



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITE Paul Verlaine METZ S.C.D.	
N° Inv	20060905
Cote	S/1706/33
Ldcv	INRIA LORRAINE

Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur

de l'université Paul Verlaine-Metz

Spécialité : Mathématique

par

MABROUK MOHAMED

Transformation des systèmes d'Euler-Lagrange Observabilité et systèmes discrets

Soutenue le 24 Octobre 2006 devant le jury composé de

Antonio Loria	Rapporteur	Chargé de recherche au CNRS
Emmanuel Trelat	Rapporteur	Professeur à l'université d'Orléans
Fatiha Alabau-Boussouira	Examinatrice	Professeur à l'université Paul Verlaine
Rachid Chabour	Examineur	Maître de Conférence Université Paul Verlaine
Jean-Claude Vivalda	Directeur de thèse	Directeur de recherche - INRIA Lorraine

Laboratoire de Mathématique et Applications de Metz
CNRS UMR 7122, Ile de Saulcy, F-75045 Metz Cedex 1

UNIVERSITE Paul Verlaine - METZ S.C.D.	
N° Inv	20060985
Cote	S/1308/38
Loc	

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très vivement mon directeur de thèse, Monsieur Jean Claude Vivalda, directeur de recherche inria Lorraine, qui m'a dirigé durant toute ma thèse et de m'avoir consacré une partie de son temps chaque fois que l'occasion se présentait.

Je désire exprimer ma profonde gratitude aux professeurs Loria Antonio et Emmanuel Trèlat pour avoir accepté la charge d'être rapporteurs de ma thèse.

Je tiens à remercier aussi Madame Fatiha Alabau-Boussouira, Professeur à l'université Paul Verlaine et Monsieur Rachid Chabour, Maître de Conférences à l'université Paul Verlaine d'avoir bien voulu être examinateurs de ma thèse

De nombreuses discussions fructueuses avec Mr Sabeur Ammar m'ont permis de mieux comprendre quelques mystères de ce domaine. Je le suis reconnaissant.

Je ne pourrais oublier d'exprimer toute ma reconnaissance, à l'ensemble du personnel du laboratoire des mathématiques à l'université Paul Verlaine de Metz qui m'ont accueilli.

Je remercie également mes amis et frères de toujours : Amir, les deux Mohamed Assidi et Ben Regba, sans oublier aussi tout mes collègues de la faculté des sciences de Gabès et principalement Lachiheb Mahdi, Alaya Atef, Nadia Srayeb, Ghribi Belgacem et Mnif Abdessalem pour leur aides et soutien de tous les instants.

Tout au long de ma vie, mes parents, mon frère et mes soeurs ont toujours été présents et m'ont apporté leur soutien. Qu'il trouvent ici toute ma gratitude.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Table des figures	iv
Introduction générale	1
I Transformation des systèmes d'Euler-Lagrange.	5
1 Observabilité et observateurs	7
1.1 Observabilité et observateurs des systèmes linéaires	7
1.1.1 Définition- condition de rang	7
1.2 Observabilité des systèmes non linéaires	8
1.2.1 Observabilité et observabilité locale	9
1.2.2 Observabilité faible. Observabilité faible locale	9
1.3 Condition de rang et observabilité	10
1.4 Quelques observateurs non linéaires	10
1.4.1 Observateur de Luenberger étendu	11
1.4.2 Méthodes linéarisant l'erreur d'observation	11
1.4.3 Observateurs à grands gains	12
1.4.4 Observateurs à mode glissant	13
1.5 Observateur pour les systèmes mécaniques	14
1.5.1 Premier observateur	14
1.5.2 Deuxième observateur	15
1.5.3 Troisième observateur	15
1.5.4 Quatrième observateur	16
2 Transformation des systèmes d'Euler-Lagrange	17
2.1 Introduction	17
2.2 Une famille d'équations aux dérivés partielles	18
2.2.1 Exemple	22
2.3 Forme affine des systèmes d'Euler- Lagrange	23
2.3.1 La formulation Lagrangienne	23
2.3.2 Equation : $(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v))v = 0$	27
2.3.3 Equation $(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v))v = 0$ où $T(q) = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$	31
2.4 Système d'Euler-Lagrange et métrique Riemannienne	37
2.4.1 Factorisation canonique	37
2.4.2 Conditions d'existences	39
2.5 Exemples d'applications	40
2.5.1 Le système TORA	41

2.5.2	Le manipulateur	43
2.6	Le Pont roulant	45
2.6.1	Système modèle est changement de coordonnées	45
2.6.2	Construction d' un observateur	47
3	Forme triangulaire pour une famille de système d' Euler-Lagrange	49
3.1	Une famille de système d'Euler-Lagrange	50
3.1.1	Discussion autour des hypothèses et conséquences	51
3.1.2	Changement de coordonnées	51
3.1.3	Conception de l'observateur	53
3.2	Stabilisation	56
3.3	Exemple d'application	59
3.3.1	Simulations	62
II	Généricité de l'observabilité	63
4	Généricité de l'observabilité différentielle forte pour les systèmes en temps discret	65
4.1	Topologie de Whitney	65
4.2	Transversalité	67
4.3	Observabilité différentielle, Observabilité différentielle forte : Cas des systèmes continus .	68
4.4	Observabilité différentielle- Observabilité différentielle forte : Cas des systèmes discrets .	70
4.4.1	Résultat principal	71
4.4.2	Démonstration du lemme 4.4.1	72
4.4.3	Démonstration du lemme 4.4.2	74
4.5	conclusion	77
A	Complément sur la codimension d'un ensemble de matrices	79
	Appendix	79
	Bibliographie	81

Introduction générale

Depuis plus de vingt-cinq ans, les systèmes non linéaires ont été largement étudiés, de sorte qu'un grand nombre de résultats théoriques sont actuellement disponible. Ce développement est de au fait que l'approche traditionnelle par modélisation essentiellement linéaire des procédés à commander est devenue insuffisante pour des applications de plus en plus exigeantes en termes de performance.

Bien souvent, la commande d'un système nécessite la connaissance complète de son état (commande par retour d'état), mais malheureusement, pour des raisons techniques ou économiques (construction, positionnement et coût des capteurs), l'état n'est pas entièrement accessible à la mesure. C'est ce problème qui motive la synthèse d'**observateur**, ou reconstituteur d'état, système auxiliaire qui donne une estimation de tout l'état, ou au moins l'état non mesuré à partir des grandeurs connues du système.

Avant tout, une condition nécessaire à l'existence d'un observateur est donnée par la notion d'observabilité du système, qui traduit en un sens, la possibilité d'obtenir son état en fonction de ses entrées et ses sorties. Dans les cas linéaires, cette condition est indépendante de l'entrée, et elle est également suffisante pour garantir l'existence d'un observateur, à vitesse de convergence exponentielle et arbitrairement rapide [35, 36]. Pour les systèmes non linéaire, malgré l'abondance des résultats disponibles, il n'existe pas une solution systématique. Une des raisons en est que, contrairement au cas linéaire, l'observabilité d'un système non linéaire dépend de l'entrée appliquée. Une définition détaillée de l'observabilité est donnée par Hermann et Kerner dans [80] tandis qu'une bonne introduction aux problèmes des entêtes pour les systèmes non linéaires peut être trouvée par exemple dans [79].

Dans le cas où une entrée permettrait de distinguer tout couple d'états, on parle d'entrées universelles dont les premières mentions remontent à la fin des années soixante dix [51]. Quand toutes les entrées sont universelles, il est question d'observabilité uniforme, initialement définie dans [52] pour les systèmes linéaires variant dans le temps, dans [40] pour les systèmes balnéaires et [64] pour les systèmes affines en contrôle.

Cependant, de point de vue pratique, la meilleure définition de l'observabilité est donnée par la possibilité de construire un observateur. Pour la classe des systèmes linéaires variants dans le temps, les premiers résultats sont évidemment dus à Kalman, tandis que les premiers observateurs de systèmes non linéaires apparaissent au début des années 70 avec les travaux de Thau [97] et Kou et al [96] qui adopte un approche type Lyapunov. Toutefois, autour des différentes notions rappelées ci avant gravitent également un certain nombre de synthèse d'observateurs. Une première classe largement utilisée pour les systèmes dépourvus d'entrées singulières, et celle de type grand gain : l'observateur s'appuie sur une partie linéaire observable du système, rendue prépondérante par rapport aux non linéarité par l'utilisation du grand gain, moyennant une hypothèse raisonnable sur ces non linéarité [65, 62, 66, 18]. Ces résultats ont fait l'objet de développement récents et on été appliqués à divers procédés chimiques ou mécaniques [66, 60, 14, 28].

Un bon nombre de travaux ont été menés sur les systèmes bilinéaires [40] où plus généralement affines en l'état. Une façon d'étendre ces résultats consiste à essayer de transformer des systèmes non linéaires

par changement de coordonnées en l'une de ces forme modulo éventuellement une injection d'entrées sorties, à l'initiative de Kerner et Isidori [4] et Bestle-Zeitj [34].

Il existe de nombreuses autres techniques que nous ne pouvons toutes citer, parmi lesquelles les observateurs à modes glissant [87, 106], les extensions non linéaires de l'observateur de Luenberger [34, 57, 55]. La méthode de linéarisation à travers un retour d'état non linéaire lisse ou un changement de coordonnées non linéaires (transformation par difféomorphisme[81]). D'autres méthode ont été également développées, comme l'utilisation des "zéros dynamiques" introduit par Byrnes et Isidori.

En dépit de tout l'intérêt accorde aux systèmes non linéaires en temps continu, les systèmes non linéaires en temps discret n'ont reçu quant à eux qu'une faible attention. Il existe différentes raisons à cela ; d'une part, la majorité des systèmes physiques évoluent (au sens du comportement) naturellement en temps continu et non en temps discret, d'autre part, certaines propriétés géométriques se perdent lors du passage du continu au discret. C'est pourquoi l'intérêt accorde aux systèmes non linéaires en temps discret est assez récent mais ne cesse de croître [26, 25, 9, 8]... Le fait que la plupart des systèmes de commande d'un procédé est réalisée par un ordinateur numérique en temps réel est la principale raison de cet intérêt croissant. La nature séquentielle des calculs et des échanges avec l'extérieur impose de décrire le processus par un modèle discret bien que la modélisation ait d'abord conduit à établir un modèle de connaissance en temps continu.

Ce travail comporte deux parties relativement indépendantes procède par un premier chapitre contenant quelques résultats classiques sur l'observabilité et la conception des observateurs pour les systèmes non linéaires en temps continus ainsi qu'en temps discret ainsi que les systèmes mécaniques décrits par les équations dites d'Euler Lagrange.

Dans la première partie, on aborde le problème de caractérisation par difféomorphisme des systèmes mécaniques. La deuxième partie est consacrée à l'étude de la généricité de l'observabilité des systèmes en temps discret.

L'objet du deuxième chapitre est de donner en premier lieu une discussion sur ces équivalences affines pour les systèmes décrits par les équations (2.1) pour lesquels nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes. Tout d'abord, nous étudions une famille d'équations aux dérivées partielles pour laquelle un algorithme permettant la construction de la solution (quand elle existera) sera présenté. Ensuite, nous fournissons une condition nécessaire et suffisante caractérisant les systèmes de forme (2.1) qui peuvent se ramener après un changement de coordonnées en une forme affine. Si la construction d'une telle transformation est hors de portée dans le cas général, pour les systèmes d'Euler-Lagrange cette question est résolue dans [74], et nous proposons une méthode élégante qui fournit explicitement la solution. Pour finir, nous faisons une comparaison de nos résultats avec ceux qui sont dans la littérature ainsi l'approche Riemannienne introduite par M. Spong et Bedrossian. N.S dans [12, 13]. Nous illustrons notre approche, sur les exemples typiques incluant : le système Tora, le Manipulateur et le pont roulant pour lequel un observateur exponentiel avec une vitesse de convergence arbitraire serait présenté.

Grâce à la restrictivité des conditions données dans le chapitre précédent pour tester les équivalences affines des systèmes mécaniques, nous avons proposé les formes triangulaire en la partie non mesurée (en la vitesse) $\dot{q} = v$ pour l'analyse de commandabilité et d'observations. Nous voulons donner des conditions d'équivalence de système (2.1) avec une forme affine triangulaire. Autrement dit à quelles conditions le

système (2.1) peut être modéliser par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = a_{11}(\theta) z_1 \\ \dot{z}_1 = b_1(\theta, \tau) \\ \dot{\theta}_2 = a_{21}(\theta) z_1 + a_{22} z_2 \\ \dot{z}_2 = b_2(\theta, \tau) + P_2^\theta(z_1) \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n = a_{n1}(\theta) z_1 + a_{n2}(\theta) z_2 + \dots + a_{nn}(\theta) z_n \\ \dot{z}_n = b_n(\theta, \tau) + P_n^\theta(z_1, \dots, z_{n-1}) \end{array} \right. \quad (1)$$

ou les P_i^θ sont des polynômes et $a_{ij}(\cdot), b_i(\cdot)$ sont des fonctions de classe C^∞ .

Nous avons appliqué cette méthode à une famille de système à deux degré de liberté : nous avons mis en évidence un changement de coordonnées permettant d'écrire un système d'Euler-Lagrange sous forme triangulaire du type (1) pour laquelle la conception d'observateurs et même la stabilisation par retour de position peut être accomplie. Grâce à ceci et pour cette famille de systèmes mécaniques nous proposons un observateur à convergence globale. En outre, le problème de la stabilisation par retour de position est résolu même si la matrice d'inertie $M(q)$ n'est pas uniformément bornée.

Comme nous l'avons déjà signalé, avant de s'attaquer à la conception d'un observateur, on commence par se demander si le système dont on veut reconstituer l'état est observable. Dans le cas négatif, on sait qu'il ne sera pas possible de construire un observateur, du moins si on cherche un observateur dont la vitesse de convergence puisse être réglée arbitraire. Il est par conséquent intéressant de savoir "combien" de systèmes sont observables, en 1991 est paru un premier article dans de J.P. Gauthier, H. Hammouri et I. Kupka [65] dans lequel les auteurs établissent de généricité pour les systèmes continus sans contrôle. J.P. Gauthier et I. Kupka ont ensuite étudié le même problème pour les systèmes contrôlés [61] et ont montré que l'observabilité était générique dès que le nombre de sorties et strictement supérieur au nombre d'entrées. Les outils utilisés pour établir ces résultats sont ceux de théorie de la transversalité.

En utilisant ces mêmes outils, J-C. Vivalda a étudié dans [59] les cas des systèmes discrets sans contrôles pour lesquels il montre que l'observabilité est générique. S. Ammar et J-C-Vivalda ont ensuite étudié le même problème pour les systèmes contrôlés [9] et on montré que l'observabilité était générique dès que le nombre de sorties et strictement supérieur au nombre d'entrées. Les outils utilisés pour établir ces résultats sont ceux de théorie de la transversalité.

Dans cette deuxième partie de ce mémoire, on s'intéresse aux systèmes en temps discret, plus précisément nous abordons le problème de la généricité de l'observabilité différentielle forte pour des systèmes non linéaires contrôlés définis

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k, u_k) \end{array} \right. \quad (2)$$

avec

- $x_k \in X, u \in U, y_k \in \mathbb{R}^p$
- X et U sont des variétés C^∞ de dimension respectivement n et m , connexes, compactes satisfaisant le deuxième axiome de dénombrabilité.
- $f : X \times U \rightarrow X$: un difféomorphisme paramétré : c'est-à-dire pour tout $u \in U$, l'application $f(\cdot, u)$ est un difféomorphisme C^∞ ; nous notons $\text{Diff}_U(X)$ l'ensemble des difféomorphisme paramétrés ;
- $h : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application C^∞ .

L'observabilité forte et l'observabilité différentielle forte pour les systèmes continus étaient introduites par Jean paul Gauthier et Ivan KupKa dans [61]. Nous introduisons d'une façon analogue la définition

d'observabilité différentielle forte pour les systèmes discrets. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \Theta_{2n+1}^{f,h} X \times U^{2n+1} &\longmapsto \mathbb{R}^{(2n+1)p} \times U^{2n+1} \\ (x, \underline{u_{2n+1}}) &\longmapsto (h(x, u_0), h(f^1(x, \underline{u_1}), u_1), \dots, h(f^{2n}(x, \underline{u_{2n}}), u_{2n}), \underline{u_{2n+1}}) \end{aligned} \quad (3)$$

Définition 0.0.1. *Le système (2) est fortement observable si l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est injective. Il est fortement différentiellement observable si l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion injective.*

Lorsque la dimension d'espace de sortie p est strictement supérieure à celle d'espace d'entrée m , S. Ammar et J.-C. Vivalda ont montré dans [9] la généricité de l'observabilité pour les systèmes discrets de type (2). plus précisément, tout système de type (2) peut être approché par un autre système fortement observable.

Nous montrons dans ce travail, que si $p > m$ alors tout système de type (2) peut être approché par un autre système Fortement différentiellement observable. Plus précisément, nous montrons que l'ensemble des applications $(f, h) \in \text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion contient un ensemble résiduel dans $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ muni de la topologie C^∞ de Whitney. Nous commençons par présenter quelques notions sur la topologie de Whitney et la transversalité. Nous présentons ensuite le théorème de transversalité de Thom multijets et d'Abraham qui jouerons un rôle important dans la démonstration. Enfin nous présentons la contribution de cette partie :

Théorème 0.0.1. *Si p est strictement supérieure à m , l'ensemble des application $(f, h) \in \text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que le système (2) est fortement différentiellement observable est résiduel dans $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$.*

Première partie

Transformation des systèmes d'Euler-Lagrange.

Chapitre 1

Observabilité et observateurs

Pendant les deux dernière décennies, il y a eu intérêt énorme pour l'étude de l'observabilité et la conception des observateurs pour les systèmes non linéaires. Ceci parce que le filtrage et la reconstruction des signaux jouent un rôle fondamental dans le traitement des signaux, les télécommunications, et la théorie de la commande. Malgré les efforts dans ces activités de recherche, beaucoup de problèmes d'observation demeurent ouverts. Ce travail s'inscrit principalement dans le domaine de la synthèse d'observateurs et l'observabilité des systèmes non linéaires. Compte tenu l'abondance et de la diversité des résultats actuellement disponibles dans ce domaine, il est utile d'en donner un panorama général afin d'inscrire nos propres travaux dans le contexte des différentes tendances déjà existantes. Toutefois, nous n'entrons pas dans les détails techniques.

Nous considérons des systèmes non linéaires continus de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

ou $x \in M$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$. M est une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ appelée espace d'états.

1.1 Observabilité et observateurs des systèmes linéaires

Considérons un système linéaire défini par le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1.2)$$

avec $x \in M$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$, x représente l'état, u l'entrée et y la sortie. On peut retrouver les notions brièvement exposées ci-dessous par exemple dans [94, 16, 95].

1.1.1 Définition- condition de rang

Définition 1.1.1. *Le système (1.2) est observable si, étant donné l'instant t_0 , il existe un instant t_1 fini comme la connaissance de $y(t_0, t_1)$ et $t \mapsto u(t_0, t_1)$ permette de déterminer de manière unique l'état $x(t_0) = x_0$ (ceci pour tout l'entrée du système).*

La notion d'observabilité d'un système consiste à pouvoir reconstruire, à tout instant, et à partir des mesures des entrées et des sorties l'état à l'instant initial. Une notion importante est l'indistinguabilité de deux états initiaux :

Définition 1.1.2. *Deux états initiaux $x^1(t_0)$ et $x^2(t_0)$ sont dits indistinguables si $\forall t \geq t_0$, les sorties correspondantes $y^1(t)$ et $y^2(t)$ sont identiques quelle que soit l'entrée u du système.*

L'indistinguabilité est une relation d'équivalence sur M . On note alors $I(x^0)$ la classe d'équivalence d'un état x^0 quelconque.

Un système est observable si l'ensemble des points indistinguables de x^0 se réduit à x^0 , i.e. $I(x^0) = \{x^0\}$. Le système (1.2) est observable si, pour tout x , $I(x) = \{x\}$.

Pour tester l'observabilité d'un système linéaire, on peut regarder le rang de la matrice d'observabilité, définie par :

$$\Theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

La condition de rang de l'observabilité pour les systèmes linéaires peut s'énoncer de la manière suivante :

Définition 1.1.3. [94] *Le système linéaire (1.2) est observable si et seulement si le rang de la matrice Θ est égal à n . On dit alors que la paire (C, A) est observable.*

L'observabilité des système linéaire ne dépend pas de l'entrée du système (la condition du rang ne dépend que de A et C). Cette propriété n'est pas toujours vraie dans le cas des systèmes non linéaires.

En supposant que le système (1.2) est observable, on peut alors construire un observateur : une solution classique est l'observateur de Luenberger [35, 36]. Il s'agit d'un système composé de la copie du système à observer, à laquelle on ajoute un terme correcteur dépendant de la sortie. La condition d'observabilité du système d'origine suffit pour assurer la convergence de l'observateur. Cet observateur est décrit par la dynamique suivante, avec $\hat{x}$ l'estimation de l'état :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}). \quad (1.3)$$

En posant $\tilde{x} = \hat{x} - x$, l'erreur d'estimation obéit à la dynamique suivante :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}. \quad (1.4)$$

Pour que l'observateur converge, il suffit de placer les valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi plan complexe gauche, ce qui est possible si la matrice Θ est de rang plein. La convergence de l'erreur d'estimation de l'observateur est exponentielle, et sa vitesse dépend du choix de la matrice de gain K .

1.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Contrairement au cas des systèmes linéaires, le concept de l'observabilité des systèmes non linéaires est plus délicat à aborder. Les notions rappelées ci-dessous sont issues de [64, 80, 60, 41]. Une des différences majeures avec les systèmes linéaires est que l'observabilité des systèmes non linéaires peut dépendre de l'entrée. On peut le voir facilement à travers l'exemple suivant : Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 u \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

La variable d'état x_2 peut être exprimée en fonction de la sortie et de l'entrée, $x_2 = \frac{\dot{y}}{u}$. Il est alors évident que x_2 peut être connu à partir des grandeurs disponibles (sortie et entrée) si $u \neq 0$, l'observabilité du système (1.5) dépend donc de l'entrée.

1.2.1 Observabilité et observabilité locale

Considérons le système non linéaire (1.1). La définition de l'observabilité est liée à l'indistinguabilité.

Définition 1.2.1. [80] Deux états initiaux $x^1(t_0)$ et $x^2(t_0)$ sont dits indistinguables si $\forall t \in [t_0, t_1]$, les sorties correspondantes $y^1(t)$ et $y^2(t)$ sont identiques quelle que soit l'entrée admissible u du système.

On dira que le système (1.1) est observable si toute paire $(x_0, x-1)$ de points distincts est distinguable.

Définition 1.2.2. [80] L'état x^0 est observable si l'ensemble des point indistinguables de x^0 se réduit à x^0 , i.e. $I(x^0) = \{x^0\}$. Le système (1.2) est observable si, pour tout $x \in M$, $I(x) = \{x\}$.

On remarque que l'observabilité du système (1.1) ne signifie pas obligatoirement que toute entrée distingue les points de M . Le concept d'observabilité globale est modifié pour introduire la notion d'observabilité locale qui est mieux adaptée à l'étude des systèmes non linéaires.

Définition 1.2.3. [80] Soit U un sous ensemble de M contenant deux états initiaux x^1 et x^2 . On dit que x^1 est U -indistinguables de x^2 si, pour tout $t \geq t_0$, les sorties correspondantes sont identiques quelque soit l'entrée admissible du système et si, pour tout $t \geq t_0$, $x^1(t)$ et $x^2(t)$ appartiennent à U .

L' U -indistinguabilité n'est pas en général une relation d'équivalence sur U , car en général elle n'est pas transitive (voir [80]). Néanmoins, nous pouvons donner un concept local d'observabilité. On note alors $I_U(x^0)$ l'ensemble des états indistinguables de x^0 .

Définition 1.2.4. [80] L'état x^0 est localement observable si, pour tout voisinage ouvert U de x^0 , $I_U(x^0) = \{x^0\}$. Le système (1.1) est localement observable si, pour tout $x \in M$ $I_U(x) = \{x\}$.

1.2.2 Observabilité faible. Observabilité faible locale

Définition 1.2.5. [80] L'état x^0 est faiblement observable s'il existe un voisinage ouvert V de x^0 tel que $I(x^0) \cap V = \{x^0\}$. Le système (1.1) est faiblement observable si, pour tout $x \in M$ $I(x) = \{x\}$.

Cela signifie qu'un état est faiblement observable s'il est le seul indistinguishable dans son voisinage. Ce concept affaiblit donc le concept d'observabilité globale.

Définition 1.2.6. [80] L'état x^0 est localement faiblement observable s'il existe un voisinage ouvert V de x^0 tel que, pour tout voisinage ouvert U de x^0 contenu dans V , $I_U(x^0) = \{x^0\}$. Le système (1.1) est localement faiblement observable si, pour tout $x \in M$ $I_U(x) = \{x\}$.

Là encore, la notion d'observabilité locale affaiblit le concept d'observabilité globale puisque l'état doit être localement observable dans un ouvert. À titre d'exemple, soit le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ y &= x_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce système est observable, dans le sens où on peut exprimer l'état en fonction de la sortie et de sa dérivée première. Néanmoins, au voisinage de $x_2 = 0$, l'état ne peut pas être complètement déterminé sur $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$; le système est faiblement observable de plus en posant $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, le système est localement faiblement observable.

1.3 Condition de rang et observabilité

Dans le cas des systèmes linéaires, on peut vérifier l'observabilité en appliquant la condition du rang vue précédemment. Pour les systèmes non linéaires, on peut montrer qu'il existe une condition du rang incluant celle obtenue pour les systèmes linéaires.

Définition 1.3.1. [80] Soit le système (1.1). L'espace d'observabilité, noté H , est le plus petits sous espace vectoriel de fonctions de M à valeurs dans $\mathbb{R}$, contenant $h_1, h_2, \dots, h_p$ et fermé sous l'opération de la dérivation de Lie par rapport aux champs de vecteurs $f(x, u)$, u fixé.

