



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE-METZ

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE-METZ

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Souad TAHIR

Laboratoire : LMAM

Unité mixte de recherche : 7122 du CNRS

École Doctorale : IAEM Lorraine

Titre de la thèse :

Méthodes d'approximation par éléments finis et analyse a posteriori d'inéquations variationnelles modélisant des problèmes de fissures en élasticité linéaire

soutenu le 15 décembre 2006 devant le jury composé de :

Frédéric HECHT	PROFESSEUR JLL PARIS IV	Rapporteurs
Yves RENARD	MAÎTRE DE CONFÉRENCES INSA LYON	
Christine BERNARDI	DIRECTEUR DE RECHERCHE CNRS JLL PARIS IV	Examineurs
Jan SOKOLOWSKI	PROFESSEUR IECN NANCY I	
Mourad CHOULLI	PROFESSEUR LMAM METZ	
Zakaria BELHACHMI	DIRECTEUR DE THÈSE	

Remerciements

Je suis heureuse de pouvoir adresser mes remerciements à Monsieur BEL-HACHMI Zakaria, directeur de cette thèse, pour avoir encadré mon travail depuis le D.E.A et pendant ces années de thèse. pour ses conseils et son soutien tout au long de ce travail, j'en suis très reconnaissante.

J'exprime mes sincères remerciements à Madame Christine BERNARDI pour avoir présidé mon jury de thèse, J'en suis très honorée et je la remercie vivement. Je tiens également à remercier Messieurs Frédéric HECHT et Yves RENARD qui m'ont fait le grand honneur d'apporter leur jugement sur ce travail, ainsi qu'à Messieurs Jan SOKOLOWSKI et Mourad CHOULLI d'avoir bien voulu examiner cette étude, je les remercie chaleureusement pour l'effort important qu'ils ont fourni et pour l'intérêt qu'ils ont manifesté.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à Jean-Marc SAC-EPÉE pour son aide et ses nombreux conseils.

À mes parents, à mes frères et à mes soeurs, qui m'ont beaucoup soutenues et encouragés le long de ce trajet.

Un très grand merci à mon époux Mohamed, ma fille Chayma et mon fils Nawfal, de m'avoir supporté et aidé. Je ne sais comment vous remercier pour tout ce que je vous dois.

Je remercie également le reste de ma famille et mes amis qui n'ont pas hésité à prendre de leur temps pour m'aider dans les moments les plus difficiles.

Résumé

L'objet de ce travail de thèse est l'analyse mathématique et numérique de problèmes d'élasticité linéarisée posés dans des domaines comportant des fissures et issus de la mécanique de contact. Les conditions aux limites sur les fissures sont de type contact unilatéral. Du point de vue mathématique, les problèmes sont formulés dans le cadre de la théorie des inéquations variationnelles. Nous nous sommes intéressés à décrire et étudier des formulations qui prennent en compte les conditions de contact mais, et c'est là l'originalité de ce travail, qui prennent en compte aussi la géométrie, c'est-à-dire, les fissures.

Le mémoire de thèse se divise en deux parties. La première porte sur une formulation dite de domaine régulier qui consiste à étendre les équations au domaine entier sans se préoccuper de la fissure en tant qu'objet géométrique. Les conditions de contact sur la(es) fissures sont alors pris en compte dans la formulation par le biais des espaces fonctionnels. Nous effectuons l'analyse mathématique de cette formulation et nous introduisons deux discrétisations par la méthode des éléments finis. La première discrétisation est écrite pour la formulation du problème d'élasticité avec symétrie du tenseur des contraintes, alors que la seconde discrétisation est basée sur une formulation de Hellinger-Reissner modifiée sans symétrie du tenseur des contraintes. Pour chacune des deux discrétisations, nous introduisons les éléments finis appropriés. Nous effectuons l'analyse d'erreur et nous obtenons les vitesses de convergence optimales pour ce type d'inéquations variationnelles. Nous présentons aussi la mise en oeuvre de chaque cas et nous donnons des résultats numériques qui confirment les résultats théoriques.

La deuxième partie est dédiée à la méthode de domaines fictifs pour des inéquations variationnelles. Nous considérons le cas du problème de Signorini pour le système d'élasticité là aussi il s'agit d'étudier une méthode nouvelle. Nous effectuons l'analyse numérique aussi bien l'analyse a priori et résultats de convergence que l'analyse a posteriori. Nous introduisons de nouveaux outils d'analyse a posteriori qui sont des indicateurs d'erreur par résidu et nous montrons leur optimalité par rapport au pas de discrétisation. Nous nous en servons pour une stratégie de discrétisation qui est à la fois adaptative et aussi multi-étape. Nous effectuons la mise en oeuvre de la méthode et donnons quelques résultats numériques.

Mots-clés

Analyse a posteriori, Domaines fictifs, Domaines réguliers, Méthodes d'approximation, Problèmes de fissures, Contact unilatéral, Elasticité linéaire.

Abstract

In this PHD-Thesis, we perform the mathematical and the numerical analysis of models in the linearized elasticity for cracked materials arising in the mechanics of contact. The boundary conditions on the cracks faces are of unilateral contact type. From the mathematical point of view, such problems are formulated within the framework of the theory of the variational inequalities. We describe and study formulations which take into account the boundary conditions of the contact and, this the novelty in this work, which also take into account the geometry.

The report of the dissertation is divided into two parts. The first part concerns a formulation known as “a regular domain formulation”. It consists in extending the equations to the entire domain including the cracks. The conditions of contact on the crack are taken into account in the functional spaces. We carry out the mathematical analysis of this formulation and we consider two discretizations by the finite element method. The first discretization is written for the formulation with symmetry of the stress tensor, whereas the second discretization is based on a modified Hellinger-Reissner formulation with broken symmetry (of the stress tensor). For each discretization, we introduce the suitable finite elements. We obtain optimal convergence rates for this type of variational inequalities. We explain the implementation and we give numerical results which confirm the theoretical results.

The second part is dedicated to a fictitious domain method for such variational inequalities. We consider the case of the frictionless Signorini problem for the elasticity system. We carry out the numerical analysis to obtain optimal a priori estimates and results of convergence with respect to the discretization parameter. We also perform the a posteriori analysis by residual error estimates. We introduce new tools for such an analysis which are residual error indicators and we show their optimality with respect to the step size of discretization and their efficiency. These tools allow us to define an adaptive strategy to solve such problems. The adaptivity in this context is in fact a multi-step strategy where the initial problem is first "approximated in the infinite dimensional setting" before the discretization. The implementation details and some numerical results are given.

Keywords

A posteriori analysis, fictitious domains, regular domains, Methods of approximation, crack problems, unilateral contact, linear elasticity.

Table des matières

Table des matières	5
Introduction générale	9
I Méthode du domaine régulier pour des problèmes de fissures de type contact unilatéral en élasticité linéaire	13
1 Méthode du domaine régulier pour la formulation mixte de Hellinger-Reissner	15
1.1 Introduction : État de l'art	15
1.2 Notations et préliminaires	16
1.3 Formulation du problème de contact unilatéral	20
1.3.1 Formulation variationnelle en déplacement	21
1.3.2 Formulation variationnelle mixte	22
1.4 Formulation variationnelle étendue à Ω : méthode du domaine régulier	24
1.4.1 Formulation de Lagrangien augmenté	25
1.4.2 Formulation mixte hybride	28
2 Discrétisation et approximation par des éléments finis mixtes et hybrides : éléments finis mixtes avec symétrie du tenseur des contraintes	31
2.1 Introduction	31
2.2 Problème discret	31
2.2.1 Élément d'Arnold et Winther	31
2.2.2 Élément fini " P_1 - P_1 bulle"	40
3 Mise en oeuvre et résultats numériques.	43
3.1 Introduction	43
3.2 Formulation matricielle	43
3.2.1 Élimination des fonctions bulles	46

3.3	Mise sous forme de problème de minimisation	50
3.4	Résultats numériques	50
4	Méthode du domaine régulier pour la formulation mixte de Hellinger-Reissner modifiée	59
4.1	Introduction	59
4.2	Formulation du problème continu	59
4.2.1	Formulation mixte dans le domaine fissuré Ω_c	60
4.3	formulation étendue au domaine régulier	62
4.3.1	Formulation hybride	63
5	Discrétisation et approximation : éléments finis mixtes sans symétrie du tenseur des contraintes	65
5.1	Introduction	65
5.2	Élément fini "PEERS"	66
5.2.1	Définition	66
5.2.2	Problème discret	67
5.3	Élément fini BDM d'ordre 0	69
5.3.1	Définition	69
5.4	Estimation d'erreur	69
6	Mise en oeuvre numérique	75
6.1	Notations et préliminaires	75
6.2	Implémentation de l'élément fini PEERS	76
6.2.1	Construction des matrices	79
6.3	Résolution du système linéaire	86
6.3.1	Mise sous forme de problème de minimisation	86
6.3.2	Post-traitement	87
6.4	Exemples et résultats numériques	89
6.4.1	Exemple 1 : L-Shape	89
6.4.2	Exemple 2 : Membrane de Cook	90
6.5	Implémentation de l'élément fini BDM0	90
6.5.1	Bases des espaces approchés et étude matricielle	90
6.5.2	Stockage	96
	Conclusion de la première partie	99

II Domaines fictifs pour des inéquations variationnelles modélisant des problèmes de fissures en élasticité linéaire 105

7	Adaptive finite element for a fictitious domain formulation	107
----------	--	------------

Introduction	107
7.1 Introduction	109
7.2 The fictitious domain method	112
7.2.1 The fictitious method versus fictitious material method	113
7.2.2 Hybrid variational formulation for the auxiliary problems	116
7.3 The discrete problem	118
7.4 A priori analysis	122
7.5 A posteriori analysis	125
7.5.1 An upper bound for the error	126
7.5.2 An upper bound for the indicators	132
7.6 Numerical experiments	137
7.6.1 Adaptive strategy	138
7.6.2 Numerical experiments	139
Détails d'implémentation et résultats numériques	145
7.7 Réalisation numérique	146
7.7.1 Formulation matricielle	146
7.7.1.1 L'implémentation : calcul de la matrice de rigidité et des matrices de couplage.	147
7.7.2 Mise sous forme de problème de minimisation	151
7.8 Exemples et résultats numériques	152
Conclusion de la deuxième partie	163
Conclusion générale	169
Bibliographie	169
Table des figures	171

Introduction générale

De nombreux problèmes de la physique et de la mécanique sont décrits à l'aide de modèles de contact unilatéral. C'est le cas de problèmes d'emboutissements et d'impact en mécanique des structures, des problèmes de filtrations en hydrodynamique dans les milieux poreux, des problèmes d'asservissement thermique, . . . La résolution de tels problèmes représente des enjeux industriels et technologiques de première importance comme en témoigne le nombre de travaux qui leurs sont consacrés. L'intérêt dans ce domaine de recherche n'a cessé de croître au sein de la communauté mathématique tant sur le plan théorique que sur le plan numérique [31, 28, 36, 48, 47, 41]. Parmi les modèles de contact unilatéral, les problèmes de Signorini figurent en bonne position [54]. Il s'agit de problèmes de frontière libre gouvernés par des équations aux dérivées partielles dont les solutions doivent satisfaire des contraintes sur une zone de contact, en général une partie du bord du domaine de calcul. Les contraintes sont des inégalités faisant intervenir les solutions et certaines de leurs dérivées exprimant les conditions de contact (non pénétration, frottements, . . .). Ces modèles se rencontrent aussi en mécanique des structures pour décrire certains problèmes de fissures en élasticité linéaire ou dans des problèmes de contact entre solides déformables. Dans tous les cas, le contact se traduit par des conditions aux limites non linéaires.

Les travaux mathématiques qui ont vu le jour dans ce domaine de la mécanique de contact se sont développés dans deux directions : la première, consacrée à l'analyse mathématique, a pour objet la justification rigoureuse du modèle de Signorini dans le cadre de la théorie des inéquations variationnelles, d'établir des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions [48, 28]. La seconde direction concerne les méthodes numériques pour résoudre ces inéquations variationnelles et a pour objet l'étude des propriétés d'approximation (consistance, stabilité, précision, coût, . . .) et l'obtention d'algorithmes de résolution ainsi que la mise en oeuvre de ces algorithmes [40, 37, 47, 19, 23, 11, 25, 8, 5, 56].

Dans cette thèse, nous avons entrepris d'étudier et de résoudre numériquement des problèmes d'élasticité dans des domaines fissurés qui relèvent de modèles de contact unilatéral. Ces problèmes sont de type Signorini sans frottement pour l'élasticité. Cependant l'essentiel des résultats obtenus s'étend à des problèmes avec frottement. Nous développons des outils d'approximation et de simulation

adaptés à ces problèmes particuliers de la mécanique de contact. Le point crucial dans ce travail par rapport aux nombreux travaux déjà existant pour les modèles de contact unilatéral est que nous ne nous occupons pas uniquement de la modélisation et de la discrétisation des conditions de contact, mais aussi de la prise en compte de la géométrie (le domaine géométrique et les fissures). Nous nous intéressons particulièrement aux deux situations suivantes :

- la première est celle où le domaine géométrique est régulier et où les fissures sont des courbes régulières et séparées les unes des autres.
- le problème mathématique requiert l'évolution, au cours des calculs, des fissures comme c'est le cas dans les problèmes d'optimisation de formes ou certains problèmes inverses géométriques.

Pour chaque situation, nous considérons une modélisation adéquate et nous proposons une discrétisation appropriée. En particulier, nous développons dans chaque cas une stratégie adaptative basée sur l'analyse a posteriori afin de réduire les coûts de résolution et d'augmenter l'efficacité des algorithmes.

La thèse se décompose en deux parties. **La première partie** traite de la formulation dite du domaine régulier proposée par [45] et étudiée dans [6] dans le cadre (scalaire) de la membrane élastique. L'extension de cette approche à l'élasticité s'avère techniquement non triviale, principalement par ce qu'elle repose sur des formulations variationnelles mixtes (contrainte-déplacement) qui sont plus coûteuses. De plus ces formulations nécessitent l'utilisation d'éléments finis non standards si on veut préserver les propriétés d'approximation qui font le succès des méthodes variationnelles. En particulier, il est bien connu en théorie de l'approximation que des formulations variationnelles dans des espaces où le tenseur des contraintes est symétrique ne permettent pas d'obtenir, de manière simple, des éléments finis satisfaisant la condition inf-sup de Brezzi-Babuska. D'un autre côté, lorsque la symétrie du tenseur des contraintes n'est pas formulée a priori dans l'espace, on est amené à utiliser des éléments finis particuliers (PEERS, BDM). Nous avons considérés les deux cadres variationnel (avec ou sans symétrie du tenseur de contraintes). Notamment, pour le premier cas, nous avons travaillé avec deux types d'éléments finis : l'élément d'Arnold et Winther [4] un peu particulier -et coûteux- mais qui satisfait la condition inf-sup de Brezzi-Babuska. La deuxième famille d'éléments fini est celle des éléments P1-P1bulle vectorisés (plus connus en mécanique des fluides), ne satisfaisant pas la condition inf-sup dans notre cas, mais numériquement satisfaisant et peu coûteux.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'étude et à la mise en oeuvre d'une méthode de domaine fictif versus matériau fictif proposée par [42]. La méthode du domaine fictif nous apparaît comme un outil efficace pour mieux gérer la géométrie de contact dans un contexte d'évolution de celle-ci. En effet, de nombreux problèmes en optimisation de formes, en problèmes inverses géométriques, de propagation de fissures, . . . , mènent à la résolution de manière itérative

d'inéquations variationnelles avec le domaine géométrique (et la zone de contact) qui bougent au cours des itérations. L'objectif de la méthode du domaine fictif est de permettre de travailler dans un grand domaine régulier qui englobe le domaine initial (région de design) et sur lequel on se donne un maillage initial fixe. L'adaptation de maillage au cours des itérations est alors un outil extrêmement intéressant pour suivre finement la zone de contact. La méthode du domaine fictif nous mène à résoudre des problèmes auxiliaires formulés dans le domaine étendu. La stratégie adaptative repose alors sur des indicateurs d'erreur par résidu pour lesquels nous montrons l'équivalence avec l'erreur de la discrétisation par des éléments finis. Deux sortes d'indicateurs sont nécessaires ici : l'indicateur -standard- défini sur chaque éléments de la triangulation et deux indicateurs plus spécifiques aux conditions et à la zone de contact. Une difficulté principale pour montrer l'équivalence avec l'erreur de discrétisation est dûe au fait que les solutions des problèmes continues ne sont pas a priori continues à travers cette zone de contact. Ces indicateurs d'erreur sont aussi valables dans le cas du problème limite (Signorini) et permettent la mise en place d'une stratégie adaptative multi-étape.

Première partie

Méthode du domaine régulier pour des problèmes de fissures de type contact unilatéral en élasticité linéaire

Chapitre 1

Méthode du domaine régulier pour la formulation mixte de Hellinger-Reissner

1.1 Introduction : État de l'art

Dans cette partie, nous allons étudier des problèmes de fissures en élasticité linéaire. Les fissures sont des défauts géométriques que nous représenterons par des courbes régulières sur lesquelles sont imposées des conditions de contact unilatéral sans frottement : ce sont les conditions de Signorini [54] bien connues en mécanique de contact. La formulation mathématique de tels problèmes conduit à l'étude d'inéquations variationnelles elliptiques.

Dans de nombreuses situations géométriques, il peut s'avérer avantageux d'"oublier" le défaut géométrique (la -les- fissure-s-) et de travailler dans le domaine géométrique incluant celle-ci : mailler tout le domaine par exemple, utiliser les résultats d'approximation valables pour des domaine Lipschitziens, . . . Bien entendu, la fissure n'a pas pour autant disparu, mais est seulement vue comme une contrainte fonctionnelle, et au terme de la discrétisation, en simple contrainte algébrique. La contre partie de la "simplification" de l'aspect géométrique est une relative complication du cadre fonctionnel : nécessité de travailler avec des formulations mixtes et approximation dans des espaces $H(\text{div})$.

Nous présentons une méthode d'approximation basée sur une formulation mixte dans le cadre d'élasticité proposée par J.Sokolowski et A.M.Khludnev [45] et étudiée dans le cas scalaire de la membrane élastique dans [6]. Cette méthode est basée sur une formulation mixte de Hellinger-Reissner qui, grâce aux conditions de contact sur la fissure, notamment la continuité de la composante normale du tenseur de contrainte, s'étend à tout le domaine de cal-

cul.

Dans ce premier chapitre nous allons présenter la méthode du domaine régulier en élasticité linéaire dans le cadre continu.

1.2 Notations et préliminaires

Pour commencer, nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle utilisées dans ce travail et nous précisons quelques notations. Dans ce qui suit, Ω désigne un domaine borné de \mathbb{R}^2 muni de la mesure de Lebesgue $d\Omega$, à frontière lipschitzienne; le point générique de Ω est noté $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Nous désignons par ν la normale unitaire sortante en tout point $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Nous utilisons la convention de sommation sur les indices répétés.

Si \mathbf{V} est un espace de Hilbert, \mathbf{V}' désigne son dual topologique. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact inclus dans Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions, i.e. le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

On note $L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions à carré sommable et par $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ sa norme induite par le produit scalaire usuel (\cdot, \cdot) :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, $H^m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev standard

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{D}(\Omega); \quad D^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad \text{pour} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \leq m \right\},$$

où $\alpha = (\alpha_i)_{i=1,2} \in \mathbb{N}^2$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$ avec $\partial_i = \partial/\partial x_i$, muni de la norme suivante :

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert, la semi-norme de Sobolev d'ordre m est donnée par

$$|v|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $H^t(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, peut être défini par

la norme :

$$\|v\|_{H^t(\Omega)} = \left(\|v\|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^{\alpha}v(\mathbf{x}) - D^{\alpha}v(\mathbf{y}))^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2+2\vartheta}} d\mathbf{x}d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $t = m + \vartheta$, m représente la partie entière de t et $\vartheta \in]0, 1[$. L'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^t(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}^+$ est l'espace $H_0^t(\Omega)$.

Soit $\Sigma = \partial\Omega$. L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ est défini dans [34], Chap1 relation 1.16. Il est muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \Sigma} = \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v|_{\Sigma} = \varphi}} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Lorsque Σ est régulière, sa norme s'écrit :

$$\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 = \left(\|\varphi\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^2}{|x - y|^2} ds(x) ds(y) \right).$$

On note par $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ son dual topologique et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}$ le crochet de dualité entre ces deux espaces. Rappelons aussi que la norme duale $\|\cdot\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)}$ est définie par :

$$\|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \frac{\langle \varphi, \psi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}}{\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}}.$$

Soit γ une partie ouverte de Σ . On note $\varrho(x) = d(x, \partial\gamma)$ et on définit l'espace

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\gamma) = \left\{ \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma); \varrho^{-\frac{1}{2}}\varphi \in L^2(\gamma) \right\},$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2}, 00, \gamma}^2 = \|\varphi\|_{\frac{1}{2}, \gamma}^2 + \int_{\gamma} \varrho^{-1} \varphi^2 d\sigma.$$

Une fonction de cet espace peut s'étendre à Σ par zéro en un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$. L'extension d'une fonction φ , notée $\overline{\varphi}$, est

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{si } x \in \gamma, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ si et seulement si $\overline{\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Pour toute espace de Banach séparable E muni de la norme $\|\cdot\|_E$, on considère l'espace

$$L^2(\Omega; E) = \left\{ v : \Omega \longrightarrow E \text{ mesurable; } \int_{\Omega} \|v\|_E^2 dx < +\infty \right\},$$

et les espaces $H^s(\Omega; E)$ associés à $L^2(\Omega; E)$: quand s est entier, ce sont les espaces de fonctions de $L^2(\Omega; E)$ telles que leurs dérivées d'ordre $\leq s$ appartiennent à $L^2(\Omega; E)$ et pour s quelconque, ces espaces sont définis par interpolation hilbertienne [51] pour $s > 0$ et par dualité pour $s < 0$. Nous omettrons E dans les notations si $E = \mathbb{R}$ et parfois lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace E , $E = \mathbb{R}^2$ ou bien $E = \mathbb{R}^{2,2}$. On introduit l'espace

$$L^2(\Omega; \mathbb{R}^{2,2}) = \{ \tau := (\tau_{ij})_{i,j=1,2}; \quad \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \},$$

et on considère l'espace

$$H(\mathbf{div}; \Omega) = \{ \tau \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2}); \quad \mathbf{div} \tau \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \},$$

où \mathbf{div} désigne l'opérateur de divergence défini comme suit :

$$\mathbf{div} \tau = {}^T(\partial_j \tau_{ij}) = {}^T(\partial_1 \tau_{11} + \partial_2 \tau_{12}, \partial_1 \tau_{21} + \partial_2 \tau_{22}),$$

muni de la norme :

$$\| \tau \|_{H(\mathbf{div}; \Omega)} = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} \| \tau_{ij} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{div} \tau \|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$H(\mathbf{div}; \Omega)$ est un espace de Hilbert. Nous désignerons par $H_{sym}(\mathbf{div}; \Omega)$ le sous-espace fermé des éléments de $H(\mathbf{div}; \Omega)$ qui sont symétriques :

$$H_{sym}(\mathbf{div}; \Omega) := \{ \tau \in H(\mathbf{div}; \Omega), \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \}.$$

Pour $\tau \in H(\mathbf{div}; \Omega)$, la trace $\tau \nu$ est définie comme un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma; \mathbb{R}^2)$ et l'opérateur de trace est continu de $H(\mathbf{div}; \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma; \mathbb{R}^2)$. De plus, on a la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \tau : \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{div} \tau \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \langle \tau \nu, \mathbf{v} \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma},$$

où le symbole " : " désigne le produit usuel des tenseurs donné par :

$$\tau : \sigma = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \tau_{ij} \sigma_{ij}.$$

Rappelons quelques notations usuelles en élasticité. Soient $\mu > 0$, $\lambda > 0$ les coefficients de Lamé, on définit la loi de comportement du matériau par la transformation symétrique et définie positive, notée \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad \tau \longrightarrow \mathcal{C} \tau = \frac{1}{2\mu} \tau - \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \text{tr}(\tau) I,$$

on vérifie facilement que l'inverse de \mathcal{C} est \mathcal{C}^{-1} définie par :

$$\tau \longrightarrow \mathcal{C}^{-1}\tau = 2\mu\tau + \lambda\text{tr}(\tau)I,$$

La loi de comportement élastique s'écrit :

$$\sigma = \mathcal{C}^{-1}\varepsilon,$$

où ε est le tenseur des déformations défini par

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T),$$

et σ est le tenseur des contraintes. \mathcal{C} est le tenseur d'ordre quatre symétrique vérifiant la condition d'ellipticité

$$\{\mathcal{C}\sigma\}_{ij} = c_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad (1.1)$$

$$c_{ijkl}\xi_{ji}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi_{ji} = \xi_{ij}, \quad c_0 > 0. \quad (1.2)$$

On a alors les relations suivantes :

- Contraintes en fonction des déformations :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda\text{tr}(\varepsilon)I, \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ij},$$

où δ est le tenseur de Kronecker usuel. C'est la loi de Hooke qui relie les déformations aux contraintes. On remarquera aussi que la trace $\text{tr}(\varepsilon)(\mathbf{u})$ est la divergence du déplacement :

$$\text{tr}(\varepsilon)(\mathbf{u}) = \mathbf{div}(\mathbf{u}).$$

- Déformations en fonction des contraintes :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\sigma)I, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\varepsilon_{ll}\delta_{ij}$$

- Expressions de λ et μ :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

- Expressions de E et ν :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

1.3 Formulation du problème de contact unilatéral

On considère un matériau élastique homogène isotrope caractérisé par les coefficients de Lamé λ , et μ . On suppose que le corps élastique occupe dans la configuration initiale un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné régulier, à frontière Γ suffisamment régulière et constituée de deux parties Γ_D et Γ_N sans recouvrement et de mesure non nulle. Soit Γ_c une courbe dans Ω . On suppose qu'on peut la prolonger en une courbe fermée Σ de classe $C^{1,1}$ qui sépare le domaine Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . On notera Γ_c^+ et Γ_c^- les deux lèvres de la fissure, et ν la

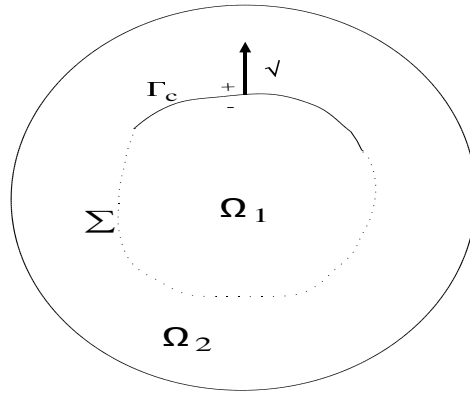


FIG. 1.1 – Domaine fissuré

normale unitaire à Γ_c orientée de Γ_c^- vers Γ_c^+ (voir figure 1.1).

On désigne par $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ une densité de forces volumiques et par $\mathbf{g} = (g_1, g_2) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N; \mathbb{R}^2)$ une densité de forces surfaciques définie sur la partie Γ_N . Soit $\Omega_c = \Omega \setminus \Gamma_c$. Dans le domaine Ω_c , le problème d'élasticité linéaire avec conditions de type unilatéral sur la fissure consiste à trouver le champ de déplacements $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et le champ de contraintes $\sigma \in \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2} := \{\tau \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \tau = \tau^t\}$ satisfaisant les équations suivantes :

$$-\operatorname{div} \sigma = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{C}^{-1} \sigma - \varepsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (1.5)$$

$$\sigma \cdot \nu = \mathbf{g} \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (1.6)$$

$$[\mathbf{u}] \nu \geq 0, \quad [\sigma \nu] = 0, \quad \sigma \nu \cdot [\mathbf{u}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.7)$$

$$\sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_t = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^\pm. \quad (1.8)$$

La notation $[\mathbf{u}]$ représente le saut $(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)$ à travers la fissure Γ_c , et le signe \pm indique la direction positive et négative suivant la normale unitaire ν .

Avec la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, on adoptera les notations suivantes pour les quantités définies sur la fissure :

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i, \quad \sigma_t = \sigma_\nu - \sigma_\nu \nu = \{\sigma_t^i\}_{i=1}^2, \quad \sigma\nu = \{\sigma_{ij} \nu_j\}_{i=1}^2, \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^2. \quad (1.10)$$

Les conditions aux limites (1.7)-(1.8) traduisent les conditions de contact sur la fissure et l'absence de frottement

(i)-soit $[\mathbf{u} \cdot \nu] > 0$, il n'y a pas de contact, alors $\sigma_\nu = 0$,

(ii)-soit $[\mathbf{u} \cdot \nu] = 0$, il y a contact et $\sigma_\nu \leq 0$.

La condition $\sigma_t = 0$ représente un contact sans frottement.

Remarque 1.1 *Le problème de contact unilatéral (1.3)-(1.8) est un problème de contact bilatéral si la condition $\sigma_\nu \leq 0$ devient $\sigma_\nu = 0$. Les inéquations dans la formulation variationnelle deviennent alors des équations. Tous nos résultats s'étendent sans difficulté à ce cadre linéaire.*

1.3.1 Formulation variationnelle en déplacement

Le cadre fonctionnel approprié à la résolution du problème de contact unilatéral (1.3)-(1.8) consiste à travailler dans un sous-espace $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_c)$ de $H^1(\Omega_c)$ défini par :

$$H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_c) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2), \quad v_i \in H^1(\Omega_c), v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_D, i = 1, 2\}.$$

On introduit aussi le convexe fermé des déplacements admissibles

$$\mathcal{C}(\Omega_c) = \{\mathbf{v} \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega_c)^2, [\mathbf{v}] \nu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}.$$

La formulation variationnelle du problème (1.3)-(1.8) se traduit par l'inéquation variationnelle suivante : trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\Omega_c)$ tel que :

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \geq (f, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \langle g, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_N}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}(\Omega_c). \quad (1.11)$$

On notera par la suite $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}))$.

Compte tenu de la régularité $C^{1,1}$ supposée de Γ_c , on peut facilement démontrer la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$. En effet, prolongeant Γ_c par une

courbe Σ régulière qui sépare Ω_c en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , on a \mathbf{v} est continue à travers Σ et on peut écrire grâce à l'inégalité de Korn

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Sigma \setminus \Gamma_c)} C^{-1} \varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &\geq C (\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_2)}^2) = C \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_c)}^2. \end{aligned}$$

Il suit du théorème de Stampacchia que le problème (1.11) admet une solution et une seule dans $\mathcal{C}(\Omega_c)$ avec une dépendance lipschitzienne des données (\mathbf{f}, \mathbf{g}) , i.e., il existe une constante C qui dépend seulement de Ω et de μ telle que :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega_c)} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_c)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)} \right).$$

Ce problème peut aussi se mettre sous forme d'un problème de minimisation convexe :

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\Omega_c)} \left\{ \int_{\Omega_c} (\lambda |\mathbf{div} \mathbf{v}|^2 + 2\mu |\varepsilon(\mathbf{v})|^2) dx - \int_{\Omega_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds \right\}.$$

1.3.2 Formulation variationnelle mixte

Nous allons prendre à partir de maintenant $\mathbf{g} = 0$ pour simplifier. Le cas non-homogène se ramène à celui-ci par relèvement de trace : on construit σ_0 régulier tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \sigma_0 &= 0, & \text{dans } \Omega_c, \\ \sigma_0 \nu &= \mathbf{g}, & \text{sur } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Afin d'étudier le problème (1.3)-(1.8), nous allons donner une formulation variationnelle mixte équivalente à la formulation en déplacement.

Pour ce faire, on définit l'espace suivant :

$$\mathbf{X}(\Omega_c) = \{ \sigma \in \mathbf{H}_{\text{sym}}(\mathbf{div}; \Omega_c), \sigma \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_N \}.$$

On considère le convexe $\mathbf{K}(\Omega_c)$:

$$\mathbf{K}(\Omega_c) = \{ \sigma \in \mathbf{X}(\Omega_c), [\sigma \nu] = 0, \text{ sur } \Gamma_c, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_t = 0 \text{ sur } \Gamma_c^\pm \}.$$

On note par :

$$V(\Omega_c) = L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^2).$$

Les conditions de contact et aux limites dans la définition de $\mathbf{K}(\Omega_c)$ nécessitent une justification mathématique précise. Nous avons vu que pour $\sigma \in H(\mathbf{div}, \Omega_c)$, les traces $(\sigma \nu)^\pm$ sont bien définies comme éléments de $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$. On peut aussi

définir $\sigma_\nu^\pm, (\sigma_\tau^i)^\pm, i = 1, 2$, comme éléments de $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathbb{R}^2)$ à l'aide de la formule de Green :

$$\begin{aligned} (\mathbf{div} \sigma, \psi)_{\Omega_1} &= -(\sigma, \varepsilon(\psi))_{\Omega_1} + \langle \sigma_\nu^-, \psi_\nu \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma} + \langle \sigma_\tau^-, \psi_\tau \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma}, \\ \forall \psi &= (\psi_1, \psi_2) \in H^1(\Omega_1, \mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

avec $\langle \dots \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma}$ le produit de dualité $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathbb{R}^2)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathbb{R}^2)$. De façon similaire, on écrit la formule de Green sur Ω_2 . Il suit la condition de saut pour $\sigma\nu$ dans $K(\Omega_c)$ qui s'écrit

$$\langle (\sigma\nu)^+ - (\sigma\nu)^-, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma} = 0, \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathbb{R}^2).$$

On peut donc définir $\sigma_\nu^+ = \sigma_\nu^-$ et $(\sigma_\tau^i)^+ = (\sigma_\tau^i)^-, i = 1, 2$. Les conditions de contact s'écrivent maintenant sous forme faible

$$\langle \sigma_\nu^\pm, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma} \leq 0, \quad \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \varphi \geq 0, \text{ pp sur } \Gamma_c,$$

$$\langle \sigma_\tau^\pm, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, \Sigma} = 0, \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathbb{R}^2), \varphi_i \nu_i = 0, \text{ pp sur } \Gamma_c, \text{ supp } \varphi \in \Gamma_c.$$

Par conséquent, $\mathbf{K}(\Omega_c)$ est faiblement fermé dans $H(\mathbf{div}, \Omega_c)$. De même, on déduit des formules précédentes que $\sigma\nu$ et $\sigma_\tau^i, i = 1, 2$, appartiennent à $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2))'$ et les conditions de contact s'entendent au sens de la dualité, i.e.

$$\langle \sigma_\nu, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_c} \leq 0, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \varphi \geq 0, \text{ pp sur } \Gamma_c,$$

et

$$\langle \sigma_\tau, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_c} = 0, \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2), \varphi_i \nu_i = 0, \text{ pp sur } \Gamma_c.$$

On dérive ainsi la formulation mixte du problème (1.3)-(1.8) :
trouver $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{V}(\Omega_c), \sigma = \{\sigma_{ij}\} \in \mathbf{K}(\Omega_c)$, tels que :

$$\begin{cases} a(\sigma, \tau - \sigma) + b(\tau - \sigma, \mathbf{u}) \geq 0, & \forall \tau \in \mathbf{K}(\Omega_c), \\ b(\sigma, \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega_c), \end{cases} \quad (1.12)$$

avec :

$$\begin{cases} a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega_c} \mathbf{C}^{-1} \sigma : \tau \, d\mathbf{x}, \\ b(\sigma, \mathbf{u}) = \int_{\Omega_c} \mathbf{div} \cdot \sigma \mathbf{u} \, d\mathbf{x}, \\ L(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \end{cases}$$

Proposition 1 *Le problème (1.12) possède une solution $(\mathbf{u}, \sigma) \in \mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{K}(\Omega_c)$ et une seule.*

La démonstration de cette proposition étant similaire à celle pour la formulation étendue qu'on introduira au paragraphe 1.4. nous n'allons pas la donner ici.

Les problèmes (1.12) et (1.3)-(1.8) sont équivalents. En effet, en choisissant $\tau = \tilde{\tau} - \sigma$ avec $\tilde{\tau}$ de classe C^∞ à support compact dans Ω_c , on déduit

$$C\sigma = \varepsilon(u), \quad \text{au sens des distributions dans } \Omega_c.$$

Les relations $[\mathbf{u}] \nu \geq 0$ et $\sigma_\nu [\mathbf{u} \nu] = 0$ sur Γ_c s'obtiennent par application de la formule de Green. Réciproquement, en multipliant (1.4) par $\tau - \sigma \in \mathbf{K}(\Omega_c)$, on obtient la deuxième ligne de (1.12).

Remarque 1.2 *L'hypothèse de régularité $C^{1,1}$ sur Γ_c (ou Σ) n'est nécessaire ni à la formulation en déplacement (1.11), ni à la formulation mixte (1.12). Les problèmes variationnels obtenus seraient encore valables si on ne supposait Σ que $C^{0,1}$, mais l'écriture explicite des conditions de contact (σ_ν et σ_τ) ne serait pas rigoureuse. On remplace dans ce cas le cône convexe fermé \mathbf{K} par*

$$\tilde{\mathbf{K}}(\Omega_c) = \left\{ \sigma \in H_{sym}(\mathbf{div}; \Omega_c); \int_{\Omega_c} (\sigma : \varepsilon(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \mathbf{div} \sigma) d\mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}(\Omega_c) \right\},$$

qui est bien entendu encore un convexe fermé, dans les formulations variationnelles. Cette définition du convexe des contraintes admissibles s'étend aux cas où Γ_c touche le bord (fissure débouchante) et même au cas général où Γ_c est un ensemble compact quelconque -sans hypothèses de régularité particulières.

1.4 Formulation variationnelle étendue à Ω : méthode du domaine régulier

Dans cette section on étudie la méthode du domaine régulier [6] qui consiste à écrire la formulation variationnelle précédente obtenue lorsqu'on prolonge les variables \mathbf{u} et σ ainsi que les fonctions test à tout le domaine $\Omega = \Omega_c \cup \Gamma_c$. Cette nouvelle formulation a l'avantage d'être valable sur le domaine régulier (au moins Lipschitzien), ce qui en simplifie l'analyse et aussi la mise en oeuvre (notamment le maillage du domaine -a priori- sans tenir compte de la fissure en tant que défaut géométrique). Bien entendu, la fissure n'a pas pour autant disparu, mais dans cette formulation, elle n'est perçue que comme une contrainte fonctionnelle (et après discrétisation algébrique), ce qui est un avantage certain surtout dans le cas de fissures multiples qui s'accumulent (engendrant une anisotropie dans le domaine de calcul), dans certains cas en dimension trois, ...

Le point de départ pour obtenir cette formulation du domaine régulier est que la continuité de la composante normale du tenseur de contrainte $\sigma \in \mathbf{X}(\Omega_c)$ est synonyme de l'appartenance de celui-ci à l'espace $\mathbf{X}(\Omega)$. Par conséquent, on obtient la nouvelle formulation variationnelle en remplaçant Ω_c par Ω avec les modifications évidentes des espaces qu'on notera $\mathbf{V}(\Omega) = \mathbf{V}$, $\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{X}$ et $\mathbf{K}(\Omega) = \mathbf{K}$: trouver $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{V}$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\} \in \mathbf{K}$, tels que :

$$\begin{cases} a(\sigma, \tau - \sigma) + b(\tau - \sigma, \mathbf{u}) \geq 0, & \forall \tau \in \mathbf{K}, \\ b(\sigma, \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{cases} \quad (1.13)$$

L'étude de ce problème variationnel mixte peut se faire de plusieurs façons équivalentes. L'application de la théorie standard des formulations mixtes [20, 34], repose sur les propriétés de coercivité de la forme bilinéaire $a(., .)$ et de la condition inf-sup de Brezzi-Babuska pour la forme bilinéaire $b(., .)$. Dans notre cas, La coercivité de $a(., .)$ n'est valable que sur le noyau de la forme $b(., .)$

$$\mathbf{Z} = \{\sigma \in \mathbf{K}; b(\sigma, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\},$$

i.e. il existe $\alpha > 0$,

$$a(\tau, \tau) \geq \alpha \|\tau\|_{\mathbf{X}}, \quad \forall \tau \in \mathbf{Z}. \quad (1.14)$$

Cette coercivité est en fait suffisante pour appliquer la théorie comme on va le montrer maintenant par l'utilisation de la méthode du Lagrangien augmenté [37]. On introduit l'espace

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \{ & \tau \in H_{\text{sym}}(\mathbf{div}, \Omega_c); \langle \tau \nu, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, 0, \Gamma_c} = 0, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2), \\ & \langle \sigma_\tau, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, 0, \Gamma_c} = 0, \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2), \quad \varphi_i \nu_i = 0, \text{ pp sur } \Gamma_c \}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément [20] la condition inf-sup suivante : il existe $\beta > 0$, tel que

$$\sup_{\tau \in \mathbf{W}} \frac{b(\tau, \mathbf{v})}{\|\tau\|_{\mathbf{X}}} \geq \beta \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)}, \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2). \quad (1.15)$$

1.4.1 Formulation de Lagrangien augmenté

Soit r un nombre réel positif. On introduit la nouvelle forme bilinéaire :

$$a_r(\sigma, \tau) = (\mathcal{C}^{-1}\sigma, \tau) + r(\mathbf{div} \sigma, \mathbf{div} \tau). \quad (1.16)$$

Considérons maintenant la nouvelle formulation -de Lagrangien augmenté- : Pour $r > 0$, déterminer $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{V}$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\} \in \mathbf{K}$, tel que :

$$\begin{cases} a_r(\sigma, \tau - \sigma) + b(\tau - \sigma, \mathbf{u}) \geq r(\mathbf{f}, \mathbf{div} \tau - \mathbf{div} \sigma), & \forall \tau \in \mathbf{K}, \\ b(\sigma, \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Remarque 1.3 *Le problème (1.17) est un problème auxiliaire qui permet d'étudier (1.13) puisque maintenant, on a bien la coercivité de $a_r(.,.)$ sur tout l'espace \mathbf{X} , et de se ramener au cadre classique de la théorie des problèmes mixtes. Cependant, on peut également noter que ce problème admet aussi un intérêt propre des points de vue algorithmique et du calcul (influence sur le conditionnement du système linéaire à résoudre) pour justifier qu'on l'étudie en détail.*

le problème (1.17) est équivalent à un problème du point selle sur $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \times \mathbf{K}$ de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{v}, \tau) = \frac{1}{2}(\mathcal{C}^{-1}\tau, \tau) + (\mathbf{v}, \mathbf{div} \tau + \mathbf{f}) + \frac{r}{2}\|\mathbf{div} \tau + \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^2}^2,$$

pour $r = 0$, on note $\mathcal{L}_0(\mathbf{v}, \tau) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \tau)$.

Proposition 2 *Il existe une unique solution $(\sigma(r), \mathbf{u}(r))$ du problème (1.17). De plus, $(\sigma(r), \mathbf{u}(r))$ converge vers (σ, \mathbf{u}) solution du problème (1.12) quand r tend vers zéro.*

Preuve: La forme bilinéaire $a_r(.,.)$ est elliptique sur \mathbf{K} . En appliquant le théorème de Stampacchia [48], on déduit de la première ligne de (1.17) l'existence d'une solution et une seule $\sigma_r(\mathbf{u}) \in \mathbf{K}$. La condition inf-sup (1.15) implique

$$\{\mathbf{v} \in \mathbf{V}; b(\tau, \mathbf{v}) = 0, \forall \tau \in \mathbf{W}\} = \{0\},$$

d'où l'existence et l'unicité de $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tel que $(\sigma(r), \mathbf{u}(r))$ soit un point selle du Lagrangien \mathcal{L} . De plus,

$$\|\sigma(r)\|_{\mathbf{X}} + \|\mathbf{u}(r)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq C\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)}.$$

Notons que la deuxième ligne de (1.17) implique

$$\|\mathbf{div} \sigma(r)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq C.$$

De la condition (1.15), on déduit encore l'existence d'un élément $\tau \in \mathbf{W}$ tel que [[34], Chap 3]

$$b(\tau, \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2),$$

et τ est bornée : $\|\tau\|_{\mathbf{X}} \leq C$.

En prenant en compte la définition de τ et le fait que $b(\sigma(r), \mathbf{u}(r)) = -L(\mathbf{u}(r))$, on obtient :

$$a_r(\tau - \sigma(r), \tau - \sigma(r)) \leq r(\mathbf{f}, \mathbf{div}(\tau - \sigma(r))) + a_r(\tau, \tau - \sigma(r)).$$

On en déduit

$$\|\tau - \sigma(r)\| \leq C,$$

soit, comme τ est bornée,

$$\|\sigma(r)\| \leq C.$$

La loi de Hooke et l'inégalité de Korn impliquent alors

$$\|\mathbf{u}(r)\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq C.$$

Il suit qu'on peut extraire des sous-suites, notées encore $(\sigma(r))_r$, respectivement $(\mathbf{u}(r))_r$, qui converge faiblement vers des éléments $\sigma \in \mathbf{X}$, respectivement $\mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ et $(\mathbf{u}(r))_r$ converge fortement dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Le passage à la limite, quand $r \rightarrow 0$, dans (1.17), donne que (σ, \mathbf{u}) est une solution du problème (1.13), d'où l'existence.

