



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 10 novembre 2008 à 14h dans la Salle FERRARI

par

**Yao KOUTSAWA**

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz**

**Discipline : Mécanique**

## **Modélisation et conception multi-échelles des matériaux : de la description atomique discrète aux modèles du continu. Application aux propriétés amortissantes des pare-brises**

### **Composition du jury**

<i>Rapporteurs :</i>	Professeur Lahcen AZRAR Professeur Jean-François MOLINARI	Faculté des Sciences et Techniques de Tanger, Maroc Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse
<i>Examineurs :</i>	Professeur Yves H. BERTHELOT Professeur Samuel FOREST Professeur Olivier POLIT Professeur Sonnou TIEM	Georgia Institute of Technology, USA Ecole des Mines de Paris, France Université Paris X-Nanterre, France Université de Lomé, Togo
<i>Directeurs :</i>	Professeur El Mostafa DAYA Professeur Mohammed CHERKAOUI	Université Paul Verlaine-Metz, France Georgia Institute of Technology, USA

Mis en page avec la classe thyao.

## Remerciements

C'est au Laboratoire de Physique et Mécanique de Matériaux de l'Université Paul Verlaine-Metz, que le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Messieurs les professeurs El Mostafa DAYA et Mohammed CHERKAOUI pour m'avoir accueilli et de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour leur aide, leur amabilité et leur rigueur scientifique. Leurs encouragements constants et leur amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail. Je suis très heureux d'avoir été l'un de leurs thésards.

Je tiens également à adresser mes sincères remerciements à Messieurs les professeurs Lahcen AZRAR et Jean-François MOLINARI pour avoir accepté la charge de rapporter ce travail de recherche. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs les professeurs, Yves H. BERTHELOT, Samuel FOREST, Olivier POLIT et Sonnou TIEM de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaiterais adresser mes remerciements les plus sincères à Isabelle CHARPENTIER pour m'avoir fait découvrir la différentiation automatique, pour ses conseils et pour m'avoir corrigé le chapitre 7 du manuscrit. Mes sincères remerciements vont à tous les membres du LPMM, à mes amis et à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de cette thèse. Je ne cite pas de noms de peur d'en oublier.

Mes plus tendres remerciements seront pour Christelle, qui m'a soutenu tout au long de ma thèse, surtout dans les moments difficiles et qui a su en ces moments me remonter le moral.

Enfin, sur un plan plus personnel, je pense à ma famille, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragé. Et je n'oublierai pas ma mère et mon père qui m'apportent toujours leur soutien sans faille ; ainsi une partie de cette thèse leur revient.



*Je dédie cette thèse  
à mes parents,  
à mes frères et sœurs,  
à Christelle et Yohann*



*Elã ma to asike, Mawue nyana tagbatsutsu ne*

*C'est Dieu qui éloigne les insectes d'un animal sans queue*

*It is God who wards off insects from animal without a tail*

*Proverbe eve, un langage Kwa parlé au Ghana et au Togo*



# Table des matières

Liste des tableaux	xix
Notations et conventions	xxi
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
<b>Chapitre 1 ACQUIS ET PRINCIPES FONDAMENTAUX</b>	<b>11</b>
1.1 Matériaux amortissants . . . . .	13
1.1.1 Viscoélasticité linéaire : bases théoriques . . . . .	14
1.1.2 Viscoélasticité et amortissement . . . . .	22
1.2 Micromécanique et mécanique des matériaux . . . . .	28
1.2.1 Matériaux, hétérogénéités, échelles de longueur . . . . .	29
1.2.2 Etat de l'art de la micromécanique en bref . . . . .	32
1.2.3 Effet de taille et la micromécanique de Eshelby . . . . .	35
1.3 Matériaux sandwich VE : théories et savoir faire existant . . . . .	36
1.3.1 Présentation générale . . . . .	36
1.3.2 Modèles analytiques en bref . . . . .	38
1.3.3 Modèles éléments finis sandwich en bref . . . . .	43
1.3.4 Quel modèle cinématique pour notre travail ? . . . . .	45
1.3.5 Calcul d'amortissement des structures sandwich viscoélastiques . . . . .	47
1.4 Conclusions . . . . .	50
<b>Chapitre 2 STRUCTURES SANDWICH VERRE/PVB/VERRE</b>	<b>53</b>
2.1 Motivations et présentation de l'étude . . . . .	56
2.2 Comportement en statique de la poutre Verre/PVB/Verre . . . . .	59

2.2.1	Hypothèses et champ de déplacements . . . . .	59
2.2.2	Conditions aux interfaces . . . . .	60
2.2.3	Champs de déformations . . . . .	60
2.2.4	Lois de comportement . . . . .	61
2.2.5	Formulation du problème : principe des travaux virtuels . . . . .	62
2.2.6	Solution analytique du problème . . . . .	65
2.2.7	Validation du modèle . . . . .	69
2.2.8	Quelques applications du modèle . . . . .	70
2.3	Comportement vibratoire de la poutre Verre/PVB/Verre . . . . .	75
2.3.1	Position du problème, hypothèses et notations . . . . .	75
2.3.2	Mise en place du modèle . . . . .	76
2.3.3	Discrétisation par éléments finis et problème aux valeurs propres . . . . .	77
2.3.4	Test de validation du modèle . . . . .	78
2.3.5	Autres résultats et discussions . . . . .	79
2.4	Comportement acoustique de la poutre Verre/PVB/Verre . . . . .	86
2.4.1	Les structures sandwich : perte de transmission du son . . . . .	86
2.4.2	Description du problème et les chargements en pression . . . . .	87
2.4.3	Equation de mouvement de la structure sandwich . . . . .	90
2.4.4	Facteur de perte de transmission du son (TL) . . . . .	91
2.4.5	Phénomène de coïncidence . . . . .	92
2.4.6	Quelques résultats et discussions . . . . .	93
2.4.7	Conclusions et perspectives . . . . .	96
2.5	Extension au modèle plaque sandwich Verre/PVB/Verre . . . . .	98
2.5.1	Hypothèses et champ de déplacements . . . . .	98
2.5.2	Champs des déformations . . . . .	100
2.5.3	Lois de comportement . . . . .	100
2.5.4	Problème de vibrations libres linéaires de la plaque . . . . .	101
2.5.5	Un élément fini sandwich plaque et application . . . . .	103
2.6	Structures sandwich VE et amortissement, oui mais... . . . . .	106
<b>Chapitre 3 HÉTÉROGÉNÉITÉS MULTI-ENROBÉES ET AMORTISSEMENT</b>		<b>107</b>
3.1	Motivations et objectifs . . . . .	109
3.2	Présentation et mise en œuvre du modèle . . . . .	111
3.2.1	Equation intégrale et localisation . . . . .	114
3.2.2	Homogénéisation et comportement VE effectif . . . . .	124

---

3.3	Matériaux isotropes et géométrie sphérique . . . . .	126
3.4	Sur la validation du modèle en élasticité linéaire . . . . .	127
3.5	Sur l'implémentation numérique du modèle . . . . .	128
3.6	Exemples d'applications aux composites VE . . . . .	129
3.6.1	Matériaux composites VE à deux phases . . . . .	130
3.6.2	Un exemple de composite VE à trois phases . . . . .	137
3.6.3	Composite à deux phases et inclusions à rigidité négative . . . . .	141
3.6.4	Effet de forme sur les propriétés VE . . . . .	145
3.7	Conclusions et questions de recherche . . . . .	150
<b>Chapitre 4 AMORTISSEMENT ET INTERFACE IMPARFAITE</b>		<b>153</b>
4.1	Motivations et objets de cette étude . . . . .	155
4.2	Problèmes d'interface imparfaite : état de l'art en bref . . . . .	156
4.3	Interface imparfaite et le tenseur de Eshelby modifié . . . . .	159
4.4	Propriétés viscoélastiques effectives : effet de glissement . . . . .	162
4.4.1	Localisation et homogénéisation : modèle de Mori-Tanaka . . . . .	163
4.4.2	Application : configuration isotrope et particules sphériques . . . . .	167
4.5	Exemples numériques et discussions . . . . .	171
4.5.1	Effet des paramètres $\chi$ et $\eta_\chi$ . . . . .	171
4.5.2	Effet de la fraction volumique $\phi_1$ des particules . . . . .	172
4.5.3	Effet du rapport de rigidités $r$ . . . . .	174
4.5.4	Effet du facteur de perte $\eta_1$ de la particule . . . . .	174
4.5.5	Comportement dépendant de la fréquence . . . . .	177
4.5.6	Effet de forme associé à l'effet de glissement . . . . .	177
4.6	Conclusions et question de recherche . . . . .	181
<b>Chapitre 5 NANOMATÉRIAUX : CONCEPT D'ÉNERGIE DE SURFACE</b>		<b>183</b>
5.1	Echelle nanométrique : fin de l'école de Eshelby ? . . . . .	185
5.1.1	Nanosciences et nanotechnologies . . . . .	185
5.1.2	Feynman l'avait bien prédit . . . . .	187
5.1.3	Qu'est-ce qu'un nanomatériau ? . . . . .	187
5.1.4	Pourquoi un tel engouement pour les nanomatériaux ? . . . . .	188
5.1.5	Nanomatériaux et matériaux conventionnels . . . . .	190
5.2	Physique et mécanique des interfaces/surfaces . . . . .	194
5.2.1	Définition de l'excès d'énergie interfaciale . . . . .	195

5.2.2	Contrainte et déformation de surface . . . . .	199
5.2.3	Elasticité de surface : relation de Shuttleworth généralisée . . . . .	200
5.2.4	Cas de l'interface plate entre deux matériaux isotropes . . . . .	201
5.2.5	Méthode semi-analytique pour évaluer les propriétés de surface . . . . .	205
5.3	Propriétés effectives des nanoparticules . . . . .	205
5.4	Problème de nano-inclusions : état de l'art en bref . . . . .	210
5.5	Conclusions et les questions de recherche importantes . . . . .	215
<b>Chapitre 6 PROBLÈME DE NANO-HÉTÉROGÉNÉITÉS DE ESHELBY</b>		<b>217</b>
6.1	Motivations et objectifs . . . . .	219
6.2	De l'interface à l'interphase . . . . .	223
6.2.1	Caractérisation de l'interface à l'échelle atomique . . . . .	223
6.2.2	Propriétés élastiques de l'interphase associée à l'interface . . . . .	230
6.2.3	Cas particulier d'une interface isotrope . . . . .	232
6.2.4	Nanoparticules et comportement de rigidité négative . . . . .	235
6.3	Homogénéisation des nanocomposites . . . . .	236
6.4	Résultats numériques et discussions . . . . .	237
6.4.1	Configuration isotrope et nanoparticules sphériques . . . . .	237
6.4.2	Configuration isotrope et nanoparticules ellipsoïdales . . . . .	239
6.4.3	Configuration anisotrope et nanoparticules ellipsoïdales . . . . .	247
6.5	Amortissement : effet de taille et d'énergie de surface . . . . .	249
6.5.1	Aluminium nano-poreux avec des nano-pores sphériques . . . . .	250
6.5.2	Aluminium nano-poreux : effet de forme des nano-pores . . . . .	252
6.6	Conclusions . . . . .	255
<b>Chapitre 7 APPROCHE DIAMANT ET LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES</b>		<b>257</b>
7.1	Principes fondamentaux de la MAN . . . . .	260
7.2	Illustration de la MAN sur le problème de Bratu . . . . .	261
7.2.1	Discrétisation du problème de Bratu . . . . .	261
7.2.2	Perturbation du problème discret . . . . .	262
7.2.3	Algorithme de résolution du problème de Bratu . . . . .	263
7.3	Philosophie générale de l'approche Diamant . . . . .	265
7.4	Problème résiduel générique . . . . .	266
7.5	L'approche Diamant . . . . .	270
7.5.1	Bases théoriques . . . . .	270

---

7.5.2	Principe d'automatisation de Diamant	272
7.6	Diamant : un outil de DA pour la MAN	275
7.6.1	Diamant1	276
7.6.2	Diamant2	278
7.7	Présentation du Diamant MATLAB Toolbox	280
7.7.1	Organisation globale de Diamant MATLAB Toolbox	280
7.7.2	Constructeur de la classe <code>taylorcoef1</code>	281
7.7.3	Exemples d'utilisation des classes <code>taylorcoef1/2</code>	282
7.8	Un exemple numérique	287
7.8.1	Problème des non linéarités géométriques du Verre/PVB/Verre	287
7.8.2	Résultats numériques	288
7.8.3	Performances numériques de Diamant sur cet exemple	289
7.9	Diamant et les problèmes non linéaires aux valeurs propres	291
7.9.1	Présentation générale du problème	291
7.9.2	Transformation d'homotopie	293
7.9.3	Comment utiliser Diamant pour résoudre ce problème ?	293
7.9.4	Applications et mesures de performances	296
7.9.5	Sur le calcul et le stockage des coefficients de Taylor	305
7.10	Diamant : surface de charge des nanomatériaux poreux	306
7.11	Conclusions	308
<b>Chapitre 8 VERS LA CONCEPTION HIÉRARCHIQUE DES PARE-BRISES</b>		<b>309</b>
8.1	Introduction	311
8.2	Effet de la microstructure sur les propriétés modales	313
8.2.1	Microstructure avec des micro-pores sphériques	314
8.2.2	Microstructure avec des inclusions à rigidité négative	320
8.2.3	Microstructure avec des interfaces imparfaites	323
8.3	Effet de la microstructure sur les propriétés acoustiques	326
8.3.1	Microstructure avec des micro-pores sphériques	327
8.3.2	Microstructure avec des inclusions à rigidité négative	327
8.3.3	Microstructure avec des interfaces imparfaites	329
8.4	Conception de la microstructure : problème inverse	332
8.4.1	Loi de mélange (LM) pour les structures multicouches	334
8.4.2	Exemple de problème d'optimisation et solution	337
8.4.3	Analyse des résultats	338

8.5 Conclusion . . . . .	339
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES</b>	<b>341</b>
<b>Annexes</b>	<b>349</b>
<b>Annexe A Structures sandwich Verre/PVB/Verre</b>	<b>349</b>
A.1 Etude statique : constantes d'intégration . . . . .	349
A.2 Vibrations libres et linéaires des poutres Verre/PVB/Verre . . . . .	351
A.3 Eléments finis plaque sandwich . . . . .	352
<b>Annexe B Hétérogénéités multi-enrobées</b>	<b>355</b>
B.1 Calcul numérique des tenseurs d'interaction . . . . .	355
B.2 Tenseurs d'interaction dans le cas isotrope . . . . .	356
B.2.1 Les parties de $\hat{\boldsymbol{\nu}}^{(i/j)}$ . . . . .	356
B.2.2 Les parties de $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^j$ . . . . .	356
B.2.3 Les parties de $\hat{\mathbf{a}}^1$ . . . . .	357
B.2.4 Les parties de $\hat{\mathbf{a}}^k$ . . . . .	357
B.2.5 Les parties de $\hat{\mathbf{A}}^1$ . . . . .	357
B.2.6 Les parties de $\hat{\mathbf{A}}^k$ . . . . .	357
B.3 Séries de Prony pour les matériaux VE A et B . . . . .	358
<b>Annexe C Effet de glissement et amortissement</b>	<b>359</b>
C.1 Calcul du tenseur d'ordre quatre R . . . . .	359
C.1.1 Cas d'une ellipsoïde . . . . .	359
C.1.2 Cas des sphères . . . . .	360
C.1.3 Cas des cylindres . . . . .	360
C.2 Tenseur de Eshelby pour les matériaux isotropes . . . . .	360
C.2.1 Ellipsoïde $a_1 > a_2 > a_3$ . . . . .	360
C.2.2 Sphère $a_1 = a_2 = a_3 = a$ . . . . .	362
C.2.3 Oblate spheroid $a_1 = a_2 > a_3$ . . . . .	362
C.2.4 Prolate spheroid $a_1 > a_2 = a_3$ . . . . .	362
<b>Annexe D Concept d'énergie de surface et nanomécanique</b>	<b>363</b>
D.1 Décomposition "T" stress . . . . .	363
D.2 Description au niveau atomique . . . . .	365

---

<b>Annexe E</b>	<b>Création des fichiers de données</b>	<b>369</b>
E.1	Fichier des données . . . . .	369
E.2	Maillage . . . . .	370
E.3	Lecture des données . . . . .	371
<b>Bibliographie</b>		<b>373</b>



# Table des figures

1.1	Essai de fluage. . . . .	15
1.2	Essai de relaxation. . . . .	16
1.3	Essai de recouvrance. . . . .	17
1.4	Sollicitation harmonique et réponse d'un matériau VELNV. . . . .	27
2.1	Poutre Verre/PVB/Verre avec supports. . . . .	56
2.2	Conditions aux limites approchées par des ressorts. . . . .	57
2.3	Essai de flexion trois points : modèle et expérience. . . . .	70
2.4	Contraintes normales dans le verre supérieur en fonction de $g_R$ . . . . .	72
2.5	Contraintes normales dans le verre inférieur en fonction de $g_R$ . . . . .	73
2.6	Déformation de cisaillement dans le PVB et $\max w(x)$ en fonction de $g_R, g_T$ . . . . .	74
2.7	Variation de $\Omega$ avec $g$ et trois valeurs de $Y$ . $\eta_2 = 0.1$ . . . . .	81
2.8	Variation de $\eta$ avec $g$ et trois valeurs de $Y$ . $\eta_2 = 0.1$ . . . . .	82
2.9	Variation de $\eta$ avec $g$ et trois valeurs de $\eta_2$ . $Y = 25$ . . . . .	83
2.10	Variation de $\Omega$ avec $g_T$ et trois valeurs de $g_R$ . $\eta_T = \eta_R = 0.1$ . . . . .	83
2.11	Variation de $\eta$ avec $g_T$ et trois valeurs de $g_R$ . $\eta_T = \eta_R = 0.1$ . . . . .	84
2.12	Variation de $\eta$ avec $g_T$ et trois valeurs de $\eta_T = \eta_R$ . $g_R = 10^6$ . . . . .	85
2.13	Composantes du champ de pression sur la structure. . . . .	88
2.14	Variation du TL avec $g$ . $\beta = 0.3$ ; $Y = 5.88$ ; $\theta = 75^\circ$ . . . . .	95

2.15	Variation du TL avec $\beta$ et deux valeurs de $g$ . $Y = 5.88$ ; $\theta = 75^\circ$ . . . . .	96
2.16	Variation du TL avec $Y$ et trois valeurs de $g$ . $\beta = 0.3$ ; $\theta = 75^\circ$ . . . . .	97
2.17	Variation du TL avec $\theta$ . $g = 1000$ ; $\beta = 0.3$ ; $Y = 5.88$ . . . . .	97
3.1	Topologie de l'hétérogénéité multi-enrobée. . . . .	112
3.2	Interface entre deux phases du composite. . . . .	120
3.3	Propriétés des trois matériaux VE de l'étude. . . . .	131
3.4	Propriétés effectives du composite 1. . . . .	133
3.5	Propriétés effectives du composite 2. . . . .	135
3.6	Propriétés effectives du composite 3. . . . .	136
3.7	Propriétés effectives du composite 4. . . . .	138
3.8	Propriétés effectives du composite 5. . . . .	139
3.9	Propriétés effectives du composite 6. . . . .	140
3.10	Propriétés effectives du composite 7. . . . .	142
3.11	Propriétés effectives du composite 8. $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$ . $\varphi_1 = 2\%$ . . . . .	146
3.12	Modules longitudinaux effectifs. . . . .	148
3.13	Modules de cisaillement effectifs. . . . .	149
3.14	Rapports de Poissons effectifs. . . . .	150
4.1	Interface entre deux phases dans un composite. . . . .	160
4.2	Effet de $\chi$ et $\eta_\chi$ pour $r = 50$ , $\eta_1 = 0$ , $\phi_1 = 0.1$ . . . . .	173
4.3	Effet de $\phi_1$ pour $r = 50$ , $\eta_1 = 0$ , $\eta_\chi = -1.5$ . . . . .	175
4.4	Effet du rapport de rigidités $r$ pour $\phi_1 = 0.1$ , $\eta_1 = 0$ , $\eta_\chi = -1.5$ . . . . .	176
4.5	Effet de $\eta_1$ pour $\phi_1 = 0.1$ , $r = 50$ , $\eta_\chi = -1.5$ . . . . .	178
4.6	Dépendance en fréquence : $\phi_1 = 0.1$ , $r = 50$ , $\eta_\chi = -1.5$ , $\eta_1 = 0$ . . . . .	179
5.1	Vue globale de la notion de taille. . . . .	186
5.2	Evolution des sciences et technologies puis leur avenir. . . . .	186
5.3	Interface d'un bicristal et excès d'énergie en fonction de $x_3$ . . . . .	196

---

5.4	Particule créée par enlèvement de matière (Dingreville <i>et al.</i> , 2005).	205
5.5	Nanoparticule ellipsoïdale (Dingreville <i>et al.</i> , 2005).	206
5.6	Modules normalisés de la nanoparticule sphérique (Dingreville <i>et al.</i> , 2005).	209
5.7	Schéma du problème de nano-hétérogénéités de Eshelby.	211
6.1	Interface-Interphase : différentes vues suivant l'échelle d'observation.	223
6.2	Module de compressibilité effectif normalisé $\kappa^{\text{eff}}/\kappa_C$ .	238
6.3	Module de cisaillement effectif normalisé $\mu^{\text{eff}}/\mu_C$ .	240
6.4	Morphologie des nano-pores.	241
6.5	Modules de stockage et de perte en fonction du rayon des pores. $\varphi_1 = 0.3$ .	251
6.6	Modules de stockage et de perte en fonction de $\varphi_1$ . $R = 10$ nm.	253
7.1	Calcul des coefficients de Taylor selon les versions de Diamant.	277
7.2	Déflexion normalisée $w_{\text{max}}/h$ .	289
7.3	Temps CPU en fonction de l'ordre $K$ de la MAN.	290
7.4	Surface de charge pour $\varphi_1 = 10\%$ de nano-pores.	308
8.1	Visualisation des échelles de modélisation.	312
8.2	Modules effectifs homogénéisés et analytiques pour $\varphi_1 = 20\%$ .	317
8.3	Modules effectifs homogénéisés et analytiques pour $r = -2.75$ .	321
8.4	Modules effectifs homogénéisés et analytiques pour $\chi = 20$ .	325
8.5	Effet de la fraction volumique des micro-pores $\varphi_1$ sur le TL.	328
8.6	TL pour la rigidité négative et l'interface imparfaite.	330
8.7	Modèles hiérarchiques pour la conception de la microstructure.	333



# Liste des tableaux

2.1	Résultats pour les six premiers modes. . . . .	79
2.2	Comparaison des résultats analytiques et éléments finis : appui simple. . .	105
2.3	Comparaisons des résultats numériques : bords libres. . . . .	105
4.1	Effet de forme associé au glissement interfacial. $\chi = 20$ . . . . .	180
4.2	Effet de forme associé au glissement interfacial. $\chi = 8$ . . . . .	181
5.1	Paramètres du volume et de la surface du cuivre. . . . .	208
6.1	Propriétés élastiques des surfaces A et B. . . . .	237
6.2	Propriétés élastiques des interphases A et B (oblate spheroid). . . . .	241
6.3	Rapports de forme pour les géométries considérées. . . . .	252
6.4	Modules de stockage effectifs (GPa). $a = 2$ nm, $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A. . . . .	252
6.5	Facteurs d'amortissement effectifs. $a = 2$ nm, $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A. . . . .	254
6.6	Modules de stockage effectifs (GPa). $a = 5$ nm, $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A. . . . .	254
6.7	Facteurs d'amortissement effectifs. $a = 5$ nm, $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A. . . . .	254
6.8	Modules de stockage effectifs (GPa). $a = 10$ nm, $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A. . . . .	255
6.9	Facteurs d'amortissement effectifs. $a = 10$ nm, $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A. . . . .	255
7.1	Algorithme de la MAN pour le problème de Bratu. . . . .	264
7.2	Algorithme de l'approche Diamant. . . . .	274

7.3	Algorithme Diamant pour les problèmes non linéaire aux valeurs propres. . . . .	296
7.4	Résultats comparés pour la poutre encastree. . . . .	304
7.5	Ecarts entre les résultats des modules constant et complet. . . . .	304
7.6	Fréquences de résonance et facteur de perte par les deux méthodes. . . . .	304
8.1	Les coefficients des modèles de $\mu^{\text{eff}}(\omega)$ et $\eta^{\text{eff}}(\omega)$ : PVB micro-poreux. . . . .	318
8.2	Propriétés modales en fonction de $\varphi_1$ des micro-pores. $\Omega(\text{Hz}), \eta \times 10^2$ . . . . .	319
8.3	Coefficients des modèles de $\mu^{\text{eff}}(\omega)$ et $\eta^{\text{eff}}(\omega)$ : rigidité négative. . . . .	322
8.4	Propriétés modales en fonction de $r = -\mu^{\text{I}}/\Re(\hat{\mu}^{\text{M}})$ . $\Omega(\text{Hz}), \eta \times 10^2$ . . . . .	323
8.5	Coefficients des modèles de $\mu^{\text{eff}}(\omega)$ et $\eta^{\text{eff}}(\omega)$ : interface imparfaite. . . . .	324
8.6	Propriétés modales en fonction de $\chi$ . $\Omega(\text{Hz}), \eta \times 10^2$ . . . . .	326
8.7	Fréquences de coïncidence et la profondeur du creux en fonction de $\varphi_1$ . . . . .	327
8.8	Fréquences de coïncidence et $\Delta\text{TL}$ en fonction de $\varphi_1$ . $r = -1.1$ . . . . .	329
8.9	$\Delta\text{TL}$ et $\omega_c$ en fonction de $\varphi_1$ : interface imparfaite. . . . .	331
8.10	Un exemple des objectifs de conception du Verre/PVB/Verre. . . . .	337
8.11	Résultats de la conception des microstructures. . . . .	338
B.1	Séries de Prony pour les matériaux VE A et B. . . . .	358

# Notations et conventions

## Modèles de calcul de structures

- $h_i$  : Epaisseur de la couche  $i$  du sandwich
- $\rho_i$  : Masse volumique de la couche  $i$  du sandwich
- $Y$  : Paramètre géométrique du sandwich
- $\hat{g}$  : Paramètre de cisaillement du sandwich
- $L$  : Longueur du sandwich
- $b$  : Largeur du sandwich
- $\hat{\xi}$  : Quantité complexe dépendant de la fréquence
- $\Omega$  : Fréquence de résonance d'un mode de vibration
- $\eta$  : Facteur de perte associé à  $\Omega$
- $\omega$  : Fréquence (pulsation) d'excitation
- $\hat{K}_T$  : Rigidité du ressort de translation
- $\hat{K}_R$  : Rigidité du ressort de rotation
- $\mathbf{K}_e$  : Matrice de rigidité élémentaire
- $\mathbf{M}_e$  : Matrice de masse élémentaire
- $\mathbf{K}$  : Matrice de rigidité globale
- $\mathbf{M}$  : Matrice de masse globale

$u_1, u_3, v_1, v_2, w$	: Déplacements des modèles cinématiques
$A_i$	: Section droite de la couche $i$ du sandwich
$I_i$	: Moment quadratique de la couche $i$ du sandwich
$E_i$	: Module de Young de la couche $i$ du sandwich
$\mu_i$	: Module de cisaillement de la couche $i$ du sandwich
$\nu_i$	: Module de Poisson de la couche $i$ du sandwich
$\Gamma, \varepsilon, \kappa$	: Tenseur des déformations
$\sigma$	: Tenseur des contraintes
TL	: Perte de transmission du son du sandwich
$\theta$	: Angle d'incidence
$\omega_c$	: Fréquence de coïncidence
$k$	: Nombre d'onde de l'onde incidente
$c$	: La vitesse de l'air
$\mathcal{R}$	: Fonction résiduelle
$\mathbf{K}_v$	: Matrice de rigidité de la partie viscoélastique de la structure
$\mathbf{K}_e$	: Matrice de rigidité de la partie élastique de la structure
$\Re$	: Partie réelle du complexe auquel il est appliqué
$\Im$	: Partie imaginaire du complexe auquel il est appliqué
$i$	: $i = \sqrt{-1}$ complexe
$\mathcal{C}$	: Transformation de Carson
$\mathcal{L}$	: Transformation de Laplace
$\zeta_{,x}$	: signifie $\partial\zeta/\partial x$
$\zeta'$	: signifie $d\zeta/dx$

---

## Modèles nano/micromécaniques

- $\mathbf{r}$  : Variable de l'espace  
 $\mathbf{T}^Y (\mathbf{C}^X)$  : Tenseurs d'interaction  
 $\hat{\mathbf{A}}^I, \hat{\mathbf{A}}^k, \hat{\mathbf{a}}^k$  : Tenseurs d'interaction  
 $\hat{\mathbf{C}}$  : Tenseur des modules complexes dépendant de la fréquence  
 $\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$  : Tenseur des modules complexes effectifs  
 $\hat{\mathbf{E}}$  : Déformation macroscopique  
 $\hat{\mathbf{G}}^0$  : Tenseur d'ordre deux de Green  
 $\hat{\mathbf{h}}^k$  : Matrice de Christoffel liée à la phase  $k$   
 $\mathbf{I}_4$  : Tenseur identité d'ordre quatre  
 $\mathbf{N}$  : Normale unitaire  
 $\hat{\mathbf{P}}^k$  : Opérateur interfacial liée à la phase  $k$   
 $\hat{\mathbf{T}}^I, \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_j}, \hat{\mathbf{T}}^2$  : Tenseurs d'interaction  
 $V_k$  : Volume de la phase  $k$   
 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r})$  : Champ de déformation  
 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$  : Moyenne de la déformation dans l'inclusion composite I  
 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k$  : Moyenne de la déformation dans la phase  $k$   
 $\hat{\mu}_k$  : Module de cisaillement de la phase  $k$   
 $\hat{\kappa}_k$  : Module de compressibilité de la phase  $k$   
 $\varphi_k$  : Fraction volumique de la phase  $k$   
 $\hat{\theta}_k(\mathbf{r})$  : Fonction caractéristique de la phase  $k$   
 $\hat{\mathbf{\Gamma}}^0$  : Tenseur de Green modifié  
 $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(j/k)}, \hat{\mathbf{\Pi}}^k, \mathbf{I}^s, \mathbf{I}^d$  : Autres tenseurs d'ordre quatre  
 $\hat{\mathbf{S}}$  : Tenseur de Eshelby  
 $\hat{\mathbf{S}}^M$  : Tenseur de Eshelby modifié

## **Elasticité des interfaces/surfaces**

Pour les tenseurs liés à l'élasticité des interfaces/surface, les indices en lettres romaines ( $i, j, k, l$  etc.) vont de 1 à 3 tandis que les indices en lettres grecques ( $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$  etc.) vont de 1 à 2.

- $\Delta^t$  : Tenseur d'excès de déformations transversales
- $\Lambda^{(1)}$  : Tenseur de relaxation de l'interface
- $\Lambda^{(2)}$  : Tenseur des complaisances transverses de l'interface
- $\Gamma^{(1)}$  : Tenseur d'excès de contrainte interne de l'interface
- $\Gamma^{(2)}$  : Tenseur d'élasticité dans le plan de l'interface
- $\mathbf{H}$  : Tenseur mesurant l'effet Poisson de l'interface
- $\Sigma^s$  : Tenseur d'excès de contrainte interfaciale
- $\gamma_n$  : Excès d'énergie d'un atome  $n$
- $\Gamma$  : Excès d'énergie de surface/interface
- $\mathbf{P}$  : Tenseur de projection de surface
- $\mathcal{P}$  : Fonction de potentiel inter-atomique
- $\psi^{(n)}$  : Densité d'énergie d'un atome
- $\nabla_s$  : Opérateur gradient de surface

---

## Autres notations

AIM	: Anti-Interpenetration Model
DA	: Différentiation Automatique
$\Delta$ TL	: Profondeur du creux à la fréquence de coïncidence
CZM	: Cohesive Zone Model
ddl	: Degré De Liberté
Diamant	: Différentiation Automatique de la MAN Typée
DLM	: Dislocation-Like Model
DM	: Dynamique Moléculaire
EF	: Élément Fini
FSM	: Free Sliding Model
ISM	: Interface Stress Model
LM	: Loi de Mélange
LSM	: Linear Spring Model
MAN	: Méthode Asymptotique Numérique
MDF	: Méthode des Différences Finies
MMC	: Mécanique des Milieux Continus
MMT	: Méthode de Mori-Tanaka
POO	: Programmation Orientée-Objet
PPV	: Principe des Puissances Virtuelles
PTS	: Perte de Transmission du Son
PVB	: Polyvinyl de Butyral
SEA	: Statistical Energy Analysis
SM	: Statique Moléculaire
TL	: Facteur de perte de transmission du son
TME	: Théorie des Milieux Effectifs
VE	: Viscoélastique
VER	: Volume Élémentaire Représentatif



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Motivations et objectifs

Les structures sont aujourd'hui omniprésentes dans notre vie quotidienne et vont selon leur forme et leur fonction, des bâtiments aux voitures, des ordinateurs aux avions etc. Il est clair que le succès de n'importe quelle structure repose entièrement sur une hiérarchie d'éléments et la conception de ces éléments. Cette hiérarchie comprend la structure dans son ensemble, les différents éléments de la structure, les constituants de chacun de ces différents éléments individuels, les matériaux à partir desquels chaque élément est fabriqué, et enfin la composition de ces matériaux (Olson, 1997). Ainsi, une structure peut être considérée comme un système possédant des éléments qui existent à de multiples échelles de longueur. Le comportement de la structure dans son ensemble est régi par le comportement à chaque échelle de longueur et par des interactions entre ces différentes échelles de longueur (McDowell et Story, 1999). Il est donc évident que le succès de la conception d'une structure doit prendre en considération non seulement la conception de chaque élément à son échelle de longueur, mais aussi l'interaction complexe de cette hiérarchie des échelles de longueur (Seepersad *et al.*, 2004). Haberman (2007) a montré que cette philosophie de conception peut idéalement être étendue à la conception même des matériaux.

En génie mécanique ou en science de l'ingénieur, la Résistance des Matériaux est la

science du *dimensionnement* et elle est issue d'une théorie plus générale, la Mécanique des Milieux Continus (que nous désignerons par MMC), qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire, c'est-à-dire d'abord imaginer les formes et le squelette géométrique qui remplissent les fonctions demandées. Elle détermine ensuite les quantités et la nature des matières nécessaires et suffisantes pour réaliser ces formes en assurant une résistance sans dommage de l'objet à tous les efforts auxquels il sera soumis pendant son service. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique. Ces méthodes de conception classiques nécessitent la sélection des matériaux qui sont conformes aux besoins de l'ensemble préconçu ([Ashbey, 1999](#)). Cette méthodologie de conception est bien développée et bien comprise de nos jours surtout avec l'apparition et le développement des gros moyens de calculs et de stockage. Malheureusement, comme il est noté dans [McDowell et Story \(1999\)](#) puis dans [Olson \(2000\)](#), le facteur limitant dans la conception lors de l'application de cette approche est très souvent le manque de matériaux qui répondent aux besoins de la structure, ce qui limite considérablement le processus de conception. Les domaines de la modélisation, de la conception et de la fabrication des matériaux composites ont alors permis de trouver une solution au problème de manque de matériaux et ont complété ainsi le processus de conception. Cependant, malgré que ces domaines aient permis de remédier au manque de matériaux indispensables pour les conceptions, rares sont les matériaux composites dont la conception est directement intégrée à la conception de la structure globale ([Mistree, 2004](#); [Haberman, 2007](#)). Cette dernière approche, c'est-à-dire celle qui consiste à concevoir simultanément un matériau avec la structure, représente une solution plus élégante qui vise à créer des matériaux conçus spécifiquement pour répondre aux exigences d'une application donnée. Une telle approche ne crée pas seulement des matériaux pour des besoins spécifiques mais également inclut la création du matériau dans la conception du système dans son ensemble. Cette approche désignée à juste titre par *conception du maté-*

---

*riau*, est un domaine très actif de la recherche. Une approche bien acceptée de conception des matériaux a pour objectif d'étendre les méthodes de conception des systèmes afin de concevoir simultanément des matériaux pour des composants spécifiques de haute importance (McDowell et Story, 1999; Mistree, 2004; Seepersad *et al.*, 2004; Haberman, 2007). Cette extension est très naturelle puisque les matériaux eux-mêmes peuvent être considérés comme des structures multi-échelles (Smith, 1981) (cf. § 1.2.1). De part sa nature, la conception des matériaux est un problème multi-échelle et multi-physique puisque les exigences d'une structure incluent des chargements thermique, électrique et mécanique à toutes les échelles de longueur.

Un domaine d'intérêt particulier dans de nombreux domaines d'ingénierie est la dissipation d'énergie. Les applications qui requièrent des matériaux avec une grande capacité d'absorption des énergies acoustique et vibratoire peuvent être trouvées dans presque tous les secteurs d'activités industrielles (aéronautique, automobile, constructions navales et ferroviaires, électroménager, etc.). Des exemples représentatifs incluent la minimisation des amplitudes de vibration des composantes d'une structure pour des raisons d'endommagement par fatigue et la réduction des niveaux de pression acoustique à l'intérieur des avions et des automobiles. De nombreuses stratégies de solution, à la fois active et passive voire hybride, ont été proposées pour résoudre ces problèmes. Ainsi, une solution simple pour réduire les vibrations indésirables est d'employer une plaque ou poutre constituée de deux couches rigides identiques (appelées les peaux) reliées l'une à l'autre par une couche viscoélastique souple et mince (appelée cœur) ayant une très bonne capacité d'amortissement. Ce type de traitement amortissant est connu sous le nom d'amortissement passif. La fonction amortissante de ces structures sandwich viscoélastiques est apportée par le matériau viscoélastique ayant des caractéristiques mécaniques complexes et dépendant de la fréquence des vibrations, de la température et encore bien d'autres facteurs (Kergourlay, 2004; Christensen, 2005b). La fonction amortissante est due à la déformation de cisaille-

ment importante de la couche centrale viscoélastique (Ross *et al.*, 1959) liée à un écart entre les déplacements longitudinaux (dans le plan) des deux couches externes. La conséquence ultime de cette configuration géométrique est une augmentation de la capacité d'amortissement des énergies vibratoire et acoustique de la plaque (poutre) sandwich viscoélastique (Moore et Lovins, 1995).

Plusieurs travaux ont été développés, notamment dans l'équipe des simulations numériques du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwich viscoélastiques. Ces travaux ont permis de déterminer la fréquence de résonance ainsi que le facteur de perte (ou d'amortissement) par mode de vibration de ces structures sandwich viscoélastiques. Les modèles de calcul des structures utilisés pour modéliser ces structures font généralement abstraction de la microstructure des matériaux qui constituent la structure. En revanche, l'équipe de rhéologie et microstructure du LPMM, de son côté, s'intéresse à la microstructure des matériaux constitutifs d'une structure. En outre, il est bien connu de nos jours que la capacité d'amortissement des matériaux peut être améliorée d'une manière significative par l'introduction des hétérogénéités dans les matériaux, créant ainsi des nouveaux matériaux composites (Jarzynski, 1990; Haberman, 2007). C'est dans le contexte de travail collaboratif entre ces deux équipes du LPMM que ce travail de recherche a été lancé. Ainsi, cette thèse est motivée par la mise en place d'un cadre de modélisation multi-échelle permettant de combiner les compétences de ces deux équipes. Il s'agit donc d'explorer ici des moyens pour concevoir des matériaux ou encore mieux la microstructure des matériaux d'une structure pour satisfaire plusieurs objectifs de conception simultanément.

---

## Organisation générale de la thèse

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse s'articule autour de huit chapitres. Le chapitre 1 présente brièvement la théorie de la viscoélasticité linéaire des matériaux non vieillissants et fait le lien avec les propriétés dissipatives de ces matériaux. Ceci nous permet de comprendre les phénomènes et principes physiques qui confèrent ce comportement dissipatif aux matériaux viscoélastiques. La micromécanique qui est une science des matériaux est ensuite présentée dans sa philosophie globale avec un aperçu succinct des différentes connaissances dans cette discipline. Pour finir, ce chapitre 1 aborde la théorie des structures sandwich viscoélastiques en présentant les travaux significatifs sur la modélisation de ces types de structures.

Afin de mettre en place des outils numériques pour l'étude des comportements macroscopiques des structures sandwich viscoélastiques, le chapitre 2 étudie les comportements statique, vibratoire et acoustique des poutre et plaque sandwich Verre/PVB/Verre qui constituent des modèles pour représenter les pare-brises d'automobile. Les différents paramètres mécaniques et géométriques qui influencent les comportements de ces structures sandwich viscoélastiques y sont présentés. Aussi avons nous montré l'effet des conditions aux limites viscoélastiques sur les propriétés modales de ces structures sandwich. Ce chapitre montre clairement que les propriétés d'amortissement des structures sandwich viscoélastiques sont très attrayantes. Toutefois les capacités amortissantes de ces structures sandwich viscoélastiques ont des limites qui sont naturellement liées aux propriétés mécaniques et géométriques de leurs matériaux constitutifs. Ainsi, pour augmenter leur pouvoir d'amortissement, d'autres solutions doivent être envisagées. L'une des pistes envisageables est la modification des microstructures des matériaux constitutifs afin d'améliorer le comportement amortissant macroscopique de la structure. En d'autres termes, il s'agit d'intégrer la conception des matériaux constitutifs à la conception de ces structures sandwich viscoélastiques.

Ainsi, dans l'optique d'explorer les voies pour concevoir des matériaux à forte capacité

amortissante, le chapitre 3 étend le modèle micromécanique de [Lipinski \*et al.\* \(2006\)](#), initialement développé pour les matériaux composites élastiques, afin d'étudier les propriétés effectives des matériaux composites contenant des phases viscoélastiques ayant des propriétés dépendantes de la fréquence et éventuellement de la température. Cette extension est possible grâce à l'utilisation du principe de correspondance élastique-viscoélastique (cf. § 1.1.1) ([Christensen, 2005b](#)). Dans ce chapitre 3, nous traitons des composites viscoélastiques contenant des hétérogénéités multi-enrobées. Au travers des propriétés effectives obtenues pour des matériaux composites viscoélastiques issus de diverses combinaisons de matériaux viscoélastiques homogènes, il en ressort qu'il est possible aux ingénieurs de concevoir des matériaux amortissants ayant une bonne rigidité sur toutes les gammes de fréquences par un choix adéquat des phases du matériau composite.

Si le chapitre 3 a supposé des interfaces parfaites entre les phases du matériau composite, le chapitre 4 étudie l'influence des interfaces imparfaites sur les propriétés effectives des composites viscoélastiques. C'est ainsi que le modèle micromécanique de [Qu \(1993a,b\)](#), développé à l'origine pour étudier l'effet des interfaces légèrement imparfaites dans les matériaux composites élastiques, a été modifié et adapté pour prédire les propriétés effectives des matériaux composites viscoélastiques contenant des phases avec des interfaces légèrement imparfaites et avec une dépendance en fréquence des propriétés mécaniques. Nous supposons dans ce chapitre qu'une couche visqueuse est introduite artificiellement entre la matrice et l'hétérogénéité du matériau composite viscoélastique. La matrice et l'hétérogénéité peuvent alors glisser l'une par rapport à l'autre lorsqu'une contrainte de cisaillement assez importante est appliquée à l'ensemble. Ceci paraît particulièrement assez intéressant puisque le matériau viscoélastique des structures sandwich viscoélastiques subit généralement une forte déformation de cisaillement comme nous l'avons expliqué plus haut. Les frottements générés par le relatif glissement de la matrice et de l'hétérogénéité l'une par rapport à l'autre peuvent induire une dissipation d'énergie supplémentaire en améliorant ainsi l'amortissement global de la structure. Plusieurs simulations numériques

---

sont ensuite effectuées pour obtenir un aperçu quantitatif quant à l'influence des divers facteurs introduits dans le modèle micromécanique. De nouveaux degrés de liberté sont ainsi introduits dans la conception des matériaux pour des applications d'amortissement. Ce chapitre 4 a introduit un effet de taille dans le modèle micromécanique. Néanmoins, les tailles considérées restent toujours dans les dimensions conventionnelles, c'est-à-dire des micromètres. Pour pouvoir étudier l'effet des tailles de l'ordre des nanomètres sur les propriétés des matériaux composites, la micromécanique classique de [Eshelby \(1957\)](#) doit être revue, modifiée et adaptée à ces types de matériaux composites.

Le chapitre 5 introduit les divers phénomènes physiques qui caractérisent l'échelle nanométrique. Le concept d'excès d'énergie de surface/interface en l'occurrence est présenté ainsi que les travaux significatifs sur l'extension de la micromécanique classique initiée par [Eshelby](#) pour étudier et prédire les propriétés effectives des nanocomposites. Nous présentons également dans ce chapitre les limites des modèles *nanomécaniques* actuels et nous y posons plusieurs questions fondamentales de recherche dans ce domaine.

Nous apportons des réponses à ces questions de recherche dans le chapitre 6 en présentant une approche pour résoudre de manière efficace le problème de nano-hétérogénéités de [Eshelby](#) par une bonne prise en compte de l'effet d'excès d'énergie de surface/interface très prononcé à l'échelle nanométrique. Cette approche sert d'un véritable pont entre la mécanique moléculaire discrète et la mécanique des milieux continus. Nous démontrons dans ce chapitre que les nanoparticules noyées dans une matrice peuvent introduire localement, dans les matériaux composites, des zones de rigidité négative ([Yoshimoto et al., 2005](#)) susceptibles d'améliorer de manière drastique les propriétés mécaniques et physiques des matériaux ([Lakes et al., 2001](#); [Lakes, 2001a,b](#); [Lakes et Drugan, 2002](#)).

Les modèles développés et présentés dans les chapitres 3, 4, 5 et 6 s'intéressent essentiellement aux propriétés effectives des matériaux composites lorsque l'on modifie leur microstructure. L'impact concret de la microstructure des matériaux sur les comportements macroscopiques (vibratoire et acoustique par l'exemple) de la structure (ici, sand-

wich Verre/PVB/Verre) n'est pas encore étudié. Même si le chapitre 2 a mis au point plusieurs outils de modélisation numérique pour étudier les comportements statique, vibratoire et acoustique des structures sandwich viscoélastiques, il y manque de véritables outils de résolution des problèmes non linéaires à savoir les problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. La résolution de ce problème est essentielle pour déterminer les fréquences de résonance ainsi que les facteurs d'amortissement associés à ces fréquences. Ces deux paramètres intéressent particulièrement les ingénieurs lors de la conception des structures. Une revue de l'état de l'art sur les techniques de résolution des problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes (Daya et Potier-Ferry, 2001; Duigou *et al.*, 2003; Jarlebring, 2003) montrent qu'il est presque impossible de trouver aujourd'hui un outil suffisamment robuste et assez simple d'implémentation pour traiter ces types de problèmes. Notre challenge fut alors de mettre au point un outil numérique très générique et relativement facile à implémenter pour résoudre plusieurs classes de problèmes non linéaires. Nous présentons alors dans le chapitre 7 une méthode de calculs numériques appelée approche **Diamant**, introduite par Charpentier (2007), pour résoudre de façon générique plusieurs problèmes non linéaires grâce à la librairie Diamant MATLAB Toolbox que nous avons conçue en ce sens. Cette librairie, basée sur les techniques de surcharge d'opérateurs offertes par plusieurs langages de programmation (comme par exemple MATLAB, C/C++ et Fortran), nous permet de différencier automatiquement (Griewank, 2000) la méthode asymptotique numérique (Cochelin *et al.*, 2007). Cette approche nous permet ainsi de résoudre efficacement les problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes souvent rencontrés dans le calcul des propriétés modales des structures viscoélastiques et dans bien d'autres domaines de la physique et de la mécanique. D'autres exemples d'applications de l'outil **Diamant** sont également présentés dans ce chapitre 7.

Grâce à la librairie **Diamant** et aux outils de modélisation numérique des structures sandwich viscoélastiques développés et présentés dans le chapitre 2, nous montrons dans le chapitre 8 l'effet de la microstructure des matériaux constitutifs du sandwich Ver-

---

re/PVB/Verre sur ses propriétés modales et acoustiques. Pour finir, nous montrons sur un exemple simple comment l'on peut concevoir les microstructures du Verre et du PVB pour satisfaire simultanément plusieurs objectifs de conception des pare-brises d'automobile.

Une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant. C'est aussi l'occasion d'évoquer diverses perspectives dans le cadre de l'étude des effets d'échelles dans les matériaux hétérogènes et de la résolution des problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes.



## ACQUIS ET PRINCIPES FONDAMENTAUX

**N**ous rappelons dans ce chapitre la théorie de la viscoélasticité linéaire des matériaux non vieillissants. Nous y montrons également le lien entre le comportement viscoélastique et l'amortissement dans ce type de matériaux. Dans l'optique d'améliorer la capacité amortissante de ces matériaux par le biais des acquis en micromécanique, nous présentons globalement la philosophie et les travaux marquants de cette science des matériaux. La limite de la micromécanique dans son état classique ou encore dans l'état où Eshelby l'avait initiée y est également présentée. Ensuite la théorie des structures sandwich viscoélastiques est présentée avec une revue des travaux réalisés dans cette discipline, étant donné que l'objet d'application de notre étude, le pare-brise, est un composite sandwich viscoélastique. Un tour d'horizon est fait sur les diverses techniques développées pour la modélisation de ces structures sandwich.

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Matériaux amortissants</b>	<b>13</b>
1.1.1	Viscoélasticité linéaire : bases théoriques	14
1.1.2	Viscoélasticité et amortissement	22
<b>1.2</b>	<b>Micromécanique et mécanique des matériaux</b>	<b>28</b>
1.2.1	Matériaux, hétérogénéités, échelles de longueur	29
1.2.2	Etat de l'art de la micromécanique en bref	32
1.2.3	Effet de taille et la micromécanique de Eshelby	35
<b>1.3</b>	<b>Matériaux sandwich VE : théories et savoir faire existant</b>	<b>36</b>
1.3.1	Présentation générale	36
1.3.2	Modèles analytiques en bref	38
1.3.3	Modèles éléments finis sandwich en bref	43
1.3.4	Quel modèle cinématique pour notre travail ?	45
1.3.5	Calcul d'amortissement des structures sandwich viscoélastiques	47
<b>1.4</b>	<b>Conclusions</b>	<b>50</b>

---

## 1.1 Matériaux amortissants

Les applications utilisant des matériaux de forte capacité d'amortissement des nuisances vibratoires et sonores peuvent être rencontrées dans presque tous les secteurs d'activité humaine (automobile, aérospatiale, bâtiment etc.). Par exemple, pour répondre aux attentes de leurs clients, les constructeurs d'automobiles améliorent sans cesse le confort de conduite à bord des véhicules. En effet, le confort acoustique et vibratoire est l'une des prestations les plus importantes pour la satisfaction des clients. Ces derniers y sont de plus en plus sensibles et le considèrent comme un indicateur de la qualité globale du véhicule. Les sondages clientèles ont révélé que les problèmes acoustiques (moteur trop bruyant, vibration de planche de bord, etc.) représentent de nos jours plus d'un quart des motifs d'insatisfaction.

Ainsi, de nos jours, le polyvinyl de butyral (PVB) est l'un des matériaux amortissants utilisé dans les pare-brises d'automobiles. Ce matériau présente une bonne adhérence au verre et il est utilisé sous forme de couche intercalée entre deux couches de verre. Le pare-brise ainsi constitué résiste mieux à l'impact lors d'un choc avec un corps étranger puisque le verre se fendille, la fracture est localisée au point d'impact sans altérer la visibilité. L'intercalaire PVB maintient les morceaux de verre en place, ce qui diminue le risque de coupure par éclats de verre. Il garde l'étanchéité de la paroi. De plus, l'énergie résiduelle du corps est absorbée par cet intercalaire ; le vitrage empêche donc le passage du corps si l'impact n'est pas disproportionné. Hormis ces avantages de sécurité, le PVB peut subir des traitements particuliers pour conférer au pare-brise d'autres propriétés (mécaniques, acoustiques, thermiques, optique etc.).

En général, tous les matériaux ayant un comportement amortissant sont définis comme matériaux viscoélastiques (VE) ([Lakes, 1998](#); [Christensen, 2005b](#)). A cause du nombre important des domaines d'application des matériaux amortissants, la modélisation des matériaux VE a été et demeure un centre d'intérêt capital dans plusieurs domaines d'ingénierie ([Hashin, 1965](#); [Christensen, 2005a](#)). Une telle modélisation commence par la compréhens-

sion fondamentale des processus physiques qui conduisent au comportement dissipatif. Par conséquent, nous présentons dans cette section une vue d'ensemble du comportement des matériaux VE ainsi que les outils mathématiques utilisés pour les modéliser sans toutefois oublier de présenter les hypothèses simplificatrices qui seront utilisées dans les modélisations des matériaux VE dans cette thèse.

Le comportement VE est fondamentalement lié à la dissipation intrinsèque de l'énergie de déformation dynamique sous forme de chaleur dans le matériau. Les matériaux cristallographiques tels que les métaux convertissent l'énergie de déformation en chaleur au travers de la friction interne tandis que l'absorption d'énergie dans les polymères résulte du glissement et de la relaxation des chaînes moléculaires. En général, la contrainte dans un matériau VE est liée au taux de déformation. Cette dépendance au taux de déformation est traduite en une réponse en contrainte dans le domaine fréquentiel appelé "spectre de relaxation" (Haberman, 2007; Haddad, 1995). Le spectre de relaxation d'un matériau VE montre que le niveau de contrainte dépend de l'amplitude et de la fréquence de la déformation appliquée (Haddad, 1995).

De le cadre de ce travail de thèse, nous nous intéresserons à la viscoélasticité linéaire. La viscoélasticité non-linéaire est traitée dans plusieurs ouvrages dont nous pouvons citer Christensen (2005b). Ainsi, dans un premier temps, nous présentons la théorie de la viscoélasticité linéaire en général avant de la particulariser au cas des matériaux viscoélastiques non vieillissants (cf. § 1.1.1). Ensuite, le lien entre la viscoélasticité et l'amortissement est montré par un exemple simple (cf. § 1.1.2).

### 1.1.1 Viscoélasticité linéaire : bases théoriques

#### **La viscoélasticité dans le domaine temporel**

Les matériaux *viscoélastiques* (VE) ont, par définition, un comportement à la fois *élastique* et *visqueux*. La première propriété est liée aux solides alors que la seconde est plutôt remarquée au niveau des fluides. Les fluides ont en effet une caractéristique particulière

de résistance à l'écoulement. Cette propriété est appelée *viscosité*. Elle résulte d'une perte d'énergie par frottements. L'énergie est alors dissipée dans le fluide sous forme de chaleur. Les matériaux VE se comportent à la fois comme des fluides visqueux et des solides élastiques. La réponse VE est alors un compromis entre celle d'un solide élastique et celle d'un fluide. Sa caractéristique principale est le *retard* par rapport à la réponse élastique. Ce retard est observé aussi bien dans la phase de déformation que dans la phase de relaxation. Il découle directement de la dépendance des propriétés mécaniques des matériaux VE en fonction de l'histoire des sollicitations. Plusieurs essais tels que le *fluage*, la *relaxation*, la *recouvrance* permettent de mettre en évidence le caractère *visqueux* de ces matériaux.

*Essai de Fluage* : cet essai consiste à appliquer au matériau VE, à un instant  $t_0$ , une contrainte uniaxiale dans la direction  $kl$  maintenue constante dans le temps (les autres composantes  $\sigma_{ij}$  étant nulles). On observe des déformations  $\varepsilon_{ij}$  dans le temps (Fig. 1.1). A l'instant  $t_0$ , on remarque des déformations instantanées  $\varepsilon_{ij}^0$  correspondant à l'élasticité instantanée du matériau. Ensuite, pour  $t > t_0$ , les déformations croissent (l'évolution de  $\varepsilon_{11}$  sert d'exemple) (Fig. 1.1). D'un point de vue mathématique, on peut écrire :

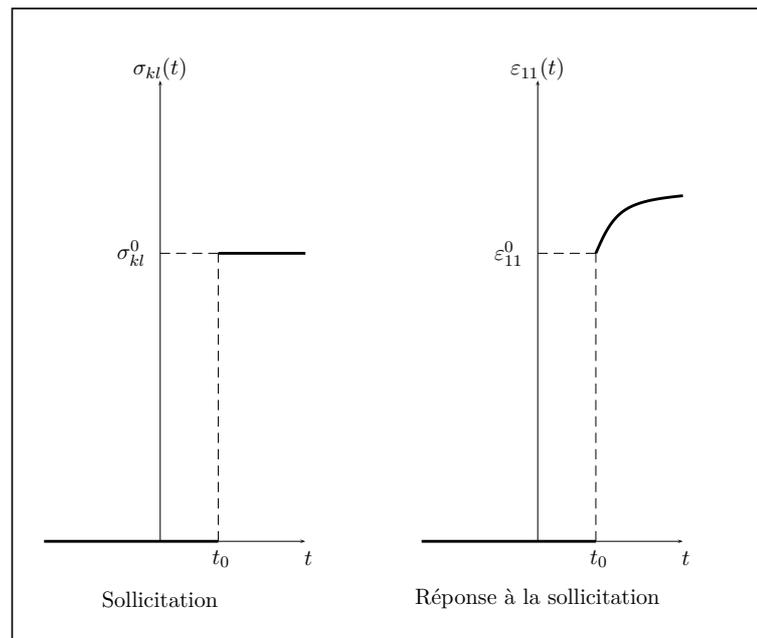


FIG. 1.1 – Essai de fluage.

$$\begin{cases} \sigma_{kl}(t) = \mathcal{H}(t - t_0)\sigma_{kl}^0, \\ \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0)\sigma_{kl}^0. \end{cases} \quad (1.1)$$

La fonction de *Heaviside*  $\mathcal{H}(t)$  ou fonction échelon est définie par :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x) = 0 & \text{si } x < 0, \\ \mathcal{H}(x) = 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

La fonction  $\mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0)$ , appelée fonction *retard*, a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0) = 0 & \text{si } t < t_0, \\ \mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0) : & \text{fonction croissante pour } t \geq t_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

*Essai de Relaxation* : dans cet essai, on applique au matériau et à partir d'un instant  $t_0$ , une déformation uniaxiale maintenue constante dans la direction  $kl$  (les autres composantes  $\varepsilon_{ij}$  étant bien sûr nulles). On observe alors une évolution des contraintes  $\sigma_{ij}$  dans le temps (Fig. 1.2).

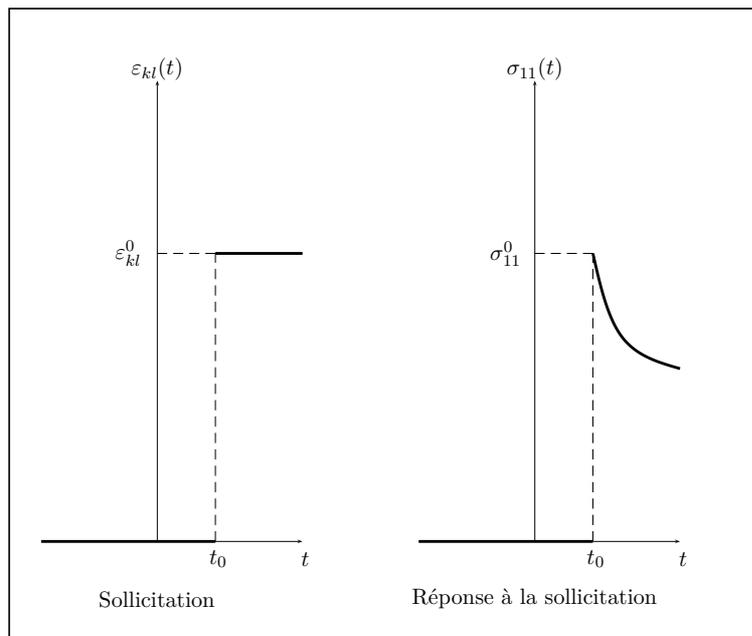


FIG. 1.2 – Essai de relaxation.

Là aussi, d'un point de vue mathématique, on peut écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_{kl}(t) = \mathcal{H}(t - t_0)\varepsilon_{kl}^0, \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0, \varepsilon_{kl}^0)\varepsilon_{kl}^0. \end{cases} \quad (1.4)$$

La fonction  $\mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0, \varepsilon_{kl}^0)$ , appelée fonction de *relaxation*, a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0, \varepsilon_{kl}^0) = 0 & \text{si } t < t_0, \\ \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0, \varepsilon_{kl}^0) : & \text{fonction décroissante pour } t \geq t_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

*Essai de recouvrance* : ici, on applique un créneau de contrainte d'amplitude  $\sigma_{kl}^0$ . Les déformations évoluent dans le temps (Fig. 1.3).

Pour  $t < t_1$ , on retrouve l'essai de *fluage*.

Pour  $t = t_1$ , on relâche la contrainte. Il y a alors un retour instantané d'amplitude égale au saut observé en  $t = t_0$  (si l'élasticité instantanée est invariable).

Pour  $t > t_1$ , les déformations décroissent et reviennent à l'état initial ( $\varepsilon_{ij} = 0$ ). On dit que le matériau est *viscoélastique* s'il ne présente pas de déformation permanente. Par contre, il est dit *visco-élasto-plastique* (Salençon, 1983) s'il présente une déformation permanente.

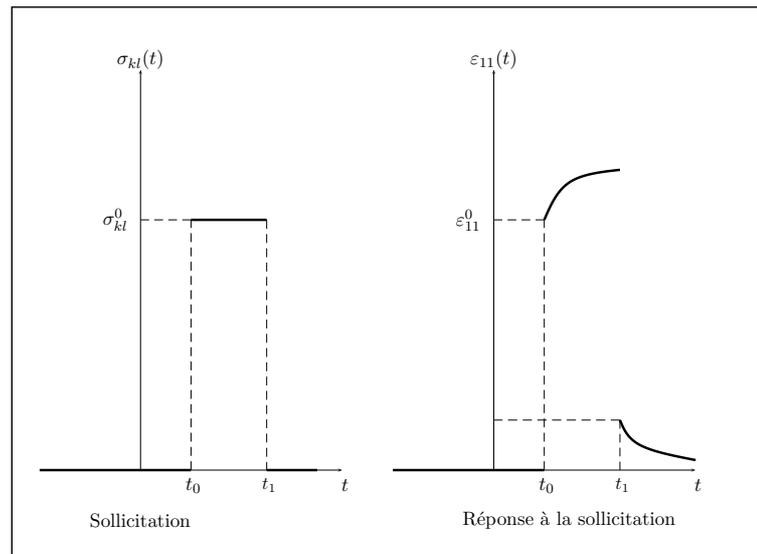


FIG. 1.3 – Essai de recouvrance.

### Formulation fonctionnelle de la viscoélasticité

En viscoélasticité, la loi de comportement s'écrit de manière générale :

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{F} [\varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t)], \quad (1.6)$$

ou inversement

$$\varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{G} [\sigma_{kl}(\tau_{-\infty}^t)]. \quad (1.7)$$

A chaque instant  $t$ ,  $\sigma_{ij}(t)$  (resp  $\varepsilon_{ij}(t)$ ) dépend de l'histoire de la déformation  $\varepsilon_{kl}(\tau)$  (resp contrainte  $\sigma_{kl}(\tau)$ ) jusqu'à cet instant  $t$ . Le comportement est dit *linéaire* si la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  (resp  $\mathcal{G}$ ) est *linéaire* c'est-à-dire par exemple :

$$\begin{cases} \mathcal{F} [\varepsilon_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t) + \varepsilon_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)] &= \mathcal{F} [\varepsilon_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t)] + \mathcal{F} [\varepsilon_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)], \\ \mathcal{F} [\lambda \varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] &= \lambda \mathcal{F} [\varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \quad (\text{avec } \lambda \in \mathbb{R}), \end{cases} \quad (1.8)$$

où  $\varepsilon^{(1)}$  et  $\varepsilon^{(2)}$  constituent deux états de déformation distincts. La conséquence directe de cette condition de linéarité est que la fonction de retard  $\mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0)$  est indépendante de  $\sigma_{kl}^0$ . Inversement, la fonction de relaxation  $\mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0, \varepsilon_{kl}^0)$  est également indépendante de  $\varepsilon_{kl}^0$ . Ainsi pour la viscoélasticité linéaire, on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{kl}(t) &= \mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0) \sigma_{kl}^0, \quad \text{pour le fluage,} \\ \sigma_{ij}(t) &= \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0) \varepsilon_{kl}^0, \quad \text{pour la relaxation.} \end{cases} \quad (1.9)$$

### Principe de superposition de Boltzmann

En utilisant la linéarité du comportement, on peut exprimer la réponse à toute l'histoire de sollicitation (contrainte ou déformation) à partir de la connaissance des fonctions  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$ . Une histoire de contrainte  $\sigma_{kl}(t)$  par exemple peut être considérée comme la superposition d'échelons infiniment petits  $d\sigma_{kl}(\tau)\mathcal{H}(t-\tau)$  et éventuellement des sauts notés

$[[\sigma_{kl}]]_n$  aux instants  $\tau_n$ . La déformation est, selon la définition de la linéarité, la superposition des réponses  $d\varepsilon_{kl}(t)$  produits par ces échelons  $d\sigma_{kl}(\tau)\mathcal{H}(t-\tau)$ . Ainsi,  $d\sigma_{kl}(\tau)$  produit une déformation  $d\varepsilon_{kl}(t)$  à un instant postérieur à  $\tau$ . On peut alors écrire la relation qui relie  $d\varepsilon_{kl}(t)$  à  $d\sigma_{kl}(\tau)$  par :

$$d\varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)d\sigma_{kl}(\tau). \quad (1.10)$$

On en déduit alors que :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)d\sigma_{kl}(\tau) + \sum_n \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau_n)[[\sigma_{kl}]]_n. \quad (1.11)$$

L'expression (1.11) peut être réécrite sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)\dot{\sigma}_{kl}(\tau)d\tau, \quad (1.12)$$

où  $\dot{\sigma}_{kl}(\tau)$  est la dérivée de  $\sigma_{kl}(\tau)$  par rapport à  $\tau$  au sens des distributions, c'est-à-dire :

$$\dot{\sigma}_{kl}(\tau) = \begin{cases} \frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} & \text{si } \sigma_{kl}(\tau) \text{ est dérivable en } \tau, \\ [[\sigma_{kl}]]_n \delta\tau_n & \text{en } \tau = \tau_n \text{ où il y a un saut de contrainte.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Dans l'expression (1.13),  $\delta\tau_n$  représente la distribution de Dirac en  $\tau_n$ . Pour des notions sur la théorie des distributions, le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage de Appel (2006, p. 155-216). En intégrant par partie l'expression (1.12) on obtient :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \underbrace{\mathcal{J}_{ijkl}(t, t)\sigma_{kl}(t)}_{\text{Élasticité instantanée}} - \underbrace{\int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma_{kl}(\tau)d\tau}_{\text{Effet de mémoire}} \quad (1.14)$$

Dans cette formule, l'effet mémoire tient compte de toute l'histoire de  $\sigma$ .

### Cas des matériaux non vieillissants

Un matériau est dit non vieillissant si ses propriétés n'évoluent pas avec le temps (Persoz, 1969). La réponse à un instant  $t$  pour une sollicitation à un instant  $\tau$  (antérieur à  $t$ ) est la même que celle à un instant  $t + \Delta\tau$  pour une sollicitation à un instant  $\tau + \Delta\tau$ . Il en découle alors que les fonctions de retard et de relaxation ne dépendent que d'une seule variable :  $t - \tau$  qui est le temps séparant l'effet de la cause. Ainsi, la formule (1.14) se réécrit sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(0)\sigma_{kl}(t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathcal{J}_{ijkl}(t - \tau)}{\partial \tau} \sigma_{kl}(\tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Dans ce cas, l'expression duale de la formule (1.15) s'écrit, en permutant le rôle de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , comme ci-après :

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathcal{R}_{ijkl}(t - \tau)}{\partial \tau} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Comme pour les modules d'élasticité, les fonctions de retard et de relaxation vérifient les propriétés de symétrie :

$$\mathcal{J}_{ijkl} = \mathcal{J}_{jikl} = \mathcal{J}_{ijlk}, \quad \mathcal{J}_{ijkl} = \mathcal{J}_{klij}, \quad (1.17)$$

pour la fonction retard et

$$\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{jikl} = \mathcal{R}_{ijlk}, \quad \mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{klij}, \quad (1.18)$$

pour la fonction relaxation.

### Viscoélasticité dans le domaine de Carson (fréquentiel)

Partant du fait que la fonction de retard  $\mathcal{J}_{ijkl}(t - \tau) = 0$  pour  $t > \tau$ , on peut récrire la formule (1.12) de la manière suivante :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_{ijkl}(t - \tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau, \quad (1.19)$$

et son expression duale s'écrit (car la fonction de relaxation  $\mathcal{R}_{ijkl}(t - \tau) = 0$  pour  $t > \tau$ ) :

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{ijkl}(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau. \quad (1.20)$$

Nous remarquons alors que les lois (1.19) et (1.20) peuvent s'écrire en terme de convolution de Riemann notée  $*$  :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) &= (\mathcal{R}_{ijkl} * \dot{\varepsilon}_{kl})(t), \\ \varepsilon_{ij}(t) &= (\mathcal{J}_{ijkl} * \dot{\sigma}_{kl})(t). \end{cases} \quad (1.21)$$

Ainsi il paraît donc clair que les calculs concernant un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant (VELNV) se font dans une algèbre de convolution. Le traitement des problèmes de viscoélasticité linéaire pour les matériaux non vieillissants est donc facilité par l'usage de la transformation de Carson.

**Définition 1** La transformation de Carson d'une fonction  $f(t)$  notée  $\mathcal{C}f(t)$  est définie par :

$$\mathcal{C}f(t) = \hat{f}(s) = s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = s\mathcal{L}f(t) = s\bar{f}(s), \quad (1.22)$$

où  $\mathcal{L}f(t) = \bar{f}(s)$  est la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ .

Il vient alors que :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{ij}(s) = \hat{\mathcal{R}}_{ijkl}(s)\hat{\varepsilon}_{kl}(s), \\ \hat{\varepsilon}_{ij}(s) = \hat{\mathcal{J}}_{ijkl}(s)\hat{\sigma}_{kl}(s). \end{cases} \quad (1.23)$$

Les lois (1.23) sont bien identiques à la loi de Hooke classique et sa duale pour un matériau élastique ; ce qui nous conduit à énoncer le principe de correspondance élastique-viscoélastique (Christensen, 2005b).

### Principe de correspondance élastique-viscoélastique

Le principe de correspondance élastique-viscoélastique s'énonce comme suit : *Dans l'hypothèse des changements de géométrie négligeables et selon le principe d'Onsager (Salençon, 1983), la résolution de la plupart des problèmes pour un système constitué d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant anisotrope se ramène à la résolution du problème analogue pour le même système constitué d'un matériau élastique linéaire anisotrope.*

Il est important de noter à ce niveau que ce principe de correspondance élastique-viscoélastique sera largement utilisé pour les modélisations micro/nano-mécaniques des matériaux viscoélastiques dans ce travail de thèse.

#### 1.1.2 Viscoélasticité et amortissement

Dans ce paragraphe, nous présentons le comportement d'un matériau VE lorsqu'il est soumis à des sollicitations harmoniques et nous faisons ensuite le lien avec la dissipation d'énergie liée à ce type de comportement.

## Matériaux viscoélastiques et sollicitations harmoniques

Considérons un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant soumis à des sollicitations harmoniques de la forme :

$$\sigma_{ij}(t) = \Re \left[ \sigma_{ij}^0 e^{i\omega t} \right] = \sigma_{ij}^0 \cos(\omega t), \quad (1.24)$$

avec  $i = \sqrt{-1}$  et  $\omega$ , la pulsation. Les déformations induites peuvent être déduites de la formule (1.19) sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \sigma_{kl}^0 \int_{-\infty}^t \mathcal{J}_{ijkl}(t - \tau) \Re \left[ i\omega e^{i\omega\tau} \right] d\tau \\ &= \sigma_{kl}^0 \Re \left[ i\omega \int_{-\infty}^t \mathcal{J}_{ijkl}(t - \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Grâce au changement de variable

$$u = t - \tau,$$

l'expression (1.25) peut être réécrite sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \Re \left[ i\omega e^{i\omega t} \int_0^{+\infty} \mathcal{J}_{ijkl}(u) e^{-i\omega u} du \right]. \quad (1.26)$$

En se basant sur la transformation de Carson (1.22), la loi (1.26) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) &= \sigma_{kl}^0 \Re \left[ \hat{\mathcal{J}}_{ijkl}(i\omega) e^{i\omega t} \right], \\ \hat{\mathcal{J}}_{ijkl}(i\omega) &= \mathcal{C} \mathcal{J}_{ijkl}(u) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{J}_{ijkl}(u) e^{-i\omega u} du. \end{cases} \quad (1.27)$$

En utilisant des notations complexes et tensorielles, la formule (1.27) s'écrit :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) = \hat{\mathbf{S}}(\omega) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\omega), \quad (1.28)$$

où :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{S}}(\omega) = \hat{\mathcal{J}}(i\omega), & \text{Tenseur des complaisances complexes,} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) = \boldsymbol{\sigma}^0 e^{i\omega t}, & \text{Tenseur des contraintes.} \end{cases} \quad (1.29)$$

La loi de comportement duale de la loi (1.28) s'écrit de manière analogue par :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) = \hat{\mathbf{C}}(\omega) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega), \quad (1.30)$$

où :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{C}}(\omega) = \hat{\mathcal{R}}(i\omega), & \text{Tenseur des modules complexes,} \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 e^{i\omega t}, & \text{Tenseur des déformations.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Notons que :

$$\hat{\mathcal{R}}(i\omega) = [\hat{\mathcal{J}}(i\omega)]^{-1}. \quad (1.32)$$

Pour un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant soumis à un chargement harmonique, la contrainte et la déformation sont déphasées d'un angle  $\varphi_{ij}(\omega)$  (voir figure 1.4(a)).

En effet, d'après la loi (1.27), on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \left| \hat{\mathcal{J}}_{ijkl}(i\omega) \right| \Re \left[ e^{i\omega t + i\varphi_{ij}(\omega)} \right], \\ \tan(\varphi_{ij}(\omega)) = \frac{\mathcal{J}_{ijkl}''(\omega)}{\mathcal{J}_{ijkl}'(\omega)} = \frac{\Im \left[ \hat{\mathcal{J}}_{ijkl}(i\omega) \right]}{\Re \left[ \hat{\mathcal{J}}_{ijkl}(i\omega) \right]} = \frac{\Im \left[ \hat{S}_{ijkl}(\omega) \right]}{\Re \left[ \hat{S}_{ijkl}(\omega) \right]}. \end{cases} \quad (1.33)$$

### Matériaux viscoélastiques et frottement interne

Pour illustrer la dissipation interne dans un matériau VELNV, considérons le cas d'une sollicitation harmonique uniaxiale :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^0 \Re \left[ e^{i\omega t} \right] = \varepsilon^0 \cos(\omega t). \quad (1.34)$$

D'après la relation (1.30), la contrainte induite s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = \varepsilon^0 \left| \hat{\mathcal{R}}(i\omega) \right| \Re \left[ e^{i\omega t + i\varphi(\omega)} \right], \\ \tan(\varphi(\omega)) = \frac{\Im \left[ \hat{\mathcal{R}}(i\omega) \right]}{\Re \left[ \hat{\mathcal{R}}(i\omega) \right]} = \frac{\mathcal{R}''(\omega)}{\mathcal{R}'(\omega)}. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Si nous considérons le module de Young complexe  $\hat{E}(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega)$  dans les cas de traction (compression) alors la contrainte induite devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = \varepsilon^0 \left| \hat{E}(\omega) \right| \Re \left[ e^{i\omega t + i\varphi(\omega)} \right] = \varepsilon^0 \left| \hat{E}(\omega) \right| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \\ \quad = \sigma^{\max} \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \\ \quad = E'(\omega) \varepsilon^0 \left[ \cos(\omega t) - \eta(\omega) \sin(\omega t) \right], \\ \eta(\omega) = \tan(\varphi(\omega)) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}. \end{array} \right. \quad (1.36)$$

La figure 1.4(a) illustre le déphasage entre la sollicitation harmonique uniaxiale et la réponse du matériau VELNV. Nous déduisons des relations (1.34) et (1.36) que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\omega t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon^0}, \\ \sin(\omega t) = \frac{1}{\eta \varepsilon^0} \left[ \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E'(\omega)} \right]. \end{array} \right. \quad (1.37)$$

Ainsi, à chaque fréquence on a  $E'(\omega) = E' = \text{cte}$ ; ceci se traduit dans le plan  $(\varepsilon - \sigma)$  par une relation contrainte/déformation elliptique d'équation :

$$\left[ \frac{1}{\eta \varepsilon^0} \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{E'} \right) \right]^2 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon^0} \right)^2 = 1. \quad (1.38)$$

L'aire de l'hystérèse (figure 1.4(b)) représente le travail dissipé ( $E_d$ ) au cours d'un cycle ( $T = 2\pi/\omega$ ) de déformation, soit :

$$E_d = \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon} dt = \eta \sigma^0 \varepsilon^0 \omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t) dt = \eta \pi \sigma^0 \varepsilon^0, \quad (1.39)$$

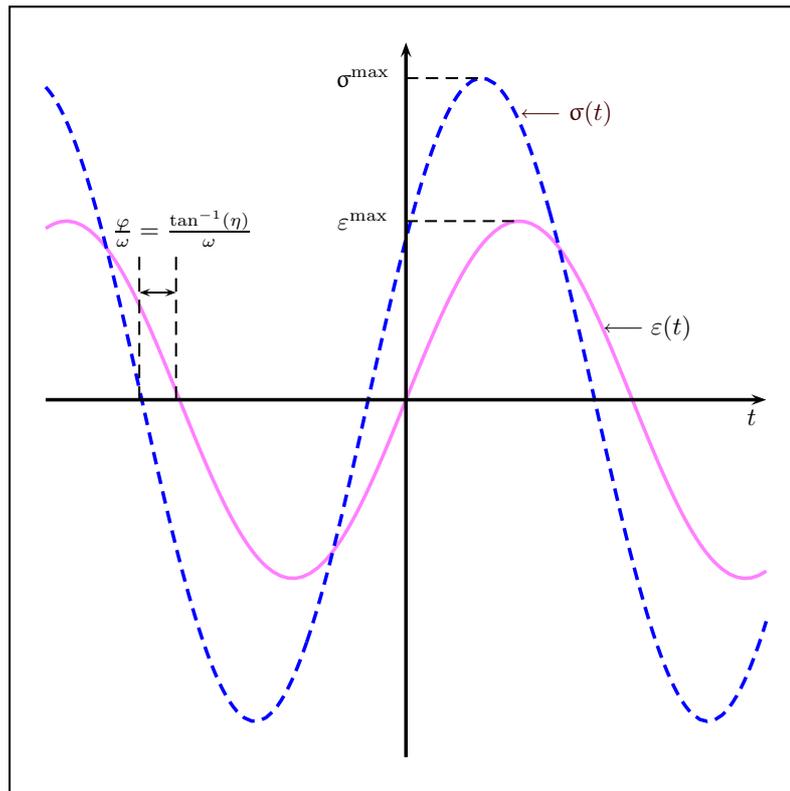
avec  $\sigma^0 = E' \varepsilon^0$ . L'énergie potentielle maximale est définie par :

$$E_p = \frac{1}{2} \sigma^0 \varepsilon^0. \quad (1.40)$$

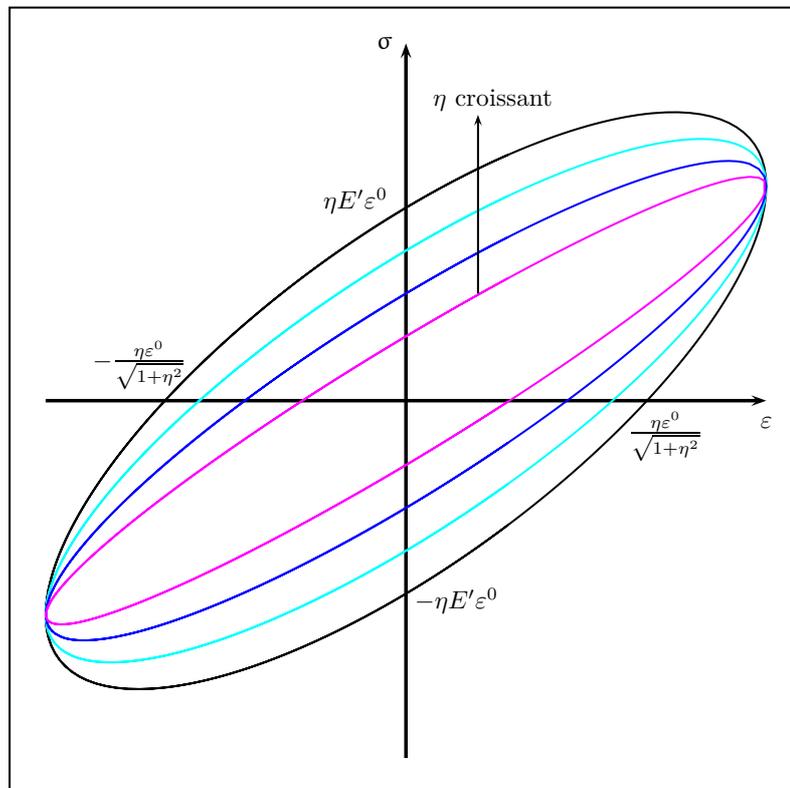
Il ressort des relations (1.39) et (1.40) que :

$$\eta = \frac{E_d}{2\pi E_p}, \quad (1.41)$$

d'où le nom de *facteur de perte* ou *facteur d'amortissement* donné habituellement à  $\eta$  car ce dernier correspond au rapport de l'énergie dissipée  $E_d$  sur un cycle de déformation par  $2\pi$  fois l'énergie potentielle maximale. Le module de Young complexe dépendant de la fréquence s'écrit  $\hat{E}(\omega) = E'(\omega) [1 + i\eta(\omega)]$  où  $E'(\omega)$  est couramment appelé *module de stockage*. La forme de l'ellipse qui décrit un cycle d'hystérèse change avec l'évolution du facteur de perte  $\eta$  comme l'illustre la figure 1.4(b). Plus  $\eta$  est grand, plus la surface de l'hystérèse est importante et plus grande est l'énergie dissipée  $E_d$ . Ce coefficient de frottement interne  $\eta$  caractérise ainsi la capacité d'un matériau VE à dissiper sous forme de chaleur, une partie de l'énergie de déformation reçue.



(a) Déphasage entre la réponse et la sollicitation.



(b) Hystérèses contrainte-déformation en fonction de  $\eta$ .

FIG. 1.4 – Sollicitation harmonique et réponse d'un matériau VELNV.

L'un des principaux objectifs de nos travaux est d'explorer les voies et moyens pour améliorer ce facteur d'amortissement  $\eta$  puisqu'il est bien connu de nos jours que la capacité d'amortissement des matériaux peut être augmentée par l'introduction d'hétérogénéités dans le matériau (Jarzynski, 1990). Ainsi, la grande partie des développements de ce travail concerne la modélisation des composites VE pour des applications d'amortissement. Il s'agit donc de prédire le tenseur des modules complexes dépendant de la fréquence  $\hat{\mathbf{C}}(\omega)$  de la relation (1.30) pour les matériaux composites VE et caractériser ainsi leur pouvoir amortissant. Pour les matériaux VE isotropes et homogènes,  $\hat{\mathbf{C}}(\omega)$  est complètement décrit par un module de Young  $\hat{E}(\omega)$  et un coefficient de Poisson  $\hat{\nu}(\omega)$  complexes. Leur mesure séparée pose cependant des problèmes expérimentaux très significatifs (Kergourlay, 2004). La pratique est donc de mesurer le module de Young  $\hat{E}(\omega)$  ou le module de cisaillement  $\hat{\mu}(\omega)$  et de supposer un coefficient de Poisson  $\hat{\nu}(\omega) = \nu$  constant. Très peu de données sont par ailleurs disponibles sur les variations de  $\hat{\nu}$  en fonction de la fréquence. On sait principalement dire qu'il diminue lorsque la fréquence augmente (Pritz, 1998). Pour modéliser et prédire le tenseur des modules complexes dépendant de la fréquence  $\hat{\mathbf{C}}(\omega)$  des matériaux composites VE, nous utiliserons les outils bien établis de la micromécanique qui est une science des matériaux. Il serait alors intéressant de dire ici quelques mots sur cette science des matériaux avec une brève revue de certains travaux réalisés dans cette discipline.

## 1.2 Micromécanique et mécanique des matériaux

La micromécanique est une branche de la mécanique des matériaux. C'est le développement le plus récent dans l'application de la mécanique des milieux continus aux matériaux réels. Le début de la micromécanique est attribué au travail décisif de Eshelby (1957). Cependant ce n'est qu'au début des années 80 que la théorie de la micromécanique s'est pleinement enracinée pour donner naissance à ce qu'est aujourd'hui cette branche de la mécanique des matériaux. Même si elle demeure encore un domaine très actif de

recherche, la micromécanique a atteint un niveau de maturité assez élevé et plusieurs ouvrages ont été publiés sur ce sujet. Parmi ces derniers, nous pouvons citer les œuvres de [Mura \(1987\)](#); [Nemat-Nasser et Hori \(1999\)](#); [Qu et Cherkaoui \(2006\)](#).

La théorie de la micromécanique des solides décrit les concepts scientifiques, les principes et les méthodologies pour l'étude du comportement thermo-mécanique des matériaux hétérogènes. Bien que les équations fondamentales de la micromécanique soient basées sur la mécanique des milieux continus, son application couvre une large gamme d'applications des comportements thermo-mécaniques des matériaux tels que la plasticité, la rupture, la fatigue et les lois de comportement des composites. Par exemple, la micromécanique applique la théorie de l'élasticité et de la plasticité pour étudier les imperfections dans les cristaux, les inclusions et hétérogénéités dans les alliages et dans les matériaux composites. L'objectif est d'étudier le comportement mécanique macroscopique des matériaux par la connaissance de leur microstructure. Ceci implique donc l'application de la mécanique des milieux continus à l'échelle microscopique et l'usage des méthodes analytiques et numériques pour déterminer les réponses macroscopiques. Elle permet alors de prédire le comportement de nouveaux matériaux sans avoir recours aux essais expérimentaux. Cette science qu'est la micromécanique fournit ainsi aux ingénieurs de conception, de fabrication et d'analyse des outils puissants pour une large gamme de matériaux à savoir les matériaux polycristallins, les matériaux composites, les matériaux géotechniques, les matériaux biologiques, les matériaux électroniques pour ne citer que ceux-là. La micromécanique permet de qualifier et d'élucider plusieurs phénomènes en l'occurrence la fatigue et la rupture des solides et structures, les interphases dans les composites, les transformations de phase (martensitique) etc.

### *1.2.1 Matériaux, hétérogénéités, échelles de longueur*

D'une manière générale, les matériaux utilisés dans l'ingénierie sont hétérogènes, c'est-à-dire qu'ils ont une microstructure et contiennent des hétérogénéités. Néanmoins, ce que

constitue une hétérogénéité dépend de l'échelle utilisée dans son observation. Certains constituants ou phases dans un matériau donné ne sont identifiables qu'à une échelle de longueur ou en-dessous de celle-ci. A une telle échelle, chaque constituant peut être considéré comme homogène. Cependant quand il est observé à une échelle inférieure, le constituant ou la phase peut être lui-même hétérogène. Par exemple, un polycristal de cuivre peut être vu comme homogène à l'œil nu ( $\sim 10\mu\text{m}$ ). En revanche, lorsqu'il est observé sous un microscope optique ( $\sim 1\mu\text{m}$ ), le polycristal de cuivre est composé de plusieurs grains (petits cristaux de cuivre avec différentes orientations). A cette échelle, bien que chaque grain peut être traité comme un matériau homogène, le polycristal de cuivre (assemblage de grains) ne peut pas être traité comme un matériau homogène puisque les caractéristiques de la microstructure telles que la taille des grains, l'orientation et les joints de grains contrôlent le comportement du matériau à cette échelle. Quand on descend plus loin dans les échelles de longueur, on s'aperçoit que chaque grain a sa propre microstructure. Le comportement et les propriétés des matériaux à chaque échelle de longueur sont contrôlés par la microstructure observable à cette échelle. Ainsi, qu'un matériau soit hétérogène ou non, cela dépend de l'échelle utilisée dans son observation. En d'autres termes, quand on étudie les propriétés d'un matériau réel, qui est toujours hétérogène, on a besoin de préciser l'échelle à laquelle les propriétés concernées sont pertinentes. Les caractéristiques de la microstructure non observables à cette échelle peuvent donc être négligées. En effet, dans la pratique, seuls certains effets moyennés de la microstructure sont considérés. C'est pourquoi, dans l'étude des matériaux hétérogènes, on parle souvent de propriétés effectives. On sous-entend ainsi une moyenne des propriétés dans un certain volume du matériau hétérogène. Pour que de telles propriétés effectives soient significatives, la moyenne prise dans un élément de volume arbitraire (comparable à l'échelle de longueur utilisée) doit être la même qu'avec l'échantillon du matériau hétérogène considéré. Les matériaux hétérogènes qui satisfont cette condition sont dits macroscopiquement homogènes.

Pour illustrer ces concepts, considérons par exemple un composite stratifié avec des renforts en fibres. Certainement il n'est ni pratique ni nécessaire de traiter chaque fibre individuellement si la rigidité globale en flexion du stratifié est d'intérêt primordial. En d'autres termes, la rigidité globale du composite est très étroitement liée à la mise en place des différentes couches au sein du stratifié. Pour déterminer la rigidité globale du stratifié, il doit être traité comme une pile de plis chacun étant différent dans la composition et/ou l'orientation, quoique chaque couche peut être considérée comme homogène. Dans cet exemple, nous avons supposé implicitement qu'il existe une séparation des échelles de longueur  $L$  et  $l$  sur lesquelles les propriétés macroscopiques (la rigidité globale en flexion du stratifié) et les propriétés microscopiques (élasticité des plis) sont définies respectivement. La micro-échelle  $l$  correspond au plus petit constituant dont les propriétés physiques, orientation et forme sont jugées avoir un effet de premier ordre sur les propriétés effectives macroscopiques globales du matériau hétérogène à l'échelle de longueur  $L$ . Le choix de  $l$  est généralement adapté au problème considéré. L'échelle de longueur macroscopique  $L$  doit être suffisamment grande pour que les fluctuations (perturbations), à l'échelle microscopique  $l$ , des champs de contraintes et de déformations dues aux variations locales de microstructure à l'échelle  $l$  influencent les propriétés effectives globales seulement à travers leurs moyennes. En effet, dans le cadre de la micromécanique, les champs de contraintes et de déformations sont partagés entre les contributions correspondant aux diverses échelles de longueur. Il est donc supposé que ces échelles de longueur sont suffisamment distinctes en termes de leur ordre de grandeur de façon à ce que pour chaque couple d'échelles, les fluctuations des champs de contraintes et de déformations (quantités microscopiques et locales) à la plus petite échelle de longueur influencent le comportement global (macroscopique) à la plus grande échelle de longueur seulement à travers leurs moyennes ; alors que les fluctuations des champs de contraintes et de déformations (quantités macroscopiques ou globales) sont insignifiantes à la plus petite échelle de longueur. Par conséquent, à cette échelle, les champs macroscopiques sont localement uniformes et peuvent être dé-

crits comme des contraintes et déformations uniformément appliquées. Pour satisfaire ces conditions, la dimension typique des constituants à l'échelle microscopique doit être très inférieure par rapport à l'élément de la macro-échelle soit  $l/L \ll 1$ .

### 1.2.2 *Etat de l'art de la micromécanique en bref*

Depuis le célèbre travail de [Eshelby \(1957\)](#), plusieurs travaux ont adapté, modifié et appliqué le concept de [Eshelby](#) à divers problèmes physiques. Il existe plusieurs revues bibliographiques sur le sujet et donc seule une sélection non exhaustive mais assez représentative est présentée ici.

#### **Comportement anisotropique**

Plusieurs travaux ont modifié la formulation classique (à l'origine isotrope) pour y intégrer le comportement anisotrope. Une excellente, mais un peu datée, revue de ces aspects est donnée dans la classique monographie de [Mura \(1987\)](#). Certains travaux plus récents, qui contiennent également des listes de références sur ce sujet, sont les suivants : [Ru \(2003\)](#) qui traite des inclusions de forme arbitraire dans un demi-plan et un plan anisotropes, [Li et Dunn \(1998\)](#) traitent des champs couplés de problèmes d'inclusions anisotropiques, [Pan et Yang \(2001\)](#) qui présentent une méthode semi-analytique pour des applications aux quantum dots introduits dans une matrice puis [Faux et Pearson \(2000\)](#) qui ont également appliqué une formulation anisotropique aux quantum dots.

#### **Morphologie des hétérogénéités**

Dans ce domaine, [Chiu \(1977\)](#) a considéré des inclusions de forme parallélépipédique. [Rodin \(1996\)](#), de son côté, a étudié la forme générale d'inclusion polyédrique de même que [Nozaki et Taya \(2001\)](#).

### Hétérogénéités et interfaces imparfaites

Dans son travail original, [Eshelby](#) a supposé que l'interface entre la matrice et l'inclusion est parfaite : la traction et les déplacements sont continus aux interfaces. Sous certaines conditions, cette hypothèse d'interface parfaite doit être revue (par exemple, le glissement des joints de grains dans les polycristaux). Plusieurs chercheurs ont considéré le cas d'interface imparfaite entre l'inclusion et la matrice. En l'occurrence, nous pouvons citer les travaux de [Kouris \*et al.\* \(1986\)](#), [Furuhashi \*et al.\* \(1992\)](#), [Qu \(1993a,b\)](#), [Zhong et Meguid \(1996\)](#), [Ru et Schiavone \(1997\)](#) entre autres.

### Hétérogénéités enrobées et multi-enrobées

Souvent, pour des raisons technologiques, les inclusions sont noyées dans une matrice avec un revêtement (ou qui peut être développé en raison d'interaction chimique avec la matrice). Quelques travaux représentatifs parmi tant d'autres dans ce domaine sont les suivants : [Walpole \(1978\)](#), [Luo et Weng \(1989\)](#), [Hervé et Zaoui \(1993\)](#), [Cherkaoui \*et al.\* \(1994, 1995\)](#), [Lipinski \*et al.\* \(2006\)](#), [Barhdadi \*et al.\* \(2007\)](#).

### Problèmes couplés

En raison de possibles applications dans des capteurs et dans la technologie des actionneurs, un vaste corpus de travail a mis l'accent sur les problèmes couplés, par exemple, les inclusions magnéto-restrictives, les milieux piézoélectriques, etc. Nous pouvons citer entre autres, les travaux de [Li et Dunn \(1998\)](#), [Taya \(1999\)](#), [Deng et Meguid \(1999\)](#), [Ru \(2000\)](#), [Mikata \(2001\)](#), [Pan \(2002a,b\)](#).

### Déformations propres non uniformes

[Sendekyi \(1967\)](#) et [Moschovidis \(1975\)](#) ont étudié des déformations propres polynomiales. Leurs travaux sont utiles aussi bien pour les chargements non uniformes que pour la prise en compte des interactions entre les hétérogénéités. [Asaro et Barnett \(1975\)](#) puis

Mura et Kinoshita (1978) ont de leur côté considéré des déformations propres polynomiales dans un milieu anisotropique. Rahman (2002) a présenté récemment des calculs du tenseur de Eshelby pour une distribution polynomiale de déformations propres.

### Elasticité enrichie

La théorie classique de l'élasticité (Timoshenko et Goodier, 1970; Sokolnikoff, 1983; Marsden et Hughes, 1994) a été elle-même modifiée de plusieurs façons. L'élasticité des milieux micromorphes tient compte des micro degrés de liberté additionnels tels que des rotations, des dilatations et des cisaillements qui sont a priori indépendants des degrés de liberté habituels à savoir les trois composantes du vecteur de déplacement d'un point du milieu continu. Une large revue de ces théories peut être trouvée dans Forest et Sab (1998), Eringen (1999) et Forest (2001).

### Viscoélasticité

Les travaux pionniers sur l'homogénéisation des matériaux composites viscoélastiques furent les travaux de Hashin (1965, 1970a,b) et Christensen (1969). Tous ces travaux sont basés sur l'assemblage des sphères composites développé par Hashin (1962) et sur le principe de correspondance entre l'élasticité linéaire et la viscoélasticité linéaire (cf. § 1.1.1.0). Brinson et Lin (1998) ont examiné l'usage des méthodes micromécaniques usuelles pour la détermination des propriétés effectives des matériaux composites viscoélastiques. Haberman *et al.* (2002, 2005, 2006) ont étendu le modèle micromécanique de Cherkaoui *et al.* (1994) dans le domaine quasi-statique pour l'étude des matériaux viscoélastiques. Récemment, Koutsawa *et al.* (2008d) ont également adapté le modèle de Lipinski *et al.* (2006) pour étudier les propriétés des matériaux composites viscoélastiques.

## Comportements non linéaires

Plusieurs autres travaux existent dans le contexte du comportement non linéaire des matériaux et bien sûr dans les domaines d'applications tels que les transformations de phase, la stabilité, les théories de milieu effectif parmi tant d'autres. Pour plus d'informations sur le sujet, le lecteur intéressé peut se référer aux livres de [Mura \(1987\)](#), [Weng et al. \(1990\)](#), [Nemat-Nasser et Hori \(1999\)](#), [Markov et Preziosi \(2000\)](#), [Besson et al. \(2001\)](#) et [Qu et Cherkaoui \(2006\)](#) pour ne citer que ceux là.

### 1.2.3 Effet de taille et la micromécanique de Eshelby

Comme nous le présentons dans les chapitres [3](#) et [4](#) puis brièvement dans l'annexe [B.1](#), la micromécanique classique dont nous venons de présenter quelques travaux marquants ne dépend pas de la taille mais de la forme des hétérogénéités. En d'autres termes, si nous considérons une hétérogénéité ellipsoïdale (de demi-axes  $a$ ,  $b$  et  $c$ ) noyée dans une matrice, les propriétés effectives du composite ainsi formé ne dépend que des rapports  $a/b$  et  $a/c$  de la géométrie de l'hétérogénéité. Cela veut dire que si nous prenons deux hétérogénéités ellipsoïdales de demi-axes respectifs  $a_1 = 1$  nm,  $b_1 = 2$  nm,  $c_1 = 3$  nm puis  $a_2 = 100$   $\mu\text{m}$ ,  $b_2 = 200$   $\mu\text{m}$ ,  $c_2 = 300$   $\mu\text{m}$  d'un même matériau, alors les propriétés effectives des composites formés par ces hétérogénéités noyées dans des matrices d'un même matériau seront les mêmes. Cependant, des expériences ont révélé au cours de ces dernières années que cette non dépendance en taille de l'hétérogénéité n'est valable que si la plus petite dimension de l'hétérogénéité est supérieure à plusieurs dizaines de nanomètres. En dessous de ces tailles, le comportement devient fortement dépendant de la taille. Nous décrirons dans le chapitre [5](#) les phénomènes physiques qui apparaissent dans ces gammes de dimensions et qui bouleversent complètement les fondements de la micromécanique de [Eshelby](#). Ensuite nous développerons dans le chapitre [6](#) des nouveaux outils pour pouvoir intégrer ces phénomènes dans la micromécanique de [Eshelby](#). Quelques applications industrielles de l'effet de taille sont présentées dans la section [5.1.4](#).

Le principal objet d'application de cette thèse est le pare-brise d'automobile qui est une structure sandwich Verre/PVB/Verre. La modélisation des structures sandwich en soi est une science. Il serait donc utile de faire un état de l'art de cette science et de justifier les fondements des hypothèses que nous utiliserons dans la suite de nos travaux.

### 1.3 Matériaux sandwich VE : théories et savoir faire existant

#### 1.3.1 Présentation générale

La réalisation d'une étude bibliographique a fait apparaître que les constructeurs aéronautiques ont utilisé en 1938 dans l'avion Morane 406 (FRA) des panneaux sandwich avec une âme en bois contre-plaqué et des revêtements en alliage léger. De nos jours, une grande variété des pièces d'avions sont en matériaux sandwich ([Kurz et al., 1995](#)).

La fabrication d'une structure sandwich met en jeu trois couches de natures différentes. La complexité de ces structures provient du nombre de matériaux différents susceptibles d'être utilisés. Typiquement, un sandwich est constitué de deux peaux reliées entre elles par une âme ou cœur du sandwich. Les pare-brises d'automobiles sont de plus en plus réalisés en verre feuilleté qui est un sandwich Verre/Polymère/Verre.

Historiquement le verre feuilleté utilisé de nos jours a été inventé par Edouard Benedictus en 1903. Il le perfectionna en 1910 et déposa le nom de Triplex. Le Triplex équipa progressivement l'automobile, où le verre recuit (verre ordinaire) utilisé jusqu'alors causait de graves blessures lors d'accidents. Le Triplex a sauvé la vie de Georges Clemenceau lors de l'attentat manqué de 1919, en démontrant l'utilité de ce verre qui n'éclatait pas en morceaux dangereux, mais s'étoilait sous l'impact sans chuter ou projeter d'éclats vulnérants. Cet attentat fit la publicité et la popularité de ce produit alors révolutionnaire. L'utilisation du verre feuilleté dans le bâtiment fut plus tardive. La première grande réalisation en verre feuilleté en France est la Pyramide du Louvre à Paris. Le verre feuilleté est un assemblage de feuilles de verres et d'intercalaires de nature plastique. Les intercalaires

peuvent se présenter sous forme de film, généralement PVB (Polyvinyl de butyral) ou EVA (Ethyl-Vinyl-Acétate), ou bien sous forme liquide, coulée entre deux verres (résine). Le verre feuilleté pour le bâtiment fait l'objet de la norme EN ISO 12543. Selon la nature des intercalaires, le verre feuilleté peut être :

- un bon isolant acoustique,
- résistant au vandalisme, à l'effraction ou aux tirs d'armes à feu, voire aux ouragans ou aux explosions,
- utilisé pour protéger les personnes de risques accidentels (pare-brise automobile, protection contre la chute dans le vide en cas de bris du vitrage, etc.),
- utilisé dans des parois pare-flammes ou coupe-feu jusqu'à deux heures (verre feuilleté à intercalaire à gel intumescent),
- décoratif (film intercalaire de couleur, à motif, etc.),
- opacifiant (film intercalaire à cristaux liquides),
- photovoltaïque (intégration de cellules photovoltaïques dans le film intercalaire),
- etc.

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées entre elles. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. Une revue des différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle (3D) ou de type plaque peut être trouvée dans les travaux de [Kapania et Raciti \(1989\)](#), [Noor et Burton \(1989\)](#), [Carrera \(2000\)](#), [Kant et Swaminathan \(2000\)](#), [Polit et Touratier \(2002\)](#), [Dau et al. \(2006\)](#), [Vidal et Polit \(2008a,b\)](#). L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts utiles notamment comme référence. Ce-

pendant cette approche est souvent très coûteuse en temps de calcul. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple (Pagano, 1969, 1970; Srinivas, 1973). De même la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiées (délaminage, fissure transverse, etc.) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée etc.) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires et moins coûteuses en temps de calcul. Nous présentons dans la suite ces approches 2D. Mais avant de choisir un modèle cinématique pour modéliser la structure sandwich Verre/PVB/Verre de notre étude, nous présentons d'abord les grands travaux effectués sur la modélisation des structures sandwich pour des applications d'amortissement.

### 1.3.2 Modèles analytiques en bref

Parmi les travaux pionniers sur les structures amortissantes, nous pouvons citer les travaux de Oberst et Frankenfeld (1952); Oberst *et al.* (1954). Ces chercheurs se sont intéressés à des poutres revêtues d'un matériau amortissant sur une seule face. Ils ont traité analytiquement ce stratifié constitué de deux couches en se ramenant à une équation du mouvement de flexion de type Euler-Bernoulli dont ils ont formulé les caractéristiques équivalentes. Ils en ont ensuite déduit les gains en rigidité et en amortissement ainsi que les fréquences de résonance de la poutre. Ils ont également comparé les résultats de leurs modèles à ceux issus de l'expérimentation où l'amortissement est déterminé par les méthodes de la bande passante à -3 dB et du décrétement logarithmique. Notons que, pour leurs applications, le facteur de perte (ou d'amortissement) du matériau VE était d'environ 0.25 et celui de la poutre était de 0.12 pour des revêtements de matériau VE

4 à 10 fois plus épais et 100 à 1000 fois moins rigide que la poutre initiale. Des travaux similaires ont été réalisés plus tard par [Dudek \(1970\)](#).

Depuis l'apparition des structures sandwich, de nombreux chercheurs ont mis en équation le mouvement des poutres, des plaques et des coques constituées par ces matériaux. Ce genre de structure permet d'aboutir à des équations du mouvement de flexion ou de membrane d'ordre plus ou moins élevé, moyennant des hypothèses simplificatrices.

Les hypothèses communes à la plupart de ces études analytiques sont :

- Les matériaux en présence qui sont au nombre de 2 ou 3 sont supposés homogènes, isotropes et linéaires. Le matériau de la couche centrale est généralement VE alors que celui (ou ceux) des couches externes est (ou sont) supposé(s) purement élastique(s).
- Les petites déformations sont généralement supposées.
- Les deux interfaces entre les 3 couches sont souvent supposées parfaites, c'est-à-dire qu'elles sont planes et sans décohésion ni glissement, ce qui permet, au minimum d'exprimer la continuité du champ de déplacements.
- La flèche (déplacement transversal) est souvent supposée la même dans les 3 couches et les déplacements axiaux sont supposés linéaires dans chaque couche.

[Kerwin \(1959\)](#), puis [Ross \*et al.\* \(1959\)](#) ont présenté une étude du mouvement d'un composite sandwich dont une des deux peaux a une épaisseur très supérieure à celle des deux autres couches. En considérant les effets de membrane dans les 3 couches et en considérant l'effet de cisaillement dans la couche centrale uniquement, ces auteurs ont abouti à des caractéristiques mécaniques équivalentes de nature mathématique complexe. Ils ont fait alors apparaître une rigidité équivalente  $\hat{B}$  et une masse linéique  $m$  qu'ils ont fait figurer dans une équation du mouvement de flexion de type Euler-Bernoulli :

$$\hat{B} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} = \hat{f}(x, t), \quad (1.42)$$

où  $\hat{B} = B(1 + i\eta)$  est la rigidité complexe équivalente avec un facteur de perte  $\eta$ . Les auteurs ont ensuite présenté de nombreuses analyses paramétriques permettant de trouver les valeurs optimales des paramètres pour améliorer l'amortissement global de la structure sandwich.

Yu (1959) s'est intéressé au cas particulier d'un sandwich symétrique. Cet auteur n'a négligé aucun effet d'inertie. Il a tenu compte dans son travail de l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites. Les contraintes de cisaillement transverse ont été prises constantes dans chaque couche. Pour remédier à l'inconvénient de la constance de cette contrainte dans toute l'épaisseur, Yu a introduit des coefficients correcteurs. Il a aboutit à une équation du mouvement d'ordre 4 relative à la flèche pour une poutre de longueur infinie et n'a fait aucune allusion à l'amortissement.

DiTaranto (1965), DiTaranto et Blasingame (1966a,b), DiTaranto et McGraw (1969) ont étudié les structures sandwich où les effets de membrane dans la couche centrale et les effets de cisaillement transverse dans les peaux sont négligeables du fait d'un rapport de rigidité élevé entre les matériaux constituant les peaux et le cœur. Ces auteurs, de leur côté, ont obtenu une équation différentielle d'ordre 6 sur le déplacement axial du plan moyen d'une des deux peaux et cela pour un problème de vibration libre d'une poutre en flexion. La solution de cette équation donnée par les auteurs n'attend que les conditions aux limites quelconques pour être utilisée et permettre ainsi d'obtenir le facteur de perte défini à partir de la valeur propre complexe :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta). \tag{1.43}$$

D'après leurs calculs, DiTaranto et Blasingame (1966b) ont conclu que la relation entre l'amortissement et la pulsation propre est indépendante des conditions aux limites appliquées à la poutre sandwich.

Mead et Markus (1969) ont repris les équations de DiTaranto (1965) qui étaient écrites

en fonction du déplacement axial et les ont transformées pour pouvoir les exprimer uniquement en terme du déplacement transversal. Les équations ainsi obtenues sont également d'ordre 6 relativement à la flèche.

[Mead et Markus \(1970\)](#) ont ensuite utilisé une méthode itérative pour déterminer les amortissements et les fréquences de résonance d'une poutre soumise à différentes conditions aux limites. Ils ont contredit alors l'assertion de [DiTaranto et Blasingame \(1966b\)](#) selon laquelle la relation entre l'amortissement et la pulsation propre est indépendante des conditions aux limites appliquées à la poutre sandwich. Ils ont néanmoins signalé que leurs calculs ont été faits en supposant constant le facteur de perte du matériau de la couche centrale alors que les résultats de [DiTaranto et Blasingame](#) concernent des polymères dont les caractéristiques dépendent de la fréquence.

[Yan et Dowell \(1972\)](#) ont abouti à des équations d'ordre 4 relatives à la flèche pour le mouvement de flexion des poutre et plaque sandwich en faisant diverses simplifications basées sur la valeur élevée du rapport de rigidité entre le module des peaux et celui du cœur. Ils ont comparé les résultats de leur modèle à ceux issus d'une expérience sur une poutre sandwich Aluminium/Matériau VE/Aluminium de 228.6 mm de longueur non symétrique (épaisseur de chaque couche : 0.1651 mm, 0.05588 mm et 0.0508 mm). Ils ont observé des écarts de 5% sur la valeur de la fréquence de résonance et de 19% sur celle du facteur de perte associé.

Après leurs travaux de thèse respectifs, [Nakra \(1966\)](#) et [Sadasiva Rao \(1972\)](#) ont présenté en commun les équations du mouvement d'une poutre et d'une plaque sandwich non symétriques où tous les effets d'inertie ainsi que les effets de membrane et le cisaillement transverse sont pris en compte dans toutes les couches du sandwich ([Sadasiva Rao et Nakra, 1974](#)). Ils y ont justifié notamment l'influence des inerties de rotation des sections droites pour leurs applications. Ils ont résolu les équations différentielles couplées obtenues en développant en séries de Fourier les efforts extérieurs et les inconnues cinématiques. Ils ont défini, comme l'ont fait [Ross \*et al.\* \(1959\)](#), l'amortissement de la structure par une

rigidité généralisée complexe. Ensuite ils ont présenté plusieurs études paramétriques intéressantes. Notons que dans cette étude, le facteur de perte de la couche VE du sandwich est pris constant égal 0.5 et il est identique aux modules longitudinal et transversal pour les applications numériques présentées.

Oravsky *et al.* (1974) se sont intéressés à nouveau à la détermination de l'amortissement d'une poutre sandwich en utilisant l'équation différentielle de Mead et Markus (1970). Ils ont introduit la notion de structure conservative associée. Ainsi, à partir de certains résultats de la structure non amortie, ils sont arrivés à déterminer l'amortissement de la structure amortie. Pour ce faire, les auteurs ont défini l'amortissement à partir de la valeur propre complexe du problème comme l'avait fait DiTaranto (1965), tandis que l'amortissement de la couche centrale est supposé de type hystérétique.

Rao (1977b) a montré l'utilité d'introduire le phénomène de dissipation en tension dans la couche centrale pour une poutre épaisse et a comparé les résultats à ceux des auteurs précédents qui ont exclu ce phénomène de leur théorie. A cet effet, Rao a introduit dans ses équations la possibilité de facteurs de perte différents pour les modules longitudinal et transversal. Par contre, pour ses applications numériques, l'auteur a donné la même valeur à ces deux facteurs de perte (de type hystérétique).

Rao (1978) a mis au point une méthode (Rao, 1977a) de recherche de la valeur propre complexe pour un sandwich dont le mouvement est supposé gouverné par les équations de Mead et Markus (1970). Rao (1978) a considéré différents cas de conditions aux limites classiques (encastrement, appui simple et libre) et il a présenté plusieurs courbes sur les amortissements et les fréquences de résonance des deux premiers modes en fonction de certains paramètres sans dimension. Grâce à ces études paramétriques, Rao a trouvé les paramètres optimum et il en a déduit des formules analytiques donnant l'amortissement et la fréquence de résonance en fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre. Cependant, ces formules ne sont valides que pour des amortissements de la couche centrale inférieurs à 0.3. Au-delà de cette valeur, l'amortissement de la couche

centrale change notablement les courbes présentées par Rao.

Mead (1982) a trouvé intéressant de comparer les équations différentielles de DiTaranto (1965) et de Mead et Markus (1970) à celles de Yan et Dowell (1972). Il a trouvé alors que les résultats de Yan et Dowell est une bonne approximation de ceux de DiTaranto (1965) et de Mead et Markus (1970) lorsque le cœur est beaucoup plus épais que les deux peaux.

### 1.3.3 Modèles éléments finis sandwich en bref

Malgré la relative simplicité de mise en œuvre de tous ces modèles analytiques, ils ne permettent pas de simuler n'importe quelles conditions aux limites sur des géométries complexes. De plus, ces modèles ont en général négligé la dépendance en fréquence des modules du matériau VE de la couche centrale. La plupart de ces travaux utilise le concept du module complexe constant pour modéliser le matériau VE. Il était alors urgent de développer non seulement des outils robustes permettant de modéliser une structure quelconque constituée de ce type de matériaux mais aussi de développer des méthodes numériques capables de traiter la dépendance en fréquence du comportement des matériaux VE.