On note dH l'espace des différentielles des éléments de H . Comme il est précisé dans la définition précédente, cet espace est défini pour une valeur de l'entrée fixée.

Définition 1.3.2. [3, 80] Le système (1.1) est dit satisfaire la condition de rang d'observabilité en x_0 si :

$$\dim dH(x_0) = n.$$

Le système (1.1) est dit satisfaire la condition de rang d'observabilité si, pour tout $x \in M$:

$$\dim dH(x) = n$$

Dans le cas du système linéaire (1.2), on considère alors l'espace vectoriel H des fonction de M dans $\mathbb{R}^p$ engendré par $Cx, CAx, \dots, CA^{n-1}x$. En chaque point x , l'évaluation de dh est alors donnée par $C, CA \dots CA^{n-1}$: on retrouve donc la condition de rang donnée précédemment.

On peut alors énoncer

Théorème 1.3.1. [3, 80] Si le système (1.1) satisfait la condition de rang d'observabilité en x^0 , alors il est localement faiblement observable en x^0 .

1.4 Quelques observateurs non linéaires

Une condition nécessaire à la synthèse d'un observateur est l'observabilité du système. L'observabilité d'un système n'est cependant pas suffisante pour l'existence d'un observateur : en effet, contrairement aux systèmes linéaires, on ne peut affirmer d'une manière générale qu'un système non linéaire observable admet un observateur. Néanmoins, certains travaux donnent des conditions d'existence d'un observateur pour un système donné (voir par exemple [96, 97, 99] pour les observateurs exponentiels).

Un observateur est un système dynamique qui a pour entrées les sorties est éventuellement un nombre fini de leur dérivées et les entrées du système à observer et qui a pour sortie l'estimation de l'état.

Définition 1.4.1. [3, 5] On appelle observateur asymptotique (ou reconstituteur d'état) d'un système dynamique (1.1), un système dynamique dont les entrées sont constituées des vecteur d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie, noté $\hat{x}$, est l'état estimé :

$$\begin{cases} \dot{z} &= \hat{f}(z, y, u) \\ \hat{x} &= \varphi(z, y, u) \end{cases} \quad (1.7)$$

tel que

1. z appartient à N une variété différentielle et $\varphi : N \mapsto M$.
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\hat{x} - x) = 0$.
3. Si $\hat{x}(0) = x(0)$, alors pour tout $t \geq 0$, on a $\hat{x}(t) = x(t)$.

Cette notion d'observateurs peut être généralisé au cas où les entrées de l'observateur incluant un certain nombre de dérivées d'entrées et de sorties [46, 40]

1.4.1 Observateur de Luenberger étendu

Cette classe d'observateurs s'applique à des systèmes non linéaires faiblement localement observable. L'un des premiers travaux a été réalisé dans [34], et a été étendu plus tard à l'étude de la transformation d'un système non linéaire en une forme canonique, pour laquelle un observateur pourrait être calculé à partir des techniques linéaires afin d'obtenir une équation dynamique de l'erreur d'estimation linéaire (comme l'observateur de Luenberger). Les transformations mises en oeuvre dépendent de l'état x , de l'entrée u et d'un nombre fini de ses dérivées [57, 55]. Ces travaux ne donnent pas de condition nécessaire et suffisante d'existence des transformations de coordonnées d'état et de sortie.

1.4.2 Méthodes linéarisant l'erreur d'observation

Nous exposons dans ce paragraphe les méthodes qui utilisent une linéarisation de l'erreur d'observation pour adapter les méthodes d'observation des systèmes linéaires aux cas non linéaires. Le principe de ces méthodes introduites par Bestle et Zeitz [34] est le suivant : Considérons le système (1.1), et on cherche une transformation non linéaire T_u telle que $x = T_u(z)$ et

$$\begin{cases} \dot{z} &= Az + \Phi(y, u) \\ y &= Cz \end{cases} \quad (1.8)$$

Où les matrices A et C ont les formes canoniques de l'observabilité. Une fois la transformation obtenue, la détectabilité de la paire (A, C) suffit pour la convergence de l'observateur de type Luenberger pour le système linéarisé (1.8) qui est dans ce cas décrit par l'équations :

$$\dot{\hat{z}} = A \hat{z} + \Phi(y, u) + K (y - C\hat{z})$$

où K est la matrice est telle que le spectre de la matrice $A + KC$ soit dans le demi plan complexe gauche.

Avant de donner des conditions suffisantes qui permettent d'obtenir la transformation désirée, nous rappelons les notions suivantes. Pour une fonction h de classe C^∞ , la dérivée de Lie suivant un champs de vecteur C^∞ , f est donnée par :

$$L_f(h) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x)$$

Nous rappelons ensuite la définition du crochet de Lie :

$$[f, g] = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x)$$

et nous définissons ad_f par $\text{ad}_f(g) = [f, g]$, ainsi que ad^k par la récurrence suivante

$$\text{ad}_f^k g = [f, \text{ad}_f^{k-1} g]$$

Enfin nous appellerons indice d'observabilité, le plus petit p -uplet $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ tel que

$$\sum_{i=1}^p \mu_i = n$$

$$\text{et } \dim \left(\text{Span} \left(L_f^j(h)(x); j = 0, \dots, \mu_i - 1 \right) \right) = n \quad \forall x$$

Les auteurs Walcott, Corless et Zac [106] ont montré que les conditions suivantes sont suffisantes pour avoir l'existence de la transformation T

$$\begin{pmatrix} L_f^0(dh)(x) \\ L_f^1(dh)(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}(dh)(x) \end{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial z_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les auteurs Kerner et Respondek [81] ont étendu cette condition au cas où le système est multi-sortie. Leur résultat est donné par le théorème

Théorème 1.4.1. *Considérons le système (1.1). Soit $g^1(\xi), \dots, g^p(\xi)$ des champs de vecteurs défini par :*

$$L_{g^j} L_f^{n-1}(y^i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq l \leq k_i - 1 \\ \delta_{ij} & \text{si } l = k_i \end{cases}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, k_i l'indice d'observabilité et $l = 0, \dots, k_i - 1$. Le changement de coordonnées $x = T(z)$ si et seulement si pour tout couple (i, j)

$$[ad^k(-f)g^i, ad^l(-f)g^j] = 0$$

Depuis, plusieurs autres chercheurs ont développé des extensions de ces méthodes. On peut citer les travaux de Reboulet et Champetier [108] où les auteurs ont développé une méthode consistant à linéariser un système autour d'un ensemble de point d'équilibre. On peut également citer les méthodes de linéarisation étendue. Cette méthode développée par Bauman et Rugh [107] consiste à corriger la dynamique de l'observateur par une fonction non linéaire déterminée de façon que les valeurs propres du système linéarisé tangent de l'erreur de l'observation restent invariants.

1.4.3 Observateurs à grands gains

Il existe une grande classe d'observateurs non linéaires qui présentent d'excellentes propriétés globales : Ce sont des observateurs grand gain dont la référence historique est l'article de Gauthier Hammouri et Othman en 1992 [66].

Contrairement au filtre de Kalman étendu, ces observateurs sont globaux à convergence exponentielle. En revanche, ils ne s'appliquent qu'à une classe restreinte de systèmes non linéaires. Considérons le cas des systèmes mono-entrées, la classe de système considérée est constituée des systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \\ y &= x_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

où pour tout i , $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \neq 0$. Cette forme de système s'appelle forme canonique de l'observabilité. Une remarque triviale est que ces systèmes sont observables puisque la connaissance de y et de ses $n - 1$ premières dérivées donne successivement $x_1, \dots, x_n$. Les théorèmes qui caractérisent les systèmes pouvant se mettre sous la forme canonique d'observabilité sont donnés dans le livre de Gauthier-Kupka [61].

Les observateurs grands gains de type Luenberger s'écrivent sous la forme

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K_\theta (y - h(\hat{x}, u)) \quad (1.10)$$

où $K_\theta = \delta_\theta K$, δ_θ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonale sont $(\delta_\theta)_{ii} = \theta^i$ où θ est paramètre supposée grand et K une matrice fixée, caractérisée par l'équation de Lyapunov. Alors

Théorème 1.4.2. [61, 66] *Pour tout $a > 0$, il existe $\theta > 0$ assez grand de telle sorte que pour tout $x \in M$, pour tout $\hat{x} \in M$, il existe un polynôme k , tel que*

$$\|\hat{x} - x\| \leq k(a) \exp -at \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

Ce théorème exprime le fait que les observateurs grands gains de type Luenberger sont des observateurs exponentiels. Il est à signaler que l'utilisation d'un observateur à grand gain peut conduire à une grande sensibilité au bruit de l'observation, car il amplifie l'erreur d'observation. D'où le compromis classique lors du choix de θ entre performance et robustesse. Un grand θ assure une convergence rapide mais amplifie les erreurs d'observations.

Il est aussi intéressant à signaler que plusieurs chercheurs ont amélioré cette approche [21, 18].

1.4.4 Observateurs à mode glissant

Cette approche initiée par Slotine [87] en 1987 et depuis développée par plusieurs chercheurs [106] que se soit dans le domaine déterministe ou stochastique. Les systèmes étudiés sont de type :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + f(x, u) \\ y &= Cx \end{cases} \quad (1.11)$$

la fonction f est définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que

$$\|f(x, u)\| \leq \gamma \|x\|$$

Sous les hypothèses

Hypothèse 1.4.1. *Il existe une matrice K telle que $A - KC$ est Hrwitz.*

Hypothèse 1.4.2. *La fonction f peut s'exprimer sous la forme $f(x, u) = P^{-1}C^\top \varepsilon(x, u)$ où ε est bornée et vérifie*

$$\|\varepsilon(x, u)\| \leq \rho \text{ et } P \text{ est la solution de l'équation de Lyapunov}$$

$$(A - KC)^\top P + P(A - KC) = -Q$$

pour une matrice Q donnée tq $Q = Q^\top$

Walcott et Zac [106] ont monté :

Théorème 1.4.3. *Considérons le système (1.11) qui vérifie les hypothèses ci-dessus et désignons par $\hat{x}$ la variable d'état de l'observateur et en considérant l'ensemble*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, C(x - \hat{x}) = 0\}$$

alors le système

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + S_1(\hat{x}, u, y) + K(y - Cx)$$

avec

$$S_1(\hat{x}, u, y) = \begin{cases} \frac{P^{-1}C^\top C(x - \hat{x})}{\|C(x - \hat{x})\|} \rho & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S \end{cases}$$

est un observateur global exponentiel pour le système (1.11).

1.5 Observateur pour les systèmes mécaniques

Dans cette partie, des différents observateurs [48, 49, 84, 90] sont présentés pour l'estimation des vitesses, à partir des mesures de position d'un système d'Euler-Lagrange. Tous les observateurs considérés peuvent être employés en même temps qu'une loi de commande linéaire par retour d'état ; les propriétés de stabilité des systèmes en boucle fermée obtenus sont brièvement décrites pour chacun d'eux.

Avant de présenter ces observateurs, il est utile de rappeler que le modèle dynamique d'un système d'Euler-Lagrange à n degrés de liberté peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v, \\ M(q)\dot{v} + C(q, v)v + V(q) &= \tau, \end{aligned} \tag{1.12}$$

où $v = \dot{q}$ est la vitesse, $M(q)$ dénote la matrice d'inertie, tandis que $C(q, v)v$ regroupe les termes des forces centrifuges et de Coriolis, $V(q)$ correspond aux forces gravitationnelles, et τ est le vecteur des couples d'entrée.

Les observateurs linéaires, qui seront présentés ci-après dans les sections 1.5.1-1.5.3, ne dépendent pas du modèle dynamique de robot, alors que l'application d'un observateur non linéaire (section 1.5.4) exige la connaissance des paramètres du système dans l'équation (1.12).

1.5.1 Premier observateur

Le premier observateur est un observateur asymptotique simple et de type grand gain, développée dans [90] par Nicosia, le Tornambé et le Valigi. L'observateur est conçu sous l'hypothèse non restrictive qu'il existe une loi de commande par retour d'état telle que le système (1.12) en boucle fermée est uniformément asymptotiquement stable.

Définissons les variables d'états par $x = (x_1, x_2)^\top$ où $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$. Supposons que seules les positions sont disponibles, c'est à dire, on prend $y = q$ comme vecteur de variables de sortie. L'observateur proposé est décrit par le modèle grand gain suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \varepsilon^{-1} H_p(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \varepsilon^{-2} H_v(y - \hat{x}_1) \end{aligned} \tag{1.13}$$

où $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^\top$, avec $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ dénotant respectivement les estimations dynamiques des positions x_1 et des vitesses x_2 . Les matrices constantes $H_p = \text{diag}(h_{p,i})$ et $H_v = \text{diag}(h_{v,i})$ sont choisies de sorte que les solutions des polynômes $P_i = \lambda^2 + h_{p,i}\lambda + h_{v,i}$, $i = 1 \dots n$ sont à parties réelles négatives.

Dans [90] les auteurs montrent que, pour des valeurs suffisamment petites de ε , le système en boucle fermée, (1.12)-(1.13) est asymptotiquement stable sous l'action d'une loi de commande de type $\tau = \bar{\mu}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_1)$. En outre, par un bon choix de ε , le bassin d'attraction peut être rendu arbitrairement grand.

1.5.2 Deuxième observateur

Dans [48] Berghuis and Nijmeijer ont présenté une procédure systématique qui exploite la propriété de passivité des systèmes d'Euler-Lagrange dans la conception des systèmes contrôleur-observateur afin de résoudre les problèmes de régulation et suivi de trajectoire par retour de position. La stabilité semi-globale asymptotique a été démontrée pour des gains suffisamment grands comme dans [50]. Tout d'abord un observateur linéaire, qui produit une estimation de la position est décrit par le système suivant

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}} &= w + L_d(e - \hat{e}) \\ \dot{w} &= L_p(e - \hat{e})\end{aligned}\tag{1.14}$$

où $e := q - q_d$ avec q_d est une trajectoire donnée. $\hat{e} = \hat{q} - q_d$ est l'estimation d'erreur. Les matrices L_d et L_p sont symétriques définies positives. Considérons maintenant la loi de commande suivante

$$\tau = -K_d \dot{\hat{e}} - K_p \hat{e}$$

où les gains de contrôleur, K_p et K_d , sont les matrices définies symétriques et positives.

Il a été montré dans [48] que le système (1.12) en boucle fermée avec cette loi de commande est uniformément borné et pour un choix approprié des matrices de gain K_p , K_d , L_p , L_d . Une stabilité semi-globale est montrée (Voir [48] pour des détails au sujet du choix des matrices K_p , K_d , L_p , L_d et la trajectoire q_d).

1.5.3 Troisième observateur

Berghuis et Nijmeijer ont présenté dans [49] une procédure systématique dans la conception des systèmes contrôleur-observateur afin de résoudre les problèmes de régulation des robots. Il s'agit de compenser les termes gravitationnels et de choisir une loi de commande linéaire par retour d'état dans laquelle la vitesse est remplacée par une estimation, plus précisément :

$$\begin{aligned}\tau &= V(q) - K_d \dot{x} - K_p e \\ \dot{x} &= -L x + K_d e\end{aligned}\tag{1.15}$$

avec $e = q - q_d$ l'erreur de position et les matrices K_d , K_p , L sont symétriques définies positives. Berghuis et Nijmeijer montrent dans [49] que la loi de commande (1.15) stabilise globalement asymptotiquement le système (1.12) en un équilibre de type $(\dot{q}, e, x) = 0$.

La particularité de ce contrôleur-observateur (1.15) est qu'il n'utilise pas l'état x de l'observateur, mais sa dérivé $\dot{x}$. Il est montré dans [49] que $\dot{x}$ reconstruit réellement le signal de vitesse $\dot{q}$.

En conclusion, pour des buts pratiques, il est utile de noter que l'équation d'observateur (1.15) peut être généralisée comme suit

$$\dot{x} = -L_1 x + L_2 e$$

où L_1 et L_2 sont les matrices symétriques définies positives, avec L_2 pas nécessairement égal à K_d ; la propriété de la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermé est toujours vérifiés.

1.5.4 Quatrième observateur

Le dernier observateur considéré dans ce chapitre est un observateur non linéaire réduit à convergence exponentiel, proposé par Khelfi et Alii dans [72]. La conception de l'observateur est intéressante dans le sens qu'aucun changement de coordonnées n'est nécessaire, mais le procédé pour choisir ses paramètres est tout à fait complexe.

Pour écrire les équations de cet observateur il est utile récrire le modèle dynamique de (1.12) sous la forme canonique observable suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x) + h(y)\tau \\ y &= Hx\end{aligned}\tag{1.16}$$

où $x_i = (q_i, \dot{q}_i)^\top$, $x = (x_1^\top, \dots, x_n^\top)^\top$, $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \text{diag}(A_i)$, $H_i = (1, 0)$, $H = \text{diag}(H_i)$, $f(x) = (\dots f_i(x)^\top \dots)^\top$, $f_i(x) = (0, \alpha_i(x))^\top$, où $\alpha_i(x)$ dépend des paramètres du systèmes (1.12).

L'observateur proposé par Khelfi et Alii dans [72] est le suivant :

$$\begin{aligned}z &= T\hat{x} \\ \dot{z} &= Nz + Ly + g(z, y) + J(y)\tau \\ \hat{x} &= Mz + Ey\end{aligned}\tag{1.17}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} = (\hat{x}_1^\top \dots \hat{x}_{2n}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\hat{x}_i = (\hat{q}_i, \hat{\dot{q}}_i)^\top$, $T = \text{diag}(T_i)$; où $T_i^\top \in \mathbb{R}^2$, N , L , M et E sont des matrices diagonales, $g(z, y) = (g_1(z, y) \dots g_n(z, y))^\top$ avec $g_i(z, y) \in \mathbb{R}$. Finalement, $J(y)$ est une matrice de dimension appropriée.

Khelfi et Alii montrent dans [72], si l'état x reste dans un domaine D_0 et $\dot{q}$ reste bornée, que le système (1.17) est un observateur exponentiel pour le système (1.16) si certaines conditions qui dépendent du dynamique du système portant sur les matrices d'observateur, sont satisfaites. Le choix des matrices nécessite la connaissance du modèle de robot, qui peut être cruciale dans la réalisation pratique de l'observateur, car les incertitudes sont généralement présentes dans la connaissance des paramètres de l'inertie de robot et des perturbations comme le frottement.

Dans [72] des conditions suffisantes sont donnés pour la stabilité asymptotique de système en boucle fermé, quand la loi de commande suivante est employée ainsi que l'observateur (1.17) :

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{\hat{q}}$$

Il est intéressant à remarquer que des essais effectués ont prouvé que les observateurs grands gains des paragraphes 1.5.1 et 1.5.2 produisent les meilleurs résultats, mais ils sont entachés par un bruit qui peut être indésirable pour de plus grands robots employés pour des applications industrielles. L'observateur du paragraphe (1.5.3) offre une bonne erreur d'estimation de la vitesse. Le résultat du paragraphe (1.5.4) obtenues en employant l'observateur non linéaire sont tout à fait sensibles aux incertitudes dans le modèle dynamique de robot.

Chapitre 2

Transformation des systèmes d'Euler-Lagrange

Nous abordons dans ce chapitre le problème de la transformation des systèmes d'Euler-Lagrange. On caractérise d'une manière rigoureuse une classe de ces systèmes. Notre résultat est une autre interprétation des résultats de [7, 12, 13, 22].

2.1 Introduction

Nous considérons un système mécanique lagrangien avec comme variété de configuration $\mathbb{R}^n$, de coordonnées généralisées $q = (q_1 \dots q_n)$ décrit par des équations de la forme

$$\begin{aligned}\dot{q} &= v, \\ M(q)\dot{v} + C(q, v)v + V(q) &= \tau,\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $v = \dot{q}$ est la vitesse, $M(q)$ dénote la matrice d'inertie, tandis que $C(q, v)v$ regroupe les termes des forces centrifuges et de Coriolis, $V(q)$ correspond aux forces gravitationnelles, et τ est le vecteur des couples d'entrée. La formulation lagrangienne permet d'exprimer de façon concise les équations de mouvement. L'intérêt de la formulation lagrangienne est que cette possibilité n'est pas réservée exclusivement à la mécanique; dans presque tous les domaines de la physique, des principes variationnels peuvent être utilisés pour exprimer les équations du mouvement que ce soit les équations de Newton ou celles de Maxwell ou de Schrodinger. C'est pour cette raison qu'elles sont le sujet d'une littérature abondante [7, 44, 89, 67, 82, 103]....

Lorsque ces systèmes sont complètement actionnés, ils sont globalement linéarisables par retour d'état. Mais la linéarisation par retour d'état peut être effectuée seulement quand toutes les variables sont mesurées. Malheureusement dans la pratique, très souvent les variables de la vitesse ne peuvent pas être mesurées. En outre une commande par retour d'état a l'inconvénient en pratique que les dispositifs utilisés pour mesurer la vitesse sont entachés de bruit, de plus la différentiation numérique ne paraît pas adéquate pour estimer des vitesses très rapides ou très lentes [11]. D'où l'intérêt à concevoir des lois de commande par retour de position. Il est important de noter que la matrice $C(q, v)v$ est une fonction non affine en la partie de l'état non mesurée v . Ceci illustre bien la difficulté de stabiliser globalement ou de construire des observateurs pour ce type de systèmes non linéaires, pour lesquels on observe uniquement les positions q . En plus cet obstacle exclut d'appliquer la plupart des techniques classiques, par exemple, les méthodes

de [70, 63, 58]. Pour explications complémentaires sur les obstacles qui sont dus à la présence des termes non affines en ce qui concerne les variables non mesurées, voir l'introduction du [42] et ses références.

Récemment, dans [17], une alternative élégante pour les systèmes à un degré de liberté a été apportée. L'auteur a présenté un observateur réduit convergeant exponentiellement. Cet observateur est basé sur un changement de coordonnées non linéaire qui a permis de récrire le système en une forme affine en la vitesse. Ce résultat crucial a permis de définir un contrôleur linéaire de type "PD+" pour résoudre le problème de poursuite de trajectoire. Ainsi une question se pose : Que peut-on dire des systèmes de dimensions supérieures. Autrement dit : quelles conditions assurent qu'un système de type (2.1) peut être transformé, à l'aide d'un changement des coordonnées, en une certaine structure affine en la partie non mesurée.

L'objet de ce chapitre est donc en premier lieu une discussion sur les équivalences affines pour les systèmes décrits par les équations (2.1) pour lesquels nous allons donner des conditions nécessaires suffisantes. La section 2.2 nous étudions une famille d'équations aux dérivées partielles pour laquelle un algorithme permettant la construction de la solution sera présenté. Dans la section 2.3, nous fournissons une condition nécessaire et suffisante caractérisant les systèmes de forme (2.1) qui peuvent se ramener après un changement de coordonnées en une forme affine en la partie non mesurée. Si la construction d'une telle transformation est en général hors de la portée dans le cas général, pour les systèmes d'Euler-Lagrange cette question est résolue dans [74], et nous proposons une méthode élégante qui fournit explicitement la solution. Il est important de noter qu'il existe une littérature abondante sur l'étude des systèmes d'Euler-Lagrange, néanmoins ces résultats font appels à des conditions géométriques difficiles à manipuler.

Dans la section 2.4, une alternative de comparaison de nos résultats avec ceux qui sont dans la littérature ainsi l'approche Riemannienne introduite par M. Spong et Bedrossian. N.S dans [12, 13]. Dans la section 2.2.3, nous illustrons notre approche, sur les exemples typiques incluant : le système Tora, le manipulateur et le pont roulant (The overhead crane) pour lequel un observateur de type grand gain avec une vitesse de convergence arbitraire serait présenté.

2.2 Une famille d'équations aux dérivées partielles

Considérons le problème suivant. Soient $M^1(x), \dots, M^n(x)$ des fonctions de classe C^2

$$M^i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

Considérons la famille des équations aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_i} = M^i(x)T(x), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

où $T(x)$ est une matrice carrée d'ordre m et $x \in \mathbb{R}^n$.

Nous voulons donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices M_i pour que (2.2) admette une solution inversible $T(x)$. Ce genre de problème est bien connu dans la littérature, notamment lorsque $T(x) \in \mathbb{R}^m$. Les conditions dans ce cas sont données par les conditions d'intégrabilités suivantes :

Théorème 2.2.1. [2, 56] Soient $M^1(x), \dots, M^n(x)$ des fonctions de classe C^2

$$M^i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

Considérons la famille des équations aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x_i} = M^i(x)y(x), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

où $y(x) \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Étant donné un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $y(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ vérifiant (2.2) et tel que $y(x_0) = y_0$ si et seulement si les matrices M^i satisfont

$$M^i M^k - M^k M^i + \frac{\partial M^i}{\partial x_k} - \frac{\partial M^k}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i < j \leq n. \quad (2.4)$$

dite conditions d'intégrabilité.

La démonstration de ce dernier résultat, utilise le théorème de Frobenius et met en jeu l'involutivité de certaines distributions. Le lecteur intéressé pourra consulter [2, 56] pour plus de détail. Maintenant comme une conséquence directe de ce dernier résultat on peut montrer le :

Lemme 2.2.1. Soient n et m un entier naturel non nuls, $M^1(x), M^2(x), \dots, M^n(x) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de classe C^2 . Considérons la famille des équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = M^i(x)T(x), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Soit, $T_0 \in Gl_m(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une matrice $T(x)$ inversible solution de (2.5), définie dans un voisinage de x_0 , si et seulement si :

$$M^i M^j - M^j M^i + \frac{\partial M^i}{\partial x_j} - \frac{\partial M^j}{\partial x_i} = 0. \quad (2.6)$$

Démonstration. 1. **Nécessité**

Supposons que pour tout $T_0 \in Gl_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice inversible T qui satisfait (2.5).

D'après l'égalité de Schwartz,

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_k \partial x_i} \quad (2.7)$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(M^k(x)T(x)) = \frac{\partial}{\partial x_k}(M^i(x)T(x)) \quad (2.8)$$

Qui est équivalent à

$$\left(\frac{\partial M^k}{\partial x_i} + M^k(x)M^i(x) \right) T(x) = \left(\frac{\partial M^i}{\partial x_k} + M^i(x)M^k(x) \right) T(x)$$

Puisque $T(x)$ est inversible pour tout x , on en déduit l'égalité (2.6).