Reste à montrer l'unicité de la solution. Pour cela, on suppose que le problème (1.12) possède deux solutions, (σ_1, \mathbf{u}_1) et (σ_2, \mathbf{u}_2) . Par conséquent, on a :

$$a(\sigma_1, \tau - \sigma_1) + b(\tau - \sigma_1, \mathbf{u}_1) \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{K}, \quad (1.18)$$

$$b(\sigma_1, \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (1.19)$$

et

$$a(\sigma_2, \tau - \sigma_2) + b(\tau - \sigma_2, \mathbf{u}_2) \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{K}, \quad (1.20)$$

$$b(\sigma_2, \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (1.21)$$

Choisissons dans (1.18) (resp. (1.20)) $\tau = \sigma_2$ (resp. $\tau = \sigma_1$). Nous trouvons :

$$a(\sigma_1, \sigma_2 - \sigma_1) + b(\sigma_2 - \sigma_1, \mathbf{u}_1) \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{K}, \quad (1.22)$$

$$a(\sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2) + b(\sigma_1 - \sigma_2, \mathbf{u}_2) \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{K}. \quad (1.23)$$

Par addition de ces deux dernières inégalités, il vient :

$$a(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2) + b(\sigma_1 - \sigma_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \leq 0. \quad (1.24)$$

Par ailleurs on a :

$$b(\sigma_1, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = -L(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad b(\sigma_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = -L(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2).$$

En rassemblant ces deux égalités, on obtient :

$$b(\sigma_1 - \sigma_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0.$$

Par conséquent, (1.24) donne :

$$a(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2) \leq 0.$$

La coercivité de a nous permet de déduire que :

$$\sigma_1 = \sigma_2.$$

On peut constater en utilisant les inéquations (1.18) et (1.20) que

$$\begin{aligned} a(\sigma_1, \tau) + b(\tau, \mathbf{u}_1) &\geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{K}, \\ a(\sigma_2, \tau) + b(\tau, \mathbf{u}_2) &\geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{K}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$b(\tau, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{K}.$$

Grâce à la condition inf-sup (1.15), on conclut que :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2,$$

d'où l'unicité, ce qui termine la preuve de la proposition (2).

Remarque 1.4 *On peut vérifier que les solutions du système augmenté (1.17) sont aussi solutions du système (1.13). De plus, les solutions de ce système ne dépendent pas de r , on retrouve ainsi le résultat de la proposition (2) sans passage à la limite $r \rightarrow 0$.*

La résolution des problèmes mixtes (1.13) et (1.17) se fait dans le cadre des méthodes d'optimisation convexe avec contraintes et conduit dans ce cas à l'utilisation d'algorithmes de minimisation sur \mathbf{K} de grandes tailles. Une autre façon de procéder consiste à travailler avec une formulation hybride. Dans cette formulation, la contrainte qui définit le convexe \mathbf{K} est exprimée via un multiplicateur de Lagrange. La méthode de résolution consiste alors à résoudre un petit problème de minimisation pour déterminer le multiplicateur de Lagrange, puis grâce aux conditions d'optimalité, de déterminer le reste des inconnues (en résolvant un système linéaire de grande taille). Le choix de l'une ou l'autre des stratégies de résolution dépend essentiellement de l'environnement logiciel. Nous allons décrire la méthode hybride dans le paragraphe suivant.

1.4.2 Formulation mixte hybride

Nous ne nous intéresserons dorénavant qu'au problème (1.13), c'est-à-dire le cas $r = 0$, mais tout ce qui suit s'applique sans difficulté au cas $r \neq 0$. Nous noterons \mathbf{M} l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)^2$ muni de sa norme hilbertienne, et par M_+ le cône convexe fermé donné par :

$$M_+ = \left\{ \mu \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c); \mu \geq 0, \text{ p.p.} \right\},$$

Pour tout $\tau \in X$, et pour tout $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{M}$, avec $\varphi_i \nu_i = 0$, on considère

$$d_t(\tau, \varphi) = \langle\langle \tau_t, \varphi \rangle\rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} = \langle \tau_{t1}, \varphi_1 \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} + \langle \tau_{t2}, \varphi_2 \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c},$$

et pour tout $\tau \in \mathbf{X}$, $\mu \in M_+$:

$$d_n(\tau, \mu) = \langle \tau_n, \mu \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c}.$$

On définit la fonctionnelle $\tilde{\mathcal{L}}$ sur $\mathbf{V} \times \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times M_+$:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{v}, \tau, \mu_t, \mu_n) = \mathcal{L}(\mathbf{v}, \tau) + \langle\langle \tau_t, \mu_t \rangle\rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} + \langle \tau_n, \mu_n \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c}.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c}$ est le crochet de dualité entre $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2$ et son dual,
 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c}$ est le produit :

$$\langle\langle \tau_t, \varphi \rangle\rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} = \langle \tau_{t1}, \varphi_1 \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} + \langle \tau_{t2}, \varphi_2 \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c}, \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbf{M}, \quad \varphi_i \nu_i = 0.$$

La formulation hybride du système (1.13) consiste à chercher :

$(\mathbf{u}, \sigma, \lambda_t, \lambda_n) \in \mathbf{V} \times \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times M_+$, avec $\lambda_{ti} \nu_i = 0$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\sigma, \tau) + b(\tau, \mathbf{u}) + d_t(\tau, \lambda_t) + d_n(\tau, \lambda_n) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{X}, \\ b(\sigma, \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ d_t(\sigma, \mu_t) = 0, \quad \forall \mu_t = (\mu_{t1}, \mu_{t2}) \in \mathbf{M}, \quad \mu_{ti} \nu_i = 0, \\ d_n(\sigma, \mu_n - \lambda_n) \leq 0, \quad \forall \mu \in M_+. \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Proposition 3 *Il existe une unique solution $(\sigma, \mathbf{u}, \lambda_t, \lambda_n) \in \mathbf{X} \times \mathbf{V} \times \mathbf{M} \times M_+$ du problème (1.25). De plus,*

$$\lambda_n = [\mathbf{u}] \nu, \quad \text{et } \lambda_t = \mathbf{u} \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

La solution $(\mathbf{u}, \sigma, \lambda_t, \lambda_n)$ du système (1.25) est le point-selle du lagrangien $\tilde{\mathcal{L}}$.

Preuve: Considérons la forme bilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ définie de $\mathbf{X} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{M} \times M_+)$ dans \mathbb{R} par

$$c(\tau, (v, \mu_t, \mu_n)) = b(\tau, \mathbf{v}) + d_t(\tau, \mu_t) + d_n(\tau, \mu_n).$$

Le problème (1.25) s'écrit : trouver $(\mathbf{u}, \sigma, \lambda_t, \lambda_n) \in \mathbf{V} \times \mathbf{X} \times \mathbf{M} \times M_+$, avec $\lambda_{ti} \nu_i = 0$, tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\sigma, \tau) + c(\tau, (\mathbf{u}, \lambda_t, \lambda_n)) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{X}, \\ c(\sigma, (\mathbf{v}, \mu_t, \mu_n - \lambda_n)) \leq -L(v), \quad \forall (\mathbf{v}, \mu_t, \mu_n) \in \mathbf{V} \times \mathbf{M} \times M_+, \quad \mu_{ti} \nu_i = 0. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Pour tout élément $(\mathbf{v}, \mu_t, \mu_n) \in \mathbf{V} \times \mathbf{M} \times M_+$ donné, on peut associer un tenseur régulier τ , défini dans Ω tel que

$$\begin{cases} \mathbf{div} \tau = \mathbf{v}, & \text{dans } \Omega, \\ \tau \cdot \mathbf{n} = \pm \mu_n \mathbf{n} + \pm \mu_t, & \text{sur } \Gamma_c^\pm, \\ \tau \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

De plus

$$\|\tau\|_{\mathbf{X}} \leq C(\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}).$$

Un tel τ s'obtient par les méthodes directes de calcul de variations en résolvant l'équation variationnelle associée. On vérifie alors aisément la condition inf-sup suivante : il existe $\beta > 0$, tel que

$$\sup_{\tau \in \mathbf{X}} \frac{c(\tau, (\mathbf{v}, \mu_t, \mu_n))}{\|\tau\|_{\mathbf{X}}} \geq \beta (\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_t\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}). \quad (1.27)$$

Le reste de la démonstration suit les mêmes lignes qu'à la proposition 2. Finalement, en interprétant l'inéquation variationnelle, on déduit l'interprétation mécanique des multiplicateurs de Lagrange.

Chapitre 2

Discrétisation et approximation par des éléments finis mixtes et hybrides : éléments finis mixtes avec symétrie du tenseur des contraintes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente l'approximation par la méthode des éléments finis mixtes du problème de contact unilatéral dans le cadre de la formulation symétrique du problème d'élasticité appelée aussi formulation de Hellinger-Reissner. On propose dans un premier temps la discrétisation par l'élément fini d'Arnold et Winther. On y établit un résultat de convergence et une estimation d'erreur d'ordre $h^{\frac{3}{4}}$. On traite ensuite une deuxième discrétisation par l'élément fini "P1 P1-bulle". Contrairement à l'élément fini d'Arnold et Winther, cette dernière discrétisation ne satisfait pas les propriétés d'approximation usuelles, notamment la condition inf-sup de Brezzi-Babuska. Cependant, numériquement, elle est plus facile et moins chère à mettre en oeuvre et les résultats des simulations sont plutôt corrects.

2.2 Problème discret

2.2.1 Élément d'Arnold et Winther

Dans cette section, on présente le cadre fonctionnel approché fourni par l'élément fini d'Arnold et Winther voir ([4]), basé sur le principe de Hellinger-Reissner, afin de discrétiser le problème hybride (1.25) ainsi que l'inéquation variationnelle

(1.13).

Le domaine Ω est supposé polygonal pour qu'il puisse être exactement recouvert par des éléments rectilinéaires. Pour tout paramètre de discrétisation $h > 0$ on considère une triangulation régulière \mathcal{T}_h de Ω , constituée d'éléments triangulaires, dont le diamètre n'excède pas h , telle que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T,$$

et qui satisfait les hypothèses suivantes :

$$\forall T, T' \in \mathcal{T}_h, \quad T \cap T' = \begin{cases} \text{soit } \emptyset, \\ \text{soit un sommet commun,} \\ \text{soit un côté commun.} \end{cases}$$

De plus, il existe une constante positive τ indépendante de h , telle que pour tout h , et pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, le rapport $\frac{h}{\varrho}$ est $\leq \tau$. On suppose aussi que le maillage est construit de sorte que les points extrêmes c_1 et c_2 de la zone de contact Γ_c soient des sommets communs de la triangulation.

La zone de contact Γ_c est considérée comme un segment de droite. De la trace de \mathcal{T}_h , la zone de contact hérite d'une triangulation régulière $\mathcal{T}_{c,h}$ définie par la subdivision $(x_i)_{0 < i < I}$ avec $c_1 = x_0, x_1, \dots, x_{I-1}, x_I = c_2$, et dont les $(t_i =]x_{i-1}, x_i])_{0 < i < I}$ sont les éléments.

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, et pour tout espace de Banach E , on note par $P_k(T, E)$ l'espace des fonctions polynômiales définies sur T à valeur dans E , de degré total inférieur à k . On définit l'espace local associé Σ_T , tel que :

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= P_2(T, \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}) + \{ \tau \in P_3(T, \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}); \mathbf{div} \tau = 0 \} \\ &= \{ \tau \in P_3(T, \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}); \mathbf{div} \tau \in P_1(T)^2 \}. \end{aligned}$$

On introduit alors les espaces discrets suivants : pour tout $h > 0$,

$$\mathbf{X}_h = \{ \sigma_h \in \mathbf{X}; \sigma_{h|T} \in \Sigma_T, \forall T \in \mathcal{T}_h \},$$

et

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega); \mathbf{v}_{h|T} \in (P_1(T))^2, \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

En ce qui concerne l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange, on introduit l'espace discret

$$\begin{aligned} W_h^1(\Gamma_c) &= \{ \mu_h \in C(\bar{\Gamma}_c), \mu_{h|t_i} \in P_1(t_i), 1 \leq i \leq I-2, \\ &\quad \mu_{h|t_\ell} \in P_0(t_\ell), \ell = 0, I-1 \}, \end{aligned}$$

cet espace est le choix convenable pour traiter l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ (voir [10]).

On note aussi par $\mathbf{M}_h = \mathbf{W}_h^1(\Gamma_c)$ l'espace $(W_h^1(\Gamma_c))^2$, et on définit le cône convexe fermé

$$M_{h,+} = \left\{ \mu_h \in W_h^1(\Gamma_c), \int_{\Gamma_c} \mu_h \psi_h d\Gamma \geq 0, \forall \psi_h \in W_h^1(\Gamma_c), \psi_h \geq 0 \right\}.$$

Pour abrégier les notations, nous noterons enfin \mathcal{M}_h le cône convexe $\mathbf{M}_h \times M_{h,+}$ et $\lambda_h = (\lambda_{ht} = (\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn}) \in \mathcal{M}_h$.

Les espaces fonctionnels approchés mis en place, le problème hybride discret est obtenu de (1.25) par la méthode de Galerkin : trouver $(\mathbf{u}_h, \sigma_h, \lambda_{h,t}, \lambda_{h,n}) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h \times M_{h,+}$, avec $\lambda_{h,t_i} \nu_i = 0$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h, \mathbf{u}_h) + d_t(\tau_h, \lambda_{h,t}) + d_n(\tau_h, \lambda_{h,n}) = 0, \quad \forall \tau_h \in \mathbf{X}_h, \\ b(\sigma_h, \mathbf{v}_h) = -L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ d_t(\sigma_h, \mu_{h,t}) = 0, \quad \forall \mu_{h,t} = (\mu_{h,t1}, \mu_{h,t2}) \in \mathbf{M}_h, \quad \mu_{h,t_i} \nu_i = 0, \\ d_n(\sigma_h, \mu_{h,n} - \lambda_{h,n}) \leq 0, \quad \forall \mu_h \in M_{h,+}. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

ou sous forme condensée

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\sigma_h, \tau_h) + c(\tau_h, (\mathbf{u}_h, \lambda_{h,t}, \lambda_{h,n})) = 0, \quad \forall \tau_h \in \mathbf{X}_h, \\ c(\sigma_h, (\mathbf{v}_h, \mu_{h,t}, \mu_{h,n} - \lambda_{h,n})) \leq -L(\mathbf{v}_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, \mu_{h,t}, \mu_{h,n}) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h \times M_{h,+}, \\ \mu_{h,t_i} \nu_i = 0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Pour ne pas formuler la condition inf-sup sur un cône, on introduit les espaces suivants :

$$\mathcal{W}_h = \{(\mathbf{v}, \mu_t, \mu_n) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h \times M_{h,+}; (\mathbf{v}, \mu_t, -\mu_n) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h \times M_{h,+}\},$$

et

$$\mathcal{X}_h = \{\tau_h \in \mathbf{X}; \mathbf{c}(\tau_h, (\mathbf{v}_h, \mu_{th}, \mu_{nh})) = \mathbf{0}, \forall (\mathbf{v}_h, \mu_{th}, \mu_{nh}) \in \mathcal{W}_h\}.$$

Notons que $\tau_h \in \mathcal{X}_h$ implique $\mathbf{div} \tau_h = 0$.

Dans ce qui suit, nous aurons besoin de quelques opérateurs et de leurs propriétés d'approximation. Afin d'éviter toute référence à une éventuelle régularité globale de solution, nous rappelons que $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ et nous noterons $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$, $\ell = 1, 2$, les espaces de restriction à Ω^ℓ des fonctions de \mathbf{V}_h . On considère les opérateurs d'interpolation de Lagrange [14] I_h^ℓ , respectivement i_h , à valeurs dans

$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$, $\ell = 1, 2$, respectivement dans $W_h^1(\Gamma_c)$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{v}^\ell \in H^2(\Omega^\ell, \mathbb{R}^2)$ et $v \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)$

$$\|\mathbf{v}^\ell - I_h^\ell \mathbf{v}^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell, \mathbb{R}^2)} \leq ch^2 \|\mathbf{v}^\ell\|_{H^2(\Omega^\ell, \mathbb{R}^2)} ; \|v - i_h v\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq ch^{\frac{3}{2}} \|v\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)}. \quad (2.3)$$

Soit P_h , l'opérateur de projection L^2 -orthogonal de $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ dans \mathbf{V}_h . Rappelons que P_h satisfait les estimations suivantes :

$$\|\mathbf{v} - P_h \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} \leq Ch^m \|\mathbf{v}\|_{H^m(\Omega; \mathbb{R}^2)}, \quad 0 \leq m \leq 2. \quad (2.4)$$

On introduit également π_h^1 l'opérateur de projection L^2 -orthogonal de $L^2(\Gamma_c)$ dans $W_h^1(\Gamma_c)$ [10, 8] (on notera encore π_h^1 le même opérateur à valeurs dans $\mathbf{W}_h^1(\Gamma_c)$). Cet opérateur satisfait les propriétés de stabilité suivantes : soit $\mu \in [0, 1]$ et $\nu \in]\frac{1}{2}, 2]$. Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $\varphi \in H^\nu(\Gamma_c)$,

$$\|\varphi - \pi_h^1 \varphi\|_{H^{-\mu}(\Gamma_c)} + h^{\mu+\frac{1}{2}} \|\varphi - \pi_h^1 \varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq ch^{\mu+\nu} \|\varphi\|_{H^\nu(\Gamma_c)}. \quad (2.5)$$

Notons \mathcal{N} l'ensemble des noeuds de la triangulation \mathcal{T}_h et \mathcal{E} l'ensemble des côtés, on considère l'opérateur de projection Π_h de $H^1(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2,2})$ dans \mathbf{X}_h défini par

$$\begin{cases} \Pi_h \tau(\mathbf{x}) = R_h(\tau)(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}, \\ \int_e (\tau - \Pi_h \tau) \nu \cdot \mathbf{v} ds = 0, & \forall e \in \mathcal{E}, \text{ et } \forall \mathbf{v} \in P_1(e, \mathbb{R}^2), \\ \int_T (\tau - \Pi_h \tau) d\mathbf{x} = 0, & \forall T \in \mathcal{T}_h, \end{cases} \quad (2.6)$$

où R_h est l'opérateur de Clément [15] $L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2,2}) \longrightarrow \mathbf{X}_h \cap H^1(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2,2})$. L'opérateur Π_h est introduit et étudié par Arnold-Winther [4]. Notamment, il vérifie

- a) $\mathbf{div} \Pi_h \tau = P_h(\mathbf{div} \tau)$.
- b) $(\Pi_h \tau) \nu$ sur un côté est uniquement déterminé par $\tau \nu$ sur ce côté.
- c) $\int_e (\Pi_h \tau) \nu ds = \int_e \tau \nu ds$, et $\int_e (\Pi_h \tau \nu) \nu ds = \int_e (\tau \nu) \nu ds$.

De plus on a les inégalités :

$$\|\Pi_h \tau - \tau\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2,2})} \leq Ch^m \|\tau\|_{H^m(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2,2})}, \quad 1 \leq m \leq 3. \quad (2.7)$$

On a la propriété suivante

Lemme 2.1 *il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h telle que*

$$\sup_{\tau_h \in \mathbf{X}_h} \frac{c(\tau_h, (\mathbf{v}_h, \mu_{t,h}, \mu_{n,h}))}{\|\tau_h\|_{\mathbf{X}}} \geq \beta (\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{t,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{n,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}),$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, \mu_{h,t}, \mu_{h,n}) \in \mathcal{W}_h. \quad (2.8)$$

Preuve: Soit un élément $(\mathbf{v}_h, \mu_{t,h}, \mu_{n,h}) \in \mathcal{W}_h$, donné. On peut associer un tenseur régulier τ , défini dans Ω tel que

$$\begin{cases} \mathbf{div} \tau = \mathbf{v}_h, & \text{dans } \Omega, \\ \tau \cdot \mathbf{n} = \pm \mu_{n,h} \mathbf{n} + \pm \mu_{t,h}, & \text{sur } \Gamma_c^\pm, \\ \tau \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

De plus

$$\|\tau\|_{\mathbf{X}} \leq c_0 (\|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{t,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{n,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}).$$

Soit $\tau_h = \Pi_h(\tau) \in \mathbf{X}_h$. Alors

$$\begin{aligned} c(\tau_h, (\mathbf{v}_h, \mu_{t,h}, \mu_{n,h})) &= (\|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{t,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{n,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)})^2 \\ &\geq c_0^{-1} \|\tau\|_{\mathbf{X}} (\|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{t,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{n,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}) \\ &\geq c \|\tau_h\|_{\mathbf{X}} (\|\mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{t,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\mu_{n,h}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}). \end{aligned}$$

On a le résultat dont la démonstration est identique à celle de la proposition 3 grâce à la propriété (2.8) :

Proposition 4 *Supposons que \mathbf{M}_h et M_{h+} sont donnés comme précédemment. Alors, le problème discret (2.1) admet une unique solution.*

L'analyse a priori et l'étude des taux de convergence sont basées sur la condition inf-sup (2.8) et l'ellipticité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur le noyau de $c(\cdot, (\cdot, \cdot, \cdot))$.

Lemme 2.2 *Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \lambda_t = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (1.25), et soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \lambda_{th} = ((\lambda_{t1,h}, \lambda_{t2,h}), \lambda_{n,h}))$ la solution du problème discret (2.1). On a les estimation suivantes :*

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}} &\leq C_1 \left(\inf_{\tau_h \in \mathcal{X}_h} \|\sigma - \tau_h\|_{\mathbf{X}} + (-b(\sigma - \tau_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \right. \\ &\quad - d_t(\sigma - \tau_h, \lambda_t - \lambda_{th}) + d_t(\sigma - \sigma_h, \lambda_t - \mu_{th}) + d_n(\sigma - \sigma_h, \lambda_n - \mu_{nh}) \\ &\quad \left. - d_n(\sigma - \tau_h, \lambda_n - \lambda_{nh}) - d_n(\sigma, \lambda_n - \mu_{nh}) - d_n(\sigma, \lambda_{nh}) - d_n(\sigma_h, \mu_{nh}) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} &\leq C_2 (\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}} \\ + \inf_{(\mathbf{v}_h, \mu_{ht}, \mu_{nh}) \in \mathcal{W}_h} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \|\lambda_t - \mu_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \mu_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)})), \quad (2.10) \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de h .

Preuve: De l'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ on a

$$\alpha \|\tau_h - \sigma_h\|_{\mathbf{X}}^2 \leq a(\sigma_h - \tau_h, \sigma_h - \tau_h) \quad \forall \tau_h \in \mathcal{X}_h.$$

On écrit :

$$a(\sigma_h - \tau_h, \sigma_h - \tau_h) = a(\sigma - \tau_h, \sigma_h - \tau_h) + a(\sigma - \sigma_h, \tau_h - \sigma_h).$$

Comme $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{X}$, en prenant $\tau = \tau_h - \sigma_h$ dans la première ligne de (1.26) et en soustrayant la première ligne de (2.2) , il vient

$$a(\sigma - \sigma_h, \tau_h - \sigma_h) + c(\tau_h - \sigma_h, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_h) = 0,$$

où on a posé $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, \lambda_t, \lambda_n)$, respectivement $\tilde{\mathbf{u}}_h = (\mathbf{u}_h, \lambda_{th}, \lambda_{nh})$. Notons que

$$c(\tau_h - \sigma_h, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_h) = b(\tau_h - \sigma_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + d_t(\tau_h - \sigma_h, \lambda_t - \lambda_{th}) + d_n(\tau_h - \sigma_h, \lambda_n - \lambda_{nh}),$$

De la deuxième ligne de (2.1) et compte tenu de $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$, on déduit que pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$,

$$b(\tau_h - \sigma_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = b(\tau_h - \sigma, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h).$$

De la troisième ligne de (2.1) et compte tenu de $\mathbf{M}_h \subset \mathbf{M}$, on déduit que pour tout $\mu_{th} \in \mathbf{M}_h$,

$$d_t(\tau_h - \sigma_h, \lambda_t - \lambda_{th}) = d_t(\tau_h - \sigma, \lambda_t - \lambda_{th}) + d_t(\sigma - \sigma_h, \lambda_t - \mu_{th}).$$

Le dernier terme, compte tenu de $d_n(\sigma_h, \lambda_{nh}) = 0$, se réécrit comme suit : pour tout $\mu_{nh} \in M_h^+$,

$$\begin{aligned} d_n(\tau_h - \sigma_h, \lambda_n - \lambda_{nh}) &= d_n(\tau_h - \sigma_h, \lambda_n) - d_n(\tau_h, \lambda_{nh}) \\ &= -d_n(\sigma - \tau_h, \lambda_n - \lambda_{nh}) + d_n(\sigma - \sigma_h, \lambda_n - \mu_{nh}) \\ &\quad - d_n(\sigma, \lambda_n - \mu_{nh}) - d_n(\sigma, \lambda_{nh}) - d_n(\sigma_h, \mu_{nh}). \end{aligned}$$

Finalement, on a l'inégalité triangulaire

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}} \leq \|\sigma - \tau_h\|_{\mathbf{X}} + \|\tau_h - \sigma_h\|_{\mathbf{X}},$$

d'où, en regroupant tous les termes, la première inégalité (2.9).

La seconde s'obtient aussi de façon standard grâce à la condition inf-sup (2.8) : pour tout $\tilde{\mathbf{v}}_h = (\mathbf{v}_h, \mu_{th}, \mu_{nh}) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h \times M_h^+$,

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{v}}_h\| \leq C \frac{c(\tau_h, \tilde{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{v}}_h)}{\|\tau_h\|_{\mathbf{X}}}.$$

En prenant $\tau = \tau_h$ dans la première ligne de (1.25) et en soustrayant la première ligne de (2.1), on a :

$$c(\tau_h, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_h) + a(\sigma - \sigma_h, \tau_h) = 0,$$

et par conséquent

$$c(\tau_h, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{v}}_h) + a(\sigma - \sigma_h, \tau_h) = -c(\tau - \tau_h, \tilde{\mathbf{v}}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h),$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{v}}_h\| &\leq C \frac{c(\tau_h, \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{v}}_h) + a(\sigma - \sigma_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_{\mathbf{X}}} \\ &\leq C(\|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{v}}_h\| + \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}}). \end{aligned}$$

On conclut grâce à l'inégalité triangulaire

$$\|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_h\| \leq \|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{v}}_h\| + \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{v}}_h\|.$$

Soit

$$\mathbf{Z} = \{ \sigma = \{ \sigma_{ij} \} \in (H^1(\Omega))^4; \mathbf{div} \sigma \in (H^1(\Omega))^2, \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \},$$

et notons par $\mathbf{Z}(\Omega^\ell)$, $\ell = 1, 2$ l'espace des restrictions des fonctions de \mathbf{Z} à Ω^ℓ .

Proposition 5 *Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \lambda = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (1.25). Supposons que $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in H^2(\Omega^1)$, $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in H^2(\Omega^2)$ et que $\sigma|_{\Omega^1} \in \mathbf{Z}(\Omega^1)$, $\sigma|_{\Omega^2} \in \mathbf{Z}(\Omega^2)$. Soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \lambda_h = ((\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn}))$ la solution du problème discret (2.1) avec le choix de \mathbf{M}_h et M_{h+} donné précédemment. On a alors l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}} &\leq C(\sigma, \mathbf{u}) \left(h(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}) \right. \\ &\quad \left. + h^{\frac{3}{2}} \|\lambda_{nh} - \lambda_n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + h^{\frac{3}{2}} \right), \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2))} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} &\leq \\ &C(\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}} + C(\mathbf{u})h). \quad (2.12) \end{aligned}$$

La constante $C(u, \sigma)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}|_{\Omega^\ell}\|_{H^2(\Omega^\ell)}$, $\|\sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^4}$, et $\|\mathbf{div} \sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^2}$, $\ell = 1, 2$.

Preuve: La démonstration se décompose en plusieurs étapes.

– Rappelons de [[27], Chap II, 1.16] et de la condition inf-sup (2.8), qu'on a

$$\inf_{\tau_h \in \mathcal{X}_h} \|\sigma - \tau_h\|_{\mathbf{X}} \leq C \inf_{\tau_h \in \mathbf{X}_h} \|\sigma - \tau_h\|_{\mathbf{X}}.$$

En prenant $\tau_h = \Pi_h \tau$ et en utilisant les propriétés de Π_h [[4], Th5.1], on obtient

$$\inf_{\tau_h \in \mathcal{X}_h} \|\sigma - \tau_h\|_{\mathbf{X}} \leq C(\sigma) h. \quad (2.13)$$

– Notons aussi que le deuxième, le quatrième et le septième termes de (2.9) se regroupent et se majorent comme suit :

$$\begin{aligned} c(\sigma - \tau_h, (\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_h)) &\leq C \inf_{\tau_h \in \mathcal{X}_h} \|\sigma - \tau_h\|_{\mathbf{X}} \\ &\quad \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \right) \\ &\leq C(\sigma) h \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

– En choisissant $\mathbf{v}_h^\ell = \mathbf{v}_{h|\Omega^\ell} = P_h^\ell \mathbf{v}^\ell$, $\ell = 1, 2$, on obtient grâce à (2.3) :

$$L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \leq C(\mathbf{u}) h^2. \quad (2.15)$$

– On pose $\mu_{th} = (\mu_{t1,h}, \mu_{t2,h}) = (i_h(\lambda_{t1}), i_h \lambda_{t2})$, on déduit

$$\begin{aligned} d_t(\sigma - \sigma_h, \lambda_t - \mu_{th}) &\leq C \|\sigma_t - \sigma_{t,h}\|_{L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} \|\lambda_t - \mu_{th}\|_{L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} \\ &\leq C h^{\frac{3}{2}} \|\lambda_t\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} \|\sigma_t - \sigma_{t,h}\|_{L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

De la définition de σ_t et utilisant le théorème de trace suivant : pour tout côté e d'un triangle T de \mathcal{T}_h ,

$$\|\tau \nu\|_{L^2(e, \mathbb{R}^2)} \leq C (h_T^{-\frac{1}{2}} \|\tau\|_{L^2(T, \mathbb{R}^{2,2})} + h_T^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{div} \tau\|_{L^2(T, \mathbb{R}^2)}),$$

on obtient

$$d_t(\sigma - \sigma_h, \lambda_t - \mu_{th}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) (h \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + h^2). \quad (2.16)$$

– Soit $\mu_{nh} = i_h(\lambda_n)$. Alors de façon similaire

$$d_n(\sigma - \sigma_h, \lambda_n - \mu_{nh}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) (h \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + h^2). \quad (2.17)$$

Le terme $d_n(\sigma_h, \mu_{nh})$ se majore de la même façon

$$d_n(\sigma_h, \mu_{nh}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) (h \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + h^2). \quad (2.18)$$

– On a

$$\begin{aligned}
d_n(\sigma, \lambda_n - \mu_{nh}) &= \int_{\Gamma_c} \sigma_n (\lambda_n - i_h(\lambda_n)) ds \\
&= \int_{\Gamma_c} (\sigma_n - \pi_h^1(\sigma_n)) (\lambda_n - i_h(\lambda_n)) ds \\
&\leq \|\sigma_n - \pi_h^1(\sigma_n)\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\lambda_n - i_h(\lambda_n)\|_{L^2(\Gamma_c)}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$d_n(\sigma, \lambda_n - \mu_{nh}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) h^3. \quad (2.19)$$

– Le dernier terme se traite comme suit

$$\begin{aligned}
d_n(\sigma, \lambda_{nh}) &= \int_{\Gamma_c} (\lambda_{nh}) (\sigma_n) ds \\
&= \int_{\Gamma_c} (\lambda_{nh}) (\sigma_n - i_h(\sigma_n)) ds + \int_{\Gamma_c} (\lambda_{nh}) (i_h(\sigma_n)) ds.
\end{aligned}$$

Comme $i_h(\sigma_n) \leq 0$ et $\lambda_{nh} \in M_h^+$, alors $\int_{\Gamma_c} (\lambda_{nh}) (i_h(\sigma_n)) ds \leq 0$. Il suit

$$\begin{aligned}
d_n(\sigma, \lambda_{nh}) &\leq \int_{\Gamma_c} (\lambda_{nh}) (\sigma_n - i_h(\sigma_n)) ds \\
&\leq \int_{\Gamma_c} (\lambda_{nh} - \lambda_n) (\sigma_n - i_h(\sigma_n)) ds + \int_{\Gamma_c} (\lambda_n) (\sigma_n - i_h(\sigma_n)) ds \\
&\leq \|\lambda_{nh} - \lambda_n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|\sigma_n - i_h(\sigma_n)\|_{L^2(\Gamma_c)} \\
&\quad + \|\lambda_n\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\sigma_n - i_h(\sigma_n)\|_{L^2(\Gamma_c)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$d_n(\sigma, \lambda_{nh}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) (h^{\frac{3}{2}} \|\lambda_{nh} - \lambda_n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + h^{\frac{3}{2}}). \quad (2.20)$$

En regroupant les estimations (2.13)-(2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}} &\leq C(\sigma, \mathbf{u}) \left\{ h \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \right) \right. \\
&\quad \left. + h \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + h^{\frac{3}{2}} \|\lambda_{nh} - \lambda_n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + h^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

En utilisant la relation $ab \leq \gamma a^2 + \frac{1}{4\gamma} b^2$, $a, b \geq 0$, pour $\gamma > 0$ petit, on obtient (2.11). De manière similaire et en utilisant l'inégalité (2.10) de la proposition 4, on aboutit à la seconde majoration (2.12).

Le théorème suivant est une conséquence directe de la proposition précédente.

Théorème 2.1 Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \lambda_t = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (1.25). Supposons que $\mathbf{u}_{|\Omega^1} \in H^2(\Omega^1)$, $\mathbf{u}_{|\Omega^2} \in H^2(\Omega^2)$ et que $\sigma_{|\Omega^1} \in \mathbf{Z}(\Omega^1)$, $\sigma_{|\Omega^2} \in \mathbf{Z}(\Omega^2)$. Soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \lambda_{ht} = ((\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn}))$ la solution du problème discret (2.1) avec le choix de \mathbf{M}_h et M_{h+} donné précédemment. Alors on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{X}} + \|\lambda_t - \lambda_{ht}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2))} \\ + \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C(\mathbf{u}, \sigma, \lambda) h^{\frac{3}{4}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

La constante $C(u, \sigma)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}_{|\Omega^\ell}\|_{H^2(\Omega^\ell)}$, $\|\sigma_{|\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^4}$, et $\|\mathbf{div} \sigma_{|\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^2}$, $\ell = 1, 2$.

2.2.2 Élément fini " P_1 - P_1 bulle"

Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, on note par $P_1(T)$ l'espace des fonctions continues et affines sur T et on définit la fonction bulle associée φ_T par

$$\varphi_T(x) = \prod_{i=1}^3 \lambda_i(x), \quad \forall x \in T,$$

où λ_i désigne la i ème coordonnée barycentrique dans T . On note aussi par $P_B(T) = P_1(T) \oplus \mathbb{R}\varphi_T$ l'espace d'approximation du vecteur déplacement dans \mathbf{X} .

On introduit les espaces discrets suivants : pour $h > 0$,

$$\mathbf{X}_h = \{\sigma_h \in \mathbf{X}; \sigma_{h|T} \in (P_B(T))^4, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

et

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in (\mathcal{C}(\bar{\Omega}))^2; \mathbf{v}_{h|T} \in (P_1(T))^2, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

En ce qui concerne l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange \mathbf{M} et le convexe M_+ , ils restent inchangés.

Le problème discret étant le même qu'au paragraphe précédent, nous ne l'écrivons pas. On a pour cette discrétisation le résultat :

Proposition 6 Supposons que \mathbf{M}_h et M_{h+} sont donnés comme précédemment. Alors, le problème discret (2.1) admet une unique solution.

Nous ne ferons pas l'analyse a priori de cette élément parce qu'il ne satisfait pas la condition inf-sup de Brezzi-Babuska et par conséquent, ces propriétés d'approximation ne sont pas optimales. Cependant, cet élément provient du cas scalaire de la membrane élastique [6] et donne des résultats numériques satisfaisant tout en étant simple à implémenter.

l'élément finis Arnold et Winther comporte un grand nombre de degrés de liberté au moins dans sa version conforme qui vaut 24 par élément, et d'ailleurs, il possède un nombre de propriétés favorables permettant une analyse mathématique simple. De plus, on a seulement 12 degrés de liberté par élément "P1 P1bulle" ce qui implique que cet élément est avantageux et facile à implémenté.

Chapitre 3

Mise en oeuvre et résultats numériques.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons en détail la mise en oeuvre de la discrétisation par les éléments finis "P1 P1-bulle" pour la formulation mixte et hybride (2.1). La mise en oeuvre de la discrétisation par l'élément fini Arnold-Winther suit les mêmes lignes mais l'élément fini dans ce cas comporte nettement plus de degrés de liberté et est donc plus coûteux. On ne présentera que les résultats de simulation pour le "P1 P1-bulle". Par ailleurs, on pourrait mettre en oeuvre les formulations non hybrides, ce qui nous amènerait à la résolution de "grands" problèmes d'optimisation avec très peu de contraintes (portant sur les conditions de contact). Nous avons choisi de résoudre la formulation hybride parce qu'on se ramène cette fois à la résolution de problèmes d'optimisation de tailles petites et de déterminer ensuite le tenseur des contraintes et les déplacements par la résolution de (grands) systèmes linéaires issus des conditions d'optimalité. Ce choix est purement "logiciel" est ne signifie nullement que l'une ou l'autre des méthodes de résolution soit meilleure.

3.2 Formulation matricielle

Avant d'étudier la formulation matricielle, on va d'abord s'intéresser au stockage et aux calculs liés aux matrices qui interviennent dans la résolution. On a :

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathcal{C}^{-1}\varepsilon(\mathbf{u}).$$

Comme nous sommes dans un cadre de formulation avec symétrie du tenseur de contraintes, nous allons adopter la notation "ingénieur" qui permet de représenter

les tenseurs d'ordre 4 comme des vecteurs dans \mathbb{R}^3 :

$$\sigma(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{22}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{12}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{u}) \\ \varepsilon_{22}(\mathbf{u}) \\ \varepsilon_{12}(\mathbf{u}) \end{bmatrix},$$

où E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson, donc

$$\mathcal{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a(\sigma_h, \tau_h) &= (\mathcal{C}^{-1}\sigma_h, \tau_h) = \int_{\Omega} \tau_h \mathcal{C}^{-1}\sigma_h \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{E} \int_{\Omega} (\tau_{11}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \tau_{22}(-\nu\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 2(1+\nu)\tau_{11}\sigma_{12}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Soit $(w_i)_{i=1}^{ns}$ les fonctions de base des éléments finis P1 conformes et soit $(b_i)_{i=1}^{nt}$ les fonctions de base de $\mathbb{R}\varphi_T$, $T \in \mathcal{T}_h$, avec ns le nombre de noeuds dans Ω , et nt le nombre de triangles de \mathcal{T}_h . La base éléments finis de \mathbf{X}_h est donnée par

$$\begin{cases} (w_i, 0, 0)_{i=1, \dots, ns} & (b_j, 0, 0)_{j=1, \dots, nt}, \\ (0, w_i, 0)_{i=1, \dots, ns} & (0, b_j, 0)_{j=1, \dots, nt}, \\ (0, 0, w_i)_{i=1, \dots, ns} & (0, 0, b_j)_{j=1, \dots, nt}, \end{cases}$$

de telle sorte que si $\sigma = {}^t(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) \in \mathbf{X}_h$, alors σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} se décomposent de manière unique sous forme :

$$\sigma_{kl} = \sum_{i=1}^{ns} \sigma_{kl}(i)w_i + \sum_{j=1}^{nt} \sigma_{kl}(j)b_j, \quad \{k, l\} \in \{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}.$$

Alors, pour tout $\tau_h \in \mathbf{X}_h$, choisissons $\tau_h = (w_j, 0, 0)$, $j = 1, \dots, ns$ où $\tau_h = (b_j, 0, 0)$, $j = 1, \dots, nt$, ou bien $\tau_h = (0, w_j, 0)$, $j = 1, \dots, ns$ ou $\tau_h = (0, b_j, 0)$, $j = 1, \dots, nt$, ou bien, $\tau_h = (0, 0, w_j)$, $j = 1, \dots, ns$ où $\tau_h = (0, 0, b_j)$, $j = 1, \dots, nt$. On obtient :

$$\begin{aligned} a(\sigma_h, \tau_h) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E}D & -\nu\frac{1}{E}D & \\ -\nu\frac{1}{E}D & \frac{1}{E}D & \\ 0 & 0 & 2\frac{1}{E}(1+\nu)D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{22}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{12}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^4 \\ A^2 & A^3 & {}^tA^4 \\ {}^tA^4 & A^4 & A^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{22}(\mathbf{u}) \\ \sigma_{12}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où chaque A^l , $l = 1, \dots, 5$ est une matrice de la forme :

$$A^l = \begin{bmatrix} A_{11}^l & A_{12}^l \\ A_{21}^l & A_{22}^l \end{bmatrix},$$

et

$$D = \begin{bmatrix} \int_T w_i w_j dx & \int_T b_i w_j dx \\ \int_T w_i b_j dx & \int_T b_i b_j dx. \end{bmatrix}.$$

Pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, en prenant $\mathbf{v}_h = (w_i, 0)$, $i = 1, \dots, ns$ où bien $\mathbf{v}_h = (0, w_i)$, $i = 1, \dots, ns$, alors

$$b(\mathbf{u}_h, \sigma_h) = \begin{bmatrix} {}^t B^1 & 0 \\ 0 & {}^t B^2 \\ {}^t B^2 & {}^t B^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix},$$

où

$$B^1 = \begin{bmatrix} \int_T w_i \partial_x w_j dx & \int_T w_i \partial_x b_j dx \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} \int_T w_i \partial_y w_j dx & \int_T w_i \partial_y b_j dx \end{bmatrix}.$$

On désigne par nc le nombre de noeuds sur Γ_c . Le multiplicateur de Lagrange est choisi dans l'espace d'élément fini \mathcal{P}_1 . Soit donc $(\psi_k)_{k=1}^{nc}$ une base de $W_h^1(\Gamma_c)$. On peut écrire :

$$\lambda_{h,n} = \sum_{i=1}^{nc} \lambda_n(i) \psi_i,$$

$$\tau_{h,\nu} = \tau_{11} + \tau_{22} + 2\tau_{12}\nu_1\nu_2.$$

Or $\nu_1\nu_2 = 0$, donc :

$$\langle \tau_{h,\nu}, \lambda_{h,n} \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} = 2 \sum_{i=1}^{nc} \lambda_n(i) \int_{\Gamma_c} w_j \psi_i ds,$$

de sorte que

$$d_n(\tau_{h,\nu}, \lambda_{h,n}) = \langle \tau_{h,\nu}, \lambda_{h,n} \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_{h,n},$$

avec L_1 , matrice d'ordre $(ns + nt, nc)$ donnée par :

$$L_1 = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_c} w_j \psi_i ds \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$d_t(\tau_{h,t}, \lambda_{h,t}) = \langle \langle \tau_{h,\nu}, \lambda_{h,t} \rangle \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c} = \int_{\Gamma_c} \tau_{h,\nu} \lambda_{h,t} ds,$$

donc

$$d_t(\tau_{h,t}, \lambda_{h,t}) = \begin{bmatrix} 0 & -L_1 \\ 0 & 0 \\ L_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{h,t1} \\ \lambda_{h,t2} \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} P^1 \\ b^1 \\ P^2 \\ b^2 \\ P^3 \\ b^3 \\ u1 \\ u2 \\ \lambda_t^1 \\ \lambda_t^2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} L1 \\ 0 \\ L1 \\ 0 \\ 2L1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et } F = \begin{bmatrix} F_{11}^1 \\ 0 \\ F_{11}^2 \\ 0 \\ F_{11}^3 \\ 0 \\ F_x \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Des deuxième, quatrième et sixième lignes du système linéaire (3.1), nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} A_{21}^1 P^1 + A_{22}^1 b^1 + A_{21}^2 P^2 + A_{22}^2 b^2 + A_{21}^4 P^3 + A_{22}^4 b^3 + {}^t B_{12}^1 u1 = 0, \\ A_{21}^2 P^1 + A_{22}^2 b^1 + A_{21}^3 P^2 + A_{22}^3 b^2 + {}^t A_{12}^4 P^3 + {}^t A_{22}^4 b^3 + {}^t B_{12}^2 u2 = 0, \\ {}^t A_{12}^4 P^1 + {}^t A_{22}^4 b^1 + A_{21}^4 P^2 + A_{22}^4 b^2 + A_{21}^5 P^3 + A_{22}^5 P^3 + {}^t B_{12}^2 u1 + {}^t B_{12}^1 u2 = 0. \end{cases}$$