C'est ainsi qu'ont apparus des techniques de calcul par des éléments finis (EF) pour la modélisation des structures sandwich de forme complexe. Les travaux de Soni (1981), de Johnson *et al.* (1981), de Ma et He (1992) et de Rikards *et al.* (1993) ont proposé des modèles constitués d'assemblage de trois éléments suivant l'épaisseur du sandwich. Utilisant des hypothèses spécifiques, tous ces modèles ont permis d'éviter le modèle le plus simple qui serait l'assemblage Volume/Volume/Volume suivant l'épaisseur. Il est évident que ce dernier modèle simpliste occasionnerait des simulations numériques à grand nombre de degrés de liberté (ddl), et par conséquent des temps de calcul considérables sans oublier la gestion de la mémoire de stockage des informations. Selon ces études, le meilleur choix est de considérer des éléments de coques dans les couches externes élastiques et un élément de volume dans la couche centrale VE.

En utilisant la théorie des plaques, [Ma et He \(1992\)](#) ont présenté alors un élément triangulaire Plaque/Plaque/Plaque à trois nœuds. En considérant une flèche identique aux 3 couches, une même rotation dans les couches externes tout en assurant la continuité des déplacements aux interfaces, [Ma et He](#) ont réduit le nombre de ddl par nœud à 5 : la flèche commune, les deux rotations dans les couches externes et deux rotations de la couche centrale. Cependant, ce type d'éléments finis ne peut être utilisé que pour des problèmes de vibrations en mouvement de flexion.

[Daya et Potier-Ferry \(2002\)](#) ont proposé une procédure pour construire des éléments finis de type Coque/Volume/Coque susceptibles de modéliser les structures sandwich VE. Ainsi, en associant des hypothèses simplificatrices aux conditions de continuité des déplacements aux interfaces, [Daya et Potier-Ferry](#) ont proposé deux éléments finis pour la modélisation des coques sandwich VE. Nommé DKT/Volume/DKT, le premier est un élément triangulaire à trois nœuds basé sur la théorie des plaques de Kirchhoff-Love où le cisaillement transverse n'est pas pris en compte dans les couches externes élastiques. Cet élément a été construit en considérant dans les faces élastiques l'élément triangulaire de coque, nommé usuellement DKT18 par [Bathoz et Dhatt \(1990\)](#). Cet élément DKT18 a 3 nœuds et 6 ddl par nœud. L'élément sandwich en soi possède alors 24 ddl et une interpolation linéaire pour décrire le mouvement de la membrane. De ce fait son utilisation nécessite des maillages très fins pour le calcul précis des moyennes et hautes fréquences de résonance de la structure.

Pour améliorer les performances de cette classe d'éléments sandwich, un deuxième élément a été construit par [Duigou \(2002\)](#) dans son travail de thèse. Ce deuxième élément nommé BRR/Volume/BRR a été construit en considérant dans les faces l'élément de coque de [Büchter et al. \(1994\)](#). Cet élément utilise une formulation tridimensionnelle sans condensation : toutes les déformations sont prises en compte. L'élément de coque de [Büchter et al.](#) est un quadrilatère à 8 nœuds avec une interpolation quadratique des dépla-

cements de membrane. De ce fait, cet élément apparaît plus riche que l'élément DKT18 proposé par [Bathoz et Dhatt](#). Cette classe d'éléments finis a été testée dans le cas des poutres, plaques et coques cylindriques ([Daya et Potier-Ferry, 2001](#); [Duigou et al., 2003](#); [Daya et al., 2005](#); [Abdoun et al., 2008](#)). Les résultats obtenus ont montré que ces éléments sont très bien adaptés pour étudier l'amortissement passif des structures sandwich viscoélastiques.

#### 1.3.4 Quel modèle cinématique pour notre travail ?

Ce dont nous n'avons pas encore parlé sur les éléments finis sandwich développés par [Daya et Potier-Ferry \(2002\)](#) et [Duigou \(2002\)](#) est le modèle cinématique employé pour décrire le mouvement de chacune des couches du sandwich. En effet, il existe plusieurs modèles cinématiques pour représenter les mouvements des couches d'une structure sandwich. Une très bonne revue bibliographique sur les modèles cinématiques peut être trouvée dans les travaux de [Nguyen \(2004\)](#); [Hu \(2006\)](#); [Hu et al. \(2008\)](#).

Plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour modéliser des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

1. approche monocouche équivalente,
2. approche par couche,
3. approche développement asymptotique.

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches. La plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche ([Landier, 1993](#)). Il faut noter que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale

à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage etc.).

Les approches par couche sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface. Le multicouche est subdivisé en sous-structures qui sont en fait chaque couche ou chaque ensemble de couches. On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou d'ordre supérieur. Certes, les modèles de ce type sont relativement coûteux (le nombre de variables dépend du nombre de couches), mais permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

Le développement asymptotique est appliqué à des structures à priori peu épaisses où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

C'est une des approches par couche qui a été utilisée et testée dans les travaux de [Daya et Potier-Ferry \(2002\)](#); [Duigou \(2002\)](#). C'est un modèle de type zig-zag, dans lequel le champ de déplacements est décrit couche par couche avec des conditions de continuité du champ de déplacements imposées aux interfaces entre les faces et le cœur. Ainsi, dans la procédure de calcul des éléments proposés, ces auteurs ont considéré la théorie de Kirchhoff-Love pour exprimer le déplacement des couches externes élastiques tandis que la théorie de Mindlin est utilisée pour modéliser les déplacements dans la couche centrale. Au travers des résultats présentés dans les travaux de [Daya et Potier-Ferry \(2002\)](#); [Duigou \(2002\)](#) et ceux de [Hu \(2006\)](#); [Hu et al. \(2008\)](#), il apparaît clairement que ce type de modèle zig-zag modélise très bien les structures sandwich à cœur mou dans les conditions où  $h_c/h_f \leq 10$  et  $E_c/E_f \leq 0.01$  et où  $h$  désigne l'épaisseur de la couche,  $E$  son module de Young,  $c$  et  $f$  désignent respectivement le cœur et la face.

Typiquement les pare-brises d'automobile ou les verres architecturaux en général ont  $E_{\text{PVB}} = 0.3724$  GPa,  $h_{\text{PVB}} = 0.8$  mm,  $E_{\text{Verre}} = 72.57$  GPa,  $h_{\text{Verre}} = 2$  mm. Clairement,

$h_{\text{PVB}}/h_{\text{Verre}} = 0.4 \leq 10$  et  $E_{\text{PVB}}/E_{\text{Verre}} = 0.0051 \leq 0.01$ . Ces conditions justifient notre choix pour ce modèle cinématique pour certains développements entrant dans le cadre de cette thèse.

Les champs cinématiques utilisés dans ce travail sont présentés dans la section 2.2.1 pour l'étude des poutres Verre/PVB/Verre et dans la section 2.5.1 pour son extension dans le cadre de l'étude des plaques Verre/PVB/Verre.

### 1.3.5 Calcul d'amortissement des structures sandwich viscoélastiques

Nous présentons dans ce paragraphe des techniques permettant de traiter le problème des vibrations libres linéaires des structures sandwich viscoélastiques. Après discrétisation par éléments finis, ce problème s'écrit comme suit (cf. § 2.3.3) :

$$\left[ \mathbf{K}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M} \right] \{ \mathbf{U} \} = 0, \quad (1.44)$$

où  $\mathbf{K}(\omega)$  est la matrice de rigidité complexe de la structure sandwich dépendant de la pulsation  $\omega$ ,  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse réelle de la structure et  $\mathbf{U}$  représente le mode propre de la structure. Le système matriciel (1.44) représente un problème aux valeurs propres complexes non linéaire  $(\mathbf{U}, \omega)$ . La résolution de ce problème permet de calculer directement l'amortissement  $\eta$  et la fréquence amortie  $\Omega$  en utilisant la formule (1.43). Dans le cadre des vibrations linéaires, les techniques de calcul d'amortissement passif peuvent être classées selon trois catégories (Daya, 2003).

La première catégorie consiste à calculer les courbes de réponses à des excitations harmoniques qui permettent la lecture directe des fréquences propres et le calcul de l'amortissement par la technique de la bande passante à -3 dB (Soni, 1981). Cette technique de bande passante à -3 dB est initialement destinée à l'estimation de l'amortissement à partir des résultats expérimentaux. Cette première catégorie de technique de calcul d'amortissement passif peut conduire à des temps de calcul considérables, particulièrement pour

des structures de grande taille. De plus, l'évaluation du facteur de perte n'est valide que pour un amortissement petit et pour des fréquences propres suffisamment séparées.

La deuxième catégorie applique la méthode d'énergie de déformation modale (Modal Strain Energy Method : MSEM). Cette dernière définit l'amortissement comme étant le rapport de l'énergie de déformation dissipée dans la couche VE sur l'énergie de déformation stockée. Il existe de plus, deux versions de cette méthode. La première est la MSEM utilisant un mode propre réel (mode de la structure non amortie). Dans ce cas, le calcul n'est précis que pour les structures faiblement ou moyennement amorties (Daya et Potier-Ferry, 2002). La deuxième version de la MSEM utilise un mode complexe : une sorte d'approximation du mode propre, obtenue en résolvant un problème de forcing harmonique où la pulsation est la pulsation propre réelle de la structure non amortie. Cette dernière version de la MSEM, beaucoup plus coûteuse en temps de calcul, a l'intérêt de mieux estimer l'amortissement dans le cas où la matrice de rigidité est indépendante de la fréquence (Soni, 1981). Néanmoins la manière utilisée pour calculer le mode complexe peut être insuffisante lorsque la rigidité dépend de la fréquence (Rikards *et al.*, 1993).

La troisième et dernière catégorie des méthodes de calcul d'amortissement passif permet de calculer de façon directe et "quasi-exacte" l'amortissement par mode de vibration. Il s'agit donc de résoudre rigoureusement le problème non linéaire aux valeurs propres complexes (1.44). De nos jours, le problème non linéaire aux valeurs propres complexes peut être résolu à l'aide des techniques que nous pouvons également classer en cinq variantes.

## Méthode QR

Cette méthode permet de calculer les valeurs propres des matrices complexes constantes (Bathe, 1982; Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006). Cependant, son utilisation est limitée aux structures sandwich VE de petite taille ayant un module complexe non dépendant de la fréquence.

### **Approche asymptotique de [Ma et He \(1992\)](#)**

Cette approche cherche le mode et la valeur propre sous la forme de séries entières du facteur de perte du matériau VE dont le module est supposé constant. La méthode est efficace pour les structures faiblement amorties. Cependant, une procédure de continuation est nécessaire pour les structures dont le module varie de façon non linéaire avec la fréquence.

### **Méthode d'itération-réduction**

Initiée par [Chen \*et al.\* \(1999\)](#), cette méthode utilise une méthode de perturbation couplée à un algorithme de Lanczos et une base réduite. Elle permet d'introduire une loi VE quelconque. Cependant, cette méthode est une variante de la méthode de Newton et par conséquent, elle nécessite visiblement plusieurs itérations par fréquence donc un temps de calcul énorme pour des structures de grande taille.

### **Les méthodes asymptotiques numériques (MAN)**

Ces techniques sont basées sur la méthode de perturbation et celle de l'homotopie et se composent de trois algorithmes. Le premier algorithme a été développé par [Daya et Potier-Ferry \(2001\)](#) tandis que les deux autres algorithmes sont développés par ([Duigou \*et al.\*, 2003](#)). Ces trois algorithmes sont présentés en détail dans la thèse de [Duigou \(2002\)](#) et dans le mémoire d'habilitation à diriger les recherches de [Daya \(2003\)](#).

### **Les méthodes de sous-espace de Krylov et d'Arnoldi non linéaires**

Une bonne revue bibliographique de ces méthodes peut être trouvée dans le mémoire de Master de [Jarlebring \(2003\)](#). Ces techniques ont pour objectif la résolution des problèmes aux valeurs propres non linéaires creux et de grande taille posés d'une manière générale

sous la forme :

$$T(\omega)x = 0, \quad T(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n. \quad (1.45)$$

Ces méthodes résolvent le problème (1.45) d'une manière itérative en le projetant dans des sous-espaces de type Krylov et en résolvant par itération des problèmes linéarisés de taille réduite. Nous pouvons citer entre autres, les travaux de [Betteke et Voss \(2002\)](#), [Betteke \(2002\)](#), [Voss \(2002a,b\)](#), [Jarlebring et Voss \(2003\)](#).

Notons que seules les trois dernières classes de méthodes (Itération-réduction, MAN et Krylov-Arnoldi) permettent de prendre en compte le comportement VE dépendant de la fréquence. Il faut noter cependant que toutes ces méthodes n'ont aussi bien abouti comme ce fut le cas des problèmes aux valeurs propres linéaires pour lesquels il existe plusieurs algorithmes de résolution très robustes ([Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006](#)).

## 1.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons vu au travers de l'état de l'art que les structures sandwich constituées de deux couches externes élastiques et d'une couche centrale viscoélastique ont une forte potentialité pour les applications d'amortissement des vibrations et du bruit. Parmi la gamme de modèles cinématiques pour représenter le déplacement des couches du sandwich, nous avons retenu pour nos applications, le modèle de type zig-zag utilisé dans les travaux de [Sainsbury et Zhang \(1999\)](#), [Zhang et Sainsbury \(2000\)](#), [Daya et Potier-Ferry \(2002\)](#), [Duigou \(2002\)](#) et [Daya \(2003\)](#). Ce choix est non seulement motivé par les résultats présentés par ces auteurs sur ces types de structures mais aussi et surtout par les résultats de [Hu \*et al.\* \(2008\)](#) sur la comparaison des divers modèles cinématiques des structures sandwich.

Nous avons également présenté brièvement dans ce chapitre la théorie de la viscoélasticité linéaire pour comprendre le processus physique qui confère à ces matériaux un fort

pouvoir amortissant contrairement aux métaux et autres matériaux non amortissants. De même, nous y avons également présenté les objectifs de la micromécanique qui est une science des matériaux. Cette dernière sera au cœur de nos travaux. Certains des différents travaux présentés dans le cadre de la micromécanique seront revus, modifiés et adaptés dans le contexte de cette thèse avec un fil conducteur : l'amélioration des propriétés amortissantes et mécaniques des matériaux. Plus loin dans ce travail, nous présenterons des nouveaux outils mathématiques pour étendre la micromécanique classique aux matériaux nanocomposites (cf. chapitres 5 et 6) afin d'étudier les propriétés mécaniques et amortissantes des nanocomposites.

Avant d'envisager l'amélioration des propriétés amortissantes et mécaniques des pare-brises d'automobile, il est indispensable de maîtriser tous les paramètres qui ont un effet direct sur ces diverses propriétés. Ainsi dans le chapitre 2 nous présenterons une étude paramétrique pour recenser tous les paramètres géométriques et mécaniques qui influencent les comportements statique, vibratoire et acoustique des structures Verre/PVB/Verre sur un exemple simple de poutre sandwich.



# CHAPITRE 2

## STRUCTURES SANDWICH VERRE/PVB/VERRE

**C**e chapitre présente des études sur les comportements statique, vibratoire et acoustique des structures poutre et plaque sandwich Verre/PVB/Verre qui peuvent servir de modèles des pare-brises d'automobile. Nous montrons l'influence des paramètres mécaniques, géométriques et des conditions aux limites viscoélastiques sur les comportements de ces types de structures. Les résultats obtenus montrent que le paramètre de cisaillement  $g$  joue un rôle primordial dans les caractéristiques vibratoires et acoustiques de la structure sandwich. Il ressort de cette étude que les structures sandwich sont très adaptées pour obtenir de meilleurs niveaux d'amortissement. Toutefois, une fois que les matériaux du sandwich sont choisis, les capacités amortissantes du sandwich sont limitées à cette combinaison de matériaux. Ainsi, à chaque niveau d'amortissement souhaité, il faut trouver la bonne combinaison de matériaux du sandwich. Cependant, il n'est toujours pas facile de trouver les matériaux appropriés pour une application donnée. D'autres voies et moyens plus performants doivent donc être envisagés pour la conception des structures plus amortissantes.

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Motivations et présentation de l'étude . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>2.2</b>	<b>Comportement en statique de la poutre Verre/PVB/Verre .</b>	<b>59</b>
2.2.1	Hypothèses et champ de déplacements . . . . .	59
2.2.2	Conditions aux interfaces . . . . .	60
2.2.3	Champs de déformations . . . . .	60
2.2.4	Lois de comportement . . . . .	61
2.2.5	Formulation du problème : principe des travaux virtuels . . . . .	62
2.2.6	Solution analytique du problème . . . . .	65
2.2.7	Validation du modèle . . . . .	69
2.2.8	Quelques applications du modèle . . . . .	70
<b>2.3</b>	<b>Comportement vibratoire de la poutre Verre/PVB/Verre . .</b>	<b>75</b>
2.3.1	Position du problème, hypothèses et notations . . . . .	75
2.3.2	Mise en place du modèle . . . . .	76
2.3.3	Discrétisation par éléments finis et problème aux valeurs propres	77
2.3.4	Test de validation du modèle . . . . .	78
2.3.5	Autres résultats et discussions . . . . .	79
<b>2.4</b>	<b>Comportement acoustique de la poutre Verre/PVB/Verre . .</b>	<b>86</b>
2.4.1	Les structures sandwich : perte de transmission du son . . . . .	86
2.4.2	Description du problème et les chargements en pression . . . . .	87
2.4.3	Equation de mouvement de la structure sandwich . . . . .	90
2.4.4	Facteur de perte de transmission du son (TL) . . . . .	91
2.4.5	Phénomène de coïncidence . . . . .	92
2.4.6	Quelques résultats et discussions . . . . .	93
2.4.7	Conclusions et perspectives . . . . .	96
<b>2.5</b>	<b>Extension au modèle plaque sandwich Verre/PVB/Verre . .</b>	<b>98</b>

---

2.5.1	Hypothèses et champ de déplacements . . . . .	98
2.5.2	Champs des déformations . . . . .	100
2.5.3	Lois de comportement . . . . .	100
2.5.4	Problème de vibrations libres linéaires de la plaque . . . . .	101
2.5.5	Un élément fini sandwich plaque et application . . . . .	103
<b>2.6</b>	<b>Structures sandwich VE et amortissement, oui mais...</b> . . . .	<b>106</b>

---

## 2.1 Motivations et présentation de l'étude

La finalité de cette étude est de développer des outils analytiques et numériques pour étudier les comportements statique et dynamique (vibration, acoustique) des structures poutre (plaque) sandwich Verre/PVB/Verre avec divers types de conditions aux limites. Que ce soit dans l'industrie automobile ou dans le génie civil, les verres feuilletés (Verre/PVB/Verre) sont reliés soit à la carrosserie ou au bâtiment par l'intermédiaire d'un matériau en silicone. Ce dernier est considéré comme un support élastique ou viscoélastique. Il est donc indispensable d'étudier l'effet de ce support élastique (ou viscoélastique) sur les comportements des structures sandwich Verre/PVB/Verre. Ce support est généralement modélisé par des ressorts de translation ( $K_T$  et  $K_u$  ou  $\hat{K}_T$  et  $\hat{K}_u$  selon qu'ils soient complexes ou pas) et de rotation ( $K_R$  ou  $\hat{K}_R$ ) aux extrémités de ces structures (Kang et Kim, 1996; Aşık, 2004; Haberman, 2006). La figure 2.1 illustre bien cette représentation du support. Dans le cas des poutre et plaque, Haberman (2007) a proposé un

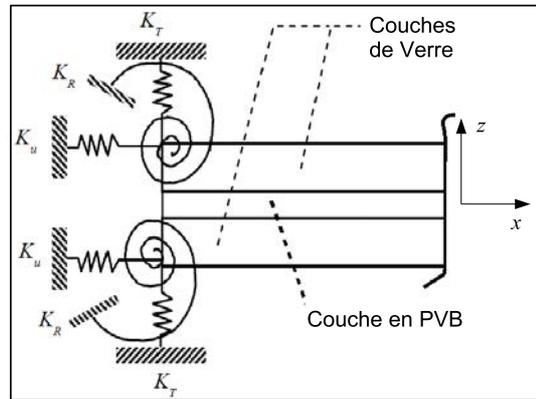


FIG. 2.1 – Poutre Verre/PVB/Verre avec supports.

modèle de calcul des rigidités des ressorts  $\hat{K}_T$  et  $\hat{K}_R$  dans le cas général du comportement complexe dépendant de la fréquence des matériaux VE (voir figure 2.2) par :

$$\begin{cases} \hat{K}_T(\omega) = \hat{E}(\omega)t + \hat{\mu}(\omega)h, & \text{unité : N.m}^{-1}, \\ \hat{K}_R(\omega) = \hat{\mu}(\omega)(2t + h)b^2, & \text{unité : N.m}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\hat{E}(\omega)$  et  $\hat{\mu}(\omega)$  sont respectivement les modules de Young et de cisaillement complexes dépendant de la fréquence du matériau VE sur les bords de la plaque/poutre,  $b$  est la longueur recouverte par le matériau VE.

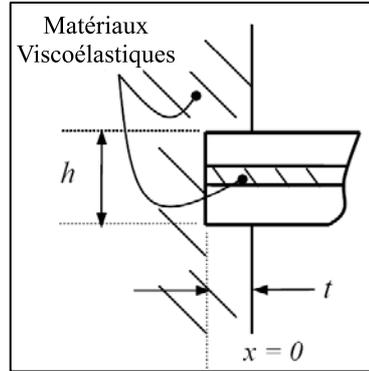


FIG. 2.2 – Conditions aux limites approchées par des ressorts.

Plusieurs études ont été faites sur les structures Verre/PVB/Verre poutre ou plaque. Nous pouvons citer les travaux de [Aşık \(2003\)](#), [Aşık et Tezcan \(2005\)](#), [Koutsawa et Daya \(2007\)](#) qui ont considéré des conditions aux limites d'appui simple ou d'encastrement et des non linéarités géométriques. [Aşık](#) puis [Koutsawa et Daya](#) ont montré que les non linéarités géométriques disparaissent dans le cas des poutres Verre/PVB/Verre en appui simple tandis qu'elles sont bien présentes dans le cas des plaques même si elles sont en appui simple. Pour l'étude des poutres Verre/PVB/Verre en appui simple, [Aşık et Tezcan \(2005\)](#) d'une part et [Ivelin Ivanov \(2006\)](#) d'autre part ont déterminé des expressions analytiques des divers paramètres qui contrôlent le comportement en statique de la poutre. Grâce à ces outils analytiques, [Ivelin Ivanov](#) a réalisé des études paramétriques et d'optimisation de la poutre. En exemple, [Ivelin Ivanov](#) a déterminé les épaisseurs des différentes couches qui minimisent la masse totale de la poutre avec des conditions imposées sur les contraintes de traction et de compression dans les couches en verre et sur la déformation de cisaillement dans la couche en PVB (source du délaminage entre le PVB et les verres). Les résultats de l'optimisation ont révélé que l'épaisseur de la couche de verre à laquelle est appliquée la charge doit être supérieure à celle de la deuxième couche de verre pour minimiser la

masse totale dans la conception de la poutre. Aşik s'est beaucoup intéressé aux non linéarités géométriques dans ces structures Verre/PVB/Verre. Il a mis au point un algorithme itératif basé sur la méthode des différences finies pour traiter ce type de non linéarité aussi bien pour les poutres que pour les plaques. Parmi les travaux antérieurs aux récents travaux de Aşik (2003), Aşik et Tezcan, Ivelin Ivanov puis Koutsawa et Daya (2007), on peut citer les travaux de Vallabhan *et al.* (1993); Norville *et al.* (1998); Behr *et al.* (1993); Duser *et al.* (1999); Rahul-Kumar *et al.* (2000).

A l'exception de Koutsawa et Daya (2007) qui ont étudié les propriétés modales des poutres Verre/PVB/Verre, les travaux cités ci-dessus ne se sont pas intéressés aux comportements vibratoire et acoustique de ces structures. Les industries automobiles préfèrent de plus en plus les solutions d'amortissement localisé aux solutions d'amortissement global (Merlette, 2005). Aussi serait-il intéressant de quantifier l'effet des supports élastiques (viscoélastiques) sur les propriétés amortissantes globales des structures en verre feuilleté par des applications visant le confort vibratoire et acoustique. C'est le but de la section 2.3. Mais avant cette étude, nous présentons une solution analytique au problème de poutre Verre/PVB/Verre avec des supports en ressort. Notons que la solution analytique est possible si on enlève les ressorts en translation  $K_u$  dans le plan de la poutre c'est-à-dire que la poutre n'est soumise à aucun effort normal aux extrémités. Dans le cas contraire, les non linéarités géométriques seront présentes et il faut avoir recours aux techniques itératives pour résoudre le problème comme il est présenté dans Koutsawa *et al.* (2008a). Nous présentons une approche assez efficace pour traiter plusieurs classes de problèmes non linéaires dans le chapitre 7.

## 2.2 Comportement en statique de la poutre Verre/PVB/Verre

### 2.2.1 Hypothèses et champ de déplacements

Le verre feuilleté est considéré sous les hypothèses suivantes communes à plusieurs auteurs (Mead et Markus, 1969; Rao, 1978; Sainsbury et Zhang, 1999; Daya et Potier-Ferry, 2002).

- Les sections planes initialement normales au plan médian demeurent planes et normales au plan médian durant la flexion de la poutre pour chaque couche de verre.
- La contrainte normale transverse  $\sigma_z$  est très petite comparée à la contrainte normale axiale  $\sigma_x$  qui est utilisée dans la théorie classique des poutres.
- Les trois couches ont le même déplacement transversal  $w(x)$ .
- Aucun glissement n’apparaît entre les couches de verre et la couche de PVB.
- Seule la couche en PVB transmet des contraintes de cisaillement transverse.
- Les effets de membrane sont négligeables dans la couche en PVB.

Le modèle est constitué d’une poutre sandwich à 3 couches avec une longueur  $L$  et une largeur  $l$ . Dans ce qui suit, l’indice  $i$  est lié à la couche  $i$ . Ainsi  $i = 1$  correspond à la couche en verre supérieur de la poutre,  $i = 2$  désigne la couche en PVB tandis que  $i = 3$  est mis pour la couche de verre inférieur. Nous notons  $h_i$  l’épaisseur de la couche  $i$ . Chaque point  $\mathbf{M}$  de la poutre est défini par ses coordonnées cartésiennes dans un référentiel  $(x, y, z)$  où l’axe  $x$  est porté par la surface médiane de la couche en PVB suivant la longueur de la poutre. Les axes  $y$  et  $z$  sont dirigés respectivement suivant la largeur et l’épaisseur de la poutre. L’origine  $\mathbf{O}$  du repère est prise au milieu de la poutre. Suivant les hypothèses précédentes et les travaux de Hu (2006), le champ de déplacements unifié (2.2) est utilisé pour décrire la position du point  $\mathbf{M}_i$  de la couche  $i$  après la flexion de la poutre dans le

plan  $(x, z)$  :

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}}_i(x, z) = \mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} u_i(x) + (z - z_i)\beta_i(x) \\ w(x) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Dans l'expression du champ de déplacements (2.2),  $u_i(x)$  représente le déplacement axial de la surface médiane de la  $i^{\text{ème}}$  couche,  $z_i$  la position suivant l'axe  $z$  du plan médian,  $\beta_i(x)$  est la rotation de la normale à la  $i^{\text{ème}}$  couche et  $w(x)$  est le déplacement transversal commun aux trois couches. Selon les hypothèses citées ci-dessus, on peut vérifier que :

$$\beta_1 = \beta_3 = -w_{,x}, \quad z_1 = \frac{h_1 + h_2}{2}, \quad z_2 = 0 \quad \text{et} \quad z_3 = -\frac{h_3 + h_2}{2}. \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Conditions aux interfaces

En assurant la continuité des déplacements à chacune des 2 interfaces du sandwich, nous obtenons les équations ci-après :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} + \frac{h_1 - h_3}{4} w_{,x}, \\ \beta_2 = \frac{u_1 - u_3}{h_2} + \frac{h_1 + h_3}{2h_2} w_{,x}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ainsi, le problème de mouvement de la poutre sandwich est réduit à la détermination de trois fonctions indépendantes :  $u_1(x)$ ,  $u_3(x)$  et  $w(x)$ .

### 2.2.3 Champs de déformations

En se basant sur la cinématique (2.2) et en utilisant la théorie des rotations modérées et des petites déformations, les déformations de membrane  $\varepsilon_i$  et de cisaillement  $\gamma_i$  de

chaque couche de la structure sandwich sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_i &= u_{i,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 + (z - z_i)\beta_{i,x}, \\ \gamma_i &= w_{,x} + \beta_{i,x}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Il est évident d'après l'expression (2.3) que  $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ .

#### 2.2.4 Lois de comportement

Nous sommes en présence de trois couches homogènes, isotropes, élastiques ou visco-élastiques linéaires. En utilisant les notations (2.6)

$$\begin{cases} \{\mathbf{\Gamma}_i^l\} &= \{u_{i,x}, \kappa_i, \gamma_i\}^\top, \\ \{\mathbf{\Gamma}_i^{nl}\} &= \frac{1}{2}\{(w_{,x})^2, 0, 0\}^\top, \\ \{\mathbf{\Gamma}_i\} &= \{\mathbf{\Gamma}_i^l\} + \{\mathbf{\Gamma}_i^{nl}\}, \\ \kappa_i &= \beta_{i,x}, \end{cases} \quad (2.6)$$

la loi de comportement de la  $i^{\text{ème}}$  couche s'écrit :

$$\{\mathbf{S}_i\} = \begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}_i] \{\mathbf{\Gamma}_i\} = [\mathbf{D}_i] (\{\mathbf{\Gamma}_i^l\} + \{\mathbf{\Gamma}_i^{nl}\}), \quad (2.7)$$

avec :

$$[\mathbf{D}_i] = \begin{bmatrix} E_i A_i & 0 & 0 \\ 0 & E_i I_i & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i A_i \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Dans l'expression (2.8),  $E_i$ ,  $\mu_i$ ,  $A_i$  et  $I_i$  sont respectivement le module de Young, le module de cisaillement, la section droite et le moment quadratique de la  $i^{\text{ème}}$  couche.

### 2.2.5 Formulation du problème : principe des travaux virtuels

Pour formuler le problème, nous supposons que la poutre est soumise à une charge distribuée transversale  $q$  et une charge concentrée transversale  $P$  en son centre sur la surface supérieure du verre supérieur. A cause de la symétrie du chargement et des conditions aux limites, seule la moitié de la poutre sera considérée. Considérons par exemple la moitié droite c'est-à-dire  $x \in [0, L/2]$ . Le principe des travaux virtuels est donné dans le domaine statique par :

$$\delta P_{int} + \delta P_{ext} = 0, \quad (2.9)$$

où  $\delta P_{int}$  est le travail virtuel des efforts intérieurs et  $\delta P_{ext}$  est le travail virtuel des efforts extérieurs. Les expressions de ces travaux virtuels sont définies dans ce cas sous forme matricielle comme ci-après :

$$\delta P_{int} = - \int_0^{\frac{L}{2}} \sum_{i=1}^3 \{\delta \mathbf{\Gamma}_i\}^T \{\mathbf{S}_i\} dx, \quad (2.10)$$

$$\delta P_{ext} = \int_0^{\frac{L}{2}} q(x)b\delta w dx - \delta P_K, \quad (2.11)$$

avec :

$$\delta P_K = K_T w \delta w \Big|_{x=\frac{L}{2}} + K_R w_{,x} \delta w_{,x} \Big|_{x=\frac{L}{2}} - \frac{P}{2} \delta w \Big|_{x=0}. \quad (2.12)$$

Plusieurs travaux ont prouvé que l'effet de membrane de la couche centrale (ici le PVB) est négligeable (Aşik et Tezcan, 2005; Ivelin Ivanov, 2006; Rao, 1978; Zhang et Sainsbury,

2000; Sainsbury et Zhang, 1999). Dans ce cas, les travaux virtuels s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\delta P_{int} &= - \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ EIw''\delta w'' + N_1\delta u'_1 + N_3\delta u'_3 + (N_1 + N_3)w'\delta w' + \mu_2 b h_2 \gamma_2 \delta \gamma_2 \right] dx, \\ \delta P_{ext} &= \int_0^{\frac{L}{2}} qb\delta w dx - K_T w \delta w \Big|_{x=\frac{L}{2}} - K_R w' \delta w' \Big|_{x=\frac{L}{2}} + \frac{P}{2} \delta w \Big|_{x=0},\end{aligned}\quad (2.13)$$

avec :

$$\begin{cases} N_1 = EA_1 \left[ u'_1 + \frac{1}{2} (w')^2 \right] \\ N_3 = EA_3 \left[ u'_3 + \frac{1}{2} (w')^2 \right] \\ \gamma_2 = \frac{u_1 - u_3}{h_2} + \frac{h_0}{h_2} w' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_0 = h_2 + \frac{h_1 + h_3}{2} \\ E = E_1 = E_3 \\ I = I_1 + I_3. \end{cases}\quad (2.14)$$

Le terme non linéaire dans l'expression (2.13) du travail des efforts intérieurs  $\delta P_{int}$  est  $(N_1 + N_3)w'$ . En utilisant les expressions de la formule (2.13) dans la formule (2.9), nous obtenons trois équations suivant les trois quantités virtuelles  $\delta u_1$ ,  $\delta u_3$  et  $\delta w$  telles que :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{L}{2}} \left[ N_1 \delta u'_1 + \mu_2 b \gamma_2 \delta u_1 \right] dx &= 0, \\ \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ N_3 \delta u'_3 - \mu_2 b \gamma_2 \delta u_3 \right] dx &= 0,\end{aligned}\quad (2.15)$$

pour caractériser le comportement de membrane et puis

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \left[ EIw''\delta w'' + (N_1 + N_3)w'\delta w' + \mu_2 b h_0 \gamma_2 \delta w' \right] dx = \int_0^{\frac{L}{2}} qb\delta w dx - \delta P_K, \quad (2.16)$$

pour le comportement en flexion. En intégrant par parties les équations dans l'expression (2.15), nous obtenons deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} N'_1 = \mu_2 b \gamma_2, \\ N'_3 = -\mu_2 b \gamma_2, \end{cases}\quad (2.17)$$

avec des conditions aux limites associées :

$$\begin{cases} N_1\left(\frac{L}{2}\right) = N_3\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \\ N_1'(0) = N_3'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

En additionnant les deux termes des équations différentielles ordinaires (2.17), nous obtenons :

$$N_1' + N_3' = 0, \quad (2.19)$$

qui signifie que l'effort normal global

$$N_1 + N_3 = \text{constant}. \quad (2.20)$$

A partir des conditions aux limites naturelles (2.18), il apparaît que la condition :

$$N_1 + N_3 = 0 \quad (2.21)$$

est satisfaite aux extrémités de la poutre et de surcroît, elle est vérifiée tout le long de la poutre sandwich. En conséquence, le terme non linéaire dans les expressions (2.13) et (2.16) est aussi nul pour tout  $x$ . Cette remarque implique que les ressorts de translation  $K_T$  et de rotation  $K_R$  n'induisent pas de non linéarité géométrique dans la poutre sandwich Verre/PVB/Verre. Ainsi, la poutre aura toujours un comportement linéaire quelle que soit la déformation latérale à laquelle elle est soumise. Dans la suite, nous adoptons la notation :

$$N = N_1 = -N_3. \quad (2.22)$$

Partant des conclusions précédentes, deux intégrations par parties successives de la formule (2.16) associées aux équations (2.17) et (2.18) donnent deux équations différentielles ordinaires et les conditions aux limites qui définissent complètement ce problème de mouvement du sandwich Verre/PVB/Verre :

$$\begin{cases} N' = \mu_2 b \gamma_2, \\ (EIw'')'' - \mu_2 b h_0 \gamma_2' = qb, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} N(\frac{L}{2}) = N'(0) = 0, \\ w'(0) = 0, \\ w''(\frac{L}{2}) = -\frac{g_R}{L} w'(\frac{L}{2}), \\ w'''(0) = \frac{P}{2EI}, \\ w'''(\frac{L}{2}) = \frac{h_0}{EI} N'(\frac{L}{2}) + \frac{g_T}{L^3} w(\frac{L}{2}), \end{cases} \quad (2.24)$$

où :

$$g_R = \frac{K_R L}{EI} \quad \text{et} \quad g_T = \frac{K_T L^3}{EI} \quad (2.25)$$

sont des paramètres sans dimension introduits dans le modèle.

### 2.2.6 Solution analytique du problème

Dans cette section, nous présentons la solution analytique du problème posé par le système d'équations différentielles ordinaires (2.23) et les conditions aux limites associées (2.24). Une équation différentielle ordinaire est premièrement obtenue pour la fonction  $N(x)$ . Cette dernière est ensuite utilisée pour déterminer le déplacement transversal commun  $w(x)$ . Nous prouvons par la suite que le comportement en statique de la poutre est complètement déterminé par la connaissance de ces deux fonctions. Ainsi, à partir des

formules (2.14) nous obtenons :

$$u'_1 - u'_3 = \frac{N}{Eb} \left( \frac{h_1 + h_3}{h_1 h_3} \right). \quad (2.26)$$

Dans le but d'exploiter la formule (2.26), la première équation différentielle dans l'expression (2.23) est une fois différenciée par rapport à  $x$  et nous obtenons :

$$N'' = \frac{\mu_2}{Eh_2} \left( \frac{h_1 + h_3}{h_1 h_3} \right) N + \frac{\mu_2 b h_0}{h_2} w''. \quad (2.27)$$

En utilisant l'équation (2.27) et la deuxième équation différentielle de (2.23), nous obtenons l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 suivante :

$$N'''' - \alpha^2 N'' = \mu q, \quad (2.28)$$

où :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_2 b}{Eh_2} \left( \frac{h_0^2}{I} + \frac{A_1 + A_3}{A_1 A_3} \right)}, \quad I = \frac{b(h_1^3 + h_3^3)}{12} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\mu_2 h_0 b^2}{EIh_2}. \quad (2.29)$$

A partir des paramètres standards des poutres  $g$  (paramètre de cisaillement) et  $Y$  (paramètre géométrique) définis par (Mead et Markus, 1969; Rao, 1978) :

$$g = \frac{\mu_2 b L^2}{4Eh_2} \left( \frac{A_1 + A_3}{A_1 A_3} \right) \quad (2.30)$$

et

$$Y = \frac{h_0^2}{I} \left( \frac{A_1 A_3}{A_1 + A_3} \right) \quad (2.31)$$

nous obtenons :

$$\alpha = \frac{2\sqrt{g(1+Y)}}{L} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{4bgY}{L^2h_0}. \quad (2.32)$$

La solution générale de l'équation différentielle ordinaire (2.28) est sous la forme :

$$N(x) = -\frac{q\mu x^2}{2\alpha^2} + a_1 + a_2x + a_3 \cosh(\alpha x) + a_4 \sinh(\alpha x), \quad (2.33)$$

où  $a_1, a_2, a_3$  and  $a_4$  sont des constantes d'intégration à déterminer. L'équation différentielle ordinaire (2.27) peut s'écrire sous la forme suivante lorsque la fonction  $N(x)$  est connue :

$$w'' = \eta N'' + \delta N, \quad (2.34)$$

avec :

$$\eta = \frac{h_2}{G_2bh_0} \quad \text{et} \quad \delta = -\frac{A_1 + A_3}{EA_1A_3h_0}. \quad (2.35)$$

En utilisant l'expression (2.33) de  $N(x)$ , nous obtenons l'expression (2.36) pour la fonction  $w(x)$  en intégrant deux fois l'équation (2.34). Nous introduisons alors deux nouvelles constantes d'intégration  $a_5$  et  $a_6$  :

$$w(x) = \frac{(\delta + \alpha^2 \eta) f_1(x)}{\alpha^2} + \frac{f_2(x)}{24\alpha^2}, \quad (2.36)$$

où :

$$\begin{cases} f_1(x) = a_3 \cosh(\alpha x) + a_4 \sinh(\alpha x), \\ f_2(x) = -q\delta \mu x^4 + 4\alpha^2 \delta a_2 x^3 - 12(q\eta\mu - \alpha^2 \delta a_1) x^2 + 24\alpha^2(a_5 x + a_6). \end{cases} \quad (2.37)$$

Nous pouvons ensuite déterminer les six constantes d'intégration  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) en utilisant les six conditions aux limites (2.24). Leurs expressions sont données dans l'annexe

**A.1.** A travers les expressions des constantes d'intégration (cf. § A.1), nous remarquons que seule la constante  $a_6$  est fonction de la rigidité  $K_T$  du ressort de translation. Par conséquent, seul le déplacement transversal commun  $w(x)$  est influé par ce ressort. Cependant, la formule (2.36) montre que  $w'(x)$  et  $w''(x)$  ne dépendent pas  $a_6$ . Ainsi, il est alors clair que les champs de contraintes et de déformations de la poutre ne sont influencés que par la rigidité  $K_R$  du ressort de rotation. Le champ de déformations peut être obtenu à partir de la formule (2.2). Ce dernier est ensuite utilisé dans la loi de Hooke pour déterminer le champ des contraintes. Nous obtenons ainsi l'expression (2.38) pour les contraintes normales dans les couches de verre.

$$\sigma_i(x, z) = \frac{N_i(x)}{A_i} - E(z - z_i)w''(x), \quad i = 1, 3. \quad (2.38)$$

Nous pouvons déterminer ensuite les contraintes normales dans les surfaces supérieure et inférieure des couches de verre et la déformation de cisaillement dans la couche en PVB comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^{top}(x) = \frac{N(x)}{A_1} - \frac{E h_1}{2} w''(x), \\ \sigma_1^{bot}(x) = \frac{N(x)}{A_1} + \frac{E h_1}{2} w''(x), \\ \sigma_3^{top}(x) = -\frac{N(x)}{A_3} - \frac{E h_3}{2} w''(x), \\ \sigma_3^{bot}(x) = -\frac{N(x)}{A_3} + \frac{E h_3}{2} w''(x), \\ \gamma_2(x) = \frac{N'(x)}{\mu_2 b} = \frac{-\left(\frac{q x \mu}{\alpha^2}\right) + a_2 + \alpha \sinh(x \alpha) a_3 + \alpha \cosh(x \alpha) a_4}{\mu_2 b}. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Comme nous l'avons annoncé plus haut, il est maintenant clair que la connaissance des fonctions  $N(x)$  et  $w(x)$  suffit pour caractériser complètement le comportement en statique de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre. Pour valider notre modèle, nous allons le particulariser au cas d'appui simple traité par [Aşik et Tezcan \(2005\)](#) et [Ivelin Ivanov \(2006\)](#).

### 2.2.7 Validation du modèle

Afin de valider le modèle actuel, notre solution analytique est appliquée au cas particulier de la poutre simplement appuyée soumise à charge répartie  $q$ . Ce cas a été étudié par [Aşik et Tezcan \(2005\)](#) et [Ivelin Ivanov \(2006\)](#). Pour représenter ce cas, il suffit de prendre dans notre modèle  $K_R = 0$ ,  $K_T = +\infty$  et  $P = 0$ . En insérant ces quantités dans les formules (2.33) et (2.36), nous obtenons les expressions des fonctions  $N(x)$  et  $w(x)$ , respectivement identiques aux formules (26) et (31) déterminées par [Ivelin Ivanov \(2006\)](#) :

$$\begin{aligned}
 N(x) &= \frac{q\mu}{2\alpha^2} \left[ \frac{2 \cosh(\alpha x)}{\alpha^2 \cosh\left(\frac{L\alpha}{2}\right)} - x^2 + \frac{L^2 \alpha^2 - 8}{4 \alpha^2} \right], \\
 w(x) &= \frac{q\mu}{\alpha^6} \left[ (\delta + \alpha^2 \eta) \frac{\cosh(\alpha x)}{\cosh\left(\frac{L\alpha}{2}\right)} - \frac{\alpha^4 \delta}{24} x^4 + \frac{\Lambda_1}{384} x^2 + \frac{\Lambda_2}{384} \right],
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

avec :

$$\Lambda_1 = -192 \alpha^2 \delta + 24 L^2 \alpha^4 \delta - 192 \alpha^4 \eta,$$

$$\Lambda_2 = -384 \delta + 48 L^2 \alpha^2 \delta - 5 L^4 \alpha^4 \delta - 384 \alpha^2 \eta + 48 L^2 \alpha^4 \eta.$$

Si nous rajoutons une charge concentrée  $P$  au cas précédent, nous obtenons la solution du problème considéré par [Aşik et Tezcan \(2005\)](#). Moyennant un changement de variable,  $X = x + L/2$ , les formules (2.33) et (2.36) de ce travail conduisent respectivement aux formules (17) et (19) de [Aşik et Tezcan \(2005\)](#). Ces validations élémentaires montrent la pertinence du modèle. Nous allons maintenant montrer quelques applications du modèle.

## 2.2.8 Quelques applications du modèle

## Simulation d'essais de flexion trois points

Nous considérons ici une poutre Verre/PVB/Verre soumise à un test de flexion trois points. Les paramètres géométriques et mécaniques de la poutre sont : longueur totale  $L_t = 1.0$  m, largeur  $b = 10$  cm, longueur entre appuis  $L = 0.8$  m,  $h_1 = h_3 = 5$  mm,  $h_2 = 0.38$  mm,  $E = 64.5$  GPa,  $\mu_2 = 1.287$  MPa. La figure 2.3 montre la comparaison entre les résultats expérimentaux (Aşik et Tezcan, 2005) et notre modèle analytique. Nous

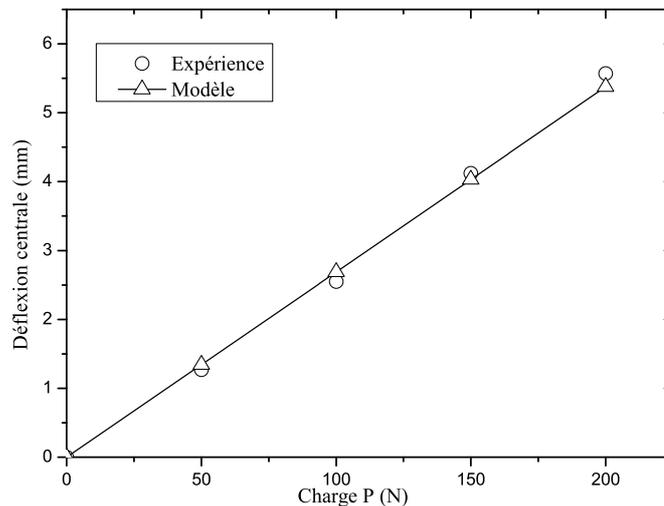


FIG. 2.3 – Essai de flexion trois points : modèle et expérience.

remarquons à travers cette figure que le modèle prédit bien les résultats de l'essai de flexion trois points.

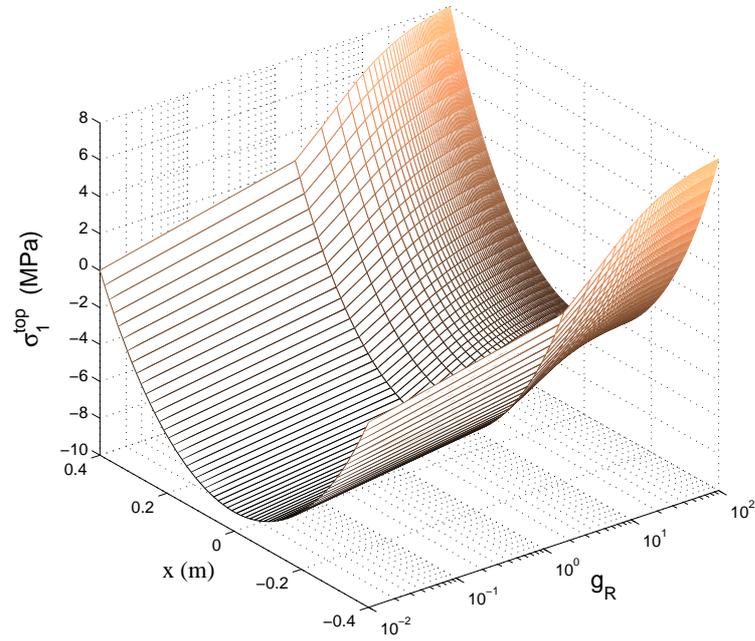
Il faut noter que les résultats analytiques présentés ici peuvent servir à des études d'optimisation comme celles menées par Ivelin Ivanov (2006). Cependant aucune de ces études ne sera reprise dans ce travail. Néanmoins, puisque l'originalité de notre modèle est l'introduction des deux paramètres  $K_T$  et  $K_R$  dans les solutions analytiques, il serait intéressant de faire apparaître leurs effets sur les états de déformations, de déplacements et de contraintes dans la poutre.

### Effet des paramètres $K_T$ et $K_R$ sur les contraintes, déformations et déplacements

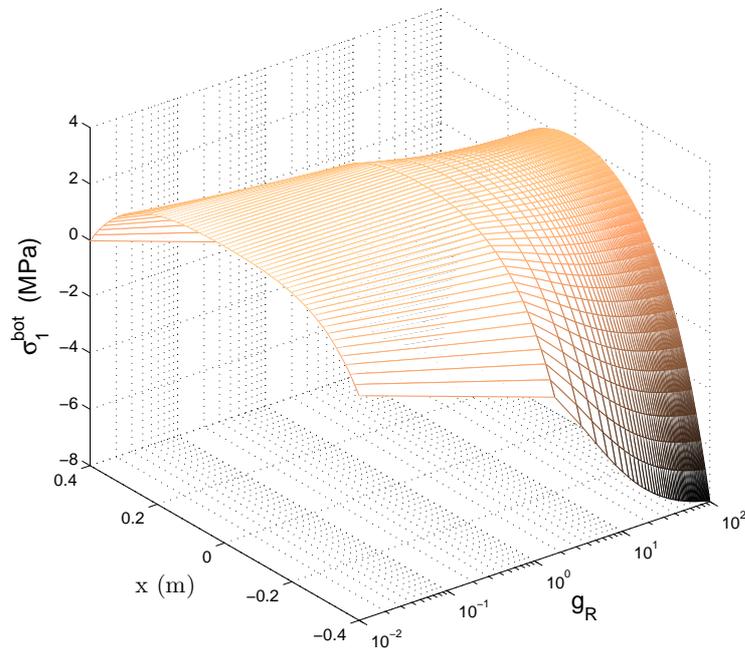
Comme nous l'avons montré dans la section 2.2.6, le paramètre  $K_T$  n'influence ni les déformations ni les contraintes dans la poutre. Ainsi l'effet de  $K_R$  sur les états de déformations, de déplacements et de contraintes dans la poutre sera étudié au travers de la variable sans dimension  $g_R = K_R L / (EI)$ . Par contre, l'effet de  $K_T$  sur le déplacement transversal  $w(x)$  sera étudié au travers de  $g_T = K_T L^3 / (EI)$ . Les données mécaniques, géométriques et de chargement utilisées dans ces études paramétriques sont :  $L = 0.8$  m,  $b = 0.1$  m,  $E = 70$  GPa,  $G_2 = 0.69$  MPa,  $q = 1$  kPa,  $P = 0$  N,  $Y = 3.7007$ ,  $g = 0.8411$ .

Les figures 2.4, 2.5 et 2.6(a) montrent respectivement l'effet de  $g_R$  sur les contraintes normales dans les surfaces supérieure et inférieure des deux couches de verre ainsi que la déformation de cisaillement dans la couche centrale (PVB). Le choix de ces contraintes normales et de cette déformation est motivé par certaines contraintes liées à l'usage des structures Verre/PVB/Verre. En effet il existe une contrainte de compression  $\sigma_c \approx 100$  MPa et une contrainte de traction  $\sigma_t \approx 10$  MPa admissibles pour la résistance des couches en verre. Pour éviter le délaminage de la couche en PVB, il faut que la déformation de cisaillement  $\gamma_2$  du PVB soit inférieure à une valeur admissible, par exemple  $\gamma_2 < 2$  (Jagota *et al.*, 2000). La figure 2.6(b) montre les effets de  $g_R$  et de  $g_T$  sur la déflexion maximale ( $\max w(x)$ ) de la poutre.

Nous remarquons à partir de la figure 2.4 que, lorsque la poutre est soumise à une pression  $q$  sur le verre supérieur, les faces supérieure et inférieure de cette couche de verre sont entièrement en compression et en tension respectivement pour les petites valeurs de  $g_R$ . En augmentant la valeur de  $g_R$ , des régions en tension et en compression apparaissent respectivement aux extrémités des surfaces supérieure et inférieure de cette couche de verre. La figure 2.5 montre le même comportement pour la couche de verre inférieure. La figure 2.6(a) montre que la déformation de cisaillement  $\gamma_2$  de la couche en PVB diminue lorsque  $g_R$  augmente. L'analyse de la figure 2.6(b) révèle que  $g_R$  n'a aucune influence sur  $\max w(x)$  tandis que ce dernier est légèrement influencé par  $g_T$ .

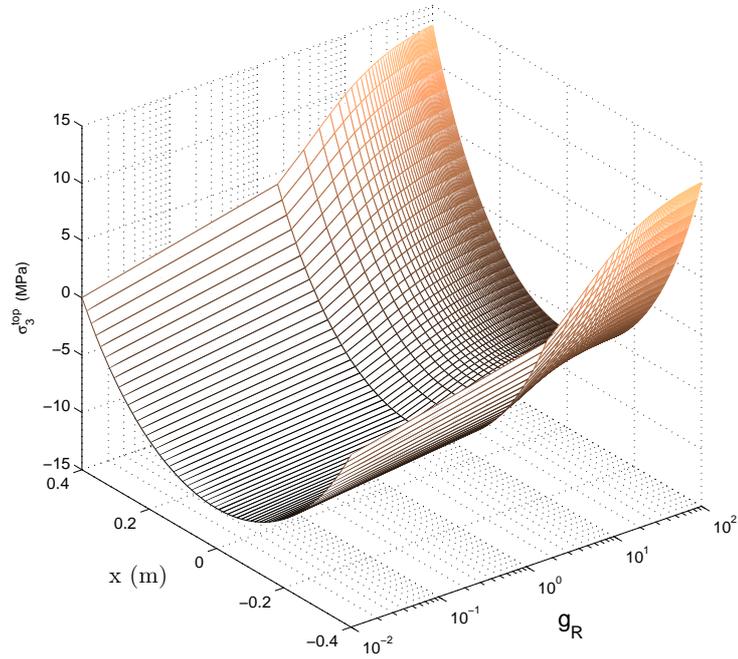


(a) Contrainte normale  $\sigma_1^{\text{top}}$

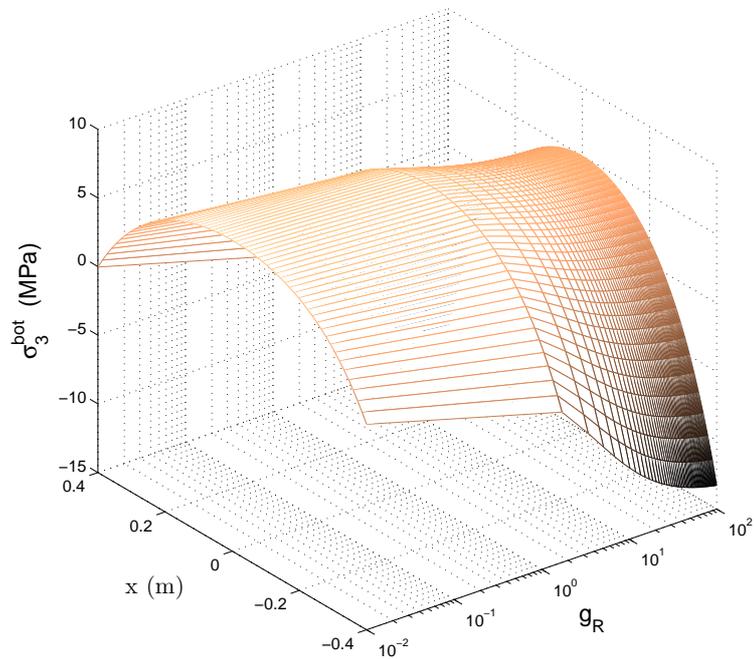


(b) Contrainte normale  $\sigma_1^{\text{bot}}$

FIG. 2.4 – Contraintes normales dans le verre supérieur en fonction de  $g_R$ .

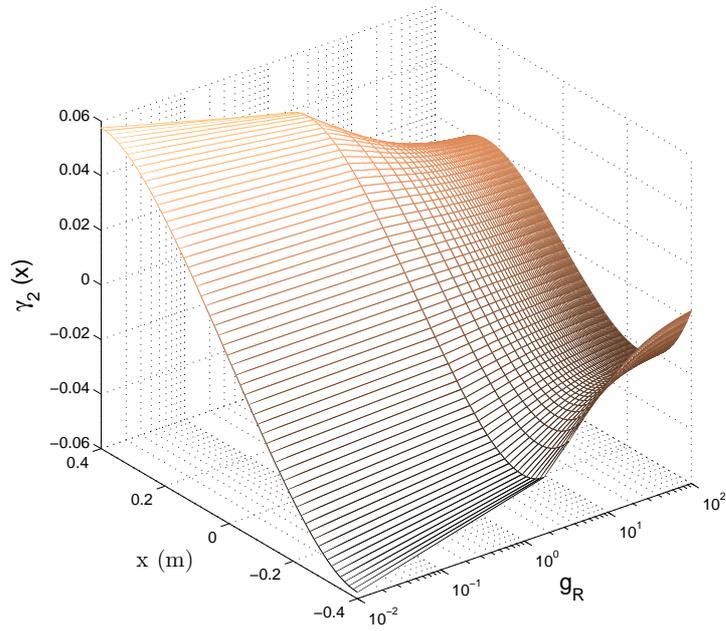


(a) Contrainte normale  $\sigma_3^{top}$

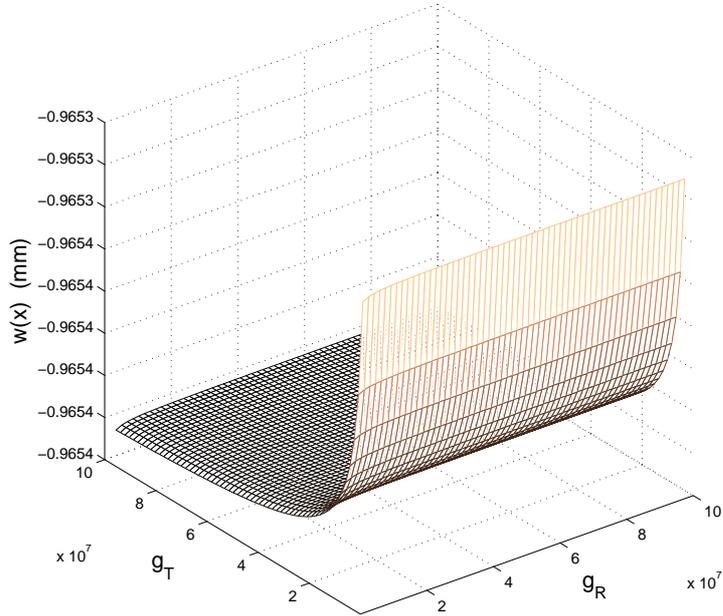


(b) Contrainte normale  $\sigma_3^{bot}$

FIG. 2.5 – Contraintes normales dans le verre inférieur en fonction de  $g_R$ .



(a) Déformation de cisaillement  $\gamma_2(x)$



(b) Déflexion maximale  $\max w(x)$

FIG. 2.6 – Déformation de cisaillement dans le PVB et  $\max w(x)$  en fonction de  $g_R, g_T$ .

Au travers de ces études paramétriques, nous avons remarqué que l'effet des supports n'est pas négligeable sur le comportement en statique de la poutre. Il est alors important de les prendre en compte lors de l'étude des structures Verre/PVB/Verre. Après cette étude de comportement en statique de ces structures sandwich, il serait également intéressant d'étudier leur comportement vibratoire. Ceci nous permettra de connaître les divers paramètres qui jouent un rôle primordial dans les propriétés modales de ces structures. Cette étude est faite dans la section 2.3.

## 2.3 Comportement vibratoire de la poutre Verre/PVB/Verre

### 2.3.1 Position du problème, hypothèses et notations

Nous étudions dans cette section les vibrations linéaires libres des poutres sandwich Verre/PVB/Verre avec des supports viscoélastiques (voir figure 2.1). La couche en PVB est viscoélastique et le comportement viscoélastique sera introduit par un tenseur de rigidité complexe fonction de la fréquence. Dans un premier temps, nous supposons que ce tenseur est constant (indépendant de la fréquence voire indépendant de la température ou autres paramètres) comme il est considéré dans plusieurs travaux (Ferry, 1970; Rao, 1978; Sainsbury et Zhang, 1999; Daya et Potier-Ferry, 2002). En considérant le régime harmonique, toutes les fonctions en  $x$  et  $z$  (déplacement, déformation et contrainte) ont des valeurs mathématiques complexes et sont toutes multipliées par le terme  $e^{i\omega t}$  où  $\omega$  est la pulsation complexe,  $t$  est le temps et  $i = \sqrt{-1}$ . Ce terme disparaît dans les équations finales et ne sera donc pas pris en compte dans les développements qui suivent. En plus des notations utilisées dans l'étude statique, nous introduirons les notations suivantes :  $\hat{\mu}_2 = \mu_2(1 + i\eta_2)$  est le module de cisaillement complexe de la couche centrale (PVB) où  $\mu_2$  est son module de stockage et  $\eta_2$  son facteur de perte. La densité de la couche  $k$  est notée  $\rho_k$ . Les paramètres complexes sans dimension  $\hat{g}_R = \hat{K}_R L / (EI) = g_R(1 + i\eta_R)$  et  $\hat{g}_T = \hat{K}_T L^3 / (EI) = g_T(1 + i\eta_T)$  sont introduits pour représenter les rigidités complexes

des ressorts du support VE. Notons que dans la suite nous considérons toute la poutre et que contrairement au cas statique, l'origine O du repère est prise à l'extrémité gauche de la poutre. Au reste, nous considérons la structure sandwich sous les mêmes hypothèses que celles de la section 2.2.1.

### 2.3.2 Mise en place du modèle

Pour décrire le mouvement de la poutre sandwich, nous utiliserons le champ de déplacement (2.2) présenté dans l'étude statique. Le principe des puissances virtuelles (PPV) s'écrit dans le cas dynamique comme suit :

$$\delta P_{int} + \delta P_{ext} = \delta P_{acc}, \quad (2.41)$$

où  $\delta P_{int}$  est la puissance virtuelle des efforts intérieurs,  $\delta P_{ext}$  est la puissance virtuelle des efforts extérieurs et  $\delta P_{acc}$  est la puissance virtuelle des quantités d'accélération. Ces puissances virtuelles sont définies par :

$$\delta P_{int} = - \int_0^L \left( EI w'' \delta w'' + EA_1 u_1' \delta u_1' + EA_3 u_3' \delta u_3' + \hat{\mu}_2 b h_2 \gamma_2 \delta \gamma_2 \right) dx, \quad (2.42)$$

$$\delta P_{ext} = - \hat{K}_T \left( w \delta w \Big|_{x=0} + w \delta w \Big|_{x=L} \right) - \hat{K}_R \left( w_{,x} \delta w_{,x} \Big|_{x=0} + w_{,x} \delta w_{,x} \Big|_{x=L} \right), \quad (2.43)$$

$$\delta P_{acc} = -\omega^2 \int_0^L \left[ \sum_{k=1}^3 \rho_k A_k w \delta w + \rho_1 \left( A_1 u_1 \delta u_1 + A_3 u_3 \delta u_3 \right) \right] dx. \quad (2.44)$$

Pour étudier les propriétés modales de la structure, le problème est discrétisé par des éléments finis (EF) poutre sandwich présentés dans la section 2.3.3.

### 2.3.3 Discrétisation par éléments finis et problème aux valeurs propres

L'élément fini utilisé a deux nœuds ayant chacun quatre degrés de liberté (ddl) qui décrivent les déplacements longitudinaux ( $u_1, u_3$ ), le déplacement transversal commun aux trois couches  $w$  et la pente  $\theta = w_{,x}$  de la poutre sandwich. Les déplacements nodaux pour un EF sont alors :

$$\{\mathbf{v}^e\} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} = [w_i \ \theta_i \ u_{1i} \ u_{3i} \ w_j \ \theta_j \ u_{1j} \ u_{3j}]^\top. \quad (2.45)$$

Avec les fonctions de forme polynomiales classiques (Dhatt *et al.*, 2005), le champ des déplacements est interpolé sur chaque élément fini par :

$$\begin{Bmatrix} w \\ u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_3 \end{bmatrix} \{\mathbf{v}^e\}, \quad (2.46)$$

où  $[\mathbf{W}]$ ,  $[\mathbf{U}_1]$ ,  $[\mathbf{U}_3]$  sont des matrices  $1 \times 8$  contenant les fonctions de forme,

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}] &= [N_1(\xi) \ N_2(\xi) \ 0 \ 0 \ N_3(\xi) \ N_4(\xi) \ 0 \ 0], \\ [\mathbf{U}_1] &= [0 \ 0 \ N_5(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ N_6(\xi) \ 0], \\ [\mathbf{U}_3] &= [0 \ 0 \ 0 \ N_5(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ N_6(\xi)]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Les fonctions de forme  $N_i(\xi)$  sont données dans l'annexe A.2. En insérant l'expression (2.46) dans (2.41), nous obtenons le problème aux valeurs propres complexes linéaire suivant :

$$([\mathbf{K}^e] - \omega^2 [\mathbf{M}^e]) \{\mathbf{v}^e\} = 0, \quad (2.48)$$

où  $[\mathbf{K}^e]$  et  $[\mathbf{M}^e]$  sont respectivement les matrices de rigidité et de masse élémentaires de la structure sandwich. Leurs expressions sont fournies dans l'annexe A.2. En assemblant de manière classique les problèmes élémentaires, nous obtenons le problème aux valeurs propres complexes linéaire suivant :

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{U}\} = 0. \quad (2.49)$$

C'est cette équation qui caractérise les vibrations libres de cette structure sandwich viscoélastique. Dans le cas général, le problème (2.49) est complexe et non linéaire dû à la dépendance en fréquence de la matrice de rigidité ( $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}(\omega)]$ ). Ce problème est relativement difficile à résoudre. Plusieurs approches (Chen *et al.*, 1999; Daya et Potier-Ferry, 2001; Duigou *et al.*, 2003; Jarlebring, 2003) existent pour le résoudre comme nous l'avons présenté dans la section 1.3.5. Nous reviendrons plus tard sur ces problèmes non linéaires dans le chapitre 7 où nous présentons l'outil *Diamant*. Pour l'instant nous supposons dans les études paramétriques qui suivent que le matériau VE a un module de cisaillement constant. Dans ce cas, le problème aux valeurs propres complexes linéaire (2.49) peut être simplement résolu en utilisant la méthode QR (Bathe, 1982; Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006) par exemple. Cette méthode est implémentée dans le logiciel de calculs scientifiques MATLAB par la fonction `eig`. Les valeurs propres complexes  $\omega^2$  obtenues permettent de déterminer les fréquences propres  $\Omega$  et les facteurs de perte  $\eta$  associés par la relation de DiTaranto et McGraw (1969) :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta). \quad (2.50)$$

### 2.3.4 Test de validation du modèle

Pour valider le modèle, nous l'appliquons à une structure sandwich à trois couches. Les données géométriques et mécaniques de la structure sont :  $E = 7.037 \times 10^4$  MPa,  $\mu_2 =$

### 2.3. Comportement vibratoire de la poutre Verre/PVB/Verre

0.7037 MPa,  $\rho_1 = \rho_3 = 2770 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 970 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $h_1 = h_3 = 1.52 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 0.127 \text{ mm}$ ,  $\eta_2 = 0.3$ ,  $L = 177.8 \text{ mm}$  et  $b = 12.7 \text{ mm}$ . La poutre sandwich est encastree en une extremité et libre sur l'autre. Cette poutre a été étudiée par [Sainsbury et Zhang \(1999\)](#) en utilisant la méthode GEM (Galerkin element method). Les résultats sont comparés dans le tableau 2.1 et ils montrent la pertinence de notre modèle éléments finis.

Modes	GEM 3 ( <a href="#">Sainsbury et Zhang, 1999</a> )		Notre modèle	
	$\Omega$ (Hz)	$\eta$	$\Omega$ (Hz)	$\eta$
1	65.02	0.0816	64.93	0.0816
2	299.65	0.0720	299.31	0.0720
3	750.35	0.0462	749.73	0.0462
4	1405.44	0.0267	1404.53	0.0267
5	2279.31	0.0172	2277.97	0.0172
6	3370.18	0.0117	3368.32	0.0117
Erreur Max (%)	Ref.	Ref.	0.139	0.000

TAB. 2.1 – Résultats pour les six premiers modes.

#### 2.3.5 Autres résultats et discussions

Une fois le modèle validé, nous pouvons l'exploiter pour mener certaines études paramétriques afin de quantifier l'influence des paramètres géométriques et mécaniques de la structure sur ses propriétés modales. Pour ce faire, nous introduisons des paramètres sans dimension.

#### Paramètres adimensionnels

Nous notons dans la suite :  $x = h_1/h_2$ ,  $y = h_1/h_3$ ,  $z = L/h_2$ ,  $r = \mu_2/E$ . Le paramètre de cisaillement  $\hat{g}$  est :

$$\hat{g} = \frac{\hat{\mu}_2 b L^2}{4 E h_2} \left( \frac{A_1 + A_3}{A_1 A_3} \right) = \frac{\mu_2 (1 + i \eta_2) b L^2}{4 E h_2} \left( \frac{A_1 + A_3}{A_1 A_3} \right) = g (1 + i \eta_2), \quad (2.51)$$

où  $g$  s'exprime alors ainsi :

$$g = \frac{(1+y)rz^2}{4x}. \quad (2.52)$$

Le paramètre géométrique  $Y$  est :

$$Y = \frac{h_0^2}{I} \left( \frac{A_1 A_3}{A_1 + A_3} \right) = \frac{3(2y + xy + x)^2 y}{x^2(1+y^3)(1+y)}. \quad (2.53)$$

Rappelons également les paramètres complexes sans dimension des supports viscoélastiques de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre :

$$\hat{g}_R = \frac{\hat{K}_R L}{EI} = g_R(1 + i\eta_R) \quad \text{et} \quad \hat{g}_T = \frac{\hat{K}_T L^3}{EI} = g_T(1 + i\eta_T). \quad (2.54)$$

Tous les autres paramètres sont définis dans la section 2.2.5. Les études paramétriques qui suivent concernent une poutre Verre/PVB/Verre. Les couches en verre ont un module de Young  $E_1 = E_3 = E = 64.5$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.22$  et une densité  $\rho_1 = \rho_3 = 2737$  kg m<sup>-3</sup>. La densité du PVB est  $\rho_2 = 999$  kg m<sup>-3</sup>. La largeur de la poutre est  $b = 0.1$  m. Les autres paramètres du modèle sont ajustés une fois que les variables sans dimension sont fixées.

### Effet du paramètre de cisaillement $g$

La figure 2.7 montre la variation des trois premières fréquences propres  $\Omega$  de la poutre encastree en fonction du paramètre de cisaillement  $g$  et pour 3 valeurs du paramètre géométrique :  $Y = 4$ ,  $Y = 15$  et  $Y = 25$ . L'effet de  $g$  sur  $\Omega$  est minime pour les très faibles et les très grandes valeurs de  $g$ . Il existe cependant un intervalle de valeurs intermédiaires pour lesquelles  $\Omega$  augmente avec  $g$ . Nous observons également que ces valeurs intermédiaires sont bien influencées par le paramètre géométrique  $Y$ . Aussi remarque-t-on que  $\Omega$  diminue lorsqu'on augmente  $Y$  pour les petites valeurs de  $g$  alors que pour les grandes

valeurs de  $g$ ,  $\Omega$  augmente avec  $Y$ .

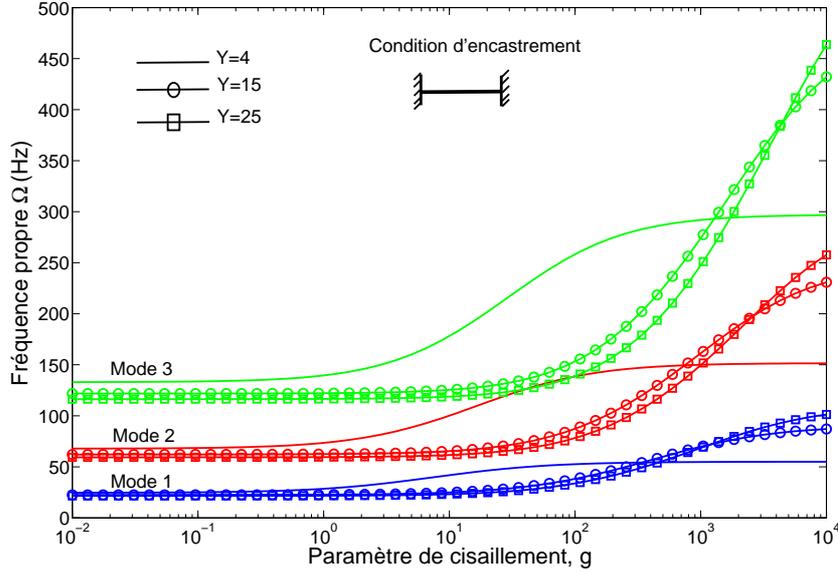


FIG. 2.7 – Variation de  $\Omega$  avec  $g$  et trois valeurs de  $Y$ .  $\eta_2 = 0.1$ .

La figure 2.8 montre l'effet de  $g$  sur les facteurs de perte  $\eta$  associés aux trois premières fréquences propres de la poutre encastree pour  $Y = 4$ ,  $Y = 15$  et  $Y = 25$ . Nous remarquons qu'il existe une valeur optimale  $g_{\text{opt}}$  pour laquelle le facteur de perte atteint une valeur maximale  $\eta_{\text{max}}$ . Clairement,  $g_{\text{opt}}$  dépend des modes et du paramètre géométrique  $Y$ .  $g_{\text{opt}}$  augmente avec  $Y$  de même qu'avec le mode ( $g_{\text{opt}}|_{\text{Mode 1}} < g_{\text{opt}}|_{\text{Mode 2}} < g_{\text{opt}}|_{\text{Mode 3}}$ ). Sur cette courbe, nous remarquons que  $\eta_{\text{max}}$  augmente avec  $Y$ . De plus, il est bien visible que la valeur de  $g_{\text{opt}}$  augmente également avec  $Y$ . Par ailleurs, on peut remarquer sur la figure 2.8 que, pour des valeurs de  $g < g_{\text{opt}}|_{\text{Mode 1}}$  on a  $\eta_{\text{Mode 1}} > \eta_{\text{Mode 2}} > \eta_{\text{Mode 3}}$  alors que pour  $g > g_{\text{opt}}|_{\text{Mode 3}}$  on a  $\eta_{\text{Mode 1}} < \eta_{\text{Mode 2}} < \eta_{\text{Mode 3}}$  et ceci pour les trois valeurs de  $Y$  considérées.

### Effet du facteur de perte $\eta_2$ de la couche centrale

La figure 2.9 montre l'effet du facteur de perte  $\eta_2$  de la couche centrale du sandwich sur le facteur de perte  $\eta$  de la poutre. L'effet de  $\eta_2$  est négligeable pour les faibles valeurs de  $g$  alors qu'il est bien marqué pour les grandes valeurs de  $g$ . Comme on peut l'espérer,

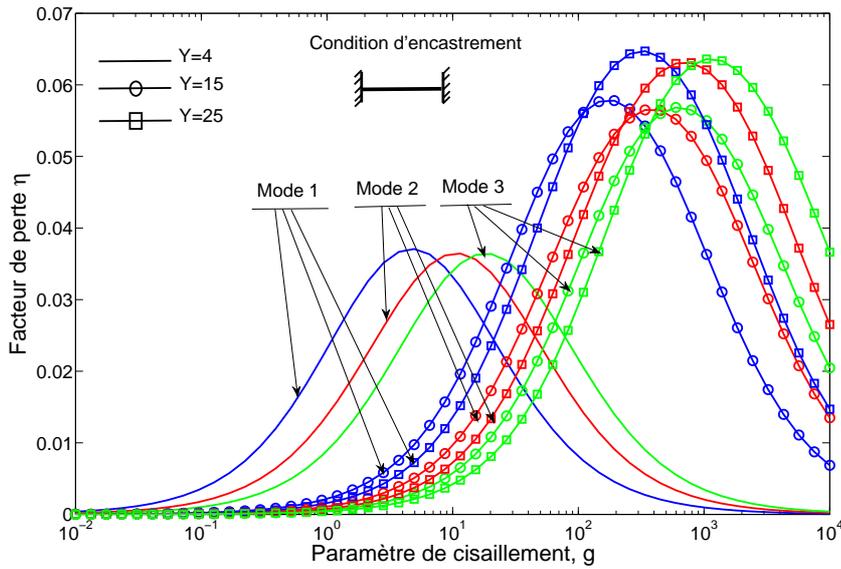


FIG. 2.8 – Variation de  $\eta$  avec  $g$  et trois valeurs de  $Y$ .  $\eta_2 = 0.1$ .

le facteur de perte  $\eta$  de la poutre augmente avec  $\eta_2$ . Nous remarquons que pour une augmentation de  $\eta_2$  de 0.1 à 1, le facteur de perte associé au mode 1 de la poutre passe de la valeur de 0.06433 à la valeur de 0.5742. En d'autres termes, en multipliant  $\eta_2$  par 10, on multiplie  $\eta$  par 9. L'effet de  $\eta_2$  est très négligeable sur les fréquences propres (figure non représentée ici).

### Effet du paramètre $g_T$ des supports viscoélastiques pour $g_R$ fixé

La variation de la fréquence propre en fonction du paramètre  $g_T$  des supports viscoélastiques de la poutre est montrée sur la figure 2.10 pour  $g_R = 10^{-2}$ ,  $10^2$  et  $10^6$ . On remarque sur cette figure que l'effet de  $g_T$  sur  $\Omega$  est plus marqué pour les grandes valeurs de  $g_T$  alors que l'effet est insignifiant pour les petites et moyennes valeurs de  $g_T$ . Pour les trois premiers modes choisis,  $\Omega$  augmente avec  $g_T$  pour les grandes valeurs de  $g_T$  et ceci pour les trois valeurs de  $g_R$  considérées. La figure 2.10 montre également que l'effet de  $g_R$  sur le mode 1 est insignifiant pour les petites et moyennes valeurs de  $g_T$  mais il est bien prononcé pour les grandes valeurs de  $g_T > 10^5$ . A partir de  $g_T = 10^5$ , la fréquence propre du mode 1 augmente avec  $g_R$ . Ceci peut s'expliquer par le fait que ce premier mode doit

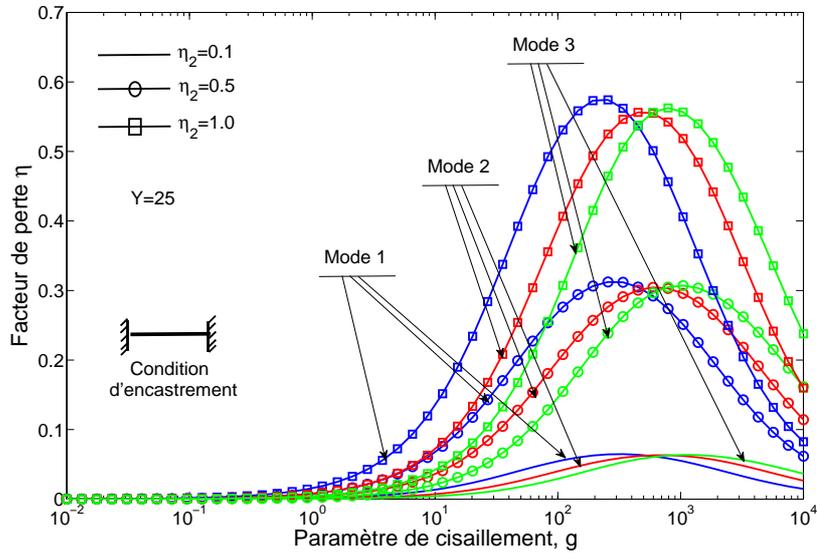


FIG. 2.9 – Variation de  $\eta$  avec  $g$  et trois valeurs de  $\eta_2$ .  $Y = 25$ .

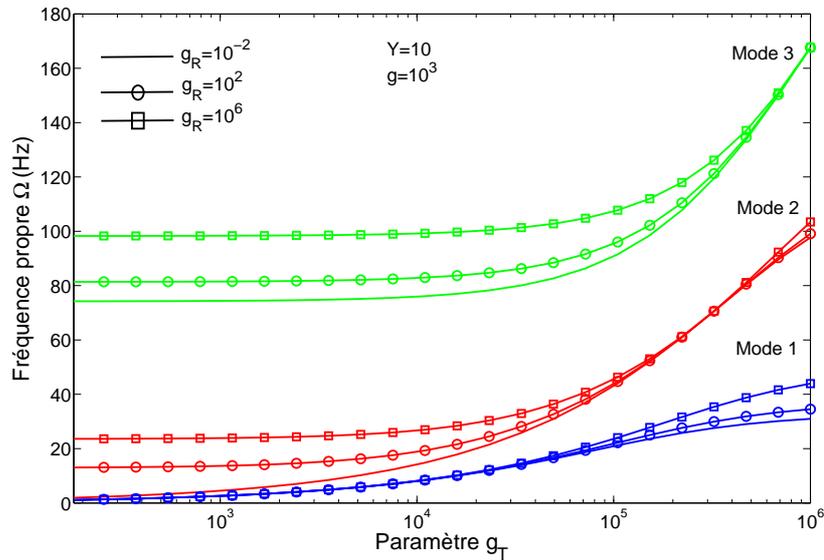


FIG. 2.10 – Variation de  $\Omega$  avec  $g_T$  et trois valeurs de  $g_R$ .  $\eta_T = \eta_R = 0.1$ .

être probablement un mode rigide (translation transversale) pour les petites et moyennes valeurs de  $g_T$ . Le ressort en rotation ne travaillant alors pas dans ce cas, son effet au travers de  $g_R$  est nul. Cette hypothèse est soutenue par le comportement du facteur de perte  $\eta$  du mode 1 (cf. Figure 2.11). En effet on remarque clairement sur la figure 2.11 que le facteur de perte de la poutre correspondant au mode 1 est égal à 0.1 qui est exactement l'amortissement  $\eta_T$  lié au ressort de translation  $\hat{K}_T$ . La poutre se comporte alors au mode 1 comme un système masse ressort en translation pure. En revanche pour les modes 2 et 3, l'effet de  $g_R$  est plutôt marqué pour les petites et moyennes valeurs de  $g_T$  et tend à disparaître pour les grandes valeurs de  $g_T$ . La figure 2.11 montre la variation du facteur de perte en fonction du paramètre  $g_T$  des supports viscoélastiques et pour les trois valeurs de  $g_R$ . On peut remarquer au travers de cette figure que l'on peut obtenir des valeurs intéressantes du facteur de perte d'un mode donné par un choix adéquat des paramètres  $g_T$  et  $g_R$  des supports.

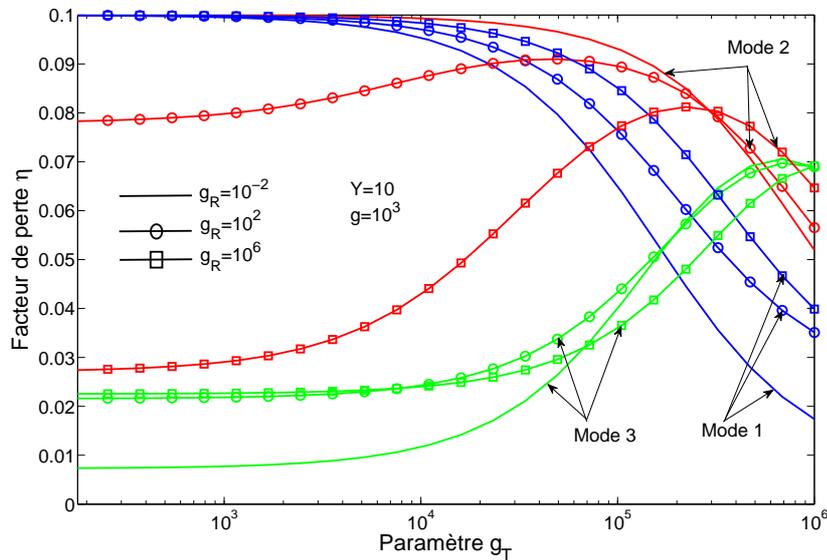


FIG. 2.11 – Variation de  $\eta$  avec  $g_T$  et trois valeurs de  $g_R$ .  $\eta_T = \eta_R = 0.1$ .

**Effet des paramètres  $\eta_T$  et  $\eta_R$  des supports viscoélastiques**

La figure 2.12 montre la variation du facteur de perte  $\eta$  de la poutre en fonction des facteurs de perte  $\eta_T$  et  $\eta_R$  des supports VE. Comme on peut l'espérer,  $\eta$  augmente avec l'augmentation de  $\eta_T = \eta_R$ . Comme nous l'avons expliqué plus haut, le mode 1 est un mode rigide pour les petites et moyennes valeurs de  $g_T$ . Ceci apparaît clairement sur la figure 2.12 où le facteur de perte de la poutre correspondant au mode 1 est égal à  $\eta_T$  (facteur de perte du ressort de translation). L'effet de  $\eta_T = \eta_R$  est bien marqué sur les modes 2 et 3 pour les grandes valeurs de  $g_T$ . En revanche, l'effet de  $\eta_T = \eta_R$  est très négligeable sur les fréquences propres (figure non représentée).

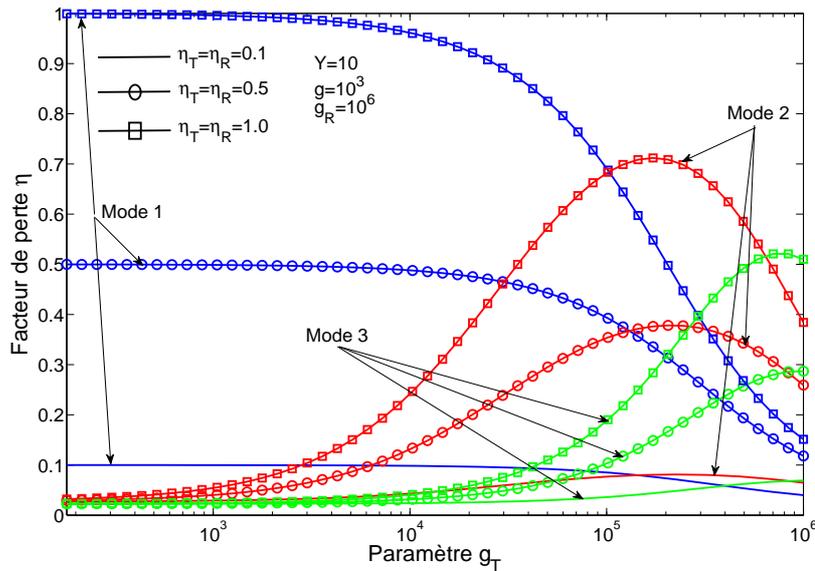


FIG. 2.12 – Variation de  $\eta$  avec  $g_T$  et trois valeurs de  $\eta_T = \eta_R$ .  $g_R = 10^6$ .

En guise de conclusion, nous avons montré au travers de ce modèle simple mais suffisamment rigoureux de poutre sandwich Verre/PVB/Verre que plusieurs paramètres influencent les propriétés modales (fréquences propres et facteurs de perte associés) de la poutre. D'une part, en considérant la poutre elle-même, le paramètre de cisaillement  $g$ , le paramètre géométrique  $Y$  et le facteur de perte  $\eta_2$  de la couche centrale viscoélastique ont un rôle important dans le comportement global de la poutre. Nous avons montré qu'il

existe une valeur optimale  $g_{\text{opt}}$  du paramètre de cisaillement  $g$  pour maximiser le facteur de perte  $\eta$  de la poutre (cf. 2.8). La figure 2.9 nous montre également que l'augmentation de  $\eta_2$  améliore sensiblement le facteur de perte  $\eta$  de la poutre pour les grandes valeurs de  $g$ . Ainsi, par un choix judicieux de ces paramètres, on peut atteindre un niveau d'amortissement et de fréquence propre pour un mode désiré de la poutre. D'autre part, les figures 2.10, 2.11 et 2.12 révèlent clairement que les paramètres du support viscoélastique aux extrémités de la poutre ont une forte influence sur les propriétés modales de la structure. Une combinaison adéquate de ces paramètres peut conduire à des propriétés modales souhaitées pour la poutre.

Après avoir étudié les comportements statique et vibratoire de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre, il serait maintenant intéressant de regarder les facteurs qui influencent ses caractéristiques acoustiques. Ceci étant très indispensable pour le confort acoustique aussi bien dans les automobiles que dans les bâtiments. Cette étude est donc menée dans la section 2.4 à partir du modèle analytique de [Narayanan et Shanbhag \(1982\)](#). Bien que ce modèle soit basé sur des hypothèses simplificatrices, il a l'intérêt de montrer explicitement l'effet des paramètres géométriques et mécaniques sur le comportement acoustique de la poutre. De nos jours il existe des outils beaucoup plus élaborés pour de telles études. Nous pouvons en citer le logiciel [MSC Actran](#) par exemple.

## 2.4 Comportement acoustique de la poutre Verre/PVB/Verre

### 2.4.1 Les structures sandwich : perte de transmission du son

L'interaction entre une plaque homogène infinie et une onde acoustique incidente sur une face de la plaque est un problème classique en acoustique. Dans ce problème il est observé le phénomène de coïncidence qui apparaît lorsque la longueur d'onde de flexion de la plaque coïncide avec la longueur d'onde sur la plaque. Ceci conduit à une forte transparence de la plaque à l'onde acoustique.

La capacité des structures sandwich à améliorer les caractéristiques d'isolation acoustique des panneaux homogènes a été étudiée par Kurtze et Watters (1959) et par Ford *et al.* (1967). Une grande perte de transmission du son a été obtenue par l'usage des structures sandwich avec un cœur mou. Aussi a-t-on observé un décalage vers les hautes fréquences de la fréquence de coïncidence de la plaque sandwich. Smolenski et Krokosky (1973) puis Dym et Lang (1974) ont aussi considéré le problème de perte de transmission du son à travers des panneaux sandwich. De leur côté, Guyader et Lesueur (1978) ont étudié la transmission du son à travers les panneaux multi-couches orthotropes en combinant l'analyse modale et la méthode SEA (Statistical Energy Analysis).

Dans cette section, les caractéristiques de transmission du son des structures sandwich Verre/PVB/Verre sont étudiées d'une manière classique en nous basant sur le travail de Narayanan et Shanbhag (1982). L'objectif principal est de maîtriser les paramètres qui influencent le facteur de perte de transmission (que nous nommerons TL dans la suite) et la fréquence de coïncidence de la structure.

### 2.4.2 Description du problème et les chargements en pression

Nous considérons une structure sandwich Verre/PVB/Verre séparant deux milieux semi-infinis contenant de l'air comme le montre la figure 2.13. Nous considérons ensuite une onde plane harmonique incidente d'angle d'incidence  $\theta$  sur une face du sandwich. La pression incidente peut être exprimée comme suit :

$$p_i(x, z, t) = P_i \exp \left[ ik \left( x \sin \theta - z \cos \theta \right) \right] e^{-i\omega t}, \quad (2.55)$$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde de l'onde incidente,  $c$  est la vitesse du fluide (air),  $\omega$  est la fréquence et  $P_i$  est l'amplitude de la pression incidente. Dans toute l'analyse qui va suivre le terme d'harmonique  $e^{-i\omega t}$  sera de façon cohérente éliminée de toutes les équations. La pression résultante sur la face d'incidence est la somme de la pression

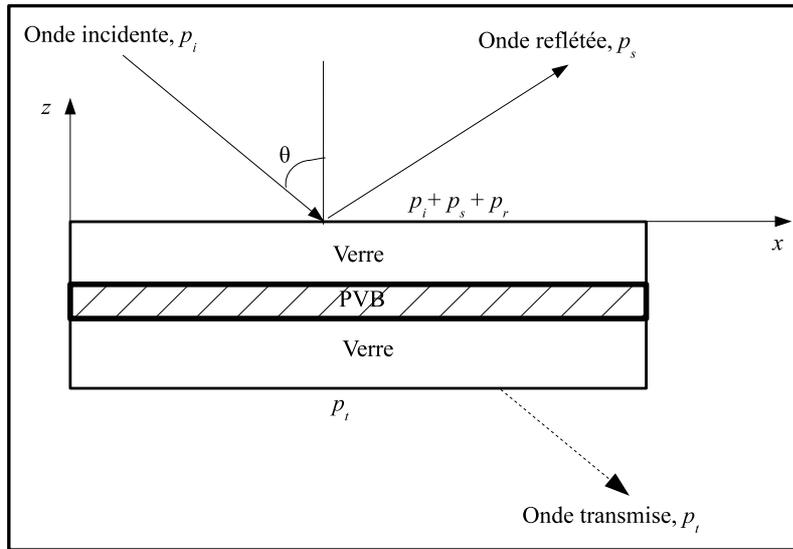


FIG. 2.13 – Composantes du champ de pression sur la structure.

incidente  $p_i$ , de la pression réfléchie  $p_s$  et de la pression rayonnée  $p_r$ . La pression sur l'autre face de la structure est la pression transmise  $p_t$ . La pression réfléchie  $p_s$  s'exprime par (Narayanan et Shanbhag, 1982) :

$$p_s(x, z) = P_i \exp \left[ ik \left( x \sin \theta + z \cos \theta \right) \right]. \quad (2.56)$$

Puisque la pression d'excitation externe est indépendante de la coordonnée  $y$ , la réponse dynamique de la structure est également indépendante de  $y$ . Ceci implique que cette excitation est une onde qui se propage dans la direction  $x$  et que le front d'onde est parallèle à l'axe  $y$ . La pression transmise  $p_t$  peut être déterminée en résolvant l'équation de mouvement liée à la pression résultante sur la structure. Puisque la pression rayonnée dépend du mouvement de la structure et que ce mouvement dépend lui-même de la pression résultante, la détermination de  $p_t$  conduit à un problème de couplage fluide-structure. L'accélération de la structure peut être exprimée par :

$$\ddot{w}(x) = \ddot{W} \exp(ikx \sin \theta). \quad (2.57)$$

La pression rayonnée  $p_s$  satisfait l'équation de Helmholtz :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) p(x, z) = 0, \quad (2.58)$$

avec la condition aux limites

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \ddot{W} \exp(ikx \sin \theta) \right|_{z=0} \quad (2.59)$$

sur la surface de la structure où  $\rho$  est la densité du milieu fluide (air). Ensuite la pression rayonnée est donnée par (Narayanan et Shanbhag, 1982) :

$$p_r(x, z) = \frac{i\rho \ddot{W}}{k \cos \theta} \exp \left[ ik \left( x \sin \theta + z \cos \theta \right) \right]. \quad (2.60)$$

La pression transmise  $p_t$  associée à la réponse élastique de la structure est la pression rayonnée par la structure dans le demi-espace  $z < 0$ . Etant donné que, dans cette analyse, il est supposé que les deux surfaces sur les côtés d'incidence et de transmission de l'onde acoustique ont le même mouvement transversal, et que les milieux acoustiques de chaque côté de la structure sont identiques, alors on obtient (Narayanan et Shanbhag, 1982) :

$$\left| p_t \right| = \left| p_r \right|. \quad (2.61)$$

Sur la surface de la structure se trouvant du côté de l'onde transmise, la valeur de pression transmise  $p_t$  est l'opposée de la valeur de la pression rayonnée  $p_r$  sur la surface de la structure qui se situe dans la zone d'incidence puisque l'accélération de la structure  $\ddot{w}(x)$  produit une pression positive sur une surface de la structure et une pression négative sur l'autre. Ensuite, étant donné que l'onde transmise se propage dans la direction des  $z$

négatifs, elle peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} p_t(x, z) &= |p_t| \exp \left[ ik \left( x \sin \theta - z \cos \theta \right) \right] \\ &= -p_r(x, z) \exp(-i2kz \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.62)$$

### 2.4.3 Equation de mouvement de la structure sandwich

Si on néglige les effets d'inertie dans les directions  $x$  et  $y$  alors l'équation de mouvement de la structure pour le déplacement transversal  $w(x)$  commun aux trois couches du sandwich est donnée par :

$$\nabla^6 w - \hat{g}(1 + Y)\nabla^4 w + \frac{m}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w - \hat{g}w) = \frac{\nabla^2 p - \hat{g}p}{D}, \quad (2.63)$$

où :

$$\begin{aligned} \nabla^6 &= \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6}{\partial y^6}, \\ \nabla^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Dans l'équation (2.63),  $\hat{g}$  est le paramètre de cisaillement de la couche centrale (ici, le PVB), défini par :

$$\hat{g} = \frac{2\mu_2(1 + i\beta)(1 - \nu^2)}{Eh_1h_2} = g(1 + i\beta), \quad (2.65)$$

où  $\mu_2$  et  $\beta$  sont respectivement le module de stockage et le facteur de perte de la couche viscoélastique,  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson des couches de Verre (peaux du sandwich),  $h_1$  et  $h_2$  sont respectivement l'épaisseur des couches en verre et l'épaisseur de la couche centrale (PVB). Clairement, seul le cas des sandwichs symétriques est considéré. Les autres termes de l'équation (2.63) sont : le

paramètre géométrique

$$Y = 3 \left( 1 + \frac{h_2}{h_1} \right)^2, \quad (2.66)$$

$m$  est la masse par unité de surface du sandwich entier,

$$D = \frac{Eh_1^3}{6(1 - \nu^2)}, \quad (2.67)$$

et enfin  $p$  est la pression résultante sur le sandwich. Pour ce présent cas où la configuration est indépendante de  $y$ , l'équation de mouvement (2.63) peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - \hat{g}(1 + Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \hat{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \hat{g} p \right). \quad (2.68)$$

#### 2.4.4 Facteur de perte de transmission du son (TL)

En utilisant l'équation (2.57) pour le mouvement hamonique, le déplacement  $w(x)$  peut s'écrire comme suit :

$$w(x) = -\frac{\ddot{W}}{\omega^2} \exp(ikx \sin \theta). \quad (2.69)$$

En remplaçant l'équation (2.69) dans l'équation (2.68) et en utilisant l'équation (2.55) on obtient :

$$\ddot{W} = \frac{-2P_i \cos \theta}{m \left[ \frac{i\rho}{mk} + \left\{ \frac{Dk^4 \sin^4 \theta}{m\omega^2} \left( 1 + \frac{\hat{g}Y}{k^2 \sin^2 \theta + \hat{g}} \right) - 1 \right\} \cos \theta \right]}. \quad (2.70)$$

Les pressions rayonnée et transmise  $p_r$  et  $p_t$  peuvent alors être déduites des équations (2.60) et (2.62). Dès que  $p_t$  est déterminée, le rapport de la pression incidente  $p_i$  et de la

pression transmise  $p_t$  est donné par :

$$\frac{p_i}{p_t} \Big|_{z=0} = 1 - \frac{ikm \cos \theta}{2\rho} \left[ \frac{Dk^4 \sin^4 \theta}{m\omega^2} \left( 1 + \frac{\hat{g}Y}{k^2 \sin^2 \theta + \hat{g}} \right) - 1 \right]. \quad (2.71)$$

L'équation (2.71) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{p_i}{p_t} \Big|_{z=0} = 1 + Z_T \frac{\cos \theta}{2\rho c}, \quad (2.72)$$

où  $Z_T$  peut être considéré comme l'impédance de transmission spécifique de la structure sandwich. Le coefficient de transmission du son  $\tau$  est défini comme le rapport entre la puissance du son transmis et la puissance du son incident :

$$\frac{1}{\tau} = \left| \frac{p_i}{p_t} \Big|_{z=0} \right| = \left| 1 + Z_T \frac{\cos \theta}{2\rho c} \right|. \quad (2.73)$$

Si on écrit  $Z_T = R_T + iX_T$  alors :

$$\frac{1}{\tau} = \left( 1 + R_T \frac{\cos \theta}{2\rho c} \right)^2 + \left( X_T \frac{\cos \theta}{2\rho c} \right)^2. \quad (2.74)$$

Le facteur de perte de transmission du son (TL) de la structure sandwich est alors défini par la relation suivante :

$$TL = \log \left( \frac{1}{\tau} \right). \quad (2.75)$$

#### 2.4.5 Phénomène de coïncidence

Comme nous l'avons dit plus haut, la fréquence de coïncidence est la fréquence à laquelle la longueur d'onde de flexion de la structure coïncide avec la longueur d'onde de l'onde incidente. Cette fréquence correspond à une perte de transmission TL nulle à travers la structure sandwich. La fréquence de coïncidence peut être déterminée en considérant

la relation de dispersion entre la fréquence et le nombre d'onde de la structure sandwich amortie. Narayanan et Shanbhag (1982) ont déterminé l'équation vérifiée par la fréquence de coïncidence  $\omega_c$  ainsi :

$$\omega_c^6 + \alpha_1 \omega_c^4 + \alpha_2 \omega_c^2 - \alpha_3 = 0, \quad (2.76)$$

où les 3 coefficients sont définis par :

$$\begin{cases} \alpha_1 &= c^2 \csc^2 \theta \left[ g(2 + Y) - \frac{mc^2 \csc^2 \theta}{D} \right], \\ \alpha_2 &= c^4 \csc^4 \theta \left[ g^2(1 + Y)(1 + \beta^2) - 2g \frac{mc^2 \csc^2 \theta}{D} \right], \\ \alpha_3 &= c^8 \csc^8 \theta \frac{g^2(1 + \beta^2)m}{D}, \\ \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta}. \end{cases} \quad (2.77)$$

#### 2.4.6 Quelques résultats et discussions

Dans les applications numériques qui suivent, nous considérons une structure sandwich Verre/PVB/Verre. Le verre a un module de Young  $E = 64.5$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.22$ , une densité  $\rho_1 = 2737$  kg m<sup>-3</sup>. Dans tous les calculs, les épaisseurs des couches en verre sont fixées à  $h_1 = h_3 = 2$  mm. La vitesse de l'air est  $c = 330$  m s<sup>-1</sup> et sa densité est  $\rho = 1.225$  kg m<sup>-3</sup>. Pour le matériau viscoélastique (PVB) la densité  $\rho_2 = 999$  kg m<sup>-3</sup> est considérée.

#### Effet du paramètre de cisaillement $g$

La figure 2.14 montre la variation de la perte de transmission du son (TL) avec la fréquence pour diverses valeurs du paramètre de cisaillement  $g$  pour un angle d'incidence  $\theta = 45^\circ$ . Pour toutes les valeurs de  $g$ , les courbes du TL ont un creux correspondant aux fréquences de coïncidence. Nous avons remarqué que, pour les faibles valeurs de  $g$ , les courbes du TL suivent la loi de masse (loi linéaire : partie linéaire des courbes) jusqu'à la fréquence de coïncidence et elles présentent ensuite un creux pointu à la fréquence de

coïncidence. Pour les grandes valeurs de  $g$ , les courbes du TL suivent la loi de masse aux basses fréquences et dévient de la loi de masse à partir des fréquences bien en-dessous de la fréquence de coïncidence. Le TL est significativement élevé aux fréquences intermédiaires (1000-3500) pour les valeurs de  $g = 10$  et  $100$  en comparaison avec les courbes du TL pour  $g = 5000$  et  $10\ 000$ . Ceci est principalement dû au fait que les fréquences de coïncidence pour les faibles valeurs de  $g$  sont très grandes par rapport à celles des grandes valeurs de  $g$  et que les courbes du TL dans le cas des grandes valeurs de  $g$  ont tendance à décroître plus tôt. Néanmoins, au-delà de la fréquence de coïncidence, le TL augmente rapidement avec la fréquence pour les grandes valeurs du paramètre de cisaillement  $g$ . Il faut aussi remarquer que les creux observés à la coïncidence sont profonds et pointus pour les petites valeurs de  $g$  et ceci probablement à cause du facteur de perte global qui est assez petit pour ces faibles valeurs de  $g$ .

Nous avons également remarqué sur la figure 2.14 que le TL à la fréquence de coïncidence peut être considérablement amélioré par un choix optimal du paramètre de cisaillement  $g$ . Par exemple, pour le cas de  $g = 1000$ , le TL est plus grand que le TL des autres valeurs de  $g$  montrées sur la figure. La profondeur du creux observé à la coïncidence pour cette valeur de  $g$  est sensiblement réduite comparée aux autres courbes. Clairement, il ressort de cette figure que les caractéristiques de perte de transmission du son à travers une structure sandwich peuvent être considérablement améliorées par un choix adéquat du paramètre de cisaillement  $g$  selon la gamme de fréquences concernée.

### Effet du facteur de perte $\beta$

La figure 2.15 montre le comportement de la perte de transmission du son pour diverses valeurs du facteur de perte  $\beta$  du cœur pour deux valeurs du paramètre de cisaillement  $g$  ( $g = 100$  et  $g = 5000$ ). Pour la faible valeur de  $g$ , l'effet de  $\beta$  sur le TL est minimal avec une augmentation marginale du TL à la fréquence de coïncidence lorsqu'on augmente  $\beta$ . Par contre, l'effet de  $\beta$  sur le TL est bien prononcé pour  $g = 5000$ . Une augmentation

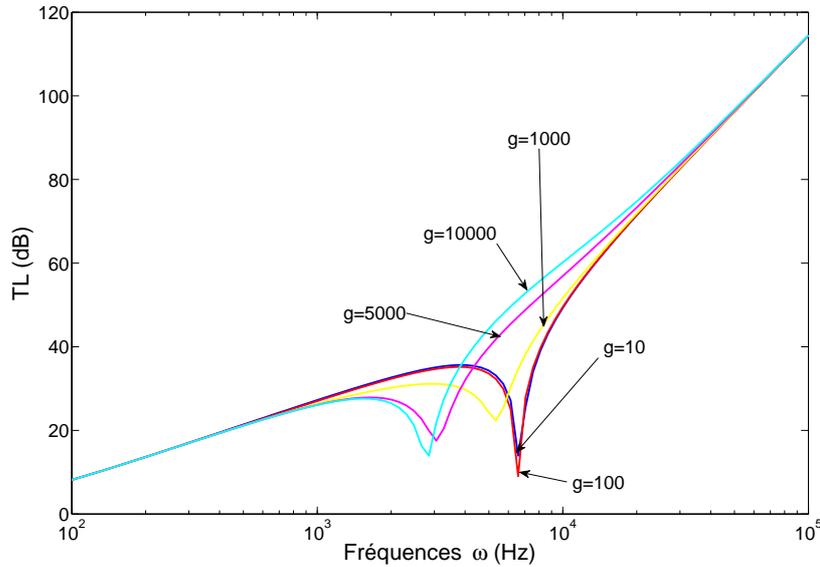


FIG. 2.14 – Variation du TL avec  $g$ .  $\beta = 0.3$ ;  $Y = 5.88$ ;  $\theta = 75^\circ$ .

significative du TL (entre 10 et 13 dB) à la coïncidence est obtenue avec l'augmentation de  $\beta$ . Alors que visiblement  $\beta$  n'a aucun effet sur la position de la fréquence de coïncidence pour  $g = 100$ , cette dernière est, d'une façon marquée, décalée vers la gauche (les basses fréquences) quand  $\beta$  augmente et pour  $g = 5000$ .

### Effet du paramètre géométrique $Y$

On observe sur la figure 2.16, le TL pour pour diverses valeurs du paramètre géométrique  $Y$  et trois valeurs différentes du paramètre de cisaillement  $g$ . Comme on remarque sur cette figure, jusqu'à la fréquence de coïncidence, une augmentation de  $Y$  entraîne une augmentation marginale du TL. Pour les faibles valeurs de  $g$  ( $g = 100$ ), l'augmentation de  $Y$  entraîne une augmentation marginale de la fréquence de coïncidence. La perte de transmission du son à la fréquence de coïncidence augmente avec  $Y$  dans ce cas. Cependant pour les grandes valeurs de  $g$  ( $g = 1000$  et  $g = 10000$ ), la fréquence de coïncidence diminue significativement avec l'augmentation de  $Y$ . Ceci est dû au fait que, pour les grandes valeurs de  $g$ , une augmentation de  $Y$  résulte en une augmentation de la rigidité

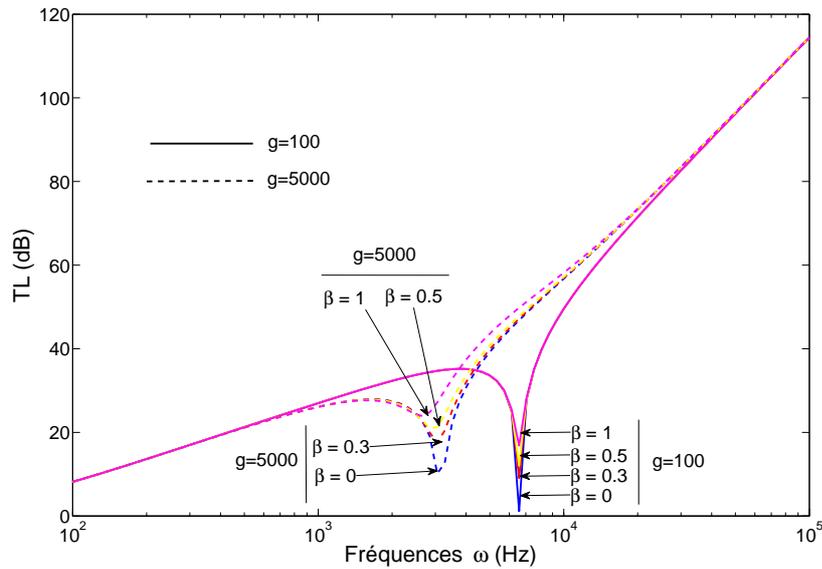


FIG. 2.15 – Variation du TL avec  $\beta$  et deux valeurs de  $g$ .  $Y = 5.88$ ;  $\theta = 75^\circ$ .

de flexion de la structure sandwich avec une conséquente diminution de la fréquence de coïncidence. Par ailleurs, on remarque sur le graphique que, selon la valeur de  $g$ , le TL à la fréquence de coïncidence peut être augmenté par un choix approprié de  $Y$ .

### Effet de l'angle d'incidence $\theta$

La figure 2.17 montre la variation de la perte de transmission du sandwich en fonction de l'incidence  $\theta$ . Comme on peut le remarquer à partir de l'équation (2.74), le TL diminue avec l'augmentation de  $\theta$ . La fréquence de coïncidence diminue également lorsque  $\theta$  augmente.

#### 2.4.7 Conclusions et perspectives

A partir de cette étude des caractéristiques de perte de transmission du son (TL) de la structure sandwich Verre/PVB/Verre, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

1. le TL est plus sensible à la variation du paramètre de cisaillement  $g$  que les autres paramètres ;

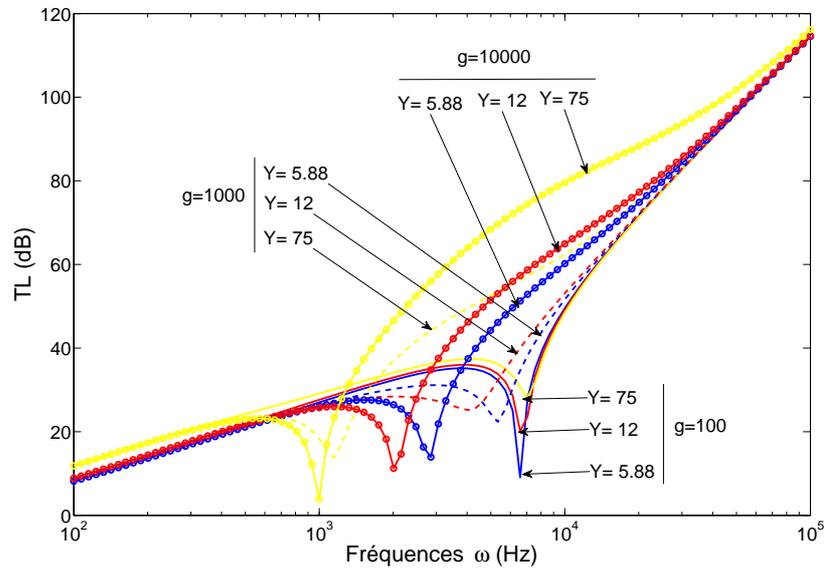


FIG. 2.16 – Variation du TL avec  $Y$  et trois valeurs de  $g$ .  $\beta = 0.3$ ;  $\theta = 75^\circ$ .

