



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Université Paul Verlaine - Metz, Supélec, École doctorale EMMA et avec la participation du
Conseil Régional de Lorraine

Analyse de la Dynamique de Solitons Photoréfractifs

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 27/03/07

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Paul Verlaine – Metz

(spécialité physique)

par

Marc Grün

Composition du jury

<i>Président :</i>	Pr. Gérard Bonhomme, Université Henri Poincaré, NANCY
<i>Rapporteurs :</i>	Pr. Eugenio Fazio, Université la Sapienza, ROME Pr. Christophe Letellier, Université de Haute-Normandie, ROUEN
<i>Directeur :</i>	Pr. Jean Maufroy, Supélec, METZ
<i>Examineurs :</i>	Pr. Gérard Bonhomme Pr. Germano Montemezzani, Université Paul Verlaine, METZ Pr. Zeno Toffano, Supélec, GIF-SUR-YVETTE

Laboratoire Matériaux Optiques, Photonique et Systèmes — UMR 7132



Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je remercie :

- mes parents ;
- tout le personnel de Supélec ;
- Katy ;
- mes chats ;
- CH_3CH_2OH pour l'inspiration.

A L'EUROSIBÉRIE

Table des matières

Table des figures	xv
1 Introduction	1
2 Modélisation de la dynamique de solitons photoréfractifs	5
2.1 Les solitons photoréfractifs et leur observation	5
2.1.1 La propagation de solitons brillants dans un cristal photoréfractif	5
2.1.2 La méthode de propagation de faisceau (<i>BPM</i> , Beam Propagation Method)	8
2.1.3 Problème de réapparition des solitons au bord opposé et sa résolution	10
2.2 La présence de désordre	12
2.2.1 La filamentation : un processus très complexe	13
2.2.2 La sensibilité de la dynamique aux conditions initiales . .	14
2.2.3 Amplification du bruit	15
2.3 Un possible chaos spatial d'abord qualifié de complexité spatiale	15
3 Le Paradigme des Noeuds d'Interactions (<i>INP</i>)	19
3.1 Les outils habituels du chaos ne peuvent être adaptés	19
3.1.1 Les premières tentatives de caractérisation	20
3.1.1.1 Les diagrammes $Re(A(X, Z_{out})) - Im(A(X, Z_{out}))$ du profil de sortie	20
3.1.1.2 Les diagrammes $\varphi'(X, Z_{out}) - I(X, Z_{out})^{\frac{1}{4}}$	20
3.1.1.3 Tentatives d'adaptation de diagrammes de bifurcation	22

3.1.2	Le besoin d'une nouvelle interprétation, non- unidimensionnelle et non- univoque	23
3.1.2.1	Le désordre s'exprime partout	23
3.1.2.2	Nécessité de plusieurs dynamiques	24
3.2	Les interactions entre solitons comme créatrices d'incertitude . .	25
3.3	Preuves de la validité de l' <i>INP</i> : perturbation de divers réseaux	27
3.3.1	La destruction par le coefficient non-linéaire d'un réseau initialement ordonné	28
3.3.2	La perturbation d'un réseau avec les angles des solitons incidents	28
3.3.3	Les noeuds d'interactions responsables de l'amplification des perturbations	30
4	Application du Paradigme des Noeuds d'Interactions : la création d'un Programme de Modélisation (<i>MP</i>)	33
4.1	L' <i>INP</i> ne peut être appliqué aux simulations	34
4.2	Vers une simplification de la dynamique solitonique : définition de règles d'interaction	35
4.2.1	Principe	35
4.2.2	Les diverses interactions	36
4.2.2.1	Rebond	36
4.2.2.2	Croisement	37
4.2.2.3	Couplage	38
4.2.2.4	Couplage à l'infini	38
4.2.2.5	Création et annihilation de solitons	39
4.2.2.5.1	Création de nouveau solitons	39
4.2.2.5.2	Annihilation d'un soliton	39
4.2.3	Choix d'une interaction : résumé	39
4.3	Exemple sur deux configurations simples	40
4.3.1	Les configurations à 10 solitons <i>A</i> et <i>B</i>	41
4.3.2	La perturbation se propage	41
4.3.3	Une dynamique sensible aux conditions initiales	42
4.4	Illustration des différents types d'interactions et de leur modélisation	42

5 La Méthode de Conformation d'Événements : utilisation de l'INP et du MP	51
5.1 Comment exploiter les données sur les noeuds fournies par le MP?	52
5.1.1 D'une carte de noeuds vers une chaîne d'événements	52
5.1.1.1 Objectif et définitions	52
5.1.1.2 Exemples	53
5.1.2 Représentation du chemin dans le plan	54
5.2 La caractérisation de cartes de noeuds proches grâce à la corrélation de chemins	55
5.2.1 Le formalisme utilisé	55
5.2.1.1 La matrice de chemin	55
5.2.1.2 Un exemple simple	56
5.2.2 Estimateurs basés sur les chemins d'événements	57
5.2.2.1 Estimateurs d'événements	58
5.2.2.2 Coefficients de corrélation d'événements	59
5.2.3 Exemples	59
5.2.3.1 Cartes α et β	59
5.2.3.2 Utilisation de la méthode sur des cartes plus importantes : les cartes à 50 solitons $\aleph$ et $\beth$	62
5.3 Remarques et améliorations	62
5.3.1 Les estimateurs et les coefficients dépendent de la taille de la fenêtre	62
5.3.2 La dégradation de la dynamique des solitons	64
5.4 La corrélation interphase	65
5.5 L'exposant de Lyapunov en chaos standard et son adaptation à la dynamique solitonique	66
5.5.1 Définitions	66
5.5.2 Exemples	67
5.5.2.1 Sur les cartes $\aleph$ et $\beth$	67
5.5.2.2 Autre exemple : une montée du désordre	67
5.6 La description d'un chaos?	68
5.6.1 Dynamique stationnaire et présentant des propriétés de récurrence?	68

5.6.2	Sensibilité aux conditions initiales	70
5.6.3	Conclusion	72
6	Le Paradigme Global et les caractérisations qui en découlent	73
6.1	L'utilisation de toutes les informations - une approche totale- ment différente	74
6.1.1	Envisager la dynamique de solitons photoréfractifs comme un processus global	74
6.1.2	Les données d'intensité et de phase dans le cristal : ap- proche statistique	74
6.1.3	Les coefficients de corrélation instantanés	75
6.1.4	Les coefficients de corrélation cumulatifs	76
6.1.5	Le calcul des taux de divergence	76
6.1.6	Exemple : filamentation d'un faisceau gaussien	77
6.2	"Forces" de complexité	79
6.2.1	Forces de complexité instantanées	79
6.2.2	Forces de complexité cumulatives	79
6.3	Evolution des forces de complexité avec le coefficient non-linéaire	80
6.3.1	Exemples sur les faisceaux gaussiens	80
6.3.2	Discussion	82
6.3.2.1	Pertinence des forces de complexité	82
6.3.2.2	Approximation $\alpha : Cst$	83
6.3.2.3	Approximation $\beta : Nul$	84
6.3.3	Cumul des deux approximations	87
6.3.4	Conséquences physiques	89
6.4	Mesure de la perte de corrélation spatio-temporelle sur une série de simulations	89
6.4.1	Définition du formalisme	90
6.4.2	Corrélation chaînée : mesure de la perte de corrélation d'une simulation à l'autre	90
6.4.3	Multicorrélation : mesure de la perte de corrélation sur une série de temporelle de simulations	91
6.4.4	Exemple : dynamique temporelle d'un faisceau gaussien constant	93

6.4.4.1	Corrélations chaînées	94
6.4.4.2	Multicorrélations	95
6.4.5	Autre exemple : perturbation transitoire d'amplitude en régime stationnaire	97
6.5	La description d'un chaos?	98
6.5.1	Propriétés de stationnarité et de récurrence	100
6.5.2	Sensibilité aux conditions initiales	101
6.5.2.1	La qualité de l'approximation en exponentielle inverse	101
6.5.2.2	Robustesse des $\alpha_{I,\varphi}$ face à l'amplitude de variation des conditions initiales	102
6.5.2.3	Comportement linéaire des forces de complexité	104
6.5.3	Conclusion	105
7	L'adaptabilité à la physique de la méthode du Paradigme Global	107
7.1	La caractérisation du désordre photoréfractif à partir d'un film montrant une filamentation	108
7.1.1	Le film expérimental - définition du formalisme	108
7.1.2	Corrélation chaînée	110
7.1.3	Multicorrélation	112
7.2	Vers une possible estimation du coefficient non-linéaire à partir d'un film de filamentation?	115
7.2.1	Le problème de la variation du coefficient non-linéaire	115
7.2.2	Les évolutions conjointes des forces de complexité et du coefficient non-linéaire	116
7.2.3	Discussion : la cohésion entre les forces de complexité et le coefficient non-linéaire	117
7.3	La description d'un chaos?	118
8	Le désordre de solitons photoréfractifs vu comme une ontologie de la phase	121
8.1	La phase : l'"autre" variable d'état	121
8.1.1	L'autre versant des simulations	121
8.1.2	Exemple - influence à grand angle	122

8.2	Cartes de phase	123
8.2.1	L'obtention par filtrage d'une carte lisible	123
8.2.2	Considérations générales sur la phase de solitons variés	124
8.2.3	Cartes de phase de diverses filamentations	126
8.2.3.1	Filamentation de faisceaux gaussiens	126
8.2.3.2	Filamentation d'un profil constant	128
8.2.3.3	L'effet d'un décalage en phase	129
8.2.3.4	L'effet d'une modification légère en intensité	130
8.3	La phase comme le meilleur descripteur de la dynamique	131
8.3.1	Influence à grand angle : explication par la phase	131
8.3.2	Les propriétés contextuelles de la phase	132
8.3.3	La forte cohésion entre les estimateurs de force de complexité de phase et le coefficient non-linéaire	133
8.4	La complexité de la dynamique de solitons photoréfractifs comme ontologie de la phase	133
9	Les propriétés de la dynamique des solitons photoréfractifs : caractérisation d'une dynamique unique	135
9.1	Cartes de noeuds et propriétés de récurrences	136
9.1.1	Motifs récurrents dans une même carte de noeuds	136
9.1.2	Méthodes de calcul des dimensions	137
9.1.3	Résultats	138
9.1.3.1	Obtention des dimensions	138
9.1.3.2	Quantification du caractère auto-similaire	138
9.2	L'inégalité de la distribution de l'intensité lumineuse dans une filamentation	140
9.2.1	Les estimateurs d'inégalité en économétrie	140
9.2.2	Adaptation des estimateurs d'inégalité à la propagation de faisceau	140
9.2.2.1	Les estimateurs transversaux (t)	140
9.2.2.2	Les estimateurs globaux (g)	141
9.2.3	Application à la filamentation	142
9.2.3.1	Les configurations testées	142
9.2.3.2	Résultats	142
9.2.3.2.1	Evolution des estimateurs transversaux	142

9.2.3.2.2	Valeurs des estimateurs globaux	142
9.2.4	Discussion	143
9.2.4.1	Pertinence des estimateurs	143
9.2.4.1.1	Pertinence des estimateurs (t) entre eux	143
9.2.4.1.2	Pertinence des estimateurs (t) avec les estimateurs (g)	145
9.2.4.2	Vers une distribution très inégalitaire	147
10	La confrontation des paradigmes et méthodes	149
10.1	L'état de la problématique	149
10.1.1	Les niveaux d'abstraction ; le glissement d'un paradigme vers l'autre	150
10.1.2	La comparaison des deux décorrélations héritées des Mé- thodes de Conformations d'Evénements et du Paradigme Global	151
10.1.2.1	Les configurations de solitons aléatoires	151
10.1.2.2	Résultats	151
10.1.2.2.1	L'ajustement des paramètres de déci- sion θ_{ref} et φ_{ref}	152
10.1.2.2.1.1	La "cohésion" Coh	152
10.1.2.2.1.2	Choix de θ_{ref} et φ_{ref}	153
10.1.2.2.2	Exemple optimisé	154
10.1.2.2.3	Discussion	155
10.2	Le Paradigme Global : le plus proche de la réalité physique . . .	156
11	Conclusion	159
	Bibliographie	163
A	Les variables intervenant dans les équations de propagation	167
B	Calcul des échanges d'énergie, des déflexions d'angle et des variations de largeur	169
B.1	Echanges d'énergie	169
B.1.1	Rebond et Croisement	169
B.1.2	Couplage	171

B.1.3	Analogie croisement/rebond	172
B.2	Angles	172
B.2.1	Rebond	173
B.2.2	Rebond avec "réflexion" d'un soliton sur un autre	174
B.2.3	Croisement	174
B.3	Largeurs	175
C	Divers outils mathématiques	177
C.1	La Corrélation Statistique et sa généralisation	177
C.2	Coefficient de constance CC d'une série de données	178
C.3	Approximation linéaire des forces de complexité	180
C.3.1	Moindres carrés sous contrainte	180
C.3.2	Rapport de résidus	180
D	Résumé des concepts	183
E	Résumé des méthodes de calcul de dimensions	187
E.1	Les q -dimensions de Renyi généralisées (RGD)	187
E.2	La fonction de corrélation de Pawelzik-Schuster généralisée ($PSGCF$)	188
E.3	Adaptation des méthodes, leur complexité et choix d'une d'entre elles	189
E.3.1	Prendre la pente et non la limite	189
E.3.2	Complexités	189
F	Les estimateurs utilisés en économétrie	191
F.1	Estimateurs dérivés de la courbe de Lorenz	192
F.1.1	Coefficient de Gini G	192
F.1.2	L'indice Robin-des-Bois RHI	193
F.2	Entropie de Theil T	193
G	Les interfaces graphiques	195
G.1	Les interfaces basées sur le Paradigme des Noeuds d'Interactions	195
G.1.1	"Self-Characterization of a Random Configuration" . . .	195
G.1.2	"Quantizing the Divergence of Two Near-But-Different Maps"	196
G.1.3	"Sensitivity to Initial Conditions"	198

G.2	Les interfaces basées sur le Paradigme Global	198
G.2.1	"Global Paradigm Method"	198
G.2.2	"Simulating a Real Filamentation Experience with BPM"	200

Table des figures

2.1	Profil $\gamma(X)$ d'un soliton élémentaire.	7
2.2	Echantillonnage par la Beam Propagation Method d'un cristal de dimensions réduites FS et ζ	9
2.3	Carte de couleur représentant la valeur de l'intensité lumineuse dans une simulation (base 100).	10
2.4	Illustration du problème de réapparition des solitons : le soliton 1 sortant du bord supérieur réapparaît au bord inférieur et vice- versa pour le soliton 2.	11
2.5	Filtrage hypergaussien.	11
2.6	(<i>En haut</i>) Résultat du filtrage hypergaussien sur la simulation présentée en Fig.2.4; (<i>en bas</i>) autre exemple.	12
2.7	La filamentation d'un faisceau gaussien en une gerbe de solitons.	13
2.8	Mise en évidence des propriétés de symétrie d'une filamen- tation. Le trait mauve plein partage l'évolution du faisceau en deux, ce même trait et les deux traits mixtes rouges la par- tagent en quatre, ces trois traits précédents et les quatres traits en pointillés gris la partagent en huit.	14
2.9	Simulations obtenues pour deux faisceaux gaussiens d'intensi- tés très proches : on peut remarquer par exemple qu'un soliton intense et un soliton plus faible s'inversent d'une image à l'autre.	15
2.10	Simulations successives montrant la disparition progressive des solitons, noyés par le bruit.	16

3.1	Divers diagrammes de sortie. A : obtenu avec un faisceau gaussien de waist faible et un coefficient non-linéaire faible ; B : obtenu avec un faisceau gaussien de waist plus important et un coefficient non-linéaire faible ; C : obtenu avec un faisceau gaussien de même waist qu'en B et un coefficient non-linéaire plus important ; D : obtenu avec un faisceau gaussien très large et un coefficient non-linéaire très fort.	21
3.2	Exemples de diagrammes $\varphi'(X, Z_{out})-I(X, Z_{out})^{\frac{1}{4}}$ A : coefficient non-linéaire faible ; B : coefficient non-linéaire fort.	22
3.3	Exemple de profil d'intensité sur la face de sortie, voué à estimer le nombre de solitons.	23
3.4	Exemples de dynamiques à trois solitons obtenues en faisant varier la phase du soliton supérieur.	25
3.5	Exemple d'une dynamique à quatre solitons.	26
3.6	Dispositions de quelques noeuds sur les filamentations de deux faisceaux gaussiens d'intensités r très proches.	27
3.7	Réseau carré à 36 noeuds d'interactions, obtenu avec 12 solitons	28
3.8	Destruction du réseau initial par augmentation du coefficient non-linéaire	29
3.9	Comparaison des réseaux pour un NL faible et un NL fort . . .	30
3.10	Réseau losange à 36 noeuds d'interactions, obtenu avec 12 solitons	30
3.11	Perturbation des angles de solitons incidents indiqués par une flèche	31
4.1	La localisation des noeuds d'interactions serait possible là où la densité de solitons est faible (partie inférieure de l'image) mais deviendrait très ardue pour des densités élevées (partie supérieure de l'image).	34
4.2	Exemple d'une configuration de 10 solitons dont on cherche à tester la dynamique. La direction de propagation est vers le haut.	35

4.3	Processus décisionnel de choix d'une interaction.	40
4.4	Les dynamiques correspondant aux configurations A (à gauche) et B (à droite).	41
4.5	Le rebond de solitons mis en évidence grâce à la BPM , puis mo- délisé selon divers cas : A : rebond simple ; B : rebond avec dé- flexions d'angles à la sortie ; C : rebond avec déflexions d'angles et échanges d'énergie et de largeurs ; D : rebond radiatif avec déflexions d'angles et échanges d'énergie et de largeurs ; E : re- bond avec réflexion sans perturbation et F : avec déflexion. . . .	43
4.6	Le croisement de solitons mis en évidence grâce à la BPM , puis modélisé selon divers cas : A : croisement simple ; B : croisement avec déflexion d'angle à la sortie sur le soliton le plus faible ; C : croisement avec échanges d'énergie et de largeurs ; D : croise- ment radiatif avec déflexions d'angles et échanges d'énergie et de largeurs.	44
4.7	Une simulation numérique qui montre que la distinction croise- ment/rebond est parfois délicate à faire et son illustration par le Programme de Modélisation : A : croisement sans échange d'énergie, ressemblant à un rebond avec échange d'énergie ; B : croisement avec échange d'énergie, ressemblant à un rebond sans échange d'énergie.	45
4.8	Un couplage assez court deux solitons mis en évidence grâce à la BPM puis figuré par le Programme de Modélisation	45
4.9	Traversée d'un couplage par un troisième soliton, observée grâce à la BPM et exprimée par le Programme de Modélisation : A : sans perturbation ; B : avec pertes radiatives et déflexion pour le troisième soliton. Rebond d'un troisième soliton sur le couplage : C : sans perturbation ; D : avec pertes radiatives et déflexion pour le troisième soliton. E : couple simple ; F : celui-ci défléchi et raccourci à cause d'un troisième soliton.	46

4.10	Couplage à l'infini observé grâce à la BPM, puis modélisé. . . .	47
4.11	Créations de nouveaux solitons observés dans les simulations numériques lors d'un rebond et d'un croisement, interprétées par le Programme de Modélisation : (<i>Rebond</i>) <i>A</i> : création d'un soliton entre les deux solitons émergents ; <i>B</i> : création de plusieurs solitons entre les deux solitons émergents ; <i>C</i> : création d'un soliton à l'extérieur du cône formé par les deux solitons émergents ; <i>D</i> : création des deux types de solitons. (<i>Croisement</i>) <i>E</i> : création d'un soliton entre les deux solitons émergents ; <i>F</i> : création de plusieurs solitons entre les deux solitons émergents et à l'extérieur.	48
4.12	Absorption d'un soliton faible mis en évidence grâce à la <i>BPM</i> et symbolisé par le Programme de Modélisation	49
5.1	La carte α	53
5.2	Le chemin α	55
5.3	Un résumé de la Méthode de Conformation d'Événements. . . .	56
5.4	Chemins P^a et P^b	58
5.5	la carte β	60
5.6	Les chemins correspondant aux cartes α et β	61
5.7	[cartes α et β] Evolution des coefficients de corrélation d'événements avec le nombre d'interactions prises en compte.	62
5.8	Les cartes $\aleph$ et $\beth$ et les chemins d'événements qui leur correspondent (en bleu pour $\aleph$ et en rouge pour $\beth$, s'il diffèrent ; en noir si les sous-chemins sont les mêmes.)	63
5.9	[cartes $\aleph$ et $\beth$] Evolution des coefficients de corrélation.	64
5.10	[cartes $\aleph$ et $\beth$] (<i>à gauche</i>) évolution des corrélations interphase ; (<i>à droite</i>) évolution du coefficient de corrélation interphase. . . .	66
5.11	Exemples d'évolution du taux de divergence avec le nombre d'interactions : (<i>à gauche</i>) pour les cartes $\aleph$ et $\beth$; (<i>à droite</i>) pour deux autres cartes.	67

5.12	(<i>A gauche</i>) Une carte de noeuds obtenue à partir d'une population de 150 solitons; (<i>à droite</i>) Evolution du nombre d'interactions cumulées dans celle-ci avec Z	69
5.13	[Résultats de l'approximation linéaire pour une configuration aléatoire](<i>En haut</i>) valeurs de α pour diverses modifications en % de l'angle du soliton médian; (<i>en bas</i>) valeurs du coefficient de corrélation de l'approximation linéaire.	71
6.1	Simulations correspondant aux faisceaux B_1 (en haut) et B_2 (en bas), à $NL = -1$	77
6.2	[Faisceaux B_1 et B_2] Evolution des coefficients de corrélation et des taux de divergence pour $NL = -1, -2$ et -3	78
6.3	Evolution des forces de complexité avec NL pour les paires de faisceaux explicitées en 6.3.1.	81
6.4	Evolution de α et β avec $\log\left(\frac{\Delta a}{a}\right)$	84
6.5	Une évolution typique de force de complexité Str ainsi que les droites $\alpha NL + \beta$ et $\tilde{\alpha} NL$ qui essaient d'en réaliser une approximation linéaire.	85
6.6	Evolution des force de complexité en intensité et de phase avec NL , pour les paires de faisceaux $B_1 \& B_{low}$ (ligne continue), $B_1 \& B_2$ (ligne mixte), $B_1 \& B_3$ (ligne discontinue), $B_1 \& B_4$ (pointillés) et $B_1 \& B_5$ (ligne continue épaisse).	88
6.7	Simulations numériques du faisceau $4 \exp^{-(X/200)^2}$ à $\tau = 0.3, 2, 100, 10000$; on peut voir l'évolution transitoire temporelle de $\tau = 0.3$ à 100 (les dynamiques $\tau = 0.3, 2, 100$ sont différentes) vers un état stationnaire à partir de 100 (les dynamiques $\tau = 100, 1000$ sont identiques).	94
6.8	[Dynamique temporelle d'un faisceau constant] Evolutions des forces de complexités chaînées, d'une simulation à la suivante (cf. tableau 6.4).	95

6.9	[Dynamique temporelle d'un faisceau constant] Evolutions spatio-temporelles des multicorrélations et des taux de divergence. . . .	96
6.10	[Faisceau perturbé en régime stationnaire] Evolutions des forces de complexité chaînées.	98
6.11	[Faisceau perturbé en régime stationnaire] Evolutions spatio-temporelles des multicorrélations et des taux de divergence. . . .	99
6.12	Le faisceau B_1 , déjà présenté sur la Fig.6.1, se propage ici dans les mêmes conditions, mais sur une distance deux fois plus importante : on peut constater comment la dynamique se dégrade.	101
6.13	Valeurs de α_I et α_φ en fonction du logarithme de $\frac{\Delta a}{a}$ pour les trois valeurs de coefficient non-linéaire testées.	103
6.14	Retour au coefficient non-linéaire après l'application de deux processus de calcul.	104
7.1	Schéma expérimental.	108
7.2	Séquence de 8 extraites d'un film montrant le comportement d'un laser dans un cristal de SBN	109
7.3	Evolution temporelle des forces de complexité, d'une image à la suivante ; le temps t_0 désigne le début de l'expérience et le laps de temps T entre deux images vaut 0.125s.	111
7.4	Représentation des nappes de multicorrélations instantanée $MultR_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$ et cumulative $Mult\rho_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$: (<i>en haut</i>) "brutes" ; (<i>en bas</i>) hors problèmes de résolution du film.	114
7.5	Représentation des multi-taux de divergence instantané $L_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$ et cumulatif $\lambda_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$ hors problèmes de résolution.	115
7.6	Exemples d'images du film expérimental et de la BPM dans laquelle on se rapproche le plus possible des conditions expérimentales du film.	117
7.7	Evolution d'une image à l'autre de $ NL $ et des forces de complexité, normalisés par-rapport à leur maximum respectif. . . .	117

7.8	Qualités de l'approximation de $Mult\rho_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$. . .	119
8.1	Collision à grand angle de deux solitons : (<i>à gauche</i>) d'intensités différentes ; (<i>à droite</i>) d'intensités identiques.	123
8.2	Une simulation et les cartes de phase brute et filtrée résultantes.	124
8.3	Correspondance couleur/"angle" sur une carte de phase.	125
8.4	Influence de l'argument α sur la phase.	125
8.5	Allure de la phase pour une intensité plus faible.	126
8.6	Filamentation d'un faisceau gaussien et carte de phase correspondante.	127
8.7	Filamentation d'un faisceau de profil constant et phase correspondante.	128
8.8	Réseau "losange".	128
8.9	L'effet d'un décalage en phase global sur le profil initial du faisceau.	129
8.10	L'effet d'une légère modification d'intensité sur le profil initial du faisceau.	130
8.11	Comparaison des phases dans les zones d'interaction pour le cas dissymétrique (<i>à gauche</i>) et symétrique (<i>à droite</i>).	131
8.12	Inclinaison β du front de phase et direction θ du soliton : $\theta = \beta$.	133
9.1	Agrandissements successifs d'une même carte de noeuds, montrant l'apparition des motifs récurrents. Par exemple, la zone jaune 100×100 sur la carte de dimensions 800×800 , une fois agrandie à la même échelle, laisse apparaître des noeuds "inédits", s'arrangeant encore selon les motifs sus-cités.	137
9.2	Courbes de dimensions obtenues par la méthode <i>RGD</i> permettant le calcul des diverses dimensions, pour la carte de noeuds 800×800 présentée en Fig.9.1.	138
9.3	Estimations des dimensions pour les sous-cartes issues de la carte 800×800	139

9.4	Les simulations correspondant aux quatre configurations $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$, rangées selon leurs caractéristiques (waist du faisceau injecté et coefficient non-linéaire).	143
9.5	Evolution des estimateurs transversaux pour les quatre configurations $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$	144
10.1	Exemple d'évolution des deux décorrélations ρ_I et σ_{CAS} , où les paramètres du Programme de Modélisation n'ont pas été optimisés.	152
10.2	Variation de Coh pour diverses valeurs de l'angle et de la phase références θ_{ref} et φ_{ref}	154
10.3	(<i>A gauche</i>) Exemple d'évolution des deux décorrélations ρ_I et σ_{CAS} , où les paramètres du Programme de Modélisation ont été optimisés; (<i>à droite</i>) évolutions correspondantes des deux taux de divergence λ_I et $\lambda_{\sigma_{CAS}}$ tirés de ρ_I et σ_{CAS} et forces de complexité associées.	155
B.1	Transferts d'énergie entre les solitons 1 et 2 en fonction du coefficient α et de la variable binaire $poor$	170
B.2	Paramètres géométriques du couplage de deux solitons Sol_1 et Sol_2	171
B.3	Situation de croisement assimilable à un rebond.	172
B.4	Variations des angles θ_1 et θ_2 en fonction des coefficients de transfert $tsftangle_{12}$ et $tsftangle_{21}$	173
B.5	Rebond où le soliton 2 se "réfléchit" sur le soliton 1	174
C.1	Les éléments d'une série X et leurs écarts à la moyenne.	179
D.1	Les Méthodes en termes d'abstraction et de caractérisation. . . .	185
F.1	La courbe de Lorenz avec les lignes de parfaites égalité et inégalité	192
F.2	Calcul du coefficient de Gini à partir de la courbe de Lorenz . .	193
F.3	L'indice Robin-des-Bois RHI est donné par la distance (DP) . .	194

G.1	L'interface caractérisant une seule dynamique de solitons	196
G.2	L'interface caractérisant la divergence entre deux dynamiques de solitons	197
G.3	L'interface caractérisant la sensibilité aux conditions initiales dans le cadre de la Méthode de Conformations d'Evénements . .	199
G.4	L'interface appliquant la Méthode du Paradigme Global à deux simulations numériques	200
G.5	L'interface recréant une expérience de filamentation grâce à la BPM	201

Chapitre 1

Introduction

«...le trouble et l'agitation sont considérables.» MICHEL HOUELLEBECQ [1]

Peu de concepts comme le chaos [2] ont montré une telle universalité et une telle capacité à décrire des phénomènes dynamiques dans des domaines aussi variés que la physique, la biologie, les sciences économiques et sociales. La notion de chaos suggère désordre, complexité, incertitude et fractales ; il est souvent présent quand sont mis en jeu des phénomènes non-linéaires. Par ailleurs, une branche récente de la physique ondulatoire décrit les solitons ([3],[4]), des ondes qui ne se dispersent pas ; un certain effet non-linéaire compense la dispersion ou la diffraction de celles-ci, forçant leur énergie à rester compacte. De ces deux concepts issus de la non-linéarité, on peut légitimement s'enquérir d'une possible connexion. A ce titre, aucune autre espèce de soliton que les *solitons photoréfractifs* n'est plus à même de nous faire entrevoir les possibilités d'un intense désordre, voire même d'un chaos, car ceux-ci sont des entités purement spatiales. Se formant dans des cristaux aux propriétés spécifiques, les solitons photoréfractifs ont été jusque là très peu étudiés, mais grâce à un outil de simulation, nous avons pu pressentir tout l'intérêt d'une analyse de leur dynamique sous le point de vue de phénomènes désordonnés.

L'analyse mathématique d'un système dynamique peut s'effectuer selon plusieurs modalités. Disposant de fonctions dynamiques représentatives de

l'état physique du système, et définies de manière temporelle ou spatio-temporelle, il est en effet possible de spécifier plusieurs démarches de calcul visant à caractériser le comportement de ces fonctions dynamiques par rapport aux variables explicatives temps/espace ([5],[6]).

Pour un système de nature chaotique, il est par exemple notoire que, dans l'espace des phases, deux trajectoires initialement très proches vont diverger de façon exponentielle, si bien qu'elles se retrouveront très vite totalement décorréliées. L'intensité de ce phénomène, emblématique du chaos, se caractérise mathématiquement par un *exposant de Lyapunov* positif [7] représentant le taux de cette divergence exponentielle. La représentation, dans l'espace des phases, des trajectoires d'un système chaotique constitue un *attracteur étrange* dont la propriété principale est de posséder une dimension non-entière, représentative d'une géométrie particulière, qui fait apparaître les mêmes motifs à différentes échelles d'observation ([8],[9]). Le concept de *bifurcation* [10] est enfin central à la théorie du chaos : étant donné un paramètre physique du système, apparaissant dans les équations dynamiques ([11],[12]), le diagramme de bifurcation représente la multiplication des cycles possibles en fonction de ce paramètre, jusqu'à un nombre de cycles infini caractéristique du chaos.

Le but du travail qui va suivre concerne essentiellement l'analyse des phénomènes dynamiques photoréfractifs en tant qu'un phénomène désordonné et sensible aux conditions initiales ; et il sera alors examiné si les dynamiques ainsi caractérisées peuvent être rigoureusement qualifiées de chaotiques. Ainsi chercherons-nous à particulariser de la manière la plus exhaustive possible la dynamique photoréfractive sous l'éclairage de paradigmes et concepts variés ; en effet, l'originalité et la particularité spatiale du problème induisent un traitement formel qui ne découle pas immédiatement de définitions préétablies utilisées par exemple pour la caractérisation de phénomènes dynamiques temporels ou spatio-temporels.

En premier lieu, après avoir esquissé les équations qui régissent la dynamique photoréfractive, nous tâcherons d'expliquer comment ces équations

sont résolues numériquement pour fournir des *simulations numériques* et sous quelles formes s'expriment le désordre et la complexité de la dynamique solitonique ainsi observés dans celles-ci.

Puis nous montrerons comment nos premières approches infructueuses d'adaptation directe des caractérisations de phénomènes dynamiques classiques nous ont mené au **Paradigme des Noeuds d'Interactions**, qui consiste en une interprétation localisée de la dynamique. Celle-ci sera modélisée selon une approche système via un Programme de Modélisation, dont les résultats nommés *cartes de noeuds* seront exploités dans le cadre de la Méthode de Conformations d'Événements. Outre la transformation d'une dynamique solitonique bidimensionnelle en une trajectoire bidimensionnelle, cette Méthode permettra de quantifier numériquement la décorrélation entre deux cartes de noeuds, et ainsi fournir une estimation de l'intensité de celle-ci via l'estimation de *taux de divergence*.

Ensuite, revenant aux simulations numériques et nous inspirant de ce formalisme dialectique "décorrélation entre deux dynamiques" précédemment fondé, nous fournirons dans le cadre du **Paradigme Global** et de sa Méthode, des estimateurs nommés *forces de complexité* dont le lien direct avec l'équation dynamique initiale sera révélé. Cette Méthode sera alors adaptée aux données expérimentales montrant image par image le comportement temporel d'un laser dans un cristal photoréfractif. La *multicorrélation* analysera alors la perte de mémoire globale du faisceau sur lui-même le long du cristal, et la *multiforce* se chargera de l'estimer.

Chaque grand ensemble de caractérisations sera suivi d'une discussion visant à juger du caractère chaotique des descriptions obtenues.

Puis nous nous intéresserons au rôle descriptif primordial de la phase et nous chercherons à caractériser non plus deux mais une seule dynamique. Dans le cadre du Paradigme des Noeuds d'Interactions, nous estimerons ainsi les diverses *dimensions* (fractale, de corrélation, d'information) d'une carte de noeuds. Ensuite, dans le cadre du Paradigme Global, nous caractériserons

numériquement le processus de *redistribution d'énergie lumineuse* à l'aide d'estimateurs utilisés en sciences économiques. Enfin, nous confronterons les deux Paradigmes et leur Méthodes respectives.

Chapitre 2

Modélisation de la dynamique de solitons photoréfractifs

«Sie ist ein Modell und sie sieht gut aus

Ich nehme sie heut' gerne mit zu mir nach Haus» KRAFTWERK

2.1 Les solitons photoréfractifs et leur observation

2.1.1 La propagation de solitons brillants dans un cristal photoréfractif

La question de la formation des solitons photoréfractifs est maintenant bien comprise, grâce à divers travaux assez récents.

La photoréfractivité se définit comme la dépendance spatiale de l'indice de réfraction en fonction de l'éclairement. Ce phénomène non-linéaire complexe résulte de l'association de plusieurs phénomènes de base qui concernent la dynamique des charges au sein du cristal ; le modèle de Kukhtarev [13], constitué de 5 équations, permet de l'expliquer de façon simple mais fédératrice.

Plusieurs approches ont été alors proposées afin de rechercher les solitons photoréfractifs. La première, celle de Segev et al. [14] était de type holographique ; celle de Christodoulides [15], moyennant certaines approximations, a permis d'aboutir à une équation de propagation non-linéaire portant sur l'enveloppe réduite U de la fonction d'onde, fonction des variables spatiales réduites X transversale et Z de propagation, déduites des variables spatiales physiques x et z à l'aide d'une longueur de réduction arbitraire et du vecteur d'onde k (cf. Annexe A) :

$$i\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \left(NL^2 - D\frac{\partial |U|^2}{\partial X} \right) \frac{U}{1 + |U|^2} = 0 \quad (2.1)$$

où NL et D , désignant le **coefficient non-linéaire** et le coefficient de diffusion, proviennent de grandeurs physiques telles le champ d'entraînement, la température, les coefficients de Pockels, le vecteur d'onde...

Partant d'une démarche identique à celle de Christodoulides, l'approche de Fressengeas et al. [16] a permis ensuite d'obtenir l'équation de propagation dépendante du temps :

$$i\frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \left(1 - \exp^{-\tau(1+|U|^2)} \right) \left(NL^2 - D\frac{\partial |U|^2}{\partial X} \right) \frac{U}{1 + |U|^2} - E_N(X, Z) \exp^{-\tau(1+|U|^2)} = 0 \quad (2.2)$$

On voit deux différences avec l'équation précédente : l'introduction d'une nouvelle saturation en $1 - \exp^{-\tau(1+|U|^2)}$ en plus de la saturation lorentzienne en $U/(1 + |U|^2)$ et l'apparition d'un terme "mémoire" (voir Annexe A pour l'expression plus complète de ces quantités). Des solutions à profil constant

$$U(X, Z, \tau_0) = \sqrt{r}\gamma(X, \tau_0) \exp^{w(X_0)Z} \quad (2.3)$$

à un instant donné ont alors été recherchées et on a finalement trouvé l'équation différentielle donnant le profil γ en fonction de X :

$$-2\gamma\nu + \gamma'' - \left(1 - \exp^{-\tau(1+r\gamma^2)}\right) \left(2NL^2 \frac{\gamma^2}{1+r\gamma^2}\right) - 2\gamma \exp^{-\tau(1+r\gamma^2)} = 0 \quad (2.4)$$

L'obtention de ce profil se fait par résolution numérique de l'équation différentielle 2.4 à l'aide de routines basées sur la méthode de Runge-Kutta [19].

Un exemple de profil de soliton est représenté à la Fig.2.1.

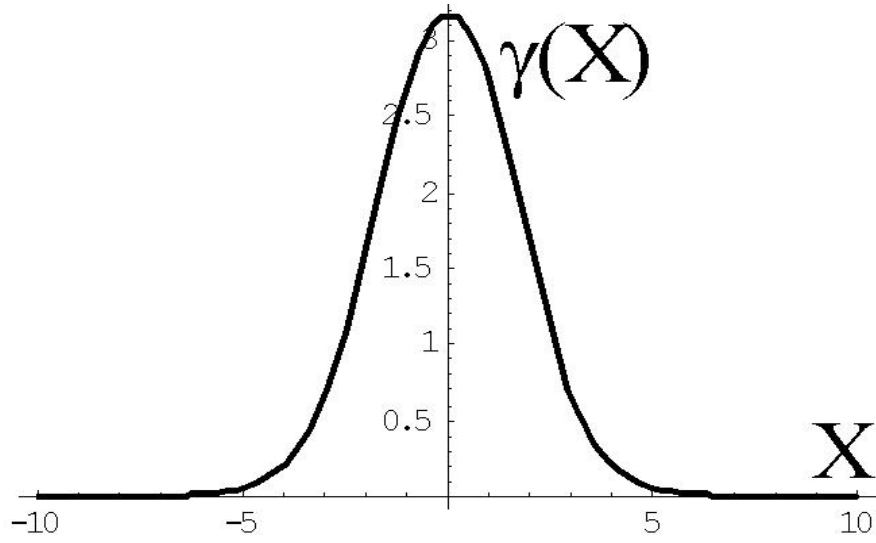


FIG. 2.1 – Profil $\gamma(X)$ d'un soliton élémentaire.

Cette étude théorique a permis de révéler le comportement temporel des solitons photoréfractifs [17], à savoir que leur taille ne varie pas de façon monotone avec le temps ; mais cet aspect temporel aura très peu d'importance dans la suite. Le comportement de ces solitons dans le cristal photoréfractif a été enfin investigué ; un outil informatique, spécifiquement développé à cet effet, a permis de mettre en évidence différents phénomènes, comme ceux concernant la focalisation (autofocalisation, surfocalisation, défocalisation), le bending ou courbure des faisceaux et surtout la filamentation. Autofocalisation et surfocalisation, où le faisceau se resserre, sont le prélude à la filamentation, phénomène très important qui sera montré en détail plus loin. Pour l'instant, il est nécessaire de décrire l'outil de simulation qui nous a menés à ces observations.

2.1.2 La méthode de propagation de faisceau (*BPM*, Beam Propagation Method)

L'étude théorique de la photoréfractivité en régime quasi-stationnaire mène à une équation de propagation qui impose une résolution numérique. Un logiciel de simulation a donc été mis au point afin de simuler la propagation solitonique ; il a permis de mettre en évidence avec succès les différents aspects de la dynamique des solitons. Un programme écrit en langage C se charge de cette résolution numérique ; il est basé sur la méthode de Split Step Fourier [18]. Celle-ci est utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles non-linéaires comme l'équation de Schrödinger ; son nom provient du fait qu'elle procède par pas petits et qu'elle repose sur la transformation de Fourier. En effet, l'équation de départ peut être scindée en deux parties : une partie linéaire, qui est résolue dans le domaine fréquentiel et une partie non-linéaire, résolue dans le domaine temporel. La méthode de Split Step Fourier est précise à l'ordre 2 et possède une faible complexité en $n \log(n)$, où n est le nombre d'échantillons. Les paramètres nécessaires à l'exécution du programme de simulation basé sur cette méthode sont :

- le profil d'entrée donnant l'amplitude initiale $A(X)$, s'identifiant à une gaussienne $A(X) = a \exp^{-(X/w)^2}$ (a est l'amplitude du faisceau et w son *waist* ou largeur) ou à une combinaison de profils de solitons ;
- les caractéristiques physiques du cristal : coefficients non-linéaire NL , de diffusion D et d'atténuation att ;
- le temps réduit τ (cf A) ;
- les paramètres propres à la méthode de Split Step Fourier : résolution *resolfft*, taille de la fenêtre transversale FS ("Fenêtre Signal"), valeur du pas h et nombre N_z de ces pas.

Dans tous les calculs de ce Mémoire, on aura pris D et att nuls, $\tau = 0.2$, *resolfft* = 10 et $h = 0.05$ (sauf mention contraire). La Fig.2.2 résume ainsi comment la *BPM* modélise la propagation du faisceau dans le cristal. Le

profil d'entrée étant échantillonné avec $N = 2^{resolft}$ éléments suivants X , l'algorithme se charge de trouver l'amplitude (complexe) $U(X_i, Z_j)_{i=1\dots N, j=1\dots N_z}$ dans le cristal ainsi modélisé en progressant avec un pas h selon Z . La longueur totale du cristal simulé vaut donc $\zeta = h \times N_z$.

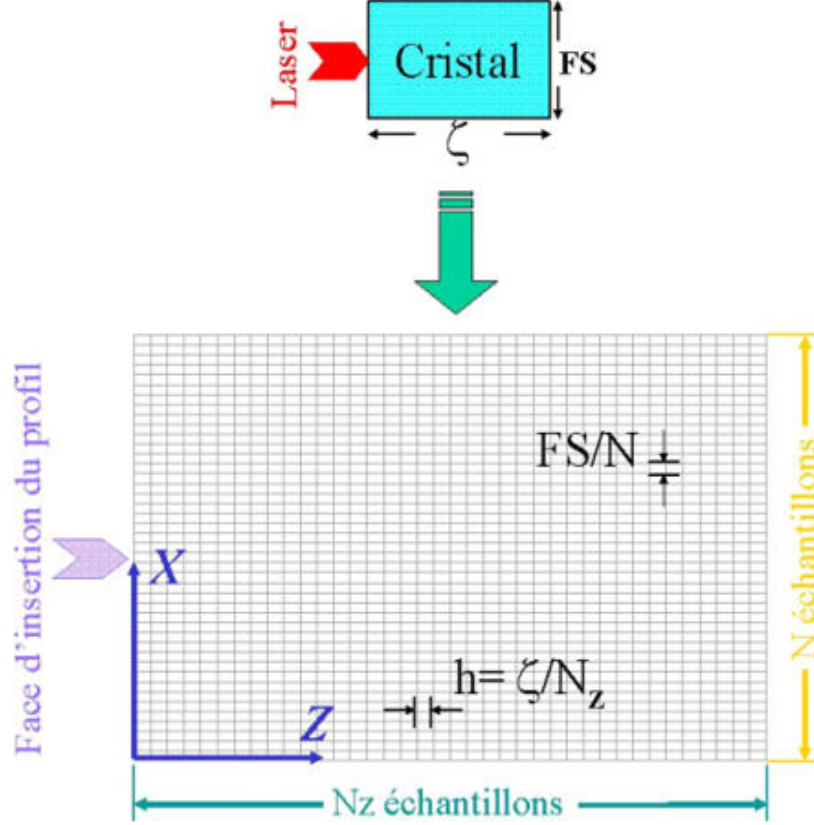


FIG. 2.2 – Echantillonnage par la Beam Propagation Method d'un cristal de dimensions réduites FS et ζ .

Enfin, on exploite les résultats de cet algorithme sous la forme de *simulations numériques* où l'on représente l'intensité lumineuse $I(X_i, Z_j) = |U(X_i, Z_j)|^2$ (ou la phase $\varphi(X_i, Z_j) = \arctan \left[\frac{\Im(U(X_i, Z_j))}{\Re(U(X_i, Z_j))} \right]$ dans le cas des *cartes de phase*, cf.8) dans tout le cristal, selon une carte de couleur esquissée en Fig.2.3.

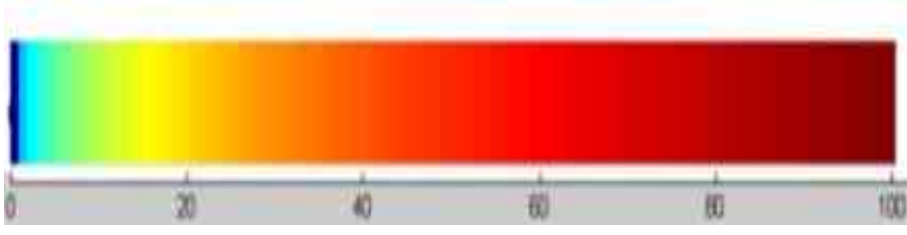


FIG. 2.3 – Carte de couleur représentant la valeur de l'intensité lumineuse dans une simulation (base 100).

2.1.3 Problème de réapparition des solitons au bord opposé et sa résolution

Il est à noter que, de part le caractère spectral de l'algorithme de Split Step Fourier, les solitons sortant d'un bord horizontal de la fenêtre de simulation réapparaissent au bord opposé (Fig.2.4).

Afin de pallier à ce phénomène qui n'a rien à voir avec la dynamique qui nous intéresse, il est nécessaire de procéder à un fenêtrage du signal aux bords : à la proximité de ceux-ci, le signal doit être diminué de façon à ce que l'intensité lumineuse vale 0 aux extrémités, décroissance qui doit être ajustée pour ne pas être trop brutale, sous peine de provoquer un effet identique à un bord de fenêtre.

Le filtre hypergaussien s'est avéré être la solution ; il s'exprime par la fonction $F(X) = \exp^{-\left(\frac{|X-N/2|}{N/2} + \lambda\right)^\alpha}$ où N est toujours le nombre d'échantillons suivant X , α la raideur et λ le paramètre d'ajustement. Par exemple, avec une raideur de 40, si l'on souhaite avoir 95% du signal à partir de 90% de la fenêtre transversale, on ajuste λ de la manière suivante :

$$\lambda = \log \left(\frac{1}{95\%} \right)^{1/40} - 90\% = 0.028435$$

Le filtre ainsi obtenu est illustré à la Fig.2.5, et son efficacité est prouvée à la Fig.2.6.

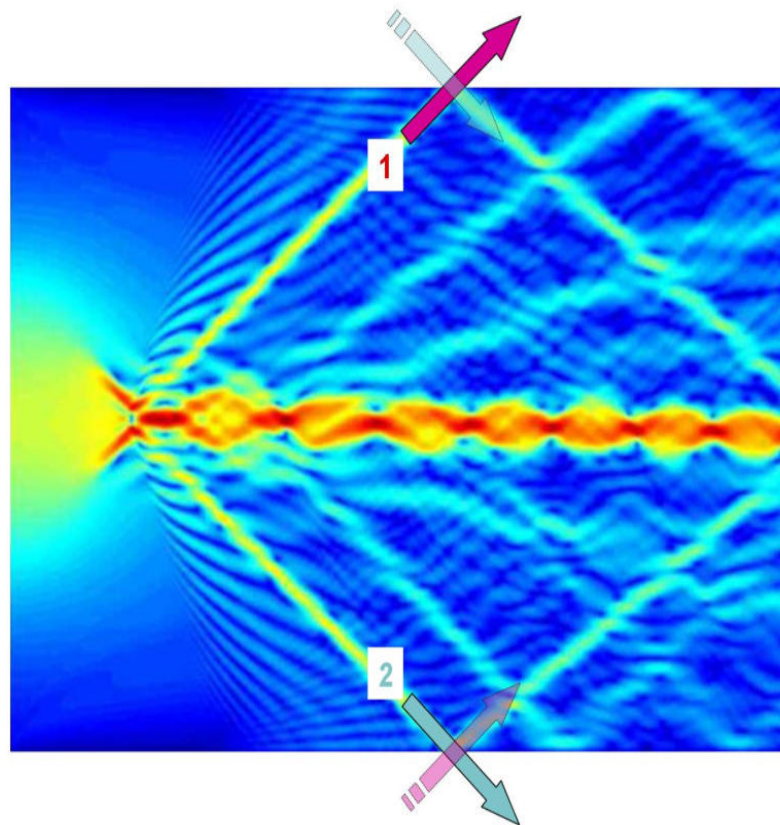


FIG. 2.4 – Illustration du problème de réapparition des solitons : le soliton 1 sortant du bord supérieur réapparaît au bord inférieur et vice-versa pour le soliton 2.

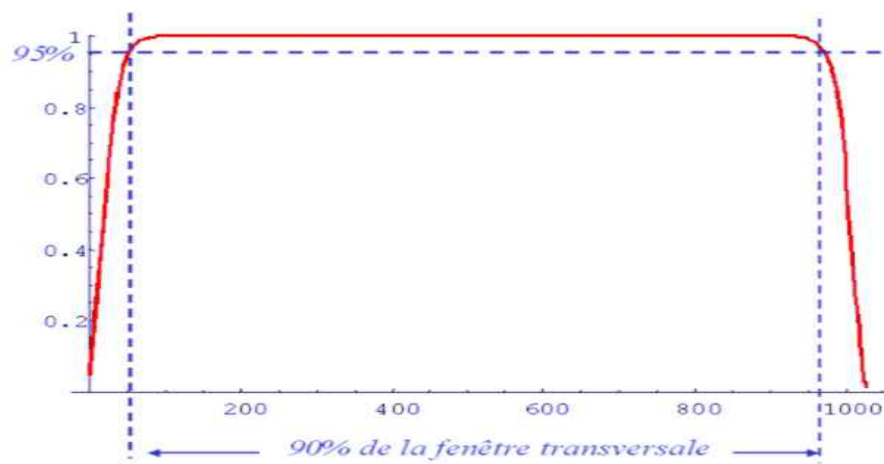


FIG. 2.5 – Filtrage hypergaussien.

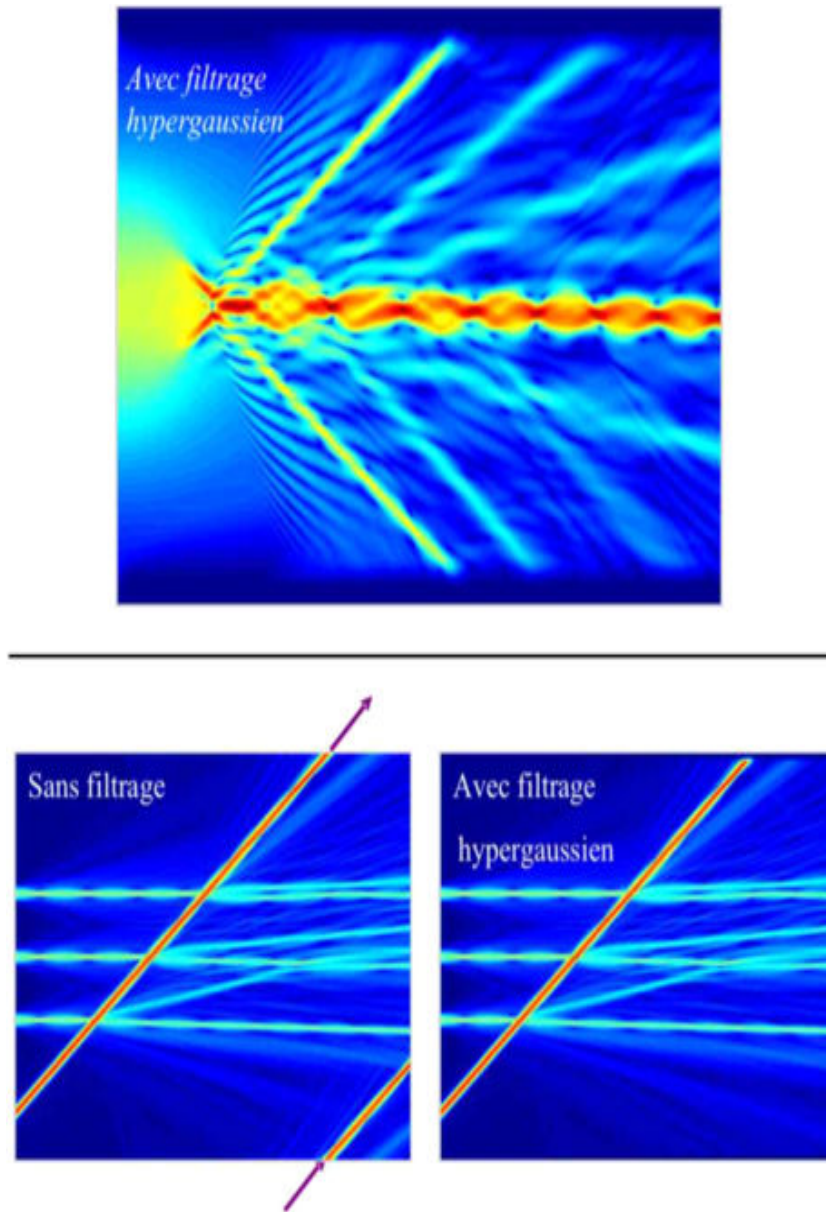


FIG. 2.6 – (*En haut*) Résultat du filtrage hypergaussien sur la simulation présentée en Fig.2.4; (*en bas*) autre exemple.

2.2 La présence de désordre

Les simulations numériques ont permis de mettre en évidence non seulement la formation escomptée des solitons, mais surtout la très grande complexité de leur dynamique.

2.2.1 La filamentation : un processus très complexe

Il s'agit du phénomène le plus emblématique de la dynamique solitonique. La filamentation se définit comme la décomposition du faisceau initial en solitons ; ainsi, lorsque la taille de celui-ci augmente, le nombre de solitons ou filaments augmente. Ce phénomène de filamentation est conforme aux résultats obtenus par Zakharov et Shabat dans leur étude des solutions à n solitons (temporels) de l'équation de Schrödinger non-linéaire [20]. Ils expliquent la disparition des états liés par la différence de vitesse des deux solitons initiaux ; dans notre cas, il s'agit de la saturation photoréfractive qui en est la cause. Lorsqu'on introduit un faisceau large dans un cristal photoréfractif subit une compression nommée surfocalisation. Il explose ensuite, en différents endroits, en une gerbe de solitons de tailles et d'intensités variées. La richesse dynamique de ce phénomène peut être appréciée sur la Fig.2.7.

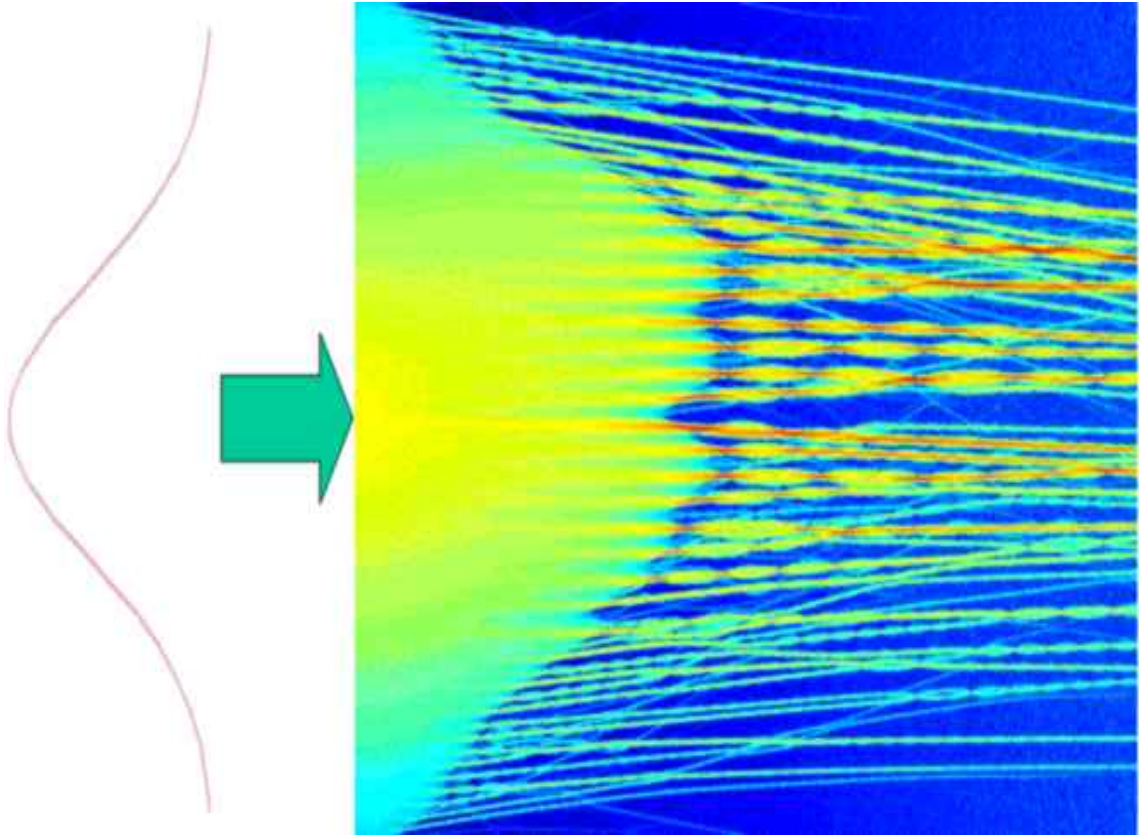


FIG. 2.7 – La filamentation d'un faisceau gaussien en une gerbe de solitons.