Ceci qui implique que :

$$\begin{cases} A_{22}^1 b^1 + A_{22}^2 b^2 + A_{22}^4 b^3 = N_1, \\ A_{22}^2 b^1 + A_{22}^3 b^2 + {}^t A_{12}^4 P^3 = N_2, \\ {}^t A_{22}^4 b^1 + A_{22}^4 b^2 + A_{22}^5 P^3 = N_3, \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$$\begin{cases} N_1 = - \{ A_{21}^1 P^1 + A_{21}^2 P^2 + A_{21}^4 P^3 + {}^t B_{12}^1 u1 \}, \\ N_2 = - \{ A_{21}^2 P^1 + A_{21}^3 P^2 + {}^t A_{12}^4 P^3 + {}^t B_{12}^2 u2 \}, \\ N_3 = - \{ {}^t A_{12}^4 P^1 + A_{21}^4 P^2 + A_{21}^5 P^3 + {}^t B_{12}^2 u1 + {}^t B_{12}^1 u2 \}. \end{cases}$$

De l'équation 1 du système (3.2), on obtient :

$$b^1 = (A_{22}^1)^{-1} \{ N_1 - A_{22}^2 b^2 - A_{22}^4 b^3 \}.$$

On la remplace dans la deuxième et la troisième équations du système (3.2). Il vient :

$$\begin{cases} (A_{22}^3 - A_{22}^2 (A_{22}^1)^{-1} A_{22}^2) b^2 + ({}^t A_{22}^4 - A_{22}^2 (A_{22}^1)^{-1} A_{22}^4) b^3 = N_2 - A_{22}^2 (A_{22}^1)^{-1} N_1, \\ (A_{22}^4 - {}^t A_{22}^4 (A_{22}^1)^{-1} A_{22}^2) b^2 + (A_{22}^5 - {}^t A_{22}^4 (A_{22}^1)^{-1} A_{22}^4) b^3 = N_3 - {}^t A_{22}^4 (A_{22}^1)^{-1} N_1. \end{cases}$$

On a donc un système linéaire de deux équations avec deux inconnues. On pose :

$$\begin{cases} R_1 b^2 + R_2 b^3 = N_2 - A_{22}^2 (A_{22}^1)^{-1} N_1, \\ R_3 b^2 + R_4 b^3 = N_3 - {}^t A_{22}^4 (A_{22}^1)^{-1} N_1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} b^1 = (A_{22}^1)^{-1} \{N_1 - A_{22}^2 b^2 - A_{22}^4 b^3\}, \\ b^2 = R_1^{-1} (N_2 - A_{22}^2 (A_{22}^1)^{-1} N_1) - R_1^{-1} R_2 (R_4 - R_3 R_1^{-1} R_2)^{-1} \\ \quad \{N_3 - {}^t A_{22}^4 (A_{22}^1)^{-1} N_1 - R_3 R_1^{-1} (N_2 - A_{22}^2 (A_{22}^1)^{-1} N_1)\}, \\ b^3 = (R_4 - R_3 R_1^{-1} R_2)^{-1} \{N_3 - {}^t A_{22}^4 (A_{22}^1)^{-1} N_1 - R_3 R_1^{-1} (N_2 - A_{22}^2 (A_{22}^1)^{-1} N_1)\}. \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} b^1 = b_{11} P^1 + b_{12} P^2 + b_{13} P^3 + b_{14} u_1 + b_{15} u_2, \\ b^2 = b_{21} P^1 + b_{22} P^2 + b_{23} P^3 + b_{24} u_1 + b_{25} u_2, \\ b^3 = b_{31} P^1 + b_{32} P^2 + b_{33} P^3 + b_{34} u_1 + b_{35} u_2. \end{cases}$$

On remplace donc b_1 , b_2 et b_3 dans la première, la troisième et la cinquième lignes du système linéaire (3.1). Par conséquent, on obtient le système réduit suivant sans les fonctions bulles :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & 0 & -L1 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & L1 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & 0 & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t L1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^t L1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \\ u_1 \\ u_2 \\ \lambda_t^1 \\ \lambda_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L1 \\ L1 \\ 2L1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_n = \begin{bmatrix} F_{11}^1 \\ F_{11}^2 \\ F_{11}^3 \\ F_x \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

où

$$\begin{cases} K_{11} = A_{11}^1 + A_{12}^1 b_{11} + A_{12}^2 b_{21} + A_{12}^4 b_{31}, \\ K_{12} = A_{11}^2 + A_{12}^1 b_{12} + A_{12}^2 b_{22} + A_{12}^4 b_{32}, \\ K_{13} = A_{11}^4 + A_{12}^1 b_{13} + A_{12}^2 b_{23} + A_{12}^4 b_{33}, \\ K_{14} = {}^t B_{11}^1 + A_{12}^1 b_{14} + A_{12}^2 b_{24} + A_{12}^4 b_{34}, \\ K_{15} = A_{12}^1 b_{15} + A_{12}^2 b_{25} + A_{12}^4 b_{35}, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{21} = A_{11}^2 + A_{12}^2 b_{11} + A_{12}^3 b_{21} + {}^t A_{21}^4 b_{31}, \\ K_{22} = A_{11}^3 + A_{12}^2 b_{12} + A_{12}^3 b_{22} + {}^t A_{21}^4 b_{32}, \\ K_{23} = {}^t A_{11}^4 + A_{12}^2 b_{13} + A_{12}^3 b_{23} + {}^t A_{21}^4 b_{33}, \\ K_{24} = A_{12}^2 b_{14} + A_{12}^3 b_{24} + {}^t A_{21}^4 b_{34}, \\ K_{25} = {}^t B_{11}^2 + A_{12}^2 b_{15} + A_{12}^3 b_{25} + {}^t A_{21}^4 b_{35}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{31} = {}^t A_{11}^4 + {}^t A_{21}^4 b_{11} + A_{12}^4 b_{21} + A_{12}^5 b_{31}, \\ K_{32} = A_{11}^4 + {}^t A_{21}^4 b_{12} + A_{12}^4 b_{22} + A_{12}^5 b_{32}, \\ K_{33} = A_{11}^5 + {}^t A_{21}^4 b_{13} + A_{12}^4 b_{23} + A_{12}^5 b_{33}, \\ K_{34} = {}^t B_{11}^2 + {}^t A_{21}^4 b_{14} + A_{12}^4 b_{24} + A_{12}^5 b_{34}, \\ K_{35} = {}^t B_{11}^1 + {}^t A_{21}^4 b_{15} + A_{12}^4 b_{25} + A_{12}^5 b_{35}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{41} = B_{11}^1 + B_{12}^1 b_{11} + B_{12}^2 b_{31}, \\ K_{42} = B_{12}^1 b_{12} + B_{12}^2 b_{32}, \\ K_{43} = B_{11}^2 + B_{12}^1 b_{13} + B_{12}^2 b_{33}, \\ K_{44} = B_{12}^1 b_{14} + B_{12}^2 b_{34}, \\ K_{45} = B_{12}^1 b_{15} + B_{12}^2 b_{35}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{51} = B_{12}^2 b_{21} + B_{12}^1 b_{31}, \\ K_{52} = B_{11}^2 + B_{12}^2 b_{22} + B_{12}^1 b_{32}, \\ K_{53} = B_{11}^1 + B_{12}^2 b_{23} + B_{12}^1 b_{33}, \\ K_{54} = B_{12}^2 b_{24} + B_{12}^1 b_{34}, \\ K_{55} = B_{12}^2 b_{25} + B_{12}^1 b_{35}. \end{array} \right.$$

3.3 Mise sous forme de problème de minimisation

Soient \mathbf{V} , \mathbf{U} les vecteurs formés par les valeurs de (\mathbf{v}_h, τ_h) et (\mathbf{u}_h, σ_h) , respectivement. Soient \mathbf{M} et Λ les vecteurs formés par les valeurs de μ_h et λ_h , respectivement. Le problème de recherche du point-selle du lagrangien \mathcal{L} peut s'écrire :

Trouver $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_h, \sigma_h)$ et Λ , définis par la condition max-min suivante :

$$\max_{SM \geq 0} \left(\min_{\mathbf{V}} \frac{1}{2} {}^t \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{V} - {}^t \mathbf{V} \mathbf{F} + ({}^t \mathbf{V} \mathbf{L}) S M \right), \quad (3.3)$$

où \mathbf{K} désigne la matrice de rigidité. La solution (\mathbf{U}, Λ) de (7.96) satisfait la condition du point-selle et nous avons :

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{F} - L S \Lambda). \quad (3.4)$$

Donc, pour $\Phi = S \Lambda$, le problème de point-selle (7.96) peut se réécrire comme un problème quadratique

$$\min_{\Phi \geq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t \Phi {}^t L \mathbf{K}^{-1} L \Phi - {}^t \Phi {}^t L \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \right). \quad (3.5)$$

Si $\bar{\Phi}$ est une solution du problème (7.97), alors $\Lambda = S^{-1} \bar{\Phi}$. La solution \mathbf{U} est obtenue par la résolution (7.72).

En mettant le problème sous forme de problème d'optimisation en Λ , on détermine σ et \mathbf{U} en inversant la matrice.

3.4 Résultats numériques

On n'a pas étudié d'un point de vue théorique les taux de convergence des solutions discrétisées par l'élément fini "P1 P1-bulle" vers la solution du modèle continu, car cette discrétisation ne satisfait pas les propriétés d'approximation usuelles. Cette partie numérique consiste à déterminer numériquement ces

taux de convergence. Il s'agit de calculer l'erreur commise sur la solution exacte. Comme l'on ne dispose pas de solution analytique, on est amenés à calculer sur un maillage fin la solution discrète que l'on considère comme solution de référence.

Pour tester l'élément fini "P1 P1bulle", on se place dans le cas de maillages compatibles sur la zone de contact, c'est à dire que les noeuds sur la zone de contact sont quasiment en vis-à-vis.

Test 1 : Fissure débouchante

On choisit l'exemple d'un domaine $\Omega =]0, 4[\times]0, 1[$. Dans un premier temps avec une fissure $\Gamma_c =]0, 4[\times \{\frac{1}{2}\}$ voir la courbe de la figure 3.4. On prend le module de Young du solide égal à $E = 206900$. Le coefficient de Poisson est $\nu = 0.29$. On désigne par "ddl" le nombre total de degrés de liberté, et par N_{L^2} la norme L^2 .

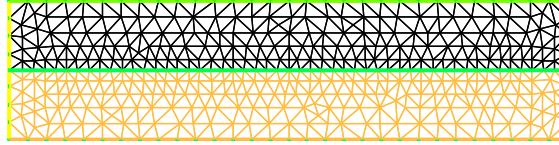


FIG. 3.1 – Maillage de domaine avec $\Gamma_c =]0, 4[\times \{\frac{1}{2}\}$.

ddl	83	162	461	819	937
N_{L^2}	0.227449873	0.0844177121	0.0489419458	0.0394980417	0.0209586395

TAB. 3.1 – $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}$.

Dans le tableau 3.1, on représente la norme L^2 de l'erreur relative de la première composante du déplacement \mathbf{u}_1 en fonction du nombre total de degrés de liberté.

ddl	83	162	461	819	937
N_{L^2}	0.318122037	0.144441467	0.0821550301	0.0752721434	0.0529486423

TAB. 3.2 – $\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_{2,h}\|_{L^2(\Omega)}$.

Le tableau 3.2 représente la norme L^2 de l'erreur relative de la deuxième composante du déplacement \mathbf{u}_2 en fonction du nombre total de degrés de liberté.

Le tableau 3.3 représente la norme L^2 de l'erreur relative de la première compo-

ddl	83	162	461	819	937
N_{L^2}	0.425346615	0.239523559	0.0669139203	0.05465566	0.0448078919

TAB. 3.3 – $\|\sigma_{tx} - \sigma_{txh}\|_{L^2(\Omega)}$.

sante tangentielle σ_{tx} des contraintes en fonction du nombre total de degrés de liberté.

Le tableau 3.4 fournit, pour la composante normale des contraintes σ_ν , la norme

ddl	83	162	461	819	937
N_{L^2}	0.412398168	0.233872393	0.0863552882	0.0670412243	0.0478285353

TAB. 3.4 – $\|\sigma_\nu - \sigma_{\nu h}\|_{L^2(\Omega)}$.

L^2 de l'erreur relative en fonction du nombre total de degrés de liberté.

Test 2 : Fissure non débouchante

Un deuxième test numérique est effectué pour une fissure complètement interne $\Gamma_c =]1, 3[\times \{\frac{1}{2}\}$ voir figure 3.11. Le module de Young du solide est égal à $E = 206900$. Le coefficient de Poisson est $\nu = 0.49$.

Commentaires

Lors du calculs des pentes des courbes de taux de convergence, on a obtenu les valeurs suivantes :

Les courbes de la figure 3.2 donnant la convergence de la méthode permet d'établir les taux de convergence, pour la norme L^2 de l'erreur, la pente est proche de 0.81 pour la première composante de déplacement \mathbf{u}_1 , et proche de 0.65 pour la deuxième composante de déplacement \mathbf{u}_2 . Cependant, la pente de convergence de la courbe de la figure 3.3 qui représente la première composante tangentielle des contraintes $\sigma_{t,x}$ est égale à 0.93, et celle de sa deuxième composante $\sigma_{t,y}$ est approximativement égale à 0.78.

On constate que le taux de convergence obtenu lors du calcul de l'erreur en fonction du pas de discrétisation du solide et en fonction du nombre total de degrés de liberté est de l'ordre de 0.75, ce qui est proche de celui prédit par le théorème 2.1 pour l'élément fini Arnold et Winther malgré le fait que l'élément fini "P1 P1bulle" ne vérifie pas la condition inf-sup de Brezzi-Babuska.

Notons comme c'est attendu pour les formulations mixte en élasticité, nous sommes capables d'obtenir de bons résultats numériques dans le cas "presque incompressible", i.e. $\nu \simeq 0.5$.

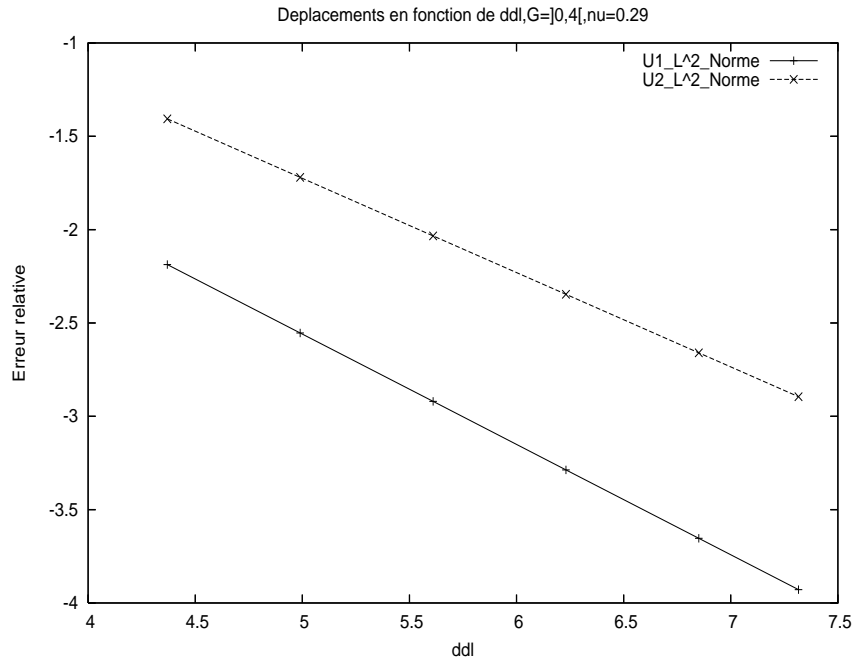


FIG. 3.2 – La norme L^2 de l'erreur relative des déplacements en fonction des ddl.

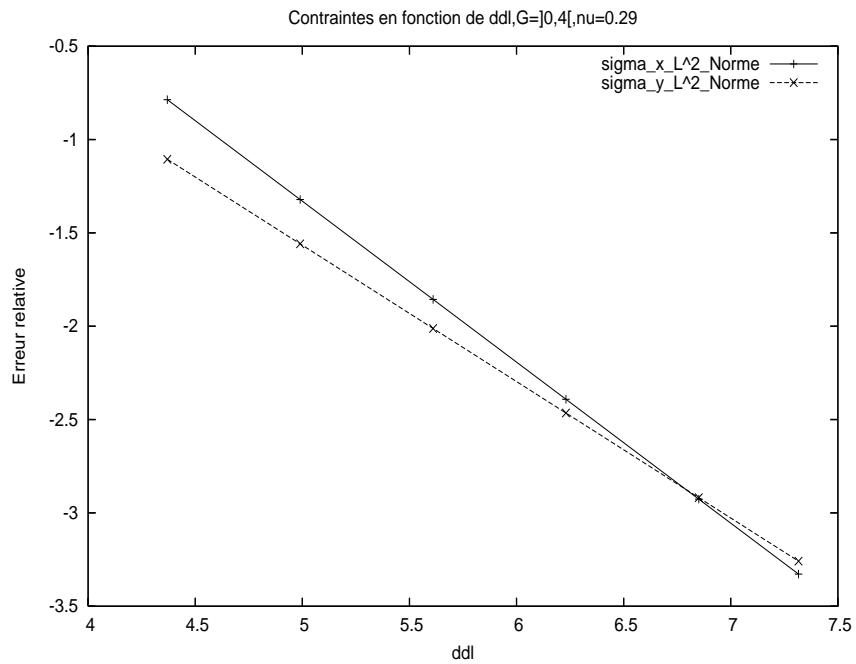


FIG. 3.3 – La norme L^2 de l'erreur relative des contraintes en fonction des ddl.

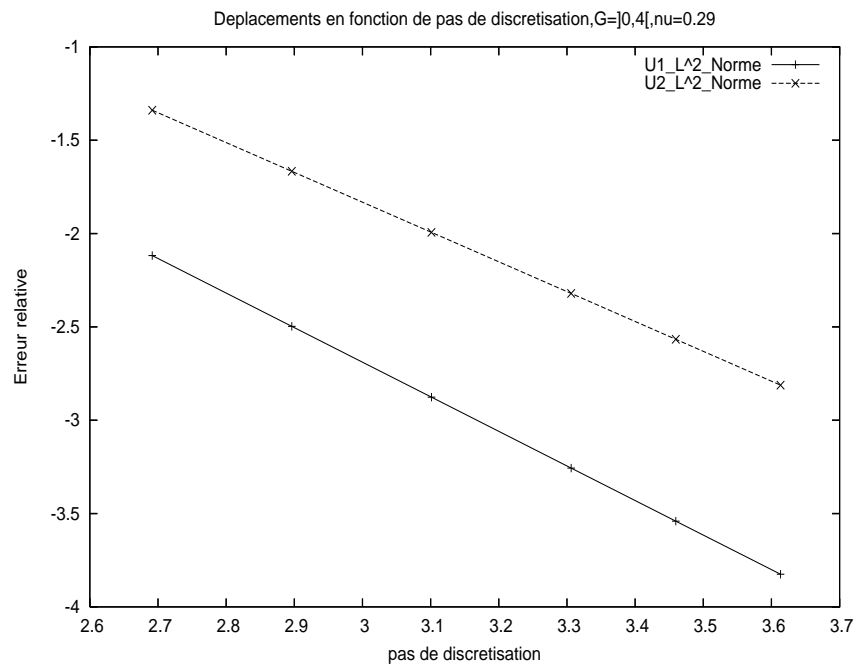


FIG. 3.4 – La norme L^2 de l'erreur relative des déplacements en fonction du pas de discrétisation.

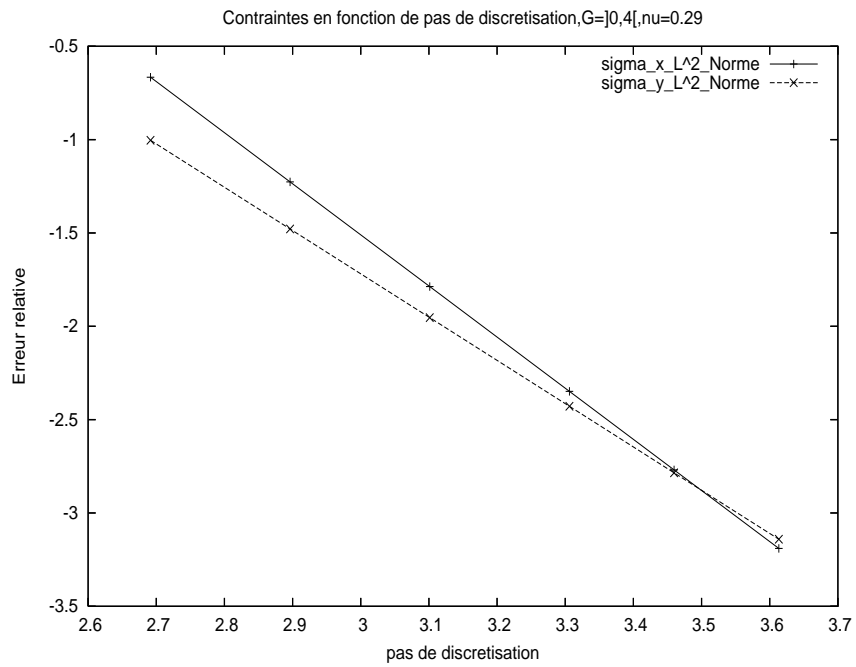


FIG. 3.5 – La norme L^2 de l'erreur relative des contraintes en fonction du pas de discrétisation.

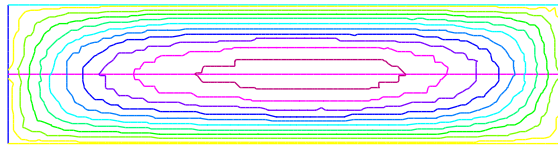


FIG. 3.6 – Isovaleurs de u_1 .

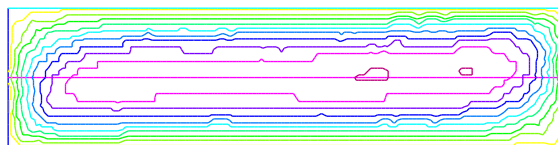


FIG. 3.7 – Isovaleurs de u_2 .

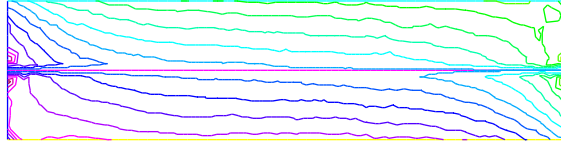


FIG. 3.8 – Isovaleurs de σ_ν .

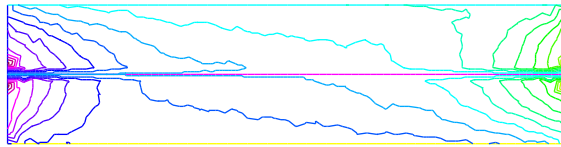


FIG. 3.9 – Isovaleurs de σ_{11} .

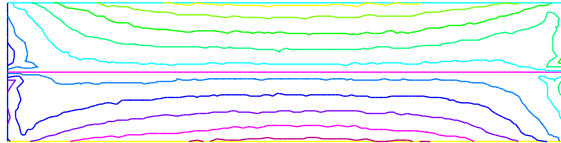


FIG. 3.10 – Isovaleurs de σ_{12} .

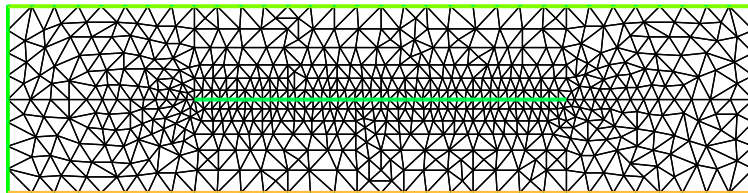


FIG. 3.11 – Maillage de domaine avec $\Gamma_c =]1, 3[\times \{\frac{1}{2}\}$.

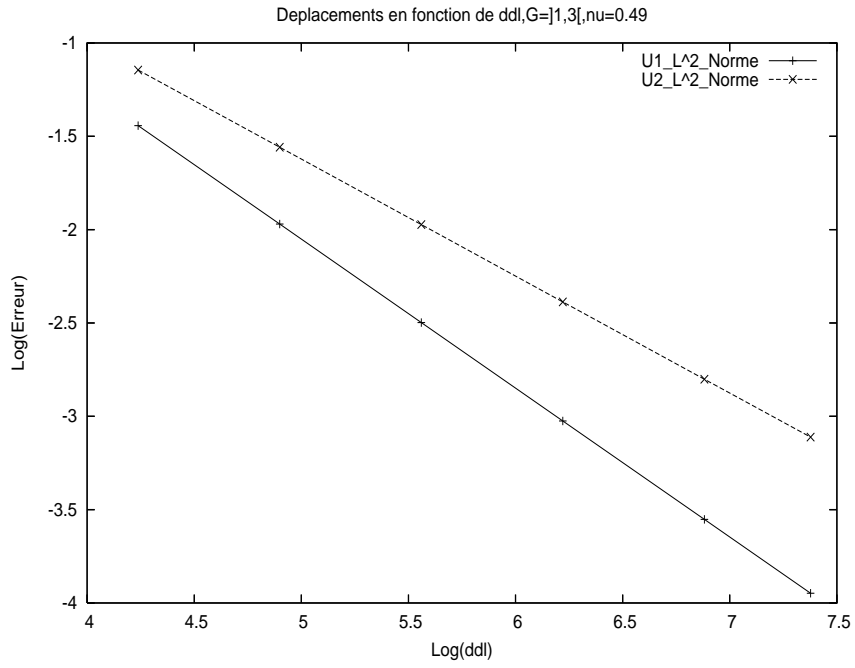


FIG. 3.12 – La norme L^2 de l'erreur relative des déplacements en fonction des ddl.

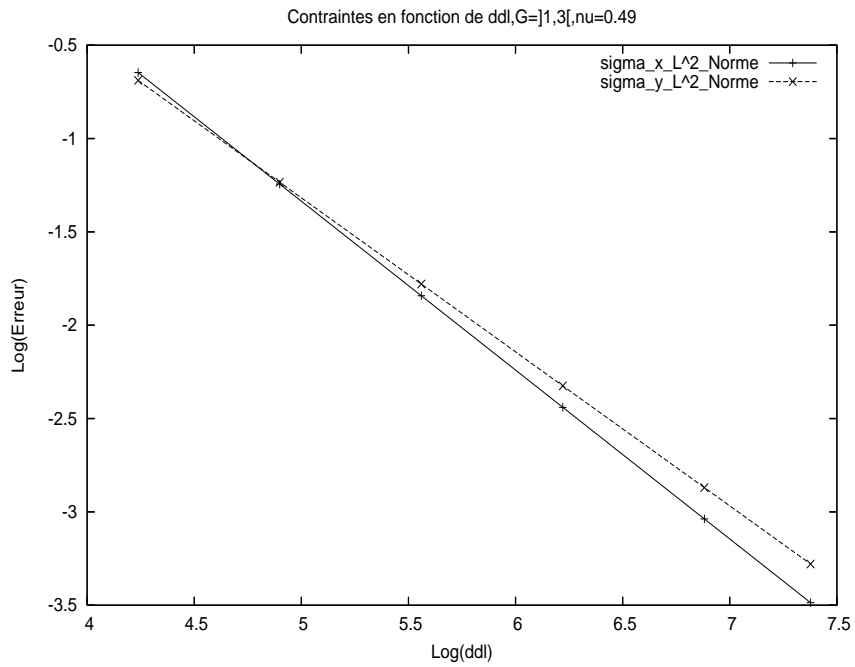


FIG. 3.13 – La norme L^2 de l'erreur relative des contraintes en fonction des ddl.

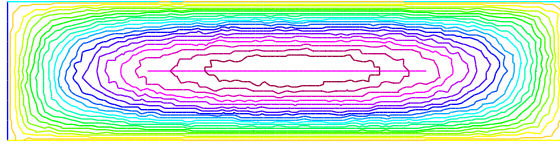


FIG. 3.14 – Isovaleurs de u_1 .

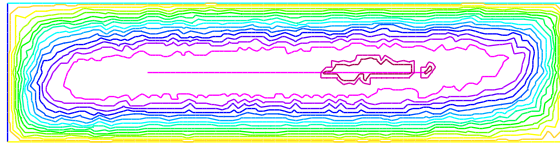


FIG. 3.15 – Isovaleurs de u_2 .

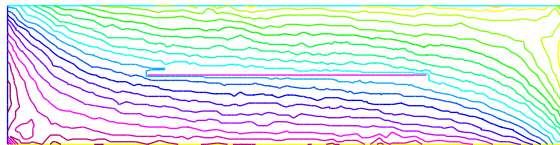


FIG. 3.16 – Isovaleurs de σ_ν .

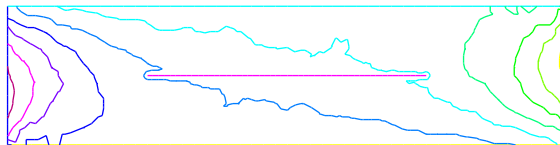


FIG. 3.17 – Isovaleurs de σ_{11} .

Chapitre 4

Méthode du domaine régulier pour la formulation mixte de Hellinger-Reissner modifiée

4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu aux chapitres précédents, la méthode du domaine régulier est une formulation mixte du problème d'élasticité linéaire étendue à tout le domaine de calcul. Du point de vue de la discrétisation, il est bien connu pour les éléments finis mixtes que, contrairement au cas scalaire, la symétrie du tenseur de contraintes en élasticité rend difficile la construction d'espaces discrets satisfaisant la condition inf-sup de Brezzi-Babuska. Indépendamment des problèmes de fissures, cette question a suscité de nombreux travaux, et plusieurs solutions plus ou moins pratiques ont été proposées [57, 2, 3, 32]. Les éléments finis les plus connus dans le cadre de discrétisation des formulations sans symétrie du tenseur de contraintes sont les éléments finis PEERS [3] étudiés par Arnold-Douglas-Brezzi, initialement proposés par F. De Veubeke [32], et les éléments finis BDM (Brezzi-Douglas-Marini) modifiés et analysés par R. Stenberg [57]. Nous proposons dans ce chapitre d'étendre la méthode du domaine régulier à ce cadre de la formulation des problèmes d'élasticité, basée sur la fonctionnelle de Hellinger-Reissner modifiée. Nous discuterons dans les chapitres suivants la discrétisation par des éléments finis PEERS et BDM.

4.2 Formulation du problème continu

On considère le même solide décrit auparavant dans le cas symétrique. Dans la formulation suivante du problème de contact unilatéral, le tenseur de contraintes

est pris en considération. Toutefois, sa symétrie est relaxée par un multiplicateur de Lagrange qui n'est autre que le rotationnel du déplacement. On cherche les déplacements $\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, le champ de contraintes $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et $\gamma : \Omega \longrightarrow M_{skew}^{2 \times 2} := \{\eta \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \eta + \eta^t = 0\}$, vérifiant

$$\mathcal{C}^{-1}\sigma - \nabla \mathbf{u} + \gamma = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (4.1)$$

$$\sigma - \sigma^T = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (4.2)$$

$$-\mathbf{div} \sigma = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (4.4)$$

$$\sigma \cdot \nu = \mathbf{g} \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad (4.5)$$

$$[\mathbf{u}] \nu \geq 0, \quad [\sigma \nu] = 0, \quad \sigma \nu [\mathbf{u} \cdot \nu] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \quad (4.6)$$

$$\sigma \nu \leq 0, \quad \sigma_t = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C^\pm. \quad (4.7)$$

Remarque 4.1 *Les deux problèmes (1.3) – (1.8) et (4.1) – (4.7) sont équivalents dans le sens suivant :*

le triplet $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma)$ est solution de (4.1) – (4.7) si et seulement si $as(\gamma) = \mathbf{curl} \mathbf{u} = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ et le couple (σ, \mathbf{u}) est solution de (1.3) – (1.8).

4.2.1 Formulation mixte dans le domaine fissuré Ω_c

On se place dans le cas homogène $\mathbf{g} = 0$, et on rappelle les espaces introduits aux chapitres précédents :

$$\mathbf{X}(\Omega_c) = \{\sigma \in \mathbf{L}^2((\Omega_c); \mathbb{R}^{2 \times 2}), \mathbf{div} \sigma \in \mathbf{L}^2((\Omega_c); \mathbb{R}^2), \sigma \nu = \mathbf{0}, \text{ sur } \Gamma_N\},$$

muni de la norme

$$\|\sigma\|_{\mathbf{X}(\Omega_c)} = \left(\|\sigma\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^{2 \times 2})}^2 + \|\mathbf{div} \sigma\|_{L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ainsi que le convexe fermé :

$$\mathbf{K}(\Omega_c) = \{\sigma \in \mathbf{X}(\Omega_c), [\sigma \nu] = 0, \text{ sur } \Gamma_c, \sigma \nu \leq 0, \sigma_t = 0 \text{ sur } \Gamma_c^\pm\},$$

on rappelle aussi que

$$\mathbf{V}(\Omega_c) = L^2(\Omega_c; \mathbb{R}^2).$$

On introduit un nouvel espace (pour la variable γ) :

$$\mathbf{W}(\Omega_c) = L^2(\Omega_c; M_{skew}^{2 \times 2}),$$

où $M_{skew}^{2 \times 2}$ désigne l'ensemble des matrices (2,2) anti-symétriques. On dérive alors la formulation variationnelle mixte dans Ω_c qui consiste à :

trouver $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma) \in \mathbf{K}(\Omega_c) \times \mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{W}(\Omega_c)$ tels que :

$$\begin{cases} a(\sigma, \tau - \sigma) + b(\tau - \sigma; \mathbf{u}, \gamma) \geq 0 & \tau \in \mathbf{K}(\Omega_c), \\ b(\sigma; \mathbf{v}, \eta) = -L(\mathbf{v}) & (\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{W}(\Omega_c), \end{cases} \quad (4.8)$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} a(\sigma, \tau) = (C^{-1}\sigma, \tau) = \int_{\Omega_c} C^{-1}\sigma : \tau \, d\mathbf{x}, \\ b(\sigma; \mathbf{u}, \gamma) = (\mathbf{div}\sigma, \mathbf{u}) + (\sigma, \gamma) = \int_{\Omega_c} \mathbf{div}\sigma \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_c} \sigma : \gamma \, d\mathbf{x}, \\ L(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{cases}$$

On notera $as(\tau) = \tau_{2,1} - \tau_{1,2}$ la partie anti-symétrique du tenseur τ .

Dans cette formulation variationnelle, les conditions de contact sur Γ_c doivent être comprises dans le sens faible déjà précisé dans les chapitres précédents.

Dans le but d'étudier la formulation mixte (4.8), on introduit l'espace suivant :

$$\mathbf{Z}(\Omega_c) = \{\sigma \in \mathbf{X}(\Omega_c); \quad b(\tau; \mathbf{v}, \eta) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{W}(\Omega_c)\}.$$

On note aussi par χ l'espace contenu dans $\mathbf{K}(\Omega_c)$

$$\chi = \{\tau \in \mathbf{K}(\Omega_c); -\tau \in \mathbf{K}(\Omega_c)\}.$$

On a la propriété d'ellipticité suivante :

il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\forall \tau \in \mathbf{Z}(\Omega_c), \quad a(\tau, \tau) \geq \alpha \|\tau\|_{\mathbf{X}(\Omega_c)}^2,$$

et on a aussi la condition inf-sup de Brezzi-babuska [16] :

il existe une constante $\beta \geq 0$, telle que :

$$\forall (\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{W}(\Omega_c), \quad \sup_{\tau \in \chi} \frac{b(\tau; \mathbf{v}, \eta)}{\|\tau\|_{\mathbf{X}(\Omega_c)}} \geq \beta \|(\mathbf{v}, \eta)\|_{\mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{W}(\Omega_c)},$$

avec

$$\|(\mathbf{v}, \eta)\|_{\mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{W}(\Omega_c)} = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c, \mathbb{R}^2)} + \|\eta\|_{L^2(\Omega_c, \mathbb{R}^{2,2})}.$$

On montre de façon similaire au chapitre 1 proposition 3, le résultat suivant :

Proposition 7 *Il existe une et une seule solution $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma) \in \mathbf{K}(\Omega_c) \times \mathbf{V}(\Omega_c) \times \mathbf{W}(\Omega_c)$ du problème (4.8). De plus, on a :*

$$\mathbf{u} \in H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega_c, \mathbb{R}^2), \quad as(\gamma) = \mathbf{curl} \, \mathbf{u},$$

et

$$\|\sigma\|_{\mathbf{X}(\Omega_c)} + \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega_c, \mathbb{R}^2)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_c, \mathbb{R}^2)}.$$

4.3 formulation étendue au domaine régulier

On remarque que la contrainte qui exprime la condition de saut de la composante normale de tenseur des contraintes à travers Γ_c implique que σ appartient en fait à $\mathbf{X}(\Omega)$. Nous pouvons donc enlever cette contrainte dans la définition de $\mathbf{K}(\Omega_c)$ en remplaçant $\mathbf{X}(\Omega_c)$ par $\mathbf{X}(\Omega)$. Nous pouvons alors prolonger la formulation variationnelle à tout le domaine régulier Ω . On pose :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\Omega) = \{\sigma \in \mathbf{X}(\Omega), \sigma_\nu \leq 0, \sigma_t = 0 \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

D'autre part, on note par \mathbf{V} , respectivement \mathbf{W} , l'espace $\mathbf{V}(\Omega)$, respectivement $\mathbf{W}(\Omega)$. Alors, la formulation variationnelle mixte étendue à Ω consiste à trouver $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma) \in \mathbf{K} \times \mathbf{V} \times \mathbf{W}$, tels que :

$$\begin{cases} a(\sigma, \tau - \sigma) + b(\tau - \sigma; \mathbf{u}, \gamma) \geq 0, & \tau \in \mathbf{K}, \\ b(\sigma; \mathbf{v}, \eta) = -L(\mathbf{v}), & (\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}, \end{cases} \quad (4.9)$$

où les intégrales sont également prolongées à Ω .

En procédant comme au chapitre 1 (voir aussi la proposition suivante), on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.9), mais nous avons seulement :

$$\begin{aligned} \text{as } \gamma &= \text{curl } \mathbf{u}, & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_c), \\ C\sigma - \nabla \mathbf{u} + \gamma &= 0, & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_c). \end{aligned}$$

Du fait de l'ellipticité restreinte de $a(\cdot, \cdot)$ au noyau de la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$, on peut aussi envisager un nouveau problème, par la méthode du lagrangien augmenté. La nouvelle forme bilinéaire est alors :

$$a_r(\sigma, \tau) = (\mathcal{C}^{-1}\sigma, \tau) + r(\mathbf{div} \sigma, \mathbf{div} \tau), \quad (4.10)$$

et la nouvelle formulation de lagrangien augmenté se traduit comme suit : pour $r > 0$, déterminer $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma) \in \mathbf{K} \times \mathbf{V} \times \mathbf{W}$, tel que :

$$\begin{cases} a_r(\sigma, \tau - \sigma) + b(\tau - \sigma; \mathbf{u}, \gamma) \geq r(\mathbf{f}, \mathbf{div} \tau - \mathbf{div} \sigma), & \forall \tau \in \mathbf{K}, \\ b(\sigma; \mathbf{v}, \eta) = -L(\mathbf{v}), & \forall (\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}. \end{cases} \quad (4.11)$$

On obtient comme au chapitre 1, le résultat suivant

Proposition 8 *Il existe une unique solution $(\sigma(r), \mathbf{u}(r), \gamma(r)) \in \mathbf{K} \times \mathbf{V} \times \mathbf{W}$ du problème (4.11). De plus, $(\sigma(r), \mathbf{u}(r), \gamma(r))$ converge vers $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma) \in K(\Omega_c) \times \mathbf{V}(\Omega_c) \times W(\Omega_c)$ solution du problème (4.8) quand r tend vers zéro.*

Bien entendu, ce problème auxiliaire peut être utilisé du point de vue algorithmique pour résoudre (4.8).

4.3.1 Formulation hybride

Dans la pratique on peut résoudre le dernier problème par l'utilisation d'une méthode de descente, mais cette méthode nous amène à résoudre un problème d'optimisation de grande taille. Comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, nous allons introduire une formulation mixte hybride qui sera la forme que nous adopterons pour la résolution effective du problème discret : trouver $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda_t, \lambda_n) \in \mathbf{X} \times \mathbf{V} \times W \times \mathbf{M} \times M_+$, avec $\lambda_{t_i} \nu_i = 0$, tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\sigma, \tau) + b(\tau; \mathbf{u}, \gamma) + d_t(\tau, \lambda_t) + d_n(\tau, \lambda_n) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{X}, \\ b(\sigma; \mathbf{v}, \eta) = -L(\mathbf{v}), \quad \forall (\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}, \\ d_t(\sigma, \mu_t) = 0, \quad \forall \mu_t = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{M}, \quad \mu_i \cdot \nu_i = 0, \\ d_n(\sigma, \mu_n - \lambda_n) \leq 0, \quad \forall \mu_n \in M_+. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Les espaces \mathbf{M} , M_+ et les formes bilinéaires $d_t(\cdot, \cdot)$, $d_n(\cdot, \cdot)$, sont ceux définies dans les chapitres précédents.

En suivant les mêmes démonstrations qu'à la proposition 3, on obtient

Proposition 9 *Il existe une unique solution $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda_t, \lambda_n) \in \mathbf{X} \times \mathbf{V} \times \mathbf{M} \times M_+$ du problème (4.12). De plus,*

$$\lambda_n = [\mathbf{u}] \nu, \quad \text{et } \lambda_t = \mathbf{u} \quad \text{sur } \Gamma_c.$$

Chapitre 5

Discrétisation et approximation : éléments finis mixtes sans symétrie du tenseur des contraintes

5.1 Introduction

À présent, on s'intéresse à la discrétisation du problème (4.1)-(4.7). Nous allons décrire le problème discret en étudiant l'existence, l'unicité et la majoration de l'erreur éléments finis des solutions.

Nous nous intéressons aux éléments finis "PEERS" et "BDM", de bas ordre, introduit par Arnold, Brezzi et Douglas pour le premier [3] et Brezzi, Douglas et Marini, puis adapté à l'élasticité et analysé par Stenberg [17, 57].

Soit Ω est un ouvert borné dans \mathbb{R}^2 , de frontière lipschitzienne, que l'on suppose polygonal pour simplifier.

Nous désignerons par $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulation régulière de domaine Ω , à l'aide des triangles T de diamètres inférieurs ou égaux à h , c'est-à-dire :

$$\overline{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

On suppose que les points extrêmes de Γ_c sont les sommets de la triangulation $c_1 = x_0, x_1, \dots, x_{I-1}, x_I = c_2$.

Soit $(t_i =]x_{i-1}, x_i])_{1 \leq i \leq I}$ une subdivision régulière sur la zone de contact Γ_c que l'on suppose être un segment de droite, comme précédemment.

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on note par $\mathcal{P}_k(T)$ l'espace des polynômes de deux variables de degré inférieur ou égal k .

5.2 Élément fini "PEERS"

5.2.1 Définition

Soit maintenant l'espace de Raviart-Thomas

$$RT_0 = \mathcal{P}_0^2 + (x, y)\mathcal{P}_0.$$

On rappelle la définition sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$ de la fonction "bulle" non normalisée associée :

$$b_T(x) = \prod_{i=1}^3 \lambda_i(x), \quad \forall x \in T,$$

où $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ sont les coordonnées barycentriques associées aux sommets du triangle T .

On considère b_T prolongée par zéro en dehors de T et on définit donc l'espace engendré par $rot b_T$:

$$A = \{rot b_T; T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Ainsi on pose :

$$B_0(T) = \{\tau / (\tau_{i1}, \tau_{i2}) \in A; i = 1, 2\}.$$

On prend alors pour l'approximation des tenseurs de contraintes l'espace :

$$\mathbf{X}_h = \{\sigma_h \in \mathbf{X}; \sigma_h|_T \in RT_0(T)^2 \oplus B_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

et pour le déplacement, on prend l'espace approché suivant :

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^2; \mathbf{v}_h|_T \in (P_0(T))^2, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

La définition du cône convexe discret reste inchangée.