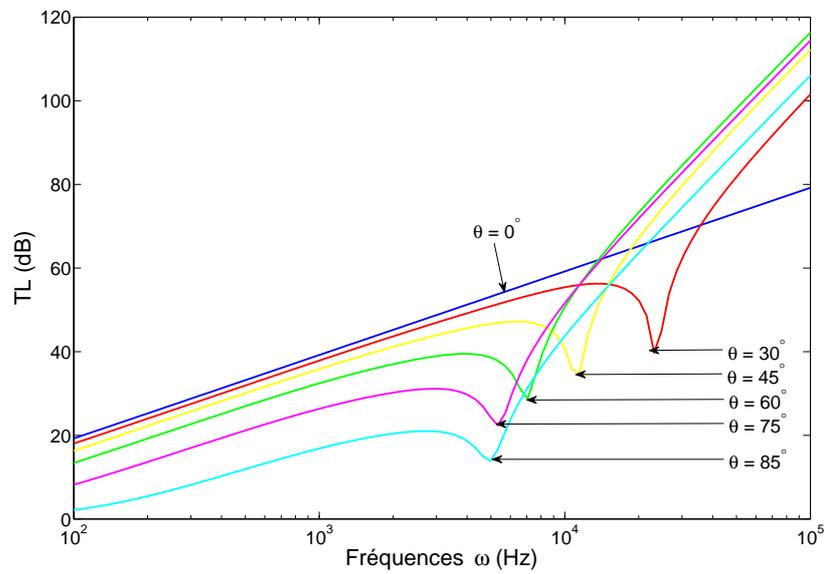


FIG. 2.17 – Variation du TL avec  $\theta$ .  $g = 1000$ ;  $\beta = 0.3$ ;  $Y = 5.88$ .

2. de grandes fréquences de coïncidence sont obtenues par un choix adéquat de  $g$ , de  $Y$  et de grandes valeurs du facteur de perte  $\beta$  de la couche centrale viscoélastique.

Pour mémoire, nous rappelons ici l'expression de  $g$  (voir équation (2.65)) :

$$g = \frac{2\mu_2(1 - \nu^2)}{Eh_1h_2}. \quad (2.78)$$

De manière évidente, nous remarquons que  $g$  dépend des propriétés mécaniques des deux matériaux du sandwich (le verre et le PVB). Si à priori, pour des contraintes industrielles ou autres, il est impossible de remplacer l'un de ces deux matériaux pour avoir la valeur de  $g$  optimale correspondant au niveau de TL désiré, alors nous serons limités aux deux paramètres géométriques  $h_1$  et  $h_2$  qui, sans doute, seront également assujettis à des contraintes. Ainsi il est alors clair que la solution de sandwich à cœur viscoélastique pour améliorer le pouvoir amortissant des structures est très souvent limitée. En effet il n'est pas toujours possible de trouver la combinaison des matériaux du sandwich pour obtenir un niveau d'amortissement souhaité. Ainsi, il serait alors souhaitable de partir des matériaux existants et d'agir ensuite sur eux afin d'obtenir les propriétés désirées. En d'autres termes, il serait intéressant d'intégrer la conception des matériaux à la conception des structures.

## 2.5 Extension au modèle plaque sandwich Verre/PVB/Verre

Nous nous proposons maintenant d'étendre le modèle poutre sandwich Verre/PVB/Verre à un modèle pouvant également étudier les comportements statique et vibratoire de ces types structures.

### 2.5.1 Hypothèses et champ de déplacements

Les deux couches de verre sont traitées comme des plaques de Kirchhoff-Love alors que la couche en PVB est modélisée par la théorie cinématique de Mindlin pour prendre

en compte la déformation de cisaillement de cette couche. Comme dans la section 2.2.1 le champ des déplacements (2.79) est utilisé pour décrire la position du  $\mathbf{M}_i$  de la couche  $i$  après la flexion de la plaque dans l'espace  $(x, y, z)$ .

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}}_i(x, y, z) = \mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} u_i(x, y) + (z - z_i)\alpha_i(x, y) \\ v_i(x, y) + (z - z_i)\beta_i(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Dans le champ des déplacements (2.79),  $u_i(x, y)$ ,  $v_i(x, y)$ , et  $w_i(x, y)$  représentent les déplacements dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement de la surface moyenne de la couche  $i$  tandis que  $\alpha_i(x, y)$  et  $\beta_i(x, y)$  représentent les rotations de la normale de cette surface moyenne dans les plans  $(y, z)$  et  $(x, z)$  respectivement. Les valeurs des  $z_i$  sont identiques à celles des  $z_i$  de la formule (2.3).

Avec la théorie de plaque de Kirchhoff-Love, on obtient les rotations  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  des couches en verre comme suit :

$$\alpha_1 = \alpha_3 = -w_{,x}, \quad \beta_1 = \beta_3 = -w_{,y}. \quad (2.80)$$

Les conditions de continuité des déplacements aux interfaces s'écrivent dans ce cas comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} + \frac{h_1 - h_3}{4} w_{,x}, \\ v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2} + \frac{h_1 - h_3}{4} w_{,y}, \\ \alpha_2 = \frac{u_1 - u_3}{h_2} + \frac{h_1 + h_3}{2h_2} w_{,x}, \\ \beta_2 = \frac{v_1 - v_3}{h_2} + \frac{h_1 + h_3}{2h_2} w_{,y}, \end{array} \right. \quad (2.81)$$

où, comme dans le cas de la poutre,  $h_i$  désigne l'épaisseur de la couche  $i$ . Ainsi, le problème de plaque sandwich Verre/PVB/Verre revient à déterminer les cinq fonctions  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $v_1$ ,  $v_3$  et  $w$ .

### 2.5.2 Champs des déformations

Les déformations dans le plan de la plaque sont alors définies par :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} = \{\boldsymbol{\Gamma}_i\} + (z - z_i) \{\boldsymbol{\kappa}_i\}. \quad (2.82)$$

En utilisant la théorie de plaque de von Karman, nous obtenons :

$$\begin{cases} \{\boldsymbol{\Gamma}_i\} &= \{\boldsymbol{\Gamma}_i^l\} + \{\boldsymbol{\Gamma}^{nl}\}, \\ \{\boldsymbol{\Gamma}_i^l\} &= \{u_{i,x}, v_{i,y}, u_{i,y} + v_{i,x}\}^\top, \\ \{\boldsymbol{\Gamma}^{nl}\} &= \frac{1}{2} \{(w_{,x})^2, (w_{,y})^2, 2w_{,x}w_{,y}\}^\top, \\ \{\boldsymbol{\kappa}_i\} &= \{\alpha_{i,x}, \beta_{i,y}, \alpha_{i,y} + \beta_{i,x}\}^\top. \end{cases} \quad (2.83)$$

Les déformations de cisaillement dans la couche de PVB sont définies par :

$$\{\boldsymbol{\xi}_2\} = \{\gamma_{2xz}, \gamma_{2yz}\}^\top = \{w_{,x} + \alpha_2, w_{,y} + \beta_2\}^\top. \quad (2.84)$$

Rappelons que les déformations de cisaillement  $\{\boldsymbol{\xi}_1\}$  et  $\{\boldsymbol{\xi}_3\}$  dans la couche de verre sont nulles selon la théorie de plaque de Kirchhoff-Love.

### 2.5.3 Lois de comportement

Les efforts normaux  $\mathbf{N}_i$  et les moments de flexion  $\mathbf{M}_i$  dans chaque couche puis l'effort tranchant  $\mathbf{Q}_2$  dans la couche centrale sont définies par :

$$\begin{cases} \{\mathbf{N}_i\} &= \{N_{ix}, N_{iy}, N_{ixy}\}^\top = [\mathbf{C}_{im}] \{\boldsymbol{\Gamma}_i\}, \\ \{\mathbf{M}_i\} &= \{M_{ix}, M_{iy}, M_{ixy}\}^\top = [\mathbf{C}_{ib}] \{\boldsymbol{\kappa}_i\}, \\ \{\mathbf{Q}_2\} &= \{Q_{2xz}, Q_{2yz}\}^\top = [\mathbf{C}_{2s}] \{\boldsymbol{\xi}_2\}, \end{cases} \quad (2.85)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{C}_{im}] = \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_i}{2} \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{C}_{is}] = \mu_i h_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{C}_{ib}] = \frac{h_i^2}{12} [\mathbf{C}_{im}]. \end{array} \right. \quad (2.86)$$

En introduisant des variables intermédiaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{S}_i\} = \left\{ \{\mathbf{N}_i\}^\top, \{\mathbf{M}_i\}^\top, \{\mathbf{Q}_i\}^\top \right\}^\top, \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_i^l\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}^{nl}\} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}_i^l\} = \left\{ \{\boldsymbol{\Gamma}_i^l\}^\top, \{\boldsymbol{\kappa}_i\}^\top, \{\boldsymbol{\xi}_i\}^\top \right\}^\top \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}^{nl}\} = \left\{ \{\boldsymbol{\Gamma}^{nl}\}^\top, \{0\}^\top, \{0\}^\top \right\}^\top. \end{array} \right. \quad (2.87)$$

la loi de comportement globale de chaque couche du sandwich s'écrit alors :

$$\{\mathbf{S}_i\} = [\mathbf{C}_i] \{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}, \quad (2.88)$$

avec :

$$[\mathbf{C}_i] = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{im}] & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{C}_{ib}] & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{C}_{is}] \end{bmatrix}. \quad (2.89)$$

#### 2.5.4 Problème de vibrations libres linéaires de la plaque

Le principe des travaux virtuels pour ce problème s'écrit toujours par :

$$\delta P_{int} + \delta P_{ext} = \delta P_{acc}, \quad (2.90)$$

où :

$$\begin{aligned} \delta P_{int} = & - \iint_{(x,y)} \left( \sum_{i=1}^3 \left[ \{\delta \Gamma_i\}^\top [\mathbf{C}_{im}] \{\Gamma_i\} + \{\delta \kappa_i\}^\top [\mathbf{C}_{ib}] \{\kappa_i\} \right] \right. \\ & \left. + \{\delta \xi_2\}^\top [\mathbf{C}_{2s}] \{\xi_2\} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \delta P_{ext} = & - \int_0^a \hat{K}_T \left[ w(x, 0) \delta w(x, 0) + w(x, b) \delta w(x, b) \right] dx \\ & - \int_0^a \hat{K}_R \left[ w_{,y}(x, 0) \delta w_{,y}(x, 0) + w_{,y}(x, b) \delta w_{,y}(x, b) \right] dx \\ & - \int_0^b \hat{K}_T \left[ w(0, y) \delta w(0, y) + w(a, y) \delta w(a, y) \right] dy \\ & - \int_0^b \hat{K}_R \left[ w_{,x}(0, y) \delta w_{,x}(0, y) + w_{,x}(a, y) \delta w_{,x}(a, y) \right] dy, \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \delta P_{acc} = & - \omega^2 \iint_{(x,y)} \left( \sum_{i=1}^3 \left[ \rho_i h_i \left( u_i \delta u_i + v_i \delta v_i + w \delta w \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho_i h_i^3}{12} (\alpha_i \delta \alpha_i + \beta_i \delta \beta_i) \right] \right) dx dy. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Rappelons que  $\hat{K}_T$  et  $\hat{K}_R$  représentent respectivement les rigidités des ressorts de translation et de rotation qui modélisent le matériau VE aux bords de la plaque. Notons également que  $\hat{K}_T$  et  $\hat{K}_R$  dépendent de la fréquence voire de la température :

$$\begin{cases} \hat{K}_T(\omega) &= K_T(\omega) \left[ 1 + i\eta_T(\omega) \right], \\ \hat{K}_R(\omega) &= K_R(\omega) \left[ 1 + i\eta_R(\omega) \right]. \end{cases} \quad (2.94)$$

Leurs expressions en fonction des propriétés mécaniques et géométriques du matériau VE aux bords de la plaque sont données par les formules (2.1).

### 2.5.5 Un élément fini sandwich plaque et application

Nous présentons maintenant l'élément fini plaque sandwich développé dans le cadre d'une conception multi-échelle des poutres et plaques sandwich VE par [Koutsawa et al. \(2008f\)](#). C'est un élément 2-D comportant quatre noeuds ayant chacun 7 degrés de liberté (ddl). Quatre ddl décrivent les déplacements longitudinaux, un ddl décrit le déplacement transversal commun et deux ddl caractérisent les rotations (ou pentes) de la plaque sandwich. Les déplacements longitudinaux et transversal de la plaque sont alors exprimés en fonction des déplacements nodaux  $\{\mathbf{q}_e\}$  et de la matrice des fonctions de forme  $[\mathbf{N}]$  par :

$$\begin{Bmatrix} w \\ u_1 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{q}_e\} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_w \\ \mathbf{N}_{u1} \\ \mathbf{N}_{u3} \\ \mathbf{N}_{v1} \\ \mathbf{N}_{v3} \end{bmatrix} \{\mathbf{q}_e\}, \quad (2.95)$$

avec :

$$\{\mathbf{q}_e\} = \{w_k \ w_{,xk} \ w_{,yk} \ u_{1k} \ u_{3k} \ v_{1k} \ v_{3k}\}^\top, \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.96)$$

Notons que  $k = 1, 2, 3, 4$  correspond aux quatre noeuds de l'élément. En conséquence, chaque élément a 28 ddl.  $\mathbf{N}_w$ ,  $\mathbf{N}_{u1}$ ,  $\mathbf{N}_{u3}$ ,  $\mathbf{N}_{v1}$  et  $\mathbf{N}_{v3}$  sont des matrices  $1 \times 28$  contenant les fonctions de forme classiques ([Dhatt et al., 2005](#)). En utilisant cet élément fini plaque

sandwich, le problème (2.90) peut alors s'écrire de la façon suivante sur un élément :

$$\delta P_{int}^e = - \{ \delta \mathbf{q}_e \}^\top [\mathbf{K}_{e1}] \{ \mathbf{q}_e \}, \quad (2.97)$$

$$\delta P_{ext}^e = - \{ \delta \mathbf{q}_e \}^\top [\mathbf{K}_{eb}] \{ \mathbf{q}_e \}, \quad (2.98)$$

$$\delta P_{acc}^e = - \omega^2 \{ \delta \mathbf{q}_e \}^\top [\mathbf{M}_e] \{ \mathbf{q}_e \}, \quad (2.99)$$

et par suite :

$$([\mathbf{K}_e(\omega)] - \omega^2 [\mathbf{M}_e]) \{ \mathbf{q}_e \} = 0. \quad (2.100)$$

Notons que  $[\mathbf{K}_e(\omega)] = [\mathbf{K}_{e1}] + [\mathbf{K}_{eb}]$  est la matrice de rigidité élémentaire et  $[\mathbf{M}_e]$  est la matrice de masse élémentaire. Leurs expressions sont données dans l'annexe A.3. Comme dans la section 2.3.3, le problème assemblé conduit au problème non linéaire aux valeurs propres complexes :

$$([\mathbf{K}(\omega)] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{ \mathbf{q} \} = 0, \quad (2.101)$$

dont les valeurs propres complexes  $\omega^2$  obtenues permettent de déterminer les fréquences propres  $\Omega$  de la plaque ainsi que les facteurs de perte  $\eta$  associés par la relation de DiTaranto et McGraw (1969) :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta). \quad (2.102)$$

Cet élément fini a été ensuite validé par Koutsawa *et al.* (2008f) sur une plaque sandwich dont les propriétés mécaniques et géométriques sont :  $h_1 = h_3 = 0.762$  mm,  $\rho_1 = \rho_3 = 2737$  kg m<sup>-3</sup>,  $E_1 = E_3 = 68.9$  GPa,  $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$ ,  $h_2 = 0.254$  mm,  $\rho_2 = 999$  kg m<sup>-3</sup>,  $\mu_2 = 0.896$  MPa,  $\eta_2 = 0.5$ ,  $a = 0.348$  m,  $b = 0.3048$  m. Dans cet exemple, les propriétés mécaniques de la couche VE ont des valeurs complexes constantes. Donc, nous

pouvons utiliser la fonction `eig` de MATLAB pour résoudre le problème (2.101). La plaque est considérée premièrement en appui simple sur ses quatre extrémités. Les résultats sont comparés aux résultats analytiques de [Cupial et Niziol \(1995\)](#) dans le tableau 2.2.

Modes	Cupial et Niziol		Modèle EF	
	$\Omega$ (Hz)	$\eta$	$\Omega$ (Hz)	$\eta$
1	60.30	0.190	58.05	0.172
2	115.40	0.203	113.81	0.196
3	130.60	0.199	129.31	0.195
4	178.70	0.181	176.22	0.177
5	195.70	0.174	194.44	0.173
Erreur Max (%)	Ref.	Ref.	3.73	9.47
Erreur Min (%)	Ref.	Ref.	0.64	0.57

TAB. 2.2 – Comparaison des résultats analytiques et éléments finis : appui simple.

De même, dans le cas où les extrémités de la plaque sont libres, les résultats sont comparés à ceux de [Zhang et Sainsbury \(2000\)](#) qui ont utilisé la méthode GEM (Galerkin Elements Method). Les résultats sont présentés dans le tableau 2.3.

Modes	(GEM) Zhang et Sainsbury		Modèle EF	
	$\Omega$ (Hz)	$\eta$	$\Omega$ (Hz)	$\eta$
1	44.947	0.1449	44.708	0.1230
5	104.600	0.1963	105.142	0.1750
10	192.663	0.1952	193.652	0.1857
15	295.864	0.1669	297.066	0.1586
20	363.515	0.1410	360.681	0.1378
25	448.346	0.1245	450.971	0.1228
30	538.757	0.1032	528.286	0.1042
35	653.157	0.0936	647.516	0.0893
40	703.382	0.0824	698.815	0.0860
50	898.633	0.0684	892.689	0.0681

TAB. 2.3 – Comparaisons des résultats numériques : bords libres.

Ces résultats montrent que le modèle d'élément fini plaque sandwich proposé permet de bien étudier les propriétés modales des structures plaques sandwich VE. De plus, l'avantage de ce modèle est qu'il permet de simuler différentes conditions aux limites en modifiant la valeur des rigidité des ressorts aux bords de la plaque. Ce modèle est

également capable de prendre en compte l'effet des propriétés mécaniques et géométriques du matériau VE aux bords de la plaque dans l'étude des propriétés modales de cette dernière.

## 2.6 Structures sandwich VE et amortissement, oui mais...

Dans ce chapitre nous avons étudié les comportements statique, vibratoire et acoustique des structures sandwich Verre/PVB/Verre. Les études nous ont montré qu'en général les structures sandwich présentent de très bonnes caractéristiques amortissantes. Nous avons montré qu'il est possible d'ajuster les paramètres géométriques et mécaniques de la structure pour obtenir un niveau d'amortissement escompté. Toutefois, il est indéniable que les capacités amortissantes de ces structures ont des limites que l'on ne peut jamais dépasser. Pour donc pousser plus loin ses limites, il est nécessaire d'agir sur les matériaux constitutifs du sandwich car il est bien connu que l'incorporation des hétérogénéités dans des matériaux viscoélastiques permet d'améliorer leurs propriétés d'amortissement ([Jarzynski, 1990](#)). Ainsi, dans la suite de ce travail, nous montrons certaines voies pour améliorer les capacités d'amortissement des matériaux VE. Notamment nous explorons des moyens pour concevoir de tels matériaux en utilisant dans un premier temps les outils de la micromécanique classique de [Eshelby](#) (cf. Chapitres 3 et 4). Dans un second temps, nous descendons à l'échelle des nanomètres pour chercher les effets de taille et d'excès d'énergie de surface/d'interface sur certaines propriétés des matériaux composites (cf. Chapitre 6).

# CHAPITRE 3

## HÉTÉROGÉNÉITÉS MULTI-ENROBÉES ET AMORTISSEMENT

**N**ous présentons dans ce chapitre l'extension du modèle micromécanique de [Lipinski et al. \(2006\)](#) dans le domaine quasi-statique pour étudier les propriétés des matériaux composites viscoélastiques contenant des hétérogénéités viscoélastiques multi-enrobées. Les résultats présentés montrent que par un choix adéquat des phases du composite, les ingénieurs peuvent concevoir des matériaux ayant une très bonne rigidité et un bon pouvoir amortissant dans toutes les gammes de fréquences. L'effet de forme sur les propriétés viscoélastiques est également présenté sur un exemple simple. Le comportement de rigidité négative, peu courante, introduit par [Lakes \(2001a\)](#) se révèle la piste la mieux indiquée pour améliorer simultanément et d'une manière extrême la rigidité et le facteur d'amortissement des composites viscoélastiques.

## Sommaire

---

<b>3.1 Motivations et objectifs</b> . . . . .	<b>109</b>
<b>3.2 Présentation et mise en œuvre du modèle</b> . . . . .	<b>111</b>
3.2.1 Equation intégrale et localisation . . . . .	114
3.2.2 Homogénéisation et comportement VE effectif . . . . .	124
<b>3.3 Matériaux isotropes et géométrie sphérique</b> . . . . .	<b>126</b>
<b>3.4 Sur la validation du modèle en élasticité linéaire</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>3.5 Sur l'implémentation numérique du modèle</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>3.6 Exemples d'applications aux composites VE</b> . . . . .	<b>129</b>
3.6.1 Matériaux composites VE à deux phases . . . . .	130
3.6.2 Un exemple de composite VE à trois phases . . . . .	137
3.6.3 Composite à deux phases et inclusions à rigidité négative . . . . .	141
3.6.4 Effet de forme sur les propriétés VE . . . . .	145
<b>3.7 Conclusions et questions de recherche</b> . . . . .	<b>150</b>

---

### 3.1 Motivations et objectifs

Dans le chapitre 1, nous avons présenté la science des matériaux qu'est la micromécanique ainsi que certains travaux significatifs dans cette discipline. Dans le domaine statique (homogénéisation micromécanique) nous pouvons citer par exemple les travaux de [Hervé et Zaoui \(1993\)](#); [Cherkaoui et al. \(1994\)](#); [Lipinski et al. \(2006\)](#) et dans le domaine quasi-statique (homogénéisation basée sur la dispersion des ondes) les travaux de [Gaunard et Überall \(1982, 1978\)](#); [Kuster et Toksöz \(1974\)](#) sont des exemples représentatifs. Les diverses techniques d'homogénéisation approximent le comportement macroscopique en modélisant les processus physiques à l'échelle microscopique et en appliquant des techniques de champs moyens pour arriver à un comportement effectif (homogénéisé). L'approche de [Gaunard et Überall](#) utilisée dans les travaux de [Kerr \(1992\)](#); [Anson et Chivers \(1993, 1989\)](#); [Baird et al. \(1999\)](#) est basée sur la propagation des ondes élastiques dans les milieux hétérogènes. Cette approche est limitée aux cas où la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde incidente est très grande devant la dimension caractéristique  $a$  des hétérogénéités. Les mêmes restrictions sont également appliquées à l'approche de [Kuster et Toksöz \(1974\)](#). Ces approches d'homogénéisation basées sur le phénomène de dispersion des ondes dans le domaine quasi-statique ont été exploitées dans plusieurs domaines allant de la géophysique ([Kuster et Toksöz, 1974](#)) aux ultrasons ([Baird et al., 1999](#)). L'approche de [Gaunard et Überall](#) a encore l'avantage de tenir compte du phénomène de résonance des hétérogénéités qui est souvent important même dans le domaine quasi-statique ([Baird et al., 1999](#); [Gaunard et Überall, 1982, 1978](#)). Cependant la mise en œuvre de ces techniques d'homogénéisation basées sur la dispersion des ondes est extrêmement difficile voire impossible lorsque les hétérogénéités sont non-sphériques et/ou les phases sont anisotropes. Ces approches sont donc limitées à certaines applications particulières. En revanche, l'approche micromécanique n'est pas limitée aux complexités présentées par l'anisotropie des phases ou leur morphologie. Le principe de correspondance élastique-viscoélastique ([Hashin, 1970a,b](#); [Lakes, 1998](#)) et des arguments sur l'énergie de

déformation (Ungar et Kerwin, 1962) suggèrent que le comportement amortissant des composites viscoélastiques peut être bien approximé par les méthodes micromécaniques. C'est dans cette logique que Haberman *et al.* (2002, 2006); Haberman (2007) ont utilisé et adapté le modèle micromécanique de Cherkaoui *et al.* (1994) dans le domaine quasi-statique pour approximer le comportement amortissant macroscopique des composites viscoélastiques en fonction de la fréquence. La comparaison des résultats de Haberman (2007) avec des résultats expérimentaux de Baird *et al.* (1999) a confirmé que les modèles micromécaniques peuvent être exploités pour explorer diverses microstructures dans la conception des matériaux amortissants. Étant donné que le modèle de Cherkaoui *et al.* (1994) est basé sur l'hypothèse d'enrobage mince, les travaux de Haberman sont restreints aux microstructures avec des enrobages minces. Pour dépasser cette restriction de couche enrobée mince, Lipinski *et al.* (2006) ont revu le modèle initial de Cherkaoui *et al.* (1994) pour l'étendre au cas des composites élastiques contenant des hétérogénéités ellipsoïdales multi-enrobées. Dans le cas des hétérogénéités sphériques, Barhdadi (2005) a retrouvé les résultats de Hervé et Zaoui (1993). Dans les travaux de Barhdadi (2005); Barhdadi *et al.* (2007), bien que le problème soit modélisé dans le cas général d'hétérogénéités multi-enrobées non-homothétiques, les expérimentations numériques ont porté sur le cas de comportement isotrope et d'hétérogénéités sphériques où une solution semi-analytique a été possible.

Partant donc des conclusions intéressantes des travaux de Haberman (2007) et également des limites du modèle qu'il a exploité, nous nous proposons d'explorer d'autres microstructures pour des applications d'amortissement en prenant comme repère les travaux de Barhdadi (2005). Ainsi donc, nous présentons dans ce chapitre une approche micromécanique des composites viscoélastiques contenant des hétérogénéités viscoélastiques multi-enrobées dans le domaine quasi-statique.

## 3.2 Présentation et mise en œuvre du modèle

D’une façon générale, les modèles micromécaniques sont basés sur deux étapes distinctes (Mura, 1987) :

1. l’étape de la localisation qui détermine la relation entre les champs microscopiques (locaux) et les champs macroscopiques (globaux),
2. l’étape d’homogénéisation qui utilise les techniques des champs moyens pour approximer le comportement macroscopique.

L’étape de localisation est essentiellement basée sur la méthode d’inclusion équivalente de Eshelby (1957). L’approche de Eshelby est modifiée ici en résolvant une équation intégrale pour le champ des déplacements à chaque point dans un milieu de référence homogène infini. L’équation intégrale de ce travail provient de la fonction de Green reliant le contraste entre les rigidités du milieu de référence et l’hétérogénéité composite (hétérogénéité et les enrobages) au champ des déplacements à chaque point de l’espace (Zeller et Dederichs, 1973; Berveiller *et al.*, 1987; Eshelby, 1961). Cette équation intégrale est utilisée conjointement avec les opérateurs interfaciaux pour transformer ce problème d’hétérogénéité multi-enrobée en un problème simple d’hétérogénéité dans un milieu de référence infini et ainsi nous trouvons la solution pour le problème complexe de multi-enrobage (Hill, 1983; Walpole, 1967). La première exigence pour déterminer l’équation intégrale est la définition du volume élémentaire représentatif (VER) qui est supposé représenter le composite réel étudié (Mura, 1987). Le VER de ce problème (cf. figure 3.1) est constitué d’une hétérogénéité ellipsoïdale occupant un volume  $V_1$  et dont le comportement est décrit par le tenseur des modules viscoélastiques complexes  $\hat{\mathbf{C}}^1$ . Cette hétérogénéité est entourée par  $(n - 1)$  couches constituées d’autres matériaux viscoélastiques décrites par leur tenseur de modules complexes  $\hat{\mathbf{C}}^i$  et occupant un volume  $V_i$ ,  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ . L’hétérogénéité multi-enrobée ainsi constituée que nous appelons par la suite “hétérogénéité composite”, est plongée dans une matrice également constituée d’un matériau viscoélastique dont le

comportement est décrit par  $\hat{\mathbf{C}}^0$ . Dans tout le développement qui suit, les tenseurs des

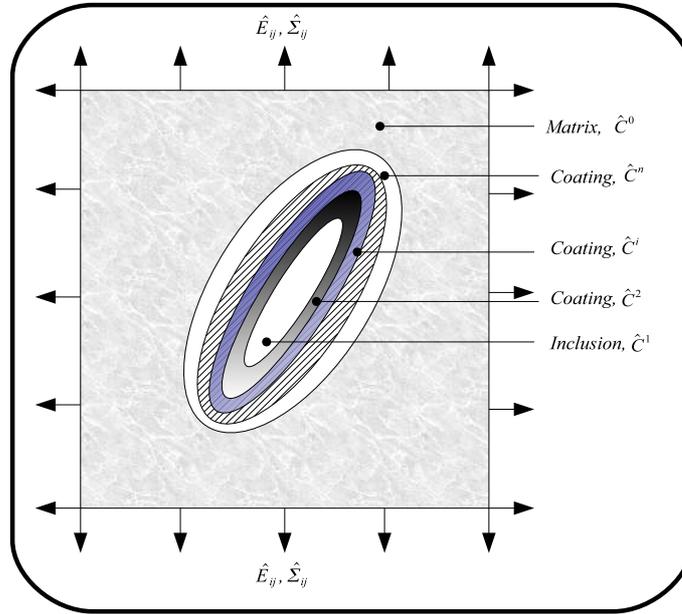


FIG. 3.1 – Topologie de l'hétérogénéité multi-enrobée.

modules viscoélastiques des différentes phases dépendent de la fréquence et sont mathématiquement des nombres complexes. Notons qu'une telle dépendance en fréquence peut être approximée soit par des modèles de matériaux à savoir le modèle de Kelvin-Voigt, le modèle de Zener, le modèle de Maxwell, le modèle de Maxwell généralisé etc., ou soit à partir des données expérimentales par identification des paramètres [Havriliak et Negami \(1966\)](#). Pour cette présente modélisation, la représentation exacte de dépendance en fréquence n'est pas très importante. Il est juste important de noter que le modèle n'a aucune restriction quant au comportement des différentes phases viscoélastiques. La convention suivante est employée dans la suite des développements. Toute grandeur complexe dépendante de la fréquence  $\hat{\mathbf{X}}$  est représentée par l'une des expressions équivalentes suivantes :

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}(\omega) = \hat{\mathbf{X}}^R(\omega) + i\hat{\mathbf{X}}^I(\omega) = \hat{\mathbf{X}}^R(\omega) \left[ 1 + i\eta_X(\omega) \right], \quad (3.1)$$

où  $\omega$  est la fréquence et  $i = \sqrt{-1}$ . Notons par ailleurs que tous les développements sont limités à la viscoélasticité linéaire et à la théorie des petites perturbations. De plus, nous supposons que les interfaces matrices/hétérogénéité, hétérogénéités/enrobage, enrobage/enrobage sont parfaites assurant ainsi la continuité de la traction et des déplacements à travers ces dernières. L'une des hypothèses restrictives de ce modèle dans le domaine fréquentiel est la théorie des petites perturbations (Hashin, 1970a) qui suppose négligeables les effets d'inertie dans le composite. Ainsi, l'équation d'équilibre locale, en l'absence des forces de volume, s'écrit :

$$\hat{\sigma}_{ij,j} - \rho \underbrace{\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial t^2}}_{\approx 0} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}_{ij,j} = 0. \quad (3.2)$$

C'est cette approximation qui limite les modèles micromécaniques au domaine quasi-statique. Ce dernier est défini par le rapport entre la longueur d'onde de l'onde incidente et la dimension caractéristique des hétérogénéités. Ce rapport est habituellement exprimé à travers la quantité sans dimension  $ka$  où  $a$  représente la plus grande dimension de l'hétérogénéité et  $k$  est le nombre d'onde. Le domaine quasi-statique est limité alors aux fréquences pour lesquelles  $ka \ll 1$  (Blackstock, 2000; Haberman, 2007). Ainsi donc, pour les fréquences où  $ka \approx 1$  ou  $ka \gg 1$ , les modèles micromécaniques basés sur les théories des champs de contraintes/déformations moyens ne sont plus valides. Pour cette gamme de fréquences, ces modèles micromécanique négligent le mécanisme physique de dispersion et par conséquent, les approches d'homogénéisation basées sur les dispersions simples ou multiples doivent être utilisées (Gaunard et Überall, 1982, 1978; Kuster et Toksöz, 1974; LeGonidec *et al.*, 2002). Cependant, malgré cette limitation, les modèles micromécaniques fournissent une bonne approximation du comportement dépendant de la fréquence des composites viscoélastiques lorsqu'ils sont utilisés dans les gammes de fréquences correctes (Haberman, 2007). Cette remarque rend la modélisation micromécanique dans le domaine quasi-statique très intéressante pour des applications dans les stratégies de conception des

matériaux multifonctionnels.

### 3.2.1 Equation intégrale et localisation

Dans leur approche, [Zeller et Dederichs \(1973\)](#) ont proposé de modéliser le matériau composite schématisé par la figure 3.1 comme un matériau homogène dont les propriétés élastiques (ici viscoélastiques) varient dans l'espace. En partant de ce concept, le comportement local est dicté par la loi de comportement en chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace. La loi de comportement viscoélastique linéaire dans le domaine de Carson est identique à la loi de Hooke pour un comportement élastique linéaire (cf. § 1.1.1). Ainsi la loi de comportement viscoélastique linéaire en chaque point  $\mathbf{r}$  de l'espace s'écrit alors :

$$\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) = \hat{C}_{ijkl}(\mathbf{r})\hat{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

L'approche proposée par [Zeller et Dederichs \(1973\)](#) suppose que les propriétés locales du matériau peuvent être approximées par les propriétés  $\hat{\mathbf{C}}^0$  du matériau de référence supposées indépendantes de la position  $\mathbf{r}$  dans l'espace, auxquelles s'ajoutent des fluctuations  $\delta\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{r})$  dépendantes de la position. Mathématiquement, ceci s'écrit :

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{C}}^0 + \delta\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V \quad (3.4)$$

où  $V$  est le volume du milieu homogène. Le but de cette partie est de trouver les tenseurs de localisation des déformations dans chaque phase de l'hétérogénéité composite lorsqu'un champ des déplacements macroscopique  $\hat{u}_i^d = \hat{E}_{ij}\hat{x}_j$  est imposé sur la frontière extérieure  $S$  du milieu de référence ( $\hat{E}_{ij}$  étant la déformation macroscopique imposée,  $\hat{x} \in S$ ). L'étape de localisation commence par les équations pour les champs de contraintes et de déformations en tout point du matériau. Le champ des déformations s'écrit à partir du champ

des déplacements, dans l'hypothèse des petites perturbations, comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\hat{u}_{i,j}(\mathbf{r}) + \hat{u}_{j,i}(\mathbf{r})]. \quad (3.5)$$

En insérant les relations (3.5), (3.4) et (3.3) dans l'équation d'équilibre (3.2), nous obtenons :

$$\hat{C}_{ijkl}^0 \hat{u}_{k,lj}(\mathbf{r}) = \left[ -\delta \hat{C}_{ijkl}(\mathbf{r}) \hat{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{r}) \right]_{,j}. \quad (3.6)$$

Le terme de droite de l'équation (3.6) est semblable à une force de volume fictive. Ainsi donc, cette nouvelle forme de l'équation d'équilibre suggère sa résolution en passant par le formalisme des fonctions de Green. En suivant les développements de [Zeller et Dederichs \(1973\)](#); [Eshelby \(1961\)](#), nous obtenons une équation simplifiée pour le champ des déformations à chaque point du matériau :

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}} - \int_V \hat{\Gamma}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') : \delta \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{r}') : \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3.7)$$

Dans l'équation (3.7),  $\hat{\Gamma}_{ijkl}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  représente le tenseur d'ordre quatre de Green modifié. Ce tenseur est relié au tenseur du second ordre  $\hat{G}_{ij}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  de Green par la relation :

$$\hat{\Gamma}_{ijkl}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \left[ \hat{G}_{ki,jl}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \hat{G}_{kj,il}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]. \quad (3.8)$$

Le terme de fluctuation des constantes viscoélastiques par rapport aux constantes viscoélastiques du milieu de référence est donné par :

$$\delta \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^n \Delta \hat{\mathbf{C}}^{(k/0)} \theta_k(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

où  $\Delta\hat{\mathbf{C}}^{(k/0)} = (\hat{\mathbf{C}}^k - \hat{\mathbf{C}}^0)$ . La fonction caractéristique  $\theta_k(\mathbf{r})$  de la phase  $k$  ( $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ), occupant le volume  $V_k$ , est définie par :

$$\theta_k(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{r} \in V_k \\ 0 & \forall \mathbf{r} \notin V_k \end{cases}. \quad (3.10)$$

Dans la suite, nous notons  $V_I$  le volume de l'inclusion composite I constituée de l'inclusion et des  $(n - 1)$  couches d'enrobage. La fraction volumique  $\varphi_k$  de la phase  $k$  et de volume  $V_k$  est définie par :

$$\varphi_k = \frac{V_k}{V_I}, \quad \text{avec} \quad V_I = \sum_{k=1}^n V_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.11)$$

Dans l'équation intégrale (3.7), il apparaît le tenseur dit de polarisation :

$$\hat{\tau}_{kl}(\mathbf{r}) = \delta C_{klmn}(\mathbf{r}) \hat{\varepsilon}_{mn}(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Clairement, la détermination du tenseur de polarisation  $\hat{\tau}_{kl}(\mathbf{r})$  dans l'inclusion composite I et dans le milieu de référence est très complexe. Nous remarquons que, par construction,  $\delta\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{r})$  est nul dans le milieu de référence. Par conséquent  $\hat{\tau}_{kl}(\mathbf{r})$  est également nul dans le milieu de référence. Une approximation de  $\hat{\tau}_{kl}(\mathbf{r})$  est (Lipinski *et al.*, 2006) :

$$\hat{\tau}_{ij}(\mathbf{r}) = \theta_I(\mathbf{r}) \hat{\tau}_{ij}^I, \quad (3.13)$$

avec :

$$\hat{\tau}_{ij}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \hat{\tau}_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.14)$$

Dans l'expression (3.13),  $\theta_I(\mathbf{r})$  est la fonction caractéristique de l'inclusion composite I, c'est-à-dire :

$$\theta_I(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{r} \in V_I \\ 0 & \forall \mathbf{r} \notin V_I \end{cases}. \quad (3.15)$$

En utilisant les formules (3.12) et (3.13) dans l'équation intégrale (3.7), nous obtenons :

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = \hat{E}_{ij} - \int_{V_I} \hat{\Gamma}_{ijkl}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\tau}_{kl}^I d\mathbf{r}'. \quad (3.16)$$

La moyenne du champ de déformation dans l'inclusion composite I est définie par :

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \hat{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.17)$$

Ainsi donc, à partir de la formule (3.16), la déformation moyenne dans l'inclusion composite I ( $\hat{\varepsilon}_{ij}^I$ ) se calcule simplement par la formule (3.18) en utilisant une notation tensorielle :

$$\hat{\varepsilon}^I = \hat{\mathbf{E}} - \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \hat{\mathbf{\Gamma}}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') : \hat{\boldsymbol{\tau}}^I d\mathbf{r}' d\mathbf{r}. \quad (3.18)$$

En introduisant le tenseur d'ordre quatre suivant :

$$\hat{T}_{ijkl}^I(\hat{\mathbf{C}}^0) = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \hat{\Gamma}_{ijkl}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}, \quad (3.19)$$

qui est la valeur moyenne du tenseur de Green modifié, nous pouvons réécrire le champ moyen de déformation dans l'inclusion composite I comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^I = \hat{E}_{ij} - \hat{T}_{ijkl}^I(\mathbf{C}^0) \hat{\tau}_{kl}^I. \quad (3.20)$$

En utilisant la formule (3.9) et les propriétés de la fonction caractéristique  $\theta_k(\mathbf{r})$  de chaque phase  $k$ , nous pouvons évaluer  $\hat{\tau}_{kl}^I$  comme suit :

$$\hat{\tau}_{ij}^I = \sum_{k=1}^n \varphi_k \Delta \hat{C}_{ijmn}^{(k/0)} \hat{\varepsilon}_{mn}^k, \quad (3.21)$$

où :

$$\hat{\varepsilon}_{mn}^k = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \hat{\varepsilon}_{mn}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.22)$$

Nous pouvons alors réécrire (3.20) en notation tensorielle comme suit :

$$\hat{\varepsilon}^I = \hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{T}}^I(\mathbf{C}^0) : \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k \Delta \mathbf{C}^{(k/0)} : \hat{\varepsilon}^k \right). \quad (3.23)$$

A ce point, si nous pouvons trouver des tenseurs de concentration de déformations locaux  $\hat{\mathbf{a}}^k$  tels que :

$$\hat{\varepsilon}^k = \hat{\mathbf{a}}^k : \hat{\varepsilon}^I, \quad (3.24)$$

alors le tenseur de localisation des déformations global  $\hat{\mathbf{A}}^I$  défini par la relation suivante :

$$\hat{\varepsilon}^I = \hat{\mathbf{A}}^I : \hat{\mathbf{E}}, \quad (3.25)$$

peut être facilement évalué comme suit :

$$\hat{\mathbf{A}}^I = \left[ \mathbf{I}_4 + \hat{\mathbf{T}}^I(\mathbf{C}^0) : \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k \Delta \mathbf{C}^{(k/0)} : \hat{\mathbf{a}}^k \right) \right]^{-1}, \quad (3.26)$$

avec  $\mathbf{I}_4$ , le tenseur identité d'ordre quatre. [Lipinski et al. \(2006\)](#) ont proposé une méthodologie pour évaluer les tenseurs de concentration de déformations locaux  $\hat{\mathbf{a}}^k$ . En un premier temps, il s'agit d'introduire d'autres tenseurs de concentration de déformations locaux  $\hat{\mathbf{A}}^k$

définis par :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k = \hat{\mathbf{A}}^k : \hat{\mathbf{E}}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.27)$$

Nous obtenons alors les relations suivantes à partir des formules (3.24), (3.25) et (3.27) :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}}^k &= \hat{\mathbf{a}}^k : \hat{\mathbf{A}}^I, \\ \hat{\mathbf{A}}^I &= \langle \hat{\mathbf{A}}^k \rangle = \sum_{k=1}^n (\varphi_k \hat{\mathbf{A}}^k), \\ \mathbf{I}_4 &= \langle \hat{\mathbf{a}}^k \rangle = \sum_{k=1}^n (\varphi_k \hat{\mathbf{a}}^k). \end{cases} \quad (3.28)$$

Signalons qu'ici la notation  $\langle \hat{\boldsymbol{\zeta}} \rangle$  signifie la moyenne de la quantité  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$  sur le volume entier  $V_I$  de l'inclusion composite I.

La troisième équation de l'expression (3.28) constitue une équation du problème posé comme fonction des  $n$  tenseurs de localisation locaux  $\hat{\mathbf{a}}^k$ . Il nous reste alors à déterminer les  $(n - 1)$  autres équations pour résoudre complètement notre problème de localisation. Ces dernières peuvent être obtenues en utilisant les conditions de raccord aux interfaces entre les différentes phases de l'inclusion composite.

Les opérateurs interfaciaux constituent de très bons outils mathématiques qui permettent de déterminer les sauts de contraintes ou de déformations à travers l'interface de deux matériaux différents. Ces opérateurs sont mis en œuvre en posant les conditions de continuité des déplacements et de la traction à travers l'interface : nous sommes alors dans l'hypothèse d'interface parfaite.

Nous commençons la mise en œuvre des opérateurs interfaciaux par le cas général de deux solides  $k$  et  $(k + 1)$  ayant des tenseurs de modules VE  $\hat{\mathbf{C}}^k$  et  $\hat{\mathbf{C}}^{k+1}$  et séparés par une surface de normale unitaire  $\mathbf{N}$  dirigée de la phase  $k$  vers la phase  $(k + 1)$  (voir figure 3.2). En utilisant les constantes VE des deux phases ( $\hat{\mathbf{C}}^k$  et  $\hat{\mathbf{C}}^{k+1}$ ), le saut de déformations à

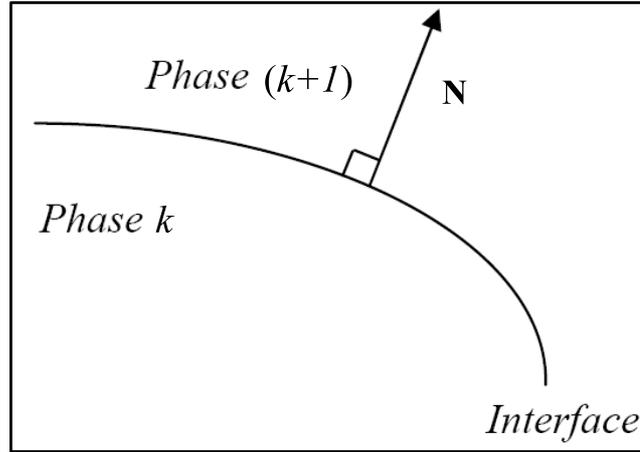


FIG. 3.2 – Interface entres deux phases du composites.

travers l'interface est donné par [Walpole \(1981\)](#) comme suit :

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{k+1}(\mathbf{r}) - \hat{\varepsilon}_{ij}^k(\mathbf{r}) = \hat{P}_{ijmn}^{k+1} \Delta C_{mnpq}^{(k/k+1)} \hat{\varepsilon}_{pq}^k(\mathbf{r}), \quad (3.29)$$

où :

$$\Delta \mathbf{C}^{(k/k+1)} = \mathbf{C}^k - \mathbf{C}^{k+1}, \quad (3.30)$$

et  $\hat{P}_{ijmn}^{k+1}$  est l'opérateur interfacial qui ne dépend que des propriétés des matériaux et de la normale unitaire  $\mathbf{N}$ . Il est défini comme suit :

$$\hat{P}_{ijmn}^{k+1} = \frac{1}{2} \left[ \left( \hat{h}^{k+1} \right)_{im}^{-1} N_j N_n + \left( \hat{h}^{k+1} \right)_{jm}^{-1} N_i N_n \right], \quad (3.31)$$

où :

$$\hat{h}_{ip}^{k+1} = \hat{C}_{ijpq}^{k+1} N_j N_q, \quad (3.32)$$

est la matrice de Christoffel.

Nous obtenons ainsi les expressions suivantes qui relient les champs de déformations

des phases  $k$  et  $(k + 1)$  en notation tensorielle :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k+1}(\mathbf{r}) &= \left[ \mathbf{I}_4 + \hat{\mathbf{P}}^{k+1} : \Delta \mathbf{C}^{(k/k+1)} \right] : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(\mathbf{r}), \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^k(\mathbf{r}) &= \left[ \mathbf{I}_4 + \hat{\mathbf{P}}^k : \Delta \mathbf{C}^{(k+1/k)} \right] : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k+1}(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (3.33)$$

A ce point, nous introduisons des notations qui seront utilisées dans la suite :

$$\Omega_j = \bigcup_{k=1}^j V_k, \quad \Delta \hat{\mathbf{C}}^{(p/q)} = \hat{\mathbf{C}}^p - \hat{\mathbf{C}}^q. \quad (3.34)$$

Nous appliquons la formule (3.33) à l'inclusion (phase  $k = 1$ ) et au premier enrobage (phase  $k = 2$ ). En prenant la valeur moyenne de la déformation dans cet enrobage et en substituant  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1(\mathbf{r})$  par sa valeur moyenne  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1$ , nous obtenons :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \left[ \mathbf{I}_4 + \hat{\mathbf{T}}^2(\mathbf{C}^2) : \Delta \mathbf{C}^{(1/2)} \right] : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \quad (3.35)$$

où :

$$\hat{\mathbf{T}}^2(\mathbf{C}^2) = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \hat{\mathbf{P}}^2 d\mathbf{r}. \quad (3.36)$$

Cherkaoui *et al.* (1994) avaient montré que :

$$\hat{\mathbf{T}}^2(\mathbf{C}^2) = \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_1}(\mathbf{C}^2) - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \left[ \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_2}(\mathbf{C}^2) - \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_1}(\mathbf{C}^2) \right]. \quad (3.37)$$

Les tenseurs d'interaction  $\hat{\mathbf{T}}^{\Omega_j}(\mathbf{C}^2)$  de la formule (3.37) sont définies par :

$$\hat{\mathbf{T}}^{\Omega_j}(\mathbf{C}^2) = \frac{1}{V_{\Omega_j}} \int_{V_{\Omega_j}} \int_{V_{\Omega_j}} \hat{\mathbf{T}}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad j = 1, 2. \quad (3.38)$$

Puisque ces tenseurs d'interaction ne dépendent pas de la taille mais plutôt de la forme (cf. l'annexe B), il est évident que nous ayons les égalités suivantes dans le cas d'inclusions

enrobées homothétiques :

$$\hat{\mathbf{T}}^2(\mathbf{C}^2) = \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_1}(\mathbf{C}^2) = \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_2}(\mathbf{C}^2). \quad (3.39)$$

Ainsi donc, à partir des relations (3.35) et (3.37), nous obtenons une première relation de localisation locale :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \quad (3.40)$$

où le tenseur d'ordre quatre  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)}$  est défini par :

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)} = \mathbf{I}_4 + \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_1 : \Delta \mathbf{C}^{(1/2)}, \quad (3.41)$$

avec bien sûr :

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_1 = \left( \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_1}(\mathbf{C}^2) - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \left[ \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_2}(\mathbf{C}^2) - \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_1}(\mathbf{C}^2) \right] \right). \quad (3.42)$$

Nous obtenons à partir de la formule (3.24) :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)} : \hat{\mathbf{a}}^1 : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^1, \quad (3.43)$$

c'est-à-dire :

$$\hat{\mathbf{a}}^2 = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)} : \hat{\mathbf{a}}^1. \quad (3.44)$$

La première équation de nos  $(n - 1)$  équations manquantes pour déterminer les  $n$  tenseurs de localisation locaux  $\hat{\mathbf{a}}^k$  est ainsi obtenue. Il reste maintenant à déterminer les  $(n - 2)$  dernières équations.

Les mêmes raisonnements peuvent s'appliquer à l'interface entre les enrobages 2 et

3 pour obtenir le tenseur de localisation local  $\hat{\mathbf{a}}^3$  en évaluant le saut de déformation à travers la région  $\Omega_2$  et l'enrobage 3. Par quelques manipulations algébriques, on obtient la relation suivante (Barhdadi, 2005, page 56) :

$$\hat{\mathbf{a}}^3 = \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/3)} \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(2/3)} : \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)} \right) : \hat{\mathbf{a}}^1, \quad (3.45)$$

où :

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(k/3)} = \mathbf{I}_4 + \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_2 : \Delta \mathbf{C}^{(k/3)}, \quad \text{pour } k = 1, 2, \quad (3.46)$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_2 = \left( \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_2}(\mathbf{C}^3) - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_3} \left[ \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_3}(\mathbf{C}^3) - \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_2}(\mathbf{C}^3) \right] \right), \quad (3.47)$$

puis

$$\hat{\mathbf{T}}^{\Omega_p}(\mathbf{C}^q) = \frac{1}{V_{\Omega_p}} \int_{V_{\Omega_p}} \int_{V_{\Omega_p}} \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad \text{pour } p = 2, 3, \quad q = 3. \quad (3.48)$$

En poursuivant les calculs, on abouti à une relation de récurrence permettant d'évaluer  $\hat{\mathbf{a}}^k$  en fonction de  $\hat{\mathbf{a}}^1$  par l'intermédiaire d'un tenseur d'ordre quatre que nous désignerons  $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^k$  et défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\Pi}}^1 = \mathbf{I}_4, \\ \hat{\boldsymbol{\Pi}}^2 = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)}, \\ \forall k, \hat{\mathbf{a}}^k = \hat{\boldsymbol{\Pi}}^k : \hat{\mathbf{a}}^1. \end{array} \right. \quad (3.49)$$

L'analyse de l'interface entre la région  $\Omega_k$  et l'enrobage  $(k + 1)$  a permit d'obtenir la

formule de récurrence suivante pour calculer  $\hat{\Pi}^k$  (Barhdadi, 2005, page 57) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Pi}^k = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} (\varphi_j \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(j/k)} : \hat{\Pi}^j)}{\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j}, \\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(j/k)} = \mathbf{I}_4 + \left( \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_{k-1}}(\mathbf{C}^k) - \frac{\sum_{n=1}^{k-1} \varphi_n \Delta \hat{\mathbf{T}}^k}{\varphi_k} \right) : \Delta \mathbf{C}^{(j/k)}, \\ \Delta \hat{\mathbf{T}}^k = \left[ \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_k}(\mathbf{C}^k) - \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_{k-1}}(\mathbf{C}^k) \right], \\ \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_p}(\mathbf{C}^k) = \frac{1}{V_{\Omega_p}} \int_{V_{\Omega_p}} \int_{V_{\Omega_p}} \hat{\Gamma}^k(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Nous rappelons ici que dans le cas d'inclusions enrobées homothétiques,  $\Delta \hat{\mathbf{T}}^k = 0$ .

Toutes les  $n$  équations sont ainsi déterminées pour évaluer les tenseurs de localisation locaux  $\hat{\mathbf{a}}^k$ . En faisant recours à la troisième formule de l'expression (3.28), nous obtenons alors la formule permettant d'évaluer  $\hat{\mathbf{a}}^1$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_4 = \langle \hat{\mathbf{a}}^k \rangle = \sum_{k=1}^n (\varphi_k \hat{\mathbf{a}}^k) = \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k \hat{\Pi}^k \right) : \hat{\mathbf{a}}^1 \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{a}}^1 = \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k \hat{\Pi}^k \right)^{-1}. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Une fois  $\hat{\mathbf{a}}^1$  déterminé, les autres tenseurs de localisation locaux  $\hat{\mathbf{a}}^k$  s'obtiennent facilement à partir des formules de récurrence (3.49) et (3.50). Ceci met fin à l'étape de localisation. Ces tenseurs de localisation locaux  $\hat{\mathbf{a}}^k$  seront ensuite utilisés dans l'étape d'homogénéisation du matériaux composite viscoélastique (cf. § 3.2.2).

### 3.2.2 Homogénéisation et comportement VE effectif

L'étape d'homogénéisation du composite commence en établissant le lien entre la déformation  $\hat{\mathbf{E}}$  et la contrainte  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  macroscopiques. Ceci s'obtient dans le cas des matériaux VE par la loi de Hooke via le principe d'équivalence élastique-viscoélastique :

$$\hat{\Sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{eff}} \hat{E}_{kl}, \quad (3.52)$$

où  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$  est le tenseur effectif des modules VE du composite et :

$$\begin{cases} \hat{\Sigma}_{ij} &= \sum_{k=0}^n \varphi_k \hat{\sigma}_{ij}^k, \\ \hat{E}_{ij} &= \sum_{k=0}^n \varphi_k \hat{\varepsilon}_{ij}^k. \end{cases} \quad (3.53)$$

En utilisant la relation (3.27), la loi de comportement du matériau de chaque phase s'écrit :

$$\hat{\sigma}^k = \hat{\mathbf{C}}^k : \hat{\varepsilon}^k = \hat{\mathbf{C}}^k : \hat{\mathbf{A}}^k : \hat{\mathbf{E}}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}. \quad (3.54)$$

En combinant les équations (3.52), (3.53) et (3.54), le tenseur effectif  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$  s'obtient alors par la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \hat{\mathbf{C}}^0 + \sum_{k=1}^n \varphi_k \left( \hat{\mathbf{C}}^k - \hat{\mathbf{C}}^0 \right) : \hat{\mathbf{A}}^k. \quad (3.55)$$

En supposant que l'inclusion composite I est entourée d'une couche de la matrice et le tout noyé dans le milieu effectif alors, nous pouvons déterminer les tenseurs de concentration de déformation  $\hat{\mathbf{A}}^k$  comme suit (voir les formules (3.26) et (3.28)) :

$$\hat{\mathbf{A}}^k = \hat{\mathbf{a}}^k : \hat{\mathbf{A}}^{\text{I}}, \quad (3.56)$$

avec

$$\hat{\mathbf{A}}^{\text{I}} = \left[ \mathbf{I}_4 + \hat{\mathbf{T}}^{\text{I}}(\mathbf{C}^{\text{eff}}) : \left( \sum_{k=0}^n \varphi_k \hat{\mathbf{C}}^{(k/\text{eff})} : \hat{\mathbf{a}}^k \right) \right]^{-1}, \quad (3.57)$$

et

$$\Delta \hat{\mathbf{C}}^{(k/\text{eff})} = \left( \hat{\mathbf{C}}^k - \hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}} \right). \quad (3.58)$$

Rappelons que les tenseurs  $\hat{\mathbf{a}}^k$  sont tous évalués dans l'étape de localisation (cf. formules (3.49), (3.50) et (3.51)).

### 3.3 Matériaux isotropes et géométrie sphérique

Pour illustrer cette technique de modélisation, nous appliquons le modèle à une configuration où le matériau composite VE est constitué de phases isotropes avec des inclusions enrobées sphériques et concentriques. Dans ce cas spécifique,  $\Delta\hat{\mathbf{T}}^k = 0$  dans la formule de récurrence (3.50). Le tenseur  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(j/k)}$  de la formule (3.50) prend alors la forme simplifiée suivante :

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(j/k)} = \mathbf{I}_4 + \hat{\mathbf{T}}^{\Omega_{k-1}}(\mathbf{C}^k) : \Delta\mathbf{C}^{(j/k)}. \quad (3.59)$$

Dans cette configuration isotrope, tous les tenseurs d'interaction et de localisation définis jusqu'ici sont également isotropes. Cela signifie que si  $\hat{\mathbf{X}}$  est l'un de ces tenseurs alors  $\hat{\mathbf{X}}$  s'écrit :

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{S}_X \mathbf{I}^s + \hat{D}_X \mathbf{I}^d, \quad (3.60)$$

où  $\hat{S}_X$  and  $\hat{D}_X$  sont respectivement les parties sphérique et déviatorique de  $\hat{\mathbf{X}}$  ; les tenseurs d'ordre quatre  $\mathbf{I}^s$  et  $\mathbf{I}^d$  sont définis en fonction du tenseur de Kronecker  $\boldsymbol{\delta}$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{ijkl}^s = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \\ I_{ijkl}^d = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}). \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Ces deux tenseurs ont les propriétés intéressantes suivantes :

$$\mathbf{I}^d : \mathbf{I}^d = \mathbf{I}^d, \quad \mathbf{I}^s : \mathbf{I}^s = \mathbf{I}^s, \quad \mathbf{I}^s : \mathbf{I}^d = \mathbf{I}^d : \mathbf{I}^s = 0. \quad (3.62)$$

Tous les tenseurs d'interaction  $\hat{\mathbf{T}}^{\Omega_{i-1}}(\mathbf{C}^i)$  intervenant dans le calcul des tenseurs  $\hat{\mathbf{a}}^k$  de la formule (3.57) sont tels que :

$$\hat{\mathbf{T}}^{\Omega_{i-1}}(\mathbf{C}^i) = \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{I}}(\mathbf{C}^i), \quad i = \{2, 3, \dots, n\}, \quad (3.63)$$

où  $\hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{I}}(\mathbf{C}^i)$  et  $\mathbf{C}^i$  ont les formes ci-dessus dans une configuration isotrope (Qu et Cherkaoui, 2006) :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{T}}^{\mathbf{I}}(\mathbf{C}^i) &= \frac{1}{3\hat{\kappa}_i + 4\hat{\mu}_i} \mathbf{I}^s + \frac{3(\hat{\kappa}_i + 2\hat{\mu}_i)}{5\hat{\mu}_i(3\hat{\kappa}_i + 4\hat{\mu}_i)} \mathbf{I}^d, \\ \mathbf{C}^i &= 3\hat{\kappa}_i \mathbf{I}^s + 2\hat{\mu}_i \mathbf{I}^d, \end{cases} \quad (3.64)$$

$\hat{\mu}_i$  et  $\hat{\kappa}_i$  étant respectivement les modules de cisaillement et de compressibilité de la  $i^{\text{ème}}$  phase VE. Les expressions des divers tenseurs intervenant dans les calculs sont définis dans l'annexe B.2 dans ce cas d'isotropie et d'inclusions enrobées sphériques.

Le tenseur des modules VE effectif s'obtient à partir de la formule (3.55) avec quelques manipulations algébriques comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\mu}^{\text{eff}} = \hat{\mu}_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_0) \hat{D}_A^i, \\ \hat{\kappa}^{\text{eff}} = \hat{\kappa}_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i (\hat{\kappa}_i - \hat{\kappa}_0) \hat{S}_A^i, \end{cases} \quad (3.65)$$

où  $\hat{D}_A^i$  et  $\hat{S}_A^i$  sont définis dans l'annexe B.2. Les équations (3.65) constituent un système de deux équations non-linéaires à résoudre pour obtenir les modules de cisaillement et de compressibilité effectifs  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$  et  $\hat{\kappa}^{\text{eff}}$ .

### 3.4 Sur la validation du modèle en élasticité linéaire

Barhdadi (2005) a fait plusieurs tests de validation du modèle initial en élasticité linéaire. Dans le cas des composites élastiques à deux phases, Barhdadi a comparé les résultats du modèle avec des résultats expérimentaux de Hsieh *et al.* (2004) et de Hsieh et Tuan

(2005). D'autres tests de validation ont été réalisés dans le cas où  $n = 2$  et  $n = 3$  par Barhdadi *et al.* (2007). Le cas où  $n$  est quelconque avec des géométries sphériques est validé par Barhdadi (2005) en utilisant la solution analytique de Hervé et Zaoui (1993). Plus récemment deux travaux de Master 2 de recherche (Lampoh, 2008; Tognevi, 2008) ont été consacrés au modèle avec des géométries ellipsoïdales en utilisant des modèles éléments finis.

### 3.5 Sur l'implémentation numérique du modèle

Le succès du modèle micromécanique mis en œuvre dépend de la capacité à résoudre numériquement le problème implicite défini par la formule (3.55). Ces équations représentent des relations tensorielles dont la solution doit être trouvée d'une manière implicite. La nature implicite de ce problème requiert un choix rigoureux de la méthode de résolution des systèmes non linéaires pour la détermination du module de rigidité complexe  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$ . Pour le cas d'hétérogénéités sphériques et isotropes noyées dans une matrice isotrope, les propriétés effectives sont également isotropes et le système (3.65) permet de déterminer les deux propriétés effectives du composite VE. Pour le cas général d'anisotropie, le calcul des tenseurs  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(j/k)}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^k$  nécessite l'intégration numérique des tenseurs  $\hat{\mathbf{T}}^{\Omega_p}(\mathbf{C}^k)$  et  $\hat{\mathbf{T}}^{\text{I}}(\mathbf{C}^{\text{eff}})$ . Nous avons utilisé la formule de quadrature de Gauss-Legendre pour les évaluer numériquement. Toutes les implémentations sont effectuées sous MATLAB 7.6 (R2008a). Ainsi, le système d'équations non linéaires (3.55) est résolu dans toutes les configurations par la fonction `fsolve` de l'Optimization Toolbox de MATLAB. Cette routine de MATLAB résout les systèmes d'équations non linéaires  $F(x) = 0$  où  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $x \mapsto F(x)$ . En général  $n = m$  mais `fsolve` supporte aussi  $n > m$  ou  $n < m$ . Sa syntaxe usuelle est `x=fsolve(fun,x0,options)` où `fun` est l'implémentation de la fonction  $F(x)$ , `x0` est la solution initiale pour démarrer les itérations, `options` est une structure contenant les options pour contrôler le processus itératif devant conduire à la solution `x` du système d'équations non linéaires. Dans tous nos calculs, nous avons défini

`options=optimset('MaxIter',2000,'TolFun',1e-14,'MaxFunEvals',2000)`. Pour la solution de départ  $x_0$ , nous avons pris  $C^{\text{eff}}$  de la formule (3.55) avec  $\hat{A}^k = \mathbf{I}_4$ . Dans la pratique, l'expression tensorielle (3.55) est d'abord transformée en une expression vectorielle  $F(x) = 0$  qui est implémentée dans `fun`. Selon l'anisotropie des phases et la géométrie des hétérogénéités du composite VE étudié, le programme utilise l'implémentation de `fun` qui correspond à la configuration du composite. Ainsi, selon la configuration, le matériau effectif peut-être isotrope (2 constantes indépendantes), cubique (3 constantes), isotrope transverse d'axes de symétrie  $x_1$ , ou  $x_2$  ou  $x_3$  (5 constantes), orthotrope (9 constantes) ou le cas d'anisotropie forte (21 constantes). Dans la majorité des cas considérés, la convergence a été bonne dans nos expérimentations numériques. Nous pouvons maintenant présenter quelques résultats issus de l'application du présent modèle micromécanique dans le domaine quasi-statique.

### 3.6 Exemples d'applications aux composites VE

Nous appliquons maintenant le modèle pour prédire le comportement VE d'un certain nombre de matériaux composites VE. Nous considérons, pour ces applications, trois matériaux VE. Le premier matériau est le PVB, la couche centrale des pare-brises d'automobile. Le module de cisaillement complexe dépendant de la fréquence du PVB à 20°C est donné par (Haberman, 2007) :

$$\hat{\mu}(\omega) = \mu_\infty + (\mu^0 - \mu_\infty) \left[ 1 + (i\omega\tau^0)^{1-\alpha} \right]^{-\beta}, \quad (3.66)$$

avec :  $\mu_\infty = 2.35 \times 10^8$  Pa,  $\mu^0 = 4.79 \times 10^5$  Pa,  $\alpha = 0.46$ ,  $\beta = 0.1946$ ,  $\tau^0 = 0.3979$ ,  $\omega$  est la fréquence. Pour toutes les applications numériques, nous prendrons  $\nu = 0.4$  comme le coefficient de Poisson du PVB. Les deux autres matériaux VE sont des matériaux VE idéalisés étudiés par Brinson et Lin (1998); Friebel *et al.* (2006). Les temps de relaxation et les modules de ces deux matériaux VE sont choisis tels qu'à tout moment, un matériau

soit plus rigide que l'autre et que les valeurs maximales des facteurs de perte des deux matériaux ne coïncident pas. Nous désignerons par A et B les matériaux VE rigide et souple respectivement. Les séries de Prony pour ces deux matériaux sont données dans l'annexe B.3. A partir des données du tableau B.1, les modules de cisaillement  $\hat{\mu}(\omega)$  et de compressibilité  $\hat{\kappa}(\omega)$  complexes de ces deux matériaux se calculent à partir des formules suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\mu}(\omega) = \mu_{\infty} + \sum_{j=1}^N \frac{i\omega\mu_j}{\frac{1}{\tau_j} + i\omega}, \\ \hat{\kappa}(\omega) = \kappa_{\infty} + \sum_{j=1}^N \frac{i\omega\kappa_j}{\frac{1}{\tau_j} + i\omega}. \end{cases} \quad (3.67)$$

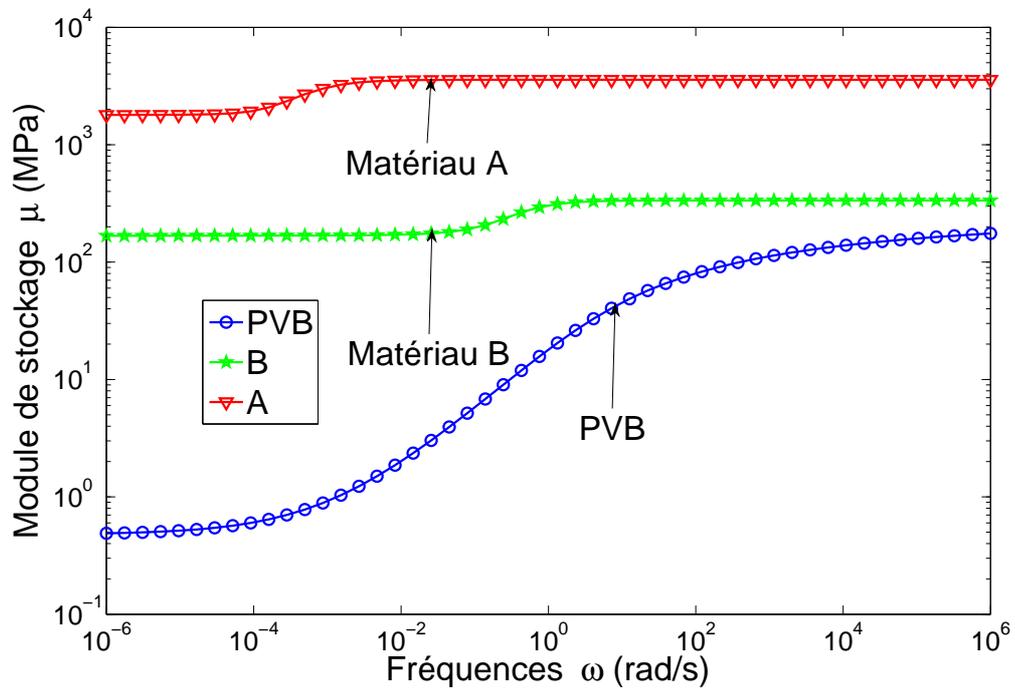
Les figures 3.3(a) et 3.3(b) montrent les modules de stockage et les facteurs de perte associés aux modules de cisaillement de ces trois matériaux VE. Dans toutes les études qui vont suivre, nous nous intéresserons au module de cisaillement complexe effectif  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$  des composites étudiés. Ainsi, nous désignerons par module de stockage ( $\mu^{\text{eff}}$ ), la partie réelle de  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$  ( $\mu^{\text{eff}} = \Re[\hat{\mu}^{\text{eff}}]$ ) et par facteur de perte ( $\eta^{\text{eff}}$ ), le rapport entre les parties imaginaire et réelle de  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$  c'est-à-dire :  $\eta^{\text{eff}} = \Im[\hat{\mu}^{\text{eff}}] / \Re[\hat{\mu}^{\text{eff}}]$

### 3.6.1 Matériaux composites VE à deux phases

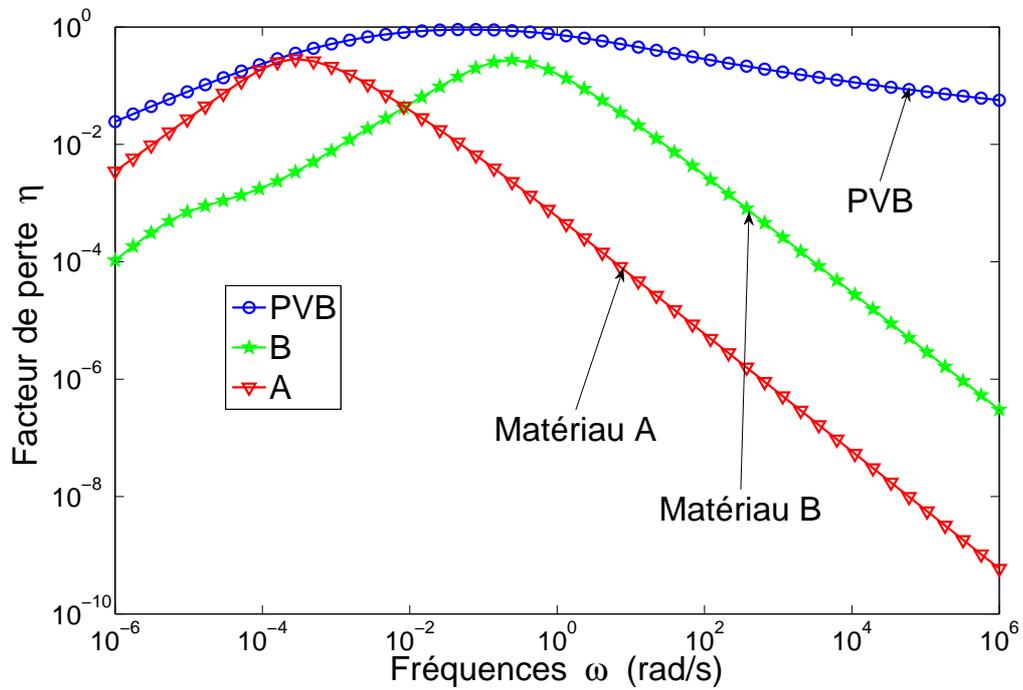
Cette étude des composites VE à deux phases est faite en deux étapes. Premièrement, nous considérons un composite VE avec une matrice moins rigide que les inclusions. Ensuite nous considérons le cas contraire d'un composite VE avec une matrice plus rigide que les inclusions.

#### Composite VE avec une matrice souple et des inclusions rigides

Dans cette section, nous étudierons le comportement VE d'un composite constitué d'une matrice VE souple (phase X) contenant des inclusions VE plus rigides que la matrice (phase Y). En d'autres termes, pour tous ces composites, on a :  $\mu_{\text{Inclusion}} > \mu_{\text{Matrix}}$ .



(a) Modules de stockage



(b) Facteurs de perte

FIG. 3.3 – Propriétés des trois matériaux VE de l'étude.

*Composite 1 : matrice B et inclusions A*

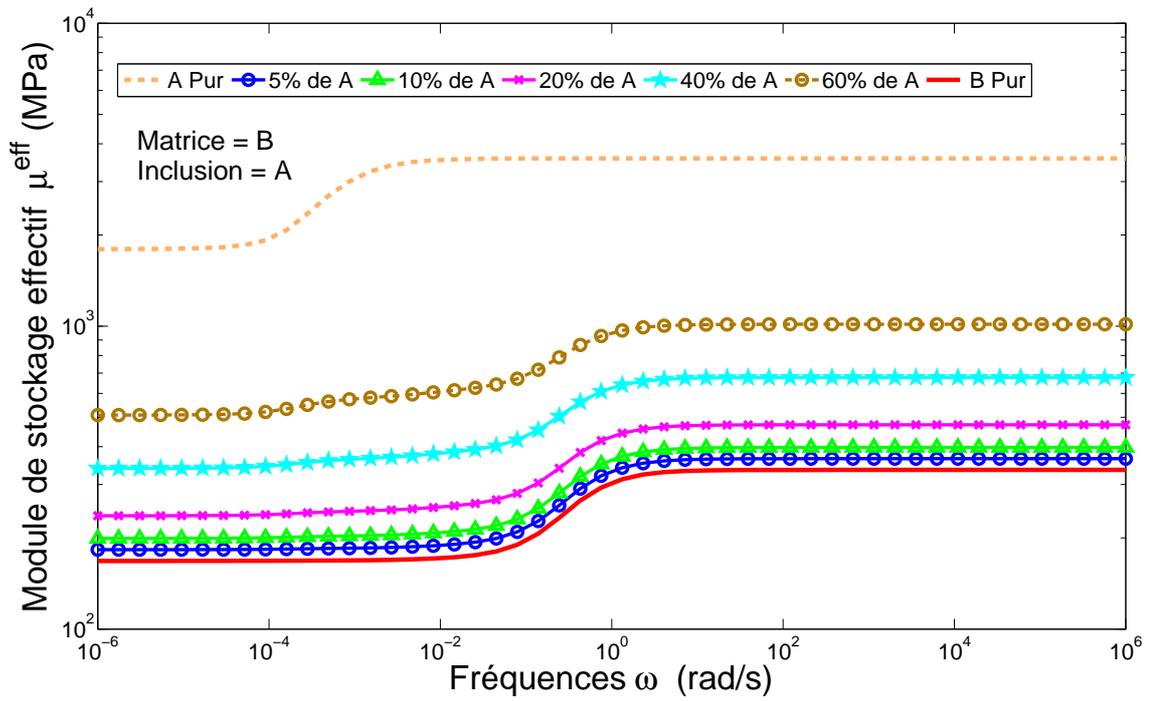
Le premier composite VE est formé d'une matrice du matériau B et des inclusions du matériau A. Les figures 3.4(a) et 3.4(b) montrent respectivement les modules de stockage et de perte de ce composite VE. Comme on peut l'espérer, la figure 3.4(a) montre une amélioration de la rigidité globale de la matrice A due au renforcement par le matériau B plus rigide. Cette figure montre également que l'allure du module de stockage effectif est plus proche de celle de la matrice que de celle de l'inclusion. Nous remarquons bien que  $\mu^{\text{eff}}$  augmente avec la fraction volumique des inclusions.

La figure 3.4(b) montre que le facteur de perte global est amélioré dans le domaine des basses fréquences alors qu'il est dominé par le facteur de perte de la matrice B dans les hautes fréquences. Dans les basses fréquences  $\eta^{\text{eff}}$  augmente avec fraction volumique des inclusions et suit bien l'allure du facteur de perte de l'inclusion ( $\eta_A$ ).

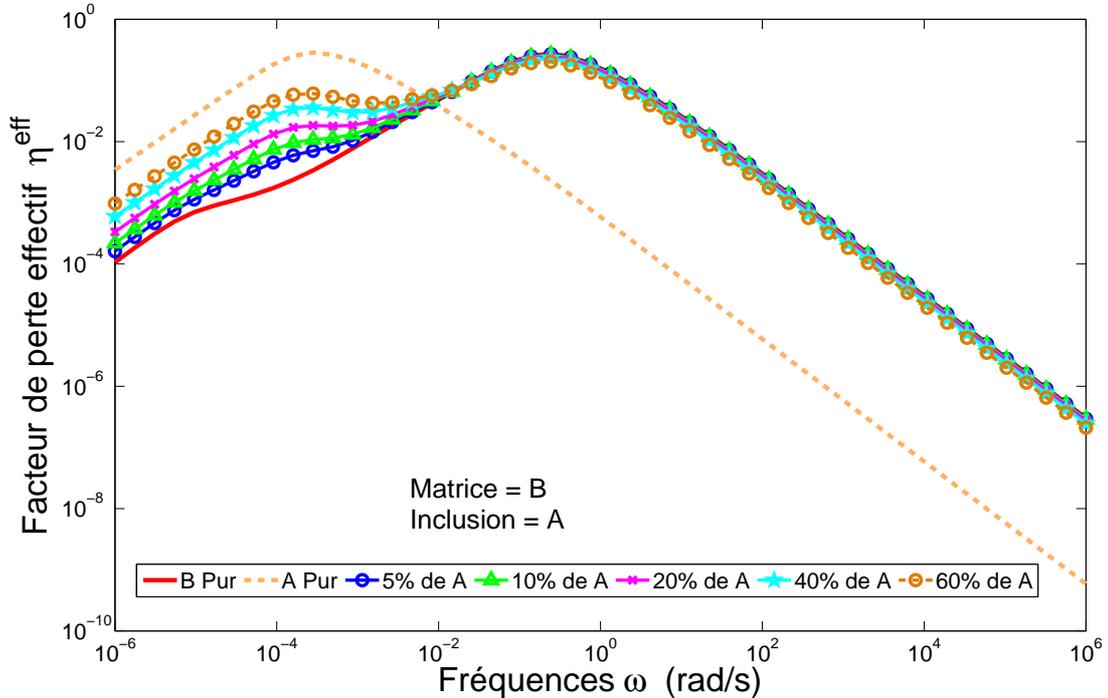
Nous remarquons en analysant les figures 3.4(a) et 3.4(b) que la gamme de fréquence pour laquelle le comportement amortissant de la matrice B domine celui du composite, correspond aux fréquences pour lesquelles l'on a :  $\eta_B > \eta_A$  et  $\mu_B < \mu_A$ . Pour vérifier cette première hypothèse, nous allons considérer deux autres composites VE constitués d'une matrice VE moins rigide que les inclusions VE.

*Composite 2 : matrice PVB et inclusions B*

Le deuxième composite VE étudié est constitué d'une matrice en PVB contenant des inclusions du matériau B. Les figures 3.5(a) et 3.5(b) montrent respectivement les parties réelle et imaginaire du module de cisaillement complexe de ce composite. Nous remarquons que les propriétés effectives de ce composite VE ont une allure plus proche de celle de la matrice que celle de l'inclusion. Le module de stockage est amélioré tandis que le module de perte est complètement dominé par le module de perte de la matrice. L'amélioration significative du module de stockage dans les basses fréquences est liée à l'écart important entre les modules de stockage de la matrice et celui de l'inclusion dans cette gamme



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.4 – Propriétés effectives du composite 1.

de fréquences. Le composite 2 vérifie également la thèse selon laquelle le comportement amortissant de la matrice souple domine le comportement amortissant global dans les gammes de fréquences où  $\mu_{\text{PVB}} < \mu_{\text{B}}$  et  $\eta_{\text{PVB}} > \eta_{\text{B}}$ .

*Composite 3 : matrice PVB et inclusions A*

Les figures 3.6(a) et 3.6(b) montrent respectivement les parties réelle et imaginaire du module de cisaillement complexe de ce troisième composite VE constitué d'une matrice de PVB dans laquelle sont noyées des inclusions du matériau A. Ce composite 3 a le même comportement que les composites 1 et 2.

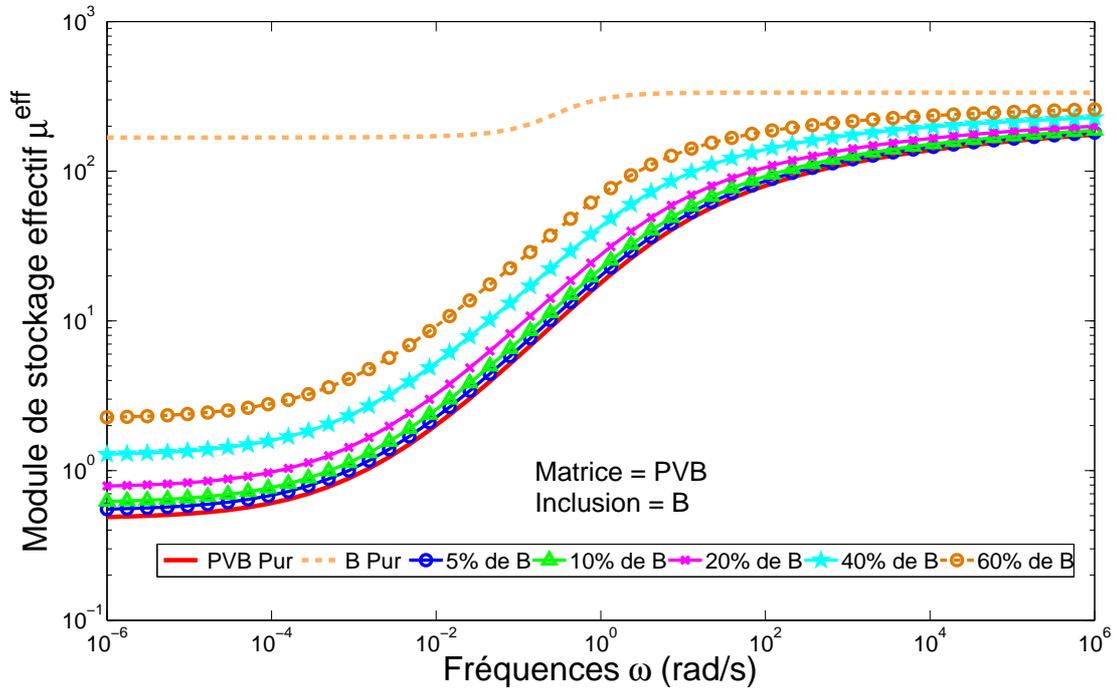
Nous pouvons alors affirmer à partir des figures 3.4, 3.5 et 3.6 que le module de perte d'un composite VE à deux phases, constitué d'une matrice X moins rigide que l'inclusion Y, est dominé par le comportement amortissant de la matrice dans la gamme de fréquences où  $\mu_{\text{X}} < \mu_{\text{Y}}$  et  $\eta_{\text{X}} > \eta_{\text{Y}}$ .

### **Composite VE avec une matrice plus rigide que les inclusions**

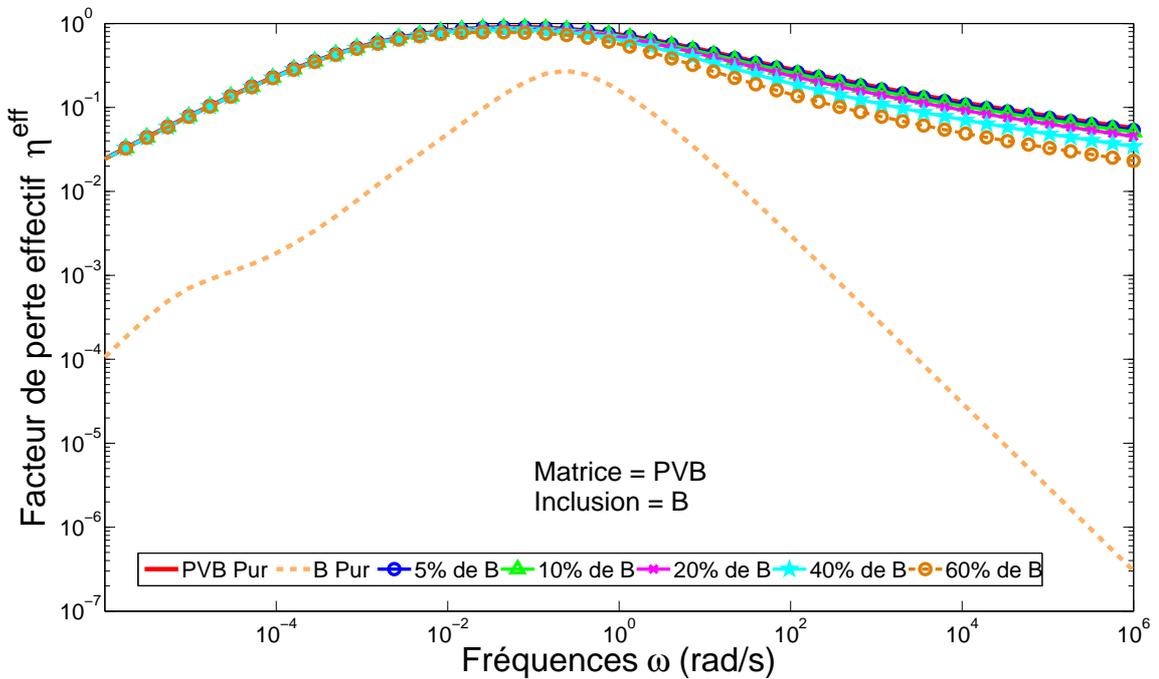
Dans ce paragraphe, nous étudions les propriétés d'un matériaux VE à deux phases constitué d'une matrice plus rigide que l'inclusion. Pour tous ces composites VE, nous avons la relation :  $\mu_{\text{Inclusion}} < \mu_{\text{Matrix}}$ .

*Composite 4 : matrice A et inclusions B*

Le quatrième composite VE est constitué d'une matrice du matériau A contenant des inclusions du matériau B. Comme on peut s'y attendre, la rigidité globale de ce composite est inférieure à celle de la matrice à cause la faible rigidité de l'inclusion (voir figures 3.7(a)). Aussi peut-on remarquer au travers de la figure 3.7(b) que le module de perte de la matrice domine le module de perte effectif dans les basses fréquences. Les figures 3.7(a) et 3.7(b) révèlent que cette gamme de fréquences correspond aux fréquences pour lesquelles les deux modules de la matrice sont supérieurs à ceux de l'inclusion. D'une manière évidente, le comportement de la matrice domine le comportement effectif dans

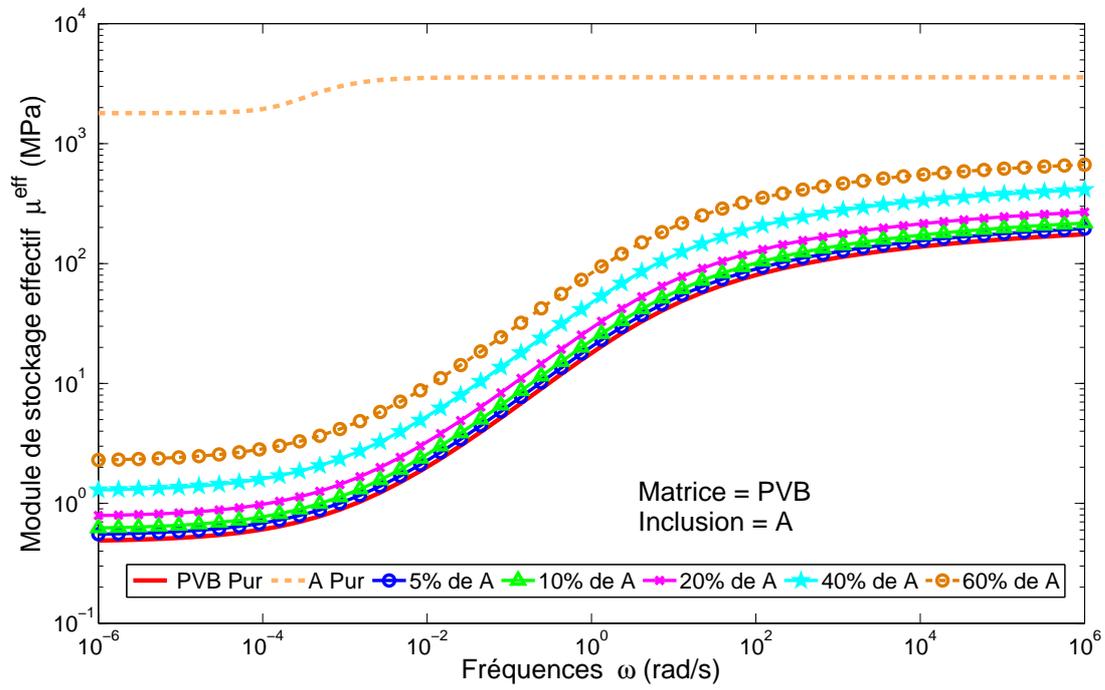


(a) Modules de stockage effectifs

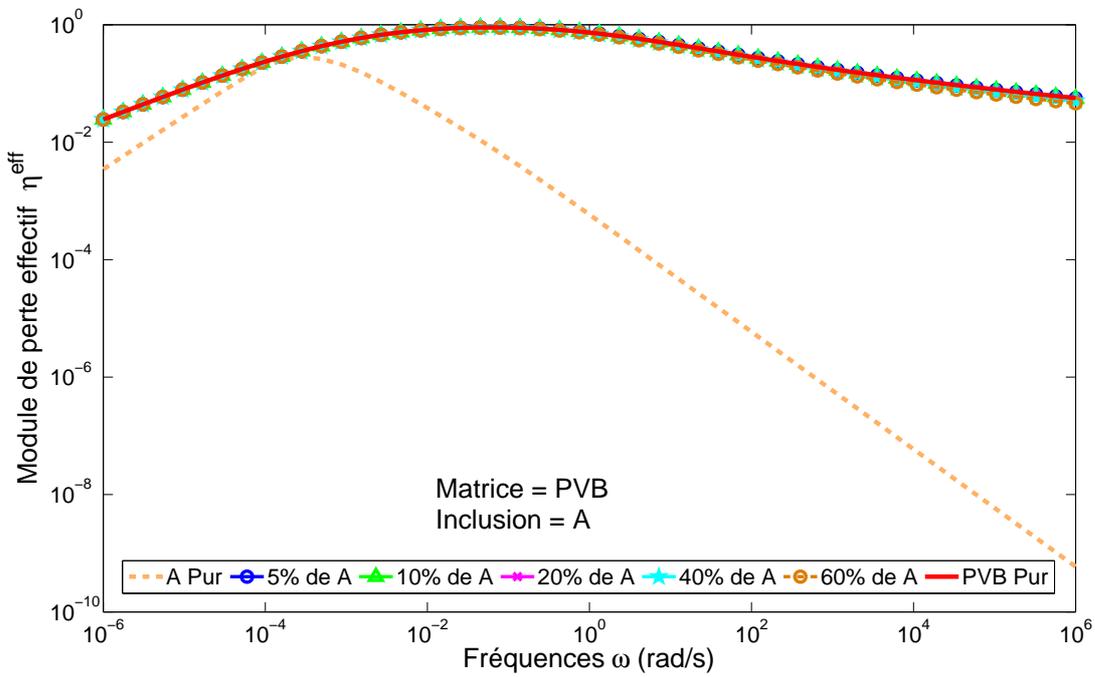


(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.5 – Propriétés effectives du composite 2.



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.6 – Propriétés effectives du composite 3.

l'intervalle de fréquences où les deux modules de la matrice sont supérieurs à ceux de l'inclusion. Par contre dans l'intervalle de fréquences où le module de perte de l'inclusion est supérieur à celui de la matrice, le comportement d'amortissement effectif est dicté par celui de l'inclusion.

*Composite 5 : matrice A et inclusions PVB*

L'inclusion B du composite 4 est remplacée dans le composite 5 par le PVB. Les figures 3.8(a) et 3.8(b) montrent les modules effectifs de ce cinquième composite VE. Dans le cas présent, les fréquences pour lesquelles la matrice impose son comportement amortissant au composite correspondent à celles qui vérifient  $\mu_A \gg \mu_{PVB}$  et  $\eta_A$  est légèrement différent de  $\eta_{PVB}$ .

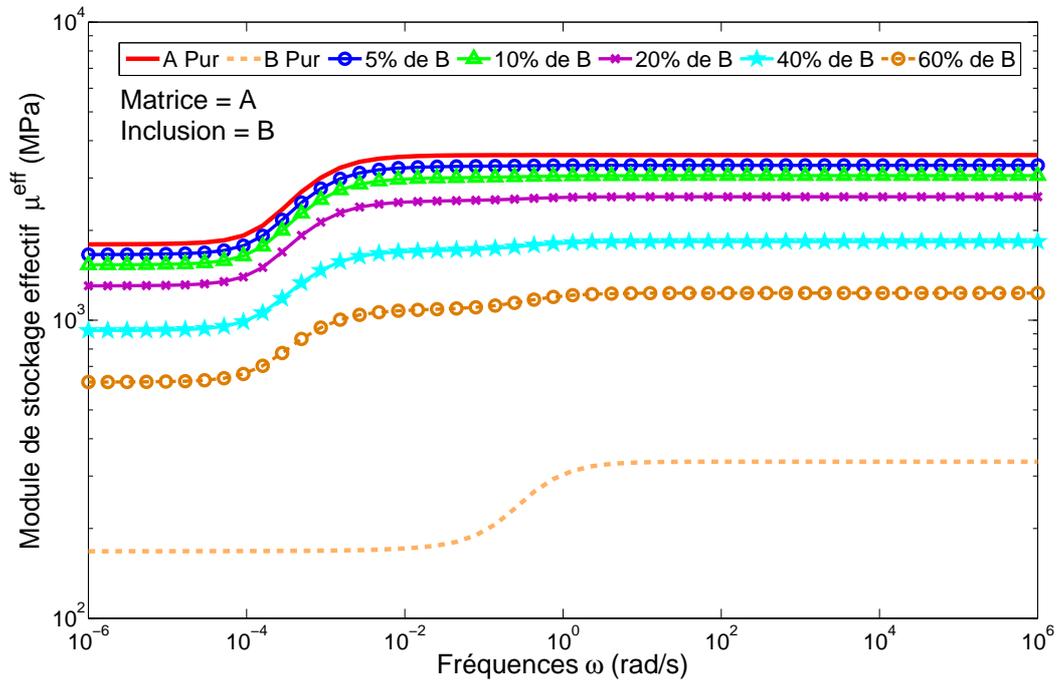
*Composite 6 : matrice B et inclusions PVB*

Nous remplaçons la matrice du composite 5 par le matériau A. Les figures 3.9(a) et 3.9(b) montrent que le comportement du composite 6 est identique à celui du composite 5.

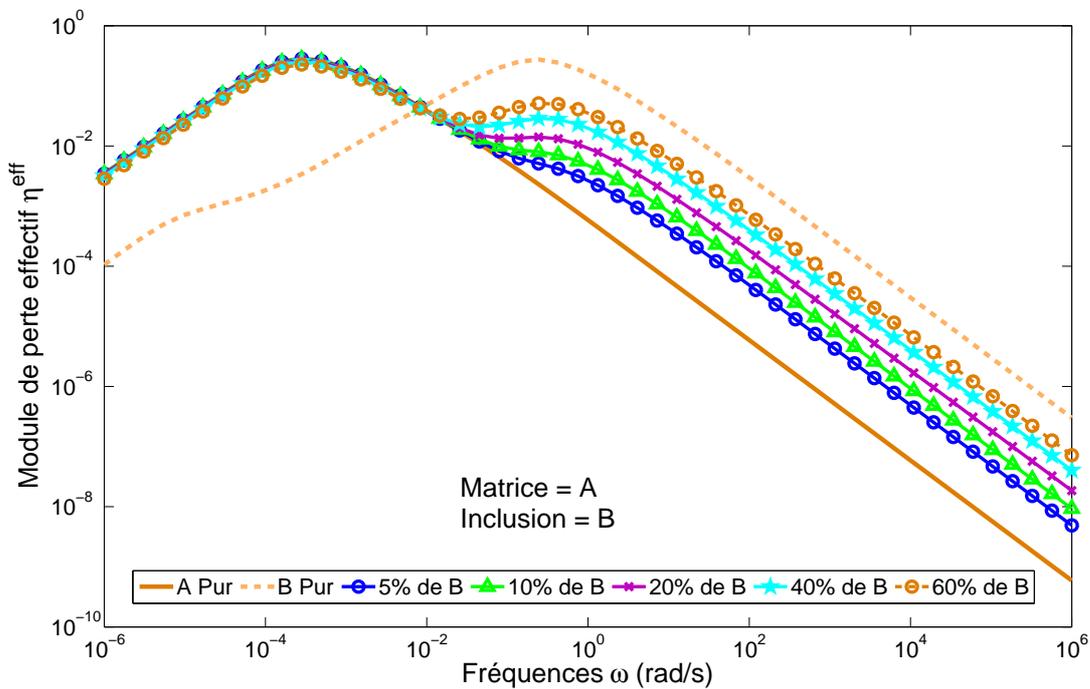
En résumé, nous pouvons dire, à partir des résultats montrés sur les figures 3.7, 3.8 et 3.9, que le module de perte d'un composite VE, constitué d'une matrice (phase X) plus rigide que l'inclusion (phase Y), est dominé par le module de perte de la matrice dans les gammes de fréquences où les relations suivantes sont vérifiées :  $\mu_X > \mu_Y$  et  $\eta_X > \eta_Y$  ou  $\mu_X \gg \mu_Y$  et  $\eta_X$  est légèrement différent de  $\eta_Y$ .

### 3.6.2 Un exemple de composite VE à trois phases

Nous considérons maintenant un exemple de composite à trois phases. Ce composite 7 est formé d'une inclusion de PVB enrobée d'une couche du matériau VE A et le tout est noyé dans une matrice faite du matériau VE B. Les variations en fonction de la fréquence des deux modules effectifs du composite 7 sont représentés sur les figure 3.10(a) et 3.10(b). Le module de stockage effectif est très proche de celui de la matrice B. En

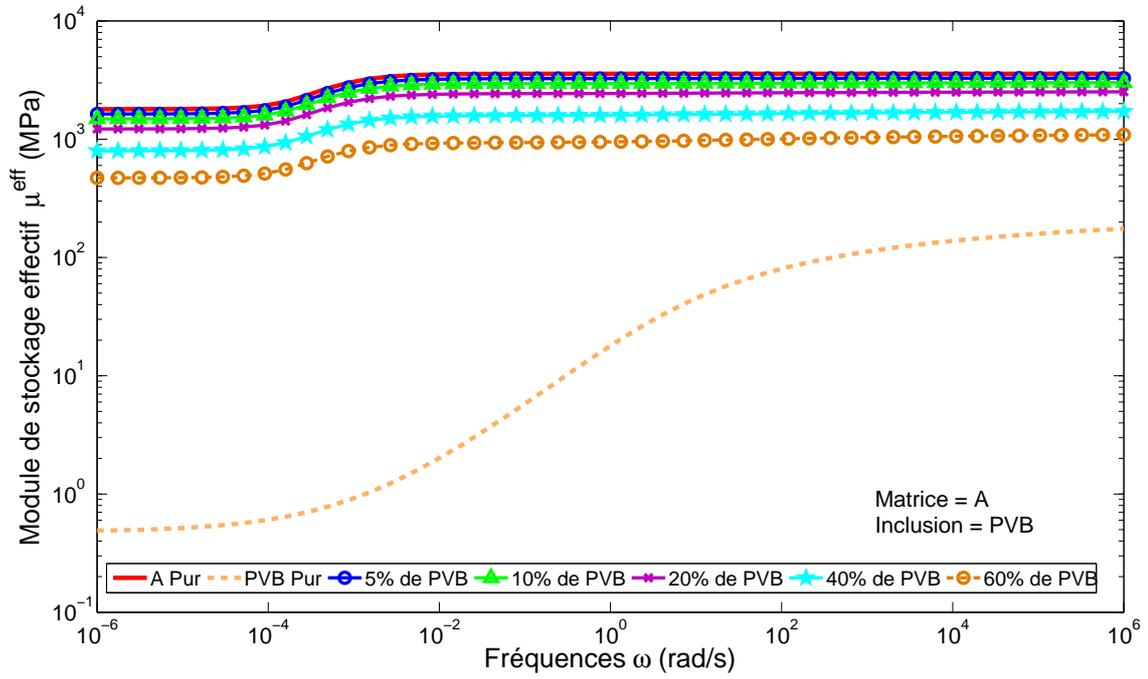


(a) Modules de stockage effectifs

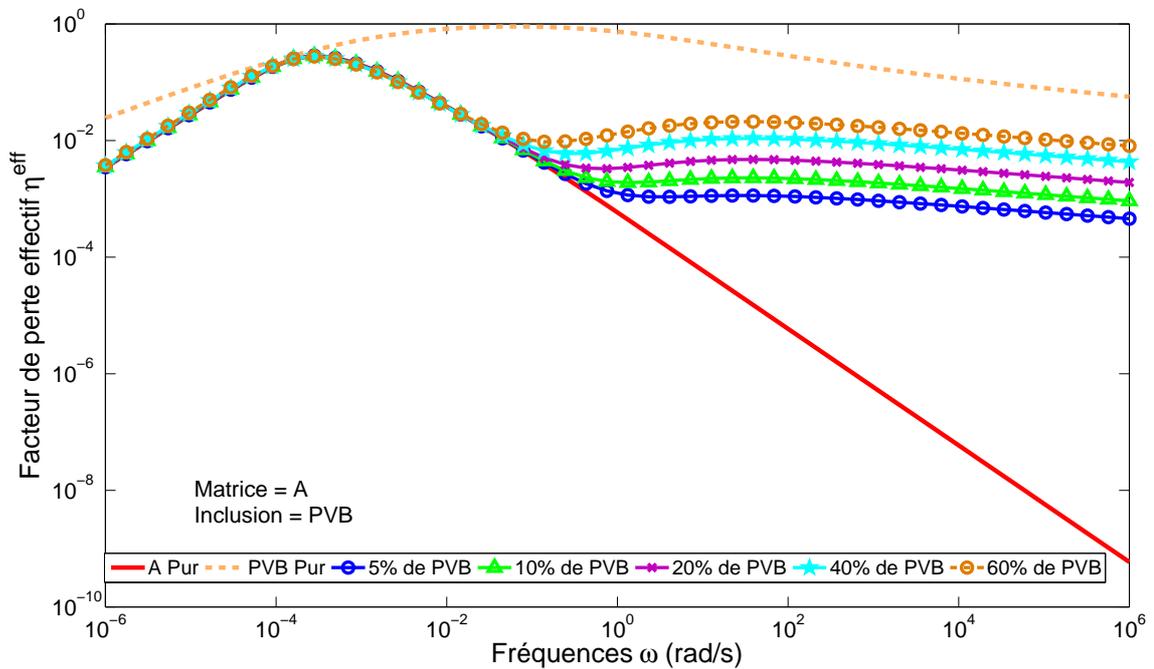


(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.7 – Propriétés effectives du composite 4.

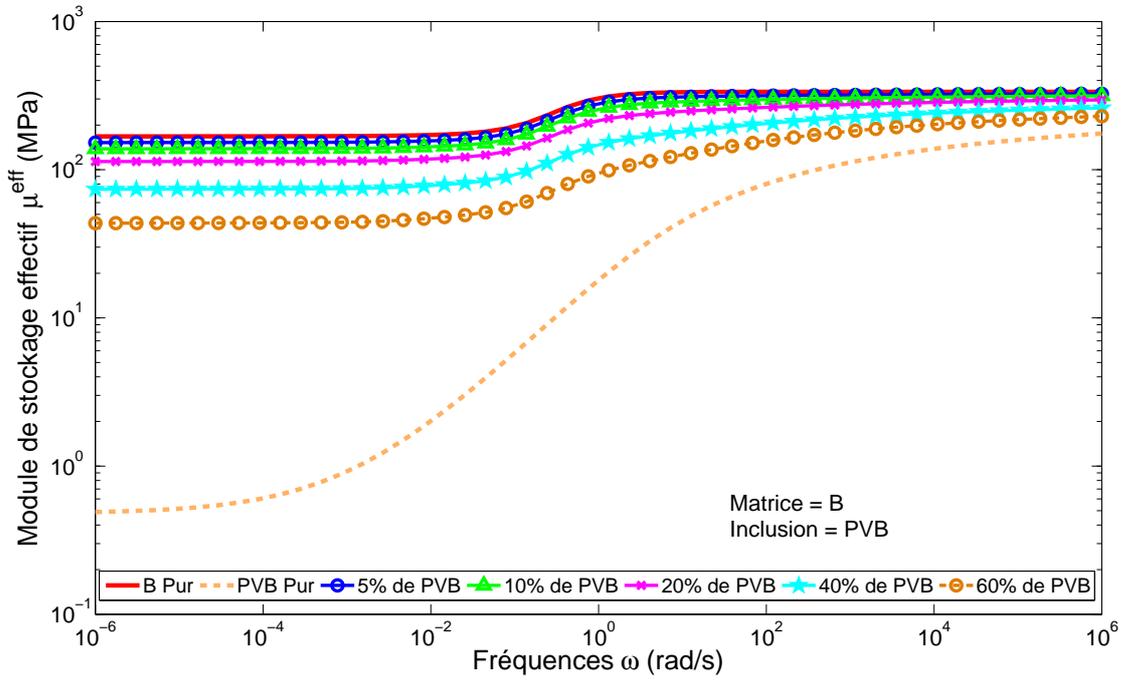


(a) Modules de stockage effectifs

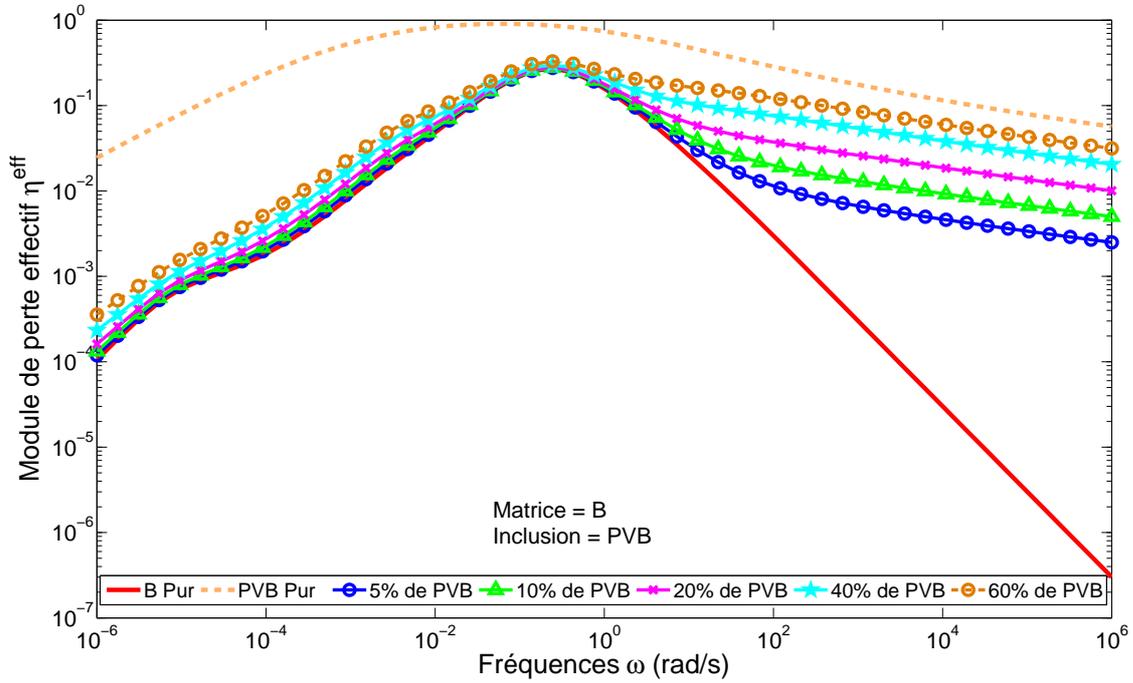


(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.8 – Propriétés effectives du composite 5.



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

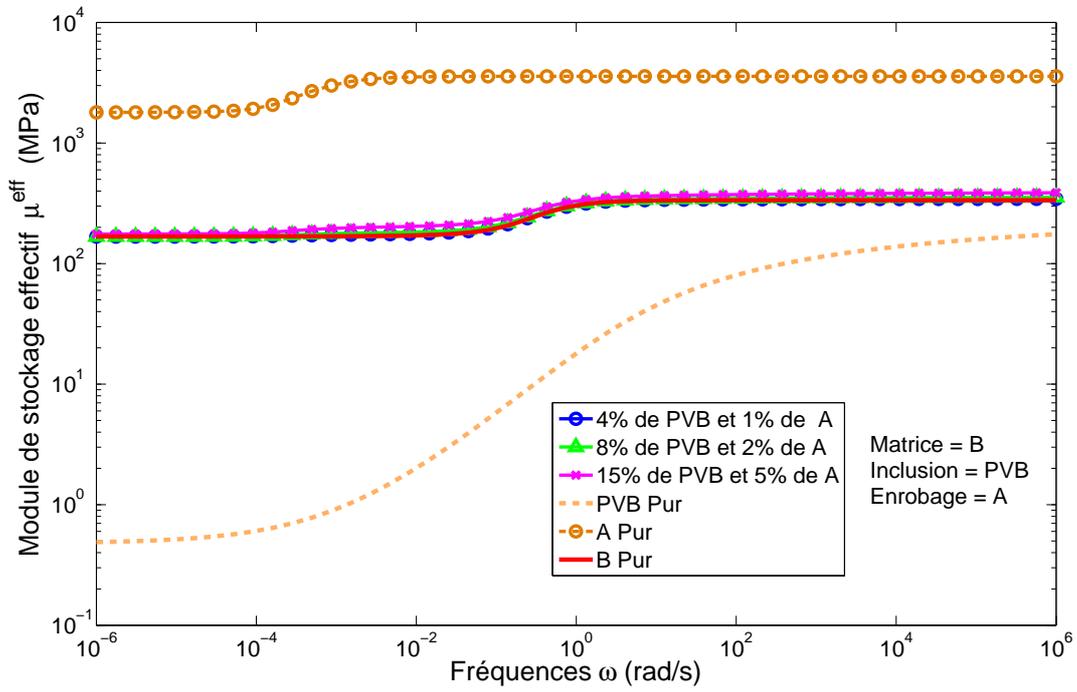
FIG. 3.9 – Propriétés effectives du composite 6.

revanche, le facteur d'amortissement est amélioré aussi bien dans les basses fréquences que dans les hautes fréquences (figure 3.10(b)). Dans les basses fréquences, c'est le comportement amortissant de l'enrobage A qui contrôle le comportement amortissant effectif du composite tandis que dans les hautes fréquences, c'est l'inclusion (PVB) qui contrôle le comportement amortissant effectif du composite. Pour les fréquences intermédiaires, le module de perte de la matrice domine complètement le module de perte effectif. Nous remarquons que les fréquences pour lesquelles la matrice domine le comportement amortissant du composite, vérifient  $\mu_B > \mu_{PVB}$  et  $\eta_B$  est légèrement différent de  $\eta_{PVB}$  puis  $\eta_B > \eta_A$ .

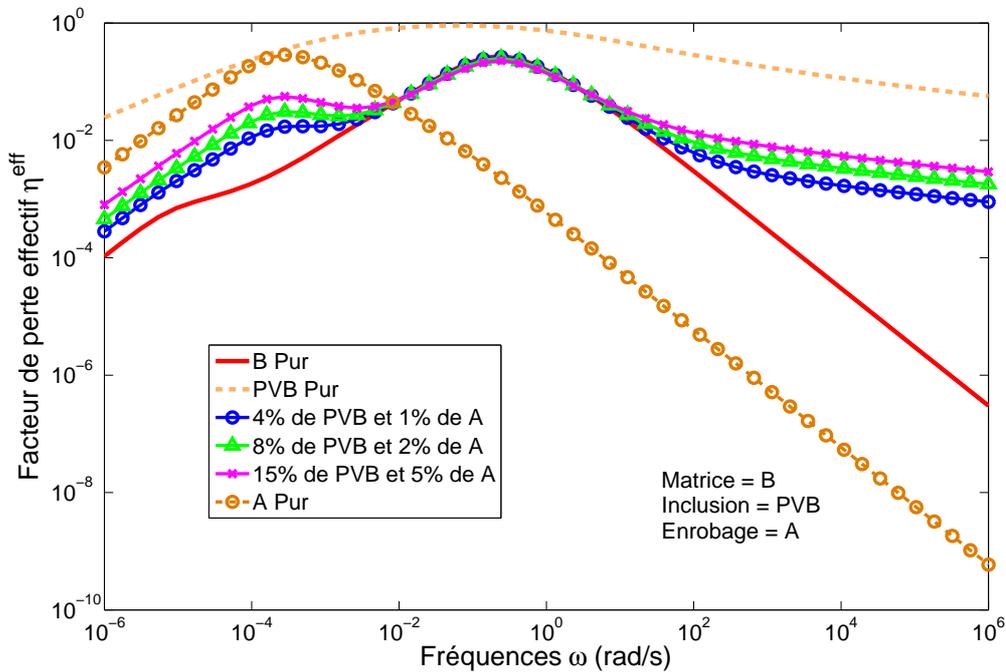
Clairement, le comportement amortissant de ce composite à trois phases est une combinaison des comportements amortissants des composites 1 et 6 des études présentées dans les paragraphes précédents. Cet exemple simple nous montre qu'il est possible, par un choix adéquat des matériaux, de concevoir des composites VE ayant un très bon module de perte et une très bonne rigidité sur toutes les gammes de fréquences. Pour finir ce paragraphe, notons que les résultats des autres combinaisons de composites à trois phases ne sont pas présentés ici car on peut les prédire à partir des résultats obtenus pour les composites à deux phases étudiés dans les paragraphes précédents. Nous allons étudier dans la section suivante un autre type de composite VE contenant des inclusions ayant un comportement peu fréquent : le comportement de rigidité négative. Ensuite nous étudions également l'effet de la forme des inclusions sur les propriétés VE des composites VE classiques.