2. **Suffisance**

– **En utilisant le théorème 2.2.1**

Écrivons $T_0 = (T^1, \dots, T_0^n)$ avec les T_0^i sont les vecteurs colonnes.

D'après le théorème 2.2.1, pour chaque vecteur T_0^i il existe un vecteur $T_i(x)$ telle que

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_k} = M^k(x)T_i(x), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Considérons ainsi la matrice $T(x)$ formée par le colonnes $T_i(x)$. Il est clair que cette matrice est inversible dans un voisinage de x_0 si T_0 est inversible (car l'application $A \mapsto \det(A)$ est continue) et satisfait (2.5), d'où la démonstration.

L'inconvénient ici est que la solution $T(x)$ n'est pas connue explicitement. Il s'agit d'une condition d'existence, mais pas une méthode permettant la construction de la solution. Nous proposons ci-dessous une autre démonstration originale. Cette démonstration est basée sur un raisonnement par récurrence. L'avantage est qu'elle nous permet de construire une telle solution de (2.5). En outre cette solution est définie sur l'ensemble de définition des matrices M_i .

Autre démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur n .

Soit $\mathcal{P}$ la propriété suivante

$\mathcal{P} : \forall n > 1, \forall m > 1$; il existe $T(x)$ inversible solution de l'équation (2.5).

1. $n = 1$: L'équation (2.5) devient

$$\frac{\partial T(x_1)}{\partial x_1} = T'(x_1) = M(x_1)T(x_1) \quad (2.10)$$

qui est une équation différentielle linéaire ordinaire et admet une solution pour toute matrice $M_1 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

2. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n c'est à dire :

$\forall m \in \mathbb{N}$, il existe une matrice $T_m(x_1, \dots, x_n)$ telle que $\frac{\partial T}{\partial x_i} = M^i T$ pour n'importe quelle famille de matrice $M^1, M^2, \dots, M^n \in \mathcal{M}^m(\mathbb{R})$.

Soit maintenant $M^1, \dots, M^{n+1} \in \mathcal{M}^m(\mathbb{R})$ vérifiant (2.6).

En particulier on a pour tout $i < j \leq n$

$$M^j M^i - M^i M^j = \frac{\partial M^j}{\partial x_i} - \frac{\partial M^i}{\partial x_j}. \quad (2.11)$$

Donc pour tout x_{n+1} fixé, d'après l'hypothèse de récurrence; il existe une matrice $T_{x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que

$$\frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_i} = M^i T_{x_{n+1}}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. Montrons qu'il existe une solution de (2.5) de la forme $T = T_{x_{n+1}} \Psi_1(x_{n+1})$ où $\Psi_1(x_{n+1})$ est une matrice carrée d'ordre m à choisir convenablement.

Tout d'abord pour $i = 1, \dots, n$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} &= \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_i} \Psi_1(x_{n+1}) \\ &= M^i T_{x_{n+1}} \Psi_1(x_{n+1}) = M^i T. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pour $i = n+1$, l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial x_{n+1}} = M^{n+1} T \quad (2.13)$$

Qui est équivalent à

$$T_{x_{n+1}} \frac{d\Psi_1}{dx_{n+1}} + \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}} \Psi_1(x_{n+1}) = M^{n+1} T_{x_{n+1}} \Psi \quad (2.14)$$

ce qui équivaut à

$$\frac{d\Psi_1}{dx_{n+1}} = \left(T_{x_{n+1}}^{-1} M^{n+1} T_{x_{n+1}} - T_{x_{n+1}}^{-1} \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}} \right) \Psi(x_{n+1}) \quad (2.15)$$

Pour que cette équation admette une solution Ψ ne dépendant que de x_{n+1} il faut et il suffit que le terme

$$K(x) = \left(T_{x_{n+1}}^{-1} M^{n+1} T_{x_{n+1}} - T_{x_{n+1}}^{-1} \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}} \right) \quad (2.16)$$

soit indépendant de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Mais pour $i = 1, 2, \dots, n$, et puisque $T_{x_{n+1}}$ est de classe C^2 nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} &= -T_{x_{n+1}}^{-1} M^i M^{n+1} T_{x_{n+1}} + T_{x_{n+1}}^{-1} \frac{\partial M^{n+1}}{\partial x_i} T_{x_{n+1}} \\
 &\quad + T_{x_{n+1}}^{-1} M^{n+1} M^i T_{x_{n+1}} - T_{x_{n+1}}^{-1} \frac{\partial^2 T_{x_{n+1}}}{\partial x_i \partial x_{n+1}} \\
 &\quad + T_{x_{n+1}}^{-1} M^i \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}} \\
 &= -T_{x_{n+1}}^{-1} M^i M^{n+1} T_{x_{n+1}} + T_{x_{n+1}}^{-1} \frac{\partial M^{n+1}}{\partial x_i} T_{x_{n+1}} \\
 &\quad + T_{x_{n+1}}^{-1} M^{n+1} M^i T_{x_{n+1}} - T_{x_{n+1}}^{-1} \frac{\partial M^i}{\partial x_{n+1}} T_{x_{n+1}}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

car

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} (M^i T_{x_{n+1}}) = \frac{\partial M^i}{\partial x_{n+1}} T_{x_{n+1}} + M^i \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} &= T_{x_{n+1}}^{-1} \left(-M^i M^{n+1} + \frac{\partial M^{n+1}}{\partial x_i} + M^{n+1} M^i - \frac{\partial M^i}{\partial x_{n+1}} \right) T_{x_{n+1}} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

puisque les M_i satisfont les conditions d'intégrabilités (2.6). Ceci termine la preuve de la suffisance. $\square$

Ce dernier lemme nous fournit un moyen simple pour construire des solutions de l'équation (2.5). Aussi de la même façon, on peut montrer le lemme suivant :

Lemme 2.2.2. Soient n et m deux entier naturel non nuls.

Soit $M^1(x), M^2(x), \dots, M^n(x) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de classe C^2 .

Considérons la famille des équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = T(x) M^i(x), \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{2.19}$$

Soit, $T_0 \in Gl_m(\mathbb{R})$, il existe une matrice $T(x)$ inversible telle que $T(x_0) = T_0$, solution de (2.5) si et seulement si :

$$M^i M^j - M^j M^i - \frac{\partial M^i}{\partial x_j} + \frac{\partial M^j}{\partial x_i} = 0. \tag{2.20}$$

La démonstration se fait de même manière comme précédemment. Remarquons que, dans ce cas il faut chercher une solution du type $T(x) = \Psi(x_{n+1}) T_{x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$ où Ψ est une solution de

$$\frac{d\Psi_1}{dx_{n+1}} = \Psi(x_{n+1}) \left(T_{x_{n+1}} M^{n+1} T_{x_{n+1}}^{-1} - \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}} T_{x_{n+1}}^{-1} \right) \tag{2.21}$$

où l'on vérifie de la même façon et sous les conditions (2.20) que le terme $(T_{x_{n+1}} M^{n+1} T_{x_{n+1}}^{-1} - \frac{\partial T_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}} T_{x_{n+1}}^{-1})$ est indépendant de $x_1, \dots, x_n$.

2.2.1 Exemple

Remarquons, tout d'abord que chercher une solution du système (2.5) est équivalent à déterminer une solution de ce problème

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -T(x)M^i(x), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

car si $T(x)$ est une solution de (2.5) alors la matrice $\tilde{T}(x) = T^{-1}(x)$ est une solution de (2.22).

Maintenant à titre d'exemples entrant dans le contexte du lemme précédent considérons le système aux dérivées partielles défini sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x_1} = T(x)M^1(x) \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} = T(x)M^2(x) \end{cases} \quad (2.23)$$

avec

$$M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Puisque nous sommes sur $\mathbb{R}^2$ les conditions d'intégrabilité (2.4) s'écrivent :

$$M^1M^2 - M^2M^1 + \frac{\partial M^1}{\partial x_2} - \frac{\partial M^2}{\partial x_1} = 0. \quad (2.25)$$

Un calcul simple montre que cette équation est satisfaite. Il s'ensuit donc que le système (2.23) admet une solution. Pour expliciter cette solution, on utilise le lemme 2.2.1.

La solution $\Phi_{x_2}(x_1)$ de l'équation $\frac{\partial T(x)}{\partial x_1} = M^1(x)T(x)$ et de condition initiale $\Phi_{x_2}(0) = Id_2$, où Id_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\Phi_{x_2}(x_1) = \Phi_{x_2}(0) \exp(x_1 M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_1 e^{-x_2} & 1 \end{pmatrix}$$

De plus un calcul simple montre que

$$\Phi_{x_2}^{-1} M^2 \Phi_{x_2} - \Phi_{x_2}^{-1} \frac{\partial \Phi_{x_2}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est indépendante des variables x_1 et x_2 .

La solution de condition initiale $\Psi(0) = id_2$ de

$$\frac{d\Psi(x_2)}{dx_2} = \left(\Phi_{x_2}^{-1} M^2 \Phi_{x_2} - \Phi_{x_2}^{-1} \frac{\partial \Phi_{x_2}}{\partial x_2} \right) \Psi(x_2)$$

est évidemment

$$\Psi(x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la solution du système (2.23) est donnée par

$$T(x) = \Phi_{x_2}(x_1) \Psi(x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_2} & 0 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

2.3 Forme affine des systèmes d'Euler- Lagrange

2.3.1 La formulation Lagrangienne

En mécanique lagrangienne, un système mécanique peut à chaque instant être repéré par un système de n coordonnées généralisées indépendants $q_1, \dots, q_n$, qu'on coutume d'appeler les degrés de liberté du système. On y adjoint les coordonnées de vitesse $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ et on forme le lagrangien

$$L(q, \dot{q}) = \mathcal{E}_c(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - G(q_1, \dots, q_n) \quad (2.27)$$

où $\mathcal{E}_c$ est l'énergie cinétique et G l'énergie potentielle qui est une primitive de la somme des forces dérivant d'un potentiel, (des forces de gravité et des forces de rappels des ressorts par exemple). $\mathcal{E}_c(q, \dot{q})$ est de la forme

$$\mathcal{E}_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.28)$$

où $M(q)$ est une matrice $n \times n$ symétrique définie positive.

Les équations d'Euler-Lagrange sont alors données par

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (q, \dot{q}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} (q, \dot{q}) = \tau_i \quad (2.29)$$

avec $\tau_1, \dots, \tau_n$ sont des forces généralisées (forces et couples) externes au système ou ne dérivant pas d'un potentiel.

Définissons le vecteur

$$V_k(q) = \frac{\partial G}{\partial q_k}(q)$$

Posons $\frac{dq}{dt} = v$ les équations (2.29) sont équivalent à [82, 89]

$$M(q)\dot{v} + C(q, v)v + V(q) = \tau \quad (2.30)$$

avec

1. $M(q)$ est la matrice des coefficients des termes inertiels associées à l'énergie cinétique définie par (2.28),
2. $V(q)$ représente le n -vecteur des couples de gravité ou des couples ou forces dérivant d'un potentiel, (voir [89] pour plus de détails et d'exemples).
3. $C(q, v)$ est la matrice des forces centrifuges et de Coriolis. Son kj -ème élément est donné par

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^n C_{ijk}(q) v_i \quad (2.31)$$

où

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (2.32)$$

Les C_{ijk} sont appelés les symboles de Christoffel de premier espèce . Le terme $C(q, v)v$ dépend quadratiquement des vitesses généralisées v et reflète les interactions dynamiques de liaison. Il contient deux types de termes : les $v_i v_j$ qui s'appellent termes (forces) centrifuges si $(i = j)$ et termes de Coriolis si $(i \neq j)$.

Le vecteur d'état d'un système mécanique est constitué de deux parties : les coordonnées de position q et les coordonnées de vitesse $v = \dot{q}$

$$x = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}$$

Dans des nombreuses applications, il est intéressant de considérer différents jeux de coordonnées de position. La transformation d'état procède dès lors en deux étapes. On transforme tout d'abord les coordonnées de position :

$$\Theta = \Phi(q)$$

avec $\Phi : U_1 \mapsto V_1$ est un difféomorphisme et la matrice $T(q) = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$ est de rang plein pour tout $q \in U_1$; (U_1 et V_1 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$).

Le nouveau vecteur d'état est ensuite formé des nouvelles coordonnées de position Θ et de leurs dérivées $\Omega = \dot{\Theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \dot{q}$:

$$z = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Omega \end{pmatrix}$$

La transformation d'état est ensuite définie comme suit :

$$z = \Psi(x), \quad \begin{pmatrix} \theta \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(q) \\ T(q)\dot{q} \end{pmatrix}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\Theta} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= \left(\dot{T}(q) - T(q)M^{-1}C(q, v) \right) v + T(q)M^{-1}(q) (\tau - V(q)) \end{cases} \quad (2.33)$$

On peut aussi s'intéresser à la transformation de la forme

$$z = \begin{pmatrix} q \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ T(q)v \end{pmatrix}$$

où $T(q)$ est une matrice inversible pour tout $q \in U_1$ qui n'est pas forcément la jacobienne d'un difféomorphisme. Ainsi, dans les nouvelles coordonnées le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{q} &= T^{-1}(q)\Omega \\ \dot{\Omega} &= \left(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v) \right) v + TM^{-1}(q) (\tau - V(q)) \end{cases}$$

Dans ce travail, nous concentrons notre attention sur ces deux problèmes :

1. **Problème 1** : A quelles conditions, existe il une matrice $T(q)$ telle

$$\left(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v) \right) v = 0$$

2. **Problème 2** : A quelles conditions, existe-il un difféomorphisme $\Phi(q)$ tel que

$$\left(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v) \right) v = 0$$

$$\text{où } T(q) = \frac{\partial \Phi}{\partial q}.$$

Remarquons si on suppose par exemple qu'il existe un difféomorphisme vérifiant les conditions du premier problème le système (2.33) serait équivalent à

$$\begin{cases} \dot{\Theta} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= T(q)M^{-1}(q)(\tau - V(q)) \end{cases} \quad (2.34)$$

qui est un système linéaire en Ω . Avant de caractériser ces deux problèmes, plaçons nous dans un cadre plus général que celui des systèmes lagrangiens. Tout d'abord, nous allons rappeler un résultat établi dans [22], où l'auteur a étudié une famille de systèmes non linéaires. Ensuite nous donnerons une autre démonstration de ce résultat en utilisant le lemme 2.2.1. Considérons un système MIMO avec autant d'entrées que de sorties dont le degré propre est $2n$ (c'est à dire $2n$ variables d'état). Exprimée en forme matricielle, la représentation d'état est :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (2.35)$$

Avec

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \dots & g_{1m}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{n1}(x) & \dots & g_{nm}(x) \end{pmatrix} \\ u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où u est le vecteur d'entrée du système, y le vecteur sortie et x le vecteur d'état. Chacun de ces vecteurs est une fonction du temps.

Introduisons la notion de degré relatif qui est très importante car elle est à la base d'une condition nécessaire et suffisante permettant d'affirmer ou d'infirmer le fait que le système de type (2.35) soit linéarisable de manière exacte ou partiellement. Le degré relatif d'un système MIMO est à son tour lié à la dérivée de Lie [2, 87].

Définition 2.3.1. [2, 87] *Le système non-linéaire (2.35) MIMO a le (vecteur) degré relatif $r = (r_1, \dots, r_n)$ au point x_0 si :*

1.

$$L_{g_i} \circ L_f^k h_i(x) = 0$$

pour $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n$, $k < r_i - 1$, pour tout x dans un voisinage de x_0 .

2. *La matrice*

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} \circ L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_n} \circ L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ L_{g_1} \circ L_f^{r_n-1} h_n(x) & \dots & L_{g_n} \circ L_f^{r_n-1} h_n(x) \end{pmatrix}$$

est non singulière au point x_0 .

Considérons maintenant un système de type (2.35), nous voulons déterminer des conditions suffisantes qui nous permettent de transformer un système décrit par les équations (2.35) en un système affine de la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(y)z + B(y) + D(y)u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec A, B et C sont des matrices de dimensions appropriées.

Si le système (2.35) est de degré relatif $(2, \dots, 2)$, alors d'après ce qui précède, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ il existe un voisinage U_{x_0} telle que

1.

$$L_{g_i} h_i(x) = 0$$

pour tout $1 \leq j \leq n$, et $\forall x$ dans un voisinage de x_0 .

2. La matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} \circ L_f h_1(x) & \dots & L_{g_n} \circ L_f h_1(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ L_{g_1} \circ L_f h_m(x) & \dots & L_{g_n} \circ L_f h_n(x) \end{pmatrix}$$

est non singulière au point x_0 .

On a alors le résultat suivant, démontré dans [22]

Théorème 2.3.1. [22] *Considérons le système non linéaire (2.35) de degré relatif $(2, \dots, 2)^\top$. Alors le système (2.35) peut être transformé globalement sous la forme (2.36) si et seulement s'il existe des matrices de taille n $Q(y)$, $R_k(y)$, $k = 1, \dots, n$, un vecteur $P(y)$ et $S(y)$ telle que*

1. $L_f^2(h) = \left(\sum_{k=1}^{k=n} R_k(y) L_f(h_k) \right) L_f(h) + Q(y) L_f(h) + P(y)$,
2. $L_g L_f(h) = S(y)$,
3. $\frac{\partial R_l}{\partial y_k} - \frac{\partial R_k}{\partial y_l} = R_k R_l - R_l R_k$.

Démonstration. 1. Suffisance : Supposons qu'il existe une famille de matrices $Q(y)$, $R_k(y)$, $k = 1, \dots, n$, $S(y)$ et un vecteur $P(y)$ définies sur U_{x_0} vérifiant les assertions du théorème. Il existe donc une matrice inversible $T(y)$ telle que

$$\frac{\partial T}{\partial y_k} = -T R_k \quad (2.37)$$

en outre une méthode de construction $T(y)$ est donnée.

Introduisons alors le changement de variable,

$$Z_1 = y = h(x), \quad Z_2 = T(y) L_f h$$

Il s'ensuit que

$$\dot{Z}_1 = T^{-1}(y) Z_2 \quad (2.38)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{Z}_2 &= \frac{dT(y)}{dt} L_f h(x) + T(y) \frac{dL_f h(x)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial T(y)}{\partial y_k} L_f h_k(x) L_f h(x) + T(y) \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= T(y) \left(- \sum_{i=1}^{i=n} R_k L_f h_k(x) + \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)v) \right) \\ &= T(y) \left(- \sum_{i=1}^{i=n} R_k L_f h_k(y) + L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)v \right) \\ &= T(y) (Q(y) L_f h(x) + P(y) + S(y)v) \\ &= T(y) Q(y) T^{-1}(y) Z_2 + T(y) S(y)v + T(y) P(y). \end{aligned}$$

D' où le théorème.

2. Nécessité : La réciproque, n'est pas originale, elle trouve son originalité dans [22]. Pour obtenir une démonstration plus complète voir [22].

□

Remarquons que pour les systèmes non linéaires vérifiant les conditions du théorème précédant une méthode de synthèse d'observateur peut être envisagée. En particulier, cette méthode constitue une alternative à la synthèse d'observateur de type grand gain mis en évidence dans [63] pour la même classe de système en remarquant leur uniforme observabilité. Cependant, si une telle propriété permet de résoudre le problème de la synthèse d'observateur pour le système qui la vérifie, elle peut même dans certains cas être utile à la commande : en effet, son intérêt réside dans la forme affine en l'état du système. Si l'on synthétise un observateur pour lequel l'erreur d'estimation est linéaire, et une commande également de type linéaire, le principe de séparation pour les systèmes linéaires s'applique, et on obtient un principe de séparation pour une classe de systèmes non linéaires.

En particulier, d'après les travaux de Di Benedetto et al. [14], sous des conditions de bornitude sur la sortie et ses dérivées et d'observabilité suffisante, un observateur de type Luenberger avec un gain $K(y)$ peut être construit pour un système (2.3.1) :

Théorème 2.3.2. [14] *Considérons un système décrit par les équations (2.3.1), avec $B(y)u$ borné et $y := (y_1 \dots y_p) \in \mathbb{R}^p$, et soit Y l'ensemble des y tels que :*

1. $A(y)$ est continûment différentielle par rapport à y_i , $i = 1 \dots p$
2. La paire $(C, A(y))$ est observable d'indices d'observabilité constants

Alors il existe une constante μ et un gain $K(y)$ tels que dès que $y \in Y$ et $\sum_{i=1}^p \leq \mu$, $\dot{e} = (A(y) - K(y)C)e$ est globalement asymptotiquement stable.

2.3.2 Equation : $(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v))v = 0$

Définissons les nouvelles variables d'état $x = (x_1, x_2)^\top = (q, v)^\top$. Un système mécanique décrit par les équations (2.1) peut être modéliser sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= x_1. \end{aligned} \tag{2.39}$$

avec

$$\begin{cases} f(x) = (x_2, -M^{-1}C(x_1, x_2)x_2)^\top \\ g(x)u = (0, M^{-1}(q)(\tau - V(q)))^\top \end{cases}$$

Il est clair qu'un système d' Euler-Lagrange avec $y = q$ comme sortie est de degré relatif $(2, \dots, 2)^\top$ puisque

$$L_f h(x) = x_2, \tag{2.40}$$

$$L_{g_i} h_j = 0 \tag{2.41}$$

$$A(x) = (L_{g_k} L_f(h_l)(x))_{1 \leq k, l \leq n} = M(q). \tag{2.42}$$

En plus

$$L_f^2 h(x) = -M^{-1}(q)C(q, v)v, \tag{2.43}$$

$$L_g L_f(h)(x) = M^{-1}(q). \tag{2.44}$$

Il s'ensuit donc que le théorème 2.3.1 s'applique et pour qu'un système décrit par les équations d'Euler-Lagrange puisse se ramener après changement de coordonnées à un système de la forme (2.36) avec $y = q$, il faut et il suffit qu'il existe une famille de matrice $R_1, \dots, R_n$ telle

$$-M^{-1}(q) C(q, v)v = \left(\sum_{k=1}^{k=n} q_k R_k(y) \right) q + Q(y) L_f(h) + P(y) \quad (2.45)$$

Et

$$\frac{\partial R_l}{\partial y_k} - \frac{\partial R_k}{\partial y_l} = R_k R_l - R_l R_k.$$

Cependant la matrice $M^{-1}(q)C(q, v)v$ est quadratique en v , c'est à dire qu'elle peut être décomposée en

$$-M^{-1}(q)C(q, v)v = \sum_{i=1}^n v_i R_i v \quad (2.46)$$

Donc les matrices $P(q)$ et $Q(q)$ apparaissant dans l'équation (2.45) doivent être nulles. Alors, on peut facilement montrer le théorème suivant qui caractérise bien le premier problème posé précédemment.

Théorème 2.3.3. *Il existe un changement de coordonnées transformant (2.1) en (2.36) si et seulement s'il existe une matrice non singulière $T(q)$ vérifiant*

$$\dot{T}(q)v = T(q)M^{-1}(q)C(q, v)v \quad (2.47)$$

Démonstration. D'après le Théorème 2.3.1, si le système (2.1) peut être transformé sous la forme (2.36) alors il existe une famille de matrices R_i telle que le système d'équations aux dérivées partielle

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_k} = R_k \tilde{T} \quad (2.48)$$

admet une solution $\tilde{T}(q)$.

Il s'ensuit que la matrice $T(q) = -\tilde{T}^{-1}(q)$ vérifie

$$\begin{aligned} \dot{T}(q)v &= \sum_{i=1}^{i=n} v_i \frac{\partial T}{\partial q_i} v \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} v_i T R_i v \\ &= T(q)M^{-1}(q)C(q, v)v \end{aligned} \quad (2.49)$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une matrice $T(q)$ telle que $\dot{T}(q)v = T(q)M^{-1}(q)C(q, v)v$. Considérons la transformation définie par $(q, v) \mapsto (q, \Omega = T(q)\dot{q})$. Dans ces nouvelles coordonnées (q, Ω) le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = T^{-1}(q)\Omega \\ \dot{q} = T(q)M^{-1}(q)(\tau - V(q)) \end{cases}$$

Posons $x = (q, \Omega)^\top$, et pour $y = q$ on obtient le système suivant :

$$\dot{x} = A(y)x + B(y) + D(y)\tau$$

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & T^{-1}(q) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -T(q)M^{-1}(q)V(q) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ T(q)M^{-1}(q) \end{pmatrix}$$

D'où le théorème.

□

Dans [22], pour les systèmes à un degré de liberté, G. Besançon montre que (2.47) admet une unique solution ; plus précisément on le corollaire suivant :

Corolaire 2.3.1. *Pour, $n = 1$ la fonction $T(q) = \sqrt{M(q)}$ est l'unique solution du (2.47) (à une constante multiplicative près).*

Démonstration. Pour $n = 1$; $T(q) \in \mathbb{R}$. La matrice de forces centrifuges et de Corolis $C(q, \dot{q})$ est définie à partir de $M(q)$ par les symboles de Christoffel par

$$C(q, v) = c(q)\dot{q} = \frac{M'(q)}{2} = \frac{M'(q)}{2}v$$

En implantant l'égalité précédente dans (2.47) on obtient

$$T'(q) = \frac{1}{2}T(q)M^{-1}(q)M'(q) \quad (2.50)$$

En intégrant (2.50), on obtient la conclusion.

□

Le corollaire précédent montre que le problème (2.47) n'admet à un coefficient multiplicatif non nul près qu'une seule solution. Considérons maintenant un système d'Euler-Lagrange d'un degré de liberté ($n=1$) qui peut être modéliser par

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{M(q)} (\tau - V(q) - c(q)v^2), \end{aligned} \quad (2.51)$$

La difficulté pour commander un tel système sans mesurer la vitesse v vient principalement du terme quadratique $c(q)v^2$. Le théorème donne une transformation d'état linéaire en v du système (2.51) qui élimine cette dépendance. Considérons les nouvelles variables d'état :

$$\begin{cases} \bar{q} &= \int_0^q T(s)ds, \\ z &= T(q)\dot{q}. \end{cases} \quad (2.52)$$

On obtient ainsi le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} &= z, \\ \dot{z} &= \frac{1}{\sqrt{M(q)}} (\tau - V(q)) \\ y &= \bar{q}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Ce dernier système a une structure affine en la partie non mesuré z , ainsi une stabilisation par retour d'état et un observateur global peut être construit [19], en outre on peut appliquer le principe de séparation

linéaire [15]. Cette propriété a été utilisée par G. Besançon dans [22], où il a donné une solution globale et simple pour les systèmes d'Euler-Lagrange d'un degré de liberté du problème de poursuite des trajectoires.