On définit aussi :

$$\mathbf{W}_h = \{\gamma_h \in \mathbf{W} \cap C^0(\overline{\Omega}, M_{skew}^{2 \times 2}); \gamma_h|_T \in P_1(T; M_{skew}^{2 \times 2}), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Pour l'espace des multiplicateurs de Lagrange, du fait que l'approximation de σ_h est basée sur l'élément de Raviart-Thomas de bas degré, nous allons prendre une approximation par des fonctions constantes par morceaux. On pose

$$W_h^0(\Gamma_c) = \{\mu_h, \mu_h|_{t_i} \in \mathbb{P}_0(t_i), 0 \leq i \leq I-1\},$$

on définit ainsi

$$\mathbf{M}_h = \mathbf{W}_h^0(\Gamma_c) = W_h^0(\Gamma_c, \mathbb{R}^2),$$

et

$$M_{h+} = \{\mu_h \in W_h^0(\Gamma_c), \mu_h \geq 0\}.$$

Nous désignons par \mathcal{M}_h le cône convexe $\mathbf{M}_h \times M_{h+}$ et $\lambda_h = (\lambda_{ht} = (\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn})$. Notons que dans cette discrétisation $M_{h+} \subset M_+$.

On note \mathcal{E}_h l'ensemble des côtés e des éléments $T \in \mathcal{T}_h$, internes à Ω_c . On note aussi $J(\mathbf{u})$ le saut $\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ à travers e . Pour l'analyse du problème discret, nous utiliserons les normes, dépendantes du maillage, suivantes [57, 18] :

$$\|\sigma\|_{0,h}^2 = \frac{1}{E^2} (\|\sigma\|_0^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e \|\sigma \nu\|_{0,e}^2), \quad \sigma \in \mathbf{X}_h,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{1,h}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}\|_{1,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e^{-1} \|J(\mathbf{u})\|_{0,e}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V}_h.$$

Remarque 5.1 1. La norme $\|\cdot\|_{1,h}$ est adapté à l'analyse de l'élément fini BDM. Dans le cas de l'élément fini PEERS, il convient de la modifier suivant [[57], section 4]. Comme nous ne ferons que citer les résultats principaux de cet article de Stenberg, nous en omettrons les détails.

2. Dans le cas de BDM, nous suivons la modification introduite par [18] par rapport à la démonstration initiale de la condition inf-sup de [57]. Cela signifie que nous écrirons la condition inf-sup en norme $\|\sigma\|_{0,h}$ et $\|(\mathbf{u}, \gamma)\|_{\mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h}^2 = \|\mathbf{u}\|_{1,h}^2 + \|\gamma\|_0^2$.

5.2.2 Problème discret

Le problème discret pour la formulation mixte (4.8) est : trouver $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h) \in \mathbf{K}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h$, tels que :

$$\begin{cases} a(\sigma_h, \tau_h - \sigma_h) + b(\tau_h - \sigma_h; \mathbf{u}_h, \gamma_h) \geq 0, & \tau_h \in \mathbf{K}_h, \\ b(\sigma_h; \mathbf{v}_h, \eta_h) = -L(\mathbf{v}_h), & (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h. \end{cases} \quad (5.1)$$

Notons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive uniquement sur le sous-espace \mathbf{Z} . Notamment, en posant

$$\mathbf{Z}_h := \{\tau_h \in \mathbf{X}_h; \quad b(\tau_h; \mathbf{v}_h, \eta_h) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h\},$$

on a

$$a(\sigma, \sigma) \geq C \|\sigma\|_{0,h}^2, \quad \forall \sigma \in \mathbf{Z}_h.$$

De plus, on a [57] :

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{\tau \in \mathbf{X}_h} \frac{b(\tau; \mathbf{v}, \eta)}{\|\tau\|_{\mathbf{X}_h}} \geq \beta \|(\mathbf{v}, \eta)\|_{\mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h}, \quad \forall (\mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h. \quad (5.2)$$

Proposition 10 *Le problème (5.1) admet une solution et une seule $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h) \in \mathbf{K}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h$.*

A nouveau, la formulation hybride s'écrit : trouver $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th}, \lambda_{nh}) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h \times \mathbf{M}_h \times M_{h+}$, avec $\lambda_{th,i}\nu_i = 0$, tels que :

$$\begin{cases} a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h; \mathbf{u}_h, \gamma_h) + d_t(\tau_h, \lambda_{th}) + d_n(\tau_h, \lambda_{nh}) = 0, & \forall \tau_h \in \mathbf{X}_h, \\ b(\sigma_h; \mathbf{v}_h, \eta_h) = -L(\mathbf{v}_h), & \forall (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h, \\ d_t(\sigma_h, \mu_{th}) = 0, & \forall \mu_{th} = (\mu_{th,1}, \mu_{th,2}) \in \mathbf{M}_h, \quad \mu_{th,i}\nu_i = 0, \\ d_n(\sigma_h, \mu_{nh} - \lambda_{nh}) \leq 0, & \forall \mu_{nh} \in M_{h+}, \end{cases} \quad (5.3)$$

ou sous forme condensée,

$$\begin{cases} a(\sigma_h, \tau_h) + c(\tau_h; (\mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th}, \lambda_{nh})) = 0, & \forall \tau_h \in \mathbf{X}_h, \\ c(\sigma_h; (\mathbf{v}_h, \eta_h, \mu_{th}, \mu_{nh})) = -L(\mathbf{v}_h), & \forall (\mathbf{v}_h, \eta_h, \mu_{th}, \mu_{nh}) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h \times \mathbf{M}_h \times M_{h+}, \\ & \mu_{th,i}\nu_i = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

On introduit la norme, dépendante du maillage, pour $\mu_h \in W_h^0(\Gamma_c)$:

$$\|\mu_h\|_L^2 = \sum_{i=1}^{I-1} h_{t_i} \|\mu_h\|_{L^2(t_i)}^2.$$

Le résultat suivant est démontré dans le cas de la membrane élastique (cas scalaire) dans [6]. Son extension au cas du système de l'élasticité ne pose aucune difficulté :

$$\exists \delta > 0, \quad \sup_{\tau \in \mathbf{X}_h} \frac{d_n(\tau, \mu_n)}{\|\tau\|_{\mathbf{X}_h}} \geq C \|\mu_n\|_L \geq \delta h^{-\frac{1}{2}} \|\mu_n\|_{L^2(\Gamma_c)}, \quad \forall \mu_n \in W_h^0(\Gamma_c). \quad (5.5)$$

On peut démontrer un résultat similaire pour la forme bilinéaire $d(., .)$ définie sur $(\mathbf{X}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h) \times W_h^0(\Gamma_c)^3$ comme

$$d((\tau, \mathbf{v}, \eta), \mu) = d_t((\tau, \mathbf{v}, \eta), \mu_t) + d_n((\tau, \mathbf{v}, \eta), \mu_n), \quad \mu = (\mu_t, \mu_n).$$

L'existence et l'unicité de $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h)$ solution de (5.3) parviennent de la proposition 10. Il suffit alors, pour prouver l'existence et l'unicité du point selle de la formulation (5.3), de vérifier que

$$\{\mu_h = (\mu_{th}, \mu_{nh}) \in W_h^0(\Gamma_c)^3; d((\tau_h, \mathbf{v}_h, \eta_h), \mu_h) = 0, \forall (\tau, \mathbf{v}, \eta) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h\} = \{0\},$$

ce qui est une conséquence de l'analogie de la condition inf-sup (5.5) pour $d(., .)$.

Proposition 11 *Le problème (5.3) admet une solution et une seule $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th}, \lambda_{nh}) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h \times \mathbf{M}_h \times M_{h+}$.*

5.3 Élément fini BDM d'ordre 0

5.3.1 Définition

Suivant les notations de Stenberg (voir [57]), on définit l'ensemble :

$$R_T := \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}; \mathbf{v}(x, y) = (a, b) + c(-y, x), a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

On pose

$$\mathbf{X}_h = \{\sigma_h \in \mathbf{X}; \sigma_h = \sigma_h^1 + \sigma_h^2 + \sigma_h^3, \quad \sigma_{h|T}^1 \in \mathcal{P}_1^{2 \times 2}(T), \sigma_{h|T}^2 \in b_T \nabla R_T, \\ \sigma_{h|T}^3 \in B_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

et pour le déplacement, on prend l'espace approché suivant :

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in (\mathcal{C}(\bar{\Omega}))^2; \mathbf{v}_{h|T} \in R_T, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Enfin, concernant le tenseur anti-symétrique, on prend :

$$\mathbf{W}_h = \{\gamma_h \in \mathbf{W}; \gamma_{h|T} \in P_1(T; M_{skew}^{2 \times 2}), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Pour les multiplicateurs de Lagrange, on peut toujours utiliser des fonctions constantes par morceaux comme pour PEERS, mais, nous savons [6, 7] que les fonctions affines par morceaux donneront de meilleurs résultats dans le cas où les solutions sont un peu plus régulières. Aussi, nous allons reprendre l'espace $W_h^1(\Gamma_c)$ comme base pour définir \mathbf{M}_h et M_h^+ comme au chapitres précédents. Nous ne réécrivons pas les problèmes discrets pour lesquels on a aussi les résultats.

Proposition 12 *Le problème discret correspondant à l'élément fini BDM0 admet une solution et une seule $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th}, \lambda_{nh}) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{V}_h \times \mathbf{W}_h \times \mathcal{M}_h$, avec $\mathcal{M}_h = \mathbf{M}_h \times M_h^+$.*

5.4 Estimation d'erreur

L'analyse d'erreur est essentiellement la même pour les discrétisations avec PEERS ou BDM0. Nous allons donc regrouper les résultats dans cette même section. Notre but maintenant est donc d'étudier la convergence de $(\sigma_h; \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th}, \lambda_{nh})$ vers $(\sigma; \mathbf{u}, \gamma, \lambda_t, \lambda_n)$ et de donner des estimations d'erreurs. Les lemmes suivants se démontrent comme le lemme 2.2 :

Lemme 5.1 *Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda_t = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (4.12), et soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th} = ((\lambda_{t1,h}, \lambda_{t2,h}), \lambda_{n,h}))$ la solution du problème discret (5.3)*

avec des éléments finis PEERS. On a les estimation suivantes :

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} &\leq C_1 \left\{ \inf_{\tau_h \in \mathcal{X}_h} \|\sigma - \tau_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} \right. \\ &\quad + [-b(\sigma - \tau_h, (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \gamma - \gamma_h)) + L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - d_t(\sigma - \tau_h, \lambda_t - \lambda_{th}) \\ &\quad + d_t(\sigma - \sigma_h, \lambda_t - \mu_{th}) + d_n(\sigma - \sigma_h, \lambda_n - \mu_{nh}) - d_n(\sigma - \tau_h, \lambda_n - \lambda_{nh}) \\ &\quad \left. - d_n(\sigma, \lambda_n - \mu_{nh}) - d_n(\sigma, \lambda_{nh}) - d_n(\sigma_h, \mu_{nh}) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_{\mathbf{W}} + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} \\ + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{L^2(\Gamma_c)} &\leq C_2 \left(\|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} \right. \\ + \inf_{(\mathbf{v}_h, \eta_h, \mu_{ht}, \mu_{hn}) \in \mathcal{W}_h} &\left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \eta_h\|_{\mathbf{W}} + \|\lambda_t - \mu_{th}\|_{L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \mu_{nh}\|_{L^2(\Gamma_c)} \right) \Big). \end{aligned} \quad (5.7)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de h .

On a le même type d'estimations avec l'élément fini BDM0.

Lemme 5.2 Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda_t = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (4.12), et soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th} = ((\lambda_{t1,h}, \lambda_{t2,h}), \lambda_{n,h}))$ la solution du problème discret (5.3) avec des éléments BDM d'ordre 0. On a les estimation suivantes :

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} &\leq C_1 \left\{ \inf_{\tau_h \in \mathcal{X}_h} \|\sigma - \tau_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} \right. \\ &\quad + [-b(\sigma - \tau_h, (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \gamma - \gamma_h)) + L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - d_t(\sigma - \tau_h, \lambda_t - \lambda_{th}) \\ &\quad + d_t(\sigma - \sigma_h, \lambda_t - \mu_{th}) + d_n(\sigma - \sigma_h, \lambda_n - \mu_{nh}) - d_n(\sigma - \tau_h, \lambda_n - \lambda_{nh}) \\ &\quad \left. - d_n(\sigma, \lambda_n - \mu_{nh}) - d_n(\sigma, \lambda_{nh}) - d_n(\sigma_h, \mu_{nh}) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_{\mathbf{W}} + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} \\ + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} &\leq C_2 \left(\|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} \right. \\ + \inf_{(\mathbf{v}_h, \eta_h, \mu_{ht}, \mu_{hn}) \in \mathcal{W}_h} &\left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \eta_h\|_{\mathbf{W}} + \|\lambda_t - \mu_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \mu_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \right) \Big), \end{aligned} \quad (5.9)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes positives indépendantes de h .

Considérons l'opérateur de projection π_h^0 de $L^2(\Gamma_c) \longrightarrow W_h^0(\Gamma_c)$ [59, 34]. Cet opérateur satisfait les estimations suivantes : pour, toute fonction $\varphi \in H^\nu(\Gamma_c)$ avec $\nu = \frac{1}{2}$, ou $\nu = 1$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que

$$\|\varphi - \pi_h^0 \varphi\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq ch^\nu \|\varphi\|_{H^\nu(\Gamma_c)}. \quad (5.10)$$

De plus, si $\varphi \in L^2(\Gamma_c)$, alors

$$\|\varphi - \pi_h^0 \varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq ch^{\frac{1}{2}} \|\varphi - \pi_h^0 \varphi\|_{L^2(\Gamma_c)}. \quad (5.11)$$

Notons aussi que pour $\varphi \geq 0$, on a $\pi_h^0 \varphi \in M_h^0$.

Rappelons les résultats suivants [[57], Lemme 3.1] : On notant $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{H^k(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})}$, $k \geq 0$, on a

$$\|\sigma\|_0 \leq \|\sigma\|_{0,h} \leq C \|\sigma\|_0, \quad \forall \sigma \in \mathbf{X}_h, \quad (5.12)$$

et

$$\inf_{\tau \in \mathbf{X}_h} \|\sigma - \tau\|_{0,h} \leq C h^{k+1} \|\sigma\|_{k+1}, \quad \forall \sigma \in H^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}^{2,2}) \cap \mathbf{X}. \quad (5.13)$$

En reprenant la même démonstration qu'au théorème 2.1, et en utilisant les opérateurs π_h^0 (à la place de π_h^1) et les résultats d'approximation rappelés ci-dessus, on obtient :

Proposition 13 *Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (4.12). Supposons que $\mathbf{u}_{|\Omega^1} \in H^2(\Omega^1)$, $\mathbf{u}_{|\Omega^2} \in H^2(\Omega^2)$ et que $\sigma_{|\Omega^1} \in H^1(\Omega^1)$, $\sigma_{|\Omega^2} \in H^1(\Omega^2)$. Soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_h = ((\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn}))$ la solution du problème discret (5.3) pour l'élément fini PEERS. Alors on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_0 \leq C(\sigma, \mathbf{u}) & \left(h (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_0 + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} \right. \\ & \left. + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{L^2(\Gamma_c)}) + h \|\lambda_{nh} - \lambda_n\|_{L^2(\Gamma_c)} + h^{\frac{3}{2}} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_0 + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{(L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2))} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq \\ C (h^{-\frac{1}{2}} \|\sigma - \sigma_h\|_0 + C(\mathbf{u}) h^{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

La constante $C(u, \sigma)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}_{|\Omega^\ell}\|_{H^2(\Omega^\ell)}$ et $\|\sigma_{|\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)}$, $\ell = 1, 2$.

Preuve: La démonstration est similaire à celle de la proposition 5. Les modifications à apporter sont : l'étape 1, où le choix de $\tau_h = \Pi_h \sigma$ est remplacé par (5.13), les étapes 3 et 4, où les opérateurs i_h et π_h^1 sont remplacés par π_h^0 . Ainsi, on obtient à la place de (2.16), respectivement (2.17) et (2.18)

$$d_t(\sigma - \sigma_h, \lambda_t - \mu_{th}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) (h^{\frac{1}{2}} \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + h), \quad (5.16)$$

respectivement

$$d_n(\sigma - \sigma_h, \lambda_n - \mu_{nh}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) (h^{\frac{1}{2}} \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + h), \quad (5.17)$$

et le terme $d_n(\sigma_h, \mu_{nh})$

$$d_n(\sigma_h, \mu_{nh}) \leq C(\sigma, \mathbf{u}) (h^{\frac{1}{2}} \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + h). \quad (5.18)$$

Le dernier terme est négligé car $d_n(\sigma, \lambda_{nh}) \leq 0$.

Théorème 5.1 Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (4.12). Supposons que $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in H^2(\Omega^1)$, $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in H^2(\Omega^2)$ et que $\sigma|_{\Omega^1}$, respectivement $\gamma|_{\Omega^1}$, appartient à $H^1(\Omega^1, \mathbb{R}^{2,2})$, $\sigma|_{\Omega^2}$, respectivement $\gamma|_{\Omega^2}$, appartient à $H^1(\Omega^2, \mathbb{R}^{2,2})$. Soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_h = ((\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn}))$ la solution du problème discret (5.3) avec le choix de \mathbf{M}_h et M_{h+} donné pour PEERS. Alors, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2,2})} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_{\mathbf{W}} \\ & + \|\lambda_t - \lambda_{ht}\|_{(L^2(\Gamma_c, \mathbb{R}^2))} + \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C(\mathbf{u}, \sigma) h^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

La constante $C(u, \sigma)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}|_{\Omega^\ell}\|_{H^2(\Omega^\ell)}$, $\|\sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^4}$, et $\|\mathbf{div} \sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^2}$, $\ell = 1, 2$.

Pour l'élément BDM0, on a les résultats suivants :

Proposition 14 Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (4.12). Supposons que $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in H^2(\Omega^1)$, $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in H^2(\Omega^2)$ et que $\sigma|_{\Omega^1} \in H^1(\Omega^1)$, $\sigma|_{\Omega^2} \in H^1(\Omega^2)$. Soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_h = ((\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn}))$ la solution du problème discret (5.3) pour l'élément fini BDM0. Alors on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma_h\|_0 & \leq C(\sigma, \mathbf{u}) \left(h (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_0 + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} \right. \\ & \left. + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}) + h \|\lambda_{nh} - \lambda_n\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + h^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_0 + \|\lambda_t - \lambda_{th}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2)} + \|\lambda_n - \lambda_{nh}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} & \leq \\ & C(\|\sigma - \sigma_h\|_0 + C(\mathbf{u})h). \end{aligned} \quad (5.21)$$

La constante $C(u, \sigma)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}|_{\Omega^\ell}\|_{H^2(\Omega^\ell)}$, $\|\sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^4}$, et $\|\mathbf{div} \sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^2}$, $\ell = 1, 2$.

Théorème 5.2 Soit $(\sigma, \mathbf{u}, \gamma, \lambda_t = ((\lambda_{t1}, \lambda_{t2}), \lambda_n))$ la solution du problème (4.12). Supposons que $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in H^2(\Omega^1)$, $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in H^2(\Omega^2)$ et que $\sigma|_{\Omega^1}$, respectivement $\gamma|_{\Omega^1}$, appartient à $H^1(\Omega^1, \mathbb{R}^{2,2})$, $\sigma|_{\Omega^2}$, respectivement $\gamma|_{\Omega^2}$, appartient à $H^1(\Omega^2, \mathbb{R}^{2,2})$. Soit $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{ht} = ((\lambda_{ht1}, \lambda_{ht2}), \lambda_{hn}))$ la solution du problème discret (5.3) avec le choix de \mathbf{M}_h et M_{h+} donné pour BDM0. Alors, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} + \|\gamma - \gamma_h\|_0 \\ & + \|\lambda_t - \lambda_{ht}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c, \mathbb{R}^2))} + \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C(\mathbf{u}, \sigma) h^{\frac{3}{4}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

La constante $C(u, \sigma)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}|_{\Omega^\ell}\|_{H^2(\Omega^\ell)}$, $\|\sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^4}$, et $\|\mathbf{div} \sigma|_{\Omega^\ell}\|_{H^1(\Omega^\ell)^2}$, $\ell = 1, 2$.

On remarquera que la différence de précision entre les deux éléments PEERS et BDM0 ne tient en fait qu'à l'approximation des multiplicateurs de Lagrange basée dans le premier cas sur les fonctions constantes par morceaux et dans le second cas sur les fonctions affines par morceaux. Cette différence n'apparaît que lorsque les multiplicateurs de Lagrange sont plus réguliers (c'est le cas lorsque les fissures sont droites par exemple).

Chapitre 6

Mise en oeuvre numérique

6.1 Notations et préliminaires

Pour les fonction v , τ , η définies sur Ω , on définit les opérateurs différentiels :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\eta &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial y} \right), & \mathbf{grad}v &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \mathbf{div}\tau &= \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y}, \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \right),\end{aligned}$$

et on associe à chaque tenseur τ sa trace $tr(\tau)$ et sa partie anti-symétrique $as(\tau)$. On a :

$$tr(\tau) = \tau \cdot \delta, \quad as(\tau) = \tau \cdot \chi,$$

où δ et χ sont deux tenseurs constants :

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrice d'élasticité

Dans le cas particulier de contraintes planes, on doit considérer trois composantes de contraintes correspondant aux déformations déjà définies. On a donc, sous la forme classique,

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\}.$$

Contrainte plane - Matériau isotrope

En contrainte plane, pour un matériau isotrope, on a par définition la matrice d'élasticité $[A]$ sous la forme

$$[A] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix},$$

où E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Déformation plane-Matériau isotrope

Dans ce cas, en plus des trois autres composantes de la contrainte, il existe une contrainte normale σ_z , et la matrice d'élasticité est donnée sous la forme

$$[A] = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1 - \nu) & 0 \\ \nu/(1 - \nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2(1 - \nu) \end{bmatrix}.$$

6.2 Implémentation de l'élément fini PEERS

Une première méthode de mise en oeuvre consiste à discrétiser l'espace \mathbf{X}_h directement.

Soit \mathcal{E}_h l'ensemble des côtés des triangles de la triangulation \mathcal{T}_h régulière de domaine Ω , et soit \mathcal{N}_h l'ensemble des sommets.

Pour chaque $T \in \mathcal{T}_h$, on note n_T le vecteur unitaire normal à T et pour chaque côté $K \in \mathcal{E}_h$, soient m_K le milieu de K et n_K le vecteur normal à K au point m_K . Comme il est connu qu'un élément $\sigma_h \in RT_0(T)$ est déterminé d'une façon unique en prenant comme degré de liberté les valeurs de $\sigma_h \cdot n_K$ aux points m_K , $K \in \mathcal{E}_h$, on peut donc définir les fonctions de base $\varphi_K \in RT_0(T)$ par les équations :

$$\varphi_K \cdot n_K(m_K) = 1, \quad \varphi_K \cdot n_L(m_L) = 0, \quad \forall L \in \mathcal{E}_h \setminus K.$$

On peut donc prendre comme base de \mathbf{X}_h la base suivante :

$$\begin{pmatrix} \varphi_K \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \text{rot}b_T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \text{rot}b_T \end{pmatrix}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Soient na le nombre des arêtes et nt le nombre des triangles de la triangulation \mathcal{T}_h . Alors le nombre des éléments de cette base est égal à $2(na + nt)$.

Ensuite, nous allons étudier une deuxième méthode de mise en oeuvre efficace et simple pour les formulations mixtes pour l'élasticité [16, 57, 22]. Cette méthode consiste à relaxer la continuité des traces normales du tenseur des contraintes et conduit à un système linéaire de plus grande taille, avec cependant une structure plus creuse que pour la première méthode. La continuité des traces normales est prise en compte par le biais de multiplicateurs de Lagrange.

Notons que par cette implémentation, nous n'avons plus besoin de base globale et de procédure d'assemblage. Les calculs sont conduits localement sur chaque élément. Un autre avantage de cette méthode est que les multiplicateurs de Lagrange contiennent des informations additionnelles qui peuvent être utilisés pour obtenir une meilleure approximation du déplacement.

Un schéma de post-traitement comme celui que nous utilisons au paragraphe 6.3.2 et qui dû est à [57] utilise ces multiplicateurs pour fournir une meilleure approximation de \mathbf{u} .

On va changer l'espace approché \mathbf{X}_h par l'espace approché noté \mathbf{X}_h^* qui est construit de la manière suivante :

Soit \mathbf{R}^* l'espace des fonctions vectorielles dont les restrictions sur T appartiennent à $RT_0(T) \oplus B_0(T)$.

Soit

$$\mathbf{X}_h^*(T) = \{\tau_h; \quad (\tau_{h_{i1}}, \tau_{h_{i2}}) \in \mathbf{R}^*, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Donc

$$\dim(\mathbf{X}_h^*(T)) = 2 \cdot (3 + 1) = 8, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

En effet :

$$RT_0(T) = \{(a + bx, c + by), \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

On pose :

$$\mathbf{X}_h^* = \{\tau_h \in \mathbf{X}; \quad \tau_{h|T} \in \mathbf{X}_h^*(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Approximation de \mathbf{X}_h^*

On considère que les éléments de $\mathbf{X}_h^*(T), T \in \mathcal{T}_h$ sont prolongés par zéro en dehors de T sur tout Ω , donc on a $\mathbf{X}_h^*(T) \subset \mathbf{X}_h^*$ et la base de \mathbf{X}_h^* peut être donnée comme réunion des bases locales des $\mathbf{X}_h^*(T), T \in \mathcal{T}_h$, et alors, pour construire les éléments de la base de \mathbf{X}_h^* , il suffit de construire celle de $\mathbf{X}_h^*(T), T \in \mathcal{T}_h$.

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, soient P_1, P_2, P_3 les sommets de T , et soit $s := (P_1 + P_2 + P_3)/3$ le centre de gravité de T . Les fonctions de base de $\mathbf{X}_h^*(T)$ sont données

comme suit :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \eta_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \eta_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \eta_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_5 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t (x - s), & \eta_6 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^t (x - s), \\ \eta_7 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{curl} b^t, & \eta_8 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{curl} b^t. \end{aligned}$$

on peut écrire sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$, $\sigma_h(x) = \sum_{j=1}^8 \sigma_j \eta_j(x)$, $x \in T$, où les σ_j sont des constantes à calculer. Il est clair que σ_h vérifie $\operatorname{div} \sigma_h = \text{cte}$.

Approximation de \mathbf{V}_h^*

On va remplacer l'espace approché \mathbf{V}_h par l'espace approché noté \mathbf{V}_h^* qui est construit de la façon suivante :

Soit $\mathbf{V}^*(T)$ l'espace des fonctions vectorielles dont les restrictions sur T appartiennent à $(P_0(T))^2$. On pose

$$\mathbf{V}_h^* = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}; \quad \mathbf{v}_{h|T} \in \mathbf{V}^*(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

Soit $(\mu_k)_{k=1,2}$ une base de $\mathbf{V}_h(T)$, avec $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\mu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Approximation de \mathbf{W}_h^*

De même, on va remplacer l'espace approché \mathbf{W}_h par l'espace approché noté \mathbf{W}_h^* qui est construit de la manière suivante :

Soit $\mathbf{W}^*(T)$ l'espace des fonctions vectorielles dont les restrictions sur T appartiennent à $P_1(T; M_{skew}^{2 \times 2})$. On pose :

$$\mathbf{W}_h^* = \{ \gamma_h \in \mathbf{W} \cap C^0(\Omega, M_{skew}^{2 \times 2}); \quad \gamma_{h|T} \in \mathbf{W}^*(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

Soit $(\nu_k)_{k=1,2,3}$ une base de $\mathbf{W}_h(T)$, avec $\nu_k = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_k \\ -\varphi_k & 0 \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, 3$ et pour chaque noeud z_j , la fonction φ_j est donnée par :

$$\varphi_j(z_k) = \delta_{jk}, \quad (k = 1, \dots, \operatorname{card}(\mathcal{N}_h)).$$

On définit $NS : \{1, \dots, nt\} \times \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, \dots, na\}$ une application bijective qui associe aux numéros des milieux des côtés les numéros globaux dans le maillage.

problème approché

Pour cette mise en oeuvre, nous allons modifier légèrement le problème approché. Nous considérons les espaces discrets suivants :

$$M_h = \{ \lambda_{t_1} : \lambda_{h_{t_1}|E} \in \mathcal{P}_0(E), E \subset \Gamma_c, \lambda_{h_{t_1}|E} = 0 \text{ pour } E \subset \Gamma_D \},$$

$$M_{h+} = \{ \lambda_n : \lambda_{h_n|E} \in \mathcal{P}_0(E), E \subset \Gamma_c, \lambda_{h_n|E} = 0 \text{ pour } E \subset \Gamma_D \}.$$

Ensuite nous introduisons les espaces discrets des multiplicateurs de Lagrange suivants :

$$\mathbf{Q}_h = \{ \lambda : \lambda_{h|E} \in \mathcal{P}_0(E)^2, E \subset \partial T, T \in \mathcal{T}_h, \lambda_{h|E} = 0 \text{ pour } E \subset \Gamma_D \},$$

$$\mathbf{N}_h = \{ l : l_{h|E} \in \mathcal{P}_0(E)^2, E \subset \Gamma_N, l_{h|E} = 0 \text{ pour } E \subset \Gamma_D \}.$$

L'introduction d'un multiplicateur de Lagrange permet de récupérer la continuité de la trace normale du tenseur des contraintes σ sur les frontières intérieures, ce qui implique $\sigma \in H(\text{div}, \Omega)$.

La formulation mixte et hybride discrète du système consiste à chercher : $(\sigma_h, \mathbf{u}_h, \gamma_h, \lambda_{th}, \lambda_{nh}, \lambda_h, l_h) \in \mathbf{X}_h^* \times \mathbf{V}_h^* \times W_h^* \times \mathbf{M}_h \times M_{h+} \times \mathbf{Q}_h \times \mathbf{N}_h$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\sigma_h, \tau_h) + b(\tau_h; \mathbf{u}_h, \gamma_h) + d_t(\tau_h, \lambda_{th}) + d_n(\tau_h, \lambda_n) \\ \quad - \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E [\tau_h \cdot \nu] \lambda_h ds - \sum_{E \subset \Gamma_N} \int_E \tau_h \cdot \nu \cdot l_h ds = 0, \quad \forall \tau \in \mathbf{X}_h^*, \\ b(\sigma_h; \mathbf{v}_h, \eta_h) = -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, \eta_h) \in \mathbf{V}_h^* \times W_h^*, \\ d_t(\sigma_h, \mu_{th}) = 0, \quad \forall \mu_{th} = (\mu_{th1}, \mu_{th2}) \in \mathbf{M}_h, \quad \mu_{hi} \cdot \nu_{hi} = 0, \\ d_n(\sigma_h, \mu_h - \lambda_{nh}) \leq 0, \quad \forall \mu \in M_{h+}, \\ \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E [\sigma_h \cdot \nu] \mu_h ds = 0, \quad \forall \mu_h \in \mathbf{Q}_h, \\ \sum_{E \subset \Gamma_N} \int_E \sigma_h \cdot \nu \cdot m_h ds = \sum_{E \subset \Gamma_N} \int_E g \cdot m_h ds, \quad \forall m_h \in \mathbf{N}_h. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

6.2.1 Construction des matrices

On s'intéresse ici aux formules de calcul des éléments des différentes matrices d'une part, et au stockage de ces éléments d'autre part en tenant compte de la structure de chacune des matrices et de leurs propriétés. Dans la suite, nous décrivons l'implémentation de l'élément PEERS localement.

Matrice B et matrices $B(T)$

Soit $(\eta_j)_{j=1, \dots, 8nt}$ la base de l'espace \mathbf{X}_h^* , et soient $\sigma_h, \tau_h \in \mathbf{X}_h^*$ donc :

$$\sigma_h = \sum_{j=1}^{8nt} \sigma_j \eta_j, \quad \tau_h = \sum_{k=1}^{8nt} \tau_k \eta_k,$$

$$\begin{aligned} a(\sigma_h, \tau_h) &= \sum_{j,k=1}^{8nt} \sigma_j \tau_k a(\eta_j, \eta_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{8nt} \sigma_j \tau_k B(j, k). \end{aligned}$$

Avec $B(j, k) = a(\eta_j, \eta_k)$, on pose $B = (B(j, k))_{1 \leq j, k \leq 8nt}$, et puisque $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive (coercive), alors B est aussi une matrice symétrique définie positive.

D'après la définition de la base $(\eta_i)_{i=1, \dots, 8nt}$ on a :

$$l \neq m \implies \text{supp } \eta_l \cap \text{supp } \eta_m = \emptyset, \quad \forall 1 \leq l, m \leq 8,$$

donc B est une matrice diagonale par blocs.

$$B(j, k) := a(\eta_j, \eta_k) = \int_{T_l} (\mathcal{C}^{-1} \eta_j) : \eta_k \, dx, \quad (j, k = 1, \dots, 8) \text{ et } (l = 1, \dots, nt).$$

On pose :

$$B(T) = (a_l(\eta_j, \eta_k))_{j,k=1, \dots, 8 \text{ et } l=1, \dots, nt},$$

ce qui implique que :

$$B(T) = |T| \begin{bmatrix} 2(\alpha + \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{55} & B_{56} & 0 & -\frac{\beta}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{56} & B_{66} & \frac{\beta}{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{30} & B_{77} & B_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{30} & 0 & B_{78} & B_{88} \end{bmatrix},$$

avec $\alpha = \frac{1}{2\mu}$, $\beta = -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)}$, et où :

$$B_{55} = \frac{\alpha}{6} \sum_{l=1}^3 |P_l - s|^2 + \frac{\beta}{12} \sum_{j,k=1}^2 \sum_{l=1}^3 (P_{lj} - s_j)^t (P_{lk} - s_k),$$

$$\begin{aligned}
B_{56} &= \frac{\beta}{12} \sum_{l=1}^3 ((P_{l1} - s_1)^2 - (P_{l2} - s_2)^2), \\
B_{66} &= \frac{2\alpha + \beta}{12} \sum_{l=1}^3 |P_l - s|^2 - \frac{\beta}{6} \sum_{l=1}^3 (P_{l1} - s_1)(P_{l2} - s_2), \\
B_{77} &= \frac{2\alpha + \beta}{180} \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \lambda_{j,k}^2 \right) - \frac{\beta}{90} \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{j,1} \lambda_{j,2} \right), \\
B_{78} &= \frac{\beta}{180} \left(- \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,1}^2 + \sum_{j=1}^3 \lambda_{j,2}^2 \right), \\
B_{88} &= \frac{2\alpha + \beta}{180} \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \lambda_{j,k}^2 \right) + \frac{\beta}{90} \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{j,1} \lambda_{j,2} \right),
\end{aligned}$$

où P_{lk} ($l \in \{1, 2, 3\}$), ($k \in \{1, 2, 3\}$) désigne la k ème composante du lième sommet du triangle $T \in \mathcal{T}_h$. On note que les éléments de $B(T)$, $T \in \mathcal{T}_h$ sont calculés par des formules d'intégration numérique.

D'où la forme de la matrice B :

$$B = \begin{bmatrix} B(T_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B(T_2) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B(T_{nt}) \end{bmatrix}.$$

$B(T)$ sont des blocs de B d'ordre 8 ordonnés par les relations suivantes :

$$B(l, m) = a_k(i, j), \quad k = 1, \dots, nt$$

$$l = 8(k - 1) + i, \quad i = 1, \dots, 8$$

$$m = 8(k - 1) + j, \quad j = 1, \dots, 8$$

Il donc suffit de calculer les matrices $B(T)$ sur chaque triangle T et d'en déduire la matrice B par assemblage.

Matrice C et matrices $C(T)$

Soit $(\eta_j)_{j=1, \dots, 8nt}$ la base de l'espace \mathbf{X}_h^* , et soit $(\mu_k)_{k=1, \dots, 2nt}$ une base de \mathbf{V}_h^* . Soient $\eta_j \in \mathbf{X}_h^*$ et $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^*$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \sum_{k=1}^{2nt} u_k \mu_k, \\ \int_{\Omega_c} \operatorname{div} \eta_j \mathbf{u}_h &= \sum_{k=1}^{2nt} u_k \int_{\Omega_c} \operatorname{div} \eta_j \mu_k \\ &= \sum_{k=1}^{2nt} u_k C(j, k). \end{aligned}$$

On pose sur chaque triangle $T_l, l = 1, \dots, nt$: $C(T_l) = (C_l(j, k))_{1 \leq j \leq 8 \text{ et } 1 \leq k \leq 2}$ avec :

$$C_l(j, k) = \int_{T_l} \mu_k \cdot \operatorname{div} \eta_j \, dx, \quad j = 1, \dots, 8 \text{ et } k = 1, 2,$$

et on a :

$$C(T) = 2|T| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où la forme de la matrice C :

$$C = \begin{bmatrix} C(T_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(T_2) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C(T_{nt}) \end{bmatrix}.$$

C est une matrice rectangulaire diagonale par bloc, les blocs $C(T_k), k = 1, \dots, nt$ sont des matrices rectangulaire d'ordre 8×2 ordonnées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} C_k(l, m), \quad k &= 1, \dots, nt \\ l &= 8(k-1) + i, \quad i = 1, \dots, 8 \\ m &= 2(k-1) + j, \quad j = 1, \dots, 2 \end{aligned}$$

donc il suffit de calculer les matrices $C(T)$ sur chaque triangle T et d'en déduire la matrice C par assemblage.

Matrice D et matrices $D(T)$

Soit $(\eta_j)_{j=1,\dots,8nt}$ la base de l'espace \mathbf{X}_h^* , et soit $(\nu_k)_{k=1,\dots,ns}$ une base de \mathbf{W}_h^* .

Soient $\sigma_h \in \mathbf{X}_h^*$ et $\gamma_h \in \mathbf{W}_h^*$. On a

$$\gamma_h = \sum_{m=1}^{ns} \gamma_m \nu_m,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} \eta_l \gamma_h &= \sum_{m=1}^{ns} \gamma_m \int_{\Omega_c} \eta_l \nu_m \\ &= \sum_{m=1}^{ns} \gamma_m D(l, m). \end{aligned}$$

On pose sur chaque triangle $T_k, k = 1, \dots, nt : D(T_k) = (D_k(l, m))_{1 \leq l \leq 8 \text{ et } 1 \leq m \leq 3}$ avec :

$$D_k(l, m) = \int_{T_k} \eta_l : \nu_m dx, \quad l = 1, \dots, 8 \text{ et } m = 1, 2, 3,$$

$$D(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}|T| & -\frac{2}{3}|T| & -\frac{2}{3}|T| \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} \\ D_{71} & D_{72} & D_{73} \\ D_{81} & D_{82} & D_{83} \end{bmatrix}.$$

Pour tout $j = 1, 2, 3$, on a :

$$\begin{aligned}
D_{5j} &= \frac{|T|}{12}(P_{jy} - s_2 - P_{jx} + s_1), \\
D_{6j} &= \frac{|T|}{12}(P_{jy} - s_2 + P_{jx} - s_1), \\
D_{71} &= \frac{1}{120}(P_{2y} - P_{3y} + P_{3x} - P_{2x}), \\
D_{72} &= \frac{1}{120}(P_{3y} - P_{1y} + P_{1x} - P_{3x}), \\
D_{73} &= \frac{1}{120}(P_{1y} - P_{2y} + P_{2x} - P_{1x}), \\
D_{81} &= \frac{1}{120}(P_{2y} - P_{3y} - P_{3x} + P_{2x}), \\
D_{82} &= \frac{1}{120}(P_{3y} - P_{1y} - P_{1x} + P_{3x}), \\
D_{83} &= \frac{1}{120}(P_{1y} - P_{2y} - P_{2x} + P_{1x}),
\end{aligned}$$

d'où la forme de la matrice D :

$$D = \begin{bmatrix} D(T_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D(T_2) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D(T_{nt}) \end{bmatrix}.$$

D est une matrice rectangulaire diagonale par bloc, les blocs $D(T_k)$, $k = 1, \dots, nt$ sont des matrices rectangulaires d'ordre 8×3 ordonnées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
D_k(l, m), \quad k &= 1, \dots, nt \\
l &= 8(k-1) + i, \quad i = 1, \dots, 8 \\
m &= NS(k, j), \quad j = 1, \dots, 3
\end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer les matrices $D(T)$ sur chaque triangle T et d'en déduire la matrice D par assemblage.

Matrice F et matrices $F(T)$

Soit $\zeta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\zeta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ une base de \mathbf{Q}_h et de \mathbf{N}_h On a :

$$E_{j,k} = F_{j,k} = - \langle \tau_h \nu, h \rangle = - \int_E \eta_j n_E \cdot \zeta_k dx.$$

Pour tout $j = 1, \dots, 8$, $k = 1, 2$ et toute arête $E = \text{conv}\{P_1, P_2\} \equiv (E_1, E_2)$, et pour tout T_1, T_2 deux éléments de côté commun E , on a les deux matrices E_{T_1} et E_{T_2}

$$E_{T_1} = \begin{pmatrix} -E_2 & -E_2 & E_1 & -E_1 & -\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ E_1 & -E_1 & -E_2 & -E_2 & -\gamma & \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}^t,$$

avec $\gamma = (E_2, -E_1) \cdot (P_1 - s)$ Et on a $E_{T_2} = -E_{T_1}$,

$F = E_{T_1}$, pour tout $E \subset \Gamma_N$.

Matrices de contact L et H .

On a :

$$L = \langle\langle \tau_t, \lambda_t \rangle\rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma_c}, \quad \forall \lambda_t|_{E \in \Gamma_c} \in P_0(E)^2,$$

par définition on a : $\tau_t := \tau\nu - \tau_\nu\nu$, avec $\tau\nu := (\tau_{ij}\nu_j)_j$ et comme on a choisi une fissure horizontale alors le vecteur unitaire normal $\nu = (0, 1)$, par suite

$$\tau\nu = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{22} \end{pmatrix}, \quad \tau_\nu = \tau_{11} + \tau_{22}, \quad \text{donc } \tau_t = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ -\tau_{11} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$L = \int_{\Gamma_c} \tau_{t_2} \lambda_{t_2} ds = \int_{\Gamma_c} \tau_{11} ds,$$

donc :

$$L = |E| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ (P_1 - s)(-1; 0) \\ (P_1 - s)(-1; 0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part : $H = \langle\langle \tau_\nu, \lambda_n \rangle\rangle, \quad \forall \lambda_n|_{E \in \Gamma_c} \in P_0(E)$. Par définition, on a :

$$\tau_\nu = \tau_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \text{et } \nu = \frac{1}{|E|} \begin{pmatrix} E_2 \\ -E_1 \end{pmatrix},$$

donc $\nu_1\nu_2 = \frac{-E_1E_2}{|E|^2}$, et par conséquent on a :

$$H = |E| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \frac{-E_1 E_2}{|E|^2} \\ 0 \\ (P_1 - s)(-1; 0) \left(1 + \frac{-E_1 E_2}{|E|^2}\right) |E| \\ (P_1 - s)(-1; 0) \left(1 - \frac{-E_1 E_2}{|E|^2}\right) |E| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stockage du système linéaire

A partir du choix des espaces et leurs bases tel que l'on vient de les décrire, on obtient le système linéaire suivant associé au problème (6.1) $KX = F$:

$$\begin{bmatrix} B & C & D & E & F & L & H \\ {}^t C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\sigma \\ x_u \\ x_\gamma \\ x_{\lambda_E} \\ x_{\lambda_F} \\ x_{\lambda_t} \\ x_{\lambda_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_f \\ 0 \\ 0 \\ b_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

La matrice B correspond au forme bilinéaire a est symétrique définie positive, C et D résultent de forme bilinéaire b .

6.3 Résolution du système linéaire

6.3.1 Mise sous forme de problème de minimisation

Le problème hybride discret peut se mettre sous la forme matricielle suivante : déterminer $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_h, \sigma_h)$ et Λ , défini par la condition max-min

$$\max_{SM \geq 0} \left(\min_{\mathbf{V}} \frac{1}{2} {}^t \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{V} - {}^t \mathbf{V} \mathbf{F} + ({}^t \mathbf{V} \mathbf{L}) S M \right), \quad (6.3)$$

où \mathbf{K} désigne la matrice de rigidité, \mathbf{F} est le vecteur qui correspond aux forces extérieures, et la matrice S est la matrice de couplage.

La solution (\mathbf{U}, Λ) de (6.3) satisfait les conditions du point-selle et nous avons :

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} - L S \Lambda). \quad (6.4)$$

Donc, pour $\Phi = S\Lambda$, le point selle du problème (6.3) peut se réécrire comme le problème de minimisation quadratique suivant :

$$\min_{\Phi \geq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t \Phi {}^t L \mathbf{K}^{-1} L \Phi - {}^t \Phi {}^t L \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \right). \quad (6.5)$$

On note ensuite que L est de rang maximale et que la matrice $L \mathbf{K}^{-1} {}^t L$ est symétrique définie positive. Le problème consiste alors à résoudre ce problème de minimisation de fonctionnelle quadratique définie positive sous contraintes convexes. Donc si $\bar{\Phi}$ est la solution du problème (6.5) alors $\Lambda = S^{-1} \bar{\Phi}$, et donc la solution \mathbf{U} est obtenue par la résolution du problème (6.4).

6.3.2 Post-traitement

Les multiplicateurs de Lagrange utilisés dans cette mise en oeuvre vont nous servir à améliorer l'approximation du déplacement.