### 3.6.3 Composite à deux phases et inclusions à rigidité négative

Quand un matériau se déforme de façon élastique, l'expérience montre que le déplacement résultant est dans la même direction que la force. Cette propriété est connue sous le nom de rigidité *positive*. Si, au contraire, la force de déformation et le déplacement résultant étaient de directions opposées, il s'agirait alors de rigidité *négative*, un phénomène



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.10 – Propriétés effectives du composite 7.

beaucoup moins courant. Il n'est pas illégal (ne viole aucune loi physique), mais un objet isolé avec de la rigidité négative est instable. L'idée de [Lakes \(2001a\)](#) est d'insérer des inclusions à rigidité *négative*, normalement *instables*, dans des matrices à rigidité *positive* afin de les stabiliser et améliorer du même coup la rigidité globale du matériau. Cette hypothèse est soutenue par des modèles mathématiques ([Lakes, 2001a,b](#); [Lakes et Drugan, 2002](#); [Wang et Lakes, 2004a](#); [Drugan, 2007](#)). Un des composites étudiés a sa matrice en étain pur avec des inclusions de *dioxyde de vanadium ferro-élastique*. Le matériau obtenu possède une très bonne propriété *d'amortissement mécanique* et une structure de rigidité très hétérogène, conséquence des hautes contraintes localisées ([Lakes et al., 2001](#); [Wang et al., 2004](#)). A certaines températures, la rigidité globale du composite est plus forte qu'avec des inclusions de diamant. Dans un autre article, [Lakes](#) démontre cette amélioration de la rigidité globale du composite avec le mélange de tubes de caoutchouc de silicone partiellement comprimés (à rigidité négative) et non-comprimés (à rigidité positive), comme son modèle théorique le prédisait. Cette surprenante découverte pourrait être utilisée pour renforcer les structures à forte rigidité (ailes d'avion, voiture, etc.), dans les matériaux à fort amortissement et les actionneurs, voire même pour des applications médicales. [Wang et Lakes \(2001\)](#) ont également montré que des composites contenant des phases à rigidité négative peuvent avoir un coefficient de dilatation thermique et des propriétés piézoélectriques extrêmes.

Il existe plusieurs autres travaux théoriques et expérimentaux sur ce sujet à savoir les travaux de [Wang et Lakes \(2004b\)](#), [Wang et Lakes \(2004c\)](#), [Jaglinski et Lakes \(2004\)](#), [Jaglinski et al. \(2005\)](#), [Wang et Lakes \(2005a\)](#), [Wang et Lakes \(2005b\)](#), [Wang et Lakes \(2006\)](#), [Jaglinski et al. \(2006\)](#), [Moore et al. \(2006\)](#), [Wang et al. \(2007\)](#), [Shang et Lakes \(2007\)](#), [Jaglinski et al. \(2007\)](#), [Carpick et al. \(2007\)](#), [Lakes et Wojciechowski \(2008\)](#) et le travail de [Yap et al. \(2008\)](#) pour ne citer que ceux-là. Ces travaux ont exploré les fondements théoriques sur l'existence et les conditions de stabilité du comportement de rigidité négative ainsi les voies et moyens pour créer des matériaux ayant un tel comportement.

Plusieurs types de systèmes qui affichent le comportement de rigidité négative ont été l'objet d'études approfondies. Ils se répartissent en trois grandes catégories :

- les matériaux en cours de transition de phase,
- les nanocomposites ou les matériaux nanostructurés,
- les matériaux possédant des domaines en cours de défaillance structurale.

Le chapitre 7 de la thèse de [Haberman \(2007\)](#) est entièrement consacré à ce comportement de rigidité négative. Dans ce chapitre, [Haberman](#) a exploré le comportement de rigidité négative dans plusieurs aspects différents. Tout d'abord, il donne une explication détaillée de ce que l'on entend exactement par le terme de rigidité négative. Ensuite il a présenté et discuté les recherches théoriques et expérimentales pertinentes sur le sujet. Il paraît évident au travers de l'état de l'art que les mécanismes exploités pour produire des matériaux présentant le comportement de rigidité négative sont tout à fait impossibles ou trop mal compris pour la mise en œuvre pratique dans les structures de tous les jours. Par exemple, les matériaux exploitant les transformations de phase martensitiques comme mécanisme de rigidité négative ont des pics significatifs d'amortissement, mais seulement à une température très spécifique. De même le comportement de rigidité négative dans les mousses de polymères exige la tâche extrêmement difficile de créer des cellules isolées unique au sein de la matrice viscoélastique. [Haberman](#) présente alors certaines voies pour créer des inclusions à rigidité négative pour l'avenir. Deux mécanismes potentiels sont identifiés par [Haberman](#). Le premier est très théorique et propose la création d'inclusions contenant des nanotubes flambés tandis que le deuxième propose l'usage de la technologie MEMS (micro-electromechanical systems) pour produire des micro-tubes bistables à parois minces. Chaque proposition présente des défis importants, tant sur le plan théorique que technique, et une étude détaillée de chaque proposition se traduirait par une connaissance approfondie de la contribution à leurs domaines respectifs. Les propositions et les discussions de son chapitre 7 sont limitées aux explications des mécanismes de causalité, des principes physiques, les moyens et le potentiel pour générer ce comportement

extraordinaire.

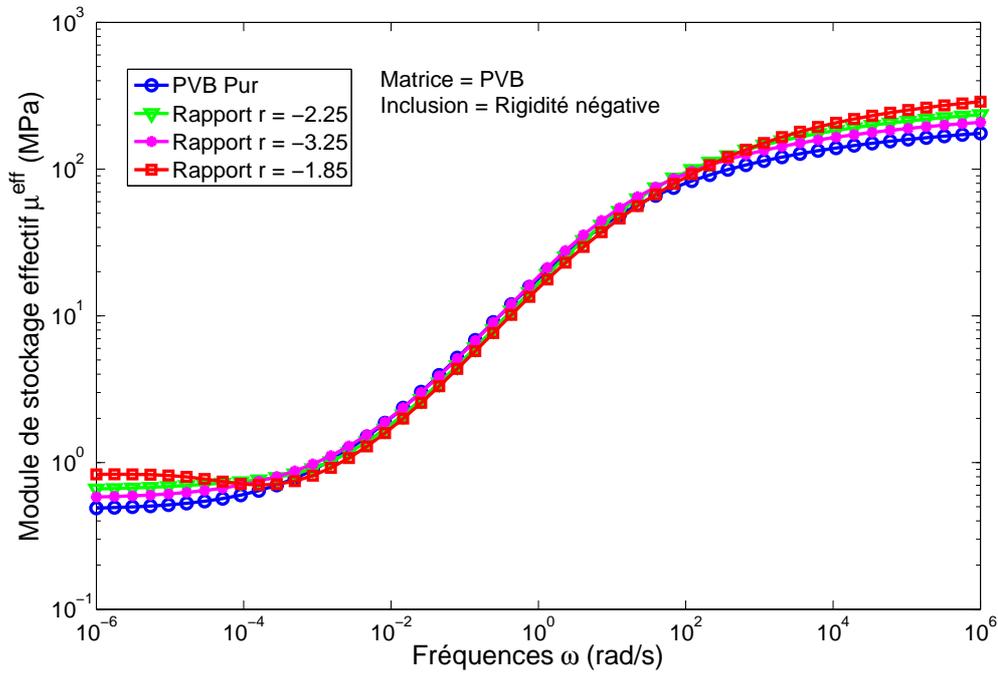
Clairement, malgré le nombre important de travaux sur ce sujet, il y a un manque de véritable matériaux ayant un comportement de rigidité négative qui peuvent être employés comme des inclusions. Nous explorons dans le chapitre 6 une piste sur la création du comportement de rigidité négative dans les matériaux composites. Notre piste est plutôt orientée vers les nanocomposites.

Pour illustrer d'un point de vue théorique ce comportement, nous considérons une matrice de PVB contenant  $\varphi_1 = 2\%$  d'inclusions à rigidité négative. Le module de cisaillement de l'inclusion est égal à l'opposé du module de stockage de la matrice à un coefficient près :  $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$ . Les figures 3.11(a) et 3.11(b) montrent les variations des modules de stockage et de perte respectivement de ce composite contenant une phase à rigidité négative en fonction du rapport de rigidité  $r$ . Ces courbes confirment l'intérêt et l'attraction des phases à rigidité négative même en étant en une très faible fraction volumique. Nous y voyons que les modules de stockage et de perte du matériau composite sont simultanément améliorés.

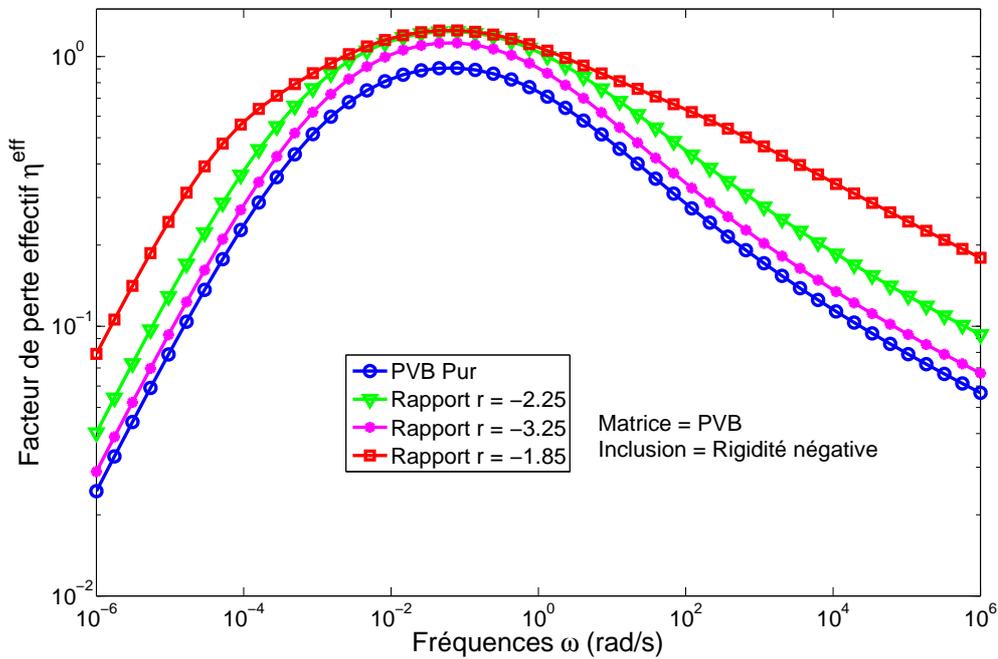
Comme nous l'avons dit plus haut, nous reviendrons sur ce concept de rigidité négative dans le chapitre 6. Nous montrerons qu'il est possible d'avoir localement dans un composite des régions à rigidité négative en utilisant des nanoparticules.

#### 3.6.4 Effet de forme sur les propriétés VE

Les inclusions des composites étudiés dans les paragraphes précédents ont une géométrie sphérique. Nous considérons maintenant des inclusions de la famille des ellipsoïdes pour étudier l'effet de forme sur les propriétés VE. Pour cette étude, nous reconsidérons le composite VE 6 formé d'une matrice du matériau VE B et contenant des particules ellipsoïdales de PVB. Les calculs sont faits pour  $\omega = 1000$  avec une fraction volumique des inclusions  $\varphi_1 = 30\%$ . Les rapports de forme de l'inclusion sont tels que  $a/b = 1$  et  $a/c = \beta$ . Pour une telle géométrie de l'inclusion, le comportement effectif est isotrope



(a) Modules de stockage effectifs



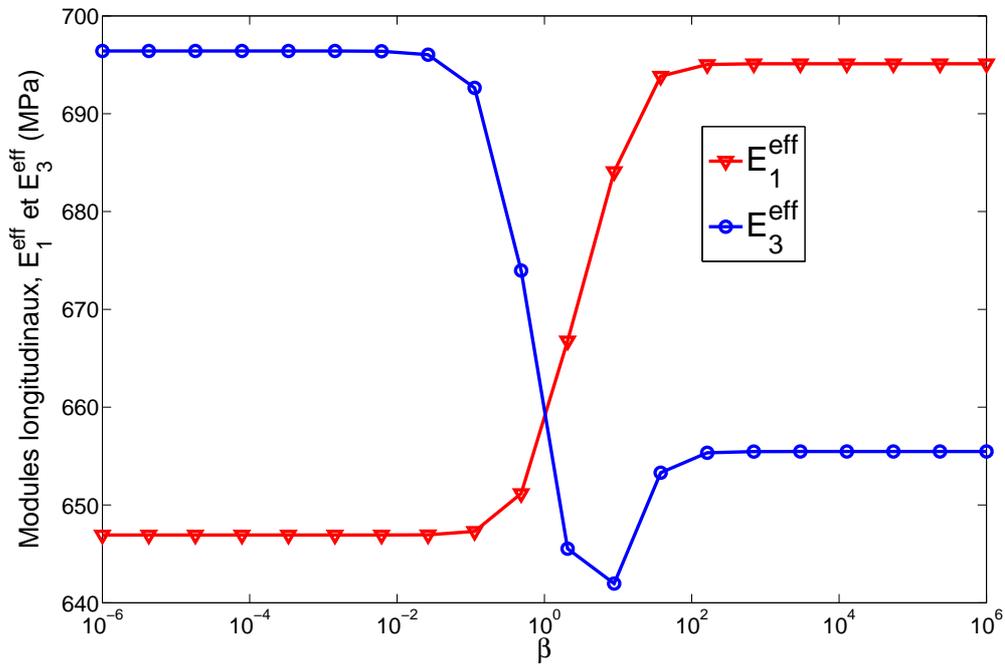
(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.11 – Propriétés effectives du composite 8.  $r = -\mu^I/\mathfrak{R}(\hat{\mu}^M)$ .  $\varphi_1 = 2\%$ .

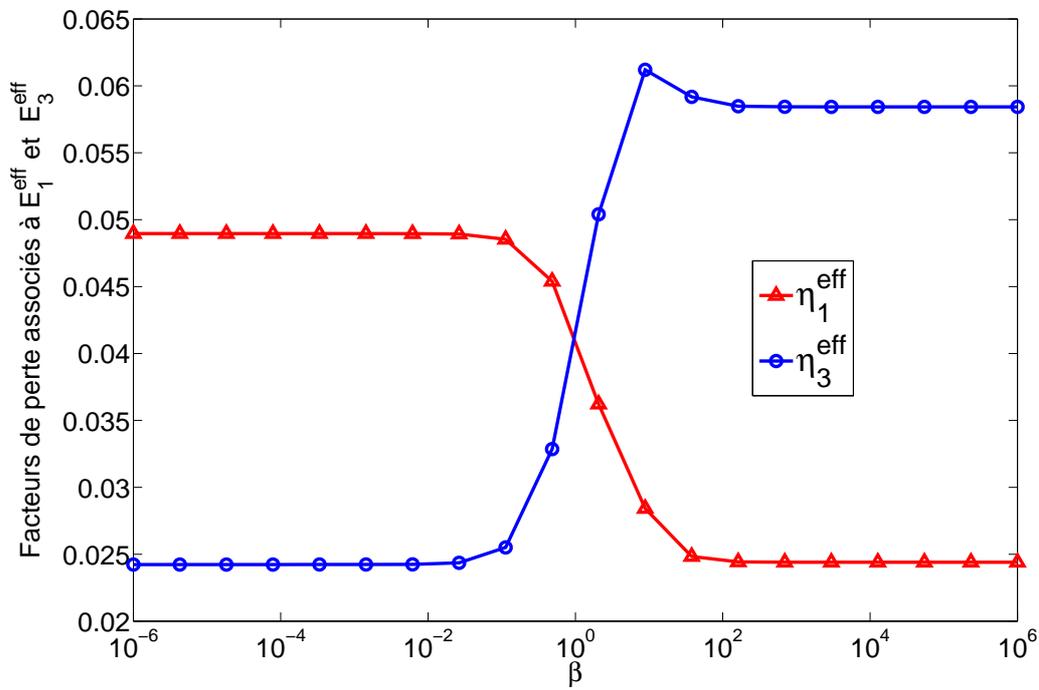
transverse (5 constantes indépendantes). Les figures 3.12, 3.13 et 3.14 montrent l'effet du paramètre  $\beta$  sur les constantes de l'ingénieur et les facteurs de perte liés à ces modules pour le composite considéré.

Pour toutes ces figures, nous remarquons que l'effet de  $\beta$  est plus accentué dans l'intervalle  $[10^{-2}, 10^2]$ . Comme on peut s'y attendre, pour chacune de ces figures, les courbes se coupent pour  $\beta = 1$  ce qui correspond à une particule sphérique donc à une configuration isotrope. De part et d'autre de  $\beta = 1$ , les modules de stockage ont des variations inverses : si l'un croît alors l'autre décroît. Les facteurs de perte associés à ces modules de stockage ont un comportement identique. En revanche, les facteurs de perte ont des sens de variation inverses aux sens de variation de leurs modules de stockage respectifs : si le module de stockage croît alors le module de perte qui lui est associé décroît. Les modules de stockage non représentés sont tels que :  $E_2^{\text{eff}} = E_1^{\text{eff}}$ ,  $\mu_{13}^{\text{eff}} = \mu_{23}^{\text{eff}}$ ,  $\nu_{13}^{\text{eff}} = \nu_{23}^{\text{eff}}$ . Notons que leurs modules de pertes sont également aux modules de perte représentés.

Cette étude assez simple de l'effet de forme sur les propriétés VE permet de déterminer, selon le degré d'anisotropie souhaité et les modules privilégiés, la valeur de  $\beta$  satisfaisant au mieux les objectifs de la conception du matériau.

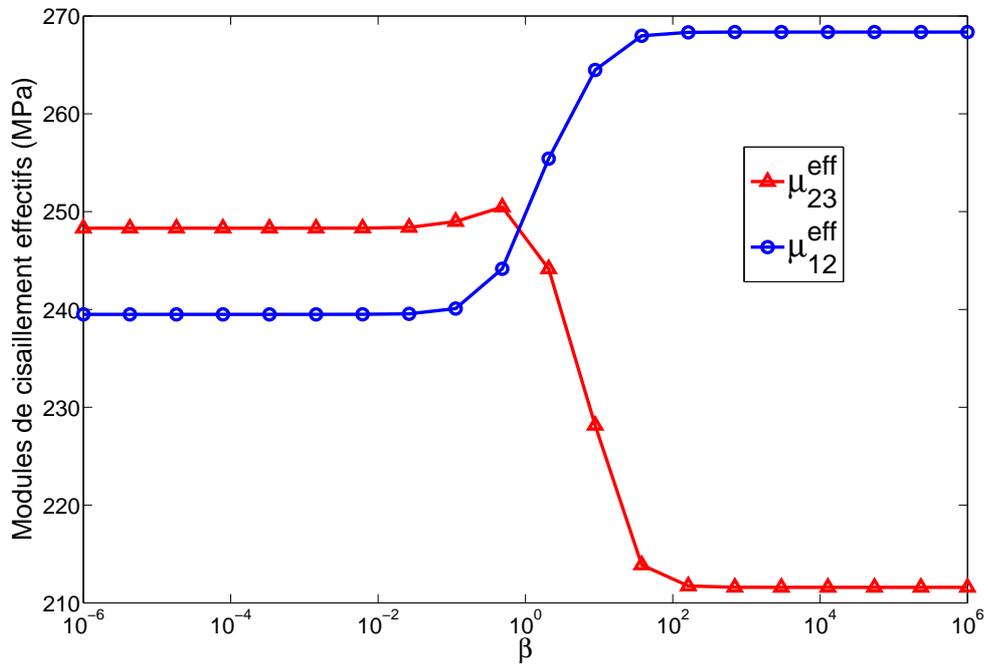


(a) Modules de stockage effectifs

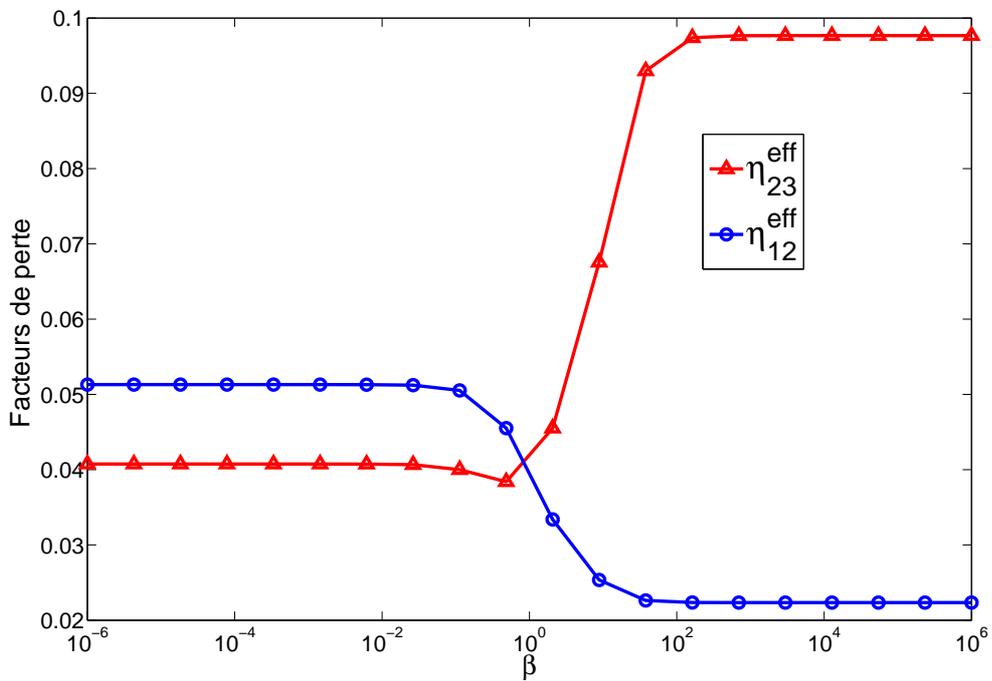


(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.12 – Modules longitudinaux effectifs.



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 3.13 – Modules de cisailment effectifs.

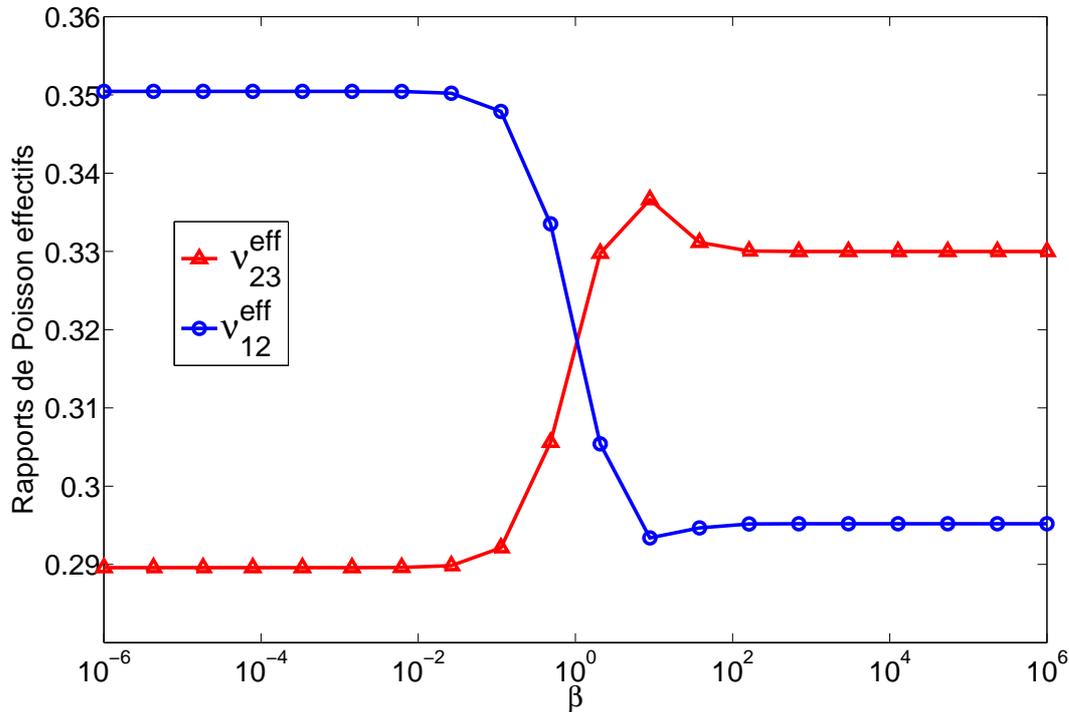


FIG. 3.14 – Rapports de Poissons effectifs.

### 3.7 Conclusions et questions de recherche

L'extension du modèle de Barhdadi (2005), Lipinski *et al.* (2006) dans le domaine quasi-statique via l'utilisation du principe de correspondance élastique-viscoélastique (cf. § 1.1.1.0) nous a permis d'explorer certaines voies pour la conception des matériaux amortissants. Au travers des propriétés effectives des matériaux composites VE issus des combinaisons de matériaux VE que nous avons présentées, il ressort qu'il est possible aux ingénieurs de concevoir des matériaux amortissants par un choix adéquat des phases du composite. Aussi avons-nous remarqué théoriquement l'intérêt et l'attraction du comportement à rigidité négative. Nous avons également considéré l'effet de forme sur un exemple simple de composite VE à deux phases. Cependant, nous n'avons pas pu étudier l'effet de taille sur les propriétés VE car, dans son état actuel, ce schéma micromécanique est incapable de considérer l'effet de taille. De plus le modèle a été développé sur l'hypothèse d'interfaces parfaites entre les phases du composite. Deux questions de recherche

fondamentales peuvent alors être posées sur la base de ces deux constats :

☞ Quel est l'effet du glissement des interfaces sur les propriétés VE du composite VE ?

La réponse est dans le chapitre 4.

☞ La taille a-t-elle un effet sur les propriétés amortissantes des composites ? Nous répondrons à cette question dans le chapitre 6. La réponse à cette question ouvrira la voie sur d'autres moyens pour avoir le comportement de rigidité négative.



# CHAPITRE 4

## AMORTISSEMENT ET INTERFACE IMPARFAITE

**C** e chapitre considère que l'interface entre les phases du composite viscoélastique est imparfaite. Nous y présentons l'effet de cette interface imparfaite sur les propriétés viscoélastiques des composites viscoélastiques à deux phases. Par interface imparfaite, nous désignons l'existence d'un glissement relatif entre la matrice et l'hétérogénéité dû à la présence d'une couche visqueuse introduite artificiellement ou naturellement entre la matrice et l'hétérogénéité. Cette étude révèle que ce glissement relatif apporte de nouveaux degrés de liberté dans la conception des matériaux amortissants. Nous y montrons que la rigidité et l'amortissement du composite viscoélastique peuvent être simultanément améliorés à l'instar du comportement de rigidité négative.

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Motivations et objets de cette étude . . . . .</b>	<b>155</b>
<b>4.2</b>	<b>Problèmes d'interface imparfaite : état de l'art en bref . . . . .</b>	<b>156</b>
<b>4.3</b>	<b>Interface imparfaite et le tenseur de Eshelby modifié . . . . .</b>	<b>159</b>
<b>4.4</b>	<b>Propriétés viscoélastiques effectives : effet de glissement . . . . .</b>	<b>162</b>
4.4.1	Localisation et homogénéisation : modèle de Mori-Tanaka . . . . .	163
4.4.2	Application : configuration isotrope et particules sphériques . . . . .	167
<b>4.5</b>	<b>Exemples numériques et discussions . . . . .</b>	<b>171</b>
4.5.1	Effet des paramètres $\chi$ et $\eta_\chi$ . . . . .	171
4.5.2	Effet de la fraction volumique $\phi_1$ des particules . . . . .	172
4.5.3	Effet du rapport de rigidités $r$ . . . . .	174
4.5.4	Effet du facteur de perte $\eta_1$ de la particule . . . . .	174
4.5.5	Comportement dépendant de la fréquence . . . . .	177
4.5.6	Effet de forme associé à l'effet de glissement . . . . .	177
<b>4.6</b>	<b>Conclusions et question de recherche . . . . .</b>	<b>181</b>

---

## 4.1 Motivations et objets de cette étude

Dans le chapitre 3 nous avons supposé des interfaces parfaites entre les phases des composites viscoélastiques (VE) du modèle. En raison du grand nombre d'applications potentielles des matériaux amortissants, les contributions respectives à l'amortissement de toutes les sources d'amortissement doivent être bien comprises au préalable. Ce chapitre est consacré à l'étude des performances amortissantes des matériaux composites viscoélastiques avec un relatif glissement interfacial entre la matrice et les hétérogénéités en utilisant l'approche micromécanique initialement introduite par [Qu \(1993b\)](#) pour les matériaux composites élastiques. La viscosité de l'interface peut être due à une couche visqueuse introduite artificiellement entre les particules et la matrice ([Berthelot et Sefrani, 2006](#); [Robinson et Kosmatka, 2006](#)) ou à une diffusion locale à l'échelle de longueur comparable à la taille des aspérités sur l'interface ([Raj et Ashby, 1971](#)). Dans les deux cas, la zone interfaciale est supposée très mince et peut donc être considérée comme une surface mathématique avec une épaisseur nulle. En conséquence, la particule et la matrice peuvent donc glisser l'une par rapport à l'autre lorsqu'une force de cisaillement est appliquée. Ceci est particulièrement attrayant puisque nous avons déjà dit dans l'introduction générale que l'amortissement dans les structures sandwich viscoélastiques est introduit par l'importante déformation de cisaillement dans la couche centrale VE de la structure sandwich.

Ainsi, dans ce chapitre, le formalisme d'interface imparfaite de [Qu \(1993a\)](#) est adopté pour tenir compte du saut des déplacements à travers l'interface matrice/particule dû au glissement interfacial. Puisque cette approche a été initialement appliquée aux matériaux composites avec des phases élastiques, nous utiliserons le principe de correspondance élastique-viscoélastique ([Christensen, 2005b](#)) pour l'étendre aux composites ayant des phases viscoélastiques. Naturellement nous supposons que les phases viscoélastiques ont un tenseur de modules complexe et dépendant de la fréquence. Dans un premier temps, le tenseur de [Eshelby \(1957\)](#) pour une hétérogénéité ellipsoïdale avec une interface

légèrement imparfaite de [Qu \(1993a,b\)](#) est présenté pour l'exhaustivité de l'analyse proposée. Ensuite, ce formalisme est adapté aux composites avec des phases viscoélastiques. Certaines simulations numériques sont effectuées pour obtenir un aperçu quantitatif de l'influence des divers facteurs sur les propriétés viscoélastiques.

## 4.2 Problèmes d'interface imparfaite : état de l'art en bref

L'interface  $\Gamma$  entre deux milieux est dite parfaite si les deux milieux sont mécaniquement cohérents, c'est-à-dire que les champs de déplacement et de traction sont continus à travers l'interface. Dans de nombreuses applications d'ingénierie, les interfaces dans les matériaux composites peuvent ne pas être parfaites. Le terme d'interface imparfaite est utilisé pour caractériser une situation où les déplacements sont discontinus à l'interface entre l'hétérogénéité et la matrice pour les problèmes quasi-statiques ([Crouch et Mogilevskaya, 2006](#)). Dans ces matériaux, la condition de liaison à l'interface entre la matrice et la particule est l'un des paramètres importants qui contrôlent les propriétés mécaniques et une condition d'interface parfaite est parfois inadéquate pour décrire la nature physique et le comportement mécanique de la région interfaciale.

Dans la littérature, deux types de modèles sont souvent utilisés pour simuler les propriétés mécaniques des zones interfaciales dans les composites renforcés par des particules ou des fibres.

Le premier type de modèle peut être considéré comme des *modèles d'interface*, par exemple, le modèle de ressort linéaire (linear spring model : LSM) ([Hashin, 1991a,b](#); [Qu, 1993a](#); [Zhong et Meguid, 1997](#)), modèle de glissement libre (free sliding model : FSM) ([Ghahremani, 1980](#)), modèle de zone cohésive (cohesive zone model : CZM) ([Matouš, 2006](#); [Inglis et al., 2007](#); [Tan et al., 2005a,b](#)), et le modèle de contrainte interfaciale (interface stress model : ISM) ([Sharma et al., 2003](#); [Sharma et Ganti, 2004](#); [Sharma et Wheeler, 2007](#); [Duan et al., 2005a,c](#)) dans lequel des discontinuités des déplacements et/ou des contraintes sont supposées exister à l'interface.

Le deuxième type est le *modèle d'interphase* qui décrit la région interfaciale comme une couche appelée interphase entre la particule et la matrice. Le modèle d'interphase (modèle à trois phases) avec des interfaces parfaites a été premièrement introduite par [Walpole \(1978\)](#). Il s'en est suivi plusieurs travaux parmi lesquels nous pouvons citer les travaux de [Christensen et Lo \(1979\)](#); [Hervé et Zaoui \(1993\)](#); [Cherkaoui et al. \(1994, 1995\)](#); [Barhdadi \(2005\)](#); [Lipinski et al. \(2006\)](#); [Barhdadi et al. \(2007\)](#).

Généralement, les *modèles d'interface* sont classés en modèles linéaires et non linéaires. Dans les modèles linéaires et non linéaires, la loi de comportement de l'interface à savoir les relations entre les contraintes/tractions à l'interface et les sauts de déplacements à travers celle-ci sont décrites par des lois linéaires et non linéaires respectivement.

### Modèles non linéaires

[Tan et al. \(2005a\)](#) ont utilisé le modèle de [Mori et Tanaka](#) pour étudier l'effet de la décohésion non linéaire sur la loi de comportement des matériaux composites ayant une forte fraction volumique de particules. La décohésion de l'interface est caractérisée par une loi de cohésion non linéaire déterminée à partir d'essais de rupture sur l'explosif PBX 9501. Sur un exemple de matériau composite renforcé par des particules sphériques et soumis à une pression hydrostatique, [Tan et al.](#) ont montré que la taille des particules a un effet important sur le comportement du matériau composite à savoir un durcissement pour les petites tailles et un adoucissement pour les grandes tailles. Pour plus de détails sur la modélisation micromécanique des matériaux composites avec une interface imparfaite obéissant aux modèles CZM, on peut se référer aux récents travaux de [Tan et al. \(2005a,b\)](#); [Matouš \(2006\)](#); [Inglis et al. \(2007\)](#).

### Modèles linéaires

Les modèles d'interface linéaires regroupent le FSM, le DLM (dislocation-like model), le LSM et l'ISM. Un bref aperçu sur l'application de ces différents modèles d'interface

linéaires est donné dans le travail de [Duan \*et al.\* \(2005c\)](#).

Dans la littérature, le LSM est utilisé dans deux contextes différents. Dans le premier contexte, le LSM est utilisé pour simuler le saut de déplacement/traction à travers une “interface mathématique” c’est-à-dire une interface avec une épaisseur nulle entre deux phases dans un matériau composite ou dans une structure. Ce modèle idéalisé peut être très utile dans l’analyse de la décohésion dans les composites renforcés par des fibres (ou particules) et dans l’analyse structurale des composites stratifiés contenant des délaminages ([Wang et Tong, 2002](#)). Dans ce cas, l’interpénétration des matériaux sur les deux côtés de l’interface doit être évitée. Pour cela, le remède mathématique est d’imposer un saut de déplacement normal nul quand la traction normale de l’interface est une compression ou l’usage d’un modèle “anti-interpénétration” (anti-interpenetration model : AIM) sur la base des travaux de [Wang et Tong \(2002\)](#) ou de [Wang \*et al.\* \(2005\)](#).

Dans le second contexte, le LSM est utilisé pour approximer l’interphase dans les matériaux composites. Il est reconnu que le remplacement de l’interphase par un modèle d’interface est souvent commode pour des solutions analytiques ou numériques des problèmes aux limites dans les matériaux composites ([Rubin et Benveniste, 2004](#)). L’équivalence entre les modèles d’interphase et les modèles d’interface a été étudiée par [Hashin \(1991a, 2002\)](#), [Rubin et Benveniste \(2004\)](#) et [Wang \*et al.\* \(2005\)](#). Dans leur travail, [Wang \*et al.\* \(2005\)](#) ont étudié le lien entre le modèle d’interphase mince et le modèle d’interface pour les composites renforcés par des particules sphériques après avoir présenté un modèle pour éviter le phénomène d’interpénétration à l’interface. Ils ont alors montré que les interphases relativement minces et souples sont bien approximées par le LSM tandis que les interphases minces et rigides peut-être bien approximées par l’ISM. Ils y ont également présenté les relations entre la rigidité équivalente de l’interface, l’épaisseur et la rigidité de l’interphase. Ils ont ainsi prouvé la conclusion selon laquelle le LSM peut approximer avec une bonne précision les interphases minces et souples dans les matériaux composites comme cela a été annoncé plus tôt par [Hashin \(1991a, 2002\)](#). Les constantes des ressorts

du LSM dans les directions normale ( $k_r$ ) et tangentielle ( $k_\theta$ ) de l'interface sont déterminées par Wang *et al.* (2005) pour une interphase mince et souple comme suit :

$$k_r = \frac{2\mu_I(1 - \nu_I)}{t(1 - 2\nu_I)}, \quad k_\theta = \frac{\mu_I}{t}, \quad (4.1)$$

où  $t$ ,  $\mu_I$  and  $\nu_I$  sont respectivement l'épaisseur, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de l'interphase.

L'idée directrice de ce chapitre vient de cette représentation équivalente d'une interphase mince et souple par des ressorts interfaciaux linéaires. D'un point de vue physique, un glissement entre l'hétérogénéité et la matrice peut conduire à une friction interne susceptible d'améliorer les capacités amortissantes du matériau. Cet objectif peut être atteint par l'introduction d'une interphase visqueuse très mince et souple entre la matrice et les particules. Bien évidemment, ce travail est purement un cadre théorique qui tente d'étudier l'effet du glissement interfacial sur le comportement viscoélastique des composites. Par conséquent, pour faciliter la formulation et l'implémentation, le LSM est utilisé dans la suite des développements.

### 4.3 Interface imparfaite et le tenseur de Eshelby modifié

Considérons l'interface  $\Gamma$  entre deux phases A et B d'un matériau composite comme l'illustre la figure 4.1. Le LSM suppose la continuité de la traction à travers l'interface, c'est-à-dire :

$$\Delta\sigma_{ij}n_j = [\sigma_{ij}(\Gamma^+) - \sigma_{ij}(\Gamma^-)] n_j = 0, \quad (4.2)$$

mais suppose que le saut du champ de déplacements à travers l'interface est proportionnel à la traction sur l'interface :

$$\Delta u_i = u_i(\Gamma^+) - u_i(\Gamma^-) = \psi_{ij}\sigma_{jk}n_k, \quad (4.3)$$

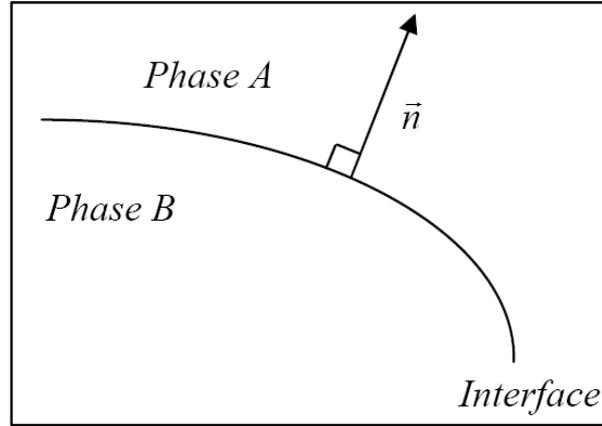


FIG. 4.1 – Interface entre deux phases dans un composite.

avec  $n_j$  le vecteur unitaire normal à l'interface  $\Gamma$ ,  $u_i(\Gamma^+)$  et  $\sigma_{jk}(\Gamma^+)$  sont les valeurs de  $u_i(\mathbf{r})$  et de  $\sigma_{jk}(\mathbf{r})$  évaluées au côté positif de  $\Gamma$  (côté de A), tandis que  $u_i(\Gamma^-)$  et  $\sigma_{jk}(\Gamma^-)$  sont les valeurs du déplacement  $u_i(\mathbf{r})$  et de la contrainte  $\sigma_{jk}(\mathbf{r})$  évaluées au côté négatif de  $\Gamma$  (côté de B). Le tenseur d'ordre deux  $\psi_{ij}$  représente le tenseur des complaisances de l'interface. Evidemment  $\psi_{ij} = 0$  correspond à une interface parfaite. Une forme physique significative de  $\psi_{ij}$  est donnée par [Qu et Cherkaoui \(2006\)](#); [Qu \(1993a\)](#) :

$$\psi_{ij} = \alpha \delta_{ij} + (\beta - \alpha) n_i n_j, \quad (4.4)$$

où  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker. On peut vérifier que  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les complaisances dans les directions tangentielle et normale de l'interface respectivement ([Qu, 1993a](#)). Par conséquent, nous pouvons les relier à  $k_r$  et  $k_\theta$  par les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{k_\theta}, \quad \beta = \frac{1}{k_r}. \quad (4.5)$$

Nous pouvons montrer à partir des formules (4.1) que  $k_r = 2k_\theta \left[ 1 + \nu_I / (1 - 2\nu_I) \right] > 2k_\theta$  et  $\beta < \alpha$  voire même  $\beta \ll \alpha$  lorsque  $\nu_I \rightarrow 0.5$ . Par exemple si  $\nu_I = 0.49$  alors  $k_r = 51k_\theta \gg k_\theta$  soit  $\beta \ll \alpha$  dans ce cas. Il s'en suit alors que lorsque  $\beta \rightarrow 0$  ou de manière équivalente lorsque  $\beta \ll \alpha$ , une telle caractérisation des interfaces permet un

glissement relatif entre deux surfaces mais aucune séparation de surfaces n'est permise. L'interpénétration des matériaux peut avoir lieu quand  $\beta \neq 0$  ce qui est une violation des conditions de compatibilité (Achenbach et Zhu, 1989). Ce problème est abordé dans de nombreux travaux par le moyen de l'AIM (Wang *et al.*, 2005; Tan *et al.*, 2005a). Qu (1993b,a) a déterminé le tenseur de Eshelby pour une hétérogénéité ellipsoïdale  $\Omega$  avec une interface légèrement imparfaite dans une matrice élastique. L'interface est dite légèrement imparfaite lorsque les complaisances des ressorts de l'interface ( $\alpha$  et  $\beta$ ) sont très petites. Le tenseur de Eshelby modifié,  $\mathbf{S}^M$ , pour ce type de problème est défini comme (cf. Qu (1993a,b); Qu et Cherkaoui (2006) pour les détails)

$$\mathbf{S}^M = \mathbf{S} + \mathbf{S} : \mathbf{R} : \mathbf{C} : (\mathbf{I} - \mathbf{S}), \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{S}$  est le tenseur de Eshelby original (Eshelby, 1957, 1961),  $\mathbf{C}$  est le tenseur des modules élastiques,  $\mathbf{I}$  est le tenseur d'identité d'ordre quatre et  $\mathbf{R}$  est le tenseur d'ordre quatre défini comme suit (Qu et Cherkaoui, 2006) :

$$R_{mnpq} = \frac{1}{4\Omega} \int_{\Gamma} (\psi_{mp} n_q n_n + \psi_{mq} n_p n_n + \psi_{np} n_q n_m + \psi_{nq} n_p n_m) d\Gamma. \quad (4.7)$$

Clairement, nous avons  $R_{mnpq} = R_{nmpq} = R_{nmqp} = R_{mnqp}$ . Notons que  $R_{mnpq}$  dépend des propriétés de l'interface au travers de  $\psi_{ij}$  et de la géométrie de l'inclusion. Les expressions de  $R_{mnpq}$  pour les géométries ellipsoïdale, cylindrique et sphérique sont données dans l'annexe C.1. A partir de ce point, nous pouvons étendre le modèle micromécanique de Qu (1993a) pour étudier l'effet des interfaces légèrement imparfaites sur les propriétés viscoélastiques des matériaux composites contenant des phases viscoélastiques.

#### 4.4 Propriétés viscoélastiques effectives : effet de glissement

Considérons maintenant un matériau composite constitué des hétérogénéités viscoélastiques (ou élastiques) uniformément orientées et identiques et d'une matrice viscoélastique. Nous supposons également qu'une fine couche souple et visqueuse est introduite entre les particules et la matrice. La matrice et les particules sont décrites par leur tenseur des modules complexes dépendants de la fréquence  $\hat{\mathbf{C}}_0$  et  $\hat{\mathbf{C}}_1$  respectivement. Il est utile de rappeler la convention suivante qui est employée dans la suite des développements. Ainsi toute grandeur complexe dépendante de la fréquence  $\hat{\mathbf{X}}$  sera représentée par une des expressions équivalentes suivantes :

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}(\omega) = \hat{\mathbf{X}}^R(\omega) + i\hat{\mathbf{X}}^I(\omega) = \hat{\mathbf{X}}^R(\omega) \left[ 1 + i\eta_X(\omega) \right], \quad (4.8)$$

où  $\omega$  est la fréquence et  $i = \sqrt{-1}$ . L'interface matrice/particule est supposée légèrement imparfaite assurant ainsi la continuité de la traction et le saut de déplacements à l'interface mais pas de séparation de surfaces soit  $\hat{\beta} \rightarrow 0$  ou d'une façon équivalente  $\hat{\beta} \ll \hat{\alpha}$  ou encore  $\nu_I \rightarrow 0.5$ . Le saut de déplacement est donné par la formule (4.3). Les composantes du tenseur (symétrique) des complaisances complexes (et éventuellement dépendantes de la fréquence) (cf. formule (4.4)) sont alors simplifiées dans ce cas comme :

$$\hat{\psi}_{ij} = \hat{\alpha} (\delta_{ij} - n_i n_j). \quad (4.9)$$

Rappelons que  $\hat{\alpha}$  est la complaisance (complexe dépendante de la fréquence) de l'interface dans sa direction tangentielle. Son expression est donnée dans l'expression (4.5). Les modélisations qui suivent sont basées sur la loi d'équilibre locale en négligeant les forces

de volumes et les effets d'inerties :

$$\hat{\sigma}_{ij,j} = 0. \quad (4.10)$$

Rappelons une fois encore que c'est cette approximation qui limite les modèles micromécaniques au domaine quasi-statique. Ce domaine est défini par le rapport entre la longueur d'onde de l'onde incidente et la dimension caractéristique des hétérogénéités. Comme nous l'avons dit dans le chapitre 3, ce rapport est habituellement exprimé à travers la quantité sans dimension  $ka$  où  $a$  représente la plus grande dimension de l'hétérogénéité et  $k$  est le nombre d'onde. Le domaine quasi-statique est limité alors aux fréquences pour lesquelles  $ka \ll 1$  (Blackstock, 2000; Haberman, 2007). Ainsi donc pour les fréquences où  $ka \approx 1$  ou même  $ka \gg 1$ , les modèles micromécaniques basés sur les théories des champs de contraintes/déformations moyens ne sont plus valides. Pour cette gamme de fréquences ces modèles micromécanique négligent le mécanisme physique de dispersion et par conséquent, les approches d'homogénéisation basées sur les dispersions simples ou multiples doivent être utilisées (Gaunard et Überall, 1982, 1978; Kuster et Toksöz, 1974; LeGonidec *et al.*, 2002).

#### 4.4.1 Localisation et homogénéisation : modèle de Mori-Tanaka

Comme nous l'avons dit plus haut (cf. § 3.2), les modèles micromécaniques sont basées sur deux étapes distinctes :

- l'étape de la localisation qui détermine la relation entre les champs microscopiques (locaux) et macroscopiques (globaux)
- l'étape d'homogénéisation qui utilise les techniques des champs moyens pour approximer le comportement macroscopique.

## Localisation

La moyenne du champ des contraintes sur le volume élémentaire représentatif (VER) du composite est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) dV = \phi_0 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \phi_1 \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1, \quad (4.11)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$  et  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$  sont les moyennes des contraintes dans la matrice et l'hétérogénéité respectivement,  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont leurs fractions volumiques respectives. Notons que  $\phi_0 + \phi_1 = 1$ . De même, la déformation moyenne sur le VER est donnée par (Qu et Cherkaoui, 2006) :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) dV = \phi_0 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \phi_1 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \frac{1}{2V} \int_{\Gamma} (\Delta \hat{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \Delta \hat{\mathbf{u}}) d\Gamma, \quad (4.12)$$

avec  $\Gamma$  la surface de l'hétérogénéité,  $\Omega$ ,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$  et  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$  sont respectivement les moyennes des déformations dans la matrice et dans l'hétérogénéité puis le symbole  $\otimes$  indique le produit tensoriel. En utilisant la définition du saut des déplacements, nous obtenons :

$$\Delta \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(\Gamma^+) - \hat{\mathbf{u}}(\Gamma^-) = \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.13)$$

Puisque l'intégrale dans l'expression (4.12) est délicate à évaluer pour une interface arbitraire, une très forte hypothèse simplification a été faite et validée par Qu (1993b). Il s'agit de remplacer le champ de contraintes  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r})$  le long de l'interface  $\Gamma$  par la contrainte moyenne  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$  dans l'hétérogénéité  $\Omega$  c'est-à-dire  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) \approx \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$ . Dans son travail, Qu (1993b) a montré que cette hypothèse forte est valide dans le cas des interfaces légèrement imparfaites. Par conséquent, les développements qui suivent ne sont valides que pour de très petites valeurs de  $\hat{\alpha}$ . Il est important de mentionner que l'usage de cette hypothèse dans notre travail est non seulement motivé par le fait de traiter facilement l'intégrale dans la formule (4.12) mais aussi par les résultats des travaux de Qu. Ainsi, cette intégrale peut

simplement s'écrire :

$$\int_{\Gamma} \left[ \left( \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \mathbf{n} \right) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \left( \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \mathbf{n} \right) \right] d\Gamma = 2\Omega \hat{\mathbf{R}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1, \quad (4.14)$$

avec  $\hat{\mathbf{R}}$  le tenseur d'ordre quatre défini par la formule (4.7) en remplaçant  $\boldsymbol{\psi}$  par  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ . Nous obtenons alors la déformation moyenne dans le composite comme ci-après :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \phi_0 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \phi_1 \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \hat{\mathbf{R}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \right). \quad (4.15)$$

Supposons maintenant que le VER est soumis à une contrainte macroscopique  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  sur sa frontière S c'est-à-dire que

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n} \Big|_S = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.16)$$

La méthode de Mori-Tanaka (MMT) suppose que la déformation moyenne  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$  dans l'hétérogénéité est la somme de la déformation moyenne  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$  dans la matrice et d'un terme de perturbation moyenne  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{pt}$  du champ de déformation dans l'hétérogénéité. De plus, la MMT considère que chaque hétérogénéité est introduite en l'absence des autres hétérogénéités dans une matrice uniforme de tenseur des modules complexes  $\hat{\mathbf{C}}_0$  et pré-contrainte par  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$ . A travers ces hypothèses de la MMT, on peut obtenir, grâce à certaines manipulations algébriques, le tenseur de localisation local c'est-à-dire la relation entre la déformation moyenne dans l'hétérogénéité et la déformation moyenne dans la matrice :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \hat{\mathbf{A}}^M : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \left[ \mathbf{I} + \hat{\mathbf{S}}^M : \mathbf{C}_0^{-1} : \left( \hat{\mathbf{C}}_1 - \hat{\mathbf{C}}_0 \right) \right]^{-1} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0, \quad (4.17)$$

où  $\hat{\mathbf{S}}^M$  le tenseur de Eshelby modifié de [Qu \(1993b\)](#) (cf. la formule (4.6)) et  $\hat{\mathbf{A}}^M$  est le tenseur de concentration de déformations local. De même, le tenseur de concentration de

contraintes local  $\hat{\mathbf{B}}^M$  peut-être déterminé comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\mathbf{A}}^M : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\mathbf{A}}^M : \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \hat{\mathbf{B}}^M : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0, \quad (4.18)$$

avec

$$\hat{\mathbf{B}}^M = \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\mathbf{A}}^M : \hat{\mathbf{C}}_0^{-1}.$$

En utilisant l'expression (4.18) dans l'équation (4.11), on obtient :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \hat{\mathbf{B}}^M \right) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0. \quad (4.19)$$

Nous pouvons alors déterminer le tenseur de concentration de contraintes global  $\hat{\mathbf{B}}^1$  en insérant la formule (4.19) dans l'expression (4.18) :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \hat{\mathbf{B}}^1 : \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{B}}^M : \left( \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \hat{\mathbf{B}}^M \right)^{-1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.20)$$

soit

$$\hat{\mathbf{B}}^1 = \hat{\mathbf{B}}^M : \left( \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \hat{\mathbf{B}}^M \right)^{-1}.$$

### Homogénéisation

Le tenseur des modules complexes effectifs  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  permet de relier la contrainte moyenne à la déformation moyenne selon la relation :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.21)$$

En utilisant les expressions (4.17) à (4.20) dans l'expression (4.15) nous obtenons :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[ \phi_0 \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} : \hat{\mathbf{B}}^0 + \phi_1 \left( \hat{\mathbf{C}}_1^{-1} + \hat{\mathbf{R}} \right) : \hat{\mathbf{B}}^1 \right] : \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.22)$$

où

$$\hat{\mathbf{B}}^0 = \left( \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \hat{\mathbf{B}}^M \right)^{-1}.$$

Il s'en suit alors que :

$$\begin{aligned} \left( \hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}} \right)^{-1} &= \phi_0 \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} : \hat{\mathbf{B}}^0 + \phi_1 \left( \hat{\mathbf{C}}_1^{-1} + \hat{\mathbf{R}} \right) : \hat{\mathbf{B}}^1 \\ &= \left[ \phi_0 \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} + \phi_1 \left( \hat{\mathbf{C}}_1^{-1} + \hat{\mathbf{R}} \right) : \hat{\mathbf{B}}^M \right] : \hat{\mathbf{B}}^0 \\ &= \left[ \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \left( \hat{\mathbf{C}}_1^{-1} + \hat{\mathbf{R}} \right) : \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\mathbf{A}}^M \right] : \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} : \hat{\mathbf{B}}^0 \\ &= \left[ \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \left( \hat{\mathbf{C}}_1^{-1} + \hat{\mathbf{R}} \right) : \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\mathbf{A}}^M \right] : \left( \phi_0 \hat{\mathbf{C}}_0 + \phi_1 \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\mathbf{A}}^M \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ainsi, le tenseur des modules complexes dépendants de la fréquence du composite VE peut s'écrire alors sous la forme :

$$\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \left( \phi_0 \hat{\mathbf{C}}_0 + \phi_1 \hat{\mathbf{C}}_1 : \hat{\mathbf{A}}^M \right) : \left[ \phi_0 \mathbf{I} + \phi_1 \left( \mathbf{I} + \hat{\mathbf{R}} : \hat{\mathbf{C}}_1 \right) : \hat{\mathbf{A}}^M \right]^{-1}. \quad (4.24)$$

#### 4.4.2 Application : configuration isotrope et particules sphériques

Dans la configuration où la matrice est isotrope et les particules sphériques et isotropes, une solution analytique du problème traité est possible. En effet, dans une configuration isotrope, tous les tenseurs précédemment définis sont tous isotropes. Si  $\hat{\mathbf{X}}$  est l'un de ses tenseurs,  $\hat{\mathbf{X}}$  s'écrit alors sous la forme :

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{S}_X \mathbf{I}^s + \hat{D}_X \mathbf{I}^d, \quad (4.25)$$

où  $\hat{S}_X$  et  $\hat{D}_X$  sont respectivement les partie sphérique et déviatorique de  $\hat{\mathbf{X}}$ . Rappelons que les tenseurs d'ordre quatre  $\mathbf{I}^s$  et  $\mathbf{I}^d$ , sont définis en fonction du symbole de Kronecker,

$\delta$ , comme :

$$I_{ijkl}^s = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl},$$

$$I_{ijkl}^d = \frac{1}{2} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),$$

et ils vérifient les propriétés suivantes :

$$\mathbf{I}^d : \mathbf{I}^d = \mathbf{I}^d, \quad \mathbf{I}^s : \mathbf{I}^s = \mathbf{I}^s, \quad \mathbf{I}^s : \mathbf{I}^d = \mathbf{I}^d : \mathbf{I}^s = 0.$$

Les expressions pour le tenseur d'ordre quatre  $\hat{\mathbf{R}}$  sont données dans l'Annexe C.1 pour les ellipsoïdes, sphères et cylindres. Spécifiquement, dans le cas sphérique et pour  $\hat{\beta} = 0$ , on obtient

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{6\hat{\alpha}}{5d} \mathbf{I}^d, \tag{4.26}$$

où  $d$  est le diamètre de la particule sphérique. Si nous désignons respectivement par  $\hat{\mu}_i$  et  $\hat{\kappa}_i$  ( $i = 0$  pour la matrice et  $i = 1$  pour la particule sphérique) les modules de cisaillement et de compressibilité des phases supposées isotropes, alors

$$\hat{\mathbf{C}}_i = 3\hat{\kappa}_i \mathbf{I}^s + 2\hat{\mu}_i \mathbf{I}^d. \tag{4.27}$$

Le comportement effectif est aussi isotrope dans une telle configuration c'est-à-dire que

$$\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = 3\hat{\kappa}^{\text{eff}} \mathbf{I}^s + 2\hat{\mu}^{\text{eff}} \mathbf{I}^d. \tag{4.28}$$

Rappelons ici le tenseur original de [Eshelby](#) pour ce problème de composite viscoélastique dans une configuration isotrope et de géométrie sphérique :

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hat{\kappa}_0}{3\hat{\kappa}_0 + 4\hat{\mu}_0} \mathbf{I}^s + \frac{3(\hat{\kappa}_0 + 2\hat{\mu}_0)}{5(3\hat{\kappa}_0 + 4\hat{\mu}_0)} \mathbf{I}^d. \tag{4.29}$$

Le tenseur de Eshelby modifié pour ce problème d'interface légèrement imparfaite donnée dans la relation (4.6) est également isotrope et prend la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{S}}^M = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{R}} : \hat{\mathbf{C}}_0 : (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{S}}) = 3\hat{\gamma}_0 \mathbf{I}^s + 2\hat{\delta}_0 \mathbf{I}^d, \quad (4.30)$$

où :

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\hat{\kappa}_0}{3(3\hat{\kappa}_0 + 4\hat{\mu}_0)}, \quad (4.31)$$

$$\hat{\delta}_0 = \frac{3(\hat{\kappa}_0 + 2\hat{\mu}_0) \left[ 4\hat{\mu}_0 (25d + 42\hat{\alpha}\hat{\mu}_0) + 3\hat{\kappa}_0 (25d + 48\hat{\alpha}\hat{\mu}_0) \right]}{250d (3\hat{\kappa}_0 + 4\hat{\mu}_0)^2}. \quad (4.32)$$

Par le biais de quelques manipulations algébriques de la formule (4.24), nous obtenons les expressions des modules de cisaillement et de compressibilité complexes effectifs du composite avec une interface légèrement imparfaite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu}^{\text{eff}} = \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_0 \frac{\phi_1 \left[ 5 \left( \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_0} - 1 \right) - \frac{12\hat{\alpha}\hat{\mu}_1}{d} \right]}{5 + 10(1 - \phi_1) \hat{\delta}_0 \left( \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_0} - 1 \right) + \frac{12\phi_1 \hat{\alpha}\hat{\mu}_1}{d}}, \\ \hat{\kappa}^{\text{eff}} = \hat{\kappa}_0 + \hat{\kappa}_0 \frac{\phi_1 \left( \frac{\hat{\kappa}_1}{\hat{\kappa}_0} - 1 \right)}{1 + 3(1 - \phi_1) \hat{\gamma}_0 \left( \frac{\hat{\kappa}_1}{\hat{\kappa}_0} - 1 \right)}. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

On peut vérifier bien à partir de la formule (4.33) que si  $\hat{\alpha} = 0$ , c'est-à-dire que l'on est en présence d'une interface parfaite, on retrouve bien les modules effectifs tels qu'ils sont prédits par le schéma micromécanique de Mori-Tanaka. Aussi remarquons-nous à travers l'équation (4.33) que seul le module de cisaillement effectif  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$  est affecté par  $\hat{\alpha}$  puisque d'après la formule (4.31),  $\hat{\gamma}_0$  ne dépend pas de  $\hat{\alpha}$ . Ceci est prévisible puisque nous avons annulé l'effet de la complaisance dans la direction normale à l'interface ( $\hat{\beta} = 0$ ) pour empêcher toute séparation de surfaces. Ainsi donc, dans la suite, nous nous intéressons

uniquement au module de cisaillement complexe  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$ . Ce dernier sera décomposé en sa partie de stockage  $\mu^{\text{eff}}$  et sa partie de perte (facteur d'amortissement)  $\eta^{\text{eff}}$  :

$$\hat{\mu}^{\text{eff}} = \mu^{\text{eff}} (1 + i\eta^{\text{eff}}). \quad (4.34)$$

De la même façon nous récrivons  $\hat{\mu}_0$  et  $\hat{\mu}_1$  comme :

$$\hat{\mu}_0 = \mu_0 (1 + i\eta_0), \quad \hat{\mu}_1 = \mu_1 (1 + i\eta_1). \quad (4.35)$$

Nous remarquons à partir de l'expression (4.33) que  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$  dépend non seulement de la fraction volumique  $\phi_1$  des particules mais aussi de la taille  $d$  des particules et de la complaisance  $\hat{\alpha}$  de l'interface dans la direction tangentielle. Pour une analyse assez significative, il est judicieux d'introduire des paramètres sans dimension. Ainsi nous introduisons deux paramètres :

$$\hat{r} = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_0} = r (1 + i\eta_G), \quad \hat{\chi} = \frac{\hat{\alpha}\hat{\mu}_1}{d} = \chi (1 + i\eta_\chi), \quad (4.36)$$

avec

$$r = \Re[\hat{r}] = \frac{\mu_1(1 + \eta_0\eta_1)}{\mu_0(1 + \eta_0^2)}, \quad \eta_G = \frac{\Im[\hat{r}]}{\Re[\hat{r}]} = \frac{\eta_1 - \eta_0}{1 + \eta_0\eta_1}, \quad \chi = \Re[\hat{\chi}], \quad \eta_\chi = \frac{\Im[\hat{\chi}]}{\Re[\hat{\chi}]}, \quad (4.37)$$

où  $\Re[\hat{g}]$  et  $\Im[\hat{g}]$  représentent les parties réelle et imaginaire de la quantité complexe  $\hat{g}$ . Notons que ces paramètres peuvent dépendre de la fréquence et éventuellement de la température. En introduisant les expressions des paramètres adimensionnels  $\hat{r}$  et  $\hat{\chi}$  dans l'expression (4.33) de  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$ , nous obtenons :

$$\hat{\mu}^{\text{eff}} = \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_0 \frac{\phi_1 [5(\hat{r} - 1) - 12\hat{\chi}]}{5 + 10(1 - \phi_1)\hat{\delta}_0(\hat{r} - 1) + 12\phi_1\hat{\chi}}. \quad (4.38)$$

D'après la formule (4.32), on peut vérifier que  $\hat{\delta}_0$  peut s'écrire en fonction de  $\hat{\chi}$  et  $\hat{r}$ . Il faut noter que  $\hat{\chi}$  est un paramètre très important puisqu'il incorpore les effets combinés du diamètre  $d$  de la particule, du module complexe  $\hat{\mu}_1$  de la particule, de la complaisance  $\hat{\alpha}$  de l'interface dans la direction tangentielle et évidemment de la fréquence.

Nous pouvons maintenant faire quelques applications numériques pour étudier l'effet de certains paramètres sur  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$  afin de voir comment ceci peut être exploité dans la conception des matériaux amortissants.

## 4.5 Exemples numériques et discussions

Nous considérons, pour ces applications, le PVB, la couche centrale des pare-brises d'automobile. Le module de cisaillement complexe dépendant de la fréquence du PVB à 20°C est donné par (Haberman, 2007) :

$$\hat{\mu}(\omega) = \mu_\infty + (\mu^0 - \mu_\infty) \left[ 1 + (i\omega\tau^0)^{1-\alpha^0} \right]^{-\beta^0}, \quad (4.39)$$

avec :  $\mu_\infty = 2.35 \times 10^8$  Pa,  $\mu^0 = 4.79 \times 10^5$  Pa,  $\alpha^0 = 0.46$ ,  $\beta^0 = 0.1946$ ,  $\tau^0 = 0.3979$ ,  $\omega$  est la fréquence. Bien qu'il est possible d'introduire cette expression de  $\hat{\mu}(\omega)$  dans le présent modèle, nous effectuons les calculs pour une fréquence donnée ( $\omega = 1000$ ) ce qui correspond à  $\mu_0 = 112.19$  MPa et  $\eta_0 = 0.176$  pour les modules de stockage et de perte du PVB.

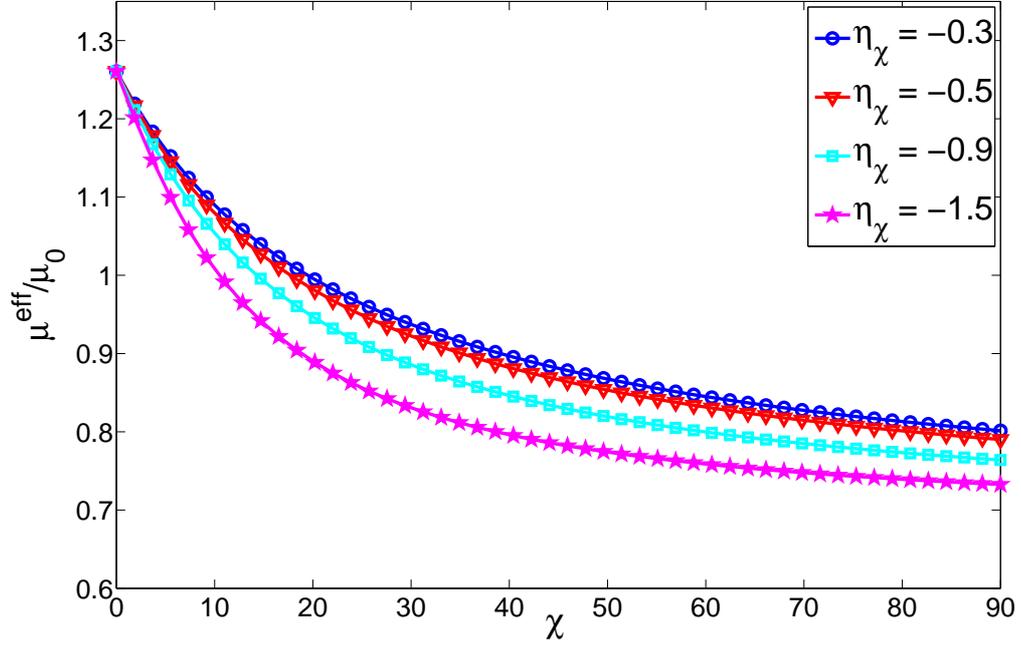
### 4.5.1 Effet des paramètres $\chi$ et $\eta_\chi$

Les figures 4.2(a) et 4.2(b) montrent la relation entre les modules effectifs normalisés du composite VE et les composantes du paramètre sans dimension  $\hat{\chi}$  pour des valeurs fixées des autres paramètres. La figure 4.2(b) montre que le module de perte effectif  $\eta^{\text{eff}}$  augmente lorsque  $\eta_\chi < 0$  et  $|\eta_\chi|$  augmente. Il convient de souligner, au travers de nos expérimentations numériques, que ceci n'est vrai que si  $|\eta_\chi| > \eta_0$ . Une caractéristique

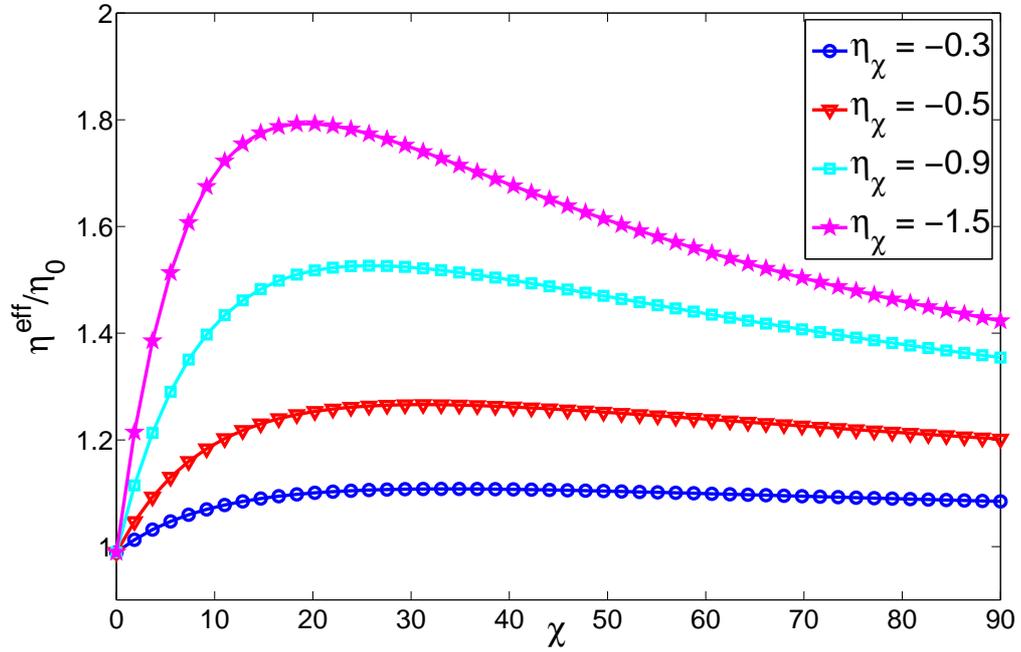
commune aux courbes de la figure 4.2(b) est que chaque courbe présente un pic à une certaine valeur de  $\chi = \chi_{\max}$  et tend ensuite vers 1 quand  $\chi$  tend vers 0 ou vers l'infini. Ce phénomène physique peut être expliqué ainsi : si  $\hat{\alpha}$  est la seule variable de  $\hat{\chi}$ , alors  $\eta^{\text{eff}}$  sera égal à  $\eta_0$  lorsque  $\chi = 0$  (cas de l'interface parfaite) ou bien lorsque  $\chi \rightarrow \infty$  (cas de la décohésion complète à l'interface). Il existe une valeur particulière de  $\chi = \chi_{\max}$  pour laquelle  $\eta^{\text{eff}}$  est maximal. La figure 4.2(a) montre que le module de stockage effectif  $\mu^{\text{eff}}$  s'améliore pour les petites valeurs de  $\chi$ . Cependant, pour les valeurs élevées de  $\chi$ , le module de stockage se dégrade sensiblement et ceci pour chacune des valeurs de  $\eta_\chi < 0$  et  $|\eta_\chi| > \eta_0$ . Ainsi, puisque  $\hat{\chi}$  incorpore les effets combinés du diamètre  $d$  de la particule, du module complexe  $\hat{\mu}_1$  de la particule et de la complaisance  $\hat{\alpha}$  de l'interface dans la direction tangentielle, il est possible d'ajuster ces valeurs pour obtenir les valeurs désirées de  $\chi$  et de  $\eta_\chi$ . De nouveaux degrés de liberté s'offrent alors à la conception des matériaux pour des applications d'amortissement. Il est assez intéressant de remarquer que les deux modules  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$  sont simultanément améliorés pour toutes les courbes des 4.2(a) et 4.2(b) lorsque  $0 < \chi < 10$ .

#### 4.5.2 Effet de la fraction volumique $\phi_1$ des particules

Lorsque le paramètre  $\hat{\chi}$  demeure inchangé, les propriétés VE du composite dépendent de la fraction volumique  $\phi_1$  des particules. Les figures 4.3(a) et 4.3(b) représentent l'influence de  $\phi_1$  sur  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$ . Comme on peut s'y attendre, le module de perte effectif  $\eta^{\text{eff}}$  augmente avec  $\phi_1$  (voir figure 4.3(b)). Naturellement, c'est un fait que, pour un diamètre des particules fixé, une grande fraction volumique des particules induit une vaste zone d'interface par unité de volume. En augmentant la valeur de  $\chi$  de 0 à 90, le facteur de perte effectif croît à partir de  $\eta_0$  d'abord, puis décroît vers  $\eta_0$  après avoir atteint un sommet en un  $\chi = \chi_{\max}$  et ceci est vrai pour chacune des courbes représentées sur la figure 4.3(b). La figure 4.3(a) montre quant à elle une dégradation significative du module de stockage



(a) Module de stockage



(b) Module de perte

FIG. 4.2 – Effet de  $\chi$  et  $\eta_\chi$  pour  $r = 50$ ,  $\eta_1 = 0$ ,  $\phi_1 = 0.1$ .

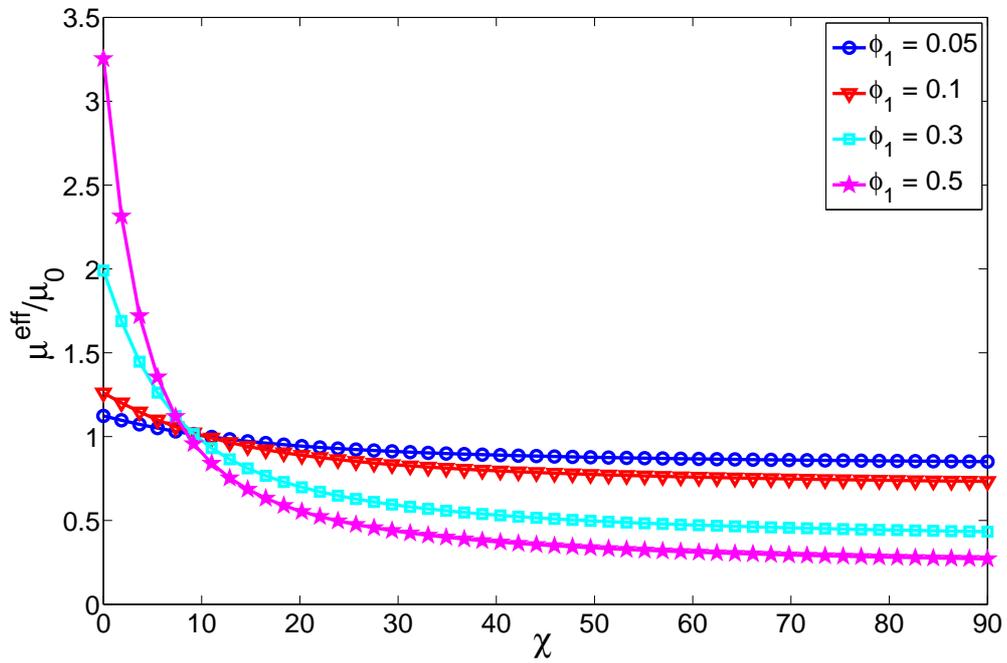
$\mu^{\text{eff}}$  lorsque  $\phi_1$  augmente et pour  $\chi > 10$ . En revanche,  $\mu^{\text{eff}}$  est amélioré et augmente avec  $\phi_1$  pour des valeurs de  $\chi$  telles que  $0 < \chi < 10$ . Les résultats sont compatibles avec ceux présentés sur les figures 4.2(a) et 4.2(b) ainsi qu'aux explications liées à ces derniers.

### 4.5.3 Effet du rapport de rigidités $r$

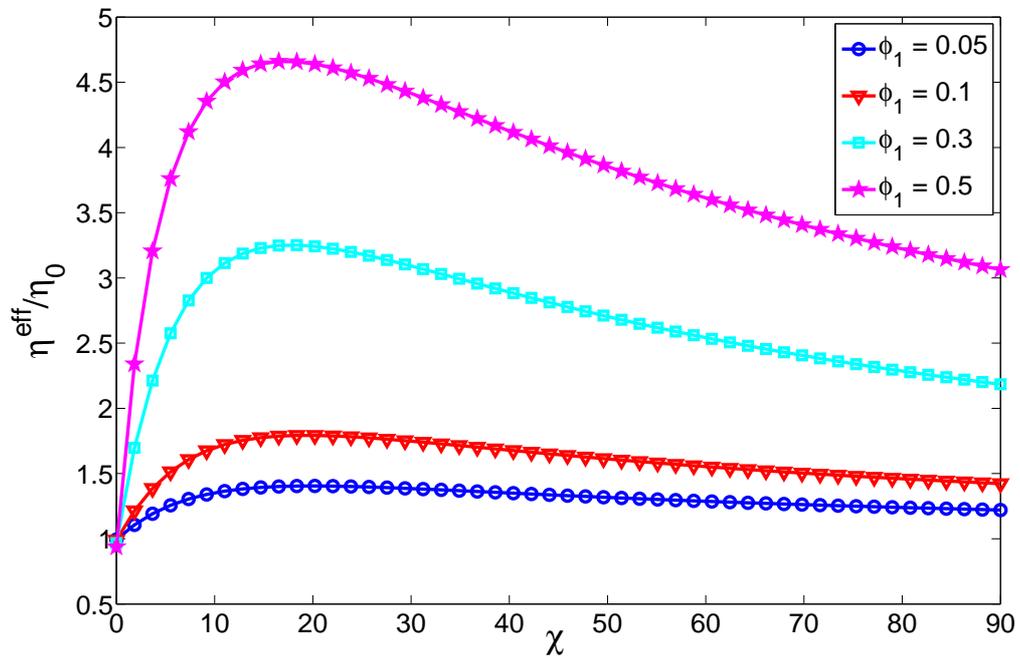
Les figures 4.4(a) et 4.4(b) présentent la sensibilité de  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$  au rapport de rigidités  $r$  pour le même intervalle des valeurs de  $\chi$ . Comme on pouvait s'y attendre, la figure 4.4(a) montre que  $\mu^{\text{eff}}$  croît avec  $r$  pour toutes les valeurs de  $\chi$ . Cependant, suivant les valeurs de  $r$ ,  $\mu^{\text{eff}}$  est légèrement amélioré pour les très petites valeurs de  $\chi$  ( $0 < \chi < \chi_{\text{am}}$  où  $\chi_{\text{am}}$  diminue avec  $r$ ). Ainsi pour  $r = 50$ , on a  $\chi_{\text{am}} \approx 10$  tandis que  $\chi_{\text{am}} \approx 20$  lorsque  $r = 100$ . La sévère dégradation de  $\mu^{\text{eff}}$  pour  $\chi > 10$  est toujours observée comme dans les cas précédents (figures 4.2(a) et 4.3(a)). L'évolution de  $\eta^{\text{eff}}$  en fonction de  $r$  est montrée sur la figure 4.4(b). Tout d'abord, nous constatons que la valeur de  $\chi = \chi_{\text{max}}$  pour laquelle le pic  $\eta_{\text{max}}^{\text{eff}}$  de  $\eta^{\text{eff}}$  est atteint augmente avec  $r$ . Cependant, nous remarquons que  $\eta_{\text{max}}^{\text{eff}}$  n'est pas très influencé par  $r$ . L'allure générale des courbes de la figure 4.4(b) est similaire à celle observée pour les figures 4.2(b) et 4.3(b) : le facteur de perte effectif croît à partir de  $\eta_0$  d'abord, puis décroît vers  $\eta_0$  après avoir atteint un pic en un  $\chi = \chi_{\text{max}}$  pour  $0 \leq \chi \leq 90$ . Pour finir, il est intéressant de remarquer que  $\chi_{\text{am}}$  augmente avec  $\chi_{\text{max}}$ . Les deux modules  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$  sont simultanément améliorés pour  $\chi < \chi_{\text{am}}$ .

### 4.5.4 Effet du facteur de perte $\eta_1$ de la particule

Pour tous les composites précédemment étudiés, nous avons implicitement considéré des particules élastiques puisque  $\eta_1 = 0$ . Nous montrons maintenant l'effet du facteur de perte  $\eta_1$  de la particule sur les modules effectifs  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$ . Evidemment, la figure 4.5(b) nous montre que  $\eta^{\text{eff}}$  augmente avec  $\eta_1$ . La variation de  $\eta^{\text{eff}}$  en fonction de  $\chi$  pour les diverses valeurs de  $\eta_1$  est identique à celle observée pour les cas précédents. Nous remarquons au travers de la figure 4.5(a) que la dégradation de  $\mu^{\text{eff}}$  augmente avec  $\eta_1$

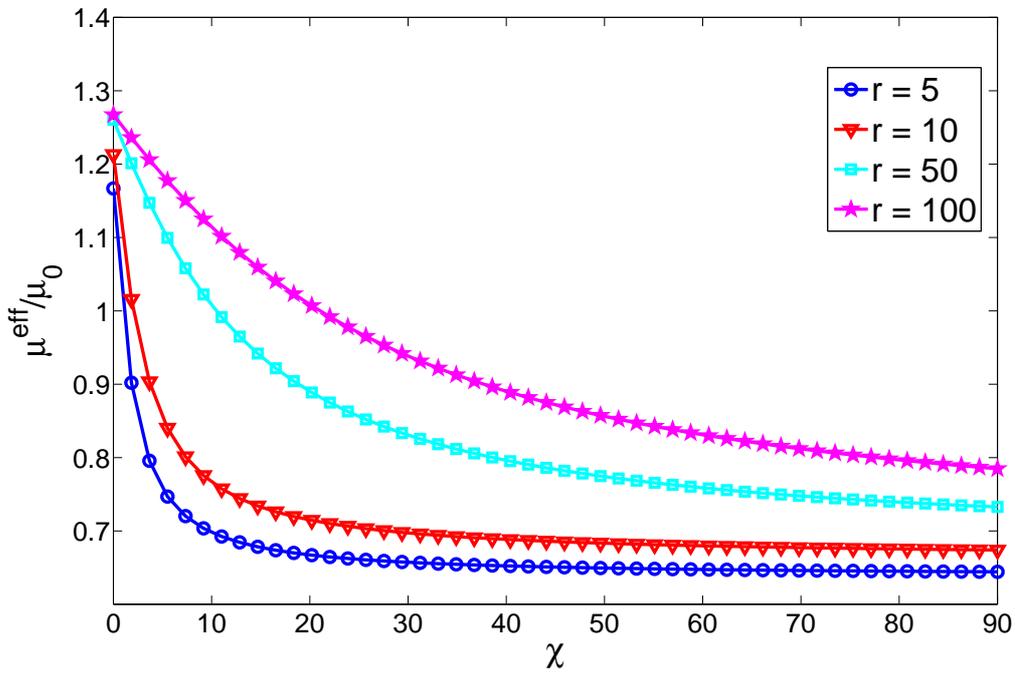


(a) Module de stockage

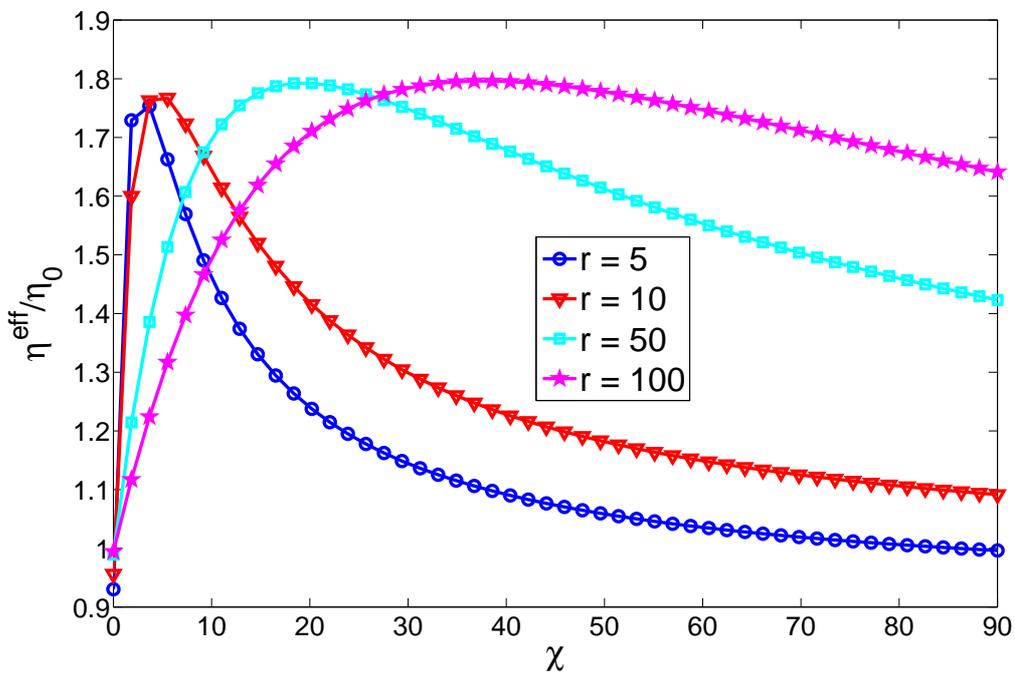


(b) Module de perte

FIG. 4.3 – Effet de  $\phi_1$  pour  $r = 50$ ,  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_\chi = -1.5$ .



(a) Module de stockage



(b) Module de perte

FIG. 4.4 – Effet du rapport de rigidités  $r$  pour  $\phi_1 = 0.1$ ,  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_\chi = -1.5$ .

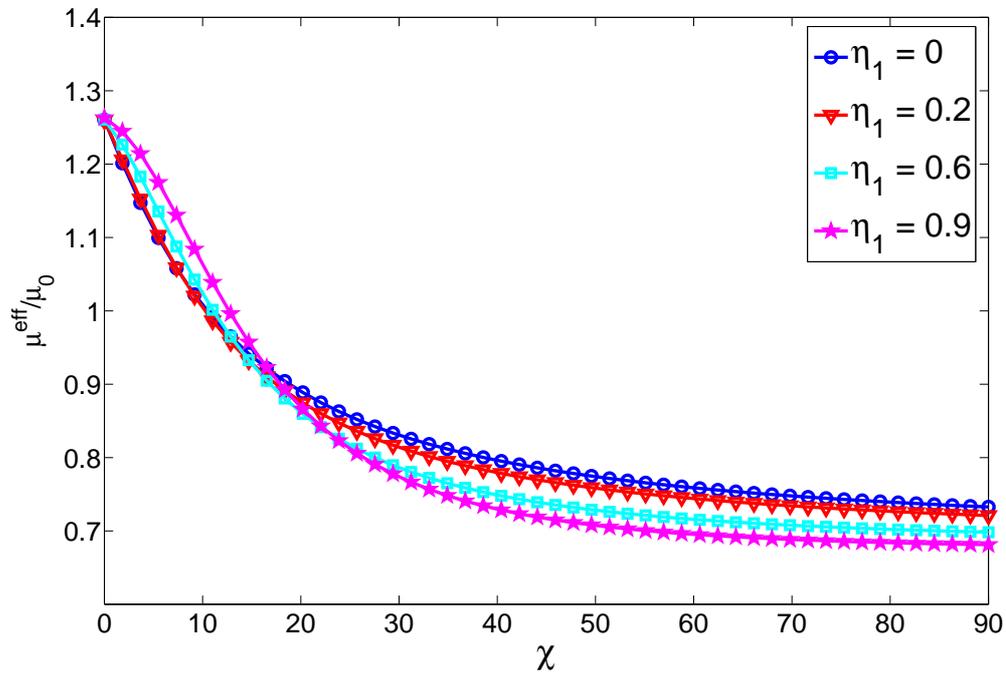
pour les valeurs de  $\chi > 20$ . Pour  $10 < \chi < 20$ , la dégradation de  $\mu^{\text{eff}}$  est inférieure à 1% tandis que pour  $\chi < 10$ ,  $\mu^{\text{eff}}$  est légèrement amélioré et cette amélioration augmente également légèrement avec  $\eta_1$ .

#### 4.5.5 Comportement dépendant de la fréquence

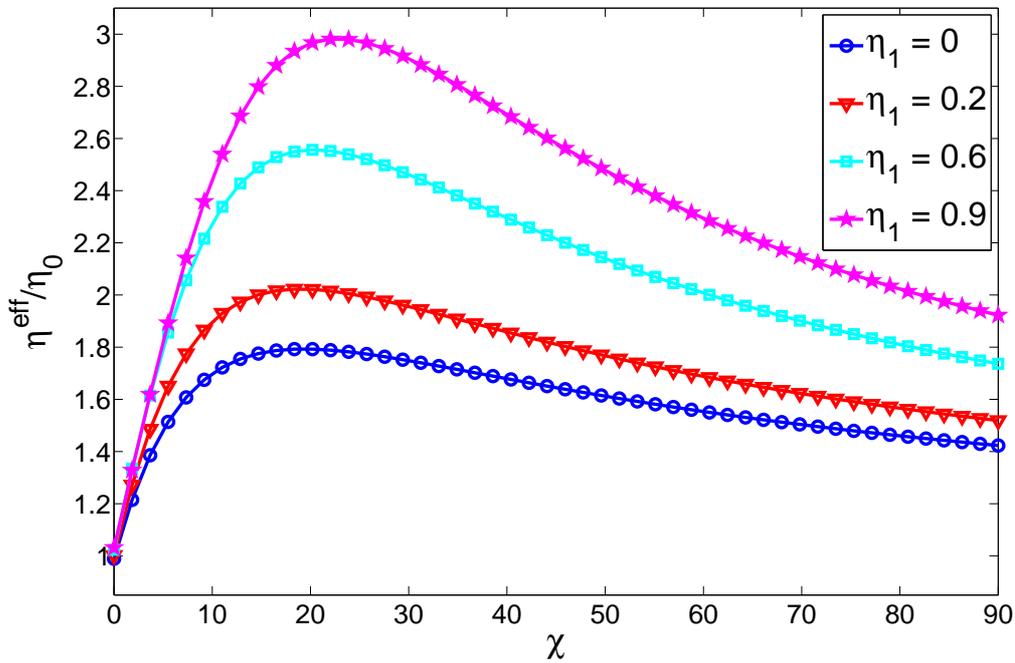
Nous illustrons avec les figures 4.6(a) et 4.6(b) la capacité du présent modèle à considérer le comportement dépendant de la fréquence du PVB. Les résultats de  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$  pour toutes les fréquences sont compatibles avec résultats précédemment présentés et commentés. C'est important de noter les similitudes entre les figures 4.6(a) et 3.11(a) d'une part et les figures 4.6(b) et 3.11(b) d'autre part. Clairement, nous obtenons avec l'effet de glissement interfacial les comportements que nous avons observés avec les inclusions à rigidité négative (cf. § 3.6.3).

#### 4.5.6 Effet de forme associé à l'effet de glissement

Tous les cas de composites VE avec l'effet de glissement que nous avons considérés jusqu'ici sont constitués d'inclusions sphériques. Dans le cas d'une géométrie ellipsoïdale avec des matériaux isotropes (ou anisotropes), une évaluation numérique des tenseurs  $\hat{\mathbf{S}}$  et  $\hat{\mathbf{R}}$  est nécessaire pour obtenir le tenseur des modules complexes effectifs  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$  de la formule (4.24). Rappelons que les expressions de  $\hat{\mathbf{R}}$  pour les géométries ellipsoïdale, cylindrique et sphérique sont données dans l'annexe C.1. Les formules pour évaluer numériquement le tenseur de Eshelby  $\hat{\mathbf{S}}$  pour des matériaux isotropes avec des géométries de la famille des ellipsoïdes sont données dans Qu et Cherkaoui (2006, pages 93-98) et dans (Christensen, 2005a, pages 93-95) et sont ici rappelées dans l'annexe C.2. Pour étudier l'effet de forme sur  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$ , nous considérons une inclusion de forme ellipsoïdale dont les demi-axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont tels que  $a = b$  et nous notons  $\varsigma = a/c$ . Rappelons que dans une telle configuration, si les phases du composite sont isotropes alors  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$  est isotrope transverse (5 constantes indépendantes).

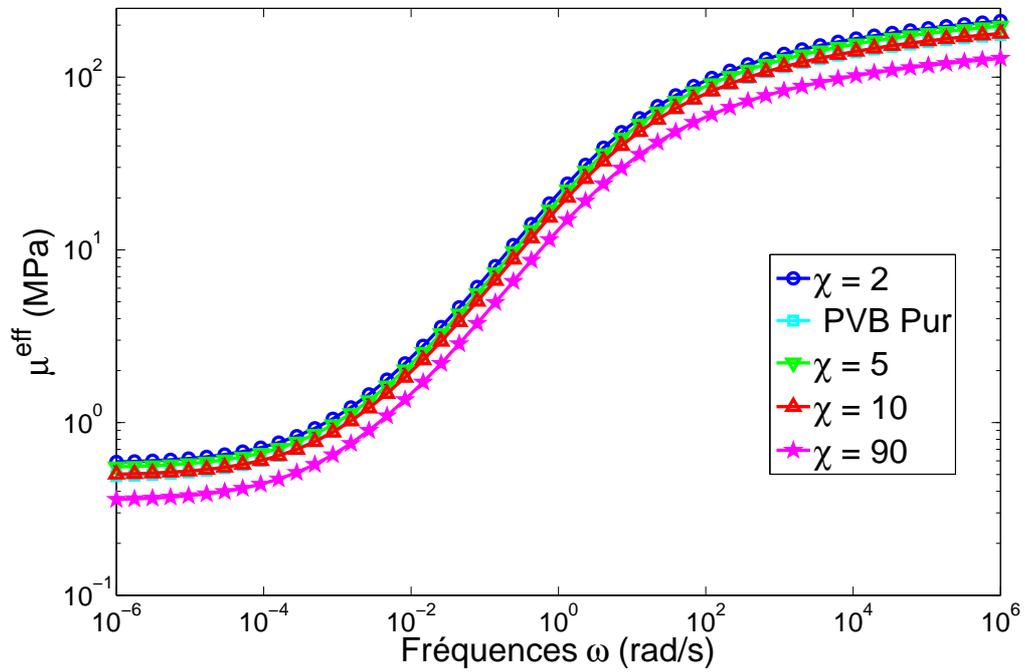


(a) Module de stockage

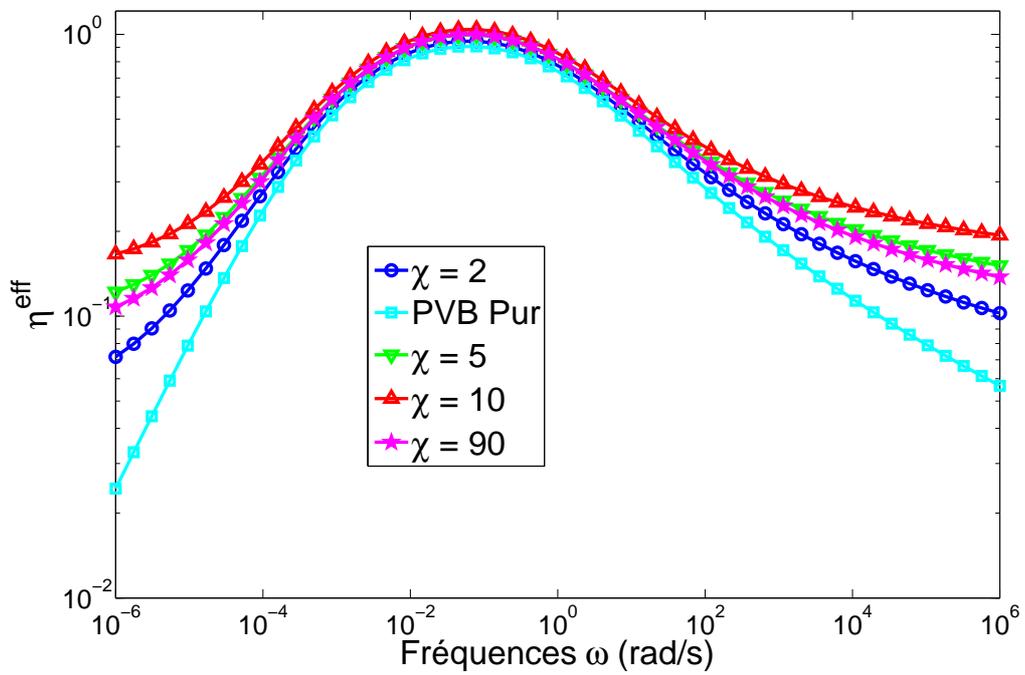


(b) Module de perte

FIG. 4.5 – Effet de  $\eta_1$  pour  $\phi_1 = 0.1$ ,  $r = 50$ ,  $\eta_\chi = -1.5$ .



(a) Module de stockage



(b) Module de perte

FIG. 4.6 – Dépendance en fréquence :  $\phi_1 = 0.1$ ,  $r = 50$ ,  $\eta_\chi = -1.5$ ,  $\eta_1 = 0$ .

Nous montrons dans les tableaux 4.1 et 4.2 l'effet du rapport  $\varsigma$  sur les modules de stockage longitudinaux effectifs ( $E_i^{\text{eff}}$ ) et leurs facteurs d'amortissements associés ( $\eta_i^{\text{eff}}$ ), les parties réelle et imaginaire des modules de cisaillement effectifs  $\hat{\mu}_{ij}^{\text{eff}}$  ainsi que les coefficients de Poisson effectifs  $\nu_{ij}^{\text{eff}}$ . Dans ces deux tableaux, les modules longitudinaux et de cisaillement sont en MPa. Les calculs sont faits pour  $\phi_1 = 30\%$  d'inclusions,  $a = b = d/2 = 1\mu\text{m}$ ,  $r = 50$ ,  $\eta_\chi = -1.5$ . La matrice du composite est du PVB dont les propriétés sont évaluées pour  $\omega = 1000$  ( $\mu_0 = 112.19$  MPa et  $\eta_0 = 0.176$ ). Selon les tableaux 4.1 et 4.2, la géométrie sphérique correspondant à  $\varsigma = 1$  paraît être la meilleure pour obtenir des valeurs optimales des modules de stockage et d'amortissement. Ainsi, pour  $\varsigma = 1$  et  $\chi = 8$ , les modules de stockage et de perte sont respectivement  $\mu^{\text{eff}} = 118.9318$  MPa et  $\eta^{\text{eff}} = 0.5779$  contre  $\mu_0 = 112.19$  MPa et  $\eta_0 = 0.176$  pour le PVB pur. La rigidité et l'amortissement se trouvent ainsi simultanément améliorés. En revanche, pour  $\varsigma = 1$  et  $\chi = 20$ , on gagne en amortissement ( $\eta^{\text{eff}} = 0.6676$ ) et on perd en rigidité ( $\mu^{\text{eff}} = 75.4004$  MPa).

$\varsigma$	1/2	3/4	5/8	1	8/5	4/3	2
$E_1^{\text{eff}}$	88.47	106.3113	100.4012	220.8314	113.5555	113.3038	113.1056
$\eta_1^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.6469	0.176	0.176	0.176
$E_3^{\text{eff}}$	111.7088	114.823	114.4434	220.8314	90.287	101.2548	71.3278
$\eta_3^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.6469	0.176	0.176	0.176
$\mu_{12}^{\text{eff}}$	40.7612	40.7711	40.8074	75.4004	39.056	39.7831	37.8227
$\eta_{12}^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.6676	0.176	0.176	0.176
$\mu_{23}^{\text{eff}}$	40.3045	40.3086	40.2729	75.4004	40.8054	40.7226	40.7066
$\eta_{23}^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.6676	0.176	0.176	0.176
$\nu_{12}^{\text{eff}}$	0.0852	0.3038	0.2302	0.4504	0.4538	0.424	0.4952
$\nu_{23}^{\text{eff}}$	0.3093	0.3532	0.3386	0.4504	0.4884	0.4206	0.6777

TAB. 4.1 – Effet de forme associé au glissement interfacial.  $\chi = 20$ .

$\varsigma$	1/2	3/4	5/8	1	8/5	4/3	2
$E_1^{\text{eff}}$	88.47	106.3113	100.4012	342.3566	113.5555	113.3038	113.1056
$\eta_1^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.5537	0.176	0.176	0.176
$E_3^{\text{eff}}$	111.7088	114.8230	114.4434	342.3566	90.2870	101.2548	71.3278
$\eta_3^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.5537	0.176	0.176	0.176
$\mu_{12}^{\text{eff}}$	40.7612	40.7711	40.8074	118.9318	39.0560	39.7831	37.8227
$\eta_{12}^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.5779	0.176	0.176	0.176
$\mu_{23}^{\text{eff}}$	40.3045	40.3086	40.2729	118.9318	40.8054	40.7226	40.7066
$\eta_{23}^{\text{eff}}$	0.176	0.176	0.176	0.5779	0.176	0.176	0.176
$\nu_{12}^{\text{eff}}$	0.0852	0.3038	0.2302	0.4242	0.4538	0.4240	0.4952
$\nu_{23}^{\text{eff}}$	0.3093	0.3532	0.3386	0.4242	0.4884	0.4206	0.6777

TAB. 4.2 – Effet de forme associé au glissement interfacial.  $\chi = 8$ .

## 4.6 Conclusions et question de recherche

Théoriquement, nous venons de montrer que si l'inclusion et la matrice glissent l'une par rapport à l'autre lorsque le composite est soumis à un effort de cisaillement alors on peut améliorer de façon significative l'amortissement global. Quant à la faisabilité, des travaux comme ceux de [Raj et Ashby \(1971\)](#); [Yoda \*et al.\* \(1978\)](#); [Funn et Dutta \(1999\)](#); [He et Jiang \(2003\)](#); [Berthelot et Sefrani \(2006\)](#); [Robinson et Kosmatka \(2006\)](#) ont prouvé qu'il est possible d'incorporer entre la matrice et l'inclusion une couche visqueuse leur permettant de glisser l'une par rapport à l'autre. L'effet de taille qui était absent dans le modèle micromécanique du chapitre 3 est introduit dans ce chapitre par l'intermédiaire du tenseur d'ordre quatre  $\hat{\mathbf{R}}$ . Cependant, même si la taille de la particule est introduite dans ce modèle, elle reste quand même dans les dimensions conventionnelles c'est-à-dire quelques micromètres ( $\mu\text{m}$ ). En effet si l'on descend à des tailles de particule de quelques nanomètres ( $10^{-9}$  m), les modèles micromécaniques présentés jusqu'ici ne sont plus adaptés à traiter ces types de matériaux composites. D'autres études ont révélé que les matériaux avec des tailles non conventionnelles (quelques nanomètres) exhibent des comportements très différents des comportements des matériaux classiques ([Miller et Shenoy, 2000](#); [Yoshimoto \*et al.\*, 2004](#); [Dingreville, 2007](#)). Puisque nous explorons les voies et moyens pour concevoir des matériaux à fort pouvoir amortissant, il serait

intéressant d'étudier l'effet que peuvent avoir les tailles non conventionnelles sur le comportement amortissant des composites VE. Pour y parvenir, une compréhension de tous les phénomènes physiques présents ou dominants à l'échelle nanométrique et qui font que cette échelle présente des caractéristiques très particulières nécessitent d'être bien compris. Ainsi nous présentons dans le chapitre 5 des principales caractéristiques de l'échelle nanométrique et leurs incidences sur les nanomatériaux. Nous dégagerons alors les vraies raisons pour lesquelles les modèles micromécaniques classiques ne peuvent pas traiter ces types de matériaux. Ensuite nous présenterons certains travaux existants sur l'extension des modèles micromécaniques classiques aux nanomatériaux ainsi que leurs limites avant de développer dans le chapitre 6 une méthodologie permettant la conciliation entre la mécanique moléculaire discrète et la mécanique des milieux continus.

# CHAPITRE 5

## NANOMATÉRIAUX : CONCEPT D'ÉNERGIE DE SURFACE

**C** e chapitre présente succinctement les nanomatériaux d'une manière générale. Nous y présentons une comparaison simple entre les nanomatériaux et les matériaux dits conventionnels. Ensuite nous résumons tout ce qui entre en ligne de compte lors de l'étude des nanomatériaux à savoir le concept d'excès d'énergie de surface/interface. Cet excès d'énergie qui a été négligé dans les matériaux classiques devient prépondérant lorsque la taille est de quelques dizaines de nanomètres. Une présentation de l'état de l'art sur les différents travaux réalisés jusqu'alors pour introduire cet effet de taille et le concept d'énergie de surface dans les modèles micromécaniques classiques nous permet de poser clairement le problème qui reste à résoudre.

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Echelle nanométrique : fin de l'école de Eshelby ?</b>	<b>185</b>
5.1.1	Nanosciences et nanotechnologies	185
5.1.2	Feynman l'avait bien prédit	187
5.1.3	Qu'est-ce qu'un nanomatériau ?	187
5.1.4	Pourquoi un tel engouement pour les nanomatériaux ?	188
5.1.5	Nanomatériaux et matériaux conventionnels	190
<b>5.2</b>	<b>Physique et mécanique des interfaces/surfaces</b>	<b>194</b>
5.2.1	Définition de l'excès d'énergie interfaciale	195
5.2.2	Contrainte et déformation de surface	199
5.2.3	Elasticité de surface : relation de Shuttleworth généralisée	200
5.2.4	Cas de l'interface plate entre deux matériaux isotropes	201
5.2.5	Méthode semi-analytique pour évaluer les propriétés de surface	205
<b>5.3</b>	<b>Propriétés effectives des nanoparticules</b>	<b>205</b>
<b>5.4</b>	<b>Problème de nano-inclusions : état de l'art en bref</b>	<b>210</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusions et les questions de recherche importantes</b>	<b>215</b>

---

## 5.1 Echelle nanométrique : fin de l'école de Eshelby ?

### 5.1.1 Nanosciences et nanotechnologies

Les avancées dans les nanotechnologies ont conduit, lors de ces dernières décennies, à d'énormes progrès en matière de recherche et de développement des nanocomposites. Ces champs émergents des nanosciences et de la nano ingénierie conduisent à une compréhension sans précédente et un à contrôle sur le fondement de toutes les matières physiques. Il paraît alors très probable de changer la façon dont presque tous les objets (des vaccins aux ordinateurs, des pneus d'automobile aux objets non encore imaginés) ont été conçus et fabriqués.

Dans la langue grecque, le terme "Nano" signifie "Nain" (de très petite taille). Utilisé comme préfixe d'une unité comme la seconde ou le mètre, il désigne le milliardième de de cette unité. Par exemple  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ . Le monde des objets est bâti à partir de la toute petite échelle des nanomètres. Des milliers de protéines et des enzymes de nos cellules constituent un exemple. Les enzymes sont typiquement construites à partir des atomes dans des structures moléculaires bien précises et qui couvrent quelques dizaines de nanomètres. Cette nanotechnologie naturelle est d'environ dix fois plus petite que les plus petits objets nanotechnologiques conçus ou fabriqués jusqu'ici. Par exemple, les composantes individuelles d'un microprocesseur Intel Pentium III couvrent environ 200 nanomètres. C'est la raison pour laquelle les calculs sont de plus en plus faciles et puissants de nos jours.

La figure 5.1 est une illustration du problème de taille. Cette figure nous montre :

- (a)  $< 1 \text{ nm}$  : un atome a quelques angstroms ( $\text{\AA}$ ) ou quelques dizaines de nanomètres de diamètre ;
- (b)  $\approx 1 \text{ nm}$  : les molécules d'ADN ont environ 2.5 nm de large ;
- (c)  $\approx 10^3 \text{ nm}$  : les cellules biologiques ont des diamètres de l'ordre de  $10^3 \text{ nm}$  ;
- (d)  $\approx 10^6 \text{ nm}$  : la pointe de la tête d'une épingle (comme la tâche noire sur le pouce) a

environ  $10^6$  nm de large ;

(e)  $\approx 10^9$  nm : une personne géante de 2 mm a une taille de  $2 \times 10^9$  nm.

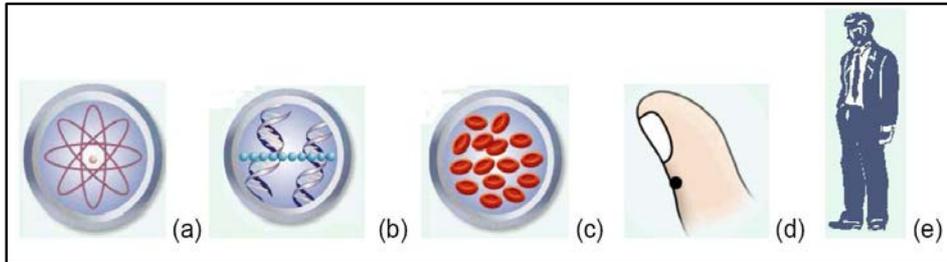


FIG. 5.1 – Vue globale de la notion de taille.

La science et la technologie des nanostructures constituent un domaine vaste et interdisciplinaire d'activités de recherche et de développement qui s'est développé d'une manière explosive à travers le monde depuis ces dernières années. Ce domaine a la potentialité de révolutionner les moyens par lesquels les matériaux et les produits sont créés ainsi que la gamme et la nature des fonctionnalités qui peuvent être acquises. Il a d'ores et déjà un impact commercial significatif qui, assurément, augmentera dans l'avenir.

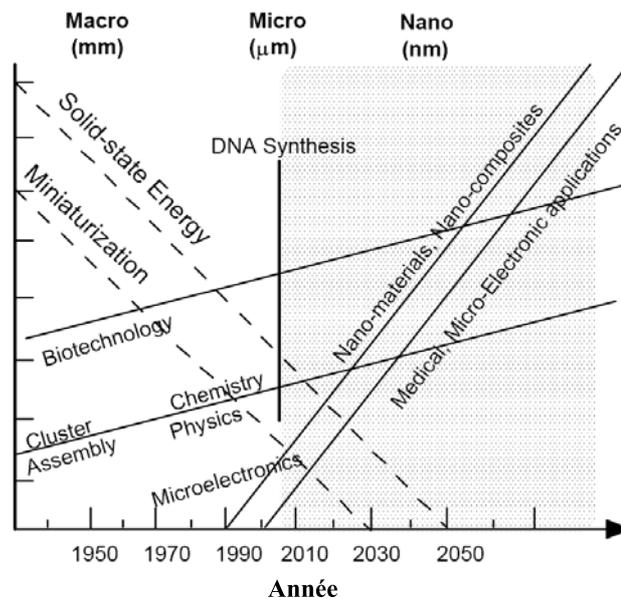


FIG. 5.2 – Evolution des sciences et technologies puis leur avenir.

### 5.1.2 Feynman l'avait bien prédit

Richard Feynman, prix nobel de physique mort en 1988, est l'un des premiers à avoir préconisé l'avenir des nanotechnologies. En 1957, au California Institute of Technology (CalTech), il présenta ce qui allait devenir l'une des grandes conférences scientifiques classiques du 20<sup>ème</sup> siècle : "There is Plenty of Room at the Bottom". Ce discours de Feynman fait partie de la liturgie fondatrice de la communauté des nanotechnologies. La motivation de Feynman provient de la biologie puisque les systèmes biologiques peuvent être excessivement petits. Il disait : "Plusieurs cellules sont très petites, cependant elles sont très actives ; elles fabriquent des substances ; elles se baladent ; elles se déhanchent et elles font des choses merveilleuses à une échelle très petite. De même, elles sont capables de stocker de l'information. Considérant la possibilité que nous pouvons nous aussi faire des choses très petites qui font ce que nous voulons, nous pouvons alors fabriquer des objets qui peuvent manœuvrer à cette échelle". Feynman avait déjà parlé de nanotechnologie avant que le mot n'apparaisse. A plusieurs reprises, durant son fameux discours, Feynman rappelait à son auditoire qu'il ne plaisantait pas. Le rêve de Feynman commence donc à se réaliser.

### 5.1.3 Qu'est-ce qu'un nanomatériau ?

Les nanomatériaux peuvent être classés d'une manière grossière en deux catégories.

*Catégorie 1* : si par exemple la dimension caractéristique de la microstructure, telle que la taille des grains d'un polycristal, est de l'ordre des nanomètres alors ce matériau polycristallin est appelé un matériau nanostructuré. Cette catégorie contient les composites renforcés par des particules dont la taille est de quelques nanomètres ou des structures nanométriques contenant des hétérogénéités (qui sont évidemment d'une taille de l'ordre des nanomètres).

*Catégorie 2* : si au-moins l'une des dimensions d'un élément de structure est de l'ordre des nanomètres alors il est appelé élément de structure nanométrique. Cette deuxième ca-

tégorie contient les nanoparticules (Alymov et Shorshorov, 1999; Pei et Hwang, 2003), les ceintures nanométriques (Pan *et al.*, 2001), les nano-fils et les nano-films (Dingreville *et al.*, 2005).

Notons à ce point que dans la suite de ce travail certains développements porteront sur les nanomatériaux de la première catégorie.

#### 5.1.4 Pourquoi un tel engouement pour les nanomatériaux ?

Au cours de ces dernières années, ces types de matériaux ont connu un grand intérêt par le mérite de leurs propriétés mécanique, électrique, optique, magnétique inhabituelles. Quelques exemples non exhaustifs sont donnés ci-dessous :

- ⇒ Les céramiques avec des nano-grains ont montré une meilleure ductilité aux hautes températures en comparaison avec les céramiques à gros grains.
- ⇒ Le cuivre nanocristallin est 3 fois plus résistant que le cuivre classique à grains de dimensions micrométriques. En réduisant la taille de ces grains on rend les métaux plus solides et plus légers. Ils sont en outre plus malléables, car les nano-grains glissent plus facilement les uns par rapport aux autres.
- ⇒ Quand un matériau classique est opaque, le nanomatériau équivalent peut être transparent. En effet, les grains d'un matériau nanophase sont souvent trop petits pour disperser la lumière visible dont la longueur d'onde est supérieure à 380 nanomètres. Si sa structure ne comporte pas de lacunes trop grandes, le nanomatériau n'arrête donc pas la lumière.
- ⇒ Dans le domaine du stockage de l'énergie, les besoins en terme d'énergie de puissance et de durée de vie sont en progression constante. Dans ce contexte, les technologies d'électrodes des piles et batteries se tournent de plus en plus vers les nanomatériaux. On peut citer les avantages maintenant éprouvés apportés par les matériaux nanométriques en terme de cinétique (supercondensateurs, batteries Lithium ion de

puissance) ou de percolation électronique (additifs de type noirs de carbone ou plus récemment nanotubes).

