pouvons affirmer que d'une part seules le propositions vraies créent du sens car les formules pédagogiques sont héréditairement trivialement motivables, et que d'autre part la présente thèse n'existerait pas si il n'y avait aucun calcul propositionnel sans négation : nous pensons avoir comblé un manque dans ce domaine. La suite naturelle de notre travail rejoint les préoccupations des autres chercheurs car elle concerne la pédagogisation des calculs des prédicats et de leurs systèmes fonctionnels associés. La plupart des outils nécessaires ont été développés et utilisés dans les systèmes propositionnels ; en particulier, la notion de formule uniformément motivable est primordiale dans l'étude des calculs des prédicats pédagogiques.

Bibliographie

[1] A. W. Appel, “Compiling with Continuations” Cambridge University Press, 1992.

[2] H. P. Barendregt, “Lambda Calculi with Types” Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 2, (1992).

[3] A. Church, “A set of postulates for the foundation of logic” Annals of Mathematics, Ser. 2, Vol. 33, (1932), pp. 346–366.

[4] A. Church, “A formulation of the simple theory of types” Journal of Symbolic Logic, Vol. 5, (1940), pp. 56-58.

[5] L. Colson, “Quelques remarques sur l’environnement dans la Théorie Intuitionniste des Types” D.E.A. report, University of Paris Sud - Orsay, (September 1986).

[6] L. Colson, D. Michel, “Pedagogical Natural Deduction Systems : the Propositional Case” Journal of Universal Computer Science 13(10), (2007), pp. 1396-1410.

[7] L. Colson and D. Michel, “ Pedagogical Second-order Propositional Calculi” Journal of Logic and Computation 18(4), (2008), pp. 669-695.

[8] H. B. Curry, “Functionality in Combinatory Logic” Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 20, pp. 584-590.

[9] P. de Groote, “A CPS-Translation of the $\lambda\mu$-Calculus” Lecture Notes in Computer Science, Vol. 787, Springer Verlag, (1994), pp 85-99.

[10] H. Friedman “Classically and Intuitionistically Provably Recursive Functions” Higher Set Theory, Springer Lecture Notes, Vol. 669, (1978), pp. 21-27.

[11] G. Gentzen, “Investigations into Logical Deduction” Mathematische Zeitschrift 39, (1935), pp. 176-210, 405-431.
Reprinted in “The Collected Papers of Gerhard Gentzen” Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland (1969).

[12] P.C.G. Gilmore, “The Effect of Griss’ Criticism of the Intuitionistic Logic on Deductive Theories Formalized within the Intuitionistic logic” Indagationes Mathematicæ 15, (1953), pp. 162-174, 175-186.

[13] J.-Y. Girard, “Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures dans l'arithmétique d'ordre supérieur” Thèse d'état, Université de Paris 7, (1972).

[14] K. Gödel, “Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie” Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4 (1933), pp. 34-38.

[15] G.F.C. Griss, “Negationless Intuitionistic Mathematics” Indagationes Mathematicæ 8, (1946), pp. 675-681.

[16] G.F.C. Griss, “Negationless Intuitionistic Mathematics II” Indagationes Mathematicæ 12, (1950), pp. 108-115.

[17] G.F.C. Griss, “Negationless Intuitionistic Mathematics III” Indagationes Mathematicæ 13, (1951), pp. 193-199.

[18] G.F.C. Griss, “Negationless Intuitionistic Mathematics IVa, IVb” Indagationes Mathematicæ 13, (1951), pp. 452-462, 463-471.

[19] A. Heyting, “Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweisteorie” Springer (1934).

[20] A. Heyting, “Intuitionism : an Introduction.” Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland (1956).

[21] W. Howard, “The formulae-as-types notion of construction.” To H. B. Curry : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, Academic Press Limited (1980), pp. 479-490, manuscript original de 1969.

[22] S. C. Kleene, “Introduction to Metamathematics” North-Holland (1952).

[23] A. N. Kolmogorov, “Zur Deutung der intuitionistischen Logik” Mathematische Zeitschrift, Vol. 35, (1932), pp. 58–65.

[24] A. N. Kolmogorov, “On the principle of the excluded middle” (russe) Matematicheskij Sbornik, Vol. 32, (1925), pp. 646-667. Traduction anglaise dans [38], pp. 414-437.

[25] V.N. Krivtsov, “A Negationless Interpretation of Intuitionistic Theories I” Studia Logica 64(3), (2000), pp. 323-344.

[26] V.N. Krivtsov, “A Negationless Interpretation of Intuitionistic Theories II” Studia Logica 65(2), (2000), pp. 155-179.

[27] V. F. Mezhlumbekova, “Deductive Capabilities of Negationless Intuitionistic Arithmetic” Moscow University Mathematical Bulletin, Vol. 30(2), (1975)

[28] V. F. Mezhlumbekova, “ The system of negationless calculus of predicates with meaningfulness operator” Transactions of NAS of Azerbaijan, Vol. 4, Num. XXIII, (2003), pp. 109-112.

[29] G. Mints, “Notes on Constructive Negation” Synthese, Vol. 148(3), (2006), pp. 701-717.

[30] C. R. Murthy, " Extracting Constructive Content from Classical Proofs " Ph.D. Thesis, Cornell University, 1990.

[31] D. Nelson, "Non-null Implication" Journal of Symbolic Logic 31, (1966), pp. 562-572.

[32] D. Nelson, "A Complete Negationless System" Studia Logica 32, (1973), pp. 41-49.

[33] G. D. Plotkin, "Call-by-name, call-by-value and the λ-calculus" Theoretical Computer Science, Vol. 1, (1975), pp. 125-159.

[34] H. Poincaré, "Dernières pensées" Flammarion, Paris (1913). English translation in "Last thoughts", Dover Publications, N. Y., (1963).

[35] D. Prawitz, "Natural Deduction, a Proof-theoretical Study." Almquist and Wiksell, Stockholm (1965).

[36] A.S. Troelstra and D. Van Dalen, "Constructivism in Mathematics : an Introduction" Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland (1988), volume 2.

[37] V. Valpola, "Ein System der negationslosen Logik mit ausschliesslich realisierbaren Prädicaten" Acta Philosophica Fennica 9, (1955), pp. 1-247.

[38] J. Van Heijenhoort, "From Frege to Gödel : a source book in mathematical logic, 1879-1931" Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, (1967).

[39] P.G.J. Vredenduin, "The Logic of Negationless Mathematics" Compositio Mathematica 11, (1953), pp. 204-277.