On introduit l'espace suivant :

$$\mathbf{V}_h^* = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h; \quad \mathbf{v}_h|_T \in P_{k+1}^2(T) \},$$

Avec $k = 0$ pour l'élément fini PEERS, et $k = 1$ pour l'élément fini BDM d'ordre 0.

Le principe de la méthode consiste à construire une approximation $\mathbf{u}_h^* \in \mathbf{V}_h^*$ de u sur chaque élément $T \in \mathcal{T}_h$, par la résolution du système linéaire $AX = b$ suivant :

$$\begin{cases} P_e(\mathbf{u}_h^*) = \lambda_h, \forall e \in \mathcal{E}, \\ P_T(\mathbf{u}_h^*) = P_T(\mathbf{u}_h), \end{cases} \quad (6.6)$$

où P_e désigne la projection des polynômes linéaires sur les arêtes e , $e \in \mathcal{E}$, et P_T désigne la projection des fonctions constantes sur le triangle de référence T , $T \in \mathcal{T}_h$.

D'une part, sur un tel élément T de la triangulation, la première équation du

système implique :

$$\int_{e \in \mathcal{E}} (\mathbf{u}_h^* - \lambda_h) q \, dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_1(e)^2, \quad \forall e \in \mathcal{E},$$

$$\frac{1}{|J|} \int_{e^* \in \mathcal{E}} (\mathbf{u}_h^{**} - \lambda_h^*) q^* \, dx^* = 0, \quad \forall q^* \in \mathcal{P}_1(e^*)^2,$$

$$\frac{1}{|J|} \int_{e^* \in \mathcal{E}} (\sum_{k=1}^6 c_k \varphi_k^*) q^* \, dx^* = \frac{1}{|J|} \int_{e^* \in \mathcal{E}} \lambda_h^* q^* \, dx^*, \quad \forall q^* \in \mathcal{P}_1(e^*)^2,$$

$$\sum_{k=1}^6 c_k \int_{e^* \in \mathcal{E}} \varphi_k^* q^* \, dx^* = \int_{e^* \in \mathcal{E}} \lambda_h^* q^* \, dx^*, \quad \forall q^* \in \mathcal{P}_1(e^*)^2,$$

où J est la matrice jacobienne du changement de variables ($x \rightarrow x^*$).

En utilise la formule de quadrature de Gauss pour approcher numériquement ces dernières intégrales, on obtient alors sur chaque $T \in \mathcal{T}_h$:

$$\sum_{k=1}^6 c_k \left(\sum_{i=1}^2 \varphi_k^*(\xi_i) q^*(\xi_i) w_i \right) = \sum_{i=1}^2 \lambda_h^*(\xi_i) q^*(\xi_i) w_i, \quad \forall q^* \in \mathcal{P}_1(e^*)^2, \quad (6.7)$$

où $\xi_i, i = 1, 2$ sont les deux points de Gauss sur chaque arête $e \in \mathcal{E}$ de $T \in \mathcal{T}_h$, et où w_i sont les fonctions de poids.

D'autre part, la deuxième équation du système implique :

$$\mathbf{u}_h^*(\xi_G) = \mathbf{u}_h(\xi_G),$$

$$\sum_{k=1}^6 c_k \mathbf{u}_h^*(\xi_G) = \mathbf{u}_h(\xi_G),$$

où ξ_G est le centre de T .

Par conséquent à partir du système linéaire (6.6), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^6 c_k (\sum_{i=1}^2 \varphi_k^*(\xi_i) q^*(\xi_i) w_i) = \sum_{i=1}^2 \lambda_h^*(\xi_i) q^*(\xi_i) w_i, & \forall q^* \in \mathcal{P}_1(e^*)^2, \\ \sum_{k=1}^6 c_k \mathbf{u}_h^*(\xi_G) = \mathbf{u}_h(\xi_G). \end{cases} \quad (6.8)$$

Remarquons que le système linéaire (6.8) est un système surdéterminé car il conduit à la résolution d'un système linéaire de 7 équations à 6 inconnues. En général, pour qu'on puisse résoudre, on utilise la méthode des moindres carrés dont la matrice du système est symétrique définie positive. Il suffira donc de résoudre le système linéaire de 6 équations à 6 inconnues suivant : ${}^t A A X = {}^t A b$.

6.4 Exemples et résultats numériques

6.4.1 Exemple 1 : L-Shape

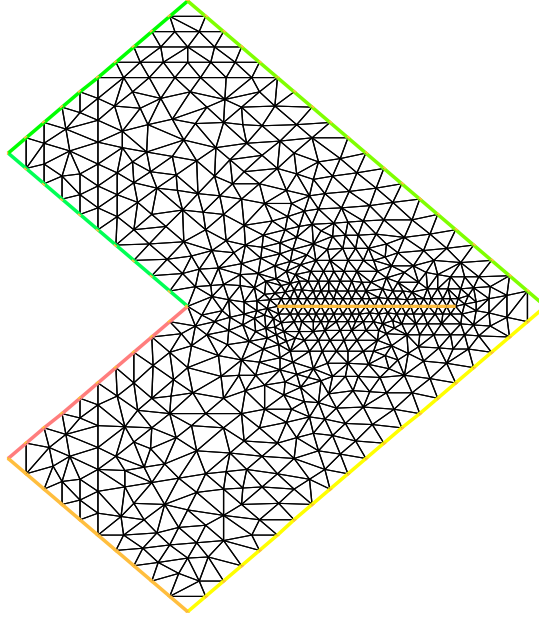


FIG. 6.1 – L-Shape

Pour cet exemple, on dispose d'une solution analytique pour les déplacements \mathbf{u} du problème de contact donnés en coordonnées polaires (r, ϑ) , avec $-\pi < \vartheta \leq \pi$:

$$u_r(r, \vartheta) = \frac{r^\alpha}{2\mu} (-(\alpha + 1)\cos((\alpha + 1)\vartheta) + (C_2 - (\alpha + 1))C_1\cos((\alpha - 1)\vartheta)),$$

$$u_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{r^\alpha}{2\mu} ((\alpha + 1)\sin((\alpha + 1)\vartheta) + (C_2 + \alpha - 1)C_1\sin((\alpha - 1)\vartheta)),$$

où

$$C_1 = -\cos\left(\frac{(\alpha + 1)\omega}{(\alpha - 1)\omega}\right), \quad C_2 = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}.$$

On prend $E = 100000$, $\nu = 0.3$, $f = 0$, et $g(r, \mu) = \frac{2}{3}\mu^{-\frac{1}{3}}(-\sin(\frac{\mu}{3}), \cos(\frac{\mu}{3})).n$.

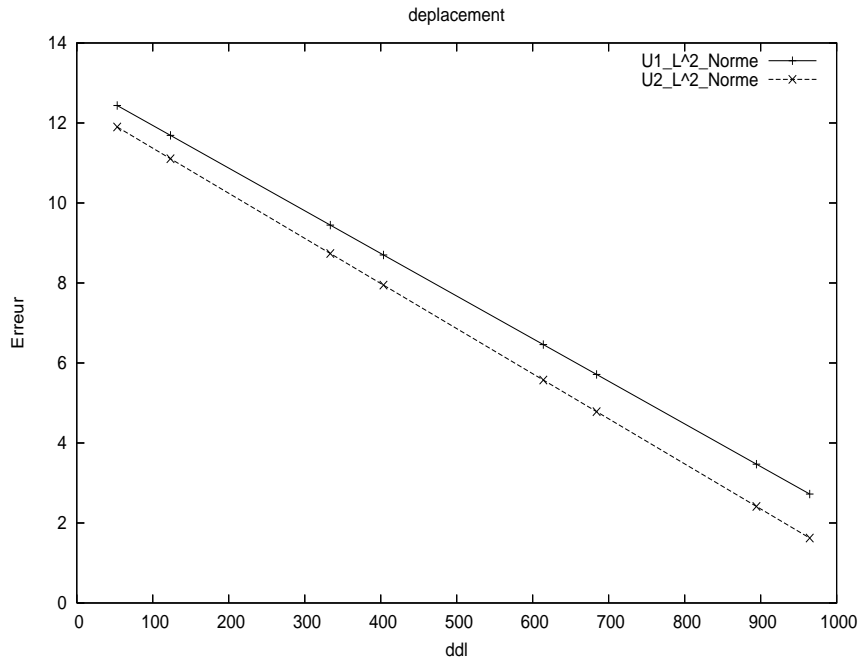


FIG. 6.2 – Erreur relative des déplacements en fonction des ddl

6.4.2 Exemple 2 : Membrane de Cook

On a choisi pour cet exemple les valeurs suivantes : $E = 100000$, $\nu = 0.499$, $f = (0, 0)$, et $g(x, y) = (0, 1000)$.

Remarque 6.1 *La pente de la courbe de convergence de la norme L^2 est évaluée à 0.75, ce qui signifie que le taux de convergence entre la solution exacte et la solution approchée est bien $h^{\frac{3}{4}}$, ce qui est prouvé dans le théorème.*

6.5 Implémentation de l'élément fini BDM0

6.5.1 Bases des espaces approchés et étude matricielle

On va utiliser la technique du triangle de référence. Soit un triangle $T \in \mathcal{T}_h$. Désignons par $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ les sommets du triangle rectangle isocèle \hat{T} , et par P_1, P_2, P_3 les sommets du triangle T sur lequel nous souhaitons faire les calculs. Il existe une transformation affine \hat{F} telle que l'image de chacun des sommets $\hat{P}_i, i = 1, 2, 3$ soit le sommet $P_i, i = 1, 2, 3$ de T . Cette application envoie le triangle \hat{T} sur le triangle T et elle est définie analytiquement par :

$$\forall (\xi, \eta) \in \hat{T}, (x, y) = \hat{F}(\xi, \eta) = \xi(P_2 - P_1) + \eta(P_3 - P_1) + P_1.$$

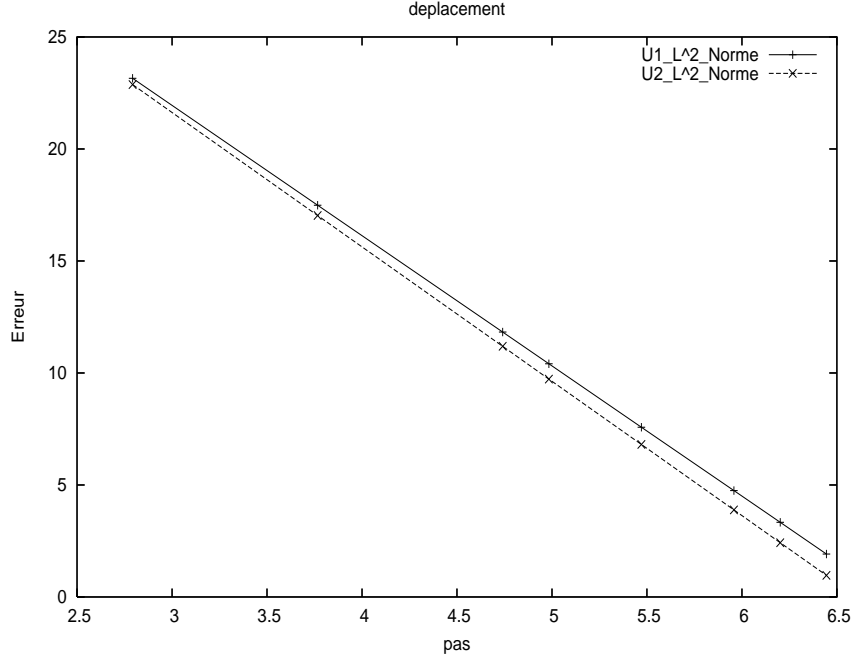


FIG. 6.3 – Erreur relative des déplacements en fonction du pas de discrétisation

Avec (ξ, η) les coordonnées dans l'élément de référence. Nous avons la transformation de tenseur des contraintes : $\sigma(x, y) = \frac{1}{|\hat{J}|} B \hat{\sigma}(\xi, \eta)$, où \hat{J} est la matrice jacobienne du changement de variables $((x, y) \rightarrow (\xi, \eta))$. Elle est indépendante de (ξ, η) et est définie par :

$$B = \begin{bmatrix} \hat{J} & 0 \\ 0 & \hat{J} \end{bmatrix}, \text{ avec } \hat{J} = \begin{bmatrix} (P_2 - P_1)_1 & (P_3 - P_1)_1 \\ (P_2 - P_1)_2 & (P_3 - P_1)_2 \end{bmatrix}.$$

On a pour tout $\sigma_h \in \mathbf{X}_h$,

$$\sigma_h = \sigma_h^1 + \sigma_h^2 + \sigma_h^3, \quad \sigma_{h|T}^1 \in \mathcal{P}_1^{2 \times 2}(T), \quad \sigma_{h|T}^2 \in b_T \nabla R_T, \quad \sigma_{h|T}^3 \in B_0(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Alors :

$$\sigma_h^1 = \begin{bmatrix} c_1 + c_2\xi + c_3\eta & c_4 + c_5\xi + c_6\eta \\ c_7 + c_8\xi + c_9\eta & c_{10} + c_{11}\xi + c_{12}\eta \end{bmatrix},$$

$$\sigma_h^2 = \begin{bmatrix} c_{13}(\text{rot } b_K)^t \\ c_{14}(\text{rot } b_K)^t \end{bmatrix},$$

$$\sigma_h^3 = \begin{bmatrix} 0 & -c_{15}b_K \\ c_{15}b_K & 0 \end{bmatrix},$$

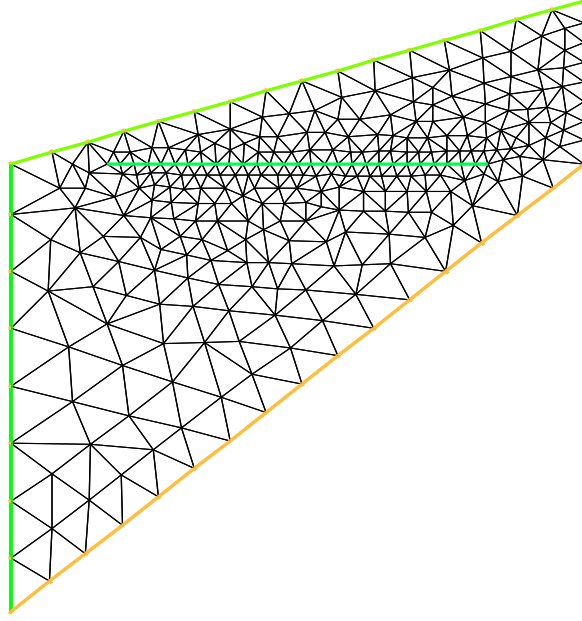


FIG. 6.4 – Membrane de Cook

où b_K désigne la fonction "bulle" donnée par $b_K = \xi\eta - \xi^2\eta - \xi\eta^2$, de sorte que le degré de liberté sur chaque élément de \mathcal{T}_h est égal à 15.

Les fonctions de base de l'élément BDM sont les fonctions $N_i, 1 \leq i \leq 9$, telle que

$$\begin{aligned}
 N_0 &= 1, \\
 N_1 &= 1 - \xi - \eta, \\
 N_2 &= \xi, \\
 N_3 &= \eta, \\
 N_4 &= \xi - \xi^2 - 2\xi\eta, \\
 N_5 &= -\eta + \eta^2 + 2\xi\eta, \\
 N_6 &= \xi\eta - \xi^2\eta - \xi\eta^2, \\
 N_7 &= 1 - 2\eta, \\
 N_8 &= -1 + 2\xi + 2\eta, \\
 N_9 &= 1 - 2\xi,
 \end{aligned}$$

et on a pour tout $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$, $\mathbf{u}_h|_T \in R_T$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, avec

$$R_T = \{\mathbf{u}(\xi, \eta) = (a, b) + c(\xi, \eta); a, b, c \text{ dans } \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1, 0); (0, 1); (-\eta, \xi)\},$$

donc le degré de liberté sur chaque élément de l'espace \mathbf{V}_h est égal à 3.

Pour tout $\gamma_h \in \mathbf{W}$; $\gamma_h|_T \in P_1(T; M_{skew}^{2 \times 2})$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$,

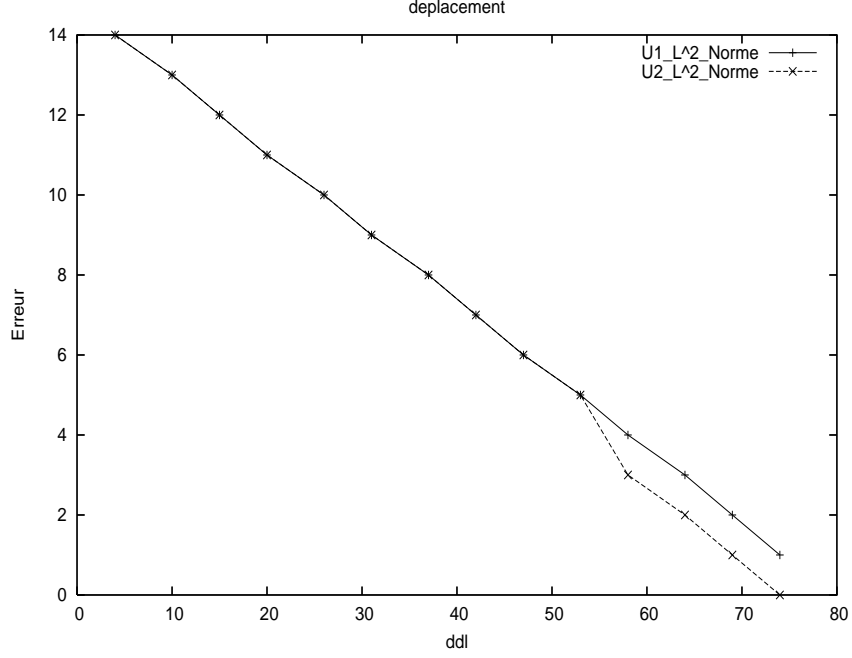


FIG. 6.5 – Erreur relative des déplacements en fonction des ddl

or $P_1(T; M_{skew}^{2 \times 2}) = vect\{1 - \xi - \eta; \xi; \eta\}$.

Concernant la matrice m pour les multiplicateurs de Lagrange des arêtes intérieures, on a $\lambda|_e \in P_1(e)^2$. Sur chaque arête le degré de liberté est égal à 4, ce qui fait 12 degrés de liberté sur chaque élément. Remarquons ici que la matrice m parcourt toutes les arêtes internes de la grille et celles du bord. On définit :

$$\gamma := \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix},$$

$$\chi := [0 \quad -1 \quad 1 \quad 0],$$

$$D := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^t,$$

$$\nu := \begin{bmatrix} \nu_x & \nu_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_x & \nu_y \end{bmatrix}.$$

Le système (5.3) peut s'écrire sous la forme suivant :

$$\int_{\Omega} \tau^t \mathcal{C}^{-1} \tau \, dx + \int_{\Omega} (\tau^t D) \mathbf{u} \, dx + \int_{\Omega} \tau^t \chi \gamma \, dx - \int_{\Gamma_e \cup \Gamma_\sigma} \tau^t \nu \lambda \, ds = 0, \forall \tau \in \mathbf{X}_h, \quad (6.9)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} (D^t \sigma) \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{v}^t \mathbf{f} \, dx = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \quad (6.10)$$

$$\int_{\Omega} \eta^t \chi^t \sigma \, dx = 0, \forall \eta \in W_h, \quad (6.11)$$

$$\int_{\Gamma_e \cup \Gamma_\sigma} \mu^t \nu^t \sigma \, ds = \int_{\Gamma_\sigma} \mu^t t \, ds, \quad \forall \mu \in \mathbf{M}_h. \quad (6.12)$$

Dans l'élément de référence, on a :

$\sigma = N_\sigma \beta^e$, $\mathbf{u} = N_{\mathbf{u}} \mathbf{d}^e$, $\gamma = {}^t N_\gamma \alpha^e$, $\lambda = N_\lambda \delta^e$, avec $(\beta, \mathbf{d}, \alpha, \delta)$. Se sont les paramètres discrets.

On déduit le système linéaire suivant :

$$\sum_T (f \beta^e + {}^t l \mathbf{d}^e + a \alpha^e - m \delta^e) = 0, \quad (6.13)$$

$$\sum_T (l \beta^e + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}) = 0, \quad (6.14)$$

$$\sum_T ({}^t a \beta^e) = 0, \quad (6.15)$$

$$\sum_T ({}^t m \beta^e - \mathbf{f}_\lambda) = 0, \quad (6.16)$$

avec :

$$f = \langle \mathcal{C}^{-1} \sigma, \tau \rangle = \frac{1}{|\hat{J}|} \int_{\hat{T}} {}^t \hat{N}_\sigma {}^t B \mathcal{C}^{-1} B \hat{N}_\sigma \, d\xi, \quad (6.17)$$

$$l = \langle \operatorname{div} \tau, \mathbf{u} \rangle = \int_{\hat{T}} {}^t \hat{N}_{\mathbf{u}} (\hat{D} \hat{N}_\sigma) \, d\xi, \quad (6.18)$$

$$a = \langle \gamma, \tau \rangle = \int_{\hat{T}} {}^t \hat{N}_\sigma {}^t B \chi {}^t \hat{N}_\gamma \, d\xi, \quad (6.19)$$

$$m = \langle \tau \nu, \lambda \rangle_{\Gamma_e \cup \Gamma_\sigma} = \int_{\partial \hat{T}} {}^t \hat{N}_\sigma \hat{\nu} \hat{N}_\lambda \, d\hat{s}, \quad (6.20)$$

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}} = \int_{\hat{T}} {}^t \hat{N}_{\mathbf{u}} \mathbf{f} \, d\xi, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{f}_\lambda = \int_R {}^t \hat{N}_\lambda t \, d\hat{s}, \quad (6.22)$$

et

$$N_\sigma = \begin{bmatrix} N_0 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_5 & N_0 & N_2 & N_3 & -N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_6 & N_0 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 & N_0 & N_2 & N_3 \end{bmatrix},$$

$$N_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} N_0 & 0 & -N_3 \\ 0 & N_0 & N_2 \end{bmatrix},$$

$$N_\gamma = [N_1 \quad N_2 \quad N_3],$$

$$N_\lambda = \begin{bmatrix} S_1^1 & 0 & S_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1^1 & 0 & S_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_1^2 & 0 & S_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1^2 & 0 & S_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1^3 & 0 & S_2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1^3 & 0 & S_2^3 & 0 \end{bmatrix},$$

où, S_1 et S_2 sont donnés par :

$$S_1^i = \frac{(s_2^i - s^i)}{(s_2^i - s_1^i)}; \quad i = 1, 2, 3,$$

$$S_2^i = \frac{(s^i - s_1^i)}{(s_2^i - s_1^i)}; \quad i = 1, 2, 3,$$

avec l'index i désigne le numéro d'une arête, s_1^i et s_2^i sont les deux points de Gauss sur l'arête i .

Nous donnons maintenant les représentations analytiques des matrices l et m :

$$l = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{6}\hat{J}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6}\hat{J}_2 & -\frac{1}{60} & 0 & \frac{1}{6}\hat{J}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\hat{J}_1 \end{bmatrix},$$

avec $\hat{J}_2 = \hat{J}_{21} + \hat{J}_{22}$, et $\hat{J}_1 = \hat{J}_{11} + \hat{J}_{12}$,

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & -\alpha & 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & -\alpha & 0 & \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.5.2 Stockage

Décrivons maintenant la technique utilisée pour stocker les matrices et le traitement du système linéaire (6.13)-(6.16), en minimisant le plus possible la place en mémoire et le nombre des opérations de calcul.

On multiplie la première équation (6.13) par f^{-1} . On obtient :

$$\beta^e + f^{-1t}l \mathbf{d}^e + f^{-1}a\alpha^e - f^{-1}m\delta^e = 0. \quad (6.23)$$

En substituant dans l'équation (6.14), on obtient :

$$-\mathbf{f}_u + l(f^{-1t}l \mathbf{d}^e + f^{-1}a\alpha^e - f^{-1}m\delta^e) = 0, \quad (6.24)$$

soit

$$-\mathbf{f}_u + (lf^{-1t}l) \mathbf{d}^e + (lf^{-1}a)\alpha^e - (lf^{-1}m)\delta^e = 0. \quad (6.25)$$

Soit $R = lf^{-1t}l$. On multiplie l'équation (6.25) par R . On obtient :

$$-R\mathbf{f}_u + \mathbf{d}^e + R(lf^{-1})(a\alpha - m\delta^e) = 0. \quad (6.26)$$

On pose $N = R(lf^{-1})$, donc :

$$\mathbf{d}^e = R\mathbf{f}_u - N(a\alpha - m\delta^e). \quad (6.27)$$

En substituant cette équation dans (6.23) on obtient :

$$\beta^e + f^{-1t}l(R\mathbf{f}_u - N(a\alpha - m\delta^e)) + f^{-1}(a\alpha^e - m\delta^e) = 0.$$

On pose $K_1 = f^{-1} - f^{-1}l N = f^{-1} - f^{-1}l R l f^{-1}$; donc :

$$\beta^e + f^{-1}l R \mathbf{f}_u + K_1(a\alpha - m\delta^e) = 0$$

On pose $N = {}^t(f^{-1}l R)$, donc :

$$\beta^e = -K_1(a\alpha - m\delta^e) - {}^t N \mathbf{f}_u. \quad (6.28)$$

En substituant dans les équations (6.15) et (6.16), on obtient :

$$\begin{aligned} {}^t a K_1(a\alpha - m\delta^e) + {}^t a {}^t N \mathbf{f}_u &= 0, \\ {}^t m K_1(a\alpha - m\delta^e) + {}^t m {}^t N \mathbf{f}_u &= \mathbf{f}_\lambda. \end{aligned}$$

Finalement on obtient un système linéaire à résoudre dont les inconnues sont α et δ :

$$\begin{bmatrix} {}^t a K_1 a & -{}^t a K_1 m \\ {}^t m K_1 a & -{}^t m K_1 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^t a {}^t N \mathbf{f}_u \\ -{}^t m {}^t N \mathbf{f}_u + \mathbf{f}_\lambda \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

on peut réduire cet système à un autre système sous la forme :

$$\cup_{i=1}^{nt} \begin{bmatrix} {}^t m & \tilde{K} & m \end{bmatrix} \delta = \tilde{f}, \quad (6.30)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{K} = K_1 - K_1 a ({}^t a K_1 a)^{-1} {}^t a K_1, \\ \tilde{f} = \mathbf{f}_\lambda - {}^t m (K_1 a ({}^t a K_1 a)^{-1} {}^t a K_2 - K_2) \mathbf{f}_u, \\ K_2 = f^{-1}l (l f^{-1}l)^{-1}. \end{cases}$$

Conclusion de la première partie

Dans cette partie nous nous sommes intéressés à l'étude d'une formulation en domaine régulier de problèmes de fissures avec conditions unilatéral de contact. Cette formulation est basée sur une formulation mixte contraintes-déplacements, elle hérite à la fois des avantages et des inconvénients des formulations mixtes en élasticité.

Un avantage est le calcul de haute précision du tenseur des contraintes et la capacité de ces formulations de prendre en compte des matériaux presque incompressible.

L'inconvénient majeur étant la difficulté d'obtenir des espaces stables d'éléments finis de bas ordre et le coût élevé de ses méthodes.

Cependant vue que pour un certains type de fissures, cette méthode est efficace et permet de s'affranchir des contraintes de maillages. Ceci serait un atout important pour des problèmes d'ordre élevés (problèmes de plaques) et en dimension trois.

L'extension des méthodes à des problèmes avec friction et à des problèmes d'élasticité non linéaires conduirait à des discrétisations efficaces sans augmenté la complexité de tels problèmes.

Il reste dans cette première partie à développer des outils de raffinement de maillage par l'analyse a posteriori, ce qui renforcerait le potentiel d'application des méthodes développées ici.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams— *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [2] M. Amara, J. M. Thomas— *Equilibrium finite elements for the linear elastic problem*. Numer. Math. **33** (1979), 367-383.
- [3] D. N. Arnold, F. Brezzi, J. Douglas— *PEERS : A New Mixed Finite Element For Plane Elasticity*. Japan J. Appl. Math. **1** (1984), 347 – 367.
- [4] D. N. Arnold, R. Winther— *Mixed Finite Elements for Elasticity*, Numer. Math. **92** (2002), 401-419.
- [5] E. Becache, P. Joly, C. Tsogka— *Fictitious Domains, Mixed Finite Elements and Perfectly Matched Layers for 2D Elastic Wave Propagation*, J. of Comp. Acous., Vol. 9, No. 3, pp 1175-1203 (September 2001) (Aussi paru en rapport de recherche INRIA, RR-3889, Mars 2000).
- [6] Z. Belhachmi, F. Ben Belgacem— *Quadratic finite element for Signorini problem*, Math. Comp. **72**, (2003), 83-104.
- [7] Z. Belhachmi, D. Bucur, J.M. Sac-Epée— *Finite element approximation of the Neumann eigenvalue problem in domains with multiple cracks*.
- [8] Z. Belhachmi, J.M. Sac-Epée, J. Sokolowski— *Approximation par la méthode des éléments finis de la formulation en domaine régulier de problèmes de fissures*. To appear C. R. Acad. Sci. Paris.
- [9] Z. Belhachmi, J.M. Sac-Epée, J. Sokolowski— *Mixed finite element methods for a smooth domain formulation of a crack problem*. submitted.
- [10] F. Ben Belgacem— *Rapport des activités de recherche sur : 1-le raccordement de maillages pour les méthodes des éléments finis. 2-les méthodes des éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral* , HDR, INSA Toulouse, France (2003).
- [11] F. Ben Belgacem, P. Hild, P. Laborde— *Extention of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact*, Math. Models Methods. Appl. Sci. **9**, (1999), 287-303.
- [12] F. Ben Belgacem, Y. Renard— *Hybrid finite element methods for the Signorini problem*, Math. Comput. **72**, (2003), 1117-1145.

- [13] F. Ben Belgacem, Y. Renard, L. Slimane—*A mixed formulation for the Signorini problem in nearly incompressible elasticity*
- [14] C. Bernardi, V. Girault—*A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements*, SIAM. J. Numer. Anal. **35** (1998), 1893–1916.
- [15] C. Bernardi, Y. Maday, A.T. Patera—*A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method*, Collège de France Seminar , H. Brézis, J.L. Lions, Pitman, (1994), 13-51.
- [16] D. Braess—*Finite Elements*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [17] F. Brezzi, J. Douglas Jr, L.D. Marini—*Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems*, Numer. Math., **47**, (1985), 217-235.
- [18] Dietrich Braess, Ottmar Klaas, Rainer Niekamp, Erwin Stein, Frank Wobschal—*Error Indicators For Mixed Finite Elements in 2-dimensional Linear Elasticity*. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. **127** (1995) 345-356.
- [19] F. Brezzi, W. W. Hager and P. A. Raviart—*Error estimates for the finite element solution of variational inequalities*, Numer. Math. **28**, (1977), 431-443.
- [20] F. Brezzi, M. Fortin—*Mixed and hybrid finite element methods*, Springer Verlag, New York, Springer Series in Computational Mathematics. **15**, (1991).
- [21] F. Brezzi, W. W. Hager and P. A. Raviart—*Error estimates for the finite element solution of variational inequalities*, Part 2 : Mixed methods, Numer. Math. **31**, (1978), 1-16.
- [22] C. Carstensen, G. Dolzmann, S.A. Funken, D.S. Helm—*Locking-free adaptive mixed finite element in linear elasticity*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. **190** (2000) 1701-1718.
- [23] P.G. Ciarlet—*Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in the Handbook of Numerical Analysis, Vol **II**, P.G. Ciarlet & J.-L. Lions eds, North-Holland, (1991), 17-351.
- [24] P. Clément—*Approximation by Finite Elements Functions Using Local Regularization*, RAIRO, Anal. Numér. **9**, 77-84, 1975.
- [25] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani, T. Sassi—*Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies*. Math. Comp. **71**, 237, (2001), 1-25.
- [26] M. Crouzeix, V. Thomée—*The stability in L^p and $W^{1,p}$ of the L^2 -projection on finite element function spaces*, Math. Comp. **48**, (1987), 521–532
- [27] M. Dauge—*Elliptic boundary value problems on corner domain - smoothness and asymptotics of solutions*. Lecture Notes in Mathematics, **1341**, Springer, Berlin, (1988).

- [28] G. Duvaut and J.-L. Lions— *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, (1972).
- [29] C. Eck, A. Nazarov, W.L. Wendland—*Asymptotic analysis for a mixed boundary value contact problem*, Arch. Ration. Mech. Anal. **156**, (2001), 274-316.
- [30] R. S. Falk—*Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities*, Math. of Comp. **28** (1974), 963–971.
- [31] G.Fichera—*Problemi elastostatici con vincolli unilaterali il problema de Signorini con ambigue conditioni al contorno*. Mam. Acad . Naz. Lincei. **8**, 91,40, 1964.
- [32] B.X. Fraeijns de Veubeke—*Stress function approach*, in : *Proceedings of the World Congress on the Finite Element Method in Structural Mechanics*, 1975.
- [33] F. Hecht, O.Pironneau, A.Le hyaric, K.Ohtsuka—FreeFem++, Laboratoire Jacques Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [34] V. Girault, P.-A. Raviart—*Finite element methods for the Navier-Stokes equations*, Theory and algorithms. Springer-Verlag (1986).
- [35] R. Glowinski—*Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer, Berlin, (1980).
- [36] R. Glowinski, J.-L. Lions et R. Trémolières—*Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Volumes **1** et **2**, Dunod, Paris, (1976) ;
- [37] R. Glowinski, P. Le Tallec—*Augmented Lagrangien and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*. Siam, Philadelphia.
- [38] P. Grisvard—*Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs and Studies in Mathematics. **24**, Pitman, 1985.
- [39] J. Haslinger and I. Hlaváček— *Contact between Elastic Bodies -2.Finite Element Analysis*, Aplikace Matematiky, **26**, (1981), 263–290.
- [40] J. Haslinger and I. Hlaváček— *Contact between Elastic Bodies -2.Finite Element Analysis*, Aplikace Matematiky. **26**, (1981), 263–290.
- [41] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Nečas— *Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics*, in the Handbook of Numerical Analysis, Vol. **IV**, Part **2**, P.G. Ciarlet & J.-L. Lions eds, North-Holland, (1996).
- [42] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunencko—*Analysis of cracks in solids*, Southampton-Boston, WIT press, (2000).
- [43] A.M. Khludnev, J. Sokolowski — *Griffith formula and Rice integral for elliptic equations with unilateral conditions in nonsmooth domains*, EJAM, 1999, **10**, 379-394.
- [44] A.M. Khludnev, J. Sokolowski — *Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks*. European Journal of Mechanics, A/Solids, Vol.**19**, No. 1, 2000, 105-120

- [45] A.M. Khludnev, J. Sokolowski — *Smooth domain method for crack problems*. to appear in Quarterly of Applied Mathematics.
- [46] P. Hild—*Problèmes de contact unilatéral et maillages incompatibles*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse **3**, (1998).
- [47] N. Kikuchi, J. Oden—*Contact problems in elasticity : A study of variational inequalities and finite element methods*, SIAM, 1988.
- [48] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia—*An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, (1980).
- [49] T. Lewinski, J.J. Telega—*Plates, laminates, and shells. Asymptotic analysis and Homogenization*. Series on advances in Mathematics for Applied Sciences-vol.**52**, (2000).
- [50] K. Lhalouani, T. Sassi—*Nonconforming mixed variational formulation and domain decomposition for unilateral problems*, East-West J. Numer. Math., **7**, (1999), 23-30.
- [51] J.-L. Lions, E. Magenes—*Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, (1968).
- [52] M. Moussaoui, K. Khodja—*Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet-Signorini dans un domaine polygonal plan*, Commun. Part. Diff. Eq, **17**, (1992), 805-826.
- [53] J. Nečas — *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson (1967).
- [54] A. Signorini. *Sopra alcune questioni di elastostatica*. Atti. della Soc. Ital. per il progresso della Scienza, 1933.
- [55] L. Slimane—*Méthodes mixtes et traitement du verouillage numérique pour la résolution des inéquations variationnelles*, Ph.D. Thesis, INSA Toulouse, France (2001).
- [56] L. Slimane, A. Bendali, P. Laborde—*Mixed formulations for a class of variational inequalities*, M2AN, **38**, 1, (2004), 177-201.
- [57] R. Stenberg—*A family of mixed finite elements for the elasticity problem*, Numer. Math. **53** (1988) 513-538.
- [58] R. Stenberg—*Two low-order mixed methods for the elasticity problem*.
- [59] J.-M. Thomas—*Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixte*. Thèse Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1977.
- [60] Z.-H. Zhong— *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, 1993.

Deuxième partie

Domaines fictifs pour des
inéquations variationnelles
modélisant des problèmes de
fissures en élasticité linéaire

Chapitre 7

Introduction

La méthode des domaines fictifs a été initialement introduite il y a une trentaine d'années, pour la résolution de problèmes elliptiques, aussi pour la résolution des problèmes stationnaires dans des géométries complexes [[25], [26]]. Elle a été développée plus récemment pour de nombreuses applications, en particulier par R. Glowinski, Y. Kuznetsov et leurs collaborateurs [[2], [19]]. Elle a ensuite été généralisée aux problèmes d'évolution et en particulier aux problèmes d'ondes [[5], [2]]. L'idée de la méthode est de remplacer un système d'équations posé initialement dans un domaine de géométrie complexe par un système "similaire" mais posé dans un domaine d'une forme très simple.

La prise en compte des conditions aux limites sur les bords physiques du problème initial s'effectue alors de manière faible par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange qui "vit" uniquement sur le bord. Par nature, cette méthode est bien adaptée pour des conditions aux limites essentielles, telles conditions peuvent s'interpréter comme une contrainte égalité dans l'espace utilisé pour la formulation variationnelle.

La méthode du domaine fictif est un outil avantageux dans les problèmes où le domaine géométrique n'est pas régulier, mais aussi lorsque celui-ci évolue au cours de la résolution comme c'est le cas en optimisation de formes (optimisation topologique, . . .). En effet, une méthode qui a fait ses preuves dans ce domaine consiste à plonger le domaine effectif dans un plus grand domaine à géométrie simple (région du design) afin de s'affranchir des problèmes de remaillage au cours de la résolution qui auraient un coût souvent trop élevé.

Pour des problèmes de contact la méthode du domaine fictif n'est pas bien connue, notamment parce qu'on a vu que cette méthode est plus adaptée aux problèmes avec des conditions aux limites essentielles. Dans [31], les auteurs ont proposé une formulation de domaine fictif versus matériau fictif qui étend cette

approche aux inéquations variationnelles issues de problèmes de contact unilatéral. La méthode du domaine fictif développé dans [31] consiste pour le problème de Signorini sans frottement, à écrire une suite de problèmes auxiliaires (en domaines fictifs) dont les solutions approchent celle du problème initial. Ces problèmes auxiliaires sont des problèmes de fissures comme ceux rencontrés dans la première partie de la thèse. On peut donc leur appliquer les méthodes d'approximation des chapitres précédents, mais nous allons suivre un autre chemin est construire des méthodes d'approximation basées sur la formulation en déplacement.

Dans cette partie de la thèse nous nous attachons à étudier cette méthode pour des problèmes de contact unilatéral et de donner un cadre précis de l'approximation des problèmes auxiliaires.

Nous développons notamment pour la discrétisation par éléments finis l'analyse a priori et la convergence et nous proposons une stratégie adaptative de résolution basée sur des indicateurs d'erreur par résidu que nous introduisons et dont nous montrons l'équivalence avec l'erreur entre la solution du problème continu et celle obtenue par la méthode des éléments finis. Une difficulté à noter pour l'obtention de tels résultats vient de la non continuité de la solution du problème continu à travers la fissure.

Les estimateurs d'erreur obtenus dans ce travail sont ceux des problèmes auxiliaires. Cependant, du fait que les solutions des problèmes auxiliaires constituent des approximations de la solution du problème de Signorini initial, il est naturel d'espérer que ces estimateurs soient "valables" pour ce dernier. Cela permettrait de justifier l'approximation de problème de type Signorini par une stratégie adaptative multi-étape. Qui du fait de la rareté et de la difficulté des estimations a posteriori pour des problèmes de contact de type Signorini serait un atout appréciable. En fait, nous obtenons seulement que les estimateurs d'erreur majorent l'erreur entre la solution du problème de Signorini est l'erreur obtenue par la méthode des éléments finis, ce qui permet de faire effectivement de l'adaptativité pour ce dernier problème (l'équivalence n'est nécessaire que pour prémunir contre un excès de raffinement [40]).

Adaptive finite element for a fictitious domain formulation of some variational inequalities

We consider a fictitious domain formulation of some elliptic variational inequalities arising in unilateral contact problems. The method, applied to the linear elasticity problems turns out to be an efficient tool for handling complex geometries and for solving shape optimization problems. We study an adaptive finite element discretization of the resulting variational inequalities. The discretization is based on mixed finite element methods for which we perform a priori and a posteriori analysis. We introduce residual error estimators and we obtain upper and lower bounds of the error. An adaptive solution algorithm is proposed and several numerical experiments confirming the theory are presented.

7.1 Introduction

We consider the frictionless unilateral contact problem for a linear elastic body occupying the reference configuration $\Omega_1 \in \mathbb{R}^2$ with a Lipschitz-continuous boundary which is the union of two disjoint parts $\partial\Omega_1 = \Gamma_D \cup \Gamma_C$, $\text{meas } \Gamma_D > 0$

$$-\mathbf{div } \sigma = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_1, \quad (7.1)$$

$$\sigma = A\varepsilon(\mathbf{u}) \quad \text{in } \Omega_1, \quad (7.2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{u}\mathbf{n} \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_n \mathbf{u}\mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_C. \quad (7.4)$$

The unknown is the displacement field $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. The symmetric stress tensor $\sigma = (\sigma_{ij})$, $i, j = 1, 2$ is linked to the displacement by Hooke's law (7.2) where $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ denotes the symmetric strain tensor. The body is subjected to volume forces $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$. Denoting by $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ the external unit normal

vector to Γ_C , we have used the following standard notation

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{n} &= \{\sigma_{ij} \mathbf{n}_j\}_{i=1}^2, \quad \sigma_n = \sigma_{ij} \mathbf{n}_j \mathbf{n}_i, \quad \sigma_\tau = \sigma \mathbf{n} - \sigma_n = \{\sigma_\tau^i\}_{i=1}^2, \\ \{A\varepsilon(\mathbf{u})\}_{ij} &= A_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \quad A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

The fourth order tensor A satisfies the ellipticity condition

$$A_{ijkl} \xi_{ji} \xi_{kl} \geq a_0 |\xi|^2, \quad \forall \xi_{ji} = \xi_{ij}, \quad a_0 > 0. \quad (7.5)$$

We use the summation convention over repeated indices.

Problem (7.1)-(7.4) is known as the frictionless Signorini problem for linear elasticity, and it models the one-sided contact of a body with a perfectly rigid foundation. It belongs to a family of unilateral contact problems encountered frequently in the engineering, physics and economics literature. It is usually formulated and solved in the framework of the theory of variational inequalities. We refer to [18, 33, 28] for the mathematical foundations of the theory and for various applications related to the study of such problems.

There have been a lot of progress in the numerical solution of such problems since the pioneering works in the 70's, see [28, 30, 32, 41] for an exhaustive bibliography. Working with linear (and quadratic) finite elements, various discrete formulations, depending on the modeling of the contact conditions ((4.4)) at discrete level, were addressed in many studies ([30, 32, 41, 23, 34, 16, 8, 5, 37, 5], ...). In particular, a priori error estimates and numerical algorithms for solving such variational inequalities have been extensively studied. In the contrary, the a posteriori analysis and adaptive strategies have not been sufficiently developed for variational inequalities, particularly for problems of Signorini type. Most of the existing studies are devoted to obstacle problems where various error estimators are studied. We refer to [21] for hierarchical estimators, [1] for the use of a dual variational principle, [22] for a penalty approach and [13] for residual error estimators. However, these estimates are only shown to be applicable to obstacle problems and most often provide only upper bounds to the energy norm of the error or require rather restrictive saturation assumption. To our knowledge, except for a recent article [20] devoted to the study and the implementation of residual error estimators for the Signorini problem in the case of the elastic membrane, the a posteriori analysis is still an open field of research for unilateral contact problems.

When the geometric domain is not smooth, the mathematical justification of problem (7.1)-(7.4) as well as its numerical solution are a source of many difficulties. As examples of such situations, we mention domains with oscillating boundaries, domains with cracks and in general those with complicate contact zone. Note also that without stability properties with respect to the geometric

domain perturbations, no approximation process of such domains could give satisfactory results. On the other hand, for problems involving moving boundaries such as shape optimization problems, most efficient and modern numerical methods are based on the following approach : the problem is extended to a large and geometrically simple domain (design region) with a fixed mesh, then a capturing shape algorithm is used. These methods works well for Dirichlet boundary value problems but are not valid for unilateral contact conditions. Thus, solving such optimization problems requires strong geometric assumptions and uses expensive numerical computations.