- ⇒ L'essentiel de la conductivité des matériaux isolants thermiques provient de la contribution de la conduction en phase gazeuse (65 à 75 %). Deux solutions s'offrent pour la réduire : diminuer la quantité de gaz (donc sa pression) et restreindre sa faculté à conduire. Cette dernière possibilité est obtenue par un effet de confinement moléculaire qui est très efficace lorsque la taille des pores contenant le gaz est du même ordre de grandeur que son libre parcours moyen. De plus il existe une équivalence entre diminution de pression et taille des pores appelée loi de Knudsen : la même conduction du gaz est obtenue à pression d'autant plus haute que la taille des pores est petite. Du fait des grandes porosités nécessaires pour limiter la conduction solide, qui dit nanopores (diamètre de 10 à 100 nm) dit nanomatériaux. Dans ces conditions il est aisé d'obtenir à faible dépression une conductivité 6 à 10 fois plus faible que celle des matériaux traditionnels et donc des gains comparables en épaisseur de produit.
- ⇒ Les nanotubes de carbone sont utilisés comme additifs dans les matériaux, tels que les composites thermodurcissables, les thermoplastiques ou les caoutchoucs. Ils offrent de formidables perspectives dans de nombreuses applications, grâce à leurs propriétés mécaniques exceptionnelles et à leur conductivité électrique et thermique, de l'amélioration de matériaux existants à la création de nouveaux matériaux dans les secteurs de l'aérospatial, du sport et de l'industrie automobile.
- ⇒ Les fumées de silice sont utilisées dans le béton pour améliorer sa fluidité et ses propriétés mécaniques.
- ⇒ L'alumine ultra fine est utilisée pour le polissage des wafers et disques durs en microélectronique.
- ⇒ Le noir de carbone est utilisé dans les encres d'imprimante et les pneumatiques.

⇒ Les nanoparticules de dioxyde de titane sont utilisées comme protection au rayonnement ultraviolet dans les crèmes solaires.

Ces exemples des applications de l'échelle nanométriques justifient assez bien l'engouement pour les nanomatériaux.

### 5.1.5 Nanomatériaux et matériaux conventionnels

Les théories micromécaniques fondées sur le célèbre travail de [Eshelby \(1957\)](#) et basées sur la mécanique des milieux continus (MMC) ont été généralement utilisées, et avec beaucoup de succès, pour modéliser le comportement mécanique macroscopique des matériaux polycristallins ainsi que des matériaux composites renforcés par des particules ou des fibres. L'échelle de longueur fondamentale (taille des grains ou des particules) pour de tels matériaux conventionnels est de l'ordre des micromètres ou au-dessus. A cette échelle de longueur, l'hypothèse de milieux continus est bien valide. Chaque cristal (ou particule dans les matériaux composites) peut être traité rigoureusement comme un milieu continu et par conséquent, toutes les théories de la MMC peuvent être utilisées pour décrire l'état de déformation des polycristaux et matériaux composites conventionnels.

Les nanomatériaux de leur côté, sont caractérisés par leur microstructure avec une échelle de longueur de l'ordre des nanomètres (typiquement  $<100$  nm). A cause de cette microstructure fine, les nanomatériaux exposent une large gamme de nouvelles propriétés et des comportements qui ne peuvent plus être modélisés par les théories micromécaniques conventionnelles ([Gleiter, 1989](#); [Morris, 1998](#)).

Un exemple classique est la loi de Hall-Petch qui prédit la limite d'écoulement des polycristaux en fonction de la taille des grains :

$$\sigma_{\text{écoulement}} = \sigma_0 + \frac{k_y}{d^{\frac{1}{n}}}, \quad 0 < n < 1, \quad (5.1)$$

où  $d$  est la taille des grains du polycristal. Cette loi de Hall-Petch est basée sur la

théorie continue de l'accumulation des dislocations. Mathématiquement, la formule (5.1) prédit une limite d'écoulement infinie lorsque  $d \rightarrow 0$ . Cependant, plusieurs travaux (Gryaznov *et al.*, 1989, 1990; Nieh et Wadsworth, 1991; Benkassem, 2007) ont montré qu'en dessous d'une certaine taille critique  $d_c$ , la limite d'écoulement décroît lorsque la taille des grains diminue. Ce phénomène est couramment appelé "inversion de la pente de Hall-Petch".

Un problème connexe est l'étude des propriétés effectives des matériaux composites. Spécialement, les modules effectifs des matériaux composites conventionnels, où la taille des particules et des fibres est mesurée en  $\mu\text{m}$ , sont indépendants de la taille des particules (ou fibres) selon la théorie de la micromécanique classique (Mura, 1987; Qu et Cherkaoui, 2006). Par exemple la méthode auto-cohérente (Qu et Cherkaoui, 2006, p. 172) calcule le module de cisaillement effectif d'un matériau composite renforcé par des particules comme suit :

$$\mu^{\text{eff}} = \mu_0 + \frac{\varphi_1 \mu^{\text{eff}} (\mu_1 - \mu_0)}{\mu^{\text{eff}} + 2\delta^{\text{eff}} (\mu_1 - \mu_0)}, \quad (5.2)$$

avec  $\delta^{\text{eff}} = (4 - 5\nu^{\text{eff}})/(15 - 15\nu^{\text{eff}})$ ,  $\varphi_1$  est la fraction volumique des inclusions,  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sont respectivement les modules de cisaillement de la matrice et des particules. Au travers de cette formule, nous remarquons que le module de cisaillement effectif du composite est le même dans la mesure où la fraction volumique des particules demeure la même quelque soit la taille des particules. Des études (expérimentales et théoriques) approfondies ont prouvé que la méthode auto-cohérente (de même que les autres modèles micromécaniques classiques) est précise pour les particules dont la taille est de l'ordre des  $\mu\text{m}$ . En revanche la validité de tels modèles appliqués aux nanocomposites est problématique (Streitz *et al.*, 1994a,b; Sharma et Ganti, 2004).

Géométriquement parlant, la différence entre les nanomatériaux et les matériaux conventionnels est la longueur caractéristique (taille des grains ou des particules) de la micro-

structure. Si chaque phase est supposée continue, comme cela se fait dans la théorie des milieux continus, alors les propriétés globales du matériau seront indépendantes de la longueur caractéristique de la microstructure. La raison en est que la longueur caractéristique peut être utilisée pour redéfinir d'autres dimensions dans le contexte de la mécanique des milieux continus. Afin de tenir compte de la longueur caractéristique de la microstructure, des modifications doivent être faites sur l'hypothèse de continuité et les caractéristiques physiques de la nano-composite doivent être prises en considération.

Physiquement parlant, une des différences évidentes entre les nanomatériaux et les matériaux conventionnels est la quantité des joints de grains (ou des interfaces particule/matrice dans le cas des composites) par unité de volume. La fraction volumique du matériau dans les joints de grains, considérée comme négligeable pour les matériaux polycristallins conventionnels, peut en effet devenir importante pour les nanomatériaux. La fraction volumique  $\varphi$  des joints de grains est calculée par la formule ([Mütschele et Kirchheim, 1987](#)) :

$$\varphi = \frac{3\delta}{d}, \tag{5.3}$$

où  $\delta$  est l'épaisseur du joint de grain et  $d$  est la taille du grain. Ainsi donc, 30% de la matière sont trouvés dans les joints de grains pour un nanomatériau dont la taille des grains est de 5 nm et si le joint est considéré avoir 0.5 nm d'épaisseur. Cependant cette fraction volumique chute à 3% si la taille des grains augmente à 50 nm. Puisque les propriétés des joints de grains sont très différentes de celles du cœur du grain ([Dingreville, 2007](#)), il est alors concevable que la diminution sensible des joints de grains va inévitablement modifier le comportement macroscopique du matériau.

La distinction entre les nanomatériaux et les matériaux classiques est la longueur caractéristique du matériau étudié. C'est cette longueur caractéristique qui détermine la valeur de la surface interfaciale par unité de volume du composite. Pour caractériser cette valeur, nous pouvons par exemple imaginer des particules sphériques dans un matériau

composite. Le rapport entre la surface de la particule et son volume est égal à :

$$R_{S/V} = \frac{6}{d}, \quad (5.4)$$

où  $d$  est le diamètre de la particule. Clairement, nous remarquons à partir de la formule (5.4) qu'une réduction de la taille caractéristique  $d$  de 10  $\mu\text{m}$  (typique aux composites classiques) à une taille de 10 nm entraînerait une augmentation du rapport  $R_{S/V}$  d'un facteur de 1000. Une telle augmentation du rapport Volume/Surface nécessite de considérer les propriétés interfaciales dans la modélisation et la prédiction des propriétés macroscopiques de tels matériaux. Ces considérations conduisent inévitablement à la microstructure atomique et discrète de l'interface entre la nanoparticule et son environnement. En d'autres termes, toute théorie pour modéliser et prédire le comportement macroscopique des matériaux nanostructurés doit être fondée sur la nature discrète des interfaces des particules.

A ce point, il paraît assez clair que l'école micromécanique fondée par [Eshelby \(1957\)](#) dans son état classique est inadéquate pour modéliser et prédire le comportement macroscopique des nanocomposites. Cependant, à cause de sa maturité et de ses avantages, plusieurs tentatives sont menées et continuent de paraître pour étendre la micromécanique classique afin d'étudier les nanomatériaux.

Une question fondamentale qui doit être étudiée dans la modélisation du comportement mécanique macroscopique des nanomatériaux est la maîtrise des propriétés des interfaces/surfaces dans ces matériaux en fonction de leur structure atomique. De toute évidence, une façon pour tenir compte du comportement des atomes à une surface ou une interface est d'utiliser la mécanique quantique pour décrire l'interaction entre les atomes de la surface libre ou des joints de grain. Toutefois, l'utilisation directe de ces théories pour modéliser et prévoir le comportement macroscopique des nanomatériaux pour des applications d'ingénierie peut ne pas être faisable en matière de temps de calcul.

Dans la suite du travail, nous présentons les travaux récents sur la caractérisation des propriétés des interfaces/surfaces dans les matériaux solides. Ensuite, nous faisons l'état de l'art des diverses tentatives pour étendre la micromécanique classique aux nanomatériaux.

## 5.2 Physique et mécanique des interfaces/surfaces

Dans cette section, nous présentons les concepts essentiels et les définitions relatifs à la description élastique des surfaces libres et des interfaces. Le concept d'excès d'énergie des surfaces/interfaces est présenté d'un point de la MMC en considérant une seule surface de séparation qui sépare les deux phases homogènes (par opposition à l'interface considérée comme une interphase). [Dingreville \(2007\)](#); [Dingreville et Qu \(2008\)](#) ont généralisé la fameuse relation de [Shuttleworth \(1950\)](#) pour tenir compte des contraintes transversales de l'interface/surface. La relation de [Shuttleworth](#) relie l'excès d'énergie interfaciale aux contraintes interfaciales. Cette nouvelle formulation a abouti à la définition d'un tenseur de rigidité interfacial dans le plan de l'interface, à un tenseur de complaisance interfaciale transversale et un tenseur de couplage pour tenir compte de l'effet Poisson de l'interface. Ces tenseurs permettent alors de décrire complètement le comportement élastique d'une interface soumise à une déformation. [Dingreville \(2007\)](#) a proposé par la suite une méthode semi-analytique pour calculer ces propriétés élastiques de l'interface.

Dans ce qui suit, le terme de "surface" est utilisé de façon interchangeable pour décrire soit une surface libre ou une interface entre deux solides. Dans son travail, [Sander \(2003\)](#) a montré que la diminution de la coordination des atomes proches d'une surface induit une redistribution des charges électroniques qui modifie la situation des liaisons atomiques. En conséquence, la position d'équilibre et de l'énergie de ces atomes sont, en général, différentes de leurs position et énergie lorsqu'ils sont loin de la surface. Ainsi donc, les modules élastiques de la zone au voisinage de la surface (en général, très mince : seulement quelques couches atomiques) peuvent être différents de ceux du cœur de la matière. Comme plusieurs travaux l'ont montré, il est donc parfaitement acceptable de négliger la

région de la surface et d'utiliser les propriétés du cœur d'un élément de structure comme propriétés globales lorsque la taille de l'élément est en micromètre ou plus. Cependant pour les nanomatériaux, le rapport surface/volume est très élevé et la région de la surface ne peut plus être négligée lorsque l'on considère l'ensemble du comportement élastique des matériaux nanostructurés.

Les prédictions théoriques des propriétés élastiques des surfaces ont été réalisées en utilisant une variété de techniques différentes. Parmi celles-ci figurent les simulations par la dynamique moléculaire (DM) et la statique moléculaire (SM). [Ackland et Finnis \(1986\)](#) puis [Ackland et al. \(1987\)](#) ont présenté des techniques de calcul des tensions superficielles dans les métaux ayant une structure cristalline cubique à face centrée (CFC) ou cubique centrée (CC) en utilisant des fonctions potentielles empiriques simples. Leurs résultats sont en bon accord avec les données expérimentales disponibles. [Needs et Godfrey \(1990\)](#), [Needs et al. \(1991\)](#) puis [Mansfield et Needs \(1991\)](#) ont évalué les contraintes et déformations superficielles pour divers matériaux et diverses orientations de surface. [Shenoy \(2005\)](#) a également utilisé les simulations de la SM pour calculer les propriétés des surfaces dans les cristaux cubiques à face centrée.

Les propriétés élastiques des joints de grains dans les polycristaux ont été étudiées par plusieurs chercheurs. Des chercheurs comme [Leo et Schwartz \(2000\)](#), [Sansoz et Molinari \(2004, 2005\)](#), [Yang et al. \(2005\)](#) ont porté leur attention sur les caractéristiques structurales dominantes des joints de grains dans les polycristaux tandis que d'autres chercheurs ([Alber et al., 1992](#); [Bassani et al., 1992](#); [Vitek et al., 1994](#); [Marinopoulos et al., 1998](#); [Dingreville, 2007](#)) ont, de leur côté, suggéré que les propriétés élastiques des joints de grains peuvent être, d'une manière significative, différentes de celles du cœur des grains.

### 5.2.1 Définition de l'excès d'énergie interfaciale

Par définition, l'excès d'énergie  $\gamma_n$  d'un atome  $n$  au voisinage d'une surface est la différence entre son énergie totale et son énergie s'il était enfouit dans le cœur de la matière.

Evidemment, cet excès d'énergie  $\gamma_n$  dépend de la position de l'atome. En guise d'illustration, pour un bicristal, la figure 5.3 (tirée de [Dingreville \(2007\)](#)) montre schématiquement la dépendance en  $x_3$  d'une grandeur  $w$  quelconque. Cette figure nous montre que la gran-

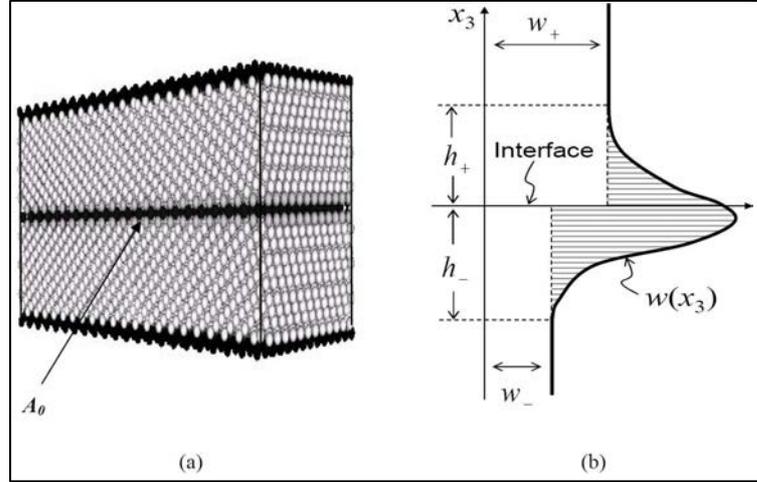


FIG. 5.3 – Interface d'un bicristal et excès d'énergie en fonction de  $x_3$ .

deur  $w$  est constante si l'on est suffisamment éloigné de l'interface mais qu'elle augmente lorsqu'on se rapproche davantage de l'interface. Si nous supposons qu'il y a  $N$  atomes autour de la surface, alors dans la configuration Lagrangienne, la densité d'excès d'énergie de surface peut être définie par :

$$\Gamma = \frac{1}{A_0} \sum_{n=1}^N \gamma_n = \frac{1}{A_0} \sum_{n=1}^N \left( E^{(n)} - E^{(0)} \right), \quad (5.5)$$

où  $E^{(n)}$  est l'énergie totale de l'atome  $n$  au voisinage de la surface  $A_0$ ,  $E^{(0)}$  est l'énergie totale de d'un atome très loin de la surface  $A_0$ . En désignant par  $A$  l'état de la surface  $A_0$  dans la configuration déformée alors les deux surfaces peuvent être reliées par la relation :

$$A = A_0 \left( 1 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^s \right), \quad (5.6)$$

où  $\varepsilon_{\alpha\beta}^s$  est la déformation lagrangienne de la surface. Clairement, pour des raisons de continuité de la déformation, nous avons dans le cas de la configuration particulière de la

figure 5.3 :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^s = \varepsilon_{\alpha\beta} \Big|_{x_3=0}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (5.7)$$

avec  $\varepsilon_{ij}$  la déformation volumique lagrangienne du cristal soumis à un chargement externe.

Supposons maintenant que le bicristal de la figure 5.3 est soumis à une traction et à un déplacement très loin de l'interface pour que l'on puisse considérer les déformations comme étant homogènes si on est assez loin de l'interface. Les contraintes et déformations homogènes dans le matériau du haut ( $x_3 > 0$ ) et dans le matériau du bas ( $x_3 < 0$ ) sont notées respectivement  $\boldsymbol{\sigma}_\pm$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm$ . Il a été montré par [Qu et Bassani \(1993\)](#) (cf. annexe D.1) que de telles déformations homogènes peuvent être facilement construites dans les bimatériaux par ce que l'on appelle le "T stress". Bien que les déformations loin de l'interface soient homogènes, les contraintes et déformations au voisinage de l'interface sont perturbées par la présence de l'interface. En notant  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  les champs de contraintes et de déformations réelles dans le bimatériau, nous avons la relation suivante :

$$\lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\pm, \quad \lim_{x_3 \rightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_\pm. \quad (5.8)$$

En nous limitant à l'énergie mécanique et si nous désignons par  $\psi(x_3)$  la densité d'énergie de déformation par unité de volume du bimatériau alors, l'excès d'énergie par unité de surface de l'interface peut être calculé par la formule :

$$\Gamma = \int_0^{+\infty} [\psi(x_3) - \psi_+] dx_3 + \int_{-\infty}^0 [\psi(x_3) - \psi_-] dx_3, \quad (5.9)$$

où, suivant l'annexe D.9 on a :

$$\begin{cases} \psi &= \varsigma_0 + \hat{\boldsymbol{\tau}}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^s : \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t, \\ \psi_\pm &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^s : \mathbf{C}_\pm^s : \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_\pm^t \cdot \mathbf{M}_\pm \cdot \boldsymbol{\sigma}_\pm^t. \end{cases} \quad (5.10)$$

Spécifiquement,  $\boldsymbol{\varepsilon}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}^t$  sont respectivement la déformation dans le plan et la contrainte transverse comme définies dans l'annexe D. Bien que le domaine d'intégration dans la formule (5.9) s'étend à l'infini, la différence entre  $\psi(x_3)$  et  $\psi_{\pm}$  n'est non nulle qu'à une très petite distance de l'interface de manière à ce que l'intégrale ne doit être calculée que sur l'épaisseur de la région interfaciale,  $h_+ + h_-$  (cf. figure 5.3). A partir des formules (5.9) et (5.10), nous pouvons récrire l'excès d'énergie de surface comme suit (Dingreville, 2007) :

$$\Gamma = \Gamma_0 + \mathbf{\Gamma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^s : \mathbf{\Gamma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t_+ \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{(2),+} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t_+ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t_- \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{(2),-} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t_-, \quad (5.11)$$

où :

$$\Gamma_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_0(x_3) dx_3, \quad \mathbf{\Gamma}^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\boldsymbol{\tau}}^s(x_3) dx_3, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)} = \int_0^{+\infty} [\mathbf{C}^s(x_3) - \mathbf{C}_+] dx_3 + \int_{-\infty}^0 [\mathbf{C}^s(x_3) - \mathbf{C}_-] dx_3, \quad (5.13)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(2)} = \boldsymbol{\Lambda}^{(2),+} + \boldsymbol{\Lambda}^{(2),-} = \int_0^{+\infty} [\mathbf{M}(x_3) - \mathbf{M}_+] dx_3 + \int_{-\infty}^0 [\mathbf{M}(x_3) - \mathbf{M}_-] dx_3. \quad (5.14)$$

En adoptant les notations  $\llbracket \boldsymbol{\sigma}^t \rrbracket = \boldsymbol{\sigma}^t_+ - \boldsymbol{\sigma}^t_-$  et  $\langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle = (\boldsymbol{\sigma}^t_+ + \boldsymbol{\sigma}^t_-)/2$ , la formule (5.11) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma_0 + \mathbf{\Gamma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^s : \mathbf{\Gamma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{(2)} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle + \frac{1}{8} \llbracket \boldsymbol{\sigma}^t \rrbracket \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{(2)} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}^t \rrbracket \\ + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle \cdot \mathbf{K} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}^t \rrbracket \end{aligned} \quad (5.15)$$

où :

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Lambda}^{(2),+} - \boldsymbol{\Lambda}^{(2),-}. \quad (5.16)$$

Ainsi donc, la formule (5.15) donne l'excès d'énergie interfaciale comme une fonction explicite du tenseur de déformations dans le plan et du tenseur de contraintes transverses.

### 5.2.2 Contrainte et déformation de surface

D'une manière similaire à l'excès d'énergie interfaciale, l'excès de contrainte interfaciale est défini par :

$$\Sigma^s = \int_0^{+\infty} [\boldsymbol{\sigma}^s(x_3) - \boldsymbol{\sigma}_+^s] dx_3 + \int_{-\infty}^0 [\boldsymbol{\sigma}^s(x_3) - \boldsymbol{\sigma}_-^s] dx_3. \quad (5.17)$$

En utilisant l'équation (D.7) de l'annexe D, on obtient la formule suivante pour l'excès de contrainte interfaciale :

$$\Sigma^s = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}^t \rrbracket \cdot (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-), \quad (5.18)$$

avec :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^- = \int_0^{+\infty} [\gamma(x_3) - \gamma_+] dx_3 + \int_{-\infty}^0 [\gamma(x_3) - \gamma_-] dx_3. \quad (5.19)$$

De la même manière, on introduit un excès de pseudo-déformation transverse interfaciale par la relation suivante :

$$\Delta^t = \int_0^{+\infty} [\boldsymbol{\sigma}^t(x_3) - \boldsymbol{\sigma}_+^t] dx_3 + \int_{-\infty}^0 [\boldsymbol{\sigma}^t(x_3) - \boldsymbol{\sigma}_-^t] dx_3. \quad (5.20)$$

Il s'en suit à partir de l'équation (D.5) de l'annexe D que :

$$\Delta^t = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle + \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}^t \rrbracket - \mathbf{H} : \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (5.21)$$

où :

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{M}(x_3) \cdot \boldsymbol{\tau}^t(x_3) dx_3. \quad (5.22)$$

### 5.2.3 Elasticité de surface : relation de Shuttleworth généralisée

En comparant l'expression (5.15) aux expressions (5.18) et (5.21), on obtient respectivement :

$$\boldsymbol{\Sigma}^s = \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^s} \right)_{\boldsymbol{\sigma}^t} + \langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \llbracket \boldsymbol{\sigma}^t \rrbracket \cdot (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-), \quad (5.23)$$

$$\boldsymbol{\Delta}^t = \mathbf{\Lambda}^{(1)} + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle} \right)_{\boldsymbol{\varepsilon}^s} - \mathbf{H} : \boldsymbol{\varepsilon}^s. \quad (5.24)$$

La relation (5.23) relie l'excès de contrainte interfaciale  $\boldsymbol{\Sigma}^s$  à l'excès d'énergie interfaciale  $\Gamma$ . Elle est réduite à la relation originale de Shuttleworth (1950) lorsque  $\langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle = 0$ . C'est pour cette raison que Dingreville (2007) a nommé cette relation : “la relation généralisée de Shuttleworth”. Pour  $\langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle \neq 0$ , nous remarquons à partir de la relation (5.18) que l'excès de contrainte interfaciale est composé de trois termes. Le premier terme  $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$  est un tenseur de second ordre et de dimension deux. Ce terme représente l'excès de contrainte interne de l'interface. C'est la partie de la contrainte interfaciale qui existe en l'absence de la déformation de surface et de la contrainte transverse de l'interface. Le deuxième terme  $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$  est un tenseur d'ordre quatre et de dimension deux. Il représente l'élasticité dans le plan de l'interface. Le dernier terme  $\mathbf{H}$  est un tenseur d'ordre trois, de dimension trois pour son premier indice et de dimension deux pour ces deux derniers indices. Ce tenseur mesure l'effet Poisson de l'interface (Dingreville, 2007; Dingreville et Qu, 2008).

La relation (5.24) relie l'excès de la pseudo-déformation transverse de l'interface  $\boldsymbol{\Delta}^t$  à l'excès d'énergie interfaciale  $\Gamma$ . Elle est nommée “relation complémentaire” de la relation de Shuttleworth par Dingreville (2007). D'après l'expression (5.21),  $\boldsymbol{\Delta}^t$  est composé éga-

lement de trois termes. Le premier terme  $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$  est un tenseur d'ordre un et de dimension trois. Il représente la partie de la déformation interfaciale transverse qui existe même si  $\langle \boldsymbol{\sigma}^t \rangle = 0$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^s = 0$ , d'où ce tenseur est appelé "tenseur de relaxation" de l'interface (Dingreville, 2007). Le deuxième terme est le tenseur d'ordre deux et de dimension deux  $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$ . Il joue le rôle du tenseur des complaisances transverses de l'interface, c'est pourquoi il est appelé "tenseur des complaisances transverses" de l'interface.

Soulignons que, malgré que les tenseurs  $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$  et  $\mathbf{H}$  aient un effet sur  $\boldsymbol{\Sigma}^s$  et  $\boldsymbol{\Delta}^t$ , ils n'apparaissent pas explicitement dans l'expression de l'excès d'énergie interfaciale  $\Gamma$ . Par ailleurs, nous avons appelé le tenseur  $\boldsymbol{\Delta}^t$  une pseudo-déformation car il a la dimension d'une longueur. En réalité,  $\boldsymbol{\Delta}^t$  représente la largeur intrinsèque de l'interface tenant compte du mouvement relatif des surfaces supérieure et inférieure de la zone interfaciale.

Il paraît alors clair au travers des discussions précédentes que les tenseurs interfaciaux  $\boldsymbol{\Gamma}^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}^{(2)}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$  et  $\mathbf{H}$  sont des propriétés intrinsèques de l'interface. Ils peuvent être évalués analytiquement pour un bimatériau donné avec des fonctions potentielles interatomiques données comme l'a bien expliqué Dingreville (2007). Une fois ces tenseurs connus, le comportement élastique de l'interface est complètement caractérisé.

#### 5.2.4 Cas de l'interface plate entre deux matériaux isotropes

Dans cette section, nous présentons les principaux résultats pour le cas particulier d'interface plate entre deux matériaux isotropes. Ces résultats sont présentés dans le travail de Dingreville et Qu (2008). En assurant la continuité de la traction à l'interface, on peut écrire que  $\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^t_+ = \boldsymbol{\sigma}^t_-$ . Les matériaux isotropes sont caractérisés par leurs constantes de Lamé  $\lambda_{\pm}$  et  $\mu_{\pm}$ . Il est alors concevable dans ce cas que l'interface soit isotrope transverse avec son axe de symétrie perpendiculaire à l'interface. Dans le système de coordonnées défini sur la figure 5.3, les tenseurs de l'interface définis dans la section 5.2.3 peuvent être évalués correctement en se basant sur les relations de l'expression (D.14)

de l'annexe D. Nous obtenons alors (Dingreville, 2007) :

$$\Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)} = (K_s - \mu_s)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\kappa\lambda} + \mu_s(\delta_{\alpha\kappa}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\kappa}), \quad (5.25)$$

$$\Lambda_{ij}^{(2)} = \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{\mu_T} - \frac{4K_s\nu_s^2}{E_T^2} \right) \delta_{3i}\delta_{3j} + \frac{1}{\mu_T} \delta_{ij}, \quad (5.26)$$

$$H_{i\alpha\beta} = \frac{2K_s\nu_s}{E_T} \delta_{3i}\delta_{\alpha\beta}, \quad (5.27)$$

où :

$$\mu_s = \int_0^{+\infty} (\mu - \mu_+) dx_3 + \int_{-\infty}^0 (\mu - \mu_-) dx_3, \quad (5.28)$$

$$K_s = \mu_s + \int_0^{+\infty} \left( \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{2\lambda_+\mu_+}{\lambda_+ + 2\mu_+} \right) dx_3 + \int_{-\infty}^0 \left( \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{2\lambda_-\mu_-}{\lambda_- + 2\mu_-} \right) dx_3, \quad (5.29)$$

$$\frac{1}{\mu_T} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_+} \right) dx_3 + \int_{-\infty}^0 \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_-} \right) dx_3, \quad (5.30)$$

$$\frac{2K_s\nu_s}{E_T} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda_+}{\lambda_+ + 2\mu_+} \right) dx_3 + \int_{-\infty}^0 \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - \frac{\lambda_-}{\lambda_- + 2\mu_-} \right) dx_3, \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{E_T} - \frac{4K_s\nu_s^2}{E_T^2} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\lambda_+ + 2\mu_+} \right) dx_3 + \int_{-\infty}^0 \left( \frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\lambda_- + 2\mu_-} \right) dx_3. \quad (5.32)$$

La signification physique des cinq paramètres  $K_s$ ,  $\mu_s$ ,  $\mu_T$ ,  $E_T$  et  $\nu_s$  est donnée un peu plus bas. En substituant les expressions (5.25), (5.26) et (5.27) dans la formule (5.21) de l'excès de contrainte interfaciale, on obtient :

$$\Sigma_{\alpha\beta}^s = \Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} + (K_s - \mu_s)\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\lambda}^s + 2\mu_s\varepsilon_{\alpha\beta}^s + \frac{2K_s\nu_s}{E_T} \sigma_3^t \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.33)$$

avec :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\tau}_{\alpha\beta}^s dx_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tau_{\alpha\beta}^s - \frac{\lambda \tau_3^s}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} \right] dx_3. \quad (5.34)$$

La contrainte hydrostatique dans le plan de l'interface est calculée par la relation suivante (Dingreville, 2007) :

$$\Sigma_{\alpha\alpha}^s = \Gamma_{\alpha\alpha}^{(1)} + 2K_s \varepsilon_{\lambda\lambda}^s + \frac{4K_s \nu_s}{E_T} \sigma_3^t. \quad (5.35)$$

De l'expression (5.35), il est apparaît que  $K_s$  peut être regardé comme le module de compressibilité de l'interface. Les trois composantes de  $\Gamma^{(1)}$  s'écrivent :

$$\Sigma_{11}^s = \Gamma_{11}^{(1)} + (K_s - \mu_s) \varepsilon_{\lambda\lambda}^s + 2\mu_s \varepsilon_{11}^s + \frac{2K_s \nu_s}{E_T} \sigma_3^t, \quad (5.36)$$

$$\Sigma_{22}^s = \Gamma_{22}^{(1)} + (K_s - \mu_s) \varepsilon_{\lambda\lambda}^s + 2\mu_s \varepsilon_{22}^s + \frac{2K_s \nu_s}{E_T} \sigma_3^t, \quad (5.37)$$

$$\Sigma_{12}^s = \Sigma_{21}^s = \Gamma_{12}^{(1)} + 2\mu_s \varepsilon_{12}^s. \quad (5.38)$$

On peut dire d'après l'expression de  $\Sigma_{12}^s$  (cf. formule (5.38)) que  $\mu_s$  représente le module de cisaillement plan de l'interface. En utilisant les relations de l'expression (D.14) de l'annexe D dans la formule (5.21), l'excès de déformation interfaciale transverse est donné par :

$$\Delta_i^t = \Lambda_i^{(1)} + \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{\mu_T} - \frac{4K_s \nu_s^2}{E_T^2} \right) \delta_{3i} \sigma_3^t + \frac{1}{\mu_T} \sigma_i^t + \frac{2K_s \nu_s}{E_T} \delta_{3i} \varepsilon_{\lambda\lambda}^s, \quad (5.39)$$

où :

$$\Lambda_i^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\lambda + \mu}{(\lambda + 2\mu)\mu} \delta_{3i} \tau_i^t - \frac{\tau_i^t}{\mu} \right] dx_3. \quad (5.40)$$

L'utilisation de la relation (5.35) dans la formule (5.39), permet d'obtenir :

$$\Delta_i^t = \Lambda_i^{(1)} + \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{\mu_T} \right) \delta_{3i} \sigma_3^t + \frac{1}{\mu_T} \sigma_i^t - \frac{2\nu_s}{E_T} \left( \Sigma_{\alpha\alpha}^s - \Gamma_{\alpha\alpha}^{(1)} \right) \delta_{3i}. \quad (5.41)$$

Les trois composantes de  $\Delta_i^t$  sont alors :

$$\Delta_1^t = \Lambda_1^{(1)} + \frac{1}{\mu_T} \sigma_1^t, \quad \Delta_2^t = \Lambda_2^{(1)} + \frac{1}{\mu_T} \sigma_2^t, \quad (5.42)$$

$$\Delta_3^t = \Lambda_3^{(1)} + \frac{1}{E_T} \left[ \sigma_3^t - \nu_s \left( \Sigma_{\alpha\alpha}^s - \Gamma_{\alpha\alpha}^{(1)} \right) \right]. \quad (5.43)$$

Ainsi donc,  $E_T$  peut être considéré comme le module de Young transverse de l'interface tandis que  $\nu_s$  apparaît comme le coefficient de Poisson de l'interface. Le coefficient  $\nu_s$  mesure alors la contraction de l'interface dans la direction transversale lorsque l'interface est soumise à une traction dans son plan. Enfin le paramètre  $\mu_T$  peut être vu comme le module de cisaillement transversal de l'interface.

Dans le cas particulier où  $\sigma_i^t = 0$ , l'expression (5.33) se réduit à :

$$\Sigma_{\alpha\beta}^s = \Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} + \lambda_s \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\lambda}^s + 2\mu_s \varepsilon_{\alpha\beta}^s, \quad (5.44)$$

avec  $\lambda_s = (K_s - \mu_s)$ . Les paramètres  $\lambda_s$  et  $\mu_s$  peuvent être considérés comme les coefficients de Lamé de l'interface. Pour finir cette section sur l'élasticité des interfaces/surfaces, notons que la relation (5.44) est identique à la forme classique de l'excès de la contrainte interfaciale développée par Gurtin et Murdoch (1975), Murdoch (1976), Gurtin et Murdoch (1978), Gurtin *et al.* (1998a).

## 5.2.5 Méthode semi-analytique pour évaluer les propriétés de surface

**Surface libre**

Le lecteur intéressé par les détails sur l'évaluation semi-analytique des propriétés élastiques d'une surface libre peut se référer aux travaux bien fournis de [Dingreville et Qu \(2007\)](#) et de [Dingreville \(2007\)](#).

**Interface entre deux matériaux**

Pour le cas d'une interface, les travaux de [Dingreville \(2007\)](#) et de [Dingreville et Qu \(2008\)](#) sont les mieux indiqués. Néanmoins, la démarche générale est présentée dans le chapitre 6 (cf. § 6.2).

**5.3 Propriétés effectives des nanoparticules**

Nous présentons dans cette section les principaux résultats de [Dingreville \*et al.\* \(2005\)](#) sur l'homogénéisation des particules nanométriques. On considère donc une nanoparticule obtenue à partir d'un matériau conventionnel (cf. figures 5.4 et 5.5). Puisque le rapport

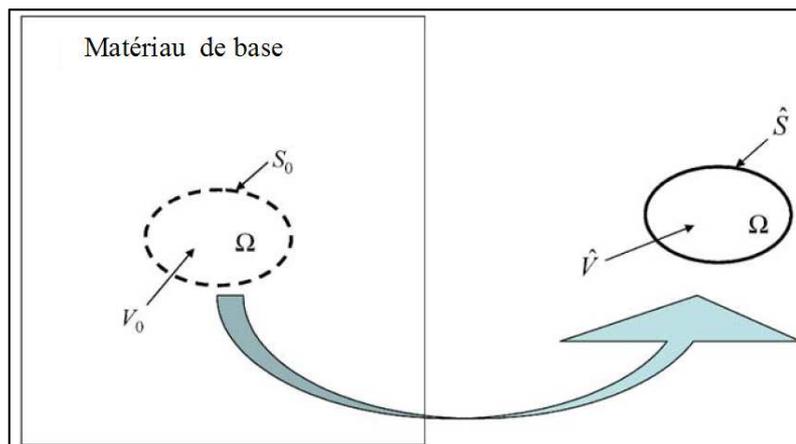
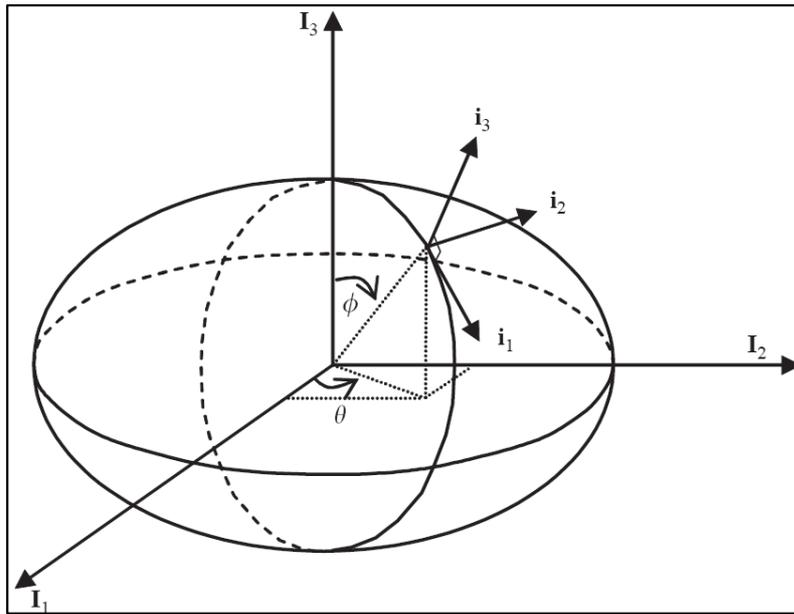


FIG. 5.4 – Particule créée par enlèvement de matière ([Dingreville \*et al.\*, 2005](#)).

surface/volume est important à l'échelle nanomètres et que la structure atomique au voisinage de la surface est différente de celle du cœur de la particule, les propriétés effectives


 FIG. 5.5 – Nanoparticule ellipsoïdale (Dingreville *et al.*, 2005).

de la particule sont différentes de celles du matériau de base. Il est évident que lorsque la taille de la particule est assez grande (de l'ordre des centaines de nanomètres), la surface de la particule est négligeable par rapport à son volume. Dans ce cas, la région superficielle de la particule peut être négligée et par conséquent la particule peut être considérée comme un corps homogène. Ses modules élastiques sont alors uniformes et sont identiques à ceux du matériau à partir duquel il est fait. Ceci n'est plus vrai quand la taille de la particule est de quelques nanomètres. La particule doit alors être vue comme un corps hétérogène et les propriétés effectives sont donc nécessaires pour caractériser la rigidité de la particule.

Bien que la nature discrète de la particule soit importante pour les petites échelles, les éléments nano-structuraux peuvent être modélisés dans un cadre de la mécanique des milieux continus (MMC) en partant de l'idée que "*nanostucture=volume+surface*". Dans ce qui suit, nous désignons respectivement par  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^{(3)}$  les tenseurs des modules élastiques du deuxième et du troisième ordre du matériau à partir duquel est faite la nanoparticule. Les demi-axes de la nanoparticule ellipsoïdale sont notés  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Dans leur travail, Dingreville *et al.* (2005) ont montré que les propriétés effectives  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  et la déformation

d'auto-équilibre  $\tilde{\varepsilon}$  d'une telle nanoparticule peuvent être évaluées par les expressions ci-après :

$$\begin{cases} C_{ijkl}^{\text{eff}} &= C_{ijkl} + \frac{1}{a} \left( Q_{ijkl} - C_{ijklmn}^{(3)} C_{mnpq}^{-1} \tau_{pq} \right), \\ \tilde{\varepsilon}_{ij} &\approx -\frac{1}{a} C_{ijkl}^{-1} \tau_{kl}, \end{cases} \quad (5.45)$$

avec :

$$Q_{ijkl} = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)} t_{\alpha i} t_{\beta j} t_{\kappa k} t_{\lambda l} \rho d\phi \right] d\theta, \quad (5.46)$$

$$\tau_{ij} = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\pi \Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} t_{\alpha i} t_{\beta j} \rho d\phi \right] d\theta, \quad (5.47)$$

$$\rho = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \left( \frac{a}{b} \sin \phi \sin \theta \right)^2 + \left( \frac{a}{c} \cos \phi \right)^2}. \quad (5.48)$$

La matrice de transformation  $[t]$  entre le repère global  $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3)$  et le repère local  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  (voir figure 5.5) est définie par :

$$[t] = \begin{bmatrix} \frac{a}{cd_1 d_2} \cos \theta \cos \phi & \frac{a^2}{bcd_1 d_2} \sin \theta \cos \phi & -\frac{d_2}{d_1} \sin \phi \\ -\frac{a}{bd_2} \sin \theta & \frac{1}{d_2} \cos \theta & 0 \\ \frac{1}{d_1} \cos \theta \sin \phi & \frac{a}{bd_1} \sin \theta \sin \phi & \frac{a}{cd_1} \cos \phi \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

où :

$$d_1 = \frac{\rho}{\sin \theta}, \quad d_2 = \sqrt{\left( \frac{a}{b} \sin \theta \right)^2 + \cos^2 \theta}. \quad (5.50)$$

Ainsi, grâce à  $[t]$ , le tenseur de déformation de la surface  $\varepsilon_{\alpha\beta}^s$  de la nanoparticule est relié

au tenseur de déformation du volume  $\varepsilon_{ij}$  de la nanoparticule par la relation :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^s = t_{\alpha i} t_{\beta j} \varepsilon_{ij}. \quad (5.51)$$

Notons que les paramètres  $\Gamma_{\alpha\beta}^{(1)}$  et  $\Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)}$  dans les formules (5.46) et (5.47) sont deux propriétés de la surface dont les définitions sont présentées dans la section 5.2.

Dingreville *et al.* (2005) ont présenté les modules effectifs dans les cas particuliers des nano-fils, des nano-films et des particules nano-sphériques. Dans le cas des particules nano-sphériques, les modules de cisaillement et de compressibilité effectifs sont donnés par la relation :

$$\begin{cases} \kappa^{\text{eff}} &= \kappa + \frac{4}{3a} \left[ K_s - \frac{\Gamma_{11}}{\kappa} \left( \frac{3}{2}L + 3M + \frac{4}{3}N \right) \right], \\ \mu^{\text{eff}} &= \mu + \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{5}(K_s + 6\mu_s) - \frac{2\Gamma_{11}}{3\kappa}(3M + 4N) \right]. \end{cases} \quad (5.52)$$

Dans cette expression,  $\mu$  et  $\kappa$  sont respectivement les modules de cisaillement et de compressibilité du matériau dans lequel est taillé la nanoparticule. Les paramètres  $N$ ,  $M$  et  $L$  sont les équivalents de  $\mu$  et  $\kappa$  pour le tenseur des modules élastiques du troisième ordre  $\mathbf{C}^{(3)}$  pour un solide isotrope. Les autres termes sont liés aux tenseurs  $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$  et  $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$  et ils sont définis comme suit :

$$\Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)} = (K_s - \mu_s)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\kappa\lambda} + \mu_s(\delta_{\alpha\kappa}\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\kappa}), \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} = \Gamma_{11}\delta_{\alpha\beta}. \quad (5.53)$$

Dingreville *et al.* (2005) ont ensuite appliqué le modèle à des nanoparticules de cuivre. Les divers paramètres utilisés sont donnés dans le tableau 5.1 où  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\mu$  et  $\kappa$  sont en GPa tandis que  $\Gamma_{11}$ ,  $K_s$  et  $\mu_s$  sont en  $\text{J m}^{-2}$ . La figure 5.6 montre les modules de

$L$	$M$	$N$	$\mu$	$\kappa$	$\Gamma_{11}$	$K_s$	$\mu_s$
15.29	-318.605	341.045	43.28	138.53	1.3961	2.6755	-3.5524

TAB. 5.1 – Paramètres du volume et de la surface du cuivre.

compressibilité et de cisaillement de la particule de cuivre sphérique pour différentes valeurs de son diamètre. L'effet de taille y est bien visible. Plusieurs autres résultats ont été présentés par [Dingreville \*et al.\* \(2005\)](#) sur les nano-films et les nano-fils. Pour plus de détails sur le modèle et les résultats, le lecteur peut se référer à [Dingreville \*et al.\* \(2005\)](#) ou à [Dingreville \(2007\)](#).

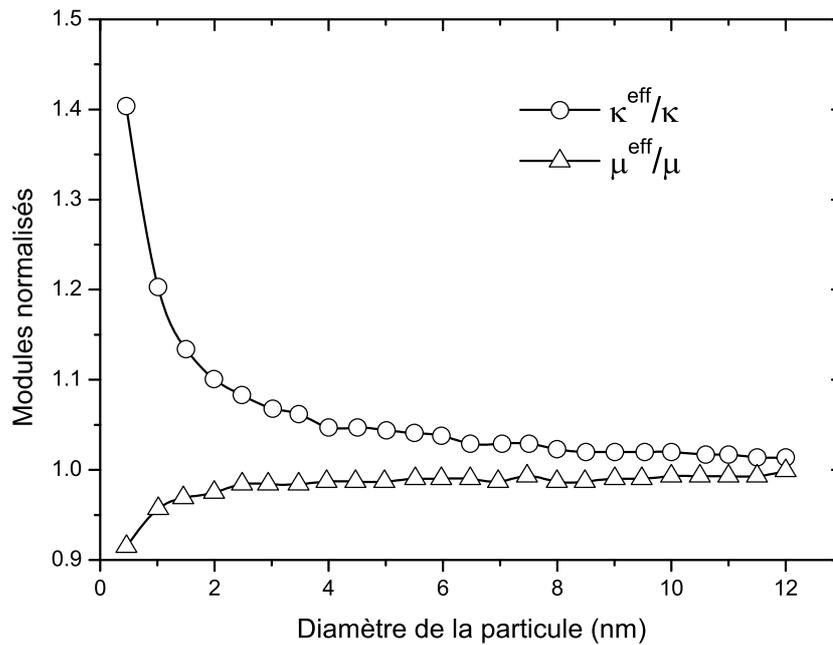


FIG. 5.6 – Modules normalisés de la nanoparticule sphérique ([Dingreville \*et al.\*, 2005](#)).

Dans les sections précédentes, nous avons présenté les caractéristiques fondamentales de l'échelle nanométrique. Cette échelle est essentiellement marquée par sa nature discrète. L'importance du rapport surface/volume oblige alors à prendre en compte l'effet de l'excès des grandeurs telles l'énergie, la contrainte et la déformation lorsque l'on travaille dans le contexte des milieux continus. Nous avons présenté les grands travaux récents sur la modélisation et la compréhension de la physique et de la mécanique des surfaces/interfaces dans les nanomatériaux. Les résultats de [Dingreville \*et al.\* \(2005\)](#) sur les nanoparticules sphériques montrent l'effet de l'excès d'énergie de surface sur les propriétés effectives de la

particule comparées aux propriétés du matériau à partir duquel elle a été fabriquée. Il est alors indubitable que de telles particules introduites dans une matrice pour la renforcer auront des effets supplémentaires aux effets couramment rencontrés dans les matériaux renforcés par des particules conventionnelles (de taille de l'ordre des micromètres).

Rien qu'au travers des résultats montrés par la figure 5.6, les nanoparticules paraissent, hormis le fait qu'elles peuvent être exploitées dans des systèmes infiniment petits, attrayantes à introduire dans des matrices de matériaux conventionnels pour améliorer certaines de leurs propriétés physiques et mécaniques. Il urge alors de revisiter les différentes techniques, robustes et bien établies dans le cadre de l'étude des matériaux composites conventionnels, pour les étendre à l'étude des matériaux composites contenant des nanoparticules. Bien que les connaissances dans ce domaine soient encore en leur genèse, plusieurs travaux sur l'extension du célèbre travail de Eshelby (1957) aux nanocomposites ont été réalisés ces dernières années. Rappelons que par nanocomposite, nous désignons dans ce travail, soit un matériau conventionnel contenant des nanoparticules ou un matériau nanométrique contenant également des nanoparticules. Dans la section 5.4, nous présentons l'état de l'art de cette discipline qui est encore à ses débuts.

## 5.4 Problème de nano-inclusions : état de l'art en bref

Schématiquement, nous pouvons représenter ce nouveau problème de Eshelby par la figure 5.7. Il s'agit d'une matrice occupant un domaine  $D$  dans lequel est plongée une nanoparticule occupant le domaine  $\Omega$ . Les deux matériaux sont séparés par une interface  $S$  caractérisée par ses propriétés élastiques  $\Sigma^s$  et  $\Delta^t$  qui sont bien définies et présentées dans la section 5.2.

Depuis que les recherches ont révélé les potentiels que regorge l'infiniment petit, des travaux se sont multipliés en physique et en mécanique (et bien sûr dans tant d'autres domaines) pour comprendre les phénomènes physiques liés à cette échelle. Nous présentons ici une sélection non-exhaustive des travaux intéressants en ce qui concerne l'étude des

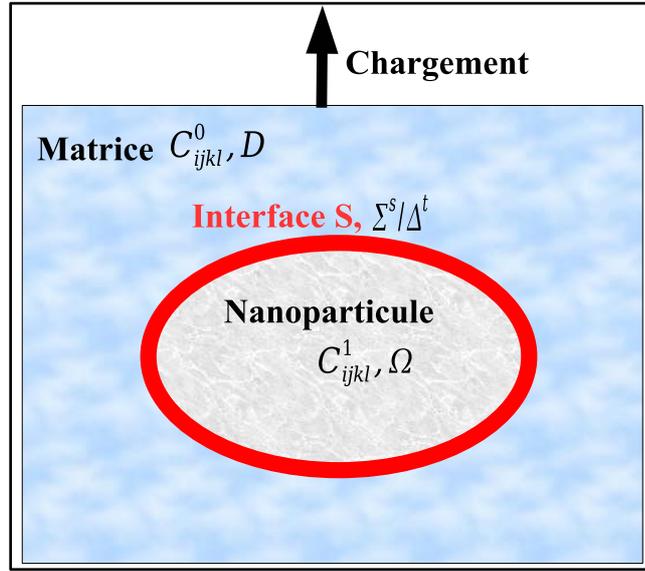


FIG. 5.7 – Schéma du problème de nano-hétérogénéités de Eshelby.

matériaux contenant des nano-hétérogénéités.

Le travail de [Sharma \*et al.\* \(2003\)](#) fut l'un des travaux pionniers sur l'étude de l'état élastique des nano-hétérogénéités noyées dans une matrice. Ces auteurs ont considéré une nano-hétérogénéité sphérique subissant une déformation propre de dilatation et noyée dans une matrice infinie qui est soumise à une contrainte tri-axiale à l'infini. Ils ont formulé le problème en utilisant une approche variationnelle basée sur des fonctionnelles d'énergies permettant d'introduire d'une manière simple l'effet d'énergie de surface/interface dans le modèle. [Sharma \*et al.\* \(2003\)](#) ont obtenu alors une solution analytique pour le champ de déplacement radial  $u(r)$  ( $r$  : distance radiale) de ce problème à symétrie sphérique en utilisant les équations d'Euler-Lagrange auxquelles sont associées des conditions aux limites appropriées. Partant donc de  $u(r)$ , les champs de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}(r)$  et de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(r)$  sont caractérisés dans la nano-hétérogénéité et dans la matrice en fonction des propriétés géométriques et mécaniques de la matrice et de l'hétérogénéité ainsi que les propriétés élastiques de l'interface entre la matrice et la nano-hétérogénéité. Comme application, les auteurs ont étudié la concentration de contrainte autour des cavités sphériques sous une pression hydrostatique.

Sharma et Ganti (2004), en utilisant les fonctions de Green, ont donné le formalisme général du problème de nano-inclusion subissant une déformation propre de dilatation uniforme et noyée dans un milieu infini en considérant l'effet d'énergie de surface. Ils ont donné une solution analytique dans le cas des inclusions avec une courbure constante telles que les inclusions sphériques et cylindriques. Ils aboutissent alors à la conclusion selon laquelle, seules les inclusions avec une courbure constante admettent un état élastique uniforme lorsqu'elles sont soumises à une déformation propre uniforme contrairement à la conclusion classique de Eshelby qui attribue ce comportement plutôt à la famille des inclusions ellipsoïdales. Sharma et Ganti (2004) ont également présenté une formulation pour la prédiction du module de compressibilité effectif des composites contenant de telles nano-hétérogénéités. Ils y ont aussi présenté d'autres applications de l'effet de taille sur les concentrations de contrainte autour des vides ainsi que les propriétés optoélectroniques des quantum dots.

Partant du fait que Sharma et Ganti (2004) n'ont pas pu déterminer le tenseur de Eshelby modifié complet pour le cas général de déformation propre uniforme, Duan *et al.* (2005a) ont repris le problème mais avec des nano-hétérogénéités sphériques soumises à une déformation propre uniforme. Duan *et al.* (2005a) ont obtenu les tenseurs intérieur et extérieur de Eshelby pour les nano-hétérogénéités sphériques soumises à une déformation propre uniforme arbitraire et noyées dans une matrice tout en tenant compte de l'effet de l'énergie de surface. Ils ont montré alors que, contrairement à leurs homologues à l'échelle conventionnelle, les tenseurs de Eshelby et le tenseur de concentration des contraintes sont en général non uniformes dans l'hétérogénéité et dépendent plutôt de la position. Ils ont également trouvé que ces tenseurs sont isotropes transverses. Ces auteurs ont donné à la fin de leur travail l'équivalent de la formule de Eshelby pour calculer l'énergie de déformation en présence des effets d'énergie de surface.

Un peu avant ce travail de Duan *et al.* (2005a) sur le formalisme de Eshelby pour les nano-hétérogénéités, Duan *et al.* (2005b) ont présenté une méthode pour prédire les

modules effectifs des solides contenant des nano-hétérogénéités sphériques avec l'effet de contraintes interfaciales. En supposant une interface isotrope entre la nanoparticule sphérique et la matrice, les auteurs ont développé un modèle permettant de prédire les modules effectifs des nanocomposites en utilisant les schémas micromécaniques classiques de Mori-Tanaka, l'assemblage des composites sphériques ainsi que la méthode auto-cohérente généralisée. Des expressions analytiques sont données pour les modules de cisaillement et de compressibilité effectifs. Ces expressions montrent bien l'effet de la taille et des propriétés interfaciales sur les modules effectifs du nanocomposite. Plusieurs travaux ont été réalisés à la suite de ce travail de [Duan \*et al.\* \(2005b\)](#) pour étudier d'autres propriétés des nanocomposites. Nous pouvons en citer entre autres les travaux de [Duan \*et al.\* \(2006b\)](#) sur les matériaux nano-poreux, le travail de [Duan et Karihaloo \(2007\)](#) sur les propriétés thermoélastiques des matériaux hétérogènes avec des interfaces imparfaites, le travail de [Le Quang et He \(2007\)](#) sur les propriétés thermoélastiques des nanocomposites avec des phases incluses sphériques et anisotropes, le travail de [Chen \*et al.\* \(2007b\)](#) toujours sur les propriétés thermomécaniques des nanocomposites avec les effets de taille et d'énergie de surface puis le travail de [Zhang et Wang \(2007\)](#) sur la surface d'écoulement des matériaux contenant des nano-pores sphériques.

En remarquant que tous ces modèles cités précédemment se sont limités au cas des nano-hétérogénéités sphériques hormis le travail de [Sharma et Ganti \(2004\)](#) (quoique qu'ils n'ont traité concrètement que le cas de géométrie sphérique), [Chen \*et al.\* \(2007a\)](#), de leur côté, ont développé une approche pour prédire les modules effectifs ainsi que le comportement élastique effectif des nanocomposites contenant des nano-hétérogénéités cylindriques. Les auteurs ont considéré que les phases du nanocomposite sont élastiques et isotropes transverses tandis les propriétés interfaciales sont supposées élastiques isotropes. En guise d'illustration, [Chen \*et al.\* \(2007a\)](#) ont étudié le comportement élastique ainsi que les modules effectifs de l'aluminium contenant des nano-pores cylindriques.

[Lim \*et al.\* \(2006\)](#) ont développé une approche qu'ils supposent être le complémen-

taire du travail de [Sharma et Ganti \(2004\)](#). [Lim et al. \(2006\)](#) ont analysé l'influence des contraintes interfaciales sur le champ de déformation élastique à l'intérieur des nano-inclusions sphériques soumises à une déformation propre non hydrostatique et noyées dans un solide infini. En suivant le travail de [Goodier \(1933\)](#) et des résultats dans [Love \(1944\)](#), les auteurs ont pu caractériser les champs élastiques à l'intérieur et l'extérieur des nano-inclusions. Ils sont également parvenus à la conclusion selon laquelle, l'état de déformation élastique à l'intérieur de l'inclusion est influencé non seulement par la taille et les contraintes interfaciales mais aussi par la déformation propre non hydrostatique même si cette dernière est uniforme contrairement à la théorie classique de [Eshelby](#).

Conscients que le vrai problème de nano-hétérogénéités avec une géométrie ellipsoïdale n'est toujours pas très bien résolu, [Sharma et Wheeler \(2007\)](#) ont introduit une nouvelle approche pour tenter de généraliser les résultats de [Sharma et Ganti \(2004\)](#) à la géométrie ellipsoïdale. Dans l'impossibilité de trouver la solution exacte du vrai problème posé, [Sharma et Wheeler](#) ont construit alors une solution approchée du problème en utilisant la méthode du tenseur "virial" (tensor virial method) développée par [Chandrasekhar \(1965, 1969\)](#) tout en adoptant plusieurs hypothèses simplicatrices. Comme exemple d'illustration du modèle proposé, [Sharma et Wheeler](#) ont étudié l'effet de forme sur l'état de déformation dépendant de la taille des quantum dots noyés dans une matrice.

En addition à cette sélection assez représentative des grands travaux réalisés ces dernières années sur l'extension des modèles classiques aux nanomatériaux, nous pouvons citer d'autres travaux comme celui de [Yang \(2004\)](#) qui fut critiqué pour son utilisation de fausses conditions aux limites, le travail de [Yang \(2006\)](#) qui rectifie les erreurs du premier, les travaux de [Duan et al. \(2007a,b\)](#) qui ont tenté d'unifier les diverses approches d'homogénéisation des composites avec des effets d'interface, le travail de [Duan et al. \(2006a\)](#), celui de [Huang et Wang \(2006\)](#) sur le comportement hyperélastique des composites multiphase avec l'effet d'énergie de surface, le travail de [Huang et Sun \(2007\)](#) sur les propriétés effectives élastiques des nanocomposites en utilisant la théorie des déformations finies,

puis les travaux de [Mi et Kouris \(2006\)](#) et de [Ferrari \(2000\)](#).

## 5.5 Conclusions et les questions de recherche importantes

A travers cette succincte analyse bibliographique sur la solution du problème de nano-inclusions, il ressort que les travaux les plus aboutis sont basés sur deux concepts fondamentaux :

- ➔ la loi de comportement isotrope de la surface/interface,
- ➔ la discontinuité des contraintes à travers l'interface.

En considérant une loi de comportement isotrope de l'interface, le problème aux limites d'une nanoparticule sphérique noyée dans un milieu infini est bien posé lorsque l'on lui associe les conditions aux limites issues du saut des contraintes à l'interface de la nanoparticule et son milieu environnant. Ces conditions aux limites sont directement liées aux équations de Young-Laplace généralisées de [Povstenko \(1993\)](#). A partir de la solution générale pour les champs de déplacements, de déformations et de contraintes du problème de particule sphérique noyée dans un milieu infini traité dans les travaux de [Goodier \(1933\)](#), [Love \(1944\)](#), [Lur'e \(1964\)](#) et selon les configurations considérées, les auteurs arrivent à déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions aux limites liées aux sauts de contraintes à l'interface. On comprend bien que pour tous ces travaux (exceptés ceux de Sharma et ces co-auteurs ([Sharma et Ganti, 2004](#); [Sharma et Wheeler, 2007](#)) qui ont utilisé le formalisme des fonctions de Green), les auteurs se sont orientés vers les nanoparticules à géométrie sphérique avec une loi de comportement interfacial isotrope.

Les principales limites de tous ces travaux, comme l'ont souligné [Sharma et Ganti \(2004\)](#) sont les suivantes :

- ☞ Le comportement isotrope de la surface/interface est supposé dans ces travaux. C'est une hypothèse plutôt douteuse lorsque l'on est préoccupé par des surfaces et des interfaces. Les travaux de [Dingreville \(2007\)](#) (cf. § 5.2) l'ont confirmée.

- ☞ La plupart de ces précédents travaux ont considéré des composites ayant des phases isotropes.
- ☞ Les formules analytiques sont restreintes aux géométries sphérique et cylindrique de nano-hétérogénéités. Ceci limite la possibilité d'étudier l'effet forme en plus de l'effet de taille.
- ☞ Le glissement, la torsion, les défauts de planéité des surfaces/interfaces ont été ignorés. Le glissement et la torsion des interfaces élastiques ont été introduits par [Gurtin \*et al.\* \(1998b\)](#) pour compléter la formulation initiale de [Gurtin et Murdoch \(1975\)](#). On peut s'attendre à ce que des comportements physiques intéressants émergent des hétérogénéités ayant de tels effets.

Sur la base de ces informations, certaines questions évidentes de recherche peuvent être formulées :

- 👉 Comment faire passer les informations complètes de l'échelle atomique discrète des interfaces dans le cadre des modèles de milieux continus ? En d'autres termes, comment concilier la mécanique moléculaire et la mécanique du continu ?
- 👉 Serait-il possible alors de développer une approche nano-mécanique suffisamment robuste pour incorporer toutes les informations atomistiques utiles dans les modèles micromécaniques classiques et profiter ainsi des avantages très bien connus de ces derniers ?

Les réponses à ces deux questions constitueront une extension et une généralisation très intéressantes des travaux antérieurs cités plus haut. Ainsi, non seulement le comportement anisotrope des interfaces et des phases des nanocomposites seront pris en compte mais également la morphologie des nano-hétérogénéités peut être facilement introduite dans le modèle. Nous tenterons, dans le chapitre 6, d'apporter une réponse à ces questions très fondamentales et d'actualité dans le domaine des nanomatériaux.

# CHAPITRE 6

## PROBLÈME DE NANO-HÉTÉROGÉNÉITÉS DE ESHELBY

**C**e chapitre présente une méthodologie permettant d'étendre la micromécanique classique de Eshelby pour y introduire les effets de taille et d'excès d'énergie de surface/interface. Ces effets sont très significatifs lorsque la taille des hétérogénéités est inférieure à quelques centaines de nanomètres. Nous montrons comment l'on peut faire passer les informations de l'échelle atomique discrète à l'échelle du milieu continu. Ainsi, l'interface ou la surface dans ces matériaux non conventionnels est d'abord transformée en une interphase caractérisée par son tenseur des modules élastiques. Ce tenseur contient les informations de l'échelle atomique tout en considérant l'interphase comme un milieu continu. Les modèles basés sur la mécanique des milieux continus peuvent alors utiliser ces informations de l'échelle atomique discrète et les propager dans le cadre d'un comportement macroscopique continu. L'approche est testée et validée sur des cas de comportements élastiques existants dans la littérature avec succès avant d'être appliquée pour étudier l'effet de taille sur les propriétés amortissantes macroscopiques des composites.

## Sommaire

---

<b>6.1 Motivations et objectifs</b> . . . . .	<b>219</b>
<b>6.2 De l'interface à l'interphase</b> . . . . .	<b>223</b>
6.2.1 Caractérisation de l'interface à l'échelle atomique . . . . .	223
6.2.2 Propriétés élastiques de l'interphase associée à l'interface . . . . .	230
6.2.3 Cas particulier d'une interface isotrope . . . . .	232
6.2.4 Nanoparticules et comportement de rigidité négative . . . . .	235
<b>6.3 Homogénéisation des nanocomposites</b> . . . . .	<b>236</b>
<b>6.4 Résultats numériques et discussions</b> . . . . .	<b>237</b>
6.4.1 Configuration isotrope et nanoparticules sphériques . . . . .	237
6.4.2 Configuration isotrope et nanoparticules ellipsoïdales . . . . .	239
6.4.3 Configuration anisotrope et nanoparticules ellipsoïdales . . . . .	247
<b>6.5 Amortissement : effet de taille et d'énergie de surface</b> . . . . .	<b>249</b>
6.5.1 Aluminium nano-poreux avec des nano-pores sphériques . . . . .	250
6.5.2 Aluminium nano-poreux : effet de forme des nano-pores . . . . .	252
<b>6.6 Conclusions</b> . . . . .	<b>255</b>

---

## 6.1 Motivations et objectifs

Au travers du chapitre 5, nous avons exploré l'univers de l'échelle nanométrique et les effets de cette échelle sur les propriétés physiques et mécaniques des matériaux. Cette échelle a ému et continue d'émouvoir plusieurs chercheurs. Nous avons présenté dans la section 5.4 du chapitre 5 les travaux significatifs sur la modification de la micromécanique classique afin de prédire les comportements des nanomatériaux. Vu le nombre important des travaux sur cet aspect de la modélisation des matériaux, il est indubitable que le domaine n'est plus vierge et que les mystères autour des nanomatériaux commencent à être maîtrisés petit à petit. Cependant, une analyse rigoureuse des divers développements sur ce sujet de la modélisation des nanomatériaux montre que nos connaissances sont encore à leurs débuts dans ce domaine. En effet, la majorité des travaux que nous avons présentés dans la section 5.4 du chapitre 5 montrent que les propriétés complètes des surfaces/interfaces telles que présentées dans la section 5.2 ne sont pas encore très bien prises en compte dans les modèles. Presque tous les modèles développés ces dernières années dans ce domaine supposent une surface/interface isotrope et la plupart des modèles concernent des géométries sphériques et un comportement isotrope des phases du nanocomposite. Ces divers travaux ont supposé une surface d'épaisseur nulle séparant les deux phases du nanocomposite et, pour pouvoir prendre en compte les propriétés de l'interface, des sauts de contraintes ou/et de déplacements sont supposés à travers l'interface.

Il existe deux différentes manières suivant lesquelles les propriétés de la surface/interface peuvent être définies et introduites dans un modèle. Par exemple, si l'on considère l'interface séparant deux phases, les propriétés interfaciales peuvent être définies soit en terme d'*interphase* ou soit en terme de *surface de séparation* ou encore d'*interface*. Alors que l' "interface" se réfère à la surface entre deux phases, "l'interphase" correspond au volume défini par l'étroite région en sandwich entre les deux phases.

Dans l'approche de l'interface où une seule surface de séparation est utilisée pour séparer les deux phases homogènes, la contribution de l'interface aux propriétés thermo-

dynamiques est définie comme étant l'excédant sur les valeurs que l'on obtiendrait si les phases conservaient leurs propriétés constantes jusqu'à une surface imaginaire (d'épaisseur nulle) séparant les deux phases. Comme l'a souligné [Dingreville \(2007\)](#), pour des bimatériaux réalistes, il existe généralement deux paramètres de longueur distinctifs, à savoir l'espacement atomique  $d$ , et le rayon de courbure de l'interface  $D$ , où  $D$  est généralement de plusieurs ordres de grandeur plus grand que  $d$  pour la plupart des problèmes d'ingénierie. Ainsi, si l'on mesure la longueur caractéristique de ces hétérogénéités par  $D$  (le rayon de courbure de l'interface entre une hétérogénéité et de son milieu ambiant), la structure atomique discrète de la matière sera cachée (homogénéisée) dans une structure continue. C'est exactement comme si l'on observait l'interface de très loin pour que l'on ne puisse voir ni la structure atomique ni l'épaisseur de l'interphase. Tout ce que l'on observe est le saut des propriétés des phases d'une valeur à l'autre à travers l'interface. Par conséquent, l'on perçoit que les champs (de contraintes, de déplacements, etc.) sont discontinus à l'interface lorsqu'on utilise l'échelle de longueur mésoscopique  $D$  ([Dingreville, 2007](#)). Plusieurs tentatives qui ont été réalisées dans l'analyse des nanocomposites en prenant en compte l'effet des propriétés interfaciales sont basées sur ce point de vue ([Sharma \*et al.\*, 2003](#); [Sharma et Ganti, 2002, 2004](#); [Sharma et Wheeler, 2007](#); [Lim \*et al.\*, 2006](#); [Huang et Wang, 2006](#); [Huang et Sun, 2007](#); [Duan \*et al.\*, 2005a,b,c](#); [Yang, 2006](#); [Sun \*et al.\*, 2004](#); [Ferrari, 2000](#); [Mi et Kouris, 2006](#); [Le Quang et He, 2007](#)). [Dingreville \(2007\)](#) a développé les conditions interfaciales pour les champs de déplacements, de déformations et de contraintes à travers l'interface entre deux phases d'un bimatériau et il a montré qu'aucune des études précédentes n'a pris en compte parfaitement les effets d'interface. Rappelons que les diverses solutions pour le problème de nano-inclusion de [Eshelby \(1957\)](#) apparues récemment dans la littérature ont supposé une interface isotrope et sont en général concernées par des géométries sphériques de nano-hétérogénéités. En gros, les équations sont résolues en partant de l'équation généralisée de Young-Laplace pour les solides ([Povstenko, 1993](#)) et des expressions générales

de [Lur'e \(1964\)](#) pour les déplacements dans un milieu infini contenant une hétérogénéité sphérique. Les solutions de [Lur'e](#) sont déterminées en fonction des polynômes de Legendre d'ordre deux.

Malgré que [Dingreville \(2007\)](#) ait établi la relation entre les propriétés microscopiques (mesurées par  $d$ ) et les sauts mésoscopiques de ces propriétés à travers l'interface (mesurés par  $D$ ) en tenant en compte la "nature 3-D" de l'interface, ce problème aux limites demeure complexe à résoudre. Pour résumer l'approche de [Dingreville](#), considérons le problème décrit par la figure [5.7](#). Il s'agit de résoudre le problème défini par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})) = 0, & \mathbf{r} \in D \cup \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

auxquelles on ajoute les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{n} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\Sigma}^s : \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{P} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = -\nabla_s \boldsymbol{\Sigma}^s, \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \boldsymbol{\Delta}^t. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Dans les conditions aux limites [\(6.2\)](#),  $\mathbf{n}$  est la normale à l'interface,  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  est appelé le tenseur de projection de surface,  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité tridimensionnel d'ordre 4,  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacements, la notation  $\llbracket \cdot \rrbracket$  signifie le saut de la quantité considérée (champs de contraintes et de déplacements),  $\boldsymbol{\kappa} = -\nabla_s \mathbf{n}$ . Le gradient de surface  $\nabla_s$  est défini au travers de l'opérateur gradient tridimensionnel usuel  $\nabla$  par la relation ([Dingreville, 2007](#)) :

$$\nabla_s = \nabla - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}. \quad (6.3)$$

Les autres termes des conditions aux limites [\(6.2\)](#) sont définis dans la section [5.2](#). Ce

problème aux limites bien posé au travers des équations (6.1) et des conditions aux limites (6.2) n'est pas encore résolu dans sa forme la plus générale possible.

Ainsi nous nous proposons de revisiter ce problème de nano-hétérogénéités noyées dans une matrice d'un autre point de vue différent des approches précédentes. Il s'agit donc de regarder l'interface entre l'hétérogénéité et la matrice comme une "interphase" et non comme une "interface". Notons que ce point de vue a déjà été suggéré par Teik-Cheng (2005). En effet, rigoureusement parlant, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, l'interface entre deux matériaux différents peut être considérée comme une région sur laquelle les propriétés matérielles changent progressivement des propriétés d'un matériau à celles de l'autre (cf. figure 5.3). C'est cette zone de transition que nous regarderons comme une *interphase* d'épaisseur  $t$ . Tous les champs tels que les contraintes, les déformations, la densité d'énergie de déformation etc vont tous varier de façon continue à travers l'interphase dans un cadre de milieu continu. Ceci peut être considéré comme une version agrandie qui représente l'interface comme un volume d'interphase, constitué d'un espace défini par la distance inter-atomique entre les atomes des phases. La zone de transition entre les propriétés d'un matériau à celles de l'autre s'étend seulement sur quelques couches d'atomes (Blakely, 1973). Clairement, si nous pouvons caractériser cette zone de transition par son tenseur des modules élastiques, nous pouvons alors utiliser les modèles bien développés en micromécanique classique sur les hétérogénéités enrobées (Cherkaoui *et al.*, 1994, 1995; Hervé et Zaoui, 1993; Lipinski *et al.*, 2006; Barhdadi *et al.*, 2007) (cf. chapitre 3) pour résoudre ce problème de nano-hétérogénéités. Il est évident qu'un avantage de cette approche est qu'elle est élaborée à partir des modèles antérieurs qui considèrent la morphologie et l'anisotropie des hétérogénéités, ce qui permet à la fois de prendre en compte la forme et l'anisotropie des nano-hétérogénéités de même que la forme et l'anisotropie de l'interphase dans la détermination des propriétés effectives des nanocomposites. La forme des nano-hétérogénéités est importante lorsqu'il s'agit des nano-plaquettes et du renforcement des matériaux par des nano-tubes. Compte tenu de

l'épaisseur extrêmement faible de l'interphase, l'utilisation de la mécanique moléculaire est d'importance.

Dans la suite, une procédure générale pour caractériser l'interphase à partir de sa description atomistique est présentée. Ensuite, les propriétés ainsi obtenues sont utilisées dans un modèle micromécanique classique (cf. par exemple le chapitre 3) pour déterminer les propriétés effectives de la nanocomposite. Enfin quelques applications numériques sont faites pour illustrer l'efficacité de la méthodologie.

## 6.2 De l'interface à l'interphase

### 6.2.1 Caractérisation de l'interface à l'échelle atomique

#### Correspondance au niveau atomique

Pour évaluer les propriétés élastiques d'une région interfaciale en tenant compte de sa nature discrète, considérons une interface entre deux matériaux A et B. La figure 6.1 illustre schématiquement les deux points de vue basés sur les différentes échelles d'observation du problème de nano-hétérogénéités. Supposons maintenant que le bimatériau est

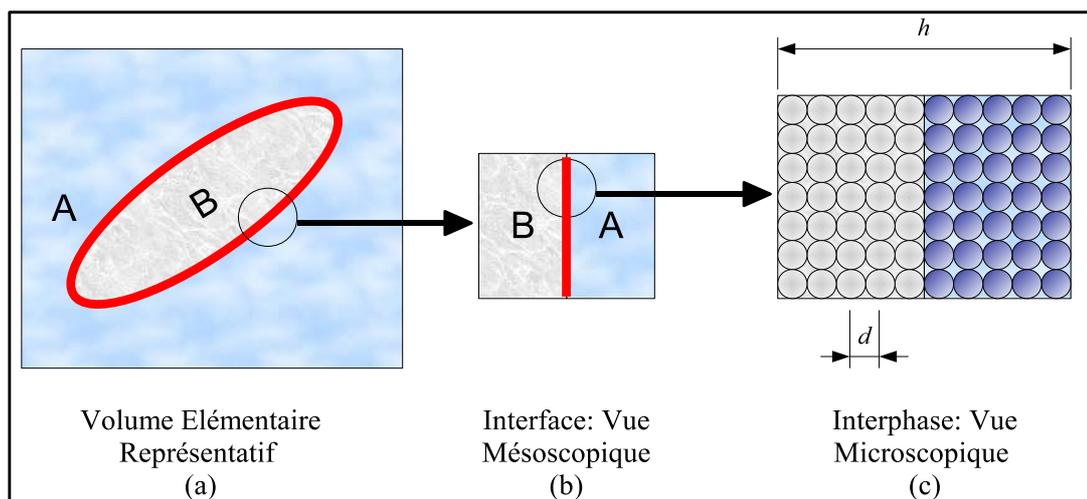


FIG. 6.1 – Interface-Interphase : différentes vues suivant l'échelle d'observation.

constitué de  $N$  atomes équivalents. L'énergie totale  $E^{(n)}$  de l'atome  $n$  est une fonctionnelle

générique de potentiel inter-atomique et elle est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 E^{(n)} = & E_0 + \sum_{m \neq n} \mathcal{P}(r^{nm}) + \frac{1}{2!} \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \mathcal{P}(r^{nm}, r^{np}) + \dots \\
 & + \frac{1}{N!} \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \dots \sum_{q \neq n} \mathcal{P}(r^{nm}, r^{np}, \dots, r^{nq}),
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

où  $r^{nm} = \sqrt{(r_1^{nm})^2 + (r_2^{nm})^2 + (r_3^{nm})^2}$  est la distance entre l'atome  $n$  et l'atome  $m$ ,  $\mathcal{P}$  est la fonction de potentiel inter-atomique. L'énergie totale de cet ensemble d'atomes est :

$$E = \sum_{n=1}^N E^{(n)}. \tag{6.5}$$

Si l'on considère un solide seul avec des extrémités infinies et soumis à une déformation macroscopique uniforme  $\varepsilon_{ij}$ , alors le tenseur de rigidité de ce solide est donné par la relation suivante ([Johnson, 1972](#)) :

$$C_{ijkl} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{p \neq n} \sum_{q \neq n} \frac{1}{\Omega_n} \frac{r_j^{pn} r_i^{qn} \partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{pn} \partial r_k^{qn}} \Bigg|_{r^{mn}}, \tag{6.6}$$

où  $\Omega_n$  est le volume atomique de l'atome  $n$ . Cependant lorsque l'on considère un ensemble atomique contenant des atomes non-équivalents (ce qui est le cas des systèmes contenant des joints de grains et des interfaces) soumis à une déformation macroscopique uniforme, des relaxations internes apparaissent ([Martin, 1975](#)) et la formule (6.6) peut être interprétée comme une description de la réponse élastique homogène de l'ensemble ([Dingreville, 2007](#)). Pour tenir compte des déplacements internes, on définit une correspondance au niveau atomique entre les configurations non-déformée  $\hat{r}_i^n$  et déformée  $r_i^n$  par la relation :

$$r_i^n - \hat{r}_i^n = (\bar{\varepsilon}_{ij}^{\pm} + \tilde{\varepsilon}_{ij}^n) \hat{r}_j^n, \tag{6.7}$$

où  $\bar{\varepsilon}_{ij}^{\pm}$  correspond à la déformation homogène de l'atome  $n$  et  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^n$  décrit la relaxation interne (ou bien une déformation additionnelle “non-homogène”) de l'atome  $n$  par rapport à la déformation homogène. A ce point, notons que le signe plus (+) (resp. moins (-)) doit être sélectionné si l'atome  $n$  est dans la phase A (resp. la phase B). Comme nous l'avons dit dans la section 5.2.1, la décomposition en “T stress” de Qu et Bassani (1993) peut être utilisée pour décrire la déformation homogène de l'assemblage du bimatérial par une déformation dans le plan  $\varepsilon_{\alpha\beta}^s$  et un chargement transverse  $\sigma_i^t$  (cf. annexe D.1). On obtient alors à partir de l'annexe D.1 la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{\pm} = A_{ij\alpha\beta}^{\pm} \varepsilon_{\alpha\beta}^s + B_{ijk}^{\pm} \sigma_k^t, \quad (6.8)$$

$$\begin{cases} A_{ij\alpha\beta}^{\pm} &= \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} - \frac{1}{2} (\gamma_{j\alpha\beta}^{\pm} \delta_{3i} + \gamma_{i\alpha\beta}^{\pm} \delta_{3j}), \\ B_{ijk}^{\pm} &= \frac{1}{2} (M_{jk}^{\pm} \delta_{3i} + M_{ik}^{\pm} \delta_{3j}), \end{cases} \quad (6.9)$$

où les tenseurs  $M_{jk}^{\pm}$  et  $\gamma_{i\alpha\beta}^{\pm}$  sont explicités dans l'annexe D.1. Les tenseurs  $A_{ij\alpha\beta}^{\pm}$  et  $B_{ijk}^{\pm}$  caractérisent le comportement homogène du bimatérial. La relation (6.7) s'écrit :

$$r_i^n - \hat{r}_i^n = (A_{ij\alpha\beta}^{\pm} \varepsilon_{\alpha\beta}^s + B_{ijk}^{\pm} \sigma_k^t) \hat{r}_j^n + \tilde{\varepsilon}_{ij}^n \hat{r}_j^n. \quad (6.10)$$

Nous pouvons maintenant définir la différence des positions de deux atomes  $m$  et  $n$  au voisinage de leur position relaxée comme suit :

$$r_i^{mn} - \hat{r}_i^{mn} = A_{i\alpha\beta}^{mn} \varepsilon_{\alpha\beta}^s + B_{ik}^{mn} \sigma_k^t + (\tilde{\varepsilon}_{ij}^m \hat{r}_j^m - \tilde{\varepsilon}_{ij}^n \hat{r}_j^n), \quad (6.11)$$

où  $A_{i\alpha\beta}^{mn}$  et  $B_{ik}^{mn}$  sont définis dans l'annexe D.2.

### Energie totale de l'assemblage d'atomes

La densité d'énergie  $\psi^{(n)}$  d'un atome  $n$  peut être développée autour de sa configuration d'équilibre par la relation suivante (Johnson, 1972; Dingreville, 2007) :

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} = & \frac{1}{\Omega_n} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N-1} \left[ E^{(n)}(r^{nm}) \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} + \frac{\partial E^{(n)}}{\partial r_i^{nm}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} (r_i^{nm} - \hat{r}_i^{nm}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{N-1} \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{nm} \partial r_k^{np}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} (r_i^{nm} - \hat{r}_i^{nm}) (r_k^{np} - \hat{r}_k^{np}) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ainsi, la densité d'énergie de déformation totale du système contenant  $N$  atomes est :

$$\Psi = \sum_{n=1}^N \psi^{(n)}. \quad (6.13)$$

En utilisant la relation (6.11) dans la relation (6.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi = & E_0 + \bar{\mathbf{A}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^s : \bar{\mathbf{A}}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t \\ & + \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \bar{\mathbf{Q}} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \sum_{n=1}^{N-1} (\mathbf{K}^n + \mathbf{D}^n : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \mathbf{G}^n \cdot \boldsymbol{\sigma}^t) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^n \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^n : \mathbf{L}^{mn} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^m. \end{aligned} \quad (6.14)$$

La relation (6.14) montre que les tenseurs  $\bar{\mathbf{A}}^{(1)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}^{(1)}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}^{(2)}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}^{(2)}$  et  $\bar{\mathbf{Q}}$  décrivent le comportement homogène de cet assemblage d'atome sous la configuration de déformation  $(\boldsymbol{\varepsilon}^s, \boldsymbol{\sigma}^t)$ . Par contre les tenseurs  $\bar{\mathbf{K}}^n$ ,  $\bar{\mathbf{D}}^n$ ,  $\bar{\mathbf{G}}^n$  et  $\bar{\mathbf{L}}^{mn}$  représentent les composantes de la réponse de perturbation du système introduite par la non-équivalence de l'assemblage atomique comme dans les joints de grains (ou dans les interfaces ou encore dans des composées multi-espèces) et ils tiennent compte de l'accommodation des relaxations internes sous la configuration de déformation  $(\boldsymbol{\varepsilon}^s, \boldsymbol{\sigma}^t)$ . Leurs expressions ont été déterminées par Dingreville (2007) et elles sont reportées dans l'annexe D.2. L'énergie totale du système

est donnée alors par :

$$E = \sum_{n=1}^N \Omega_n \psi^{(n)}. \quad (6.15)$$

### Contrainte au niveau atomique

La contrainte au niveau atomique associée à l'atome  $n$  est définie par :

$$\sigma_{ij}^n = \frac{1}{2\Omega_n} \sum_{m \neq n} \frac{\partial E}{\partial r_i^{nm}} r_j^{nm}. \quad (6.16)$$

En développant cette contrainte atomique  $\sigma_{ij}^n$  par rapport à  $r_i^{nm}$  au voisinage de la configuration d'équilibre  $\hat{r}_i^{nm}$  du bimatériau, on obtient :

$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^n \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} + \sum_{m \neq n} \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial r_k^{nm}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} (r_k^{nm} - \hat{r}_k^{nm}), \quad (6.17)$$

L'utilisation de la formule (6.11) dans la relation (6.17) donne la forme suivante à la contrainte atomique  $\sigma_{ij}^n$  (Dingreville, 2007) :

$$\sigma_{ij}^n = \tau_{ij}^n + \bar{C}_{ij\alpha\beta}^{s,n} \epsilon_{\alpha\beta}^s + \bar{M}_{kij}^{t,n} \sigma_k^t + \sum_{m \neq n} T_{ijkl}^{mn} \tilde{\epsilon}_{kl}^m, \quad (6.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{ij}^n = \frac{1}{2\Omega_n} \sum_{m \neq n} \frac{\partial E}{\partial r_i^{nm}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} \hat{r}_j^{nm}, \\ \bar{C}_{ij\alpha\beta}^{s,n} = \left( \sum_{m \neq n} A_{k\alpha\beta}^{nm} \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial r_k^{nm}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} \right), \\ \bar{M}_{kij}^{t,n} = \left( \sum_{m \neq n} B_{lk}^{nm} \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial r_l^{nm}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} \right), \\ T_{ijkl}^{mn} = \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial r_k^{nm}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} \hat{r}_l^m (1 - \delta_{nm}) - \left( \sum_{m \neq n} \frac{\partial \sigma_{ij}^n}{\partial r_k^{nm}} \Big|_{r^{nm}=\hat{r}^{nm}} \hat{r}_l^n \right) \delta_{nm}. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Il existe dans la formule (6.18)  $6N$  inconnues  $\tilde{\epsilon}_{kl}^m$  qui décrivent les relaxations internes dans le système.

### Relaxations internes

Les conditions d'équilibre mécanique et de continuité de la traction à l'interface donnent :

$$\sigma_j^{t,n} = \sigma_j^t. \quad (6.20)$$

En se servant de la formule (6.20) dans la formule (6.18), les  $6N$  inconnues de l'expression (6.18) sont déterminées ainsi par Dingreville (2007) :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{s,n} &= \eta_{\alpha\beta}^{s,n} - M_{i\alpha\beta}^{s,n} \sigma_i^t + Q_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{s,n} \varepsilon_{\kappa\lambda}^s, \\ \tilde{\varepsilon}_i^{t,n} &= \eta_i^{t,n} + M_{ij}^{t,n} \sigma_j^t - Q_{i\alpha\beta}^{t,n} \varepsilon_{\alpha\beta}^s. \end{cases} \quad (6.21)$$

Les détails de ces calculs ne sont pas donnés ici pour simplifier les développements. Le lecteur intéressé peut se référer à Dingreville (2007, annexe C).

### Propriétés élastiques de l'interface

Nous pouvons à partir de cet instant déterminer complètement la contrainte atomique  $\sigma_{ij}^n$ . Ainsi, les composantes  $\sigma_{\alpha\beta}^{s,n}$  dans le plan pour cette contrainte atomique  $\sigma_{ij}^n$  sont définies à partir des relations (6.18) et (6.21) sous la configuration de déformation  $(\varepsilon^s, \sigma^t)$  de l'ensemble atomique par :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{s,n} = \pi_{\alpha\beta}^n + C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{s,n} \varepsilon_{\kappa\lambda}^s + Q_{i\alpha\beta}^n \sigma_i^t, \quad (6.22)$$

$$\begin{cases} \pi_{\alpha\beta}^n &= \tau_{\alpha\beta}^n + \sum_{m=1}^{N-1} T_{\alpha\beta 3k}^{nm} \eta_k^{t,m} + \sum_{m=1}^{N-1} T_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{nm} \eta_{\kappa\lambda}^{s,m}, \\ C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{s,n} &= \bar{C}_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{s,n} - \sum_{m=1}^{N-1} T_{\alpha\beta 3i}^{nm} Q_{i\kappa\lambda}^{t,m} + \sum_{m=1}^{N-1} T_{\alpha\beta\mu\nu}^{nm} Q_{\mu\nu\kappa\lambda}^{s,m}, \\ Q_{i\alpha\beta}^n &= \bar{M}_{i\alpha\beta}^{t,n} + \sum_{m=1}^{N-1} T_{\alpha\beta 3j}^{nm} M_{ji}^{t,m} - \sum_{m=1}^{N-1} T_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{nm} M_{i\kappa\lambda}^{s,m}. \end{cases} \quad (6.23)$$

D'une manière similaire, loin de la région interfaciale, lorsque l'ensemble atomique est soumis au chargement  $(\varepsilon^s, \sigma^t)$ , la contrainte dans le plan  $\sigma_{\alpha\beta}^{\pm,s}$  pour le cœur des matériaux

est déterminée par (cf. annexe D.1) :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\pm,s} = (C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{\pm} - C_{\alpha\beta 3j}^{\pm} \gamma_{j\kappa\lambda}^{\pm}) \varepsilon_{\kappa\lambda}^s + \gamma_{i\alpha\beta}^{\pm} \sigma_i^t. \quad (6.24)$$

Ainsi, avec les relations (6.22) et (6.24), l'excès de la contrainte dans le plan de la zone interfaciale (que nous nommons interphase dans notre approche) est définie par :

$$\Sigma_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{V_0} \sum_{n=1}^N \Omega_n (\sigma_{\alpha\beta}^{s,n} - \sigma_{\alpha\beta}^{\pm,s}) = \frac{A_0}{V_0} \left( \Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} + \Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)} \varepsilon_{\kappa\lambda}^s + H_{j\alpha\beta} \sigma_j^t \right), \quad (6.25)$$

où  $A_0$  est l'aire de l'interface concernée,  $V_0$  est le volume de l'interphase (région interfaciale). Les autres termes de l'expression (6.25) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{A_0} \sum_{n=1}^N \Omega_n \pi_{\alpha\beta}^n, \\ \Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{A_0} \sum_{n=1}^N \Omega_n \left[ C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{s,n} - (C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{\pm} - C_{\alpha\beta 3j}^{\pm} \gamma_{j\kappa\lambda}^{\pm}) \right], \\ H_{i\alpha\beta} = \frac{1}{A_0} \sum_{n=1}^N \Omega_n \left[ Q_{i\alpha\beta}^n - \gamma_{i\kappa\lambda}^{\pm} \right]. \end{array} \right. \quad (6.26)$$

De la même manière, l'excès de déformation hors du plan de l'interface est déterminé à partir de la seconde formule de la relation (6.21) par :

$$\Delta_k^t = \frac{1}{V_0} \sum_{n=1}^N \Omega_n \varepsilon_k^{t,n} = \frac{A_0}{V_0} \left( \Lambda_k^{(1)} + \Lambda_{kj}^{(2)} \sigma_j^t - H_{k\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^s \right), \quad (6.27)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_k^{(1)} = -\frac{1}{A_0} \sum_{n=1}^N \Omega_n \eta_k^{t,n}, \\ \Lambda_{kj}^{(2)} = \frac{1}{A_0} \sum_{n=1}^N \Omega_n M_{jk}^{t,n}. \end{array} \right. \quad (6.28)$$

Les tenseurs  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Lambda^{(1)}$ ,  $\Lambda^{(2)}$  et  $\mathbf{H}$  caractérisent les propriétés élastiques de l'in-

terface (cf. § 5.2). Pour une fonction de potentiel inter-atomique  $\mathcal{P}$  (ou encore pour  $E^{(n)}$ ) donnée, l'évaluation numérique de ces tenseurs à partir de leurs expressions analytiques requiert la connaissance de l'état relaxé  $\hat{r}^{mn}$  de l'interface. Pour obtenir  $\hat{r}^{mn}$ , une simulation de la statique moléculaire préliminaire doit être conduite. C'est pour cette raison que la méthode d'évaluation de ces tenseurs est nommée semi-analytique par [Dingreville et Qu \(2007\)](#), [Dingreville \(2007\)](#) qui ont fourni tous les détails sur la détermination de ces tenseurs. Ainsi, dans la suite de nos développements, nous supposons que ces cinq tenseurs sont bien déterminés et nous les utilisons comme des données d'entrée pour notre modèle.

Il est important que nous précisions la grande différence entre  $\Sigma_{\alpha\beta}^s$  et  $\Delta_k^t$  présentés plus haut (formules (6.25) et (6.27)) et ceux que nous avons définis dans la section 5.2. Notre démarche est basée en effet sur cette différence. D'une manière très simple,  $\Sigma_{\alpha\beta}^s$  est en  $\text{N.m}^{-2}$  et  $\Delta_k^t$  est sans dimension ici alors que  $\Sigma_{\alpha\beta}^s$  est en  $\text{J.m}^{-2}$  et  $\Delta_k^t$  est en  $\text{m}$  dans la section 5.2. Ceci veut dire tout simplement que, dans les formules (6.25) et (6.27), les quantités ont été rapportées à l'unité de volume de la zone interfaciale (interphase) tandis que dans la section 5.2, ces mêmes quantités ont été rapportées à l'unité de surface de l'interface. Notre approche est basée sur la vision microscopique de la région interfaciale (voir figure 6.1(c)). Dans la section suivante, nous montrons comment l'on peut déterminer les propriétés élastiques de l'interphase à partir de toutes les descriptions au niveau atomique de la région interfaciale que nous venons de présenter.

### 6.2.2 Propriétés élastiques de l'interphase associée à l'interface

Comme il est dit plus haut, au lieu de reporter les excès de contraintes et de déformations de la zone interfaciale à la surface  $A_0$  de l'interface, nous les attribuons plutôt au volume  $V_0$  de la région interfaciale. Les quantités définies par les relations (6.25) et (6.27) désignent alors respectivement les composantes dans le plan de l'excès de la contrainte et les composantes hors plan de l'excès de déformation de la zone interfaciale. Il est donc concevable qu'on attribue des propriétés élastiques à cette interphase. Pour y arriver,

nous pouvons partir de la similitude entre les relations (6.25) et (D.11) d'une part et les relations (6.27) et (D.10) d'autre part. Ceci se traduit explicitement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{A_0}{V_0} \left( \mathbf{\Gamma}^{(1)} + \mathbf{\Gamma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t \right) = \hat{\boldsymbol{\tau}}^s + \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t, \\ \frac{A_0}{V_0} \left( \boldsymbol{\Lambda}^{(1)} + \boldsymbol{\Lambda}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t - \mathbf{H} : \boldsymbol{\varepsilon}^s \right) = -\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau}^t + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t - \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\varepsilon}^s. \end{cases} \quad (6.29)$$

Il s'en suit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{C}^s = \frac{A_0}{V_0} \mathbf{\Gamma}^{(2)}, \\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{A_0}{V_0} \mathbf{H}, \\ \mathbf{M} = \frac{A_0}{V_0} \boldsymbol{\Lambda}^{(2)}. \end{cases} \quad (6.30)$$

Ces dernières relations nous permettent alors de caractériser complètement l'interphase pour son tenseur des modules élastiques que nous désignons par  $\mathbf{C}^c$  dans la suite. Ainsi la troisième relation des relations (6.30) permet de déterminer les 6 composantes  $C_{3k3j}^c$  de  $\mathbf{C}^c$  comme suit (puisque, selon l'annexe (D.6),  $M_{kj} = C_{3k3j}^{-1}$ ) :

$$C_{3j3k}^c = M_{jk}^{-1} = \left[ \frac{A_0}{V_0} \boldsymbol{\Lambda}^{(2)} \right]_{jk}^{-1}. \quad (6.31)$$

Sachant que  $\gamma_{k\alpha\beta} = M_{kj} C_{3k\alpha\beta}$  (voir annexe (D.6)), la deuxième relation de (6.30) conduit à un système de 9 équations linéaires à résoudre pour déterminer les 9 inconnues  $C_{3k\alpha\beta}^c$  de  $\mathbf{C}^c$  :

$$\Lambda_{jk}^{(2)} C_{3k\alpha\beta}^c = H_{j\alpha\beta}. \quad (6.32)$$

Finalement la première relation de (6.30) nous permet d'avoir les 6 dernières composantes

$C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^c$  de  $\mathbf{C}^c$  par la relation suivante :

$$C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^c = \frac{A_0}{V_0} \left( \Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)} + H_{j\kappa\lambda} C_{3j\alpha\beta}^c \right). \quad (6.33)$$

Nous venons donc de caractériser l'interphase que nous avons associée à la zone interfaciale par son tenseur des modules élastiques. Pour clore ce paragraphe, il nous semble très utile de décrire brièvement la détermination du volume  $V_0$  de l'interphase. Nous avons dit dans la section 5.21 que la pseudo-déformation  $\Delta^t$  représente la largeur intrinsèque de l'interface tenant compte du mouvement relatif des surfaces supérieure et inférieure de la zone interfaciale puisqu'elle a la dimension d'une longueur. Cette pseudo-déformation  $\Delta^t$  (à ne pas confondre avec l'excès de déformation transverse de l'interphase (6.27)) est liée à  $\Lambda^{(1)}$  qui représente la partie de la pseudo-déformation interfaciale transverse qui existe même si  $\langle \sigma^t \rangle = 0$  et  $\epsilon^s = 0$ . En d'autres termes,  $\Lambda^{(1)}$  représente l'épaisseur de la zone interfaciale dans son état relaxé. La connaissance de cette propriété intrinsèque de l'interface permet d'évaluer le volume  $V_0$  de l'interphase via l'aire  $A_0$  de l'interface. En conclusion, les entrées  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Lambda^{(1)}$ ,  $\Lambda^{(2)}$  et  $\mathbf{H}$  issues de la description atomique de l'interface nous permet de caractériser entièrement les propriétés élastiques de la région volumique (interphase) que nous venons d'associer à l'interface.

### 6.2.3 Cas particulier d'une interface isotrope

Dans le cas d'une interface isotrope,  $\Gamma^{(2)}$  est défini par 2 paramètres  $K_s$  et  $\mu_s$  au travers de la relation :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\kappa\lambda}^{(2)} &= (K_s - \mu_s) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\kappa\lambda} + \mu_s (\delta_{\alpha\kappa} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\kappa}) \\ &= \lambda_s \delta_{\alpha\beta} \delta_{\kappa\lambda} + \mu_s (\delta_{\alpha\kappa} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\kappa}), \end{aligned} \quad (6.34)$$

où  $\lambda_s$  et  $\mu_s$  peuvent être considérés comme les constantes de Lamé de l'interface. En utilisant les résultats de l'annexe (D.14) puis les relations (6.33) et (6.34), nous obtenons

les expressions suivantes pour les constantes de Lamé  $\lambda_c$  et  $\mu_c$  de l'interphase associée à cette interface isotrope :

$$\begin{cases} \mu_c = \frac{A_0}{V_0} \mu_s, \\ \lambda_c = \frac{2A_0}{V_0} \left( \frac{\mu_s \lambda_s}{2\mu_s - \lambda_s} \right). \end{cases} \quad (6.35)$$

Pour les interfaces rectangulaire, sphérique, ellipsoïdale et cylindrique, il est concevable, à cause de la nature extrêmement faible de l'épaisseur  $t$  de l'interphase, de dire que  $V_0/A_0 = t$  ou mieux  $V_0/A_0 \approx t$ . Dans ce cas, la relation (6.35) peut être réécrite simplement comme suit :

$$\begin{cases} \mu_c = \frac{1}{t} \mu_s, \\ \lambda_c = \frac{2}{t} \left( \frac{\mu_s \lambda_s}{2\mu_s - \lambda_s} \right). \end{cases} \quad (6.36)$$

ou encore d'une manière équivalente :

$$\begin{cases} \mu_s = \mu_c t, \\ \lambda_s = \frac{2\mu_c \nu_c t}{1 - \nu_c}, \end{cases} \quad (6.37)$$

où  $\nu_c = 1/[2(1 + \mu_c/\lambda_c)]$  et le coefficient de Poisson de l'interphase.

La relation (6.37) est identique à la relation (69) dans le travail de Wang *et al.* (2005) ou à la relation (7) dans le travail de Duan *et al.* (2007a) pour le remplacement d'une interphase mince et rigide par une interface dans les composites renforcés par des particules sphériques. Cette correspondance entre ce résultat particulier de notre approche et ces résultats existants dans la littérature constitue en quelque sorte une première validation de notre modèle. Cependant, il est impératif que nous vérifions la compatibilité entre les hypothèses dans ces travaux antérieurs (Wang *et al.*, 2005; Duan *et al.*, 2007a) et nos hypothèses dans ce cas particulier avant de dégager les diverses conclusions.

Précisons d'abord les conditions dans lesquelles Wang *et al.* (2005) ont obtenu leur relation (69) identique à notre formule (6.37). Dans leur travail, Wang *et al.* (2005) ont étudié, hormis un modèle d'anti-pénétration des surfaces séparées par une interface, les différentes connections entre les modèles d'interphase et les modèles d'interface. Pour donc obtenir leur formule (69), Wang *et al.* sont partis d'un modèle de composite à trois phases en le transformant en un composite à deux phases avec des propriétés d'interface appropriées comme l'avait également fait Hashin (2002) dans le cas de composites renforcés par des fibres. Wang *et al.* ont commencé par analyser la différence entre les déplacements et les contraintes à travers l'interphase pour un composite renforcé par des particules sphériques. Ces auteurs ont alors remarqué que les caractéristiques des déplacements et des contraintes à travers l'interphase sont identiques à celles du modèle de contrainte d'interface (ISM) utilisé par Duan *et al.* (2005a,b,c) dans le cas d'une interphase mince et rigide. Ce dernier modèle suppose la continuité des déplacements et un saut de contraintes à travers l'interface. Les discontinuités des contraintes à travers l'interface sont équilibrées par les contraintes interfaciales via l'équation généralisée de Young-Laplace (Sun *et al.*, 2004; Duan *et al.*, 2005c). Le lien entre le modèle d'interphase et le modèle de contrainte d'interface ou mieux encore l'identification des paramètres  $\mu_s$  et  $\lambda_s$  de l'interface en fonction des paramètres  $\mu_c$  et  $\lambda_c$  de l'interphase, a été alors établi suivant les similitudes des comportements de ces deux modèles. Il va sans dire alors que si les résultats de notre approche sont identiques à ceux de Wang *et al.* (2005) alors notre approche doit également vérifier les hypothèses de Wang *et al.* dans ce cas particulier d'interface isotrope avec des particules sphériques. Ainsi, il est concevable de récrire les conditions aux limites du problème (6.1) de Dingreville dans le cas d'interface isotrope comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = -\Sigma^s : \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{P} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = -\nabla_s \Sigma^s, \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \Delta^t \approx 0, \end{array} \right. \quad (6.38)$$

pour que les déplacements soient continus à travers l'interface. Cette condition implique alors que les composantes des tenseurs  $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$  et  $\mathbf{H}$  sont très petites (tendent vers 0) à cause de la formule (5.21). Il s'en suit alors que l'interphase associée à l'interface caractérisée par les propriétés  $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ ,  $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$  et  $\mathbf{H}$  a des modules élastiques très grands (selon les formules (6.31) à (6.33)). Ceci satisfait ainsi la condition d'interphase rigide dans le cadre du modèle de Wang *et al.* La seconde hypothèse d'interphase mince est triviale à cause l'extrême étroitesse de la zone interfaciale dans notre modèle.

Nous pouvons conclure à partir de ces premières remarques que notre approche constitue un grand pas dans la conciliation des modèles de calculs atomistiques et la mécanique des milieux continus. Les informations obtenues au niveau de l'échelle atomique discrète peuvent donc être introduites dans un modèle basé sur la mécanique du continu. Avant de procéder à d'autres validations élémentaires de notre approche, il nous convient d'aborder à ce point la question du comportement de rigidité négative (cf. § 3.6.3) associé aux nanoparticules comme il a été soulevé par Papakonstantopoulos *et al.* (2005).

#### 6.2.4 Nanoparticules et comportement de rigidité négative

Les résultats sur le calcul des composantes des tenseurs  $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ ,  $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$ ,  $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$  et  $\mathbf{H}$  de Dingreville (2007) montrent que les constantes de Lamé de l'interphase  $\mu_c$  et  $\lambda_c$  (voir formule (6.36)) peuvent être négatives ou positives selon les valeurs de  $\mu_s$  et  $\lambda_s$ . Cette observation est très intéressante puisque, comme nous l'avons déjà dit dans le section 3.6.3, les travaux de Lakes et Drugan (2002), Lakes *et al.* (2001), Lakes (2001a,b) ont montré que si des phases incluses dans une matrice ont un comportement de rigidité négative alors les propriétés macroscopiques telles que l'amortissement, la rigidité etc. peuvent être extrêmement améliorées. D'un autre côté, des travaux récents tels que ceux de Yoshimoto *et al.* (2004, 2005) et de Papakonstantopoulos *et al.* (2005), ont révélé l'existence des domaines de rigidité négative autour des nano-hétérogénéités noyées dans une matrice. Ces derniers travaux quant à eux sont complètement basés sur des calculs atomistiques. Nos résultats

confirment ceux de [Yoshimoto \*et al.\* \(2004\)](#).

### 6.3 Homogénéisation des nanocomposites

Dans la section 6.2, nous avons caractérisé dans le cadre des milieux continus, l'interface entre une nano-hétérogénéité et son milieu environnant. Ainsi, nous avons transformé le problème à deux phases avec des conditions d'interface particulières à un problème à trois phases où les interfaces entre les phases sont supposées parfaites. Nous pouvons dès à présent utiliser le modèle micromécanique présenté dans le chapitre 3 pour prédire les propriétés effectives des matériaux contenant des nano-hétérogénéités. Nous pouvons ainsi traiter les cas de géométrie ellipsoïdale et d'anisotropie des phases du composite et des interfaces contrairement aux modèles existants qui se sont limités aux interfaces isotropes et à la géométrie sphérique.

Dans ce cas particulier du modèle général du chapitre 3, le tenseur des modules élastiques du nanocomposite est donné par (cf. chapitre 3 pour tous les détails) :

$$\mathbf{C}^{\text{eff}} = \mathbf{C}^3 + \sum_{k=1}^2 \varphi_k (\mathbf{C}^k - \mathbf{C}^3) : \mathbf{A}^k. \quad (6.39)$$

L'effet de taille et d'excès d'énergie de surface/interface est ainsi introduit dans ce modèle micromécanique classique au travers des propriétés élastiques  $\mathbf{C}^2$  de l'interphase caractérisée par les formules (6.31), (6.32) et (6.33). Nous pouvons maintenant passer à une seconde phase de validation de notre approche en comparant nos résultats à ceux du travail de [Duan \*et al.\* \(2005b\)](#) qui constitue un travail de référence dans l'homogénéisation des matériaux contenant des nano-particules sphériques avec des effets d'énergie de surface/interface.

## 6.4 Résultats numériques et discussions

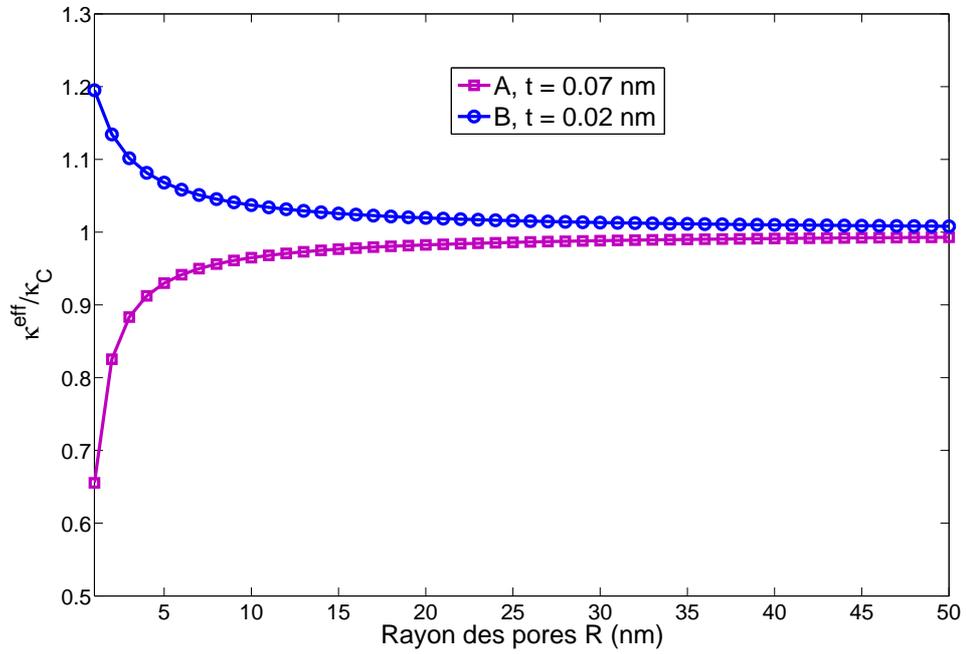
### 6.4.1 Configuration isotrope et nanoparticules sphériques

Comme la majorité des travaux apparus ces dernières années sur les solides contenant des nano-hétérogénéités, nous considérons, dans un premier temps, l'aluminium contenant des nano-pores sphériques. Le module de compressibilité de l'aluminium ainsi que son coefficient de Poisson sont respectivement  $\kappa_3=75.2$  GPa et  $\nu_3=0.3$ . Deux couples de propriétés de surface issues des travaux de [Miller et Shenoy \(2000\)](#) sont considérés pour l'aluminium et sont présentés dans le tableau 6.1. Les surfaces considérées sont donc isotropes. Puisque

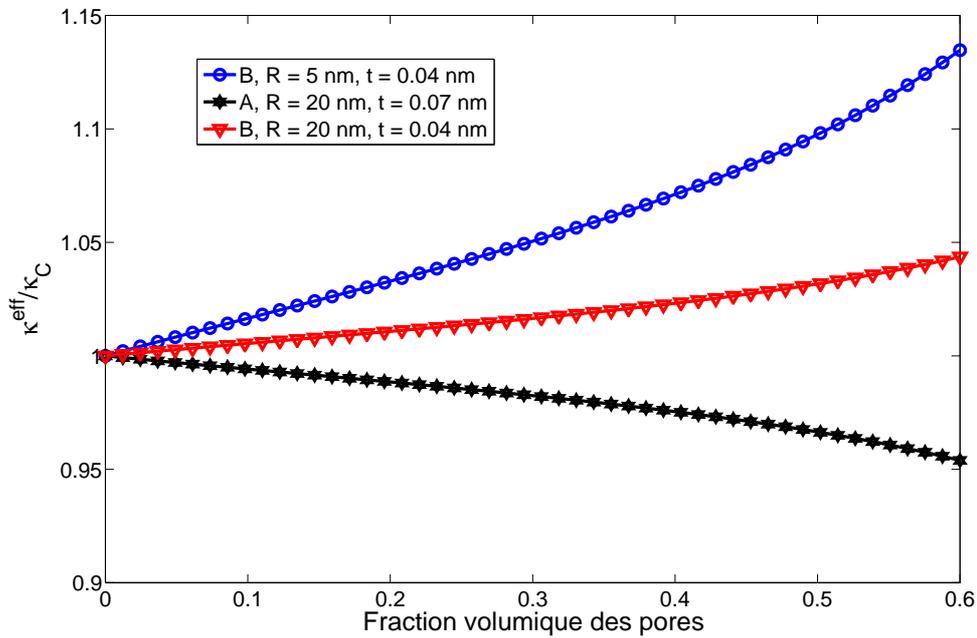
Surface	$K_s$ (J.m <sup>-2</sup> )	$\mu_s$ (J.m <sup>-2</sup> )
A [1 0 0]	-5.457	-6.2178
B [1 1 1]	12.9327	-0.3755

TAB. 6.1 – Propriétés élastiques des surfaces A et B.

que nous ne connaissons pas les composantes du tenseur  $\Lambda^{(1)}$  pour estimer l'épaisseur  $t$  de l'interphase, nous lui attribuons une valeur qui est cependant guidée par les récents résultats de [Dingreville et Qu \(2008\)](#) qui a obtenu  $\Lambda_3^{(1)} = -0.086$  nm pour la surface [1 0 0] du cuivre. On peut donc raisonnablement attribuer une épaisseur  $t = 0.086$  nm à l'interphase associée à cette surface. Dans le cas de notre application, nous attribuons à  $t$  des valeurs qui rapprochent au mieux notre modèle de celui de [Duan et al. \(2005b\)](#). Dans ce qui suit,  $\kappa_C$  et  $\mu_C$  désignent les modules de compressibilité et de cisaillement effectif de l'aluminium contenant des pores calculés avec l'approche micromécanique classique c'est-à-dire sans effet de taille. Le module de compressibilité effectif normalisé  $\kappa^{\text{eff}}/\kappa_C$  de l'aluminium nano-poreux pour les deux surfaces A et B est présenté par la figure 6.2(a) en fonction du rayon des particules sphériques. La figure 6.2(a) montre que  $\kappa^{\text{eff}}/\kappa_C$  augmente ou diminue avec la taille des pores selon la nature de la surface. La figure 6.2(b) montre la variation de  $\kappa^{\text{eff}}/\kappa_C$  en fonction de la fraction volumique des pores pour deux rayons différents de nano-pores. La variation du module de cisaillement effectif normalisé  $\mu^{\text{eff}}/\mu_C$



(a) En fonction du rayon des pores



(b) En fonction de la fraction volumique des pores

FIG. 6.2 – Module de compressibilité effectif normalisé  $\kappa^{\text{eff}}/\kappa_C$ .

en fonction du rayon des pores est représentée sur la figure 6.3(a). La figure 6.3(b) montre la variation de  $\mu^{\text{eff}}/\mu_C$  en fonction de la fraction volumique des pores pour un rayon de 10 nm des nano-pores.