Le faisceau qui filamente présente des propriétés de symétrie : le corps de la trace du faisceau peut être scindé en deux ; les deux moitiés ainsi définies peuvent elles-mêmes subir le même partage, ainsi que les quatre quarts résultants (Fig.2.8). Ceci n'est pas sans évoquer une structure fractale, de manière très limitée toutefois ; l'action de l'effet non-linéaire semble disposer de l'énergie du faisceau d'une façon hiérarchisée, selon la densité d'énergie en présence (très forte au milieu, de plus en plus faible au fur et à mesure que l'on s'en écarte).

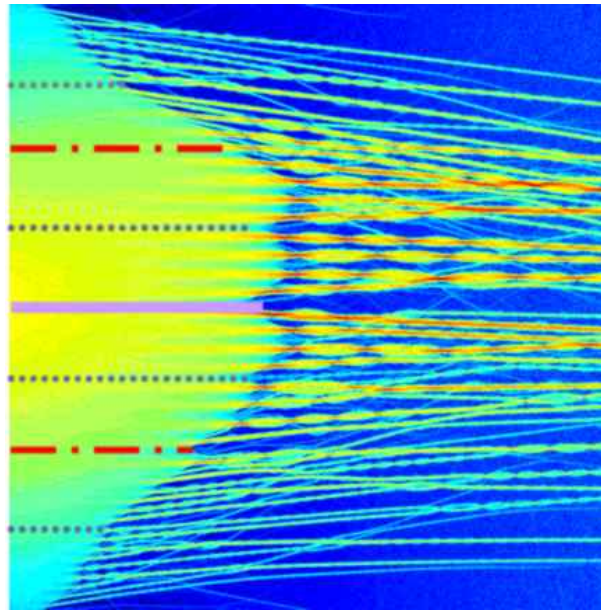


FIG. 2.8 – Mise en évidence des propriétés de symétrie d'une filamentation. Le trait mauve plein partage l'évolution du faisceau en deux, ce même trait et les deux traits mixtes rouges la partagent en quatre, ces trois traits précédents et les quatres traits en pointillés gris la partagent en huit.

2.2.2 La sensibilité de la dynamique aux conditions initiales

Deux faisceaux gaussiens d'intensités initiales très proches, 180 et 180.001 sont simulés. Les dynamiques obtenues sont alors visiblement différentes, comme

l'illustre la Fig.2.9 ; cette faible variation d'environ $5 \cdot 10^{-4}\%$ a eu ainsi des conséquences directement observables.

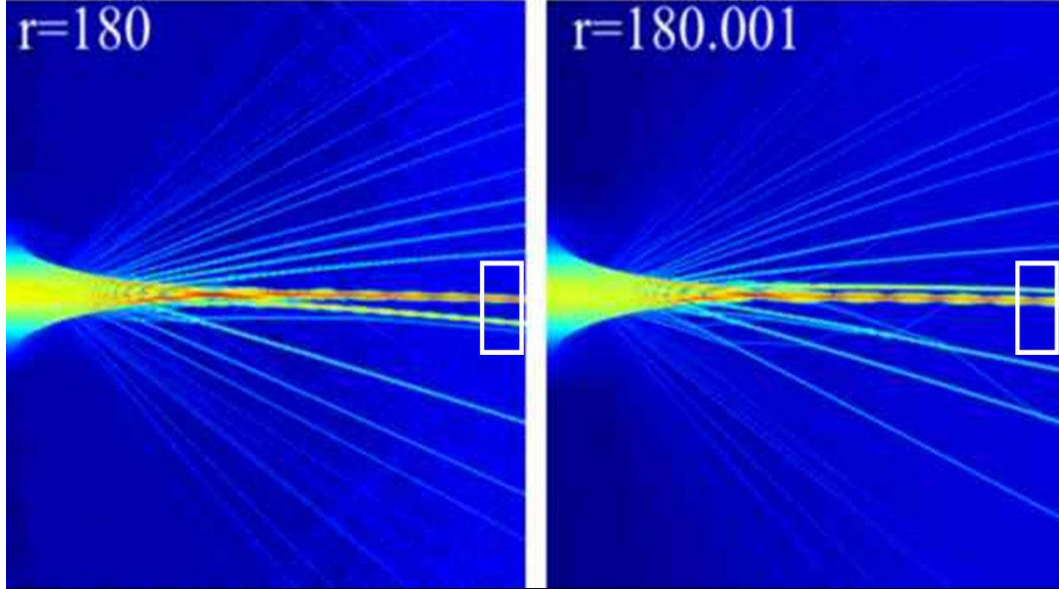


FIG. 2.9 – Simulations obtenues pour deux faisceaux gaussiens d'intensités très proches : on peut remarquer par exemple qu'un soliton intense et un soliton plus faible s'inversent d'une image à l'autre.

2.2.3 Amplification du bruit

La Fig.2.10 montre la concaténation de plusieurs simulations successives. On peut y constater que le *bruit* s'amplifie beaucoup, jusqu'à la disparition presque de tous les solitons. Il est à noter que *plus le coefficient non-linéaire NL est important, plus le bruit prend d'importance.*

2.3 Un possible chaos spatial d'abord qualifié de complexité spatiale

Les observations ci-dessus, complexité de la dynamique, structure d'aspect fractal, sensibilité aux conditions initiales et bruit semblent immanquablement

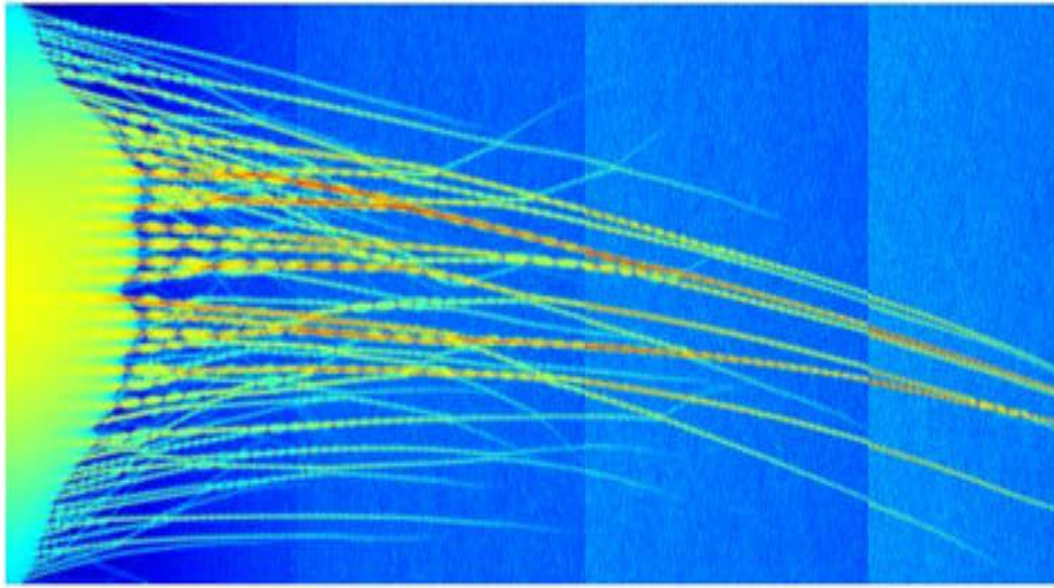


FIG. 2.10 – Simulations successives montrant la disparition progressive des solitons, noyés par le bruit.

évoquer un possible chaos. Il est toutefois plus prudent de ne pas qualifier aussitôt la dynamique photoréfractive comme telle, car les phénomènes chaotiques disposent de propriétés particulières que l'on peine à retrouver dans les dynamiques observées. En l'absence de vérification exhaustive et rigoureuse des critères de chaos présentés ci-dessous, "*complexité spatiale*" est par voie de conséquence le terme le plus rigoureux qui puisse caractériser la dynamique photoréfractive.

Après chaque grand ensemble d'analyses de la dynamique solitonique, afin de se prononcer définitivement sur le caractère chaotique de la description faite, nous chercherons à valider quatre critères de chaos principaux ; en effet, selon la littérature ([2],[5],[6],[26]), pour qualifier de "chaotique" un système dynamique, celui-ci doit présenter les propriétés suivantes :

- **Une dynamique déterministe** : condition acquise d'ores et déjà de manière évidente, car la dynamique présente dépend de l'application à un état initial de lois bien définies ;
- **Sensibilité aux conditions initiales (CI)** : il s'agit du critère le plus

évident, établissant que deux trajectoires initialement séparées d'une très faible distance dans l'espace des phases divergeront quand la dynamique se mettra en place ; cette divergence se fera très rapidement (idéalement de façon exponentielle). De plus, la décorrélation doit rester robuste face à l'amplitude de perturbation des CI : la décorrélation restera la même, que l'on ait provoqué une très faible ou une très forte modification des CI : le système bascule dans un état unique et indifférencié, le chaos, quelque soit l'importance de la perturbation. Enfin, il doit y avoir non-discrimination de la variation de CI : il ne peut y avoir de modification de conditions initiales ne perturbant pas le système de la manière décrite plus haut ;

- **Une dynamique stationnaire** : le chaos ne peut être caractérisé que sur un ensemble invariant dans le temps ;
- **Des propriétés de récurrence** : la structure de la dynamique montre des propriétés de périodicité.

Chapitre 3

Le Paradigme des Noeuds d'Interactions (INP)

«...the concept of absurdity is something I'm attracted to.» DAVID LYNCH

Ce chapitre va montrer comment nous sommes parvenus à une interprétation originale de la dynamique de solitons photoréfractifs. Elle résulte de l'inefficacité des tentatives initiales de caractérisation, basées sur une application directe des méthodes classiques de spécification du chaos temporel ou spatio-temporel.

3.1 Les outils habituels du chaos ne peuvent être adaptés

Partant d'une simulation numérique, nous cherchons à adapter les méthodes habituelles d'analyse du chaos temporel, en utilisant l'équivalence spatio-temporelle proposée par Yariv [21]. Dans la cadre de celle-ci, une analogie est faite entre diffraction (spatiale) et dispersion (temporelle) ; Yariv décrit la propagation selon Z d'un faisceau monochromatique avec la polarisation dans le plan transverse (X, Y) et montre que l'on peut mathématiquement assimiler

diffraction et dispersion ; Z reste le même dans les deux cas et la variable transversale X s'assimile alors au temps et vice-versa.

Utilisant ce point de vue, nous avons appliqué les concepts du chaos classique (diagrammes de bifurcations, attracteurs, diagrammes dans l'espace des phases) à ce supposé chaos spatial en assimilant la variable transversale X au temps.

3.1.1 Les premières tentatives de caractérisation

3.1.1.1 Les diagrammes $Re(A(X, Z_{out}))$ - $Im(A(X, Z_{out}))$ du profil de sortie

Le chaos classique utilise les portraits de phase [22], où l'on suit l'évolution au cours du temps des variables dynamiques dans l'espace des phases. La structure vers laquelle convergent les trajectoires tracées est appelé attracteur ; un exemple bien connu en est l'attracteur de Lorenz [23]. Dans notre cas, la variable X étant la variable assimilée au temps, on dispose en effet de deux variables dynamiques, la partie réelle et la partie imaginaire de la distribution d'amplitude $A(X, Z_{out})$ le long de la face de sortie du cristal.

Nous avons ainsi représenté le profil complexe de l'amplitude $A(X, Z_{out})$ sur la face de sortie en portant sur un diagramme $\{x, y\}$ les paires $Re(A(X, Z_{out}))$, $Im(A(X, Z_{out}))$ pour tous les X de la face de sortie. Nous avons obtenu divers diagrammes présentés en Fig.3.1 ; ces derniers sont constitués de lobes représentant les solitons. Il est à noter que la disposition et la forme des lobes varient tellement d'un cas à l'autre qu'aucune convergence des diagrammes vers une structure fixe n'est possible ; cette représentation n'est donc pas pertinente du point de vue dynamique.

3.1.1.2 Les diagrammes $\varphi'(X, Z_{out})$ - $I(X, Z_{out})^{\frac{1}{4}}$

On utilise ici la dérivée de la distribution de phase $\varphi'(X, Z_{out}) = \frac{d \arctan \frac{Im(A(X, Z_{out}))}{Re(A(X, Z_{out}))}}{dX}$ et la distribution d'intensité élevée à la puissance 1/4 (afin de ne pas léser les

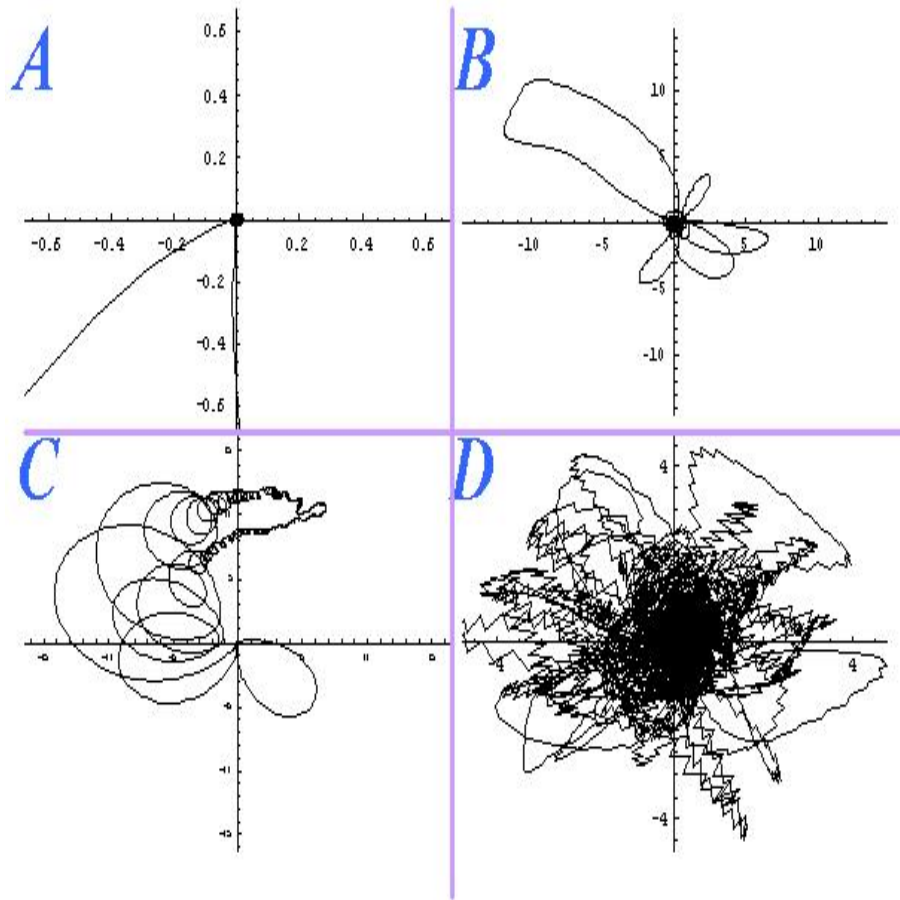


FIG. 3.1 – Divers diagrammes de sortie. *A* : obtenu avec un faisceau gaussien de waist faible et un coefficient non-linéaire faible ; *B* : obtenu avec un faisceau gaussien de waist plus important et un coefficient non-linéaire faible ; *C* : obtenu avec un faisceau gaussien de même waist qu'en *B* et un coefficient non-linéaire plus important ; *D* : obtenu avec un faisceau gaussien très large et un coefficient non-linéaire très fort.

solitons les moins intenses). Nous avons obtenu des diagrammes dont quelques exemples sont illustrés à la Fig.3.2. Là encore, étant donnée la très grande variété des résultats obtenus (quand de surcroît ceux-ci ne sont pas perturbés par un bruit fort), on ne peut remarquer la moindre convergence des diagrammes vers une structure précise.

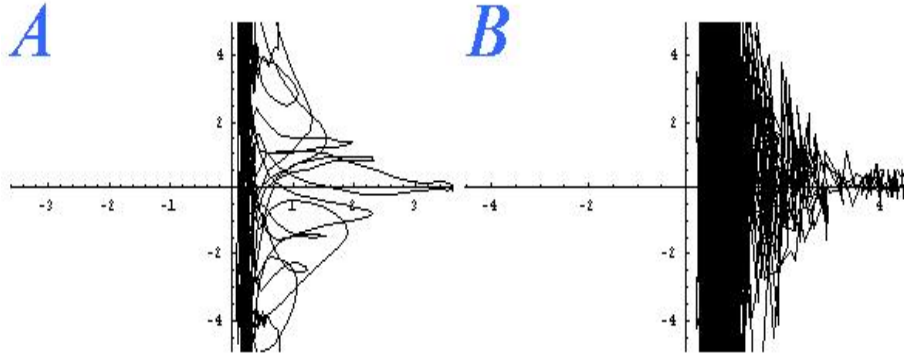


FIG. 3.2 – Exemples de diagrammes $\varphi'(X, Z_{out}) - I(X, Z_{out})^{\frac{1}{4}}$ A : coefficient non-linéaire faible ; B : coefficient non-linéaire fort.

3.1.1.3 Tentatives d'adaptation de diagrammes de bifurcation

Les diagrammes de bifurcation sont un outil incontournable de l'analyse des phénomènes chaotiques ([11],[24]). Ils représentent l'évolution de la variable dynamique par-rapport au paramètre μ du système. On y voit le doublement du nombre de périodes possibles lorsque μ augmente, jusqu'à l'entrée dans un régime chaotique, où le nombre de ces dernières devient subitement infini. Pour la dynamique de solitons photoréfractifs, nous ne disposons pas explicitement de périodes ; néanmoins, il peut être constaté que notre système augmente en complexité lorsque le nombre de solitons présents augmente, c'est-à-dire lorsqu'on accentue la largeur du faisceau injecté. L'adaptation de diagrammes de bifurcation à la dynamique photoréfractive suggère donc d'utiliser comme paramètre la largeur du faisceau injecté et de voir comment évolue le nombre de solitons créés avec celle-ci. Nous nous plaçons ainsi sur la face de sortie et cherchons à estimer le nombre de solitons présents à partir de la distribution d'intensité selon X . Un exemple typique d'une telle distribution est donné à la Fig.3.3.

On constate que le zoom effectué sur un pic montre que celui-ci, mal défini, pourrait en fait recouvrir plusieurs solitons très proches. Il serait alors très difficile voire impossible de programmer un algorithme fiable voué à estimer le

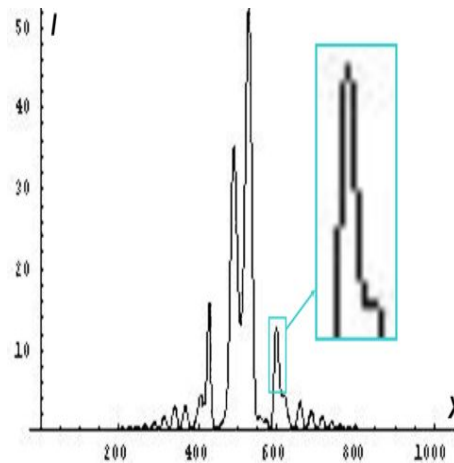


FIG. 3.3 – Exemple de profil d'intensité sur la face de sortie, voué à estimer le nombre de solitons.

nombre de pics. Les solitons présentent en effet des intensités très disparates, et il lui serait impossible de distinguer entre un "vrai" soliton et un artéfact causé par l'échantillonnage ; en effet, même si la résolution est élevée, les solitons les plus fins ne sont toujours représentés que par un nombre faible de points.

De plus, l'idée même d'adaptation de diagrammes de bifurcation est rendue caduque par le simple fait que cette représentation fait appel à des entités matérielles, les solitons, en nombre forcément fini.

3.1.2 Le besoin d'une nouvelle interprétation, non- unidimensionnelle et non- univoque

3.1.2.1 Le désordre s'exprime partout

Tout cela amène à chercher une explication quant à l'incapacité de retrouver des motifs connus en chaos classique : dans tout ce qui précède, nous avons exploité les résultats de simulations selon X . Or nous devons analyser une dynamique *spatiale*, et la variable de propagation Z n'a jamais été utilisée à quel moment que ce soit. A nouveau, il doit être précisé avec force que le désordre dans une filamentation s'exprime bel et bien dans tout l'espace : en exploitant les données selon une direction unique, nous avons négligé une

certaine partie de la dynamique du système. Il serait donc nécessaire, si l'on souhaite enfin ne rien perdre d'une dynamique désordonnée des solitons, de ne pas négliger la dynamique telle qu'elle apparaît lors de la propagation : on voit alors surgir une certaine façon d'appréhender le chaos de solitons, maintenant de façon non unidimensionnelle.

3.1.2.2 Nécessité de plusieurs dynamiques

D'un point de vue ontologique évident, étant donné le caractère particulier de notre problème, on ne peut caractériser avec *une seule dynamique* ce désordre reposant sur une sensibilité aux conditions initiales. Les profils de sortie ne sont qu'un arrangement linéaire et statique de solitons qui ne révèlent rien des possibilités de la dynamique en termes de ce qu'une petite perturbation *peut* provoquer, comme l'a montré la Fig.2.9. Une seule filamentation, même perçue dans toute son étendue, ne dévoile en fait qu'un désordre *statique* ; pour appréhender le supposé chaos de solitons, il est nécessaire d'utiliser au moins deux dynamiques issues de conditions initiales proches. On met donc à jour une certaine notion de *potentialité* qui doit rester centrale à toute phénoménologie du chaos ; le **Principe de Potentialité** se définit alors de la manière suivante : le désordre de la dynamique photoréfractive, dont la spécificité spatiale empêche toute analogie avec les systèmes temporels, repose sur *tout ce qu'une dynamique peut créer de différent si on perturbe ses conditions initiales*. Les caractérisations du désordre concluantes menées aux Chap.5 et 6, basées sur l'analyse de la décorrélation de *deux* dynamiques expliqueront ainsi a posteriori de façon éclatante les raisons de l'échec des méthodes de ce chapitre.

3.2 Les interactions entre solitons comme créatrices d'incertitude

En regardant alors de plus près l'image d'une filamentation, on remarque que les solitons se propagent globalement en ligne droite ; il s'agit alors de la dynamique des solitons entre eux (collisions, répulsions, couplages) qui est responsable des changements de direction. Nous avons donc étudié en détail les interactions d'un nombre limité de solitons en faisant varier très légèrement leurs caractéristiques d'entrée, comme la phase. La Fig.3.4 montre à titre d'exemple les dynamiques de trois solitons lorsqu'on fait varier la phase de l'un d'entre eux.

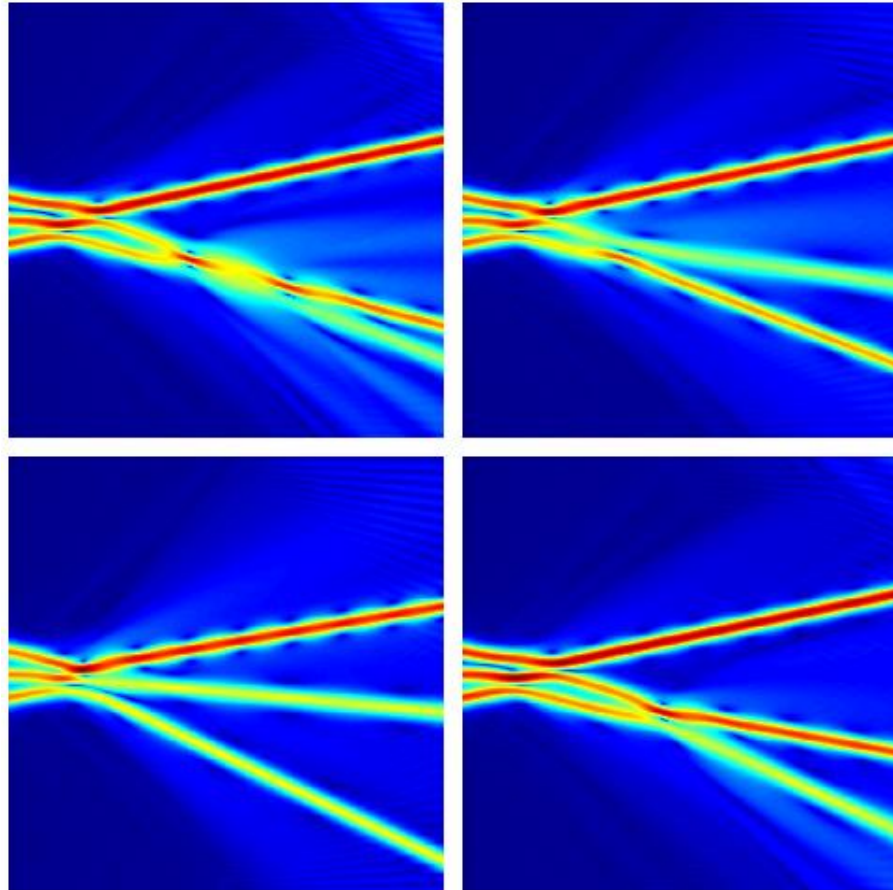


FIG. 3.4 – Exemples de dynamiques à trois solitons obtenues en faisant varier la phase du soliton supérieur.

Ces exemples de dynamiques à nombre de solitons faibles nous ont donné la conviction que le désordre, au sens brutalité des changements de dynamique, ne s'exprime guère dans les simulations du genre de la Fig.3.4, c'est-à-dire dans des zones très limitées de l'espace. Par contre, la richesse de la dynamique augmente avec le nombre de solitons et les façons dont ils interagissent. La Fig.3.5 est à ce titre éloquente.

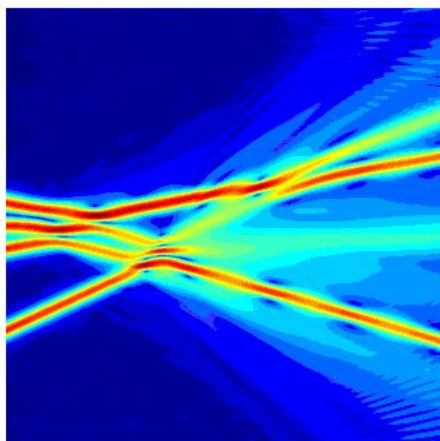


FIG. 3.5 – Exemple d'une dynamique à quatre solitons.

Nous avons en fait simulé des *noeuds d'interactions* de solitons ; et un faisceau gaussien épais qui filamente en est constitué d'une multitude, disposés irrégulièrement. Chacun de ces noeuds a une dynamique propre, et de l'interconnexion de ces noeuds d'interactions jaillit une complexité d'ensemble. Changer très légèrement les paramètres d'un seul noeud (phase, angle ou intensité d'un soliton) modifiera de proche en proche des paramètres et/ou la situation spatiale des noeuds d'interaction environnants, si bien qu'un peu plus loin de là où s'est opérée la modification initiale, rien ne sera tout à fait comme avant ; la plupart des noeuds d'interactions auront changé de place dans le cristal, beaucoup seront modifiés ; des interactions ne se feront plus (on perd un noeud d'interaction) ou au contraire de nouvelles apparaîtront (on crée un noeud d'interaction). Et encore plus loin de l'endroit où la légère modification a été faite, on ne pourra plus prévoir l'état de la dynamique. Cette perspective

est conforme au Principe de Potentialité défini plus haut.

Ainsi s'énonce alors le **Paradigme des Noeuds d'Interactions** : *la complexité de la dynamique de solitons photoréfractifs tire son origine de la non-prévisibilité spatiale causée par la multitude d'interactions entre solitons, en des zones limitées de l'espace appelées noeuds d'interactions.*

A titre d'exemple, la Fig.3.6 montre les dispositions différentes de quelques noeuds d'interactions dans deux filamentations obtenues avec des conditions initiales proches mais différentes.

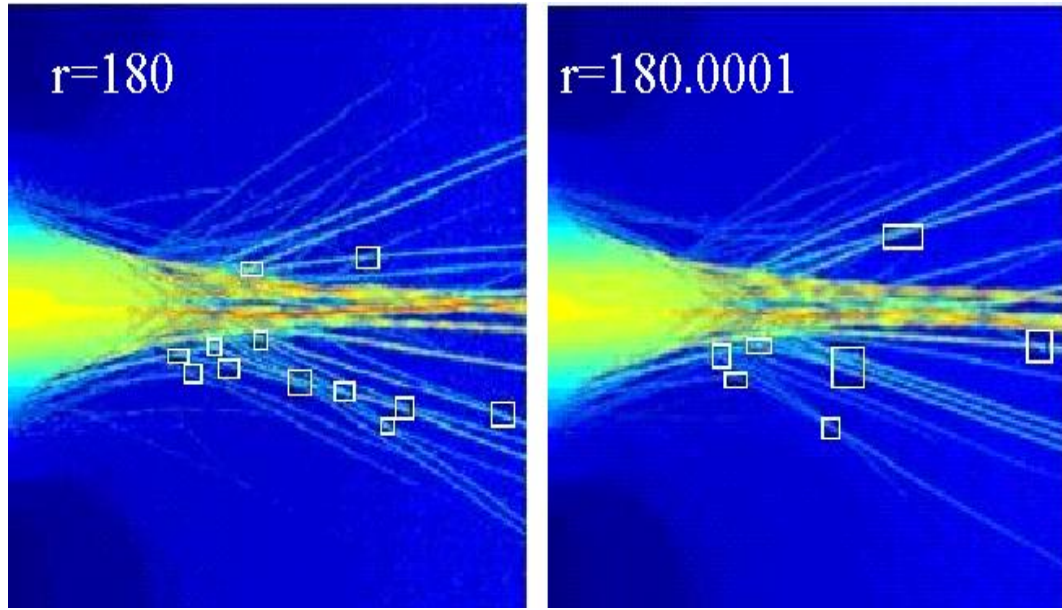


FIG. 3.6 – Dispositions de quelques noeuds sur les filamentations de deux faisceaux gaussiens d'intensités r très proches.

3.3 Preuves de la validité de l'INP : perturbation de divers réseaux

Nous venons donc d'affirmer que l'instabilité de la dynamique solitonique est à rechercher dans la disposition spatiale des noeuds d'interactions. Il est à ce titre intéressant de voir comment ce paradigme se justifie à l'aide d'arrangement spatiaux de noeuds sous forme de réseaux que l'on va perturber.

3.3.1 La destruction par le coefficient non-linéaire d'un réseau initialement ordonné

En envoyant se rencontrer à angle droit deux groupes de six solitons, on crée un *réseau carré*, représenté sur la Fig.3.7.

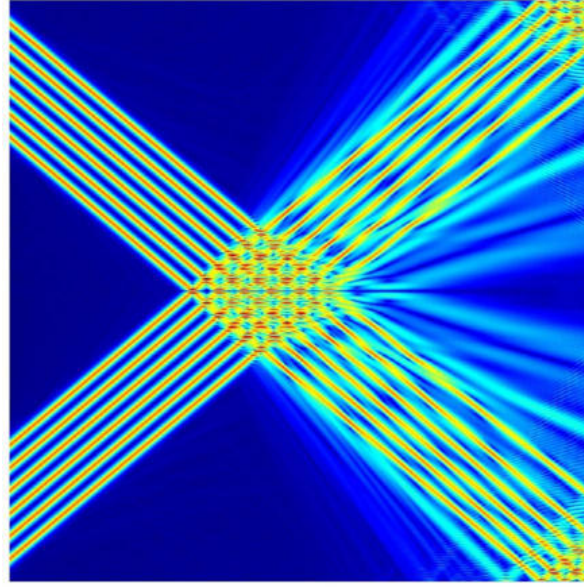


FIG. 3.7 – Réseau carré à 36 noeuds d'interactions, obtenu avec 12 solitons

Nous procédons alors à une augmentation en valeur absolue du coefficient non-linéaire ; la Fig.3.8 en illustre les conséquences.

On peut constater alors comment cette augmentation déstructure totalement le réseau ; à la fin, pour un coefficient non-linéaire de -3.1 , les solitons incidents subissent de légères pertes par rayonnement, ce qui modifie légèrement leur angle d'arrivée : le réseau carré initial est complètement détruit, comme le montrent les agrandissements de la Fig.3.9.

3.3.2 La perturbation d'un réseau avec les angles des solitons incidents

La Fig.3.10 présente un réseau losange obtenu avec la même configuration qu'en 3.3.1, sauf que l'angle relatif des deux groupes de 6 solitons est plus

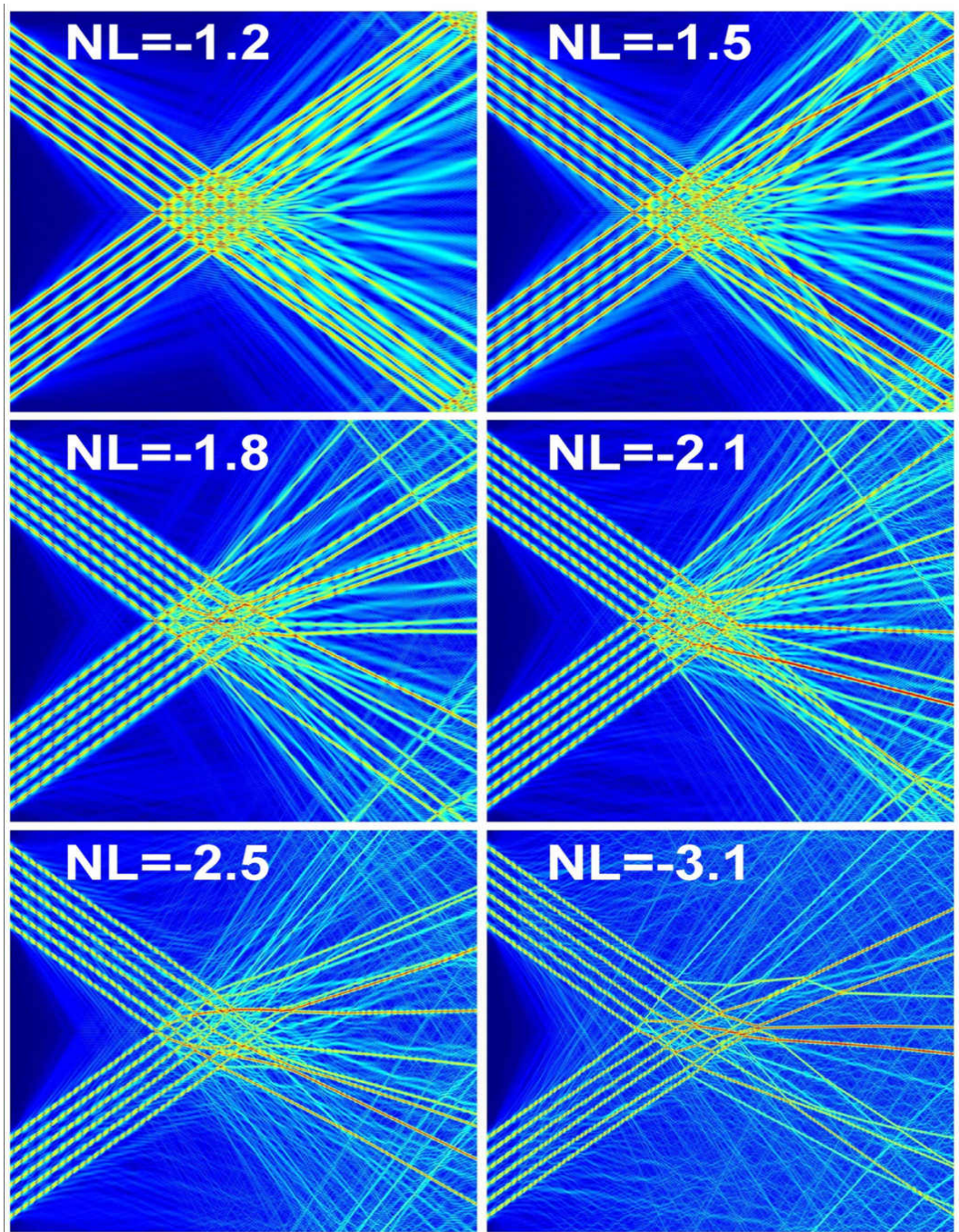


FIG. 3.8 – Destruction du réseau initial par augmentation du coefficient non-linéaire

faible.

Nous agissons sur les angles d'incidence de certains solitons incidents ; les effets en sont illustrés sur la Fig.3.11.

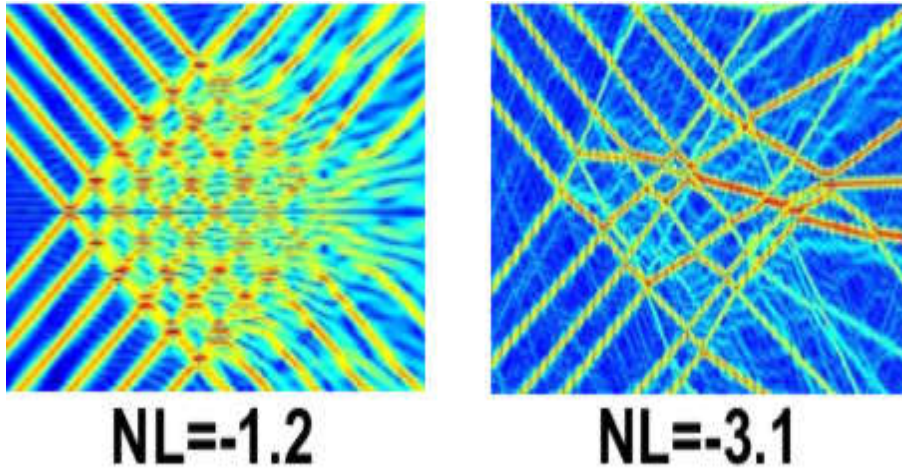
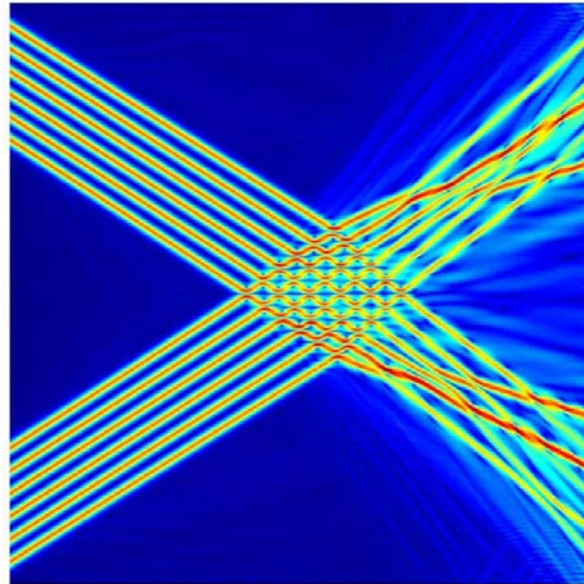
FIG. 3.9 – Comparaison des réseaux pour un NL faible et un NL fort

FIG. 3.10 – Réseau losange à 36 noeuds d'interactions, obtenu avec 12 solitons

3.3.3 Les noeuds d'interactions responsables de l'amplification des perturbations

On peut constater dans les deux cas ci-dessus que le réseau est modifié, mais que surtout les solitons émergents ont des directions très différentes d'une image à l'autre : d'une configuration initiale avec une très légère perturbation, on en est arrivé à un état de sortie très désorganisé. Ceci s'explique par le fait

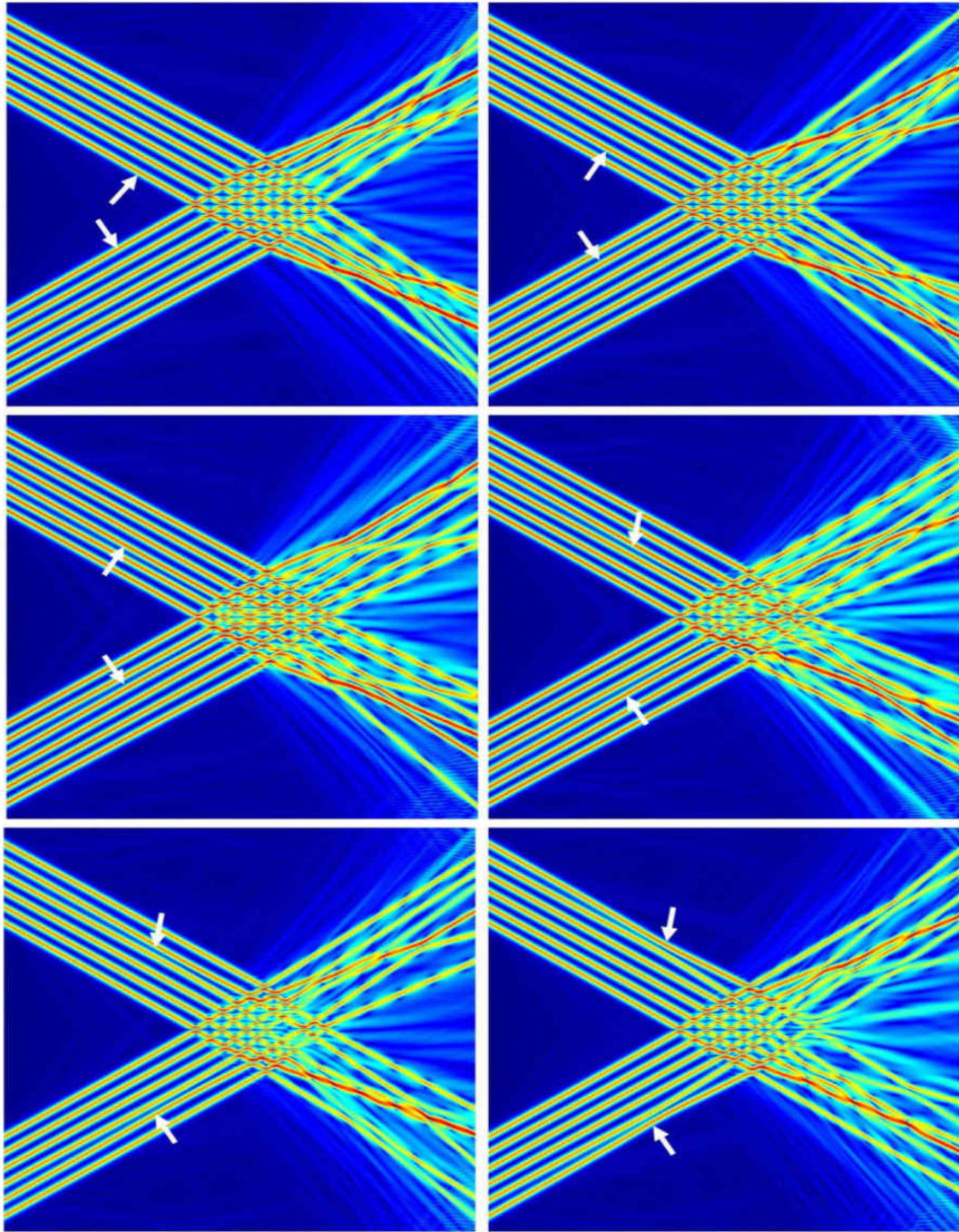


FIG. 3.11 – Perturbation des angles de solitons incidents indiqués par une flèche

que la perturbation s'est propagée et amplifiée tout au long d'un réseau de plus en plus déformé ; la disposition initiale légèrement irrégulière de certains noeuds d'interactions a contaminé de proche en proche les noeuds suivants.

Nous venons donc de prouver la validité du Paradigme des Noeuds d'Interactions en montrant comment une disposition des noeuds initiaux légèrement modifiée entraîne des perturbations qui vont en s'amplifiant, jusqu'à ce que l'on ait, sur la face de sortie, une dynamique totalement désorganisée.

On peut également noter que même dans les cas non perturbés à l'instar de la Fig.3.10 les solitons à la sortie du réseau ne sont plus parallèles, contrairement à ce que prévoyait théoriquement la géométrie régulière du réseau. De plus, cette figure montre des dynamiques finales différentes pour les deux groupes de solitons émergents, alors que la configuration initiale était parfaitement symétrique par rapport à l'axe médian. La raison de ces irrégularités doit en être attribuée au *bruit de quantification* : la configuration de départ (symétrique) est échantillonnée selon X sur un intervalle non symétrique, $[-2^{resolfft}/2, -2^{resolfft}/2 - 1]$; on introduit alors un biais que le réseau amplifie. A la sortie du réseau, les solitons émergent donc avec de très légères perturbations d'angles par rapport à ce que la géométrie prévoyait, ce qui pousse certains à interagir entre eux et ainsi déstabiliser un état de sortie qui aurait dû être théoriquement le miroir de l'entrée.

En somme, un réseau (régulier ou non) de noeuds d'interactions peut être qualifié de *producteur de sensibilité aux conditions initiales*.

Chapitre 4

Application du Paradigme des Noeuds d'Interactions : la création d'un Programme de Modélisation (MP)

«Je simplifie, mais il faut toujours simplifier les choses pour mieux les comprendre.» JACQUES CHIRAC

Ce chapitre vise à montrer comment la volonté d'application du Paradigme des Noeuds d'Interactions a résulté en la création d'un programme imitant la dynamique des solitons. Les simulations numériques s'avèrent en effet être inexploitable du point de vue des noeuds d'interactions. Muni des lois d'interactions entre solitons, ce Programme de Modélisation va prouver sa sensibilité aux conditions initiales avec un nombre de solitons réduits.

4.1 L'INP ne peut être appliqué aux simulations

Visant à caractériser la disposition des noeuds dans l'espace, le Paradigme des Noeuds d'Interactions implique l'extraction précise des noeuds d'interactions dans des simulations. Comme le montre la Fig.4.1, il est difficile de localiser ces noeuds même à l'oeil nu quand la densité de solitons devient forte. Un algorithme de localisation de noeuds basé par exemple sur une recherche de minima locaux aurait ainsi d'énormes difficultés à situer les noeuds sans erreur importante. De plus, certains sont souvent noyés dans des pertes par rayonnement, pouvant induire un tel algorithme à faire de mauvaises interprétations.

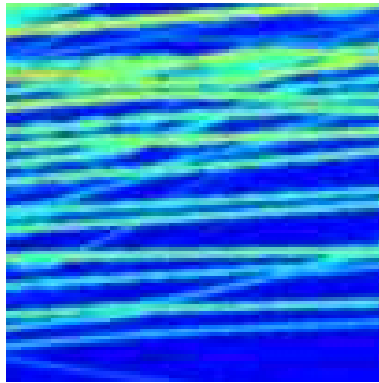


FIG. 4.1 – La localisation des noeuds d'interactions serait possible là où la densité de solitons est faible (partie inférieure de l'image) mais deviendrait très ardue pour des densités élevées (partie supérieure de l'image).

Il faut ainsi chercher un nouveau modèle de dynamique de solitons dont la commodité nous permettra d'extraire les informations sur les noeuds. Puisque nous nous intéresserons uniquement aux interactions, ce Programme de Modélisation consistera en une simplification de la dynamique solitonique résumée à une typologie d'interactions.

4.2 Vers une simplification de la dynamique solitonique : définition de règles d'interaction

4.2.1 Principe

Ce Programme de Modélisation se chargera de reproduire la richesse de la dynamique solitonique [4] dans le cadre d'une approche système, où l'on étudiera l'évolution d'une certaine population de solitons. Un soliton sera représenté par ses bords, soit deux lignes parallèles ; la couleur de celles-ci figurera l'intensité, selon la même carte de couleur utilisée pour la *BPM* (Fig.2.3).

On se donne au départ une *configuration* de solitons, c'est-à-dire une liste de n solitons dont on définit les positions initiales sur l'axe transversal X , les angles initiaux, les phases initiales, les largeurs et les intensités. Ces grandeurs de base sont résumés dans une matrice M qui inclut aussi la position (X, Z) du soliton, X étant la coordonnée transversale et Z la coordonnée de propagation. Une telle configuration est par exemple représentée en Fig.4.2. Il est nécessaire de noter que dans toutes les images obtenues par le programme de modélisation, les solitons se propagent non plus de gauche à droite, mais du bas vers le haut.

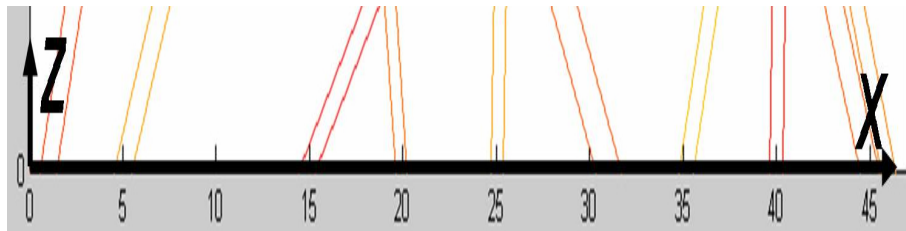


FIG. 4.2 – Exemple d'une configuration de 10 solitons dont on cherche à tester la dynamique. La direction de propagation est vers le haut.

L'algorithme principal du Programme de Modélisation va alors calculer, parmi toutes les interactions possibles, laquelle aura lieu à la coordonnée Z la plus basse ; le type d'interaction est alors choisi selon des tests correspondant aux états des deux solitons incidents (angle et phases relatifs, ...). Le lieu de

l'interaction et d'autres paramètres de calcul sont alors mémorisés dans une matrice-résultat P et tous les solitons sont "avancés" jusqu'à cette coordonnée d'interaction, la matrice "état" M étant remise à jour. On calcule alors comme précédemment l'interaction suivante et de proche en proche on constitue véritablement une dynamique de solitons qui vise à se rapprocher de ce qui est observé dans les simulations numériques. Pour ce faire, on modélise différents types d'interactions, dont le choix sera explicité en 4.2.3.

4.2.2 Les diverses interactions

Pour les illustrations de celles-ci, se reporter à la fin du Chapitre.

Soient $\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, r_1$ et r_2 les angles, phases et intensités des solitons 1 et 2 au moment de leur interaction et $\theta_{ref}, \varphi_{ref}$ deux quantités définies comme angle et phase seuils. Il est à noter qu'étant données les expressions relatives de X et Z , les angles θ sont réduits d'un facteur kX_0 .

4.2.2.1 Rebond

Cette interaction où deux solitons entrent en collision et se repoussent se produit pour :

$$\begin{cases} |\theta_1 - \theta_2| < \theta_{ref} \\ r_1 \approx r_2 \\ |\varphi_1 - \varphi_2| > \varphi_{ref} \end{cases} \quad (4.1)$$

La Fig.4.5 montre un exemple d'une telle interaction observée dans une simulation numérique, puis interprétée par le Programme de Modélisation. Les collisions peuvent donner lieu à des échanges d'énergie entre les deux solitons, accompagnés ou non de variations de largeur à la sortie. Il est à noter que les intensités de sortie sont calculées de manière à ce que l'énergie soit conservée (cf. Annexe B pour les détails de calcul). Les échanges d'énergie peuvent se faire suivant plusieurs modalités : le soliton transportant le moins d'énergie

peut voir son énergie augmenter grâce à la collision mais il peut également devenir plus faible. De l'énergie peut enfin être perdue par rayonnement lors de la collision (rebond radiatif). Le Programme peut également prendre en charge un "rebond avec réflexion" : cette interaction consiste en un rebond où un soliton ne change pas de direction, l'autre semblant se "réfléchir" sur lui (Fig.4.5).

4.2.2.2 Croisement

Le croisement est une interaction consistant en deux solitons qui se croisent sans interagir, se produisant pour :

$$|\theta_1 - \theta_2| > \theta_{ref} \quad (4.2)$$

sans autres conditions sur φ_1 , φ_2 , r_1 et r_2 . Certaines simulations (cf.8.1.2) ont montré qu'il peut y avoir des perturbations des solitons à la sortie, surtout si ceux-ci sont fortement dissemblables. La Fig.4.6 expose un croisement de deux solitons tel qu'il est observé dans une simulation ; pour représenter ce phénomène, le Programme de Modélisation a alors prévu toutes sortes d'échanges, de perturbations d'angles et de pertes par radiation, esquissés sur la même figure.

Il est à noter que les légères variations de largeurs induisent un échange d'énergie implicite. Lorsque l'échange de largeur est complet, on peut confondre l'interaction avec un rebond. Il a été en effet observé grâce à la *BPM* qu'il était parfois difficile de classer l'interaction en rebond ou croisement. La Fig.4.7 montre à titre d'exemple une simulation numérique où l'interaction exhibe ce caractère ambivalent, puis la manière par laquelle le Programme de Modélisation peut illustrer cet état de fait : dans la modélisation notée *A*, aucun échange d'énergie n'a été fait ; on a alors l'impression d'un rebond avec échange d'énergie. Dans celle notée *B*, l'échange d'énergie a été calculé de manière à ce que chacun des solitons reparte avec la même intensité que l'autre avant la

collision. L'échange est alors total, et le résultat ne diffère du rebond que par une plus grande compacité de la zone d'interaction.

4.2.2.3 Couplage

Pour un angle d'interaction suffisamment bas et la différence de phase au-dessous d'un certain seuil,

$$\begin{cases} |\theta_1 - \theta_2| < \theta_{ref} \\ r_1 \approx r_2 \\ |\varphi_1 - \varphi_2| < \varphi_{ref} \end{cases}, \quad (4.3)$$

les deux solitons se couplent : il forment un seul soliton sur une certaine distance puis se séparent. Il s'agit là d'une spécificité de la dynamique des solitons, dont la Fig.4.8 montre l'existence dans une simulation numérique et sa modélisation.

Le Programme de Modélisation peut prendre en compte des cas plus compliqués, concernant l'interaction d'un soliton tiers avec un couplage. Par exemple, ce troisième soliton peut traverser le couplage ou le fragiliser ; ces divers cas sont esquissés sur la Fig.4.9.

4.2.2.4 Couplage à l'infini

Il s'agit de l'interaction la plus rare ; en effet, il est nécessaire que les solitons se rencontrent parfaitement en phase :

$$\begin{cases} |\theta_1 - \theta_2| < \theta_{ref} \\ r_1 \approx r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Compte tenu de la dépendance en angle et en intensité de la phase (cf.8.2.2), la configuration présentée dans la Fig.4.10 (où sont identiques angles, largeurs,

distances parcourues et phases initiales) est la seule qui puisse donner naissance à une telle interaction.

On ne la rencontre donc jamais en pratique, à moins de faire se rencontrer deux solitons identiques, en phase et avec un angle relatif très faible.

4.2.2.5 Création et annihilation de solitons

4.2.2.5.1 Création de nouveau solitons Le Programme de Modélisation peut prendre en compte de tels processus, où l'énergie est suffisante pour créer un ou plusieurs solitons. Les diverses possibilités, exposées par la *BPM* puis modélisées sont représentés à la Fig.4.11.

4.2.2.5.2 Annihilation d'un soliton Dans les conditions suivantes,

$$\begin{cases} |\theta_1 - \theta_2| < \theta_{ref} \\ r_1 > 15r_2 \end{cases}, \quad (4.5)$$

phases φ_1 et φ_2 quelconques,

le soliton 2, très faible, sera "absorbé" par un soliton très intense ; ou alors le premier rayonne tellement d'énergie lors de la collision qu'il disparaît. La Fig.4.12 esquisse ce phénomène tel qu'il est vu dans une simulation puis modélisé.

4.2.3 Choix d'une interaction : résumé

L'algorithme du Programme de Modélisation procède alors de la manière suivante, une interaction entre les solitons 1 et 2 étant trouvée : un premier test est effectué sur la différence d'angle absolue $|\theta_1 - \theta_2|$. Si le résultat est supérieur à l'angle seuil prédéfini θ_{ref} , l'interaction choisie est le croisement. Dans le cas contraire $|\theta_1 - \theta_2| < \theta_{ref}$, un nouveau test est réalisé sur les intensités r_1 et r_2 des solitons interagissants. Dans le cas où l'une des deux est très inférieure à l'autre (typiquement $\frac{r_1}{r_2} > 15$), l'annihilation du soliton le plus faible est choisie. Si les intensités sont comparables, un dernier test est effectué sur la différence

de phase absolue $|\varphi_1 - \varphi_2|$. Si elle est supérieure à une phase seuil prédéfinie φ_{ref} , l'interaction choisie est le rebond. Dans le cas contraire $|\varphi_1 - \varphi_2| < \varphi_{ref}$, les deux solitons se couplent avec une longueur de couplage L donnée par :

$$L = L_0 \exp^{\log_{10}\left(\frac{\varphi_{ref}}{|\varphi_1 - \varphi_2|}\right)} \quad (4.6)$$

où L_0 est une longueur arbitraire. Enfin, dans le cas hypothétique où les phases φ_1 et φ_2 étaient identiques, le couplage à l'infini aurait été choisi.

La Fig.4.3 résume l'ensemble de ce processus décisionnel.

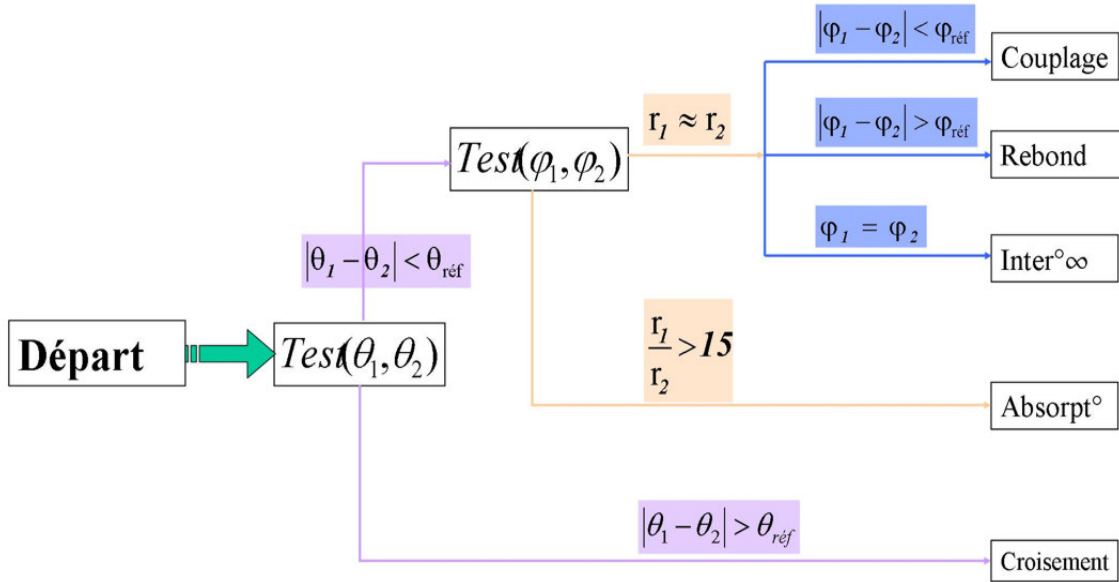


FIG. 4.3 – Processus décisionnel de choix d'une interaction.