Il faut aussi noter que le premier contrôleur global asymptotiquement stable sans mesure de vitesse et sans observateurs pour des systèmes d'Euler-Lagrange d'un degré de liberté à été présenté très récemment dans [6]. Cette approche est basée sur une structure de type "computed torque" plus PD et un retour dynamique de sortie inspirée du filtre linéaire de différentiation approximative. La stabilité globale asymptotique de la boucle fermée est assurée pourvu que les gains du contrôleur et de l'extension dynamique satisfait quelques bornes inférieures qui dépendent de la trajectoire de référence souhaitée. Cette approche a été généralisée pour les systèmes de degré de liberté quelconque par Zhang, Dawson de Queiroz and Dixon dans [100].

Peut-on généraliser à des dimensions supérieures? On sait la matrice d'inertie $M(q)$ est symétrique définie positive, il existe donc une unique matrice $N(q)$ symétrique définie positive telle que $M(q) = N^2(q)$. En s'inspirant du cas $n = 1$ la matrice $N(q)$ est solution de l'équation différentielle $\dot{T}v = TM^{-1}C(q, v)v$ si et seulement si

$$N(q)\dot{N}(q)v = C(q, v)v. \quad (2.54)$$

Ce qui n'est pas toujours le cas en général. En effet, nous montrons que cette matrice ne peut pas être solution quand $n = 2$, dans ce cas $N(q)$ est donnée par

$$N(q) = \frac{M(q) + \sqrt{\Delta(q)}Id_2}{\sqrt{\text{tr}(M(q)) + 2\sqrt{\Delta(q)}}} \quad (2.55)$$

avec $\Delta(q) = \det(M(q))$ puisque

$$\left(\frac{M(q) + \sqrt{\Delta(q)}Id_2}{\sqrt{\text{tr}(M(q)) + 2\sqrt{\Delta(q)}}} \right)^2 = \frac{M^2(q) + 2\sqrt{\Delta(q)}M(q) + \Delta(q)Id_2}{\text{tr}(M(q)) + 2\sqrt{\Delta(q)}} \quad (2.56)$$

or d'après Cayly Hamilton, on a

$$M^2(q) - \text{tr}(M(q))M(q) + \Delta(q)Id_2 = 0 \quad (2.57)$$

ce qui montre (2.55).

Supposons que la matrice $M(q)$ ne dépend seulement que d'une seule variable soit par exemple q_2 . Donc

$$N(q)\frac{dN(q)}{dt}v = C(q, v)v. \quad (2.58)$$

équivalent à

$$v_2N(q_2)N'(q_2)v = \begin{pmatrix} M'_{11}(q_2)v_1v_2 + M'_{12}(q_2)v_2^2 \\ -\frac{1}{2}(M'_{11}(q_2)v_1^2 - M'_{22}(q_2)v_2^2) \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

On voit aisément que les deux termes de l'égalité (2.59) ne sont pas les mêmes en général car, dans ce cas, le terme de gauche dépend seulement de v_1v_2 et v_2^2 par contre le terme de droite dépend à la fois de v_1^2 , v_2v_1 et v_2^2 . D'où l'impossibilité pour $N(q)$ d'être une solution en général pour ce problème.

Dans le paragraphe qui suit, on donne aussi une autre caractérisation de la solution de (2.47), basée sur la décomposition de la matrice d'inertie. Cette solution est déterminée par une famille d'équation aux dérivés partielles dont on explicitera la solution.

2.3.3 Equation $\left(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v)\right)v = 0$ où $T(q) = \frac{\partial\Phi}{\partial q}$.

Dans le but d'étudier le problème suivant : existe-il un difféomorphisme $\Phi(q)$ tel que

$$\left(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v)\right)v = 0$$

où $T(q) = \frac{\partial\Phi}{\partial q}$, nous considérons dans cette section une équation légèrement différente de (2.47), en demandant seulement l'existence d'une matrice non singulière $T(q)$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\dot{T}(q) = T(q)M^{-1}(q)C(q, v) \quad (2.60)$$

Il est intéressant à noter que les deux équations (2.47) et (2.60) ne sont pas équivalentes. Il est clair que si (2.60) admet une solution il en est de même pour (2.47). Par contre la réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant :

Considérons un système d'Euler-Lagrange dont la matrice d'inertie est donnée par

$$M(q) = \begin{pmatrix} e^{-q_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors en utilisant les symboles de Christoffel [89], la matrice des forces centrifuges et de Coriolis est donnée par

$$C(q, v) = \frac{1}{2}e^{-q_2} \begin{pmatrix} -v_2 & -v_1 \\ v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$M^{-1}(q)C(q, v)v = v_1 R_1 v + v_2 R_2 v$$

avec

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-q_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

En outre on peut vérifier facilement que les matrices R_1 et R_2 vérifient :

$$\frac{\partial R_2}{\partial q_1} - \frac{\partial R_1}{\partial q_2} = R_2 R_1 - R_1 R_2 \quad (2.62)$$

est par conséquent il existe une matrice $T(q)$ solution

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(q)}{\partial q_1} &= T(q)R_1, \\ \frac{\partial T(q)}{\partial q_2} &= T(q)R_2 \end{aligned} \quad (2.63)$$

dont on va expliciter une solution en utilisant le lemme 2.2.2.

La solution $\Phi_{q_2}(q_1)$ de $\frac{\partial T(q)}{\partial q_1} = T(q)M^{-1}(q)R_1$ de condition initiale $\Phi_{q_2}(0) = Id_2$ est donnée par

$$\Phi_{q_2}(q_1) = \Phi_0 \exp(q_1 R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}q_1 e^{-q_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Aussi un calcul simple montre que

$$\Phi_{q_2} M_2 \Phi_{q_2}^{-1} - \frac{\partial \Phi_{q_2}}{\partial q_2} \Phi_{q_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est indépendante des variables q_1 et q_2 .

La solution de condition initiale $\Psi(0) = Id_2$

$$\frac{d\Psi(q_2)}{dq_2} = \Psi(q_2) \left(\Phi_{q_2} M_2 \Phi_{q_2}^{-1} - \frac{\partial \Phi_{q_2}}{\partial q_2} \Phi_{q_2}^{-1} \right)$$

est donnée évidemment par

$$\Psi(q_2) = \begin{pmatrix} e^{-q_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin la solution du système (2.63) est donnée par

$$T(q) = \Psi(q_2) \cdot \Phi_{q_2}(q_1) = \begin{pmatrix} e^{-q_2} & 0 \\ \frac{1}{2} e^{-q_2} q_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Mais $T(q)$ ne vérifie pas (2.60). On donnera par la suite une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution de (2.47) soit une solution de (2.60). Pour cet exemple, nous justifions plus loin que l'équation (2.60) n'admet pas du tout de solution.

Rappelons que la kj -ème élément de la matrice $C(q, v)$ est donné par

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^{i=n} C_{ijk}(q) v_i \quad (2.65)$$

Il s'ensuit donc qu'elle est linéaire en v : c'est dire il existe une famille de matrice $C_i(q)$ tel qu'on a

$$C(q, v) = \sum_{i=1}^{i=n} C_i(q) v_i. \quad (2.66)$$

où les $C_{ijk}(q)$ sont les entrées de chaque matrice C_i . Ces matrices sont telles que $C_i + C_i^\top = \frac{\partial M}{\partial q_i}$. Il est facile de voir que l'équation (2.47) admet une solution $T(q)$ si et seulement si, il existe des matrices R_i telle que

$$\begin{aligned} - \text{i)} \quad & \sum_{i=1}^n v_i R_i v = C(q, v) v \\ - \text{ii)} \quad & \frac{\partial T}{\partial q_i} = T M^{-1} R_i \end{aligned}$$

En effet : Supposons que T est une solution de (2.47) et posons $R_i = M T^{-1} \frac{\partial T}{\partial q_i}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i R_i v &= M T^{-1} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial T}{\partial q_i} v \\ &= M T^{-1} (T M^{-1} C(q, v)) v = C(q, v) v \end{aligned}$$

de plus $\frac{\partial T}{\partial q_i} = T M^{-1} R_i$.

Réciproquement, si $R_1, \dots, R_n$ des matrices vérifiant les points *i*) et *ii*) ci-dessus, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial T}{\partial q_i} v &= TM^{-1} \sum_{i=1}^n v_i R_i v \\ &= TM^{-1} C(q, v) v \end{aligned}$$

En revanche dans l'équation (2.60) les matrices R_i sont obligatoirement les C_i car

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial T}{\partial q_i} = TM^{-1} C(q, v) = TM^{-1} \sum_{i=1}^n v_i C_i$$

équivalent à

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = TM^{-1} C_i$$

Le fait que les équations (2.60) et (2.47) ne sont pas équivalentes provient donc du fait que l'expression $C(q, v)v$ peut être décomposée sous la forme $\sum_{i=1}^n v_i R_i v$ avec une infinité de choix possible pour les R_i : plus précisément, on aura

$$\sum_{i=1}^n v_i R_i v = C(q, v) v = \sum_{i=1}^n v_i C_i v$$

si et seulement si

$$R_i e_j + R_j e_i = C_i e_j + C_j e_i$$

(Les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). En revanche l'expression $C(q, v)$ est linéaire en v et s'écrit $\sum_{i=1}^n v_i C_i$ et cette décomposition est unique puisque $\sum_{i=1}^n v_i C_i = \sum_{i=1}^n v_i \bar{C}_i$ pour tout $(q, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ équivalent à $C_i = \bar{C}_i$. Finalement, une solution $T(q)$ de (2.60), si elle existe, vérifie le système aux dérivées partielles suivant

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}(q) = T(q) M(q) C_i(q) \quad (2.67)$$

Nous donnerons par la suite une condition nécessaire est suffisante pour que (2.60) admette une solution.

Théorème 2.3.4. *L'équation (2.60) admet une solution si et seulement si*

$$\frac{\partial C_i}{\partial q_j} - \frac{\partial C_j}{\partial q_i} = C_j^\top M^{-1} C_i - C_i^\top M^{-1} C_j \quad (2.68)$$

pour tout $i < j = 1, \dots, n$, ou les C_i sont les matrices données par la décomposition (2.66). En outre sous les conditions (2.68) la solution est donnée explicitement.

Démonstration. D'après ce qui précède, l'équation (2.60) équivaut à $\frac{\partial T}{\partial q_i} = TM_i$, avec $M_i = M^{-1} C_i$. Il s'ensuit donc qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence de T est la suivante :

$$M_j M_i - M_i M_j = \frac{\partial M_j}{\partial q_i} - \frac{\partial M_i}{\partial q_j} \quad (2.69)$$

Comme $C_i + C_i^\top = \frac{\partial M}{\partial q_i}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_j}{\partial q_i} - \frac{\partial M_i}{\partial q_j} &= -M^{-1}(C_i + C_i^\top)M^{-1}C_j + M^{-1}\frac{\partial C_j}{\partial q_i} - M^{-1}\frac{\partial C_i}{\partial q_j} + M^{-1}(C_j + C_j^\top)M^{-1}C_i \\ &= M_j M_i - M_i M_j + M^{-1} \left(\frac{\partial C_j}{\partial q_i} - \frac{\partial C_i}{\partial q_j} - C_i^\top M^{-1} C_j + C_j^\top M^{-1} C_i \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (2.60) admette une solution est que l'égalité suivante soit réalisée :

$$\frac{\partial C_i}{\partial q_j} - \frac{\partial C_j}{\partial q_i} = C_j^\top M^{-1} C_i - C_i^\top M^{-1} C_j .$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

Le théorème précédent donne une caractérisation algébrique d'une classe de systèmes d'Euler-Lagrange qui peuvent être transformés, avec l'aide d'un changement de coordonnées, en une certaine structure, affine dans la partie d'état non mesurée $v = \dot{q}$.

Cependant, nous allons énoncer

Théorème 2.3.5. *Considérons un système d' Euler-Lagrange (2.1). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une matrice non singulière $T(q)$ telle que*

$$\dot{T}(q) = T(q) M^{-1}(q) C(q, v) \quad (2.70)$$

2. *Il existe une matrice inversible $N(q)$ telle que*

$$\begin{aligned} M(q) &= N^\top(q) N(q) \\ \text{et} \quad N^\top(q) \dot{N}(q) &= C(q, v) \end{aligned} \quad (2.71)$$

3. *Il existe un difféomorphisme $\Theta : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\begin{aligned} M(q) &= N^\top(q) N(q) \\ \text{où} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial q} &= N(q). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$

Supposons que l'équation (2.47) admet une solution $T(q)$.

Calculons $\frac{d\bar{M}}{dt}$, avec $\bar{M} = (T^\top)^{-1} M T^{-1}$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}}{dt} &= -(T^\top)^{-1} (C^\top M^{-1} T^\top) (T^\top)^{-1} M (T^\top)^{-1} \\ &\quad + (T^\top)^{-1} \frac{dM}{dt} T^{-1} - (T^\top)^{-1} M T^{-1} (T M^{-1} C) T^{-1} \\ &= -(T^\top)^{-1} (C^\top + C - \frac{dM}{dt}) T^{-1} \\ &= 0 \quad \text{car } C^\top + C = \frac{dM}{dt} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Par conséquent, $\bar{M} = T^{\top-1} M T^{-1}$, est une matrice constante symétrique définie positive. Prenons $N = \bar{M}^{\frac{1}{2}} T$, alors on peut vérifier facilement que

$$M(q) = N^\top(q) N(q) \quad (2.74)$$

et

$$N(q)^\top \frac{d}{dt} N(q) = C(q, v). \quad (2.75)$$

$2 \Rightarrow 1$

Supposons que les conditions 2. soient satisfaites, la matrice $N(q)$ est donc inversible et un calcul simple montre qu'elle est une solution de (2.60).

$3 \Rightarrow 2$:

Posons $N(q) = (N_{ij}(q))_{ij}$. D'une part on a

$$N^\top \frac{\partial N}{\partial q_i} = \left(\sum_{k=1}^n N_{ki} \frac{\partial N_{kj}}{\partial q_i} \right)_{ij} \quad (2.76)$$

D'autre part pour tout l et si on écrit, $C_l = (C_{ljk})_{kj}$, on a

$$\begin{aligned} 2C_{ljk} &= \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_l} + \frac{\partial M_{kl}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{lj}}{\partial q_k} \\ &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial N_{sj} N_{sk}}{\partial q_l} + \frac{\partial N_{sk} N_{sl}}{\partial q_j} - \frac{\partial N_{sl} N_{sj}}{\partial q_k} \\ &= \sum_{s=1}^n N_{sj} \frac{\partial N_{sk}}{\partial q_l} + N_{sk} \frac{\partial N_{sj}}{\partial q_l} + N_{sk} \frac{\partial N_{sl}}{\partial q_j} + N_{sl} \frac{\partial N_{sk}}{\partial q_j} - N_{sj} \frac{\partial N_{sl}}{\partial q_k} - N_{sl} \frac{\partial N_{sj}}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (2.77)$$

En outre $N(q)$ est la matrice jacobienne d'une application Θ si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \begin{pmatrix} N_{1j} \\ \vdots \\ N_{nj} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial q_j} \begin{pmatrix} N_{1i} \\ \vdots \\ N_{ni} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

pour tout couple (i, j) . Il s'ensuit que,

$$\frac{\partial N_{sk}}{\partial q_l} = \frac{\partial N_{sl}}{\partial q_k},$$

pour tout i, j et k . Ce qui entraîne

$$2C_{ljk} = \sum_{s=1}^n 2N_{sk} \frac{\partial N_{sj}}{\partial q_l} \quad (2.79)$$

Comparant (2.76) et (2.79), nous concluons que $N(q)$ satisfait $N^\top(q) \frac{dN(q)}{dt} = C(q, v)$.

$2 \Rightarrow 3$:

$N(q)$ est la matrice jacobienne d'une application Θ si et seulement si $\frac{\partial N^i}{\partial q_j} = \frac{\partial N^j}{\partial q_i}$.

Mais,

$$\frac{\partial N^i}{\partial q_j} = N^\top C_j^i \quad (2.80)$$

avec C_j^i est la i -eme colonne de la matrice C_j et C_i^j est la j -eme colonne de C_i . Mais de la formule (2.32) définissant $C(q, v)$, il en résulte que $C_j^i = C_i^j$ pour tout couple (i, j) . Ce qui nous permet de conclure. $\square$

Ce dernier théorème est intéressant car il permet de caractériser le deuxième problème, en outre il permet de linéariser totalement un système d'Euler Lagrange. Autrement dit si on considère le difféomorphisme suivant :

$$(q, v)^\top \mapsto (\Theta, z = T(q)v)^\top$$

Dans les nouvelles coordonnées, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\Theta} &= \frac{\partial \Theta}{\partial q} v = z \\
 \dot{z} &= \dot{T}v + T\dot{v} \\
 &= \left(\dot{T} - TM^{-1}C(q, v) \right) v + T(q) (\tau - V(q)) \\
 &= T(q) (\tau - V(q))
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

qui s'écrit sous une forme plus compacte

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = z \\ \dot{z} = T(q) (\tau - V(q)) \end{cases} \tag{2.82}$$

système pour lequel la synthèse d'observateurs par exemple ne pose plus de problème selon les résultats sur les systèmes linéaires [18, 63].

Reprenons maintenant l'exemple du paragraphe 2.2.1. On a

$$C(q, v) = \frac{1}{2} e^{-q_2} \begin{pmatrix} -v_2 & -v_1 \\ v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$C_1 = \frac{1}{2} e^{-q_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{2} e^{-q_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les conditions (2.68) s'écrivent

$$\frac{\partial C_i}{\partial q_i} - \frac{\partial C_j}{\partial q_i} - C_j^\top M^{-1} C_i + C_i^\top M^{-1} C_j = \frac{1}{4} e^{-q_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

D'après le théorème 2.3.5, on déduit qu'il n'existe pas une matrice $T(q)$ vérifiant l'équation (2.60). Cependant on a démontré que la matrice

$$T(q) = \begin{pmatrix} e^{-q_2} & 0 \\ \frac{1}{2} e^{-q_2} q_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

satisfait l'équation (2.47). En outre on peut vérifier qu'il n'existe aucun difféomorphisme $\Theta(q)$ tel que $\frac{\partial \Theta}{\partial q} = T(q)$. Mais la question qu'on peut se poser est la suivante : existe-il une solution $T(q)$ de (2.60)

pour laquelle il existe $\Theta(q)$ tel que $\frac{\partial \Theta}{\partial q} = T(q)$. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3.6. *Les assertions suivantes sont équivalentes ;*

1. *Il existe $T(q)$ vérifiant (2.60).*
2. *Il existe $T(q)$ vérifiant (2.47) et un difféomorphisme $\Theta(\cdot)$ telle que $\frac{\partial \Theta}{\partial q} = T(q)$.*

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$ Découle directement du théorème 2.3.5

$2 \Rightarrow 1$

Supposons qu'il existe $T(q)$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT(q)}{dt} v = T(q) M^{-1}(q) C(q, v) v \tag{2.85}$$

qui équivaut à

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial T}{\partial q_i} v = \sum_{i=1}^n v_i T M^{-1} C_i(q) v$$

égalité qui équivaut à

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} e_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} e_i = T M^{-1} C_i e_j + T M^{-1} C_j e_i \quad (2.86)$$

les e_i étant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En exploitant le fait que $T(q)$ est la matrice jacobienne d'un difféomorphisme $\Theta(\cdot)$, il en découle que :

$$\frac{\partial T^j}{\partial q_i} = \frac{\partial T^i}{\partial q_j}$$

avec T^j (respectivement T^i) est la j -ème (respectivement i -ème) colonne de la matrice $T(q)$, qui équivaut à

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} e_j = \frac{\partial T}{\partial q_j} e_i$$

Grâce à ceci et compte tenu que la i -ème colonne de C_j est identique à la j -ème colonne de C_i l'égalité (2.86) devient

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} e_j = T M^{-1} C_i e_j,$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} e_j, \\ &= T M^{-1} \sum_{j=1}^n C_i e_j = T M^{-1} C_i \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ceci montre que $T(q)$ est une solution de (2.47). □

2.4 Système d'Euler-Lagrange et métrique Riemannienne

2.4.1 Factorisation canonique

Dans ce que suit, on va étudier la relation entre les deux équations (2.60) et (2.47) et les résultats de [7], [12], [13]. Dans [12], une méthode de linéarisation des systèmes d'Euler-Lagrange était établie cette méthode est basée sur une propriété intrinsèque des systèmes mécaniques : leur expression ne dépend pas du choix d'un ensemble particulier de coordonnées dans l'espace de configuration $\mathbb{R}^n$. Une telle transformation est dite canonique. Ce genre d'invariance a déjà été pleinement utilisée pour le contrôle optimal [54], pour l'élaboration de contrôleurs intrinsèques pour les systèmes mécaniques complètement actionnés [45] et pour la construction d'observateur dans [77].

Pour la commodité du lecteur on va montrer dans la suite cette invariance. Reprenons maintenant les équations (2.1). Rappelons que l'énergie cinétique est donnée par

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \dot{q}^\top M(q) \dot{q}$$

avec $M(q)$ est une matrice symétrique définie positive pour tout $q \in \mathbb{R}^n$.

Posons $u = \tau - V(q)$, les équations deviennent (2.29)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{q}} \right) (q, \dot{q}) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial q} (q, \dot{q}) = u \quad (2.88)$$

Considérant maintenant la transformation dite "Point transformation" :

$$Q = f(q), \quad \dot{Q} = J(q)\dot{q}$$

avec $J(q)$ est la jacobienne de $f : \frac{\partial f(q)}{\partial q} = J(q)$.

Sous une telle transformation, l'énergie cinétique reste invariante et peut être écrite dans l'une des coordonnées comme suit

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \dot{q}^\top M(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{Q}^\top (J^{-1}(q))^\top M(q) J^{-1}(q) \dot{Q}.$$

On supposera que f est une fonction différentiable avec une matrice jacobienne J non singulière pour tout $q \in \mathbb{R}^n$. La jacobienne de f^{-1} est donnée par :

$$\frac{\partial q}{\partial Q} = J^{-1}(f^{-1}(Q))$$

La question qui se pose maintenant est de savoir si la structure des équations d'Euler-Lagrange est préservée après ce changement de coordonnées est adressée. Le but de ce qui suit est de prouver que ces équations sont de la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} = \bar{u} \quad (2.89)$$

avec $\bar{u} = J^{-1}u$.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_c(Q, \dot{Q})}{\partial q} &= \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} J(q) + \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} \dot{J}(q). \end{aligned} \quad (2.90)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_c(Q, \dot{Q})}{\partial \dot{q}} &= \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} J(q). \end{aligned} \quad (2.91)$$

puisque $\frac{\partial Q}{\partial \dot{Q}} = 0$ car Q est indépendante de $\dot{q}$.

La i -ème composante de $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c(Q, \dot{Q})}{\partial \dot{q}} \right)_i$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c(Q, \dot{Q})}{\partial \dot{q}} \right)_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c(Q, \dot{Q})}{\partial \dot{q}} J(q) \right)_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n J_{ki} \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(J_{ki}(q) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}_k} \right) + \dot{J}_{ki} \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}_k} \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Or, d'une manière plus concise :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c(Q, \dot{Q})}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} \right) J(q) + \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} J(q) \quad (2.93)$$

Utilisons maintenant les égalités (2.90) et (2.93), les équations (2.88) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial q} &= u \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} \right) J(q) + \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} J(q) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} J(q) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} J(q) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial Q} \right) J(q) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Ce qui montre l'invariance. Ce résultat est très utile la linéarisation, car s'il existe $f(\cdot)$ différentiable avec $\frac{\partial f(q)}{\partial q} = J(q)$ inversible et satisfaisant $J^\top J = M$, alors dans les coordonnées $Q = f(q)$ les forces centrifuges et de Coriolis sont nulles. Cette factorisation spéciale de la matrice d'inertie est appelée factorisation canonique. Il est intéressant de noter que cette factorisation a été introduite par Koditschek [69] et par Gu dans [47]. La question d'existence a été étudiée par Bedrossian dans [12], Spong et Bedrossian [13]. Il faut noter aussi que Loria, A et Pantely. Elena dans [7] et G. Besançon dans [17] ont étudié la possibilité de faire du poursuite de trajectoires par retour de position, si une factorisation canonique existe.

2.4.2 Conditions d'existences

Commençons par la définition suivante

Définition 2.4.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. une métrique Riemannienne (Riemannian metric) sur U est la donnée d'une application lisse g de U dans l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $q \in U$, g_q soit définie positive. Etant données des coordonnées $q = (q_1 \dots q_n)$ sur $\mathbb{R}^n$, on peut écrire $g_q = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q) dq_i dq_j$. Dans la suite on note une métrique Riemannienne g par g_{ij} .

Définition 2.4.2. Une métrique Riemannienne g_{ij} est dite Euclidienne si et seulement s'il existe un système de coordonnées $x = (x_1 \dots x_n)^\top$ avec $x_i = x_i(q)$ telle que

$$\det J(q) \neq 0, \quad G = J^\top(q) J(q)$$

$$\text{ou } J(q) = \frac{\partial x(q)}{\partial q} \text{ et } G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Relativement aux coordonnées x_i le métrique g sera représenté par la matrice

$$\tilde{G} = (J^{-1})^\top G J^{-1} = id_n$$

D'après ce qui précède, le concept principal qui dérive de la factorisation canonique est l'énergie cinétique. C'est un exemple de produit scalaire définissant une métrique Riemannienne. Donc une transformation canonique n'est qu'une transformation gérant une métrique euclidienne.

Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une telle transformation, sont dues à Riemann en 1861, et qui sont données par le théorème suivant

Théorème 2.4.1. [88] Une métrique Riemannienne peut être transformée en une métrique euclidienne si et seulement si les termes de la courbure de Riemman défini par

$$R_{ijkl} = \frac{\partial^2 M_{ik}(q)}{\partial q_l \partial q_j} + \frac{\partial^2 M_{jl}(q)}{\partial q_k \partial q_i} - \frac{\partial^2 M_{il}(q)}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 M_{jk}(q)}{\partial q_l \partial q_i} + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n M_{r,s}^{-1}(q) [C_{rjl} C_{sik} - C_{ril} C_{sjk}] \quad (2.95)$$

sont identiquement nuls avec $M_{r,s}^{-1}(q)$ les termes de la matrice $M^{-1}(q)$ et C_{rjl} les symboles de Christoffel de premier type.

Le théorème 2.3.5 montre que l'équation (2.60) admet une solution si et seulement si une factorisation canonique existe. Enfin on a la proposition suivante qui résume notre résultat et les résultat de [12, 13]

Proposition 2.4.1. Considérons un système d'Euler-lagrange (2.1). Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe une matrice non singulière $T(q)$ telle que

$$\dot{T}(q) = T(q) M^{-1}(q) C(q, v) \quad (2.96)$$

2. Il existe une matrice inversible $N(q)$ telle que

$$M(q) = N^\top(q) N(q) \quad (2.97)$$

et $N^\top(q) \dot{N}(q) = C(q, v)$

3. Il existe une fonction $\Theta(q) : \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^n$, une matrice inversible $N(q)$ telle que

$$M(q) = N^\top(q) N(q) \quad (2.98)$$

et $\frac{\partial \Theta}{\partial q} = N(q).$

4. $R_{ijkl} = 0$ pour tout 4-uplet (i, j, k, l) .

5. Il existe $T(q)$ vérifiant (2.47) et un difféomorphisme $\Theta(\cdot)$ telle que $\frac{\partial \Theta}{\partial q} = T(q)$.

Comme il été précisé dans [12], les symboles de Christoffel satisfait un certain nombre de symétrie. Cela signifie que pas tous les termes de la courbure (2.95) sont indépendant. En fait pour un système d'Euler-Lagrange ils existent $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ termes non nuls et indépendant de la courbure. En revanche en appliquant le théorème 2.3.4, on vérifié qu'on a exactement $\frac{n(n-1)}{2}$ égalités matricielles de types (2.68) à vérifier. Par exemple, parce qu'un système à 5 -degré de liberté nous devons vérifier 10 équations de type (2.68), tandis que en termes de la courbure de Riemman on doit calculer 50 des composantes de courbure.

2.5 Exemples d'applications

Si on se donne une matrice $M(q) = (M_{ij}(q))$ symétrique définie positive, la matrice des forces centrifuges et de Coriolis sera donné par la commande Mathematica suivante :

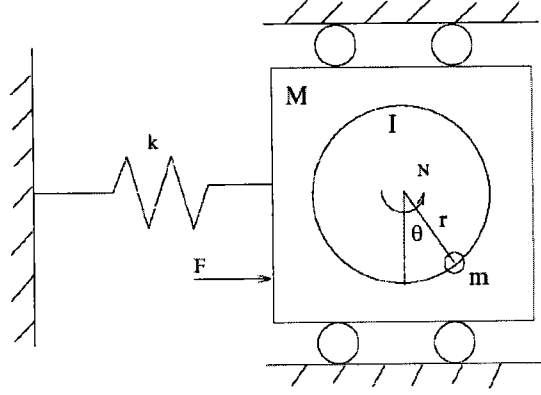


FIG. 2.1 – le TORA

$$\begin{aligned}
 C(q, v) &= \text{coriolis}[M_-] := \text{Module}[\{i, j, n = \text{Lenth}[M], \text{res}\}, \\
 &\quad \text{res} = \text{IdentityMatrix}[n]; \text{For}[i = 4, j \leq n, j++, \text{res}[i, j]] \\
 &= \frac{1}{2} (D[M[[i, j]], q[[k]] + D[M[i, k], q[[j]]] - D[M[[j, k]], q[[i]]]) v[[k]]; \text{res}]
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

En outre les matrices C_i sont données par

$$\begin{aligned}
 C_i &= f[M, i] := \text{Module}[\{d = \text{Length}[M]\} \frac{1}{2} \text{Table}[D[M[[k, j]], q[i]] + D[M[[k, i]], q[j]] \\
 &\quad - D[M[[i, j]], q[k]], \{k, d\}, \{j, d\}]
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

Nous allons illustrer nos propos en considérant les exemples suivants : Lorsque $n = 1$, une solution existe toujours, elle est donnée par le Corollaire 2.3.1. Le cas de système d'ordre supérieur, la réponse est parfois négative, en effet reprenant l'exemple du paragraphe 2.2.1, une solution existe si et seulement si $e^{-q_2} = 0$ ce qui est impossible. On présentera par la suite deux cas où l'on a une solution.

2.5.1 Le système TORA

Commençons par l'exemple du système mécanique appelé TORA (pour Transnational Oscillator with Rotatting Actuator [86]) décrit par la figure 2.1. Il est composé d'une plate-forme liée à un référence fixe par un ressort linéaire. La plate-forme peut osciller sans frottement sur un plan horizontal. Sur la plate-forme, une masse rotative excentrique est actionnée par un moteur à courant continu à excitation indépendante (DC). La commande de la partie rotative excentrique est utilisée pour atténuer les oscillations de la plate-forme (pour plus de détails voir [82]).

Posons $q^T = (q_1, q_2)^T = (q_1, \theta)^T$. L'énergie cinétique est donnée par

$$\mathcal{E}_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \dot{q}^T \begin{pmatrix} a & b \cos \theta \\ b \cos \theta & c \end{pmatrix} \dot{q}$$

avec $a = M + m$, $b = -ml$ et $c = I + ml^2$. L'énergie potentielle est donnée par

$$G(q) = \frac{1}{2} k q_1^2$$

Soit sous forme plus compacte

$$\begin{aligned}\dot{q} &= v, \\ M(q)\dot{v} + C(q, v)v + V(q) &= \tau,\end{aligned}\tag{2.101}$$

On obtient ainsi,

$$C(q, v) = \begin{pmatrix} 0 & -b \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \sin(q_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tester la possibilité de linéariser ce système, nous devons vérifier des équations de type (2.68). Mais puisque le système à deux degré de liberté on a une seule équation à vérifier :

$$\frac{\partial C_1}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2}{\partial q_1} = C_2^\top M^{-1} C_1 - C_1^\top M^{-1} C_2\tag{2.102}$$

Mais, $C_1 = 0$ et C_2 ne dépendent pas du variable q_1 , on a bien cette égalité. Il s'ensuit donc qu'il existe une matrice $T(q_1, q_2)$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_1} &= T M^{-1} C_1 \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= T M^{-1} C_2\end{aligned}\tag{2.103}$$

Pour construire cette solution, on suit la stratégie donnée par le lemme 2.2.1. Pour cela choisissons $\Phi = Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme solution de l'équation $\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} = 0$. La raison pour laquelle nous choisissons cette solution est pratique. C'est pour obtenir une solution finale simple du problème mais toute matrice $\Phi(q_2)$ inversible convient.

Maintenant le terme

$$\Phi M^{-1} C_2 \Phi^{-1} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \Phi^{-1} = M^{-1} C_2\tag{2.104}$$

est indépendant de q_1 puisque M et C_2 l'est aussi.

Considérons maintenant l'équation différentielle matricielle suivante

$$\frac{d\Psi_1}{dq_2} = \Psi(x_2) M^{-1} C_2\tag{2.105}$$

Une solution particulière de (2.105) de condition initiale $\lambda(0) = Id_2$ est donnée par

$$\Psi(q_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_2 \beta(0) \cos(q_2) - a_2 \beta(q_2)}{a_1 \beta(0)} \\ 0 & \frac{\beta(q_2)}{\beta(0)} \end{pmatrix}\tag{2.106}$$

où $\beta(q_2) = \sqrt{a_1 a_3 - a_2^2 \cos(q_2)^2}$.

En vertu du lemme 2.3.1, une solution de (2.47) avec $T(0) = T_0 = id_2$, est

$$\begin{aligned}T(q_2) &= \Psi(q_2) \Phi_{q_2}(q_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_2 \beta(0) \cos(q_2) - a_2 \beta(q_2)}{a_1 \beta(0)} \\ 0 & \frac{\beta(q_2)}{\beta(0)} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.107}$$

qui est inversible car $\det(T(q)) = \frac{\beta(q_2)}{\beta(0)}$ qui est strictement positive puisque $M(q)$ est une matrice symétrique définie positive.

Considérons maintenant le difféomorphisme $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ définie par

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= q_1 + \int_0^{q_2} \frac{a_2\beta(0)\cos(s) - a_2\beta(s)}{a_1\beta(0)} ds, \\ \Theta_2 &= \int_0^{q_2} \frac{\beta(s)}{\beta(0)} ds,\end{aligned}$$

La matrice jacobienne de $\Theta(\cdot)$ est bien égale à $T(q)$.

2.5.2 Le manipulateur

Le robot manipulateur est décrit par la matrice d'inertie suivante [89] :

$$M(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} I_1 + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 & l_1 m_2 l_{c_2}^2 \cos(q_2 - q_1) \\ l_1 m_2 l_{c_2}^2 \cos(q_2 - q_1) & I_2 + m_2 l_{c_2}^2 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

avec m_1, m_2, l_1, l_{c_2} et l_{c_1} sont des constantes positives.

La matrice $C(q, v)$ est donnée par

$$C(q, v) = \begin{pmatrix} 0 & l_1 m_2 l_{c_2}^2 v_2 \sin(q_1 - q_2) \\ -l_1 m_2 l_{c_2}^2 v_1 \sin(q_1 - q_2) & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 m_2 l_{c_2}^2 v_2 \sin(q_1 - q_2) & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$C_2 = \begin{pmatrix} l_1 m_2 l_{c_2}^2 \sin(q_1 - q_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\frac{\partial C_1}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2}{\partial q_1} - C_2^\top M^{-1} C_1 + C_1^\top M^{-1} C_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta(\beta^2 - \alpha\gamma) \cos(q_2 - q_1)}{\alpha\gamma - \beta^2 \cos^2(q_2 - q_1)} \\ -\frac{\beta(\beta^2 - \alpha\gamma) \cos(q_2 - q_1)}{\alpha\gamma - \beta^2 \cos^2(q_2 - q_1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

avec $\alpha = I_1 + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2$, $\beta = l_1 m_2 l_{c_2}^2$, et $\gamma = I_2 + m_2 l_{c_2}^2$.

On conclut donc que le manipulateur est transformable en une forme affine en la vitesse $\dot{q}$ si et seulement si $l_{c_2} = 0$ où $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ où $l_1 = 0$.

Maintenant supposons que $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, c'est à dire la matrice $M(q)$ est de la forme :

$$M(q) = \begin{pmatrix} a^2 & ab \cos(q_2 - q_1) \\ ab \cos(q_2 - q_1) & b^2 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas particulier

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab \sin(q_2 - q_1) & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$C_2 = \begin{pmatrix} -ab \sin(q_2 - q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la matrice $T(q)$ solution de

$$\dot{T} = TM^{-1}C, \quad (2.110)$$

considérons dans un premier temps, l'équation différentielle linéaire suivante

$$\frac{d\Phi_{q_2}(q_1)}{dq_1} = M^1 \Phi_{q_2} \quad (2.111)$$

en considérant q_2 comme un paramètre. Cette équation admet comme solution de condition initiale $q_1^0 = 0$ et $\Phi_{q_2}(q_1^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\Phi_{q_2}(q_1) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(q_1 - q_2)}{\cos(1 - q_2)} & 0 \\ \frac{a}{b} (\cos(q_1 - q_2) - \cot(1 - q_2) \sin(q_1 - q_2)) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

En outre, un calcul simple montre que

$$\Phi_{q_2} M^2 \Phi_{q_2}^{-1} - \frac{\partial \Phi_{q_2}}{\partial q_2} \Phi_{q_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{a \cos(1 - q_2)} \\ 0 & \cot(1 - q_2) \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

qui est indépendante de la variable q_1 , et par conséquent il existe une matrice

$$\Psi(q_2) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(q_2) & \Psi_{12}(q_2) \\ \Psi_{21}(q_2) & \Psi_{22}(q_2) \end{pmatrix}$$

solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\Psi(q_2)}{dq_2} = \Psi(q_2) \left(\Phi_{q_2} M^2 \Phi_{q_2}^{-1} - \frac{\partial \Phi_{q_2}}{\partial q_2} \Phi_{q_2}^{-1} \right) \quad (2.114)$$

$$= \Psi(q_2) \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{a \cos q_2} \\ 0 & \cot(q_2) \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

La solution pour une condition initiale

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ a & \pi \end{pmatrix}$$

est

$$\Psi(q_2) = \begin{pmatrix} \pi & \frac{b\pi}{a} (-\cos(1 - q_2) + \cot(1) \sin(1 - q_2)) \\ 0 & \frac{\pi \sin(1 - q_2)}{\cos(1)} \end{pmatrix}$$

Il en résulte alors, qu'une solution est donnée par

$$T(q_1, q_2) = \Psi(q_2) \cdot \Phi_{q_2}(q_1) \quad (2.116)$$

$$= \pi \cos 1 \begin{pmatrix} \sin q_1 & \frac{-b}{a} \sin q_2 \\ \frac{a}{b} \sin(1 - q_1) & \sin(1 - q_1) \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

Le lemme (2.2.1) permet de conclure. Il est clair que

$$\det(T(q_1, q_2)) = -\frac{\pi^2}{\cos 1} \sin(q_1 - q_2). \quad (2.118)$$

On voit clairement que T est inversible sur le domaine de définition de la matrice d'inertie $M(q)$.

Remarquons enfin que si on considère la transformation linéaire

$$\begin{aligned} \theta_1 &= q_1, \\ \theta_2 &= q_2 - q_1, \end{aligned} \quad (2.119)$$

En terme de θ_1 et θ_2 , la matrice (2.108) s'écrit

$$M(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} I_1 + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 & l_1 m_2 l_{c_2}^2 \cos(\theta_2) \\ l_1 m_2 l_{c_2}^2 \cos(\theta_2) & I_2 + m_2 l_{c_2}^2 \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

qui entre dans le cadre des systèmes mécaniques considérés dans [75] pour lequel un observateur à convergence globale est présenté. En outre le problème de la stabilisation par retour de sortie peut être résolu avec une commande linéaire [76].

2.6 Le Pont roulant

L'exemple de ce paragraphe a été étudié Par T. Chorot au LAGEP

2.6.1 Système modèle est changement de coordonnées

Nous appliquons dans ce paragraphe notre stratégie de la linéarisation, introduite dans le chapitre 2 à un système de trois degrés de liberté : Le pont roulant [28]. Le pont roulant de masse m_2 qui se déplace le long d'un axe (ox) repéré par la position r . Il supporte une charge de masse m_1 à l'extrémité d'un c,ble de longueur $l > 0$; qui oscille avec la position angulaire α . Il y a deux actionneurs qui appliquent les forces F_r le long de l'axe (ox) et F_l le long du c,ble. Pour obtenir les équations du système en utilisant l'approche de Lagrange.

Avec les notations précédentes et en posant $q = (r, l, \alpha)^T$, on a :

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & M \sin \alpha & m_1 q_2 \cos \alpha \\ m_1 \sin \alpha & m_1 & 0 \\ m_1 q_2 \cos \alpha & 0 & m_1 q_2^2 \end{pmatrix}$$

L'énergie potentielle est donnée par :

$$G(q) = -m_1 g q_2 \cos \alpha.$$

On peut vérifier facilement que la matrice des forces centrifuges et de Coriolis est donné par ;

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & m_1 \dot{q}_3 \cos q_3 & m_1 (\dot{q}_2 \cos q_3 - q_2 \dot{q}_3 \sin q_3) \\ 0 & 0 & -m_1 q_2 \dot{q}_3 \\ 0 & m_1 \dot{q}_3 q_2 & m_1 \dot{q}_2 q_2 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 q_2 \end{pmatrix} \\ C_3 &= \begin{pmatrix} 0 & m_1 \cos q_2 & -m_1 q_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & -m_1 q_2 \\ 0 & m_1 q_2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.121)$$

Puisque le système est de dimension 3, nous devons vérifier trois égalités :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2}{\partial q_1} &= C_2^\top M^{-1} C_1 - C_1^\top M^{-1} C_2 \\ \frac{\partial C_1}{\partial q_3} - \frac{\partial C_3}{\partial q_1} &= C_3^\top M^{-1} C_1 - C_1^\top M^{-1} C_3 \\ \frac{\partial C_2}{\partial q_3} - \frac{\partial C_3}{\partial q_2} &= C_3^\top M^{-1} C_2 - C_2^\top M^{-1} C_3 \end{aligned} \quad (2.122)$$

Mais $C_1 = 0$ et les matrices C_2 et C_3 sont indépendantes de q_1 alors les deux premières égalités sont satisfaites. D'ailleurs, on peut montrer que la dernière égalité est vérifiée également. Ainsi selon le théorème 2.3.4 nous savons que la transformation qui permette de linéariser totalement le système du pont roulant existe que nous rendrons explicite en employant la méthode expliquée dans la preuve du lemme 2.2.1.

D'abord, notons par $\phi_{q_2}(q_1)$ la matrice d'identité d'ordre 3. $\phi_{q_2}(q_1)$ est évidemment une solution de l'équation $\frac{\partial \Phi_{q_2}}{\partial q_1} = M^{-1} C_1 = 0$. L'expression $K(q)$ devient :

$$\begin{aligned} K(q) &= \Phi_{q_2} M_2 \Phi_{q_2}^{-1} - \frac{\partial \Phi_{q_2}}{\partial q_2} \Phi_{q_2}^{-1} \\ &= M^{-1} C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{q_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.123)$$

Un simple calcul donne que la matrice

$$T_{q_3}(q_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

satisfait $\frac{\partial T_{q_3}}{\partial q_1} = M^{-1} C_1$ et $\frac{\partial T_{q_3}}{\partial q_2} = M^{-1} C_2$.

Maintenant l'expression $(T_{q_3} M_3 - \frac{\partial T_{q_3}}{\partial q_3}) T_{q_3}^{-1}$ avec $M_3 = M^{-1} C_3$ devient

$$(T_{q_3} M_3 - \frac{\partial T_{q_3}}{\partial q_3}) T_{q_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est indépendante de q_1 , q_2 et q_3 . Donc

$$\Psi_1(q_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_3 & -\sin q_3 \\ 0 & \sin q_3 & \cos q_3 \end{pmatrix}$$

est une solution de

$$\frac{d\Psi_1(q_3)}{dq_3} = \Psi_1(q_3)(T_{q_3}M_3 - \frac{\partial T_{q_3}}{\partial q_3})T_{q_3}^{-1}$$

Finalement on conclut que

$$\begin{aligned} T(q) &= \Psi_1(q_3)T_{q_3}(q_2)\Phi_{q_1}(q_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_3 & -q_2 \sin q_3 \\ 0 & \cos q_3 + \sin q_3 & q_2(\cos q_3 - \sin q_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.124)$$

satisfait $\dot{T}(q) = TM^{-1}C(q, \dot{q})$. En outre le difféomorphisme $\Theta(q) = (q_1, q_2 \cos q_3, q_2(\cos q_3 + \sin q_3))^T$ est tel que $\frac{\partial \Theta}{\partial q} = T(q)$. Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 2.6.1. *Dans les coordonnées $\Theta, z = T(q)\dot{q}$, le pont roulant est décrit par*

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= z, \\ \dot{z} &= \varphi(y, u), \\ y &= \Theta. \end{aligned} \quad (2.125)$$

où $\varphi(y, u) = TM^{-1}(u - V(q))$.

2.6.2 Construction d' un observateur

La structure du système (2.125) est exactement sous la formes linéaire en l'état non mesuré. Ceci vas mener à la construction d'un observateur pour un tel système. Introduisons alors le système auxiliaire suivant

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Theta}} &= \hat{v} - K_1(\hat{\Theta} - \Theta) \\ \dot{\hat{z}} &= -K_2(\hat{\Theta} - \Theta) + \varphi(y, u), \end{aligned} \quad (2.126)$$

où K_1 et K_2 sont deux matrices définies positives. le système (2.126) est un observateur pour (2.125). Plus avec précision, nous avons

Proposition 2.6.2. *Soit K_1 et K_2 deux matrices symétrique définies positive. Alors le système (2.126) est un observateur pour (2.125). De plus, la norme de l'erreur d'observation est bornée par une exponentielle dont la vitesse de convergence peut être choisie arbitrairement.*

Démonstration. Posons $e = (\hat{q} - q, \hat{v} - v)^T$. Alors :

$$\dot{e} = Ae$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -K_1 & I_3 \\ -K_2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est herwitz, en effet : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A associée a un vecteur propre (v_1, v_2) .
On a

$$\begin{pmatrix} -K_1 v_1 + v_2 \\ -K_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit canonique de $\mathbb{C}^3$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda} v_1, \lambda v_1 \rangle &= \langle \bar{\lambda} v_1, -K_1 v_1 + v_2 \rangle \\ &= -\lambda \langle v_1, K_1 v_1 \rangle + \langle \bar{\lambda} v_1, v_2 \rangle \\ &= -\lambda \langle v_1, K_1 v_1 \rangle + \langle v_1, \lambda v_2 \rangle \\ &= -\lambda \langle v_1, K_1 v_1 \rangle - \langle v_1, K_2 v_1 \rangle \end{aligned} \tag{2.127}$$

Notons que si $v_1 = 0$ alors $v_2 = 0$ aussi, ce qui est impossible. Alors λ satisfait le polynôme

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

avec a, b , et c sont strictement positives. Nous concluons donc que la partie réelle de la valeur propre λ est négative. Ce qui nous permet de conclure. $\square$

Remarque 2.6.1. On peut remarquer que si la matrice M vérifie :

Propriété 2.6.1. Il existent deux constantes positives κ_1, κ_2 telle que

$$\kappa_1 Id_3 \leq M \leq \kappa_2 Id_3 \tag{2.128}$$

De cette propriété et en tenant compte du fait que la matrice $T^T M T^{-1}$ est constante, on peut déduire facilement qu'il existent ξ_1, ξ_2 , telle que

$$\xi_1 \leq \|T^{-1}(q)\| \leq \xi_2,$$

Si $\bar{\Theta}(\Theta)$ désigne la réciproque du difféomorphisme $\Theta(q)$ et en définissant

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(\hat{\Theta}) &= \hat{q}, \\ T(q)\hat{z} &= \hat{\dot{q}} \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|\hat{q} - q\| &\leq \xi_2 \|\Theta - \bar{\Theta}\| \\ \|\hat{\dot{q}} - \dot{q}\| &\leq \xi_2 \|z - \hat{z}\| \end{aligned} \tag{2.129}$$

ce qui donne une estimation exponentielle de q and $\dot{q}$.

Chapitre 3

Forme triangulaire pour une famille de système d' Euler-Lagrange

La littérature dédiée à l'analyse, l'observation et la commande des systèmes mécaniques (complètement agis) a été particulièrement abondante durant ces deux dernières décennies. Pour une vue générale sur ce sujet voir [83, 29].

Le premier problème traité dans ce chapitre, est lié à la génération d'observateurs pour les systèmes mécaniques. En effet, il est rare en pratique que les variables d'état soient disponibles pour être mesurés en temps réel. Dans la plupart des cas, il est nécessaire d'estimer avec exactitude les variables d'état non mesurées, particulièrement quand elles sont utilisées pour la génération d'une commande. Le système dynamique utilisé pour reconstruire l'état est appelé observateur. Le problème de génération d'observateurs non linéaires, en particulier pour les systèmes mécaniques a intéressé de nombreux scientifiques. Nous citons à titre d'exemple les travaux suivants : Ole Morten Aamo, Murat Arcak, Thor I. Fossen and Petar V. Kokotović dans [78], N. Aghannan and P. Rouchon dans [77], H. Berghuis and H. Nijmeijer dans [50] et D.A. Anisi, J. Hamberg, dans [32] ou ils généralisent le résultat de [77].

En se concerne le problème de poursuite des trajectoires et en particulier de la stabilisation par retour de position, à notre connaissance, le premier contrôleur globalement asymptotiquement stable pour des systèmes d'Euler-Lagrange à un degré de liberté, a été présenté récemment dans [6]. Cette approche est basée sur une structure de type "Computed torque" plus PD, et un retour dynamique de sortie inspirée du filtre linéaire de différentiation approximative. Il faut remarquer que Burkov, I. V a montré dans [24] en utilisant des techniques de perturbation singulière la stabilité globale d'un système d'Euler-Lagrange en boucle fermé par retour dynamique de position. L'inconvénient de cette technique est qu'il n'est pas possible d'établir des bornes explicites pour les gains du contrôleur. Burkov a montré "l'existence" d'un contrôleur globalement asymptotique sans mesure de vitesse.

Dans [17], en utilisant des propriétés remarquable de tels systèmes à un degrés de liberté, l'auteur a présenté une solution très simple du problème. Le contrôleur obtenu est en effet de type linéaire basé sur un observateur et a donnée des résultat très honorables similaire à ceux publiés dans [6]. Cependant cette approche ne peut être généralisé aux systèmes à n degrés de liberté si on arrive à résoudre une équation différentielle introduite par G. Besançon dans [17] et A. Loria dans [7]. Récemment, dans [23] un résultat de séparation pour une classe de systèmes de type quadratique a été proposé, sous forme de conditions de stabilisation par retour d'état d'une part et d'observabilité d'autre part. Ces conditions permettent de synthétiser pour des sorties initiales quelconque une loi de commande par retour de sortie semi-globale. Ces conditions sont satisfaites par les systèmes d'Euler-Lagrange.