The fictitious domain formulation of problem (7.1)-(7.4) offers advantages in these two situations. Such fictitious domain approach, versus fictitious material method was recently introduced by [31] for smooth domains. It allows us to define a family of auxiliary problems such that their solutions approximate (in a sense to be explained later) the solution of problem (7.1)-(7.4). The auxiliary problems belong to a family of unilateral contact problems arising in crack theory for anisotropic, linear elastic bodies [31]. The boundary Γ_C defines now a crack in an elastic body in the reference domain configuration and the unilateral contact conditions become jump conditions through Γ_C describing the nonpenetration between crack faces.

The fictitious domain formulation demonstrates that problem (7.1)-(7.4) could be approximated by the auxiliary problems, but conversely, for a crack problem with a thin layer, problem (7.1)-(7.4) appears as an asymptotic limit when the thickness goes to zero.

It is our goal to study the auxiliary problems and to carry out their numerical analysis. We will prove a priori and a posteriori estimates. This will enable us to define a new adaptive strategy to study problem (7.1)-(7.4) in the case of nonsmooth domains or moving boundaries problems, and to give an efficient solution algorithm. The idea of this new algorithm is to resort to a multi-step a posteriori analysis, i.e. to consider a solution \mathbf{u}^α of an auxiliary problem, such that

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha\| \leq C(\alpha)\|\mathbf{u}^\alpha\|,$$

and to derive error indicators η_a for the auxiliary problem. A residual error indicator for problem (7.1)-(7.4) is

$$\eta = C(\alpha)\|\mathbf{u}_h^\alpha\| + \eta_a.$$

This error indicator will give us only an upper bound to the error. Nevertheless, since the constant $C(\alpha)$ is known explicitly, we can perform accurate computations for \mathbf{u} by adaptive refinement both in h and α .

The difficulties and the cost for solving numerically the auxiliary problem or the original one are comparable, nevertheless to prove residual a posteriori error

estimates, we now use a similar approach to that used for variational equalities for elliptic operators with discontinuous coefficients [11]. Employing a domain decomposition according to the two different materials in the auxiliary problem, we introduce the residual error indicators and prove that they provide both upper and lower bounds to an appropriate energy norm of the error. The adaptivity strategy follows the ideas used to handle the nonconforming domain decomposition for variational equalities [3, 4].

The outline of the paper is as follows. We introduce the fictitious method and we show its relationship with the initial problem in Section 2. In Sections 3 and 4, we describe the discretization by linear finite elements and we prove a priori error estimates. In Section 5 we perform the a posteriori analysis, we introduce the residual error indicators and prove upper and lower bounds for the error in an appropriate energy norm. The details of the implementation and some numerical results are given in Section 6.

7.2 The fictitious domain method

We assume the data $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ are in $L^2(\Omega_1)^2$ and we introduce the Sobolev space

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2 = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_1)^2; v_i = 0 \text{ on } \Gamma_D, i = 1, 2 \},$$

and the closed convex set (of admissible displacements)

$$K_1 = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_1)^2; \mathbf{v}\mathbf{n} \leq 0 \text{ a.e on } \Gamma_C \}. \quad (7.6)$$

The Signorini problem (7.1)-(7.4) can be written in the variational form

$$\begin{cases} \text{find } \mathbf{u} \in K_1 \text{ s.t,} \\ \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega_1} \mathbf{f}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in K_1. \end{cases} \quad (7.7)$$

The well-posedness of problem (7.7) is standard in the theory of elliptic variational inequalities [33], and it follows from the ellipticity of the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ which holds thanks to the Korn inequality. The boundary conditions (7.4) are satisfied by the solution of (7.7) in suitable functional spaces. We will give further details in the analysis of auxiliary problems. Note also that the solution \mathbf{u} of problem (7.7) minimizes over K_1 , the energy functional

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sigma(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_1} \mathbf{f}\mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

7.2.1 The fictitious method versus fictitious material method

Following Khludnev and al [31] we build a family of auxiliary problems which consists of a family of approximation problems (in the sense of an asymptotic analysis) to (7.1)-(7.4). Such problems are obtained by extending the domain Ω_1 to a larger domain Ω_C (by adding a fictitious domain Ω_2). The domain Ω_2 appears as a fictitious elastic material and its corresponding energy as a penalization term in the initial energy functional. The resulting problems could be interpreted as a family of unilateral crack problems for linear, nonhomogeneous elastic bodies occupying the reference configuration Ω_C . We denote by Γ_i the boundary of Ω_i , $i = 1, 2$ and Γ the external boundary of Ω_C . We denote also $\Sigma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ and we assume that Σ_0 contains the part Γ_C (i.e. Σ_0 is a curve which extends Γ_C). We denote $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \Gamma$, and we set $\Omega_C = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Sigma \setminus \bar{\Gamma}_C)$. In this case $\bar{\Gamma}_C$ appears as an internal crack in Ω_C (see Figure 1).

Next we set

$$A^\alpha = \begin{cases} A & \text{in } \Omega_1, \\ \alpha^{-1}A & \text{in } \Omega_2, \end{cases}$$

where A is the elasticity tensor and α the penalization parameter which will tend to zero. Therefore, the family of auxiliary problems will consists of finding \mathbf{u}^α , such that

$$-\mathbf{div} \sigma^\alpha = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_C, \quad (7.8)$$

$$\sigma^\alpha = A^\alpha \varepsilon^\alpha(\mathbf{u}^\alpha) \quad \text{in } \Omega_C, \quad (7.9)$$

$$\mathbf{u}^\alpha = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (7.10)$$

$$[\mathbf{u}^\alpha] \mathbf{n} \leq 0, \quad [\sigma_n^\alpha] = 0, \quad \sigma_n^\alpha [\mathbf{u}^\alpha] \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_C, \quad (7.11)$$

$$\sigma_n^\alpha \leq 0, \quad \sigma_\tau^\alpha = 0 \quad \text{on } \Gamma_C^\pm. \quad (7.12)$$

Here $[\mathbf{u}^\alpha] = \mathbf{u}^{\alpha,+} - \mathbf{u}^{\alpha,-}$ denotes the jump in the displacement field across Γ_C , and the signs \pm indicate the positive and negative directions with respect to the external normal \mathbf{n} . The definition of the previous section for $\sigma_n, \sigma_\tau, \dots$ still hold with σ^α .

As in the Signorini problem, it follows from the direct method of the calculus of variations that for any $\alpha > 0$, problem (7.8)-(7.12) admits a unique solution \mathbf{u}^α . This solution minimizes the energy functional

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_C} \sigma^\alpha(\mathbf{v}) : \varepsilon^\alpha(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_C} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

over the closed convex set

$$K_C = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H_\Gamma^1(\Omega_C)^2; [\mathbf{v}] \mathbf{n} \leq 0 \text{ a.e on } \Gamma_C \},$$

with

$$H_{\Gamma}^1(\Omega_C)^2 = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_C)^2; v_i = 0 \text{ on } \Gamma, i = 1, 2 \}.$$

It follows that \mathbf{u}^α can be characterized as the solution of the variational inequality

$$\begin{cases} \text{find } \mathbf{u}^\alpha \in K_C \text{ s.t.}, \\ \int_{\Omega_C} \sigma^\alpha(\mathbf{u}^\alpha) : \varepsilon^\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\alpha) d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega_C} \mathbf{f}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^\alpha) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in K_C. \end{cases} \quad (7.13)$$

In order to obtain error estimates which are independent of α , we will work with the norm

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\alpha,\Omega_C} = \left(\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_1)^2}^2 + \|\alpha^{-\frac{1}{2}}\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_2)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.14)$$

We will denote this norm by $\|\cdot\|_\alpha$ when the domain is the whole Ω_C . The usual energy norm is defined by

$$\|\mathbf{v}\| = \left(\sum_{\ell=1}^2 \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega_\ell)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The following convergence results are proven in [31]

Proposition 15 *Let \mathbf{u} , respectively \mathbf{u}^α , denote the solution of problem (7.7) extended by zero to Ω_2 , respectively the solution of problem (7.13), then as $\alpha \rightarrow 0$, the following convergence results hold*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\alpha &\rightharpoonup \mathbf{u} && \text{weakly in } H_{\Gamma}^1(\Omega_C), \\ \mathbf{u}^\alpha &\rightarrow \mathbf{u} && \text{strongly in } H^1(\Omega_1), \\ \alpha^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}^\alpha &\rightarrow 0 && \text{strongly in } H^1(\Omega_2). \end{aligned}$$

The equivalence between problem (7.8)-(7.12) and the variational formulation (7.13) as well as the precise mathematical meaning of the boundary, respectively the contact condition on Γ_C , requires some care. The Hilbert space $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$, ($i = 1, 2$) is defined for Lipschitz Γ_i in [27, Chap1, relation (1.16)], when Γ_i is a smooth curve, its norm is

$$\|\mathbf{v}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_i)}^2 + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y}).$$

We denote by $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ its dual. For $\sigma \in L^2(\Omega_i)$, $\text{div } \sigma \in L^2(\Omega_i)$, the traces $(\sigma \cdot \mathbf{n}_i)$ can be defined as elements of $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ where \mathbf{n}_i is the unit external normal vector to Γ_i . We denote by $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ the subspace of $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ consisting of functions vanishing \mathcal{H}^1 -a.e. on $\Gamma_i \setminus \Gamma_C$, where \mathcal{H}^1 is the one dimensional Hausdorff measure. Note that the definition of $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ does not depend on the choice of Γ_i as being the boundary of Ω_1 or Ω_2 . This space is defined for smooth Γ_C in [35, Chap1]. We

obtain, by standard arguments, the precise interpretation of conditions (7.11)-(7.12)

$$\langle \sigma^\alpha(\mathbf{u}^\alpha)^- \mathbf{n} - \sigma^\alpha(\mathbf{u}^\alpha)^+ \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C} = 0, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \quad (7.15)$$

$$\langle \sigma^\alpha(\mathbf{u}^\alpha)_n, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C} \leq 0, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \quad \varphi \geq 0, \quad (7.16)$$

$$\langle \sigma^\alpha(\mathbf{u}^\alpha)_\tau, \varphi \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C} = 0, \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \quad \varphi_i n_i = 0, \quad (7.17)$$

and

$$\langle \sigma^\alpha(\mathbf{u}^\alpha)_\nu, [\mathbf{u}^\alpha] \nu \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C} = 0, \quad \varphi_i \nu_i = 0, \quad (7.18)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C}$ denotes the duality product between $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ and its dual $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ (we will not distinguish between scalar and vector valued cases).

The equivalence of problem (7.8)-(7.12) and problem (7.13) is, now, immediate if the crack Γ_C does not intersect Γ [31]. If Γ_C intersect Γ , one has to notice that the capacity of the intersection points is equal to zero and thus the set

$$\{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u} = 0 \text{ q.e. on } \Gamma_C\} \cup \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma_C), \mathbf{u} = 0 \text{ q.e. on } \Gamma\}$$

is dense in $H^1(\Omega \setminus \Gamma_C)$. The equality *q.e.* is to be understood quasi everywhere for quasi continuous representatives (see for instance [12]).

In order to perform the a posteriori analysis for the Signorini problem (7.7), we prove now the following a posteriori estimate

Théorème 7.1 *The following estimate holds between \mathbf{u} the solution of problem (7.7) and any solution \mathbf{u}^α of problem (7.13)*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha\|_\alpha \leq C \|\mathbf{u}^\alpha\|_\alpha, \quad (7.19)$$

with a constant C independent of α .

Preuve:

Taking $\mathbf{v} = 0, 2\mathbf{u}^\alpha$, respectively $\mathbf{v} = 0, 2\mathbf{u}$, as tests functions in (7.13), respectively (7.7), we obtain

$$\int_{\Omega_C} A^\alpha \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) : \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_C} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\alpha d\mathbf{x}, \quad (7.20)$$

$$\int_{\Omega_1} A \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (7.21)$$

In this case we have $\mathbf{u} \in K_C$. We take $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ as a test function in (7.13), then we have

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_C} A^\alpha \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha) : \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega_C} (-\mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_C} A^\alpha \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega_1} (-\mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha) + \int_{\Omega_2} \mathbf{f}(\mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_1} A \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\Omega_C} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^\alpha \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_1} A \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} \quad ((7.21)) \\
&= \int_{\Omega_C} A^\alpha \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) : \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_C} A^\alpha \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x} \quad ((7.20)) \\
&= \int_{\Omega_C} A^\alpha \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}^\alpha) \, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

To obtain the final estimate we use the ellipticity of tensor A^α and the Cauchy-Schwarz inequality.

Remarque 7.1 *Note that the converse inequality which gives a complete equivalence between error indicator for the auxiliary problem and the Signorini problem is unfortunately not true. In fact, if we assume that there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\|\mathbf{u}^\alpha\|_\alpha \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha\|_\alpha,$$

then, from the definition of \mathbf{u} and the convergence results of proposition 15, we obtain

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^\alpha\|_\alpha &\leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha\|_{H^1(\Omega_1)} + \|\alpha^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}^\alpha\|_{H^1(\Omega_2)} \\
&\leq 2C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha\|_{H^1(\Omega_1)}
\end{aligned}$$

and

$$\|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^1(\Omega_1)} \leq 2C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\alpha\|_{H^1(\Omega_1)}$$

which imply that $\mathbf{u}^\alpha \rightarrow 0$ strongly in $H^1(\Omega_1)$.

7.2.2 Hybrid variational formulation for the auxiliary problems

We introduce the following spaces

$$\mathbf{V}(\Omega^\ell) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega^\ell), \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma \cap \partial\Omega^\ell\}, \quad \ell = 1, 2,$$

and the space

$$\mathbf{V} = \left(\prod_{\ell=1}^2 \mathbf{V}(\Omega^\ell) \right) \cap H^1(\Omega_C).$$

Notation We set

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (= \alpha_1) & \text{in } \Omega_1, \\ \alpha^{-1} & (= \alpha_2) & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

With this notation $\sigma^\alpha = \alpha(\mathbf{x}) \sigma$, and we can write

$$\int_{\Omega_C} \sigma^\alpha(\mathbf{u}^\alpha) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_C} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}^\alpha) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

We also introduce the Lagrange multiplier space

$$M = \left\{ \mu \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \langle \mu, \psi \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C} \geq 0, \forall \psi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \psi \geq 0 \right\}.$$

We introduce the notations : for $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_\ell)_\ell$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_\ell)_\ell$ in \mathbf{V} and μ in $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$

$$a_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} (A^\alpha)_{ijkh} \varepsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell) \varepsilon_{kh}^\ell(\mathbf{v}^\ell) \, d\mathbf{x},$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell \, d\mathbf{x},$$

and

$$b(\mu, \mathbf{v}) = \langle \mu, \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C} = \langle \mu, [\mathbf{v}] \mathbf{n} \rangle_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma_C}.$$

The hybrid variational formulation of problem (7.13) consists of finding $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ and $\lambda \in M$, such that

$$\begin{cases} a_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\lambda, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mu - \lambda, \mathbf{u}) \leq 0, & \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (7.22)$$

The existence and uniqueness of the solutions of problem (7.22) follow, in a standard way, from the ellipticity of $a_\alpha(\cdot, \cdot)$ and the usual Brezzi-Babuska inf-sup condition on $b(\cdot, \cdot)$ (see [30], III. Theorem 9.4)

Proposition 16 *Problem (7.22) admits a unique solution $(\mathbf{u}^\alpha, \lambda) \in \mathbf{V} \times M$. Moreover, we have*

$$\lambda = -(\alpha(\mathbf{x}) \sigma_{ij})^1 n_j^1 n_i^1 = -(\alpha(\mathbf{x}) \sigma_{ij})^2 n_j^2 n_i^2. \quad (7.23)$$

7.3 The discrete problem

We assume that each of the two subdomains Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$ is polygonal and the crack Γ_C is a straight line. More general cases require additional and inessential technicalities that we avoid for simplicity. We consider two regular families $(\mathcal{T}_h^\ell)_h$ of partitions of Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$, into a finite number of triangles which satisfy the usual admissibility conditions [14]: any two elements share at most a vertex, or a whole edge. In addition we assume that the ratio of the diameter of any element $K \in \mathcal{T}_h^\ell$ to the diameter of its largest inscribed ball is bounded by a constant τ independent of K . We denote by $h_\ell = \max_{K \in \mathcal{T}_h^\ell} h_K$ the discretization parameter on Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$, and $h = \max(h_1, h_2)$. We also assume that the endpoints of Γ_C , \mathbf{x}_1 and \mathbf{x}_2 are common vertices of the triangulations \mathcal{T}_h^1 and \mathcal{T}_h^2 , and the traces of the triangulations \mathcal{T}_h^1 and \mathcal{T}_h^2 on Γ_C are monodimensional triangulations that we denote by $\mathcal{T}_{h,\Gamma_C}^\ell$, $\ell = 1, 2$. The set of vertices of $\mathcal{T}_{h,\Gamma_C}^\ell$, $\ell = 1, 2$ denoted by

$$\zeta_h^\ell = \{ \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0^\ell, \mathbf{x}_1^\ell, \dots, \mathbf{x}_{m_\ell}^\ell = \mathbf{x}_2 \},$$

and their elements are $t_i^\ell =]\mathbf{x}_i^\ell, \mathbf{x}_{i+1}^\ell[$, $0 \leq i \leq m_\ell - 1$.

We consider the finite element spaces

$$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v}_h^\ell \in \mathcal{C}(\overline{\Omega^\ell}), \forall K \in \mathcal{T}_h^\ell \mathbf{v}_h^\ell|_K \in \mathcal{P}_1(K)^2, \mathbf{v}_h^\ell = 0 \text{ on } \Gamma \right\},$$

and

$$\mathbf{V}_h = (\mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2)) \cap H^1(\Omega_C),$$

note that $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$.

Remarque 7.2 *The choice of the internal approximation of \mathbf{V} requires the compatibility of the meshes \mathcal{T}_h^ℓ , $\ell = 1, 2$ except on Γ_C and is made for simplicity, in order to focus on the discretization of contact conditions. A more general setting where the two meshes does not match along $\partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2$ could be easily considered by the mortar element method. Indeed, in addition to the discrete counterpart of contact conditions, we have to write the mortar matching condition on $(\partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2) \setminus \Gamma_C$.*

For the approximation of the Lagrange multipliers, we introduce the space

$$\begin{aligned} W_h^{1,\ell}(\Gamma_C) &= \left\{ \mu_h \in \mathcal{C}(\overline{\Gamma_C}), \exists \mathbf{v}_h^\ell \in \mathbf{V}_h(\Omega^\ell) \text{ such that } \mathbf{v}_h^\ell \cdot \mathbf{n}^\ell = \mu_h \text{ on } \Gamma_C \right\}, \\ &= \left\{ \mu_h \in \mathcal{C}(\overline{\Gamma_C}), \mu_h|_{t_i} \in \mathbb{P}_1(t_i), 1 \leq i \leq m_\ell - 2 \right. \\ &\quad \left. \mu_h|_{t_0} \in \mathbb{P}_0(t_0), \mu_h|_{t_{m_\ell-1}} \in \mathbb{P}_0(t_{m_\ell-1}) \right\}, \end{aligned}$$

and the discrete convex cones

$$M_h^{1,\ell} = \left\{ \mu_h \in W_h^{1,\ell}(\Gamma_C), \mu_h \geq 0 \text{ on } \Gamma_C \right\},$$

$$M_h^{1,\ell,*} = \left\{ \mu_h \in W_h^{1,\ell}(\Gamma_C), \int_{\Gamma_C} \mu_h \psi_h \geq 0 \quad \forall \psi_h \in M_h^{1,\ell} \right\}.$$

These two convex cones are commonly used to express the jump conditions on the contact zone. The choice of one is linked to the way one selects to enforce the nonnegativity conditions (either on the displacement field or on the normal component of the stress tensor). Note that $M_h^{1,\ell} \subset M$, $M_h^{1,\ell} \subset M_h^{1,\ell,*}$ and $M_h^{1,\ell,*} \not\subset M$. We set $M_h = M_h^{1,\ell}$ or $M_h^{1,\ell,*}$, $\ell = 1, 2$, the discrete problems are

$$\begin{cases} a_\alpha(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\lambda_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mu_h - \lambda_h, \mu_h) \leq 0, & \forall \mu_h \in M_h \end{cases} \quad (7.24)$$

The \mathbf{V}_h -ellipticity of the bilinear form holds thanks to the Korn inequality, still valid in the case of unilateral contact cracks. It is also readily checked that

$$\{\mu_h \in M_h, \quad b(\mu_h, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h\} = \{0\},$$

Therefore, the next proposition follows from standard saddle-point theory in the finite dimensional setting

Proposition 17 *With $M_h = M_h^{1,\ell}$, or $M_h^{1,\ell,*}$, $\ell = 1, 2$, there exists a unique solution $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ of the discrete problem (7.24).*

In order to obtain optimal approximation properties, we need the bilinear form $b(.,.)$ to satisfy a uniform inf-sup condition (wrt to h). This condition requires some assumptions on the triangulations on Γ_C . The simplest and sufficient one is the quasi-uniformity, however, we do not make this assumption which is too stringent especially for adaptive mesh refinement which is one of the objectives of this work. Instead, we will make the following assumption : the 1D triangulations $\mathcal{T}_{h,\Gamma_C}^\ell$, $\ell = 1, 2$, satisfy the Crouzeix-Thomée criterion [17]

$$\frac{|t_i^\ell|}{|t_j^\ell|} \leq C\beta^{|i-j|}, \quad \forall i, j \quad (0 \leq i, j \leq m_\ell - 1), \quad (7.25)$$

where $1 \leq \beta \leq 4$.

We recall some approximation tools which will be used in the following analysis. Let I_h^ℓ and i_h^ℓ , $1 \leq \ell \leq L$, be the Lagrange interpolation operators with values in $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$ ($1 \leq \ell \leq L$) and $W_h^{1,\ell}(\Gamma_C)$ ($\ell = 1, 2$) respectively. There exists a constant $C > 0$, such that $\forall \mathbf{v}^\ell \in (H^2(\Omega^\ell))^2$ and $v \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_C)$ ([14]) the following estimates hold

$$\|\mathbf{v}^\ell - I_h^\ell \mathbf{v}^\ell\| \leq Ch \|\mathbf{v}^\ell\|_{(H^2(\Omega^\ell))^2} \quad \text{and} \quad \|v - i_h^\ell v\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq Ch^{\frac{3}{2}} \|v\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_C)}. \quad (7.26)$$

We define the projection operator $\pi_h^1 : L^2(\Gamma_C) \mapsto W_h^{1,\ell}(\Gamma_C)$, with respect to the scalar product in $L^2(\Gamma_C)$, which satisfies the following properties (see [10], [8]).

Given $\mu \in [0, 1]$ and $\nu \in]\frac{1}{2}, 2]$, there exists a constant $c > 0$ which is independent of h , such that for all functions $\varphi \in H^\nu(\Gamma_C)$,

$$\|\varphi - \pi_h^1 \varphi\|_{H^{-\mu}(\Gamma_C)} + h^{\mu+\frac{1}{2}} \|\varphi - \pi_h^1 \varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \leq ch^{\mu+\nu} \|\varphi\|_{H^\nu(\Gamma_C)}. \quad (7.27)$$

Proposition 18 *Under the assumption (7.25) on the triangulation $\mathcal{T}_{h,\Gamma_C}^\ell$, $\ell = 1$ or 2 , the following inf-sup condition holds*

$$\inf_{\mu_h \in W_h^{1,\ell}} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mu_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \|\mathbf{v}_h\|_\alpha} \geq \gamma \alpha, \quad (7.28)$$

the constant γ is independent of h and α .

Preuve: Let $\mu_h \in W_h^{1,\ell}(\Gamma_C)$. We want to build $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ satisfying

$$b(\mu_h, \mathbf{v}_h) \geq c_1(\alpha) \|\mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)}^2 \quad \text{and} \quad c_2(\alpha) \|\mathbf{v}_h\|_\alpha \leq \|\mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)}, \quad (7.29)$$

where $c_\ell(\alpha)$, $\ell = 1, 2$ are constants depending, on α but not on h . Let us consider \mathbf{v} , the solution of the problem

$$\begin{cases} \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{v} = 0, & \text{in } \Omega_C \\ \alpha(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \Gamma \\ \alpha(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^\pm = \pm \mu_h \mathbf{n}^\pm, & \text{on } \Gamma_C, \end{cases}$$

The existence of such a \mathbf{v} comes from the direct method of the calculus of variations. It is clear that \mathbf{v} is also the solution of the equivalent variational problem

$$\int_{\Omega_C} \alpha(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = b(\mu_h, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in H^1(\Omega_C),$$

and satisfies, by the usual stability inequality and the continuous inf-sup condition on $b(\cdot, \cdot)$,

$$c^- \alpha^{\frac{1}{2}} \|\mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \leq \|\mathbf{v}\|_\alpha \leq c^+ \|\mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)}, \quad (7.30)$$

where c^+ and c^- are constants independent of h and α .

We set $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ such that $[\mathbf{v}_h|_{\Gamma_C} \mathbf{n}] = \pi_h^1([\mathbf{v}|_{\Gamma_C} \mathbf{n}])$ and

$$\|\mathbf{v}_h\|_\alpha \leq c \alpha^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1(\Omega_C)} \leq c \alpha^{-\frac{1}{2}} \|\pi_h^1[\mathbf{v}|_{\Gamma_C} \mathbf{n}]\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \leq c \alpha^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}|_{\Gamma_C} \mathbf{n}\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)}. \quad (7.31)$$

Such a \mathbf{v}_h is built using a stable finite element extension operators similar to the standard local regularization operator studied in [9]. Next, we note that

$$b(\mu_h, \mathbf{v}_h) = b(\mu_h, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_\alpha^2 \geq (c^-)^2 \alpha \|\mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)}^2,$$

and thanks to (7.30)-(7.31) and the trace theorem we have the second statement of (7.29). The discrete Lagrange multiplier space can also be defined with piecewise constants instead of the monodimensional affine finite elements

$$W_h^{0,\ell} = \left\{ \mu_h, \mu_{h|t_i^\ell} \in \mathcal{P}_0(t_i^\ell), 0 \leq i \leq m_\ell - 1 \right\},$$

which yields the discrete convex cone

$$M_h^{0,\ell} = \left\{ \mu_h \in W_h^{0,\ell}, \mu_h \geq 0 \right\}.$$

We have $M_h^{0,\ell} \subset M$ and the resulting discrete problem also admits a unique solution $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$. However, this choice in our case leads to no optimal approximation properties because of the presence of spurious modes. Following [8], we use, in this case, a stabilization technique by adding two bubble functions

$$\varphi_{t_i^\ell}(\mathbf{x}) = \frac{6}{|t_i^\ell|} \lambda_1(\mathbf{x}) \lambda_2(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in K_i, \quad i = 0, m_\ell - 1,$$

where K_i , is the triangle having t_i^ℓ , $i = 0$ or $m_\ell - 1$ as an edge and λ_1, λ_2 the barycentric coordinates associated to the vertices of t_i^ℓ . We then replace \mathbf{V}_h by

$$\tilde{\mathbf{V}}_h = \mathbf{V}_h \oplus \left(\bigoplus_{t_i^\ell \in \mathcal{T}_{h,\Gamma_C}^\ell} \mathbb{R} \varphi_{t_i^\ell} \right).$$

We denote by π_h^0 the L^2 -projection operator $L^2(\Gamma_C) \longrightarrow W_h^{0,\ell}(\Gamma_C)$, defined as follows :

$$\int_{\Gamma_C} v \psi_h d\sigma = \int_{\Gamma_C} \pi_h^0(v) \psi_h d\sigma, \quad \forall \psi_h \in W_h^{0,\ell}(\Gamma_C), \quad (7.32)$$

where π_h^0 satisfies the following estimates (see [36]). Namely, for the functions $\varphi \in H^\nu(\Gamma_C)$, with $\nu = \frac{1}{2}$, or with $\nu = 1$, there exists a constant $c > 0$ independent of h such that

$$\|\varphi - \pi_h^0 \varphi\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq ch^\nu \|\varphi\|_{H^\nu(\Gamma_C)}. \quad (7.33)$$

Moreover, if $\varphi \in L^2(\Gamma_C)$, then

$$\|\varphi - \pi_h^0 \varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \leq ch^{\frac{1}{2}} \|\varphi - \pi_h^0 \varphi\|_{L^2(\Gamma_C)}. \quad (7.34)$$

The uniform inf-sup is obtained similarly to proposition 18

Proposition 19 *Under the assumption (7.25) on the triangulation $\mathcal{T}_{h,\Gamma_C}^\ell$, $\ell = 1$ or 2 , the following inf-sup condition holds*

$$\inf_{\mu_h \in W_h^{0,\ell}} \sup_{\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h} \frac{b(\mu_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \|\mathbf{v}_h\|_\alpha} \geq \gamma \alpha > 0, \quad (7.35)$$

where the constant γ is independent of h or α .

7.4 A priori analysis

The convergence analysis and the a priori error estimates come under the standard approximation theory for unilateral contact problems [23, 30, 16, 34, 8, 7, 37]. For the specific case of unilateral cracks we refer the reader to [38, 6, 39]. We give a brief summary of such an analysis. We start with the following lemma, skipping the proof which consists in standard computations

Lemme 7.1 *Let $(\mathbf{u}^\alpha, \lambda)$ be the solution of problem (7.22) and $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ the solution of problem (7.24). Then the following estimate holds : for any $(\mathbf{v}_h, \mu_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$,*

$$a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha) \leq c(a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{v}_h) + b(\lambda - \mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha) + b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{v}_h) + b(\lambda - \mu_h, \mathbf{u}^\alpha) + b(\lambda_h, \mathbf{u}^\alpha)). \quad (7.36)$$

Lemme 7.2 *Let $(\mathbf{u}^\alpha, \lambda)$ be the solution of problem (7.22). Assume that $\mathbf{u}_{|\Omega^\ell}^\alpha \in H^2(\Omega^\ell)$, $\ell = 1, 2$. Let $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ is the solution of problem (7.24) with $M_h = M_h^{1, \ell, *}$ or $M_h = M_h^{\ell, 0}$, the following estimate holds*

$$\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha \leq C \left(\left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell^{\frac{1}{2}} h_\ell \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2} \right\} \|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell^{\frac{1}{2}} h_\ell^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2} \right\} \right). \quad (7.37)$$

Preuve: The proof is similar for the two cases so we only consider the case $M_h = M_h^{1, \ell, *}$. Invoking Lemma 7.2 and the ellipticity of a_α , it is clear that we have to bound each term at the right-hand side of (7.36). We set $\mathbf{v}_h = (I_h^1 \mathbf{u}^\alpha, I_h^2 \mathbf{u}^\alpha)$ and $\mu_h = \pi_h^1 \lambda$, and we use the approximation properties (7.26)-(7.27) and the trace theorem to obtain

i)

$$\begin{aligned} a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{v}_h^\alpha) &\leq C \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{v}_h^\alpha\|_{H^1(\Omega^\ell)^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} b(\lambda - \mu_h, \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha) &\leq C \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha \|\lambda - \mu_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \\ &\leq C \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

iii)

$$b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{v}_h^\alpha) \leq C \|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

iv)

$$\begin{aligned} b(\lambda - \mu_h, \mathbf{u}^\alpha) &= \int_{\Gamma_C} (\lambda - \mu_h) [\mathbf{u}^\alpha \cdot \boldsymbol{\nu}] \, d\tau \\ &= \int_{\Gamma_C} (\lambda - \mu_h) ([\mathbf{u}^\alpha \cdot \boldsymbol{\nu}] - \pi_h^1([\mathbf{u}^\alpha \cdot \boldsymbol{\nu}])) \, d\tau \\ &\leq C \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} b(\lambda_h, \mathbf{u}^\alpha) &= \int_{\Gamma_C} \lambda_h [\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] \, d\tau \\ &= \int_{\Gamma_C} \lambda_h ([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] - i_h^\ell([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}])) \, d\tau \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \lambda_h i_h^\ell([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}]) \, d\tau \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_h ([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] - i_h^\ell([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}])) \, d\tau \\ &\leq \int_{\Gamma_C} (\lambda_h - \lambda) ([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] - i_h^\ell([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}])) \, d\tau \\ &\leq + \int_{\Gamma_C} \lambda ([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] - i_h^\ell([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}])) \, d\tau \\ &\leq C \|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)} \|[\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] - i_h^\ell([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}])\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \\ &\quad + \|\lambda\|_{L^2(\Gamma_C)} \|[\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] - i_h^\ell([\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}])\|_{L^2(\Gamma_C)} \\ &\leq C \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^3 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha^2 &\leq C \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} + \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^3 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

using the inequality $ab \leq \gamma a^2 + \frac{1}{4\gamma} b^2$ with small $\gamma > 0$ for the second term in the right-hand side of the above inequality yields the result.

Remarque 7.3 1. In the case of an isotropic material, we retrieve the expected rate of convergence of $O(h^{\frac{3}{4}})$ (see [6]).

2. The case $M_h = M_h^{1,\ell}$ yields the rate of convergence $O(\alpha^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}})$ by adapting the argument of [8].

Lemme 7.3 Under the same assumptions as in the previous lemma, the following estimate holds

$$\alpha \|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \leq C \left(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right). \quad (7.38)$$

Preuve: The proof is similar for the case $M_h = M_h^{\ell,0}$ and for $M_h = M_h^{1,\ell,*}$ or $M_h = M_h^{1,\ell}$. Only the projection operator π_h^1 must be changed in the following proof where we take $M_h = M_h^{1,\ell,*}$ or $M_h = M_h^{1,\ell}$. Since $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$, choosing $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ as a test function and subtracting the two first lines of problems (7.22) and (7.24), we obtain

$$a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{v}_h) + b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{v}_h) = 0.$$

Next, we have

$$\begin{aligned} b(\lambda_h - \pi_h^1 \lambda, \mathbf{v}_h) &= a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{v}_h) + b(\lambda - \pi_h^1 \lambda, \mathbf{v}_h) \\ &\leq C \left(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha \|\mathbf{v}_h\|_\alpha + \left(\left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \|\mathbf{v}_h\|_\alpha \right). \end{aligned}$$

Using the inf-sup condition (7.28) we obtain

$$\begin{aligned} \alpha \|\lambda_h - \pi_h^1(\lambda)\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} &\leq C \frac{b(\lambda_h - \pi_h^1 \lambda, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_\alpha} \\ &\leq C \left(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell h_\ell^2 \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Combining this with the triangle inequality

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \leq \|\lambda - \pi_h^1 \lambda\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} + \|\lambda_h - \pi_h^1 \lambda\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)},$$

yields the estimate (7.38)

Remarque 7.4 *The choice of the multiplier spaces yield the same result in each case. However, in the case of smooth solutions, namely $\lambda \in H^s(\Gamma_C)$, $s > \frac{1}{2}$ the approximation order for $M_h^{\ell,0}$ does not change while it increases for the other choices.*

Assembling the estimates of the two previous lemmas, we deduce

Théorème 7.2 *Let $(\mathbf{u}^\alpha, \lambda)$ be the solution of problem (7.22). Assume that $\mathbf{u}_{|\Omega^\ell}^\alpha \in H^2(\Omega^\ell)$, $\ell = 1, 2$. Let $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ be the solution of problem (7.24) with $M_h = M_h^{\ell,*}$ or $M_h = M_h^0$, the following estimate holds*

$$\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \alpha \|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \leq C \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell^{\frac{1}{2}} h_\ell^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}^\alpha\|_{H^2(\Omega^\ell)^2} \right\}. \quad (7.39)$$

7.5 A posteriori analysis

For the a posteriori error estimates we assume that $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ and we fix \mathbf{f}_h a finite element approximation of it associated with \mathcal{T}_h . Given $K \in \mathcal{T}_h^\ell$, we denote by \mathcal{E}_K the set of its edges not contained in the boundary $\partial\Omega^\ell$, $\ell = 1, 2$. The union of all \mathcal{E}_K , $K \in \mathcal{T}_h^\ell$ is denoted by $\mathcal{E}_{h,\ell}$ and the union of $\mathcal{E}_{h,\ell}$, $\ell = 1, 2$ will be denoted \mathcal{E}_h . We denote by $\mathcal{E}_{h,\ell,\Gamma_C}$ the set of edges of \mathcal{T}_h^ℓ which are contained in Γ_C and we set $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C} = \mathcal{E}_{h,\ell,\Gamma_C}$, $\ell = 1$ or 2 with the same choice of ℓ than for M_h . With each edge $e \in \mathcal{E}_h$ or $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}$ we associate a unit vector \mathbf{n}_e normal to e and we denote by $[\varphi]_e$ the jump of the piecewise continuous (vector valued) function φ across e in the direction \mathbf{n}_e . For each $K \in \mathcal{T}_h$ we denote by h_K the diameter of K and we denote by h_e the diameter of e , $e \in \mathcal{E}_K$.

We define two kinds of residual error indicators

- Error indicator for the elements of the mesh. For each element $K \in \mathcal{T}_h$, we set

$$\eta_K = h_K \|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(K)^2} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \mathbf{n}_e]_e\|_{L^2(e)^2}. \quad (7.40)$$

- Error indicators for the edges on the contact zone. For each $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}$, we set

$$\eta_e = h_e^{-\frac{1}{2}} \|[\mathbf{u}_h^\alpha \mathbf{n}_e]_e\|_{L^2(e)^2}, \quad (7.41)$$

and

$$\eta_{C,e} = h_e^{\frac{1}{2}} \|\beta_e \lambda_h + \mathbf{n}_e \cdot (\alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}, \quad (7.42)$$

with $\beta_e = 1$ if $M_h = M_h^0$ or $M_h^{1,\ell}$ and $\beta_e = 0$ if $M_h = M_h^{1,\ell,*}$.

Remarque 7.5 *The error indicator η_K is the standard one for an anisotropic material in linear elasticity [40]. The error indicator η_e is mainly due to the nonconformity of the method. The last error indicator is specific to the contact condition it could be expressed in η_K -in this case it looks like a Neumann condition on Γ_C - but for the clarity and ease of implementation we define it separately.*

7.5.1 An upper bound for the error

To derive the upper bound of the error we will proceed in two steps/ The first one deals with the conforming case $M_h \subset M$ where we extend a Verfürh's trick [40] to the variational inequalities framework. The second step concerns the nonconforming case $M_h = M_h^{1,\ell,*}$, we establish the upper bound directly. The main difference between these two steps is that in the first case we do not need the discrete inf-sup condition.

– **First step** $M_h = M_h^0$ or $M_h = M_h^{1,\ell}$: We set

$$A_\alpha(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{v}) + b(\lambda, \mathbf{v}) - b(\mu, \mathbf{u}^\alpha),$$

where $\mathbf{U} = (\mathbf{u}^\alpha, \lambda)$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, \mu)$ belongs to the convex cone $\mathcal{K} = \mathbf{V} \times M$. It is readily checked that $\mathbf{U} = (\mathbf{u}^\alpha, \lambda) \in \mathcal{K}$ is the solution of the variational inequality

$$A_\alpha(\mathbf{U}, \mathbf{V} - \mathbf{U}) \geq L(\mathbf{V} - \mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{K}, \quad (7.43)$$

where $L(\mathbf{V}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)$. For brevity we will denote

$$\|\mathbf{U}\|_\alpha = \|\mathbf{u}^\alpha\|_\alpha + \|\lambda\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)}.$$

The proof of the following global inf-sup condition follows from the ellipticity of $a_\alpha(\cdot, \cdot)$, the continuous inf sup-condition on $b(\cdot, \cdot)$ and [[27], I, Lemma 4.1] (see [38])

Lemme 7.4 *There exists a constant $C > 0$ independent of h and α such that*

$$C \|\mathbf{U}\|_\alpha \leq \sup_{\mathbf{V} \in \mathcal{W}} \frac{A_\alpha(\mathbf{U}, \mathbf{V})}{\|\mathbf{V}\|_\alpha} \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{K}, \quad (7.44)$$

where $\mathcal{W} = \{\mathbf{V} \in \mathcal{K}, -\mathbf{V} \in \mathcal{K}\}$.

Let $\mathcal{K}_h = \mathbf{V}_h \times M_h \subset \mathcal{K}$. We set $\mathbf{E} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_h$, $\mathbf{U} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{U}_h^\alpha \in \mathcal{K}_h$, then

$$A_\alpha(\mathbf{E}, \mathbf{E} - \mathbf{V}) \leq L(\mathbf{E} - \mathbf{V}) - A_\alpha(\mathbf{U}_h, \mathbf{E} - \mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{K}.$$

We define the residue R_h by

$$\langle R_h, \mathbf{E} - \mathbf{V} \rangle = L(\mathbf{E} - \mathbf{V}) - A_\alpha(\mathbf{U}_h, \mathbf{E} - \mathbf{V}).$$

Let $\mathbf{W} = \mathbf{E} - \mathbf{V} = (\mathbf{w}, \mu) \in \mathcal{K}$, we can write

$$\langle R_h, \mathbf{W} \rangle = \int_{\Omega_C} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_C} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) : \varepsilon(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} - b(\lambda_h, \mathbf{w}) + b(\mu, \mathbf{u}_h).$$

We set $\mathbf{w} = \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha$ and $\mu = \lambda - \lambda_h$. Let $\mathbf{W}_h = (\mathbf{w}_h, \mu_h) \in \mathcal{K}_h$. We have

$$\begin{aligned} \langle R_h, \mathbf{W} - \mathbf{W}_h \rangle &= L(\mathbf{W} - \mathbf{W}_h) - A_\alpha(\mathbf{U}_h^\alpha, \mathbf{W} - \mathbf{W}_h) \\ &= \int_{\Omega_C} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) - \int_{\Omega_C} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) : \varepsilon(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - b(\lambda_h, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) + b(\mu - \mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \right) \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e \mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\tau - b(\lambda_h, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) + b(\mu - \mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha) \end{aligned}$$

We distinguish between two cases. If $e \notin \Gamma_C$ then

$$\int_e [\mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h)] \, d\tau = \int_e [\mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\tau.$$

If $e \in \Gamma_C$ then

$$\begin{aligned} \int_e [\mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h)] \, d\tau &= \int_e [\mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\tau + \\ &\quad \int_e \mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) [\mathbf{w} - \mathbf{w}_h] \, d\tau. \end{aligned}$$

Choosing \mathbf{w}_h as a conforming approximation of \mathbf{w} , i.e. $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h \cap H_0^1(\Omega)^2$ (the construction of such a \mathbf{w}_h is not obvious, it will be described later), yields

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \|\lambda - \lambda_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))} \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(K)^2} \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)^2}}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \\ &+ \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)^2} \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)^2}}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|\mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(e)^2} \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(e)^2}}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \\ &- \sum_{e \in \mathcal{E}_h \Gamma_C} \frac{(\int_e (\lambda_h + \mathbf{n}_e \cdot \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e) [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e] \, d\tau)}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} + \frac{1}{\|\mu\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))}} (b(\mu - \mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha)). \end{aligned} \tag{7.45}$$

- **Second step** $M_h = M_h^{1,\ell,*}$: We deduce from the ellipticity of $a_\alpha(\cdot, \cdot)$ on \mathbf{V} that

$$\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha^2 \leq C a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha). \quad (7.46)$$

Since $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$, choosing $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ in the first equation of (7.22) and subtracting the first equation of (7.24), we obtain

$$a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{v}_h) + b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (7.47)$$

We set $\mathbf{w} = \mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha$, and we fix an approximation \mathbf{w}_h of \mathbf{w} in \mathbf{V}_h , then we deduce from (7.46) and (7.47) that

$$\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha^2 \leq C (a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) - b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{w}_h)).$$

Integrating by parts, inserting \mathbf{f}_h and considering separately the cases where $e \in \mathcal{E}_K$ belongs to Γ_C or not, yields

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha^2 &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} \right. \right. \\ &- \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\tau - \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot [\mathbf{w} - \mathbf{w}_h] \, d\tau \\ &\left. \left. - b(\lambda, \mathbf{w} - \mathbf{w}_h) - b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{w}_h) \right). \quad (7.48) \end{aligned}$$

Choosing \mathbf{w}_h as a conforming approximation of \mathbf{w} (see first step) yields

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha^2 &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} \right. \right. \\ &+ \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \, d\tau \\ &\left. \left. - \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e] \, d\tau - b(\lambda, \mathbf{w}) \right). \quad (7.49) \end{aligned}$$

Note that

$$b(\lambda, \mathbf{w}) = b(\lambda, \mathbf{u}_h^\alpha) = b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{u}_h^\alpha).$$

Moreover, for each $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}$

$$\begin{aligned} \int_e (\lambda - \lambda_h) [\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}] \, d\tau &\leq \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(e)} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}\|_{H^{\frac{1}{2}}(e)} \\ &\leq C \|\lambda - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(e)} (h_e^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)}), \end{aligned}$$

summing up for all $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}$ and taking the square root, we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e (\lambda - \lambda_h) [\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}] d\tau)^{\frac{1}{2}} &\leq C \|\lambda - \lambda_h\|_{H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \\ &\left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} h_e^{-1} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Next, invoking the inf-sup condition and (7.47), we have

$$\begin{aligned} \alpha \|\lambda_h - \mu_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}})(\Gamma_C)} &\leq \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\lambda_h - \mu_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_\alpha} \\ &\leq \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\lambda_h - \lambda, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_\alpha} + \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\lambda - \mu_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_\alpha} \\ &\leq \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a_\alpha(\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_\alpha} + \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\lambda - \mu_h, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_\alpha} \\ &\leq C \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + C' \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}})(\Gamma_C)}. \end{aligned}$$

Using the triangle inequality

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}})(\Gamma_C)} \leq \|\lambda_h - \mu_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}})(\Gamma_C)} + \|\lambda - \mu_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}})(\Gamma_C)}$$

and combining with (7.48), we obtain

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha (\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \alpha \|\lambda - \lambda_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}})(\Gamma_C)}) &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) dx \right. \right. \\ &+ \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) dx - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) d\tau \\ &\left. \left. - \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) [\mathbf{w}] d\tau - b(\lambda - \lambda_h, \mathbf{u}_h^\alpha) \right). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Using (7.50), this gives

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(K)})^2 \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)}}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \right. \\ &+ \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}^2 \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)}^2}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(e)}^2 \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(e)}^2}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \\ &\left. - \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) [\mathbf{w}] d\tau}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \right) \\ &+ C' \alpha^{-1} \left(\left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} h_e^{-1} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}})(\Gamma_C)} \right). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Finally, we obtain the abstract upper bound in the nonconforming case

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \alpha \|\lambda - \lambda_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(K)})^2 \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)}}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \right. \\
& + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}^2 \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(K)}^2}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \left\| [\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \right\|_{L^2(e)}^2 \frac{\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_{L^2(e)}^2}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \\
& \quad \left. - \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) [\mathbf{w}] \, d\tau}{\|\mathbf{w}\|_\alpha} \right) \\
& + C' \alpha^{-1} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} h_e^{-1} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))}. \quad (7.53)
\end{aligned}$$

For any $K \in \mathcal{T}_h$, we denote by Δ_K , resp. Δ_e , the union of all elements that share at least one vertex, resp. one edge, with K . We denote by \mathcal{N}_h , \mathcal{N}_K , and N_e , the set of all vertices of elements of \mathcal{T}_h , $\ell = 1, 2$, of a given element K , and of a given edge e , respectively. With each vertex z we associate the corresponding unique continuous, piecewise affine function that takes the value 1 at z and vanishes at all other vertices. We denote by $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^-$ the set \mathcal{E}_{h,Γ_C} (recall that it coincides with $\mathcal{E}_{h,\ell,\Gamma_C}$ when ℓ is such that $M_h = M_h^{1,\ell}$ or $M_h = M_h^{1,\ell,*}$) and $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^+ = \mathcal{E}_{h,3-\ell,\Gamma_C}$. We denote also N_C^- and N_C^+ the set of the vertices which are endpoints of $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^-$ and $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^+$ respectively. We need the following assumption (see figure), which allows to handle the adaptivity with nonconforming meshes. Each element of $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^-$ is the union of a finite number of whole elements of $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^+$. This number is independent of h . This assumption is easy to satisfy in the practical implementation of the adaptive strategy. The following proposition is proved in the Appendix

Lemma 7.5 *There exists an operator R_h from \mathbf{V} into $\mathbf{V}_h \cap H_0^1(\Omega)^2$, and a constant $C > 0$ depending only on the shape parameter of \mathcal{T}_h , such that : for any $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, every element K and every edge e of K , the following estimates hold*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v} - R_h \mathbf{v}\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K \alpha_K^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{1,\alpha,\Delta_K}, \\
\|\mathbf{v} - R_h \mathbf{v}\|_{L^2(e)} &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \alpha_e^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{1,\alpha,\Delta_e}.
\end{aligned} \quad (7.54)$$

Lemma 7.6 *The following inequality holds*

$$\begin{aligned}
& \int_e (\beta_e \lambda_h + (\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e)) [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e] \, d\tau \leq \\
& Ch_e^{\frac{1}{2}} \alpha_e^{-\frac{1}{2}} \|(\beta_e \lambda_h + (\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e))\|_{L^2(e)} \sum_{K \in \mathcal{K}_e} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_{1,\alpha,K}, \quad (7.55)
\end{aligned}$$

where \mathcal{K}_e denotes the union of elements K sharing the edge e and $\beta_e = 0$ if $M_h = M_h^{1,\ell,*}$ and $= 1$ otherwise.