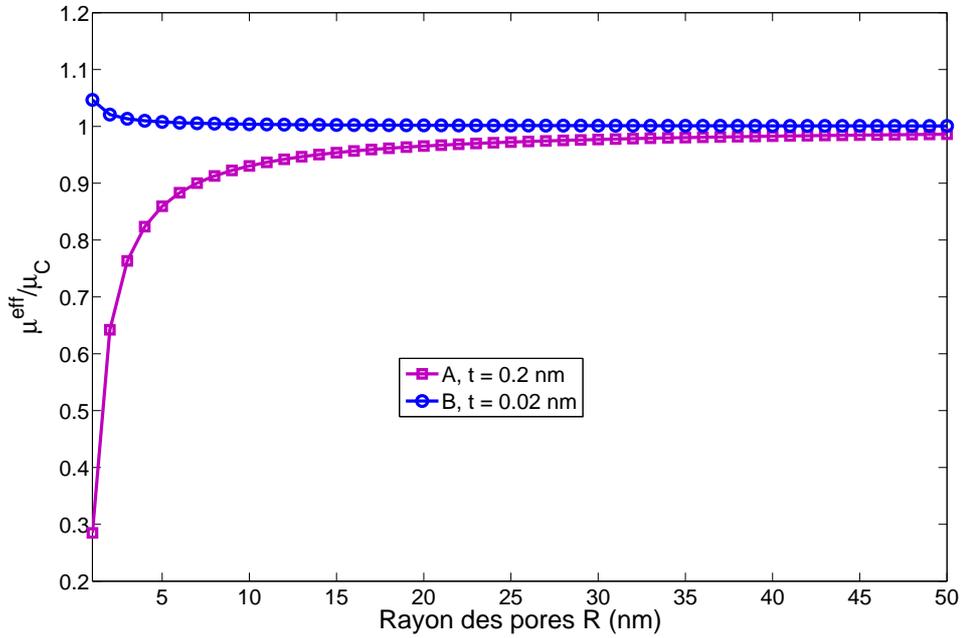
Les conclusions de [Duan et al. \(2005b\)](#) selon lesquelles l'effet de surface est beaucoup plus prononcé pour la surface A que pour la surface B sont bien vérifiées ici. Ceci s'explique par l'écart important entre  $K_s$  et  $\mu_s$  pour la surface B. Tous les résultats sont similaires à ceux de [Duan et al. \(2005b\)](#) pour les épaisseurs d'interphase que nous avons choisies. Les résultats de nos premières simulations numériques sont très encourageants puisqu'ils montrent que la présente approche est capable de reproduire les résultats du cas particulier traité par [Duan et al. \(2005b\)](#) du problème général que nous avons considéré dans le cadre de ce travail. Ainsi, afin de montrer la capacité du présent à traiter diverses formes de nano-particules et d'anisotropie des interfaces et des matériaux, d'autres simulations numériques sont effectuées dans les sections suivantes.

#### 6.4.2 Configuration isotrope et nanoparticules ellipsoïdales

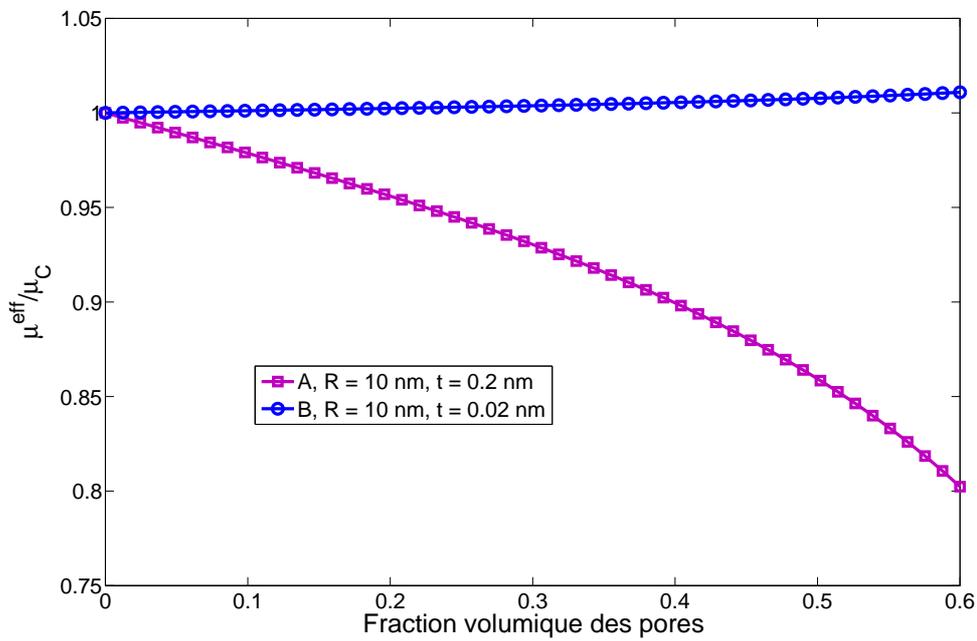
Nous considérons le même matériau et les mêmes propriétés de surface comme dans les applications numériques de la section 6.4.1. Nous considérons maintenant trois géométries différentes pour les nano-pores : l'ellipsoïde aplatie (oblate spheroid :  $a = b > c$ ), l'ellipsoïde allongée (prolate spheroid :  $a = b < c$ ) et l'ellipsoïde quelconque ( $a < b < c$ ) où  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent les demi-axes de l'ellipsoïde (voir figure 6.4). Le tenseur des modules élastiques isotrope  $\mathbf{C}^3$  de l'aluminium est donné par :

$$\mathbf{C}^3 = 3\kappa_3\mathbf{I}^s + 2\mu_3\mathbf{I}^d, \quad (6.40)$$

avec  $\kappa_3 = 75.2$  GPa and  $\mu_3 = 34.71$  GPa.



(a) En fonction du rayon des pores



(b) En fonction de la fraction volumique des pores

FIG. 6.3 – Module de cisailment effectif normalisé  $\mu^{\text{eff}}/\mu_C$ .

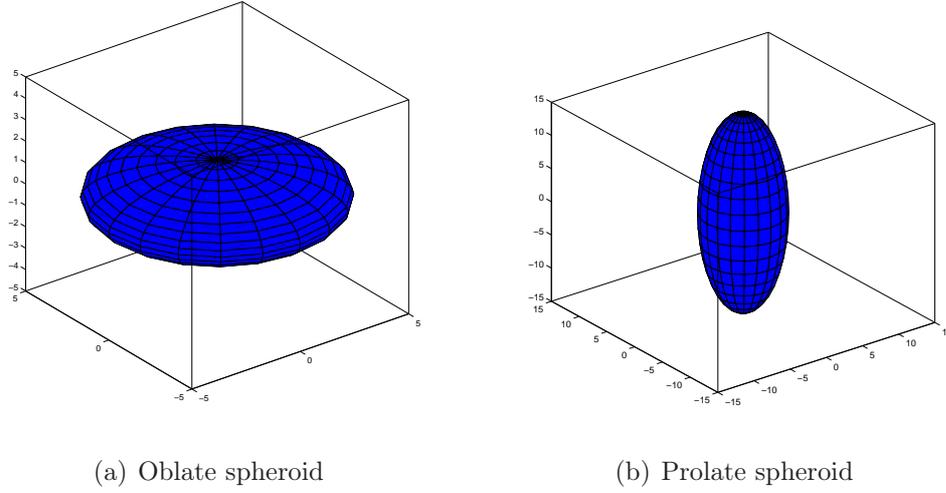


FIG. 6.4 – Morphologie des nano-pores.

### Cas de la géométrie “oblate spheroid”

Pour cette géométrie de nano-pores, nous prenons  $a = 5$  nm,  $b = a$  et  $c = a/3$ . L'épaisseur de l'interphase est supposée  $t = 0.02$  nm dans les calculs qui suivent. En utilisant cette valeur de  $t$ , les valeurs du tableau 6.1 et les formules (6.36), les tenseurs des modules élastiques isotropes  $\mathbf{C}_A^2$ , et  $\mathbf{C}_B^2$  des interphases associées respectivement aux surfaces A et B sont déterminés par :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_A^2 = 3\kappa_A^2 \mathbf{I}^s + 2\mu_A^2 \mathbf{I}^d, \\ \mathbf{C}_B^2 = 3\kappa_B^2 \mathbf{I}^s + 2\mu_B^2 \mathbf{I}^d, \end{cases} \quad (6.41)$$

où les modules de cisaillement et de compressibilité sont donnés dans le tableau 6.2.

Surface $i$	$\kappa_i^2$ (GPa)	$\mu_i^2$ (GPa)
A [1 0 0]	-310.5667	-563.2
B [1 1 1]	41.7169	-34.0131

TAB. 6.2 – Propriétés élastiques des interphases A et B (oblate spheroid).

Nous pouvons maintenant évaluer les propriétés effectives de l'aluminium contenant des nano-pores en utilisant la formule (6.39) pour chacune des deux surfaces. Les calculs sont faits pour une fraction volumique  $\varphi_1 = 30\%$  de nano-pores. Pour des raisons de

comparaison, nous avons calculé également les propriétés effectives  $\mathbf{C}_C^{\text{eff}}$  de cet aluminium poreux sans effet de taille. Les propriétés effectives avec effet de taille relatives aux surfaces A et B sont calculées et désignées ci-dessous par  $\mathbf{C}_A^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{C}_B^{\text{eff}}$  respectivement.

*Propriétés effectives sans effet de taille* (GPa)

$$\mathbf{C}_C^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 68.1533 & 24.6258 & 17.2370 & 0 & 0 & 0 \\ 24.6258 & 68.1533 & 17.2370 & 0 & 0 & 0 \\ 17.2370 & 17.2370 & 37.8677 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15.9087 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15.9087 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.7638 \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

*Propriétés effectives : surface A* (GPa)

$$\mathbf{C}_A^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 62.6621 & 23.9149 & 15.7073 & 0 & 0 & 0 \\ 23.9149 & 62.6621 & 15.7073 & 0 & 0 & 0 \\ 15.7073 & 15.7073 & 32.4368 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.6668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13.6668 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19.3736 \end{bmatrix}, \quad (6.43)$$

Propriétés effectives : surface B (GPa)

$$\mathbf{C}_B^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 73.2006 & 29.8136 & 20.2262 & 0 & 0 & 0 \\ 29.8136 & 73.2006 & 20.2262 & 0 & 0 & 0 \\ 20.2262 & 20.2262 & 41.9145 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16.5411 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16.5411 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.6935 \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

En termes de constantes de l'ingénieur :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E_1 & \mu_{32} & \nu_{32} \\ E_2 & \mu_{13} & \nu_{13} \\ E_3 & \mu_{12} & \nu_{12} \end{bmatrix}, \quad E_i \text{ et } \mu_{ij} \text{ en GPa}, \quad (6.45)$$

les trois matrices précédentes s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{C}_C^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 55.6385 & 15.9087 & 0.3285 \\ 55.6385 & 15.9087 & 0.3285 \\ 31.4629 & 21.7637 & 0.2782 \end{bmatrix}, \quad (6.46)$$

$$\mathbf{C}_A^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 50.2249 & 13.6668 & 0.3408 \\ 50.2249 & 13.6668 & 0.3408 \\ 26.7374 & 19.3736 & 0.2962 \end{bmatrix}, \quad (6.47)$$

$$\mathbf{C}_B^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 57.1015 & 16.5411 & 0.3300 \\ 57.1015 & 16.5411 & 0.3300 \\ 33.9719 & 21.6935 & 0.3161 \end{bmatrix}. \quad (6.48)$$

Pour ces trois configurations, le matériau effectif est isotrope transverse (5 constantes

indépendantes). Ce comportement anisotrope est introduit par la forme des nano-pores. Nous remarquons en comparant  $\mathbf{C}_C^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{C}_A^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{C}_B^{\text{eff}}$  que l'effet de surface est plus accentué pour la surface A que pour la surface B.

### Cas de la géométrie "Prolate spheroid"

Pour cette géométrie de nano-pores, les valeurs de  $a = 5$  nm,  $b = a$  et  $c = 3a$  sont utilisées pour calculer les propriétés effectives avec une fraction volumique  $\varphi_1 = 30\%$  de nano-pores.

*Propriétés effectives : surface A (GPa)*

$$\mathbf{C}_A^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 50.6710 & 18.9927 & 21.5411 & 0 & 0 & 0 \\ 18.9927 & 50.6710 & 21.5411 & 0 & 0 & 0 \\ 21.5411 & 21.5411 & 69.4285 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18.1765 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18.1765 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.8392 \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

*Propriétés effectives : surface B (GPa)*

$$\mathbf{C}_B^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 55.6094 & 21.1245 & 24.1950 & 0 & 0 & 0 \\ 21.1245 & 55.6094 & 24.1950 & 0 & 0 & 0 \\ 24.1950 & 24.1950 & 74.2538 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.2974 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.2974 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17.2425 \end{bmatrix}. \quad (6.50)$$

En termes des constantes d'ingénieur, ces deux matrices s'écrivent respectivement comme suit :

$$\mathbf{C}_A^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 40.5430 & 18.1765 & 0.2234 \\ 40.5430 & 18.1765 & 0.2234 \\ 56.1068 & 15.8392 & 0.2798 \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

$$\mathbf{C}_B^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 44.0522 & 19.2974 & 0.2354 \\ 44.0522 & 19.2974 & 0.2354 \\ 58.9959 & 17.2425 & 0.2774 \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Pour ce cas, comme on peut s'y attendre, le comportement effectif est également isotrope transverse. L'effet de la forme des nano-pores peut être apprécié en comparant les matrices (6.47) et (6.51) d'une part puis les matrices (6.48) et (6.52) d'autre part.

### Cas de la géométrie ellipsoïdale

Pour cette géométrie, nous considérons  $a = 5$  nm,  $b = 3a$ ,  $c = 5a$  et  $\varphi_1 = 30\%$ . Les résultats pour cette géométrie sont :

*Propriétés effectives sans effet de taille* (GPa)

$$\mathbf{C}_C^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 34.1511 & 15.5049 & 15.5097 & 0 & 0 & 0 \\ 15.5049 & 66.6753 & 24.4152 & 0 & 0 & 0 \\ 15.5097 & 24.4152 & 71.0479 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22.0867 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.9111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.3916 \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

Propriétés effectives : surface A (GPa)

$$\mathbf{C}_A^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 32.2775 & 14.8422 & 14.9696 & 0 & 0 & 0 \\ 14.8422 & 64.5813 & 24.0633 & 0 & 0 & 0 \\ 14.9696 & 24.0633 & 69.1320 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.2488 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.0894 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.6601 \end{bmatrix}, \quad (6.54)$$

Propriétés effectives : surface B (GPa)

$$\mathbf{C}_B^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 35.1351 & 16.1343 & 16.3993 & 0 & 0 & 0 \\ 16.1343 & 67.9275 & 25.9629 & 0 & 0 & 0 \\ 16.3993 & 25.9629 & 72.4041 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.9527 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.9226 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14.5873 \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

En utilisant les constantes de l'ingénieur, ces trois matrices s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{C}_C^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 28.9890 & 22.0867 & 0.2714 \\ 54.9199 & 14.9111 & 0.1583 \\ 58.9427 & 14.3916 & 0.1746 \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

$$\mathbf{C}_A^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 27.3855 & 21.2488 & 0.2762 \\ 53.0105 & 14.0894 & 0.1569 \\ 57.0792 & 13.6601 & 0.1714 \end{bmatrix}, \quad (6.57)$$

$$\mathbf{C}_B^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 29.6271 & 21.9527 & 0.2847 \\ 55.2714 & 14.9226 & 0.1638 \\ 59.1358 & 14.5873 & 0.1749 \end{bmatrix}. \quad (6.58)$$

Dans ce cas de géométrie ellipsoïdale, le comportement effectif est orthotrope (9 constantes indépendantes).

### 6.4.3 Configuration anisotrope et nanoparticules ellipsoïdales

Pour aller plus loin dans les applications de notre modèle, nous considérons maintenant un nanocomposite avec des hétérogénéités ellipsoïdales et des interfaces anisotropes. La matrice est du cuivre dont la matrice de rigidité  $\mathbf{C}^3$  (GPa) s'écrit :

$$\mathbf{C}^3 = \begin{bmatrix} 167.39 & 124.10 & 124.10 & 0 & 0 & 0 \\ 124.10 & 167.39 & 124.10 & 0 & 0 & 0 \\ 124.10 & 124.10 & 167.39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.645 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.645 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21.645 \end{bmatrix}. \quad (6.59)$$

Nous supposons que cette matrice de cuivre contient des nano-pores ellipsoïdaux avec  $a = 5 \text{ nm}$ ,  $b = 3a$ ,  $c = 5a$  et  $\varphi_1 = 30\%$ . Nous utilisons dans le calcul des propriétés effectives, les propriétés élastiques interfaciales du cuivre calculées par [Dingreville et Qu \(2008\)](#)

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)}(\text{J/m}^2) = \begin{bmatrix} \Gamma_{1111}^{(2)} & \Gamma_{1122}^{(2)} & \Gamma_{1112}^{(2)} \\ \Gamma_{2211}^{(2)} & \Gamma_{2222}^{(2)} & \Gamma_{2212}^{(2)} \\ \Gamma_{1211}^{(2)} & \Gamma_{1222}^{(2)} & \Gamma_{1212}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.679 & -14.908 & 0 \\ -14.908 & -10.510 & 0 \\ 0 & 0 & -2.489 \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

$$\mathbf{H}(\text{nm}) = \begin{bmatrix} H_{111} & H_{122} & H_{112} \\ H_{211} & H_{222} & H_{212} \\ H_{311} & H_{322} & H_{312} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 & 0 \\ 0.0460 & 0.0570 & 0 \\ 0.3500 & 0.6180 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.61)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(2)}(10^{-11}\text{nm}/\text{Pa}) = \begin{bmatrix} \Lambda_{11}^{(2)} & \Lambda_{12}^{(2)} & \Lambda_{13}^{(2)} \\ \Lambda_{21}^{(2)} & \Lambda_{22}^{(2)} & \Lambda_{23}^{(2)} \\ \Lambda_{31}^{(2)} & \Lambda_{32}^{(2)} & \Lambda_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.494 & 0 & 0 \\ 0 & -0.185 & 0 \\ 0 & 0 & 0.121 \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

Le tenseur de rigidité  $\mathbf{C}^2$  (100 GPa) de l'interphase associée à cette interface est :

$$\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 25.7648 & 46.8044 & 2.8926 & 0 & 0 & 0 \\ 46.8044 & 87.4148 & 5.1074 & 0 & 0 & 0 \\ 2.8926 & 5.1074 & 0.2868 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0703 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7172 \end{bmatrix}. \quad (6.63)$$

Il est important de remarquer la présence de la rigidité négative dans la matrice  $\mathbf{C}^2$  pour cette interphase. Nous en déduisons alors les propriétés effectives  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  (GPa) du cuivre contenant des nano-pores ellipsoïdaux :

$$\mathbf{C}^{\text{eff}} = \begin{bmatrix} 29.1712 & 19.3567 & 20.2603 & 0 & 0 & 0 \\ 19.3567 & 58.7770 & 31.8219 & 0 & 0 & 0 \\ 20.2603 & 31.8219 & 61.6544 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.7425 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.6451 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.5319 \end{bmatrix}. \quad (6.64)$$

Ce comportement effectif est également orthotrope.

Ces premières expérimentations numériques de notre approche montrent sa capacité à prédire les propriétés élastiques effectives des matériaux composites contenant des nano-hétérogénéités. Cette approche intègre dans les schémas micromécaniques classiques, l'effet de taille et d'excès d'énergie de surface/interface. Contrairement aux modèles existants dans la littérature sur l'extension de la micromécanique classique aux problèmes de composites avec des nano-hétérogénéités, nous avons pu montrer que cette présente approche est capable de traiter des géométries ellipsoïdales et les anisotropies des matériaux ou des interfaces. Nous avons également observé que des régions ayant un comportement de rigidité négative peuvent apparaître localement autour des nano-hétérogénéités. Ceci est particulièrement intéressant eu égard aux travaux de [Lakes et Drugan \(2002\)](#), [Lakes et al. \(2001\)](#) et de [Lakes \(2001a,b\)](#). De nouvelles voies dans la conception des matériaux multifonctionnels peuvent donc être explorées. Plusieurs applications potentielles peuvent être envisagées : propriétés amortissantes, piézoélectricité, magnétostriction des matériaux magnétiques, matériaux à faible permittivité (low-k materials) etc.

Etant donné que nous sommes intéressés particulièrement dans ce travail par les propriétés amortissantes des matériaux, il y a lieu de regarder ici l'effet de taille et d'excès d'énergie de surface sur les propriétés amortissantes des matériaux.

## 6.5 Amortissement : effet de taille et d'énergie de surface

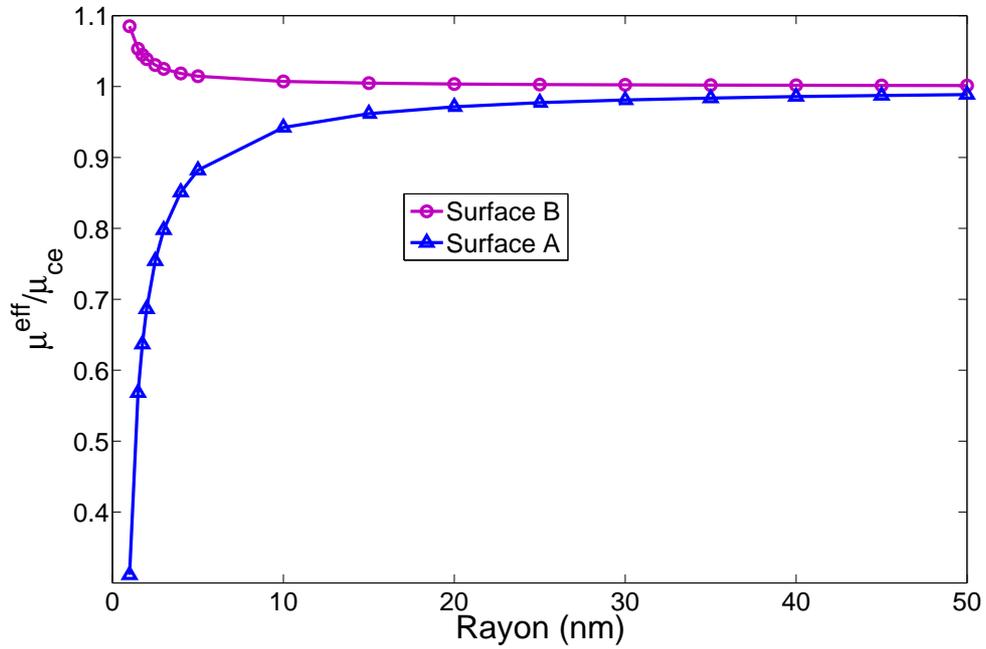
Pour étudier les effets de taille et d'énergie de surface sur les propriétés amortissantes des nanocomposites, nous considérons une fois encore l'aluminium contenant des nano-pores. Cet exemple est plutôt intéressant car nous connaissons déjà les propriétés élastiques interfaciales de l'aluminium (voir tableau [6.1](#)). Le facteur d'amortissement de l'aluminium est  $\eta_3 = 0.003$  ([Lee, 1995](#)). Le module de compressibilité de stockage de l'aluminium ainsi que son coefficient de Poisson sont respectivement  $\kappa_3=75.2$  GPa et  $\nu_3=0.3$ . Ainsi le module de compressibilité complexe de l'aluminium est défini par  $\hat{\kappa}_3 = \kappa_3(1+i\eta_3)$ . Le module de cisaillement de stockage effective  $\mu^{\text{eff}}$  et le facteur de perte effectif  $\eta^{\text{eff}}$  de

l'aluminium nano-poreux sont définis à partir du module de cisaillement de stockage effective complexe  $\hat{\mu}^{\text{eff}} = \mu^{\text{eff}}(1 + i\eta^{\text{eff}})$ . Dans cette étude, nous nous intéressons à  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$ . Nous notons ces deux derniers paramètres respectivement par  $\mu_{\text{ce}}$  et  $\eta_{\text{ce}}$  lorsqu'ils sont évalués par la théorie micromécanique classique sans les effets de taille et d'excès d'énergie de surface.

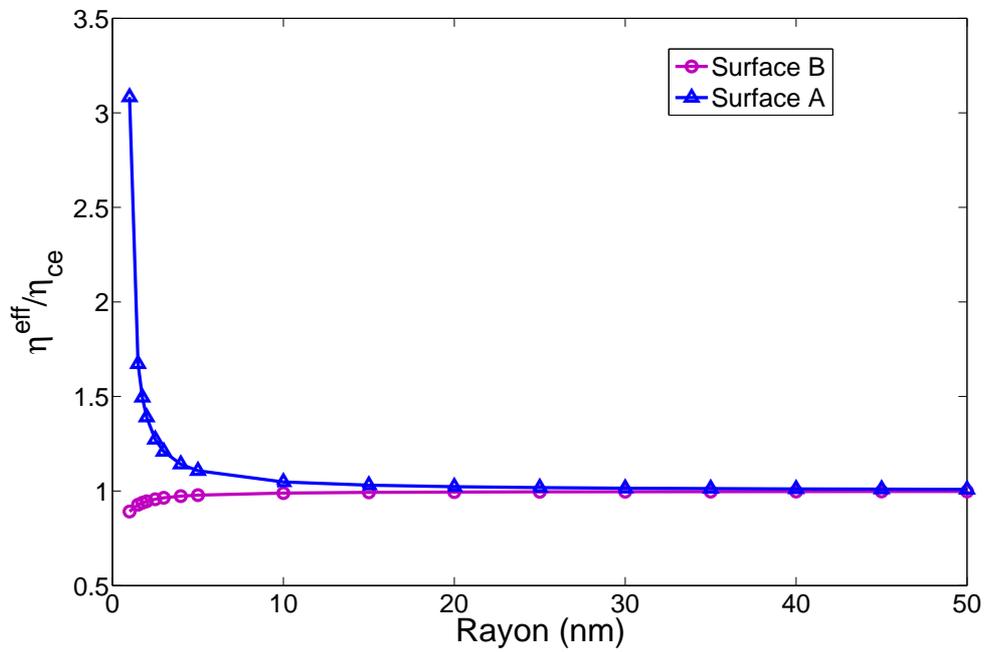
### 6.5.1 Aluminium nano-poreux avec des nano-pores sphériques

Nous étudions d'abord le comportement amortissant de l'aluminium contenant des nano-pores sphériques. La figure 6.5 montre les variations de  $\mu^{\text{eff}}$  et de  $\eta^{\text{eff}}$  en fonction du rayon des pores pour une fraction volumique des pores fixée à  $\varphi_1 = 0.3$ . Nous remarquons que selon la nature de la surface (A ou B),  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$  augmentent ou diminuent lorsque le rayon des pores diminue. Pour les deux cas de surface, les effets de taille et d'énergie de surface deviennent négligeables pour les grands rayons de pores où les prédictions tendent vers celles des schémas micromécaniques classiques. Clairement, l'effet est plus prononcé pour la surface A que pour la surface B pour une raison que nous avons expliquée plus haut. Pour la surface B, le matériau a un module de stockage  $\mu^{\text{eff}}$  supérieur à celui du même matériau mais avec des tailles conventionnelles; ce module augmente lorsque la taille des pores diminue. Pour cette même surface B, la figure 6.5(b) montre que le matériau nano-poreux a un facteur d'amortissement  $\eta^{\text{eff}}$  inférieur à celui du matériau conventionnel. La situation est inversée pour les résultats de la surface A. Pour cette dernière, c'est le facteur d'amortissement effectif qui est supérieur au conventionnel et augmente avec la diminution du rayon des pores tandis que le module de stockage est inférieur au conventionnel et diminue fortement avec la taille des pores.

Les variations de  $\mu^{\text{eff}}$  et  $\eta^{\text{eff}}$  en fonction de la fraction volumique  $\varphi_1$  des pores et pour un rayon de 10 nm sont montrées sur la figure 6.6. Puisque l'effet d'énergie de surface sur les modules effectifs est dû au changement de l'aire totale des pores, cet effet est accentué lorsque l'on augmente la fraction volumique des pores (à rayon constant) ou lorsque l'on



(a) Module de stockage normalisé



(b) Facteur de perte normalisé

FIG. 6.5 – Modules de stockage et de perte en fonction du rayon des pores.  $\varphi_1 = 0.3$ .

diminue le rayon des pores (à fraction volumique constante). Ceci est très bien confirmé par les résultats présentés sur les figures 6.5 et 6.6. Pour la suite, nous étudions l'effet de la morphologie des nano-pores sur  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$ .

### 6.5.2 Aluminium nano-poreux : effet de forme des nano-pores

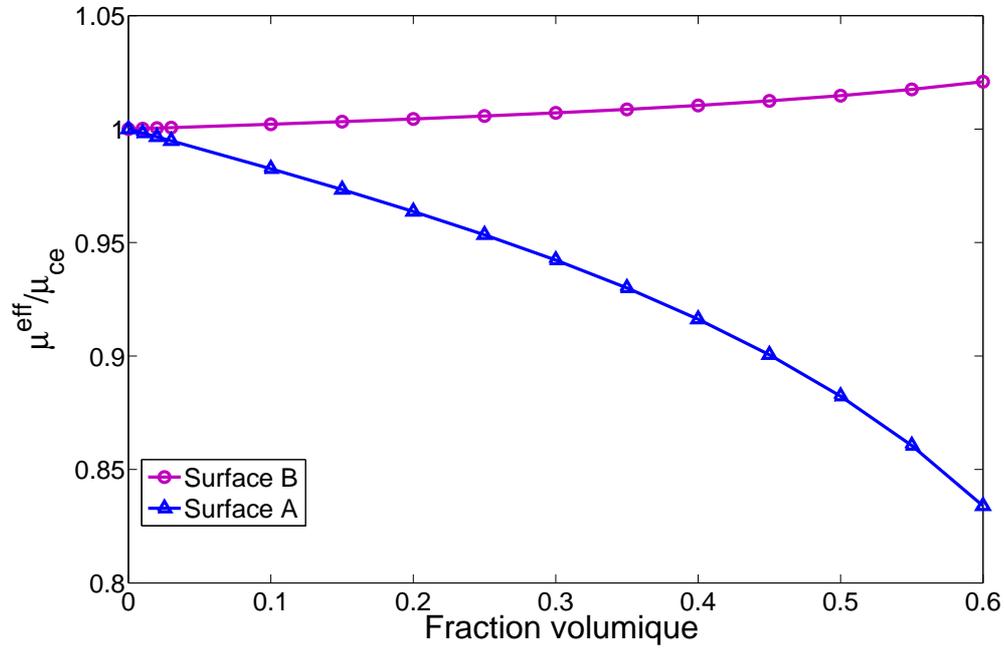
Nous étudions dans ce paragraphe les géométries définies par les rapports de forme du tableau 6.3 pour les valeurs  $a = 2$  nm,  $a = 5$  nm et  $a = 10$  nm. Les résultats sont présentés dans les tableaux 6.4 à 6.9 en notation de Voigt pour la surface A. Le comportement effectif est isotrope pour la géométrie sphérique, isotrope transverse pour les géométries prolates et oblates tandis qu'il est orthotrope pour la géométrie ellipsoïdale. Nous remarquons que l'effet de forme est significatif pour les modules de stockage et de perte lorsque  $a = 2$  nm. Cependant quand l'on augmente  $a$ , l'effet de forme n'est plus marqué sur les facteurs de perte (voir tableau 6.9). Pour les modules de stockage, l'effet de forme est identique à celui dans le cas des matériaux conventionnels. Les tableaux 6.5, 6.7 et 6.9 montrent que la géométrie oblate donne les meilleures valeurs quant aux modules d'amortissement.

	Sphère	Prolate	Oblate	Ellipsoïde
$a/b$	1	1	1	1/2
$a/c$	1	1/3	3	1/3

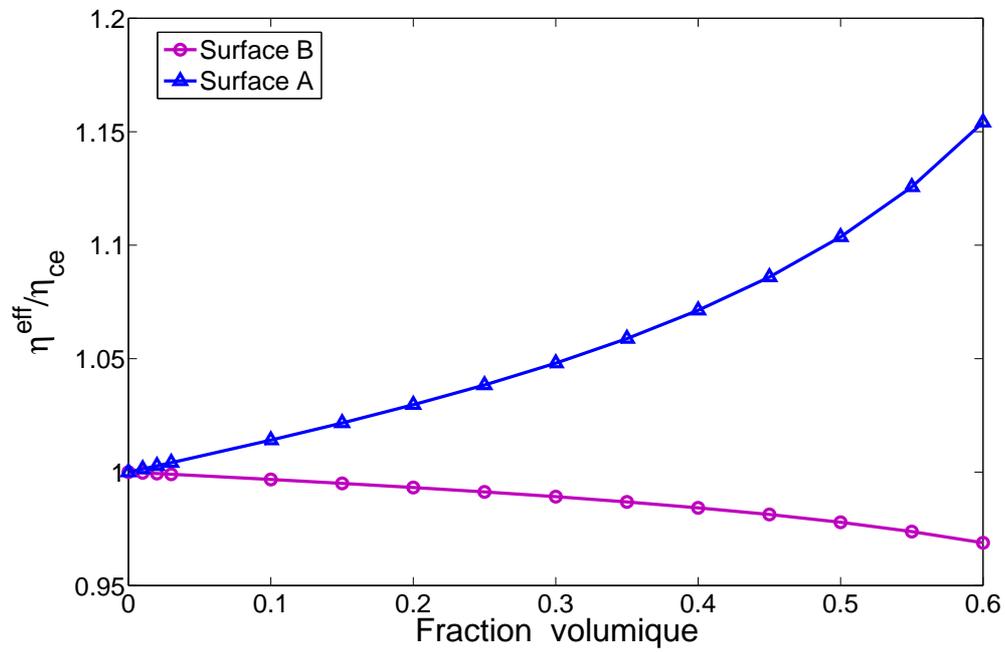
TAB. 6.3 – Rapports de forme pour les géométries considérées.

	Sphère	Prolate	Oblate	Ellipsoïde
$C_{11}^{\text{eff}}$	35.01	30.65	34.12	24.80
$C_{22}^{\text{eff}}$	35.01	30.65	34.12	40.63
$C_{33}^{\text{eff}}$	35.01	46.48	11.62	45.40
$C_{44}^{\text{eff}}$	8.82	9.28	4.10	11.19
$C_{55}^{\text{eff}}$	8.82	9.28	4.10	8.62
$C_{66}^{\text{eff}}$	8.82	8.54	7.40	8.62
$C_{12}^{\text{eff}}$	17.37	13.57	19.32	13.72
$C_{13}^{\text{eff}}$	17.37	17.74	9.54	14.66
$C_{23}^{\text{eff}}$	17.37	17.74	9.54	20.39

TAB. 6.4 – Modules de stockage effectifs (GPa).  $a = 2$  nm,  $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A.



(a) Module de stockage normalisé



(b) Facteur de perte normalisé

FIG. 6.6 – Modules de stockage et de perte en fonction de  $\varphi_1$ .  $R = 10$  nm.

	Sphère	Prolate	Oblate	Ellipsoïde
$\eta_{11}^{\text{eff}}$	0.0038	0.0037	0.0044	0.0037
$\eta_{22}^{\text{eff}}$	0.0038	0.0037	0.0044	0.0034
$\eta_{33}^{\text{eff}}$	0.0038	0.0034	0.0071	0.0033
$\eta_{44}^{\text{eff}}$	0.0042	0.004	0.0081	0.0036
$\eta_{55}^{\text{eff}}$	0.0042	0.004	0.0081	0.0037
$\eta_{66}^{\text{eff}}$	0.0042	0.0038	0.0058	0.0037
$\eta_{12}^{\text{eff}}$	0.0034	0.0037	0.0033	0.0034
$\eta_{13}^{\text{eff}}$	0.0034	0.0033	0.0046	0.0033
$\eta_{23}^{\text{eff}}$	0.0034	0.0033	0.0046	0.0031

TAB. 6.5 – Facteurs d’amortissement effectifs.  $a = 2$  nm,  $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A.

	Sphère	Prolate	Oblate	Ellipsoïde
$C_{11}^{\text{eff}}$	40.63	35.38	43.56	28.24
$C_{22}^{\text{eff}}$	40.63	35.38	43.56	44.22
$C_{33}^{\text{eff}}$	40.63	50.28	20.82	48.63
$C_{44}^{\text{eff}}$	10.86	11.08	7.92	12.55
$C_{55}^{\text{eff}}$	10.86	11.08	7.92	9.94
$C_{66}^{\text{eff}}$	10.86	9.93	11.41	9.79
$C_{12}^{\text{eff}}$	18.91	15.52	20.75	15.05
$C_{13}^{\text{eff}}$	18.91	18.87	12.65	15.74
$C_{23}^{\text{eff}}$	18.91	18.87	12.65	21.13

TAB. 6.6 – Modules de stockage effectifs (GPa).  $a = 5$  nm,  $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A.

	Sphère	Prolate	Oblate	Ellipsoïde
$\eta_{11}^{\text{eff}}$	0.0033	0.0032	0.0034	0.0032
$\eta_{22}^{\text{eff}}$	0.0033	0.0032	0.0034	0.0031
$\eta_{33}^{\text{eff}}$	0.0033	0.0031	0.0038	0.0031
$\eta_{44}^{\text{eff}}$	0.0033	0.0033	0.0038	0.0032
$\eta_{55}^{\text{eff}}$	0.0033	0.0033	0.0038	0.0032
$\eta_{66}^{\text{eff}}$	0.0033	0.0033	0.0036	0.0032
$\eta_{12}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0032	0.0031	0.0032
$\eta_{13}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0035	0.0031
$\eta_{23}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0035	0.0031

TAB. 6.7 – Facteurs d’amortissement effectifs.  $a = 5$  nm,  $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A.

	Sphère	Prolate	Oblate	Ellipsoïde
$C_{11}^{\text{eff}}$	45.06	39.42	48.99	31.63
$C_{22}^{\text{eff}}$	45.06	39.42	48.99	47.94
$C_{33}^{\text{eff}}$	45.06	54.05	25.72	52.21
$C_{44}^{\text{eff}}$	12.10	12.25	9.64	13.57
$C_{55}^{\text{eff}}$	12.10	12.25	9.64	10.97
$C_{66}^{\text{eff}}$	12.10	10.97	13.22	10.76
$C_{12}^{\text{eff}}$	20.85	17.47	22.56	16.74
$C_{13}^{\text{eff}}$	20.85	20.62	14.79	17.36
$C_{23}^{\text{eff}}$	20.85	20.62	14.79	22.75

TAB. 6.8 – Modules de stockage effectifs (GPa).  $a = 10$  nm,  $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A.

Le tableau ci-après (6.9) montre que pour  $a = 10$  nm, la forme de l'hétérogénéité n'a plus d'effet sur les facteurs d'amortissement.

	Sphère	Prolate	Oblate	Ellipsoïde
$\eta_{11}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0032	0.0031
$\eta_{22}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0032	0.0031
$\eta_{33}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0033	0.0031
$\eta_{44}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0033	0.0031
$\eta_{55}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0033	0.0031
$\eta_{66}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0033	0.0031
$\eta_{12}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031
$\eta_{13}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0032	0.0031
$\eta_{23}^{\text{eff}}$	0.0031	0.0031	0.0032	0.003

TAB. 6.9 – Facteurs d'amortissement effectifs.  $a = 10$  nm,  $\varphi_1 = 0.3$ , Surface A.

## 6.6 Conclusions

En résumé nous avons mis au point une méthodologie permettant de concilier les modèles de la mécanique moléculaire et ceux de la mécanique des milieux continus. Cette approche fait ainsi le lien entre les informations atomistiques et le comportement macroscopique continu de la matière. Les modèles micromécaniques bien établis qui ont, dans le temps, ignoré de justesse l'effet d'énergie de surface à cause des tailles relativement grandes des hétérogénéités peuvent alors utiliser notre approche pour prendre en compte les effets supplémentaires liés à la taille des hétérogénéités. Nous avons validé l'approche

sur des exemples en élasticité linéaire assez bien connus de la littérature. Ensuite, nous avons considéré le cas des propriétés amortissantes des matériaux qui nous intéresse particulièrement dans cette thèse. Comme il a été vérifié pour les propriétés élastiques, nous avons montré sur le cas simple d'aluminium nano-poreux que la taille a un effet sur les propriétés amortissantes des composites même si a priori cela peut paraître trivial.

Nous avons donc un outil supplémentaire dans l'exploration des microstructure pour la conception des matériaux multifonctionnels. Dans le chapitre 7, nous présentons une nouvelle approche susceptible de traiter une classe de problèmes non linéaires d'une façon assez générique et surtout très simple et facile d'implémentation. Cette méthode basée sur la méthode asymptotique numérique (Cochelin *et al.*, 2007) et sur les techniques de la différentiation automatique (Griewank, 2000) nous permettra de résoudre les problèmes aux valeurs propres complexes non linéaires que nous avons bien posés dans la section 2.3.3. Nous utilisons ensuite cet outil numérique de résolution des problèmes non linéaires dans le chapitre 8 pour étudier l'effet des microstructures des couches (Verre et PVB) de la structure sandwich Verre/PVB/Verre sur ces caractéristiques modales.

## APPROCHE DIAMANT ET LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES

**D**ans ce chapitre, nous présentons l'approche générique *Diamant* pour résoudre une classe de problèmes non linéaires. Cette approche est basée sur les techniques de différentiation automatique (DA) et la méthode asymptotique numérique (MAN). Nous discutons les aspects théoriques de la solution générique des équations résiduelles non linéaires. Ensuite nous proposons une implémentation en MATLAB de la MAN basée sur la DA qui permet des améliorations significatives en termes de généralité et de facilité dans l'utilisation de la MAN pour résoudre des équations non linéaires. Les performances numériques de la librairie *Diamant* sont montrées sur les problèmes de non linéarité géométrique en statique ainsi que les problèmes aux valeurs complexes non linéaires des structures sandwich Verre/PVB/Verre. Au travers des applications, nous montrons l'efficacité et les gains que l'on peut avoir avec l'utilisation de la librairie *Diamant* MATLAB Toolbox.

## Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Principes fondamentaux de la MAN</b>	<b>260</b>
<b>7.2</b>	<b>Illustration de la MAN sur le problème de Bratu</b>	<b>261</b>
7.2.1	Discrétisation du problème de Bratu	261
7.2.2	Perturbation du problème discret	262
7.2.3	Algorithme de résolution du problème de Bratu	263
<b>7.3</b>	<b>Philosophie générale de l'approche Diamant</b>	<b>265</b>
<b>7.4</b>	<b>Problème résiduel générique</b>	<b>266</b>
<b>7.5</b>	<b>L'approche Diamant</b>	<b>270</b>
7.5.1	Bases théoriques	270
7.5.2	Principe d'automatisation de Diamant	272
<b>7.6</b>	<b>Diamant : un outil de DA pour la MAN</b>	<b>275</b>
7.6.1	Diamant1	276
7.6.2	Diamant2	278
<b>7.7</b>	<b>Présentation du Diamant MATLAB Toolbox</b>	<b>280</b>
7.7.1	Organisation globale de Diamant MATLAB Toolbox	280
7.7.2	Constructeur de la classe <code>taylorcoef1</code>	281
7.7.3	Exemples d'utilisation des classes <code>taylorcoef1/2</code>	282
<b>7.8</b>	<b>Un exemple numérique</b>	<b>287</b>
7.8.1	Problème des non linéarités géométriques du Verre/PVB/Verre	287
7.8.2	Résultats numériques	288
7.8.3	Performances numériques de Diamant sur cet exemple	289
<b>7.9</b>	<b>Diamant et les problèmes non linéaires aux valeurs propres</b>	<b>291</b>
7.9.1	Présentation générale du problème	291
7.9.2	Transformation d'homotopie	293
7.9.3	Comment utiliser Diamant pour résoudre ce problème?	293

---

7.9.4 Applications et mesures de performances . . . . .	296
7.9.5 Sur le calcul et le stockage des coefficients de Taylor . . . . .	305
<b>7.10 Diamant : surface de charge des nanomatériaux poreux . . .</b>	<b>306</b>
<b>7.11 Conclusions . . . . .</b>	<b>308</b>

---

## 7.1 Principes fondamentaux de la MAN

Les équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires et suffisamment régulières ont été résolues depuis de nombreuses années par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) (Cochelin *et al.*, 2007; Thompson et Walker, 1968). La MAN est une méthode de cheminement utilisant un développement en séries dans la recherche des branches de solutions. Des séries de Taylor tronquées à un ordre donné sont introduites dans l'EDP non linéaire pour obtenir une séquence de systèmes linéaires. Tous ces systèmes linéaires (un par ordre de différentiation) ont la même matrice linéaire tangente et des seconds membres contenant des formules de dérivation de degré élevé. Ces formules de dérivation sont un peu différentes des formules de récurrence dans la différentiation classique puisqu'il leur manque des termes utilisés dans la construction de la matrice linéaire tangente.

La MAN a été initialement utilisée pour le calcul des branches bifurquées, pour des problèmes de flambement et de post-flambement des structures plaques ou coques élastiques (Damil et Potier-Ferry, 1990; Azrar *et al.*, 1993a). Cochelin (1994) et Cochelin *et al.* (1994) l'ont généralisée au cas de l'élastostatique non linéaire (application à la compression de panneaux cylindriques). Ensuite la méthode a été utilisée avec succès pour traiter différents cas : statique des coques en grandes rotations (Zahrouni *et al.*, 1999), vibrations des plaques (Azrar *et al.*, 1999; Daya et Potier-Ferry, 2001; Duigou *et al.*, 2003), etc. D'autres applications de la MAN existent également en plasticité ou en élastoplasticité. Les principaux points forts de la MAN, relativement à la méthode de Newton-Raphson, se résument grosso modo en sa *simplicité d'utilisation et du pilotage* (le choix de la longueur du pas est entièrement automatique et adaptative : "ralentissement" à proximité des points limites, augmentation du pas dans les zones linéaires), *une seule inversion* de la matrice tangente par pas de la MAN (quand il en faut 1 prédiction plus  $k$  corrections pour Newton-Raphson), des *solutions analytiques* des branches de solutions plutôt que des valeurs ponctuelles (les séries tronquées sont riches en information, notamment en ce qui concerne les bifurcations). La possibilité de prendre un grand nombre de termes dans les séries (en

pratique, entre 20 et 40) permet d'avoir une précision importante sans avoir recours à des corrections. Pour illustrer la mise en œuvre de la MAN, nous présentons ci-après la méthodologie générale de résolution d'un problème non linéaire simple par la MAN.

## 7.2 Illustration de la MAN sur le problème de Bratu

Nous considérons le problème de Bratu (Doedel *et al.*, 1991) tel qu'il est présenté par Cochelin *et al.* (2007). Il s'agit de résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\mathcal{R}(u, \lambda) = \begin{cases} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \lambda e^{u(x)} = 0, & x \in [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Il y a trois principales étapes dans la résolution d'un problème par la MAN : la discrétisation, la perturbation et la continuation.

### 7.2.1 Discrétisation du problème de Bratu

Par cet exemple, on discrétise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n+2$  points  $x_i = i/(n+2)$  et on note  $u^i = u(x_i)$ . Compte tenu des conditions aux limites, on a :  $u^0 = u^{n+2} = 0$ . En utilisant la formule de différence centrée, le problème continu (7.1) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{R}([u], \lambda) = \begin{cases} \frac{-2u^1 + u^2}{h^2} + \lambda e^{u^1} = 0 \\ \dots \\ \frac{u^{k-1} - 2u^k + u^{k+1}}{h^2} + \lambda e^{u^k} = 0 \\ \dots \\ \frac{-2u^{n-1} + u^n}{h^2} + \lambda e^{u^1} = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

où  $h = 1/(n + 2)$  et  $[u] = [u^1, u^2, \dots, u^n]^\top$ . Notons que dans la version originale de la MAN, il est recommandé de rendre quadratique ce problème discret en introduisant dans le cas présent une variable supplémentaire  $[v] = [v^1, v^2, \dots, v^n]^\top$  où  $v^k = e^{u^k}$ . Ainsi le système discret (7.2) s'écrit :

$$\mathcal{R}([u], [v], \lambda) = \begin{cases} [K_0][u] + \lambda[v] = 0 \\ [v] - e^{[u]} = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

où  $e^{[u]} = [e^{u^1}, e^{u^2}, \dots, e^{u^n}]$ , et la matrice  $[K_0]$  est définie par :

$$[K_0] = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & 1 & -2 & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

### 7.2.2 Perturbation du problème discret

La deuxième étape dans la résolution de ce problème de Bratu par la MAN est l'étape de perturbation du système discret (7.3) en développant  $[u]$ ,  $[v]$  et  $\lambda$  en série entière du paramètre de chemin  $a$  comme suit :

$$\begin{cases} [u] = \sum_{l=0}^K a^l [u_l], \\ [v] = \sum_{l=0}^K a^l [v_l], \\ \lambda = \sum_{l=0}^K a^l \lambda_l, \\ a = [u_1]^\top [u] + \lambda \lambda_1. \end{cases} \quad (7.4)$$

En différentiant la seconde équation du système discret (7.3) par rapport au paramètre de chemin  $a$  c'est-à-dire :

$$\frac{d[v]}{da} - \frac{d[u]}{da} \cdot * e^{[u]} = \frac{d[v]}{da} - \frac{d[u]}{da} \cdot * [v] = 0, \quad (7.5)$$

et en remplaçant  $[u]$ ,  $[v]$  et  $\lambda$  dans le système discret (7.3) par leurs séries entières, le problème à un ordre  $p$  quelconque s'écrit :

$$\begin{cases} [K_T][u_p] + \lambda_p[v_0] = [f_p^{nl}], \\ [v_p] - [v_0] \cdot * [u_p] = [v_p^{nl}], \\ [u_1]^\top [u_p] + \lambda_1 \lambda_p, \end{cases} \quad (7.6)$$

où les seconds membres et la matrice linéaire tangente sont définis par

$$\begin{cases} [f_p^{nl}] = -\lambda_0 [v_p^{nl}] - \sum_{r=1}^{p-1} \lambda_r [v_{p-r}], \\ [v_p^{nl}] = -\sum_{r=1}^{p-1} \frac{p-r}{p} [u_r] \cdot * [v_{p-r}], \\ [K_T] = [K_0] + \lambda_0 [\text{diag}(v_0)]. \end{cases} \quad (7.7)$$

Dans les relation du (7.7),  $[\text{diag}(v_0)]$  désigne la matrice dont la diagonale contient les termes de du vecteur  $v_0$  et les autres termes sont nuls. La notation  $\cdot *$  signifie une multiplication élément par élément et le couple  $(\lambda_0, u_0)$  constitue le point solution de départ initial du problème.

Il est important de noter que les deux premières étapes de la MAN (discrétisation et perturbation) sont permutable dans la pratique courante de la MAN.

### 7.2.3 Algorithme de résolution du problème de Bratu

Le calcul des séries dans la résolution du problème de Bratu par la MAN est organisé dans le tableau 7.1 (Cochelin *et al.*, 2007). Une fois les séries  $[u_p]$  calculées, on obtient une branche de solution  $(\lambda, u)$  en utilisation la relation (7.4) après avoir déterminé le domaine

de validité  $D$  de la solution. Ce domaine de validité est défini par (Cochelin *et al.*, 2007) :

$$D = \left\{ a \in [0, a_{\max}] \text{ tel que } a_{\max} = \left( \epsilon \frac{\|u_1\|}{\|u_K\|} \right)^{\frac{1}{K-1}} \right\}, \quad (7.8)$$

où  $\epsilon$  est une précision fixée par l'utilisateur ( $10^{-8}$  par exemple). Ensuite pour obtenir la solution complète, on réitère l'opération (c'est l'étape de la continuation) à partir d'un nouveau point solution de départ, à la limite du rayon de convergence de la branche précédente ( $a_{\max}$ ).

---

**Calcul des séries**

Construction et décomposition de  $[K_T]$

ORDRE 1 :

Résolution de  $[K_T] [\hat{v}] = -[v_0]$

Calcul de  $\lambda_1 = \pm 1 / \sqrt{1 + \|\hat{v}\|^2}$

Calcul de  $[u_1] = \lambda_1 [\hat{v}]$

Calcul de  $[v_1] = [v_0] \cdot * [u_1]$

*Préparation des seconds membres pour l'ordre 2*

Calcul de  $[v_2^{nl}] = -\frac{1}{2} [u_1] \cdot * [v_1]$

Calcul de  $[f_2^{nl}] = -\lambda_0 [v_2^{nl}] - \lambda_1 [v_1]$

ORDRE  $p = 2, \dots, K$  :

1. Résolution de  $[K_T] [u_p^{nl}] = [f_p^{nl}]$

2. Calcul de  $\lambda_p = -\lambda_1^2 [u_p^{nl}]^\top [\hat{v}]$

3. Calcul de  $[u_p] = \lambda_p [\hat{v}] + [u_p^{nl}]$

4. Calcul de  $[v_p] = [v_0] \cdot * [u_p] + [v_p^{nl}]$

5. *Préparation des seconds membres pour l'ordre  $p+1$*

Calcul de  $[v_{p+1}^{nl}]$  et  $[f_{p+1}^{nl}]$  par la formule (7.7).

**Fin de calcul des séries**

---

TAB. 7.1 – Algorithme de la MAN pour le problème de Bratu.

A noter qu'il existe également une variante de la MAN, permettant d'améliorer la convergence des séries. Il s'agit d'utiliser des approximants de Padé (Baker et Graves-Morris, 1996), et donc de remplacer les termes des séries (7.4) par des fractions rationnelles.

Sur cet exemple simple, nous remarquons que même si l'implémentation de cet algorithme n'est pas difficile en soi, plusieurs pré-traitements manuels sont au préalable indispensables. La transformation du problème sous forme quadratique (par l'introduction des

variables intermédiaires) et l'organisation des seconds membres nécessaires à la résolution du problème à chaque ordre de la MAN sont des tâches qui incombent à l'utilisateur de la méthode. Cette mise en œuvre manuelle des calculs des séries peut devenir rapidement une tâche fastidieuse et surtout peut être une véritable source d'erreurs. Des efforts d'automatisation ont été faits ([Azrar et al., 1993b](#); [Arquier, 2005](#)) pour les problèmes d'EDP non linéaires qui s'écrivent sous la forme :

$$\mathcal{R}(v, \lambda) = L_0 + L(v) + Q(v, v) + \lambda F = 0, \quad (7.9)$$

où  $\mathcal{R}(v, \lambda) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur résidu dépendant du vecteur inconnu  $v \in \mathbb{R}^n$  et du paramètre de chargement  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dans [Azrar et al. \(1993b\)](#) et [Arquier \(2005\)](#), la décomposition de  $\mathcal{R}(v, \lambda)$  en des fonctions constante ( $L_0$ ), linéaire ( $L$ ) et quadratique ( $Q$ ) revient à l'utilisateur. Si la capacité de la MAN à traiter des problèmes non linéaires complexes n'est plus une chose à démontrer, ne serait-il pas intéressant d'automatiser les calculs de séries de la MAN de façon à supprimer tous les efforts manuels souvent exigés de l'utilisateur ? L'idée serait de demander juste à l'utilisateur de coder son problème résiduel non linéaire  $\mathcal{R}(v, \lambda)$  quels que soient la méthode de discrétisation, les lois et paramètres mécaniques et physiques utilisés. Ceci est aujourd'hui possible grâce à l'approche [Diamant](#) que nous présentons maintenant dans tous ses principes fondamentaux.

### 7.3 Philosophie générale de l'approche Diamant

D'un point de vue numérique, la MAN alterne les calculs des dérivées de degré élevé et la résolution de systèmes linéaires dans un processus itératif. A cause de ces caractéristiques spécifiques, les calculs de séries de la MAN sont principalement manuels. Simple dans ses principes, la MAN se révèle parfois délicate dans sa mise en œuvre.

La différentiation automatique (DA) ([Griewank, 2000](#)) est une approche générique qui permet également la différentiation de degré élevé. Elle propose des outils qui traitent

des codes informatiques ou des morceaux de codes pour “produire” des codes calculant des dérivées. Charpentier (2007) a eu alors l’idée de coupler la DA et la MAN donnant ainsi la naissance à l’approche **Diamant**. Charpentier proposa alors une librairie de différentiation automatique **Diamant** adaptée à la MAN en Fortran 90. **Diamant** est l’acronyme de “Différentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée”. Cette librairie a été conçue pour cacher les aspects de différentiation à l’utilisateur. Avec **Diamant**, les seconds membres utilisés dans les calculs des séries (cf. § 7.2) sont obtenus par la propagation des coefficients de Taylor du résidu  $\mathcal{R}$  (Charpentier et Potier-Ferry, 2008; Charpentier *et al.*, 2008) en initialisant à zéro certains coefficients de Taylor déjà calculés. Du point de vue numérique, **Diamant** repose sur la technique de surcharge d’opérateurs pour attacher les calculs de dérivées aux opérateurs arithmétiques et aux fonctions mathématiques intrinsèques au langage de programmation. Dans ce travail, nous portons notre attention sur le langage de programmation orienté-objet MATLAB pour une implémentation efficace et générique de la MAN. Une librairie équivalente existe déjà en C++ (Charpentier *et al.*, 2008). Une fois les capacités de la librairie validées, le **Diamant** MATLAB Toolbox peut être utilisé facilement et en toute confiance pour résoudre “tous” les problèmes non linéaires qui sont habituellement traités par la MAN.

Mais avant de montrer la conception de la librairie **Diamant** MATLAB Toolbox, nous discutons d’abord les aspects théoriques sur lesquels repose l’approche **Diamant**. Ces aspects théoriques sont discutés d’une manière générique quelles que soient les équations résiduelles, les lois de comportement et les méthodes de discrétisation utilisées.

## 7.4 Problème résiduel générique

Nous montrons les bases théoriques de l’approche **Diamant** sur le problème générique résiduel non linéaire suivant :

$$\mathcal{R}(v, \lambda) = 0, \tag{7.10}$$

où  $\mathcal{R}(v, \lambda) \in \mathbb{C}^n$  est le vecteur résidu qui dépend du vecteur inconnu  $v \in \mathbb{C}^n$  et du paramètre de chargement  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Les solutions  $(v, \lambda)$  de ce système sous-déterminé de  $n$  équations non linéaires à  $n + 1$  inconnues forment une branche de solution qui peut être décrite en considérant que  $v$  et  $\lambda$  sont des fonctions du paramètre de chemin  $a$ . En guise d'exemples sur ces types de problèmes non linéaires, nous pouvons citer :

(i) les EDPs non linéaires qui caractérisent le comportement en statique (géométrie non linéaire) des structures mécaniques

$$K(v)v + \lambda F = 0, \quad (7.11)$$

où  $K(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de rigidité obtenue en discrétisant la structure et qui dépend du vecteur inconnu  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $F = \text{constante} \in \mathbb{R}^n$  sont des paramètres de chargement ;

(ii) les problèmes aux valeurs propres complexes non linéaires qui caractérisent le comportement vibratoire (vibrations libres et linéaires) des structures mécaniques amorties (cf. § 2.3)

$$\left[ K(\lambda) - \lambda^2 M \right] v = 0, \quad (7.12)$$

où  $K(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est la matrice de rigidité qui dépend de la fréquence d'excitation  $\lambda$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de masse de la structure et  $v \in \mathbb{C}^n$  est le mode complexe de vibration. Rappelons que les valeurs propres complexes de ce problème permettent de déterminer les fréquences de résonance et les facteurs d'amortissement associés qui sont deux paramètres importants pour les ingénieurs lors de la conception des structures amorties (cf. § 2.3.3).

A noter qu'il y a plusieurs autres exemples de problèmes non linéaires en mécanique (des solides, des fluides), en thermique, en électromagnétisme, en électrostatique etc. qui peuvent se mettre sous la forme résiduelle générique (7.10). Les deux exemples cités plus

haut sont considérés dans notre travail et nous montrons à la fin du chapitre les performances numériques de la librairie [Diamant](#) MATLAB Toolbox sur ces deux exemples.

Pour monter les fondements théoriques de l’approche [Diamant](#), nous considérons le problème (7.11). Comme nous l’avons déjà dit plus haut, les solutions  $(v, \lambda)$  de ce système sous-déterminé de  $n$  équations non linéaires à  $n+1$  inconnues forment une branche qui peut être décrite en considérant que  $v$  et  $\lambda$  sont des fonctions du paramètre de chemin  $a$ . Nous considérons dans la suite l’équation de la pseudo longueur d’arc  $a$  suivante ([Cochelin et al., 2007](#)) :

$$Path\ eq. : a = \left\langle v(a) - v(0), \frac{\partial v}{\partial a}(0) \right\rangle + \left( \lambda(a) - \lambda(0) \right) \frac{\partial \lambda}{\partial a}(0), \quad (7.13)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne un produit scalaire. Si  $\mathcal{R}$  est “quadratique” en  $v$ , i.e. si  $\mathcal{R}$  vérifie l’équation (7.9) (ce qui est le cas de notre problème (7.11)), alors au moins deux formulations génériques peuvent être écrites :

$$\begin{aligned} Cas\ A : \quad \mathcal{R}_A(v, \lambda) &= A(v)S(v) + \lambda F = 0, \\ Cas\ B : \quad \mathcal{R}_B(v, \lambda) &= B(v)v + \lambda F = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Dans cet exemple, il est à noter que la matrice  $A(v)$  dépend linéairement de  $v$  alors que la matrice  $B(v)$  et le vecteur  $S(v)$  dépendent de façon non linéaire de  $v$ . Nous montrons sur cet exemple comment est née l’approche [Diamant](#) à partir de la MAN ([Charpentier et Potier-Ferry, 2008](#)).

Pour pouvoir appliquer la MAN, nous supposons que les fonctions  $a \mapsto v(a)$ ,  $a \mapsto \lambda(a)$ ,  $(v, \lambda) \mapsto \mathcal{R}(v, \lambda)$ ,  $v \mapsto B(v)$  et  $v \mapsto S(v)$  sont des fonctions analytiques. Les coefficients de Taylor à l’ordre  $k$  des fonctions  $v(a)$ ,  $\lambda(a)$ ,  $b(a) = B \circ v(a)$  et  $s(a) = S \circ v(a)$  évalués au point  $a = 0$  sont respectivement notés par  $v_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k v}{\partial a^k}(0)$ ,  $\lambda_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \lambda}{\partial a^k}(0)$ ,  $b_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k (B \circ v)}{\partial a^k}(0)$  et  $s_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k (S \circ v)}{\partial a^k}(0)$ . En suivant la méthodologie classique de la MAN, les séries de Taylor tronquées à l’ordre  $K$ ,  $\sum_{k=0}^K a^k v_k$ ,  $\sum_{k=0}^K a^k \lambda_k$ ,  $\sum_{k=0}^K a^k b_k$  sont

introduites dans l'équation (7.13) et (7.14), ce qui conduit alors à :

$$\begin{aligned}
 \text{Cas A :} & \quad A \left( \sum_{k=0}^K a^k v_k \right) \left( \sum_{k=0}^K a^k s_k \right) + \left( \sum_{k=0}^K a^k \lambda_k \right) F = 0, \\
 \text{Cas B :} & \quad \left( \sum_{k=0}^K a^k b_k \right) \left( \sum_{k=0}^K a^k v_k \right) + \left( \sum_{k=0}^K a^k \lambda_k \right) F = 0, \\
 \text{Path eq. :} & \quad \left\langle \left( \sum_{k=0}^K a^k v_k \right) - v_0, v_1 \right\rangle + \left( \left( \sum_{k=0}^K a^k \lambda_k \right) - \lambda_0 \right) \lambda_1 = a.
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

L'utilisation de la formule de Leibniz et l'identification des termes en  $a^k$  conduisent à une séquence récurrente de  $K$  systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{aligned}
 \text{Cas A :} & \quad \sum_{l=0}^k A(v_{k-l}) s_l + \lambda_k F = 0, \quad \forall k = 1, \dots, K, \\
 \text{Cas B :} & \quad \sum_{l=0}^k b_{k-l} v_l + \lambda_k F = 0, \\
 \text{Path eq. :} & \quad \langle v_1, v_k \rangle + \lambda_1 \lambda_k = \delta_{1k}.
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Les séries  $s_k$  ou  $b_k$  sont indépendantes de la formulation et comme l'ont fait remarquer [Cochelin et al. \(2007\)](#), les résultats numériques de la MAN ne dépendent pas de l'implémentation des formulations (7.16.A), (7.16.B) ou de leur forme quadratique équivalente (7.9). Jusqu'à l'apparition de l'approche [Diamant](#), l'implémentation, soit de la forme quadratique ou soit des séries  $s_k$  ou  $b_k$  était laissée au soin de l'utilisateur. Une fois implémentés, les développements de Taylor  $\sum_{k=0}^K a^k v_k$  et  $\sum_{k=0}^K a^k \lambda_k$  sont alors des approximations des fonctions inconnues  $v(a)$  et  $\lambda(a)$  au voisinage de  $a = 0$ . Ceci permet la détermination des branches dans les problèmes de cheminement ([Cochelin, 1994](#)). Nous montrons dans la suite que l'approche [Diamant](#) permet l'évaluation des séries de la MAN à travers la propagation des coefficients de Taylor  $\mathcal{R}_k$ . Cette propagation est faite de manière automatique quelles que soient les spécificités du problème traité : formulation (7.16.A) ou (7.16.B), méthode de discrétisation, loi de comportement etc.

## 7.5 L'approche Diamant

L'idée directrice de l'approche **Diamant** est l'introduction de la généricité, l'automatisation des calculs de séries et la matrice linéaire tangente, la facilité d'implémentation dans la MAN. Voyons maintenant certains principes théoriques qui démontrent la possibilité d'automatisation de la MAN.

### 7.5.1 Bases théoriques

Nos développements sont basés sur la formule générique de **Faá di Bruno** (1857) pour les différentiations d'ordre élevé des fonctions composées. Il est important à ce point de noter que cette formule est utilisée uniquement pour des raisons théoriques car la vraie différentiation sera faite à travers des techniques de différentiation automatique (cf. § 7.6). En appliquant la formule de **Faá di Bruno** à la fonction  $B \circ v$ , nous obtenons :

$$b^{(k)} = (B \circ v)^{(k)} = \sum_{l=1}^k B^{(l)} \beta_{k,l} \left( v^{(1)}, \dots, v^{(k-l+1)} \right), \quad (7.17)$$

où les variables  $v^{(k)} = k!v_k$  et  $B^{(k)} = k!B_k = \frac{\partial^k B}{\partial v^k}(v(0))$  sont les dérivées à l'ordre  $k$  de  $v$  et  $B$  respectivement,  $\beta_{k,l} \left( v^{(1)}, \dots, v^{(k-l+1)} \right)$  (pour  $l = 1, \dots, k$ ) sont les polynômes de **Bell** (1934) qui satisfont :

$$\beta_{k,l} \left( v^{(1)}, \dots, v^{(k-l+1)} \right) = \sum \frac{k!}{i_1! \dots i_{k-l+1}!} \left( \frac{v^{(1)}}{1!} \right)^{i_1} \dots \left( \frac{v^{(k-l+1)}}{(k-l+1)!} \right)^{i_{k-l+1}}. \quad (7.18)$$

Cette somme est sur toutes les partitions de  $k$  en  $l$  parties non négatives telles que  $i_1 + i_2 + \dots + i_{k-l+1} = l$  et  $i_1 + 2i_2 + \dots + (k-l+1)i_{k-l+1} = k$ . Il a été prouvé par **Charpentier et al.** (2008) que l'équation (7.16.A) peut s'écrire :

$$\text{Cas A : } L_T^A v_k + \lambda_k F = R_k^A, \quad (7.19)$$

où  $L_T^A$  est la matrice linéaire tangente satisfaisant :

$$L_T^A v = A(v)S_0 + A(v_0)S_1 v, \quad \forall v. \quad (7.20)$$

Les termes du second membre sont définis par :

$$R_k^A = - \sum_{l=1}^{k-1} A(v_{k-l}) s_l - A(v_0) \left( \sum_{l=2}^k \frac{l!}{k!} S_l \beta_{k,l}(v^{(1)}, \dots, v^{(k-l+1)}) \right), \quad (7.21)$$

où  $S_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k S}{\partial v^k}(v(0))$ . De la même manière, l'équation (7.16.B) peut être s'écrire :

$$\text{Cas } B : \quad L_T^B v_k + \lambda_k F = R_k^B. \quad (7.22)$$

**Preuves** : ces résultats peuvent être prouvés en utilisant les équations (7.17) et (7.18).

Ainsi à l'ordre  $k = 1$ , l'équation (7.16.B) devient :

$$b_1 v_0 + b_0 v_1 + \lambda_1 F = B_1 v_1 v_0 + B_0 v_1 + \lambda_1 F = 0. \quad (7.23)$$

En choisissant  $L_T^B$  satisfaisant :

$$L_T^B w = B_1 w v_0 + B_0 w, \quad \forall w, \quad (7.24)$$

nous pouvons alors en déduire :

$$L_T^B v_1 + \lambda_1 F = 0. \quad (7.25)$$

Ensuite en supposant que  $v_l$  et  $\lambda_l$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ) sont déjà évalués, nous pouvons écrire le  $k^{\text{ème}}$  système d'équations de (7.16.B) comme suit :

$$b_0 v_k + b_k v_0 + \lambda_k F = - \sum_{l=1}^{k-1} b_{k-l} v_l, \quad (7.26)$$

où les coefficients de Taylor  $b_k = b^{(k)}/k!$  satisfont :

$$b_k = b_1 v_k + \sum_{l=2}^k \frac{l!}{k!} b_l \beta_{k,l} (v^{(1)}, \dots, v^{(k-l+1)}), \quad (7.27)$$

puisque  $\beta_{k,1}(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) = v^{(k)}$ . L'équation (7.26) devient alors :

$$b_0 v_k + b_1 v_k v_0 + \lambda_k F = - \sum_{l=1}^{k-1} b_{k-l} v_l - \sum_{l=2}^k \frac{l!}{k!} b_l \beta_{k,l} (v^{(1)}, \dots, v^{(k-l+1)}). \quad (7.28)$$

Ainsi donc, les termes en  $v_k$  permettent d'arriver à la matrice linéaire tangente  $L_T^B$  dans le membre de gauche de l'équation (7.28) tandis que le membre de droite  $R_k^B$  rassemble les deux sommes de l'équation (7.28). La formule (7.22) est ainsi prouvée.

Comme on peut bien le remarquer, à l'ordre  $k$  donné, les systèmes d'équations linéaires (7.19) et (7.22) impliquent les matrices linéaires tangentes  $L_T^A$  et  $L_T^B$  puis les seconds membres  $R_k^A$  et  $R_k^B$ . Evidemment, la matrice linéaire tangente relative à  $\mathcal{R}$  est unique quelque soit la formulation considérée. La même remarque est valable pour les seconds membres :  $R_k^A = R_k^B$  même s'ils semblent être différents. Voyons maintenant comment  $L_T^A$  ou  $L_T^B$  d'une part puis  $R_k^A$  ou  $R_k^B$  d'autre part peuvent être évalués d'une manière automatique à partir de l'équation résiduelle  $\mathcal{R}(v, \lambda)$ .

### 7.5.2 Principe d'automatisation de Diamant

L'approche **Diamant** telle que nous venons de la présenter (cf. § 7.5.1), apporte d'importantes améliorations en terme de généricité et de facilité de l'implémentation puisque

tout ce que l'on a à faire est de différentier seulement  $\mathcal{R}$ . Plus précisément, des initialisations judicieuses de  $v_k$  and  $\lambda_k$  ( $k \geq 1$ ) permettent la construction de la matrice linéaire tangente  $L_T$  et des seconds membres  $R_k$  par l'évaluation des coefficients de Taylor  $\mathcal{R}_k$  du vecteur résidu  $\mathcal{R}$ . En un premier temps, la matrice linéaire tangente  $L_T$  peut être obtenue d'une manière automatique par la différentiation en  $v$  à l'ordre 1 de  $\mathcal{R}(v(a), \lambda(a))$  puisque :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial v}(v_0, \lambda_0) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{R}^A}{\partial v}(v_0, \lambda_0) = A(v_0)S_1v_1 + A(v_1)S_0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \mathcal{R}^B}{\partial v}(v_0, \lambda_0) = B_1v_1v_0 + B_0v_1 \end{array} \right\} = L_Tv_1. \quad (7.29)$$

Numériquement, la construction de  $L_T$  peut se faire colonne par colonne en utilisant les vecteurs  $e_i$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  pour les directions  $v_1$  ou mieux en utilisant un nombre réduit de directions  $v_1$  en tenant compte de la nature creuse de ce Jacobien (éléments finis) ou encore à partir de la technique de coloration de graphe (Griewank, 2000) si à "priori" aucune connaissance sur la construction de  $L_T$  n'est supposée. Cependant notons que nous n'avons pas expérimenté ces techniques dans le cadre de cette thèse et nous avons utilisé des connaissances mécaniques pour construire les matrices linéaires tangentes (Cochelin *et al.*, 2007). Ensuite, la formule de récurrence "incomplète" (Leibniz et Faà di Bruno dans le cas générique) qui apparaît dans  $R_k$  peut se transformer en une formule complète en initialisant  $v_k$  et  $\lambda_k$  à 0. Ainsi, l'égalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{R}_k = R_k^A = R_k^B, \quad \forall k = 2, \dots, K. \quad (7.30)$$

L'algorithme de calcul de séries en utilisant l'approche **Diamant** présenté dans le tableau 7.2 organise la propagation des coefficients de Taylor  $(v_k, \lambda_k)$  de la solution  $(v, \lambda)$  comme suit :

1. évaluation des coefficients de Taylor  $\mathcal{R}_k$  de la fonction résiduelle  $\mathcal{R}$ ,

2. résolution du système linéaire,
3. calcul des coefficients de Taylor  $(v_k, \lambda_k)$ ,
4. mises à jour éventuelles des variables intermédiaires.

Ces étapes sont quasi identiques à celles de l'algorithme original de la MAN (Cochelin *et al.*, 2007). Cette séquence de calculs répétés pour les ordres  $k = 1, \dots, K$  rend la différentiation de MAN différente de la différentiation d'ordre élevé classique. Cet algorithme géné-

---

**Calcul des séries**

Construction de  $L_T(v_0)$  utilisant la DA sur  $\mathcal{R}$

Décomposition de  $L_T$

ORDRE 1 :

Initialisation :  $v_1 = 0$  et  $\lambda_1 = 1$

Calcul du premier coefficient de Taylor  $\mathcal{R}_1$  de  $\mathcal{R}(v, \lambda)$

Résolution de  $L_T \hat{v} = \mathcal{R}_1$  ( $= -F$ )

Calcul de  $\lambda_1 = \pm 1 / \sqrt{1 + \|\hat{v}\|^2}$  et  $v_1 = \lambda_1 \hat{v}$

(Mises à jour des variables intermédiaires `Diamant2`)

ORDRE  $k = 2, \dots, K$  :

1. Calcul du coefficient de Taylor  $\mathcal{R}_k$  de  $\mathcal{R}(v, \lambda)$

2. Résolution de  $L_T \hat{v} = \mathcal{R}_k$  ( $= R_k$ )

3. Calcul de  $\lambda_k, v_k = \lambda_k v_1 / \lambda_1 + \hat{v}$

4. (Mises à jour des variables intermédiaires si `Diamant2`)

**Fin de calcul des séries**

---

TAB. 7.2 – Algorithme de l'approche Diamant.

rique est identique pour les implémentations en Fortran 90 (Charpentier et Potier-Ferry, 2008), en C++ (Charpentier *et al.*, 2008) et en MATLAB (Koutsawa *et al.*, 2008a). Les tâches de l'utilisateur concernent, dans cette approche, la définition de la fonction résiduelle  $\mathcal{R}(v, \lambda)$  à évaluer : les inconnues  $v$  et  $\lambda$ , la méthode de discrétisation etc. Nous détaillons dans la section 7.6 la conception de la librairie `Diamant` MATLAB Toolbox pour l'évaluation des coefficients de Taylor  $\mathcal{R}_k$  du code informatique de  $\mathcal{R}(v, \lambda)$ .

## 7.6 Diamant : un outil de DA pour la MAN

La différentiation automatique (DA) ([Griewank, 2000](#)) est un ensemble de techniques pour dériver les codes informatiques. Avec la DA, tout programme  $\Phi$  peut être considéré comme une composition de fonctions élémentaires  $\phi$ . Même si le programme  $\Phi$  implique un nombre élevé de fonctions élémentaires  $\phi$ , cette composition de fonctions peut être différentiée en utilisant les règles élémentaires de dérivation en chaîne. Par exemple, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées etc. Les différentiations d'ordre élevé peuvent être obtenues en utilisant les formules de récurrence qui propagent les coefficients de Taylor. Par exemple, la formule de Leibniz :

$$r_k = \sum_{l=0}^k x_l * y_{k-l}, \quad (7.31)$$

permet la différentiation d'ordre élevé de la multiplication  $r = x * y$ . Deux classes d'outils de DA existent : ceux qui fonctionnent par transformation source à source et ceux qui fonctionnent par surcharge d'opérateurs. De nos jours, les différentiations d'ordre élevé s'effectuent par surcharge d'opérateurs ([Griewank et al., 1996](#); [Charpentier et Utke, 2008](#)). Tout repose sur la technique de surcharge d'opérateurs pour attacher les calculs de dérivées aux opérateurs arithmétiques et aux fonctions mathématiques intrinsèques au langage de programmation.

Le [Diamant](#) MATLAB Toolbox ([Koutsawa et al., 2008a](#)) que nous avons développé se veut un modèle efficace et générique pour l'implémentation facile de la MAN dans les codes éléments finis développés dans le langage de MATLAB. L'idée principale est de cacher à l'utilisateur l'aspect de la différentiation dans la librairie ainsi conçue et qui est basée sur la programmation orientée-objet (POO) offerte par MATLAB. Une telle volonté de cacher l'information a pour objectif de simplifier l'usage de cette librairie et de permettre son amélioration sans avoir d'impact sur son utilisation dans un code. La librairie [Diamant](#) MATLAB Toolbox a été donc conçue pour :

1. éviter la pénible tâche (et source d’erreurs) de différentiation de haut degré manuelle,
2. cacher les aspects de la différentiation à l’utilisateur,
3. être aussi performante dans ses calculs de séries que les calculs organisés à la main.

L’organisation de la DA de haut degré de la MAN est quelque peu différente de la DA usuelle. Même si les outils classiques de la DA peuvent bien effectuer les calculs, ils le feraient avec une complexité algorithmique supérieure d’un ordre de grandeur par rapport à une différentiation manuelle puisque beaucoup de calculs seraient répétés inutilement. Les outils classiques de la DA effectuent généralement la différentiation de haut degré jusqu’à un ordre maximal  $K \geq k$  fixé par l’utilisateur. En prenant par exemple la formule de Leibniz (7.31), à l’ordre  $k$ , le calcul de  $r_k$  implique  $(k+1)$  multiplications. Ainsi, le nombre de multiplication est donc de  $(K+1)(K+2)/2$  quelque soit l’ordre de différentiation  $k$  (cf. Figure 7.1(a)). Puisque  $K$  étapes de différentiation sont effectuées dans la MAN (cf. tableau 7.2), le nombre réel de multiplication est au total  $K(K+1)(K+2)/2$ . Ainsi, nous remarquons bien que, dans le cadre de la MAN, les outils classiques de la DA induisent une complexité informatique en  $\mathcal{O}(K^3)$ . Cette approche est inacceptable puisque, ce même développement en série, lorsqu’il est manuel, a une complexité en  $\mathcal{O}(K^2)$  seulement. Dans l’itération  $k$  du calcul de séries de la MAN, le fait de différentier à l’ordre  $k$  signifie clairement que les calculs aux ordres inférieurs ( $l = 1, \dots, k-1$ ) et supérieurs ( $m = k+1, \dots, K$ ) sont à “priori” inutiles puisque les premiers ont été déjà calculés avant l’itération  $k$  et que les seconds n’interviennent pas à cette itération. Ces deux observations sont à l’origine des deux versions [Diamant1](#) et [Diamant2](#) de la librairie [Diamant](#) (cf. Figure 7.1(b) et (c)).

### 7.6.1 *Diamant1*

La version [Diamant1](#) de l’approche [Diamant](#) (cf. Figure 7.1(b)) apporte une première amélioration de la DA classique pour la MAN : les coefficients de Taylor aux ordres supérieurs à  $k$  ( $m = k+1, \dots, K$ ) inutiles pour l’ordre  $k$  ne sont plus calculés. Cela permet

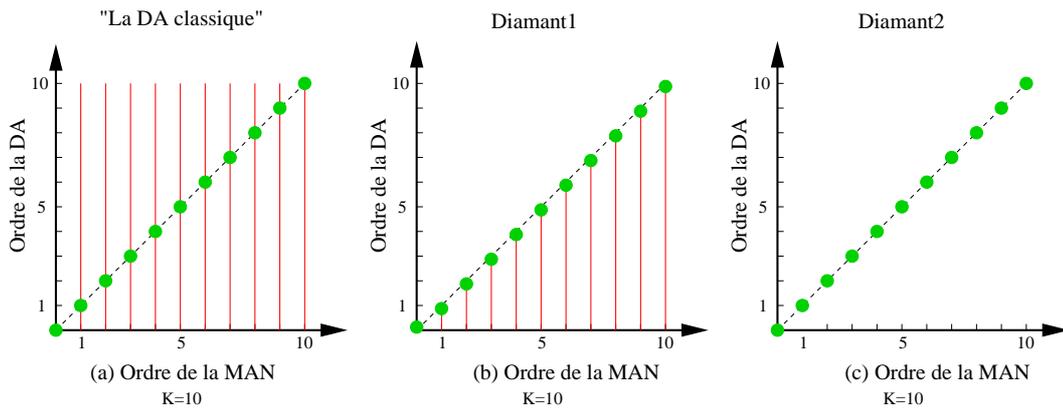


FIG. 7.1 – Calcul des coefficients de Taylor selon les versions de Diamant.

de réduire le nombre de multiplications par un facteur de 3. La complexité algorithmique demeure en  $\mathcal{O}(K^3)$  car les dérivations de bas degré sont recalculées à chaque itération du calcul de séries. En revanche il n'y a aucun besoin de stocker les coefficients de Taylor intermédiaires. La complexité en espace de stockage est linéaire en  $K$  et en nombre de degrés de liberté issus de la discrétisation (éléments finis par exemple). Cette amélioration est mise en œuvre dans la librairie au moyen d'une variable globale `Ck` qui informe les opérateurs et fonctions surchargés sur l'ordre courant de la différentiation (identique au numéro d'itération du développement en séries de la MAN). Les instructions relatives à la surcharge de l'opérateur `*` (`mtimes` de MATLAB) lorsque les variables  $x$  et  $y$  sont actives (i.e. ayant un rôle actif dans la différentiation) sont présentées comme suit :

```

1 Implémentation de taylorcoef1/mtimes pour  $r_k = \sum_{l=0}^k x_l * y_{k-l}$ .
2 function r=mtimes(x,y)
3 % MTIMES for taylorcoef1.
4 %
5 % See also taylorcoef1/TIMES.
6 %
7 %MATLAB Diamant Toolbox.
8 %Copyright 2008: Yao Koutsawa, Isabelle Charpentier
9 global Ck % Current order of differentiation
10 if isa(x,'taylorcoef1') % x and y are taylorcoef1 objects
11     if isa(y,'taylorcoef1')
12         r.value=x.value*y.value;
13         r.coef=zeros([size(r.value),x.order]);
14         r.order=x.order;
15         for kk=1:Ck

```

```

16         for ii=1:kk-1
17             r.coef(:, :, kk)=r.coef(:, :, kk)+...
18                 x.coef(:, :, ii)*y.coef(:, :, kk-ii);
19         end
20         r.coef(:, :, kk)=r.coef(:, :, kk)+...
21             x.value*y.coef(:, :, kk)+x.coef(:, :, kk)*y.value;
22     end
23     r=taylorcoef1(r.value,r.order,r.coef);
24     return;
25 else % x is a taylorcoef1 object while y is a double
26     r.value=x.value*y;
27     r.coef=zeros([size(r.value),x.order]);
28     r.order=x.order;
29     for kk=1:Ck
30         r.coef(:, :, kk)=x.coef(:, :, kk)*y;
31     end
32     r=taylorcoef1(r.value,r.order,r.coef);
33     return;
34 end
35 else % y is a taylorcoef1 object while x is a double
36     r.value=x*y.value;
37     r.coef=zeros([size(r.value),y.order]);
38     r.order=y.order;
39     for kk=1:Ck
40         r.coef(:, :, kk)=x*y.coef(:, :, kk);
41     end
42     r=taylorcoef1(r.value,r.order,r.coef);
43     return;
44 end

```

### 7.6.2 Diamant2

Dans la version **Diamant2** de l'approche **Diamant** (cf. Figure 7.1(c)), les dérivées d'ordre inférieur à  $k$  ne sont pas non plus recalculées. Pour les opérations  $+$ ,  $-$ ,  $*$ , les formules de récurrence calculent le coefficient de Taylor  $r_k$  en fonction des coefficients de Taylor de  $x$  et  $y$ . Il n'y a pas besoin de variables intermédiaires. La boucle itérative allant de 1 à  $Ck$  présente dans `taylorcoef1/mtimes` a été retirée de `taylorcoef2/mtimes`.

```

1 Extrait de: taylorcoef2/mtimes
2 function r=mtimes(x,y)
3 global Ck
4 .....
5 r.value=x.value*y.value;
6 .....
7 for ii=1:Ck-1

```

```

8   r.coef(:, :, Ck)=r.coef(:, :, Ck)+...
9       x.coef(:, :, ii)*y.coef(:, :, Ck-ii);
10  end
11  r.coef(:, :, Ck)=r.coef(:, :, Ck)+...
12       x.value*y.coef(:, :, Ck)+x.coef(:, :, Ck)*y.value;
13  .....

```

Pour les opérations  $/$  et  $\wedge$  (`mrdivide` et `mpower` de MATLAB) ainsi que pour les fonctions élémentaires `exp`, `^`, `log`, `sin`, `cos`, `sqrt`, etc., les formules de récurrence calculent le coefficient de Taylor  $r_k$  en fonction des coefficients de Taylor de  $x$  et  $y$ , mais aussi des coefficients de Taylor  $r_l$  ( $l = 0, \dots, k-1$ ) du résultat  $r$ . La formule de récurrence pour  $r = x/y$  est :

$$r_k = \frac{1}{y_0} \left[ x_k - \sum_{l=0}^{k-1} r_l * y_{k-l} \right]. \quad (7.32)$$

Comme  $r_k$  dépend des coefficients  $r_l$  ( $l < k$ ), la surcharge de  $/$  n'est plus possible car le résultat ne peut être utilisé comme une variable d'entrée. Une solution consiste à construire une fonction MATLAB pour la division, par exemple fonction `r=divide(x,y,r)` ayant pour arguments d'entrée  $x$ ,  $y$  et  $r$  puis  $r$  comme argument de sortie. Cette fonction ne modifie que la composante  $r_k$  de  $r$ . Ainsi donc, dans le code à différentier toutes les occurrences de  $/$  sont remplacées par un appel de `r=divide(.,.,.)`. De nouvelles fonctions sont également requises pour `log`, `sin`, `cos`, `sqrt`, etc. Ces nouvelles routines sont ensuite surchargées pour la DA.

La librairie `Diamant2` a clairement une complexité informatique en  $\mathcal{O}(K^2)$ . Néanmoins ce gain a un coût en mémoire puisque des variables intermédiaires sont nécessaires à la décomposition des instructions du code en instructions élémentaires. Ces variables intermédiaires doivent de plus être mises à jour car elles sont été initialement calculées avec des valeurs fausses de  $v_k$  et  $\lambda_k$ . Ces coefficients de Taylor sont mis à jour après le calcul du chemin par une évaluation de  $\mathcal{R}_k$  si aucune connaissance mécanique n'est supposée ou par une évaluation directe de  $s_k$  quand la formulation A est utilisée (respectivement  $b_k$  pour la

formulation B). La complexité en mémoire, toujours linéaire en  $K$ , dépend maintenant du nombre d'opérations utilisées dans l'implémentation de la fonction mathématique  $\mathcal{R}(v, \lambda)$ .

## 7.7 Présentation du Diamant MATLAB Toolbox

### 7.7.1 Organisation globale de Diamant MATLAB Toolbox

A cause de notre utilisation particulière de la DA, le **Diamant** MATLAB Toolbox a été implémenté à partir de zéro (même s'il existe plusieurs outils de la DA développés en MATLAB : Verma (1999); Forth (2006); Bischof *et al.* (2003)) en construisant deux classes `taylorcoef1` et `taylorcoef2` selon les versions de **Diamant**. A chaque classe sont associés des fonctions et des opérateurs surchargés. Le Toolbox est basé sur quatre principes.

1. Construction de chaque classe dont les objets ont trois propriétés : `value` ( $k = 0$ ), `coef` ( $k = 1, \dots, K$ ) et `order` (l'ordre maximum  $K$  de la MAN).
2. Implémentation des méthodes qui agissent sur les objets. Dans **Diamant2** par exemple, MATLAB appelle la méthode `mtimes` de `taylorcoef2` pour calculer les produits `x*y`. Cette méthode de **Diamant** (`taylorcoef2/mtimes`) implémente la convolution de Leibniz (7.31).
3. Prise en compte de la nature (scalaire, vecteur, matrice) des variables dans la conception des méthodes. Dans la méthode EF, les variables sont scalaires ( $\lambda$ ), vectorielles ( $v$  et  $\mathcal{R}(v, \lambda)$ ) ou matricielles ( $B(v)$ ). Comme MATLAB est essentiellement un langage d'interprétation, MATLAB ne connaît le type, la forme et les dimensions de chaque variable ou fonction que seulement au moment de l'exécution. Dans ce contexte, les opérations surchargées sont plus rapides quand la forme et les dimensions des objets sont prises en compte dans l'implémentation du calcul des dérivées.
4. Calcul des séries de la MAN en suivant l'algorithme dans le tableau 7.2.

7.7.2 Constructeur de la classe *taylorcoef1*

La routine définissant la classe `taylorcoef1` de `Diamant1` est définie comme suit :

```

1 function p=taylorcoef1(varargin)
2 %TAYLORCOEF1: Class constructor for taylorcoef1 AD objects
3 %
4 %EXAMPLE :
5 % p=taylorcoef1(x)
6 % p=taylorcoef1(x,ox)
7 % p=taylorcoef1(x,ox,dx)
8 %
9 % x is an object of class taylorcoef1 or taylorcoef2
10 %          or double or a sparse array
11 % dx is the array of the coefficients of x
12 % dx may be of class sparse.
13 % ox the order for Taylor expansion of x
14 %
15 % See also taylorcoef2, cad, pmad
16 %
17 %MATLAB Diamant Toolbox.
18 %Copyright 2008: Yao Koutsawa, Isabelle Charpentier.
19 if nargin==0
20     % EMPTY/DEFAULT CONSTRUCTOR
21     p.value=[];
22     p.coef=[];
23     p.order=[];
24     p=class(p, 'taylorcoef1');
25     return;
26 elseif nargin==1
27     obj=varargin{1};
28     switch class(obj)
29         case 'taylorcoef1'
30             % COPY CONSTRUCTOR
31             p.value=obj.value;
32             p.coef=obj.coef;
33             p.order=obj.order;
34             p=class(p, 'taylorcoef1');
35             return;
36         case 'taylorcoef2'
37             % CONVERSION CONSTRUCTOR
38             p.value=obj.value;
39             p.coef=obj.coef;
40             p.order=obj.order;
41             p=class(p, 'taylorcoef1');
42             return;
43         case 'double'
44             % CONVERT A 2-D or 1-D ARRAY TO TAYLORCOEF1
45             p.value=obj;
46             p.order=20; % Default differentiation order
47             p.coef=zeros([size(obj) p.order]);

```

```

48         p.coef(:, :, 1)=1;
49         p=class(p, 'taylorcoef1');
50         return;
51     end
52 elseif nargin==2
53     obj_value=varargin{1};
54     obj_order=varargin{2};
55     p.value=obj_value;
56     p.order=obj_order;
57     p.coef=zeros([size(obj_value) p.order]);
58     p.coef(:, :, 1)=1;
59     p=class(p, 'taylorcoef1');
60     return;
61 elseif nargin==3
62     obj_value=varargin{1};
63     obj_order=varargin{2};
64     obj_coef=varargin{3};
65     % Checking if the dimensions of coef and value match well
66     scoef=size(obj_coef);
67     svalue=size(obj_value);
68     if numel(scoef)==2 || scoef(1)~=svalue(1)...
69         ||scoef(2)~=svalue(2) || scoef(3)~=obj_order
70         error('Objet.value and Objet.coef dimensssions mismatch')
71     end
72     p.value=obj_value;
73     p.order=obj_order;
74     p.coef=obj_coef;
75     p=class(p, 'taylorcoef1');
76     return;
77 end
78 error('Unsupported use of the Class taylorcoef1.');
```

### 7.7.3 Exemples d'utilisation des classes *taylorcoef1/2*

Nous montrons des exemples d'utilisation des classes `taylorcoef1/2`. Pour cela, nous prenons l'exemple d'une fonction scalaire simple  $f(x) = (x^2 + 1)/(x^3 - 1)$ . Nous cherchons donc à évaluer les coefficients de Taylor de  $f$  au point  $x = 3$ . Les commandes MATLAB et les résultats sont présentés ci-dessous. Nous montrons la définition des objets (scalaires, vectoriels, matriciels) de la classe `taylorcoef1` ainsi que leur manipulation. On peut remarque la surcharge des opérateurs et fonctions MATLAB tels que `plus`, `minus`, `rdivide`, `horzcat`, `vertcat`, `subsasgn`, `subsref`, `length`, `zeros`, `squeeze`, `transpose`, `ctranspose`, `exp`, `disp`, `display` etc.

```

1 >> x=taylorcoef1(3,6) %Crée un objet taylorcoef1, value=3, order=6
2 x is taylorcoef1 object 1 x 1
3 Value=
4     3
5 Coefficients=
6 (:,:,1) =
7     1
8 (:,:,2) =
9     0
10 (:,:,3) =
11    0
12 (:,:,4) =
13    0
14 (:,:,5) =
15    0
16 (:,:,6) =
17    0
18 >> squeeze(x) % Cette méthode supprime les dimensions singleton
19 ans is taylorcoef1 object 1 x 1
20 Value=
21     3
22 Coefficients=
23     1
24     0
25     0
26     0
27     0
28     0
29 >>f=@(x)(x.^2+1)./(x.^3-1)% Définition de la fonction  $f(x) = (x^2 + 1)/(x^3 - 1)$ 
30 f =
31     @(x)(x.^2+1)./(x.^3-1)
32 >> global Ck; Ck=5 % Ordre courant de différentiation
33 Ck =
34     5
35 >> y=f(x) % Coefficients de Taylor de  $f(x)$  au point  $x = 3$ 
36 y is taylorcoef1 object 1 x 1
37 Value=
38     3.846153846153846e-001
39 Coefficients=
40 (:,:,1) =
41     -1.686390532544379e-001
42 (:,:,2) =
43     8.045061447428313e-002
44 (:,:,3) =
45     -3.996271138965724e-002
46 (:,:,4) =
47     2.013756655794750e-002
48 (:,:,5) =
49     -1.017309650122887e-002
50 (:,:,6) =
51     0
52 >> y=squeeze(f(x))
53 y is taylorcoef1 object 1 x 1

```

```

54 Value=
55     3.846153846153846e-001
56 Coefficients=
57     -1.686390532544379e-001
58     8.045061447428313e-002
59     -3.996271138965724e-002
60     2.013756655794750e-002
61     -1.017309650122887e-002
62     0
63 >> Ck=Ck+1 % Augmentation de l'ordre de différentiation Ck
64 Ck =
65     6
66 >> z=squeeze(f(x))
67 z is taylorcoef1 object 1 x 1
68 Value=
69     3.846153846153846e-001
70 Coefficients=
71     -1.686390532544379e-001
72     8.045061447428313e-002
73     -3.996271138965724e-002
74     2.013756655794750e-002
75     -1.017309650122887e-002
76     5.130700688511892e-003
77 >> y1=taylorcoef2(y)% Conversion de y en un objet taylorcoef2
78 y1 is taylorcoef2 object 1 x 1
79 Value=
80     3.846153846153846e-001
81 Coefficients=
82 (:,:,1) =
83     -1.686390532544379e-001
84 (:,:,2) =
85     8.045061447428313e-002
86 (:,:,3) =
87     -3.996271138965724e-002
88 (:,:,4) =
89     2.013756655794750e-002
90 (:,:,5) =
91     -1.017309650122887e-002
92 (:,:,6) =
93     0
94 >> Ck=4 % Redéfinition de l'ordre de différentiation
95 Ck =
96     4
97 >> m=[x^10 2; exp(f(x)) 0; 1 3*x] % Définition d'un objet matriciel
98 m is taylorcoef1 object 3 x 2
99 Value =
100     5.904900000000000e+004     2.000000000000000e+000
101     1.469049193849017e+000     0
102     1.000000000000000e+000     9.000000000000000e+000
103 Coefficients =
104 (:,:,1) =
105     1.968300000000000e+005     0
106     -2.477390652348934e-001     0
107     0     3.000000000000000e+000

```

```

108 (:,:,2) =
109     2.952450000000000e+005      0
110     1.390751510457796e-001      0
111     0                             0
112 (:,:,3) =
113     2.624400000000000e+005      0
114     -7.981219623714407e-002     0
115     0                             0
116 (:,:,4) =
117     1.530900000000000e+005      0
118     4.596752347374353e-002     0
119     0                             0
120 (:,:,5) =
121     0      0
122     0      0
123     0      0
124 (:,:,6) =
125     0      0
126     0      0
127     0      0
128 >> m.' % Transposé de la matrice m
129 ans is taylorcoef1 object 2 x 3
130 Value=
131     5.904900000000000e+004  1.469049193849017e+000  1.000000000000000e+000
132     2.000000000000000e+000      0  9.000000000000000e+000
133 Coefficients=
134 (:,:,1) =
135     1.968300000000000e+005 -2.477390652348934e-001      0
136     0                             0  3.000000000000000e+000
137 (:,:,2) =
138     2.952450000000000e+005  1.390751510457796e-001      0
139     0                             0      0
140 (:,:,3) =
141     2.624400000000000e+005 -7.981219623714407e-002     0
142     0                             0      0
143 (:,:,4) =
144     1.530900000000000e+005  4.596752347374353e-002     0
145     0                             0      0
146 (:,:,5) =
147     0      0      0
148     0      0      0
149 (:,:,6) =
150     0      0      0
151     0      0      0
152 >> m1=m(1:2,1:2), m2=m(3,1) % Extraction des sous-matrices de m
153 m1 is taylorcoef1 object 2 x 2
154 Value=
155     5.904900000000000e+004      2.000000000000000e+000
156     1.469049193849017e+000      0
157 Coefficients=
158 (:,:,1) =
159     1.968300000000000e+005      0
160     -2.477390652348934e-001     0
161 (:,:,2) =

```

```

162      2.9524500000000000e+005      0
163      1.390751510457796e-001      0
164      (:,:,3) =
165      2.6244000000000000e+005      0
166      -7.981219623714407e-002      0
167      (:,:,4) =
168      1.5309000000000000e+005      0
169      4.596752347374353e-002      0
170      (:,:,5) =
171      0      0
172      0      0
173      (:,:,6) =
174      0      0
175      0      0
176 m2 is taylorcoef1 object 1 x 1
177 Value=
178      1
179 Coefficients=
180      (:,:,1) =
181      0
182      (:,:,2) =
183      0
184      (:,:,3) =
185      0
186      (:,:,4) =
187      0
188      (:,:,5) =
189      0
190      (:,:,6) =
191      0
192 >> zx=zeros([2*length(x) 5]) % Initialise une matrice de zeros
193 zx is taylorcoef1 object 2 x 5
194 Value=
195      0      0      0      0      0
196      0      0      0      0      0
197 Coefficients=
198      (:,:,1) =
199      0      0      0      0      0
200      0      0      0      0      0
201      (:,:,2) =
202      0      0      0      0      0
203      0      0      0      0      0
204      (:,:,3) =
205      0      0      0      0      0
206      0      0      0      0      0
207      (:,:,4) =
208      0      0      0      0      0
209      0      0      0      0      0
210      (:,:,5) =
211      0      0      0      0      0
212      0      0      0      0      0
213      (:,:,6) =
214      0      0      0      0      0
215      0      0      0      0      0

```

```

216 >> zx([1 2],[1 2])=m1 % Met m1 dans zx
217 zx is taylorcoef1 object 2 x 5
218 Value=
219     5.904900000000000e+004     2.000000000000000e+000         0         0         0
220     1.469049193849017e+000         0         0         0         0
221 Coefficients=
222 (:,:,1) =
223     1.968300000000000e+005         0         0         0         0
224    -2.477390652348934e-001         0         0         0         0
225 (:,:,2) =
226     2.952450000000000e+005         0         0         0         0
227     1.390751510457796e-001         0         0         0         0
228 (:,:,3) =
229     2.624400000000000e+005         0         0         0         0
230    -7.981219623714407e-002         0         0         0         0
231 (:,:,4) =
232     1.530900000000000e+005         0         0         0         0
233     4.596752347374353e-002         0         0         0         0
234 (:,:,5) =
235         0         0         0         0         0
236         0         0         0         0         0
237 (:,:,6) =
238         0         0         0         0         0
239         0         0         0         0         0
240 >>

```

Voilà quelques fonctionnalités des classes `taylorcoef1/2`. Dans le cadre de la MAN, la fonction  $f$  peut donc être remplacée par le code MATLAB de la fonction résiduelle  $\mathcal{R}(v, \lambda)$ . Les coefficients de Taylor  $\mathcal{R}_k$  de  $\mathcal{R}(v, \lambda)$  sont évalués de la même façon que les coefficients de Taylor de la fonction  $f$  présentée ci-dessus.

## 7.8 Un exemple numérique

Comme illustration de l'usage et des performances de [Diamant](#) MATLAB Toolbox, nous reprenons l'étude statique de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre considérée dans la section 2.2.

### 7.8.1 Problème des non linéarités géométriques du Verre/PVB/Verre

La poutre est considérée maintenant dans les conditions aux limites d'encastrement. Dans cette condition, les non linéarités géométriques sont alors présentes contrairement

aux cas traités dans la section 2.2. En utilisant les formulations de la section 2.2 et l'élément fini sandwich de la section 2.3.3, ce problème de non linéarité géométrique peut être formulé comme suit :

$$\sum_e \{\delta v\}^\top \left( \int_{(x_e)} \sum_{i=1}^3 ([\mathbf{B}_i^l] + [\mathbf{B}^{nl}(v)])^\top \{\mathbf{S}_i\} dx + \lambda \{\mathbf{f}_e\} \right) = 0, \quad (7.33)$$

où :

$$\{\mathbf{S}_i\} = [\mathbf{D}_i] \left( [\mathbf{B}_i^l] + \frac{1}{2}[\mathbf{B}^{nl}(v)] \right) \{v\}. \quad (7.34)$$

Les matrices  $[\mathbf{B}_i^l]$  et  $[\mathbf{B}^{nl}(v)]$  sont liées aux fonctions de forme (cf. § A.2) de la méthode EF (Dhatt *et al.*, 2005), la matrice  $[\mathbf{D}_i]$  est donnée par la relation (2.8).

On peut vérifier clairement que l'équation résiduelle (7.33) peut se mettre sous l'une ou l'autre forme de l'équation résiduelle générique (7.14). Le **Diamant** MATLAB Toolbox peut être ainsi utilisé pour résoudre ce problème non linéaire.

### 7.8.2 Résultats numériques

Dans cette application numérique, nous considérons la poutre Verre/PVB/Verre étudiée par Aşık et Tezcan (2005) qui a utilisé la méthode des différences finies (MDF). La poutre a une longueur  $L = 1$  m et une largeur  $b = 0.1$  m. Les couches en verre ont chacune une épaisseur  $h = 0.005$  m et un module de Young  $E = 64.5$  GPa. Le module de cisaillement et l'épaisseur de la couche en PVB sont respectivement  $\mu_2 = 1$  MPa et  $h_2 = 0.76$  mm. Une charge ponctuelle  $Q$  est appliquée au milieu de la poutre. Avec **Diamant**, les variables  $v$  et  $\lambda$  sont de la classe `taylorcoef1` ou `taylorcoef2` selon la version de **Diamant** utilisée. La figure 7.2 montre la comparaison entre les théories linéaire (courbe pointillée) et non linéaire (○ : Aşık, trait plein : **Diamant**) pour la prédiction de la déflexion centrale maximum  $w_{\max}$  de la poutre. La courbe de **Diamant** est obtenue avec des séries calculées à l'ordre  $K = 15$ . On remarque à partir de la figure 7.2 que la théorie linéaire n'est plus

valide pour les valeurs de  $w_{\max}/h$  au-delà de 0.48. Ce qui correspond à une charge d'environ 0.105 kN. Evidemment pour des charges supérieures, la théorie non linéaire doit être utilisée. Nous avons noté un très bon accord entre les résultats d'Aşik et Tezcan et ceux de Diamant.

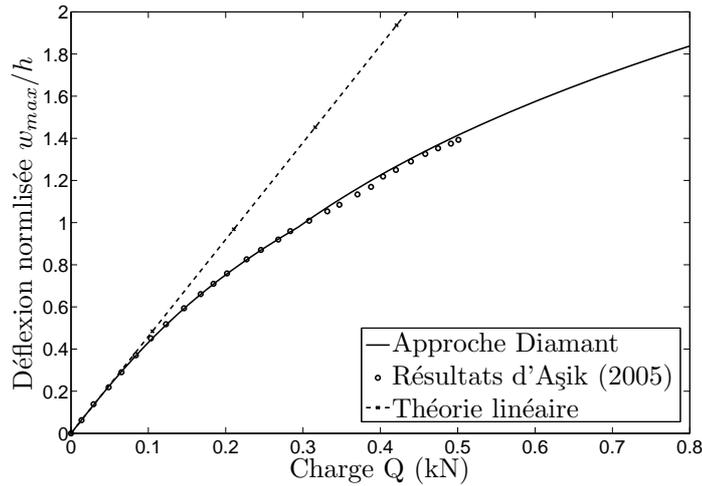
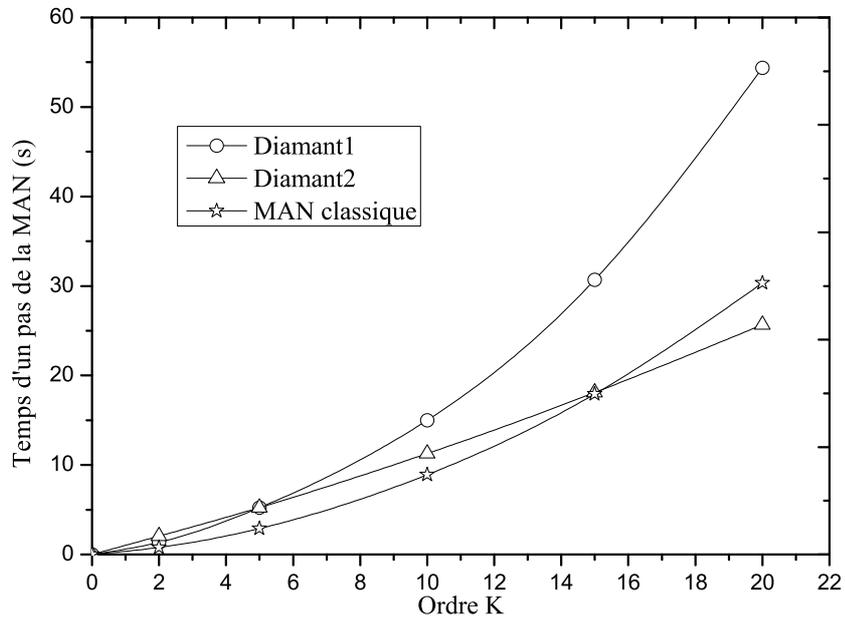


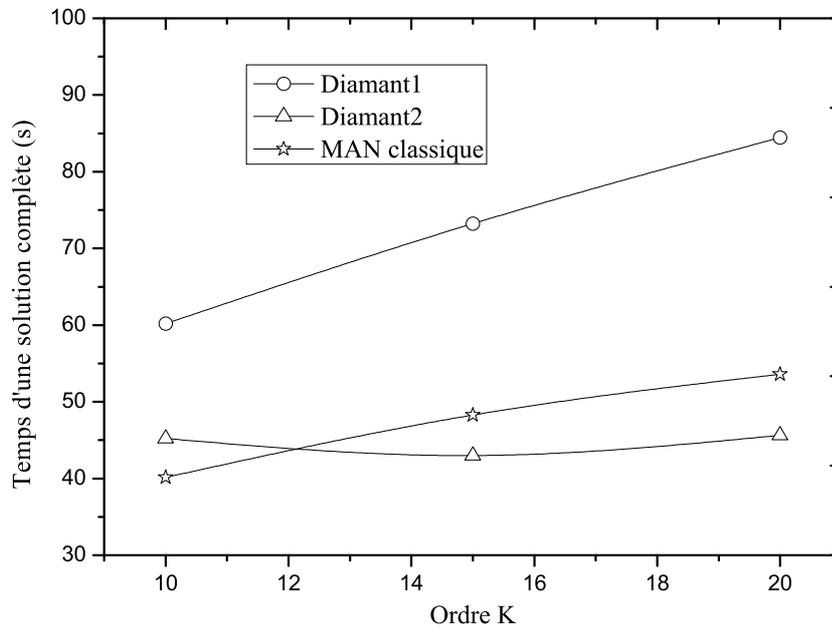
FIG. 7.2 – Déflexion normalisée  $w_{\max}/h$ .

### 7.8.3 Performances numériques de Diamant sur cet exemple

Les figures 7.3(a) et 7.3(b) présentent les temps CPU pour les trois implémentations du calcul des séries de Taylor. La version de la MAN classique implémentée est celle de Cochelin *et al.* (2007). Les temps d'exécution sont pris sur une machine AMD Opteron 880 Core2 2.4 GHz et 1 Go de RAM avec MATLAB R2007a. On peut remarquer clairement à partir de figure 7.3(a) que Diamant1 a bien une complexité en  $\mathcal{O}(K^3)$  tandis que Diamant2 et la MAN classique ont une complexité en  $\mathcal{O}(K^2)$ . Comme il est présenté sur la figure 7.3(b), Diamant2 permet de calculer la solution du problème en 42.6 s avec 2 pas de la MAN pour  $K = 15$ . La même simulation a été faite en utilisant le code d'éléments fins ABAQUS 6.7.1 en 151 s avec 6 incréments. Dans cette simulation particulière, le gain est assez intéressant même si MATLAB et ABAQUS sont très différents en termes d'outils de calculs numériques pour être comparés uniquement sur ce simple exemple.



(a) Un pas de la MAN



(b) Solution complète de la MAN

FIG. 7.3 – Temps CPU en fonction de l'ordre  $K$  de la MAN.

## 7.9 Diamant et les problèmes non linéaires aux valeurs propres

Nous montrons maintenant comment la librairie [Diamant](#) peut être utilisée pour résoudre les problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. Nous avons présenté dans la section [1.3.5](#) les diverses techniques numériques pour traiter ce type de problèmes non linéaires. Il est indubitable que ces différentes méthodes de résolution ne sont aussi robustes que les méthodes itératives pour la résolution des problèmes linéaires aux valeurs propres ([Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006](#)). Dans ce qui suit, nous présentons le problème et nous montrons ensuite comment notre librairie [Diamant](#) peut être appliquée à ce type de problèmes.

### 7.9.1 Présentation générale du problème

Il s'agit de résoudre les problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes rencontrés lors de l'étude des propriétés modales des structures mécaniques comportant des parties viscoélastiques (cf. § [2.3.3](#)). Le comportement vibratoire de ces structures est décrit par le problème résiduel suivant :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}, \omega) = \left[ \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega) - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{U} = 0, \quad (7.35)$$

où  $\mathbf{K}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de rigidité de la partie élastique de la structure,  $\mathbf{K}_v(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est la matrice de rigidité de sa partie viscoélastique qui dépend de la fréquence d'excitation  $\omega$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de masse de la structure et  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^n$  est le mode de vibration complexe. Rappelons encore que les valeurs propres complexes de ce problème permettent de déterminer les fréquences de résonance et les facteurs d'amortissement associés qui sont deux paramètres importants pour les ingénieurs lors de la conception des structures (cf. § [2.3.3](#)).