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de la stabilisation à travers la sortie et la construction d'observateurs pour des systèmes d'Euler-Lagrange. Nous prouvons que le problème considéré peut être résolu quand la dimension de (3.1) est quatre et quand $M(q)$ est indépendant d'une des composantes du vecteur q et même lorsque $M(q)$ ne vérifie pas l'hypothèse 3.1.1. Comme la construction présentée dans [30], la nôtre n'est pas basée sur un principe de séparation (Si l'hypothèse 3.1.1 est satisfaite on peut appliquer un principe de séparation en utilisant l'observateur (3.20)) : dans ce cas nous ne fournissons pas un observateur qui converge pour toute entrée, mais nous exhibons un observateur qui converge quand des lois de commandes particulières sont appliquées. La conception que nous proposons s'inspire de [42] : en particulier les deux se fondent intensivement sur les avantages qui peuvent être impliqués d'une forme triangulaire. En revanche l'approche de [42] peut être appliquée aux systèmes obtenu après transformation et un observateur dont la dimension est plus grande que celle de celle nous construisons. La preuve de la stabilité que nous donnons est basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov avec une dérivée définie négative le long de la trajectoire du système en boucle fermé. Cette fonction de Lyapunov et sa dérivée sont, sur un voisinage de l'origine, respectivement majorée et minorée par une fonction quadratique définie positive et une fonction quadratique définie négative. Il suit que la stabilité exponentielle locale et la stabilité asymptotique globale sont réalisées.

3.1 Une famille de système d'Euler-Lagrange

Dans cette section, nous présentons une forme triangulaire pour une famille de systèmes mécaniques avec deux degrés de liberté. L'importance de ces formes triangulaires est due au fait que beaucoup de problèmes typiques dans la conception non linéaire de commande comprenant le système de chariot robuste [42, 44, 75], le système articulé à deux degré de liberté (manipulateur) [33, 38] et l'exemple du système de TORA [101] sont des systèmes à deux degrés de liberté qui peuvent être transformés en une forme triangulaire (pour d'autres exemples voir [85]). Néanmoins, jusqu'ici aucune forme triangulaire (globales) n'est connue pour la majorité de ces systèmes non linéaires excepté le système de beam and ball [77] et le système Tora.

Nous considérons uniquement la famille des systèmes d'Euler-Lagrange à deux degré de liberté ; définie à partir des équations d'Euler-Lagrange comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= v \\ M(q)\ddot{q} + C(q, v)v + V(q) &= \tau\end{aligned}\tag{3.1}$$

On fait les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1.1. *La matrice $M(q)$ ne dépend que d'une seule variable, nous supposons que cette variable est q_2 , ce qui nous permet d'écrire :*

$$M(q) = \begin{pmatrix} M_{11}(q_2) & M_{12}(q_2) \\ M_{12}(q_2) & M_{22}(q_2) \end{pmatrix}\tag{3.2}$$

Hypothèse 3.1.2. *En outre on a les égalités suivantes*

$$\dot{M}(q) = C^T(q, v) + C(q, v),\tag{3.3}$$

$$C(q, v)v = \dot{M}v + \frac{\partial}{\partial q}(v^T Mv)\tag{3.4}$$

Par ailleurs ils existent deux constants $m_1, m_2 > 0$ positives telle que pour q_2 on a

$$0 < m_1 I \leq M(q_2) \leq m_2 I\tag{3.5}$$

où I est la matrice identité d'ordre 2.

Hypothèse 3.1.3. La matrice $C(q, v)$ est bornée en v , c'est à dire qu'il existe $k_c > 0$ telle que

$$|C(q, v)| \leq K|v| \quad (3.6)$$

Hypothèse 3.1.4. Le terme $\tau_1 - V_1(q)$ est bornée en norme.

3.1.1 Discussion autour des hypothèses et conséquences

1. L'hypothèse 3.1.1 est restrictive. Cependant, elle est satisfaite par beaucoup de systèmes d'Euler-Lagrange à deux degrés de liberté.
2. L'hypothèse 3.1.3 figure dans la plupart des travaux portant sur les systèmes d'Euler-Lagrange. Cependant, ils existent des systèmes d'Euler-Lagrange qui ne la satisfont pas.
3. L'hypothèse 3.1.4 n'est pas très restrictive dans le sens que, dans beaucoup de cas, la stabilisation asymptotique globale où la poursuite des trajectoires peut être réalisés avec des commandes telles que l'hypothèse 3.1.4 est satisfaite.
4. Les inégalités (3.5) dans l'hypothèse 3.1.1 impliquent qu'il existent deux nombres positifs κ_1 et κ_2 tel que

$$0 < \kappa_1 \leq M_{11}(q_2) \leq \kappa_2. \quad (3.7)$$

En outre, de l'inégalité (3.6) on peut déduire aisément que la valeur absolue de M'_{ij} avec $i, j = 1, 2$ est bornée.

3.1.2 Changement de coordonnées

Reprenons les équations (3.1), qui peuvent se récrire comme

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = M^{-1}(q)(\tau - C(q, v)v - V(q)) \end{cases} \quad (3.8)$$

avec

$$C(q, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}M'_{11}(q_2)v_2 & \frac{1}{2}M'_{11}(q_2)v_1 + M'_{12}(q_2)v_2 \\ -\frac{1}{2}M'_{11}(q_2)v_1 & \frac{1}{2}M'_{22}(q_2)v_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

et

$$M(q)^{-1} = \frac{1}{\Delta(q_2)} \begin{pmatrix} M_{22}(q_2) & -M_{12}(q_2) \\ -M_{12}(q_2) & M_{11}(q_2) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

où

$$\Delta(q_2) = M_{11}(q_2)M_{22}(q_2) - M_{12}^2(q_2) \quad (3.11)$$

Il s'ensuit donc que

$$C_1(q_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}M'_{11}(q_2) \\ -\frac{1}{2}M'_{11}(q_2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2(q_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}M'_{11}(q_2) & M'_{12}(q_2) \\ 0 & \frac{1}{2}M'_{22}(q_2) \end{pmatrix}$$

(où ' désigne la dérivée par rapport à q_2). Nous avons vu dans le chapitre 2, qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\dot{T} = TM^{-1}C(q, v)$ admette une solution est donnée par

$$\frac{\partial C_1}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2}{\partial q_1} = C_2^\top M^{-1}C_1 - C_1^\top M^{-1}C_2 \quad (3.12)$$

Ce qui est équivalent, dans ce cas particulier, à

$$M''_{11}(q_2) = \frac{M'_{11}(q_2)\Delta'(q_2)}{2\Delta(q_2)} \quad (3.13)$$

Un exemple de système vérifiant cette dernière égalité est le pendule inversé, le Tora. Par contre le manipulateur à deux bras ne vérifie pas cette propriété. Grâce à ceci, l'espoir d'écrire un tel système sous la forme affine en la vitesse est vain en général. Nous allons démontrer l'existence d'une transformation qui transforme un tel système (3.1) en une forme triangulaire en la partie non mesuré (en la vitesse v) pour laquelle un observateur asymptotique globale sera construit.

Considérons maintenant l'application $\Phi()$ définie par

$$\Phi: (q_1, v_1, q_2, v_2) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

avec

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + \int_0^{q_2} \frac{M_{12}(s)}{M_{11}(s)} ds, \\ x_2 &= M_{11}(q_2)v_1 + M_{12}(q_2)v_2, \\ x_3 &= q_2, \\ x_4 &= \alpha(q_2)v_2, \end{aligned}$$

où

$$\alpha(q_2) = \sqrt{\frac{\Delta(q_2)}{M_{11}(q_2)}}$$

L'hypothèse 3.1.1 assure que, pour tous q_2 , $m_{11}(q_2) > 0$ et $\Delta(q_2) > 0$. On peut facilement déduire de ces deux propriétés que Φ est bijective. Nous avons alors

Proposition 3.1.1. *Dans les coordonnées x_i ; pour $i = 1, \dots, 4$ le système (3.1) s'écrit :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{M_{11}(x_3)}, \\ \dot{x}_2 &= u_1, \\ \dot{x}_3 &= \frac{x_4}{\alpha(x_3)}, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\alpha(x_3)} \left(\frac{M'_{11}(x_3)}{2M_{11}^2(x_3)} x_2^2 + u_2 \right), \\ y &= (x_1, x_3)^\top. \end{cases} \quad (3.14)$$

où $u_1 = \tau_1 - V_1$ et $u_2 = \tau_2 - V_2 - \frac{M_{12}}{M_{11}}u_1$.

Démonstration. Les expressions de $\dot{x}_1$ and $\dot{x}_3$ sont évidentes. On peut déterminer l'expression de $\dot{x}_2$ comme suit : puisque

$$M(q_2)\dot{v} = -C(q_2, v)v + \tau - V$$

on a

$$M_{11}(q_2)\dot{v}_1 + M_{12}(q_2)\dot{v}_2 = -M'_{11}(q_2)v_1v_2 - M'_{12}(q_2)v_2^2 + \tau_1 - V_1$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= M_{11}(q_2)\dot{v}_1 + M_{12}(q_2)\dot{v}_2 + M'_{11}(q_2)v_1v_2 + M'_{12}(q_2)v_2^2 \\ &= \tau_1 - V_1 \\ &= u_1\end{aligned}$$

Il reste maintenant à déterminer l'expression de $\dot{x}_4$. D'après l'égalité

$$\dot{v} = -M(q_2)^{-1}(C(q_2, v)v + \tau - V)$$

on peut déduire que

$$\begin{aligned}\Delta(q_2)\dot{v}_2 &= \frac{1}{2}M_{11}M'_{11}v_1^2 + M_{12}M'_{11}v_1v_2 + (M_{12}M'_{12} - \frac{1}{2}M_{11}M'_{22})v_2^2 - M_{12}(\tau_1 - V_1) \\ &\quad + M_{11}(\tau_2 - V_2) \\ &= \frac{M'_{11}}{2M_{11}}(M_{11}^2v_1^2 + 2M_{12}M_{11}v_1v_2 + M_{12}^2v_2^2) - M_{12}(\tau_1 - V_1) + M_{11}(\tau_2 - V_2) \\ &\quad + \frac{1}{2M_{11}}(2M_{11}M_{12}M'_{12} - M_{11}^2M'_{12} - M_{12}^2M'_{11})v_2^2 \\ &= \frac{M'_{11}}{2M_{11}}x_2^2 + \frac{1}{2M_{11}\alpha^2}(2M_{11}M_{12}M'_{12} - M_{11}^2M'_{12} - M_{12}^2M'_{11})x_4^2 - M_{12}(\tau_1 - V_1) \\ &\quad + M_{11}(\tau_2 - V_2)\end{aligned}$$

En outre

$$\dot{x}_4 = \alpha'(q_2)v_2^2 + \alpha(q_2)\dot{v}_2$$

En tenant compte du fait que

$$\alpha' = \frac{1}{2\alpha M_{11}^2}(M_{11}^2M'_{22} - 2M_{11}M_{12}M'_{12} + M_{12}^2M'_{11})$$

On obtient la formule indiquée ci-dessus dans la proposition. $\square$

3.1.3 Conception de l'observateur

Considérons tout d'abord le sous-système constitué par les deux premières équations du système (3.14)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{x_2}{M_{11}(x_3)}, \\ \dot{x}_2 &= u_1, \\ y &= x_1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Ce sous-système ne dépend pas de x_4 . D'ailleurs il est linéaire en ce qui concerne la variable non mesurée x_2 . En fait il peut être considéré comme système linéaire non autonome. Par conséquent, nous pouvons facilement déterminer un observateur à convergence exponentielle globale, donnant une estimation de x_1 et x_2 .

Proposition 3.1.2. *Soient k_1, k_2 deux réels strictement négatifs. Le système*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}(\hat{x}_2 + k_1(\hat{x}_1 - x_1)), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}k_2(\hat{x}_1 - x_1) + u_1, \end{cases} \quad (3.16)$$

est un observateur à convergence exponentielle de (3.15) .

Démonstration. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\hat{x}_1 - x_1, \hat{x}_2 - x_2)$. L'équation d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}(\varepsilon_2 - k_1\varepsilon_1), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}k_2\varepsilon_1, \end{cases} \quad (3.17)$$

Sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{M_{11}(x_3)} \begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Puisque les paramètres k_1 et k_2 sont négatifs, alors la matrice définie ci-dessus est asymptotiquement stable. En outre l'inégalité (3.5) implique l'existence de κ_1 et κ_2 telle que

$$0 < \kappa_1 \leq M_{11}(x_3) \leq \kappa_2. \quad (3.18)$$

Par conséquent, nous pouvons trouver une fonction de Lyapunov quadratique définie positive $V(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dont le dérivé le long de la trajectoire du système (3.17) satisfait

$$\dot{V} = -\frac{1}{M_{11}(x_3)}W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq -\frac{1}{\kappa_2}W(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (3.19)$$

avec $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une fonction quadratique définie positive; ceci implique que le système (3.16) est un observateur exponentiel global pour le système (3.15) dont on peut régler arbitrairement la vitesse de convergence en jouant sur les paramètres k_1 et k_2 . $\square$

Maintenant nous fournissons un observateur pour le système (3.14). Nous énonçons

Proposition 3.1.3. *Si les paramètres k_1, k_2, k_4 et k_6 sont négatifs. Alors, sous les hypothèses 3.1.1 et 3.1.3 le système*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}(\hat{x}_2 + k_1(\hat{x}_1 - x_1)), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}k_2(\hat{x}_1 - x_1) + u_1, \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \frac{\hat{x}_4}{\alpha(x_4)} + k_3(\hat{x}_1 - x_1) + \frac{k_4}{\alpha(x_3)}(\hat{x}_3 - x_3), \\ \dot{\hat{x}}_4 &= \frac{1}{\alpha(x_3)}\left(\frac{M'_{11}(x_3)}{2M_{11}^2(x_3)}\hat{x}_2^2 + u_2 + k_6(\hat{x}_3 - x_3)\right) + k_5(\hat{x}_1 - x_1), \end{cases} \quad (3.20)$$

est un observateur à convergence exponentielle de (3.14) dans le sens qu'il existe un polynôme Q telle que

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_2(t)| &\leq |\tilde{x}_2(0)| e^{-\frac{k_1}{\kappa_1}t} \\ |\tilde{x}_4(t)| &\leq Q(\tilde{x}_2, \tilde{x}_4(0), x_2(0))e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Démonstration. Posons $\varepsilon_i = \hat{x}_i - x_i$, pour $i = 1, \dots, 4$. L'équation d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}(\varepsilon_2 - k_1\varepsilon_1), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{M_{11}(x_3)}k_2\varepsilon_1, \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \frac{\varepsilon_4}{\alpha(x_4)} + k_3\varepsilon_1 + \frac{k_4}{\alpha(x_3)}\varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_4 &= \frac{1}{\alpha(x_3)}\left(\frac{M'_{11}(x_3)}{2M_{11}^2(x_3)}(\hat{x}_2^2 - x_2^2) + k_6\varepsilon_3\right) + k_5\varepsilon_1, \end{cases} \quad (3.22)$$

Des inégalités (3.5), (3.6) et puisque la matrice d'inertie est définie positive on peut montrer facilement l'existence de trois réels α_1, α_2 et $c > 0$ tels que

$$\alpha_1 \leq \alpha(x_3) \leq \alpha_2$$

$$\left| \frac{M'_{11}(x_3)}{2k_2 M_{11}(x_3)^2} \right| \leq c$$

Maintenant, l'hypothèse 3.1.4 garantit que $\dot{x}_2$ est bornée, En outre l'inégalité (3.19) est vérifié. Il suit qu'ils existent trois constantes a, k, β telles que pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(t)| &\leq k(|\varepsilon_1(0)| + |\varepsilon_2(0)|)e^{-\beta t}, \\ |\varepsilon_2(t)| &\leq k(|\varepsilon_1(0)| + |\varepsilon_2(0)|)e^{-\beta t} \\ |x_2(t)| &\leq |x_2(0)| + at \end{aligned} \quad (3.23)$$

D'autre part, puisque k_4 et k_6 sont négatifs, on peut déterminer une fonction quadratique définie positive $Q(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ telles que sa dérivée le long des trajectoire du système (3.22) satisfait

$$\begin{aligned} \dot{Q} &\leq -\varepsilon_3^2 - \varepsilon_4^2 + c(|\varepsilon_3| + |\varepsilon_4|)(|\varepsilon_1| + \hat{x}_2^2 - x_2^2) \\ &\leq -\varepsilon_3^2 - \varepsilon_4^2 + c(|\varepsilon_3| + |\varepsilon_4|)(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2||\varepsilon_2 + 2x_2|) \\ &\leq -\frac{1}{2}\varepsilon_3^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_4^2 + 2c^2(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2||\varepsilon_2 + 2x_2|)^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Par conséquent il existe deux constantes K_1 et K_2 qui dépendent de $\varepsilon_1(0)$, $\varepsilon_2(0)$ et $x_2(0)$ telle que

$$\dot{Q} \leq -K_1 Q(\varepsilon_3, \varepsilon_4) + K_2 e^{-\frac{\beta}{2}t}. \quad (3.25)$$

Ce qui implique

$$Q(\varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t)) \leq -K_1 \int_0^t Q(\varepsilon_3(s), \varepsilon_4(s)) ds + K_3 + Q(\varepsilon_3(0), \varepsilon_4(0)). \quad (3.26)$$

avec $K_3 > 0$.

Finalement en utilisant le lemme de Gronwal, on a

$$Q(\varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t)) \leq (K_3 + Q(\varepsilon_3(0), \varepsilon_4(0))) e^{-K_1 t}. \quad (3.27)$$

Ceci conclut la preuve. □

Nous pouvons aussi donner un observateur réduit. Nous énonçons alors le résultat suivant.

Proposition 3.1.4. *Sous les hypothèses 3.1.1 et 3.1.3 le système*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{1}{M_{11}(x_3)}(k_1 z_1 + k_1^2 x_1) + u_1, \\ \hat{x}_2 = z_1 + k_1 x_1 \\ \dot{z}_2 = -\frac{1}{\alpha(x_3)} \left(k_2 z_2 + k_2^2 x_3 + u_2 + \frac{M'_{11}(x_3)}{2M_{11}^2(x_3)} \hat{x}_2^2 \right), \\ \hat{x}_4 = z_2 + k_2 x_3 \end{cases} \quad (3.28)$$

ou k_1, k_2 sont positives, est un observateur réduit global pour (3.14).

3.2 Stabilisation

Reprenons les équations (3.1)

$$\begin{aligned}\dot{q} &= v \\ M(q)\dot{v} + C(q, v)v + V(q) &= \tau\end{aligned}\tag{3.29}$$

On suppose toujours que $M(q)$ dépend seulement de q_2 . L'objectif est de trouver une loi de commande stabilisant qui permettra à maintenir le système dans une position désirée.

Les équilibres du système libre, c'est à dire avec $\tau = 0$ sont les points critiques de la fonction d'énergie potentielle c'est à dire les solutions de

$$\frac{\partial G}{\partial q} = V(q) = 0$$

Donc les équilibres d'un tel système sont $(q_0, 0)$.

Théorème 3.2.1. *Si le système 3.1 satisfait l'hypothèse 3.1.1, il est globalement asymptotiquement stabilisable par retour de sortie autour d'un point d'équilibre $(q_0, 0)$.*

Démonstration. Il est toujours possible de ramener l'étude de la stabilisation du point d'équilibre $(q_0, 0)$ à l'étude de la stabilisation de l'origine. Introduisons maintenant les nouvelles variables

$$\begin{aligned}r_1 &= q_1 + \int_0^{q_2} \frac{M_{12}(s)}{M_{11}(s)} ds, \\ \xi_1 &= M_{11}(q_2)v_1 + M_{12}(q_2)v_2, \\ \Omega_2 &= \xi_1 + \alpha(q_2)v_2\end{aligned}\tag{3.30}$$

Le système s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= \frac{\xi_1}{M_{11}(q_2)} \\ \dot{\xi}_1 &= u_1 \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{\alpha(q_2)} (\Omega_2 - \xi_1), \\ \dot{\Omega}_2 &= u_1 + \frac{1}{\alpha(q_2)} \left(\frac{M'_{11}(q_2)}{2M_{11}^2(q_2)} \xi_1^2 + u_2 \right),\end{aligned}\tag{3.31}$$

Posons

$$u_3 = \alpha(q_2)u_1, \quad \rho(q_2) = \frac{M'_{11}(q_2)}{2M_{11}^2(q_2)}, \quad p(q_2) = \frac{\alpha(q_2)}{M_{11}(q_2)}, \quad u_4 = \alpha(q_2)u_1 + u_2$$

Puisque le terme $\alpha(q_2) > 0$ pour tout q_2 , des lois de commandes qui stabilisent globalement l'origine pour (3.31) aussi stabilisent globalement (3.1). Ainsi, construisons un feedback par retour de position pour le système

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= p(q_2)\xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= u_3 \\ \dot{q}_2 &= \Omega_2 - \xi_1, \\ \dot{\Omega}_2 &= u_4 + \rho(q_2)\xi_1^2,\end{aligned}\tag{3.32}$$

Introduisons le système auxiliaire suivant

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{r}}_1 &= p(q_2)\hat{\xi}_1 - p(q_2)(r_1 - \hat{r}_1) \\
 \dot{\hat{\xi}}_1 &= u_3 - p(q_2)(r_1 - \hat{r}_1) \\
 \dot{\hat{q}}_2 &= \hat{\Omega}_2 + \lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)(q_2 - \hat{q}_2) \\
 \dot{\hat{\Omega}}_2 &= u_4 + (q_2 - \hat{q}_2)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

avec $\tilde{q}_2 = q_2 - \hat{q}_2$ et $\tilde{\Omega}_2 = \Omega_2 - \hat{\Omega}_2$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{q}}_2 &= \tilde{\Omega}_2 - \lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2 - \xi_1 \\
 \dot{\tilde{\Omega}}_2 &= -\tilde{q}_2 + \rho(q_2)\xi_1^2 \\
 \dot{\hat{q}}_2 &= \hat{\Omega}_2 + \lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2 \\
 \dot{\hat{\Omega}}_2 &= u_5
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Considérons la fonction quadratique

$$Q = \frac{1}{2} \left[\tilde{q}_2^2 + \tilde{\Omega}_2^2 + \hat{q}_2^2 + (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \right] \tag{3.35}$$

Calculons la dérivée de Q le long des trajectoires de (3.34), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= -\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_2\xi_1 + \rho(q_2)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2 \\
 &\quad + \hat{q}_2(\hat{\Omega}_2 + \lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2) + (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)(u_5 + g(\tilde{q}_2, \hat{q}_2, \hat{\Omega}_2))
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Choisissons

$$u_5 = -g(\tilde{q}_2, \hat{q}_2, \hat{\Omega}_2) - \hat{q}_2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2) \tag{3.37}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &\leq -\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2\hat{q}_2 - \tilde{q}_2\xi_1 + \rho(q_2)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Choisissant $\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2) \geq 2$, on déduit

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &\leq -\frac{3}{4}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2\hat{q}_2 + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \rho(q_2)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

– *Premier cas* : Si $2|\hat{q}_2| \leq |\tilde{q}_2|$. Alors

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &\leq -\frac{1}{4}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \rho(q_2)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

– *Deuxième cas* : Si $2|\hat{q}_2| \geq |\tilde{q}_2|$. Alors $|\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2\hat{q}_2| \leq |2\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\hat{q}_2^2|$. Choisissons par exemple $\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2) = \mu(|\tilde{q}_2| + |\hat{q}_2|)$, où μ est une fonction croissante positive. Il s'ensuit donc que $|\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2\hat{q}_2| \leq |2\mu(3|\hat{q}_2|)\hat{q}_2^2|$.

En revanche on peut choisir la fonction $\beta(\cdot)$ de telle sorte que $\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 \geq 2|\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2\hat{q}_2|$. Un tel choix rapporte que

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &\leq -\frac{3}{4}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{2}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \rho(q_2)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Donc, pour tout $\hat{q}_2$ et $\tilde{q}_2$ on a

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &\leq -\frac{1}{4}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{2}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \rho(q_2)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2 \\
 &\leq -\frac{1}{4}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{2}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \rho(0)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2 + (\rho(q_2) - \rho(0))\tilde{\Omega}_2\xi_1^2 \\
 &\leq -\frac{1}{4}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{2}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \rho(0)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2 + \frac{1}{2}(\rho(q_2) - \rho(0))^2 + \frac{1}{2}\tilde{\Omega}_2^2\xi_1^4
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Puisque la fonction $q_2 \mapsto (\rho(q_2) - \rho(0))^2$ est C^∞ . Donc en utilisant un raisonnement analogue au précédent et en choisissant les fonctions λ et β suffisamment grande, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &\leq -\frac{1}{8}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{8}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \rho(0)\tilde{\Omega}_2\xi_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\Omega}_2^2\xi_1^4
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Posons

$$U_1 = \ln(1 + Q) \tag{3.44}$$

Donc, il existe une constante c positive telle que

$$\dot{U}_1 \leq \frac{-\frac{1}{8}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{8}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2}{1 + Q} + c\xi_1^2 + c\xi_1^4 \tag{3.45}$$

Considérons le maintenant sous système

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{r}}_1 &= p(q_2)\tilde{\xi}_1 - p(q_2)\tilde{r}_1 \\
 \dot{\tilde{\xi}}_1 &= -p(q_2)\tilde{r}_1 \\
 \dot{\hat{r}}_1 &= p(q_2)\hat{\xi}_1 - p(q_2)\tilde{r}_1 \\
 \dot{\hat{\xi}}_1 &= \mu_4 - p(q_2)\tilde{r}_1
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Prenons la loi de commande

$$u_3 = -p(q_2)\hat{\xi}_1 - p(q_2)\hat{r}_1 + p(q_2)\tilde{r}_1 \tag{3.47}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{r}}_1 &= p(q_2)\tilde{\xi}_1 - p(q_2)\tilde{r}_1 \\
 \dot{\tilde{\xi}}_1 &= -p(q_2)\tilde{r}_1 \\
 \dot{\hat{r}}_1 &= p(q_2)\hat{\xi}_1 - p(q_2)\tilde{r}_1 \\
 \dot{\hat{\xi}}_1 &= -p(q_2)\hat{\xi}_1 - p(q_2)\hat{r}_1
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

La fonction de Lyapunov

$$U_2 = 32(\tilde{r}_1^2 + \tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_1\tilde{r}_1) + \hat{r}_1^2 + \hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_1\hat{r}_1 \tag{3.49}$$

Alors

$$\dot{U}_2 \leq -\frac{p(q_2)}{4}(\tilde{r}_1^2 + \tilde{\xi}_1^2 + \hat{r}_1^2 + \hat{\xi}_1^2) \tag{3.50}$$

Considérons la fonction

$$U_3 = U_1 + k(U_2 + U_2^2) \quad (3.51)$$

avec $k > 0$. Cette fonction est positive définie, radialement non bornée, nulle à l'origine et sa dérivée le long des trajectoires de système (3.46) en boucle fermé avec (3.47)

$$\begin{aligned} \dot{U}_3 \leq & \frac{-\frac{1}{8}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{8}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2}{1 + Q} + c\xi_1^2 + c\xi_1^4 \\ & - k\frac{p(q_2)}{4}(\tilde{r}_1^2 + \tilde{\xi}_1^2 + \hat{r}_1^2 + \hat{\xi}_1^2)(1 + 2U_2) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Finalement si k est suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \dot{U}_3 \leq & \frac{-\frac{1}{8}\lambda(\tilde{q}_2, \hat{q}_2)\tilde{q}_2^2 - \frac{1}{8}\beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2^2 - (\hat{\Omega}_2 + \beta(\hat{q}_2)\hat{q}_2)^2}{1 + Q} \\ & - k\frac{p(q_2)}{8}(\tilde{r}_1^2 + \tilde{\xi}_1^2 + \hat{r}_1^2 + \hat{\xi}_1^2)(1 + 2U_2) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ce qui nous permet de conclure. □

3.3 Exemple d'application

Pour l'illustrer nos méthodes, nous avons choisi d'appliquer notre méthode pour résoudre le problème de stabiliser globalement asymptotiquement les équations d'un manipulateur à deux bras étudié dans [33, 38]. Dans ces deux papier, des propriétés d'ISS (Input to State Stability) étudiées respectivement dans le contexte du temps continu ainsi que du temps discret par retour d'état.