Preuve: We have

$$\int_e (\beta_e \lambda_h + \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e) [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e] d\tau \leq \|\beta_e \lambda_h + \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e\|_{H^{-\frac{1}{2}}(e)} \|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e\|_{H^{\frac{1}{2}}(e)}.$$

Using the inverse inequality [14], we get

$$\begin{aligned} \int_e (\beta_e \lambda_h + \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e) [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e] d\tau &\leq C h_e^{\frac{1}{2}} \|(\beta_e \lambda_h + \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e)\|_{L^2(e)} \sum_{K \in \mathcal{K}_e} \|\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial K)} \\ &\leq C h_e^{\frac{1}{2}} \alpha_e^{-\frac{1}{2}} \|(\beta_e \lambda_h + \mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e)\|_{L^2(e)} \sum_{K \in \mathcal{K}_e} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_{1,\alpha,K}. \end{aligned}$$

Lemme 7.7 *We have*

$$\frac{b(\mu - \mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha)}{\|\mu\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))'}} \leq C \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \eta_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.56)$$

Preuve: For each $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}$ we have

$$\int_e (\mu - \mu_h) [\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e] d\tau \leq \|\mu - \mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(e)} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\|_{H^{\frac{1}{2}}(e)},$$

and using an inverse inequality [14], we note that

$$\|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\|_{H^{\frac{1}{2}}(e)} \leq h_e^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}.$$

Extending the operator π_h^1 , respectively π_h^0 , to $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$, we have

$$\|\mu - \mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(e)} \leq c \|\mu - \mu_h\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))'} \leq c \|\mu\|_{(H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C))'}$$

Summing up for all $e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}$ yields the result. Finally, choosing $\mathbf{w}_h = R_h(\mathbf{w}) \in \mathbf{V} \cap H^1(\Omega)^2$ in (7.45) and (7.53), using Lemma 7.5, Lemma 7.6 and Lemma 7.7 yield the upper bound of the error

Théorème 7.3 *If Assumption 1 is satisfied, there exists a constant C independent of h and α , such that if $M_h = M_h^{0,\ell}$ or $M_h^{1,\ell}$*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \|\lambda - \lambda_h\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))'} &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega_C)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} (\eta_e^2 + \eta_{C,e}^2) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.57) \end{aligned}$$

If $M_h = M_h^{1,,\ell}$*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \alpha \|\lambda - \lambda_h\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))'} &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega_C)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} (\eta_e^2 + \eta_{C,e}^2) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.58) \end{aligned}$$

7.5.2 An upper bound for the indicators

In order to bound the indicators η_K , η_e and $\eta_{C,e}$, we set $E = (e_{\mathbf{u}}, e_\lambda) = (\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha, \lambda - \lambda_h)$, then we take a test function $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ and compute

$$\begin{aligned}
a_\alpha(e_{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) + b(e_\lambda, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega_C} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(e_{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\mathbf{w}) \, d\mathbf{x} + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e e_\lambda [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e] \, d\tau \\
&= (\mathbf{f}, \mathbf{w}) - a_\alpha(\mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{w}) - b(\lambda_h, \mathbf{w}) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \mathbf{n}_e \cdot (\alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \right) - b(\lambda_h, \mathbf{w}) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e [\mathbf{n}_e \cdot (\alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha))] \cdot \mathbf{w} \, d\tau - \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \int_e (\alpha \sigma_n(\mathbf{u}_h^\alpha) + \lambda_h) [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_e] \, d\tau. \quad (7.59)
\end{aligned}$$

We will obtain the desired estimates by appropriate choices of \mathbf{w} . With each $K \in \mathcal{T}_h$, we associate the bubble function ψ_K equal to the product of the three barycentric coordinates on K . For each $e \in \mathcal{E}_\Omega$, we associate the bubble function ψ_e equal to the product of the two barycentric coordinates on e . We introduce a lifting operator defined as follows : On a reference element \widehat{K} , we fix a lifting operator \widehat{P} from polynomial traces on \widehat{e} on \widehat{K} that vanish at the endpoints of \widehat{e} , into polynomials on \widehat{K} that vanish on $\partial\widehat{K} \setminus \widehat{e}$. A similar operator is obtained on each K by an affine transformation.

Proposition 20 *There exists a constant C independent of h and α such that :*
 $\forall K \in \mathcal{T}_h$

$$\eta_K \leq C \left(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_{1,\alpha,\mathcal{G}_K} + \left(\sum_{K' \in \mathcal{G}_K} h_{K'}^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K')^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (7.60)$$

where \mathcal{G}_K is the union of K and all triangles containing an edge of K .

Preuve:

1. We take \mathbf{w} in (7.59) equal to

$$\mathbf{w} = \begin{cases} (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x}) \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)) \psi_K & \text{in } K \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Since ψ_K vanishes on ∂K , this yields

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha))\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq \\ & \int_K \alpha(\mathbf{x})\sigma(e_{\mathbf{u}}) : \varepsilon((\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha))\psi_K) d\mathbf{x} - \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \cdot (\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha))\psi_K d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha))\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq \\ & C(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_{1,\alpha,K} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}) \|(\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha))\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

It can be checked by going to the reference element that for any polynomial φ of degree at most k the following inequalities hold (Ciarlet, 1991) :

$$\|\varphi\|_{L^2(K)} \leq C\|\varphi\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}, \quad |\varphi\psi_K|_{H^1(K)} \leq Ch_K^{-1}\|\varphi\|_{L^2(K)},$$

with constants depending only on k and the shape parameter of K . Noting that ψ_K is ≤ 1 (and with obvious extension to vector valued functions), we obtain

$$h_K \|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(K)} \leq c(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_{1,\alpha,K} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}). \quad (7.61)$$

2. We denote by e an edge in \mathcal{E}_K . We distinguish between two cases.
 - First, if e is not contained in Γ_C , it is a common edge of the two adjacent elements K and K' . Now, we choose \mathbf{w} in (7.59) to be equal to

$$\mathbf{w} = \begin{cases} P_{K,e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e) & \text{in } K, \\ P_{K',e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e) & \text{in } K', \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

This yields

$$\begin{aligned} & \|[\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)}^2 \leq \sum_{\kappa \in (K, K')} |\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha|_{1,\alpha,\kappa} |P_{\kappa,e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e)|_{H^1(\kappa)}^2 \\ & + (\|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(\kappa)} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)}) \|P_{\kappa,e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e)\|_{L^2(\kappa)}^2. \end{aligned}$$

The following inequalities, obtained by going to the reference element, hold

$$\begin{aligned} & \|[\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)]\|_{L^2(e)} \leq c \|[\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)}, \\ & |P_{\kappa,e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e)|_{H^1(\kappa)} + h_e^{-1} \|P_{\kappa,e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e)\|_{L^2(\kappa)} \leq Ch_e^{-\frac{1}{2}} \|[\mathbf{n}_e \cdot \alpha\sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)]\|_{L^2(e)} \end{aligned}$$

Noting that $ch_\kappa \leq h_e \leq h_\kappa$, we obtain

$$h_e^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(e)^2} \leq C \sum_{\kappa \in (K, K')} (|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha|_{1, \alpha, \kappa} + h_\kappa \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^2} + h_\kappa \|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(\kappa)^2}). \quad (7.62)$$

- Let $e \in \Gamma_C$. If $e \in \mathcal{E}_{\Gamma_C}^+$, we denote by K' the element such that e is contained in $e' \in \mathcal{E}_{K'}$. We extend $[\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e$ to the entire e' by zero and we make the same choice of \mathbf{w} as previously and we obtain (7.62). If $e \in \mathcal{E}_{\Gamma_C}^-$, then according to the assumption 1, we replace K' by the finite number of elements K_i , which share the edge e , we define \mathbf{w} as previously with respect to this change and we proceed similarly to the previous case to obtain the estimate (7.62)

Corollaire 7.4 *If Assumption 1 is satisfied, there exists a constant C independent of h and α such that*

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C (\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)^2}^{\frac{1}{2}}), \quad (7.63)$$

Proposition 21 *If Assumption 1 is satisfied, we take $\beta_e = 0$ if $M_h = M_h^{1, \ell, *}$ and $\beta_e = 1$ otherwise, then, there exists a constant C independent of h and α such that*

$$\eta_{C,e} \leq C (\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_{1, \alpha, \mathcal{G}_e} + h_e^{\frac{1}{2}} \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(e)} + (1 - \beta_e) h_e^{\frac{1}{2}} \|\lambda_h\|_{L^2(e)} + \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{G}_e} h_\kappa^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}), \quad (7.64)$$

where \mathcal{G}_e is the union of all triangles having a non null intersection with e .

Preuve: Let us denote $\sigma_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}$. For $e \in \mathcal{E}_{h, \Gamma_C}$, we take \mathbf{w} in (7.59) equal to

$$\mathbf{w} = \begin{cases} P_{K,e}(\psi_e(\lambda_h + \alpha \sigma_n(\mathbf{u}_h^\alpha))) & \text{in } K, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

- If $M_h = M_h^0$ or $M_h^{1, \ell}$, then arguing as in the previous proposition, we deduce that

$$\begin{aligned} \|(\lambda_h + \alpha \sigma_n(\mathbf{u}_h^\alpha)) \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)^2}^2 &\leq |\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha|_{1, \alpha, K} |P_{\kappa,e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e)|_{H^1(\kappa)^2} \\ &+ (\|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(\kappa)^2} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^2}) \|P_{\kappa,e}([\mathbf{n}_e \cdot \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)] \psi_e)\|_{L^2(\kappa)^2} \\ &+ \int_e (\lambda - \lambda_h) (\lambda_h + \alpha \sigma_n(\mathbf{u}_h^\alpha)) \psi_e d\tau. \end{aligned}$$

Thus, we obtain

$$h_e^{\frac{1}{2}} \|\lambda_h + \alpha \sigma_n(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(e)} \leq C(|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha|_{1,\alpha,K} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)^2} + h_K \|\mathbf{f}_h + \operatorname{div} \alpha \sigma(\mathbf{u}_h^\alpha)\|_{L^2(\kappa)^2}) + h_e^{\frac{1}{2}} \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(e)}. \quad (7.65)$$

– If $M_h = M_h^{1,\ell,*}$: we obtain the additional extra term $h_e^{\frac{1}{2}} \|\lambda_h\|_{L^2(e)}$ on the right-hand side of (7.65).

Corollaire 7.5 *If Assumption 1 is satisfied, there exists a constant C independent of h and α such that, if $\beta_e = 0$ when $M_h = M_h^{1,\ell,*}$ and $\beta_e = 1$ otherwise,*

$$\left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \eta_{C,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha + \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} h_e \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (1 - \beta_e) \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} h_e \|\lambda\|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.66)$$

Remarque 7.6 *Note that the term $h_e^{\frac{1}{2}} \|\lambda\|$ which appears only in the nonconforming case is a high order term compared to the error. The presence of this term could be interpreted as follows : the refinement process will not be active in the part of Γ_C where there is no contact between the bodies Ω^1 and Ω^2 .*

It remains to bound η_e .

Proposition 22 *If Assumption 1 is satisfied, there exists a constant C independent of h and α such that the following estimate holds*

$$\eta_e \leq C \alpha_e \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_{H^1(E_e)^2}, \quad (7.67)$$

where E_e denotes as before the union of all elements having non null intersection with e and $\alpha_e = 1 + \max(h_K \alpha_K, h_{K'} \alpha_{K'}) \leq 2$.

Preuve: We define a function μ_h on \mathcal{E}_{h,Γ_C} by

$$\mu_h = \begin{cases} |[\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e]|, & \text{on } e, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Note that μ_h is a nonnegative piecewise affine function on Γ_C Since $[\mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n}] \leq 0$ on Γ_C , we have

$$b(\mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha) = b(\mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha) + b(\mu_h, \mathbf{u}^\alpha) \leq b(\mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha).$$

- If $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C} = \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^+$ then we consider the two elements K, K' from both sides of Γ_C such that e is an entire edge of K and is contained in an entire edge e' of K' . We extend the product $\mu_h \psi_e$ by zero to e' and then we solve the problem : for $\kappa \in (K, K')$, find $\varphi \in H_{0,\partial\kappa \setminus e}^1(\kappa)$

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & \text{in } \kappa, \\ \varphi = \mu_h \psi_e, & \text{on } e, \\ \varphi = 0, & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (7.68)$$

where $H_{0,\partial\kappa \setminus e}^1(\kappa) = \{v \in H^1(\kappa); v = 0 \text{ on } \partial\kappa \setminus e\}$. It follows that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\| \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)}^2 &= b(\mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha) \\ &\leq b(\mu_h, \mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha) \\ &= \int_e \mu_h [(\mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha) \cdot \mathbf{n}_e] d\tau = \sum_{\kappa \in (K, K')} \left(\int_\kappa \mathbf{grad} \varphi \cdot (\mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_\kappa \varphi \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha) dx \right), \end{aligned}$$

and we deduce that

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}^2 &\leq \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\| \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)}^2 \\ &\leq C \sum_{\kappa \in (K, K')} (|\varphi|_{H^1(\kappa)} \|\mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha\|_{L^2(\kappa)^2} + h_\kappa^{-1} \|\varphi\|_{L^2(\kappa)} h_\kappa \|\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha)\|_{L^2(\kappa)}). \end{aligned}$$

By going to the reference element and using direct estimates on the boundary value problem (7.68), we have

$$\begin{aligned} h_\kappa^{-1} \|\varphi\|_{L^2(\kappa)} + |\varphi|_{H^1(\kappa)} &\leq C \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\| \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)} \\ &\leq C h_e^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}. \end{aligned}$$

Noting that $ch_\kappa \leq h_e \leq c'h_\kappa$, we obtain

$$h_e^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n}_e\|_{L^2(e)}^2 \leq C \alpha_e \sum_{\kappa \in (K, K')} \|\mathbf{u}_h^\alpha - \mathbf{u}^\alpha\|_{1,\alpha,\kappa},$$

where $\alpha_e = 1 + \max(h_K \alpha_K, h_{K'} \alpha_{K'}) \leq 2$.

- If $\mathcal{E}_{h,\Gamma_C} = \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}^-$, then it follows from Assumption 1, that e is an entire edge of an element K in one side and is a union of edges $e'_i, i = 1, \dots, i^*$. Since \mathbf{u}_h belongs to \mathbf{V}_h it is continuous at the endpoints of e'_i , therefore we can still solve (7.68) with K' replaced by $\Delta_e \cap \Omega_C^+$. Arguing as in the previous case we obtain the desired estimate.

Corollaire 7.6 *If Assumption 1 is satisfied, there exists a constant C independent of h and α such that*

$$\left(\sum_{e \in \mathcal{E}_{h,\Gamma_C}} \eta_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\mathbf{u}^\alpha - \mathbf{u}_h^\alpha\|_\alpha. \quad (7.69)$$

7.6 Numerical experiments

First, we describe briefly the implementation of the discrete problem (7.24). The algorithm that we implement is based on the the following observation : the discrete solution $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ is a saddle-point of the Lagrangian functional defined over \mathcal{K}_h by

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a_\alpha(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) - b(\mu_h, \mathbf{v}_h),$$

which means that it satisfies the min-max principle

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_h^\alpha, \mu_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \lambda_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, \mu_h) \in \mathcal{K}_h. \quad (7.70)$$

Let \mathbf{V} , \mathbf{U}_α denote the vectors with the entries given by the nodal values of the functions (\mathbf{v}_h, μ_h) and $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$, respectively. Let \mathbf{M} and Λ be the vectors with the entries given by the nodal values of μ_h and λ_h , respectively, for the three different choices of the space M_h , namely $M_h = M_h^1$, $M_h = M_h^{1,*}$ or $M_h = M_h^0$. Therefore, the saddle-point problem for the Lagrangian (7.70) can be rewritten in the finite dimensional setting :

Find $\mathbf{U}_\alpha = (\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ and Λ , defined by the following max-min condition

$$\max_{SM \geq 0} \left(\min_{\mathbf{V}} \frac{1}{2} {}^t \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{V} - {}^t \mathbf{V} \mathbf{F} + ({}^t \mathbf{V} \mathbf{L}) S M \right), \quad (7.71)$$

where \mathbf{K} denotes the stiffness matrix, \mathbf{L} the coupling matrix, \mathbf{F} is the vector corresponding to the external loading and the matrix S expresses the sign conditions for multipliers

Given a triangularization \mathcal{T}_h of Ω , let N_ℓ , $\ell = 1, 2$ denote the number of nodes in Ω^ℓ . We introduce the finite element basis of $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$:

$$(\eta_1, \dots, \eta_{2N_\ell}) = ((w_{11}, w_{12}), \dots, (w_{N_\ell 1}, w_{N_\ell 2})), \quad \ell = 1, 2,$$

where $(w_i)_i$ denotes the (scalar) affine Lagrange finite element basis and $(_{1,2})$ the canonical basis in \mathbb{R}^2 . Then the matrix K is defined by

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^1 & 0 \\ 0 & K^2 \end{pmatrix},$$

$$(K^\ell)_{ij} = a_\alpha^1(\eta_i, \eta_j) = \int_{\Omega^\ell} \alpha^\ell \varepsilon(\eta_j) : A^\alpha \varepsilon(\eta_i) d\mathbf{x}, \quad i, j = 1, \dots, 2N_\ell.$$

and the right-hand side takes the form $\mathbf{F} = (F^1, 0)$, with $F^1 = (\mathbf{f}_i^1)_i$, $D = (\int_{\Omega^1} \eta_i \eta_j dx)_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 2N_1$. We assume here that $\mathbf{f} = 0$ in Ω^2 .

Let m_ℓ denote the number of nodes of Ω^ℓ on Γ_C . We define $(\psi_k^\ell)_k$, $1 \leq k \leq m_{\ell-1}$ to be the finite element basis associated to $W_h^{1,\ell}(\Gamma_C)$ and $(\varphi_k^\ell)_k$, $1 \leq k \leq m_{\ell-1}$, to be the finite element basis associated to $W_h^{0,\ell}(\Gamma_C)$.

Remarque 7.7 *Note that ψ_1^ℓ , respectively $\psi_{m_{\ell-1}}^\ell$, is constant in t_0 , respectively is constant in $t_{m_{\ell-1}}$, and zero elsewhere.*

If M_h is $M_h^{0,\ell}$ or $M_h^{1,\ell}$ then S is given by the identity matrix, else $M_h = M_h^{1,\ell,*}$, and $S_{ij} = \int_{\Gamma_C} \psi_i^\ell \psi_j^\ell d\tau$, $1 \leq i, j \leq m_\ell - 1$.

Finally, the *coupling* matrix $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L^1 \\ L^2 \end{pmatrix}$ is defined in the following way

– If $M_h = M_h^{1,\ell}$ or $M_h = M_h^{1,\ell,*}$, then

$$(L^\ell)_{ij} = \int_{\Gamma_C} \psi_j^\ell (\eta_i \cdot \mathbf{n}^\ell) d\tau, \quad 1 \leq i \leq N_\ell, \quad 1 \leq j \leq m_\ell - 1.$$

– If $M_h = M_h^{0,\ell}$, then

$$(L^\ell)_{ij} = \int_{\Gamma_C} \varphi_j^\ell (\eta_i \cdot \mathbf{n}^\ell) d\tau, \quad 1 \leq i \leq N_\ell, \quad 1 \leq j \leq m_\ell - 1.$$

The solution $(\mathbf{U}_\alpha, \Lambda)$ of (7.96) satisfies

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{F} - L S \Lambda). \quad (7.72)$$

Therefore, for $\Phi = S\Lambda$, the saddle-point problem (7.96) can be rewritten as a quadratic programming problem of smaller size

$$\min_{\Phi \geq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t \Phi L \mathbf{K}^{-1} L \Phi - {}^t \Phi L \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \right). \quad (7.73)$$

If $\bar{\Phi}$ is the solution of (7.97) then $\Lambda = S^{-1} \bar{\Phi}$. The solution \mathbf{U}_α is obtained by solving (7.72).

7.6.1 Adaptive strategy

In all computations, we start with a fixed uniform or quasi-uniform tringulation $\mathcal{T}_{h,n}$, $n = 1$. Next, we perform iteratively the following adaptivity step :

On the triangulation $\mathcal{T}_{h,n}$, we compute the solution $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ of problem (7.24), the corresponding error indicators as defined in (7.40), (7.42) and (??) and the mean value

$$\bar{\eta}_h^n = \frac{1}{N_h^n} \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,n}} \eta_K, \quad (7.74)$$

where N_h^n is the number of triangles in $\mathcal{T}_{h,n}$. Next, each triangle K such that $\eta_K \geq \bar{\eta}_h^n$ is divided in such a way that the diameters of the new triangles inside it are very close to h_K times the ratio $\frac{\bar{\eta}_h^n}{\eta_K}$.

The adaptive strategy is performed either a fixed (small) number of times or until the quantity $\bar{\eta}_h^n$ becomes smaller than a given tolerance.

7.6.2 Numerical experiments

Appendix

In this appendix, we give the proof of Lemma 7.5. The proof consists in constructing a regularized interpolation operator with the appropriate approximation properties. Such operators based on a local modified quasi-interpolation operators of Clément type, [15] are more or less well known. In our case the construction has to take into account the anisotropy in the spirit of [11] and the non-compatibility of the meshes at the crack Γ_C . However a new difficulty is the non-continuity (even) of the solutions of the continuous problem at Γ_C .

Given $z \in (\mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_C^+) \cup \mathcal{N}_C^-$, let ω_z denote the support of the nodal basis function φ_z . It is the union of all elements that have z as a vertex. With each z we associate $\ell(z) = 1$ or 2, such that

- z belongs to $\bar{\Omega}_{\ell(z)}$.
- $\alpha_{\ell(z)} = \alpha^{-1}$ if $\ell(z) = 2$ otherwise $\alpha_{\ell(z)} = 1$.

We denote by

$$\oint_{\omega} v \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\text{meas}(\omega)} \int_{\omega} v \, d\mathbf{x}$$

the mean value of the function v on the set ω . Then, we set

$$\pi_z v = \begin{cases} \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v \, d\mathbf{x}, & \text{if } z \in (\Omega \setminus \mathcal{N}_C^+) \cup \mathcal{N}_C^-, \\ 0 & \text{if } z \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.75)$$

We define the quasi-interpolation operators $I_h^\ell : L^2(\Omega^\ell) \longrightarrow \mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$ by

$$I_h^1 v = \sum_{z \in \mathcal{N}_h \cap \Omega_1} (\pi_z v) \varphi_z, \quad \text{and} \quad I_h^2 v = \sum_{z \in \mathcal{N}_h \cap \bar{\Omega}_2} (\pi_z v) \varphi_z.$$

Next we set $R_h^1 : L^2(\Omega)^2 \mapsto \mathbf{V}_h$

$$R_h^1(\mathbf{v}) = (I_h^1 \mathbf{v}, I_h^2 \mathbf{v}), \quad (7.76)$$

with the obvious notation $I_h^\ell \mathbf{v} = (I_h^\ell v_1, I_h^\ell v_2)$, $\ell = 1, 2$. Note that we can write without ambiguity $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $R_h^1 v_i = \sum_{z \in \mathcal{N}_h} (\pi_z v_i) \varphi_z$, $i = 1, 2$.

In order to enforce the continuity at the vertices of \mathcal{N}_C^+ , we define the affine piecewise continuous function on Γ_C

$$\Phi(z) = (\varphi_1, \varphi_2)(z) = R_h^1(z), \quad \forall z \in N_C^-.$$

We define

$$R_h \mathbf{v} = \begin{cases} \Phi(z) & \text{if } z \in N_C^+ \setminus \mathcal{N}_h, \\ R_h^1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.77)$$

It is clear that $R_h : L^2(\Omega)^2 \mapsto \mathbf{V}_h \cap H_0^1(\Omega)^2$. For arbitrary $K \in \mathcal{T}_h$ and for each component of $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{V}$, we have

$$\|v_i - R_h v_i\|_{L^2(K)} = \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \varphi_z (v_i - R_h v_i) \right\|_{L^2(K)} \leq \sum_{z \in \mathcal{N}_K} \|\varphi_z (v_i - R_h v_i)\|_{L^2(K)}.$$

We have to distinguish between several cases.

- We consider a vertex z which is not contained in the boundary of any of the two subdomains. Then from the Bramble-Hilbert inequality, we deduce

$$\begin{aligned} \|\varphi_z (v_i - R_h v_i)\|_{L^2(K)} &\leq \|v_i - R_h v_i\|_{L^2(K)} \leq \|v_i - R_h v_i\|_{L^2(\omega_z)} \\ &\leq c \operatorname{diam} \omega_z |v_i|_{H^1(\omega_z)} \leq c h_K \alpha_K^{-\frac{1}{2}} \|v_i\|_{1, \alpha, \Delta_K}. \end{aligned}$$

When $z \in \partial\Omega$ similar computations with the Poincaré-Friedrichs inequality lead to the same estimate.

- Consider now z which is not in $\partial\Omega$ but is in $\partial\Omega_{\ell(K)}$ where $\ell(K)$ is such that $K \in \overline{\Omega_{\ell(K)}}$. If $\ell(K) = \ell(z)$, then the previous argument with ω_z replaced by $\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}$ still applies. Note that in this case K is contained in Ω_2 .
- If $\ell(K) \neq \ell(z)$, we have

$$\begin{aligned} \|\varphi_z (v_i - R_h v_i)\|_{L^2(K)} &\leq \left\| \varphi_z \left(v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i \, d\mathbf{x} \right) \right\|_{L^2(K)} \\ &\leq \left\| \varphi_z \left(v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i \, d\mathbf{x} \right) \right\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \left\| \varphi_z \left(\oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i \, d\mathbf{x} \right) \right\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

The first term is estimated as previously. The second term is estimated as follows

$$\begin{aligned} \|\varphi_z(\oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i d\mathbf{x})\|_{L^2(K)} &\leq \|\varphi_z\|_{L^2(K)} |\oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i d\mathbf{x}| \\ &\leq ch_K |\oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i d\mathbf{x}|. \end{aligned}$$

- As a subcase, we still have $\ell(K) \neq \ell(z)$ and we consider z such that $z \notin \overline{\Gamma_C}$. Then it is an endpoint of e which is the entire edge of two elements each in one subdomain. Using the regularity of the triangulations \mathcal{T}_h^ℓ , $\ell = 1, 2$, we have

$$\begin{aligned} h_K |\oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i d\mathbf{x}| &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} \|\oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i d\mathbf{x}\|_{L^2(e)} \\ &\leq ch_e^{\frac{1}{2}} (\|\oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(K)}} v_i - v_i\|_{L^2(e)} + \|v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(z)}} v_i\|_{L^2(e)}). \end{aligned}$$

Denoting by κ any of the two elements K, K' which share the edge e , and $\ell(\kappa) = \ell(z)$ or $\ell(K)$, and thanks to the following trace theorem [40, ?] we have

$$\|\varphi\|_{L^2(e)} \leq c(h_e^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\kappa)} + h_e^{\frac{1}{2}} |\varphi|_{H^1(\kappa)}), \quad (7.78)$$

and we obtain

$$\begin{aligned} h_e^{\frac{1}{2}} \|v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(\kappa)}} v_i\|_{L^2(e)} &\leq c (\|v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell(\kappa)}} v_i d\mathbf{x}\|_{L^2(\kappa)} + h_e |v_i|_{H^1(\kappa)}) \\ &\leq ch_K \alpha_K^{-\frac{1}{2}} \|v_i\|_{1,\alpha,\Delta_K}. \end{aligned}$$

- If $z \in \overline{\Gamma_C}$ and $z \in \mathcal{N}_C^- \setminus \mathcal{N}_C^+$, it follows from the Assumption 1, that z is an endpoint of e which is an entire edge of K and only a part of \tilde{e} an edge of \tilde{K} . In addition $\mathbf{v} = (v_i)$, $i = 1, 2$ is not continuous through Γ_C , therefore, we have to modify the previous argument. Inserting and subtracting

$h_e^{-1} \int_e v_i|_{\Omega_{\ell}(\kappa)}$, $\kappa = (K, \tilde{K})$, we obtain

$$\begin{aligned}
h_K \left| \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(K)} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(z)} v_i d\mathbf{x} \right| &\leq h_K \left(\left| \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(K)} v_i - h_e^{-1} \int_e v_i|_{\Omega_{\ell}(K)} d\tau \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| h_e^{-1} \int_e v_i|_{\Omega_{\ell}(z)} d\tau - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(z)} v_i \right| + h_e^{-1} \left| \int_e [v_i] d\tau \right| \right), \\
&\leq h_K \left(h_e^{-1} \int_e (|v_i|_{\Omega_{\ell}(K)} - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(K)} v_i d\mathbf{x}) d\tau \right. \\
&\quad \left. + h_e^{-1} \int_e (|v_i|_{\Omega_{\ell}(z)} - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(z)} v_i d\mathbf{x}) d\tau + h_e^{-1} \left| \int_e [v_i] d\tau \right| \right), \\
&\leq c h_K \left(h_e^{-\frac{1}{2}} \|v_i|_{\Omega_{\ell}(K)} - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(K)} v_i d\mathbf{x}\|_{L^2(e)} \right. \\
&\quad \left. + h_e^{-\frac{1}{2}} \|v_i|_{\Omega_{\ell}(z)} - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(z)} v_i d\mathbf{x}\|_{L^2(e)} + h_e^{-\frac{1}{2}} \| [v_i] \|_{L^2(e)} \right).
\end{aligned}$$

Invoking the trace theorem (7.78) once, we obtain

$$\begin{aligned}
h_K \left| \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(K)} v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(z)} v_i d\mathbf{x} \right| &\leq c h_K \left((h_e^{-1} \|v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(K)} v_i d\mathbf{x}\|_{L^2(\kappa)} + |v_i|_{H^1(\kappa)}) \right. \\
&\quad \left. + (h_e^{-1} \|v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(z)} v_i d\mathbf{x}\|_{L^2(\kappa)} + |v_i|_{H^1(\kappa)}) \right. \\
&\quad \left. + h_e^{-\frac{1}{2}} \| [v_i] \|_{L^2(e)} \right).
\end{aligned}$$

The two first terms yield

$$h_e^{-1} \|v_i - \oint_{\omega_z \cap \Omega_{\ell}(\kappa)} v_i d\mathbf{x}\|_{L^2(\kappa)} + |v_i|_{H^1(\kappa)} \leq c h_K \alpha_{\kappa}^{-\frac{1}{2}} \|v_i\|_{1, \alpha, \Delta_{\kappa}}.$$

The last term is bounded as follows

$$\begin{aligned}
h_K (h_e^{-\frac{1}{2}} \| [v_i] \|_{L^2(e)}) &\leq h_K (h_e^{-\frac{1}{2}} \|v_i|_K - R_h v_i\|_{L^2(e)} + (\frac{h_e}{\tilde{h}_e})^{\frac{1}{2}} (\tilde{h}_e^{-\frac{1}{2}} \|v_i|_{\tilde{K}} - R_h v_i\|_{L^2(\tilde{e})})) \\
&\leq c (h_e^{\frac{1}{2}} \|v_i|_K - R_h v_i\|_{L^2(e)} + \tilde{h}_e^{\frac{1}{2}} \|v_i|_{\tilde{K}} - R_h v_i\|_{L^2(\tilde{e})})
\end{aligned}$$

The second term on the right hand side of this inequality is bounded for small $\gamma > 0$ as follows

$$\tilde{h}_e^{\frac{1}{2}} \|v_i|_{\tilde{K}} - R_h v_i\|_{L^2(\tilde{e})} \leq \gamma \|v_i|_{\tilde{K}} - R_h v_i\|_{L^2(\tilde{K})}^2 + \frac{1}{4\gamma} h_{\tilde{e}}, \quad (7.79)$$

and we have obtained for \tilde{K}

$$\|v_i|_{\tilde{K}} - R_h v_i\|_{L^2(\tilde{K})} \leq c h_K \alpha_K^{-\frac{1}{2}} \|v_i\|_{1,\alpha,\Delta_{\tilde{K}}}.$$

Therefore the worst term is $O(h_K)$. The first term is simply added to $\|v_i - R_h v_i\|_{L^2(K)}$ on the left hand side of the estimate thanks to the decomposition (7.79) which will still add to the right hand side a term of $O(h_K)$.

- If $z \in \mathcal{N}_C^+$, z is an endpoint of e which is an entire edge of K and only a part of \tilde{e} an edge of \tilde{K} . We denote by j , $j = 1, 2, 3$ the vertices of \tilde{K} , and by λ_j , the associated barycentric functions,

$$\begin{aligned} \|v_i|_{\Omega_{\ell(K)}} - R_h v_i\|_{L^2(K)} &\leq \sum_{j=1}^3 |(v_i - R_h v_i)(j)| \|\lambda_j\|_{L^2(\tilde{K})} \\ &\leq c h_{\tilde{K}} \sum_{j=1}^3 |(v_i|_{\Omega_{\ell(K)}} - R_h v_i)(j)|, \end{aligned}$$

Using assumption 1, and the regularity of the triangulations, we obtain

$$\|v_i|_{\Omega_{\ell(K)}} - \mathcal{R}_h v_i\|_{L^2(K)} \leq h_{\tilde{e}}^{\frac{1}{2}} \|v_i|_{\Omega_{\ell(z)}} - R_h v_i\|_{L^2(\tilde{e})} + h_{\tilde{e}}^{\frac{1}{2}} \| [v_i] \|_{L^2(e)}.$$

This establishes the first estimate of the lemma. The second one is proven in exactly the same way by noting that

$$\|\varphi_z\|_{L^2(e)} \leq c h_{\tilde{e}}^{\frac{1}{2}}.$$

Détails d'implémentation et résultats numériques

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'effectuer la simulation numérique de la formulation de problème en domaines fictifs. Nous rappelons d'abord le problème discret décrivant le problème de domaines fictifs. Après nous détaillons l'implémentation et la mise en oeuvre de la discrétisation par les éléments finis "P1" pour la formulation mixte et hybride (7.24). Puis nous donnons la formulation matricielle qui s'ensuit. Finalement, nous présentons plusieurs tests numériques qui illustrent les résultats théoriques.

Les deux solides sont discrétisés par éléments finis de type $P1$, indépendamment l'un à l'autre et il s'ensuit des noeuds qui ne sont pas en vis à vis sur la zone de contact. Deux familles de triangulations sont considérées voir la figure 7.1. Soit $\mathbf{V}_h(\Omega_1)$ l'espace d'approximation de $\mathbf{V}(\Omega_1)$, et Soit $\mathbf{V}_h(\Omega_2)$ l'espace d'approximation de $\mathbf{V}(\Omega_2)$, les fonctions \mathbf{v}_h sont continues sur Ω_c , polynomial de degré un sur chaque triangle de la discrétisation. On notera $\mathbf{V}_h = (\mathbf{V}_h(\Omega_1) \times \mathbf{V}_h(\Omega_2)) \cap H^1(\Omega_c)$ l'analogue discret de $\mathbf{V}(\Omega_c)$, et soit $h = (h_1, h_2)$ où $h_l, l = 1, 2$ le pas de discrétisation sur $\Omega_l, l = 1, 2$.

Le problème discret de domaines fictifs consiste à trouver $\mathbf{u}_h^\alpha \in \mathbf{V}_h$ et $\lambda_h \in M_h$ tels que :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h^\alpha, \mathbf{v}_h) + b(\lambda_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h - \lambda_h, \mathbf{u}_h^\alpha) \leq 0, & \forall \mathbf{u}_h \in M_h. \end{cases} \quad (7.80)$$

Rappelons que ce problème est bien posé et admet une solution unique $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$.

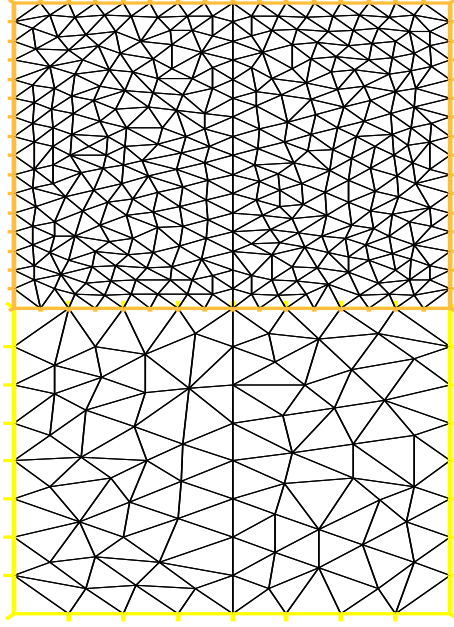


FIG. 7.1 – Maillages incompatibles

7.7 Réalisation numérique

7.7.1 Formulation matricielle

Dans le but de mettre le problème de domaines fictifs sous forme adaptée à la résolution numérique, on va le réécrire sous forme matricielle. Pour cela, rappelons comme dans les chapitres précédentes 3 et 6, que notre problème se formule comme un problème de recherche de point-selle.