4.3 Exemple sur deux configurations simples

Maintenant que le fonctionnement du Programme de Modélisation a été explicité, il est temps de juger de sa qualité descriptive ; conformément aux impératifs fondés en 3.1.2.2, il sera utilisé *deux* dynamiques, issues de deux configurations très proches.

Dans tous les essais du Programme de Modélisation effectués dans ce Mémoire, sauf mention contraire, on aura pris $\varphi_{ref} = 0.2$, $\theta_{ref} = 0.2$ et $L_0 = 2$.

4.3.1 Les configurations à 10 solitons A et B

On crée deux configurations à 10 solitons A et B identiques sauf que la phase du soliton σ a été augmentée de 2% dans la configuration B (voir les dynamiques présentées sur la Fig.4.4).

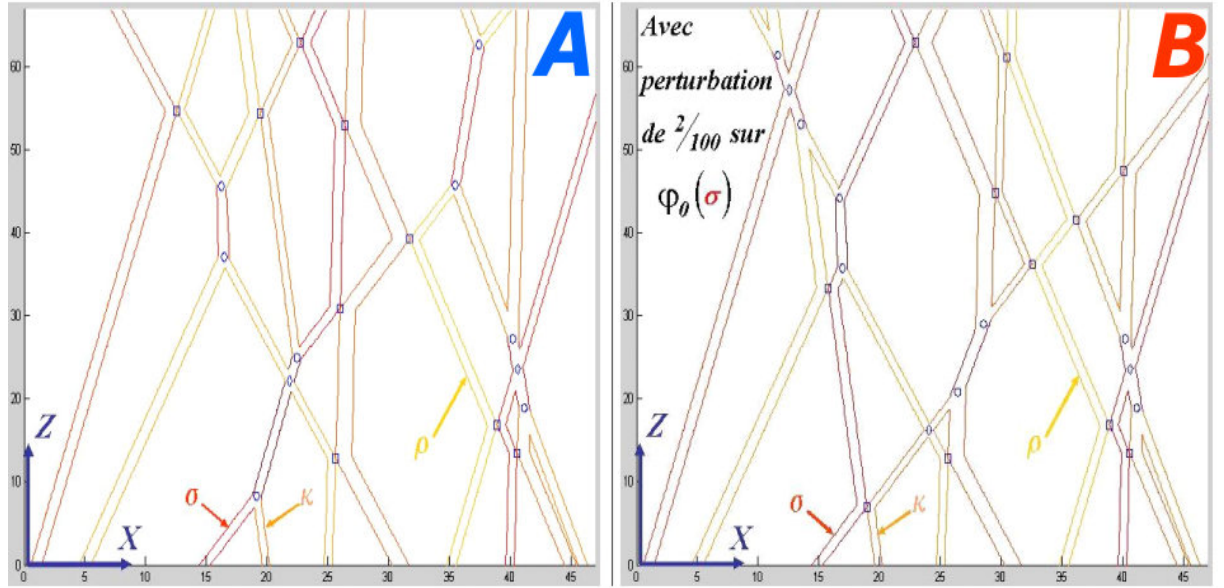


FIG. 4.4 – Les dynamiques correspondant aux configurations A (à gauche) et B (à droite).

4.3.2 La perturbation se propage

Nous pouvons alors constater sur cette figure que la faible perturbation placée en B a provoqué un bouleversement de la carte des noeuds : dans la dynamique produite par A , les solitons σ et κ ne se couplent plus mais rebondissent. De nouveaux couplages sont créés alors que d'autres disparaissent ; de nouvelles collisions ont lieu. Le soliton ρ a un comportement qui se doit d'être remarqué : en effet, dans A , il se couple avec un autre après deux interactions ; dans B , après une première interaction identique au cas précédent, le noeud pour la deuxième interaction est légèrement déplacé. La phase variant avec la distance, le couplage qui *devait avoir lieu* après cette deuxième interaction est

remplacé par un rebond.

Finalement, cette faible perturbation localisée a eu des conséquences notables en d'autres endroits de la carte des noeuds : elle s'est propagée dans toute la carte des noeuds et les états finaux des deux dynamiques n'ont plus rien de commun.

4.3.3 Une dynamique sensible aux conditions initiales

Avec un nombre faible de solitons et d'interactions, nous venons donc de mettre en évidence la sensibilité de notre Programme de Modélisation à une faible perturbation, le caractère imprévisible de ses conséquences étant attesté par le comportement du soliton ρ et l'état final des dynamiques. Le Programme de Modélisation fournissant toutes les données nécessaires aux noeuds d'Interactions, il est maintenant temps d'appliquer le Paradigme des Noeuds d'Interactions afin de trouver une caractérisation de la divergence des deux cartes de noeuds, donc de la supposée dynamique de solitons photoréfractifs ainsi modélisée.

4.4 Illustration des différents types d'interactions et de leur modélisation

Il doit être précisé que la plupart des nombreux cas explicités ci-dessous sont prévus à titre d'exhaustivité ; en pratique, dans toutes les cartes faites dans ce Mémoire, on a cherché à simplifier le plus possible les choix dynamiques.

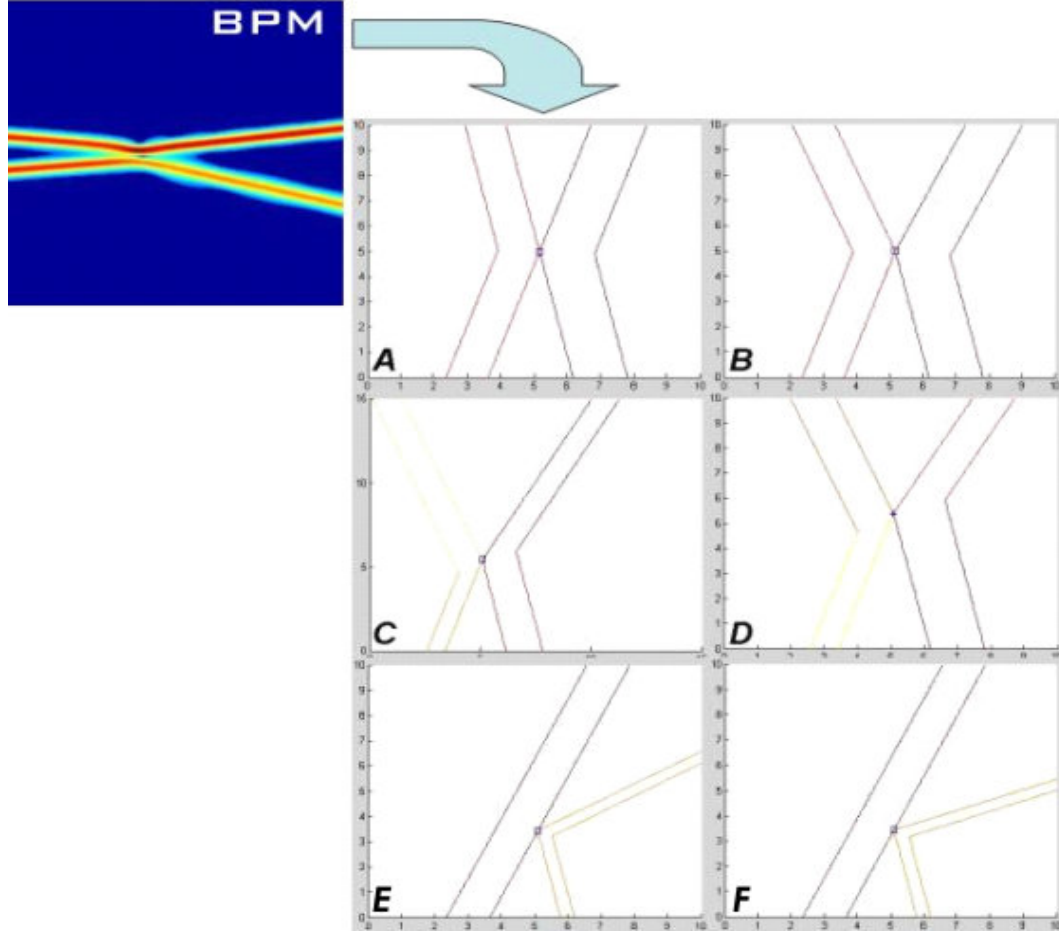


FIG. 4.5 – Le rebond de solitons mis en évidence grâce à la *BPM*, puis modélisé selon divers cas : *A* : rebond simple ; *B* : rebond avec déflexions d'angles à la sortie ; *C* : rebond avec déflexions d'angles et échanges d'énergie et de largeurs ; *D* : rebond radiatif avec déflexions d'angles et échanges d'énergie et de largeurs ; *E* : rebond avec réflexion sans perturbation et *F* : avec déflexion.

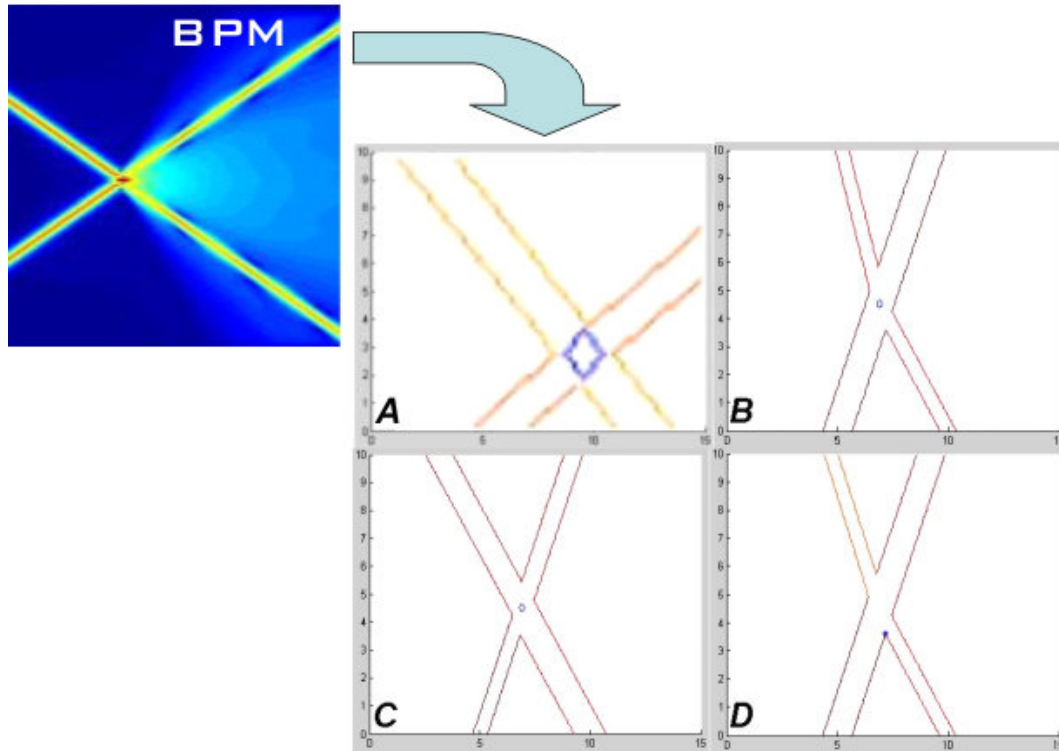


FIG. 4.6 – Le croisement de solitons mis en évidence grâce à la *BPM*, puis modélisé selon divers cas : *A* : croisement simple ; *B* : croisement avec déflexion d'angle à la sortie sur le soliton le plus faible ; *C* : croisement avec échanges d'énergie et de largeurs ; *D* : croisement radiatif avec déflexions d'angles et échanges d'énergie et de largeurs.

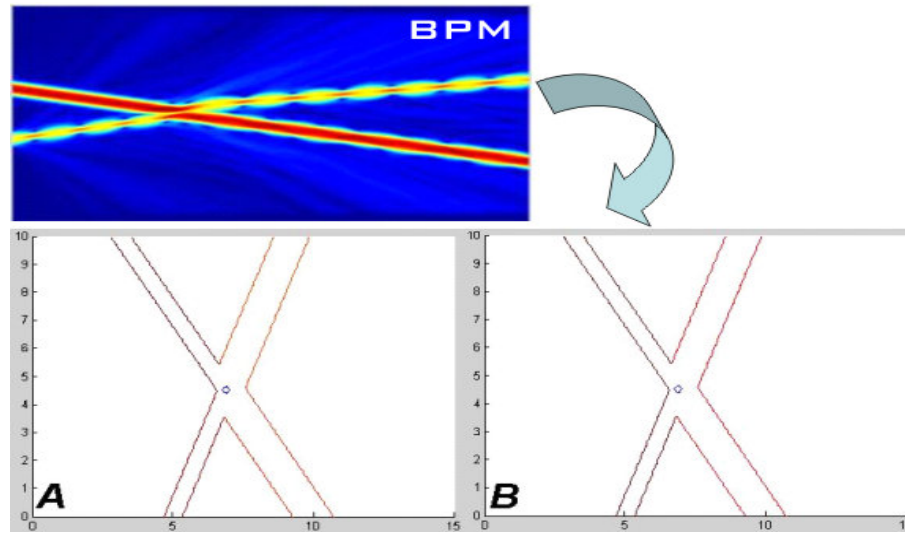


FIG. 4.7 – Une simulation numérique qui montre que la distinction croisement/rebond est parfois délicate à faire et son illustration par le Programme de Modélisation : *A* : croisement sans échange d'énergie, ressemblant à un rebond avec échange d'énergie ; *B* : croisement avec échange d'énergie, ressemblant à un rebond sans échange d'énergie.

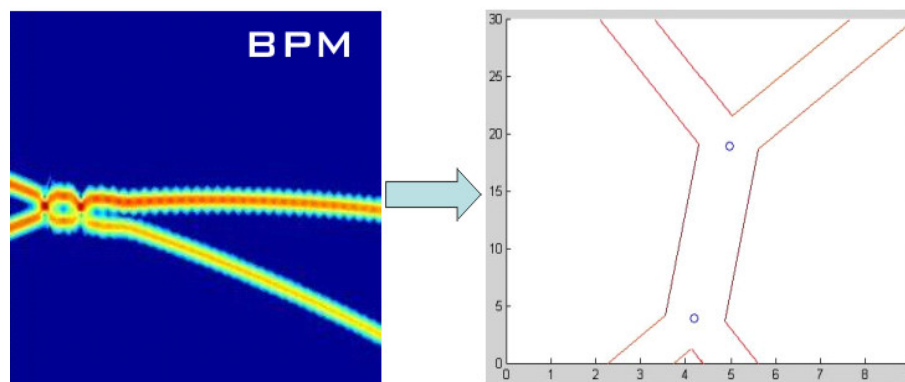


FIG. 4.8 – Un couplage assez court deux solitons mis en évidence grâce à la *BPM* puis figuré par le Programme de Modélisation

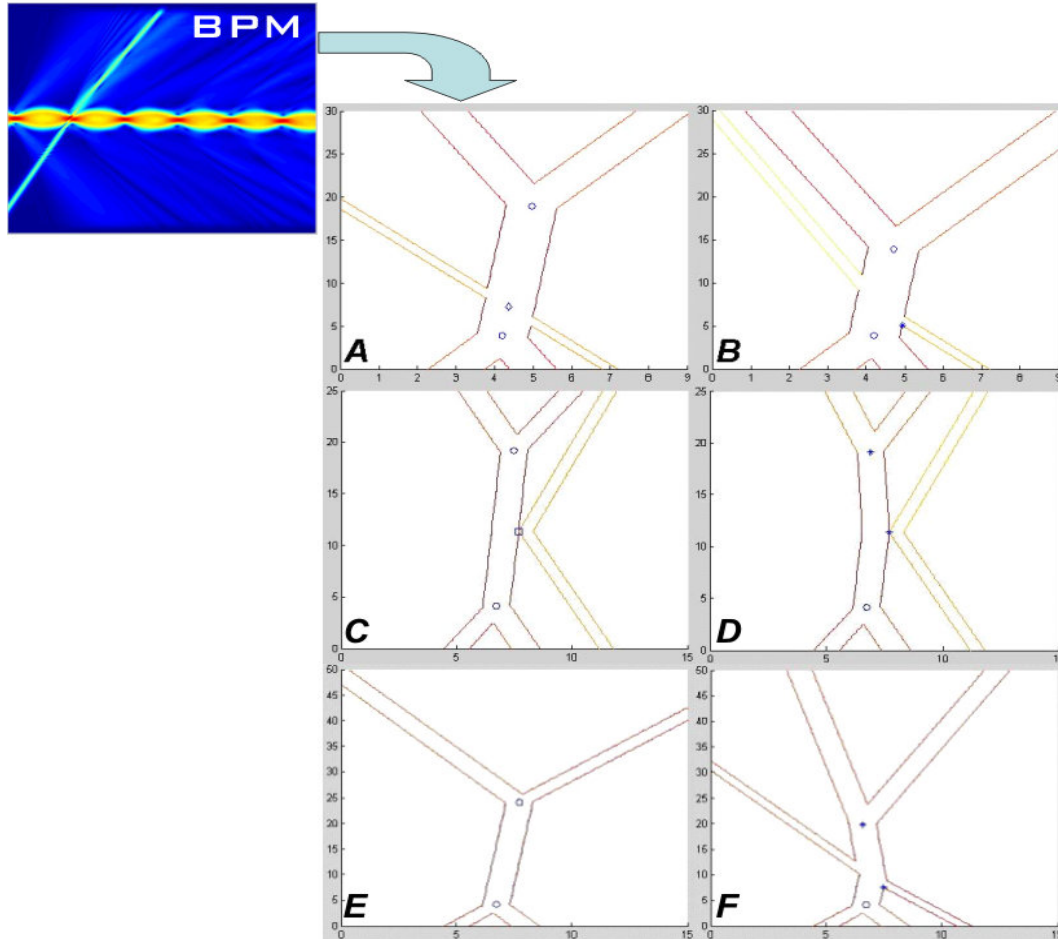


FIG. 4.9 – Traversée d'un couplage par un troisième soliton, observée grâce à la BPM et exprimée par le Programme de Modélisation : *A* : sans perturbation ; *B* : avec pertes radiatives et déflexion pour le troisième soliton. Rebond d'un troisième soliton sur le couplage : *C* : sans perturbation ; *D* : avec pertes radiatives et déflexion pour le troisième soliton. *E* : couple simple ; *F* : celui-ci défléchi et raccourci à cause d'un troisième soliton.

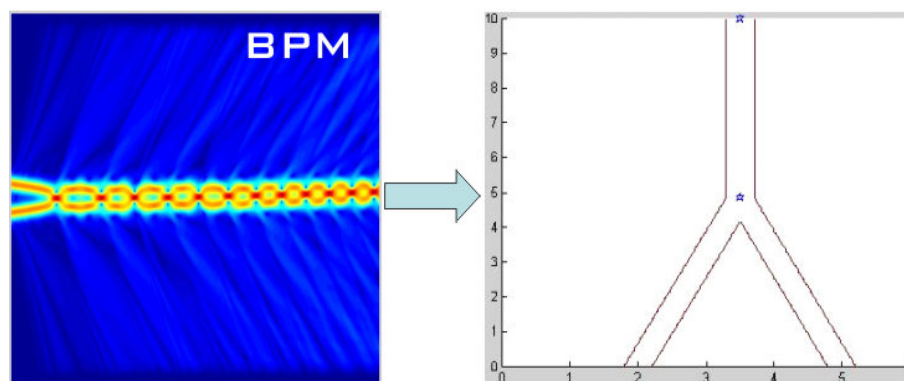


FIG. 4.10 – Couplage à l'infini observé grâce à la BPM, puis modélisé.

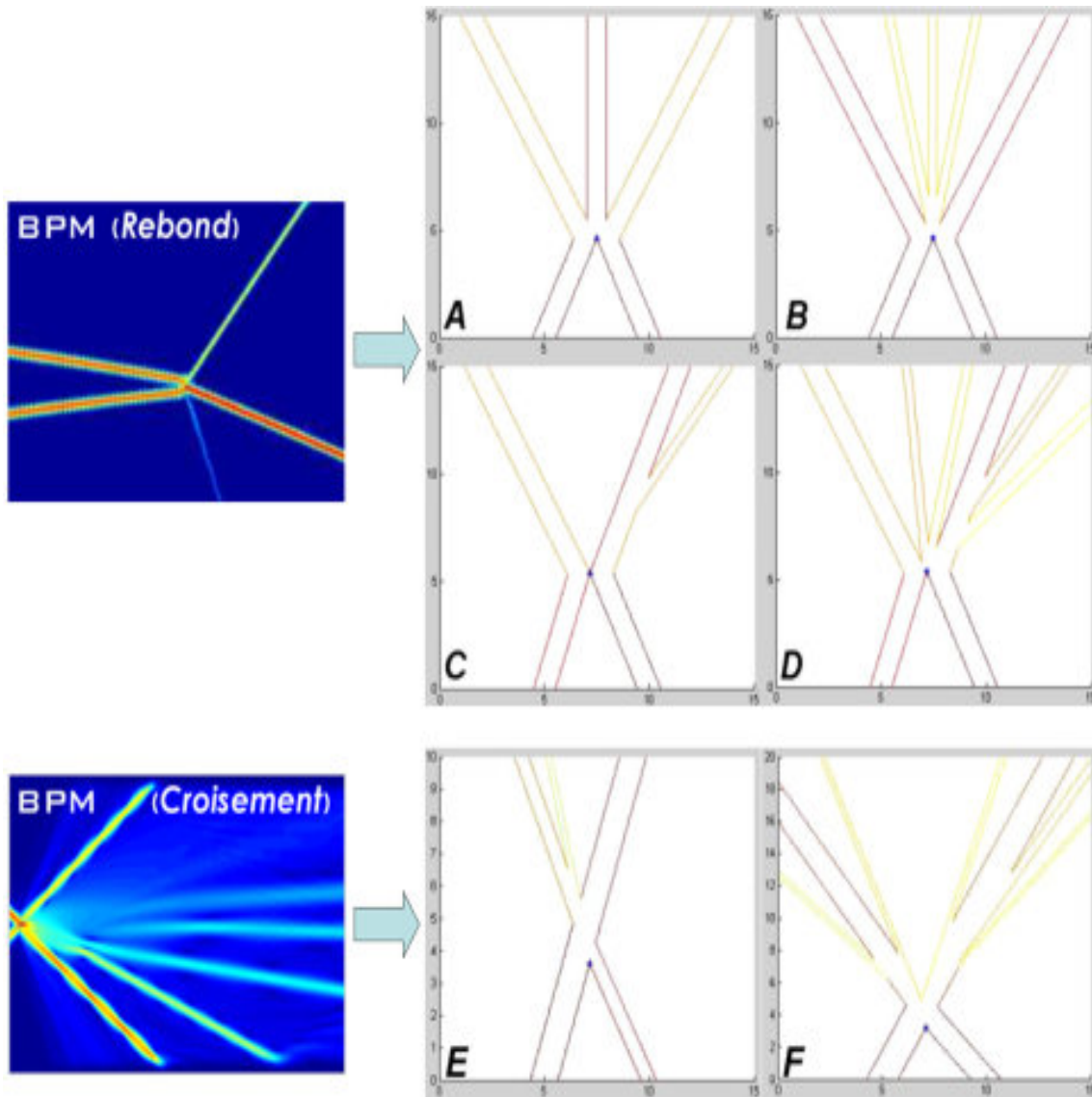


FIG. 4.11 – Créations de nouveaux solitons observés dans les simulations numériques lors d'un rebond et d'un croisement, interprétées par le Programme de Modélisation : (*Rebond*) *A* : création d'un soliton entre les deux solitons émergents ; *B* : création de plusieurs solitons entre les deux solitons émergents ; *C* : création d'un soliton à l'extérieur du cône formé par les deux solitons émergents ; *D* : création des deux types de solitons. (*Croisement*) *E* : création d'un soliton entre les deux solitons émergents ; *F* : création de plusieurs solitons entre les deux solitons émergents et à l'extérieur.

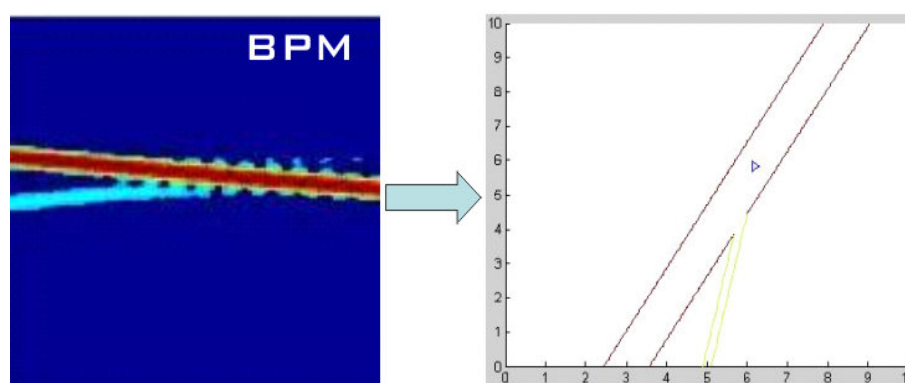


FIG. 4.12 – Absorption d'un soliton faible mis en évidence grâce à la *BPM* et symbolisé par le Programme de Modélisation

Chapitre 5

La Méthode de Conformation d'Événements : utilisation de l'*INP* et du *MP*

«A partir du savoir numérique j'essayais maintenant de produire une connaissance analogique : mon cerveau semblait pouvoir épouser, par un étrange effet d'identité, la topologie mentale de l'assassin, car il paraissait en mesure de produire des cartes très similaires.» MAURICE G. DANTEC [25]

Le Programme de Modélisation ayant convaincu de sa sensibilité aux conditions initiales, il s'agit de trouver présentement une manière de caractériser cette sensibilité. Nous proposons une méthode basée sur l'identification d'un noeud d'interaction par un couple d'entiers; cette méthode ne prendra pas en compte la localisation précise des noeuds mais leur succession au fur et à mesure que l'on progresse le long de la coordonnée de propagation Z .

5.1 Comment exploiter les données sur les noeuds fournies par le *MP* ?

5.1.1 D'une carte de noeuds vers une chaîne d'événements

5.1.1.1 Objectif et définitions

Le résultat fourni par le Programme de Modélisation consiste en une représentation bidimensionnelle de l'évolution des solitons : la carte des noeuds d'interactions. De prime abord, il ne semble exister une manière simple de montrer comment deux cartes de noeuds proches mais différentes se démarquent l'une de l'autre. C'est parce que l'on a une vue d'ensemble de la dynamique des solitons ; une progression y est difficilement perceptible.

Le Paradigme des Noeuds d'Interactions exhorte à ne pas s'intéresser aux solitons eux-mêmes, mais aux points précis de leurs interactions. La spécificité de la dynamique de solitons réside dans le fait qu'une légère modification d'un soliton *peut* entraîner un bouleversement de la carte des noeuds. Ainsi, chaque noeud peut être le déclencheur d'un tel bouleversement, si bien que l'on peut qualifier chaque interaction d'*événement*. Comme on peut assigner à chaque soliton un numéro, chaque événement/interaction pourrait être nommé/e ; ce que l'on appellera la *chaîne d'événements* sera simplement l'énumération des interactions au fur et à mesure que l'on progresse suivant la coordonnée de propagation Z . Aussi simple que semble cette solution, elle inclut néanmoins le Paradigme des Noeuds d'Interactions (car les interactions sont les seules entités que l'on utilise) et la perte de mémoire du système (l'axe Z étant l'axe de propagation).

L'exploitation de cette chaîne d'événements va permettre la construction d'un *chemin* qui sera employé pour enfin caractériser quantitativement à quel point deux cartes diffèrent l'une de l'autre. Avant de montrer la construction de ce chemin, le concept de chaîne d'événement va être formalisé via le truchement

d'exemples simples.

5.1.1.2 Exemples

On utilise la carte A déjà montrée en 4.3.1, que l'on renomme α (Fig.5.1). Les premiers solitons à y interagir sont les solitons 3 et 4, qui se couplent ; nous avons ensuite les solitons 5 et 6, puis 8 et 9... On notera ainsi l'interaction de deux solitons i et j sous la forme (i, j) , avec pour convention $i < j$. De même, un couplage comptera pour deux interactions, l'une lorsque les solitons se couplent et l'autre lorsqu'ils se séparent ; comme il serait inéquitable d'attribuer au couplage le numéro de l'un ou l'autre des solitons créateurs, on considère ce couplage comme un "nouveau" soliton (temporaire), lequel a la possibilité d'interagir avec d'autres. Un couplage issu de deux solitons i et j se verra ainsi attribuer le "numéro" (non plus forcément entier) $\frac{i+j}{2}$; par exemple, le couplage entre les solitons 3 et 4 se verra noté $(3, 4) \rightarrow 3.5$. Le fait d'assigner au couplage la moyenne des numéros des deux solitons créateurs (et non pas d'attribuer par exemple le numéro suivant dans la liste des 10 solitons, soit 11) est motivé par des raisons explicitées en 5.1.2.

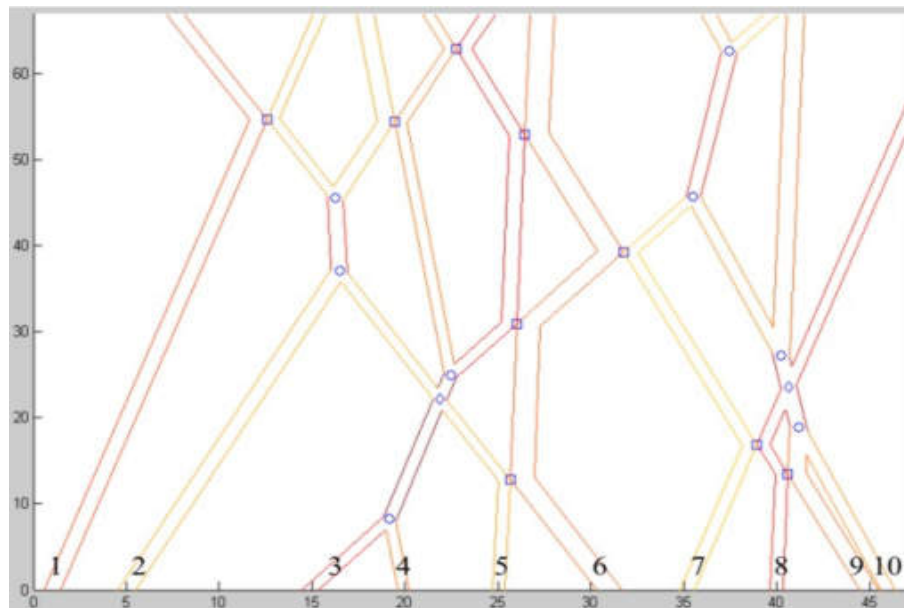


FIG. 5.1 – La carte α .

La chaîne d'événement obtenue de la carte α est finalement :

$$\begin{aligned}
 & (3, 4) \rightarrow 3.5 \\
 & (5, 6) \\
 & (8, 9) \\
 & (7, 8) \\
 & (9, 10) \rightarrow 9.5 \\
 & (3.5, 5) \\
 & (8, 9.5) \\
 & (3, 4) \\
 & (9, 10) \\
 & (3, 6) \\
 & (2, 5) \rightarrow 3.5 \\
 & (6, 7) \\
 & (2, 5) \\
 & (7, 10) \rightarrow 8.5 \\
 & (3, 6) \\
 & (2, 4) \\
 & (2, 5) \\
 & (7, 10) \\
 & (3, 4) \\
 & (7, 9)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.2 Représentation du chemin dans le plan

En se plaçant dans le plan dûment muni d'un repère (χ, v) orthonormé, on se propose de représenter la chaîne d'événements sous la forme d'un *chemin*. Par convention, tous les chemins auront le même point de départ $(0, 0)$. On trace alors un segment de ce point d'origine vers le point (i, j) , si les solitons i et j sont les premiers à interagir. Puis on trace un segment de ce point vers le suivant figurant dans la chaîne d'événements, et ainsi de suite.

En guise d'exemple, la chaîne d'événements écrite plus haut se représente sous la forme du chemin α dessiné en Fig.5.2.

On peut constater l'intérêt, dans cette méthode, de conserver un nombre de solitons constant en ne considérant pas un couplage comme un nouveau soliton. En effet, de nouveaux identifiants devant être alloués, une telle manière de faire produirait des trajectoires artificiellement raides.

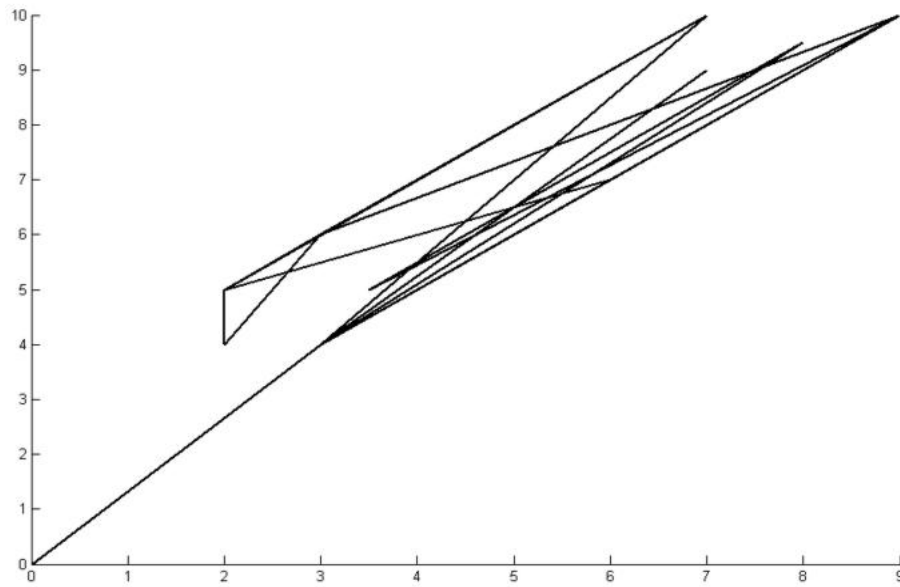


FIG. 5.2 – Le chemin α .

Ayant montré comment se représentait une chaîne d'événements, il est maintenant temps de déterminer quantitativement la divergence de deux cartes proches mais différentes grâce à cet outil.

5.2 La caractérisation de cartes de noeuds proches grâce à la corrélation de chemins

5.2.1 Le formalisme utilisé

5.2.1.1 La matrice de chemin

Avant de définir les moyens de caractérisation, il est nécessaire de mettre en place un formalisme pratique. Pour résumer la Méthode de Conformation d'Événements, la **carte de noeuds** fournie par le Programme de Modélisation donne une **chaîne d'événements** que nous représentons sous forme d'un **chemin d'événements**(Fig.5.3). Comme il a été expliqué dans 5.1.2, ce chemin passe par les points de coordonnées (i, j) . Nous définissons la matrice de chemin P comme une réécriture de la chaîne d'événements :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & i & \dots & i_{final} \\ 0 & \dots & j & \dots & j_{final} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

où i_{final} et j_{final} désignent les derniers solitons à interagir.

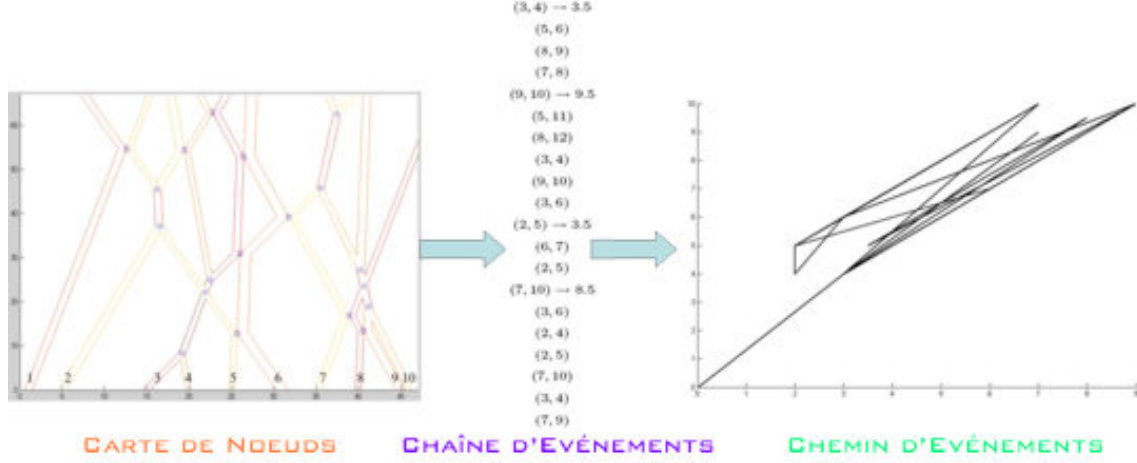


FIG. 5.3 – Un résumé de la Méthode de Conformation d'Événements.

Nous définissons par $\vec{P}_\kappa$ le vecteur construit à partir de la κ -ième colonne de P :

$$\vec{P}_\kappa = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

A la κ -ième colonne de P , les éléments sont les suivants : $P_{1,\kappa}$ (le numéro i d'un soliton), $P_{2,\kappa}$ (le numéro j ($j > i$) de l'autre).

Un *sous-chemin* sera défini comme le vecteur reliant un point du chemin d'événements référencé par $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ au suivant référencé par $\begin{pmatrix} i' \\ j' \end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{P_\kappa P_{\kappa+1}} = \begin{pmatrix} i' - i \\ j' - j \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

5.2.1.2 Un exemple simple

Nous donnons ici deux chaînes d'événements, correspondant à deux cartes de noeuds proches. La chaîne a est définie par

$$\begin{aligned}
& (1, 2) \\
& (1, 3) \\
& (4, 5) \\
& (5, 6)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

et la chaîne b par

$$\begin{aligned}
& (1, 2) \\
& (2, 3) \\
& (4, 5) \\
& (5, 6)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

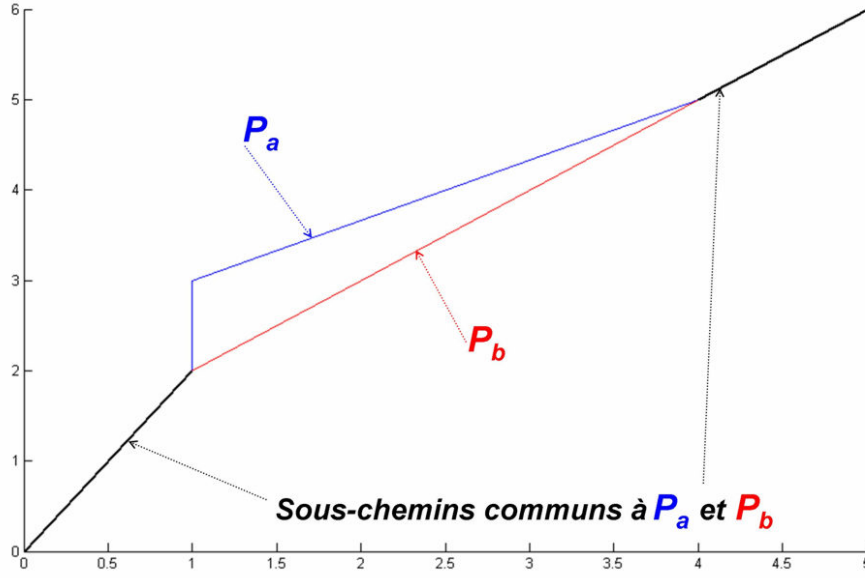
Dans la chaîne a les solitons 1 et 2 se croisent, alors que dans la chaîne b , ils effectuent un rebond : dans a , le soliton 1 interagira avec le soliton 3 tandis que dans b , ce sera le soliton 2 qui interagira avec le soliton 3. De ces chaînes on déduit les matrices de chemin P^a et P^b :

$$\begin{aligned}
P^a &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\
P^b &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Elles peuvent être représentées sur la même figure. Sur ces deux chemins, il y aura des parties en commun (appelées "sous-chemins en commun") et des parties où les chemins se séparent, "divergent" (appelées "sous-chemins divergents"). Les premiers seront tracés en noir et les seconds, en bleu pour P^a et en rouge pour P^b . Ils sont représentés à la Fig.5.4.

5.2.2 Estimateurs basés sur les chemins d'événements

L'objectif est maintenant de caractériser numériquement à quel point diffèrent les deux chemins (et donc les cartes de noeuds elles-mêmes). Dans ce but, nous définissons trois estimateurs, NCS , CCS et CAS ainsi que leur normalisations σ_{NCS} , σ_{CCS} et σ_{CAS} .

FIG. 5.4 – Chemins P^a et P^b .

5.2.2.1 Estimateurs d'événements

Le premier, NCS , consiste simplement en le comptage des sous-chemins en commun montrés par les deux chemins. Chaque sous-chemin en commun augmente NCS de un et les sous-chemins distincts sont comptés nuls. Pour des matrices de chemin P^a et P^b de dimensions $2 \times m$ et $2 \times n$, cet estimateur peut se formaliser sous :

$$NCS(P^a, P^b) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{m-1} \prod_{\iota=1}^2 \delta(P_{\iota, \kappa+1}^a, P_{\iota, \lambda+1}^b) \delta(P_{\iota, \kappa}^a, P_{\iota, \lambda}^b) \quad (5.7)$$

où

$$\begin{cases} \delta(a, b) = 1, a = b; \\ \delta(a, b) = 0, a \neq b. \end{cases} \quad (5.8)$$

Les deux autres estimateurs, CCS et CAS , sont eux basés sur un concept de corrélation. Le premier, "corrélation sur les sous-chemins en commun" CCS est calculé de la manière suivante : pour chaque sous-chemin que les deux chemins ont en commun, CCS est augmenté du produit scalaire de ce sous-chemin par

lui-même. Comme pour NCS , les sous-chemins distincts n'ont pas d'influence car ils sont comptés nuls. CCS s'écrit donc comme :

$$CCS(P^a, P^b) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{m-1} \left[(\overrightarrow{P_{\kappa+1}^a} - \overrightarrow{P_{\kappa}^a}) \cdot (\overrightarrow{P_{\lambda+1}^b} - \overrightarrow{P_{\lambda}^b}) \prod_{\iota=1}^2 \delta(P_{\iota, \kappa+1}^a, P_{\iota, \lambda+1}^b) \delta(P_{\iota, \kappa}^a, P_{\iota, \lambda}^b) \right] \quad (5.9)$$

Le dernier estimateur, CAS , prend en compte l'effet des sous-chemins distincts. Il fait la sommation des produits scalaires de chaque sous-chemin de a par le sous-chemin correspondant de b . CAS s'écrit donc comme :

$$CAS(P^a, P^b) = \sum_{\kappa=1}^{\min(m,n)} (\overrightarrow{P_{\kappa+1}^a} - \overrightarrow{P_{\kappa}^a}) \cdot (\overrightarrow{P_{\kappa+1}^b} - \overrightarrow{P_{\kappa}^b}) \quad (5.10)$$

5.2.2.2 Coefficients de corrélation d'événements

De façon à caractériser de façon normalisée la divergence entre les cartes, nous définissons ci-dessous les coefficients de corrélation, inspirés de la définition de la corrélation statistique de deux séries (cf. Annexe C.1) et basés sur NCS , CCS et CAS :

- Coefficient du nombre de sous-chemins en commun :

$$\sigma_{NCS}(P^A, P^B) = \frac{NCS(P^A, P^B)}{\sqrt{NCS(P^A, P^A)NCS(P^B, P^B)}} \quad (5.11)$$

- Coefficient de corrélation sur les sous-chemins communs :

$$\sigma_{CCS}(P^A, P^B) = \frac{CCS(P^A, P^B)}{\sqrt{CCS(P^A, P^A)CCS(P^B, P^B)}} \quad (5.12)$$

- Coefficient de corrélation sur tous les sous-chemins :

$$\sigma_{CAS}(P^A, P^B) = \frac{|CAS(P^A, P^B)|}{\sqrt{CAS(P^A, P^A)CAS(P^B, P^B)}} \quad (5.13)$$

5.2.3 Exemples

5.2.3.1 Cartes α et β

Nous reprenons l'exemple des deux cartes A et B utilisées dans 4.3 et nous les rappelons ici α et β . La chaîne d'événements de la carte α a été écrite en

5.1.1.2; celle de la carte β (Fig.5.5) écrite ci-dessous.

(3, 4)

(5, 6)

(8, 9)

(4, 5)

(7, 8)

(9, 10) → 9.5

(4, 6) → 5

(8, 9.5)

(9, 10)

(4, 6)

(2, 3)

(3, 5) → 4

(4, 7)

(7, 10)

(3, 5)

(4, 6)

(9, 10)

(2, 5) → 3.5

(1, 3.5)

(4, 7)

(2, 5)

(3, 6)

(4, 6)

(5.14)

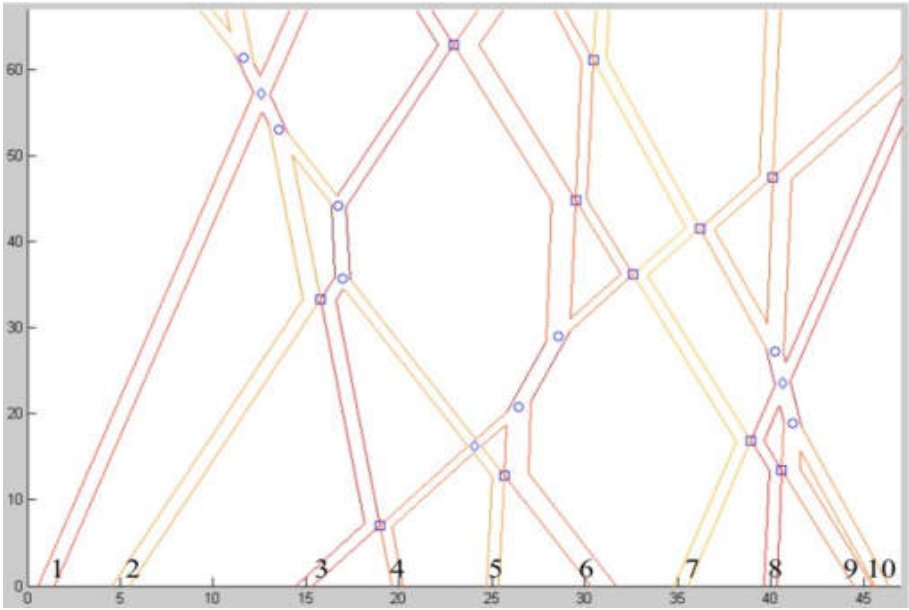


FIG. 5.5 – la carte β .

5.2. La caractérisation de cartes de noeuds proches grâce à la corrélation de chemins 61

Nous écrivons alors les matrices de chemin :

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & 7 & 9 & 3.5 & 8 & 3 & 9 & 3 & 2 & 6 & 2 & 7 & 3 & 2 & 2 & 7 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 9 & 8 & 10 & 5 & 9.5 & 4 & 10 & 6 & 5 & 7 & 5 & 10 & 6 & 4 & 5 & 10 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 & 9 & 4 & 8 & 9 & 4 & 2 & 3 & 4 & 7 & 3 & 4 & 9 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 & 9 & 5 & 8 & 10 & 6 & 9.5 & 10 & 6 & 3 & 5 & 7 & 10 & 5 & 6 & 10 & 5 & 3.5 & 7 & 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Représentant le chemin α en bleu et le chemin β en rouge, nous obtenons la Fig.5.6.

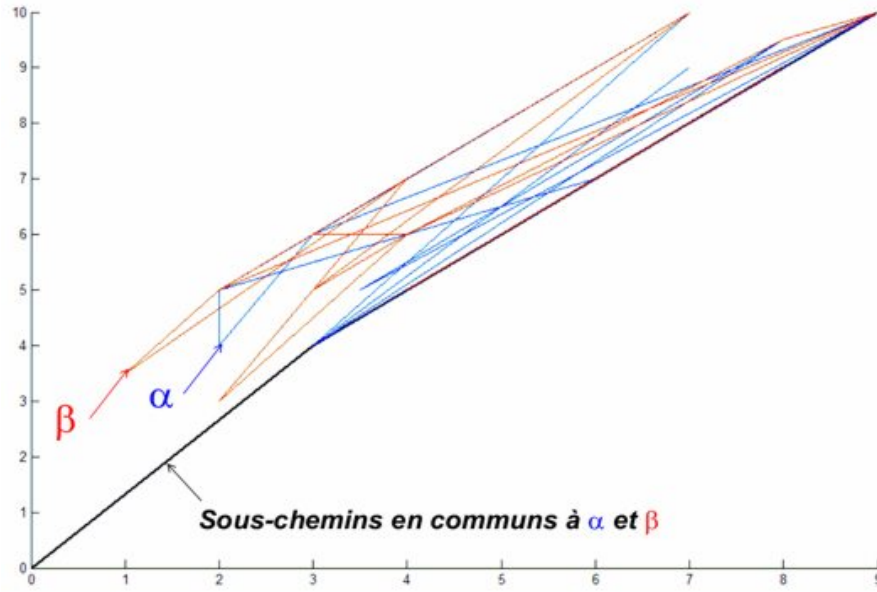


FIG. 5.6 – Les chemins correspondant aux cartes α et β .

Il est alors possible de s'apercevoir *immédiatement* que les deux cartes sont différentes. Une représentation de la perte de cohérence entre les deux cartes au fur et à mesure que Z augmente consisterait alors à montrer l'évolution des coefficients de corrélation d'événements avec le nombre d'interactions prises en comptes. Nous représentons donc sur la Fig.5.7 les valeurs de σ_{NCS} , σ_{CCS} et σ_{CAS} en fonction du nombre d'interactions (lorsque les deux cartes réalisent des nombres d'interactions différents, les calculs sont menés jusqu'au nombre le plus petit).

On y voit clairement la décorrélation rapide entre les cartes α et β .

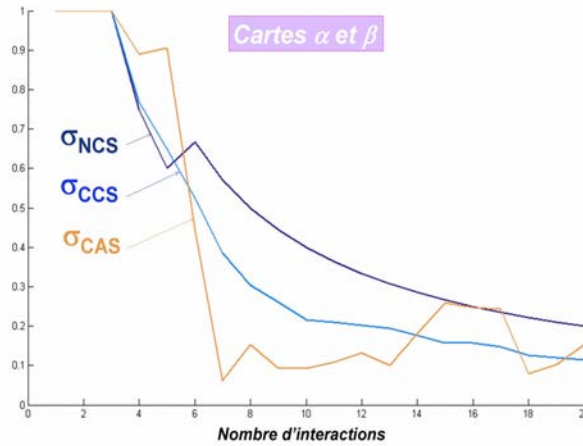


FIG. 5.7 – [cartes α et β] Evolution des coefficients de corrélation d'événements avec le nombre d'interactions prises en compte.

5.2.3.2 Utilisation de la méthode sur des cartes plus importantes : les cartes à 50 solitons $\aleph$ et $\beth$

Nous utilisons la Méthode de Conformations d'Événements sur un exemple plus complexe, les cartes à 50 solitons $\aleph$ et $\beth$; la Fig.5.8 les esquisse, ainsi que les chemins les représentant.

Enfin nous traçons à la Fig.5.9 l'évolution des coefficients de corrélation d'événements avec le nombre d'interactions pour les cartes $\aleph$ et $\beth$.

5.3 Remarques et améliorations

5.3.1 Les estimateurs et les coefficients dépendent de la taille de la fenêtre

Il semble évident que plus la valeur maximale de Z (jusqu'à laquelle sont représentées les cartes de noeuds) est grande, plus il y a d'interactions. Mais le nombre d'interactions prises en compte dépend également des limites latérales de la fenêtre de représentation de la carte des noeuds. Ainsi, les valeurs des estimateurs dépendent de la taille de la fenêtre. Ce qui n'est nullement pro-

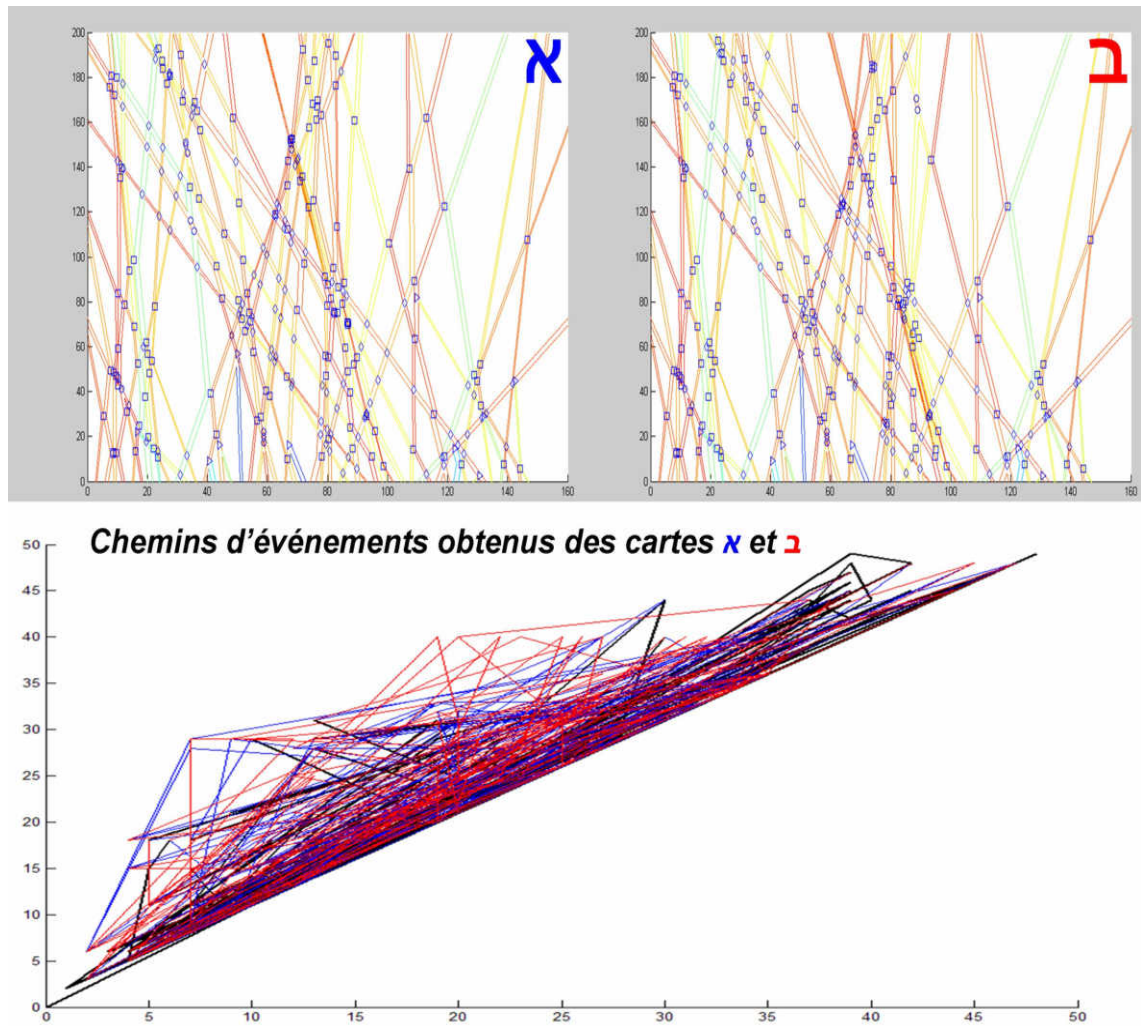
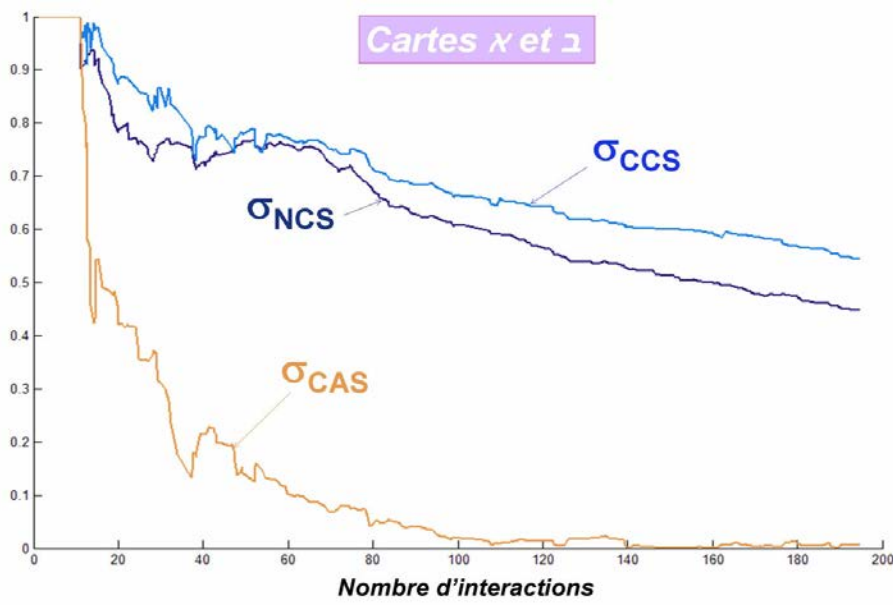


FIG. 5.8 – Les cartes X et U et les chemins d'événements qui leur correspondent (en bleu pour X et en rouge pour U , s'il diffèrent ; en noir si les sous-chemins sont les mêmes.)

blématique, car on dispose de coefficients de corrélation, normalisés ; plus le nombre d'interactions est grand (plus la fenêtre est grande), plus ils tendront vers 0. Ceci est cohérent, car plus le nombre d'interactions est important, plus le désordre fait se séparer les deux cartes.

FIG. 5.9 – [cartes κ et γ] Evolution des coefficients de corrélation.