Considérons le manipulateur montré dans la figure 3.1.

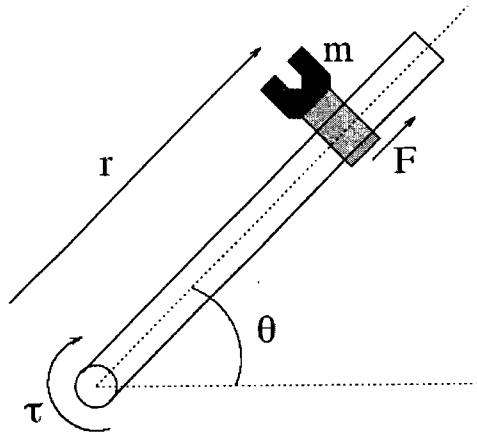


FIG. 3.1 – The Two Link Manipulator

Les équations décrivant la dynamique du système sont les suivantes

$$\begin{aligned} \left(mr^2 + M\frac{L^2}{3} \right) \ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} &= \tau \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= F \end{aligned} \quad (3.54)$$

Écrivons $(\theta \ r \ \dot{\theta} \ \dot{r})^\top$ comme $x := (q_1 \ q_2 \ z_1 \ z_2)^\top$. La matrice $M(q) = \begin{pmatrix} mr^2 + M\frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ satisfait

$$\|M(q)\| \leq c_1 (1 + \|q\|^2)$$

avec $c_1 > 0$, ce qui gêne la construction des observateurs développé dans le premier paragraphe

Le modèle de l'espace d'état peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= -\frac{2mq_2z_1z_2}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} + \frac{\tau}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\ \dot{q}_2 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= q_2z_1^2 + \frac{F}{m} \end{aligned} \tag{3.55}$$

On observe la position

$$y = (q_1, q_2)^\top \tag{3.56}$$

Nous énonçons

Théorème 3.3.1. *Le système (3.55) avec la sortie (3.56) est globalement asymptotiquement et localement exponentiellement stabilisable par retour de sortie dynamique autour de l'origine.*

Démonstration. Le changement de coordonnées défini par

$$\xi_1 = \left(mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}\right) z_1 \tag{3.57}$$

transforme (3.55) en

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\xi_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\ \dot{\xi}_1 &= \tau \\ \dot{q}_2 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= q_2 \left(\frac{\xi_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \right)^2 + \frac{F}{m} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Ce système est linéaire par rapport à z_2 et on peut facilement résoudre le problème de la stabilisation globale asymptotique par retour de sortie dynamique.

Considérons le système auxiliaire suivant

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{q}}_1 &= \frac{\hat{\xi}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} - \frac{q_1 - \hat{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\
 \dot{\hat{\xi}}_1 &= \tau - \frac{q_1 - \hat{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\
 \dot{\hat{q}}_2 &= \hat{z}_2 - (q_2 - \hat{q}_2) \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= q_2 \left(\frac{\hat{\xi}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \right)^2 + \frac{F}{m} - (q_2 - \hat{q}_2)
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Soit

$$\tilde{q}_1 = q_1 - \hat{q}_1, \tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \hat{\xi}_1, \tilde{q}_2 = q_2 - \hat{q}_2, \tilde{z}_2 = z_2 - \hat{z}_2 \tag{3.60}$$

L'estimation d'erreur s'écrit

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{q}}_1 &= \frac{\tilde{\xi}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} - \frac{\tilde{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\
 \dot{\tilde{\xi}}_1 &= -\frac{\tilde{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\
 \dot{\tilde{q}}_2 &= \tilde{z}_2 - \tilde{q}_2 \\
 \dot{\tilde{z}}_2 &= \frac{q_2}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \tilde{\xi}_1 [\tilde{\xi}_1 + 2\hat{\xi}_1] - \tilde{q}_2
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Considérons la loi de commande suivante

$$\tau = \frac{q_1 - \hat{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} - \frac{\hat{\xi}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} - \frac{\hat{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \tag{3.62}$$

$$F = m\tilde{q}_2 - mq_2 \left(\frac{\hat{\xi}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \right)^2 - m\hat{q}_2 - m\hat{z}_2 \tag{3.63}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{q}}_1 &= \frac{\hat{\xi}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} - \frac{\tilde{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\
 \dot{\hat{\xi}}_1 &= -\frac{\hat{\xi}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} - \frac{\hat{q}_1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}} \\
 \dot{\hat{q}}_2 &= \hat{z}_2 - \tilde{q}_2 \\
 \dot{\hat{z}}_2 &= -\hat{q}_2 - \hat{z}_2
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ qui est définie positive définie : $U_1(\hat{q}_2, \hat{\xi}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\xi}_2) = \log(1 + Q)$ avec

$$Q(\hat{q}_2, \hat{z}_2, \tilde{q}_2, \tilde{z}_2) = 3\tilde{q}_2^2 + 2\hat{q}_2\hat{z}_2 + 2\tilde{z}_2^2 + 10\tilde{q}_2^2 - 10\tilde{q}_2\tilde{z}_2 + 15\tilde{z}_2^2 \tag{3.65}$$

La dérivé de U_1 satisfait

$$\dot{U}_1(\hat{q}_2, \hat{\xi}_2, \tilde{q}_2, \tilde{\xi}_2) \leq -\frac{c_2 Q}{1 + Q} + c_2(\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_1^2) \tag{3.66}$$

On peut aussi facilement montrer que la dérivé de la fonction quadratique définie positive

$$U_2(\hat{q}_1, \hat{\xi}_1, \tilde{q}_1, \tilde{\xi}_1) = \hat{q}_1^2 + \hat{\xi}_1^2 + \hat{q}_1 \hat{\xi}_1 + 12[\tilde{q}_1^2 + \tilde{\xi}_1^2 - \tilde{q}_1 \tilde{\xi}_1] \quad (3.67)$$

le long des trajectoires de (3.64) satisfasse

$$\dot{U}_2 \leq -\frac{1}{4\left(mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}\right)}[\hat{q}_1^2 + \hat{\xi}_1^2] - \frac{1}{mq_2^2 + \frac{ML^2}{3}}[\tilde{q}_1^2 + \tilde{\xi}_1^2] \quad (3.68)$$

Il suit, d'après le théorème 3.2.1, que l'origine du système en boucle fermé avec la loi de commande (3.62) est globalement asymptotiquement stable.

□

3.3.1 Simulations

Pour illustrer la performance de la loi de commande proposée, nous allons présenter dans ce paragraphe quelques résultats des simulations numériques pour le manipulateur en boucle fermé avec la loi de commande (3.62). Les valeurs des composantes du système m, M et L sont arbitraires. Les courbes de la figure 3.2 montre la position (q_1, q_2) ainsi que les vitesses (ξ_1, z_2).

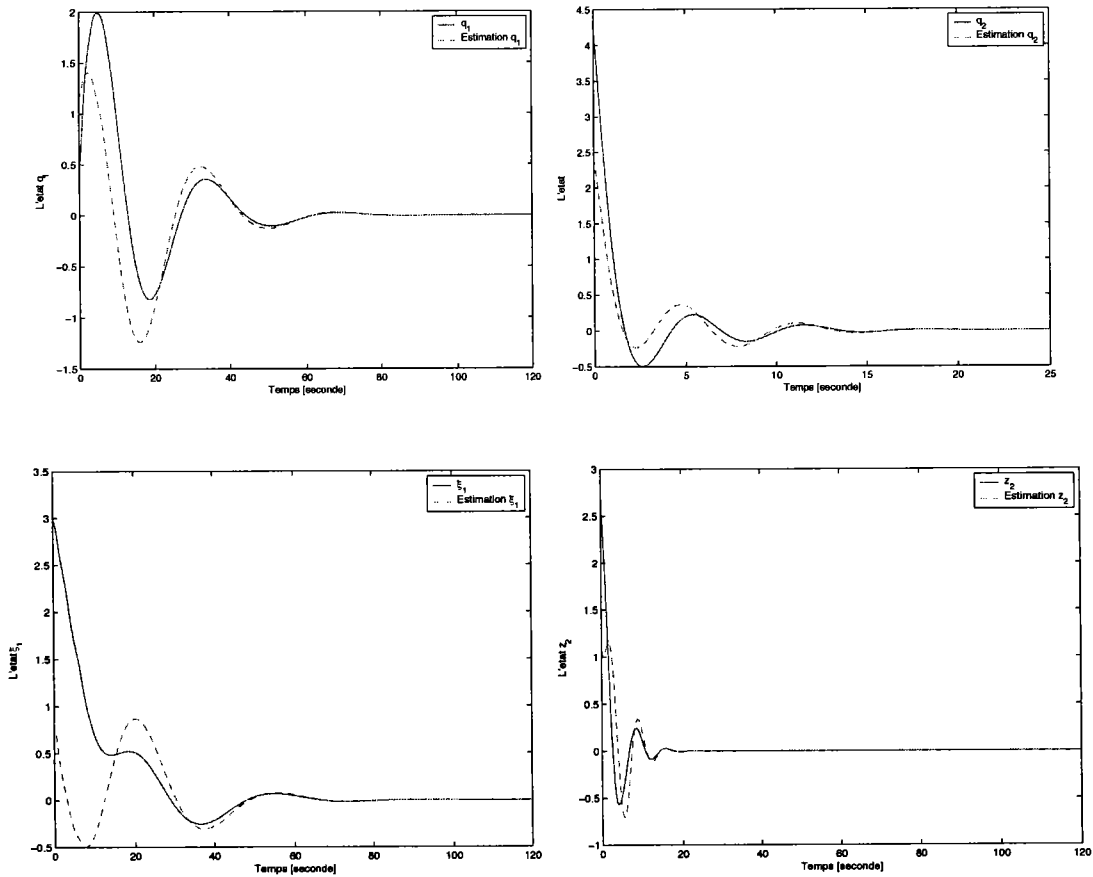


FIG. 3.2 – Etat du système

Deuxième partie

Généricité de l'observabilité

Chapitre 4

Généricité de l'observabilité différentielle forte pour les systèmes en temps discret

Nous étudions dans ce chapitre le problème de la généricité de l'observabilité différentielle pour les systèmes non linéaires en temps discret. Pour les systèmes en temps continus plusieurs résultats sont été établis [62, 37]. Nous commençons par les rappeler au début de ce chapitre, ensuite nous présentons notre résultat. Lorsque la dimension p de l'espace de sortie est strictement supérieure à m celle de l'espace d'entrée, l'observabilité devient une propriété générique. Autrement dit tout système peut être approché par un autre système observable. Plus précisément, l'observabilité différentielle et l'observabilité différentielle forte qu'on définira plus loin sont des propriétés génériques. Les systèmes que nous considérons sont de la forme (4.1). La topologie avec laquelle nous allons travailler est celle de Whitney, voir [73]. Nous en rappelons ci-dessous quelques notions.

4.1 Topologie de Whitney

Soient X et Y deux variétés différentiables de classe C^∞ . Nous notons $C^\infty(X, Y)$ l'ensemble des applications C^∞ de X dans Y . Soient f et g deux applications de classe C^∞ telles que $f(p) = g(p) = q$. Nous dirons que :

1. f a un contact du premier ordre avec g en p si $df(p) = dg(p)$.
2. f a un contact du k ème ordre avec g en p si $df : TX \rightarrow TY$ a un contact du $(k - 1)$ ème ordre avec dg en tout point de $T_p X$.

Nous définissons ainsi une relation d'équivalence $\sim_k$ en p . Autrement dit $f \sim_k g$ en p si $f(p) = g(p) = q$ et si (U, φ) étant une carte en p et (V, ψ) une carte en q , les applications $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ ont les mêmes dérivées partielles jusqu'à l'ordre k inclus en $\varphi(p)$. Nous notons alors $J_{p,q}^k(X, Y)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim_k$ en p de toutes les applications f telles que $f(p) = q$ et nous notons aussi $J^k(X, Y) = \cup_{(p,q) \in X \times Y} J_{p,q}^k(X, Y)$. $J^0(X, Y)$ est tout simplement égal $X \times Y$.

Étant donnée une application f dans $C^\infty(X, Y)$, nous définissons l'application $j^k f$ de la manière suivante :

$$j^k f : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & J^k(X, Y) \\ x & \mapsto & \text{classe d'équivalence de } f \text{ dans } J_{x, f(x)}^k(X, Y) \end{array}$$

$j^0 f$ est simplement l'application :

$$\begin{aligned} j^0 f &: X \rightarrow X \times Y \\ x &\mapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

Si σ est un élément de $J^k(X, Y)$ alors σ appartient à $J_{p,q}^k(X, Y)$ pour un certain $(p, q) \in X \times Y$. Nous définissons l'application source par

$$\begin{aligned} \alpha &: J^k(X, Y) \mapsto X \\ \sigma &\mapsto p \end{aligned}$$

et l'application but est définie par

$$\begin{aligned} \beta &: J^k(X, Y) \rightarrow X \\ \sigma &\mapsto q \end{aligned}$$

Il est possible de munir $J^k(X, Y)$ d'une structure de variété, de la façon suivante : étant donnée une carte (U, ϕ) sur X et une carte (V, ψ) sur Y , on définit une carte $(J^k(U, V), T_{U,V})$ sur $J^k(X, Y)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} T_{U,V} &: J^k(U, V) \mapsto \phi(U) \times \psi(V) \times B_{n,m}^k \\ f &\mapsto (f, f(x_0), T_k(\psi \circ f_1 \circ \phi^{-1})(x_0), \dots, T_k(\psi \circ f_m \circ \phi^{-1})(x_0)) \end{aligned}$$

où

- $x_0 = \alpha(f)$
- $\dim X = n$ et $\dim Y = m$.
- $B_{n,m}^k = \oplus_{i=1}^m A_n^k$ où A_n^k est l'espace vectoriel des polynômes à n variables de degré inférieure ou égale à k , tel que le terme constant est nul.
- $T_k(\psi \circ f_i \circ \phi^{-1})(x_0)$ est un polynôme en x de degré k donné par les premiers termes de la série de Taylor $\psi \circ f_i \circ \phi^{-1}$ en x_0 après le terme constant.

Soit k un entier positif et soit U un sous-ensemble de $J^k(X, Y)$. Nous notons : $M(U) = \{f \in C^\infty(X, Y) / j^k f(X) \subset U\}$. Nous remarquons que $M(U) \cap M(V) = M(U \cap V)$. Il est facile de voir que la famille d'ensemble $\{M(U)\}$ où U est un ouvert de $J^k(X, Y)$ est une base de topologie sur $C^\infty(X, Y)$. Cette topologie est appelée la topologie C^k de Whitney.

Si nous notons W_k l'ensemble des ouverts de $C^\infty(X, Y)$ pour la topologie C^k de Whitney alors la topologie C^∞ de Whitney est la topologie de base $W = \bigcup_{k=0}^\infty W_k$. Ceci est bien défini car $W_k \subset W_l$ lorsque $k \leq l$. En effet, si nous considérons l'application $\Pi_k^l : J^l(X, Y) \rightarrow J^k(X, Y)$ qui à tout σ dans $J^l(X, Y)$ associe la classe d'équivalence de f dans $J^k(X, Y)$ où f est un représentant de σ . Nous aurons par la suite $M(U) = M((\Pi_k^l)^{-1}(U))$ pour tout ouvert U de $J^k(X, Y)$.

Nous donnons maintenant une description d'un voisinage de f dans $C^\infty(X, Y)$ pour la topologie C^k de Whitney. Puisque $J^k(X, Y)$ est une variété différentiable de C^∞ alors elle est métrisable. Soit alors d une métrique sur $J^k(X, Y)$ compatible avec cette topologie. Nous définissons

$$B_\delta(f) = \{g \in C^\infty(X, Y) / \forall x \in X; d(j^k f(x), j^k g(x)) < \delta(x)\}$$

où $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application continue, $B_\delta(f)$ est un ouvert pour tout δ . En effet ; si nous notons α l'application source de $J^k(X, Y)$ dans X et en considérant l'application continue $\Delta : J^k(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\sigma \mapsto \delta(\alpha(\sigma)) - d(j^k f(\alpha(\sigma)), \sigma)$ et en posant $U = \Delta^{-1}(0, \infty)$, alors U serait un ouvert de $J^k(X, Y)$ et $B_\delta(f) = M(U)$.

Il est possible de montrer aussi que la collection $\{B_\delta(f)\}$ forme un système fondamentale de voisinage de f pour la topologie C^k de Whitney. Dans le cas où X est compact, la collection $\{B_n(f)\}$ forme un système fondamentale dénombrable de voisinage de f où $B_n(f) = B_{\delta_n}(f)$ et $\delta_n(x) = \frac{1}{n}$ pour tout x dans X . En effet, puisque δ est continue et X est compact alors δ est borné par $\frac{1}{n}$ pour n assez grand. Il est facile de voir dans ce cas qu'une suite de fonction f_n dans $C^\infty(X, Y)$ converge vers f (pour la topologie C^k de Whitney) si et seulement si $j^k f_n$ converge uniformément vers $j^k f$.

Rappelons aussi que $C^\infty(X, Y)$ est un espace de Baire pour la topologie C^∞ de Whitney.

4.2 Transversalité

Nous rappelons dans la suite quelques théorèmes qui jouent un rôle important pour montrer les résultats de densité et d'ouverture.

Nous commençons par rappeler la notion de transversalité. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application C^∞ , W une sous variété de Y et x un point de X . Nous dirons que f est transverse à W en x ($f \pitchfork W$) si

1. $f(x) \notin W$
2. ou $f(x) \in W$ et $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + df(x)(T_xX)$

Nous énonçons par la suite le théorème de transversalité de Thom démontré dans [73].

Théorème 4.2.1. *Soient X et Y deux variétés différentiables C^∞ et W une sous variété de $J^k(X, Y)$. Soit $T_W = \{f \in C^\infty(X, Y) / j^k f \pitchfork W\}$, T_W est résiduel dans $C^\infty(X, Y)$ pour la topologie C^∞ de Whitney. En plus si W est fermé alors T_W est ouvert.*

Nous utilisons souvent la version multijet de ce théorème. Avant de l'énoncer, nous rappelons quelques notions. Si σ est un élément de $J^k(X, Y)$ alors σ appartient à $J_{p,q}^k(X, Y)$ pour un certain $(p, q) \in X \times Y$. L'application source est définie par

$$\begin{array}{ccc} \alpha & : & J^k(X, Y) \rightarrow X \\ & & \sigma \mapsto p \end{array}$$

L'application but est définie par

$$\begin{array}{ccc} \beta & : & J^k(X, Y) \rightarrow Y \\ & & \sigma \mapsto q \end{array}$$

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, nous notons $X^{(s)} = \{(x_1, \dots, x_s) \in X^s / x_i \neq x_j \text{ pour } 1 \leq i < j \leq s\}$. Considérons l'application suivante

$$\begin{array}{ccc} \alpha^s & : & (J^k(X, Y))^s \rightarrow X^s \\ & & (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \mapsto (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) \end{array}$$

Nous posons $J_s^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$. Il est clair que $J_s^k(X, Y)$ est une sous variété ouverte de $J^k(X, Y)$. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application de classe C^∞ , alors nous pouvons définir

$$\begin{array}{ccc} j_s^k f & : & X^{(s)} \rightarrow J_s^k(X, Y) \\ & & (x_1, \dots, x_s) \mapsto (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)) \end{array}$$

Nous énonçons si dessous le théorème de transversalité multijets démontré dans [73].

Théorème 4.2.2. *Soient X et Y deux variétés C^∞ et W une sous variété de $J_s^k(X, Y)$. Soit $T_W = \{f \in C^\infty(X, Y) / j_s^k f \pitchfork W\}$, T_W est résiduel dans $C^\infty(X, Y)$ pour la topologie C^∞ de Whitney. De plus si W est compact alors T_W est ouvert.*

Remarque 4.2.1. *Si W est une sous variété de $J_s^k(X, Y)$ tel que $\alpha^s(W)$ est un compact de $X^{(s)}$ alors T_W est un ouvert de $C^\infty(X, Y)$.*

Avant d'énoncer le théorème d'Abraham qui joue aussi un rôle important pour montrer les propriétés de densité et d'ouverture, nous rappelons quelques notations.

Soient A , X et Y des variétés C^∞ , $\rho : A \rightarrow C^\infty(X, Y)$ une application.

Pour $(a \in A)$, nous notons ρ_a l'application de classe C^∞

$$\begin{array}{ccc} \rho_a & : & X \rightarrow Y \\ & & x \mapsto \rho(a)(x) \end{array}$$

ρ est une représentation C^∞ si et seulement si l'application évaluation suivante

$$\begin{aligned} ev_\rho &: A \times X \rightarrow Y \\ (a, x) &\mapsto \rho(a)(x) \end{aligned}$$

est de classe C^∞ .

Théorème 4.2.3. Soient A , X et Y des variétés C^∞ , $\rho : A \rightarrow C^\infty(X, Y)$ une C^∞ représentation. Soit W une sous variété de Y , nous notons A_W la partie de A définie par $A_W = \{a \in A / \rho_a \pitchfork W\}$. Si nous supposons que

1. X est de dimension finie n et la codimension de W dans Y est finie.
2. A et X satisfont le deuxième axiome de dénombrabilité.
3. $ev_\rho \pitchfork W$.

alors A_W est résiduel dans A pour la topologie C^∞ de Whitney.

Abraham a montré dans [1] le théorème d'ouverture pour l'intersection transverse.

Théorème 4.2.4. Soient A , X et Y des variétés C^∞ . W une sous variété fermée de Y , K un compact de X . Soit $\rho : A \rightarrow C^\infty(X, Y)$ une C^∞ représentation et soit $A_{KW} = \{a \in A / \rho_a \pitchfork_x W \text{ pour } x \in K\}$. A_{KW} est un ouvert.

Nous rappelons le théorème de plongement de Whitney, voir [73].

Théorème 4.2.5. Soient X et Y deux variétés C^∞ tel que $\dim Y \geq 2 \dim X + 1$ et X est compact. $\{f \in C^\infty(X, Y) \text{ tel que } f \text{ est un plongement}\}$ est résiduel pour de $C^\infty(X, Y)$ pour la topologie C^∞ de Whitney.

4.3 Observabilité différentielle, Observabilité différentielle forte : Cas des systèmes continus

Dans cette section, nous présentons les travaux fondamentaux de J.P. Gauthier et I.A. Kupka, dans [62]. Dans un premier temps, avec aussi H. Hammouri [65] les auteurs ont étudié la généricité de l'observabilité pour les systèmes non contrôlés en temps continus. Ce travail a été généralisé par J.P. Gauthier et I.A. Kupka dans [62, 61].

Considérons le système continu défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $f : X \times U \mapsto TX$ et $h : X \times U \mapsto \mathbb{R}^p$. Nous notons $h_u(x) = h(x, u)$ et $f_u(x) = f(x, u)$.

Introduisons la notation suivante : $\underline{u}_N = (u^{(0)}, \dots, u^{(N-1)})$. Nous supposons dans la suite que le contrôle u est régulier. Nous considérons le champ de vecteur f^N sur $X \times U \times \mathbb{R}^{(N-1)m}$ définie par

$$f^N(x, u^{(0)}, \dots, u^{(N-1)}) = \sum_{i=1}^n f_i(x, u^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=1}^m u_j^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(i)}}.$$

avec $u^{j+1} = \frac{du^{(j)}}{dt}(t) / t=0; 0 \leq j \leq N-1$.

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} S\phi_N^{(f,h)} &: X \times U \times \mathbb{R}^{(N-1)m} \mapsto \mathbb{R}^{Np} \times U \times \mathbb{R}^{(N-1)m} \\ (x, \underline{u}_N) &\mapsto (h(x, u^{(0)}), L_{f^N} h(x, \underline{u}_2, 0), \dots, (L_{f^N})^{N-1} h(x, \underline{u}_N), \underline{u}_N) \end{aligned}$$

Définition 4.3.1. *Le système (4.1) est fortement observable d'ordre N si $S\phi_N^{(f,h)}$ est injective. Il est fortement différentiellement observable si $S\phi_N^{(f,h)}$ est une immersion injective.*

Remarque 4.3.1. *La raison pour laquelle nous avons introduit cette définition est que lorsque $p > m$, l'observabilité différentielle et l'observabilité différentielle forte est une propriété générique.*

Nous supposons dans la suite que X et U sont des variétés compacts et $p > m$. Nous énonçons maintenant les résultats démontrés par Jean-Paul Gauthier et Ivan Kupka dans [62].