Soit $(\mathbf{u}^\alpha, \lambda)$ la solution du problème continu, et soit $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ la solution du problème discret (7.80), le problème de point-selle associé au Lagrangien définie sur $\mathbf{V}_h \times M_h$ par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \mu_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1 \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) ds, \quad (7.81)$$

où $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h)$ vérifie :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_h^\alpha, \mu_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \lambda_h), \quad \forall (\mathbf{v}_h, \mu_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h.$$

7.7.1.1 L'implémentation : calcul de la matrice de rigidité et des matrices de couplage.

On note par N le nombre total de noeuds $N_1 + N_2$ des triangulations de Ω_1 et Ω_2 . Soit

$$(\eta_1, \dots, \eta_{N_l}, \eta_{N_l+1}, \dots, \eta_{2N_l}) = ((\varphi_1 e_1, \varphi_1 e_2), (\varphi_2 e_1, \varphi_2 e_2), \dots, (\varphi_{N_l} e_1, \varphi_{N_l} e_2)),$$

la base nodale de $\mathbf{V}_h(\Omega_l)$, avec $l = 1, 2$ et où φ_z est la fonction

$$\varphi_z(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = z, \\ 0, & \text{si } y \neq z. \end{cases}$$

Les N fonctions de base de $\mathbf{V}_h(\Omega_c)$ sont notées $\eta_i, i = 1, \dots, 2N$, de telle sorte que si $\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2)$, alors \mathbf{v}_h^1 et \mathbf{v}_h^2 se décomposeront de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{v}_h^1 = \sum_{i=1}^{2N_1} \mathbf{v}_h^1(i) \eta_i, \quad \mathbf{v}_h^2 = \sum_{i=2N_1+1}^{2N} \mathbf{v}_h^2(i) \eta_i. \quad (7.82)$$

On désigne par m le nombre de noeuds sur Γ_C appartenant au maillage issu de Ω_1 et les valeurs de i numérotées de 1 à m correspondant à ces noeuds. On désigne par n le nombre de noeuds sur Γ_C appartenant au maillage issu de Ω_2 et les valeurs de i comprises entre $2N_1 + 1$ et $2N_1 + n + 1$ correspondant à ces noeuds. Les calculs qui suivent sont faits en supposant que le multiplicateur de Lagrange est choisi dans l'espace \mathcal{P}_0 , de plus pour définir la fonction de base d'une composante de déplacement v , considérée au point (i, j) , où $x_i = ih_1, y_j = jh_2, \forall i, j$, en écrivant :

$$\lambda_h = \sum_{k=1}^m \lambda_h(k) \psi_k, \quad \text{où } \psi_k = \eta_k \cdot n^1, \quad k = 1, \dots, m.$$

Les $\psi_k, k = 1, \dots, m$ sont les fonctions scalaires de base sur $\mathcal{T}_{c,h}^1$. A partir des représentations (7.82), nous pouvons écrire pour tout $j = 1, \dots, 2N_l, l = 1, 2$

$$a_\alpha^1(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h^1) + a_\alpha^2(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h^1) + \int_{\Gamma_C} \lambda_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot n^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot n^2) ds = L^1(\mathbf{v}_h^1) + L^2(\mathbf{v}_h^2),$$

Pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, en prenant $\mathbf{v}_h = (\eta_j, 0)$, pour $j = 1, \dots, 2N_1$, on a :

$$\begin{cases} a_\alpha^1(\mathbf{u}_h^1, \eta_j) + \int_{\Gamma_C} \lambda_h (\eta_j \cdot n^1) ds = L^1(\eta_j), & j = 1, \dots, m, \\ a_\alpha^1(\mathbf{u}_h^1, \eta_j) = L^1(\eta_j), & j = m + 1, \dots, 2N_1. \end{cases}$$

Ecrivant

$$a_\alpha(\eta_j, \mathbf{u}_h) = a_\alpha^1(\eta_j, \mathbf{u}_h) + a_\alpha^2(\eta_j, \mathbf{u}_h) \quad (7.83)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^1} \int_T \varepsilon(\eta_j) : \mathcal{A}\varepsilon(\eta_i) dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^2} \alpha^{-1} \int_T \varepsilon(\eta_j) : \mathcal{A}\varepsilon(\eta_i) dx \quad (7.84)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^1} \left(\sum_{i=1}^{2N_1} \left(\int_T \varepsilon(\eta_j) : \mathcal{A}\varepsilon(\eta_i) dx \right) \mathbf{u}_h^1(i) \right) \quad (7.85)$$

$$+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h^2} \left(\sum_{i=2N_1+1}^{2N_2} \left(\alpha^{-1} \int_T \varepsilon(\eta_j) : \mathcal{A}\varepsilon(\eta_i) dx \right) \mathbf{u}_h^2(i) \right). \quad (7.86)$$

On notera par $K_{jk}^l \in \mathbb{R}^{2N_l \times 2N_l}$, $l = 1, 2$ le coefficient de la matrice de rigidité sur Ω_l , $l = 1, 2$ défini par :

$$K_{jk}^l = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^l} \int_T \varepsilon(\eta_j) : \mathcal{A}^\alpha \varepsilon(\eta_k) dx, \quad j, k = 1, \dots, 2N_l. \quad (7.87)$$

Désignons par k_1, k_2, k_3 les sommets du triangle $T \in \mathcal{T}_h^l$ sur lequel nous souhaitons faire le calcul, on a les 6 fonctions de base sur $T \in \mathcal{T}_h^l$, tel que :

$$\begin{aligned} \eta_{\pi(T,1)} &= \varphi_{k_1} e_1, & \eta_{\pi(T,2)} &= \varphi_{k_1} e_2, \\ \eta_{\pi(T,3)} &= \varphi_{k_2} e_1, & \eta_{\pi(T,4)} &= \varphi_{k_2} e_2, \\ \eta_{\pi(T,5)} &= \varphi_{k_3} e_1, & \eta_{\pi(T,6)} &= \varphi_{k_3} e_2, \end{aligned}$$

où e_j est le j -ième vecteur unitaire, la transformation affine π est une application qui lie les indices $1, \dots, 6$ de la numérotation locale à la numérotation globale. Donc les coefficients de la matrice de rigidité locale d'un élément T sont donnés par :

$$K_{jk}^l(T) = \int_T \varepsilon(\eta_{\pi(T,j)}) : \mathcal{A}^\alpha \varepsilon(\eta_{\pi(T,k)}) dx, \quad j, k = 1, \dots, 6, \quad l = 1, 2. \quad (7.88)$$

Soit l'application $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ définie par :

$$\gamma(u) = \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ \frac{du_2}{dy} \\ \frac{du_2}{dx} + \frac{du_1}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(u) \\ \varepsilon_{22}(u) \\ 2\varepsilon_{12}(u) \end{pmatrix}. \quad (7.89)$$

Pour $\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u)$, nous avons la relation

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(u) \\ \varepsilon_{22}(u) \\ 2\varepsilon_{12}(u) \end{pmatrix},$$

et

$$\varepsilon(v) : \mathcal{A} \varepsilon(u) = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} = \gamma^T(v) \mathcal{A} \gamma(u). \quad (7.90)$$

De la relation (7.88) et la relation (7.90) et le fait que $\eta_{\pi(T,k)}$ sont affines sur T . Il s'en suit :

$$K_{jk}^l(T) = \int_T \gamma(\eta_{\pi(T,j)}) \mathcal{A}^\alpha \gamma(\eta_{\pi(T,k)}) dx = |T| \gamma(\eta_{\pi(T,j)})^T \mathcal{A}^\alpha \gamma(\eta_{\pi(T,k)}), \quad l = 1, 2. \quad (7.91)$$

De plus, on a :

$$\begin{pmatrix} \nabla \varphi_{k_1} \\ \nabla \varphi_{k_2} \\ \nabla \varphi_{k_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.92)$$

et les calculs élémentaires vérifient :

$$\gamma \left(\sum_{j=1}^6 u_h^l(j) \eta_{\pi(T,j)} \right) |T| = \begin{pmatrix} \varphi_{k_1,x} & 0 & \varphi_{k_2,x} & 0 & \varphi_{k_3,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{k_1,y} & 0 & \varphi_{k_2,y} & 0 & \varphi_{k_3,y} \\ \varphi_{k_1,y} & \varphi_{k_1,x} & \varphi_{k_2,y} & \varphi_{k_2,x} & \varphi_{k_3,y} & \varphi_{k_3,x} \end{pmatrix} =: R \begin{pmatrix} u_h^l(1) \\ \vdots \\ u_h^l(6) \end{pmatrix}, \quad (7.93)$$

par conséquent, l'expression (7.91) peut être écrite simultanément pour tous les indices comme suit :

$$K_{jk}^l(T) = |T| R^T \mathcal{A}^\alpha R. \quad (7.94)$$

On décrit les calculs à effectuer permettant la construction des matrices de couplage entre la fissure et le maillage régulier. On rappelle ces calculs dans le cas où la fissure est un segment de droite.

Pour notre problème, la prise en compte de la fissure se fait par l'intermédiaire de forme linéaire b , ce forme est définie par une intégrale sur Γ_C est correspond aux traces du champ des déplacements. Ainsi, pour $v \in M$ assez régulier, on a

$$b(\mu, v) = \int_{\Gamma_C} \mu (v^1 \cdot n^1 + v^2 \cdot n^2) ds, \quad \mu \in M. \quad (7.95)$$

Les fonctions de base de W_h sont :

$$\psi_l = \begin{cases} \frac{x_{l+1} - x}{|x_{l+1} - x_l|}, & \text{si } x_l \leq x \leq x_{l+1}, \\ \frac{x - x_{l-1}}{|x_l - x_{l-1}|}, & \text{si } x_{l-1} \leq x \leq x_l, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On déduit le système d'équations dans Ω_1 d'inconnues U^1 et Λ

$$K^1 U^1 + \begin{pmatrix} A^1 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = b^1,$$

où

U^1 représente le vecteur colonne de composantes $u_h^1(i)$, $i = 1, \dots, 2N_1$,

Λ représente le vecteur colonne de composantes $\lambda_h(k)$, $k = 1, \dots, m$,

K^1 est la matrice carrée d'ordre $2N_1$ de coefficients $K_{i,j}^1 = a_\alpha^1(\eta_i, \eta_j)$, $i, j = 1, \dots, 2N_1$

A^1 est la matrice carrée d'ordre m de coefficients $a_{j,k}^1 = \int_{\Gamma_C} \psi_k \psi_j ds$, $j, k = 1, \dots, m$

b^1 est le vecteur de composantes $b_j^1 = L^1(\eta_j)$, $j = 1, \dots, 2N_1$.

De la même manière, en prenant $\mathbf{v}_h = (0, \eta_j)$, pour $j = 2N_1 + 1, \dots, 2N$, et on note $\varphi_k = \eta_k \cdot n^2$, $k = 2N_1 + 1, \dots, 2N_1 + n + 1$, les n fonctions scalaires de base sur $\mathcal{T}_{c,h}^2$, on obtient le système d'équations suivant, d'inconnues U^2 et Λ dans Ω_2 :

$$K^2 U^2 + \begin{pmatrix} A^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = b^2,$$

où

U^2 représente le vecteur colonne de composantes $u_h^2(i)$, $i = 2N_1 + 1, \dots, 2N$

K^2 est la matrice carrée d'ordre $2N_2$ de coefficients $K_{i,j}^2 = a_\alpha^2(\eta_i, \eta_j)$, $i, j = 2N_1 + 1, \dots, 2N_2$

A^2 est la matrice rectangulaire d'ordre (n, m) de coefficients $a_{j,k}^2 = \int_{\Gamma_C} \psi_k \varphi_j ds$, $j = 2N_1 + 1, \dots,$

b^2 est le vecteur de composantes $b_j^2 = L^2(\eta_j)$, $j = 2N_1 + 1, \dots, 2N$.

On en déduit finalement le système linéaire dans Ω_c :

$$\begin{pmatrix} K^1 & 0 \\ 0 & K^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

où bien

$$K U + A \Lambda = F \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

D'autre part, L'inéquation de (7.80) donne

$$\int_{\Gamma_C} \mu_h (\mathbf{u}_h^1 \cdot n^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot n^2) ds \geq 0, \quad \forall \mu_h \in M_h(\Gamma_C),$$

en désignant par $U_{hN}^l(i)$ la composante normale de $u_h^l(i)$, cette dernière inéquation s'écrit également

$$\sum_{i=1}^m U_{hN}^l(i) \int_{\Gamma_C} \psi_k(\eta_j \cdot n^1) ds + \sum_{i=2N_1+1}^{2N_1+n+1} U_{hN}^2(i) \int_{\Gamma_C} \psi_k(\eta_j \cdot n^2) ds \leq 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

c'est-à-dire on a l'inéquation suivante sur la fissure Γ_C :

$$U_N^1 + (A^1)^{-1t} A^2 U_N^2 \leq 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

avec $U_N^1 = (u_{hN}^{\alpha,1})(i)_{1 \leq i \leq m}$ la composante normale sur la zone de contact, $U_N^2 = (u_{hN}^{\alpha,2})(i)_{N_1 \leq i \leq N_1+n+1}$ la composante normale sur la zone de contact, par conséquent, le problème de point-selle de domaine fictifs s'écrit

$$\begin{cases} KU + A\Lambda & = F & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ U_N^1 + (A^1)^{-1t} A^2 U_N^2 & \leq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

7.7.2 Mise sous forme de problème de minimisation

Notre objectif est d'établir la formulation matricielle du problème (7.80). La solution $(\mathbf{u}_h^\alpha, \lambda_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ est aussi une solution du Lagrangien (7.81).

Notons par \mathbf{V} et U les vecteurs correspondant aux valeurs nodales des fonctions \mathbf{v}_h^α et \mathbf{u}_h^α , respectivement, soient M et Λ les valeurs nodales de μ_h et λ_h , respectivement.

Alors le problème de point-selle pour le Lagrangien (7.81) peut se mettre sous la forme matricielle suivante : déterminer \mathbf{U} et Λ tels que :

$$\max_{SM \geq 0} \left(\min_{\mathbf{V}} \frac{1}{2} {}^t \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{V} + {}^t \mathbf{V} \mathbf{F} + ({}^t \mathbf{V} \mathbf{L}) S M \right), \quad (7.96)$$

On désigne par B la matrice qui traduit la condition de contact, définie comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} I_m & 0 & ((A^1)^{-1t} A^2) & 0 \end{pmatrix},$$

où I_m désigne la matrice d'identité d'ordre m .

Sachant que $KU + A\Lambda = F$, et que K est inversible, il s'ensuit que le problème revient à trouver :

$$\min_{\Phi \geq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t \Phi B \mathbf{K}^{-1} {}^t B \Phi - {}^t \Phi B \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{F} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \right), \quad (7.97)$$

on note ensuite que ${}^t B = A A^1$ et que B est de rang maximale, la matrice $B \mathbf{K}^{-1} {}^t B$ est symétrique définie positive. Le problème consiste alors à résoudre ce problème de minimisation de fonctionnelle quadratique définie positive sous contraintes convexe. Dans ce cas le champ de déplacements U se déduit aisément de Φ par la formule $U = K^{-1} (F - A (A^1)^{-1} \Phi)$.

7.8 Exemples et résultats numériques

Dans les chapitres précédents, on a étudié d'un point de vue théorique les taux de convergence des solutions discrétisées par éléments fini triangulaires vers la solution du modèle continu. Cette partie consiste à déterminer numériquement ces taux de convergence.

Nous considérons le problème de Signorini sur le domaine carré $\Omega_1 = [0, 1]^2$ avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes, et avec un module de Young qui vaut $E_1 = 13000$ et un coefficient de Poisson qui égal à $\nu = 0.3$. Pour le côté de contact unilatéral est le côté inférieur $\Gamma_C = [0, 1] \times \{0\}$ et on prend $f^1 = (0, 0)$. puis on prolonge par un domaine fictif $\Omega_2 = [-1, 0]^2$, avec un module de Young qui égal à $E_2 = 30000$, $\nu = 0.3$, et $\varepsilon = 0.02$.

Mettre en évidence les taux de convergence énoncé dans le théorème 7.2 est d'abord l'objet des expériences numériques réalisés par Matlab, Scilab et Free-Fem++ [24].

Puisqu'on ne dispose pas une solution analytique, on est amené à calculer la solution discrète par éléments finis avec une résolution suffisamment fine ($h = \frac{1}{256}$), qui est désormais prise comme la solution de référence (dans le calcul de l'erreur) et que nous notons u_{ref} .

Ensuite, nous construisons une famille de maillages emboîtés correspondants aux pas $h \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\}$, puis nous calculons u_h , la solution approchée, sur chaque maillage que nous comparons à la solution de référence.

Notons par E_i^l , $i, l = 1, 2$, l'erreur relative, pour la norme L^2 , de la i -ième composante de déplacements dans le domaine Ω_l , $l = 1, 2$:

$$E_i^l = \log\left(\frac{\|\mathbf{u}_{i,ref} - \mathbf{u}_{i,h}\|_{L^2(\Omega_l)}}{\|\mathbf{u}_{i,ref}\|_{L^2(\Omega_l)}}\right), i, l = 1, 2,$$

et par E_c^l , $l = 1, 2$, l'erreur relative complète, pour la norme L^2 , de déplacements :

$$E_c^l = \log\left(\frac{\|\mathbf{u}_{1,ref} - \mathbf{u}_{1,h}\|_{L^2(\Omega_l)}}{\|\mathbf{u}_{1,ref}\|_{L^2(\Omega_l)}}\right) + \log\left(\frac{\|\mathbf{u}_{2,ref} - \mathbf{u}_{2,h}\|_{L^2(\Omega_l)}}{\|\mathbf{u}_{2,ref}\|_{L^2(\Omega_l)}}\right), l = 1, 2.$$

Le tableau (7.1) présente les résultats obtenus pour l'erreur relative des déplacements en norme L^2 sur la triangulation de Ω_1 .

le tableau (7.2) illustre les résultats obtenus pour l'erreur relative complète, en fonction de nombre de degrés de liberté N_1 et du pas de discrétisation dans le

$\log(ns1)$	E_1^1	E_2^1
2.19722457733622	6.34320899683204	6.80413399155114
3.29583686600433	3.90776238057842	4.14689039805015
4.02535169073515	3.20692342357748	3.30141240204379
4.52178857704904	2.43092759666826	2.95724627760621
6.23636959020370	2.09772153084332	2.23654952045880
6.59167373200866	1.53340981541080	1.48861778798336
7.00669522683704	1.86060338930876	1.91624806363199

TAB. 7.1 – Erreur relative en déplacement sur Ω_1 .

domaine Ω_1 ,
les tableaux (7.3) et (7.4) représentent la norme L^2 de l'erreur relative des déplacements en fonction du pas de discrétisation de domaine Ω_1 , respectivement, Ω_2 .

$\log(ns1)$	$pas1$	E_c^1
2.19722457733622	5.000000000000000E – 002	6.59657254312039
3.29583686600433	2.500000000000000E – 002	4.02620231398824
4.02535169073515	1.666670000000000E – 002	2.72840441913574
4.52178857704904	1.250000000000000E – 002	2.72840441913574
6.23636959020370	5.000000000000000E – 003	1.51437847858053
6.59167373200866	4.166700000000000E – 003	1.51437847858053
7.00669522683704	3.333300000000000E – 003	1.88562072123529

TAB. 7.2 – Erreur relative complète en déplacement sur Ω_1 .

Pour évaluer le taux de convergence des discrétisations considérées, principalement pour les normes L^2 des erreurs afin de voir dans quelle mesure les résultats numériques concordent-ils avec la théorie, on s'intéressera au taux de convergence α correspondant à :

$$\frac{\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|}{\|\mathbf{u}_{ref}\|} = Ch^\alpha,$$

$pas1$	E_1^1	E_2^1
$5.000000000000000E - 002$	6.34320899683204	6.80413399155114
$2.500000000000000E - 002$	3.90776238057842	4.14689039805015
$1.666670000000000E - 002$	3.20692342357748	3.30141240204379
$1.250000000000000E - 002$	2.43092759666826	2.95724627760621
$5.000000000000000E - 003$	2.09772153084332	2.23654952045880
$4.166700000000000E - 003$	1.53340981541080	1.48861778798336
$3.333300000000000E - 003$	1.86060338930876	1.91624806363199

TAB. 7.3 – Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction du pas 1.

Remarquons qu'on peut utiliser $\frac{1}{\sqrt{N}}$, où N est le nombre total de degrés de liberté, à la place du pas de discrétisation h .

Finalement, les courbes des figures suivants permettent d'établir les taux de convergence, pour la norme L^2 de l'erreur, la pente est approximativement égale à 0.75 indiquant qu'elle décroît comme $h^{\frac{3}{4}}$, c'est-à-dire qu'elle est concordante avec les prédictions théorique.

Nous avons tracé dans les figures (7.2) jusqu'à (7.5) l'erreur relative pour la norme L^2 des deux composantes de déplacements \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 en fonction des degrés de liberté et en fonction du pas de discrétisation, les trois dernières figures (7.8), (7.9) et (7.10) fournissent, pour la norme L^2 de l'erreur relative, les taux de convergence de tenseur des contraintes.

$pas2$	E_1^2	E_2^2
0.1000000000000000	6.34320899683204	6.80413399155114
$5.000000000000000E - 002$	3.90776238057842	4.14689039805015
$3.333330000000000E - 002$	3.20692342357748	3.30141240204379
$2.500000000000000E - 002$	2.43092759666826	2.95724627760621
$1.000000000000000E - 002$	2.09772153084332	2.23654952045880
$8.333000000000000E - 003$	1.53340981541080	1.48861778798336
$6.666700000000000E - 003$	1.86060338930876	1.91624806363199

TAB. 7.4 – Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction du pas 2.

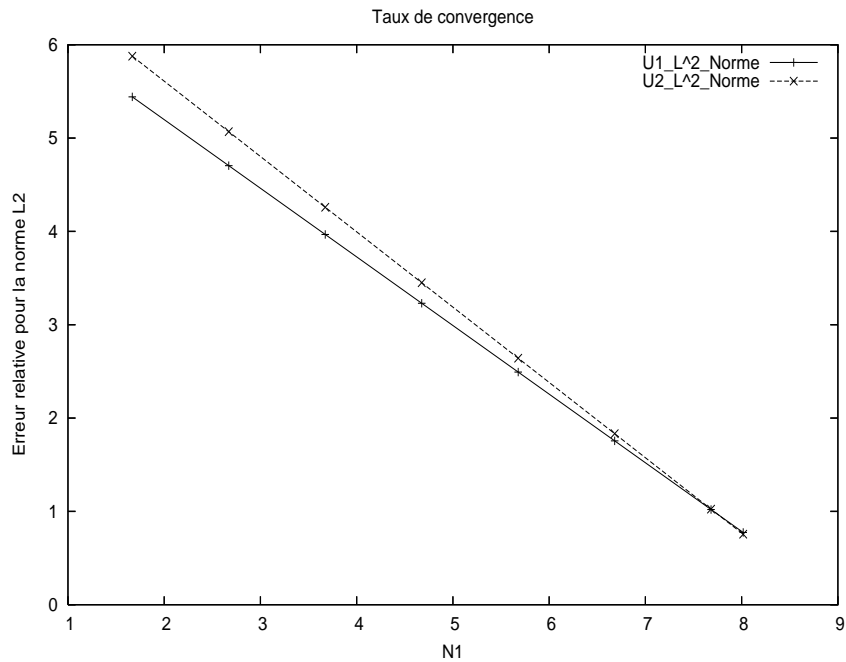


FIG. 7.2 – Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction de N_1 .

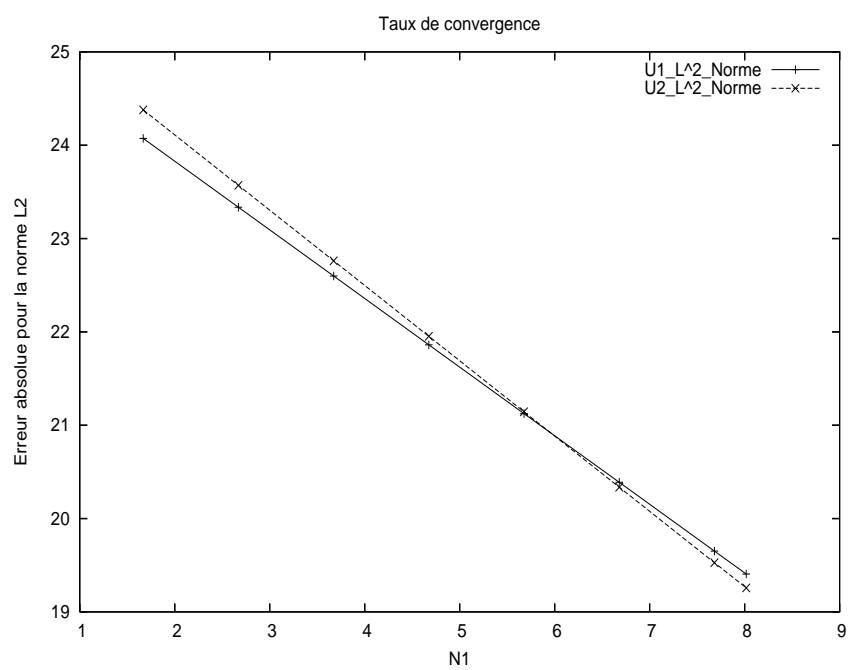


FIG. 7.3 – Erreur absolue pour la norme L^2 des déplacements en fonction de N_1 .

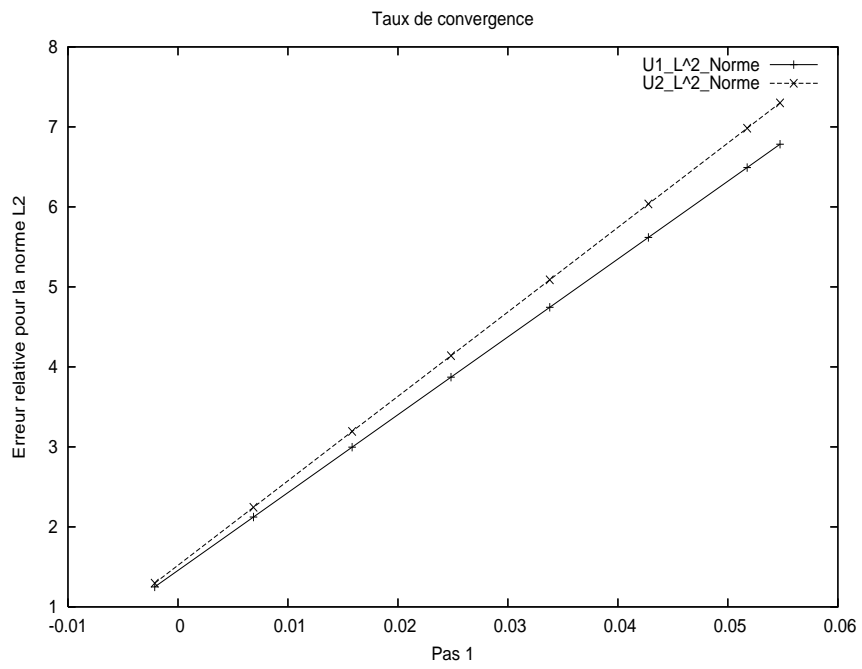


FIG. 7.4 – Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction du pas 1.

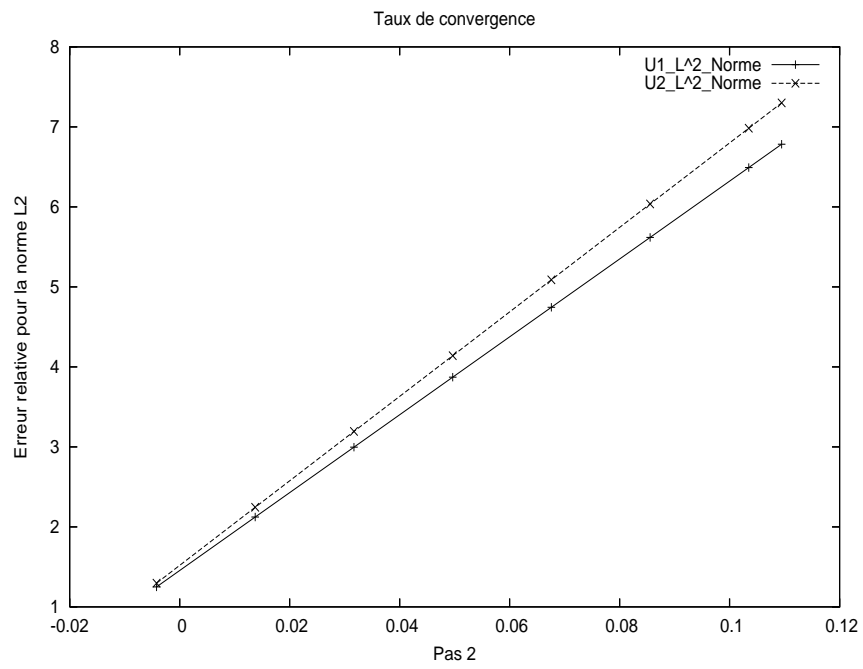


FIG. 7.5 – Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction du pas 2.

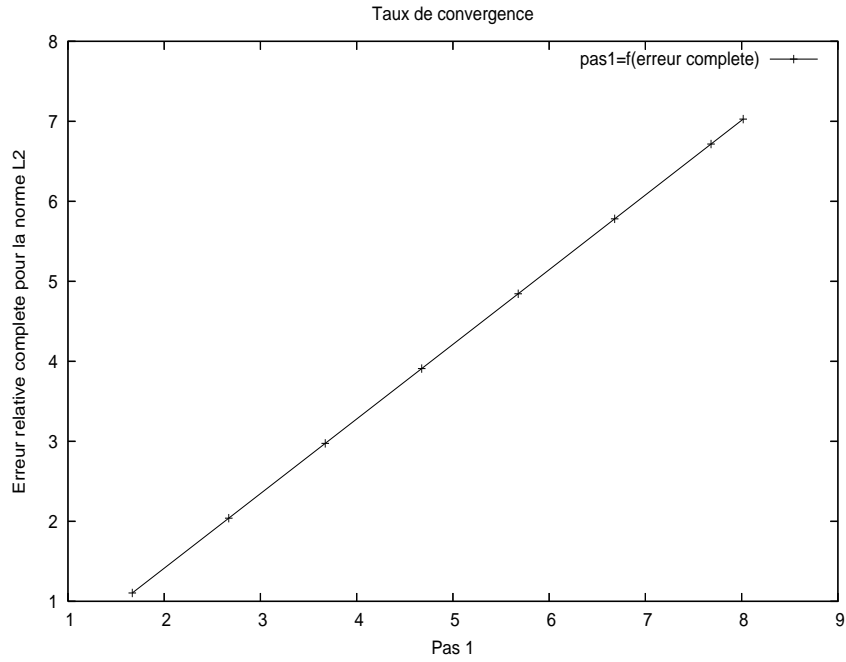


FIG. 7.6 – Erreur relative complète pour la norme L^2 en fonction du pas 1.

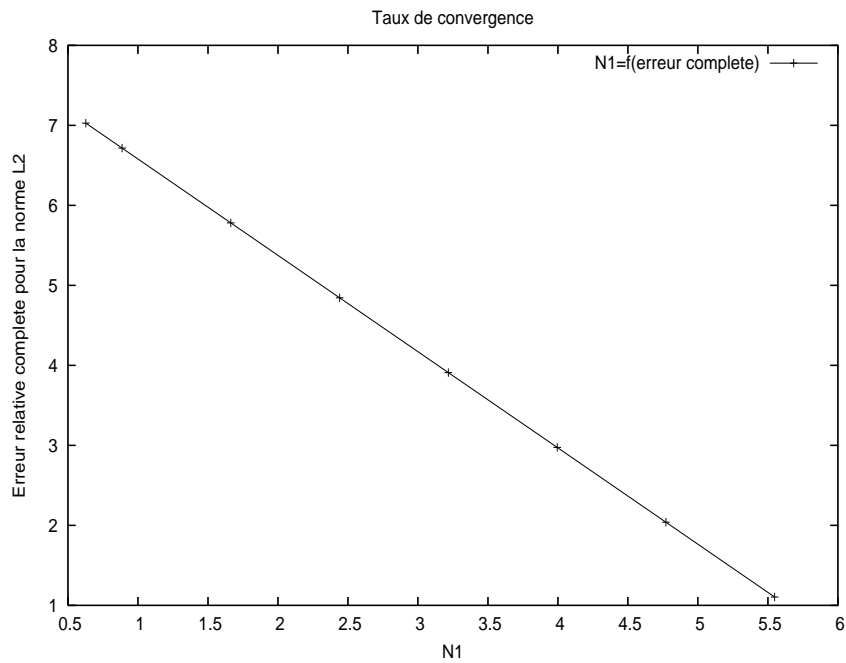


FIG. 7.7 – Erreur relative complète pour la norme L^2 en fonction de N_1 .

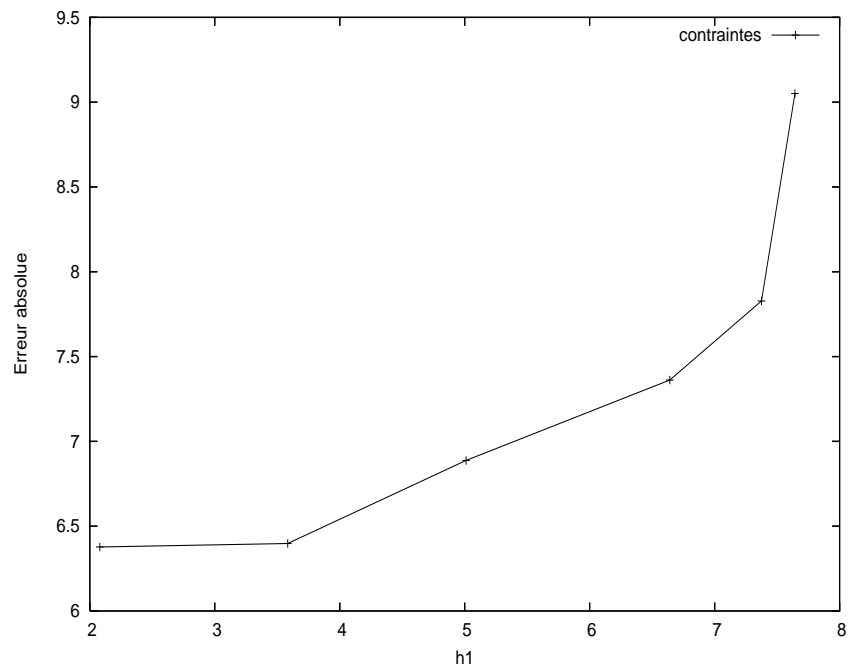


FIG. 7.8 – Contraintes en fonction de nombre total de degrés de liberté N_1

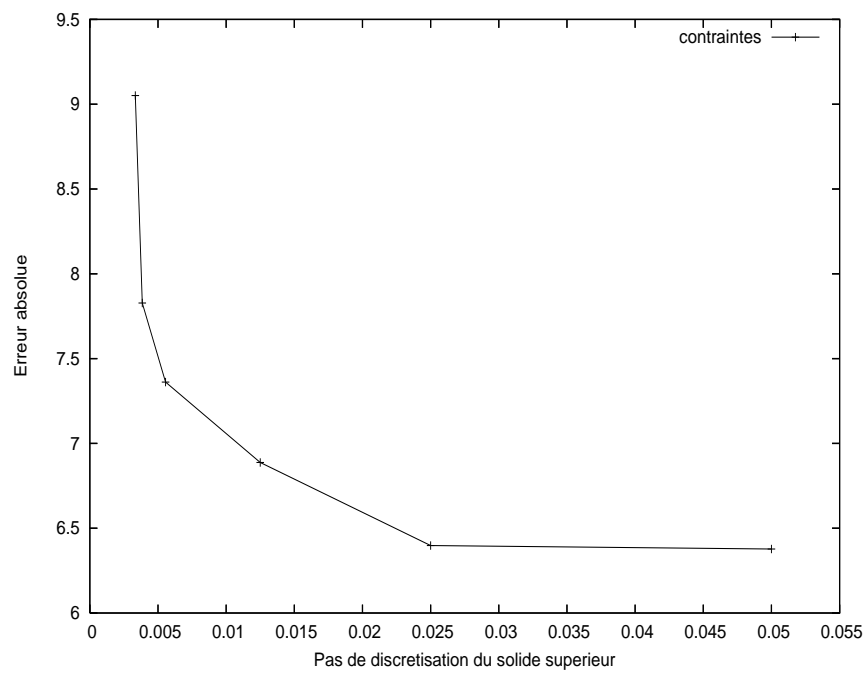


FIG. 7.9 – Contraintes en fonction du pas 1

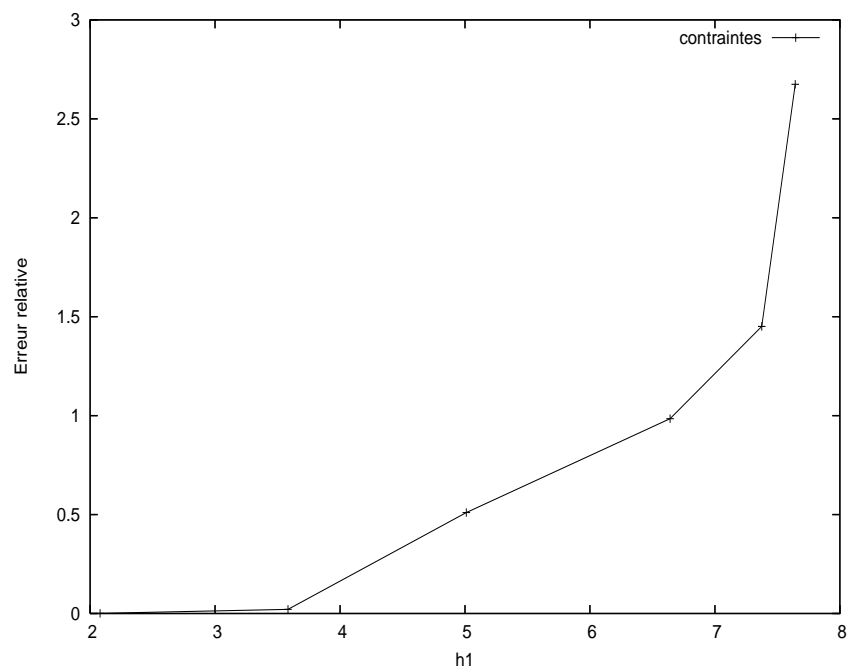


FIG. 7.10 – Contraintes en fonction de nombre total de degrés de liberté N_2 .

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette deuxième partie, nous avons développé des outils mathématiques et numériques pour étendre la méthode des domaines fictifs au cadre d'inéquations variationnelles de type Signorini.

Nous avons notamment élaboré une stratégie de résolution adaptative pour le problème de Signorini. Les calculs des indicateurs d'erreur et la mise en oeuvre de l'adaptativité est en cours.

Ce travail ouvre la voie à des nombreuses applications en optimisation de forme, c'est la suite naturelle de ce travail.

Bibliographie

- [1] M. Ainsworth, J.T.Oden, C. Lee—Local a posteriori error estimators for variational inequalities, *Numer. Math. PDE* **9**, (1993), 23-33.
- [2] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogra.— *Fictitious domain method applied to the scattering by a crack of transient elastic waves in anisotropic media : a new family of mixed finite elements leading to explicit schemes.* pages 322 – 326. SIAM, 1998.
- [3] Z. Belhachmi— A posteriori error estimates for the 3D stabilized mortar finite element method applied to the Laplace equation, *Math. Model. Numer. Anal.* **37**, **6**, (2003), 991-1013.
- [4] Z. Belhachmi—Residual a posteriori error estimates for a 3D mortar finite element method : the Stokes system, *IMA J. Numer. Anal.* **24** (2004), **3**, 521-547.
- [5] Z. Belhachmi, F. Ben Belgacem—Quadratic finite element for Signorini problem, *Math. Comp.* **72**, (2003), 83-104.
- [6] Z. Belhachmi, J.M. Sac-Epée, J. Sokolowski— Mixed finite element methods for a smooth domain formulation of a crack problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, **43**, **3** (2005), 1295–1320.
- [7] F. Ben Belgacem—Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by finite element method, *Siam J. Numer. Anal.* **37**, (2000), 1198-1216.
- [8] F. Ben Belgacem, Y. Renard—Hybrid finite element methods for the Signorini problem, to appear.
- [9] C. Bernardi, V. Girault—A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements, *SIAM. J. Numer. Anal.*, **35** (1998), 1893–1916.
- [10] C. Bernardi, Y. Maday, A.T. Patera—A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method, *Collège de France Seminar*, H. Brézis, J.L. Lions, Pitman, (1994), 13-51.
- [11] C. Bernardi, R. Verfürth—adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients, *Numer. Math.* **85** (2000), 579-608.

- [12] D. Bucur, G. Buttazzo—Variational methods in shape optimization problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **65** Birkhäuser (Boston, Inc., Boston, MA, 2005).
- [13] Z. Chen, R.H. Nochetto—Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems, Numer. Math. **84**, (2000), 527-548.
- [14] P.G. Ciarlet— Basic Error Estimates for Elliptic Problems, in the Handbook of Numerical Analysis, Vol **II**, P.G. Ciarlet & J.-L. Lions eds, North-Holland, (1991), 17-351.
- [15] Ph. Clément—Approximation by finite element functions using local regularization. RAIRO Anal. Num. **9** R-2 (1975), 77–84.
- [16] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani, T. Sassi—Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies. Math. Comp., **71**, 237, (2001), 1-25.
- [17] M. Crouzeix, V. Thomée—Resolvent estimates in l_p for discrete Laplacians on irregular meshes and maximum-norm stability of parabolic finite difference schemes. Comput. Methods Appl. Math. **1** (2001), **1**, 3–17.
- [18] G. Duvaut and J.-L. Lions— *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, (1972).
- [19] F. Collino, P. Joly, and F. Millot.— *Fictitious domain method for unsteady problems : Application to electromagnetic scattering*. J.C.P, 138(2) : 907–938, December 1997.
- [20] P. Hild, S. Nicaise—A posteriori error estimations of residual type for Signorini problems, Numer. Math.,
- [21] R.H.W. Hoppe, R. Kornhuber—Adaptive multilevel methods for obstacle problems, Siam. J. Numer. Anal. **31** (1994), 301-323.
- [22] C. Johnson—Adaptive finite element methods for obstacle problems, Math. Models Methods Appl. Sci. **2** (1992), 483-487.
- [23] R. S. Falk— Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities, Math. of Comp., **28** (1974), 963–971.
- [24] F. Hecht, O.Pironneau, A.Le hyaric, K.Ohtsuka—FreeFem++, Laboratoire Jacques Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [25] V. Girault and R. Glowinski.— *Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem*. Japon J. Indust. Appl. Math, 12(3) : 487–514, 1995.
- [26] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Périaux.— *A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications*. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin, 111(3 – 4) : 283 – 304, 1994.

- [27] V. Girault, P.-A. Raviart—Finite element methods for the Navier-Stokes equations, Theory and algorithms. Springer-Verlag (1986).
- [28] R. Glowinski—Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems, Springer, Berlin, (1980).
- [29] P. Grisvard—Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monographs and Studies in Mathematics, **24**, Pitman, 1985.
- [30] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Nečas—Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics, in the Handbook of Numerical Analysis, Vol. **IV**, Part **2**, P.G. Ciarlet & J.-L. Lions eds, North-Holland, (1996).
- [31] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenkov—Analysis of cracks in solids, Southampton-Boston, WIT press, (2000).
- [32] N. Kikuchi, J. Oden—Contact problems in elasticity : A study of variational inequalities and finite element methods, SIAM, 1988.
- [33] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia—An introduction to variational inequalities and their applications, Academic Press, (1980).
- [34] K. Lhalouani, T. Sassi—Nonconforming mixed variational formulation and domain decomposition for unilateral problems, East-West J. Numer. Math., **7**, (1999), 23-30.
- [35] J.-L. Lions, E. Magenes—Problèmes aux limites non homogènes, Dunod, (1968).
- [36] P.A. Raviart, J.M. Thomas—Primal hybrid finite element method for 2nd order elliptic equations, Math. Comp. **31**, (1977), 391–396.
- [37] L. Slimane, A. Bendali, P. Laborde—Mixed formulations for a class of variational inequalities, M2AN, **38**, 1, (2004), 177-201.
- [38] S. Tahir—Problèmes de contact unilatéral et maillages incompatibles, PhD Thesis Université Paul Verlaine, Metz (2006)
- [39] S. Tahir, Z. Belhachmi—Mixed finite elements discretizations of some variational inequalities arising in elasticity problems in domains with cracks, (2004-Fez conference on Differential Equations and Mechanics). Electron. J. Diff. Eqns., Conference **11**, (2004), 33-40.
- [40] R. Verfürth—A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Wiley & Teubner (1996).
- [41] Z.-H. Zhong. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, 1993.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes attachés à étudier et à faire l'analyse numérique de plusieurs formulations de problèmes d'élasticité linéaires sous forme d'inéquations variationnelles.

Nous avons étudié des discrétisations différentes et plusieurs famille d'éléments finis, nous avons mis en oeuvre ses différentes discrétisations et montrer ainsi que nous disposons de plusieurs stratégie de résolutions de problèmes de fissures.

Les différentes formulations considérées aussi bien à la première partie qu'à la deuxième partie sont des approches complémentaires qui permettent de disposer d'outils efficace de résolution d'inéquations variationnelles pour des problèmes d'élasticité avec fissures.

Les perspectives de ces travaux sont :

1. Compléter l'analyse a posteriori, notamment en mettant en oeuvre des algorithmes de résolutions adaptatives et en comparant différents estimateurs.
2. Étendre dans le cas bidimensionnel ces méthodes au cas du problème de Signorini avec frottements (friction).
3. Étendre les méthodes où les problèmes tridimensionnels, la difficulté ici étant essentiellement algorithmique.
4. D'appliquer ces discrétisations pour traiter des problèmes d'optimisation de formes, de propagation de fissures ou de détection de défauts.

Table des figures

1.1	Domaine fissuré	20
3.1	Maillage de domaine avec $\Gamma_c =]0, 4[\times \{\frac{1}{2}\}$	51
3.2	La norme L^2 de l'erreur relative des déplacements en fonction des ddl.	53
3.3	La norme L^2 de l'erreur relative des contraintes en fonction des ddl.	53
3.4	La norme L^2 de l'erreur relative des déplacements en fonction du pas de discrétisation.	54
3.5	La norme L^2 de l'erreur relative des contraintes en fonction du pas de discrétisation.	55
3.6	Isovaleurs de u_1	55
3.7	Isovaleurs de u_2	55
3.8	Isovaleurs de σ_ν	56
3.9	Isovaleurs de σ_{11}	56
3.10	Isovaleurs de σ_{12}	56
3.11	Maillage de domaine avec $\Gamma_c =]1, 3[\times \{\frac{1}{2}\}$	56
3.12	La norme L^2 de l'erreur relative des déplacements en fonction des ddl.	57
3.13	La norme L^2 de l'erreur relative des contraintes en fonction des ddl.	57
3.14	Isovaleurs de u_1	58
3.15	Isovaleurs de u_2	58
3.16	Isovaleurs de σ_ν	58
3.17	Isovaleurs de σ_{11}	58
6.1	L-Shape	89
6.2	Erreur relative des déplacements en fonction des ddl	90
6.3	Erreur relative des déplacements en fonction du pas de discrétisation	91
6.4	Membrane de Cook	92
6.5	Erreur relative des déplacements en fonction des ddl	93
7.1	Maillages incompatibles	146
7.2	Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction de N_1	155

7.3	Erreur absolue pour la norme L^2 des déplacements en fonction de N_1 .	156
7.4	Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction du pas 1.	157
7.5	Erreur relative pour la norme L^2 des déplacements en fonction du pas 2.	158
7.6	Erreur relative complète pour la norme L^2 en fonction du pas 1.	159
7.7	Erreur relative complète pour la norme L^2 en fonction de N_1 .	159
7.8	Contraintes en fonction de nombre total de degrés de liberté N_1 .	160
7.9	Contraintes en fonction du pas 1.	160
7.10	Contraintes en fonction de nombre total de degrés de liberté N_2 .	161