5.3.2 La dégradation de la dynamique des solitons

Lorsque l'on progresse le long de Z , les solitons aux bords de la fenêtre s'échappent et ne pourront plus y interagir. Puis, parmi les solitons restants, ceux aux extrémités pourront s'échapper, et ainsi de suite. De moins en moins de solitons interagissent, et la dynamique s'appauvrit. Pour lutter contre cet état de fait, des "murs" virtuels sur les bords latéraux de la fenêtre peuvent être ajoutés de façon à ce qu'un soliton sur le point de s'échapper rebondisse dessus et reste dans la dynamique, conférant à celle-ci un caractère toujours riche. Mais néanmoins faut-il préciser que dans le cas d'une simulation numérique (et encore moins dans la réalité physique), de tels artifices n'existent pas ; et on peut même dire en effet que cette "dégradation" de la dynamique fait partie intégrante de la dynamique de solitons photoréfractifs et qu'il est nécessaire de conserver cet état de fait dans la Méthode de Conformation d'Événements. Cette mise en place de murs de rebonds n'est en fin de compte qu'une vue de l'esprit.

5.4 La corrélation interphase

Cette méthode est basée quant à elle sur les valeurs des phases aux noeuds d'interactions ; elle utilise un formalisme identique à la Méthode de Conformation d'Événements. Nous définissons pour une carte A le tenseur de phase φ^A dont les éléments φ_{ijk}^A donnent la phase du soliton i lors de sa $(k - 1)$ -ième interaction avec le soliton j ; cette interaction est nommée i, j, k . La corrélation interphase est alors définie par

$$I_{\varphi}C(A, B) = \sum_{\{i,j,k\}} \exp^{-|\varphi_{ijk}^A - \varphi_{ijk}^B|} \quad (5.15)$$

Il s'agit de la somme des exponentielles inverses des différences absolues de phases (ceci afin d'obtenir des quantités rapidement faibles quand s'accroît la disparité de phase entre l'interaction $\{i, j, k\}$ en A et l'interaction correspondante en B), pour deux cartes à n'importe quel triplet $\{i, j, k\}$ où les deux phases sont définies. En d'autres termes, si juste l'une des deux phases existe, le terme sommé vaut 0 et l'interaction n'est pas comptée.

L'évolution de la corrélation interphase pour les cartes $\aleph$ et $\beth$ est montrée à la Fig.5.10 à gauche. L'auto-corrélation interphase y est également montrée.

Comme précédemment, nous introduisons un coefficient normalisé, le coefficient de corrélation interphase, toujours sur les triplets $\{i, j, k\}$ que les deux cartes ont en commun :

$$\sigma_{\varphi}^{AB} = \frac{I_{\varphi}C(A, B)}{\sqrt{\sum_{\{i,j,k\}} 1 \sum_{\{i,j,k\}} 1}} = \frac{\sum_{\{i,j,k\}} \exp^{-|\varphi_{ijk}^A - \varphi_{ijk}^B|}}{N_{common}} \quad (5.16)$$

où N_{common} est le nombre d'interactions $\{i, j, k\}$ en commun dans les cartes A et B .

L'évolution de ce coefficient par rapport au nombre d'interactions considérées est illustré sur la Fig.5.10 à droite ; là encore, on peut y voir la décorrélation entre les deux cartes, laquelle s'effectue de manière plus saccadée, erratique que pour σ_{CAS} .

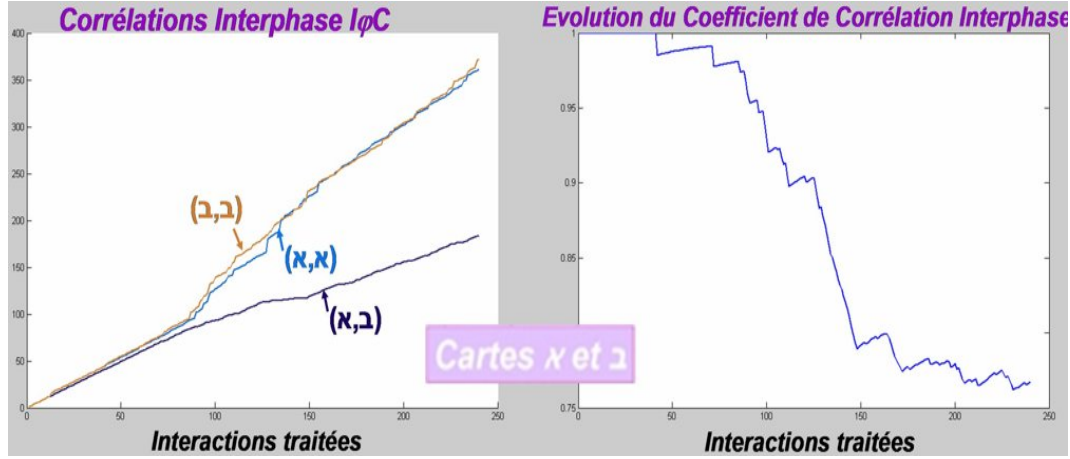


FIG. 5.10 – [cartes $\aleph$ et $\beth$] (à gauche) évolution des corrélations interphase ; (à droite) évolution du coefficient de corrélation interphase.

5.5 L'exposant de Lyapunov en chaos standard et son adaptation à la dynamique solitonique

5.5.1 Définitions

L'exposant de Lyapunov est un outil fondamental pour caractériser les systèmes dynamiques chaotiques ([7],[26]). Pour un tel système, il existe un nombre d'exposants de Lyapunov égal à la dimension de l'espace des phases ; le plus grand d'entre eux quantifie la divergence exponentielle entre deux trajectoires initialement proches avant qu'elle ne sature. Afin d'adapter ce concept à la dynamique de solitons photoréfractifs, une quantité divergente se devait d'être trouvée. La représentation d'une carte en un chemin étant bornée, deux cartes proches mais différentes n'auront pas de chemins divergeant de façon exponentielle ; en revanche, le coefficient de corrélation sur tous les sous-chemins $\sigma_{CAS}(A, B)$ montre une décroissance très forte avec le nombre d'interactions. Utilisant le logarithme de σ_{CAS} moyenné sur le nombre d'interactions N_{int} prises en compte ainsi définissons-nous un *taux de divergence* λ (positif) :

$$\lambda = -\frac{\log \sigma_{CAS}(A, B)}{N_{int}} \quad (5.17)$$

Ce taux de divergence renseignera donc sur le caractère exponentiel de la chute de σ_{CAS} avec le nombre d'interactions.

5.5.2 Exemples

5.5.2.1 Sur les cartes $\aleph$ et $\beth$

Nous utilisons les cartes $\aleph$ et $\beth$ et représentons l'évolution de λ avec le nombre d'interactions (Fig.5.11 à gauche).

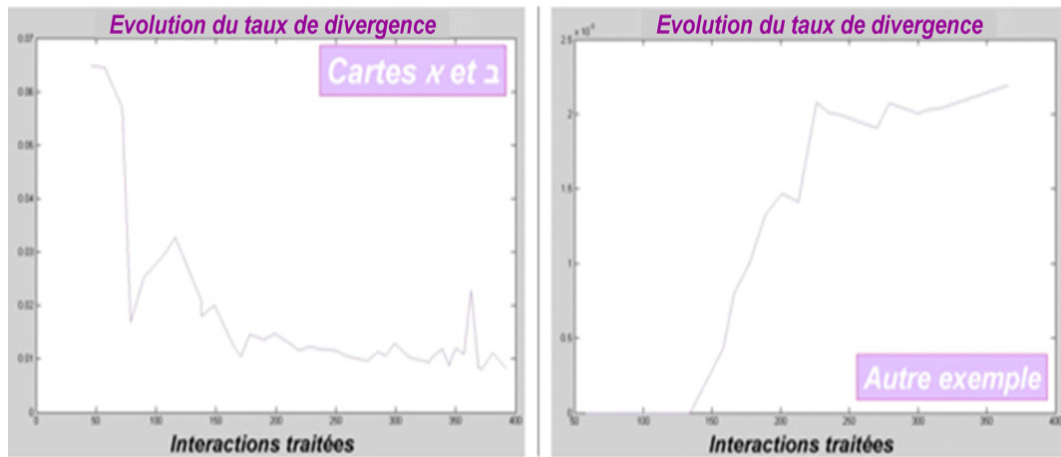


FIG. 5.11 – Exemples d'évolution du taux de divergence avec le nombre d'interactions : (à gauche) pour les cartes $\aleph$ et $\beth$; (à droite) pour deux autres cartes.

On peut en conclure que le désordre, très important au début, chute brutalement pour rejoindre une limite.

5.5.2.2 Autre exemple : une montée du désordre

Utilisant des configurations qui ne diffèrent que très peu, nous obtenons des cartes (non représentées) pour lesquelles l'évolution de λ est représentée sur la Fig.5.11 à droite.

Aussi longtemps que λ reste nul, les deux configurations exhibent les mêmes dynamiques *en termes d'événements* ; quand il augmente subitement, la divergence commence. Le taux de divergence semble alors rester constant, montrant

qu'à ce moment-ci de la courbe, la divergence (respectivement σ_{CAS}) s'accroît (respectivement diminue) de façon exponentielle avec le nombre d'interactions.

5.6 La description d'un chaos ?

Afin de décider si la caractérisation ci-dessus est celle d'un chaos, il est nécessaire de vérifier si les critères de chaos exprimés en 2.3 sont vérifiés. La dynamique exhibée par le Programme de Modélisation est déterministe, car dépendant de lois dûment fixées au départ.

5.6.1 Dynamique stationnaire et présentant des propriétés de récurrence ?

Le cadre abstrait dans lequel a été construit le Programme de Modélisation ne fait bien sûr pas figurer un quelconque caractère temporel ; on ne vise qu'à déterminer par des lois simples comment une population limitée d'abstractions de solitons va évoluer dans l'espace : le critère dynamique stationnaire, dans ce cadre, n'a pas de signification.

En ce qui concerne l'existence de propriétés de récurrence et d'orbites périodiques, la Méthode de Conformation d'Événements, par le biais du chemin d'événements, nous a esquissé une structure stable. Pour un nombre de solitons fixe, le chemin d'événements restera borné dans une partie du plan. Il est possible de repasser plusieurs fois par un même sous-chemin, si l'on a plusieurs fois la succession de deux mêmes interactions ; mais ce fait n'est aucunement systématique et ainsi on ne peut parler de propriétés de récurrence, car *celles-ci ne sont pas acquises par avance*. De surcroît, l'appauvrissement tendanciel de la dynamique au fur et à mesure que s'échappent les solitons des deux bords contribue largement au fait que s'amenuise très vite la possibilité de récurrences.

La Fig.5.12 à gauche présente en effet une *carte de noeuds* issue de la

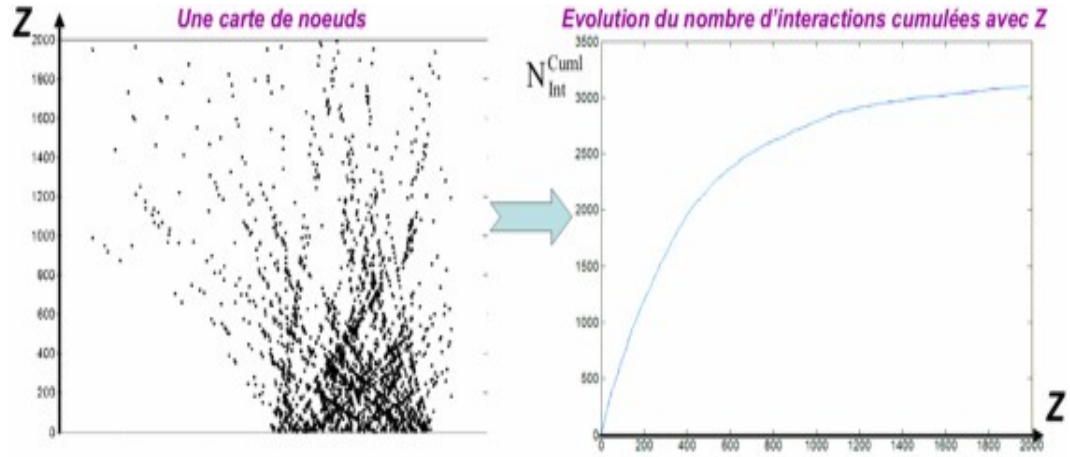


FIG. 5.12 – (A gauche) Une carte de noeuds obtenue à partir d'une population de 150 solitons ; (à droite) Evolution du nombre d'interactions cumulées dans celle-ci avec Z .

représentation unique des noeuds d'interactions ; cette carte provient d'une population de 150 solitons dont la dynamique est simulée sur une distance plus longue que précédemment. On y voit qualitativement la raréfaction des noeuds ; si l'on désigne par $N_{int}^{Cuml}(Z)$ le nombre total d'interactions précédant Z , on constate alors que l'approximation logarithmique

$$N_{int}^{Cuml}(Z) = k \log(Z + 1) \quad (5.18)$$

est justifiée, avec un coefficient de corrélation de 97.8%. D'autres cartes de noeuds testées ont également montré le même comportement : on peut alors affirmer que la dynamique ainsi modélisée, déjà limitée dans un espace fini, *a une richesse qui croît moins vite que l'espace qu'elle a pour se déployer* ; en doublant par exemple l'espace dans la direction Z , on aura un nombre d'interactions qui n'augmentera environ que d'un facteur $\log 2$, soit de 69.3%.

Finalement, dans une fenêtre de longueur variable Z , le nombre d'interactions présentes sera proportionnel à $\log Z$.

$$\boxed{N_{int} \propto \log Z} \quad (5.19)$$

En résumé, cette dynamique désordonnée qui caractérise les solitons n'a la possibilité de s'exprimer pleinement que sur *une zone limitée* : il peut alors être affirmé que **la dynamique de solitons en tant que désordre est un phénomène transitoire.**

5.6.2 Sensibilité aux conditions initiales

Une interface graphique a été créée sous Matlab (cf.G.1.3). Elle permet l'automatisation des calculs : elle crée une configuration aléatoire de n solitons et l'utilisateur peut alors définir une série de perturbations sur les conditions initiales d'un soliton (phase, angle, position sur l'axe transversal). L'interface va alors appliquer la Méthode de Conformations d'Événements sur cette série et proposer diverses options de représentation.

Les Figs.5.7 et 5.9 montrent des décroissances très fortes de σ_{CAS} ; le caractère exponentiel de celles-ci peut être testé grâce à une régression linéaire sur le logarithme de σ_{CAS} . L'interface graphique permet alors de calculer le coefficient α ($\alpha < 0$) dans la supposée relation

$$\sigma_{CAS} = \exp^{\alpha N_{int}} \quad (5.20)$$

La Fig.5.13 montre alors les résultats de l'approximation linéaire $\log \sigma_{CAS} = \alpha N_{int}$ pour une configuration aléatoire où l'on a perturbé l'angle du soliton médian de diverses valeurs s'échelonnant de 0.625% à 20% et de -0.625% à -20%.

Il peut être premièrement remarqué que les perturbations positives ou négatives de l'angle du soliton médian ne sont pas symétriques : les perturbations de -20% à -0.625% fournissent en effet d'excellentes régressions dont le moins fort coefficient de corrélation vaut en valeur absolue 91%, ce qui n'est pas le cas des perturbations de 20% à 0.625%. La série négative est celle qui fait rapprocher le plus σ_{CAS} d'une exponentielle inverse, bien que cette qualité soit aussi atteinte dans la série positive pour 20% et 10%.

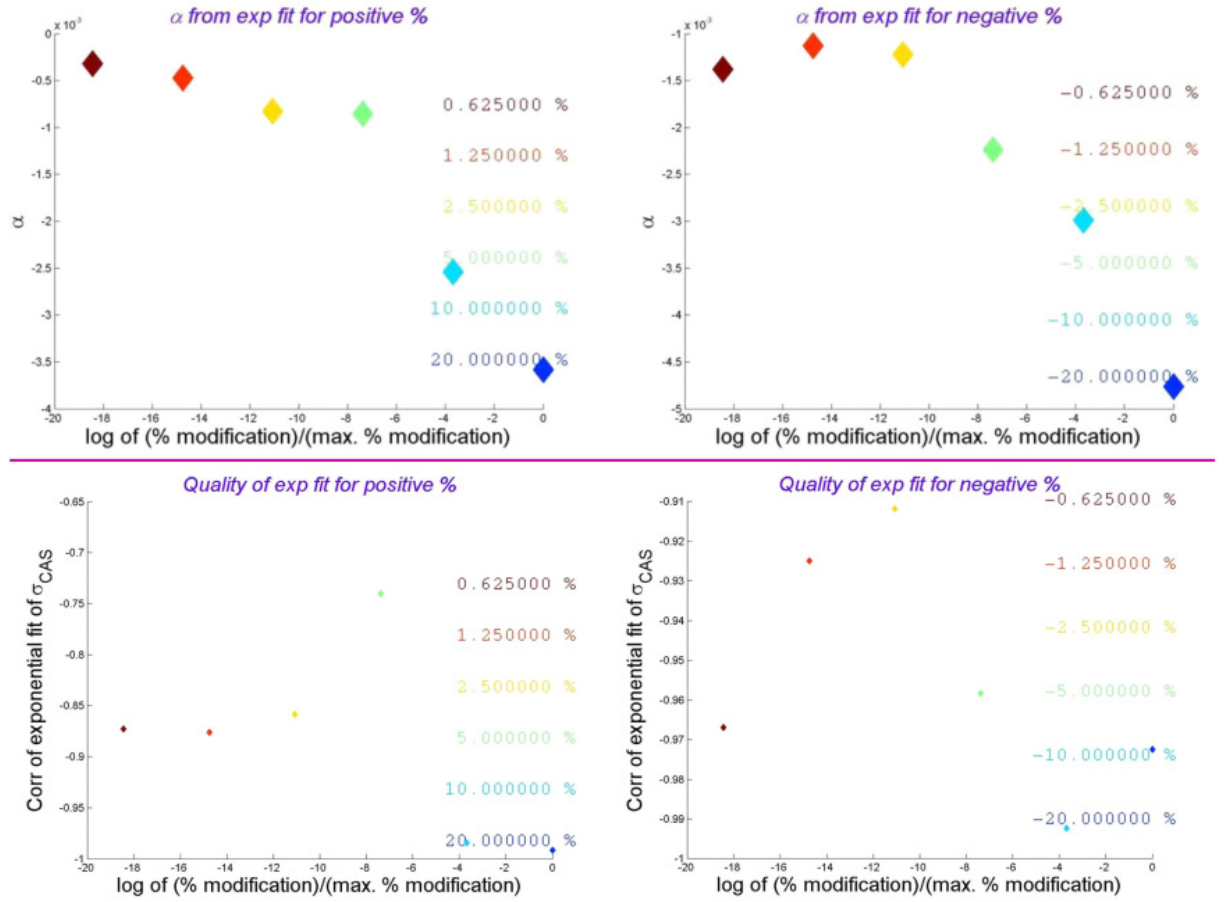


FIG. 5.13 – [Résultats de l'approximation linéaire pour une configuration aléatoire] (*En haut*) valeurs de α pour diverses modifications en % de l'angle du soliton médian; (*en bas*) valeurs du coefficient de corrélation de l'approximation linéaire.

La condition de robustesse se définit par une décorrélation qui reste la même quelle que soit l'amplitude de perturbation de conditions initiales. En d'autres termes, le coefficient α de l'approximation linéaire devrait rester relativement constant quelque soit la valeur de $\Delta\theta$. Sur la Fig.5.13, on peut constater que pour les perturbations s'échelonnant de 0.625% à 5%, $|\alpha|$ n'augmente que très légèrement; par contre, pour 10% et 20%, $|\alpha|$ augmente brutalement. Le cas des perturbations de -0.625% à -20% est similaire.

En somme, la raideur de la décorrélation σ_{CAS} dépend peu de l'amplitude de modification de conditions initiales si celles-ci restent faibles : le système

ainsi modélisé est modérément robuste aux faibles perturbations. Mais il doit être souligné que ceci ne peut être affirmé qu'a posteriori, le cas échéant : toutes les configurations ne seront pas égales face aux perturbations.

5.6.3 Conclusion

Il peut donc arriver que les descriptions fournies par la Méthode de Conformations d'Événements exhibent une chute exponentielle de la corrélation, représentant la perte de mémoire irrémédiable de deux dynamiques ; cette chute étant assez faiblement dépendante de l'amplitude de l'effet initial modéré qui l'a déclenchée.

Mais il doit être affirmé avec force que ce n'est pas le cas de *toutes* les dynamiques ; en effet, un exemple trivial serait la perturbation d'un soliton à l'extrême bord droit ou gauche, qui aurait des conséquences quasi-inexistantes sur la dynamique du point de vue du Paradigme des Noeuds d'Interactions ; et pourtant, on aurait tout de même modifié les conditions initiales du système.

On peut alors conclure que la dynamique ainsi modélisée présente les caractères d'une complexité spatiale où la modification des conditions initiales *peut* entraîner une décorrélation du système ; mais **la non-validation rigoureuse des propriétés de stationnarité et de récurrence empêche de qualifier cette dynamique de chaotique.**

Chapitre 6

Le Paradigme Global et les caractérisations qui en découlent

«Facts are stubborn, but statistics are more pliable.» MARK TWAIN

L'étude précédente fut menée sur un modèle abstrait imitant la dynamique complexe des solitons. De plus, conformément au Paradigme des Noeuds d'Interactions, l'intérêt était focalisé uniquement sur les interactions et les caractérisations subséquentes étaient entièrement basées sur elles. Malheureusement, bien que ces caractérisations eussent montré une décorrélation convenable du système, la Méthode de Conformation d'Evénements ne peut être utilisée pour décrire un processus aussi complexe qu'une filamentation. En effet, cette méthode est construite pour traiter une population homogène et limitée de solitons, alors qu'une filamentation produit un nombre considérable de solitons de toutes tailles et intensités à des endroits variables.

Ainsi, dans ce chapitre, notre intérêt va se porter à nouveau sur les simulations numériques, une nouvelle approche devant être trouvée.

6.1 L'utilisation de toutes les informations - une approche totalement différente

6.1.1 Envisager la dynamique de solitons photoréfractifs comme un processus global

On peut légitimement se poser la question de savoir si chaque point du cristal et l'information qu'il contient (intensité lumineuse ou phase) ne serait pas en fait utile pour décrire la dynamique. Cette façon de penser, à l'opposé du Paradigme des Noeuds d'Interactions, prendrait en compte chaque point sans discrimination, qu'il appartienne à un noeud d'interaction, à un soliton seul, ou à l'absence de l'un ou de l'autre. La dynamique de solitons photoréfractifs serait alors vue comme un processus global, au lieu d'un système de collisions de solitons. Les informations-clés dans le cas de ce nouveau paradigme, le Paradigme Global, seront les *distributions* d'intensité lumineuse et de phase.

6.1.2 Les données d'intensité et de phase dans le cristal : approche statistique

L'objectif principal de l'étude qui suit consistera en comparer et caractériser les distributions d'intensité et de phase dans deux simulations numériques A et B obtenues par des conditions initiales proches mais différentes. Pour ce faire, nous envisagerons ces distributions d'un point de vue statistique en se basant sur le concept de *corrélation statistique* [27].

A chaque point échantillonné (X_i, Z_j) du cristal, les intensités lumineuses dans les simulations numériques A et B seront écrites $I_A(X_i, Z_j)$ et $I_B(X_i, Z_j)$; les phases seront écrites $\varphi_A(X_i, Z_j)$ et $\varphi_B(X_i, Z_j)$. L'indice i accompagnant la coordonnée transversale X varie de 1 à N et celui j de la coordonnée de propagation Z de 1 à N_z .

En tenant compte de l'aspect "propagation" du système, il existe alors deux

manières de construire les distributions d'intensité lumineuse et de phase qui seront utilisées dans les calculs de corrélations :

- on considère *la* distribution transversale d'intensité lumineuse ou de phase, située à Z_j : on obtiendra des corrélations *instantanées* ;
- on considère *l'ensemble* des distributions transversales d'intensité lumineuse ou de phase qui précèdent la distribution transversale à Z_j , celle-ci incluse : on obtiendra des corrélations *cumulatives*.

Les définitions utilisées pour calculer la corrélation statistique sont décrites à l'Annexe C.1.

6.1.3 Les coefficients de corrélation instantanés

Les équations 6.1 et 6.2 sont donc utilisées afin de calculer les coefficients de corrélation instantanés en intensité $R_I(Z_j)$ et en phase $R_\varphi(Z_j)$ de la distribution transversale à Z_j :

$$R_I^{A,B}(Z_j) = \frac{\sum_{i=1}^N \left(I_A(X_i, Z_j) - \overline{I_A(Z_j)} \right) \left(I_B(X_i, Z_j) - \overline{I_B(Z_j)} \right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^N \left(I_A(X_i, Z_j) - \overline{I_A(Z_j)} \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N \left(I_B(X_i, Z_j) - \overline{I_B(Z_j)} \right)^2 \right]}} \quad (6.1)$$

$$R_\varphi^{A,B}(Z_j) = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\varphi_A(X_i, Z_j) - \overline{\varphi_A(Z_j)} \right) \left(\varphi_B(X_i, Z_j) - \overline{\varphi_B(Z_j)} \right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^N \left(\varphi_A(X_i, Z_j) - \overline{\varphi_A(Z_j)} \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N \left(\varphi_B(X_i, Z_j) - \overline{\varphi_B(Z_j)} \right)^2 \right]}} \quad (6.2)$$

avec

$$\overline{I_{A,B}(Z_j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{A,B}(X_i, Z_j)$$

et

$$\overline{\varphi_{A,B}(Z_j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_{A,B}(X_i, Z_j)$$

6.1.4 Les coefficients de corrélation cumulatifs

Les équations 6.3 et 6.4 sont utilisées afin de calculer les coefficients de corrélation cumulatifs en intensité $\rho_I(Z_j)$ et en phase $\rho_\varphi(Z_j)$ à Z_j :

$$\rho_I^{A,B}(Z_j) = \frac{\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left(I_A(X_i, Z_k) - \overline{I_A(Z_j)} \right) \left(I_B(X_i, Z_k) - \overline{I_B(Z_j)} \right)}{\sqrt{\left[\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left(I_A(X_i, Z_k) - \overline{I_A(Z_j)} \right)^2 \right] \left[\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left(I_B(X_i, Z_k) - \overline{I_B(Z_j)} \right)^2 \right]}} \quad (6.3)$$

$$\rho_\varphi^{A,B}(Z_j) = \frac{\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left(\varphi_A(X_i, Z_k) - \overline{\varphi_A(Z_j)} \right) \left(\varphi_B(X_i, Z_k) - \overline{\varphi_B(Z_j)} \right)}{\sqrt{\left[\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left(\varphi_A(X_i, Z_k) - \overline{\varphi_A(Z_j)} \right)^2 \right] \left[\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left(\varphi_B(X_i, Z_k) - \overline{\varphi_B(Z_j)} \right)^2 \right]}} \quad (6.4)$$

avec

$$\overline{I_{A,B}(Z_j)} = \frac{1}{jN} \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N I_{A,B}(X_i, Z_k)$$

et

$$\overline{\varphi_{A,B}(Z_j)} = \frac{1}{jN} \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \varphi_{A,B}(X_i, Z_k)$$

6.1.5 Le calcul des taux de divergence

Disposant de ces coefficients de corrélation statistique, on peut ainsi définir de la façon suivante, à Z_j , des taux de divergence instantanés ($L_I(Z_j), L_\varphi(Z_j)$) et cumulatifs ($\lambda_I(Z_j), \lambda_\varphi(Z_j)$) :

$$L_I^{A,B}(Z_j) = \frac{-\log R_I^{A,B}(Z_j)}{Z_j} \quad (6.5)$$

$$L_\varphi^{A,B}(Z_j) = \frac{-\log R_\varphi^{A,B}(Z_j)}{Z_j} \quad (6.6)$$

$$\lambda_I^{A,B}(Z_j) = \frac{-\log \rho_I^{A,B}(Z_j)}{Z_j} \quad (6.7)$$

$$\lambda_\varphi^{A,B}(Z_j) = \frac{-\log \rho_\varphi^{A,B}(Z_j)}{Z_j} \quad (6.8)$$

Ces grandeurs, homogènes à des inverses de longueurs réduites, sont donc sans dimensions.

6.1.6 Exemple : filamentation d'un faisceau gaussien

On simule numériquement dans un cristal de coefficient non-linéaire $NL = -1$ la propagation de deux faisceaux gaussiens proches, $B_1(X) = 4 \exp\left(-\left(\frac{X}{200}\right)^2\right)$ et $B_2(X) = 4.001 \exp\left(-\left(\frac{X}{200}\right)^2\right)$. Les paramètres de simulation utilisés sont : $\tau = 0.2$, $h = 0.05$, $N_z = 10000$, $N = 1024$ et $FS = 512$. Les simulations obtenues pour $NL = -1$ sont présentées à titre d'exemple dans la Fig.6.1.

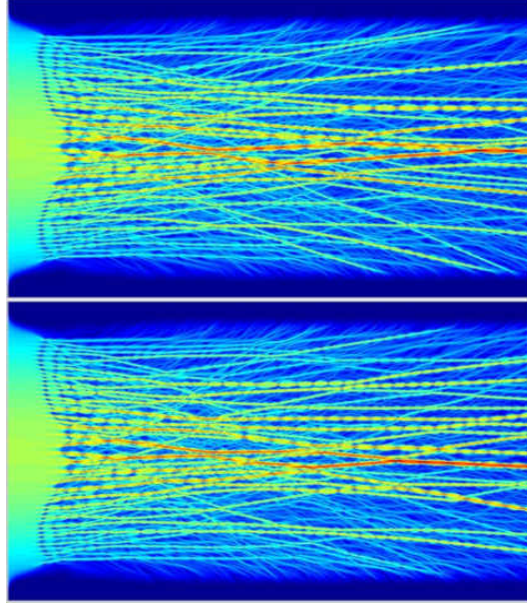


FIG. 6.1 – Simulations correspondant aux faisceaux B_1 (en haut) et B_2 (en bas), à $NL = -1$.

L'évolution le long de Z des coefficients de corrélation et des taux de divergence pour trois coefficients non-linéaires différents et toujours pour la paire

de faisceaux B_1 & B_2 est illustrée à la Fig.6.2.

Evolution des coefficients de corrélation Evolution des taux de divergence

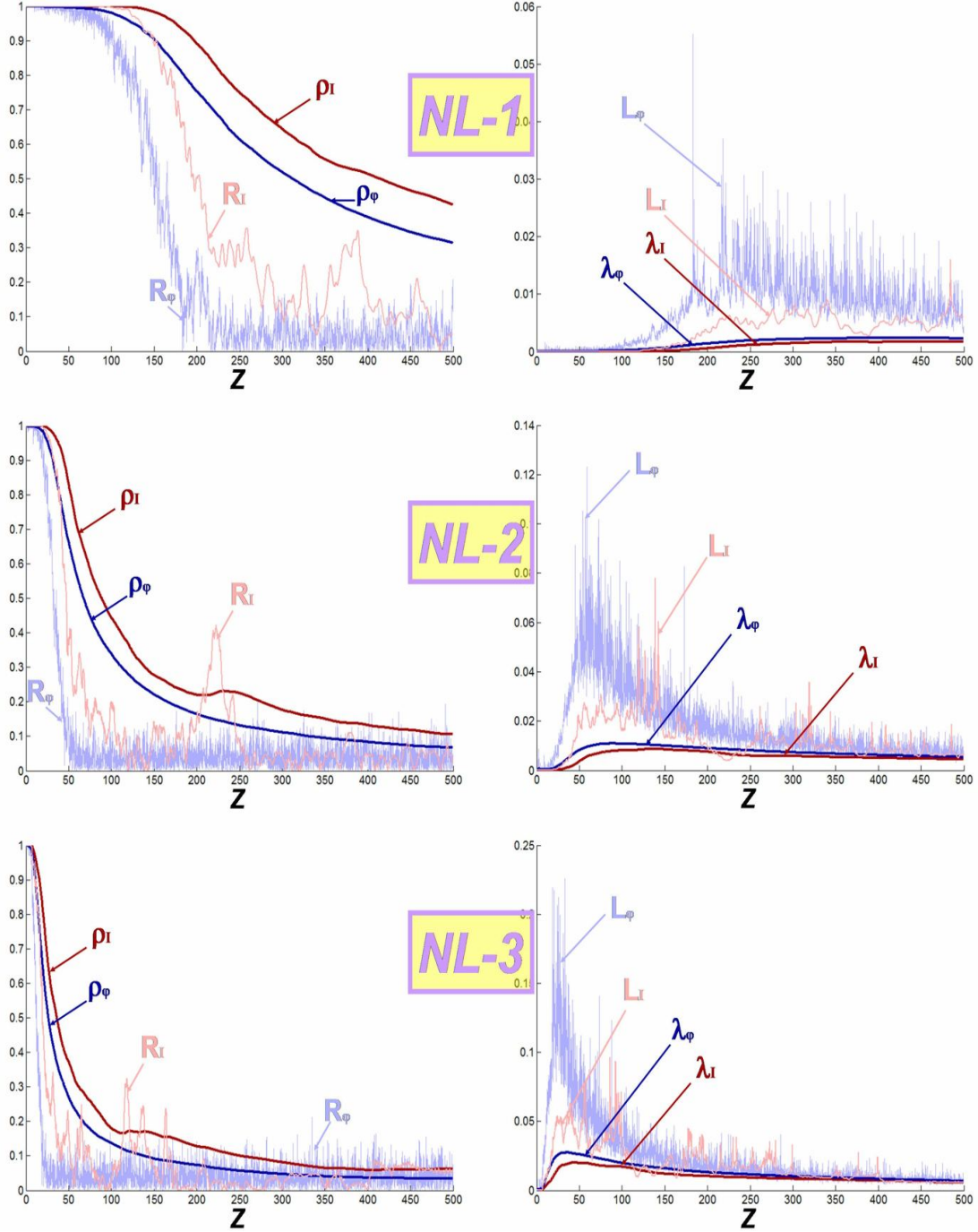


FIG. 6.2 – [Faisceaux B_1 et B_2] Evolution des coefficients de corrélation et des taux de divergence pour $NL = -1, -2$ et -3 .

6.2 "Forces" de complexité

Ces estimateurs visent à quantifier avec quelle force les deux simulations A et B diffèrent l'une de l'autre, autrement dit à quel point le désordre est intense. Nous les définissons comme *la moyenne le long de Z* des taux de divergence ; ces forces sont donc sans dimensions.

6.2.1 Forces de complexité instantanées

Avec h le pas de la méthode de Split Step Fourier (la longueur totale du cristal simulé égale $h \times N_z$), les forces de complexité instantanées s'écrivent :

$$Str_I^{Inst}(A, B) = \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} L_I(hi) \quad (6.9)$$

$$Str_\varphi^{Inst}(A, B) = \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} L_\varphi(hi) \quad (6.10)$$

Ce qui se développe sous la forme des équations 6.11 et 6.12 :

$$Str_I^{Inst}(A, B) = \frac{-1}{h \times N_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log \left[\frac{\sum_{i=1}^N (I_A(X_i, hk) - \overline{I_A(hk)}) (\overline{I_B(hk)} - I_B(X_i, hk))}{\sqrt{[\sum_{i=1}^N (I_A(X_i, hk) - \overline{I_A(hk)})^2] [\sum_{i=1}^N (\overline{I_B(hk)} - I_B(X_i, hk))^2]}} \right] \quad (6.11)$$

$$Str_\varphi^{Inst}(A, B) = \frac{-1}{h \times N_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log \left[\frac{\sum_{i=1}^N (\varphi_A(X_i, hk) - \overline{\varphi_A(hk)}) (\overline{\varphi_B(hk)} - \varphi_B(X_i, hk))}{\sqrt{[\sum_{i=1}^N (\varphi_A(X_i, hk) - \overline{\varphi_A(hk)})^2] [\sum_{i=1}^N (\overline{\varphi_B(hk)} - \varphi_B(X_i, hk))^2]}} \right] \quad (6.12)$$

6.2.2 Forces de complexité cumulatives

Les forces de complexité cumulatives s'écrivent :

$$Str_I^{Cuml}(A, B) = \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} \lambda_I(hi) \quad (6.13)$$

$$Str_{\varphi}^{Cuml}(A, B) = \frac{1}{N_z} \sum_{i=1}^{N_z} \lambda_{\varphi}(hi) \quad (6.14)$$

Elles se développent sous la forme des équations 6.15 et 6.16.

$$Str_I^{Cuml}(A, B) = \frac{-1}{h \times N_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log \left[\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N (I_A(X_i, hj) - \overline{I_A(hk)}) (I_B(X_i, hj) - \overline{I_B(hk)})}{\sqrt{[\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N (I_A(X_i, hj) - \overline{I_A(hk)})^2] [\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N (I_B(X_i, hj) - \overline{I_B(hk)})^2]}} \right] \quad (6.15)$$

$$Str_{\varphi}^{Cuml}(A, B) = \frac{-1}{h \times N_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log \left[\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N (\varphi_A(X_i, hj) - \overline{\varphi_A(hk)}) (\varphi_B(X_i, hj) - \overline{\varphi_B(hk)})}{\sqrt{[\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N (\varphi_A(X_i, hj) - \overline{\varphi_A(hk)})^2] [\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N (\varphi_B(X_i, hj) - \overline{\varphi_B(hk)})^2]}} \right] \quad (6.16)$$

6.3 Evolution des forces de complexité avec le coefficient non-linéaire

Il serait intéressant de déterminer comment ces forces de complexité évoluent avec le paramètre de simulation le plus important, le coefficient non-linéaire.

6.3.1 Exemples sur les faisceaux gaussiens

L'évolution des estimateurs ci-dessus avec le coefficient non-linéaire NL variant de 0 à -3.5 est présentée dans la Fig.6.3, pour les six paires de faisceaux suivantes :

- faisceaux $B_1(X) = 4 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$ et $B_{Xlow}(X) = 4.00001 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$;
- faisceaux $B_1(X)$ et $B_{low}(X) = 4.0001 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$;
- faisceaux $B_1(X)$ et $B_2(X) = 4.001 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$;
- faisceaux $B_1(X)$ et $B_3(X) = 4.01 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$;
- faisceaux $B_1(X)$ et $B_4(X) = 4.1 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$ et

Evolution des forces de complexité Str avec NL

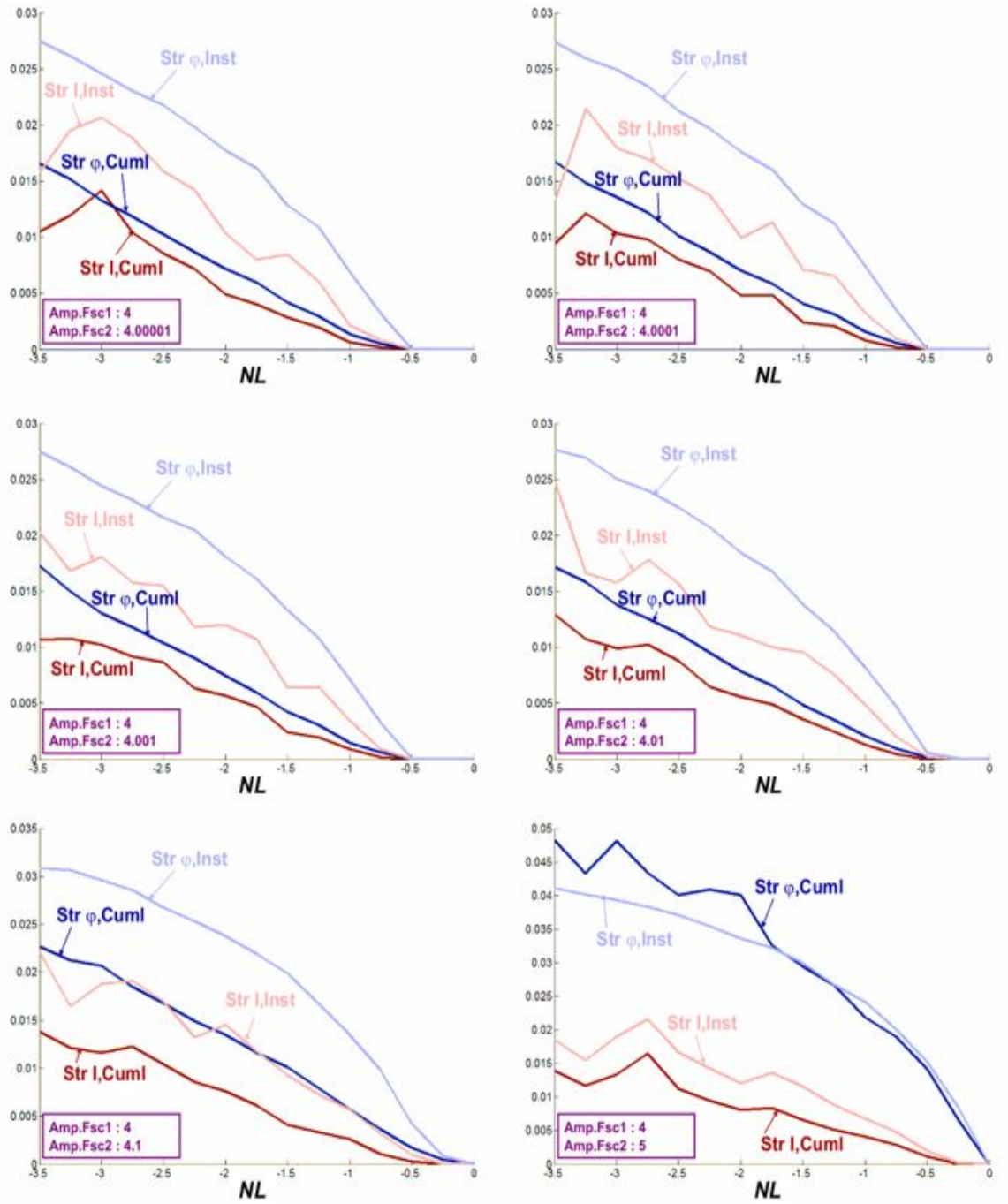


FIG. 6.3 – Evolution des forces de complexité avec NL pour les paires de faisceaux explicitées en 6.3.1.

- faisceaux $B_1(X)$ et $B_5(X) = 5 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$.

Corrélation linéaire entre...	$B_1 \& B_{Xlow}$	$B_1 \& B_{low}$	$B_1 \& B_2$	$B_1 \& B_3$	$B_1 \& B_4$	$B_1 \& B_5$
(Str_I^{Cuml}, NL)	94.8%	96.4%	97.7%	98.3%	98.7%	95.8%
(Str_φ^{Cuml}, NL)	98.4%	98.5%	98.4%	98.9%	99.7%	96.4%
(Str_I^{Inst}, NL)	95.9%	94.6%	98.4%	97.4%	97.9%	94.8%
(Str_φ^{Inst}, NL)	98.8%	98.8%	98.7%	98.7%	97.0%	94.2%

TAB. 6.1 – Valeurs des coefficients de corrélation de la relation 6.17 pour les quatre forces de complexité.

Les paramètres de simulation ayant servi pour tracer ces courbes sont les mêmes qu'en 6.1.6.

6.3.2 Discussion

6.3.2.1 Pertinence des forces de complexité

Des graphes présentés en 6.3.1, nous remarquons que les forces de complexité semblent varier de manière linéaire avec NL . Les coefficients de corrélation de la supposée relation

$$Str = \alpha NL + \beta \quad (6.17)$$

pour $NL \in [-3.5, 0]$ sont montrés dans le tableau 6.1.

Compte-tenu de la valeur très élevée de ces coefficients de corrélation pour toutes les paires de faisceaux, l'équation 6.17 est vérifiée pour $NL \in [-3.5, 0]$. Les forces de complexité sont donc *en relation simple* avec le paramètre physique le plus important du cristal, le coefficient non-linéaire : **ces estimateurs sont pertinents et significatifs pour décrire la dynamique de solitons photoréfractifs en tant que désordre**. Il est à noter aussi que les forces Str convergent vers 0 avec NL : en d'autres termes, **les estimateurs de forces de complexité sont nuls quand il n'y a pas d'effet non-linéaire**, ce qui ajoute encore à leur pertinence. Ainsi, il peut être dit que *la décorrélation commence à s'exprimer tangiblement* quand les estimateurs augmentent

de manière significative, c'est-à-dire quand le coefficient non-linéaire dépasse typiquement -0.5 ; cette augmentation se produit plus tôt lorsque la perturbation d'amplitude initiale du faisceau est élevée.

Il est intéressant d'expliciter le comportement des coefficients α et β de l'équation 6.17 avec la variation d'amplitude Δa de l'amplitude a du faisceau initial ; on réécrit alors cette équation sous la forme :

$$Str\left(a \exp^{-\left(\frac{x}{w}\right)^2}, (a + \Delta a) \exp^{-\left(\frac{x}{w}\right)^2}\right) = \alpha(\Delta a, a)NL + \beta(\Delta a, a) \quad (6.18)$$

Les résultats obtenus permettent alors de définir deux approximations, variables sous certaines conditions : α constant et β nul.

6.3.2.2 Approximation $\alpha : Cst$

La Fig.6.4 à gauche montre l'évolution de α avec le logarithme de la variation relative d'amplitude initiale du faisceau injecté, $\log \frac{\Delta a}{a}$. Nous utilisons les 6 paires de faisceaux précédemment définis en 6.3.1, avec l'ajout une nouvelle paire, $B_1(X)$ et $B_6(X) = 6 \exp^{-\left(\frac{x}{200}\right)^2}$. Une fois effectué le calcul du coefficient α , forces en intensité Str_I^{Cuml} , Str_I^{Inst} et forces de phase Str_φ^{Cuml} , Str_φ^{Inst} se démarquent :

- le coefficient α des forces en intensité reste **constant** quelque soit l'amplitude de variation de l'amplitude initiale, les coefficients de constance associés (cf. Annexe C.2) étant très satisfaisants : ils valent 94.0% pour $\alpha_{I,Cuml}$ et 95.0% pour $\alpha_{I,Inst}$. La valeur de α étant propre à chaque type de force en intensité, cumulative et instantanée (en moyenne, $\alpha_{I,Cuml} \simeq 4.07 \cdot 10^{-3}$ et $\alpha_{I,Inst} \simeq 6.23 \cdot 10^{-3}$) ;
- pour ce qui est des forces de phase, le coefficient α relatif à Str_φ^{Inst} augmente légèrement en valeur absolue pour les valeurs très élevées de $\log \frac{\Delta a}{a}$; le coefficient de constance valant 91.5%, l'approximation $\alpha : Cst$ reste justifiée. Celui relatif à Str_φ^{Cuml} chute à 50.4% car $\alpha_{\varphi,Cuml}$ connaît

une forte variation pour les valeurs très élevées de perturbation d'amplitude ($\frac{\Delta a}{a} = 50\%$).

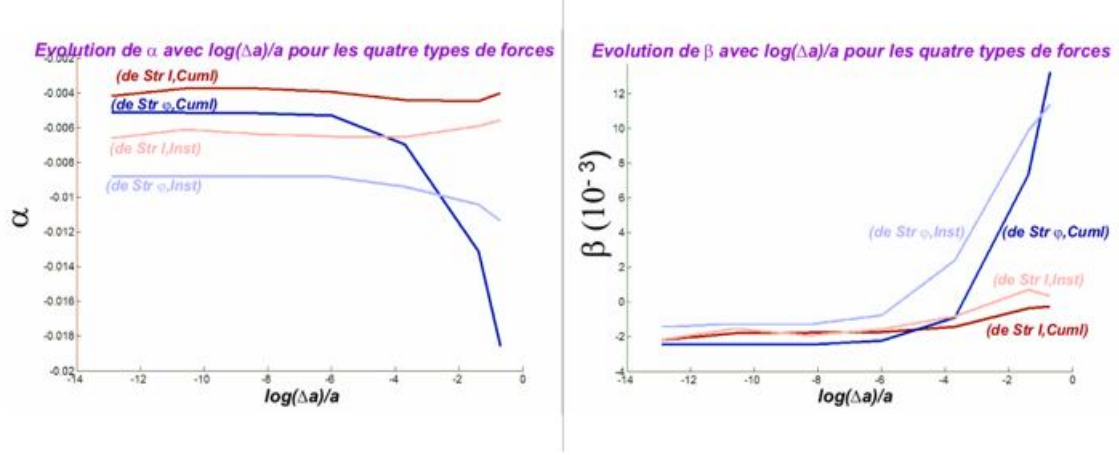


FIG. 6.4 – Evolution de α et β avec $\log\left(\frac{\Delta a}{a}\right)$.

6.3.2.3 Approximation β : Nul

Les quatre forces Str , quelle que soit la perturbation d'amplitude initiale du faisceau, convergent toutes vers 0 ; or, dans chaque approximation linéaire de Str , il apparaît l'ordonnée à l'origine β qui est contradictoire avec cet état de fait. De plus, il serait très intéressant d'exprimer les forces sous la forme d'une proportionnalité directe au coefficient non-linéaire.

La Fig.6.4 à droite montre les évolutions de β avec $\log \frac{\Delta a}{a}$; on peut y constater que là encore forces en intensité et forces de phase ont un comportement différent :

- les ordonnées à l'origine $\beta_{I,Cuml}$, $\beta_{I,Inst}$ relatives aux premières convergent vers 0 pour les fortes valeurs de perturbation,
- tandis que les autres $\beta_{\phi,Cuml}$, $\beta_{\phi,Inst}$ augmentent fortement jusqu'à devenir positives.

Nous devons donc nous questionner sur la validité d'imposer $\beta = 0$, c'est-à-dire d'écrire la valeur estimée de la force $\widehat{Str}$ sous la forme de l'équation 6.19 :

$$\widehat{Str} = \tilde{\alpha}NL \quad (6.19)$$

au lieu de $Str = \alpha NL + \beta$. Cette nouvelle écriture implique un nouveau calcul du coefficient de proportionnalité nommé maintenant $\tilde{\alpha}$ (voir Annexe C.3.1 pour le détail de calcul de $\tilde{\alpha}$).

Il n'est alors plus possible d'estimer un coefficient de corrélation linéaire σ entre Str et cette nouvelle droite car σ ne se définit que sur la droite $\alpha NL + \beta$; mais néanmoins on peut calculer le rapport $\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$ pour voir la proximité relative des deux coefficients $\tilde{\alpha}$ et α . Il est également possible de calculer le rapport RR des *résidus* de chacune des méthodes (cf. Annexe C.3.2); si par exemple $RR = 2$, cela signifie que la droite $\tilde{\alpha}NL$ et donc l'approximation $\beta : Nul$ laisse deux fois plus de résidus vis-à-vis de Str que la droite $\alpha NL + \beta$.

La Fig.6.5 résume alors graphiquement le problème, montrant une courbe de force Str et les deux droites qui cherchent à l'approcher; le tableau 6.2 figure alors, pour chaque force et chaque paire de faisceaux, la proximité relative de α et $\tilde{\alpha}$ ainsi que le rapport des résidus.

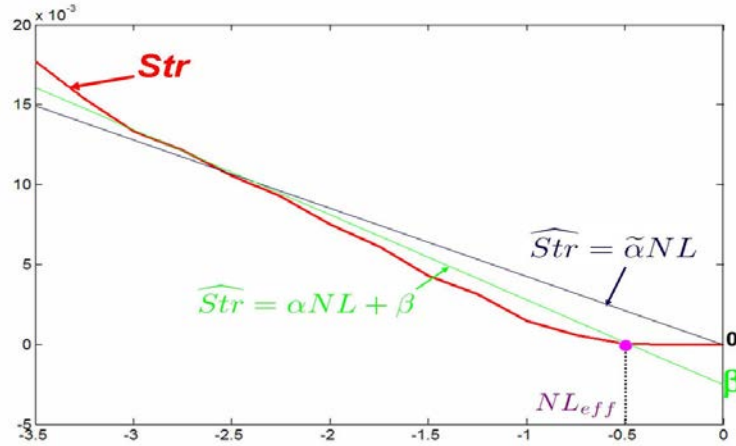


FIG. 6.5 – Une évolution typique de force de complexité Str ainsi que les droites $\alpha NL + \beta$ et $\tilde{\alpha}NL$ qui essaient d'en réaliser une approximation linéaire.

Il est raisonnable d'affirmer que l'approximation $\beta : Nul$ est applicable lorsque $\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$ est inférieur à 15% ou lorsque la droite $\tilde{\alpha}NL$ apporte moins de

Force	Proximité relative de $\tilde{\alpha}$ à α : $\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$						
	$B_1 \& B_{Xlow}$	$B_1 \& B_{low}$	$B_1 \& B_2$	$B_1 \& B_3$	$B_1 \& B_4$	$B_1 \& B_5$	$B_1 \& B_6$
Str_I^{Cuml}	-21.6%	-19.7%	-19.5%	-18.2%	-13.5%	-3.1%	-2.8%
Str_{φ}^{Cuml}	-19.8%	-19.6%	-19.5%	-17.2%	-5.3%	23.1%	29.5%
Str_I^{Inst}	-13.6%	-10.3%	-12.4%	-9.8%	-5.1%	4.9%	2.6%
Str_{φ}^{Inst}	-6.6%	-6.0%	-6.0%	-3.6%	10.6%	39.1%	41.4%

Force	Rapport des résidus $\frac{R_{\alpha NL}^2}{R_{\alpha NL + \beta}^2}$						
	$B_1 \& B_{Xlow}$	$B_1 \& B_{low}$	$B_1 \& B_2$	$B_1 \& B_3$	$B_1 \& B_4$	$B_1 \& B_5$	$B_1 \& B_6$
Str_I^{Cuml}	1.6	1.7	2.1	2.3	2.0	1.0	1.1
Str_{φ}^{Cuml}	2.7	2.7	2.6	2.8	1.8	2.0	2.5
Str_I^{Inst}	1.3	1.1	1.7	1.2	1.4	1.0	1.0
Str_{φ}^{Inst}	1.2	1.2	1.2	1.1	1.2	2.6	2.7

TAB. 6.2 – (En haut) Résultats obtenus pour les écarts relatifs entre α et $\tilde{\alpha}$;
(en bas) résultats obtenus pour les rapports des résidus.

50% de résidus supplémentaires par rapport à $\alpha NL + \beta$; par conséquent, l'approximation $\beta : Nul$ s'applique pour la force en intensité instantanée quelle que soit la perturbation (la qualité s'améliore même lorsqu'elle augmente) et la force de phase instantanée pour les perturbations raisonnables. Les forces cumulées, quant à elles, exhibent des résidus importants, sauf à certains endroits pour Str_{φ}^{Cuml} (pour la seule paire $B_1 \& B_4$) et aux fortes perturbations pour Str_I^{Cuml} .

Ces conditions sont assez restrictives ; on peut alors remarquer dans la Fig.6.5 que la courbe de force Str coupe toujours la droite $\alpha NL + \beta$ en une faible valeur de $|NL|$, que nous nommons NL_{eff} (effectif) ; c'est à partir de cette valeur que la courbe de force commence à prendre son essor. En gardant ainsi le coefficient α de l'approximation linéaire classique, on peut exprimer la

Forces	$\alpha : Cst$		$\beta : Nul$	
	$\Delta a/a$ faible à moyen	$\Delta a/a$ élevé	$\Delta a/a$ faible à moyen	$\Delta a/a$ élevé
Str_I^{Cuml}	A	A	NA	A
Str_φ^{Cuml}	A	NA	NA	NA
Str_I^{Inst}	A	A	A	A
Str_φ^{Inst}	A	A	A	NA

TAB. 6.3 – Caractère applicable ou non des deux approximations $\alpha : Cst$ et $\beta : Nul$ suivant le type de force et l'amplitude de variation de l'amplitude initiale.

force Str sous la forme $\boxed{\mathbf{Str} = \alpha \mathbf{NL}^*}$ où

$$NL^* = NL - NL_{eff}.$$

6.3.3 Cumul des deux approximations

Le tableau 6.3 résume le caractère applicable (A) ou non (NA) des approximations $\alpha : Cst$ et $\beta : Nul$.

Dans les cas où les deux approximations sont simultanément applicables, Str peut donc s'exprimer de la façon suivante :

$$\boxed{Str = \hat{\alpha} NL, \hat{\alpha} \text{ constant et propre à chaque type de force}} \quad (6.20)$$

Grâce au changement de variable explicité à la fin de 6.3.2.3, l'équation 6.20 exprimant la proportionnalité directe de Str vis-à-vis de NL peut toujours s'écrire, dans les autres cas où $\beta : Nul$ n'est pas applicable, sous la forme

$$Str = \alpha NL^* \quad (6.21)$$

En résumé, toutes les courbes de force pour cinq paires de faisceaux ($B_1 \& B_{low}$, $B_1 \& B_2$, $B_1 \& B_3$, $B_1 \& B_4$ et $B_1 \& B_5$) sont montrées ensemble à la Fig.6.6. Il peut y être vu que :

- les courbes de Str_I^{Cuml} et Str_I^{Inst} restent respectivement groupées pour les cinq paires de faisceaux : quelle que soit l'importance de la perturbation d'amplitude initiale, **les forces en intensité cumulative et instantanée prennent respectivement des valeurs comparables, surtout quand $|NL|$ est élevé ;**
- de l'autre côté, pour Str_φ^{Inst} et Str_φ^{Cuml} , les valeurs élevées de modification de l'amplitude initiale fournissent des courbes qui se placent plus haut, avec une pente α effectivement plus forte pour Str_φ^{Cuml} .