Dans ce paragraphe, nous présentons l'utilisation de la librairie [Diamant](#) pour améliorer les méthodes de [Daya et Potier-Ferry \(2001\)](#) et de [Duigou et al. \(2003\)](#). Rappelons que

toutes ces techniques de résolution des problèmes non linéaires aux valeurs propres sont basées sur la méthode de perturbation et celle de l'homotopie et se composent de trois algorithmes. Ces algorithmes sont présentés en détail dans la thèse de [Duigou \(2002\)](#) et dans le mémoire d'habilitation à diriger les recherches de [Daya \(2003\)](#). Ces techniques sont cependant limitées à un cas particulier du problème (7.35) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}, \omega) = \left[ \mathbf{K}_e + \hat{E}(\omega)\mathbf{K}_v - \omega^2\mathbf{M} \right] \mathbf{U} = 0, \quad (7.36)$$

où  $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante,  $\hat{E}(\omega)$  est le module de Young complexe dépendant de la fréquence du matériau VE. Cette écriture n'est valable que dans le cas des matériaux VE isotropes pour lesquelles le coefficient de Poisson est indépendant de  $\omega$ . Plusieurs travaux comme celui de [Kergourlay \(2004\)](#) ont cependant montré que cette hypothèse de coefficient de Poisson constant est valide et de plus le coefficient de Poisson est un nombre réel. Le souci majeur de ces méthodes est la différentiation d'ordre élevé manuelle de la fonction  $\hat{E}(\omega)$ . Cette tâche manuelle non triviale justifie probablement pourquoi ces méthodes de résolution sont très peu utilisées. A cette difficulté s'ajoutent toutes les difficultés de différentiation d'ordre élevé liées à l'utilisation de la MAN. Nous reprenons le problème (7.35) que nous écrivons sous la forme générique suivante :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}, \omega) = \mathbf{T}(\omega)\mathbf{U} = 0, \quad (7.37)$$

où  $\mathbf{T}(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est une fonction matricielle de  $\omega$ . Notre objectif est de faire en sorte que, tout ce que l'utilisateur a à faire soit de coder  $\mathbf{T}(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  quelles que soient la technique de discrétisation et les lois de comportement utilisées.

### 7.9.2 Transformation d'homotopie

L'idée générale des algorithmes de Newton d'ordre élevé utilisé dans les travaux de [Daya et Potier-Ferry \(2001\)](#) et [Duigou \*et al.\* \(2003\)](#) est l'écriture du problème résiduel  $\mathcal{R}(\mathbf{U}, \omega)$  sous la forme :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}, \omega) = \mathbf{L}_t(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \omega - \omega_0) + \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \omega - \omega_0) + \mathbf{R}_0 = 0, \quad (7.38)$$

où  $\mathbf{L}_t(\cdot)$  est l'opérateur linéaire tangent en  $(\mathbf{U}_0, \omega_0)$ ,  $\mathbf{R}_0 = \mathcal{R}(\mathbf{U}_0, \omega_0)$ ,  $\mathbf{F}^{nl}(\cdot)$  est un opérateur non linéaire,  $(\mathbf{U}_0, \omega_0)$  est la solution d'essai. On applique ensuite une transformation d'homotopie à l'équation (7.38) comme suit :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \omega - \omega_0) + \mathbf{F}^{nl}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \omega - \omega_0) + a\mathbf{R}_0 = 0, \quad (7.39)$$

où  $a$  est le paramètre de chemin.

### 7.9.3 Comment utiliser Diamant pour résoudre ce problème ?

#### Mise en œuvre théorique

L'équation résiduelle (7.37) peut s'écrire :

$$\mathbf{L}\Delta\mathbf{U} + \mathbf{G}\mathbf{U}_0\Delta\omega + \Delta\mathbf{T}\Delta\mathbf{U} + [\Delta\mathbf{T} - \mathbf{G}\Delta\omega]\mathbf{U}_0 + \mathbf{R}_0 = 0, \quad (7.40)$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{L} = \mathbf{T}(\omega_0), \quad \mathbf{G} = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\omega}(\omega_0), \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{T}(\omega_0)\mathbf{U}_0, \\ \Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \Delta\mathbf{T} = \mathbf{T}(\omega) - \mathbf{T}(\omega_0). \end{cases} \quad (7.41)$$

L'équation (7.40) étant sous-déterminée, une équation supplémentaire normalisant le mode est ajoutée comme suit (Daya et Potier-Ferry, 2001) :

$$\mathbf{U}_0^\top \mathbf{G}^\top \Delta \mathbf{U} = 0. \quad (7.42)$$

Le problème, ainsi bien posé, se résume alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{G}\mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_0^\top \mathbf{G}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta \mathbf{T} \Delta \mathbf{U} - \mathbf{F}^l \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.43)$$

où  $\mathbf{F}^l = [\Delta \mathbf{T} - \mathbf{G} \Delta \omega] \mathbf{U}_0 + \mathbf{R}_0$ . Nous appliquons maintenant la transformation d'homotopie à l'équation (7.43) en multipliant  $\mathbf{F}^l$  par le paramètre de chemin  $a$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{G}\mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_0^\top \mathbf{G}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta \mathbf{T} \Delta \mathbf{U} - a \mathbf{F}^l \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.44)$$

En insérant les coefficients de Taylor  $\mathbf{U}_k$ ,  $\omega_k$  et  $\mathbf{T}_k$  tels que

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^K a^k \mathbf{U}_k, \quad \omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^K a^k \omega_k, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \sum_{k=1}^K a^k \mathbf{T}_k, \quad (7.45)$$

dans l'équation (7.44), les problèmes à l'ordre 1 et à l'ordre  $k$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{G}\mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_0^\top \mathbf{G}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{R}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (7.46)$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{G}\mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_0^\top \mathbf{G}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \omega_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_k \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (7.47)$$

avec

$$\mathbf{F}_k = -(\mathbf{T}\mathbf{U})_k - \mathbf{T}_{k-1}\mathbf{U}_0 + \mathbf{G}\mathbf{U}_0\omega_{k-1}, \quad (7.48)$$

où  $(\mathbf{T}\mathbf{U})_k$  est le  $k^{\text{ième}}$  coefficient de Taylor de  $\mathbf{T}(\omega)\mathbf{U}$  pour  $\mathbf{T}_k = 0$  et  $\mathbf{U}_k = 0$ . Rappelons que les  $\mathbf{T}_k$  sont les coefficients de Taylor de  $\mathbf{T}(\omega)$ .

Une fois que tous les coefficients de Taylor  $\mathbf{U}_k$  et  $\omega_k$  sont déterminés, une nouvelle solution initiale  $(\mathbf{U}_0, \omega_0)$  est calculée à partir des formules (7.45) pour  $a = 1$ . On calcule alors le résidu défini par :

$$r = \|\mathbf{T}(\omega_0)\mathbf{U}_0\|. \quad (7.49)$$

Si le résidu est inférieur à une précision donnée ( $10^{-8}$  par exemple), on arrête les itérations. Sinon, on recommence les calculs de séries en partant de la dernière solution initiale  $(\mathbf{U}_0, \omega_0)$  calculée. L'itéré initial  $(\mathbf{U}_0, \omega_0)$  est la solution du problème  $[\mathbf{K}_e - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0$  décrivant les vibrations libres de la structure non amortie.

La question qui se pose alors est comment utiliser notre librairie [Diamant](#) MATLAB Toolbox pour résoudre ce problème non linéaire. C'est ce que nous allons découvrir dans la suite.

### Mise en œuvre avec Diamant

Pour pouvoir utiliser [Diamant](#) MATLAB Toolbox, la valeur propre complexe  $\omega$  est initialisée par  $\omega_0$  (solution du problème linéaire) comme un objet de type `taylorcoef`. Les matrices  $\mathbf{L} = \mathbf{T}(\omega_0)$  et  $\mathbf{G} = \mathbf{T}'(\omega_0)$  sont dès lors automatiquement calculées lors de la différentiation au premier ordre du code de  $\mathbf{T}(\omega)$ . De la même manière, le second terme  $\mathbf{F}_k$  de l'équation (7.47) s'obtient aussi automatiquement au travers des coefficients

de Taylor  $\mathbf{U}_k$ ,  $\omega_k$  et  $\mathbf{T}_k$  comme le montre la formule (7.48). Ainsi, en posant :

$$\mathbf{L}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{G}\mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_0^\top \mathbf{G}^\top & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_k \\ \omega_k \end{Bmatrix}, \quad (7.50)$$

l'algorithme de résolution du problème générique non linéaire aux valeurs propres (7.37) pour chaque branche de la MAN (itération) s'écrit ainsi :

---

**Calcul des séries**

Construction de  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{G}$  en utilisant la DA sur  $\mathbf{T}(\omega)$

Construction et décomposition de  $\mathbf{L}_t$  (cf. formule (7.50))

ORDRE 1 :

Calcul de  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{L}\mathbf{U}_0$

Résolution de  $\mathbf{L}_t \mathbf{V}_1 = \{-\mathbf{R}_0, 0\}^\top$

Calcul de  $\mathbf{T}_1$  en évaluant  $\mathbf{T}(\omega)$

ORDRE  $k = 2, \dots, K$  :

1. Calcul du coefficient de Taylor  $\mathbf{F}_k$  par la formule (7.48)

2. Résolution de  $\mathbf{L}_t \mathbf{V}_k = \{\mathbf{F}_k, 0\}^\top$

3. Calcul de  $\mathbf{T}_k$  en évaluant  $\mathbf{T}(\omega)$

**Fin de calcul des séries**

---

TAB. 7.3 – Algorithme Diamant pour les problèmes non linéaire aux valeurs propres.

### 7.9.4 Applications et mesures de performances

Nous considérons dans ce paragraphe quelques exemples de problèmes aux valeurs propres afin de mesurer les performances de l'outil [Diamant](#) sur les problèmes non linéaires aux valeurs propres. Nous étudions trois problèmes.

#### Problème 1

Considérons le problème non linéaire aux valeurs propres défini par :

$$\mathbf{T}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \exp(-\omega) - \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.51)$$

Nous démarrons les itérations par les solutions du problème linéaire aux valeurs propres :

$$\mathbf{T}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.52)$$

qui sont :

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} -0.8507 & 0.5257 \\ 0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{Bmatrix} -0.2361 \\ 4.2361 \end{Bmatrix}. \quad (7.53)$$

à  $10^{-4}$  près. Chaque colonne de  $\mathbf{U}_0$  correspond à un vecteur propre. Pour les calculs des branches de la MAN, nous avons utilisé les résultats de  $\mathbf{U}_0$  et de  $\omega_0$  calculés à la précision machine.

*Premiers vecteur propre et valeur propre du problème 1*

Le premier vecteur propre et la première valeur propre du problème 1 sont :

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} -0.8921800289124993 \\ 0.4906029938606227 \end{Bmatrix}, \quad \omega = 0.1899363866969615.$$

Cette solution est obtenue avec 2 itérations pour un ordre de la MAN  $K = 15$ . Le résidu correspondant à cette solution est  $\|\mathbf{T}(\omega)\mathbf{U}\| = 0$  à la précision machine.

*Deuxièmes vecteur propre et valeur propre du problème 1*

Le deuxième vecteur propre et la deuxième valeur propre du problème 1 sont :

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} 0.5324705680268852 \\ 0.8461379315218200 \end{Bmatrix}, \quad \omega = 4.272536827707842.$$

Cette solution est obtenue avec 1 itération pour un ordre de la MAN  $K = 15$ . Le résidu correspondant à cette solution est  $\|\mathbf{T}(\omega)\mathbf{U}\| = 4.44 \times 10^{-16}$ .

Nous avons également résolu le même problème en utilisant la méthode d'itération inverse résiduelle de Neumaier (1985) implémentée par Jarlebring (2006) sous le nom `resinv`. Cette méthode dont la convergence n'est pas forcément garantie est souvent utilisée pour ce type de problèmes non linéaires denses et de très petites tailles. Notre approche est implémentée par la fonction `nleig`. Les commandes MATLAB et les sorties pour la deuxième solution du problème 1 sont comme suit :

```

1 >>T=@(s) -s*eye(2,2)+[1 2; 2 3]+[2 3; 0 1]*exp(-s);
2 tic,[V,D,Residu,itercount]=nleig(T,Vi(:,2),Di(2),3),toc %K = 3
3 V =
4     5.324706889852291e-001
5     8.461378505256514e-001
6 D =
7     4.272537052697507e+000
8 Residu =
9     7.052720346337418e-007
10 itercount =
11     1
12 Elapsed time is 0.032053 seconds.% Temps CPU pour nleig avec K = 3
13 >>tic,[V,D,Residu,itercount]=nleig(T,Vi(:,2),Di(2),15),toc %K = 15
14 V =
15     5.324705680268852e-001
16     8.461379315218200e-001
17 D =
18     4.272536827707842e+000
19 Residu =
20     4.440892098500626e-016
21 itercount =
22     1
23 Elapsed time is 0.219338 seconds.% Temps CPU pour nleig avec K = 15
24 >>tic,[V,D,itercount]=resinv(T,4,4),toc,Residu=norm(T(D(1))*V)
25 V =
26     6.292953205272232e-001
27     1.000000000000000e+000
28 D =
29     4.272536866019960e+000
30 itercount =
31     1
32 Elapsed time is 0.006827 seconds.% Temps CPU par resinv de Jarlebring
33 Residu =
34     3.333326145239135e-007
35 >>

```

Pour ce premier problème de très petite taille, la fonction `resinv` semble être plus rapide que notre fonction `nleig`. Nous vérifions encore les performances de l'approche

**Diamant** sur un deuxième problème de taille deux fois plus grande que la taille du premier.

### Problème 2

Le deuxième problème est défini par  $\mathbf{T}(s)\mathbf{U} = 0$  où :

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} -s^2 - 3s + 1 & s^2 - 1 & -s^2 - 3s + 1 & -2s^2 - 6s + 2 \\ s^2 - 1 & -2s^2 - 3s + 5 & s^2 - 1 & 2s^2 - 2 \\ s^2 - 3s + 1 & s^2 - 1 & -2s^2 - 5s + 2 & -4s \\ -2s^2 - 6s + 2 & 2s^2 - 2 & -4s & -9s^2 - 19s + 14 \end{bmatrix}, \quad (7.54)$$

qui se simplifie sous la forme :

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{K}_e + s\mathbf{K}_v - s^2\mathbf{M}. \quad (7.55)$$

Nous commençons les itérations par les valeurs et vecteurs propres du problème linéaire

$[\mathbf{K}_e - s\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0$  qui sont :

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.4910 & 0.0353 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 \\ 0.7365 & 1 & 1 & -0.4706 \\ 0.1317 & 0 & -0.7455 & -0.2824 \end{bmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{Bmatrix} 0.1913 \\ 1 \\ 1.6508 \\ 4 \end{Bmatrix}. \quad (7.56)$$

à  $10^{-4}$  près. Chaque colonne de  $\mathbf{U}_0$  correspond à un vecteur propre. Pour les calculs des branches de la MAN, nous avons utilisé les résultats de  $\mathbf{U}_0$  et de  $\omega_0$  calculés à la précision machine.

Les quatre solutions ci-après du problème 2 sont obtenues par l'approche **Diamant** implémentée par la fonction `nleig`.

*Solution 1 du problème 2*

Le premier vecteur propre et la première valeur propre du problème 2 sont :

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} -0.9860061654848030 \\ 0 \\ 0.7342095726611284 \\ 0.1258982964118373 \end{array} \right\}, \quad \omega = 0.2600689766392304.$$

Résidu  $\|\mathbf{T}(\omega)\mathbf{U}\| = 2.31 \times 10^{-16}$ . Nombre d'itérations : 2.

*Solution 2 du problème 2*

Le deuxième vecteur propre et la deuxième valeur propre du problème 2 sont :

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} -32.41008522269728 \\ 24372.90562802107 \\ 20761.50372197714 \\ 8960.564776860914 \end{array} \right\}, \quad \omega = -8.242640687119286.$$

Résidu  $\|\mathbf{T}(\omega)\mathbf{U}\| = 1.18 \times 10^{-9}$ . Nombre d'itérations : 5.

*Solution 3 du problème 2*

Le troisième vecteur propre et la troisième valeur propre du problème 2 sont :

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{array}{c} 1.223128420472458 \\ 0 \\ 0.5548782017581675 \\ -0.8890033111153127 \end{array} \right\}, \quad \omega = 0.8352403279455242.$$

Résidu  $\|\mathbf{T}(\omega)\mathbf{U}\| = 3.61 \times 10^{-15}$ . Nombre d'itérations : 2.

## Solution 4 du problème 2

Le quatrième vecteur propre et la quatrième valeur propre du problème 2 sont :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.330011264154745 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = 1.$$

Résidu  $\|\mathbf{T}(\omega)\mathbf{U}\| = 2.35 \times 10^{-17}$ . Nombre d'itérations : 3.

Nous proposons ici une comparaison des fonctions `resinv` et `nleig` sur ce problème

2. Les commandes MATLAB et les sorties sont :

```

1 >>T=@(s) [-s^2-3*s+1, s^2-1, -s^2-3*s+1, -2*s^2-6*s+2; ...
2 s^2-1, -2*s^2-3*s+5, s^2-1,2*s^2-2;...
3 s^2-3*s+1, s^2-1, -2*s^2-5*s+2,-4*s;...
4 -2*s^2-6*s+2, 2*s^2-2, -4*s, -9*s^2-19*s+14];
5 >>tic,[V,D,Residu,itercount]=nleig(T,Vi(:,1),Di(1),3),toc %K = 3
6 V =
7     -9.860065641206387e-001
8         3.469999684147938e-017
9         7.342098694509203e-001
10        1.258983473348593e-001
11 D =
12        2.600689754931932e-001
13 Residu =
14        2.956860764480368e-009
15 itercount =
16         2
17 Elapsed time is 0.030732 seconds.% Temps CPU pour nleig avec K = 3
18 >>tic,[V,D,Residu,itercount]=nleig(T,Vi(:,1),Di(1),15),toc %K = 15
19 V =
20     -9.860061556712408e-001
21     -2.525959294855546e-014
22         7.342095709898860e-001
23         1.258982923406217e-001
24 D =
25        2.600688041385817e-001
26 Residu =
27         4.824962549874151e-007
28 itercount =
29         1
30 Elapsed time is 0.220180 seconds.% Temps CPU pour nleig avec K = 15
31 >>tic,[V,D,itercount]=resinv(T,0.4,0.3),toc,Residu=norm(T(D(1))*V)
32 V =

```

```

33      1.0000000000000000e+000
34      -8.235494530728573e-006
35      -7.446571644539988e-001
36      -1.276895624387909e-001
37 D =
38      2.600713473218034e-001
39 itercount =
40      1
41 Elapsed time is 0.041799 seconds.% Temps CPU par resinv de Jarlebring
42 Residu =
43      5.132277958141576e-006

```

Sur ce problème 2, notre fonction `nleig` semble être plus rapide que la fonction `resinv` pour le calcul du premier vecteur propre et de la première valeur propre. En effet, notre fonction basée sur la librairie `Diamant` nécessite 2 pas (2 itérations) de la MAN pour obtenir un résidu de  $2.96 \times 10^{-9}$  en un temps CPU d'environ 0.031 s lorsque l'ordre de la MAN est fixée à  $K = 3$ . Pour une itération, la fonction `resinv` met un temps CPU d'environ 0.042 s pour obtenir un résidu de  $5.13 \times 10^{-6}$ . L'intérêt de l'approche `Diamant` se précise déjà sur ce problème. Après ces validations élémentaires la librairie pour les problèmes non linéaires aux valeurs propres, nous considérons un troisième problème qui est beaucoup plus intéressant pour notre travail.

### Problème 3

Il s'agit de résoudre rigoureusement le problème de vibrations libres de la poutre Verre/PVB/Verre étudiée dans le chapitre 2 (cf. § 2.3.3) :

$$[\mathbf{K}_e + \hat{E}(\omega)\mathbf{K}_v - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0, \quad (7.57)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\mu}(\omega)}{2(1 + \nu)}, \\ \hat{\mu}(\omega) = \mu_\infty + (\mu^0 - \mu_\infty) \left[ 1 + (i\omega\tau^0)^{1-\alpha} \right]^{-\beta}, \end{cases} \quad (7.58)$$

où  $\mu_\infty = 2.35 \times 10^8$  Pa,  $\mu^0 = 4.79 \times 10^5$  Pa,  $\alpha = 0.46$ ,  $\beta = 0.1946$ ,  $\tau^0 = 0.3979$ ,  $\nu_2 = 0.4$ . La longueur et la largeur de la poutre sont respectivement  $L = 1$  m et  $b = 0.1$  m. Les couches en verre ont un module de Young  $E = 64.5$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu_1 = \nu_3 = 0.22$  et une densité  $\rho_1 = \rho_3 = 2737$  kg m<sup>-3</sup>. La densité du PVB est  $\rho_2 = 999$  kg m<sup>-3</sup>. Les épaisseurs des couches sont  $h_1 = h_3 = 5$  mm pour les couches en verre et  $h_2 = 0.76$  mm pour la couche en PVB. La poutre est modélisée par l'élément fini présenté dans la section 2.3.3. Les résultats ci-après sont obtenus pour un maillage à 100 éléments de la poutre. La poutre est encadrée à ses deux extrémités. Rappelons que les valeurs propres complexes  $\omega^2$  obtenues permettent de déterminer les fréquences propres  $\Omega$  et les facteurs de perte  $\eta$  associés par la relation de DiTaranto et McGraw (1969) :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta). \quad (7.59)$$

Dans l'article Koutsawa et Daya (2007) nous étions limités à l'usage d'un module de cisaillement complexe constant du PVB pour étudier les propriétés modales des poutres sandwich Verre/PVB/Verre. Grâce à l'aide apportée par Diamant dans le calcul des coefficients de Taylor, nous travaillons maintenant avec un module dépendant de la fréquence. Nous avons résolu ce problème pour un module constant  $\hat{E}(\omega) = \hat{E}(1000)$  puis avec l'approche Diamant en considérant le comportement réel de PVB défini par  $\hat{E}(\omega)$ . Les résultats comparés de ces deux approches sont résumés dans le tableau 7.4. Les résultats pour module complexe constant sont obtenus en utilisant la fonction "eig" de MATLAB avec un temps CPU d'environ 10 secondes pour le calcul de tous les modes. Avec l'approche Diamant, les résidus présentés dans le tableau 7.4 sont obtenus avec un pas de la MAN et un ordre  $K = 15$ . Chaque mode a nécessité environ 30 secondes de temps CPU. Le tableau 7.5 montre les écarts entre les valeurs obtenues pour un module constant et le module complet.

Nous avons également résolu le problème complet en utilisant la technique de la bande

Modes	Module constant		Module complet $\hat{E}(\omega)$			
	$\Omega$ (Hz)	$\eta \times 10^2$	$\Omega$ (Hz)	$\eta \times 10^2$	Itérations	Résidu
1	53.87	0.653	53.74	0.910	1	$2.99 \times 10^{-6}$
2	145.62	1.33	145.27	1.368	1	$1.02 \times 10^{-6}$
3	277.50	2.08	278.41	1.798	1	$5.88 \times 10^{-7}$
4	445.11	2.86	448.61	2.200	1	$3.78 \times 10^{-7}$
5	643.54	3.61	651.98	2.580	1	$4.63 \times 10^{-7}$

TAB. 7.4 – Résultats comparés pour la poutre encastree.

Modes	Ecart (%) Réf. module complet	
	$\Omega$	$\eta$
1	0.242	28.24
2	0.241	2.78
3	0.269	15.67
4	0.780	29.98
5	1.295	39.90

TAB. 7.5 – Ecart entre les résultats des modules constant et complet.

passante à -3 dB (Soni, 1981). Rappelons que cette technique est basée sur les courbes de réponse fréquence-amplitude. Les résultats sont comparés dans le tableau 7.6. Ces résultats révèlent la pertinence de cette nouvelle approche pour résoudre de façon exacte les problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes.

Modes	Approche Diamant		Méthode directe Soni (1981)	
	$\Omega$ (Hz)	$10^2 \times \eta$	$\Omega$ (Hz)	$10^2 \times \eta$
1	53.74	0.91	53.76	0.91
2	145.27	1.37	145.30	1.38
3	278.39	1.80	278.46	1.80
4	448.59	2.21	448.85	2.21
5	651.92	2.58	652.25	2.56

TAB. 7.6 – Fréquences de résonance et facteur de perte par les deux méthodes.

Les résultats des tableaux 7.4 et 7.5 montrent la différence entre l'approche du module complexe constant et l'usage du module complexe dépendant de la fréquence du PVB. Si l'écart entre les résultats n'est pas très important pour les fréquences de résonance (erreur maximum <1.5%), il n'en est pas de même pour les facteurs d'amortissement. Pour ces derniers, le tableau 7.5 nous montre des écarts compris entre 3 et 40%, ce

qui est relativement important. L'avantage de l'utilisation de la librairie **Diamant** est encore une fois démontrée pour résoudre ce problème non linéaires aux valeurs propres qui constitue un grand challenge dans plusieurs domaines de la physique et de la mécanique (vibrations des structures VE, interaction fluide-structure etc.). Il suffit à l'utilisateur de coder  $\mathbf{T}(\omega)$  quelles que soient la méthode de discrétisation et les lois de comportement utilisées. L'utilisateur ne se pose plus la question sur la différentiation au haut degré de  $\hat{E}(\omega)$  et celle dans la MAN comme ce fut le cas dans les travaux de [Daya et Potier-Ferry \(2001\)](#) et de [Duigou et al. \(2003\)](#). La présente approche est capable de traiter le cas de n'importe quelle fonction  $\mathbf{T}(\omega)$  suffisamment régulière.

### 7.9.5 Sur le calcul et le stockage des coefficients de Taylor

D'après l'algorithme présenté dans le tableau [7.3](#), il faut évaluer et stocker les coefficients de Taylor  $\mathbf{T}_i$  de  $\mathbf{T}(\omega)$ . Dans la pratique, pour les problèmes de vibrations libres des structures VE (voir problème 3), il est toujours possible d'écrire  $\mathbf{T}(\omega)$  sous la forme :

$$\mathbf{T}(\omega) = \mathbf{K}_e + \sum_{l=1}^N \hat{E}_l(\omega) \mathbf{K}_{vl} - \omega^2 \mathbf{M}, \quad (7.60)$$

où  $\mathbf{K}_e$ ,  $\mathbf{K}_{vl}$  et  $\mathbf{M}$  sont des matrices réelles constantes, même si la loi de comportement du matériau VE est anisotrope. A titre d'exemple, si le matériau VE est orthotrope, on a  $N \leq 9$ . En conséquence, le problème de calcul et de stockage des coefficients de Taylor  $\mathbf{T}_i$  de  $\mathbf{T}(\omega)$  se ramène au calcul et stockage des coefficients de Taylor  $E_{li}$  ( $l = 1, \dots, N; i = 1, \dots, K$ ) des fonctions scalaires complexes  $\hat{E}_l(\omega)$  et des coefficients de Taylor  $\omega_i$  de  $\omega$ . Il s'en suit que l'utilisation des versions **Diamant1** et **Diamant2** se fait au travers de la différentiation des codes des fonctions scalaires complexes  $\hat{E}_l(\omega)$ . Ainsi, pour les problèmes de vibrations libres linéaires des structures sandwich de très grande taille, il n'y a aucune crainte pour le calcul et le stockage des coefficients de Taylor  $\mathbf{T}_i$  de la fonction matricielles  $\mathbf{T}(\omega)$ .

Nous présentons dans la section [7.10](#) une dernière application de notre librairie de

surcharge d'opérateurs [Diamant](#) MATLAB Toolbox. Cette application est un peu différente des deux précédentes. Elle nous permet toutefois de montrer une autre possibilité d'utilisation de la librairie.

## 7.10 Diamant : surface de charge des nanomatériaux poreux

Il s'agit d'étudier la surface de charge des matériaux contenant des nano-particules avec une géométrie ellipsoïdale. Nous avons présenté dans le chapitre 6 une approche pour déterminer efficacement les propriétés effectives de ces types de matériaux composites. Ces nanocomposites exhibent un fort effet de taille lié à la prépondérance de l'énergie de surface/interface résultant du fort rapport surface/volume à l'échelle nanométrique. L'exemple ci-dessous porte sur l'aluminium contenant des nano-pores. L'équation de la surface d'écoulement d'un tel matériau est donnée dans le cas général par [Zhang et Wang \(2007\)](#) :

$$F(\Sigma) = -\frac{3}{\varphi_3} \left( \frac{\mu_3}{\sigma_{y0}} \right)^2 \Sigma : \frac{\partial \mathbf{M}^{\text{eff}}}{\partial \mu_3} : \Sigma - 1 = 0, \quad (7.61)$$

où  $\varphi_3$  est la fraction volumique de la matrice d'aluminium,  $\mu_3$  est son module de cisaillement,  $\sigma_{y0}$  est sa limite d'écoulement,  $\Sigma$  est la contrainte de chargement,  $\mathbf{M}^{\text{eff}} = (\mathbf{C}^{\text{eff}})^{-1}$  est l'inverse du tenseur des modules élastiques du matériau nano-poreux contenant les effets de taille et d'excès d'énergie de surface. Dans le cas d'une configuration isotrope, c'est-à-dire lorsque les nano-pores sont sphériques avec des interfaces supposées isotropes, l'équation de la surface d'écoulement se simplifie :

$$F(\Sigma) = \frac{\Sigma_e^2}{A^2 \sigma_{y0}^2} + \frac{\Sigma_m^2}{B^2 \sigma_{y0}^2} - 1, \quad (7.62)$$

avec

$$\begin{cases} A^2 &= \left[ \frac{1}{\varphi_3} \left( \frac{\mu_3}{\mu^{\text{eff}}} \right)^2 \frac{\partial \mu^{\text{eff}}}{\partial \mu_3} \right]^{-1}, & B^2 &= \left[ \frac{3}{\varphi_3} \left( \frac{\mu_3}{\kappa^{\text{eff}}} \right)^2 \frac{\partial \kappa^{\text{eff}}}{\partial \mu_3} \right]^{-1}, \\ \Sigma_e &= \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma^{\text{d}} : \Sigma^{\text{d}}}, & \Sigma_{ij}^{\text{d}} &= \Sigma_{ij} - \Sigma_m \delta_{ij}, & \Sigma_m &= \frac{1}{3} \text{tr}(\Sigma). \end{cases} \quad (7.63)$$

Même si l'on est dans une configuration isotrope, les modules effectifs  $\kappa^{\text{eff}}$  et  $\mu^{\text{eff}}$  n'admettent pas forcément des solutions analytiques puisqu'ils sont obtenus d'une manière itérative à partir de la résolution d'un système d'équations non linéaires (cf. § 3.2.2). En utilisant la différentiation à l'ordre 1 de [Diamant](#), nous pouvons directement associer au calcul de  $\mathbf{M}^{\text{eff}}$  le calcul de  $\partial \mathbf{M}^{\text{eff}} / \partial \mu_3$ . Les quantités  $\partial \mu^{\text{eff}} / \partial \mu_3$  et  $\partial \kappa^{\text{eff}} / \partial \mu_3$  sont ainsi calculés automatiquement au cours de la résolution du système d'équations non linéaires permettant d'obtenir  $\kappa^{\text{eff}}$  et  $\mu^{\text{eff}}$  (cf. § 6.3). Les dérivées ainsi calculées sont exactes car on dérive le code et donc le modèle micromécanique choisi. On n'utilise pas un autre modèle pour approcher ces dérivées. Il est important de noter que [Zhang et Wang \(2007\)](#) ont déjà traité ce problème en utilisant le modèle de [Duan et al. \(2005b\)](#); ce modèle est basé sur celui de [Mori et Tanaka \(1973\)](#) où des solutions analytiques existent pour les modules effectifs  $\kappa^{\text{eff}}$  et  $\mu^{\text{eff}}$ . En utilisant la librairie [Diamant](#), il est simple de dériver facilement et exactement les modules effectifs  $\kappa^{\text{eff}}$  et  $\mu^{\text{eff}}$  par rapport à un paramètre du modèle même si l'on utilise des formules implicites pour les calculer (cf. § 3.2.2).

Nous reprenons les propriétés de surfaces de l'aluminium du tableau 6.1 pour les calculs numériques de cet exemple. La figure 7.4 montre la surface d'écoulement de l'aluminium nano-poreux pour une fraction volumique de 10% de vides. Sur la figure, Cas 1 correspond à la surface B du tableau 6.1 tandis que Cas 2 représente la surface A. Le résultat classique est le résultat obtenu en ignorant les effets de taille et d'énergie de surface. La surface de charge se dilate dans les cas 1 alors qu'elle se rétrécit pour le cas 2 lorsque la taille des nano-pores diminue. Dans les deux cas, les résultats se rapprochent du résultat classique lorsque la taille des nano-pores augmentent. L'outil [Diamant](#) nous a ainsi permis d'étudier

l'effet de taille sur la surface d'écoulement de ces types de matériaux.

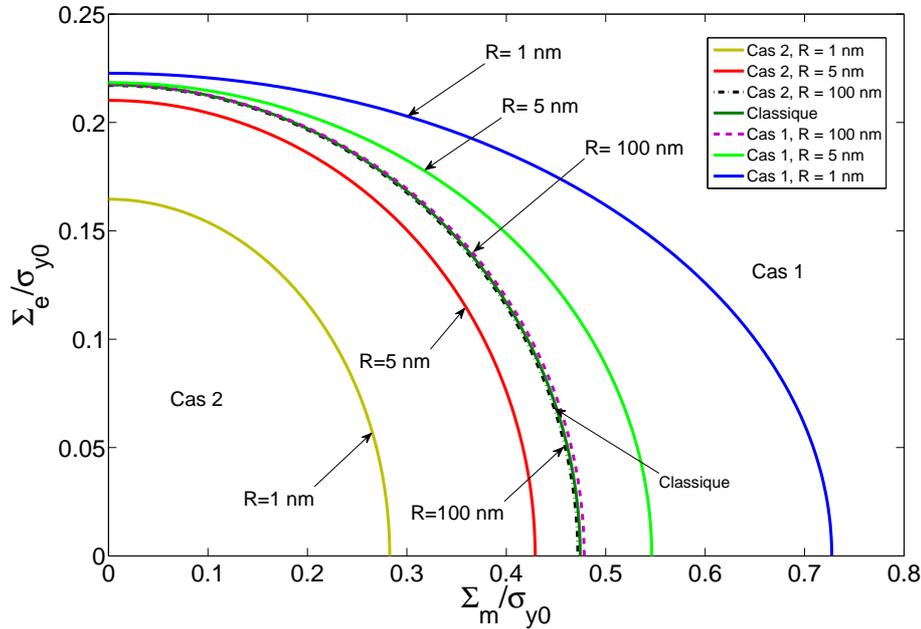


FIG. 7.4 – Surface de charge pour  $\varphi_1 = 10\%$  de nano-pores.

## 7.11 Conclusions

Les applications que nous venons de présenter montrent l'intérêt de la différentiation automatique en général et de la librairie **Diamant** MATLAB Toolbox en particulier pour les résolutions de la MAN et pour d'autres types de problèmes. Nous avons maintenant à notre disposition un outil pour résoudre plusieurs classes de problèmes non linéaires, en particulier les problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. Pour finir, il est important de signaler que d'autres études complémentaires sont en cours sur la recherche des bases de projection des problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes afin de réduire la taille et donc le temps de calcul pour des problèmes creux et de très grandes tailles. L'outil **Diamant** est utilisé dans le chapitre 8 pour étudier l'effet des microstructures du verre et du PVB sur les propriétés modales du sandwich Verre/PVB/Verre.

# CHAPITRE 8

## VERS LA CONCEPTION HIÉRARCHIQUE DES PARE-BRISES

**D**ans ce chapitre, nous montrons, dans un cadre de modélisation multi-échelle, les effets de la microstructure des matériaux des couches du sandwich Verre/PVB/Verre sur ses propriétés modales et acoustiques. La microstructure avec des hétérogénéités ayant une rigidité négative et celle avec des hétérogénéités aux interfaces imparfaites se révèlent idéales pour améliorer de façon significative les propriétés vibratoires et acoustiques de la structure. Nous montrons ensuite comment peut-on concevoir la microstructure des couches des matériaux de la structure Verre/PVB/Verre pour atteindre simultanément plusieurs objectifs pour la structure Verre/PVB/Verre en service.

## Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>311</b>
<b>8.2</b>	<b>Effet de la microstructure sur les propriétés modales</b>	<b>313</b>
8.2.1	Microstructure avec des micro-pores sphériques	314
8.2.2	Microstructure avec des inclusions à rigidité négative	320
8.2.3	Microstructure avec des interfaces imparfaites	323
<b>8.3</b>	<b>Effet de la microstructure sur les propriétés acoustiques</b>	<b>326</b>
8.3.1	Microstructure avec des micro-pores sphériques	327
8.3.2	Microstructure avec des inclusions à rigidité négative	327
8.3.3	Microstructure avec des interfaces imparfaites	329
<b>8.4</b>	<b>Conception de la microstructure : problème inverse</b>	<b>332</b>
8.4.1	Loi de mélange (LM) pour les structures multicouches	334
8.4.2	Exemple de problème d'optimisation et solution	337
8.4.3	Analyse des résultats	338
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>339</b>

---

## 8.1 Introduction

Les études paramétriques que nous avons faites dans le chapitre 2 nous ont permis d'identifier les principaux paramètres qui jouent un rôle important dans les comportements statique, vibratoire et acoustique des structures Verre/PVB/Verre. Ensuite nous avons montré que les propriétés mécaniques des matériaux (modules de Young et de cisaillement) influencent plus le comportement global du sandwich que les paramètres géométriques. Malheureusement, il n'est toujours pas évident de trouver les matériaux appropriés pour atteindre le niveau d'amortissement souhaité lors de la conception d'une structure donnée. C'est ainsi que nous avons annoncé qu'il serait alors intéressant de penser à intégrer la conception des matériaux dans la conception des structures. A cet effet, les chapitres 3, 4 et 6 nous ont permis d'explorer certaines voies pour améliorer les propriétés élastiques ou viscoélastiques des matériaux composites en leur ajoutant des hétérogénéités. Dans tous ces chapitres, nous nous sommes volontairement limités juste à la modification de la microstructure de ces composites et ensuite à calculer leurs propriétés effectives. L'effet concret de la modification de la microstructure des matériaux au niveau macroscopique de la structure (propriétés modales du Verre/PVB/Verre ou propriétés acoustiques par exemple) n'est pas encore étudié. Ainsi, l'objectif de ce chapitre, est de montrer sur l'exemple simple d'une structure sandwich Verre/PVB/Verre, les effets de la microstructure des matériaux sur les comportements vibratoire et acoustique de ce type de structure. Il s'agit en quelque sorte d'une modélisation multi-échelle de la structure Verre/PVB/Verre comme l'illustre la figure 8.1. Pour finir, nous montrons sur un exemple simple et concret, comment l'on peut concevoir les microstructures des matériaux de la structure sandwich Verre/PVB/Verre pour répondre simultanément à plusieurs objectifs de conception en résolvant un problème inverse d'optimisation.

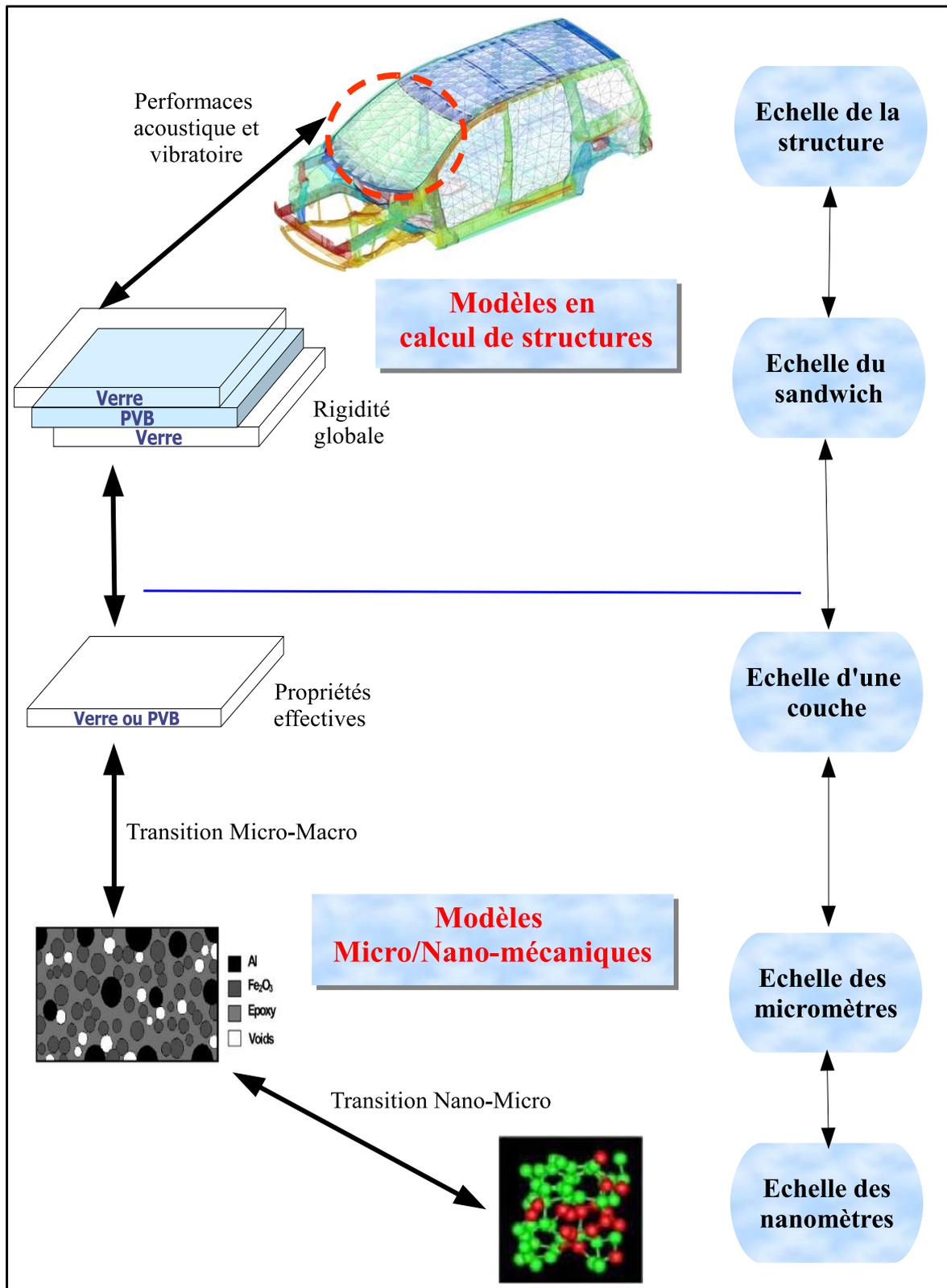


FIG. 8.1 – Visualisation des échelles de modélisation.

## 8.2 Effet de la microstructure sur les propriétés modales

Nous considérons une fois encore le problème de vibrations libres de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre étudiée dans le chapitre 2 (cf. § 2.3.3) :

$$\left[ \mathbf{K}_e + \hat{E}(\omega)\mathbf{K}_v - \omega^2\mathbf{M} \right] \mathbf{U} = 0, \quad (8.1)$$

où les caractéristiques du matériau viscoélastique (PVB) sont données à 20°C par :

$$\begin{cases} \hat{E}(\omega) &= \frac{\hat{\mu}(\omega)}{2(1+\nu)}, \\ \hat{\mu}(\omega) &= \mu_\infty + (\mu^0 - \mu_\infty) \left[ 1 + (i\omega\tau^0)^{1-\alpha^0} \right]^{-\beta^0}. \end{cases} \quad (8.2)$$

et  $\mu_\infty = 2.35 \times 10^8$  Pa,  $\mu^0 = 4.79 \times 10^5$  Pa,  $\alpha^0 = 0.46$ ,  $\beta^0 = 0.1946$ ,  $\tau^0 = 0.3979$ ,  $\nu_2 = 0.4$ . La longueur et la largeur de la poutre sont respectivement  $L = 1$  m et  $b = 0.1$  m. Les couches en verre ont un module de Young  $E = 64.5$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu_1 = \nu_3 = 0.22$  et une densité  $\rho_1 = \rho_3 = 2737$  kg m<sup>-3</sup>. La densité du PVB est  $\rho_2 = 999$  kg m<sup>-3</sup>. La poutre est modélisée par l'élément fini présenté dans la section 2.3.3 (Koutsawa et Daya, 2007). Les épaisseurs sont  $h_1 = h_3 = 5$  mm pour les couches en verre et  $h_2 = 0.76$  mm pour la couche en PVB. Dans tous les calculs qui suivent, nous considérons que la poutre est encadrée en ses deux extrémités. Rappelons encore que les valeurs propres complexes  $\omega^2$  obtenues permettent de déterminer les fréquences propres  $\Omega$  et les facteurs de perte  $\eta$  associés par la relation de DiTaranto et McGraw (1969) :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta). \quad (8.3)$$

Notre objectif est d'étudier l'effet de la microstructure des couches de la structure Verre/PVB/Verre sur les fréquences de résonance  $\Omega$  et les facteurs de perte  $\eta$  qui leur sont associés. En d'autres termes, lorsque nous modifions par exemple la microstructure de la couche en PVB, nous modifions son module de cisaillement  $\hat{\mu}(\omega) = \mu^{\text{eff}}(\omega) [1 + i\eta^{\text{eff}}(\omega)]$

et par conséquent le problème 8.1 se trouve également modifié. Pour y parvenir, nous procédons comme suit :

1. introduire des hétérogénéités dans le PVB et/ou le verre,
2. calculer  $\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega) = \mu^{\text{eff}}(\omega) [1 + i\eta^{\text{eff}}(\omega)]$  pour  $10^{-6} \leq \omega \leq 10^6$  et avec un nombre fini de valeurs de  $\omega$  dans cet intervalle par homogénéisation,
3. approximer les courbes de  $\mu^{\text{eff}}(\omega) = \Re [\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)]$  et  $\eta^{\text{eff}}(\omega) = \Im [\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)] / \Re [\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)]$  par des fonctions analytiques utilisables dans le problème (8.1).

### 8.2.1 Microstructure avec des micro-pores sphériques

Nous montrons l'effet de la microstructure du PVB avec des micro-pores sphériques sur les fréquences propres et les facteurs d'amortissement associés pour la poutre sandwich Verre/PVB/Verre. Lorsque le PVB contient des micro-pores sphériques, les allures des courbes de  $\mu^{\text{eff}}(\omega) = \Re [\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)]$  et de  $\eta^{\text{eff}}(\omega) = \Im [\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)] / \Re [\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)]$  obtenues par l'homogénéisation ne sont pas très différentes des allures des courbes de  $\mu_0(\omega)$  et de  $\eta_0(\omega)$  du PVB pur. Ainsi, après l'homogénéisation de chaque composite étudié, nous déterminons les coefficients  $a_k, b_k, c_k, d_k$  et  $e_k$  ( $k = 1, 2$ ) tels que :

$$\begin{cases} \mu^{\text{eff}}(\omega) &= \Re [\hat{\mu}_1(\omega)], \\ \eta^{\text{eff}}(\omega) &= \frac{\Im [\hat{\mu}_2(\omega)]}{\Re [\hat{\mu}_2(\omega)]}, \\ \hat{\mu}_k(\omega) &= a_k + (b_k - a_k) [1 + (i\omega e_k)^{1-c_k}]^{-d_k}, \quad k = 1, 2. \end{cases} \quad (8.4)$$

Les coefficients  $a_k, b_k, c_k, d_k$  et  $e_k$  ( $k = 1, 2$ ) sont déterminés ici en utilisant la fonction `fit` du `Curve Fitting Toolbox` de MATLAB.

Pour illustrer la démarche, nous considérons du PVB contenant 20% de micro-vides sphériques. Le matériau composite résultant est homogénéisé par notre fonction MATLAB `sphericalMicroVoidedPVB` qui calcule et stocke respectivement dans les vecteurs `mueff` et `keff` les modules de cisaillement et de compressibilité complexes pour toutes

les fréquences contenues dans le vecteur  $\omega$ . Ces vecteurs sont ensuite utilisés pour évaluer les coefficients  $a_k, b_k, c_k, d_k$  et  $e_k$  ( $k = 1, 2$ ) des modèles de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$ .

```
1 >> Inclusion_Volume_Fraction=0.2; omega=logspace(-6,6,50);
2 >>[mueff keff]=sphericalMicroVoidedPVB(Inclusion_Volume_Fraction,omega);
```

Après l'homogénéisation du matériau, nous appelons notre fonction `fitPVBcurves` implémentée comme ci-après :

```
1 function [ceoMu,ceoEta,cfmu,cfeta,varargout]=fitPVBcurves(omega,mueff,...
2                                     varargin)
3 % Curve fitting routine
4 a1=2.35e+8; b1=4.79e+5; c1=0.46; d1=0.1946; e1=0.3979; % Pure PVB
5 RealMu='real(a1+(b1-a1)*(1+(e1*i*x).^(1-c1)).^(-d1))';
6 % Starting point for Mu
7 if nargin>2
8     startPoint1=varargin{1};
9 else
10    startPoint1=[a1 b1 c1 d1 e1];
11 end
12 ImagMu='imag(a1+(b1-a1)*(1+(e1*x*i).^(1-c1)).^(-d1))
13 ./real(a1+(b1-a1)*(1+(e1*i*x).^(1-c1)).^(-d1))';
14 % Starting point for Eta
15 if nargin>3
16    startPoint2=varargin{2};
17 else
18    startPoint2=[a1 b1 c1 d1 e1];
19 end
20 s1 = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares',...
21               'MaxIter',1e+3,...
22               'MaxFunEvals',1e+6,...
23               'TolFun',1e-8,...
24               'TolX',1e-8,...
25               'Startpoint',startPoint1);
26 s2 = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares',...
27               'MaxIter',1e+3,...
28               'MaxFunEvals',1e+6,...
29               'TolFun',1e-8,...
30               'TolX',1e-8,...
31               'Startpoint',startPoint2);
32 f1 = fitype(RealMu,'options',s1);
33 f2 = fitype(ImagMu,'options',s2);
34 cmu=mueff;
35 mu=real(cmu); % Storage moduli
36 eta=imag(cmu)./mu; % Loss factors
37 [cfmu,gofmu] = fit(omega(:),mu(:),f1); % Curve fitting for mu
38 [cfeta,gofeta]= fit(omega(:),eta(:),f2); % Curve fitting for eta
39 coeMu =[cfmu.a1 cfmu.b1 cfmu.c1 cfmu.d1 cfmu.e1]; % Coefs. for mu
```

```

40 coeEta=[cfeta.a1 cfeta.b1 cfeta.c1 cfeta.d1 cfeta.e1]; % Coefs. for eta
41 if nargout>4 % Goodness of fit statistics
42     varargout{1}=gofmu;
43     varargout{2}=gofeta;
44 end

```

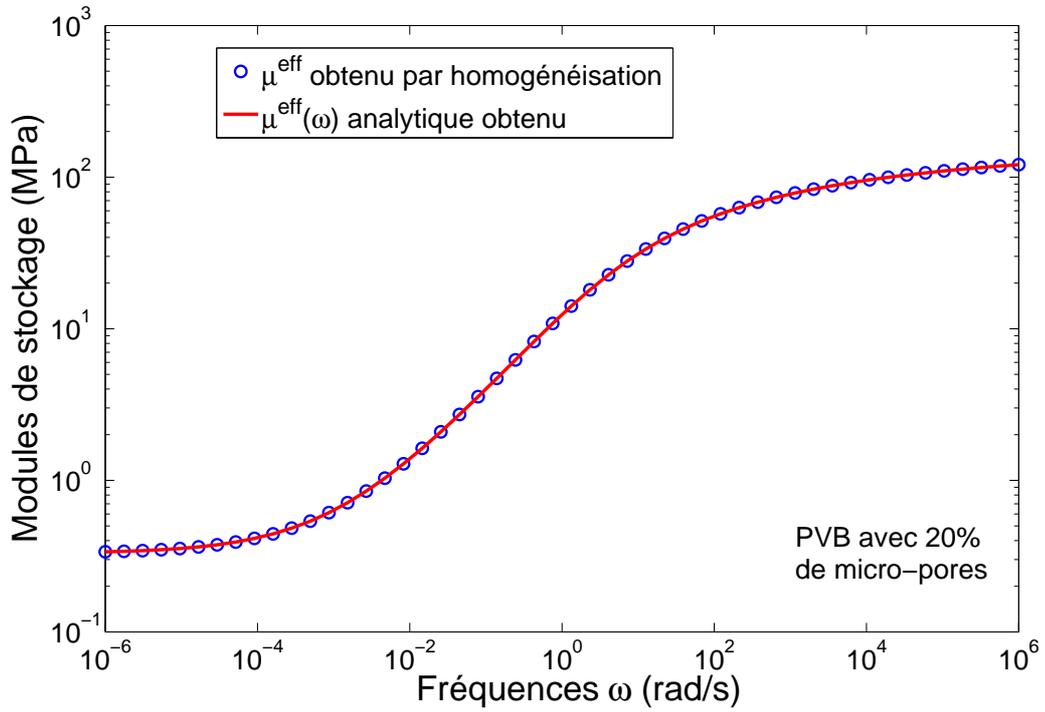
C'est cette dernière fonction MATLAB qui nous permet d'évaluer les coefficients de nos modèles pour  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$ . Pour cet exemple de PVB contenant 20% de micro-pores sphériques, nous obtenons les résultats ci-dessous :

```

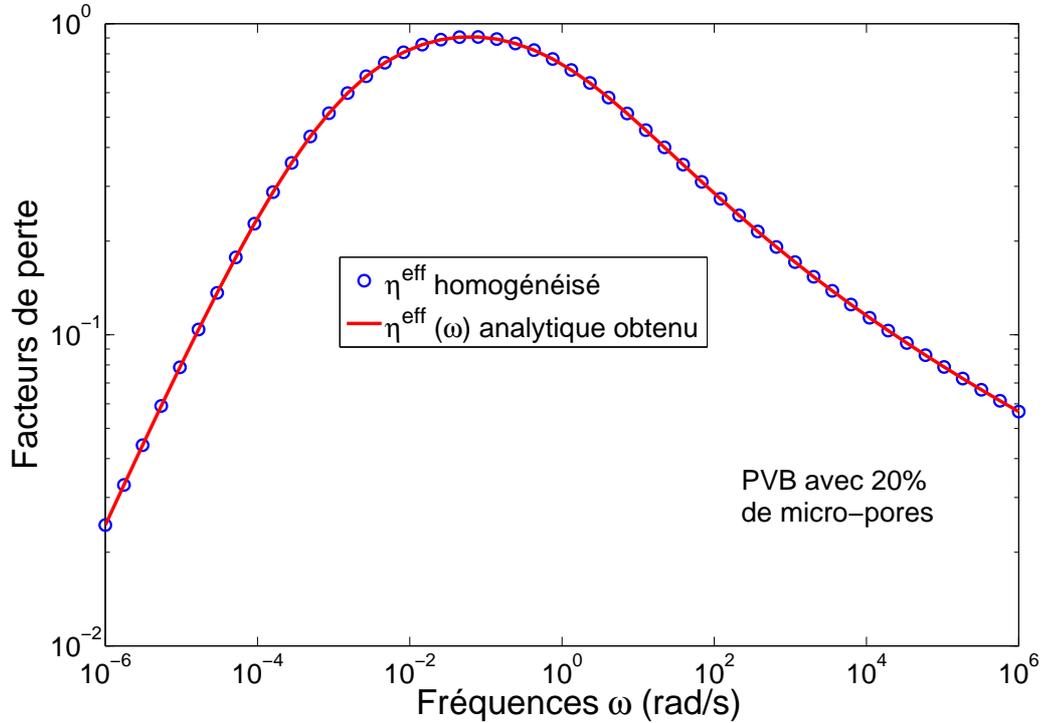
1 >> [coeMu coeEta cfmu cfeta gofmu gofeta]=fitPVBcurves(omega,mueff)
2 coeMu =
3     1.6207e+008  3.3034e+005  0.4600  0.1946  0.3979
4 coeEta =
5     2.3500e+008  4.7900e+005  0.4600  0.1946  0.3979
6 cfmu =
7     General model:
8     cfmu(x) = real(a1+(b1-a1)*(1+(e1*i*x).^(1-c1)).^(-d1))
9     Coefficients (with 95% confidence bounds):
10    a1 =  1.621e+008  (1.621e+008, 1.621e+008)
11    b1 =  3.303e+005  (3.303e+005, 3.303e+005)
12    c1 =           0.46  (0.46, 0.46)
13    d1 =           0.1946  (0.1946, 0.1946)
14    e1 =           0.3979  (0.3979, 0.3979)
15 cfeta =
16     General model:
17     cfeta(x) = imag(a1+(b1-a1)*(1+(e1*x*i).^(1-c1)).^(-d1))
18     ./real(a1+(b1-a1)*(1+(e1*i*x).^(1-c1)).^(-d1))
19     Coefficients (with 95% confidence bounds):
20    a1 =  2.35e+008  (2.35e+008, 2.35e+008)
21    b1 =  4.79e+005  (4.79e+005, 4.79e+005)
22    c1 =           0.46  (0.46, 0.46)
23    d1 =           0.1946  (0.1946, 0.1946)
24    e1 =           0.3979  (0.3979, 0.3979)
25 gofmu =
26     sse: 8.658818020229608e-015
27     rsquare: 1
28     dfe: 45
29     adjrsquare: 1
30     rmse: 1.387148796010452e-008
31 gofeta =
32     sse: 1.480077162261591e-031
33     rsquare: 1
34     dfe: 45
35     adjrsquare: 1
36     rmse: 5.735033008258378e-017

```

Les figures 8.2(a) et 8.2(b) montrent les fonctions analytiques obtenues.



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 8.2 – Modules effectifs homogénéisés et analytiques pour  $\varphi_1 = 20\%$ .

### Coefficients des modèles pour le PVB avec des micro-pores

Le tableau 8.1 contient les coefficients  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  et  $e_k$  ( $k = 1, 2$ ) des modèles pour les modules effectifs  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  définis par (8.4) pour diverses fractions volumiques  $\varphi_1$  des micro-pores sphériques dans le PVB. La particularité du tableau 8.1 est que les coefficients  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $d_2$  et  $e_2$  de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  sont tous identiques à ceux du PVB pur (0% de micro-pores). Ceci veut dire simplement que l'introduction des micro-pores dans le PVB ne modifie pas son module de perte. L'effet des micro-pores concerne essentiellement les modules de stockage.

$\varphi_1$	$\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$	$a_k \times 10^{-8}$	$b_k \times 10^{-5}$	$c_k \times 10$	$d_k \times 10$	$e_k \times 10$
0%	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790
5%	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	2.1466	4.3755	4.6000	1.9460	3.9790
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790
10%	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.9583	3.9917	4.6000	1.9460	3.9790
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790
20%	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.6207	3.3034	4.6000	1.9460	3.9790
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790
30%	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.3936	2.9419	4.3864	1.6784	5.0862
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790
50%	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	0.8370	1.6966	4.6114	1.9622	3.9234
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790
60%	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	0.6349	1.2952	4.6017	1.9484	3.9704
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.6000	1.9460	3.9790

TAB. 8.1 – Les coefficients des modèles de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  : PVB micro-poreux.

### Propriétés modales en fonction de la fraction volumique des micro-pores

Nous utilisons maintenant les modèles dont les coefficients sont présentés dans le tableau 8.1 pour résoudre le problème (8.1) avec  $\hat{\mu}(\omega) = \mu^{\text{eff}}(\omega) [1 + i\eta^{\text{eff}}(\omega)]$  en utilisant notre librairie [Diamant](#) MATLAB Toolbox. Les résultats sont présentés dans le tableau 8.2 pour les trois premières fréquences propres  $\Omega$  et leurs facteurs d'amortissement  $\eta$  associés. Le tableau 8.2 montre que les propriétés modales de la structure sont influencées par la présence des micro-vides dans le matériau viscoélastique (PVB). Cependant, les

améliorations significatives des facteurs de perte modaux sont observés uniquement pour des fractions volumiques élevées des micro-vides. Ainsi, pour les fractions volumiques de 5% et 10%, on obtient une augmentation de  $\eta$  de 9% et 18% respectivement par rapport à celui du PVB pur pour le premier mode. Par contre les fractions volumiques de 50% et 60% conduisent respectivement à une augmentation de  $\eta$  d'environ 147% et 209%. Ces fortes fractions volumiques des micro-pores ne sont généralement pas souhaitables puisqu'elles induisent une réduction significative de la rigidité en flexion, comme cela est indiqué par la diminution correspondante des fréquences de résonance. Par exemple, pour le mode 3, on remarque une diminution d'environ 11% de la fréquence de résonance en passant de 0% à 60% de micro-vides dans le PVB.

	$\varphi_1$	0%	5%	10%	20%	30%	50%	60%
Mode 1	$\Omega$	53.74	53.68	53.60	53.40	53.13	52.25	51.49
	$\eta$	0.9108	0.9894	1.0754	1.2747	1.5215	2.2459	2.8118
Mode 2	$\Omega$	145.27	144.85	144.38	143.25	141.82	137.52	134.11
	$\eta$	1.3683	1.4779	1.5977	1.8704	2.1985	3.1001	3.7439
Mode 3	$\Omega$	278.41	277.10	275.68	272.35	268.28	256.74	248.18
	$\eta$	1.7981	1.9326	2.0766	2.3969	2.7693	3.7199	4.3318

TAB. 8.2 – Propriétés modales en fonction de  $\varphi_1$  des micro-pores.  $\Omega$ (Hz),  $\eta \times 10^2$ .

Comme nous l'avons dit plus haut, l'introduction des micro-pores dans le PVB ne modifie pas son module de perte ; l'effet des micro-pores concerne essentiellement les modules de stockage. L'amélioration des facteurs de perte modaux est plutôt une conséquence de l'assouplissement global de la structure dû aux micro-pores. En effet, la relation de l'énergie de déformation complémentaire ( $U = \sigma_{ij} \sigma_{kl} S_{ijkl}$  où  $\mathbf{S}$  est le tenseur des complaisances du matériau) montre que l'énergie de déformation présente dans un matériau due à une contrainte imposée, augmente avec l'augmentation des  $S_{ijkl}$ . Les micro-vides viennent alors accroître les  $S_{ijkl}$  d'où le comportement global observé dans le tableau 8.2. Pour éviter la réduction significative de la rigidité en flexion liée aux micro-vides, il serait intéressant d'étudier d'autres microstructures qui induisent de manière plus efficace une grande énergie de déformation dans le matériau viscoélastique.

### 8.2.2 Microstructure avec des inclusions à rigidité négative

Le PVB de l'exemple suivant contient des inclusions ayant un comportement de rigidité négative. La notion de rigidité négative est présentée dans la section 3.6.3. Dans cet exemple, nous étudions l'effet du rapport de rigidités  $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$  sur les propriétés modales de la poutre. Nos expérimentations numériques nous ont révélé que le modèle de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  défini par (8.4) n'est plus bien adapté pour cet exemple. En revanche, le modèle de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  défini par (8.4) représente bien les points obtenus par homogénéisation. Ainsi nous modifions le modèle de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  en lui ajoutant un terme constant comme il est suggéré dans le manuel d'utilisation du **Curve Fitting Toolbox** de MATLAB :

$$\begin{cases} \eta^{\text{eff}}(\omega) &= f_2 + \frac{\Im[\hat{\mu}_2(\omega)]}{\Re[\hat{\mu}_2(\omega)]}, \\ \hat{\mu}_2(\omega) &= a_2 + (b_2 - a_2) [1 + (i\omega e_2)^{1-c_2}]^{-d_2}. \end{cases} \quad (8.5)$$

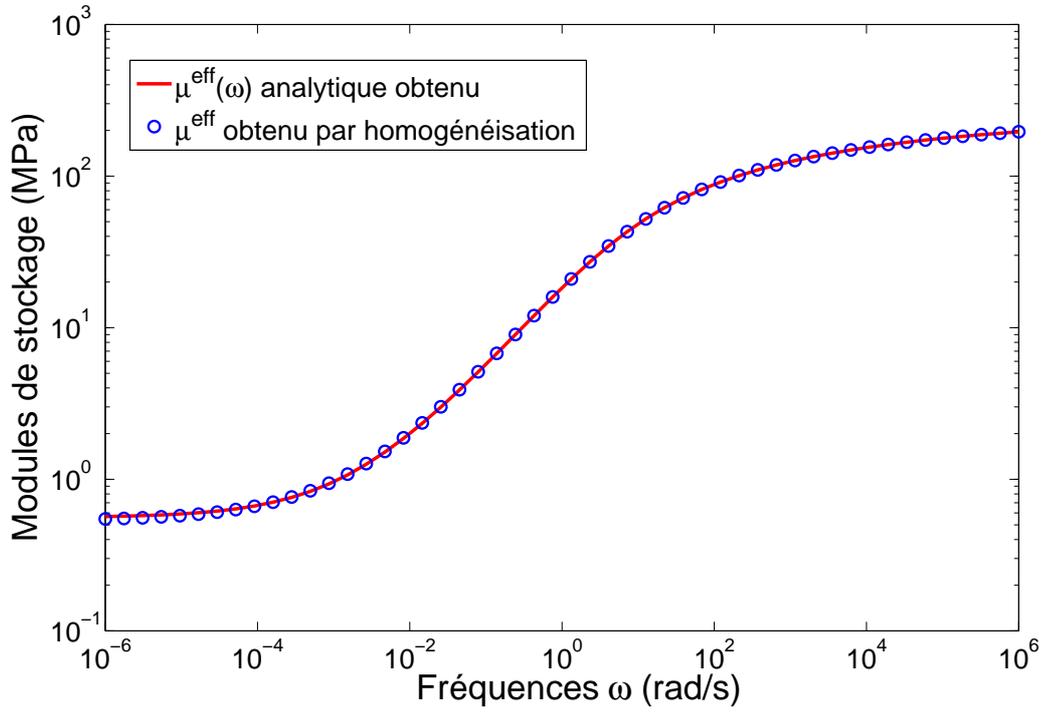
Les figures 8.3(a) et 8.3(b) présentent les courbes obtenues pour  $r = -2.75$  avec une fraction volumique des inclusions  $\varphi_1 = 2\%$ . Les éléments d'appréciation des modèles analytiques de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  obtenus pour cette valeur de  $r$  sont comme suit :

```

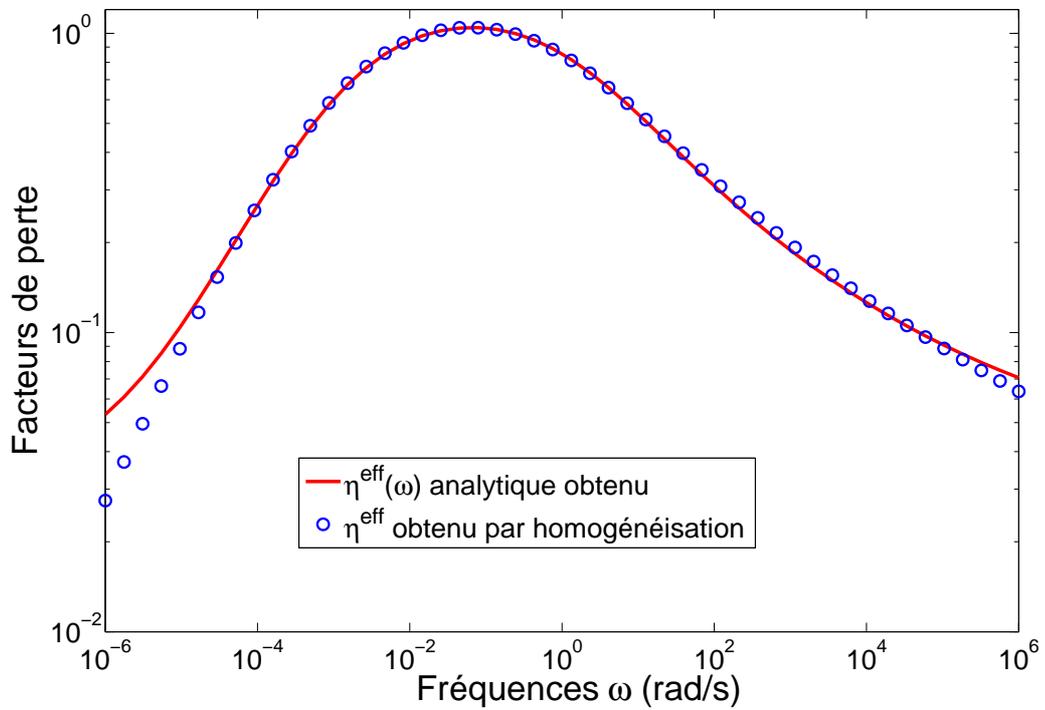
1 >> [mueff keff parMu parEta cfmu cfeta...
2   gofmu gofeta]=sphericalInclusionNegativeStiffnessPVB(-2.75);
3 >> gofmu
4 gofmu =
5         sse: 8.3762e+009
6         rsquare: 1.0000
7         dfe: 45
8         adjrsquare: 1.0000
9         rmse: 1.3643e+004
10 >> gofeta
11 gofeta =
12         sse: 0.0044
13         rsquare: 0.9993
14         dfe: 44
15         adjrsquare: 0.9992
16         rmse: 0.0099

```

Les valeurs des paramètres `rsquare` et `adjrsquare` proches de 1 prouvent que les modèles utilisés sont assez représentatifs (cf. figure 8.3).



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 8.3 – Modules effectifs homogénéisés et analytiques pour  $r = -2.75$ .

### Coefficients des modèles avec des inclusions à rigidité négative

Les coefficients des modèles analytiques de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  pour différentes valeurs du rapport de rigidités  $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$  sont regroupés dans le tableau 8.3 pour une fraction volumique des inclusions  $\varphi_1 = 2\%$ .

$r$	$\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$	$a_k \times 10^{-8}$	$b_k \times 10^{-5}$	$c_k \times 10$	$d_k \times 10$	$e_k \times 10$	$f_k \times 10$
-2.75	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	2.6127	5.5889	4.4818	1.9462	3.4426	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.3150	2.7951	3.0408	0.3256
-1.95	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	2.6120	12.8207	2.4006	1.1479	9.8253	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.3236	3.9428	1.8547	0.7483
-1.1	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	0.9840	3.0297	4.7901	6.0737	1.7066	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.8527	0.7613	11.3287	2.8554
-1	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.4646	4.9654	4.2146	2.2907	6.5060	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.7143	2.3995	2.6308	1.3703
-0.75	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	2.0083	4.3487	4.5367	1.8917	4.8239	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.5383	2.7394	2.5825	0.4286
-0.25	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	2.2214	4.5256	4.6011	1.9452	3.9954	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.5667	2.0743	3.7414	0.0515

TAB. 8.3 – Coefficients des modèles de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  : rigidité négative.

### Propriétés modales en fonction du paramètre $r$

Le problème (8.1) est résolu en utilisant les coefficients des modèles de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  présentés dans le tableau 8.3. Les trois premières fréquences propres  $\Omega$  et leurs facteurs d'amortissement  $\eta$  associés sont présentés dans le tableau 8.4 pour une fraction volumique des inclusions  $\varphi_1 = 2\%$ . Les résultats sont très encourageants car ils montrent jusqu'à 148% d'augmentation du facteur de perte pour le premier mode, 197% pour le mode 2 et 232% pour le mode 3, lorsque le rapport de rigidités  $r = -1.1$ . Comparés aux résultats obtenus pour une microstructure avec des micro-vides, ces augmentations ne peuvent être obtenues que pour des fractions volumiques élevées ( $\varphi_1 > 50\%$ ) des micro-vides. Cette étude paramétrique nous montre bien que les hétérogénéités ayant le comportement de rigidité négative conduisent à des capacités amortissantes très intéressantes dans le cadre de l'amortissement passif des vibrations des structures. Cette étude montre

clairement qu'il est d'un grand intérêt de rechercher soit les matériaux ou les techniques de fabrication qui conduisent à des comportements de rigidité négative. Ce comportement de rigidité négative améliore de manière significative l'amortissement modal passif pour de très faibles fractions volumiques des hétérogénéités (2% dans le cas présent) tout en modifiant le moins possible la rigidité structurelle. En effet, pour  $r = -1.1$ , la réduction des fréquences de résonance par rapport à celles obtenues pour le PVB pur est de 0.2% pour le mode 1, 0.65% pour le mode 2 et 1.31% pour le mode 3.

	$r$	0 (PVB Pur)	-2.75	-1.95	-1.1	-1	-0.75	-0.25
Mode 1	$\Omega$	53.74	53.86	53.85	53.63	53.54	53.59	53.68
	$\eta$	0.9108	0.8848	1.0140	2.2573	1.7423	1.1974	0.9734
Mode 2	$\Omega$	145.27	145.85	145.72	144.33	144.03	144.47	144.96
	$\eta$	1.3683	1.3313	1.5629	4.0661	2.8664	1.8188	1.4573
Mode 3	$\Omega$	278.41	280.07	279.52	274.77	274.44	276.03	277.49
	$\eta$	1.7981	1.7637	2.0994	5.9613	3.9692	2.4035	1.9108

TAB. 8.4 – Propriétés modales en fonction de  $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$ .  $\Omega(\text{Hz})$ ,  $\eta \times 10^2$ .

### 8.2.3 Microstructure avec des interfaces imparfaites

Nous considérons dans l'exemple suivant du PVB contenant des micro-inclusions sphériques avec des interfaces imparfaites. Les détails du modèle avec une interface imparfaite sont présentés dans le chapitre 4. La section 4.4.2 présente tous les paramètres sans dimension introduits dans le modèle pour le cas des matériaux isotropes contenant des particules sphériques. Pour cette étude, nous supposons  $r = 50$ ,  $\varphi_1 = 30\%$ ,  $\eta_\chi = -1.5$ ,  $\eta_1 = 0$ . Nous étudions ici l'effet du paramètre  $\chi$  sur les propriétés modales de la poutre sandwich Verre/PVB/Verre. Compte tenu de la similitude des comportements de rigidité négative et d'interface imparfaite (cf. § 4.5.5), nous utilisons le modèle 8.5 pour  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$ . Le modèle de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  défini par (8.4) est toujours utilisé. Les figures 8.4(a) et 8.4(b) présentent les courbes obtenues pour  $\chi = 20$ . Pour cette valeur de  $\chi = 20$ , les éléments d'appréciation des modèles analytiques de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  sont comme suit :

```

1 >> [mueff keff parMu parEta cfmu cfeta...
2   gofmu gofeta]=sphericalInclusionSlidingPVB(20);
3 >> gofmu
4 gofmu =
5         sse: 3.5586e+010
6         rsquare: 1.0000
7         dfe: 45
8         adjrsquare: 1.0000
9         rmse: 2.8121e+004
10 >> gofeta
11 gofeta =
12         sse: 0.0148
13         rsquare: 0.9969
14         dfe: 44
15         adjrsquare: 0.9966
16         rmse: 0.0184

```

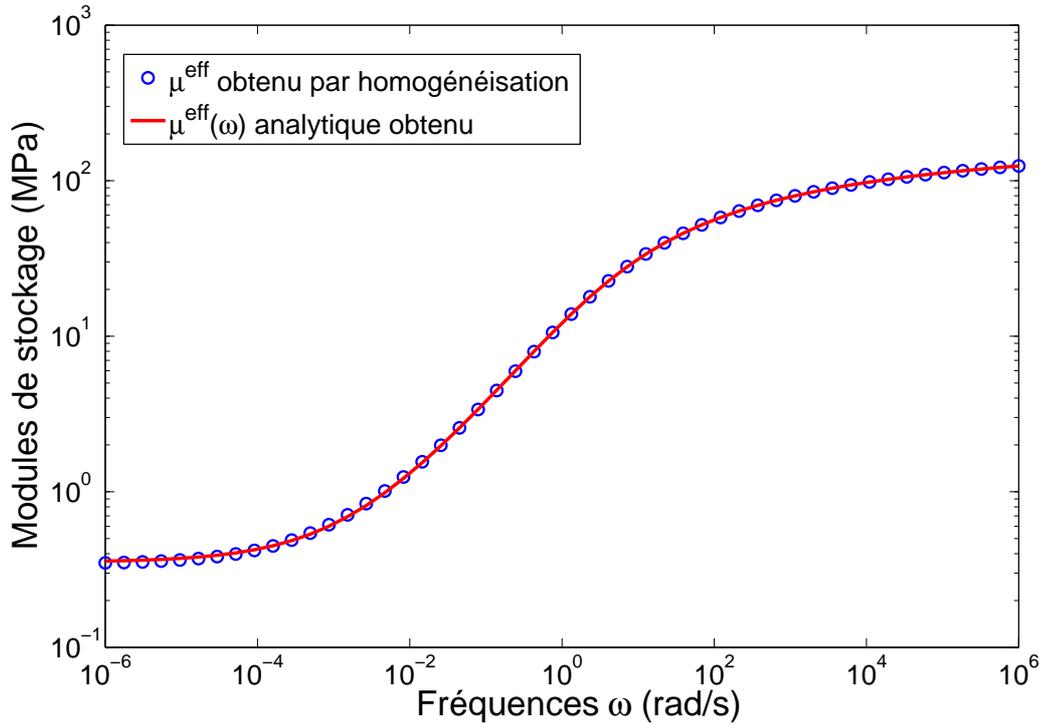
Les valeurs des paramètres `rsquare` et `adjrsquare` proches de 1 indiquent que les modèles utilisés sont assez représentatifs des courbes obtenues par homogénéisation (voir figures 8.4(a) et 8.4(b)).

### Coefficients des modèles pour le PVB avec des interfaces imparfaites

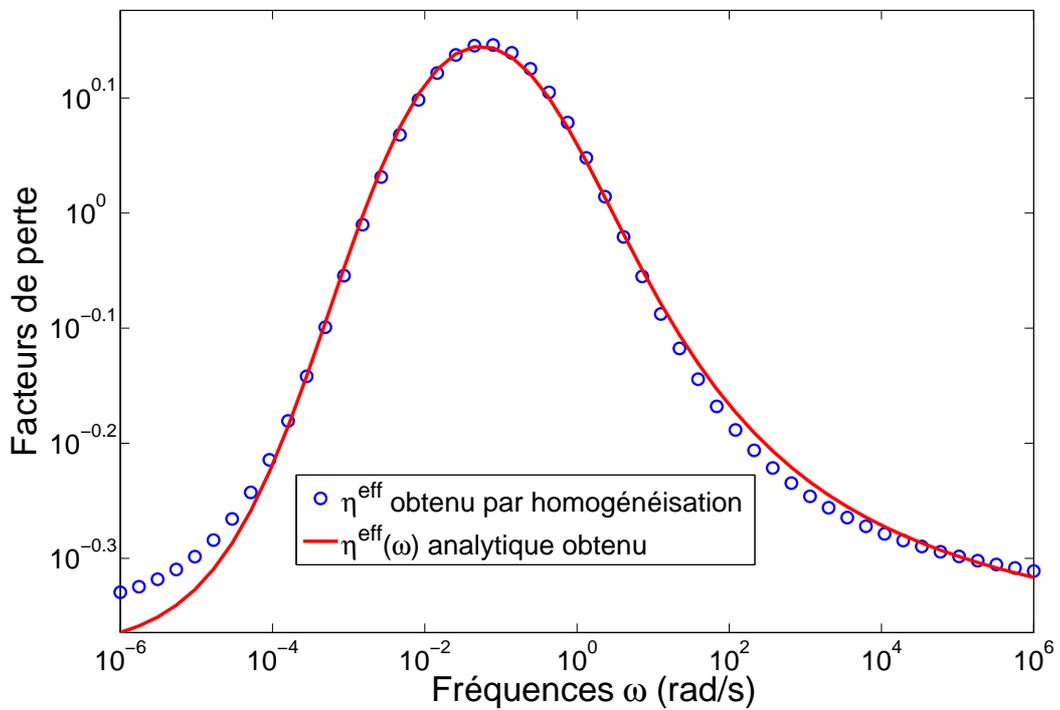
Nous regroupons dans le tableau 8.5 les coefficients des modèles analytiques de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  pour différentes valeurs du paramètre  $\chi$  pour une fraction volumique des hétérogénéités de  $\varphi_1 = 30\%$ .

$\chi$	$\hat{\mu}^{\text{eff}}(\omega)$	$a_k \times 10^{-8}$	$b_k \times 10^{-5}$	$c_k \times 10$	$d_k \times 10$	$e_k \times 10$	$f_k \times 10$
5	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	3.3450	6.0160	4.5715	1.7410	3.7870	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.4040	1.3160	7.6416	2.7468
10	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	2.6031	5.0951	4.2970	1.4929	5.0401	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.2604	1.2222	9.1022	3.8160
20	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.7145	3.5242	4.4690	1.7858	4.2070	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.1809	1.2810	8.9903	4.1719
30	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.4211	3.0032	4.4570	1.8130	4.3114	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.1970	1.3809	8.1449	3.8899
50	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.1801	2.5269	4.4694	1.8480	4.3372	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.2686	1.5297	6.8889	3.1686
80	$\mu^{\text{eff}}(\omega)$	1.0465	2.2338	4.4948	1.8745	4.2996	-
	$\eta^{\text{eff}}(\omega)$	2.3500	4.7900	4.3529	1.6506	5.9318	2.3891

TAB. 8.5 – Coefficients des modèles de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  : interface imparfaite.



(a) Modules de stockage effectifs



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 8.4 – Modules effectifs homogénéisés et analytiques pour  $\chi = 20$ .

### Propriétés modales en fonction du paramètre $\chi$

Le problème (8.1) est résolu en utilisant les coefficients des modèles de  $\mu^{\text{eff}}(\omega)$  et de  $\eta^{\text{eff}}(\omega)$  présentés dans le tableau 8.5. Les trois premières fréquences propres  $\Omega$  ainsi que leurs facteurs d'amortissement  $\eta$  associés sont présentés dans le tableau 8.6 pour une fraction volumique  $\varphi_1 = 30\%$  des hétérogénéités. Pour les diverses valeurs de  $\chi$  considérées, lorsque l'on passe de  $\chi = 5$  à  $\chi = 50$ , l'augmentation des facteurs de perte modaux varie de 47% à 268% pour le mode 1, de 70% à 310% pour le mode 2 et de 89% à 332% pour le mode 3. Aussi remarquons-nous qu'à l'augmentation de 268% pour  $\eta$  du mode 1 on associe une diminution de 1.32% pour la fréquence de résonance. Pour  $\chi = 50$ , les diminutions des fréquences de résonance des modes 2 et 3 sont respectivement de 2.55% et 3.87%. Pour les trois modes présentés, le comportement des hétérogénéités avec des interfaces imparfaites est similaire au comportement de rigidité négative.

	$\chi$	PVB pur	5	10	20	30	50	80
Mode 1	$\Omega$	53.74	54.12	53.95	53.64	53.39	53.03	52.72
	$\eta$	0.9108	1.3387	1.9494	2.7013	3.0831	3.3555	3.3495
Mode 2	$\Omega$	145.27	147.13	146.22	144.60	143.32	141.56	140.12
	$\eta$	1.3683	2.3283	3.4288	4.7122	5.2985	5.6098	5.4266
Mode 3	$\Omega$	278.41	283.68	280.91	276.12	272.47	267.64	263.82
	$\eta$	1.7981	3.4032	5.0188	6.8006	7.5270	7.7673	7.3236

TAB. 8.6 – Propriétés modales en fonction de  $\chi$ .  $\Omega(\text{Hz})$ ,  $\eta \times 10^2$ .

Dans ce qui suit, nous montrons l'influence de la microstructure du matériau viscoélastique (PVB) sur les performances acoustiques de la structure sandwich Verre/PVB/Verre.

### 8.3 Effet de la microstructure sur les propriétés acoustiques

Un modèle d'étude des propriétés acoustiques des structures sandwich viscoélastiques est présenté dans la section 2.4. Pour cette étude, nous considérons toujours la structure sandwich Verre/PVB/Verre. Les couches en verre ont un module de Young  $E = 64.5 \text{ GPa}$ , un coefficient de Poisson  $\nu_1 = \nu_3 = 0.22$  et une densité  $\rho_1 = \rho_3 = 2737 \text{ kg m}^{-3}$ . La densité

du PVB est  $\rho_2 = 999 \text{ kg m}^{-3}$ . Les épaisseurs sont  $h_1 = h_3 = 5 \text{ mm}$  pour les couches en verre et  $h_2 = 0.76 \text{ mm}$  pour la couche en PVB. L'angle d'incidence  $\theta$  est pris à  $45^\circ$ .

### 8.3.1 Microstructure avec des micro-pores sphériques

La figure 8.5(b) montre l'effet de la fraction volumique  $\varphi_1$  des micro-pores du PVB sur le facteur de perte de transmission du son (TL). Le tableau 8.7 présente, pour chaque valeur de  $\varphi_1$ , la profondeur du creux à la coïncidence  $\Delta\text{TL}$  ainsi que la fréquence de coïncidence  $\omega_c$  correspondante (voir 8.5(a)).

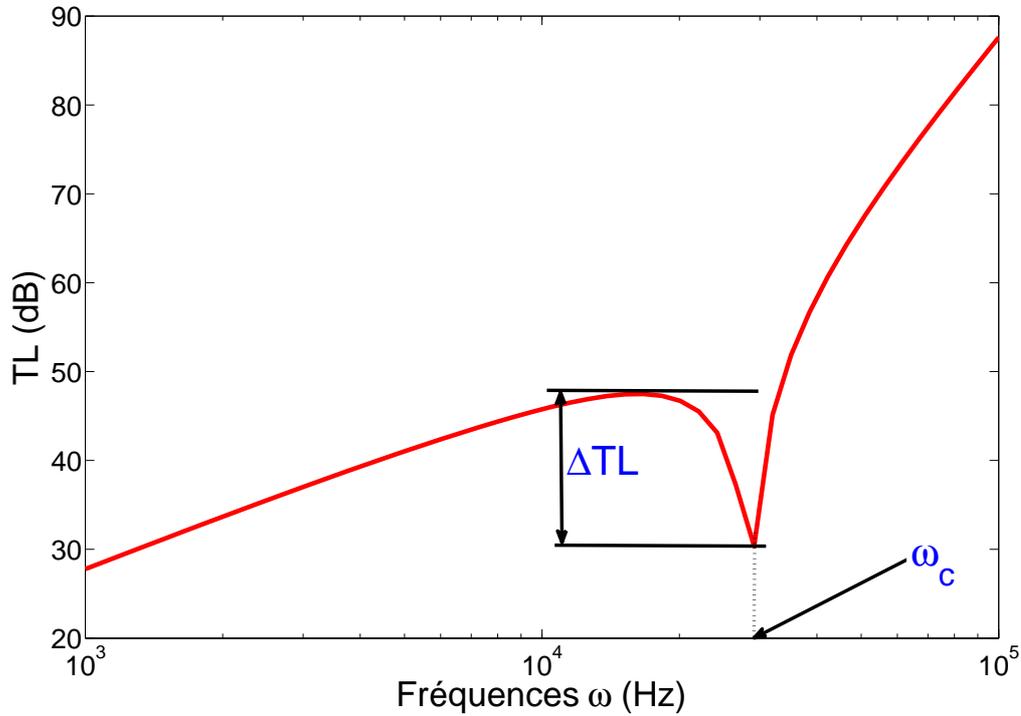
$\varphi_1$	0%	5%	10%	20%	30%	50%	60%
$\omega_c \times 10^{-4} \text{ (Hz)}$	2.2051	2.4201	2.4201	2.4201	2.6561	2.6561	2.9151
$\Delta\text{TL(dB)}$	13.5797	14.6305	18.3893	15.0335	16.2401	15.2371	14.3374

TAB. 8.7 – Fréquences de coïncidence et la profondeur du creux en fonction de  $\varphi_1$ .

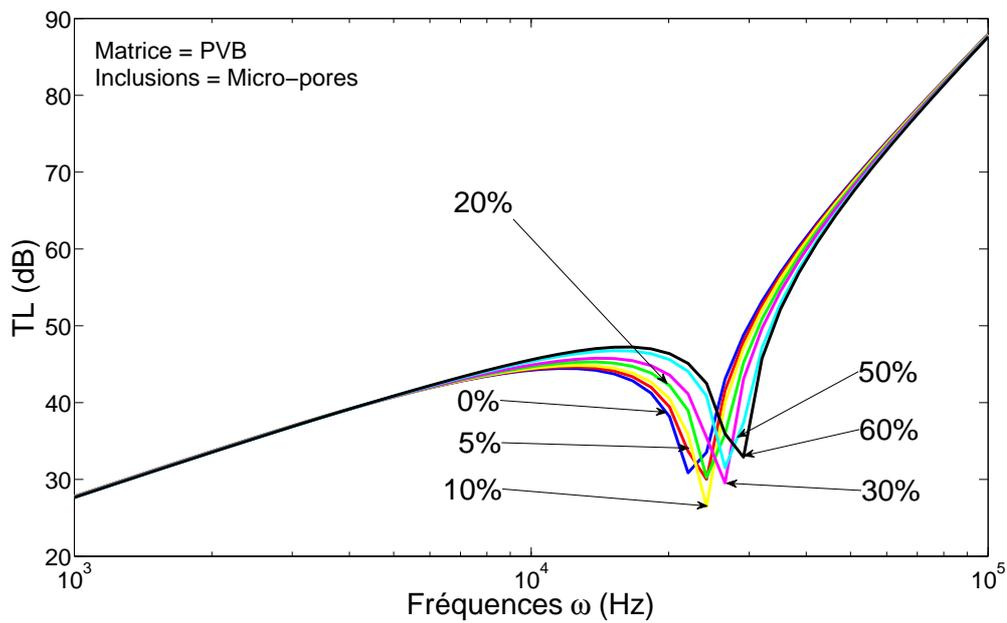
Nous remarquons que l'effet des micro-pores sur le TL est assez marginal même si l'on note une légère amélioration du TL pour les fréquences qui se situent entre la fin de la loi de masse et la fréquence de coïncidence. La fréquence de coïncidence est décalée d'environ 7 kHz vers les hautes fréquences lorsque l'on passe du PVB pur au PVB avec 60% de micro-pores. Le décalage de la fréquence de coïncidence vers les hautes fréquences lorsque  $\varphi_1$  augmente s'accompagne d'une augmentation de la profondeur du creux à la fréquence de coïncidence  $\Delta\text{TL}$ . Comme dans le cas des propriétés modales, nous allons étudier l'effet d'autres microstructures sur le comportement acoustique de la structure Verre/PVB/Verre.

### 8.3.2 Microstructure avec des inclusions à rigidité négative

L'effet du comportement de rigidité négative sur le TL est étudié dans cette section. La profondeur du creux à la coïncidence  $\Delta\text{TL}$  et la fréquence de coïncidence  $\omega_c$  correspondante sont présentées dans le tableau 8.8 en fonction de la fraction volumique  $\varphi_1$  des



(a) Eléments à la coïncidence



(b) Facteurs de perte effectifs

FIG. 8.5 – Effet de la fraction volumique des micro-pores  $\varphi_1$  sur le TL.

inclusions. Tous les calculs sont faits pour un rapport de rigidités  $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M) = -1.1$ .

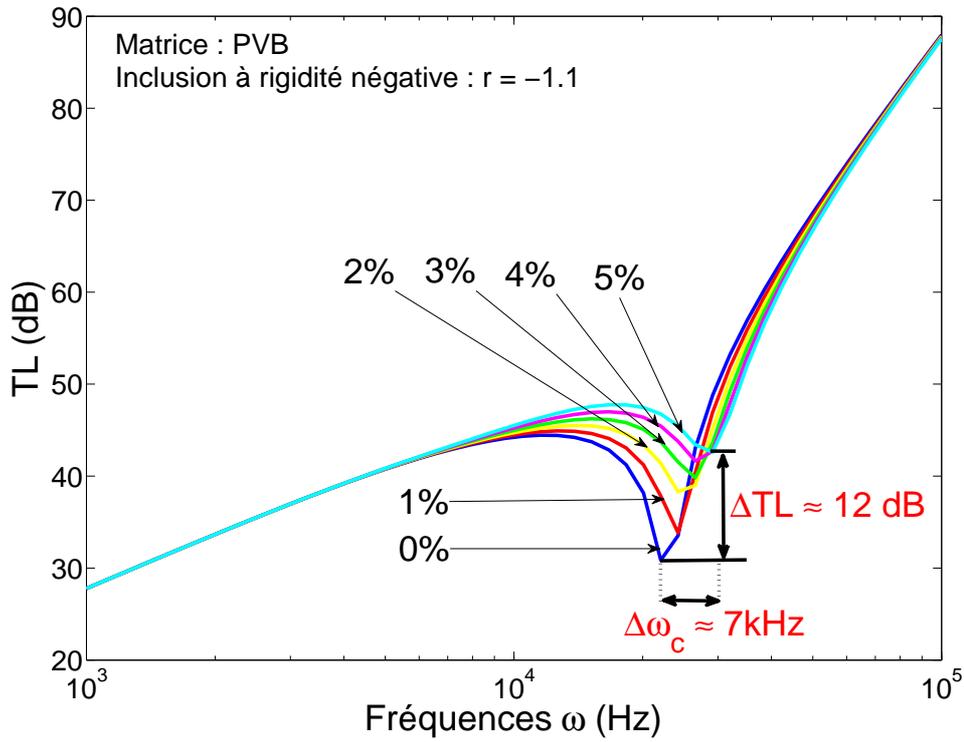
$\varphi_1$	0%	1%	2%	3%	4%	5%
$\omega_c \times 10^{-4}$ (Hz)	2.2051	2.4201	2.4201	2.6561	2.6561	2.9151
$\Delta\text{TL}$ (dB)	13.5797	11.0942	7.2068	6.4140	5.3571	5.1553

TAB. 8.8 – Fréquences de coïncidence et  $\Delta\text{TL}$  en fonction de  $\varphi_1$ .  $r = -1.1$ .

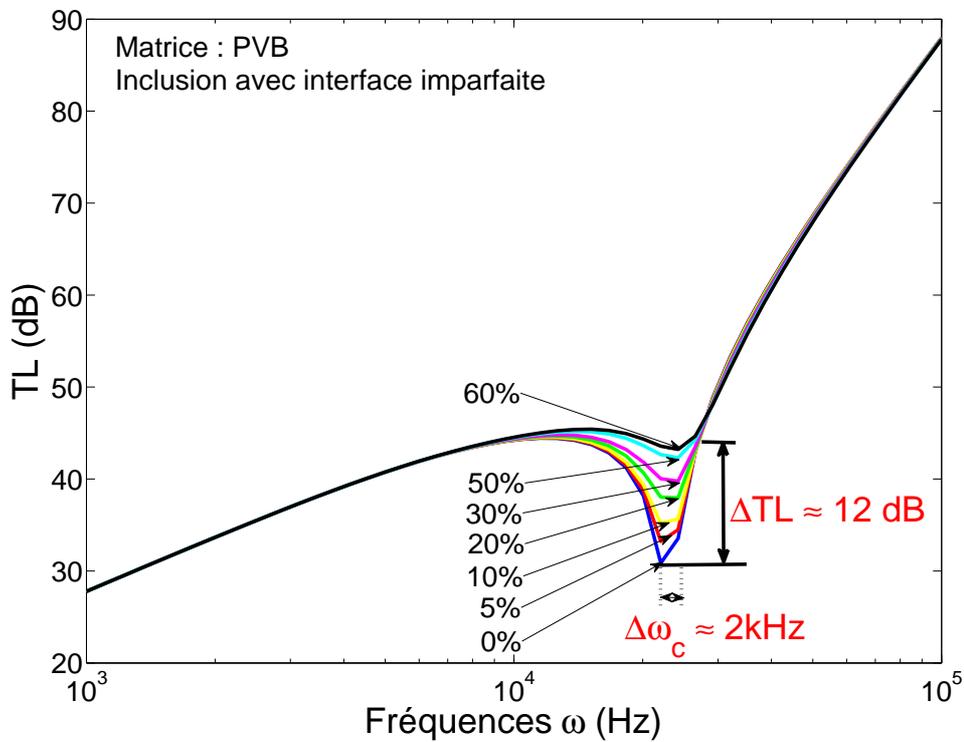
Les résultats du tableau 8.8 montrent que  $\omega_c$  augmente avec  $\varphi_1$  tandis que  $\Delta\text{TL}$  diminue lorsque  $\varphi_1$  augmente. Ainsi, entre le PVB pur ( $\varphi_1 = 0\%$ ) et le composite à base du PVB avec  $\varphi_1 = 5\%$ , la profondeur du creux à la coïncidence passe de 13.5797 dB à 5.1553 dB soit une diminution d'environ 62% ou encore une diminution de 8.4244 dB. En addition à cette réduction sensible du creux de coïncidence, la figure 8.6(a) nous montre que le TL, au voisinage de la fréquence de coïncidence, augmente d'environ 12 dB lorsque l'on passe du PVB pur au composite avec  $\varphi_1 = 5\%$  d'inclusions à rigidité négative. Ceci se traduit par une baisse de 12 dB du niveau de la pression sonore. A titre indicatif, une baisse de 10 dB en niveau de pression sonore est équivalente à la différence de niveaux entre le bruit sur un coin d'une rue animée et celle de la conversation entre deux personnes. Contrairement à la microstructure avec des micro-vides, cette microstructure permet de réduire sensiblement la profondeur du creux à la coïncidence tout en déplaçant la fréquence de coïncidence vers les hautes fréquences. A de très faibles fractions volumiques, ces hétérogénéités non classiques confèrent à la structure étudiée des propriétés amortissantes très particulières. Ces hétérogénéités permettent au matériau viscoélastique dans lequel elles sont noyées de dissiper d'une manière efficace les énergies vibratoire et acoustique.

### 8.3.3 Microstructure avec des interfaces imparfaites

Dans cet exemple, le PVB contient des hétérogénéités avec des interfaces imparfaites. Nous utilisons pour les calculs,  $r = \Re[\hat{r}] = \Re[\hat{\mu}_1/\hat{\mu}_0] = 50$ ,  $\chi = 15$ ,  $\eta_\chi = -1.5$ ,  $\eta_1 = 0$ . Ces paramètres sont définis dans la section 4.4.2. Le tableau 8.9 présente, pour chaque valeur



(a) TL en fonction de  $\varphi_1$ . Rigidité négative :  $r = -1.1$ .



(b) TL en fonction de  $\varphi_1$ . Interface imparfaite.

FIG. 8.6 – TL pour la rigidité négative et l'interface imparfaite.

de la fraction volumique  $\varphi_1$  des hétérogénéités, la profondeur du creux à la coïncidence  $\Delta TL$  ainsi que la fréquence de coïncidence  $\omega_c$  correspondante.

$\varphi_1$	0%	5%	10%	20%	30%	50%	60%
$\omega_c \times 10^{-4}$ (Hz)	2.2051	2.2051	2.2051	2.4201	2.4201	2.4201	2.4201
$\Delta TL$ (dB)	13.5797	11.263	9.3726	6.7195	5.0345	2.8654	2.1916

TAB. 8.9 –  $\Delta TL$  et  $\omega_c$  en fonction de  $\varphi_1$  : interface imparfaite.

Comme dans le cas des propriétés modales, les hétérogénéités aux interfaces imparfaites ont un effet similaire à celui des hétérogénéités à rigidité négative sur les propriétés acoustiques de la structure. Pour une fraction volumique de 30%, ces hétérogénéités permettent de réduire  $\Delta TL$  de 13.5797 dB à 5.0345 dB soit une réduction de 63% ou encore une baisse de 8.5452 dB du niveau de la pression sonore au voisinage de la fréquence de coïncidence. Quant à la fréquence de coïncidence  $\omega_c$ , elle est décalée légèrement vers les hautes fréquences lorsque  $\varphi_1$  augmente. La figure 8.6(b) nous montre également que le TL, au voisinage de la fréquence de coïncidence, augmente d'environ 12 dB lorsque l'on passe du PVB pur au composite à base du PVB avec  $\varphi_1 = 60\%$  d'hétérogénéités aux interfaces imparfaites soit une baisse de 12 dB du niveau de la pression sonore.

Au travers de toutes ces études, il ressort que la modification de la microstructure de la couche viscoélastique (PVB) peut apporter des améliorations significatives en terme d'amortissement passif. Dans toutes les études paramétriques que nous avons faites, la microstructure du PVB a été choisie d'une manière arbitraire et rien ne prouve que c'est le choix optimal qui a été fait. De plus nous nous sommes focalisés uniquement sur les propriétés modales et acoustiques sans montrer explicitement l'impact de la modification de la microstructure sur la rigidité globale de la structure ainsi que sa masse globale. En service, le pare-brise d'automobile doit remplir plusieurs fonctions simultanément : être aussi léger que possible, avoir une bonne rigidité, avoir de très bonnes performances acoustiques et vibratoires etc. Dans ce qui suit, nous utilisons les divers modèles développés et présentés dans ce travail pour concevoir, d'une façon optimale, la microstructure des

couches du pare-brise Verre/PVB/Verre pour satisfaire au mieux ses différentes fonctions lorsqu'il est en service.

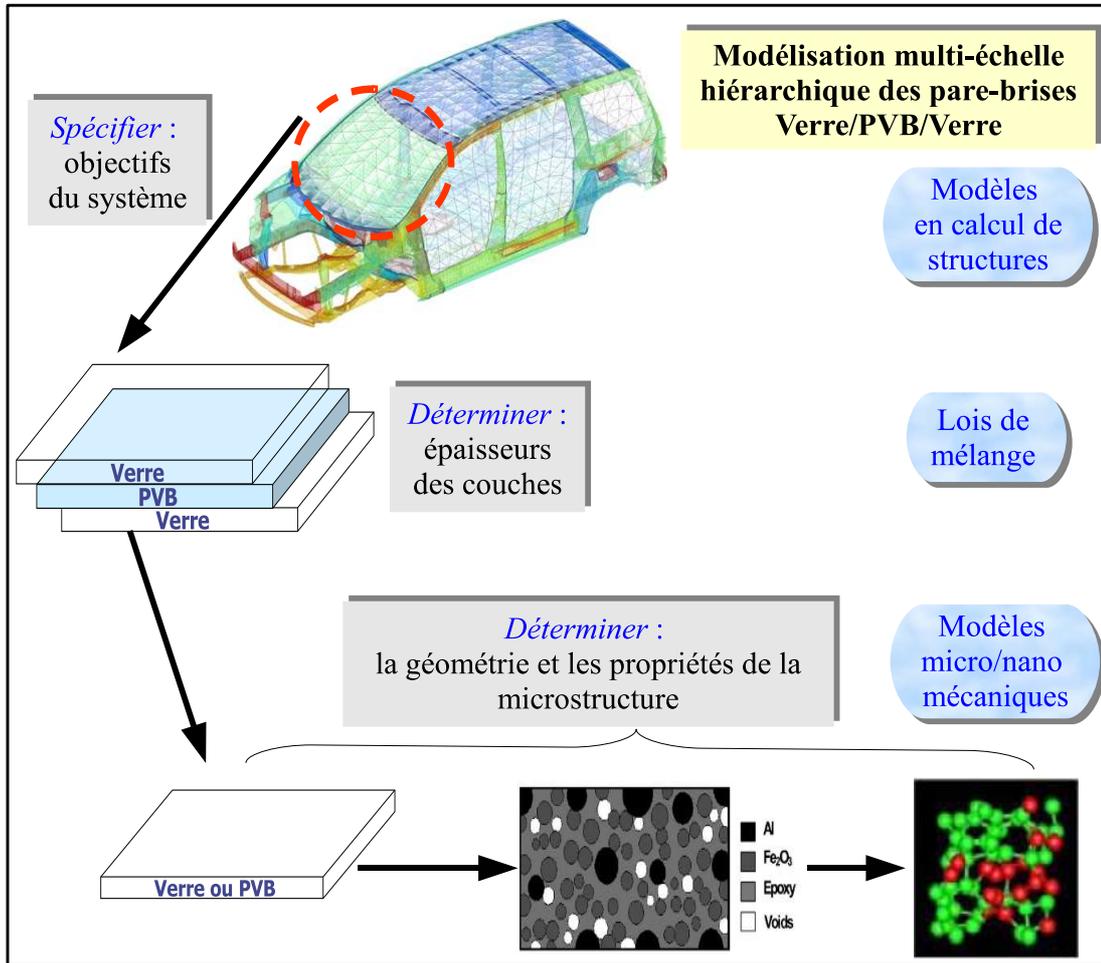
## 8.4 Conception de la microstructure : problème inverse

Nous proposons d'explorer dans ce qui suit, l'espace de conception des pare-brises Verre/PVB/Verre afin d'améliorer leurs performances acoustiques tout en réduisant le poids global et en gardant une bonne rigidité de la structure simultanément. Bien que cette étude soit consacrée spécifiquement aux structures Verre/PVB/Verre, cette approche peut être employée pour la conception de n'importe quelle structure trois couches qui exploite cette propriété des sandwich viscoélastiques comme mécanisme d'amortissement passif.

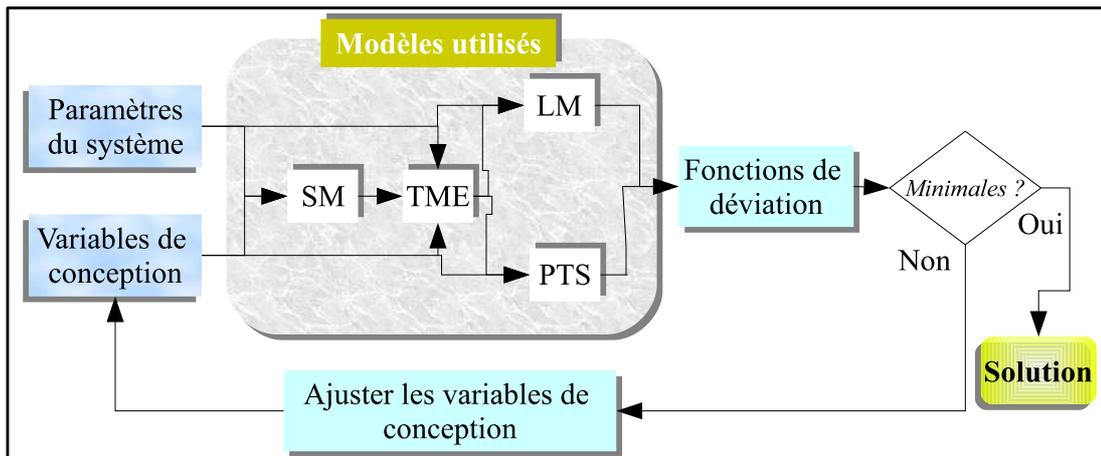
La modélisation multi-échelle de cette structure à trois couches est faite dans le sens hiérarchique : microstructure des matériaux  $\longrightarrow$  comportements macroscopiques effectifs des matériaux  $\longrightarrow$  comportements macroscopiques de la structure. Les techniques d'optimisation numérique sont ensuite appliquées à cette hiérarchie des modèles afin de concevoir efficacement la microstructure des matériaux des trois couches de la structure en se basant sur les objectifs au niveau de la structure (voir figure 8.7(a)). Les objectifs globaux de conception des pare-brises examinés dans ce travail sont :

1. réduire au maximum la transmission du son via la réduction du creux  $\Delta TL$  à la fréquence de coïncidence  $\omega_c$ ,
2. déplacer le phénomène de coïncidence ( $\omega_c$ ) à une fréquence en dehors de la gamme de fréquences très sensibles de l'oreille humaine,
3. réduire la masse totale du pare-brise,
4. maintenir ou améliorer la rigidité globale du pare-brise.

La figure 8.7(b) montre schématiquement les étapes et les modèles utilisés dans la conception de la microstructure des couches du sandwich pour atteindre les objectifs définis plus haut. Nous désignons par *variables de conception* les variables du système qui



(a) Modélisation multi-échelle hiérarchique des pare-brises.



(b) Schéma du modèle de conception de la microstructure.

FIG. 8.7 – Modèles hiérarchiques pour la conception de la microstructure.

sont considérés modifiables dans leur état initial afin d'améliorer les performances du système. Les variables de conception sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{X}$ . En revanche, les *paramètres du système* décrivent les autres variables du modèle dont on a besoin pour caractériser complètement le système; les paramètres du système ne se sont pas modifiables dans leur configuration initiale à cause de certaines contraintes dans la conception ou à cause d'autres considérations. Les modèles utilisés dans la résolution du problème d'optimisation sont organisés comme suit :

- si l'on a à faire avec des hétérogénéités de l'ordre des nanomètres, des calculs de statique moléculaire (SM) sont au préalable menés pour obtenir les données d'entrée de notre modèle présenté dans le chapitre 6;
- les théories des milieux effectifs (TME), au travers des modèles micromécaniques présentés dans les chapitres 3, 4 et 6, sont utilisées pour déterminer les propriétés effectives des matériaux des couches de la structure;
- le modèle de calcul de la perte de transmission du son (PTS) présenté dans la section 2.4 est utilisé pour déterminer  $\omega_c$  et  $\Delta TL$ ;
- la loi de mélange (LM) permet de déterminer les modules effectifs (par exemple  $\hat{E}_{11}^{\text{eff}}$  ou  $\hat{E}_{22}^{\text{eff}}$ ) du sandwich;
- les écarts (fonctions de déviation) entre les objectifs poursuivis et les valeurs atteintes sont évalués;
- les variables de conception sont ajustés si les écarts ne sont pas minimisés.

#### 8.4.1 Loi de mélange (LM) pour les structures multicouches

Nous présentons ici un modèle d'homogénéisation des structures multicouches tiré de [Qu et Cherkaoui \(2006, pages 226-233\)](#). Nous considérons dans le cas général une structure comportant  $N$  couches reliées parfaitement les unes aux autres. L'épaisseur et la matrice de rigidité du matériau de la  $i^{\text{ième}}$  couche sont notées respectivement  $h_i$  et  $\mathbf{C}^{(i)}$ . Nous notons  $c_i = h_i / \sum_{k=1}^N h_k$  la fraction volumique de la  $i^{\text{ième}}$  couche. Si  $\mathbf{C}$  est une matrice de

rigidité alors nous notons :

$$\mathbf{C}_{nn} = \begin{bmatrix} C_{33} & C_{43} & C_{53} \\ C_{34} & C_{44} & C_{54} \\ C_{35} & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{nt} = \begin{bmatrix} C_{13} & C_{23} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{65} \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

$$\mathbf{C}_{tn} = \begin{bmatrix} C_{31} & C_{41} & C_{51} \\ C_{32} & C_{42} & C_{52} \\ C_{36} & C_{46} & C_{56} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{tt} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{62} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Clairement, nous avons les relations suivantes :

$$\mathbf{C}_{nn} = (\mathbf{C}_{nn})^\top, \quad \mathbf{C}_{tt} = (\mathbf{C}_{tt})^\top, \quad \mathbf{C}_{tn} = (\mathbf{C}_{nt})^\top. \quad (8.8)$$

La matrice de rigidité effective  $\mathbf{C}^{\text{eff}}$  de la structure multicouche est définie alors par :

$$\mathbf{C}_{nn}^{\text{eff}} = \left[ \sum_{k=1}^N c_k (\mathbf{C}_{nn}^{(k)})^{-1} \right]^{-1}, \quad \mathbf{C}_{nt}^{\text{eff}} = \mathbf{C}_{nn}^{\text{eff}} \left[ \sum_{k=1}^N c_k (\mathbf{C}_{nn}^{(k)})^{-1} \mathbf{C}_{nt}^{(k)} \right], \quad (8.9)$$

$$\mathbf{C}_{tt}^{\text{eff}} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{C}_{tt}^{(k)} + \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{C}_{tn}^{(k)} (\mathbf{C}_{nn}^{(k)})^{-1} (\mathbf{C}_{nt}^{\text{eff}} - \mathbf{C}_{nt}^{(k)}), \quad \mathbf{C}_{tn}^{\text{eff}} = (\mathbf{C}_{nt}^{\text{eff}})^\top. \quad (8.10)$$

En appliquant ce modèle au sandwich Verre/PVB/Verre dont les propriétés mécaniques et géométriques sont présentées plus haut et en utilisant les propriétés du PVB calculées pour  $\omega = 1000$ , nous obtenons :

$$\hat{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \mathbf{C}_R^{\text{eff}} + i\mathbf{C}_I^{\text{eff}}, \quad (8.11)$$

où :

$$\mathbf{C}_R^{\text{eff}} \times 10^{-9} = \begin{bmatrix} 63.8353 & 14.6849 & 2.6384 & 0 & 0 & 0 \\ 14.6849 & 63.8353 & 2.6384 & 0 & 0 & 0 \\ 2.6384 & 2.6384 & 8.5324 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5067 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5067 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24.5752 \end{bmatrix}, \quad (8.12)$$

et

$$\mathbf{C}_I^{\text{eff}} \times 10^{-9} = \begin{bmatrix} 0.1324 & 0.1296 & 0.4132 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1296 & 0.1324 & 0.4132 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4132 & 0.4132 & 1.3363 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2508 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2508 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0014 \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

La forme des matrices  $\mathbf{C}_R^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{C}_I^{\text{eff}}$  montre que la structure Verre/PVB/Verre homogénéisée est isotrope transverse dont l'axe de symétrie est perpendiculaire au plan de la plaque. Nous pouvons donc lui associer les deux modules longitudinaux  $\hat{E}_{11}^{\text{eff}} = \hat{E}_{22}^{\text{eff}}, \hat{E}_{33}^{\text{eff}}$ , les modules de cisaillement  $\hat{\mu}_{23}^{\text{eff}} = \hat{\mu}_{13}^{\text{eff}}, \hat{\mu}_{12}^{\text{eff}}$  et les coefficients de Poisson  $\hat{\nu}_{23}^{\text{eff}} = \hat{\nu}_{13}^{\text{eff}}, \hat{\nu}_{12}^{\text{eff}}$ . Pour la suite, nous prenons, pour des valeurs de référence, les valeurs suivantes pour la structure Verre/PVB/Verre :  $E_{11}^{\text{ref}} = E_{22}^{\text{ref}} = 59.9673$  GPa,  $E_{33}^{\text{ref}} = 8.3592$  GPa,  $\mu_{23}^{\text{ref}} = \mu_{13}^{\text{ref}} = 1.5067$  GPa,  $\mu_{12}^{\text{ref}} = 24.5752$  GPa,  $\nu_{23}^{\text{ref}} = \nu_{13}^{\text{ref}} = 0.2412$ ,  $\nu_{12}^{\text{ref}} = 0.2201$ .