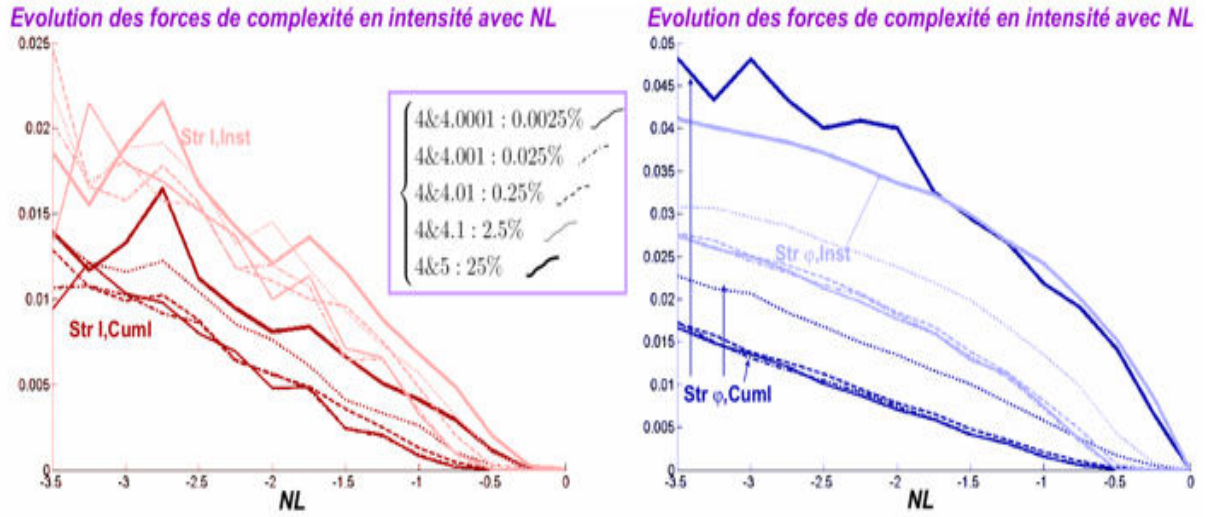


FIG. 6.6 – Evolution des force de complexité en intensité et de phase avec NL , pour les paires de faisceaux $B_1 \& B_{low}$ (ligne continue), $B_1 \& B_2$ (ligne mixte), $B_1 \& B_3$ (ligne discontinue), $B_1 \& B_4$ (pointillés) et $B_1 \& B_5$ (ligne continue épaisse).

En d'autres termes, par application des deux approximations ou du changement de variable explicité en 6.3.2.3, **deux simulations numériques proches mais différentes, effectuées à un même coefficient non-linéaire, divergeront avec une force de complexité proportionnelle à ce coefficient non-linéaire.**

6.3.4 Conséquences physiques

L'expression du coefficient non-linéaire NL (cf. Annexe A) implique que la force de complexité de la dynamique photoréfractive serait par conséquent *proportionnelle à la racine carrée du coefficient électro-optique effectif*, ou à la *racine carrée du champ électrique appliqué*. Pour une faible modulation $E + \Delta E$ du champ E , le coefficient non-linéaire NL et par conséquent la force de complexité serait modulée comme $NL \left(1 + \frac{\Delta E}{E + E_{ph}}\right)$.

Ce concept de faible modulation du champ électrique appliqué sera très utile au chapitre suivant, où nous chercherons à savoir ce qu'il advient si le coefficient non-linéaire varie d'une simulation à l'autre.

6.4 Mesure de la perte de corrélation spatio-temporelle sur une série de simulations

Jusqu'ici, les caractérisations furent menées sur deux simulations où la perturbation de conditions initiales concernait l'amplitude initiale du faisceau, le but de cette perturbation étant de provoquer une dynamique de plus en plus dissemblable au fur et à mesure que l'on progresse suivant Z .

Or, cette manière de procéder occulte un certain aspect temporel de la dynamique solitonique ; en effet, le temps figure dans l'équation dynamique 2.2 en tant que paramètre. Afin d'exprimer cette temporalité, on peut alors fixer cette fois le profil d'entrée et faire varier le temps réduit τ ; il serait alors intéressant de prendre en compte, dans le cadre d'une caractérisation fondée sur la Méthode du Paradigme Global, non plus deux simulations mais une série temporelle de simulations où le temps réduit τ varie d'une simulation à l'autre.

Partant de séries temporelles de simulations, nous nous attacherons premièrement à expliciter comment les forces de complexité évoluent d'une simulation à l'autre, à l'aide de la *corrélation chaînée* ; puis nous introduirons un nouveau concept : la *multicorrélation*, voué estimer la perte de cohérence globale à la

fois sur l'espace et le temps.

6.4.1 Définition du formalisme

Soit une série temporelle de W ($W \geq 2$) simulations numériques Sim_θ , $\theta = 1 \dots W$. Sur une simulation Sim_θ , l'intensité lumineuse au point de coordonnées (X_i, Z_j) est définie par $I_\theta(X_i, Z_j)$ et la phase par $\varphi_\theta(X_i, Z_j)$; la variable transversale X est toujours échantillonnée sur N valeurs et la variable de propagation Z sur N_z valeurs avec un pas h . La simulation Sim_θ et la suivante $Sim_{\theta+1}$ sont séparées par un délai T .

6.4.2 Corrélation chaînée : mesure de la perte de corrélation d'une simulation à l'autre

Le but étant de représenter la perte de corrélation de la simulation Sim_θ à la suivante $Sim_{\theta+1}$, nous réécrivons les équations 6.1 à 6.4 en remplaçant les distributions d'intensité lumineuse $I_A(X_i, Z_j)$, $I_B(X_i, Z_j)$ et de phase $\varphi_A(X_i, Z_j)$, $\varphi_B(X_i, Z_j)$ par $I_\theta(X_i, Z_j)$, $I_{\theta+1}(X_i, Z_j)$ et $\varphi_\theta(X_i, Z_j)$, $\varphi_{\theta+1}(X_i, Z_j)$. En la coordonnée de propagation Z_j , nous obtenons ainsi quatre décorrélations $R_I^{\theta, \theta+1}(Z_j)$, $R_\varphi^{\theta, \theta+1}(Z_j)$, $\rho_I^{\theta, \theta+1}(Z_j)$ et $\rho_\varphi^{\theta, \theta+1}(Z_j)$.

Il en découle ainsi quatre taux de divergence; afin d'introduire une notion de temps, même réduit, nous les définissons à partir des équations 6.5 à 6.8 en introduisant aux dénominateurs le laps de temps réduit T entre deux simulations :

$$L_I^{\theta, \theta+1}(Z_j) = \frac{-\log |R_I^{\theta, \theta+1}(Z_j)|}{TZ_j} \quad (6.22)$$

$$L_\varphi^{\theta, \theta+1}(Z_j) = \frac{-\log |R_\varphi^{\theta, \theta+1}(Z_j)|}{TZ_j} \quad (6.23)$$

$$\lambda_I^{\theta, \theta+1}(Z_j) = \frac{-\log |\rho_I^{\theta, \theta+1}(Z_j)|}{TZ_j} \quad (6.24)$$

$$\lambda_{\varphi}^{\theta, \theta+1}(Z_j) = \frac{-\log |\rho_{\varphi}^{\theta, \theta+1}(Z_j)|}{TZ_j} \quad (6.25)$$

Ces grandeurs, homogènes à l'inverse d'une longueur réduite fois l'inverse d'un temps réduit, restent sans dimensions.

On en déduit donc les forces de complexité instantanées et cumulatives en intensité lumineuse et en phase, de la simulation θ à la suivante $\theta + 1$, séparées d'un laps de temps T :

$$Str_I^{Inst}(Sim_{\theta}, Sim_{\theta+1}) = \frac{-1}{ThN_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log L_I^{\theta, \theta+1}(hk) \quad (6.26)$$

$$Str_{\varphi}^{Inst}(Sim_{\theta}, Sim_{\theta+1}) = \frac{-1}{ThN_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log L_{\varphi}^{\theta, \theta+1}(hk) \quad (6.27)$$

$$Str_I^{Cuml}(Sim_{\theta}, Sim_{\theta+1}) = \frac{-1}{ThN_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log \lambda_I^{\theta, \theta+1}(hk) \quad (6.28)$$

$$Str_{\varphi}^{Cuml}(Sim_{\theta}, Sim_{\theta+1}) = \frac{-1}{ThN_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log \lambda_{\varphi}^{\theta, \theta+1}(hk) \quad (6.29)$$

6.4.3 Multicorrélation : mesure de la perte de corrélation sur une série de temporelle de simulations

Nous généralisons alors la définition de la corrélation statistique à plusieurs séries statistiques (cf. Annexe C.1). Nous pouvons alors définir les coefficients de multicorrélations instantanés et cumulatifs en intensité et en phase, calculés en Z_j sur les p ($p \leq W$) simulations de la sous-série de simulations $Sim_1, \dots, Sim_p$:

$$MultR_I(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{\sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p \left| I_l(X_i, Z_j) - \overline{I_l(Z_j)} \right|}{\prod_{l=1}^p \left(\sum_{i=1}^N \left| I_l(X_i, Z_j) - \overline{I_l(Z_j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \quad (6.30)$$

$$MultR_\varphi(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{\sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p \left| \varphi_l(X_i, Z_j) - \overline{\varphi_l(Z_j)} \right|}{\prod_{l=1}^p \left(\sum_{i=1}^N \left| \varphi_l(X_i, Z_j) - \overline{\varphi_l(Z_j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \quad (6.31)$$

$$Mult\rho_I(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p \left| I_l(X_i, Z_k) - \overline{I_l(Z_j)} \right|}{\prod_{l=1}^p \left(\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left| I_l(X_i, Z_k) - \overline{I_l(Z_j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \quad (6.32)$$

$$Mult\rho_\varphi(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p \left| \varphi_l(X_i, Z_k) - \overline{\varphi_l(Z_j)} \right|}{\prod_{l=1}^p \left(\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left| \varphi_l(X_i, Z_k) - \overline{\varphi_l(Z_j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \quad (6.33)$$

Les multi-taux de divergence en Z_j qui en découlent sont :

$$MultL_I(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{-\log MultR_I(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p)}{(p-1)TZ_j} \quad (6.34)$$

$$MultL_\varphi(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{-\log MultR_\varphi(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p)}{(p-1)TZ_j} \quad (6.35)$$

$$Mult\lambda_I(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{-\log Mult\rho_I(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p)}{(p-1)TZ_j} \quad (6.36)$$

$$Mult\lambda_\varphi(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p) = \frac{-\log Mult\rho_\varphi(Z_j; Sim_1, \dots, Sim_p)}{(p-1)TZ_j} \quad (6.37)$$

Nous définirons ainsi les multiforces de complexité en intensité comme les moyennes des multi-taux de divergence, réalisées comme avant selon Z et de plus maintenant selon un nombre de simulations allant de deux au nombre total W :

$$MultStr_I^{Inst}(Sim_1, \dots, Sim_W) = \frac{-1}{(W-1)ThN_z} \sum_{p=2}^W \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{(p-1)k} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p |I_l(X_i, hk) - \overline{I_l(hk)}|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{i=1}^N |I_l(X_i, hk) - \overline{I_l(hk)}|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \right) \quad (6.38)$$

$$MultStr_\varphi^{Inst}(Sim_1, \dots, Sim_W) = \frac{-1}{(W-1)ThN_z} \sum_{p=2}^W \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{(p-1)k} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p |\varphi_l(X_i, hk) - \overline{\varphi_l(hk)}|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{i=1}^N |\varphi_l(X_i, hk) - \overline{\varphi_l(hk)}|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \right) \quad (6.39)$$

$$MultStr_I^{Cuml}(Sim_1, \dots, Sim_W) = \frac{-1}{(W-1)ThN_z} \sum_{p=2}^W \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{(p-1)k} \log \left(\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p |I_l(X_i, hj) - \overline{I_l(hk)}|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N |I_l(X_i, hj) - \overline{I_l(hk)}|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \right) \quad (6.40)$$

$$MultStr_\varphi^{Cuml}(Sim_1, \dots, Sim_W) = \frac{-1}{(W-1)ThN_z} \sum_{p=2}^W \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{(p-1)k} \log \left(\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p |\varphi_l(X_i, hj) - \overline{\varphi_l(hk)}|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N |\varphi_l(X_i, hj) - \overline{\varphi_l(hk)}|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \right) \quad (6.41)$$

6.4.4 Exemple : dynamique temporelle d'un faisceau gaussien constant

On simule la dynamique spatio-temporelle du faisceau de profil $4 \exp^{-(X/200)^2}$, constant dans le temps, dans un cristal de coefficient non-linéaire $NL = -2$; la taille de la fenêtre transversale est 512 et on prend $N_z = 10000$ et $h = 0.05$. Afin de percevoir complètement la dynamique temporelle présente, la série de simulations est alors réalisée sur une échelle de temps assez étendue, de 0.2 à 100000 : on prend $\tau = 0.2, 0.3, 0.4, 0.7, 1, 2, 4, 10, 100, 1000, 10000, 100000$. Ceci implique des laps de temps hétérogènes entre les simulations qui sont dûment pris en compte dans l'implantation algorithmique des formules 6.26 à 6.29 et 6.38 à 6.41.

La Fig.6.7 montre à titre d'exemple les simulations à $\tau = 0.3, 2, 100, 10000$.

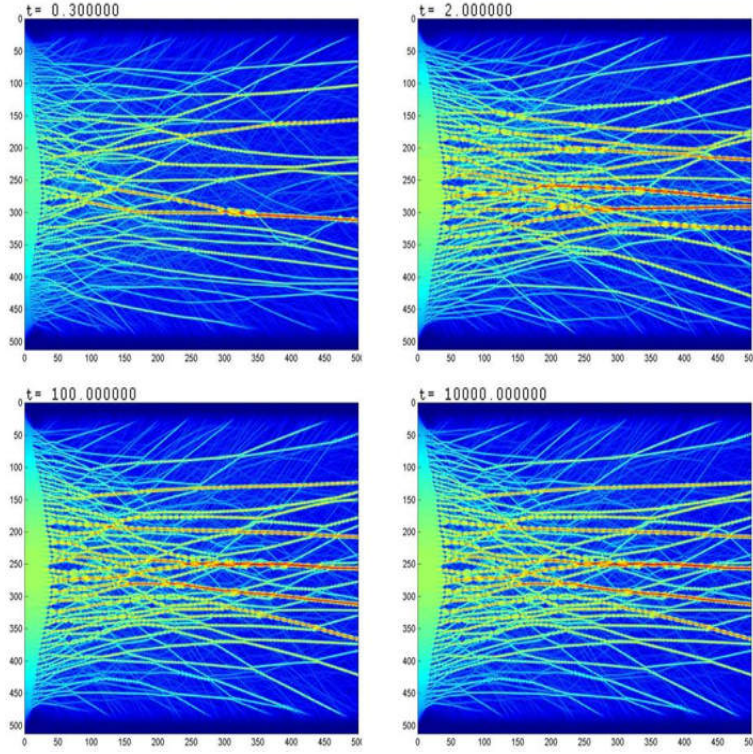


FIG. 6.7 – Simulations numériques du faisceau $4 \exp^{-(X/200)^2}$ à $\tau = 0.3, 2, 100, 10000$; on peut voir l'évolution transitoire temporelle de $\tau = 0.3$ à 100 (les dynamiques $\tau = 0.3, 2, 100$ sont différentes) vers un état stationnaire à partir de 100 (les dynamiques $\tau = 100, 10000$ sont identiques).

6.4.4.1 Corrélations chaînées

Le tableau 6.4 et les graphiques de la Fig.6.8 esquissent les résultats obtenus pour l'évolution temporelle des quatre forces de complexité chaînées.

On peut alors constater que, le temps augmentant, les forces de complexité tendent vers 0; pour un temps suffisamment élevé ($\tau > 100$), les forces de complexité deviennent négligeables, puis nulles : il n'y a plus de décorrélation d'une simulation à l'autre et **le système a donc rejoint un état stationnaire**, après un transitoire temporel.

Simulations ($\theta \rightarrow \theta + 1$)	(1 $\rightarrow$ 2)	(2 $\rightarrow$ 3)	(3 $\rightarrow$ 4)	(4 $\rightarrow$ 5)	(5 $\rightarrow$ 6)	(6 $\rightarrow$ 7)
τ	0.3	0.4	0.7	1	2	4
$Str_I^{Cuml}(i \rightarrow j)$	0.0867	0.0771	0.0200	0.0135	0.00354	0.00135
$Str_\varphi^{Cuml}(i \rightarrow j)$	0.480	0.205	0.0593	0.0338	0.00834	0.00291
$Str_I^{Inst}(i \rightarrow j)$	0.146	0.131	0.0314	0.029	0.00675	0.00310
$Str_\varphi^{Inst}(i \rightarrow j)$	0.336	0.290	0.0904	0.0633	0.0172	0.00724

(7 $\rightarrow$ 8)	(8 $\rightarrow$ 9)	(9 $\rightarrow$ 10)	(10 $\rightarrow$ 11)	(11 $\rightarrow$ 12)
10	100	1000	10000	100000
0.00041	$3.0248 \cdot 10^{-5}$	0	0	0
0.000753	$5.018 \cdot 10^{-6}$	0	0	0
0.00119	$8.64 \cdot 10^{-5}$	0	0	0
0.00215	0.000145	0	0	0

TAB. 6.4 – Valeurs des forces de complexité chaînées, de la simulation θ à la suivante $\theta + 1$ pour le faisceau constant $4 \exp^{-(X/200)^2}$

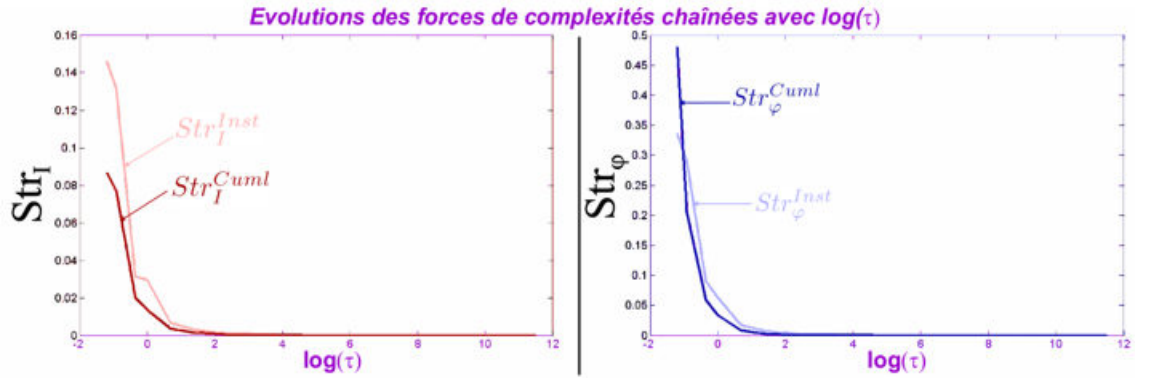


FIG. 6.8 – [Dynamique temporelle d'un faisceau constant] Evolutions des forces de complexités chaînées, d'une simulation à la suivante (cf. tableau 6.4).

6.4.4.2 Multicorrélations

Nous avons également calculé les multicorrélations cumulées $Mult\rho_I$ et $Mult\rho_\varphi$. Ces coefficients de corrélations dépendent de Z et du temps τ par le biais du nombre p de simulations que l'on prend en compte. On peut donc représenter ces coefficients sous la forme de deux nappes qui figurent comment le système perd cohérence sur lui-même, aussi bien de manière spatiale que temporelle. Les nappes relatives à l'intensité $Mult\rho_I$ et $Mult\lambda_I$ sont représentées à la Fig.6.9 en haut et celles relatives à la phase $Mult\rho_\varphi$ et $Mult\lambda_\varphi$ sur la

même figure en bas.

Evolutions avec Z et τ des multicorrélations et des taux de divergence

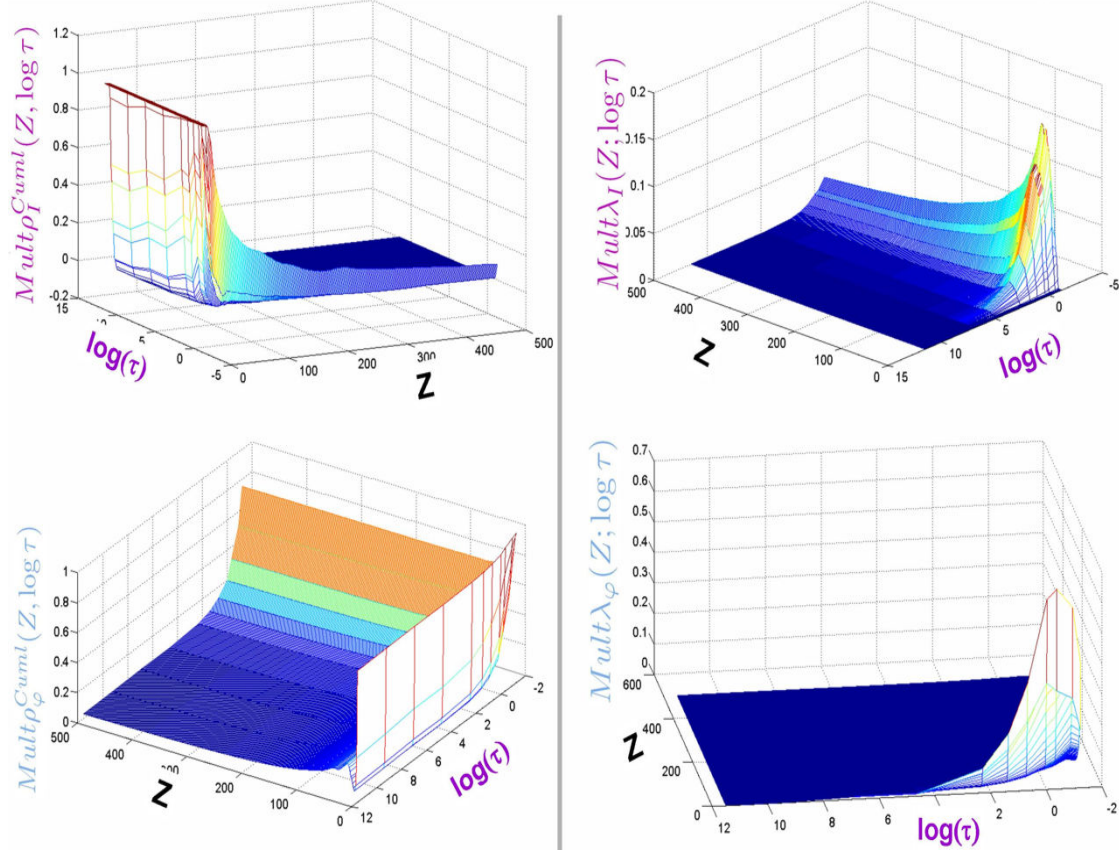


FIG. 6.9 – [Dynamique temporelle d'un faisceau constant] Evolutions spatio-temporelles des multicorrélations et des taux de divergence.

Pour ce qui concerne la multicorrélation cumulative en intensité, sa chute est la moins forte tout au début de la série de simulations ; elle chute ensuite d'autant plus vite avec Z que le nombre de simulations prises en compte est important, c'est à dire pour $\log \tau$ élevé. Ceci est la preuve d'un changement de régime du transitoire vers le stationnaire : alors que sur des temps τ suffisamment élevés la corrélation chaînée ne diminuait plus avec Z (régime stationnaire), la multicorrélation montre elle une très forte chute avec Z car la dynamique n'était pas du tout la même *avant* (régime transitoire). En résumé, la multicorrélation permet la prise en compte de l'histoire temporelle de la dynamique, et celle-ci influe directement sur la décorrélation avec Z .

Les moyennes sur Z et τ de $Mult\lambda_I$ et $Mult\lambda_\varphi$, donnant les valeurs des multiforces en intensité $MultStr_I^{Cuml}$ et en phase $MultStr_\varphi^{Cuml}$ valent enfin respectivement $1.8 \cdot 10^{-2}$ et $1.1 \cdot 10^{-2}$ par unité de temps réduit et par unité de distance réduite ; ces valeurs quantifient numériquement la perte de corrélation sur l'ensemble de la durée de la série de simulations (incluant régimes transitoire et stationnaire) et sur l'ensemble de la longueur totale du cristal simulé.

6.4.5 Autre exemple : perturbation transitoire d'amplitude en régime stationnaire

En régime stationnaire temporel, partant de la même configuration qu'en 6.4.4, on perturbe l'amplitude du faisceau de 4 à 4.1 sur l'intervalle de temps $\tau_d = 100000.2$ à $\tau_f = 100000.6$. On calcule alors les courbes de corrélations chaînées (Fig.6.10).

En partant d'un régime stationnaire (forces nulles) jusqu'à $\tau = 100000$, on passe vers un régime transitoire lorsque l'amplitude a augmente jusqu'à 4.1. Les forces se mettent à augmenter jusqu'à un maximum, puis, avec la constance de a à partir de $\tau = 100000.2$, diminuent jusqu'à redevenir nulles. Cet état de fait, qui donc est un autre *régime stationnaire*, cesse lorsque a commence à diminuer à partir de $\tau = 100000.6$: les forces de complexité créent à nouveau la même dent de scie qu'auparavant et retournent à la nullité à partir de $\tau = 100001$, point où l'amplitude a confirmé sa constance. Et on retourne alors à un régime stationnaire.

Les nappes de multicorrélation, montrées à la Fig.6.11, esquissent quant à elles l'effet irréversible de cette perturbation sur la cohérence du système ; on trouve alors $MultStr_I^{Cuml} = 7.4 \cdot 10^{-3}$ et $MultStr_\varphi^{Cuml} = 2.7 \cdot 10^{-3}$.

Il est à noter que ces forces sont moindres que dans le cas précédent ; ceci provient du fait que la présente dynamique se déroule à un temps τ élevé (régime stationnaire) : les taux de divergence sont moins élevés que lorsqu'on

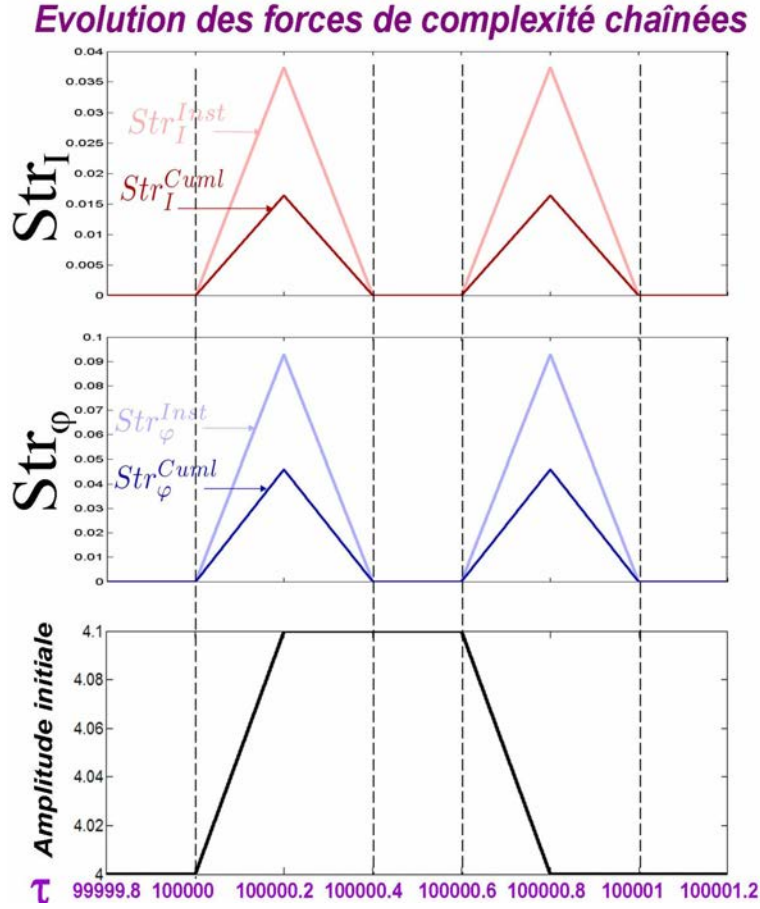


FIG. 6.10 – [Faisceau perturbé en régime stationnaire] Evolutions des forces de complexité chaînées.

commençait en régime transitoire, à $\tau = 0$.

6.5 La description d'un chaos ?

Il est déjà acquis que la dynamique issue de la Méthode de propagation de faisceau est déterministe. Afin de savoir si les autres conditions de dynamique chaotique sont satisfaites, à l'instar du chapitre 5 il a été créé par commodité une interface graphique (cf. Annexe G.2.1) permettant de simuler deux faisceaux gaussiens et de leur appliquer la Méthode du Paradigme Global. L'interface permet ainsi de représenter les évolutions suivant Z des décorrélations instantanées et cumulatives en phase et en intensité ainsi que l'évolution des

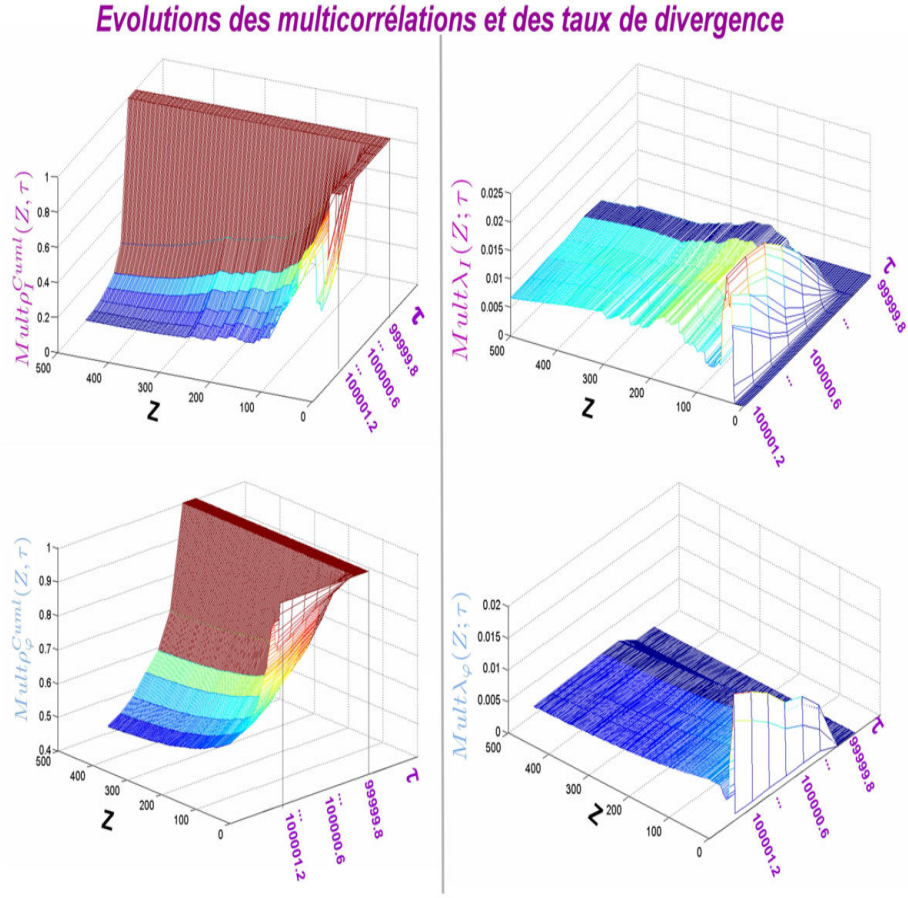


FIG. 6.11 – [Faisceau perturbé en régime stationnaire] Evolutions spatio-temporelles des multicorrélations et des taux de divergence.

taux de divergence. Sont également disponibles les calculs des quatre forces de complexité ainsi que l'approximation en exponentielle inverse des courbes de décorrélations cumulatives, suivant le modèle

$$\begin{cases} \rho_I(Z) = \exp^{\alpha_I Z} \\ \rho_\varphi(Z) = \exp^{\alpha_\varphi Z} \end{cases} \quad (6.42)$$

avec $\alpha_I < 0$ et $\alpha_\varphi < 0$.

6.5.1 Propriétés de stationnarité et de récurrence

Il a été investigué en 6.4 comment la dynamique de solitons évoluait en termes de forces de complexité sur une série temporelle de simulations. On avait alors vu qu'un certain état stationnaire était atteint ; or cet état "stationnaire" est artificiel car il provient en fait de la saturation des termes en exponentielle de l'équation de propagation 2.2 lorsque le temps τ devient grand. Il doit être précisé à nouveau avec force que l'intensité lumineuse *ne dépend pas explicitement du temps*, a fortiori quand celui-ci commence à ne plus influencer sur la résolution de l'équation de propagation.

On touche en fait au coeur de la problématique de la dynamique de solitons photoréfractifs : le chaos est nécessairement un comportement dynamique, se développant ainsi dans le temps. Or, dans notre situation, le temps finit assez vite par ne plus influencer sur la dynamique. Celle-ci ne se déroule plus dans le temps, et pour qu'il ait décorrélation, il faut introduire constamment des perturbations.

Les propriétés de récurrence, quant à elles, appliquées au cas de la filamentation, signifieraient que la dynamique de solitons "repasse" par des configurations proches. Or, comme le montre la Fig.6.12, la dynamique de solitons, sur le long terme, finit assez vite par montrer une certaine dégénérescence : les solitons s'écartent de l'axe médian, provoquant un *appauvrissement de la dynamique* qui fut déjà observé grâce au Programme de Modélisation (cf.5.6.1). La possibilité pour que les solitons reviennent périodiquement aux mêmes endroits est donc très faible et donc les simulations numériques ne présentent pas de propriété de récurrence.

A l'instar du Chapitre 5, on peut affirmer que la dynamique désordonnée des solitons n'est qu'un **phénomène transitoire**, dont la fin est induite peu à peu par l'appauvrissement progressif en solitons.

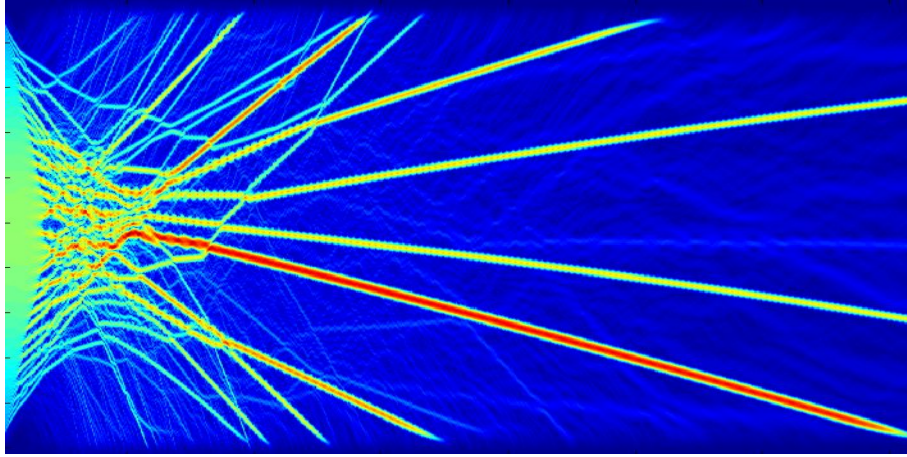


FIG. 6.12 – Le faisceau B_1 , déjà présenté sur la Fig.6.1, se propage ici dans les mêmes conditions, mais sur une distance deux fois plus importante : on peut constater comment la dynamique se dégrade.

6.5.2 Sensibilité aux conditions initiales

L'interface graphique présentée en Annexe G.2.1 permet d'effectuer la régression linéaire

$$\begin{cases} \log(\rho_I(Z)) = \alpha_I Z \\ \log(\rho_\varphi(Z)) = \alpha_\varphi Z \end{cases} \quad (6.43)$$

Le tableau 6.5 montre les résultats des coefficients de corrélation Q_I et Q_φ des régressions linéaires 6.43 ainsi que les valeurs de α_I et α_φ , pour les paires de faisceaux $B_1 \& B_{low}$, $B_1 \& B_2$, $B_1 \& B_3$, $B_1 \& B_4$ et $B_1 \& B_5$, simulés pour divers coefficients non-linéaires NL .

6.5.2.1 La qualité de l'approximation en exponentielle inverse

Il doit être d'abord remarqué que les décorrélations $\rho_{I,\varphi}$ héritées du calcul cumulé des distributions de phase et d'intensité ont un caractère très lisse, ce qui laisse entrevoir une approximation en exponentielle inverse très satisfaisant. Mais les résultats s'avèrent différents en fonction de la variable d'état choisie :

- la qualité Q_I de l'approximation linéaire de la décorrélation ρ_I est dans la

NL	Valeurs de Q_I					Valeurs de Q_φ				
	$B_1 \& B_{low}$	$B_1 \& B_2$	$B_1 \& B_3$	$B_1 \& B_4$	$B_1 \& B_5$	$B_1 \& B_{low}$	$B_1 \& B_2$	$B_1 \& B_3$	$B_1 \& B_4$	$B_1 \& B_5$
-1	97.8%	97.2%	98.8%	96.6%	91.5%	98.8%	98.6%	99.3%	97.4%	76.2%
-2	93.4%	95.0%	94.1%	95.8%	73.1%	94.8%	94.9%	95.0%	92.8%	52.1%
-3	91.2%	92.0%	84.3%	91.1%	86.2%	92.6%	90.3%	88.9%	90.9%	70.4%

NL	Valeurs de α_I (-10^{-5})					Valeurs de α_φ (-10^{-5})				
	$B_1 \& B_{low}$	$B_1 \& B_2$	$B_1 \& B_3$	$B_1 \& B_4$	$B_1 \& B_5$	$B_1 \& B_{low}$	$B_1 \& B_2$	$B_1 \& B_3$	$B_1 \& B_4$	$B_1 \& B_5$
-1	174.3	204.6	244.4	281.0	282.3	288.7	277.1	308.1	414.5	316.9
-2	369.6	440.5	379.3	490.9	187.5	494.1	521.1	520.6	555.8	564.2
-3	406.0	475.0	281.4	375.9	325.5	584.6	530.3	517.2	625.7	728.9

TAB. 6.5 – (*En haut*) Coefficients de corrélation Q_I et Q_φ des régressions linéaires 6.43 ; (*en bas*) valeurs α_I et α_φ des coefficients directeurs de ces régressions.

grande majorité des cas (les exceptions sont locales) au-dessus de 90%, quels que soient le coefficient non-linéaire NL et la variation relative d'amplitude initiale du faisceau $\frac{\Delta a}{a}$: il s'ensuit que le modèle de chute exponentielle de la corrélation est *très bien adapté* ;

- la qualité Q_φ de l'approximation de la décorrélation ρ_φ exhibe quant à elle une qualité mauvaise pour la paire de faisceaux 4&5.

6.5.2.2 Robustesse des $\alpha_{I,\varphi}$ face à l'amplitude de variation des conditions initiales

Les paires de faisceaux d'amplitudes initiales a et $a + \Delta a$ testées présentent une large gamme de variations $\frac{\Delta a}{a}$, de 0.0025% à 25%, soit un facteur 10000.

Les coefficients directeurs α_I de la régression linéaire $\log(\rho_I) = \alpha_I Z$ sont représentés sur le graphique de la Fig.6.13.

Les coefficients de constance (cf. Annexe C.2) valent alors, pour α_I : 83.9% ($NL = -1$), 79.6% ($NL = -2$) et 85.1% ($NL = -3$). Ces valeurs encore assez correctes justifient un caractère approximativement constant. Qualitativement, on peut constater que, pour $NL = -1$, la baisse de α_I est assez peu prononcée lorsqu'augmente la variation d'amplitude initiale de faisceau ; pour

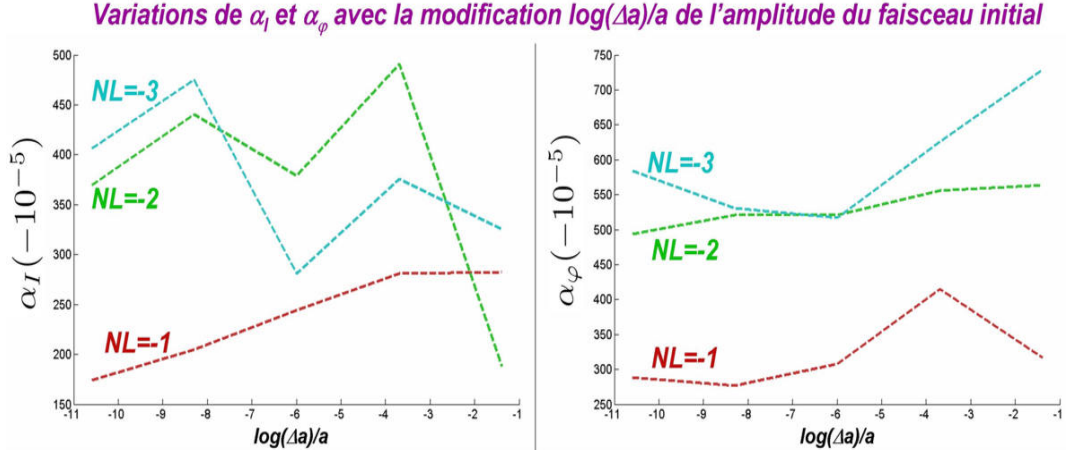


FIG. 6.13 – Valeurs de α_I et α_φ en fonction du logarithme de $\frac{\Delta a}{a}$ pour les trois valeurs de coefficient non-linéaire testées.

les coefficients non-linéaires plus élevés, on ne dégage même pas de tendance générale pour α_I . La constance relative des α_I et cette absence de tendance bien définie montrent que *les variations plus ou moins fortes de conditions initiales ont le même effet sur la raideur de la décorrélation.*

Pour ce qui est de α_φ , les coefficients de constance valent 88.3% ($NL = -1$), 95.6% ($NL = -2$) et 89.3% ($NL = -3$); ces valeurs élevées justifient encore mieux la conclusion du paragraphe précédent. Mais il doit être souligné que ces valeurs sont sujettes à diminution notable lorsqu'on prend en compte des modifications $\frac{\Delta a}{a}$ plus fortes; en effet, en ajoutant $\frac{\Delta a}{a} = 50\%$ dans la série de perturbations, les valeurs précédentes deviennent 80.6%, 77.1% et 86.5%.

Enfin, la Fig.6.6 a montré comment les forces de complexité en intensité restent groupées quelle que soit la grandeur de variation de l'amplitude initiale.

On peut conclure que, *dans le cadre des descriptions du Paradigme Global* (pour l'intensité lumineuse et pour la phase, chacune possédant ses propres avantages descriptifs) la rapidité de la chute exponentielle de la corrélation est **très peu sensible à l'amplitude de variation des conditions initiales.**

6.5.2.3 Comportement linéaire des forces de complexité

Les forces de complexité, qui reflètent la décorrélation de deux paires de faisceaux, sont directement proportionnelles à un paramètre de l'équation non-linéaire, sous réserve de l'approximation $\beta : Nul$. La Fig.6.14 résume comment, à partir de la résolution par la *BPM* de l'équation dynamique 2.2 où figurait NL , on a trouvé les distributions d'intensité lumineuse $I(X_i, Z_j)$ et de phase $\varphi(X_i, Z_j)$; utilisant ces variables d'états dans la Méthode du Paradigme Global, on a créé des estimateurs nommés forces de complexités qui s'avèrent être proportionnelles à NL , permettant un retour à l'équation dynamique originale.

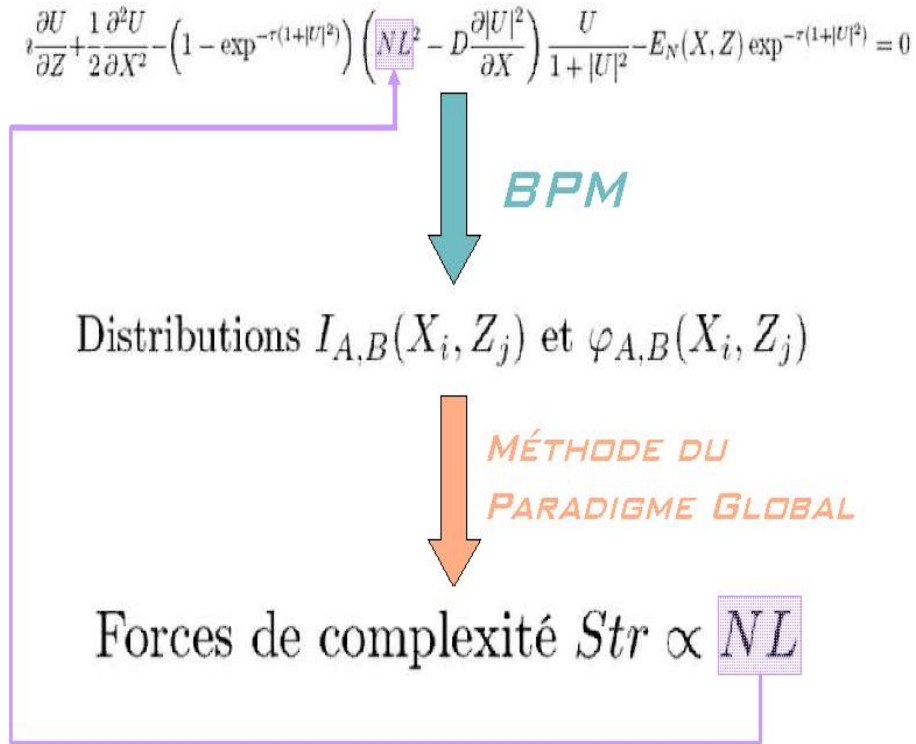


FIG. 6.14 – Retour au coefficient non-linéaire après l'application de deux processus de calcul.

6.5.3 Conclusion

Nous venons donc de voir avec quelle qualité les décorrélatons héritées de la Méthode du Paradigme Global sont assimilables à des exponentielles inverses pour l'intensité lumineuse et, sous certaines réserves, la phase ; cette chute exponentielle s'effectue avec une grande robustesse face à l'amplitude de variations des conditions initiales, celles-ci n'étant finalement que le déclencheur de la décorrélation et la complexité. De part le caractère même de la Méthode du Paradigme Global, ces variations de conditions initiales s'effectuent globalement et aucune discrimination ne s'exerce donc sur celles-ci, contrairement à ce qui a été vu en 5.6.3 ; de plus, la description de la complexité offerte par la Méthode du Paradigme Global est directement reliée à un paramètre de l'équation dynamique initiale.

Ces qualités descriptives évidentes empêchent toutefois de qualifier de chaotique la dynamique ainsi observée, une fois de plus par la non-vérification des propriétés de stationnarité et de récurrence. En effet, les variables dynamiques sur lesquelles sont basées toutes nos analyses ne sont pas fonctions explicites du temps, et par là même *une identification rigoureuse à un phénomène chaotique ne sera jamais justifiée*. La filamentation est donc un phénomène transitoire de manière spatiale et temporelle, très sensible aux conditions initiales, mais qui ne peut être qualifié de chaos.

Chapitre 7

L’adaptabilité à la physique de la méthode du Paradigme Global

«Global equations undergo changes, this is their nature.» MAHMOUD AH-MADINEJAD

Dans ce qui précède, deux Paradigmes importants ont été définis et ont donné lieu à la mise en place de caractérisations. Le Paradigme des Noeuds d’Interactions n’a permis qu’une caractérisation limitée à une population de solitons, moyennant des simplifications importantes et de surcroît à un niveau d’abstraction s’éloignant de la physique. Le Paradigme Global, par contre, directement à partir des simulations numériques, a fourni des caractérisations capitales, car il s’est avéré que les estimateurs de force de complexité qui en proviennent sont en relation directe avec un paramètre physique du cristal, le coefficient non-linéaire. La supériorité du Paradigme Global ne fait alors guère de doute et nous pouvons essayer d’adapter ses méthodes au cas physique, perçu par le biais de films montrant la filamentation d’un faisceau laser dans un cristal photoréfractif.

7.1 La caractérisation du désordre photoréfractif à partir d'un film montrant une filamentation

Cette adaptation, grâce à la souplesse des estimateurs de force de complexité en intensité, est facilement faisable. En effet, ce qui est perçu par la caméra *CCD* qui filme une filamentation n'est rien d'autre que l'intensité lumineuse. L'exploitation des images du film (en niveaux de gris) remplace ainsi l'exploitation des simulations numériques effectuées au chapitre précédent.

Il est à noter que dans ce Chapitre, temps et espace ne sont plus des grandeurs réduites, mais les vraies grandeurs physiques.

7.1.1 Le film expérimental - définition du formalisme

Nous disposons d'un court film de filamentation, obtenu en filmant l'évolution d'un faisceau laser de puissance $40mW$, de waist $80\mu m$ et de longueur d'onde $632nm$ dans un cristal de *SBN* de $10mm$ de long et $4mm$ de large ; le champ appliqué est transversal, de valeur $400kV/m$ (Fig.7.1). Ce film se décompose en 8 images, montrées à la Fig.7.2.

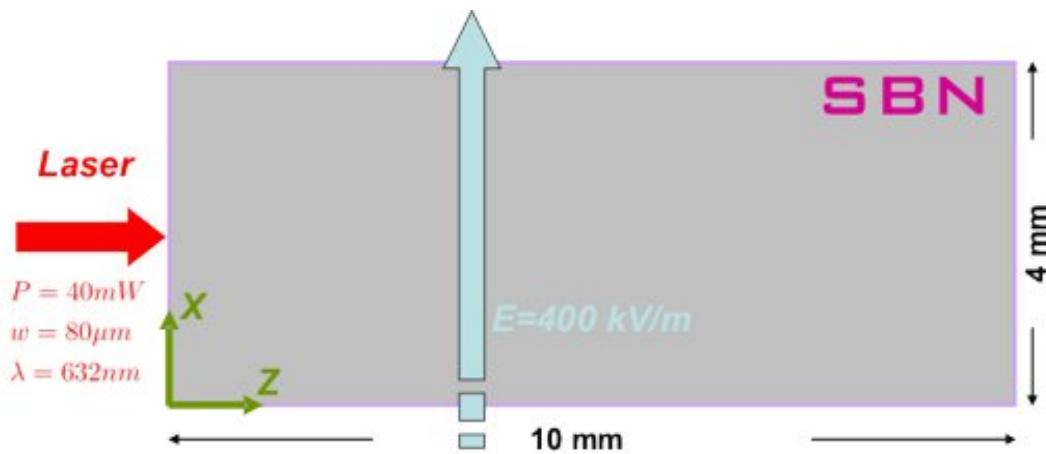


FIG. 7.1 – Schéma expérimental.

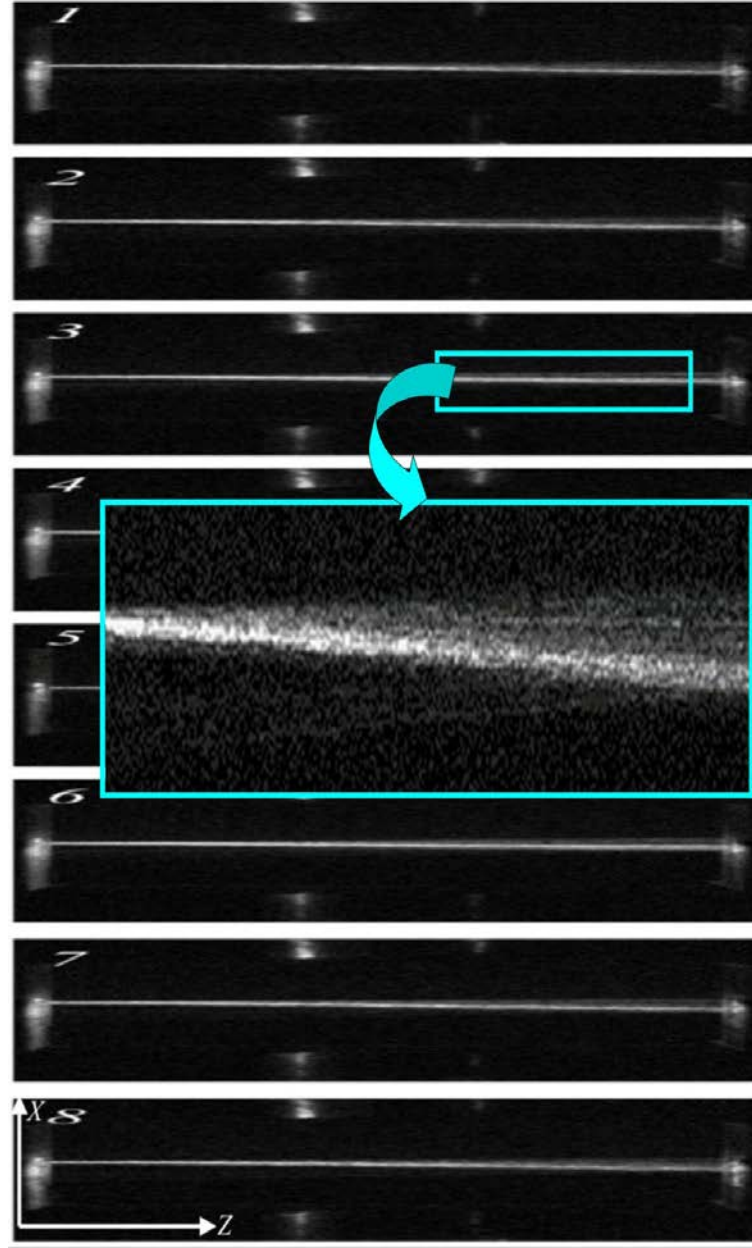


FIG. 7.2 – Séquence de 8 extraites d'un film montrant le comportement d'un laser dans un cristal de *SBN*.

Sur une image Img_θ , nous définissons la valeur d'un pixel de coordonnées (X_i, Z_j) par $P_\theta(X_i, Z_j)$. La résolution des images, 284 pixels suivant X et 384 pixels suivant Z permettent de définir $N = 288$ et $N_z = 384$; le pas h vaudra alors la longueur du cristal divisée par N_z , soit $0.01/384 = 2.60 \cdot 10^{-5} mm$. L'image Img_θ et la suivante $Img_{\theta+1}$ sont séparées par un délai T , qui vaut

0.125s.

7.1.2 Corrélation chaînée

Comme il a été fait en 6.4.2, nous allons premièrement calculer la perte de corrélation d'une image à l'autre. La phase n'étant pas accessible, on n'utilise que les estimateurs en intensité; en remplaçant les distributions d'intensité lumineuse $I_\theta(X_i, Z_j)$ et $I_{\theta+1}(X_i, Z_j)$ par $P_\theta(X_i, Z_j)$ et $P_{\theta+1}(X_i, Z_j)$, nous obtenons les décorrélation en Z_j , instantanée et cumulative de l'image θ à la suivante $\theta + 1$:

$$R_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1}) = \frac{\sum_{i=1}^N (P_\theta(X_i, Z_j) - \overline{P_\theta(Z_j)}) (\overline{P_{\theta+1}(X_i, Z_j) - P_{\theta+1}(Z_j)})}{\sqrt{[\sum_{i=1}^N (P_\theta(X_i, Z_j) - \overline{P_\theta(Z_j)})^2] [\sum_{i=1}^N (\overline{P_{\theta+1}(X_i, Z_j) - P_{\theta+1}(Z_j)})^2]}} \quad (7.1)$$

$$\rho_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1}) = \frac{\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N (P_\theta(X_i, Z_k) - \overline{P_\theta(Z_j)}) (\overline{P_{\theta+1}(X_i, Z_k) - P_{\theta+1}(Z_j)})}{\sqrt{[\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N (P_\theta(X_i, Z_k) - \overline{P_\theta(Z_j)})^2] [\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N (\overline{P_{\theta+1}(X_i, Z_k) - P_{\theta+1}(Z_j)})^2]}} \quad (7.2)$$

avec

$$\overline{P_{\theta, \theta+1}(Z_j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{\theta, \theta+1}(X_i, Z_j)$$

et

$$\overline{\overline{P_{\theta, \theta+1}(Z_j)}} = \frac{1}{jN} \sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N P_{\theta, \theta+1}(X_i, Z_k)$$

Il en découle ainsi deux taux de divergence $L_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1})$ et $\lambda_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1})$ qui s'expriment

$$L_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1}) = \frac{-\log |R_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1})|}{TZ_j} \quad (7.3)$$

$$\lambda_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1}) = \frac{-\log |\lambda_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1})|}{TZ_j} \quad (7.4)$$

7.1. La caractérisation du désordre photoréfractif à partir d'un film montrant une filamentation

Dans ces équations, le temps T est le laps de temps réel entre deux images et Z_j est la distance de propagation *physique* dans le cristal. Ces deux grandeurs $L_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1})$ et $\lambda_I(Z_j; Img_\theta, Img_{\theta+1})$ sont donc homogènes à des $m^{-1}s^{-1}$. Les forces de complexité en intensité lumineuse instantanée et cumulative $Str_I^{Inst}(Img_\theta, Img_{\theta+1})$ et $Str_I^{Cuml}(Img_\theta, Img_{\theta+1})$, de l'image θ à la suivante $\theta + 1$, seront donc exprimées par les équations 7.5 et 7.6 :

$$Str_I^{Inst}(Img_\theta, Img_{\theta+1}) = \frac{-1}{ThN_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log L_I^{Img_\theta, Img_{\theta+1}}(hk) \quad (7.5)$$

$$Str_I^{Cuml}(Img_\theta, Img_{\theta+1}) = \frac{-1}{ThN_z} \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{k} \log \lambda_I^{Img_\theta, Img_{\theta+1}}(hk) \quad (7.6)$$

Il est alors possible de construire l'évolution temporelle des forces de complexités de l'image lors de l'expérience : celle-ci est illustrée à la Fig.7.3.

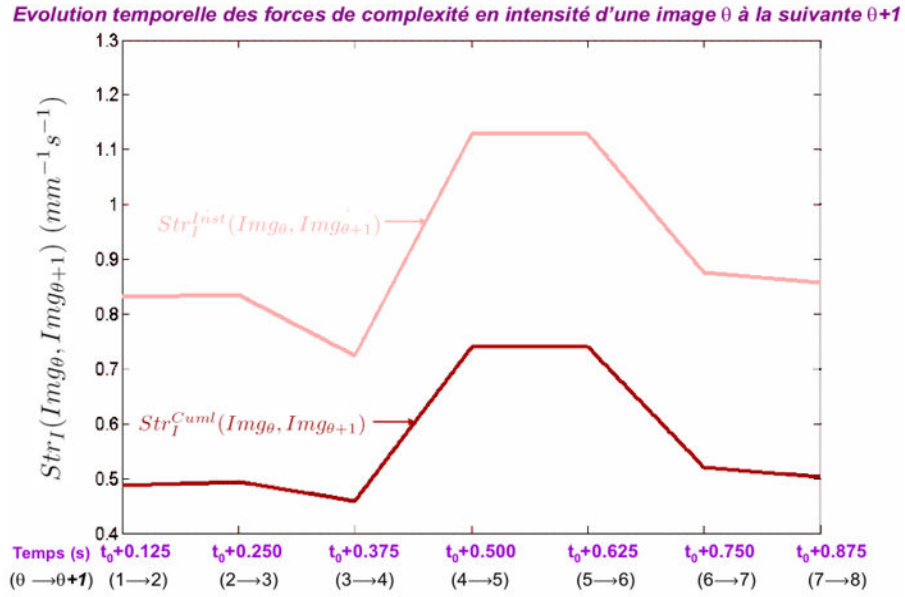


FIG. 7.3 – Evolution temporelle des forces de complexité, d'une image à la suivante ; le temps t_0 désigne le début de l'expérience et le laps de temps T entre deux images vaut $0.125s$.

On peut par exemple y voir que la force de complexité reliant l'image 1 à l'image 2 et l'image 2 à l'image 3 sont à peu-près identiques ; cette force étant

beaucoup moins élevée que celle reliant l'image 4 à l'image 5 ou l'image 5 à l'image 6.

Les forces de complexité obtenues s'échelonnent de $400m^{-1}s^{-1}$ à $1000m^{-1}s^{-1}$. Il est très important de noter que ces valeurs élevées viennent de la petitesse de h . La division par le laps de temps T contribue également à élever les forces. Les calculs de forces faits au chapitre précédent étaient sans dimensions et utilisaient un h plus important, d'où des valeurs moindres.

7.1.3 Multicorrélation

Nous adaptons les méthodes de caractérisation définies en 6.4.3 au cas des images expérimentales afin de quantifier la décorrélation spatio-temporelle perçue sur toute la durée de l'expérience et sur tout le cristal. Directement à partir des équations 6.30 et 6.32 nous définissons ainsi les coefficients de multicorrélations instantané et cumulatif en intensité, calculés en Z_j sur p images d'un film de filamentation en comportant au total W :

$$MultR_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p) = \frac{\sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p \left| P_l(X_i, Z_j) - \overline{P_l(Z_j)} \right|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{i=1}^N \left| P_l(X_i, Z_j) - \overline{P_l(Z_j)} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \quad (7.7)$$

$$Mult\rho_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p) = \frac{\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p \left| P_l(X_i, Z_k) - \overline{P_l(Z_j)} \right|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{k=1}^j \sum_{i=1}^N \left| P_l(X_i, Z_k) - \overline{P_l(Z_j)} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \quad (7.8)$$

Les multi-taux de divergence en Z_j qui en découlent sont :

$$MultL_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p) = \frac{-\log MultR_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)}{(p-1)TZ_j} \quad (7.9)$$

$$Mult\lambda_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p) = \frac{-\log Mult\rho_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)}{(p-1)TZ_j} \quad (7.10)$$

7.1. La caractérisation du désordre photoréfractif à partir d'un film montrant une filamentation

Nous définirons ainsi les multiforces de complexité en intensité comme les moyennes des multi-taux de divergence, réalisées comme avant selon Z et de plus maintenant selon un nombre d'images allant de deux au nombre total W :

$$MultStr_I^{Inst} = \frac{-1}{(W-1)ThN_z} \sum_{p=2}^W \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{(p-1)k} \log \left[\frac{\sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p |P_l(X_i, hk) - \overline{P_l(hk)}|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{i=1}^N |P_l(X_i, hk) - \overline{P_l(hk)}|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \right] \quad (7.11)$$

$$MultStr_I^{Cuml} = \frac{-1}{(W-1)ThN_z} \sum_{p=2}^W \sum_{k=1}^{N_z} \frac{1}{(p-1)k} \log \left[\frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p |P_l(X_i, hj) - \overline{P_l(hk)}|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^N |P_l(X_i, hj) - \overline{P_l(hk)}|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \right] \quad (7.12)$$

Les estimateurs définis ci-dessus sont appliqués à la séquence de 8 images ; les nappes, montrées à la Fig.7.4 (en haut), dévoilent que les données expérimentales sont de mauvaise qualité au début de chaque image et de manière générale pour les quelques images du début : les corrélations augmentent de manière transitoire dans les deux directions jusqu'à des valeurs maximales, puis décroissent. Il est également à noter que la multicorrélation instantanée connaît un bref sursaut sur les Z finaux, la raison devant en être attribuée une fois de plus à un problème de définition des images. C'est pourquoi, sur la Fig.7.4 (en bas), on peut représenter les nappes seulement à partir des valeurs spatiale et temporelle où les multicorrélations diminuent enfin, jusqu'à un Z final qui exempt le second problème de résolution.

Nous représentons alors les évolutions avec Z et le temps des multi-taux de divergence $MultL_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$ et $Mult\lambda_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$ sur la Fig.7.5, en centrant celles-ci sur les zones exemptes de problèmes de résolution, comme sur la Fig.7.4.

Les multiforces de complexité, calculées comme valeurs moyennes des multi-taux de divergence hors problèmes de résolution, valent donc alors

$$\boxed{MultStr_I^{Inst} = 267.0 \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}}$$

et

$$\boxed{MultStr_I^{Cuml} = 95.5 \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}}.$$

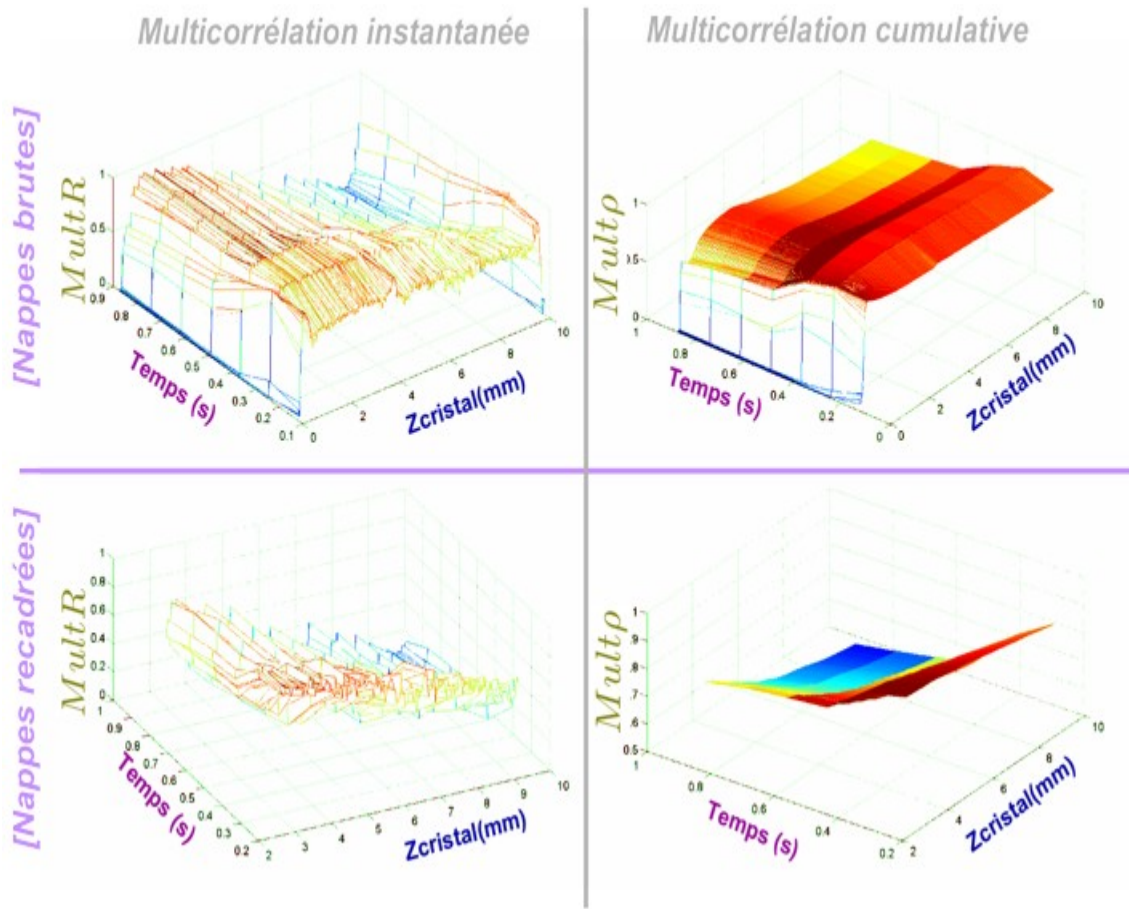


FIG. 7.4 – Représentation des nappes de multicorrélations instantanée $MultR_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$ et cumulative $Mult\rho_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$: (en haut) "brutes"; (en bas) hors problèmes de résolution du film.

Ces valeurs sont moindres que dans le cas de la corrélation chaînée, car, dans le cadre de la multicorrélation, on a affaire à des décorrélations moins abruptes que si l'on procédait image par image.

En somme, la méthode de multicorrélation exprime de façon tangible le désordre spatial de la dynamique de solitons photoréfractifs comme un désordre spatio-temporel.

7.2. Vers une possible estimation du coefficient non-linéaire à partir d'un film de filamentation ?1

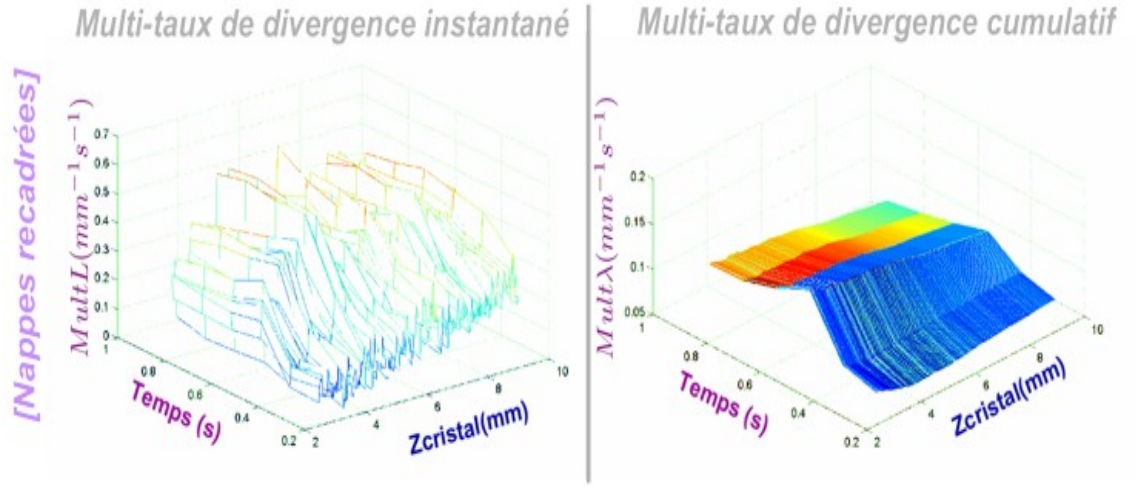


FIG. 7.5 – Représentation des multi-taux de divergence instantané $L_I(Z_j; \text{Img}_1, \dots, \text{Img}_p)$ et cumulatif $\lambda_I(Z_j; \text{Img}_1, \dots, \text{Img}_p)$ hors problèmes de résolution.

7.2 Vers une possible estimation du coefficient non-linéaire à partir d'un film de filamentation ?

Il a été vu dans le Chapitre 6 l'étroite relation qui existait entre la force de complexité et le coefficient non-linéaire. On peut alors légitimement se demander si, à partir d'un film de filamentation, on ne pourrait pas remonter au coefficient non-linéaire grâce à la force de complexité en intensité. La question est plus problématique qu'il n'y paraît de prime abord.

7.2.1 Le problème de la variation du coefficient non-linéaire

La propriété importante dégagée par le Chapitre 6 pouvait se résumer de la manière suivante : *deux simulations numériques aux conditions initiales très proches, effectuées avec le même coefficient non-linéaire NL , divergeront avec une force de complexité proportionnelle à NL* . Or dans la réalité physique, est-on justement assuré de la constance de ce coefficient ? Il est principalement

dépendant du champ électrique appliqué et, ne connaissant pas les conditions expérimentales d'un film de filamentation, nous ne sommes déjà pas en mesure de connaître l'état du coefficient non-linéaire au cours des images. La propriété ci-dessus ne s'applique donc pas a priori et il est nécessaire de revenir aux simulations numériques, afin de voir s'il existe une relation entre des variations de NL d'une image à l'autre et la variation des forces de complexité.

7.2.2 Les évolutions conjointes des forces de complexité et du coefficient non-linéaire

Afin de représenter un tel graphique, nous nous proposons, à l'aide d'une interface graphique Matlab, de simuler par la *BPM* un film de filamentation où le champ électrique appliqué sur le cristal subit une variation, d'image en image. L'interface permet alors de regarder le résultat sous forme de film et de représenter les évolutions conjointes, d'une image à l'autre, du coefficient non-linéaire et des forces de complexité cumulatives en intensité et en phase. On peut voir cette interface graphique en Annexe G.2.2.

On se propose alors de se rapprocher le plus possible du film de filamentation présenté plus haut en simulant un cristal de mêmes dimensions avec le même champ électrique statique de $400kV/m$, perturbé une certaine composante sinusoïdale d'amplitude $4kV/m$. On prend la période de celui-ci assez rapide pour que NL présente des variations exhaustives et on réalise 86 images de simulations, afin d'estimer le plus précisément possible la relation entre NL et les forces. A titre d'exemple, la Fig.7.6 montre alors côte à côte une image du film expérimental et une image de simulation ainsi obtenue. On choisit la valeur absolue de la variation de NL , car on trouve les mêmes forces que NL augmente d'une image à l'autre, ou qu'il diminue de la même valeur.

7.2. Vers une possible estimation du coefficient non-linéaire à partir d'un film de filamentation ?1

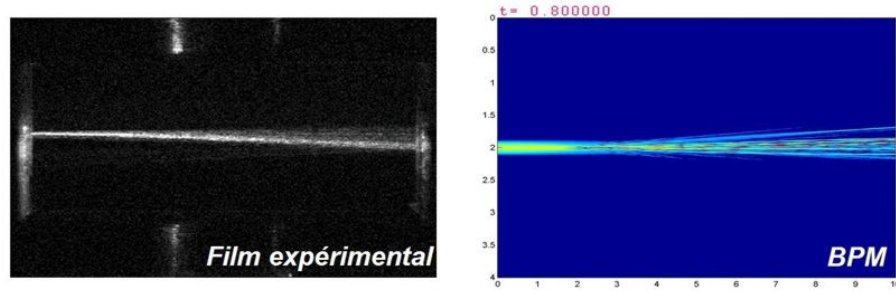


FIG. 7.6 – Exemples d'images du film expérimental et de la *BPM* dans laquelle on se rapproche le plus possible des conditions expérimentales du film.

7.2.3 Discussion : la cohésion entre les forces de complexité et et le coefficient non-linéaire

La Fig.7.7 représente ainsi l'évolution conjointe de ces grandeurs, normalisées chacune par-rapport à leur maximum respectif.

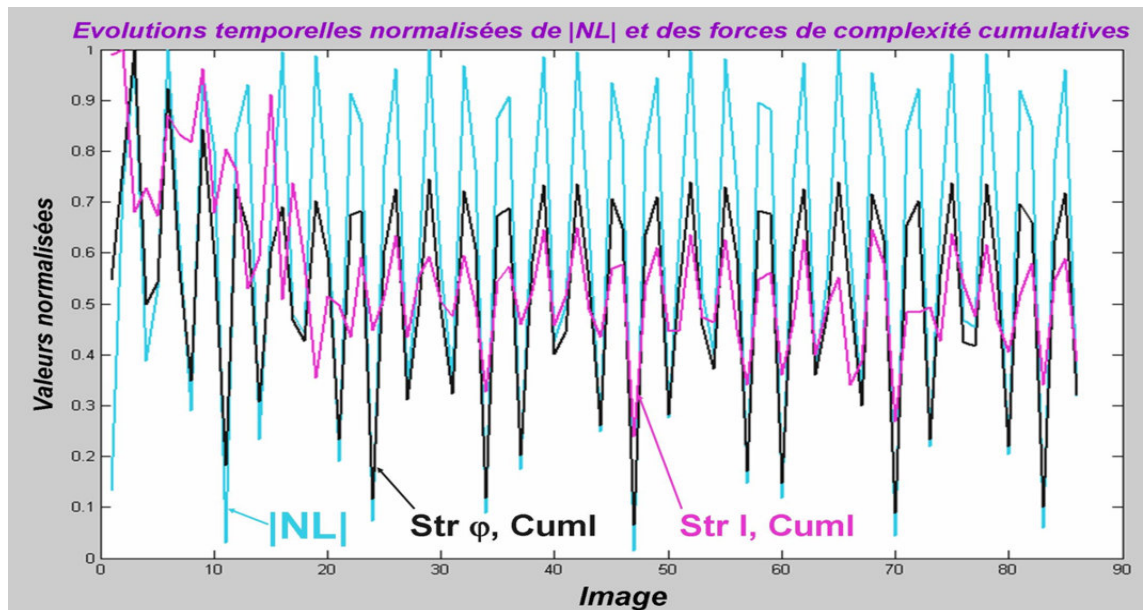


FIG. 7.7 – Evolution d'une image à l'autre de $|NL|$ et des forces de complexité, normalisés par-rapport à leur maximum respectif.

Il en ressort que l'évolution de la force de complexité en phase suit très bien celle du coefficient linéaire; le coefficient de corrélation entre ces deux variables est de 95.4%, ce qui montre que, disposant uniquement de l'évolution

de Str_{φ}^{Cuml} , on peut estimer avec une excellente précision en valeur absolue, l'évolution normalisée du coefficient non-linéaire. De l'image i à l'image suivante j , force de complexité en phase et coefficient non-linéaire sont donc reliés par :

$$Str_{\varphi}^{Cuml}(i \rightarrow j) \propto |NL_j - NL_i| \quad (7.13)$$

Malheureusement, la relation entre NL et la force de complexité en intensité n'est que de 33.8% : on peut constater que cette force, bien qu'elle suive NL aux valeurs faibles de celui-ci, ne monte pas suffisamment haut aux valeurs élevées, ce qui rend la corrélation entre les deux très faible. Il en ressort qu'aucune estimation de la variation de $|NL|$ n'est raisonnablement possible à partir de Str_I^{Cuml} .

7.3 La description d'un chaos ?

Etant donnée la faible qualité des données expérimentales, il n'est guère possible de se prononcer sur la vérification ou non des critères de chaos explicités en 2.3 ; par exemple, bien que nous soyons parvenus à esquisser des décorrélations correctes, il serait par contre malaisé de déterminer un quelconque caractère récurrent dans les images présentées.

Il est nécessaire de préciser les différences entre ces données expérimentales et les séries de simulations caractérisées au Chapitre précédant ; dans le cadre expérimental figure le phénomène de *bending*, où les solitons prennent des trajectoires incurvées vers l'extérieur. Dans toutes les simulations effectuées, nous avons négligé ce phénomène en fixant le coefficient de diffusion D (cf. A) nul. Plus important encore, l'application d'un champ électrique fluctuant et d'un faisceau laser non stable dans le temps a entraîné des *modifications permanentes* des conditions dynamiques (coefficient non-linéaire et faisceau initial, de surcroît de manière inconnue). Ce que nous n'avons pas dans le cadre de la modélisation par la *BPM* ; bien que l'on ait en 7.2.2 caractérisé

l'évolution temporelle de la décorrélation lorsque fluctuait le coefficient non-linéaire.

Il est possible de réaliser, sur la nappe de multicorrélation en intensité cumulative, une approximation en exponentielle inverse qui s'exprime

$$Mult\rho_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p) = \exp^{\alpha \times Z_j \times p} \quad (7.14)$$

avec $\alpha < 0$. Les coefficients de corrélation de la régression linéaire

$$\log Mult\rho_I = \alpha Z \times p$$

sont calculables en gardant l'une ou l'autre des variables Z et p constante. Le coefficient de corrélation $\sigma_{\log Mult\rho, p}(Z_j)$ exprimera ainsi la qualité de l'approximation linéaire entre $\log Mult\rho$ et le temps en se plaçant à la coordonnée Z_j du cristal ; $\sigma_{\log Mult\rho, Z}(p)$ exprimera lui la qualité de l'approximation linéaire entre $\log Mult\rho$ et Z et le temps $\tau \times p$. Ces qualités sont représentées à la Fig.7.8.

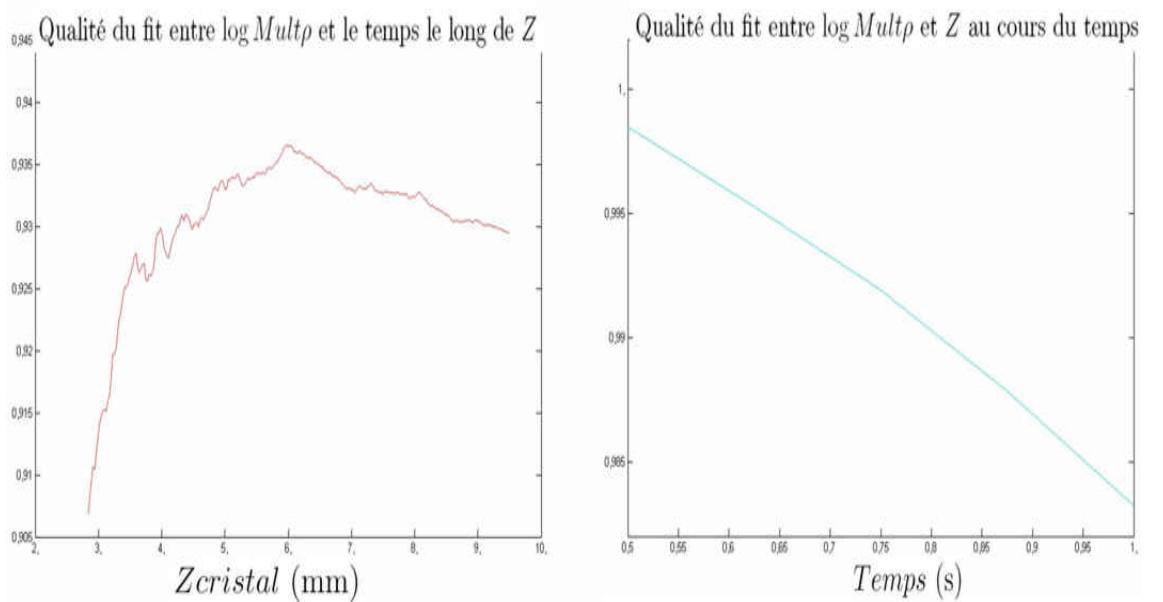


FIG. 7.8 – Qualités de l'approximation de $Mult\rho_I(Z_j; Img_1, \dots, Img_p)$.

Ces coefficients de corrélation sont très satisfaisants, surtout $\sigma_{\log Mult\rho, Z}(p)$ qui est supérieur à 98% : on peut en déduire que la perte de cohérence le long

de Z , c'est-à-dire spatiale, se conforme mieux à une exponentielle inverse que la perte de cohérence temporelle : ce désordre, que nous venons de décrire alternativement de façon spatio-temporelle, est alors avant tout un désordre spatial ; et la fluctuation permanente dans le temps des conditions expérimentales permet de conférer à la dynamique de solitons photoréfractifs observée dans la réalité un incessant désordre, qui là encore ne peut être rigoureusement qualifié de chaotique stricto sensu.

Chapitre 8

Le désordre de solitons photoréfractifs vu comme une ontologie de la phase

«La seule certitude que j'ai, c'est d'être dans le doute.» PIERRE DES-PROGES

8.1 La phase : l'"autre" variable d'état

8.1.1 L'autre versant des simulations

Les simulations de propagation de faisceau proviennent de la résolution numérique de l'équation 2.2. L'algorithme de simulation retourne des données complexes, dont le module fournit l'intensité lumineuse en chaque point échantillonné du cristal. L'autre manière d'extraire de l'information exploitable des ces résultats est de calculer la phase, une variable d'état dont la spécificité n'a été jusque là que peu mise en valeur. Il faut alors réaffirmer que la théorie de la dynamique des solitons établit que l'issue d'une interaction de solitons dépend de la phase. Ainsi est-il légitime de se demander si la phase pourrait décrire de

manière plus exhaustive que l'intensité lumineuse la dynamique solitonique.

L'exemple suivant montre à ce titre que l'intensité lumineuse échoue *qualitativement* à expliquer l'issue inhabituelle d'une interaction.

8.1.2 Exemple - influence à grand angle

La simple dichotomie établie *ab initio* (angle d'incidence trop fort implique ignorance des solitons l'un pour l'autre) ne semble plus être aussi rigoureuse que cela ; des solitons se rencontrant avec un angle très important (qui semblerait mettre hors de considération toute interaction entre eux) peuvent subir quand même une perturbation, comme le prouve la simulation de la figure 8.1 à gauche.

Le soliton d'intensité 20, le moins intense, a en effet été perturbé par le soliton d'intensité 100 suite à la collision : il produit un soliton plus faible. Ce résultat est en contradiction avec ce qui est affirmé dans [28], où "les collisions à grands angles sont élastiques et les solitons ne sont pas affectés par la collision". Krolkowski et al. affirment ensuite que cette situation change pour des angles d'interaction faibles, inférieurs à 1° .

Il semblerait que cette influence à grand angle soit en fait causée par la dissymétrie des intensités ; en effet, la même simulation pour des intensités identiques (i.e. une configuration totalement symétrique) montre que les solitons n'influent pas l'un sur l'autre, comme le montre la même figure à droite.

Ces images qui ne montrent que l'intensité lumineuse ne sont a priori pas suffisantes pour expliquer les raisons de ce comportement ; la connaissance de la phase en chaque point du cristal permettrait-elle d'apporter de nouveaux éléments d'explication ? C'est ce à quoi nous allons maintenant répondre.

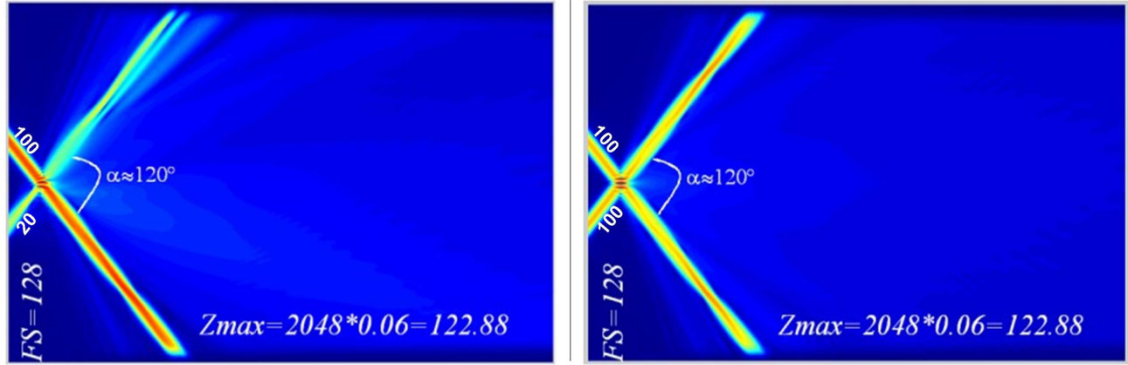


FIG. 8.1 – Collision à grand angle de deux solitons : (à gauche) d'intensités différentes ; (à droite) d'intensités identiques.

8.2 Cartes de phase

8.2.1 L'obtention par filtrage d'une carte lisible

Partant du signal complexe de l'amplitude en chaque point du cristal, on est en mesure de déterminer la phase. Celle-ci est calculée en utilisant la fonction "angle" de Matlab et on obtient ainsi une carte de la phase ; néanmoins, ce calcul direct pose problème pour la lisibilité de cette carte. En effet, les zones étendues où l'intensité lumineuse est faible possèdent une phase qui elle ne l'est forcément pas : l'information sur la phase des solitons est donc "noyée" par de l'information inutile. Il est par conséquent nécessaire de filtrer l'information pour ne garder que celle qui nous intéresse. Pour ce faire, en chaque point où l'intensité lumineuse est inférieure à un certain seuil, la phase est mise à zéro. Le résultat de cette manière de procéder est présenté sur la Fig.8.2, qui présente cartes de phase non filtrée et filtrée : on distingue alors parfaitement la phase des solitons.

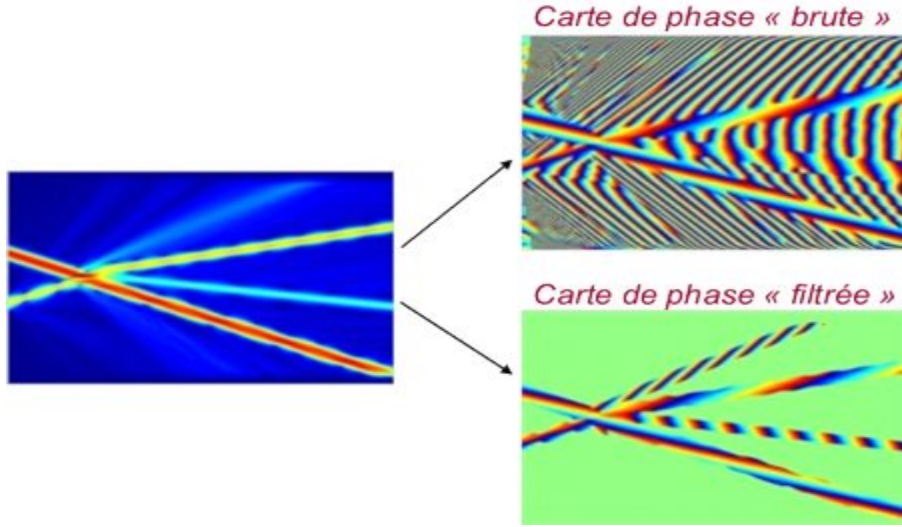


FIG. 8.2 – Une simulation et les cartes de phase brute et filtrée résultantes.

8.2.2 Considérations générales sur la phase de solitons variés

Lors de la création d'un profil d'entrée, il est possible d'agir sur quatre paramètres : phase initiale, angle, intensité et largeur. Il est intéressant de regarder comment ces paramètres agissent sur le comportement de la phase lors de la propagation des solitons. La phase initiale n'induit qu'un décalage dans la suite de la propagation et n'est donc que peu d'intérêt (ce n'est valable que pour des études de quelques solitons ; pour les filamentations, ce décalage sera perturbateur, cf. 8.2.3.3), tout comme la largeur du soliton, qui est créée de manière artificielle. On ne considérera ainsi que l'influence de l'intensité et de l'angle. La correspondance entre la valeur de la phase et la couleur sur la carte de phase est présentée sur la Fig.8.3.

La constante de propagation du soliton, qui représente la vitesse de variation de la phase, est fonction de l'intensité du soliton r [16] :

$$\nu = -\frac{NL^2}{r} \ln(1+r) + \frac{NL^2}{r} [E_i(\tau(1+r)) - E_i(-\tau)] + \frac{1}{\tau r} [e^{-\tau(1+r)} - e^{-\tau}] \quad (8.1)$$

où Ei est la fonction exponentielle intégrale et τ le temps réduit (cf. Annexe

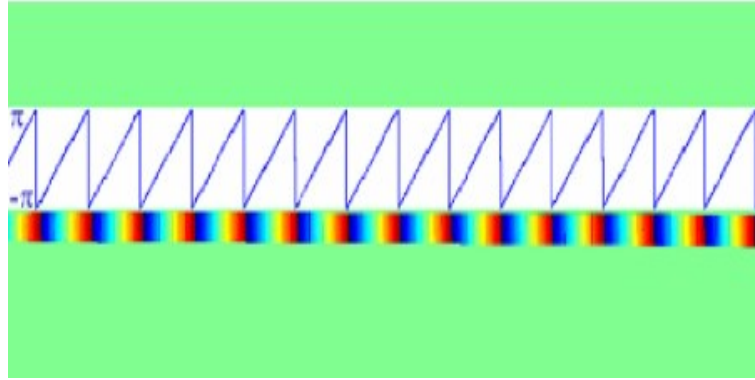
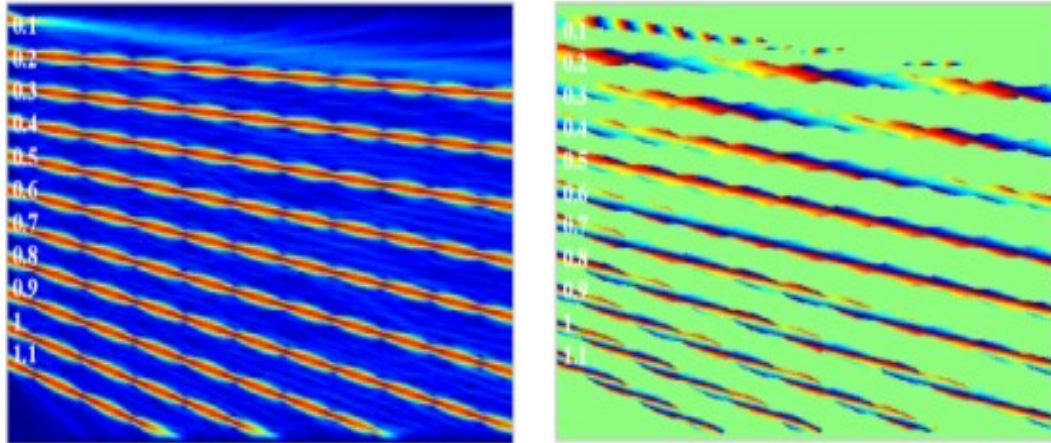


FIG. 8.3 – Correspondance couleur/"angle" sur une carte de phase.

A). On injecte des solitons de même intensité ($r = 20$) et d'angles croissants. Les nombres attribués aux solitons ne désignent pas l'angle physique mais l'argument α dans $e^{i\alpha x}$, quantité par laquelle est multiplié le profil du soliton pour obtenir son inclinaison ; les cartes de phase présentées sur la figure 8.4 sont alors obtenues (rapport largeur/hauteur de l'image $(2048 \times 0.06)/256 = 0.48$).

FIG. 8.4 – Influence de l'argument α sur la phase.

On constate que, quand l'angle est important, la phase du soliton revêt une apparence "torsadée" : la phase ne varie plus seulement le long du soliton, elle varie maintenant de manière transversale à celui-ci. On peut voir que les variations longitudinales de la phase s'accroissent, comme si le soliton baissait en intensité. L'angle augmentant, les zones de phase constante peuvent être

comparées aux brins d'une corde (le soliton) que l'on tord de plus en plus. Cet effet est beaucoup moins net avec une intensité plus faible ($r = 4$), comme le montre la figure 8.5.

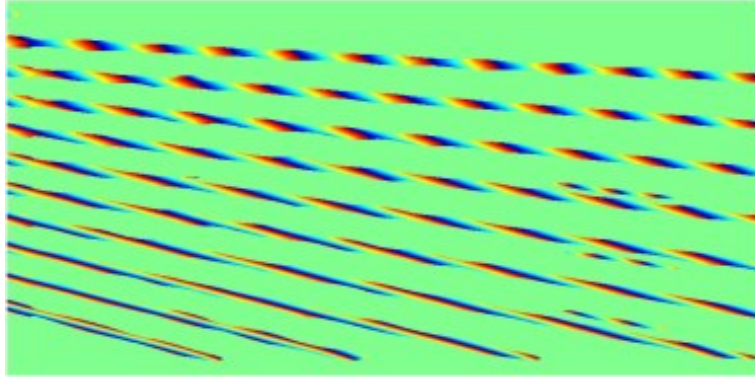


FIG. 8.5 – Allure de la phase pour une intensité plus faible.

8.2.3 Cartes de phase de diverses filamentations

Les propriétés générales de la phase par rapport aux caractéristiques physiques des solitons ayant été dégagées, il est maintenant temps de considérer le cas beaucoup plus complexe de la filamentation, qui produit de nombreux solitons d'intensités et d'inclinaisons variées.

8.2.3.1 Filamentation de faisceaux gaussiens

La Fig.8.6 montre la filamentation d'un faisceau gaussien de profil d'équation $20 \exp^{-(X/2350)^2}$, se propageant dans un cristal de coefficient $NL = -3.5$; la fenêtre transversale est de 128 et le faisceau se propage de 0 à 245.76 (rapport largeur/hauteur de la simulation : $245.76/128=1.92$).

La phase du faisceau, au début nulle, augmente peu à peu lors de sa sur-focalisation jusqu'à atteindre une phase de π , dénotée par la large zone rouge. Le faisceau filamente ensuite, dans des zones qui correspondent pour la phase à un passage en $-\pi$ (dans les deux quadrants inférieurs du cercle trigonométrique) : en effet la carte montre clairement ceci par un passage du rouge au

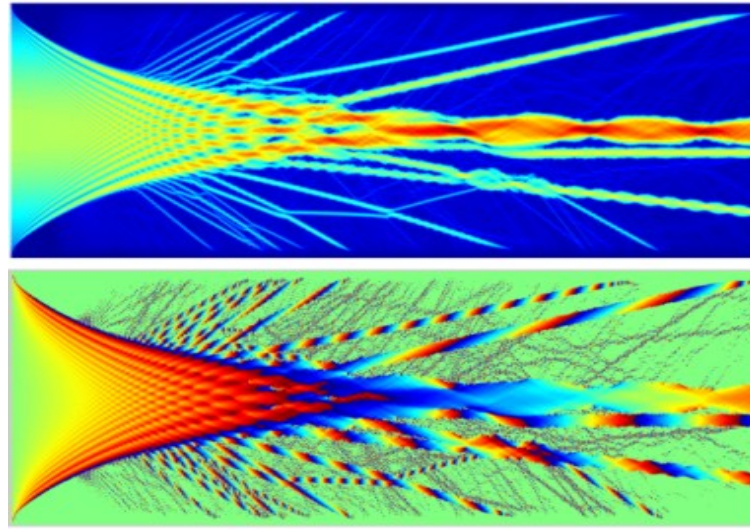


FIG. 8.6 – Filamentation d'un faisceau gaussien et carte de phase correspondante.

bleu. Et ainsi la filamentation crée-t-elle ces oscillateurs nommés solitons.

Plusieurs types de solitons prennent forme. Sur l'axe central se propage avec une inclinaison (quasi) nulle un soliton très large et intense dont la phase varie très lentement. Il est flanqué de quelques autres solitons moins larges et moins intenses, plus inclinés et dont la phase varie plus vite. Ils émergent de la zone finale de la surfocalisation.

Les autres solitons bordent le faisceau qui se resserre ; ils possèdent une inclinaison importante et une intensité faible et leur phase varie donc de manière rapide, présentant un aspect légèrement torsadé.

Enfin, les solitons les moins intenses sont à peine visibles sur la carte d'intensité ; ils le sont en revanche beaucoup plus sur la carte de phase. Ainsi peut-on remarquer que ces solitons fins possèdent une riche dynamique collisionnelle, pour plusieurs raisons :

- ils sont en nombre important ;
- leur très faible intensité induit une phase qui varie de manière très rapide ;
- ils restent la plupart du temps "prisonniers" des solitons plus intenses cités plus haut, ce qui entraîne un nombre important de collisions.

8.2.3.2 Filamentation d'un profil constant

La figure 8.7 montre la filamentation d'un profil d'intensité constante 10 (rapport largeur/hauteur de la simulation=1.92).

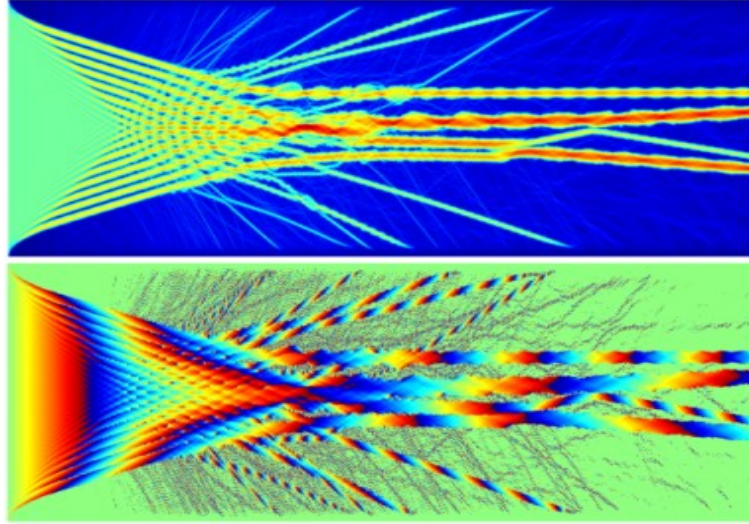


FIG. 8.7 – Filamentation d'un faisceau de profil constant et phase correspondante.

Ici, on voit nettement se créer les solitons qui sont amenés à converger par le phénomène d'autofocalisation. Ils forment alors un réseau de noeuds d'interactions en forme de losange (Fig.8.8), qui conditionne toute la suite de la dynamique.

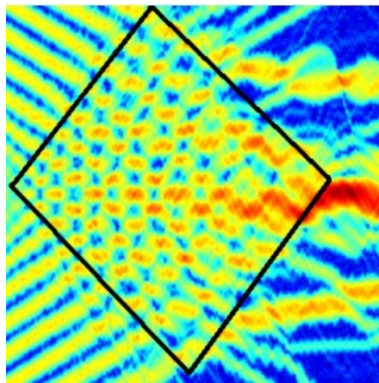


FIG. 8.8 – Réseau "losange".

Par le jeu de nombreuses interactions émerge sur l'axe central, comme pré-

cédemment, un soliton très large et très intense, accompagné de quelques solitons moins importants. Les solitons qui ressortent avec une certaine inclinaison correspondent à ceux qui ont subi le moins d'interactions dans le losange. Pour ce qui est des phases, l'évolution pour ce profil constant est très nette : le front de phase, linéaire, passe de 0 à π (du vert vers le rouge sur la carte de phase) puis $-\pi$ (en bleu), ce qui correspond à la création des solitons.

On peut se demander alors ce qu'il advient lorsque la phase du profil initial du faisceau est avancée de 0 vers une certaine valeur.

8.2.3.3 L'effet d'un décalage en phase

Partant des profils gaussien et constant utilisés en 8.2.3.1, on leur attribue un déphasage de $\frac{2\pi}{3}$ et on compare les cartes de phase (Fig.8.9).

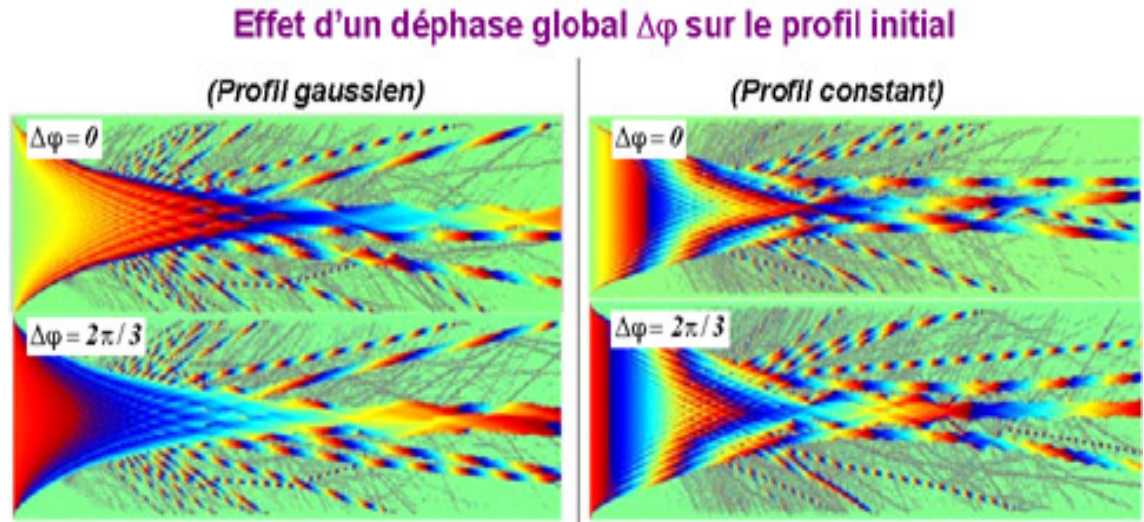


FIG. 8.9 – L'effet d'un décalage en phase global sur le profil initial du faisceau.

Pour ce qui concerne le profil gaussien, on remarque que le motif de la surfocalisation et de l'émergence des solitons n'est pas modifié ; seules les phases des solitons sont décalées. Néanmoins, la dynamique est *perturbée* sous le soliton central : celui-ci se couple avec le soliton inférieur, tandis que les deux solitons en-dessous d'eux ne se couplent plus. Le cas du profil constant montre une dynamique est cette fois sensiblement modifiée ; les couplages qui apparaissent

ou disparaissent sont le fait de modifications des phases relatives des solitons qui interagissent. Pourtant, si la phase des solitons ne fait qu'être "translatée", pourquoi a-t-on des disparités de phase là où il n'y en avait pas et inversement ? La cause doit en être attribuée au *réseau de noeuds*, véritable machine à amplifier un bruit numérique qui tire son origine du déphasage constant introduit au départ.

Qu'arrive-t-il si l'intensité initiale du faisceau est légèrement modifiée ?

8.2.3.4 L'effet d'une modification légère en intensité

On fait passer l'intensité de la gaussienne de 20 à 20.01 et celle du profil constant de 10 à 10.01 ; les cartes de phase résultantes sont alors comparées (Fig.8.10).

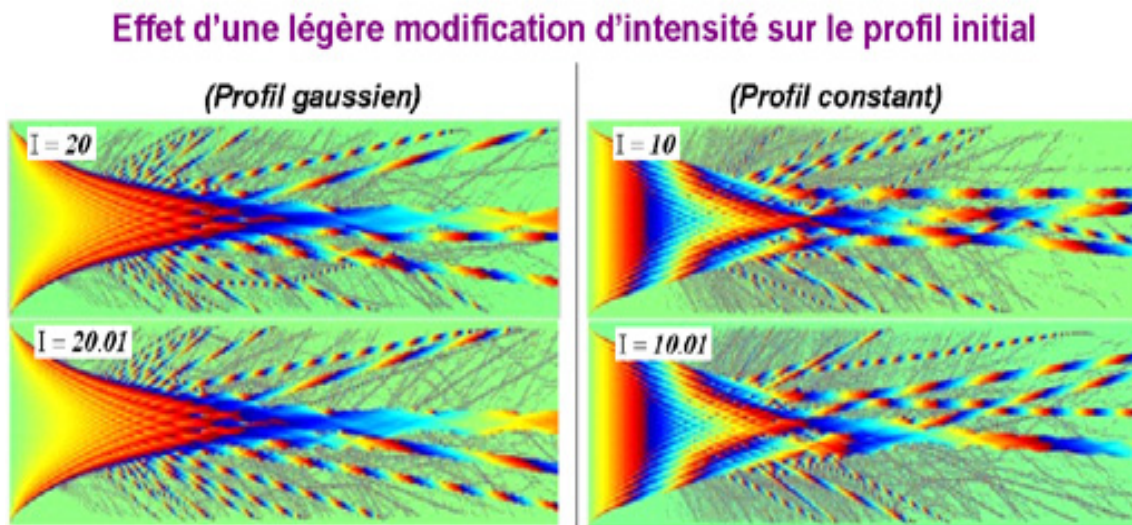


FIG. 8.10 – L'effet d'une légère modification d'intensité sur le profil initial du faisceau.

La dynamique est là encore sensiblement modifiée pour l'un et l'autre profil ; les cartes de phase permettent là encore d'apprécier précisément les causes des changements d'interaction par les légers déplacements des phases induits.

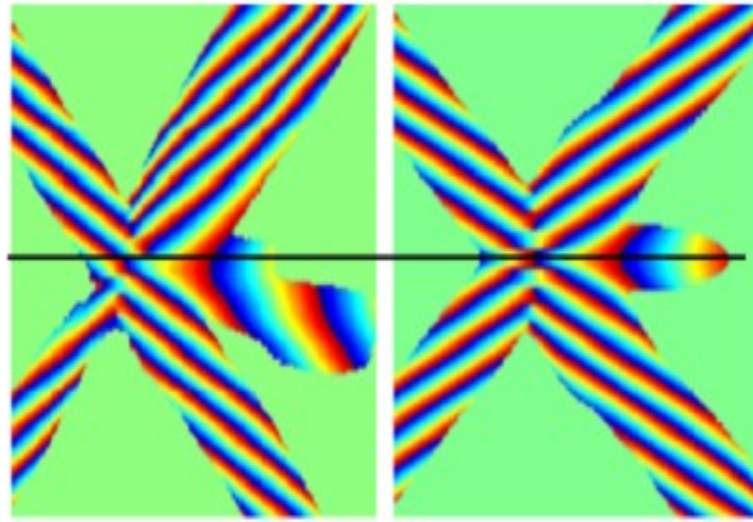


FIG. 8.11 – Comparaison des phases dans les zones d’interaction pour le cas dissymétrique (à gauche) et symétrique (à droite).

8.3 La phase comme le meilleur descripteur de la dynamique

8.3.1 Influence à grand angle : explication par la phase

Il est maintenant temps de répondre à la question posée en 8.1.1 , à savoir si la carte de phase pouvait expliquer pourquoi deux solitons d’intensités différentes se croisant avec un angle très grand interagissent tout de même. Sur la Fig.8.11, on compare les cartes de phase pour les deux situations (dissymétrique/symétrique).

Dans le cas symétrique, les solitons se rencontrent parfaitement en phase et se traversent ; dans le cas dissymétrique, le contact se fait sur des phases différentes. Alors que le soliton le plus intense ressort sans modification, le soliton d’intensité moindre semble augmenter de taille après la collision (pour après en former deux).

Ainsi vient-on d’attribuer la cause de cette influence à la phase ; on peut alors légitimement se demander si la phase pourrait servir de base à toute

explication ou caractérisation du désordre. Pour y répondre il est nécessaire de résumer les propriétés de la phase en précisant bien le contexte (essai de solitons ou filamentation).

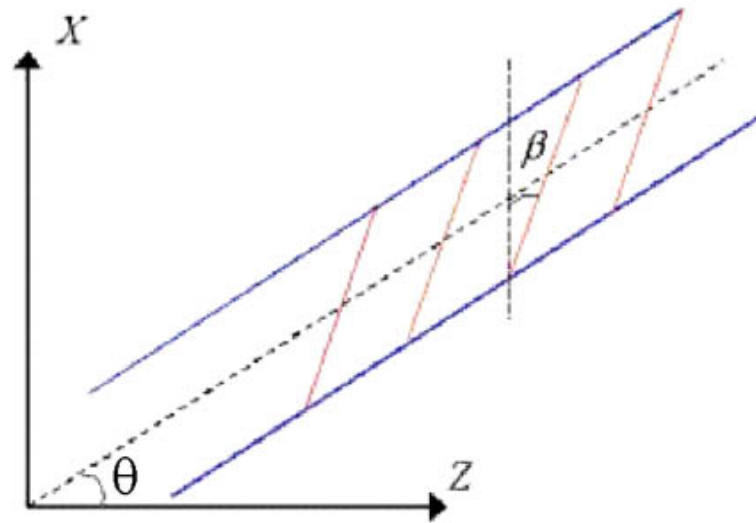
8.3.2 Les propriétés contextuelles de la phase

Les simulations d'interactions de solitons et les simulations de filamentation diffèrent d'abord par les angles pris par les solitons. Dans le premier cas, ces angles sont très importants et montrent une phase qui se "torsade" ; or, dans la filamentation, les angles d'inclinaison des solitons créés sont beaucoup plus faibles, en dépit des apparences (ne pas oublier les rapports largeur/hauteur dans les deux cas : 0.48 pour le premier et 1.92 pour le second).

D'autre part, les intensités mises en jeu sont très différentes dans les deux cas : dans les simulations de solitons, ceux-ci sont aussi intenses que l'on veut, alors qu'une filamentation produit une majorité de solitons faibles, en particulier ceux qui possèdent une inclinaison.

Or, il a été vu en 8.2.2 que l'effet de torsion (donc de "compression" de la phase) était moindre pour des intensités faibles et des solitons peu inclinés ; les simulations de filamentation présentées montrent ainsi des solitons dont les phases ne sont jamais torsadées au point d'évoquer une corde, l'intensité et l'inclinaison mises en jeu étant trop faibles. Par contre, on peut constater une très bonne adéquation entre l'inclinaison du soliton et l'inclinaison du front de phase en lui : plus le soliton est incliné, plus le front de phase est incliné par rapport à la direction transversale (Fig.8.12).

En conclusion, l'allure de la phase (inclinaison par rapport à la direction transversale, rythme de variation) reflète **exhaustivement** l'état du soliton (inclinaison dans le cristal et intensité).

FIG. 8.12 – Inclinaison β du front de phase et direction θ du soliton : $\theta = \beta$.

8.3.3 La forte cohésion entre les estimateurs de force de complexité de phase et le coefficient non-linéaire

Les graphiques de la Fig.6.3 présentaient les évolutions des quatres forces de complexité (en phase et en intensité, instantanées et cumulatives) ; il peut y être remarqué que l'évolution des forces de complexité en phase (pour néanmoins des valeurs raisonnables de modifications de conditions initiales) se fait sans à-coup, de manière lisse, contrairement à celle des forces de complexité en intensité qui en comparaison très erratique. La variable phase peut être ainsi considérée comme **étroitement reliée au coefficient non-linéaire NL** , que celui-ci reste statique entre les deux simulations comme dans les exemples du chapitre 6, ou qu'il varie, comme le résume l'équation 7.13.

8.4 La complexité de la dynamique de solitons photoréfractifs comme ontologie de la phase

Le Paradigme des Noeuds d'Interactions amenait à voir la filamentation d'un faisceau comme un réseau spatial de noeuds. Les études faites ci-dessus

ont permis de mettre en évidence les qualités descriptives primordiales de la phase dans la dynamique du système. On a également démontré le rôle de la phase dans le processus complexe qu'est une interaction. On peut alors approfondir et enrichir le Paradigme des Noeuds d'Interactions en affirmant ce désordre spatial comme une *ontologie de la phase* : pour le Paradigme des Noeuds d'Interactions, ceci signifie que la dynamique de solitons photoréfractifs consiste en *la propagation, le long d'un réseau spatial, de variations et de modifications dans la répartition de phases d'oscillateurs*.

Chapitre 9

Les propriétés de la dynamique des solitons photoréfractifs : caractérisation d'une dynamique unique

«Unlike the position that exists in the physical sciences, in economics and other disciplines that deal with essentially complex phenomena, the aspects of the events to be accounted for about which we can get quantitative data are necessarily limited and may not include the important ones.» FRIEDRICH AUGUST VON HAYEK

Les chapitres précédents visaient à caractériser la complexité de la dynamique de solitons en comparant deux cartes de noeuds ou deux simulations numériques et en estimant leur divergence à l'aide d'outils basés sur la corrélation, conformément au Principe de Potentialité (3.1.2.2) affirmant que le caractère imprévisible et décorrélatif s'exprime à travers au moins deux dynamiques. Une seule carte de noeuds ou filamentation présentent néanmoins un aspect hautement complexe, qu'il pourrait être intéressant de caractériser en lui-même. Il ne serait alors pas question de divergence ou de force de complexité

et donc de caractérisation de décorrélations mais plutôt d'une exploration et d'un approfondissement de la dynamique mise en oeuvre quand interagissent des solitons ou filamente un faisceau.

Chacun des deux Paradigmes peut ainsi donner lieu à une étude spécifique. Le Paradigme des Noeuds d'Interactions, de par son intérêt unique pour les noeuds, sera à l'origine d'une étude sur les propriétés de leur répartition dans la fenêtre d'étude, par le biais d'estimations de dimensions fractales. Quant au Paradigme Global, il inspirera une analyse sur les processus de redistribution d'intensité lumineuse mis en jeu lors d'une filamentation via des outils utilisés en Sciences économiques.

9.1 Cartes de noeuds et propriétés de récurrences

9.1.1 Motifs récurrents dans une même carte de noeuds

Il se trouve que les cartes de noeuds montrent toutes des motifs récurrents. Le comportement des solitons peut en effet être très différent d'une carte à l'autre, mais les noeuds semblent s'arranger selon des positions particulières :

- *traînées*, qui sont un long alignement de noeuds ;
- *grappes*, qui sont des amas sans forme particulière de quelques noeuds ;
- *noeuds isolés*, qui n'appartiennent à aucune des précédentes catégories.

La Fig.9.1 montre à titre d'exemple les apparitions de ces motifs sur une même carte de noeuds, obtenue à partir d'une configuration aléatoire de 250 solitons. A chaque nouvel agrandissement on observe ces motifs, dont la plupart ne pouvaient être discernés sur des échelles plus grandes.

Afin de caractériser numériquement la répartition de noeuds dans une carte de noeuds, il est possible d'estimer diverses dimensions, appelées par abus de langage "dimensions fractales" : la dimension d'information (ID), la dimension de corrélation (CD) et la dimension fractale proprement dite (FD) ([29],[30]). Ces dimensions peuvent se résumer et se généraliser grâce à deux outils utiles :

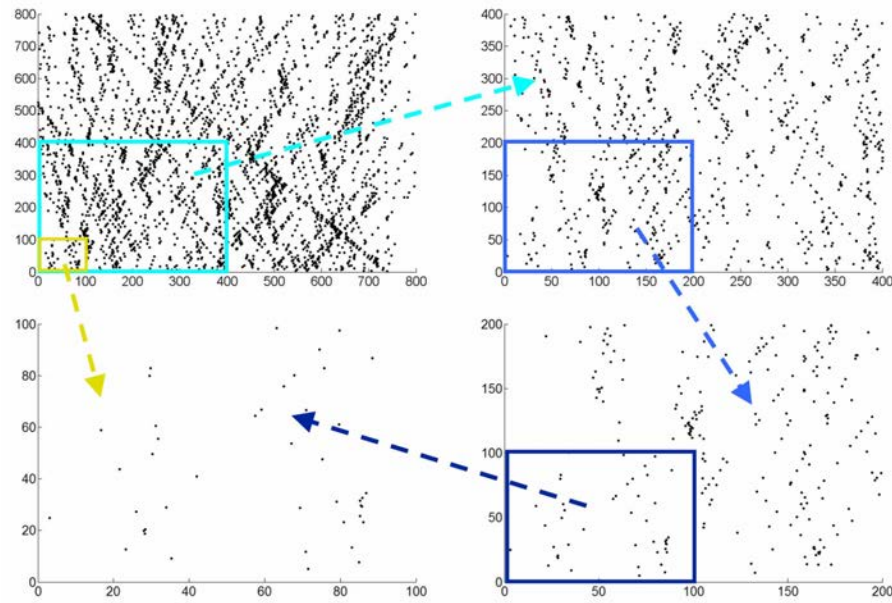


FIG. 9.1 – Agrandissements successifs d’une même carte de noeuds, montrant l’apparition des motifs récurrents. Par exemple, la zone jaune 100×100 sur la carte de dimensions 800×800 , une fois agrandie à la même échelle, laisse apparaître des noeuds "inédits", s’arrangeant encore selon les motifs sus-cités.

les q -dimensions de Renyi généralisées [31] et la fonction de corrélation de Pawelzik-Schuster [32] généralisée.