Nous définissons également la masse effective par unité de surface de ce sandwich par :

$$m_s^{\text{eff}} = 2\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2. \quad (8.14)$$

Nous prendrons pour la suite dans les calculs  $m_s^{\text{ref}} = 28.128 \text{ kg/m}^2$ . Dans ce qui suit, nous montrons la conception des microstructures des couches d'un pare-brise pour répondre simultanément à plusieurs objectifs de conception.

### 8.4.2 Exemple de problème d'optimisation et solution

Nous cherchons donc à déterminer les microstructures du PVB et du Verre pour atteindre les objectifs de conception suivants :

Paramètres	Description	Objectifs à atteindre
$100 (m_s^{\text{ref}} - m_s^{\text{eff}}) / m_s^{\text{ref}}$	Réduction de la masse surfacique	10%
$100 (E_{11}^{\text{ref}} - E_{11}^{\text{eff}}) / E_{11}^{\text{ref}}$	Réduction de la rigidité de la plaque	2%
$\omega_c$	Fréquence de coïncidence	20 kHz
$\Delta\text{TL}$	Creux à la coïncidence	0.2 dB

TAB. 8.10 – Un exemple des objectifs de conception du Verre/PVB/Verre.

Les variables de conception sont les rapports de rigidités  $r = -\mu^I / \Re(\hat{\mu}^M)$ , le rapport de Poisson  $\nu^I$  de l'hétérogénéité et la fraction volumique  $\varphi_1$  des hétérogénéités dans le PVB et le verre, soit 6 variables. A ces 6 variables, nous ajoutons les épaisseurs des couches de Verre  $h_1 = h_3$  ainsi que l'épaisseur  $h_2$  de la couche en PVB. Nous avons alors au total 8 variables de conception que nous cherchons à déterminer pour atteindre les objectifs fixés dans le tableau 8.10. Ce problème d'optimisation multiobjectif est résolu dans cette étude en utilisant la fonction `fgoalattain` de l'Optimization Toolbox de MATLAB. Cette fonction permet de résoudre ces types de problèmes d'optimisation multiobjectif. Nous montrons ci-dessus l'utilisation de la fonction `fgoalattain` pour résoudre notre problème :

```

1 >>options=optimset('MaxIter',2000,'TolFun',1e-14,'MaxFunEvals',20000,...
2 'MeritFunction','multiobj','GoalsExactAchieve',4);%Options de résolution
3 >>X0=[-1.1;0.4;0.05;-0.76;0.23;0.05;0.76e-3;5e-3];% Solution initiale
4 >>lb=[-2;0;0.01;-2;0;0.01;0.38e-3;0.5e-3];% Bornes inférieures de X
5 >>ub=[0;0.5;1;0;0.5;1;5e-3;5e-3];% Bornes supérieures de X
6 >>goal=[0.2;20000;10;2]; % Objectifs à atteindre
7 >>weight=abs(goal);%Même pourcentage de sous ou sur-détermination des obj

```

```

8 >>tic,[X fval attainfactor exitflag]=fgoalattain(@objectives,X0,goal,...
9 weight,[],[],[],[],lb,ub,[],options),toc % Résolution du problème
10 X = % Solution du problème
11 -1.191193639097455e+000 %  $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$  pour le PVB
12 3.993480966630624e-001 %  $\nu^I$  pour le PVB
13 2.662797292870286e-002 % Fraction volumique  $\varphi_1$  pour le PVB
14 -4.678390438539552e-001 %  $r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$  pour le Verre
15 1.859701264407870e-001 %  $\nu^I$  pour le Verre
16 1.000045472821718e-002 % Fraction volumique  $\varphi_1$  pour le Verre
17 4.404602291325909e-004 % Epaisseur de la couche en PVB  $h_2$ 
18 4.463049715884784e-003 % Epaisseur des couches en Verre  $h_1 = h_3$ 
19 fval = % Valeurs finales atteintes
20 2.480080685809725e-001 %  $\Delta TL$  dB
21 1.519911082952933e+004 %  $\omega_c$  Hz
22 1.158257377829534e+001 %  $100(m_s^{\text{ref}} - m_s^{\text{eff}})/m_s^{\text{ref}}$ 
23 2.332183733752456e+000 %  $100(E_{11}^{\text{ref}} - E_{11}^{\text{eff}})/E_{11}^{\text{ref}}$ 
24 attainfactor = % Indicateur de la qualité de la solution
25 2.400444585235335e-001
26 exitflag = % Indicateur de la qualité de la solution
27 4
28 Elapsed time is 442.345874 seconds. % Temps de calcul

```

Les résultats pour cet exemple sont présentés dans le tableau 8.11.

Propriétés optimisées des hétérogénéités		
Quantités	Hétérogénéités du Verre	Hétérogénéités du PVB
$r = -\mu^I/\Re(\hat{\mu}^M)$	-0.468	-1.191
$\nu^I$	0.186	0.399
$\varphi_1$	1%	2.66%
Epaisseurs des couches	$h_1 = h_3$ 4.46 mm	$h_2$ 0.44 mm
Valeurs finales atteintes		
$100(m_s^{\text{ref}} - m_s^{\text{eff}})/m_s^{\text{ref}}$	Réduction de la masse surfacique	11.58%
$100(E_{11}^{\text{ref}} - E_{11}^{\text{eff}})/E_{11}^{\text{ref}}$	Réduction de la rigidité de la plaque	2.33%
$\omega_c$	Fréquence de coïncidence	15.20 kHz
$\Delta TL$	Creux à la coïncidence	0.248 dB

TAB. 8.11 – Résultats de la conception des microstructures.

### 8.4.3 Analyse des résultats

Les résultats de cet exemple simple d'optimisation multiobjectif montrent qu'avec ces microstructures des couches de la structure Verre/PVB/Verre présentées dans le tableau 8.11, nous pouvons réduire sa masse surfacique d'environ 11%, déplacer le phénomène

dans les hautes fréquences ( $\omega_c=15$  kHz dans le cas présent), diminuer sensiblement la profondeur du creux  $\Delta TL$  à la coïncidence (ici 0.248 dB) sans trop dégrader la rigidité globale du sandwich (une dégradation d'environ 2% dans le cas de cet exemple). Même si cet exemple paraît assez simple, les résultats montrent cependant qu'il est possible de concevoir des matériaux pour des applications données dans une démarche de modélisation multi-échelle.

## 8.5 Conclusion

Nous venons de montrer que la microstructure des couches du sandwich influence sensiblement les comportements macroscopiques de la structure. Même si ces études ont un caractère théorique, elles révèlent qu'il est possible de concevoir des matériaux amortissants voire des matériaux multifonctionnels pour des applications données. Les outils que nous avons présentés paraissent assez robustes et efficaces pour modéliser et concevoir la microstructure des matériaux dans un cadre de modélisation multi-échelle pour atteindre plusieurs objectifs de conception simultanément.



# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Nous résumons ici les principaux résultats obtenus au cours de cette étude avant de dégager quelques pistes possibles d’approfondissement et d’élargissement de ce travail.

## Principaux résultats

L’objectif principal de cette thèse est la mise en œuvre d’un cadre de modélisations multi-échelles afin d’explorer les divers aspects de microstructures des matériaux composites qui conduisent à l’amélioration significative des propriétés d’amortissement des structures. La satisfaction de cet objectif principal a été accomplie en satisfaisant d’autres objectifs secondaires. Ces objectifs secondaires peuvent être énoncés comme :

- la modélisation multi-échelle et la maîtrise du comportement des matériaux visco-élastiques hétérogènes par les différentes transitions d’échelles,
- la mise en œuvre des connaissances et des modèles des matériaux composites visco-élastiques pour améliorer la performance des structures nécessitant l’absorption de l’énergie mécanique.

Pour atteindre ces objectifs, le chapitre 2 nous a permis de maîtriser les divers paramètres mécaniques et géométriques qui influencent les comportements vibratoire et acoustique

des structures poutre et plaque sandwich viscoélastiques Verre/PVB/Verre. Le chapitre 3 a été consacré à la modélisation et à la prédiction des propriétés effectives des matériaux composites viscoélastiques contenant des hétérogénéités viscoélastiques multi-enrobées. Il est montré dans ce chapitre qu'un choix adéquat des phases du composite permet de concevoir des matériaux ayant de très bonnes propriétés amortissantes et une très bonne rigidité dans toutes les gammes de fréquences. A cause du nombre élevé des potentielles applications des matériaux amortissants, le chapitre 4 apporte de nouveaux degrés de liberté dans la conception des matériaux amortissants en introduisant le concept d'interfaces imparfaites dans les matériaux composites viscoélastiques. Dans ce chapitre, nous avons montré l'influence de certains paramètres sans dimension sur les propriétés effectives du matériau composite viscoélastique. L'effet de taille a été introduit dans le modèle du chapitre 4. Cependant les tailles considérées dans les chapitres 3 et 4 demeurent toujours des tailles conventionnelles. Pour considérer les tailles de l'ordre des nanomètres, les chapitres 5 et 6 ont cerné les différents mécanismes et phénomènes physiques qui sont prépondérants à l'échelle nanométrique. Les limites des modèles actuels pour étendre la micromécanique classique de Eshelby aux nanocomposites ont été montrées puis une nouvelle approche a été proposée pour résoudre efficacement le problème classique de Eshelby avec des nano-hétérogénéités. Cette approche sert de lien entre la mécanique moléculaire et la mécanique des milieux continus. Plusieurs applications ont montré l'effet de l'échelle nanométrique sur les propriétés élastiques et viscoélastiques des matériaux contenant des nanoparticules. Le chapitre 7 présente une nouvelle approche pour résoudre certains problèmes non linéaires notamment les problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. Cette approche basée sur la méthode asymptotique numérique et la différentiation automatique nous a conduit à mettre au point une "boîte à outils de MATLAB" nommée Diamant MATLAB Toolbox. Plusieurs exemples d'utilisation de l'outil Diamant ont été montrés. Grâce à cet outil et d'autres outils de calculs numériques présentés dans le chapitre 2, nous avons étudié dans le chapitre 8 l'effet de la microstructure des matériaux

---

sur les propriétés modales et acoustiques des structures sandwich Verre/PVB/Verre. Pour finir, nous avons montré l'utilisation des différents modèles développés et présentés dans ce mémoire pour résoudre un problème d'optimisation multiobjectif. Ce problème d'optimisation vise à concevoir la microstructure des matériaux du sandwich Verre/PVB/Verre pour satisfaire simultanément quatre objectifs :

- ☞ réduire au maximum la transmission du son via la réduction du creux  $\Delta TL$  à la fréquence de coïncidence  $\omega_c$ ,
- ☞ déplacer le phénomène de coïncidence ( $\omega_c$ ) à une fréquence en dehors de la gamme de fréquences très sensibles de l'oreille humaine,
- ☞ réduire la masse totale du pare-brise,
- ☞ maintenir ou améliorer la rigidité globale du pare-brise.

## Contributions originales

En résumé, les contributions originales que nous avons faites dans ce travail sont :

1. Modélisations analytique et numérique du comportement statique et des vibrations libres linéaires des structures poutre sandwich Verre/PVB/Verre avec des conditions aux limites viscoélastiques. Cette contribution a conduit à l'article de journal [Koutsawa et Daya \(2007\)](#).
2. Extension du modèle micromécanique d'hétérogénéités multi-enrobées, développé initialement par [Lipinski \*et al.\* \(2006\)](#), dans le domaine quasi-statique pour tenir compte de la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques. L'implémentation numérique du modèle avec des hétérogénéités multi-enrobées ellipsoïdales homothétiques ou non homothétiques est faite dans ce travail; ceci a manqué au travail de [Barhdadi \(2005\)](#) qui s'est limité au cas des hétérogénéités multi-enrobées sphériques et homothétiques dans les applications numériques du modèle. Les diverses études paramétriques obtenues par le modèle sur des matériaux

viscoélastiques avec des propriétés dépendantes de la fréquence ont été publiées dans [Koutsawa \*et al.\* \(2008d\)](#).

3. Introduction de l'effet de glissement interfacial dans le calcul des propriétés effectives des matériaux viscoélastiques. Ceci ajoute une voie et des degrés de liberté supplémentaires pour la conception des matériaux amortissants.
4. Extension des modèles micromécaniques conventionnels pour prédire les propriétés effectives des matériaux composites contenant des nanoparticules anisotropes et ellipsoïdales faisant ainsi le pont entre la mécanique moléculaire et la mécanique des milieux continus. Cette contribution et certaines de ses applications sont soumises pour publication ([Koutsawa \*et al.\*, 2008c,e](#)).
5. Développement du [Diamant](#) MATLAB Toolbox pour résoudre plusieurs types de problèmes non linéaires en combinant la différentiation automatique et la méthode asymptotique numérique. Cette librairie peut être utilisée pour traiter d'autres types de problèmes tels que l'exemple que nous avons présenté dans la section 7.10. Cet outil de différentiation automatique particulière et certaines de ses applications sont publiés dans [Koutsawa \*et al.\* \(2008a,b\)](#).
6. Méthodologie de modélisation et de conception multi-échelles et multiobjectifs des structures en général et des plaques et poutres sandwich viscoélastiques sur des supports viscoélastiques en particulier. Ces approches permettent de coupler les outils de calculs des structures et des outils de la micromécanique. Certains exemples sont présentés dans le chapitre 8 et d'autres sont donnés dans [Koutsawa \*et al.\* \(2008f\)](#).

Ces contributions sont très importantes dans les domaines de la modélisation des matériaux composites viscoélastiques en général et également dans le domaine actif de la conception des matériaux. Ce travail a donc présenté des résultats prometteurs qui favorisent le développement futur et l'intégration des outils de la micromécanique et des outils de calcul de structures à la conception des matériaux multifonctionnels. Les outils de modélisation numérique mis en place et validés dans cette thèse ont une applicabilité

---

indéniable à la conception des matériaux dans plusieurs autres domaines (médical par exemple) pour des applications qui requièrent également des matériaux conçus pour des besoins spécifiques et exigeant la satisfaction de multiples objectifs simultanément. Enfin, ce travail peut être vu comme un travail complémentaire de celui de [Haberman \(2007\)](#).

## Perspectives et suggestions pour des travaux futurs

Les résultats présentés dans ce travail contribuent à une meilleure compréhension de la conception multiobjectif des matériaux d'une structure conçue pour une application donnée. Toutefois, plusieurs pistes d'approfondissement et d'élargissement de ce travail sont envisageables.

### *Validation expérimentale des théories*

Le point faible de ce travail est sa nature purement théorique. Une confrontation des résultats des divers modèles avec des résultats expérimentaux se révélerait encore plus enrichissant.

### *Théorie des milieux effectifs et les effets d'inertie*

Une limitation des modèles micromécaniques présentés dans ce travail est qu'ils sont juste valides dans le régime quasi-statique puisque les effets d'inertie ont été négligés dans ces modèles. Ce problème est particulièrement important lorsque l'on étudie la propagation des ondes où l'approximation quasi-statique n'est plus valable. Ce problème pourrait être résolu à l'aide d'une approche similaire aux approches micromécaniques présentées ici sans pour autant négliger les termes d'inertie dans les premières étapes de développement du modèle. Nous sommes persuadés tout de même que cela ne serait pas un problème trivial de modélisation. Toutefois, la réussite d'une telle modélisation résulterait à des mo-

dèles susceptibles d'approximer les comportements quasi-statiques et non quasi-statiques tout en maintenant les possibilités et les atouts des modèles micromécaniques présentés dans ce travail.

### *Base de données sur les propriétés mécaniques des surfaces/interfaces*

Il serait intéressant de construire une base de données des propriétés mécaniques des interfaces/surfaces dans les matériaux viscoélastiques comme cela a été fait par [Dingreville \(2007\)](#) pour des matériaux élastiques. Des simulations de statique moléculaire seront alors au préalable indispensables avant d'utiliser les formules analytiques développées par [Dingreville \(2007\)](#). Ainsi, l'impact des effets d'excès d'énergie de surface et de taille des nanoparticules peut être bien apprécié sur les propriétés amortissantes de ces types de matériaux.

### *Approche Diamant et problèmes non linéaires aux valeurs propres*

Pour la résolution des problèmes aux valeurs propres complexes, il serait utile, dans le cas des problèmes de grande dimension (plusieurs degrés de liberté), de rechercher des bases de projection comme par exemple il se fait dans les méthodes d'Arnoldi ([Jarlebring, 2003](#); [Voss, 2002a](#)). Ceci conduira donc à une réduction sensible des temps de calcul et à la réduction de l'espace de stockage des données.

### *Modèle élément fini coque sandwich pour le Verre/PVB/Verre*

Pour tenir compte des courbures des pare-brises d'automobile, il serait souhaitable de développer un modèle élément fini coque sandwich pour ces structures. Cet élément fini coque sandwich viscoélastique pourrait beaucoup mieux représenter les comportements réels des pare-brises que le modèle élément fini plaque sandwich présenté dans ce travail.

---

### *Evaluation des rigidités des ressorts aux bords du pare-brise*

Nous sommes persuadés que le matériau viscoélastique aux bords du pare-brise a des effets sur ses comportements statique, vibratoire et acoustique. La représentation de ce matériau viscoélastique par des ressorts de translation et de rotation est appropriée pour les diverses modélisations. Cependant, les formules (2.1) proposées par [Haberman \(2007\)](#) pour évaluer les rigidités de ces ressorts sont empiriques. Une revue de la littérature montre qu'aucune étude rigoureuse n'est disponible sur la détermination de la rigidité de ces ressorts même si elle semble être faite par [Kang \(1996\)](#) selon [Fan et al. \(1998\)](#). Ainsi, une étude rigoureuse sur la caractérisation de ces ressorts permettrait de mieux apprécier l'effet des conditions aux limites viscoélastiques.



# ANNEXE A

## Structures sandwich Verre/PVB/Verre

### A.1 Etude statique : constantes d'intégration

Les constantes d'intégration  $a_i$  introduites dans la solution analytique du problème poutre de la section 2.2.6 ont les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{LP}{4EI\alpha^2\eta} + \frac{L^2q\mu}{8\alpha^2} - \frac{P \sinh\left(\frac{L\alpha}{2}\right)}{2EI\alpha^3\eta} + \frac{(C_1 + C_2) \cosh\left(\frac{L\alpha}{2}\right)}{C_3}, \\ a_2 = -\frac{2EI\alpha^2\eta}{P}, \\ a_3 = -\frac{(C_1 + C_2)}{C_3}, \\ a_4 = \frac{2EI\alpha^3\eta}{P(\delta + \alpha^2\eta)}, \\ a_5 = -\frac{2EI\alpha^4\eta}{L^2q(-5L^2\delta + 48\eta)\mu + g_1(a_3, a_4)}, \\ a_6 = \frac{348\alpha^2}{2\alpha^2 K_T} \frac{Lq\mu(-EI\delta + h_0) + g_2(a_3, a_4)}{L^2q(-5L^2\delta + 48\eta)\mu + g_1(a_3, a_4)}. \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Les termes dans les expressions (A.1) sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = -48 (EI)^2 q \alpha^2 \eta^2 \mu + 24 EI P \alpha^3 \eta \sinh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) \\ \quad + (-24 P \delta + 3 L^2 P \alpha^2 \delta - 24 P \alpha^2 \eta + 2 EI L^3 q \alpha^2 \delta \eta \mu) K_R, \\ C_2 = -24 EI L q \alpha^2 \eta^2 \mu K_R + 24 P \delta \cosh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) K_R \\ \quad + 24 P \alpha^2 \eta \cosh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) K_R - 12 L P \alpha \delta \sinh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) K_R, \\ C_3 = 24 EI \alpha^3 \eta \left[ (2 EI \alpha^3 \eta - L \alpha \delta K_R) \cosh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) \right. \\ \quad \left. + 2 (\delta + \alpha^2 \eta) K_R \sinh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) \right], \end{array} \right. \quad (A.2)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(a_3, a_4) = 48 \left[ (-8 + L^2 \alpha^2) \delta - 8 \alpha^2 \eta \right] \cosh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) a_3 + 16 a_4 \left[ -(L^3 \alpha^3 \delta) \right. \\ \quad \left. + 12 L \alpha (\delta + \alpha^2 \eta) + 3 ((-8 + L^2 \alpha^2) \delta - 8 \alpha^2 \eta) \sinh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) \right], \\ g_2(a_3, a_4) = 2 \alpha^3 \left[ a_3 (EI (\delta + \alpha^2 \eta) - h_0) \sinh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) \right. \\ \quad \left. + a_4 \left( -EI \delta + (EI (\delta + \alpha^2 \eta) - h_0) \cosh \left( \frac{L \alpha}{2} \right) + h_0 \right) \right]. \end{array} \right.$$

## A.2 Vibrations libres et linéaires des poutres Verre/PVB/Verre

Les fonctions de forme utilisées dans la discrétisation EF de la section 2.3.3 sont (Dhatt *et al.*, 2005) :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi) = \frac{(1-\xi)^2(2+\xi)}{4}, \quad N_2(\xi) = \frac{l(1-\xi)^2(1+\xi)}{8}, \\ N_3(\xi) = \frac{(1+\xi)^2(2-\xi)}{4}, \quad N_4(\xi) = -\frac{l(1+\xi)^2(1-\xi)}{8}, \\ N_5(\xi) = \frac{(1-\xi)^4}{2}, \quad N_6(\xi) = \frac{(1+\xi)^4}{2}, \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

où  $l$  est la longueur de l'élément,  $\xi = 2x/l - 1$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $\xi \in [-1, 1]$ . Si  $g$  est une fonction de  $x$  qui est à tour une fonction de  $\xi$ , alors on a :

$$g' = \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l} \frac{\partial g}{\partial \xi}, \quad g'' = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{4}{l^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}, \quad \text{et} \quad \int_0^l g \, dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 g \, d\xi. \quad (\text{A.4})$$

Les matrices de rigidité et de masse élémentaires introduites dans la section 2.3.3 sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{K}^e] = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \left( EI [\mathbf{W}'''] [\mathbf{W}''']^\top + EA_1 [\mathbf{U}'_1] [\mathbf{U}'_1]^\top \right. \\ \quad \left. + EA_3 [\mathbf{U}'_3] [\mathbf{U}'_3]^\top + \hat{\mu}_2 b h_2 [\mathbf{\Gamma}_2] [\mathbf{\Gamma}_2]^\top \right) d\xi, \\ [\mathbf{M}^e] = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \left[ (\rho_1 A_1 + \rho_1 A_3 + \rho_2 A_2) [\mathbf{W}] [\mathbf{W}]^\top \right. \\ \quad \left. + \rho_1 \left( A_1 [\mathbf{U}_1] [\mathbf{U}_1]^\top + A_3 [\mathbf{U}_3] [\mathbf{U}_3]^\top \right) \right] d\xi, \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

avec  $[\mathbf{\Gamma}_2] = \left( [\mathbf{U}_1] - [\mathbf{U}_3] + h_0 [\mathbf{W}'] \right) / h_2$ .

### A.3 Éléments finis plaque sandwich

Les matrices élémentaires définies dans les expressions (2.97), et (2.99) sont :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_{e1}] &= \iint_{(x,y)_e} \left( \sum_{i=1}^3 ([\mathbf{N}_{im}]^\top [\mathbf{C}_{im}] [\mathbf{N}_{im}] + [\mathbf{N}_{ib}]^\top [\mathbf{C}_{ib}] [\mathbf{N}_{ib}] \right. \\
 &\quad \left. + [\mathbf{N}_{2s}]^\top [\mathbf{C}_{2s}] [\mathbf{N}_{2s}] \right) dx dy \\
 [\mathbf{M}_e] &= \iint_{(x,y)_e} \left( \sum_{i=1}^3 \rho_i h_i \left[ (\mathbf{N}_{ui}^\top \mathbf{N}_{ui} + \mathbf{N}_{vi}^\top \mathbf{N}_{vi} + \mathbf{N}_w^\top \mathbf{N}_w) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{h_i^2}{12} (\mathbf{N}_{\alpha i}^\top \mathbf{N}_{\alpha i} + \mathbf{N}_{\beta i}^\top \mathbf{N}_{\beta i}) \right] \right) dx dy.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

En utilisant les expressions (2.81), (2.83), et (2.84), les termes de (A.6) sont comme ci-après :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{N}_{1m}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u1,x} \\ \mathbf{N}_{v1,y} \\ \mathbf{N}_{u1,y} + \mathbf{N}_{v1,x} \end{bmatrix}, & [\mathbf{N}_{3m}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u3,x} \\ \mathbf{N}_{v3,y} \\ \mathbf{N}_{u3,y} + \mathbf{N}_{v3,x} \end{bmatrix}, \\
 [\mathbf{N}_{1b}] &= \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{w,xx} \\ -\mathbf{N}_{w,yy} \\ -2\mathbf{N}_{w,xy} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}_{2m}] &= \frac{[\mathbf{N}_{1m}] + [\mathbf{N}_{3m}]}{2} + \frac{h_3 - h_1}{4} [\mathbf{N}_{1b}], \\
[\mathbf{N}_{2b}] &= \frac{[\mathbf{N}_{1m}] - [\mathbf{N}_{3m}]}{h_2} - \frac{h_3 + h_1}{2h_2} [\mathbf{N}_{1b}], \\
[\mathbf{N}_{2s}] &= \frac{1}{h_2} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u1} - \mathbf{N}_{u3} + h_0 \mathbf{N}_{w,x} \\ \mathbf{N}_{v1} - \mathbf{N}_{v3} + h_0 \mathbf{N}_{w,y} \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{N}_{3b}] &= [\mathbf{N}_{1b}], \quad \mathbf{N}_{\alpha 1} = \mathbf{N}_{\alpha 3} = \mathbf{N}_{w,x}, \\
\mathbf{N}_{\alpha 2} &= \frac{\mathbf{N}_{u1} - \mathbf{N}_{u3}}{h_2} + \frac{h_3 + h_1}{2h_2} \mathbf{N}_{w,x}, \\
\mathbf{N}_{\beta 2} &= \frac{\mathbf{N}_{v1} - \mathbf{N}_{v3}}{h_2} + \frac{h_3 + h_1}{2h_2} \mathbf{N}_{w,y}, \\
\mathbf{N}_{u2} &= \frac{\mathbf{N}_{u1} + \mathbf{N}_{u3}}{2} + \frac{h_1 - h_3}{4} \mathbf{N}_{w,x}, \\
\mathbf{N}_{v2} &= \frac{\mathbf{N}_{v1} + \mathbf{N}_{v3}}{2} + \frac{h_1 - h_3}{4} \mathbf{N}_{w,y}, \\
h_0 &= h_2 + \frac{h_1 + h_3}{2}, \\
\mathbf{N}_{\beta 1} &= \mathbf{N}_{\beta 3} = \mathbf{N}_{w,y}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Les autres termes dans les formules (A.7) et (A.8) sont les fonctions de forme classiques utilisées dans la section 2.5.5 (Dhatt *et al.*, 2005).



## Hétérogénéités multi-enrobées

### B.1 Calcul numérique des tenseurs d'interaction

Les tenseurs d'interaction  $\mathbf{T}^Y(\mathbf{C}^X)$  introduits dans le chapitre 3 sont définis en fonction du tenseur de Green modifié par les relations suivantes (Haberman, 2007) :

$$\begin{aligned}
 T_{ijkl}^Y(\mathbf{C}^X) &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \int_{V_Y} \Gamma_{ijkl}^X(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathrm{d}\mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{r}' \\
 &= \frac{1}{V_Y} \int_{V_Y} \int_{V_Y} -\frac{1}{2} [G_{ik,jl}^X(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + G_{jk,il}^X(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \mathrm{d}\mathbf{r} \mathrm{d}\mathbf{r}' \\
 &= \frac{1}{V_Y} (T_{ijkl}^{Y,p} + T_{jikl}^{Y,p}).
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Le tenseur  $\mathbf{T}^{Y,p}$  est défini dans le cas d'une ellipsoïde de demi-axes  $a$ ,  $b$  et  $c$  par :

$$T_{klmj}^{Y,p} = \frac{abc}{6} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \zeta_t \Psi_{lt} \zeta_u \Psi_{ju} M_{km}^{-1} \sin \theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta, \tag{B.2}$$

où les tenseurs  $\zeta$ ,  $\Psi$  et  $\mathbf{M}$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \zeta = [\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta]^\top, \\
 \Psi_{11} = 1, \Psi_{22} = \frac{a}{b}, \Psi_{33} = \frac{a}{c}, \Psi_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j. \\
 M_{ki} = C_{ijkl}^X \Psi_{lt} \Psi_{ju} \zeta_t \zeta_u.
 \end{array} \right. \tag{B.3}$$

Notons que le tenseur d'interaction est relié au tenseur  $\mathbf{S}^Y(\mathbf{C}^X)$  de Eshelby par la relation :

$$\mathbf{S}^Y(\mathbf{C}^X) = \mathbf{T}^Y(\mathbf{C}^X) : \mathbf{C}^X. \quad (\text{B.4})$$

## B.2 Tenseurs d'interaction dans le cas isotrope

Les parties sphérique et déviatorique des tenseurs utiles pour résoudre le système d'équations non linéaires (3.65) pour obtenir  $\hat{\mu}^{\text{eff}}$  et  $\hat{\kappa}^{\text{eff}}$  sont définies ci-dessous.

### B.2.1 Les parties de $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(i/j)}$

A partir des formules (3.59) et (3.64) on obtient :

$$\begin{cases} \hat{S}_{\vartheta}^{(i/j)} = \frac{3\hat{\kappa}_i + 4\hat{\mu}_j}{3\hat{\kappa}_j + 4\hat{\mu}_j}, \\ \hat{D}_{\vartheta}^{(i/j)} = \frac{3\hat{\kappa}_j(2\hat{\mu}_i + 3\hat{\mu}_j) + 4\hat{\mu}_j(4\hat{\mu}_i + 2\hat{\mu}_j)}{5\hat{\mu}_j(3\hat{\kappa}_j + 4\hat{\mu}_j)}. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

### B.2.2 Les parties de $\hat{\Pi}^j$

Notons que :

$$\hat{\Pi}^1 = \mathbf{I}^s + \mathbf{I}^d, \quad \text{et} \quad \hat{\Pi}^2 = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{(1/2)}.$$

$$\begin{cases} \hat{S}_{\Pi}^j = \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k \hat{S}_{\Pi}^k \hat{S}_{\vartheta}^{(k/j)}}{\sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k}, \\ \hat{D}_{\Pi}^j = \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k \hat{D}_{\Pi}^k \hat{D}_{\vartheta}^{(k/j)}}{\sum_{k=1}^{j-1} \varphi_k}, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

pour  $j = \{3, 4, \dots, n\}$ .

### B.2.3 Les parties de $\hat{\mathbf{a}}^1$

De la formule (3.51), on obtient :

$$\begin{cases} \hat{S}_a^1 &= \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k \hat{S}_\Pi^k \right)^{-1}, \\ \hat{D}_a^1 &= \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k \hat{D}_\Pi^k \right)^{-1}. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

### B.2.4 Les parties de $\hat{\mathbf{a}}^k$

La formule (3.49) donne :

$$\begin{cases} \hat{S}_a^k &= \hat{S}_\Pi^k \hat{S}_a^1, \\ \hat{D}_a^k &= \hat{D}_\Pi^k \hat{D}_a^1. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

### B.2.5 Les parties de $\hat{\mathbf{A}}^I$

La formule (3.57) permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \hat{S}_A^I &= \left[ 1 + \hat{\Lambda}_3 \sum_{i=1}^n \varphi_i (\hat{\kappa}_i - \hat{\kappa}^{\text{eff}}) \hat{S}_a^k \right]^{-1}, \\ \hat{D}_A^I &= \left[ 1 + \hat{\Lambda}_4 \sum_{i=1}^n \varphi_i (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}^{\text{eff}}) \hat{D}_a^k \right]^{-1}, \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{avec : } \hat{\Lambda}_3 = \frac{3}{4\hat{\mu}^{\text{eff}} + 3\hat{\kappa}^{\text{eff}}}, \quad \hat{\Lambda}_4 = \frac{6(\hat{\kappa}^{\text{eff}} + 2\hat{\mu}^{\text{eff}})}{5\hat{\mu}^{\text{eff}}(4\hat{\mu}^{\text{eff}} + 3\hat{\kappa}^{\text{eff}})}.$$

### B.2.6 Les parties de $\hat{\mathbf{A}}^k$

La formule (3.56) donne :

$$\begin{cases} \hat{S}_A^k &= \hat{S}_a^k \hat{S}_A^I, \\ \hat{D}_A^k &= \hat{D}_a^k \hat{D}_A^I. \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

### B.3 Séries de Prony pour les matériaux VE A et B

Les séries de Prony des matériaux viscoélastiques A et B considérés dans les études de la section 3.6 sont (Friebel *et al.*, 2006) :

Matériau A (rigide)				Matériau B (souple)			
Cis		Comp		Cis		Comp	
$\tau_i$	$\mu_i$	$\tau_i$	$\kappa_i$	$\tau_i$	$\mu_i$	$\tau_i$	$\kappa_i$
3	3.162	10	40	0.032	2.512	0.1	3
10	17.783			0.100	10.	0.316	0.1
32	100			0.316	56.234		
100	316.228			1	316.228		
316	1000			3.162	1000		
1000	5623.413			10	199.526		
3162	10,000			31.623	50.119		
10,000	562.341			100	19.953		
31,623	141.254			316.228	12.589		
100,000	56.234			1000	2.512		
316,228	17.783			3162.278	1.698		
1,000,000	5.623			10,000	1.202		
3,162,278	3.162			31,622.777	1.148		
10,000,000	1.778			100,000	1.096		

TAB. B.1 – Séries de Prony pour les matériaux VE A et B.

$$\mu_{\infty}^A = 17,948.761 \text{ bar}, \kappa_{\infty}^A = 48,000 \text{ bar}, \mu_{\infty}^B = 1677.979 \text{ bar}, \kappa_{\infty}^B = 3300 \text{ bar}.$$

$\tau_i$  et  $\kappa_i$  sont respectivement en [ $10^3 \times s$ ] et [ $10^3 \times \text{bar}$ ] pour les paramètres du module de compressibilité (Comp) tandis que  $\tau_i$  et  $\mu_i$  sont respectivement en [s] et [bar] pour les paramètres du module de cisaillement (Cis).

# ANNEXE C

## Effet de glissement et amortissement

### C.1 Calcul du tenseur d'ordre quatre $\mathbf{R}$

#### C.1.1 Cas d'une ellipsoïde

Considérons une hétérogénéité ellipsoïdale de demi-axes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . En utilisant l'expression (4.4) dans la formule (4.7) de  $\mathbf{R}$ , nous obtenons :

$$R_{ijkl} = \alpha P_{ijkl} + (\beta - \alpha) Q_{ijkl}, \quad (\text{C.1})$$

avec

$$P_{ijkl} = \frac{3}{16\pi} \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\pi} \left( \delta_{ik} \hat{n}_j \hat{n}_l + \delta_{jk} \hat{n}_i \hat{n}_l + \delta_{il} \hat{n}_j \hat{n}_k + \delta_{jl} \hat{n}_i \hat{n}_k \right) \frac{d\theta}{n} \right] \sin(\phi) d\phi, \quad (\text{C.2})$$

$$Q_{ijkl} = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_k \hat{n}_l}{n} d\theta \right] \sin(\phi) d\phi, \quad (\text{C.3})$$

$$n = \sqrt{\hat{n}_i \hat{n}_i}, \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \left( \frac{\sin(\phi) \cos(\theta)}{a_1}, \frac{\sin(\phi) \sin(\theta)}{a_2}, \frac{\cos(\phi)}{a_2} \right). \quad (\text{C.5})$$

### C.1.2 Cas des sphères

Pour les sphères nous avons  $a_1 = a_2 = a_3 = a$  et  $n = 1/a$ . Ainsi, on obtient les expressions réduites suivantes :

$$P_{ijkl} = \frac{1}{a} I_{ijkl}, \quad Q_{ijkl} = \frac{1}{5a} (2I_{ijkl} + \delta_{ij} \delta_{kl}). \quad (\text{C.6})$$

### C.1.3 Cas des cylindres

Pour les cylindres,  $a_1 = a_2 = a, a_3 \rightarrow \infty$ . Les composantes non nulles des tenseurs d'ordre quatre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont

$$P_{1111} = P_{2222} = 4P_{2323} = 4P_{1313} = 2P_{1212} = \frac{3\pi}{8a}, \quad (\text{C.7})$$

$$Q_{1111} = Q_{2222} = 3Q_{2323} = 3Q_{1313} = 3Q_{1212} = \frac{9\pi}{32a}. \quad (\text{C.8})$$

## C.2 Tenseur de Eshelby pour les matériaux isotropes

### C.2.1 Ellipsoïde $a_1 > a_2 > a_3$

Pour  $i \neq j$  et  $i = j$

$$\begin{cases} S_{ijjj} = Ma_j^2 I_{ij} - NI_i, \\ S_{ijij} = \frac{1}{2}M(a_i^2 + a_j^2)I_{ij} + \frac{1}{2}N(I_i + I_j), \\ S_{iiii} = 3Ma_i^2 I_{ii} + NI_i, \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

où :

$$M = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}, \quad N = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}, \quad (\text{C.10})$$

$\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau. Les constantes  $I_i$  et  $I_{ij}$  dans les formules du C.9 sont définies comme suit :

$$I_1 = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left[ F(\theta, k) - E(\theta, k) \right], \quad (\text{C.11})$$

$$I_3 = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(a_2^2 - a_3^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left[ \frac{a_2 \sqrt{a_1^2 - a_3^2}}{a_1 a_3} - E(\theta, k) \right], \quad (\text{C.12})$$

où :

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad (\text{C.13})$$

$$E(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad (\text{C.14})$$

$$\theta = \sin^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}} \right), \quad k = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}}. \quad (\text{C.15})$$

Les relations suivantes permettent de déterminer les  $I_i$  et  $I_{ij}$  en fonction de  $I_1$  et  $I_3$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi, & I_{12} = \frac{I_2 - I_1}{a_1^2 - a_2^2}, \\ 3I_{11} + I_{12} + I_{13} = \frac{4\pi}{a_1^2}, & 3a_1^2 I_{11} + a_2^2 I_{12} + a_3^2 I_{13} = 3I_1, \\ 3I_{22} + I_{21} + I_{23} = \frac{4\pi}{a_2^2}, & 3a_2^2 I_{22} + a_1^2 I_{21} + a_3^2 I_{23} = 3I_2, \\ 3I_{33} + I_{32} + I_{31} = \frac{4\pi}{a_3^2}, & 3a_3^2 I_{33} + a_1^2 I_{31} + a_2^2 I_{32} = 3I_3, \end{array} \right. \quad (\text{C.16})$$

### C.2.2 Sphère $a_1 = a_2 = a_3 = a$

Ces relations se simplifient d'une manière significative lorsqu'il s'agit d'une géométrie sphérique comme suit :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 = I_3 = \frac{4\pi}{3}, \\ I_{11} = I_{22} = I_{33} = I_{12} = I_{23} = I_{31} = \frac{4\pi}{5a^2}. \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

### C.2.3 Oblate spheroid $a_1 = a_2 > a_3$

Cette géométrie a été utilisée dans nos calculs numériques. Elle conduit généralement à un comportement d'isotropie transverse. Les relations permettant de caractériser le tenseur de [Eshelby](#) se simplifient comme suit :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 = \frac{2\pi a_1^2 a_3}{(a_1^2 - a_3^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{a_3}{a_1} \right) - \frac{a_3}{a_1} \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}} \right], \\ I_3 = 4\pi - 2I_1, \quad I_{13} = I_{23} = \frac{I_1 - I_3}{a_3^2 - a_1^2}, \\ I_{11} = I_{22} = I_{12}, \quad I_{12} = \frac{\pi}{a_1^2} - \frac{I_{13}}{4}, \quad 3I_{33} = \frac{4\pi}{a_3^2} - 2I_{13}. \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

### C.2.4 Prolate spheroid $a_1 > a_2 = a_3$

Cette géométrie induit un comportement similaire à la précédente (comportement d'isotropie transverse). Les relations sont définies dans ce cas par :

$$\begin{cases} I_2 = I_3 = \frac{2\pi a_3^2 a_1}{(a_1^2 - a_3^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left[ -\cosh^{-1} \left( \frac{a_1}{a_3} \right) + \frac{a_1}{a_3} \sqrt{-1 + \frac{a_1^2}{a_3^2}} \right], \\ I_1 = 4\pi - 2I_2, \\ I_{13} = I_{12} = \frac{I_2 - I_1}{a_1^2 - a_2^2}, \quad 3I_{11} = \frac{4\pi}{a_2^2} - 2I_{12}, \\ I_{22} = I_{33} = 3I_{23}, \quad 3I_{22} = \frac{4\pi}{a_2^2} - I_{23} - I_{12}, \quad I_{23} = \frac{4\pi}{a_2^2} - I_{12}. \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

## Concept d'énergie de surface et nanomécanique

### D.1 Décomposition "T" stress

On considère un solide en élasticité linéaire avec une densité d'énergie de déformation par unité de volume définie par :

$$\psi = \psi_0 + \tau_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad (\text{D.1})$$

où  $\varepsilon_{ij}$  est le tenseur de déformation Lagrangienne. Le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff correspondante est ainsi définie par :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (\text{D.2})$$

D'une façon équivalente, l'expression (D.2) peut être réécrite comme suit :

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \tau_{\alpha\beta}^s + C_{\alpha\beta\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda}^s + C_{\alpha\beta 3k}\varepsilon_k^t, \quad \sigma_j^t = \tau_j^t + C_{3j\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda}^s + C_{3j3k}\varepsilon_k^t, \quad (\text{D.3})$$

où la convention de sommation est appliquée ; les indices en lettres romaines vont de 1 à 3 tandis que les indices en lettres grecques vont de 1 à 2. On a :

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \sigma_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^s = \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \sigma_j^t = \sigma_{3j}, \quad \varepsilon_\alpha^t = 2\varepsilon_{\alpha 3}, \quad \varepsilon_3^t = \varepsilon_{33}, \quad \tau_{\alpha\beta}^s = \tau_{\alpha\beta}, \quad \tau_j^t = \tau_{3j}. \quad (\text{D.4})$$

En supposant que le tenseur d'ordre deux  $C_{3k3j}$  est inversible, la seconde expression de (D.3) peut être réécrite comme :

$$\varepsilon_k^t = -M_{kj}\tau_j^t + M_{jk}\sigma_j^t - \gamma_{k\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}^s, \quad (\text{D.5})$$

où :

$$M_{kj} = C_{3k3j}^{-1}, \quad \gamma_{k\alpha\beta} = M_{kj}C_{3k\alpha\beta}. \quad (\text{D.6})$$

En utilisant la formule (D.5) dans la première expression de (D.3), on obtient :

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \hat{\tau}_{\alpha\beta}^s + C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^s \varepsilon_{\kappa\lambda}^s + \gamma_{j\alpha\beta} \sigma_j^t, \quad (\text{D.7})$$

avec :

$$\hat{\tau}_{\alpha\beta}^s = \tau_{\alpha\beta}^s - \tau_j^t \gamma_{j\alpha\beta}, \quad C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^s = C_{\alpha\beta\kappa\lambda} - C_{\alpha\beta 3j} \gamma_{j\kappa\lambda}. \quad (\text{D.8})$$

En utilisant la notation tensorielle, les formules (D.1), (D.5) et (D.7) peuvent s'écrire, respectivement comme suit :

$$\psi = \varsigma_0 + \hat{\boldsymbol{\tau}}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^s : \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t, \quad (\text{D.9})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = -\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau}^t + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t - \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\varepsilon}^s, \quad (\text{D.10})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \hat{\boldsymbol{\tau}}^s + \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t. \quad (\text{D.11})$$

avec :

$$\varsigma_0 = \psi_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau}^t. \quad (\text{D.12})$$

Si de plus, le matériau est isotrope, c'est-à-dire :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (\text{D.13})$$

où  $\lambda$  and  $\mu$  sont les constantes de Lamé, alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{3k3j} = (\lambda + \mu) \delta_{3k} \delta_{3j} + \mu \delta_{kj}, \\ M_{kj} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \delta_{3k} \delta_{3j} + \frac{1}{\mu} \delta_{kj}, \\ \gamma_{i\alpha\beta} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{3i} \delta_{\alpha\beta}, \\ C_{\alpha\beta\kappa\lambda}^s = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\kappa\lambda} + \mu (\delta_{\alpha\kappa} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\kappa}). \end{array} \right. \quad (\text{D.14})$$

## D.2 Description au niveau atomique

La différence en position de deux atomes  $m$  et  $n$  au voisinage de leur position de relaxation est définie par :

$$r_i^{mn} - \hat{r}_i^{mn} = A_{i\alpha\beta}^{mn} \varepsilon_{\alpha\beta}^s + B_{ik}^{mn} \sigma_k^t + (\tilde{\varepsilon}_{ij}^m \hat{r}_j^m - \tilde{\varepsilon}_{ij}^n \hat{r}_j^n), \quad (\text{D.15})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{i\alpha\beta}^{mn} = (A_{ij\alpha\beta}^{\pm,m} + A_{ij\alpha\beta}^{\pm,n}) \hat{r}_j^{mn} - (A_{ij\alpha\beta}^{\pm,n} \hat{r}_j^m - A_{ij\alpha\beta}^{\pm,m} \hat{r}_j^n), \\ B_{ik}^{mn} = (B_{ijk}^{\pm,m} + B_{ijk}^{\pm,n}) \hat{r}_j^{mn} - (B_{ijk}^{\pm,n} \hat{r}_j^m - B_{ijk}^{\pm,m} \hat{r}_j^n). \end{array} \right. \quad (\text{D.16})$$

L'énergie de déformation totale de l'assemblage atomique (cf. 6.2.1) est :

$$\begin{aligned}
 E = & E_0 + \overline{\mathbf{A}}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \overline{\mathbf{B}}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^s : \overline{\mathbf{A}}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \overline{\mathbf{B}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t \\
 & + \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \overline{\mathbf{Q}} : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \sum_{n=1}^{N-1} (\mathbf{K}^n + \mathbf{D}^n : \boldsymbol{\varepsilon}^s + \mathbf{G}^n \cdot \boldsymbol{\sigma}^t) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^n \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^n : \mathbf{L}^{mn} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^m.
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

avec

$$E_0 = \sum_n \frac{1}{\Omega_n} \sum_{m \neq n} E^{(n)} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}}, \tag{D.18}$$

$$\overline{A}_{\alpha\beta}^{(1)} = \sum_n \frac{1}{\Omega_n} \sum_{m \neq n} \frac{\partial E^{(n)}}{\partial r_i^{mn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} A_{i\alpha\beta}^{mn}, \tag{D.19}$$

$$\overline{B}_k^{(1)} = \sum_n \frac{1}{\Omega_n} \sum_{m \neq n} \frac{\partial E^{(n)}}{\partial r_i^{mn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} B_{ik}^{mn}, \tag{D.20}$$

$$\overline{A}_{\alpha\beta\hat{k}\lambda}^{(2)} = \sum_n \frac{1}{\Omega_n} \sum_{m \neq n} \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{mn} \partial r_k^{mn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} A_{i\alpha\beta}^{mn} A_{k\hat{k}\lambda}^{mn}, \tag{D.21}$$

$$\overline{B}_{jl}^{(2)} = \sum_n \frac{1}{\Omega_n} \sum_{m \neq n} \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{mn} \partial r_k^{mn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} B_{ij}^{mn} B_{kl}^{mn}, \tag{D.22}$$

$$\overline{Q}_{\alpha\beta j} = \sum_n \frac{1}{\Omega_n} \sum_{m \neq n} \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{mn} \partial r_k^{mn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} A_{i\alpha\beta}^{mn} B_{kj}^{mn}, \tag{D.23}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^n = & \frac{1}{2\Omega_n} \hat{r}_j^n \left( \sum_{p \neq n} \frac{\partial E^{(p)}}{\partial r_i^{pn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} - \frac{\partial E^{(n)}}{\partial r_i^{pn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} \right) \\
 & + \frac{1}{2\Omega_n} \hat{r}_i^n \left( \sum_{p \neq n} \frac{\partial E^{(p)}}{\partial r_j^{pn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} - \frac{\partial E^{(n)}}{\partial r_j^{pn}} \Big|_{r^{mn} = \hat{r}^{mn}} \right),
 \end{aligned} \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}
 D_{ij\alpha\beta}^n &= \frac{1}{2\Omega_n} \hat{r}_j^n \sum_{p \neq n} \sum_{q \neq n} \left[ \left( \frac{\partial^2 E^{(p)}}{\partial r_i^{pn} \partial r_k^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} - \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{pn} \partial r_k^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} \right) A_{k\alpha\beta}^{pn} \right] \\
 &+ \frac{1}{2\Omega_n} \hat{r}_i^n \sum_{p \neq n} \sum_{q \neq n} \left[ \left( \frac{\partial^2 E^{(p)}}{\partial r_j^{pn} \partial r_l^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} - \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_j^{pn} \partial r_l^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} \right) A_{l\alpha\beta}^{pn} \right], \tag{D.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{ijv}^n &= \frac{1}{2\Omega_n} \hat{r}_j^n \sum_{p \neq n} \sum_{q \neq n} \left[ \left( \frac{\partial^2 E^{(p)}}{\partial r_i^{pn} \partial r_k^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} - \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{pn} \partial r_k^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} \right) B_{kv}^{pn} \right] \\
 &+ \frac{1}{2\Omega_n} \hat{r}_i^n \sum_{p \neq n} \sum_{q \neq n} \left[ \left( \frac{\partial^2 E^{(p)}}{\partial r_j^{pn} \partial r_l^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} - \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_j^{pn} \partial r_l^{qn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} \right) B_{lv}^{pn} \right], \tag{D.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{ijkl}^{mn} &= \frac{1}{2\Omega_n} \left( \sum_{p \neq n} \frac{\partial^2 E^{(p)}}{\partial r_i^{pn} \partial r_k^{pn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} + \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{pn} \partial r_k^{pn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} \right) \hat{r}_j^n \hat{r}_l^n \delta_{mn} \\
 &+ \frac{1}{2\Omega_n} \left( \sum_{p \neq n} \frac{\partial^2 E^{(p)}}{\partial r_j^{pn} \partial r_l^{pn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} + \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_j^{pn} \partial r_l^{pn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} \right) \hat{r}_i^n \hat{r}_k^n \delta_{mn} \\
 &- \frac{1}{4\Omega_n} \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_i^{mn} \partial r_k^{mn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} (\hat{r}_j^n \hat{r}_l^m + \hat{r}_j^m \hat{r}_l^n) (1 - \delta_{mn}) \\
 &- \frac{1}{4\Omega_n} \frac{\partial^2 E^{(n)}}{\partial r_j^{mn} \partial r_l^{mn}} \Big|_{r^{mn}=\hat{r}^{mn}} (\hat{r}_i^n \hat{r}_k^m + \hat{r}_i^m \hat{r}_k^n) (1 - \delta_{mn}). \tag{D.27}
 \end{aligned}$$



## Création des fichiers de données

Pour tous les calculs numériques de ce travail, nous avons utilisé le logiciel MATLAB. Les éléments finis présentés dans le travail ont donc été implémentés constituant ainsi un code d'éléments finis spécial pour nos différentes expérimentations numériques. Cette annexe décrit la procédure permettant la création des fichiers de données aux calculs d'éléments finis.

### E.1 Fichier des données

Les données nécessaires aux analyses statiques et vibratoires par éléments finis des poutres et plaques sandwich viscoélastiques sont mises en forme dans un fichier de données `LaminatedGlassPlate.inp` par exemple.

```
1 LaminatedGlassPlate.msh
2
3 *GEOMETRY
4 THICKNESS1=0.005
5 THICKNESS2=0.00152
6 THICKNESS3=0.005
7 LENGTH=1.600
8 WIDTH=1.600
9 **
10
11 *MATERIAL
12 YOUNG1=6.89e+010
```

```
13 YOUNG2=689.5e+3
14 YOUNG3=6.89e+010
15 NU1=0.22
16 NU2=0.49
17 NU3=0.22
18 RHO1=2737
19 RHO2=999
20 RHO3=2737
21 **
22
23 *ENDFILE
```

Le fichier `LaminatedGlassPlate.inp` contient le nom (`LaminatedGlassPlate.msh`) du fichier (placé dans le même répertoire que `LaminatedGlassPlate.inp`) définissant le maillage de la structure analysée. Le contenu du fichier est détaillé dans la section [E.2](#).

## E.2 Maillage

Le maillage crée les entités géométriques indispensables au fichier de données et à l'analyse. Nous avons utilisé pour nos études le code `GiD 8.0.9` comme générateur de maillage. Voici un exemple de contenu du fichier `LaminatedGlassPlate.msh` :

```
1 MESH      dimension 3 ElemType Quadrilateral  Nnode 4
2 Coordinates
3 25
4      1          0          0          0
5      2          0          0.4        0
6      3          0.4        0          0
7      4          0.4        0.4        0
8      ...
9      ...
10     23          1.6        1.2        0
11     24          1.2        1.6        0
12     25          1.6        1.6        0
13 end coordinates
14
15 Elements
16 16
17     1          3          4          2          1
18     2          6          7          4          3
19     3          10         13         7          6
20     ...
21     ...
22     14         14         22         19         12
```

```
23     15     20     24     22     14
24     16     23     25     24     20
25 end elements
26 MESH     dimension 3 ElemType Linear  Nnode 2
27 Coordinates
28 end coordinates
29
30 Elements
31 16
32     17     1     3
33     18     3     6
34 ...
35 ...
36     30     11     5
37     31     5     2
38     32     2     1
39 end elements
40
41 some infos about mesh
42 nx=4
43 ny=4
44 IndCenter=9
45 ndofn=7
46 nnel=4
```

### E.3 Lecture des données

Les données écrites dans les fichiers présentés sont lues par la fonction `read_inputs`.

```
1 [model]=read_inputs(pname, fname);
```

Les entrées `pname` et `fname` de cette fonction sont respectivement le nom du répertoire et le nom du fichier `.inp` permettant l'accès du fichier de données. La sortie `model` est une structure (au sens de MATLAB), c'est-à-dire un objet avec plusieurs champs. Par exemple `model.NN` contient le nombre de noeuds de la structure discrétisée.



# Bibliographie

- Abdoun, F., Azrar, L., Daya, E.M., Potier-Ferry, M., 2008. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. Accepted for publication in *Computers and Structures*.
- Achenbach, J.D., Zhu, H., 1989. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 37, 381–393.
- Ackland, G.J., Finnis, M.W., 1986. Semi-empirical calculation of solid surface tensions in body-centered cubic transition metals. *Philosophical Magazine A* 54 (2), 301–315.
- Ackland, G.J., XTichy, G., Vitek, V., Finnis, M.W., 1987. N-body potentials for the noble metals and nickel. *Philosophical Magazine* 56 (6), 735–756.
- Aşik, M., Tezcan, S., 2005. A mathematical model for the behavior of laminated glass beams. *Computer and Structures* 83, 1742–1753.
- Aşik, M. Z., 2003. Laminated glass plates : revealing of nonlinear behavior. *Computers and Structures* 81, 2659–2671.
- Aşik, M. Z., 2004. Laminated circular glass plates with elastic supports. In : *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- Alber, I., Bassani, J.L., Khantha, M., Vitek, V., Wang, G.J., 1992. Grain boundaries as heterogeneous systems : Atomic and continuum elastic properties. *Philosophical Transactions : Physical Sciences and Engineering* 339 (1655), 555–586.
- Alymov, M.I., Shorshorov, M.K., 1999. Surface tension of ultrafine particles. *Nanostructured Materials* 12, 365–368.
- Anson, L.W., Chivers, R.C., 1989. Ultrasonic propagation in suspensions : A comparison of a multiple scattering and effective medium approach. *Journal of the Acoustical Society of America* 85 (2), 535–540.
- Anson, L.W., Chivers, R.C., 1993. Ultrasonic scattering from spherical shells including viscous and thermal effects. *Journal of the Acoustical Society of America* 93 (4), 1687–1699.

- Appel, W., 2006. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, 3<sup>e</sup> édition. H&K Editions.
- Arquier, R., 2005. <http://www.lma.cnrs-mrs.fr/manlab>, Manlab : logiciel de continuation interactif (manuel utilisateur).
- Asaro, R.J., Barnett, D.M., 1975. The non-uniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23, 77–83.
- Ashbey, M.F., 1999. *Materials Selection in Mechanical Design*. Oxford, UK : Butterworth-Heinemann.
- Azrar, L., Benamar, R., Potier-Ferry, M., 1999. An asymptotic-numerical method for large amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibration* 220 (4), 695–727.
- Azrar, L., Cochelin, B., Damil, N., Potier-Ferry, M., 1993a. An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behavior of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36, 1251–1277.
- Azrar, L., Cochelin, B., Damil, N., Potier-Ferry, M., 1993b. An asymptotic numerical method to compute the postbuckling behavior of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (8), 1251–1277.
- Baird, A.M., Kerr, F.H., Townend, D.J., 1999. Wave propagation in a viscoelastic medium having fluid-filled microspheres. *Journal of the Acoustical Society of America* 105, 1527–1538.
- Baker, G.A. Jr., Graves-Morris, P., 1996. *Padé Approximants*. New York : Cambridge University Press.
- Barhdadi, E.H., 2005. *Modélisation micromécanique des matériaux composites à renforts ellipsoïdaux multienrobés et applications*. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- Barhdadi, E.H., Lipinski, P., Cherkaoui, M., 2007. Four phase model : A new formulation to predict the effective elastic moduli of composites. *Journal of Engineering Materials and Technology* 129, 313–320.
- Bassani, J. L., Vitek, V., Alber, I., 1992. Atomic-level elastic properties of interfaces and their relation to continua. *Acta Metallurgica et Materialia* 40 (S), 307–320.
- Bathe, K.J., 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall.
- Bathoz, J.L., Dhatt, G., 1990. *Modélisation des structures par éléments finis*. Coques. Hermès science publications, Paris.
- Behr, R.A., Minor, J.E., Norville, H.S., 1993. Structural behavior of architectural laminated glass. *Journal of Structural Engineering ASCE* 119 (1), 202–222.

- 
- Bell, E., 1934. Exponential polynomials. *Ann. of Math.* 35, 258–277.
- Benkassam, S., 2007. Propriétés mécaniques et modélisation multiéchelle de l’effet de taille dans les polycristaux nanométriques. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- Berthelot, J.M., Sefrani, Y., 2006. Damping analysis of unidirectional glass fiber composites with interleaved viscoelastic layers : Experimental investigation and discussion. *Journal of Composite Materials* 40 (21), 1911–1932.
- Berveiller, M., Fassi-Fehri, O., Hihi, A., 1987. The problem of two plastic and heterogeneous inclusions in an anisotropic medium. *International Journal of Engineering Science* 25 (6), 691–709.
- Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L., Forest, S., 2001. Mécanique non linéaire des matériaux, 1ère édition. Hermès-Lavoisier.
- Betcke, Timo, 2002. Efficient methods for nonlinear eigenvalue problems.  
URL [citeseer.ist.psu.edu/betcke02efficient.html](http://citeseer.ist.psu.edu/betcke02efficient.html)
- Betcke, T., Voss, H., 2002. A Jacobi–Davidson–type projection method for nonlinear eigenvalue problems.  
URL [citeseer.ist.psu.edu/betcke02jacobidavidsonstype.html](http://citeseer.ist.psu.edu/betcke02jacobidavidsonstype.html)
- Bischof, Christian H., Lang, Bruno, Vehreschild, Andre, 2003. Automatic differentiation for MATLAB programs. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 2 (1), 50–53.
- Blackstock, D.T., 2000. *Fundamentals of Physical Acoustics*. Wiley-Interscience, New York.
- Blakely, J.M., 1973. *Introduction to the Properties of Crystal Surfaces*. Pergamon Press, New York.
- Brezinski, C., Redivo-Zaglia, M., 2006. *Méthodes numériques itératives*, 1ère édition. Ellipses.
- Brinson, L.C., Lin, W.S., 1998. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composite Structures* 41, 353–367.
- Büchter, N., Ramm, E., Roehl, D., 1994. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 37, 2551–2568.
- Carpick, R., Yap, H., Lakes, R.S., 2007. Mechanical instabilities of individual multi-walled carbon nanotubes under cyclic axial compression. *Nano Letters* 7 (5), 1149–1154.
- Carrera, E., 2000. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite Structures* 50, 183–198.
- Chandrasekhar, S., 1965. The stability. *Proc. R. Soc. London, A* 286, 1.

- Chandrasekhar, S., 1969. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. Yale University Press, New Haven.
- Charpentier, I., 2007. High order automatic differentiation techniques for the asymptotic numerical method. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00168306/fr/>.
- Charpentier, I., Lejeune, A., Potier-Ferry, M., 2008. The Diamant library for an efficient Automatic Differentiation of the Asymptotic Numerical Method. In : C.H. Bischof, H.M. Bücker, P. Hovland, U. Naumann, J. Utke (Eds.), Advances in Automatic Differentiation, in : Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Volume 64. pages. 139–149.
- Charpentier, I., Potier-Ferry, M., 2008. Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique Typée : l'approche Diamant. Comptes Rendus Mécanique 336, 336–340.
- Charpentier, I., Utke, J., 2008. Fast higher order derivative tensors. Optimization Methods and Software DOI : 10.1080/10556780802413769, under review at OMS ; also available as preprint ANL/MCS-P1463-1107.
- Chen, T., Dvorak, G.J., Yu, C.C., 2007a. Size-dependent elastic properties of unidirectional nano-composites with interface stresses. Acta Mechanica 188, 39–54.
- Chen, T., Dvorak, G.J., Yu, C.C., 2007b. Solids containing spherical nano-inclusions with interface stresses : Effective properties and thermal-mechanical connections. International Journal of Solids and Structures 44, 941–955.
- Chen, X., Chen, H.L., Le, Hu, 1999. Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iterative approach. Journal of Sound and Vibration 222 (5), 803–812.
- Cherkaoui, M., Sabar, H., Berveiller, M., 1994. Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials. Journal of Engineering Materials and Technology 116, 274–278.
- Cherkaoui, M., Sabar, H., Berveiller, M., 1995. Elastic composites with coated reinforcements : A micromechanical approach for nonhomothetic topology. International Journal of Engineering Science 33 (6), 829–843.
- Chiu, Y.P., 1977. On the stress field due to initial strains in cuboid surrounded by an infinite elastic space. ASME J. Appl. Mech. 44, 587–590.
- Christensen, R.M., 1969. Viscoelastic properties of heterogeneous media. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 17, 23–41.
- Christensen, R.M., 2005a. Mechanics of Composite Materials. Dover Publications, Inc., Mineola, NY.
- Christensen, R.M., 2005b. Theory of Viscoelasticity. Dover Publications, Inc., Mineola, NY.

- 
- Christensen, R.M., Lo, K.H., 1979. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 27, 315–330.
- Cochelin, B., 1994. A path following technique via an asymptotic numerical method. *Computers and Structures* 53, 1181–1192.
- Cochelin, B., Damil, D., Potier-Ferry, M., 1994. The asymptotic-numerical method : an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics. *Revue européenne des éléments finis* 3 (2), 281–297.
- Cochelin, B., Damil, N., Potier-Ferry, M., 2007. *Méthode Asymptotique Numérique*. Hermes Science Publications.
- Crouch, S.L., Mogilevskaya, S.G., 2006. Loosening of elastic inclusions. *International Journal of Solids and Structures* 43, 1638–1668.
- Cupial, P., Niziol, J., 1995. Vibration and damping analysis of three-layer composite plate with viscoelastic mid-layer. *Journal of Sound and Vibration* 183 (1), 99–114.
- Damil, N., Potier-Ferry, M., 1990. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science* 28 (9), 943–957.
- Dau, F., Polit, O., Touratier, M., 2006.  $C^1$  plate and shell finite elements for geometrically nonlinear analysis of multilayered structures. *Computers & Structures* 84 (19-20), 1264–1274.
- Daya, E.M., 2003. *Modélisation numérique des vibrations des structures sandwich viscoélastiques et/ou piezoélectriques. Modélisation numérique des vibrations des structures à forme répétitive ou presque répétitive. Habilitation à diriger des recherches. Université Paul Verlaine-Metz.*
- Daya, E.M., Azrar, L., Potier-Ferry, M., 2005. Modélisation par éléments finis des vibrations non-linéaires des plaques sandwich viscoélastiques. *Mécanique & Industries* 6, 13–20.
- Daya, E.M., Potier-Ferry, M., 2001. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures* 79, 533–541.
- Daya, E.M., Potier-Ferry, M., 2002. A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue européenne des éléments finis*. 11 (1), 39–56.
- Deng, W., Meguid, S.A., 1999. Closed form solutions for partially debonded circular inclusion in piezoelectric materials. *Acta Mech.* 137 (3-4), 167–181.
- Dhatt, G., Touzot, G., Lefrançois, E., Avril 2005. *Méthode des éléments finis*. Hermes Sciences.

- Dingreville, R., 2007. Modeling and characterization of the elastic behavior of interfaces in nanostructured materials : from an atomistic description to a continuum approach. Thèse de doctorat, George W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Atlanta, USA.
- Dingreville, R., Qu, J., 2007. A semi-analytical method to compute surface elastic properties. *Acta Mater* 55, 141–147.
- Dingreville, R., Qu, J., 2008. Interfacial excess energy, excess stress and excess strain in elastic solids-planar interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56 (5), 1944–1954.
- Dingreville, R., Qu, J., Cherkaoui, M., 2005. Surface free energy and its effect on the elastic behavior of nano-sized particules, wires and films. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53, 1827–1854.
- DiTaranto, R.A., 1965. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams. *J. Appl. Mech., Trans. ASME* 32, 881–886.
- DiTaranto, R.A., Blasingame, W., 1966a. Composite loss factors of selected laminated beams. *J. Acoust. Soc. Am.* 40, 187.
- DiTaranto, R.A., Blasingame, W., 1966b. Effect of end constraints on the damping of laminated beams. *J. Acoust. Soc. Am.* 39 (2), 405.
- DiTaranto, R.A., McGraw, J.R., 1969. Vibratory bending of damped laminated plates. *Journal of Engineering for Industry* 91, 1081–1090.
- Doedel, E., Keller, H.B., Kernevez, J.P., 1991. Numerical analysis and control of bifurcation problems in finite dimensions. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 1, 493–520.
- Drugan, W.J., 2007. Elastic composite materials having a negative stiffness phase can be stable. *Phys. Rev. Lett.* 98, 055502.
- Duan, H.L., Jiao, Y., Yi, X., Huang, Z.P., Wang, J., 2006a. Solutions of inhomogeneity problems with graded shells and application to core-shell nanoparticles and composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 54, 1401–1425.
- Duan, H.L., Karihaloo, B.L., 2007. Thermo-elastic properties of heterogeneous materials with imperfect interfaces : Generalized Levin’s formula and Hill’s connections. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55, 1036–1052.
- Duan, H.L., Wang, J., Huang, Z.P., Karihaloo, B.L., 2005a. Eshelby formalism for nano-inhomogeneities. *Proceedings of the Royal Society A* 461, 3335–3353.
- Duan, H.L., Wang, J., Huang, Z.P., Karihaloo, B.L., 2005b. Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53, 1574–1596.

- 
- Duan, H.L., Wang, J., Huang, Z.P., Luo, Z.Y., 2005c. Stress concentration tensors of inhomogeneities with interface effects. *Mechanics of Materials* 37, 723–736.
- Duan, H.L., Wang, J., Karihaloo, B.L., Huang, Z.P., 2006b. Nanoporous materials can be made stiffer than non-porous counterparts by surface modification. *Acta Materialia* 54, 2983–2990.
- Duan, H.L., Yi, X., Huang, Z.P., Wang, J., 2007a. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. Part I : Theoretical framework. *Mechanics of Materials* 39, 81–93.
- Duan, H.L., Yi, X., Huang, Z.P., Wang, J., 2007b. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. Part II : Application and scaling laws. *Mechanics of Materials* 39, 94–103.
- Dudek, T.J., 1970. Determination of the Complex Modulus of Viscoelastic Two-Layer Composite Beams. *Journal of Composite Materials* 4 (1), 74–89.  
URL <http://jcm.sagepub.com/cgi/content/abstract/4/1/74>
- Duigou, L., 2002. Modélisation numérique de l’amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- Duigou, L., Daya, E. M., Potier-Ferry, M., 2003. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192, 1323–1335.
- Duser, A.V., Jagota, A., Bennison, S.J., 1999. Analysis of glass/polyvinyl butyral laminates subjected to uniform pressure. *Journal of Engineering Mechanics* 125, 435–442.
- Dym, C.L., Lang, M.A., 1974. Transmission loss through sandwich panels. *Journal of the Acoustical Society of America* 56, 1523–1532.
- Eringen, A.C., 1999. *Microcontinuum Field Theories I : Foundations and Solids*. Springer-Verlag, New York.
- Eshelby, J.D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society A* 241, 376–396.
- Eshelby, J.D., 1961. *Elastic Inclusions and Inhomogeneities*. Volume 2 de *Progress in Solid Mechanics*. Amsterdam : North-Holland.
- Faà di Bruno, C.F., 1857. Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel. *Quart. J. Math.* 1, 359–360.
- Fan, Z.J., Lee, J.H., Kang, K.H., Kim, K.J., 1998. The forced vibration of a beam with viscoelastic boundary supports. *Journal of Sound and Vibration* 210 (5), 673–682.
- Faux, D.A., Pearson, G.S., 2000. Green’s tensors for anisotropic elasticity : Application to quantum dots. *Physical Review B* 62 (8), R4798–R4801.

- Ferrari, M., 2000. Nanomechanics, and biomedical nanomechanics : Eshelby's inclusion and inhomogeneity problems at the discrete/continuum interface. *Biomedical Microdevices* 2 (4), 273–281.
- Ferry, J.D., 1970. *Viscoelastic properties of polymers*, 2è édition. Wiley& Sons.
- Ford, R.D., Lord, P., Walker, A.W., 1967. Sound transmission through sandwich construction. *Journal of Sound and Vibration* 5, 9–21.
- Forest, S., 2001. Generalized continua. In : Buschow, K. H. Jürgen, Cahn, Robert W., Flemings, Merton C., (print), Bernard Ilshner, Kramer, Edward J., Mahajan, Subhash, (updates), Patrick Veyssière (, éditeurs), *Encyclopedia of Materials : Science and Technology*. Elsevier, Oxford, pages. 1–7.
- Forest, S., Sab, K., 1998. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications* 25 (4), 449–454.
- Forth, Shaun A., jun 2006. An efficient overloaded implementation of forward mode automatic differentiation in MATLAB. *ACM Transactions on Mathematical Software* 32 (2), 195–222.  
URL <http://doi.acm.org/10.1145/1141885.1141888>
- Friebel, C., Doghri, I., Legat, V., 2006. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. *International Journal of Solids and Structures* 43, 2513–2541.
- Funn, J.V., Dutta, I., 1999. Creep behavior of interfaces in fiber reinforced metal-matrix composites. *Acta Materialia* 47 (1), 149–164.
- Furuhashi, R., Huang, J.H., Mura, T., 1992. Sliding inclusions and inhomogeneities with frictional interfaces. *ASME J. Appl. Mech.* 59, 783–788.
- Gaunaurd, G.C., Überall, H., 1978. Theory of resonant scattering from spherical cavities in elastic and viscoelastic media. *Journal of the Acoustical Society of America* 63 (6), 1699–1712.
- Gaunaurd, G.C., Überall, H., 1982. Resonance theory of the effective properties of perforated solids. *Journal of the Acoustical Society of America* 71 (2), 282–295.
- Ghahremani, F., 1980. Effect of grain boundary sliding on anelasticity of polycrystals. *International Journal of Solids and Structures* 16 (9), 825–845.
- Gleiter, H., 1989. Nanocrystalline materials. *Progress in Materials Science* 33 (4), 223–315.
- Goodier, J.N., 1933. Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws. *Journal of Applied Mechanics* 55, 39–44.
- Griewank, A., 2000. *Evaluating Derivatives. Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. No. 19 in *Frontiers in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia.

- 
- Griewank, A., Juedes, D., Utke, J., 1996. ADOL-C, a package for the automatic differentiation of algorithms written in C/C++. *ACM Trans. Math. Software* 22 (2), 131–167.
- Gryaznov, V.G., Kaprelov, A.M., Romanov, A.E., 1989. Size effect of dislocation stability in small particles and microcrystallites. *Scripta Metallurgica* 23 (8), 1443–1448.
- Gryaznov, V.G., Solov'ev, V.A., Trusov, L.I., 1990. Peculiarities of initial stages of deformation in nanocrystalline materials (ncms). *Scripta Metallurgica et Materialia* 24 (8), 1529–1534.
- Gurtin, M.E., Murdoch, A.I., 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 59, p. 389.
- Gurtin, M.E., Murdoch, A.I., 1978. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures* 14 (6), 431–440.
- Gurtin, M.E., Weissmuller, J., Larche, F., 1998a. The general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium. *Philosophical Magazine A* 78, 1093.
- Gurtin, M.E., Weissmuller, J., Larche, F., 1998b. The general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium. *Philosophical Magazine A* 78, 1093.
- Guyader, J.L., Lesueur, C., 1978. Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates. Part II : Transmission loss. *Journal of Sound and Vibration* 58, 69–86.
- Haberman, M.R., 2006. Vers la conception des matériaux amortissants : une approche micromécanique. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- Haberman, M.R., 2007. Design of high loss viscoelastic composites through micromechanical modeling and decision based material by design. Thèse de doctorat, George W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Atlanta, USA.
- Haberman, M.R., Berthelot, Y., Cherkaoui, M., 2005. Transmission loss of viscoelastic materials containing oriented, ellipsoidal, coated microinclusions. *Journal of the Acoustical Society of America* 118 (5), 2984–2992.
- Haberman, M.R., Berthelot, Y., Cherkaoui, M., 2006. Micromechanical modeling of particulate composites for damping of acoustic waves. *Journal of Engineering Materials and Technology* 128, 320–329.
- Haberman, M.R., Berthelot, Y., Jarzynski, J., Cherkaoui, M., 2002. Micromechanical modeling of viscoelastic composites in the low frequency approximation. *Journal of the Acoustical Society of America* 112 (5), 1937–1943.
- Haddad, Y.M., 1995. *Viscoelasticity of Engineering Materials*, 1ère édition. Chapman & Hall.
- Hashin, Z., 1962. The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics* 29, 143–150.

- Hashin, Z., 1965. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *Journal of Applied Mechanics* 32, 630–636.
- Hashin, Z., 1970a. Complex moduli of viscoelastic composites-I. General theory and application to particulate composites. *International Journal of Solids and Structures* 6, 539–552.
- Hashin, Z., 1970b. Complex moduli of viscoelastic composites II : Fiber reinforced materials. *International Journal of Solids and Structures* 6, 797–807.
- Hashin, Z., 1991a. The spherical inclusion with imperfect interface. *Journal of Applied Mechanics* 58 (6), 444–449.
- Hashin, Z., 1991b. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 745–762.
- Hashin, Z., 2002. The interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (12), 2509–2537.
- Havriliak, S., Negami, S., 1966. A complex plane analysis of  $\alpha$ -dispersions in some polymer systems. *Journal of Polymer Science : Part C* 14, 99–117.
- He, L.H., Jiang, J., 2003. Transient mechanical response of laminated elastic strips with viscous interfaces in cylindrical bending. *Composites Science and Technology* 63, 821–828.
- Hervé, E., Zaoui, A., 1993. N-layered inclusion-based micromechanical modeling. *International journal of engineering science* 31, 1–10.
- Hill, R., 1983. Interfacial operators in the mechanics of composite media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 31 (4), 347–357.
- Hsieh, C.L., Tuan, W.H., 2005. Elastic properties of ceramic-metal particulate composites. *Materials Science and Engineering A* 393, 133–139.
- Hsieh, C.L., Tuana, W.H., Wu, T.T., 2004. Elastic behaviour of a model two-phase material. *Journal of the European Ceramic Society* 24, 3789–3793.
- Hu, H., 2006. Modélisation multi-échelle des structures sandwich. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- Hu, H., Belouettar, S., Potier-Ferry, M. and Daya, E.M., 2008. Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites. *Composite Structures* 84, 282–292.
- Huang, Z.P., Wang, J., 2006. A theory of hyperelasticity of multi-phase media with surface/interface energy effect. *Acta Mechanica* 182, 195–210.
- Huang, Z. P., Sun, L., 2007. Size-dependent effective properties of a heterogeneous material with interface energy effect : From finite deformation theory to infinitesimal strain analysis. *Acta Mechanica* 190, 151–163.

- 
- Inglis, H.M., Geubelle, P.H., Matouš, K., Tan, H., Huang, Y., 2007. Cohesive modeling of dewetting in particulate composites : micromechanics vs. multiscale finite element analysis. *Mechanics of Materials* 30, 580–595.
- Ivelin Ivanov, V., 2006. Analysis, modelling, and optimization of laminated glasses as plane beam. *International Journal of Solids and Structures* 46, 6887–6907.
- Jaglinski, T., Frascione, P., Moore, B., Stone, D., Lakes, R.S., 2006. Internal friction due to negative stiffness in the indium-thallium martensitic phase transformation. *Philosophical Magazine* 86 (27 / 21), 4285–4303.
- Jaglinski, T., Kochmann, D., Stone, D., Lakes, R.S., 2007. Materials with viscoelastic stiffness greater than diamond. *Science* 315, 620–622.
- Jaglinski, T., Lakes, R., 2004. Anelastic instability in composites with negative stiffness inclusions. *Philosophical Magazine Letters* 84 (12), 803–810.
- Jaglinski, T., Stone, D., Lakes, R.S., 2005. Internal friction study of a composite with a negative stiffness constituent. *J. Mater. Research* 20 (9), 2523–2533.
- Jagota, A., Bennison, S.J., Smith, C.A., 2000. Analysis of a compressive shear test for adhesion between elastomeric polymers and rigid substrates. *International Journal of Fracture* 104, 105–130.
- Jarlebring, E., 2003. Krylov methods for nonlinear eigenvalue problems. *Mémoire de D.E.A., Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.*
- Jarlebring, E., 2006. Nonlinear and polynomial eigenproblems. *Mathematical Software.*  
URL <http://www.icm.tu-bs.de/~jarlebri/software/>
- Jarlebring, E., Voss, H., 2003. Rational Krylov for nonlinear eigenproblems, an iterative projection method.  
URL [citeseer.ist.psu.edu/jarlebring03rational.html](http://citeseer.ist.psu.edu/jarlebring03rational.html)
- Jarzynski, J., 1990. A Review of the Mechanisms of Sound Attenuation in Materials. Volume 424 de *Sound and Vibration Damping with Polymers.* ed. R.D. Corsaro and L.H. Sperling, Washington D.C. : American Chemical Society.
- Johnson, C.D., Kienholz, D.A., Rogers, L.C., 1981. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layer. *Shock and Vibration Bulletin* 51 (1), 71–81.
- Johnson, R.A., 1972. Relationship between two-body interatomic potentials in a lattice model and elastic constants. *Physical Review B* 6 (6), 2094–2100.
- Kang, K.H., 1996. Vibration analysis of beam and plate structures with viscoelastic boundary supports. *Thèse de doctorat, KAIST.*
- Kang, K.H., Kim, K.J., 1996. Vibration analysis of beam and plate with viscoelastic boundary supports. In : *Asia-Pacific Vibration Conference, Kuala Lumpur, Malaysia.*

- Kant, T., Swaminathan, K., 2000. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Composite Structures* 49, 65–75.
- Kapania, R.K., Raciti, S., 1989. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, part I : Shear effects and buckling. *AIAA Journal* 27 (7), 923–934.
- Kergourlay, G., 2004. *Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques. Application à une enceinte acoustique.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris.
- Kerr, F., 1992. The scattering of a plane elastic wave by a spherical elastic inclusions. *International Journal of Engineering Science* 30, 169–186.
- Kerwin, E.M., 1959. Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer. *Journal of the Acoustical Society of America* 31 (7), 952–962.
- Kouris, D.A., Tsuchida, E., Mura, T., 1986. An anomaly of sliding inclusions. *ASME J. Appl. Mech.* 53, 724–726.
- Koutsawa, Y., Charpentier, I., Daya, E.M., Cherkaoui, M., 2008a. A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part I : Diamant toolbox. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (3-4), 572–577.
- Koutsawa, Y., Charpentier, I., Daya, E.M., Cherkaoui, M., 2008b. A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part II : application to nonlinear complex eigenvalue problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (Under review).
- Koutsawa, Y., Cherkaoui, M., Charpentier, I., Daya, E.M., 2008c. Size and interfacial excess energy effects on the yield strength of nanoporous material. *Mechanics of Materials* Under review.
- Koutsawa, Y., Cherkaoui, M., Daya, E.M., 2008d. Multi-coating inhomogeneities problem for effective viscoelastic properties of particulate composite materials. Accepted for publication in *Journal of Engineering Materials and Technology*.
- Koutsawa, Y., Cherkaoui, M., Qu, J., Daya, E.M., 2008e. Atomistic-continuum interphase model for effective properties of composite materials containing ellipsoidal nano-inhomogeneities. *Acta Materialia* (Under review).
- Koutsawa, Y., Daya, E., 2007. Static and free vibration analysis of laminated glass beam on viscoelastic supports. *International Journal of Solids and Structures* 44, 8735–8750.
- Koutsawa, Y., Haberman, M.R., Daya, E.M., Cherkaoui, M., 2008f. Multiscale design of a rectangular sandwich plate with viscoelastic core and supported at extents by viscoelastic materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design* DOI : 10.1007/s10999-008-9084-0.

- 
- Kurtze, G., Watters, B.G., 1959. New wall design for high transmission loss or high damping. *Journal of the Acoustical Society of America* 31, 739–748.
- Kurz, W., Mercier, J.P., Zambelli, G., 1995. *Introduction à la science des matériaux*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Kuster, G.T., Toksöz, M.N., 1974. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media : Theoretical formulation. *Geophysics* 39, 587–606.
- Lakes, R.S., 1998. *Viscoelastic Solids*. Volume 9 de Mechanical Engineering Series. CRC Press, Boca Raton, FL.
- Lakes, R.S., 2001a. Extreme damping in compliant composites with a negative stiffness phase. *Philosophical Magazine Letters* 81 (2), 95–100.
- Lakes, R.S., 2001b. Extreme damping in composite materials with a negative stiffness phase. *Physical Review Letters* 86 (13), 2897–2900.
- Lakes, R.S., Drugan, W.J., 2002. Dramatically stiffer elastic composite materials due to a negative stiffness phase? *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50, 979–1009.
- Lakes, R.S., Lee, T., Bersie, A., Wang, Y.C., 2001. Extreme damping in composite materials with negative stiffness inclusions. *Nature* 410, 565–567.
- Lakes, R., Wojciechowski, K.W., 2008. Negative compressibility, negative poisson's ratio, and stability. *Physica Status Solidi* 245 (3), 545–551.
- Lampoh, K., 2008. *Description du comportement mécanique des composites à renforts multienrobés*. Mémoire de D.E.A., Université Paul Verlaine-Metz.
- Landier, J., 1993. *Modélisation et études expérimentales des propriétés amortissantes des tôles sandwich*. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- Le Quang, H., He, Q.-C., 2007. Size-dependent effective thermoelastic properties of nanocomposites with spherically anisotropic phases. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55, 1889–1921.
- Lee, G.F., 1995. Resonance apparatus for damping measurements. *Metallurgical and Materials Transactions A : Physical Metallurgy and Materials Science* 26 (11), 2819–2823.
- LeGonidec, Y., Gibert, D., Proust, J.N., 2002. Multiscale analysis of waves reflected by complex interfaces : Basic principles and experiments. *Journal of Geophysical Research-Solid Earth* 107 (B9), 2184.
- Leo, P.H., Schwartz, M.H., 2000. Energy of semicoherent interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (12), 2539–2557.
- Li, J.Y., Dunn, M.L., 1998. Anisotropic coupled-field inclusion and inhomogeneity problems. *Philosophical Magazine A* 77 (5), 1341–1350.

- Lim, C.W., Li, Z.R., He, L.H., 2006. Size dependent, non-uniform elastic field inside a nano-scale spherical inclusion due to interface stress. *International Journal of Solids and Structures* 43, 5055–5065.
- Lipinski, P., Barhdadi, E.H., Cherkaoui, M., 2006. Micromechanical modeling of an arbitrary ellipsoidal multi-coated inclusion. *Philosophical Magazine* 86 (10), 1305–1326.
- Love, A.E.H., 1944. *Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York, Netherlands.
- Luo, H. A., Weng, G.J. 1989, 1989. On Eshelby's S-Tensor in Three Phase Cylindrically Concentric Solid. *Mech. Mater.* 8 (2-3), 77–88.
- Lur'e, A.I., 1964. *Three-dimensional Problems of Theory of Elasticity*. Interscience, New York.
- Ma, B.-A., He, J.-F., 1992. A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration* 152 (1), 107–123.
- Mansfield, M., Needs, R.J., 1991. Surface energy and stress of lead (111) and (110) surfaces. *Physical Review B* 43 (11), 8829–8833.
- Marinopoulos, A.G., Vitek, V., Bassani, J.L., 1998. Local and effective elastic properties of grain boundaries in silicon. *Physica Status Solidi (a)* 166 (1), 453–473.
- Markov, K., Preziosi, L., 2000. *Heterogeneous Media : Micromechanics Modeling Methods and Simulations*. Birkhauser Verlag, Switzerland.
- Marsden, J.E., Hughes, T.J.R., 1994. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications.
- Martin, J. W., 1975. Many-body forces in metals and the Brugger elastic constants. *Journal of Physics C* 8 (18), 2837–2857.
- Matouš, K. and Geubelle, P.H., 2006. Multiscale modelling of particle debonding in reinforced elastomers subjected to finite deformations. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 65, 190–223.
- McDowell, D.L., Story, T.L., 1999. *New Directions in Materials Design Science and Engineering (MDS&E)*. Rapport technique, U.S. National Science Foundation Workshop Report : Georgia Institute of Technology Materials Council, Atlanta, GA.
- Mead, D.J., 1982. A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 83 (3), 363–377.
- Mead, D.J., Markus, S., 1969. The forced vibration of three-layer damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration* 10 (2), 163–175.
- Mead, D.J., Markus, S., 1970. Loss factor and resonant frequency of encastre damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 12 (1), 99–112.

- 
- Merlette, N., 2005. Amortissement des caisses automobiles par des films minces viscoélastiques pour l'amélioration du confort vibratoire. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- Mi, C., Kouris, D.A., 2006. Nanoparticles under the influence of surface/interface elasticity. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 1 (4), 763–791.
- Mikata, Y., 2001. Explicit Determination of Piezoelectric Eshelby Tensors for a Spheroidal Inclusion. *International Journal of Solids and Structures* 38 (40-41), 7045–7063.
- Miller, R.E., Shenoy, V.B., 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology* 11, 139–147.
- Mistree, F., 2004. Are We Designing Materials? In : Workshop on Inverse Techniques in Materials Design. Atlanta, GA.
- Moore, B., Jaglinski, T., Stone, D.S., Lakes, R.S., 2006. Negative incremental bulk modulus in foams. *Philosophical Magazine Letters* 86, 651–659.
- Moore, T.C., Lovins, A.B., 1995. Vehicle design strategies to Meet and Exceed PNGV goals. in SAE Future Transportation Technology Conference. Costa Mesa, CA : Society of Automotive Engineers.
- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* 21, 571–574.
- Morris, D. G., 1998. Mechanical behavior of nanostructured materials. Endfield, NH, USA, Trans Tech Publishings, Inc.
- Moschovidis, Z.A., 1975. Two ellipsoidal inhomogeneities and related problems treated by the equivalent inclusion method. Thèse de doctorat, Northwestern University, Evanston, IL.
- Mura, T., 1987. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus-Nijhoff, Netherlands.
- Mura, T., Kinoshita, N., 1978. The polynomial eigenstrain problem or an anisotropic ellipsoidal inclusion. *Physica Status Solidi A* 48, 447–450.
- Murdoch, A. I., 1976. Thermodynamical theory of elasticity material interfaces. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 29 (3), 245–275.
- Mütschele, T., Kirchheim, R., 1987. Hydrogen as a probe for the average thickness of a grain boundary. *Scripta Metallurgica* 21 (8), 1101–1104.
- Nakra, B.C., 1966. Vibrations of viscoelastically damped laminated structures. Thèse de doctorat, University of London.
- Narayanan, S., Shanbhag, R.L., 1982. Sound transmission through a damped sandwich panel. *Journal of Sound and Vibration* 80 (3), 315–327.

- Needs, R.J., Godfrey, M.J., 1990. Surface stress of aluminum and jellium. *Physical Review B* 42 (17), 10933–10939.
- Needs, R.J., Godfrey, M.J., Mansfield, M., 1991. Theory of surface stress and surface reconstruction. *Surface Science* 242 (1-3), 215–221.
- Nemat-Nasser, S., Hori, M., 1999. *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*, second ed. édition. Elsevier, Amsterdam.
- Neumaier, A., 1985. Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem. *SIAM J. Numer. Anal.* 22, 914–923.
- Nguyen, V.T., 2004. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Nieh, T. G., Wadsworth, J., 1991. Hall-Petch relation in nanocrystalline solids. *Scripta Metallurgica et Materialia* 25 (4), 955–958.
- Noor, A.K., Burton, W.S., 1989. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev* 42 (1), 1–12.
- Norville, H.S., King, K.W., Swofford, J.L., 1998. Behavior and strength of laminated glass. *Journal of Engineering Mechanics* 124, 46–53.
- Nozaki, H., Taya, M., 2001. Elastic fields in a polyhedral inclusion with uniform eigenstrains and related problems. *ASME J. Appl. Mech.* 68, 441.
- Oberst, H., Becker, G.W., Frankenfeld, K., 1954. Über die dämpfung der biegeschwingungen dünner bleche durch fest haftende beläge II. *Acustica* 4, 433–444.
- Oberst, H., Frankenfeld, K., 1952. Über die dämpfung der biegeschwingungen dünner bleche durch fest haftende beläge. *Acustica* 2, 181–194.
- Olson, G.B., 1997. Computational design of hierarchically structured materials. *Science* 277 (5330), 1237–1242.
- Olson, G.B., 2000. Designing a new material world. *Science* 288 (5468), 993–998.
- Oravsky, V., Markus, S., Simkova, O., 1974. A new approximate method of finding the loss factors of a sandwich cantilever. *Journal of Sound and Vibration* 33 (3), 335–352.
- Pagano, N.J., 1969. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.* 3, 398–411.
- Pagano, N.J., 1970. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.* 4, 20–35.
- Pan, E., 2002a. Elastic and Piezoelectric Fields Around a Quantum Dot : Fully Coupled or Semicoupled Model? *Journal of Applied Physics* 91 (6), 3785–3796.

- 
- Pan, E., 2002b. Three-Dimensional Green's Functions in Anisotropic Magneto-Electro-Elastic Bimaterials. *Z. Angew. Math. Phys.* 53 (5), 815–838.
- Pan, E., Yang, B., 2001. Elastostatic fields in an anisotropic substrate due to a buried quantum dot. *Journal of Applied Physics* 90 (12), 6190–6196.
- Pan, Z.W., Dai, Z.R., Wang, Z.L., 2001. Nanobelts of semiconducting oxides. *Science* 291, 1947–1950.
- Papakonstantopoulos, G.J., Yoshimoto, K., Doxastakis, M., Nealey, P.F., de Pablo, J.J., 2005. Local mechanical properties of polymeric nanocomposites. *Physical Review E* 031801, 1–6.
- Pei, Z.W., Hwang, H.L., 2003. Formation of silicon nano-dots in luminescent silicon nitride. *Applied Surface Science* 212, 760–764.
- Persoz, B., 1969. *La rhéologie*. Masson.
- Polit, O., Touratier, M., 2002. A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses. *Composite Structures* 58 (1), 121–128.
- Povstenko, Y.Z., 1993. Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 1499–1514.
- Pritz, T., 1998. Frequency dependances of complex moduli and complex poisson's ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration* 214 (1), 83–104.
- Qu, J., 1993a. The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials. *Mechanics of Materials* 14, 269–281.
- Qu, J., 1993b. Eshelby tensor for an elastic inclusion with slightly weakened interfaces. *Journal of Applied Mechanics* 60 (4), 1048–1050.
- Qu, J., Bassani, J.L., 1993. Interfacial fracture-mechanics for anisotropic bimaterials. *Journal of Applied Mechanics* 60 (2), 422–431.
- Qu, J., Cherkaoui, M., 2006. *Fundamentals of Micromechanics of Solids*, wiley édition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Rahman, M., 2002. The isotropic ellipsoidal inclusion with a polynomial distribution of eigenstrain. *ASME J. Appl. Mech.* 69, 593–601.
- Rahul-Kumar, P., Jagota, A., Bennison, S.J., Saigal, S., 2000. Interfacial failure in compressive shear strength test of glass/polymer laminates. *International Journal of Solids and Structures* 37, 7281–7305.
- Raj, R., Ashby, M.F., 1971. On grain boundary sliding and diffusional creep. *Metallurgical and Materials Transactions B : Process Metallurgy and Materials Processing Science* 2 (9), 1113–27.

- Rao, D.K., 1977a. Computer programs for determining exact frequency and loss factors of sandwich beams with arbitrary boundary conditions. Rapport technique, Institut für Mechanische Schwingungslehre and Maschinen Dynamik, Technische Universität Berlin, West Germany.
- Rao, D.K., 1977b. Vibration of short sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration* 52 (2), 253–263.
- Rao, D.K., 1978. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Journal of Mechanical Engineering Science* 20 (5), 271–282.
- Rikards, R., Chate, A., Barkanov, E., 1993. Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Computers & Structures* 47 (6), 1005–1015.
- Robinson, M.J., Kosmatka, J.B., 2006. Improved damping in VARTM composite structures using perforated viscoelastic layers. *Journal of Composite Materials* 40 (23), 2157–2173.
- Rodin, G.J., 1996. Eshelby's inclusion problem for polygons and polyhedra. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (12), 1977.
- Ross, D., Ungar, E.E., Kerwin, E.M., 1959. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. In : American Society of Mechanical Engineers : Atlantic City, New Jersey. (, éditeur), *Structural Damping*. ASME Annual Meeting, A.S.o.M. Engineers, pages. 49–87.
- Ru, C.Q., 2000. Eshelby's problem for two-dimensional piezoelectric inclusions of arbitrary shape. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 456 (1997), 1051–1068.
- Ru, C.Q., 2003. Eshelby inclusion of arbitrary shape in an anisotropic plane or half-plane. *Acta Mech.* 160 (3-4), 219–234.
- Ru, C.Q., Schiavone, P., 1997. A circular inclusion with circumferentially inhomogeneous interface in antiplane shear. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* A453, 2551–2572.
- Rubin, M.B., Benveniste, Y., 2004. A Cosserat shell model for interphases in elastic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 52, 1023–1052.
- Sadasiva Rao, Y.V.K., 1972. Vibration of unsymmetrical sandwich structure. Thèse de doctorat, Indian Institute of Technology, Delhi.
- Sadasiva Rao, Y.V.K., Nakra, B.C., 1974. Vibration of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores. *Journal of Sound and Vibration* 34, 309–326.
- Sainsbury, M.G., Zhang, Q.J., 1999. The galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams. *Computers and Structures* 71, 239–256.
- Salençon, J., 1983. Cours de calcul des structures anélastiques. Viscoélasticité. Presse de l'école nationale des ponts et chaussées.

- 
- Sander, D., 2003. Surface stress : implications and measurements. *Current Opinion in Solid State and Materials Science* 7, 51–57.
- Sansoz, F., Molinari, J.F., 2004. Incidence of atom shuffling on the shear and decohesion behavior of a symmetric tilt grain boundary in copper. *Scripta Materialia* 50, 1283–1288.
- Sansoz, F., Molinari, J.F., 2005. Mechanical behavior of S tilt grain boundaries in nanoscale Cu and Al : A quasicontinuum study. *Acta Materialia* 53, 1931–1944.
- Seepersad, C.C., Dempsey, B.M., Allen, J.K., Mistree, F., McDowell, D.L., 2004. Design of multifunctional honeycomb materials. *AIAA Journal* 42 (5), 1025–1033.
- Sendeckyi, G.P., 1967. Ellipsoidal inhomogeneity problem. Thèse de doctorat, Northwestern University, Evanston, IL.
- Shang, X., Lakes, R.S., 2007. Stability of elastic material with negative stiffness and negative poisson's ratio. *Physica Status Solidi (b)*, 244, 1008–1026.
- Sharma, P., Ganti, S., 2002. Interfacial elasticity corrections to size-dependent strain-state of embedded quantum dots. *Physique Status Solida B* 234, R10–R12.
- Sharma, P., Ganti, S., 2004. Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies. *Journal of Applied Mechanics* 71, 663–671.
- Sharma, P., Ganti, S., Bhate, N., 2003. Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nano-inhomogeneities. *Applied Physics Letters* 82 (4), 535–537.
- Sharma, P., Wheeler, L.T., 2007. Size-dependent elastic state of ellipsoidal nano-inclusions incorporating surface/interface tension. *Journal of Applied Mechanics* 74, 447–454.
- Shenoy, V. B. (2005)., 2005. Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces. *Physical Review B* 71 (9), 094104.
- Shuttleworth, R., 1950. The surface tension of solids. *Proc. Phys. Soc. A* 63, 444–457.
- Smith, C.S., 1981. *A Search for Structure*. Cambridge, MA : MIT Press.
- Smolenski, C.P., Krokosky, E.M., 1973. Dilational mode sound transmission in sandwich panels. *Journal of the Acoustical Society of America* 54, 1449–1457.
- Sokolnikoff, I.S., 1983. *Mathematical Theory of Elasticity*. Krieger Pub Co ; New Ed edition.
- Soni, M.L., 1981. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock and Vibration Bulletin* 55 (1), 97–109.
- Srinivas, S., 1973. A refined analysis of composite laminates. *J. Sound Vibration* 30 (4), 495–507.
- Streitz, F.H., Cammarata, R.C., Sieradzki, K., 1994a. Surface-stress effects on elastic properties. I. Thin metal films. *Physical Review B* 49 (15), 10699–10706.

- Streitz, F.H., Cammarata, R.C., Sieradzki, K., 1994b. Surface-stress effects on elastic properties. II. Metallic multilayers. *Physical Review B* 49 (15), 10707–10716.
- Sun, L., Wu, Y.M., Huang, Z.P., Wang, J.X., 2004. Interface effect on the effective bulk modulus of a particle-reinforced composite. *Acta Mechanica Sinica* 20 (6), 676–679.
- Tan, H., Huang, Y., Liu, C., Geubelle, P.H., 2005a. The Mori-Tanaka method for composite materials with nonlinear interface debonding. *International Journal of Plasticity* 21, 1890–1918.
- Tan, H., Liu, C., Huang, Y., Geubelle, P.H., 2005b. The cohesive law for the particle/-matrix interfaces in high explosives. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53, 1892–1917.
- Taya, M., 1999. Micromechanics modeling of smart composites. *Composites* 30A (4), 531–536.
- Teik-Cheng, L., 2005. Size-dependency of nano-scale inclusions. *Journal of Materials Science Letters* 40, 3841–3842.
- Thompson, J.M.T., Walker, A., 1968. The nonlinear perturbation analysis of discrete structural systems. *Int. J. Solids & Structures* 4, 757–768.
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., 1970. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Publishing Co. ; 3rd edition.
- Tognevi, A., 2008. Simulation par éléments finis des matériaux composite à renforts ellipsoïdaux multienrobés. Mémoire de D.E.A., Université Paul Verlaine-Metz.
- Ungar, E.E., Kerwin, E.M., 1962. Loss factors of viscoelastic systems in terms of strain energy. *Journal of the Acoustical Society of America* 34 (2), 954–958.
- Vallabhan, C.V.G., Das, Y.C., Magdhi, M., Aşik, M.Z., Bailey, J.R., 1993. Analysis of laminated glass units. *Journal of Structural Engineering ASCE* 119 (5), 1572–1585.
- Verma, A., 1999. ADMAT : Automatic differentiation in MATLAB using object oriented methods. In : Henderson, M. E., Anderson, C. R., Lyons, S. L. (, éditeurs), *Object Oriented Methods for Interoperable Scientific and Engineering Computing : Proceedings of the 1998 SIAM Workshop*. SIAM, Philadelphia, pages. 174–183.
- Vidal, P., Polit, O., 2008a. Assessment of the refined sinus model for the non-linear analysis of composite beams. *Composite Structures* DOI :10.1016/j.compstruct.2008.02.007, –.
- Vidal, P., Polit, O., 2008b. A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams. *Composite Structures* 84 (1), 56–72.
- Vitek, V., Wang, G.J., Alber, E.S., Bassani, J.L., 1994. Relationship between modeling of the atomic structure of grain boundaries and studies of mechanical properties. *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 55 (10), 1147–1156.

- 
- Voss, H., 2002a. An Arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems.  
URL [citeseer.ist.psu.edu/voss02arnoldi.html](http://citeseer.ist.psu.edu/voss02arnoldi.html)
- Voss, H., 2002b. An Arnoldi method for nonlinear symmetric eigenvalue problems. Technical Report 57, Section of Mathematics, Technical University of Hamburg-Harburg.  
URL [citeseer.ist.psu.edu/article/voss02arnoldi.html](http://citeseer.ist.psu.edu/article/voss02arnoldi.html)
- Walpole, L.J., 1967. The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium. *Proceedings of the Royal Society A* 300, 270–289.
- Walpole, L.J., 1978. A coated inclusion in an elastic medium. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 83 (5), 495–506.
- Walpole, L.J., 1981. Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Advances in Applied Mechanics* 21, 169–242.
- Wang, J., Duan, H.L., Zhang, Z., Huang, Z.P., 2005. An anti-interpenetration model and connections between interphase and interface models in particle-reinforced composites. *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 701–718.
- Wang, J., Tong, L., 2002. A study of the vibration of delaminated beams using a nonlinear anti-interpenetration constraint model. *Composite Structures* 57 (1-4), 483–488.
- Wang, Y.C., Lakes, R.S., 2001. Extreme thermal expansion, piezoelectricity, and other coupled field properties in composites with a negative stiffness phase. *Journal of Applied Physics* 90 (12), 6458–6465.
- Wang, Y.C., Lakes, R.S., 2004a. Extreme stiffness systems due to negative stiffness elements. *American Journal of Physics* 72 (1), 40–50.
- Wang, Y.C., Lakes, R.S., 2004b. Stable extremely-high-damping discrete viscoelastic systems due to negative stiffness elements. *Applied Physics Letters* 84, 4451–4453.
- Wang, Y.C., Lakes, R.S., 2005a. Composites with inclusions of negative bulk modulus : extreme damping and negative poisson's ratio. *J. Composite Materials* 39, 1645–1657.
- Wang, Y.C., Lakes, R.S., 2005b. Stability of negative stiffness viscoelastic systems. *Quarterly of Applied Math.* 63, 34–55.
- Wang, Y.C., Lakes, R.S., 2006. Two-dimensional viscoelastic discrete triangular system with negative-stiffness components. *Philosophical Magazine Letters* 86, 99–112.
- Wang, Y.C., Lakes, R.S., 2004c. Negative stiffness induced extreme viscoelastic mechanical properties : stability and dynamics. *Philosophical Magazine* 35, 3785–3801.
- Wang, Y.C., Ludwigson, M., Lakes, R.S., 2004. Deformation of extreme viscoelastic metals and composites. *Materials Science and Engineering A* 370, 41–49.

- Wang, Y.C., Swadener, J.G., Lakes, R.S., 2007. Anomalies in stiffness and damping of a 2d discrete viscoelastic system due to negative stiffness components. *Thin Solid Films* 515, 3171–3178.
- Weng, G.J., Taya, M., Abe, H., 1990. *Micromechanics and Inhomogeneity : The Toshio Mura Anniversary Volume*. Springer-Verlag, New York.
- Yan, M.J., Dowell, E.H., 1972. Governing equations of vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams. *ASME, Journal of Applied Mechanics* 94, 1041–1047.
- Yang, F.Q., 2004. Size-dependent effective modulus of elastic composite materials : Spherical nanocavities at dilute concentrations. *J. Appl. Phys.* 95, 3516–3520.
- Yang, F.Q., 2006. Effect of interfacial stresses on the elastic behavior of nanocomposite materials. *Journal of Applied Physics* 99 (5), 054306.
- Yang, Z.-G., Wang, T.-J., Zhong, S., Yang, G., Wang, G.-C., 2005. Coherent interfacial energy and composition profiles in ternary FCC systems by a discrete lattice plane analysis. *Journal of Materials Science* 40 (3), 701–709.
- Yap, H., Lakes, R.S., Carpick, R., 2008. Negative stiffness and enhanced damping of individual multiwalled nanotubes. *Phys. Rev. B* 77, 045423.
- Yoda, S., Kurihara, N., Wakashima, K., Umekawa, S., 1978. Thermal cycling-induced deformation of fibrous composites with particular reference to the tungsten-copper system. *Metallurgical Transactions A (Physical Metallurgy and Materials Science)* 9A (9), 1229–1336.
- Yoshimoto, K., Jain, T.S., Van Workum, K., Nealey, P.F., de Pablo, J.J., 2004. Mechanical heterogeneities in model polymer glasses at small length scales. *Physical Review Letters* 93 (17), 175501.
- Yoshimoto, K., Papakonstantopoulos, G.J., Lutsko, J.F., de Pablo, J.J., 2005. Statistical calculation of elastic moduli for atomistic models. *Physical Review B* 71, 184108.
- Yu, Y.Y., 1959. A New Theory of Elastic Sandwich Plates-One Dimensional Case. *Journal of Applied Mechanics* 26, 415–421.
- Zahrouni, H., Cochelin, B., Potier-Ferry, M., 1999. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 175, 71– 85.
- Zeller, R., Dederichs, P.H., 1973. Elastic constants of polycrystals. *Physica Status Solidi B* 55, 831–842.
- Zhang, Q.J., Sainsbury, M.G., 2000. The galerkin element method applied to the vibration of rectangular damped sandwich plates. *Computers and Structures* 74, 717–730.
- Zhang, W.X., Wang, T.J., 2007. Effect of surface energy on the yield strength of nanoporous materials. *Applied Physics Letters* 90, 063104.

---

Zhong, Z., Meguid, S.A., 1996. On the eigenstrain problem of a spherical inclusion with an imperfectly bonded interface. *ASME J. Appl. Mech.* 63, 877–883.

Zhong, Z., Meguid, S.A., 1997. On the elastic field of a spherical inhomogeneity with an imperfectly bonded interface. *Journal of Elasticity* 46 (2), 91–113.



## Résumé

Dans ce travail nous avons montré une démarche de modélisation multi-échelle des structures afin d'améliorer leurs caractéristiques amortissantes. L'influence des paramètres mécaniques, géométriques et des conditions aux limites viscoélastiques sur les comportements statique, vibratoire et acoustique des sandwich Verre/PVB/Verre a été étudiée. Les études ont montré que les sandwich viscoélastiques (VE) ont de très bonnes caractéristiques amortissantes qui sont toutefois limitées aux propriétés des matériaux utilisés. Pour améliorer les propriétés amortissantes des matériaux, nous avons utilisé le modèle micromécanique de Lipinski et al. [Philosophical Magazine 86 (10), 1305-1326, 2006] en tenant compte de la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux VE grâce au principe de la correspondance élastique-viscoélastique. Ce modèle nous a permis de montrer qu'avec un choix adéquat des phases du composite VE, on peut obtenir des matériaux VE ayant de très bonnes performances amortissantes. Sachant que l'amortissement est introduit dans les sandwich VE par l'importante déformation de cisaillement de la couche centrale VE, nous avons étudié l'influence des interfaces imparfaites sur les caractéristiques amortissantes des composites VE. Les études paramétriques ont révélé que le glissement interfacial peut améliorer d'une façon significative les propriétés amortissantes des composites VE. Afin d'étudier les effets des tailles nanométriques sur l'amortissement des matériaux, nous avons proposé une approche pour résoudre le problème d'homogénéisation des matériaux contenant des nano-hétérogénéités ellipsoïdales anisotropes avec des interfaces anisotropes. Cette approche concilie la micromécanique classique et la mécanique moléculaire. Les informations à l'échelle atomiques peuvent être incorporées dans les modèles micromécaniques conventionnels pour étudier les effets de la taille nanométrique sur les propriétés des nanocomposites. Les études menées ont montré la validité et les avantages de l'approche. En addition à ces modèles d'homogénéisation, nous avons développé une librairie MATLAB de différentiation automatique (Diamant MATLAB Toolbox). Cette librairie permet de calculer de façon exacte et automatique les coefficients de Taylor des codes écrits en langage MATLAB. Ces coefficients peuvent être ensuite exploités pour la résolution des problèmes non linéaires comme les problèmes non linéaires aux valeurs propres ou dans d'autres types de problèmes. Grâce à cet outil et à d'autres outils numériques développés, nous avons montré les effets de la microstructure des couches de PVB et de Verre sur les caractéristiques modales et acoustiques de la structure Verre/PVB/Verre. Pour finir, nous avons montré un exemple de conception hiérarchique des microstructures des couches du pare-brise pour *(i)* minimiser sa masse globale, *(ii)* avoir une bonne perte de transmission du son, *(iii)* déplacer le phénomène de coïncidence dans la gamme des fréquences non sensibles à l'oreille humaine et *(iv)* maintenir une bonne rigidité de la structure à travers un problème d'optimisation multiobjectif.

**Mots-clés:** Sandwich viscoélastique, Amortissement, Micromécanique, Nanocomposites, Energie de surface, Interface imparfaite, Différentiation automatique, Méthode asymptotique numérique, MATLAB.

## Abstract

**Thesis title : “Multiscale modeling and design of materials : from atomistic discrete description to continuum approaches. Application to damping behavior of automotive windshield”.**

The main objective of this thesis is to develop a multiscale modeling framework that implements hierarchical models from atomistic level modeling to structural level modeling in order to include material creation in the design of the system as a whole for damping applications. Since damping is of interest in this study, we explore some avenues for the design of high loss materials. Thus, the mean-field micromechanical model introduced by Lipinski et al. [Philosophical Magazine 86 (10), 1305-1326, 2006] is extended to include frequency dependent material behavior through the elastic-viscoelastic correspondence principle. The results indicate that with proper choice of viscoelastic material properties, it is possible to have a multiphase viscoelastic composite with a high loss modulus (good energy dissipation characteristics) for a wide range of frequencies without substantially degrading the stiffness of the composite (storage modulus). The slightly weakened interface micromechanical model of Qu [Mechanics of Materials 14, 269-281, 1993] is also extended to investigate imperfect interface effect on damping behavior of viscoelastic composite materials. In order to investigate the nanosize effect on damping characteristics of nanocomposite materials, we develop and validate an atomistic-continuum interphase model for effective properties of elastic composite materials containing ellipsoidal nano-inhomogeneities. This approach bridges the gap between discrete systems (atomic level interactions) and continuum mechanics. An advantage of this approach is that it is developed from earlier models that consider inhomogeneities shape, thereby enabling both the nano-inhomogeneities shape and the nano-interphase shape to be simultaneously accounted for in computing the overall composite stiffness with any case of material and surface/interface anisotropies. On structural level modeling, we developed an analytical tool to study the static behavior of laminated glass beams with silicone material at ends. Two sandwich finite elements have been developed and implemented in MATLAB to study the static and the modal behaviors of viscoelastic sandwich beams and plates with complex boundaries conditions. Based on the automatic differentiation techniques and the asymptotic numerical method, we developed the Diamant MATLAB toolbox which is a powerful tool to investigate many generic nonlinear problems namely the complex non linear eigenvalue problems that arise in the vibration analysis of viscoelastically damped structures. Using all these numerical tools, we investigate the effects of the materials microstructures on the modal and acoustical properties of the automotive windshield. To finish, this work shows a simple example to conceive the automotive windshield materials microstructures to fulfill four design requirements of the whole windshield structure in service by solving a multi-objectives optimization problem. The specified design requirements for the windshield are to improve its acoustic performances while simultaneously reducing the weight and minimally reducing the in-plane stiffness.

**Key words:** Viscoelastic Sandwich, Damping, Micromechanics, Nanocomposites, Surface excess energy, Imperfect interface, Automatic differentiation, Asymptotic numerical method, MATLAB.