Il est à noter que les caractérisations qui suivent sont effectuées dans un cadre où la dynamique reste riche, c’est-à-dire où la raréfaction tendancielle des noeuds avec Z (cf. 5.6.1) n’a pas eu encore lieu de s’exprimer de manière tangible.

9.1.2 Méthodes de calcul des dimensions

Celles-ci sont décrites in extenso en Annexe E.

9.1.3 Résultats

9.1.3.1 Obtention des dimensions

On estime à l'aide de la méthode *RGD* les différentes dimensions de la carte de noeuds 800×800 présentée La Fig.9.1. Les dimensions sont estimées grâce à une régression linéaire dans les régions linéaires des courbes, montrées à la Fig.9.2.

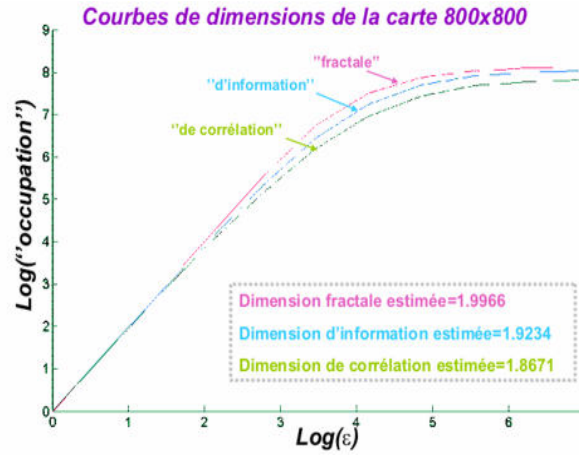


FIG. 9.2 – Courbes de dimensions obtenues par la méthode *RGD* permettant le calcul des diverses dimensions, pour la carte de noeuds 800×800 présentée en Fig.9.1.

On y trouve les dimensions suivantes : $FD \simeq 1.9966$, $ID \simeq 1.9234$ et $CD \simeq 1.8671$. Conformément à la théorie de Renyi [31], ces trois dimensions se rangent bien dans l'ordre suivant : $FD > ID > CD$.

9.1.3.2 Quantification du caractère auto-similaire

Le caractère auto-similaire d'une carte de noeuds s'exprime par le fait, observé qualitativement, que diverses sous-parties d'une carte de noeuds ressemblent à celle-ci. L'estimation des dimensions est alors un outil pour estimer numériquement ce caractère auto-similaire ; pour ce faire, partant de la carte 800×800 , on estime les dimensions de chacune des 4 sous-cartes de taille

400×400 , puis celles des 16 sous-cartes de taille 200×200 , etc... Les résultats de ces estimations sont présentés à la Fig.9.3.

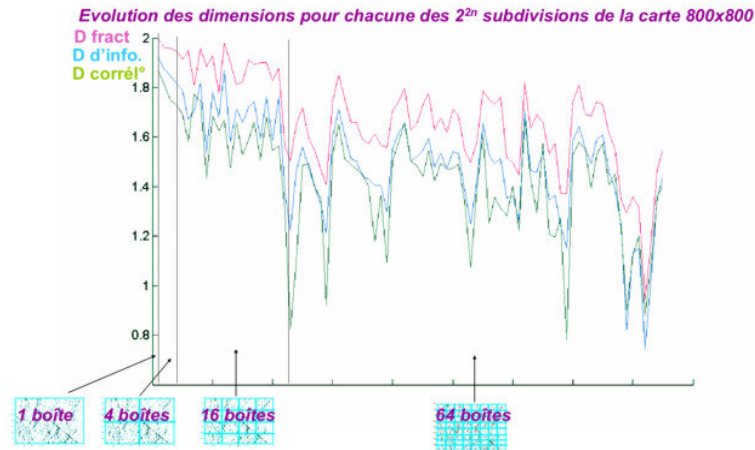


FIG. 9.3 – Estimations des dimensions pour les sous-cartes issues de la carte 800×800 .

Il peut être remarqué une tendance générale à la baisse lorsque les sous-cartes se font de plus en plus petites ; ceci parce que les motifs ont moins de chance d'apparaître avec un nombre de noeuds en moyenne divisé par 4 à chaque nouvelle subdivision. Cette raréfaction locale des noeuds et donc des motifs, à laquelle on ne peut échapper, est ce qui sépare une carte de noeuds d'une structure fractale obtenue mathématiquement : on arrive vite à une limite à l'auto-similarité. De plus, les courbes obtenues rejoignent parfois des valeurs très basses qui correspondent aux sous-cartes où la densité de noeuds est anormalement faible, comme sur le bord droit.

Néanmoins, on peut estimer sur chacune des dimensions son coefficient de constance ; on trouve 90.8% (FD), 89.3% (ID) et 88.0% (CD). Ces coefficients assez élevés montrent quand même le caractère récurrent d'une carte de noeuds. Si l'on s'affranchit enfin de la bande verticale située entre $X = 750$ et $X = 800$ où la densité de noeuds est faible, on trouve de légèrement meilleurs coefficients de constance : 91.30% (FD), 90.0% (ID) et 88.5% (CD).

9.2 L'inégalité de la distribution de l'intensité lumineuse dans une filamentation

Le Paradigme Global, commandant de prendre en compte tous les points d'une simulation numérique, nous invite maintenant à nous intéresser à la manière dont se répartit l'intensité ou énergie lumineuse dans le cristal au fur et à mesure que la dynamique photoréfractive fait son oeuvre. Les outils utilisés en économétrie visent à caractériser comment la richesse se distribue dans une population ; il serait alors profitable d'adapter ces outils au cas d'une filamentation en assimilant la population aux points échantillonnés de la simulation, les valeurs de l'intensité ou l'énergie lumineuse s'assimilant aux richesses perçues.

9.2.1 Les estimateurs d'inégalité en économétrie

Ces estimateurs, le coefficient de Gini [35], l'indice *RHI* [36] et l'entropie de Theil [37] sont décrits en détail en Annexe F.

9.2.2 Adaptation des estimateurs d'inégalité à la propagation de faisceau

Ces estimateurs vont être adaptés au cas des simulations numériques, en utilisant l'intensité lumineuse $I(X_i, Z_j)$ en chaque point (X_i, Z_j) du cristal. X et Z sont toujours les coordonnées transversale et de propagation, i variant de 1 à N et j de 1 à N_z .

Les estimateurs G , RHI et T peuvent alors être définis de deux manières, le long d'une tranche transversale du cristal simulé (estimateurs "transversaux" (t)) et dans le cristal tout entier (estimateurs "globaux" (g)).

9.2.2.1 Les estimateurs transversaux (t)

On définit par $I(Z_j) = \sum_{i=1}^N I(X_i, Z_j)$ l'intensité totale d'une tranche verticale repérée par Z_j et par $d(LC^{(t)}(Z_j), LPE)$ la distance verticale entre la

courbe de Lorenz pour la distribution transversale en Z_j et la ligne d'égalité parfaite (cf. Annexe F). Les estimateurs transversaux (t) à Z_j sont alors donnés par :

$$G^{(t)}(Z_j) = \frac{1}{2NI(Z_j)} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N |I(X_i, Z_j) - I(X_k, Z_j)| \quad (9.1)$$

$$RHI^{(t)}(Z_j) = \text{Max}(d(LC^{(t)}(Z_j), LPE)) \quad (9.2)$$

$$T^{(t)}(Z_j) = \sum_{i=1}^N \frac{I(X_i, Z_j)}{I(Z_j)} \left[\log \frac{I(X_i, Z_j)}{I(Z_j)} - \log(1/N) \right] \quad (9.3)$$

9.2.2.2 Les estimateurs globaux (g)

On définit par $I = \sum_{j=1}^{N_z} \sum_{i=1}^N I(X_i, Z_j)$ l'intensité totale dans le cristal. La "distribution globale" des quantités $I(X_i, Z_j)$ peut en fait être considérée comme mono-dimensionnelle, car du point de vue algorithmique on peut la voir comme une concaténation d'un nombre N_z de distributions transversales. Ainsi, $d(LC^{(g)}, LPE)$ étant la distance entre la courbe de Lorenz pour la distribution globale et la ligne d'égalité parfaite, nous obtenons pour les estimateurs globaux (g) :

$$G^{(g)} = \frac{1}{2NN_zI} \sum_{i'=1}^{N_z} \sum_{j'=1}^{N_z} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |I(X_i, Z_{i'}) - I(X_j, Z_{j'})| \quad (9.4)$$

$$RHI^{(g)}(Z) = \text{Max}(d(LC^{(g)}, LPE)) \quad (9.5)$$

$$T^{(g)} = \sum_{j=1}^{N_z} \sum_{i=1}^N \frac{I(X_i, Z_j)}{I} \left[\log \frac{I(X_i, Z_j)}{I} - \log\left(\frac{1}{NN_z}\right) \right] \quad (9.6)$$

Configuration	Faisceau injecté $B(X)$	NL	FS
$C1$	$B1(X) = 4 \exp^{-\left(\frac{X}{200}\right)^2}$	-1	512
$C2$	$B2(X) = B1(X)$	-3	512
$C3$	$B3(X) = 4 \exp^{-\left(\frac{X}{400}\right)^2}$	-1	1024
$C4$	$B4(X) = B3(X)$	-3	1024

TAB. 9.1 – Les quatre configurations (faisceau gaussien injecté, coefficient non-linéaire, dimension transversale de la fenêtre).

9.2.3 Application à la filamentation

9.2.3.1 Les configurations testées

Nous simulons des faisceaux gaussiens dans le cadre de 4 configurations $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$ (cf. tableau 9.1), testées avec $N = 1024$, $N_z = 2000$, $t = 0.2$ et $h = 0.05$. Les résultats de ces simulations sont présentés à la Fig.9.4.

9.2.3.2 Résultats

9.2.3.2.1 Evolutions des estimateurs transversaux Les évolutions des estimateurs transversaux (t) pour les quatre configurations $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$ sont présentées à la Fig. 9.5.

9.2.3.2.2 Valeurs des estimateurs globaux Pour chacune des quatre configurations, les estimateurs globaux $G^{(g)}$, $RHI^{(g)}$ et $T^{(g)}$ sont calculés ; les valeurs obtenues sont représentées au tableau 9.2

Configuration	$G^{(g)}$	$RHI^{(g)}$	$T^{(g)}$
$C1$	0.61315	0.47098	0.6876
$C2$	0.82433	0.6955	1.448
$C3$	0.60889	0.4670	0.6740
$C4$	0.84944	0.71835	1.6686

TAB. 9.2 – Valeurs des estimateurs globaux.

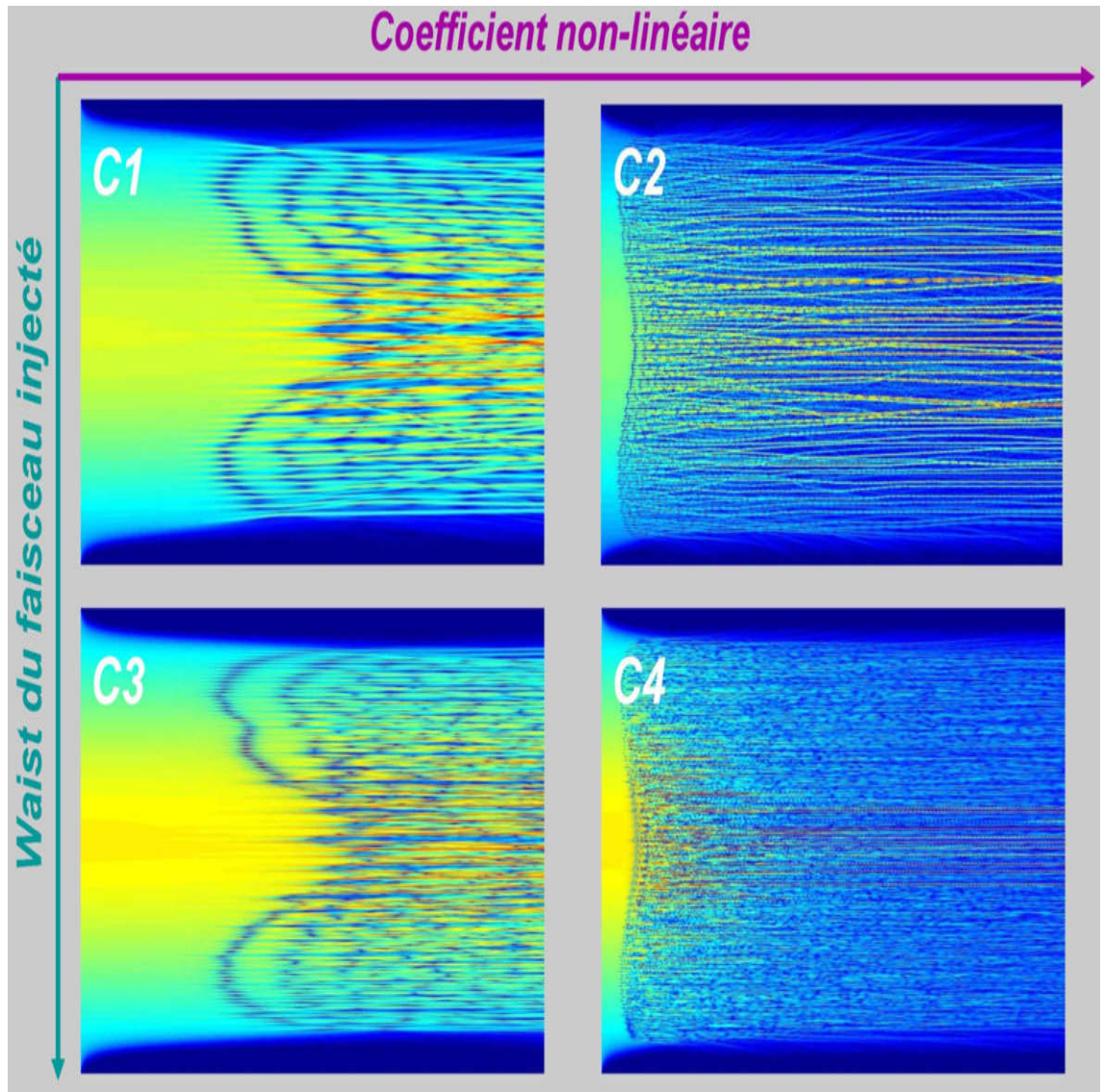


FIG. 9.4 – Les simulations correspondant aux quatre configurations $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$, rangées selon leurs caractéristiques (waist du faisceau injecté et coefficient non-linéaire).

9.2.4 Discussion

9.2.4.1 Pertinence des estimateurs

9.2.4.1.1 Pertinence des estimateurs (t) entre eux De manière à vérifier la pertinence de ces estimateurs d'inégalité, il est intéressant de voir comment ils sont reliés les uns aux autres quand Z augmente ; autrement dit,

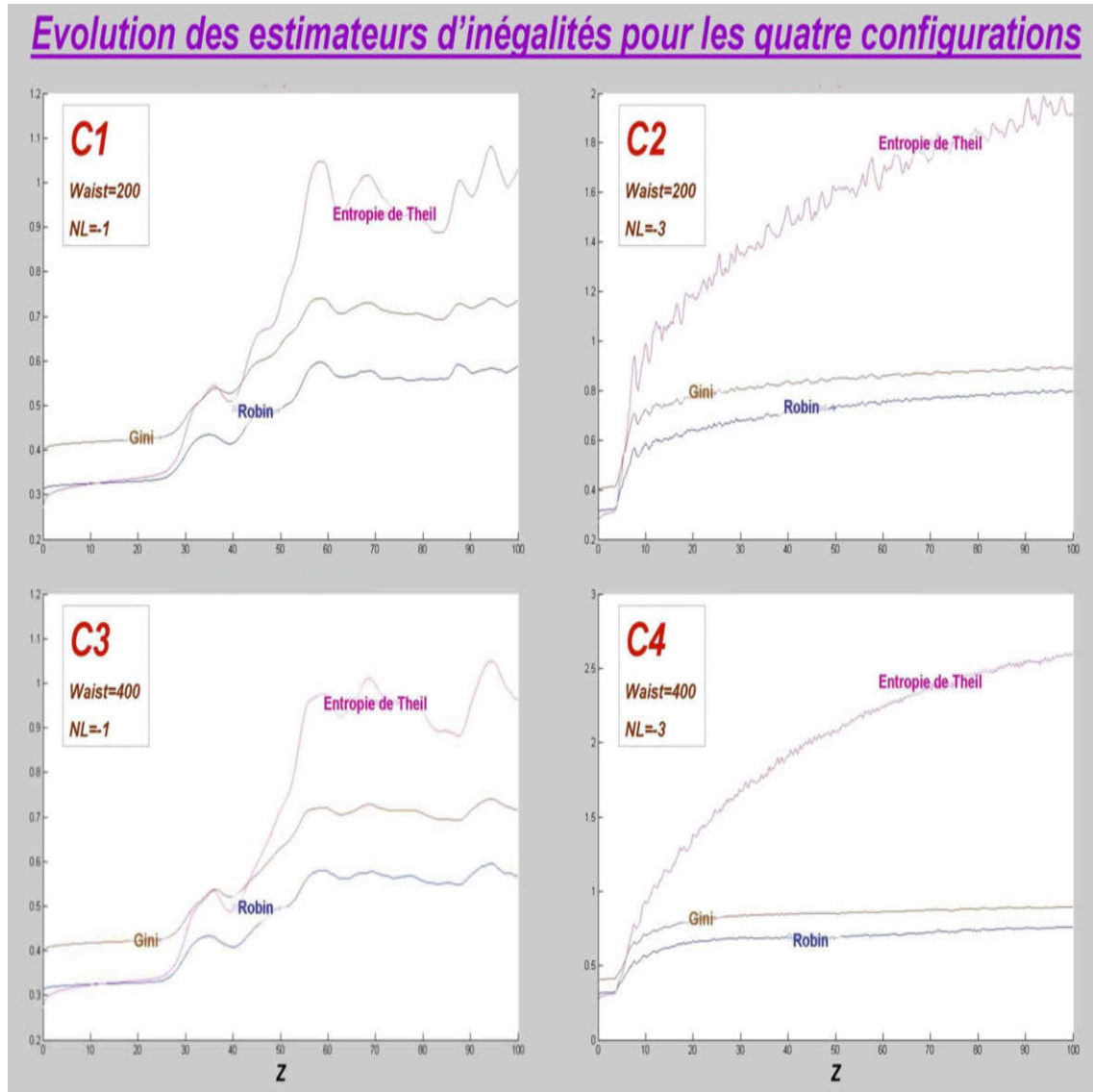


FIG. 9.5 – Evolution des estimateurs transversaux pour les quatre configurations $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$.

nous avons à calculer les coefficients de corrélation σ_{12} , σ_{23} et σ_{31} des trois relations linéaires du système 9.7.

$$\begin{cases} G^{(t)} = a_{12}RHI^{(t)} + b_{12} \\ RHI^{(t)} = a_{23}T^{(t)} + b_{23} \\ T^{(t)} = a_{31}G^{(t)} + b_{31} \end{cases} \quad (9.7)$$

9.2. L'inégalité de la distribution de l'intensité lumineuse dans une filamentation¹⁴⁵

Les valeurs de a_{ij} , b_{ij} et σ_{ij} ainsi trouvées sont présentées dans le tableau 9.3 (avec $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $a_{ii} = 1$ et $b_{ii} = 0$).

Configuration	a_{12} b_{12}	a_{23} b_{23}	a_{31} b_{31}	a_{21} b_{21}	a_{32} b_{32}	a_{13} b_{13}	σ_{12}	σ_{23}	σ_{31}
$C1$	1.2322 0.0132	0.3672 0.2165	2.1805 -0.6013	0.8073 -0.0082	2.6884 -0.5732	0.4546 0.2785	99%	99%	99%
$C2$	0.9605 0.1398	0.2510 0.4382	3.6158 -1.4475	1.0197 -0.1282	3.6278 -1.0500	0.2510 0.4382	98%	98%	95%
$C3$	1.2347 0.0128	0.3711 0.2149	2.1579 -0.5926	0.8066 -0.0084	2.6660 -0.5658	0.4598 0.2771	99%	99%	99%
$C4$	1.1242 0.0608	0.1420 0.4042	5.1164 -2.2895	0.8813 -0.0474	5.9140 -2.0874	0.1567 0.5208	99%	92%	89%

TAB. 9.3 – Résultats obtenus pour les coefficients a_{ij} et b_{ij} , avec les coefficients de corrélation σ_{ij} associés.

Les coefficients de corrélation obtenus étant très proches de 1, il peut être conclu que l'évolution de chaque estimateur (t) est cohérente avec les autres, donc qu'ils sont pertinents pour pour décrire comment l'énergie lumineuse est distribuée. La meilleure corrélation est obtenue lorsqu'on compare $G^{(t)}$ à $RHI^{(t)}$; ceci vient du fait que ces deux estimateurs, bien que différents, sont basés sur la courbe de Lorenz. De l'autre côté, les coefficients de corrélations les moins élevés (encore qu'aucun d'entre eux ne descende en dessous de 89%, ce qui reste satisfaisant) sont obtenus lorsqu'on compare $G^{(t)}$ ou $RHI^{(t)}$ à l'entropie de Theil. Il faut également noter que plus le coefficient non-linéaire est faible (en valeur absolue), meilleure est la corrélation.

9.2.4.1.2 Pertinence des estimateurs (t) avec les estimateurs (g)

Ayant trouvé les relations qui relient entre eux les estimateurs transversaux et prouvé leur pertinence, il est maintenant temps de vérifier si les estimateurs globaux sont cohérents avec les premiers. Pour ce faire, nous cherchons à vérifier si les estimateurs globaux vérifient les équations du système 9.7, liant entre eux

les estimateurs transversaux. Le système 9.8 permet alors de calculer les valeurs "prévues" $\tilde{G}^{(g)}$, $\widetilde{RHI}^{(g)}$ et $\tilde{T}^{(g)}$ pour les estimateurs $G^{(g)}$, $RHI^{(g)}$ et $T^{(g)}$:

$$\begin{cases} \tilde{G}^{(g)} = a_{12}RHI^{(g)} + b_{12} \\ \widetilde{RHI}^{(g)} = a_{23}T^{(g)} + b_{23} \\ \tilde{T}^{(g)} = a_{31}G^{(g)} + b_{31} \end{cases} \quad (9.8)$$

Le tableau 9.4 montre alors, pour les quatre configurations, les valeurs originales et ainsi calculées des estimateurs globaux et les erreurs relatives qui en découlent.

Configuration	$G^{(g)}$	$\tilde{G}^{(g)}$	E.R.	$RHI^{(g)}$	$\widetilde{RHI}^{(g)}$	E.R.	$T^{(g)}$	$\tilde{T}^{(g)}$	E.R.
<i>C1</i>	0.61315	0.5936	-3.2%	0.47098	0.4690	-0.4%	0.6876	0.7356	7%
<i>C2</i>	0.82433	0.8078	-2%	0.6955	0.6888	-1%	1.448	1.5331	6%
<i>C3</i>	0.60889	0.5894	-3.2%	0.4670	0.4651	-0.4%	0.6740	0.7213	7%
<i>C4</i>	0.84944	0.8684	2.2%	0.71835	0.6412	-10.7%	1.6686	2.0565	23.2%

TAB. 9.4 – Valeurs originales $G^{(g)}$, $RHI^{(g)}$ et $T^{(g)}$ des estimateurs globaux, leurs valeurs $\tilde{G}^{(g)}$, $\widetilde{RHI}^{(g)}$ et $\tilde{T}^{(g)}$ calculées grâce au système 9.8 et erreurs relatives (E.R.) résultantes.

Il peut en être conclu que, en dépit de l'erreur relative assez élevée obtenue pour l'entropie de Theil prédite dans *C4*, les estimateurs globaux obéissent aux mêmes règles de cohérence que les estimateurs transversaux. Ceci ne tire pas son origine de raisons strictement mathématiques, car les estimateurs globaux ne sont *pas* la moyenne des estimateurs transversaux. En effet, le calcul des estimateurs (g) met chaque point en comparaison avec *tous les autres points* dans le cristal, alors que les estimateurs (t) n'emploient que les points d'une seule tranche. Ce rapport élevé entre ces deux types d'estimateurs vient donc du processus physique de redistribution de l'énergie, qui agit de la même manière dans le système entier que dans un échantillon vertical de celui-ci.

9.2.4.2 Vers une distribution très inégalitaire

Le fait le plus marquant que l'on peut retenir de la Fig.9.5 est que la filamentation amène l'énergie injectée au début à être redistribuée de manière de plus en plus inégalitaire au fur et à mesure que se forment les solitons. Un état plutôt stationnaire est ensuite atteint, avec un coefficient de Gini très élevé. Ceci démontre le caractère unique des solitons, de l'énergie piégée dans une zone d'espace réduite.

Chapitre 10

La confrontation des paradigmes et méthodes

«Let us move from the era of confrontation to the era of negotiation.»

RICHARD M. NIXON

A partir de deux grands Paradigmes, nous venons de construire deux ensembles de caractérisations qui ont permis d'esquisser à leur manière la décorrélation et la perte de mémoire du système "solitons photoréfractifs".

10.1 L'état de la problématique

Le Paradigme des Noeuds d'Interactions a décrit la description d'une perte de mémoire spatiale, à condition de bien choisir les variations de conditions initiales. D'un autre côté, le Paradigme Global a permis de conclure que les simulations numériques dérivant les unes des autres par modification de l'amplitude du faisceau initial, constituaient toujours un système dynamique très sensible aux conditions initiales, régi par un paramètre physique du cristal, le coefficient non-linéaire NL .

10.1.1 Les niveaux d'abstraction ; le glissement d'un paradigme vers l'autre

Le système que l'on cherche à exprimer idéalement en tant que désordre spatial est la réalité physique, représentée par les expériences de filamentations ; elles sont commodément modélisées par les simulations numériques, lesquelles sont elles-même *localement* modélisées par le Programme de Modélisation.

De la réalité physique au Programme de Modélisation s'élève-t-on ainsi de deux niveaux d'abstraction ; les descriptions fournies par *MP* ne sont valables qu'en des zones très limitées d'un cristal réel, de surcroît temporairement, compte-tenu du nombre limité de lois d'interactions qui constituent *MP* et de l'activité qui règne dans un cristal réel, dépendante des conditions extérieures. Ceci permet d'affirmer également que la modélisation par la *BPM* a aussi ses limites par-rapport à la réalité ; en effet, la *BPM* opère avec une ***distribution constante*** du coefficient non-linéaire, qui est susceptible en réalité de varier localement à cause d'une distribution hétérogène des champs E et E_{ph} . Le coefficient de diffusion D , toujours mis à 0 dans les simulations faites, non seulement existe dans la réalité, mais est également susceptible de fluctuer, avec la température.

Il ressort donc de cet état de faits que la réalité physique ne sera jamais parfaitement modélisée ; néanmoins, le glissement *réalité* $\rightarrow$ *BPM* se fait avec le minimum d'approximations, car réalité physique et *BPM* peuvent se décrire à l'aide du même paradigme, le Paradigme Global ; les descriptions des décorrélations, dans les deux cas sont assez comparables, et l'hétérogénéité inhérente à un cristal réel ne fait finalement qu'amplifier le caractère hautement désordonné déjà mis en évidence dans la *BPM*.

De par son caractère, le Paradigme Global "contient" le Paradigme des Noeuds d'Interactions, qui constitue en fait le plus grand saut théorique de cette chaîne de deux modélisations de la réalité. Le passage $GP \rightarrow INP$ se fait ainsi au détriment d'une grande partie de l'information dynamique,

constitutive de l'état des solitons ailleurs qu'aux noeuds d'interactions. Il serait d'ailleurs intéressant de comparer comment les deux Paradigmes et leurs méthodes subséquentes décrivent la décorrélation d'une population de solitons perturbée localement.

10.1.2 La comparaison des deux décorrélations héritées des Méthodes de Conformations d'Evénements et du Paradigme Global

10.1.2.1 Les configurations de solitons aléatoires

Afin de confronter les descriptions de la décorrélation du système fournies par les deux Paradigmes, on va s'attacher à simuler des configurations aléatoires de solitons. On part d'une configuration A de n solitons, dont les inclinaisons, largeurs, intensités et positions initiales sur X sont créées de façon aléatoires autour de valeurs moyennes. On déduit ensuite de A la configuration B , obtenue par une perturbation du soliton le plus au milieu.

Les configurations de solitons proches mais différentes A et B sont ensuite simulées par la BPM et par le Programme de Modélisation, permettant ainsi d'obtenir par les Méthodes de Conformations d'Evénements et du Paradigme Global deux décorrélations que nous allons comparer.

10.1.2.2 Résultats

La Fig.10.1 présente un premier essai, obtenu à l'aide d'une configuration initiale de 50 solitons. On peut observer que la décroissance de ρ_I se fait de manière plus lisse et plus rapide que celle de σ_{CAS} , laquelle est plus erratique. Il est par conséquent nécessaire d'agir sur les paramètres décisionnels du Programme de Modélisation afin d'obtenir des décorrélations aussi proches l'une de l'autre que possible.

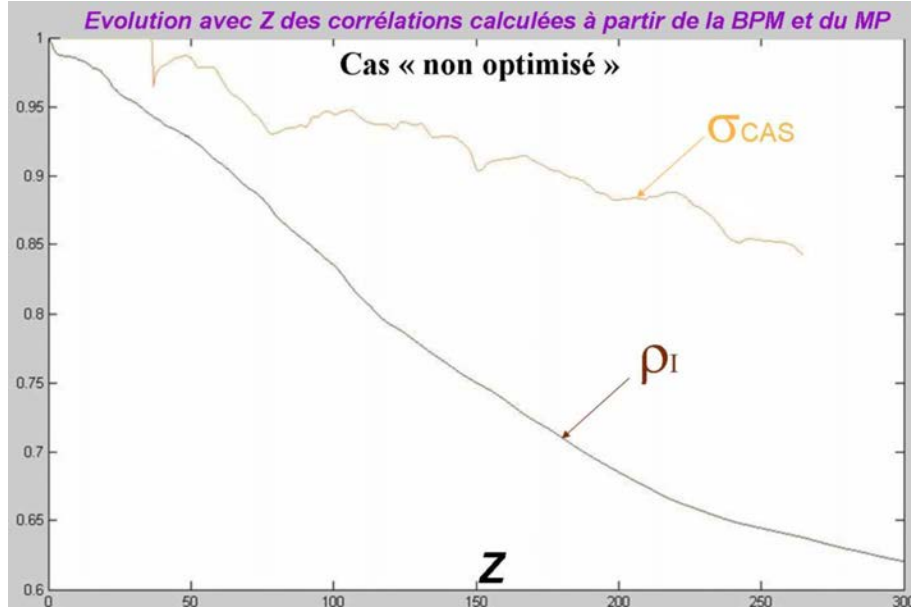


FIG. 10.1 – Exemple d'évolution des deux décorrélations ρ_I et σ_{CAS} , où les paramètres du Programme de Modélisation n'ont pas été optimisés.

10.1.2.2.1 L'ajustement des paramètres de décision θ_{ref} et φ_{ref} Ces paramètres sur lesquels il est possible d'agir sont les angle et phase seuils θ_{ref} et φ_{ref} (cf.4.2.3). Nous faisons donc varier ceux-ci en essayant de maximiser une quantité nommée "cohésion", représentative du lien entre ρ_I et σ_{CAS} .

10.1.2.2.1.1 La "cohésion" Coh Nous définissons la cohésion Coh comme une quantité représentant le niveau de confiance auquel on peut déduire une décorrélation de l'autre ; il a été vu en 5.6.2 et en 6.5 que chacune des décorrélations peut, de manière satisfaisante, être modélisée sous forme d'exponentielle.

Il est à noter que l'estimateur de décorrélation principal hérité de la Méthode de Conformations d'Événements, σ_{CAS} , était défini en fonction du nombre d'interactions, alors que ρ_I est lui défini en fonction de Z . Afin de pouvoir comparer ces deux quantités, il est nécessaire de redéfinir σ_{CAS} en fonction de Z ; ceci est rendu possible par le fait que, lors du calcul de σ_{CAS} , on mémorise la coordonnée Z de chaque interaction. L'équation 5.19 affirmait que le nombre

d'interactions pour une coordonnée de propagation Z était proportionnel au logarithme de Z ; or, si σ_{CAS} montrait une décroissance exponentielle avec le nombre d'interactions, cet estimateur montrerait alors une décroissance en Z^{-k} . Ces types de décroissance différents ne sont guère gênants dans ce chapitre, car comme va le montrer la Fig.10.2, on opère ici avec des Z maximaux assez bas (de l'ordre de la centaine), alors que la Fig.5.12 montre que ce caractère logarithmique commence à s'exprimer pour $Z > 600$. Nous nous plaçons donc ici dans une région approximativement linéaire où le nombre d'interactions peut être considéré proportionnel à Z , autrement dit dans la région où la dynamique de solitons (transitoire) a le plus lieu de s'exprimer.

Ainsi Coh sera-t-elle définie comme le coefficient de corrélation de la régression linéaire suivante :

$$\log \rho_I(Z) = a \log \sigma_{CAS}(Z) \quad (10.1)$$

Si les deux décorrélations sont décrites par n points, alors la cohésion entre elles vaut :

$$Coh = \frac{\sum_{i=1}^n (\log \rho_I(Z_i) - \overline{\log \rho_I})(\log \sigma_{CAS}(Z_i) - \overline{\log \sigma_{CAS}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\log \rho_I(Z_i) - \overline{\log \rho_I})^2 \sum_{i=1}^n (\log \sigma_{CAS}(Z_i) - \overline{\log \sigma_{CAS}})^2}} \quad (10.2)$$

avec

$$\overline{\log \rho_I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \rho_I(Z_i)$$

et

$$\overline{\log \sigma_{CAS}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \sigma_{CAS}(Z_i)$$

10.1.2.2.1.2 Choix de θ_{ref} et φ_{ref} La Fig.10.2 montre un essai d'optimisation de la cohésion Coh par-rapport à θ_{ref} et φ_{ref} .

Il est crucial de noter que la nappe $Coh(\theta_{ref}, \varphi_{ref})$ semble être propre à chaque configuration de solitons; néanmoins, on observe quasiment toujours ce type de distribution, à savoir un optimum d'angle θ_{ref} aux alentours de 0.2 rad et une cohésion finalement assez peu sensible à la phase seuil φ_{ref} .

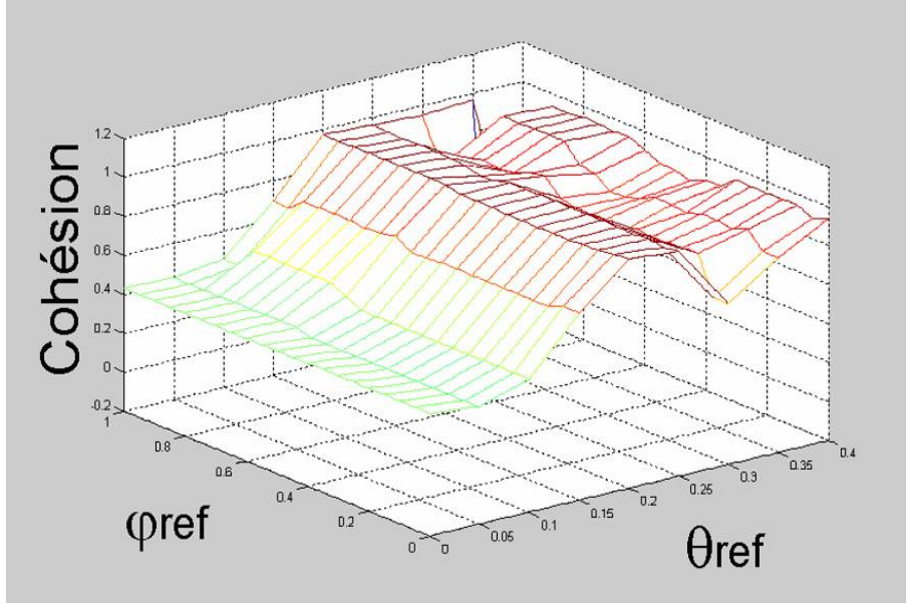


FIG. 10.2 – Variation de Coh pour diverses valeurs de l'angle et de la phase références θ_{ref} et φ_{ref} .

10.1.2.2.2 Exemple optimisé A partir d'une autre configuration, on a ainsi ajusté les angle et phase seuils θ_{ref} et φ_{ref} de manière à optimiser la cohésion entre ρ_I (calculé qu'une seule fois) et σ_{CAS} (calculé à chaque couple $(\theta_{ref}, \varphi_{ref})$). Pour cet exemple, la cohésion y a ainsi été trouvée valant $Coh = 92.4\%$. On tire de ρ_I et σ_{CAS} des taux de divergence λ_I et $\lambda_{\sigma_{CAS}}$:

$$\lambda_I(Z_j) = -\frac{\log \rho_I(Z_j)}{Z_j}$$

$$\lambda_{\sigma_{CAS}}(Z_j) = -\frac{\log \sigma_{CAS}(Z_j)}{Z_j}$$

Les évolutions avec Z des quatre grandeurs ρ_I , σ_{CAS} , λ_I et $\lambda_{\sigma_{CAS}}$ sont représentées à la Fig.10.3.

Il est alors possible de calculer les forces de complexité $Str(BPM)$ et $Str(MP)$ héritées de la Méthode du Paradigme Global et de la Méthode de Conformations d'Événements comme valeurs moyennes de ces taux de divergence :

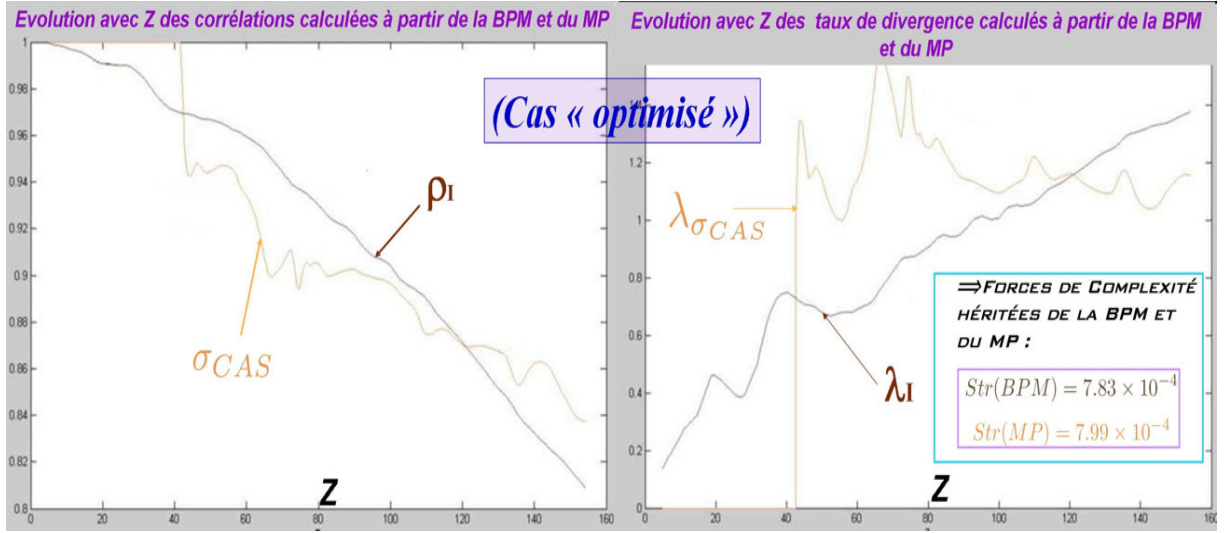


FIG. 10.3 – (A gauche) Exemple d'évolution des deux décorrélations ρ_I et σ_{CAS} , où les paramètres du Programme de Modélisation ont été optimisés ; (à droite) évolutions correspondantes des deux taux de divergence λ_I et $\lambda_{\sigma_{CAS}}$ tirés de ρ_I et σ_{CAS} et forces de complexité associées.

$$Str(BPM) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_I(Z_j)$$

$$Str(MP) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_{CAS}(Z_j)$$

On trouve alors $Str(BPM) = 7.83 \times 10^{-4}$ et $Str(MP) = 7.99 \times 10^{-4}$, soit un écart relatif de 2%.

10.1.2.2.3 Discussion Il est à noter premièrement que, bien que la décorrélation σ_{CAS} optimale ne suive pas ρ_I de près (σ_{CAS} chute de manière trop brutale au début mais ne décroît pas assez vite vers la fin), la méthode d'optimisation par la cohésion *Coh* se charge néanmoins d'assurer des forces de complexité $Str(BPM)$ et $Str(MP)$ très proches ; ceci est essentiel, car le caractère décorrélatif *se décrit finalement par les forces de complexité*.

Néanmoins, il transparaît de la méthode d'optimisation ci-dessus un caractère essentiellement *artificiel* : le choix de paramètres optimaux ($\theta_{ref}, \varphi_{ref}$) se

faisant *a posteriori* uniquement pour maximiser la cohésion *Coh*, sans aucune autre considération physique. Les deux Paradigmes utilisés étant essentiellement basés sur des caractérisations totalement différentes, il n'y avait en fait *a priori* aucune raison pour que les deux décorrélations s'effectuent de la même manière.

En conclusion, dans l'intérêt d'avoir une cohésion complète entre les deux descriptions, le Paradigme des Noeuds d'Interaction et son application via la Méthode de Conformations d'Événements ne pourraient jouer rien d'autre que le rôle d'un Paradigme et d'une Méthode *d'ajustement*, voués à être *conformés* à dessein afin de fournir une description alternative, simplifiée mais *cohérente* de la dynamique d'une population de solitons en terme de désordre spatial.

10.2 Le Paradigme Global : le plus proche de la réalité physique

Nous avons donc cherché à confronter les deux Paradigmes en comparant leurs descriptions ; cette opposition s'est affirmée ensuite de manière éclatante dans la confrontation entre le caractère inflexible et totalitaire de la Méthode du Paradigme Global et le caractère plus malléable de la Méthode de Conformations d'Événements. De part sa flexibilité, la Méthode de Conformations d'Événements s'est donc avérée comme incluse dans la première, à condition d'effectuer une optimisation ; assujettie aux descriptions de la Méthode du Paradigme Global, la Méthode de Conformations d'Événements apparaît alors non plus en opposition dialectique avec la première, mais comme son complément simplificateur. Le Paradigme des Noeuds d'Interactions est ainsi **une vue décomplexifiée** de la dynamique solitonique, entièrement inclus dans le Paradigme Global.

*Le Paradigme Global, muni finalement de cette simplification obtenue a posteriori, s'affirme alors comme le Paradigme **essentiel** de la description de*

la dynamique de solitons photoréfractifs.

Chapitre 11

Conclusion

«La conscience n'est dans le chaos du monde qu'une petite lumière, précieuse mais fragile.» LOUIS-FERDINAND CÉLINE

D'un phénomène non-linéaire générateur d'ondes aux propriétés particulières et à la dynamique complexe, nous nous sommes enquis d'une quelconque appartenance de celle-ci à la famille des phénomènes chaotiques. Dans le caractère purement spatial des solitons photoréfractifs a résidé le noeud du problème, c'est-à-dire comment caractériser un état spatial bidimensionnel, qui peut se modifier à cause de perturbations de l'état d'entrée.

Par le biais du concept central de *décorrélation* et du *Principe de Potentialité*, nous avons donc cherché à exprimer numériquement les différences entre deux dynamiques initialement proches et de voir le comportement de ces estimateurs au fur et à mesure que l'on progresse dans les dynamiques et face à l'amplitude des perturbations initiales.

Pour ce faire, par une première interprétation attribuant la responsabilité du désordre aux noeuds d'interactions entre solitons, nous avons premièrement développé une approche système vouée à recréer une dynamique solitonique convenable. L'exploitation originale des données obtenues a permis la représentation du problème sous la forme de trajectoires discrètes. A partir de là, des décorrélations furent estimées ; il s'est avéré que, dans le cadre de cette des-

cription relativement abstraite de la dynamique solitonique, une décorrélation du système n'était pas acquise d'avance, car en raison du caractère particulier des conditions initiales, certaines perturbations peuvent laisser le système invariant au sens du Paradigme utilisé et violant ainsi une condition de chaos intuitive. En outre, le cadre abstrait où se situe cette Méthode ne permet pas non plus de vérifier les propriétés de stationnarité et de récurrence de la dynamique présente, celle-ci se plaçant dans un cadre trop abstrait et n'exhibant pas de périodicité.

Ayant ensuite conservé l'approche dialectique "décorrélation entre deux dynamiques", nous sommes alors revenus aux simulations numériques qui furent exploitées dans leur totalité en tant que fonctions de deux variables spatiales aux rôles bien différents, transversale et de propagation. Des estimateurs nommés forces de complexité furent créés et nous avons mis à jour le lien qu'il existait entre ces descriptions compactes du désordre et un paramètre de l'équation dynamique, le coefficient non-linéaire. La non-vérification des propriétés de stationnarité et de récurrence (la filamentation s'affirmant comme un phénomène transitoire) empêchent de nouveau l'appellation de la dynamique ainsi modélisée de chaotique.

Ces méthodes furent adaptés à un cas physique, et nous avons pu alors développer un estimateur général voué à estimer, sous la forme de la grandeur "multiforce" homogène à une atténuation en $m^{-1}s^{-1}$, comment le système perd globalement, au cours de l'expérience de filamentation, toute cohérence spatiale et temporelle sur lui même. Ce moyen de caractérisation inédit nous a pu alors faire décrire la dynamique expérimentale comme un désordre spatio-temporel à dominante spatiale. Là encore, la non-validation rigoureuse des conditions de stationnarité et de récurrence exempte la qualification de cette dynamique expérimentale de chaotique. Il faut toutefois préciser que la fluctuation - se déroulant de manière inconnue - des conditions expérimentales nourrissent *constamment* une dynamique *désordonnée*.

Puis le caractère réellement particulier de la dynamique solitonique a été

caractérisé par d'autres biais comme par exemple le calcul de dimensions fractales et il fut observé que les noeuds d'interaction se répartissent dans l'espace selon des motifs récurrents. L'adaption d'outils de caractérisation issus de l'économétrie a permis finalement de montrer quantitativement comment l'énergie injectée au départ se répartit à cause de l'effet non-linéaire, menant à une répartition d'énergie qui saurait difficilement être plus inégale ; il y a là tout le caractère des solitons, une concentration locale très forte d'énergie.

Enfin, la confrontation entre les deux Paradigmes a prouvé une supériorité certaine du Paradigme Global et de ses descriptions, lesquelles montrent en toutes circonstances une sensibilité aux conditions initiales. Le Paradigme des Noeuds d'Interactions s'est toutefois affirmé comme le paradigme de choix lorsqu'on souhaite une description locale, simplifiée de la dynamique de quelques solitons.

Tout ce travail effectué peut révéler finalement l'importance d'aborder par plusieurs changements de point de vue une situation a priori hors d'une théorie bien établie ; et bien que finalement l'appartenance de la dynamique de solitons photoréfractifs à la théorie de chaos ne soit pas complète et rigoureuse, il n'empêche que l'on a de façon manifeste un désordre qui fut convenablement particularisé dans sa spécificité spatiale.

En matière de perspectives, les méthodes développées dans ce travail définissent alors un nouveau cadre formel pour la description quantitative de phénomènes spatiaux désordonnés, possédant une "orientation" qui sera assimilée de manière conceptuelle à une propagation. En outre, l'originalité de la Méthode de Conformation pourrait servir pour formaliser d'autres problèmes appartenant par exemple à la théorie des graphes.

Bibliographie

- [1] MICHEL HOUELLEBECQ, Extension du domaine de la lutte, *Nadeau* (1994)
- [2] P.BERGÉ, Y. POMMEAU ET C. VIDAL, L'ordre dans le chaos, *Hermann* (1988)
- [3] J.S. RUSSEL, Reports On Waves, *Rep 14th meet. British Assoc. Adv.Sci*, page 311 (1844)
- [4] G.I. STEGEMAN AND M. SEGEV, Optical Spatial Solitons and Their Interactions : Universality and Diversity, *Science* **289** (1999)
- [5] E. OTT, T. SAUER AND J.A. YORKE, Coping with Chaos : Analysis of Chaotic Data and The Exploitation of Chaotic Systems, *Wiley* (1994)
- [6] S. BOCCALETTI, H.L. MANCINI , W. GONZALEZ-VINAS , J. BURGUETE AND D.L. VALLADARES, Space-time Chaos : Characterization, Control and Synchronization, *World Scientific Publishing* (2000)
- [7] P. CVITANOVIC, R. ARTUSO, R. MAINIERI, G. TANNER AND G. VAT-TAY, Chaos : Classical and Quantum, *Niels Bohr Institute, Copenhagen* (2005)
- [8] B. MANDELBROT, The Fractal Geometry of Nature, *W. H. Freeman & Co* (1982)
- [9] H.-O. PEITGEN AND D. SAUPE, The Science of Fractal Images, *Springer Verlag* (1988)
- [10] R. THOM, The bifurcation subset of a space of maps, *Springer* (1971)

- [11] A.A. ANDRONOV, E.A. LEONTOVICH, I.I. GORDON AND A.G. MAIER, Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane, *Israel Program Sci. Transl.* (1971)
- [12] M.M. PEIXOTO, On bifurcations of dynamical systems, *Canad. Math. Congress* (1975)
- [13] N.V. KUKHTAREV, V.B. MARLOV, S.G. ODULOV, M.S. SOSKIN AND V.L. VINETSKII, Holographic storage in electrooptic crystals, *Ferroelectrics*, **949** (1979)
- [14] M. SEGEV, B. CROSIGNANI AND A. YARIV, Spatial solitons in photorefractive media, *Phys.Rev.Lett*, **923** (1992)
- [15] D.N. CHRISTODOULIDES AND M.I. CARVALHO, Compression, self-bending and collapse of Gaussian beams in photorefractive crystals, *Opt.Lett.*, **714** (1994)
- [16] N. FRESSENGEAS, J. MAUFOY AND G. KUGEL, Temporal behavior of bidimensional photorefractive bright spatial solitons, *Phys.Rev.E* **6** (1996)
- [17] J.MAUFOY, N. FRESSENGEAS, D. WOLFERSBERGER AND G. KUGEL, Simulation of the temporal behavior of soliton propagation in photorefractive media, *Phys.Rev.E* **5** (1999)
- [18] G.P. AGRAWAL, Nonlinear Fiber Optics, 3rd ed., San Diego, CA, *USA Academic Press* (2001)
- [19] G. FORSYTHE, M. MALCOLM AND C. MOLER, Computer Methods for Mathematical Computations, *Prentice-Hall, New Jersey* (1977)
- [20] V.E. ZAKHAROV AND A.B SHABAT, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Physics Jetp*, **1** (1972)
- [21] A. YARIV, Optical waves in crystals, *Wiley Classics Library* (2003)
- [22] M. TABOR, Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics : An Introduction, *Wiley* (1989)

- [23] E. N. LORENZ, Deterministic nonperiodic flow *J. Atmos. Sci.* **20** (1963)
- [24] J.C. SPROTT, Chaos and Time-Series Analysis, *Oxford University Press* (2003)
- [25] MAURICE G. DANTEC, Villa Vortex, *Gallimard* (2003)
- [26] H. D. I. ABARBANEL, R. BROWN AND M. B. KENNEL, Lyapunov Exponents in Chaotic Systems : their Importance and their Evaluation Using Observed Data, *Int. J. Mod. Phys.* 1347-1375 (1991)
- [27] G. SNEDECOR AND W. COCHRAN, Statistical Methods, 7th ed. Ames, *Iowa State Press* (1980)
- [28] KROLIKOWSKI ET AL., Interaction of spatial photorefractive solitons, *Quantum Semiclass Opt.*, **10** (1998)
- [29] H. FEDERER, Geometric Measure Theory, *Springer-Verlag* (1969)
- [30] W. HUREWICZ AND H. WALLMAN, Dimension Theory, *Princeton University Press* (1948)
- [31] A. RÉNYI, On measures of information and entropy, *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, 547-561 (1960)
- [32] K. PAWELZIK AND H.G. SCHUSTER, Generalized dimensions and entropies from a measured time series, *Phys.Rev.A* **35** (1987)
- [33] D. RUELLE, Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors, *Communications of Mathematical Physics* **82** (1982)
- [34] J. MILNOR, On the concept of attractors, *Communications of Mathematical Physics* **99** (1985)
- [35] C. GINI, Memorie di metodologica statistica, *Libreria Eredi Virgilio Veschi* (1955)
- [36] B.P. KENNEDY, I. KAWACHI AND D. PROTHROW-STITH, Income distribution and mortality : cross sectional ecological study of the Robin Hood index in the United States, *BMJ* **312** (1996)

- [37] H. THEIL, Economic and Information Theory, Amsterdam : North Holland, (1967)
- [38] J. BALATONI AND A. RENYI *Pub. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.* **1** (1956)
- [39] G.L. BAKER AND J.B. GOLLUB, Chaotic Dynamics : An Introduction, 2nd ed., *Cambridge University Press* (1996)
- [40] M.O. LORENZ, Methods for Measuring the Concentration of Wealth, *Amer. Stat. Assoc.* **9** (1905)

Annexe A

Les variables intervenant dans les équations de propagation

L'équation de propagation 2.2 utilise des variables réduites obtenues entre autres à partir des dimensions physiques réelles (temps et coordonnées d'espace) et des paramètres physiques du cristal.

La fonction d'onde réduite U s'exprime comme $U = SCE/\sqrt{I_d}$, où SCE est le champ électrique du faisceau et I_d est l'irradiance sombre. $E_N(X, Z)$ est le champ de charge d'espace à l'état initial, défini par l'histoire du cristal. Le temps réduit τ se définit par $\tau = I_d t / \Sigma$, où t est le temps physique et Σ une densité d'énergie définie par le cristal.

Les coefficients non-linéaire NL et de diffusion D s'expriment à partir de :

$$NL^2 = k^2 n^2 r_{eff} X_0^2 \frac{E + E_{ph}}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$D = \frac{k^2 n^2 r_{eff} X_0 k_B T}{2e} \quad (\text{A.2})$$

où :

- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le vecteur d'onde du laser de longueur d'onde λ injecté ;
- n l'indice de réfraction du cristal ;
- r_{eff} le coefficient électro-optique effectif du cristal ;

- E et E_{ph} les champs électriques appliqué et induit par l'effet photo-voltaïque ;
- e la charge de l'électron ;
- T la température ;
- k_B la constante de Boltzmann ;
- X_0 une longueur arbitraire.

Cette longueur X_0 réduit les variables d'espace physiques x et z en les variables réduites X et Z de la façon suivante :

$$\begin{cases} X = \frac{x}{X_0} \\ Z = \frac{z}{kX_0^2} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Annexe B

Calcul des échanges d'énergie, des déflexions d'angle et des variations de largeur

Soient

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \varphi_1 \\ w_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \varphi_2 \\ w_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \varphi'_1 \\ w'_1 \\ I'_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \theta'_2 \\ \varphi'_2 \\ w'_2 \\ I'_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

les angles, phases, largeurs et intensités des solitons 1 et 2 avant la collision (variables non primées) et après la collision (variables primées).

Il est à noter que le choix des paramètres introduits ci-dessous dépend de la BPM.

B.1 Echanges d'énergie

B.1.1 Rebond et Croisement

Les énergies E_1 , E_2 , E'_1 et E'_2 désignent les énergies des solitons 1 et 2 avant et après la collision, moins les pertes radiatives $loss_1$ et $loss_2$ exprimées entre

0 et 1. On a :

$$\begin{cases} E_1 = W_1 I_1 (1 - loss_1) \\ E_2 = W_2 I_2 (1 - loss_2) \end{cases} \quad (B.2)$$

Soit E_1 la plus grande de ces énergies. En fonction de l'état 0 ou 1 de la variable $poor$, on décide si l'échange d'énergie va dans le sens d'un rééquilibrage ($E_1 \rightarrow E_2$) ou d'une plus grande disparité ($E_2 \rightarrow E_1$). Le coefficient α détermine la quantité d'énergie échangée de l'un à l'autre soliton, selon les cas précisés dans la Fig.B.1.

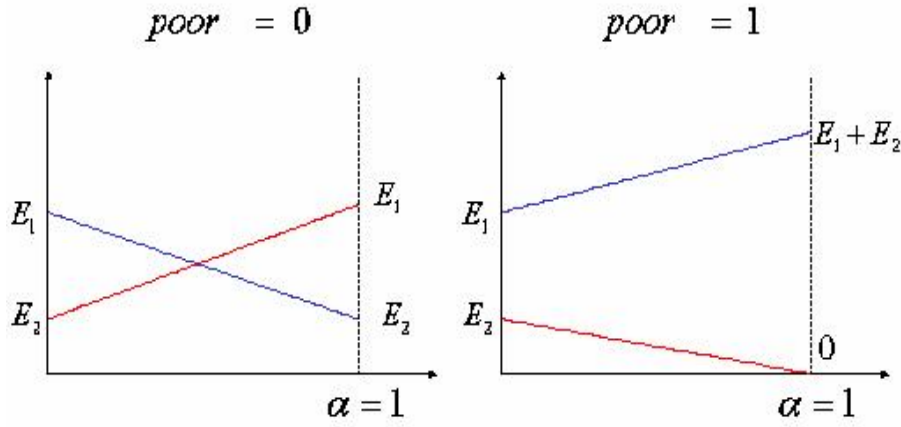


FIG. B.1 – Transferts d'énergie entre les solitons 1 et 2 en fonction du coefficient α et de la variable binaire $poor$.

Les équations d'échange sont

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 + \alpha(E_2 - E_1) \\ E'_2 = E_2 + \alpha(E_1 - E_2) \end{cases}, poor = 0; \begin{cases} E'_1 = E_1 + \alpha E_2 \\ E'_2 = E_2(1 - \alpha) \end{cases}, poor = 1 \quad (B.3)$$

à condition que $Max(E_1, E_2) = E_1$.

Les intensités post-collision sont alors calculables :

$$\begin{cases} I'_1 = \frac{E'_1}{w_1} \\ I'_2 = \frac{E'_2}{w_2} \end{cases} \quad (B.4)$$

car, dans le cadre du Programme de Modélisation, on définit simplement l'énergie d'un soliton par le produit de sa largeur et de son intensité.

B.1.2 Couplage

On a la configuration géométrique présentée sur la Fig.B.2.

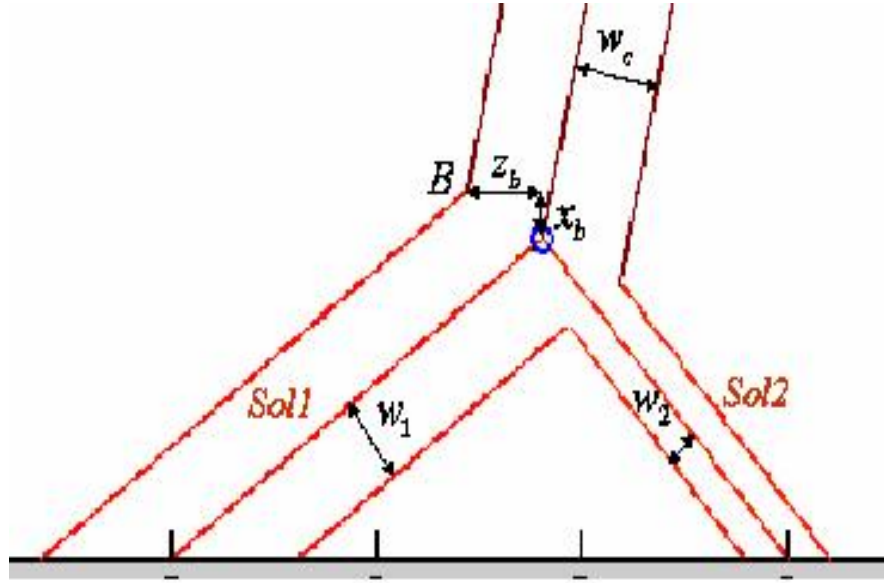


FIG. B.2 – Paramètres géométriques du couplage de deux solitons Sol_1 et Sol_2 .

La largeur w_c du couplage est calculée à partir des coordonnées relatives du point B par-rapport au noeud d'interaction :

$$w_c = \begin{cases} |(z_b - x_b \cot(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})) \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2})|, & \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \neq 0; \\ |x_b|, & \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 0 \end{cases} \quad (B.5)$$

On en déduit l'intensité du couplage (en supposant qu'il n'y a pas de perte d'énergie lors de la création du couplage) :

$$I_c = \frac{w_1 I_1 + w_2 I_2}{w_c} \quad (B.6)$$

B.1.3 Analogie croisement/rebond

La Fig.B.3 présente une situation de croisement telle qu'elle ressemble à un rebond.

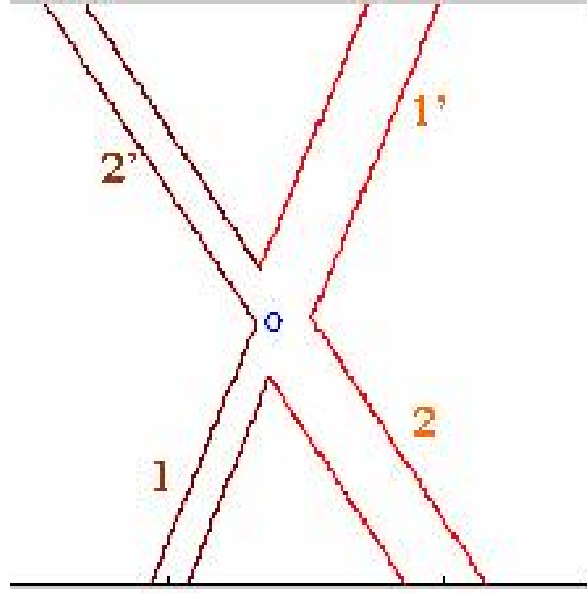


FIG. B.3 – Situation de croisement assimilable à un rebond.

L'énergie échangée entre les solitons est telle que l'on a

$$\begin{cases} I'_1 = I_2 \\ I'_2 = I_1 \\ w'_1 = w_2 \\ w'_2 = w_1 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

ce qui mène à $\alpha = 1$ (dans le cas $E_1 > E_2$, $poor = 0$ et sans pertes radiatives).

B.2 Angles

Les nouveaux angles des solitons à la sortie d'une interaction sont calculés à partir des coefficients $tsftangle_{12}$ et $tsftangle_{21}$ selon

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_1 + tsftangle_{21}(\theta_2 - \theta_1) \\ \theta'_2 = \theta_2 + tsftangle_{12}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Les variations des angles θ_1 et θ_2 en fonction des coefficients de transfert sont représentées sur la Fig.B.4.

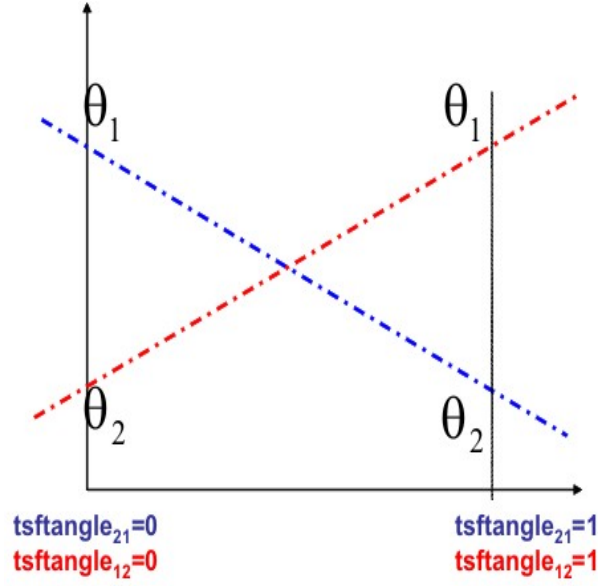


FIG. B.4 – Variations des angles θ_1 et θ_2 en fonction des coefficients de transfert $tsftangle_{12}$ et $tsftangle_{21}$.

A la différence du coefficient α , les coefficients $tsftangle_{12}$ et $tsftangle_{21}$ peuvent prendre des valeurs inférieures à 0 ou supérieures à 1.

B.2.1 Rebond

Dans le cas du rebond sans perturbation on a

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_2 \\ \theta'_2 = \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tsftangle_{12} = 1 \\ tsftangle_{21} = 1 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Si on apporte des perturbations ε_1 et ε_2 , les relations deviennent :

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_2 + \varepsilon_1 \\ \theta'_2 = \theta_1 + \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tsftangle_{21} = 1 + \frac{\varepsilon_1}{\theta_2 - \theta_1} \\ tsftangle_{12} = 1 + \frac{\varepsilon_2}{\theta_1 - \theta_2} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

B.2.2 Rebond avec "réflexion" d'un soliton sur un autre

Pour obtenir une telle interaction (Fig.B.5)

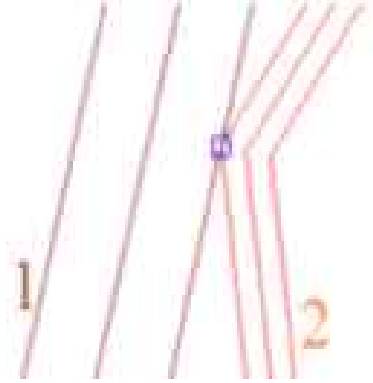


FIG. B.5 – Rebond où le soliton 2 se "réfléchit" sur le soliton 1

on doit avoir (avec $\theta_1 > \theta_2$) :

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_1 \\ \theta'_2 = \theta_1 + |\theta_1 - \theta_2| = 2\theta_1 - \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tsftangle_{21} = 0 \\ tsftangle_{12} = 2 + \frac{\varepsilon_2}{\theta_1 - \theta_2} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

B.2.3 Croisement

Pour un croisement sans perturbation, on a

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_1 \\ \theta'_2 = \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tsftangle_{21} = 0 \\ tsftangle_{12} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Si on apporte des perturbations ε_1 et ε_2 , les relations deviennent :

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_1 + \varepsilon_1 \\ \theta'_2 = \theta_2 + \varepsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tsftangle_{21} = \frac{\varepsilon_1}{\theta_2 - \theta_1} \\ tsftangle_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\theta_1 - \theta_2} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

B.3 Largeurs

Comme pour les angles, les variations de largeur sont régies par deux coefficients $tsftwidth_{12}$ et $tsftwidth_{21}$ selon

$$\begin{cases} r'_1 = r_1 + tsftwidth_{21}(r_2 - r_1) \\ r'_2 = r_2 + tsftwidth_{12}(r_1 - r_2) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Dans le cas "analogie croisement/rebond", on a simplement échange des deux largeurs soit

$$\begin{cases} tsftwidth_{21} = 1 \\ tsftwidth_{12} = 1 \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Annexe C

Divers outils mathématiques

C.1 La Corrélation Statistique et sa généralisation

Soient deux séries statistiques X et Y de N éléments X_i et Y_i ; on définit la *covariance* de X et Y par

$$Cov(X, Y) \equiv \sigma_{XY} = \sum_{i=1}^N \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{N} \quad (C.1)$$

où

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

et

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i.$$

Les variances $Var(X)$ et $Var(Y)$, définissant les écarts-types σ_X et σ_Y ,

$$\begin{cases} Var(X) \equiv \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(X_i - \bar{X})^2}{N} \\ Var(Y) \equiv \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{N} \end{cases} \quad (C.2)$$

permettent alors de définir la *Corrélation Statistique* [27] de X et Y :

$$Cor(X, Y) \equiv \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2\right) \left(\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2\right)}} \quad (C.3)$$

Nous généralisons cette formule à p séries statistiques S_l ($l = 1 \dots p$) d'éléments $S_l(i)$ à l'aide d'une multivariance Muv définie par

$$Muv(S_1 \dots S_p) \equiv \sigma_{S_1 \dots S_p} = \sum_{i=1}^N \frac{\prod_{l=1}^p |S_l(i) - \bar{S}_l|}{N} \quad (C.4)$$

avec

$$\bar{S}_l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_l(i).$$

Les valeurs absolues découlent d'une nécessité de non-annulation de la multivariance pour chaque série S_l (les moments bruts d'ordre impair s'annulant dans le cas de distributions régulières, on choisit par prévoyance les moments absolus). Cette multivariance pour une série S_l s'exprime :

$$Muv(S_l) \equiv \sigma_{S_l}^p = \sum_{i=1}^N \frac{|S_l(i) - \bar{S}_l|^p}{N} \quad (C.5)$$

Nous pouvons alors définir une *Multicorrélation Statistique* des séries S_l :

$$MultCor(S_1 \dots S_p) \equiv \frac{\sigma_{S_1 \dots S_p}}{\prod_{l=1}^p \sigma_{S_l}} = \frac{\sum_{i=1}^N \prod_{l=1}^p |S_l(i) - \bar{S}_l|}{\prod_{l=1}^p \left[\sum_{i=1}^N |S_l(i) - \bar{S}_l|^p \right]^{\frac{1}{p}}} \quad (C.6)$$

C.2 Coefficient de constance CC d'une série de données

Lors des discussions visant à déterminer si les caractérisations effectuées sont celles d'un chaos, on est amené à juger de la "robustesse" d'une décorrélation supposée exponentielle et par là-même du caractère constant de l'argument de cette exponentielle par rapport à l'amplitude de variations de conditions initiales.

Le caractère "constant" d'une série X est directement relié aux écarts de ses constituants X_i ($i = 1 \dots N$) à la moyenne $\overline{X}$; à cet effet, la Fig.C.1 montre graphiquement la position du problème.

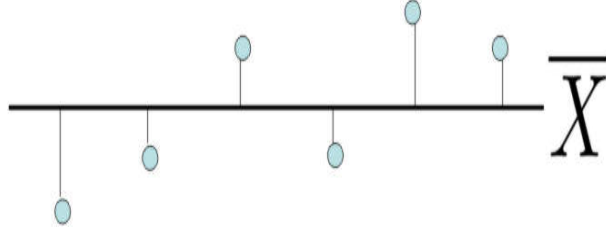


FIG. C.1 – Les éléments d'une série X et leurs écarts à la moyenne.

On définit alors par $\Xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X - \overline{X}|$ la moyenne des écarts absolus à la moyenne. Ξ valant au minimum 0 quand la série est parfaitement constante, on peut exprimer cette quantité comme une proportion ρ ($\rho \geq 0$) de la moyenne absolue $|\overline{X}|$:

$$\Xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X - \overline{X}| = \rho |\overline{X}|$$

d'où

$$\rho = \frac{1}{N|\overline{X}|} \sum_{i=1}^N |X - \overline{X}|$$

Or, on souhaiterait un estimateur qui vale 1 lorsque la constance est parfaite ; à cet effet, on définit finalement le Coefficient de Constance CC comme $CC \equiv 1 - \rho$, soit

$$CC = 1 - \frac{1}{N|\overline{X}|} \sum_{i=1}^N |X - \overline{X}| \quad (C.7)$$

Il est à noter que CC atteint 0 lorsque la moyenne Ξ des écarts absolus à la moyenne dépasse $\overline{X}$, c'est-à-dire quand *les écarts sont si grands qu'ils sont comparables à la valeur moyenne de la série*. Les écarts peuvent même être supérieurs, auquel cas CC deviendra négatif ; cette caractéristique montre que CC est un coefficient *non objectif* dont la nullité réfère au cas exposé plus haut. Mais il permet néanmoins de quantifier la constance de la série X selon

un critère que nous définissons par choix : la série X est globalement constante lorsque Ξ est inférieur à 15% de la moyenne $\bar{X}$, c'est-à-dire lorsque $CC > 15\%$.

C.3 Approximation linéaire des forces de complexité

C.3.1 Moindres carrés sous contrainte

Dans le Chapitre 6, nous cherchons à trouver une régression linéaire pour des quantités nommées Str variant avec NL et de telle sorte que la droite de régression obtenue passe par l'origine $(0, 0)$; Str et NL étant échantillonnés sous la forme Str_i et NL_i ($i = 1 \dots N$), on doit ainsi minimiser par rapport à $\tilde{\alpha}$ le *résidu* qui est la somme R^2 des écarts au carré $(Str_i - \tilde{\alpha}NL_i)^2$ entre la valeur Str_i et sa valeur estimée $\tilde{\alpha}NL_i$:

$$\frac{\partial R^2}{\partial \tilde{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}} \sum_{i=1}^N (Str_i - \tilde{\alpha}NL_i)^2 = 0 \quad (C.8)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}(NL_i^2 - NL_i Str_i) = 0$$

et

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^N NL_i Str_i}{\sum_{i=1}^N NL_i^2} \quad (C.9)$$

C.3.2 Rapport de résidus

L'approximation linéaire classique de Str laisse un résidu

$$R_{\alpha NL + \beta}^2 = \sum_{i=1}^N (Str_i - (\alpha NL_i + \beta))^2$$

et celui induit par l'approximation $\beta : Nul$

$$R_{\tilde{\alpha} NL}^2 = \sum_{i=1}^N (Str_i - (\tilde{\alpha}NL_i))^2.$$

Le rapport des résidus RR se définit alors comme

$$RR \equiv \frac{R_{\alpha NL}^2}{R_{\alpha NL+\beta}^2} \quad (\text{C.10})$$

On a toujours $RR \geq 1$ car l'approximation $\beta : Nul$ laisse toujours un résidu supérieur ou égal à celui obtenu de la méthode de l'approximation linéaire classique.

Annexe D

Résumé des concepts

L'ensemble des méthodes mises en oeuvre peut se résumer sous la forme d'un graphe dont les deux axes représentent le niveau d'abstraction et le niveau de caractérisation (Fig.D.1).

Le plus bas niveau d'abstraction correspond à la réalité physique ; la BPM fait monter d'un niveau d'abstraction. Se basant sur celle-ci via le Paradigme des Noeuds d'Interactions, le Programme de Modélisation fait perdre tout lien direct avec la physique.

Le Paradigme Global permet d'effectuer les premières caractérisations, sous la forme de courbes de décorrélations et d'associer à celle-ci des nombres, les forces de complexités, représentatives de l'intensité du désordre. Grâce à l'universalité du Paradigme Global, ces premières caractérisations se font aussi bien de manière évidente au niveau de la BPM que sur les images représentant la réalité physique. Dans le cas de celle-ci, une représentation spécifique concerne l'évolution des forces de complexités. Ces différentes caractérisations sont alors menées à leur niveau maximal lorsque :

- pour la BPM, on retrouve un lien direct vers l'équation dynamique originelle, sous la forme d'une proportionnalité directe entre force de complexité et coefficient non-linéaire ;
- pour la réalité physique, on calcule la multiforce de complexité, représentative de l'intensité du désordre dans tout le cristal utilisé pour toute

la durée de l'expérience.

Il est également possible de calculer une multicorrélation dans le cadre de la BPM ; on a alors un indicateur qui renseigne sur les perturbations qu'a subies le cristal simulé.

Il peut être établi un lien indirect entre les caractéristiques physiques du cristal (son coefficient électro-optique et son indice de réfraction), les conditions expérimentales (longueur d'onde du laser utilisé et champ électrique appliqué) d'une part et les estimateurs de complexité d'autre part : ce lien est établi par le coefficient non-linéaire.

La Méthode de Conformation d'Événements, en revanche, ne permet pas des caractérisations aussi poussées ; on arrive néanmoins à estimer des décorrelations sur des cartes de noeuds. Et il est possible a posteriori de remonter vers la BPM en établissant, par ajustement des paramètres du Programme de Modélisation, l'équivalence numérique entre les deux descriptions de la décorrelation.

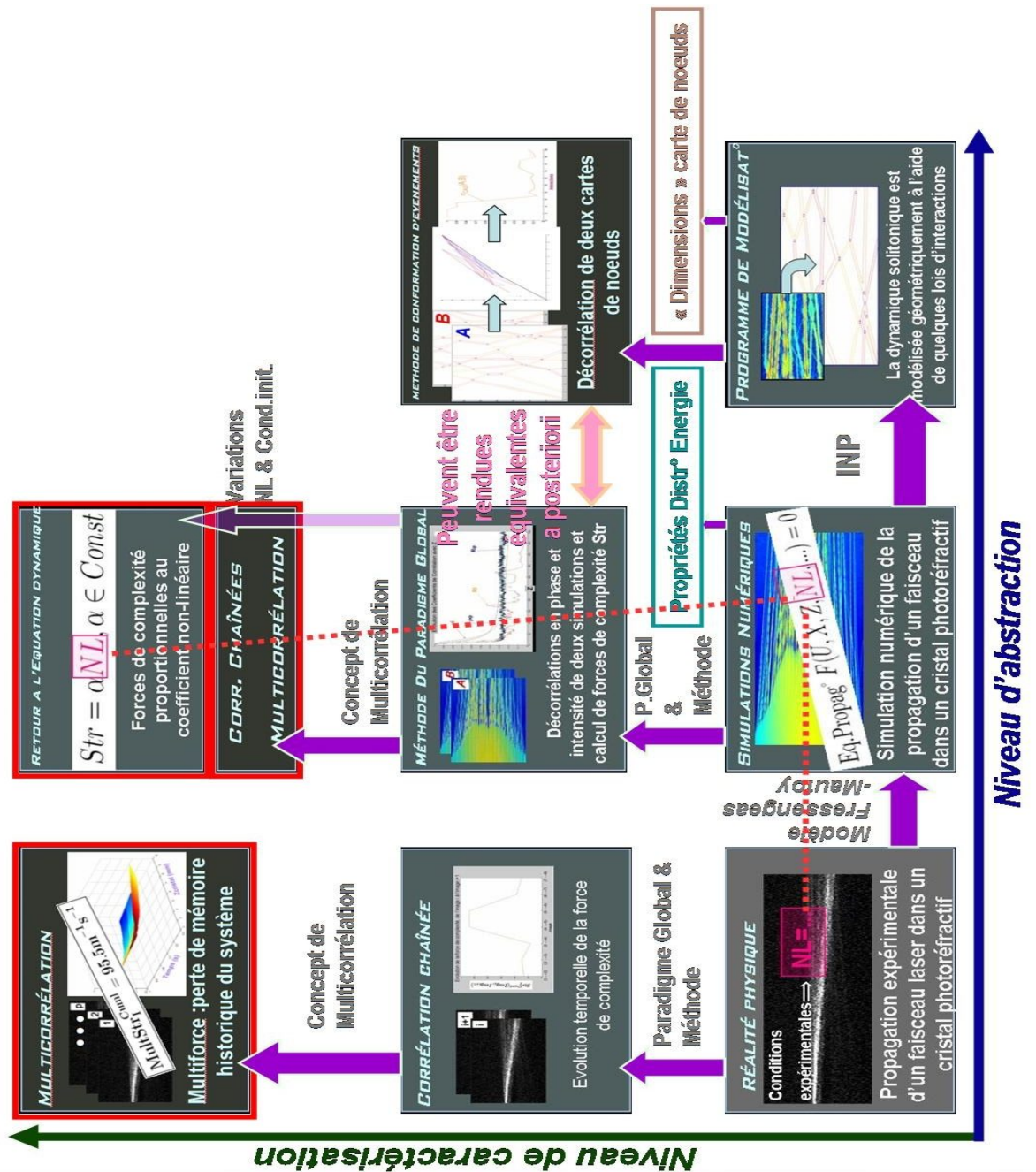


FIG. D.1 – Les Méthodes en termes d'abstraction et de caractérisation.

Annexe E

Résumé des méthodes de calcul de dimensions

E.1 Les q -dimensions de Renyi généralisées (RGD)

Soit A un sous-ensemble borné de l'espace bidimensionnel $\mathbb{R}^2$. Pour $\varepsilon > 0$, nous considérons un maillage de carrés de côté ε , nommés $S_1, S_2, \dots$. L'occupation $p_i(\varepsilon)$ d'un carré est alors définie par :

$$p_i(\varepsilon) = \frac{Mes(A \cap S_i)}{Mes(A)} \quad (\text{E.1})$$

Pour une carte de noeuds, l'occupation d'un carré S_i est le rapport du nombre n_i de noeuds contenus dedans par le nombre N total de noeuds dans la carte :

$$p_i(\varepsilon) = \frac{n_i}{N} \quad (\text{E.2})$$

Une q -dimension de Rényi généralisée [31] se définit alors par :

$$D_q(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i p_i(\varepsilon)^q}{\ln \varepsilon} \quad (\text{E.3})$$

Les cas importants sont donnés par :

- $q = 0$: avec par convention $0^0 = 0$, d'où $\sum_i p_i(\varepsilon)^0 = \hat{N}(A, \varepsilon)$ où $\hat{N}(A, \varepsilon)$ est le nombre de carrés de côté ε qui contiennent au moins un noeud.

Alors

$$D_0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \hat{N}(A, \varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

et D_0 est la **Dimension Fractale** [30] de A ;

- $q = 1$: en appliquant la règle de l'Hospital,

$$D_1(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln \sum_i p_i(\varepsilon)^q}{q - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i(\varepsilon) \ln p_i(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

la quantité $p_i(\varepsilon) \ln p_i(\varepsilon)$ étant reliée à l'entropie, cette dimension s'appelle la **Dimension d'Information** [38] de A ;

- $q = 2$: ceci donne

$$D_2(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i p_i(\varepsilon)^2}{\ln \varepsilon}$$

le numérateur correspondant à la probabilité que deux noeuds résident dans le même carré, cette dimension se nomme la **Dimension de Corrélation** [39] de A .

E.2 La fonction de corrélation de Pawelzik-Schuster généralisée ($PSGCF$)

Dans ce qui suit, les indices i et j figurant dans des sommes où d'autres contextes seront toujours différents. Soit $|\vec{\eta}_i - \vec{\eta}_j|$ la distance entre deux noeuds η_i et η_j . La fonction de corrélation de Pawelzik-Schuster généralisée $C_q(r)$ est alors définie par [32] :

$$C_q(r) = \left[\frac{1}{N} \sum_i \left[\frac{1}{N} \sum_j \Theta(r - |\vec{\eta}_i - \vec{\eta}_j|) \right]^{q-1} \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (\text{E.4})$$

où $\Theta(x)$ est la fonction de Heaviside :

$$\begin{cases} \Theta(x) = 1, x \leq 0; \\ \Theta(x) = 0, x > 0. \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

Les dimensions D_q s'écrivent alors :

$$D_q = \lim_{N \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \frac{\ln C_q(r)}{\ln r} \quad (\text{E.6})$$

Ainsi les définitions alternatives pour les dimensions fractale, d'information et de corrélation sont-elles données par :

•

$$D_0 = \lim_{N \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\sum_i \frac{1}{\sum_j \Theta(r - |\vec{\eta}_i - \vec{\eta}_j|)} \right]}{\ln \frac{1}{r}}$$

•

$$D_1 = \lim_{N \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \frac{\sum_i \ln \left[\frac{1}{N} \sum_j \Theta(r - |\vec{\eta}_i - \vec{\eta}_j|) \right]}{N \ln r}$$

•

$$D_2 = \lim_{N \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \frac{\ln \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(r - |\vec{\eta}_i - \vec{\eta}_j|) \right]}{\ln r}$$

E.3 Adaptation des méthodes, leur complexité et choix d'une d'entre elles

E.3.1 Prendre la pente et non la limite

Ces deux méthodes utilisent des calculs de limite, ce qui n'est pas aisé dans notre cas de cartes de noeuds ; alors, au lieu de prendre des limites, il est plus efficace de représenter le numérateur en fonction du dénominateur, ces deux quantités figurant dans la définition de la limite, pour *RGD* et *PSGCF*.

E.3.2 Complexités

- La méthode *RGD* est implémentée en utilisant une grille construite de la manière suivante : à chaque nouveau pas, elle est divisée par deux dans chaque direction. Autrement dit, au pas 0, la grille fait la taille de la fenêtre entourant la carte des noeuds, au pas 1, la grille contient 2×2 cellules, ..., au pas n elle contient 2^{2n} . Pour un nombre total de pas n ,

$1 + 4 + 16 + \dots + 2^{2n} = \sum_i^n 2^{2i} = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)(2^{n+1} + 1)$ calculs sont nécessaires ; leur durée est proportionnelle à la quantité d'information à traiter, soit le nombre de noeuds N . Cette méthode a donc une complexité en $O(\frac{N \times 2^{2(n+1)}}{3})$; cette complexité exponentielle n'est néanmoins pas préoccupante, car un pas faible suffit (typiquement $n = 10$).

- La méthode *PSGCF* peut être implémentée en utilisant la même grille utilisée pour *RGD*. Mais cette fois, les cellules de la grille doivent contenir des *paires* de noeuds dont la distance est inférieure à la taille de ces cellules. Comme le traitement de ces paires requiert une double somme sur N avec $i \neq j$, la durée des $\approx \frac{2^{2(n+1)}}{3}$ calculs est proportionnelle à $N(N-1) \rightarrow N^2$. La méthode *PSGCF* possède donc une complexité en $O(\frac{N^2 \times 2^{2(n+1)}}{3})$. Mais cela signifie que l'on utilise deux fois chaque paire (i, j) ; en modifiant l'algorithme de manière à ce que chaque paire ne soit calculée qu'une fois, on réduit la complexité à $O(\frac{N^2 \times 2^{2n+1}}{3})$.

Il est clair que nous faisons le choix de la méthode *RGD* dont la complexité est plus basse et linéaire en N .

Annexe F

Les estimateurs utilisés en économétrie

L'économétrie est une sous-branche de l'économie vouée à quantifier comment la richesse se répartit dans une population. La description la plus utilisée est la courbe de Lorenz [40], développée en 1905 comme une représentation graphique de la distribution de salaires. Pour les $x\%$ des ménages ou personnes les moins riches, elle montre la part $y\%$ de la richesse totale qu'ils perçoivent. Ainsi que l'esquisse la Fig.F.1, une courbe de Lorenz a deux limites. Celle supérieure est la *ligne de parfaite égalité*, qui représente une situation où chaque personne ou ménage perçoit le même salaire : cette distribution est donc figurée par la droite $y = x$. La limite inférieure s'appelle au contraire la *ligne de parfaite inégalité*, où un seul individu perçoit la totalité des richesses : cette distribution tend vers une ligne horizontale à $y = 0\%$ pour x appartenant à $[0; 100\%[$ et le point $y = 100\%$ pour $x = 100\%$. La courbe de Lorenz reste toujours entre ces deux extrêmes.

De cette courbe on peut tirer deux estimateurs d'inégalité, le coefficient de Gini G et l'indice Robin-des-Bois RHI . Un troisième estimateur, l'entropie de Theil T est quand à lui dérivé de la théorie de l'information.

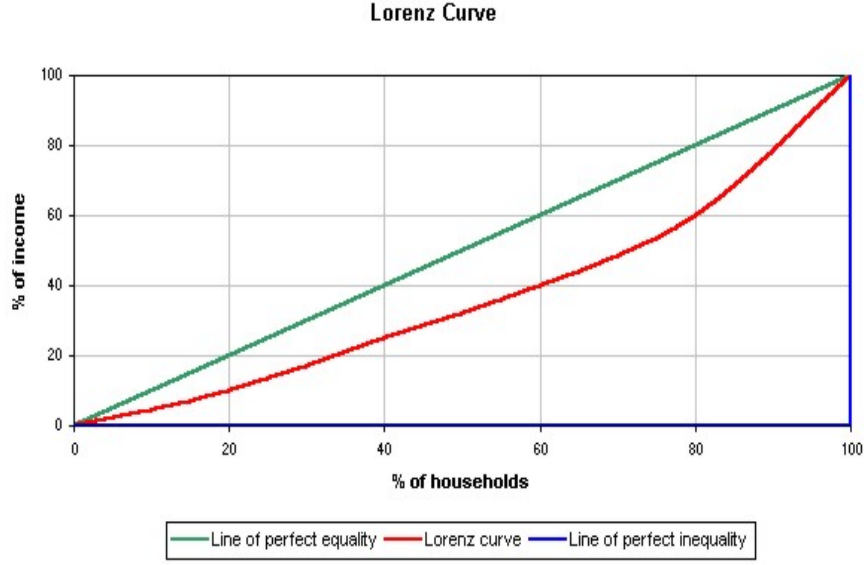


FIG. F.1 – La courbe de Lorenz avec les lignes de parfaites égalité et inégalité

F.1 Estimateurs dérivés de la courbe de Lorenz

F.1.1 Coefficient de Gini G

Introduit par C.Gini en 1912 [35], c'est l'estimateur d'inégalité le plus couramment utilisé. Si l'on appelle A l'aire entre la ligne de parfaite égalité et la courbe de Lorenz et B l'aire sous celle-ci (Fig.F.2), alors le coefficient de Gini est donné par

$$G = \frac{A}{A + B} \quad (\text{F.1})$$

On a toujours $G \in [0, 1]$; plus G est grand, plus la distribution est inégalitaire. Pour une distribution parfaitement égalitaire, $G = 0$; pour une distribution parfaitement inégalitaire, $G = 1$.

Le calcul pratique du coefficient de Gini est plutôt effectué en utilisant l'équation suivante, pour une distribution y_i de moyenne μ :

$$G = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j|}{2n^2 \mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j|}{2n \sum_{i=1}^n y_i} \quad (\text{F.2})$$

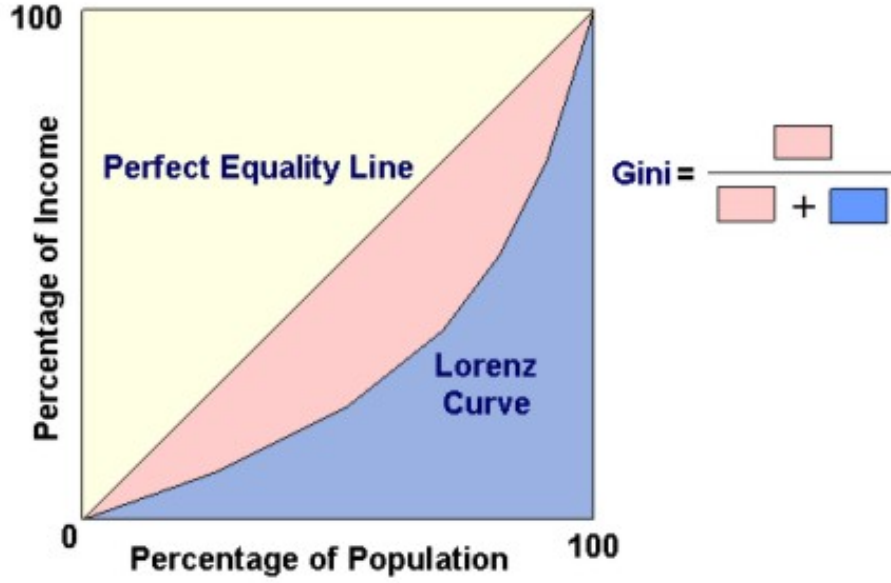


FIG. F.2 – Calcul du coefficient de Gini à partir de la courbe de Lorenz

F.1.2 L'indice Robin-des-Bois RHI

Il se définit comme la distance verticale maximale entre la courbe de Lorenz et la ligne de parfaite égalité (Fig.F.3). Il réalise une approximation du pourcentage de richesses total qui doit être transféré des individus au-dessus de la moyenne vers ceux en-dessous afin d'atteindre l'égalité de la distribution de richesses [36].

F.2 Entropie de Theil T

L'entropie de Theil T [37] d'une distribution est définie comme l'entropie maximale que le système peut atteindre moins son entropie :

$$T = \sum_{i=1}^n s_i [\log s_i - \log(1/n)] \quad (\text{F.3})$$

avec $s_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$ la part de l'individu i dans la distribution.

L'entropie de Theil est par conséquent une *néguentropie* : plus T est bas, plus l'entropie est élevée. Pour une égalité parfaite dans la distribution, $T = 0$

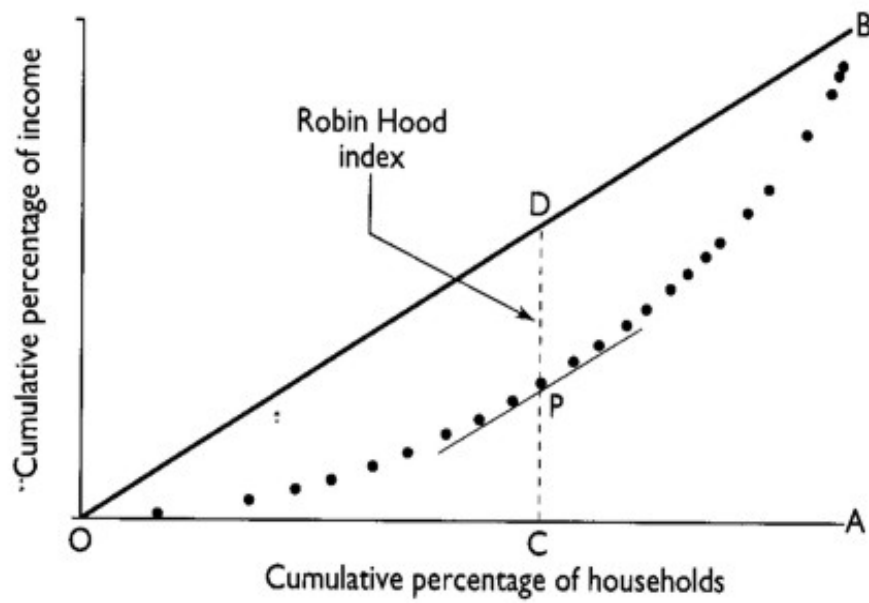


FIG. F.3 – L'indice Robin-des-Bois RHI est donné par la distance (DP)

alors que $T = \log(n)$ pour l'inégalité parfaite ; autrement dit, bien que cela soit contraire à l'intuition, une forte entropie est synonyme d'égalité alors qu'une entropie basse signifie une inégalité élevée.

Annexe G

Les interfaces graphiques

Le logiciel Matlab permet la création d'*interfaces graphiques* qui permettent une prise en charge rapide et conviviale des paramètres de programmes et du lancement de ceux-ci. L'analyse à plusieurs niveaux de la dynamique de solitons photoréfractifs a ainsi créé la nécessité de regrouper les grands ensembles de caractérisation en de telles interfaces, dont la description détaillée suit.

G.1 Les interfaces basées sur le Paradigme des Noeuds d'Interactions

Les interfaces suivantes utilisent le Programme de Modélisation et ses résultats.

G.1.1 "Self-Characterization of a Random Configuration"

Elle crée une configuration aléatoire de solitons dont le nombre est défini par l'utilisateur, ainsi qu'entre autres les paramètres θ_{ref} , φ_{ref} et L_0 du programme de modélisation. Celui-ci est appliqué à la configuration ainsi créée et il devient alors possible de représenter la dynamique de solitons obtenue, de même que la carte des noeuds et la carte de phases aux noeuds correspondantes.

L'utilisateur peut aussi lancer le calcul des diverses dimensions définies en

E et afficher leurs courbes et leurs valeurs.

Enfin, une représentation du chemin d'événements relatif à la dynamique créée est également possible.

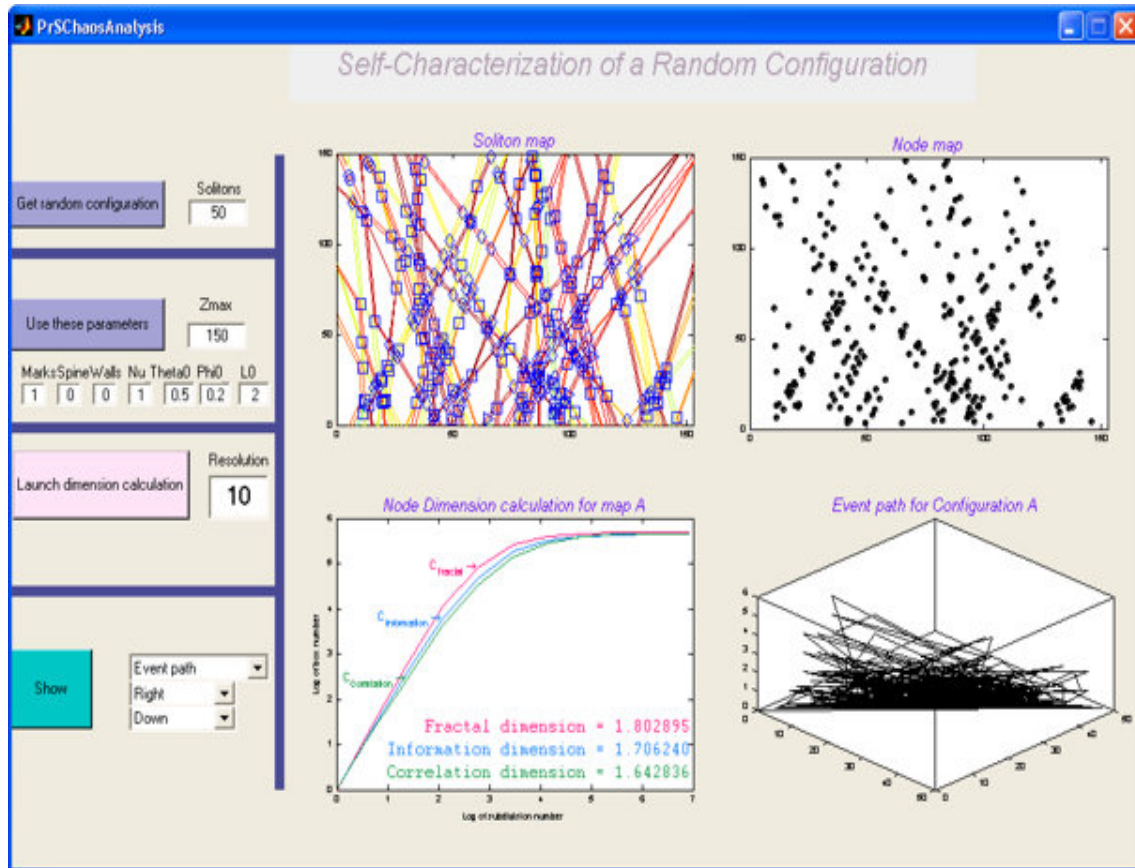


FIG. G.1 – L'interface caractérisant une seule dynamique de solitons

G.1.2 "Quantizing the Divergence of Two Near-But-Different Maps"

Cette interface permet l'application pratique de la Méthode de Conformation d'Événements. Comme pour l'interface présentée en G.1.1, l'utilisateur lance la création et la simulation d'une configuration aléatoire de solitons nommée cette fois-ci *A*. Puis il lance une configuration *B* comme identique à *A* sauf pour la phase ou l'angle ou la position d'un certain soliton, qui sera modifié

d'un certain pourcentage. Bien entendu, tous les choix de perturbation sont laissés à la convenance de l'utilisateur.

Il devient alors possible, pour A et B , de représenter les dynamiques de solitons, les cartes de noeuds, les cartes de phases aux noeuds et les chemins d'événements. Ces derniers peuvent être représentés en bleu et en rouge sur le même graphique.

La divergence entre les cartes A et B peut être alors calculée selon le formalisme des coefficients de corrélation définis en 5.2.2.2. Il sera possible de représenter l'évolution des coefficients de corrélation d'événements avec le nombre d'interactions ainsi que l'évolution de la corrélation interphase.

Enfin, la comparaison des diverses dimensions des cartes A et B est également un des choix de cette interface.

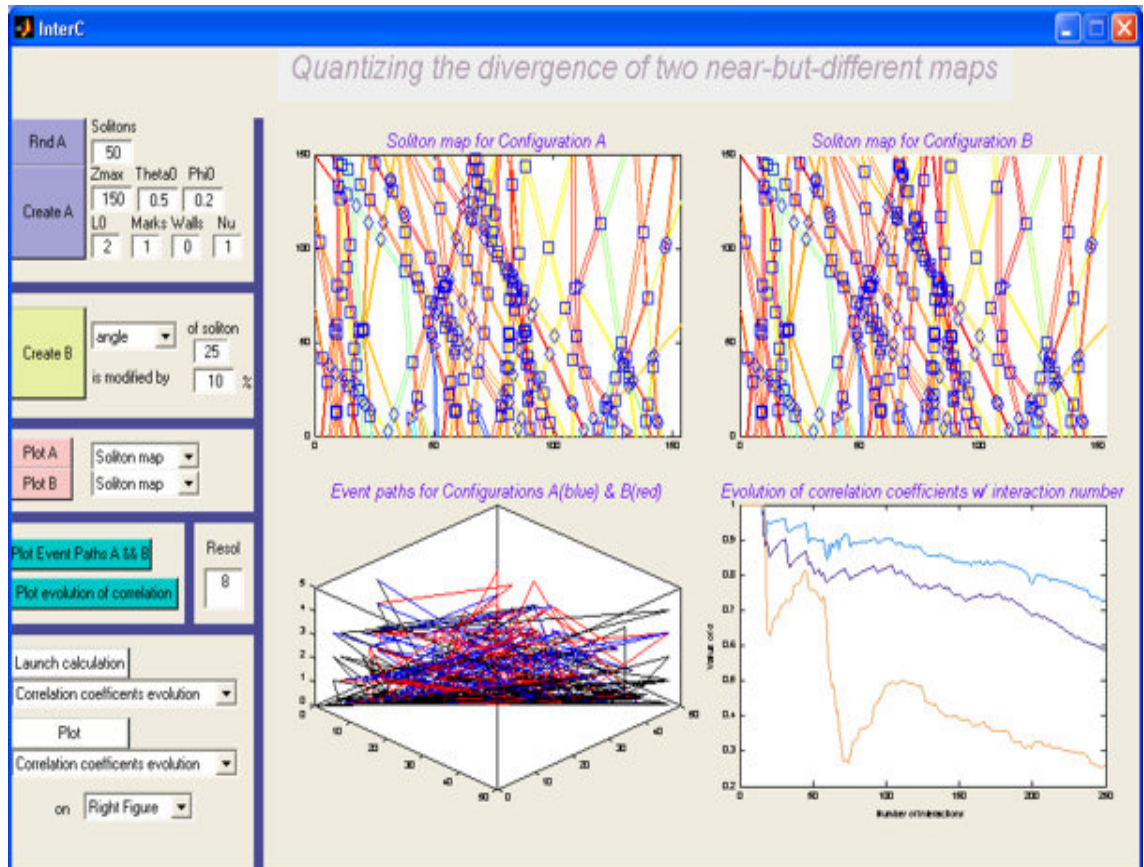


FIG. G.2 – L'interface caractérisant la divergence entre deux dynamiques de solitons

G.1.3 "Sensitivity to Initial Conditions"

Cette interface a été créée afin de voir quelle est la sensibilité d'une configuration de solitons face à l'amplitude de modification d'une des conditions initiales.

Une configuration aléatoire dite "de référence" est créée selon les mêmes modalités que ci-dessus. L'utilisateur va alors définir le type (angle, phase ou position) et le lieu (numéro du soliton à perturber) de la perturbation, ainsi que l'amplitude de celle-ci. Puis ayant entré un facteur de décroissance a , l'interface va alors calculer les divergences entre la dynamique de référence et une série de dynamiques où la perturbation subira une décroissance exponentielle avec une alternance de signes. Par exemple, pour une perturbation initiale de 20% et $a = 2$, la série de perturbation sera : 20%, -20%, 10%, -10%, 5%, -5%, 2.5%, -2.5%, ... La taille de cette série est définie par l'utilisateur.

Il sera alors possible, pour toutes les modifications, de représenter les valeurs finales de l'estimateur σ_{CAS} , les coefficients α de l'approximation en exponentielle inverse de la courbe σ_{CAS} ainsi que les qualités de ces approximations.

Enfin, à partir d'une certaine perturbation définie, l'interface pourra représenter l'évolution avec le nombre d'interactions du taux de divergence.

G.2 Les interfaces basées sur le Paradigme Global

Ces interfaces utilisent la BPM.

G.2.1 "Global Paradigm Method"

Dans le cadre de cette interface, l'utilisateur saisit d'abord les caractéristiques des deux faisceaux gaussiens à simuler (waists et amplitudes). Puis les paramètres de simulation sont entrés : coefficient non-linéaire, temps, résolutions, pas ... Les paramètres du filtrage hypergaussien (cf. 2.1.3) sont également

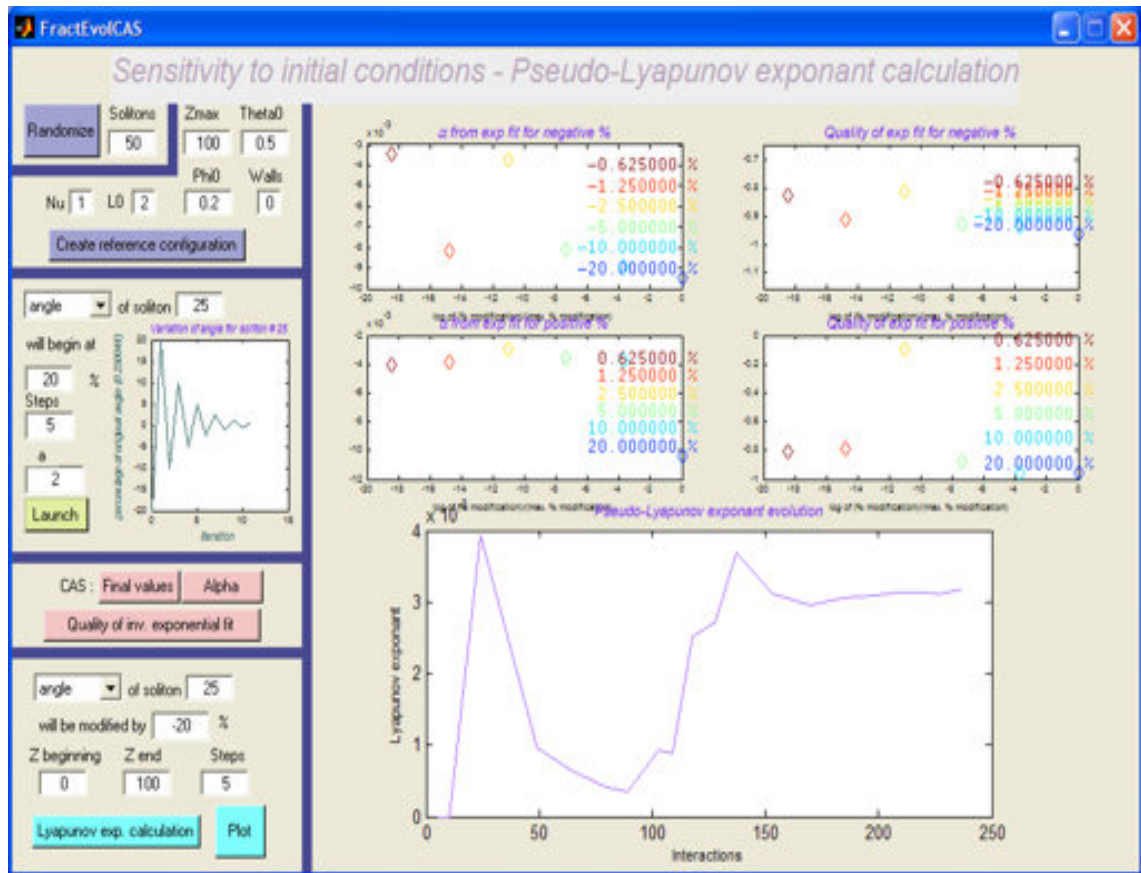


FIG. G.3 – L'interface caractérisant la sensibilité aux conditions initiales dans le cadre de la Méthode de Conformations d'Événements

définissables.

Puis l'algorithme de simulation est lancé, et, à la fin de celui-ci, la Méthode du Paradigme Global. Il devient alors possible de représenter les propagations des deux faisceaux simulés, ainsi que toutes les caractérisations décrites au Chapitre 6 : évolution des coefficients de corrélations cumulatifs et instantanés, évolutions des taux de divergence cumulatifs et instantanés et enfin affichages des valeurs des quatre forces de complexité, des coefficients α des approximations en exponentielle inverse des courbes de décorrélation cumulatives et les qualités de ces approximations.

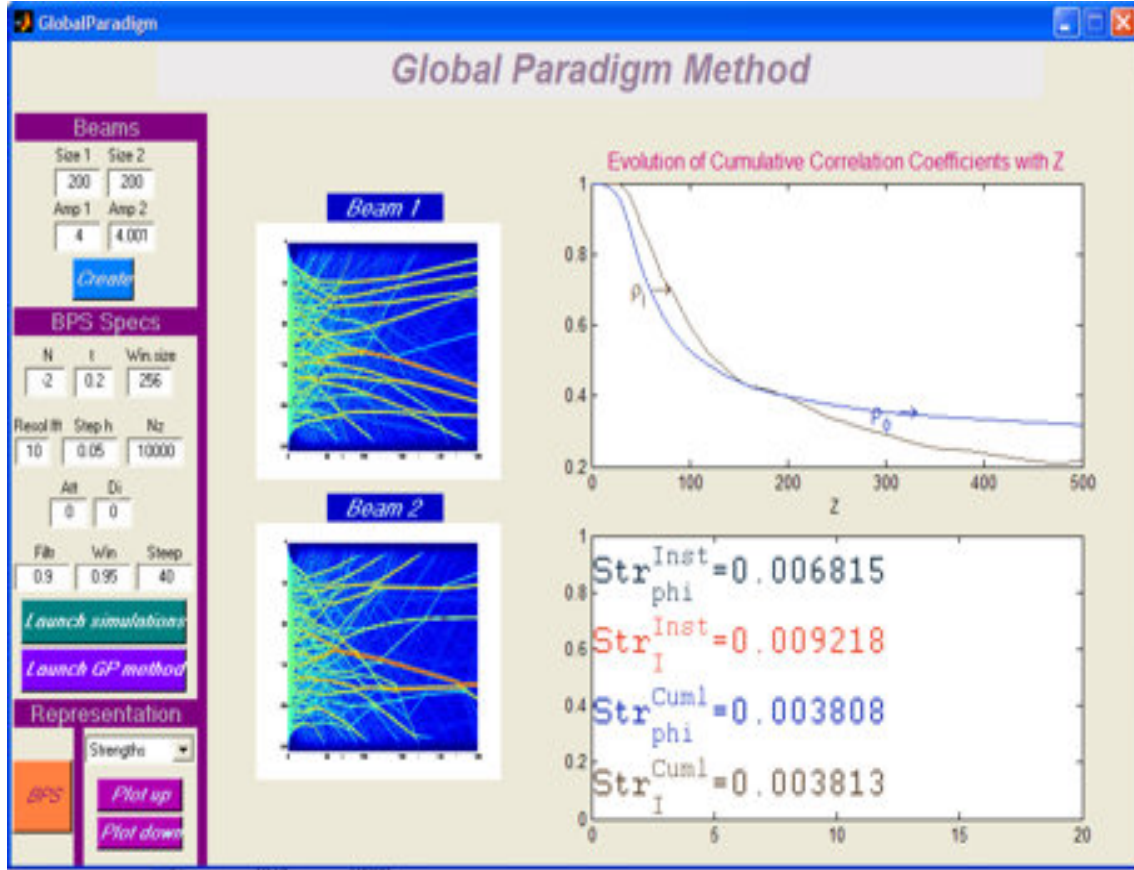


FIG. G.4 – L'interface appliquant la Méthode du Paradigme Global à deux simulations numériques

G.2.2 "Simulating a Real Filamentation Experience with BPM"

A partir de conditions expérimentales définies par l'utilisateur, cette interface est vouée à représenter comment la *BPM* modélise une telle expérience.

Premièrement, l'utilisateur entre les caractéristiques physiques du cristal (coefficient électro-optique effectif, indice de réfraction, longueur et largeur) et les données concernant le laser à y injecter (waist, puissance et longueur d'onde). Après avoir renseigné les paramètres de résolution de la BPM ainsi que la température à laquelle l'expérience serait menée, l'utilisateur définit le champ électrique appliqué à ce cristal, sous la forme d'une composante continue et d'une composante perturbatrice sinusoïdale de son choix. La durée

de l'expérience et le nombre d'images ayant été définis, les simulations sont lancées.

Il devient alors possible de représenter le film de l'expérience, constitué de la succession temporelle ces simulations numériques. Il est également possible, comme cela a été utilisé en 7.2.3, de représenter les évolutions temporelles conjointes des valeurs normalisées du coefficient non-linéaire et des forces cumulatives de phase et d'intensité, afin de saisir le fort lien entre $|NL|$ et la force de phase.

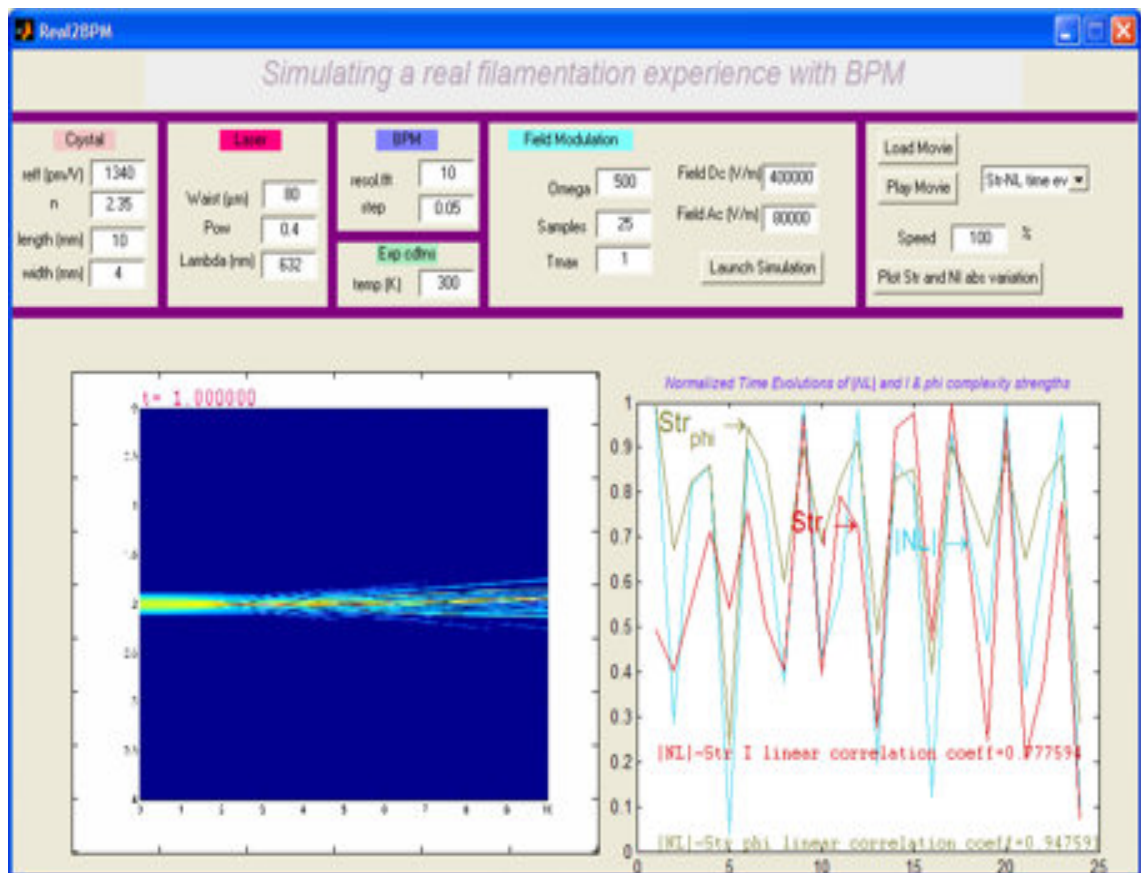


FIG. G.5 – L'interface recréant une expérience de filamentation grâce à la BPM