Théorème 4.3.1. *L'ensemble $\{(f, h) \in C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p) / S\phi_N^{(f,h)} \text{ est une immersion} \}$ contient un ouvert dense de $C^\infty(M \times U, TX \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n$.*

Théorème 4.3.2. *L'ensemble $\{(f, h) \in C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p) / S\phi_N^{(f,h)} \text{ est injective} \}$ est résiduel dans $C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n + 1$.*

Théorème 4.3.3. *L'ensemble $\{(f, h) \in C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p) / S\phi_N^{(f,h)} \text{ est un plongement} \}$ est résiduel dans $C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n + 1$.*

Soit B un réel positif, on note $I_B = [-B, B]$.

Théorème 4.3.4. *L'ensemble $\{(f, h) \in C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p) / \text{la restriction de } S\phi_N^{(f,h)} \text{ à } X \times U \times I_B^{(N-1)m} \text{ est un plongement} \}$ est un ouvert dense de $C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n + 1$.*

Si de plus X est analytique, on a le théorème suivant.

Théorème 4.3.5. *L'ensemble $\{(f, h) \in C^\omega(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p) / S\phi_N^{(f,h)} \text{ est un plongement} \}$ est dense dans $C^\infty(X \times U, TX \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n + 1$.*

Remarque 4.3.2. 1. *Tous les résultats de densités sont aussi vrais si X et U sont non compacts.*
2. *Tous les résultats sont aussi vrais pour U variétés compact à bord.*

Il faut rappeler que les premiers travaux caractérisant quelques propriétés génériques des systèmes en temps continus discrets sont dues à Dirk Aeyels dans son papier [10]. Il s'est intéressé dans un premier temps aux systèmes continus sans contrôles définis ainsi

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

où $f : X \rightarrow TX$ un champs de vecteur de classe C^∞ , $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ et X une variété compacte C^∞ .

Ensuite, il considère le discrétisé du système. Les observations sont faites en temps discret $t_1, t_2, \dots$. Soit P un programme d'échantillonnage c'est à dire un ensemble fini de points $t_1, \dots, t_i \in [0, T]$, où T est un réel donné. Dirk Aeyels introduit ainsi la définition suivante

Définition 4.3.2. *Le système (4.2) est P -observable si et seulement si pour tout couple de points distincts $(x, y) \in X \times X$, il existe $t_i \in P$ tel que $h \circ \Phi_{t_i}(x) \neq h \circ \Phi_{t_i}(y)$ où $\Phi_{t_i}(x)$ est la solution de (4.2) de condition initial x .*

Dans un premier résultat, Dirk Aeyels a établi que pour un champs de vecteur f fixé, toute fonction de sortie h peut être approchée par une autre fonction $\tilde{h}$ telle que le couple $(f, \tilde{h})$ est P observable. Ensuite il a montré que pour une fonction de sortie h fixée, tout champs de vecteurs f peut être approché par une autre fonction $\tilde{f}$ telle que le couple $(\tilde{f}, h)$ est P observable. Il est intéressant de noter que ces deux résultat peuvent être étendus au cas où X est une variétés non compact. Dans ce cas on remplace ouvert dense par un ensemble résiduel.

4.4 Observabilité différentielle- Observabilité différentielle forte : Cas des systèmes discrets

Considérons le système

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ y_k &= h(x_k, u_k) \\ x_k \in X, u \in U, y_k \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (4.3)$$

avec

- X et U des variétés $\mathcal{C}^\infty$, connexes, compacts satisfaisant le deuxième axiome de dénombrabilité de dimension respectivement n et m ;
- $f : X \times U \mapsto X$: un difféomorphisme paramétré : c'est-à-dire pour tout $u \in U$, l'application $f(\cdot, u)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$; nous notons $\text{Diff}_U(X)$ l'ensemble des difféomorphisme paramétrés;
- $h : X \times U \mapsto \mathbb{R}^p$ est une application $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $f \in \text{Diff}_U(X)$ et $h \in \mathcal{C}^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$, nous notons $\underline{u}_N$ la suite finie $(u_0, \dots, u_{N-1})$ formée par des éléments de U , et nous définissons $f^k(x, \underline{u}_k)$ par récurrence de la manière suivante

$$f^1(x, \underline{u}_1) = f(x, u_0)$$

$$f^{k+1}(x, \underline{u}_{k+1}) = f(f^k(x, \underline{u}_k), u_k) \quad \forall k \geq 1$$

Introduisons la définition suivante

Définition 4.4.1. *Etant donnée une fonction $f \in \text{Diff}_U(X)$, nous disons que le point $(x, \underline{u}_{2n+1}) \in X \times U^{2n+1}$ est périodique pour l'application f s'il existent deux entiers distincts k et k' dans $\{0, \dots, 2n\}$ tel que $f^k(x, \underline{u}_k) = f^{k'}(x, \underline{u}_{k'})$.*

Nous notons $\mathcal{P}_f$ l'ensemble des point périodiques pour f . Il est clair que $\mathcal{P}_f$ est un ensemble fermé de $X \times U^{2n+1}$. Notons aussi $\mathcal{P}_f^c$ le complémentaire de $\mathcal{P}_f$: $\mathcal{P}_f^c = X \times U^{2n+1} \setminus \mathcal{P}_f$. Rappelons maintenant la définition classique de l'observabilité

Définition 4.4.2. *Le système (4.3) est observable pour toute entrée u , si pour tout triplet $(u, x_0, \bar{x}_0)$, (où u est une entrée admissible, x_0 et $\bar{x}_0$ sont deux conditions initiaux), il existe un indice k tel que $h(x_k, u_k) \neq h(\bar{x}_k, u_k)$.*

Comme nous l'avons souligné précédemment, les notions de l'observabilité forte et l'observabilité différentielle forte pour les systèmes continus ont été introduites par Jean paul Gauthier et Ivan KupKa dans [62]. Nous introduisons d'un façon analogue la définition d'observabilité différentielle forte pour les systèmes discrets. Considérons l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ analogue de l'application $S\Phi_k^\Sigma$ introduite par ses auteurs :

$$\Theta_{2n+1}^{f,h} : X \times U^{2n+1} \mapsto \mathbb{R}^{(2n+1)p} \times U^{2n+1}$$

définie, pour tout $(x, \underline{u}_{2n+1})$, par

$$\Theta_{2n+1}^{f,h}(x, \underline{u}_{2n+1}) = (h(x, u_0), h(f^1(x, \underline{u}_1), u_1), \dots, h(f^{2n}(x, \underline{u}_{2n}), u_{2n}), \underline{u}_{2n+1})$$

Alors nous avons les définitions suivantes

Définition 4.4.3 (observabilité forte). *Le système (4.3) est fortement observable si l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est injective.*

Définition 4.4.4 (observabilité différentielle forte). *Le système (4.3) est fortement différentielle observable si l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion injective.*

Dans [59] J-C. Vivalda a étudié le cas des systèmes discrets sans contrôles pour lesquels il montre que l'observabilité est générique. S. Ammar et J-C-Vivalda ont ensuite étudié le même problème pour les systèmes contrôlés [9] et ont montré que l'observabilité était générique dès que le nombre de sorties et strictement supérieur au nombre d'entrées. Plus précisément ils ont montré, si $p > m$ le théorème suivant

Théorème 4.4.1. [9] *Si $\dim U = m < p$, l'ensemble des applications $(f, h) \in \text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que le système (4.3) est fortement observable est résiduel.*

Notre objectif désormais est d'étudier l'observabilité différentielle forte, nous montrons dans ce travail que si $p > m$, alors tout système de type (4.3) peut être approché par un autre système fortement différentiellement observable. Plus précisément, nous montrons que l'ensemble des applications $(f, h) \in \text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion injective contient un ensemble résiduel dans $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ muni de la topologie C^∞ de Whitney, voir [73].

4.4.1 Résultat principal

Avant d'énoncer notre résultat principal, rappelons que nous munissons $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ de la topologie C^∞ de Whitney. Remarquons que $\text{Diff}_U X$ est un ouvert pour cette topologie. Nous démontrons le résultat suivant

Théorème 4.4.2. *Si $\dim U = m < p$, l'ensemble des application $(f, h) \in \text{Diff}_U(x) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que le système (4.3) est fortement différentiellement observable contient un résiduel.*

Nous savons que le théorème d'Abraham peut s'appliquer même si la variété A est de dimension infinie (A peut être un ouvert d'un espace de Banach par exemple), or contrairement à ce qui se passe au cas continu l'ensemble des couples (f_u, h_u) ne constitue pas un espace de Banach pour la C^r topologie ($(r < +\infty)$). Ainsi, il n'est pas possible de copier directement le raisonnement de [61]. La preuve de ce théorème sera basée sur plusieurs lemmes techniques. Avant d'énoncer ces lemmes, nous décrivons au-dessous notre stratégie globale.

Plan de la démonstration Supposons que $\mathcal{P}_1(f, h)$ et $\mathcal{P}_2(f, h)$ sont deux propriétés dépendantes du couple $(f, h) \in \text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ telle que leur conjonction est équivalente au fait que $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion. Dans le premier lemme 4.4.1, nous allons montrer que, pour une fonction $f \in \text{Diff}_U(X)$ fixé, un entier $r \geq 1$, et pour tout entier l , il existe un sous ensemble $U_l^r(f)$ ouvert et dense de $C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$, pour la topologie C^r , tel que si h appartient à l'intersection $\bigcap_{n \geq 0} U_n^r(f)$, la paire (f, h) vérifie la propriété $\mathcal{P}_1$. En outre, nous allons montrer que, pour tout entier l , l'ensemble

$$\mathcal{U}_l^r = \bigcup_{f \in \text{Diff}_U(X)} \{f\} \times U_l^r(f)$$

est un ouvert dense de $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ muni de la topologie C^r .

Ensuite dans le lemme 4.4.2, nous montrons que l'ensemble

$$E_1 = \{(f, h) \in \text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p) \mid \mathcal{P}_2(f, h) \text{ est vraie}\}$$

contient un ensemble résiduel de $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$.

Enfin pour conclure, nous considérons, l'ensemble $E_1 \cap \bigcap_{r \geq 1} \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{U}_n^r$ qui contient un ensemble résiduel pour la topologie de C^∞ et une paire (f, h) appartenant à cet ensemble satisfait les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Avant de présenter le premier lemme, nous introduisons quelques notions.

Préliminaires 4.4.1. Notons π la projection canonique du fibré cotangent T^*X dans X . Soit k un entier, on définit l'ensemble $(T^*X)^{\otimes k}$ par

$$(T^*X)^{\otimes k} = \{ (p_1, \dots, p_k) \in (T^*X)^k \mid \pi(p_1) = \dots = \pi(p_k) \}$$

et l'ensemble $V(k, T^*X)$ par

$$\begin{aligned} V(k, T^*X) &= \bigcup_{x \in X} V(k, T_x^*X) \\ &= \{ (p_1, \dots, p_k) \in (T^*X)^{\otimes k} \mid \text{rang}(p_1, \dots, p_k) < n \}. \end{aligned}$$

avec $V(k, T_x^*X) = \{ (v_1, \dots, v_k) \in (T_x^*X)^k \mid \text{rang}(v_1, \dots, v_k) < n \}$, pour tout $x \in X$. Remarquons que $(T^*X)^{\otimes k}$ est une sous variété de $(T^*X)^k$ et $V(k, T^*X)$ est une sous variété de $(T^*X)^{\otimes k}$.

Il est bien connu d'après les travaux de [63, 65, 61], que $V(k, T_x^*X)$ est une réunion finie de sous variété W_i et si la dimension de W_{i_0} est la plus grande alors $\text{codim } W_{i_0} = k - n + 1$.

Nous énonçons maintenant les deux lemmes clés :

Lemme 4.4.1. Soit $f \in \text{Diff}_U(X)$, pour tout $r > 0$, il existe une famille d'ouvert dense $(U_k^r(f))_{k \geq 1} \subset C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ pour la topologie C^r tel que pour toute fonction h de $\cap_{k \geq 1} U_k^r(f)$, l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est immersion en tout point de $\mathcal{P}_f^c$.

En outre, pour tout $k \geq 1$, l'ensemble

$$\mathcal{U}_k^r = \bigcup_{f \in \text{Diff}_U(X)} \{f\} \times U_k(f)$$

est un ouvert dense de $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ pour la topologie C^r .

Nous énonçons maintenant le deuxième lemme.

Lemme 4.4.2. L'ensemble des couple $(f, h) \in \text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion en tout point de $\mathcal{P}_f$ est résiduel.

4.4.2 Démonstration du lemme 4.4.1

Soit $f \in \text{Diff}_U(X)$, l'ensemble $\mathcal{P}_f^c$ est un ouvert. Puisque X et U vérifient le deuxième axiome de la démontrabilité, il existe une famille de compacts $(K_l(f))_{l \geq 1}$ tel que $K_l(f)$ est inclut dans l'intérieur de $K_{l+1}(f)$ et la réunion des $K_l(f)$ est égale à $\mathcal{P}_f^c$.

Notons f_u (resp. h_u), le difféomorphisme (resp. l'application) $x \mapsto f(x, u)$ (resp. $x \mapsto h(x, u)$). Nous notons aussi $df_u(x)$ (resp. $dh_u(x)$) la différentielle de f_u (resp. h_u) en un point x . Nous regardons les p composantes de $dh_u(x)$ comme des éléments de T_x^*X .

Pour utiliser le théorème d'Abraham avec $\mathcal{A} = C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$, muni de la topologie C^k ($\mathcal{A}$ est un espace de Banach), $X = \mathcal{P}_f^c$, $Y = (T^*X)^{\otimes (2n+1)p}$ et $W = V((2n+1)p, T^*X)$ (W est un fermé), on introduit la représentation ρ définie par l'application évaluation suivante

$$\begin{aligned} \text{ev}_\rho : C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p) \times \mathcal{P}_f^c &\longrightarrow (T^*X)^{\otimes (2n+1)p} \\ (h, x, \underline{u_{2n+1}}) &\longmapsto (dh_{u_0}(x), dh_{u_1} \circ f_{u_0}(x), \dots, dh_{u_{2n}} \circ f_{u_{2n-1}} \circ \dots \circ f_{u_0}(x)) \end{aligned}$$

Il est clair que les trois premières hypothèses de théorème d'Abraham sont satisfaites. On montre dans la suite que ev_ρ est transverse à chacune des sous variétés dans la réunion de $V((2n+1)p, T^*M)$. Pour cela, il suffit de montrer que pour $(x_0, \underline{u}_{2n+1})$ fixé dans $\mathcal{P}_f^c$, l'application

$$\begin{aligned} ev_\rho(x_0, \underline{u}_{2n+1}) : C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p) &\mapsto (T^*X)^{\otimes (2n+1)p} \\ h &\mapsto (dh_{u_0}(x_0)(\bar{x}_0), d(h_{u_1} \circ f_{\underline{u}_1})(x_0), \dots, d(h_{u_{2n}} \circ f_{\underline{u}_{2n}})(x_0)) \end{aligned}$$

est une submersion. Cette application est linéaire, on peut alors écrire

$$dev_\rho(x_0, \underline{u}_{2n+1})(h)(\bar{h}) = ev_\rho(x_0, \underline{u}_{2n+1})(\bar{h})$$

Il s'ensuit donc que pour montrer que ev_ρ est une submersion il suffit de montrer que pour tout $(p_0, \dots, p_{2n}) \in (T^*X)^{\otimes (2n+1)p}$ il existe $h \in C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ telle que

$$\begin{cases} p_0 = dh_{u_0}(x_0) \\ p_i = d(h_{u_i} \circ f_{u_{i-1}} \circ \dots \circ f_{u_0})(x_0) \quad \text{for } i = 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (4.4)$$

Posons, $x_i = f^i(x_0, \underline{u}_i)$. On a $d(h_{u_i} \circ f_{u_{i-1}} \circ \dots \circ f_{u_0})(x_0) = dh_{u_i}(x_i) \circ d(f_{u_{i-1}} \circ \dots \circ f_{u_0})(x_0)$. Le point $(x_0, \underline{u}_{2n+1})$ est non périodique, par suite les paires (x_i, u_i) sont distincts deux à deux, il est donc possible de trouver une fonction $h \in C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ telle que les relations (4.4) sont vérifiées.

Et par conséquent, d'après le théorème d'Abraham, l'ensemble des applications h dans $C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ telle que ρ_h est transverse à $V((2n+1)p, T^*X)$ contient un ensemble résiduel noté $\mathcal{R}_k$, en outre l'intersection des $\mathcal{R}_k$ (notée $\mathcal{R}$) est résiduel pour la topologie C^∞ .

Maintenant, la codimension de $V((2n+1)p, T^*X)$ est supérieure ou égale à $\min_i W_i$ qui est lui même supérieure ou égale à $(2n+1)p - n + 1$ (voir préliminaires). Or, puisque $p > m$ on a :

$$(2n+1)p - n + 1 > n + (2n+1)m = \dim \mathcal{P}_f^c$$

Donc transversalité veut dire non-appartenance, c'est à dire, ρ_h est transverse à $V((2n+1)p, T^*X)$ est équivalent à dire $\rho_h(x_0, \underline{u}_{2n+1})$ n'appartient pas à $V((2n+1)p, T^*X)$. Et par suite, $\text{rang}(dh_{u_0}(x), d(h_{u_1} \circ f_{u_0})(x), \dots, d(h_{u_{2n}} \circ f_{u_{2n}} \circ \dots \circ f_{u_0})(x)) = n$, Ce qui entraîne que $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion en tout points de $\mathcal{P}_f^c$.

À ce stade, on a montré l'existence d'un ensemble résiduel $\mathcal{R}$ inclut dans $\text{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que pour tout h appartenant à $\mathcal{R}$, l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion en tout point de $\mathcal{P}_f^c$.

Introduisons maintenant l'ensemble $U_l^k(f)$ définie par

$$U_l^k(f) = \{ h \in C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p) \mid \rho_h \pitchfork_x W \text{ for } x \in K_l(f) \}$$

d'après le théorème 4.2.4, on déduit que $U_l^k(f)$ est un ouvert pour la topologie C^k . Or, $\mathcal{R}$ est inclut dans $U_l^k(f)$ et par conséquent $U_l^k(f)$ est un ouvert dense.

Posons

$$\mathcal{U}_n^r = \bigcup_{f \in \text{Diff}_U(X)} \{f\} \times U_n^r(f)$$

Montrons maintenant que $\mathcal{U}_n^r$ est un ouvert pour la topologie C^k , pour cela nous construisons d'une manière rigoureuse les compacts $K_l(f)$: Puisque les variétés X et U sont compacts et vérifient le deuxième axiome de la dénombrabilité, il existe une famille $(J_l(f))_{n \geq 1}$ de compacts dépendant continûment de f et satisfaisant (voir [73]page 15)

$$\mathcal{P}_f^c = \bigcup_{l \geq 1} J_l(f) \text{ et } J_l(f) \subset J_{l+1}(f)$$

Soit d un métrique compatible avec la topologie de $X \times U^{2n+1}$ (toute variété C^∞ est métrisable, voir [73] pour plus de détail) et posons

$$K_l(f) = J_l(f) \cap \{v \in \mathcal{P}_f^c \mid d(v, \mathcal{P}_f) \geq \frac{1}{l}\}$$

alors les $K_l(f)$ sont des compacts (puisque'ils sont des fermés dans un ensemble compact) tel que

$$\mathcal{P}_f^c = \bigcup_{l \geq 1} K_l(f)$$

En effet : soit $v \in \mathcal{P}_f^c$, ils existent alors $l_1, l_2 \geq 1$ tels que $v \in J_{l_1}(f)$ et $d(v, \mathcal{P}_f) \geq \frac{1}{l_2}$ (car $\mathcal{P}_f^c$ est un fermé). Deux cas qui se présentent :

- Si $l_1 \geq l_2$, alors $v \in K_{l_1}(f)$.
- Si $l_2 > l_1$, alors $v \in J_{l_1}(f) \subset J_{l_2}(f) \subset J_{l_2}$. D'où $v \in K_{l_2}(f)$.

Remarquons, que les ensembles $\mathcal{P}_f^c$ et $K_l(f)$ dépend continûment du paramètre f , autrement dit si f est dans un voisinage de f_0 alors, $\mathcal{P}_f^c$ et $K_l(f)$ restent très proche de $\mathcal{P}_{f_0}^c$ et $K_l(f_0)$ respectivement. En revanche la représentation ρ et l'ensemble $\mathcal{R}$ dépend du difféomorphisme f , plus précisément nous allons les noter par ρ_h^f et $\mathcal{R}(f)$.

Considérons maintenant (f_0, h_0) in $\mathcal{U}_l^k$, pour tout $(x_0, \underline{u}_{2n+1})$ in $K_l(f_0)$,

$$\text{rang} \left(d\rho_{h_0}^{f_0}(x_0, \underline{u}_{2n+1}) \right) = n$$

Si (f, h) est dans un voisinage de (f_0, h_0) , $K_l(f_0)$ est proche de $K_l(f)$, il s'ensuit donc que

$$\text{rang} \left(d\rho_h^f(x_0, \underline{u}_{2n+1}) \right) = n$$

pour tout couple (f, h) proche de (f_0, h_0) ; ce qui achève la démonstration.

4.4.3 Démonstration du lemme 4.4.2

Afin de prouver ce résultat, nous avons besoin de quelques autres résultats préliminaires. Soit x_0 un point périodique de période $s \leq 2n$, alors il existe $s' < s$ tel que $f^{s'}(x_0, \underline{u}_{s'}) = f^s(x_0, \underline{u}_s)$ en outre $f^i(x_0, \underline{u}_i) \neq f^j(x_0, \underline{u}_j)$ pour tout $i, j < s$.

Introduisons les notations suivantes : $x_i = f^i(x_0, \underline{u}_i)$, $z_i = f(x_i, u_i)$ et $y_i = h(x_i, u_i)$.

On considère la liste L formée de $2n + 1$ éléments :

$$L : (x_0, u_0, z_0, y_0); \dots; (x_{2n}, u_{2n}, z_{2n}, y_{2n})$$

Dans cette liste, on dit que deux élément (x_i, u_i, z_i, y_i) et (x_j, u_j, z_j, y_j) sont équivalents si $(x_i, u_i) = (x_j, u_j)$. Dans chaque classe d'équivalence, on ne conserve que le terme de plus petit indice et l'on obtient la liste

$$L' : (x_{i_0}, u_{i_0}, z_{i_0}, y_{i_0}); \dots; (x_{i_r}, u_{i_r}, z_{i_r}, y_{i_r})$$

avec forcément $i_0 = 0$ et $i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_r$. On a alors le premier résultat préliminaires suivant

Lemme 4.4.3. *Dans la liste L' , on peut écrire $r + 1$ égalités indépendantes (formant une famille libre) entre les x_i et les z_i .*

Démonstration. Soit $j < r$, alors

1. Si $i_{j+1} = i_j + 1$, nous avons $z_{i_j} = x_{i_j+1}$.

2. Si $i_{j+1} > i_j + 1$, le terme d'indice $i_j + 1$ a été retiré de la liste car il existe un indice $k > i_j + 1$, tel que $(x_k, u_k) = (x_{i_j+1}, u_{i_j+1})$, par conséquent dans la liste L' , il existe un indice i_l tel que $x_{i_l} = x_{i_j+1} = z_{i_j}$. En résumé, pour chaque indice $i_0, i_1, \dots, i_{r-1}$, nous pourrions écrire $z_{i_j} = x_{i_l}$ avec $i_l = i_j + 1$ où $i_l \leq i_j$. Nous avons donc écrit r égalités, portant sur des objets de dimension n . Deux cas peuvent maintenant se présenter

- (a) **Premier cas** : Le terme (x_s, u_s, z_s, y_s) appartient à la liste L' , dans ce cas nous avons l'égalité supplémentaire $x_s = x_{s_1}$. Notons que le terme $(x_{s_1}, u_{s_1}, z_{s_1}, y_{s_1})$ ne peut avoir été supprimé de la liste L car cela impliquerait l'existence d'un indice $i < s$ tel que $x_{s_1} = x_i$.
- (b) **Deuxième cas** Le terme (x_s, u_s, z_s, y_s) n'appartient pas à la liste L' , noter que dans ce cas nous avons $(x_s, u_s) = (x_{s_1}, u_{s_1})$. En effet : il existe $i < s$ tel que $(x_s, u_s) = (x_i, u_i)$ et cet indice i peut être que s_1 car sinon nous aurons $x_i = x_{s_1}$ avec $i \neq s_1$ et $i, s_1 < s$. Maintenant, s'il n'y a pas de termes d'indice plus grand que s dans la liste L' alors on peut conclure à une égalité portant sur z_{i_r} comme précédemment. Si non, soit k_0 tel que les termes d'indices $s, s+1, \dots, i_r - 1$ ne soit pas dans la liste L' et $(x_{i_{k_0}}, u_{i_{k_0}}, z_{i_{k_0}}, y_{i_{k_0}}) \in L'$

$$x_{i_{k_0}} = z_{i_{k_0}-1} = f(x_{i_{k_0}-1}, u_{i_{k_0}-1}) = f(x_{i_j}, u_{i_j})$$

pour un indice $i_j \leq s - 1$. Donc, $x_{i_{k_0}}$ pour $i_j \leq s - 1$ mais cette égalité n'a jamais encore été écrite car $i_{k_0} \geq s + 1$ et $s \geq i_j + 1$, donc $i_{k_0} \geq i_j + 1$. Il s'ensuit que $i_{k_0} \geq i_j$ et $i_{k_0} \neq i_j + 1$.

Conclusion Dans ce cas, au total, nous avons bien écrit $r + 1$ égalités indépendantes. □

Introduisons la notation suivante : $\mathcal{M} = \text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Définition 4.4.5. Considérons une suite de $r + 1$ matrices $A_0, \dots, A_r$ in $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ et $r + 1$ matrices $C_0, \dots, C_r$ in $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On dit que la suite finie formée par n matrices $D_0, \dots, D_{n-1}$ est différentiellement liée à la famille $(A_0, C_0, A_1, C_1, \dots, A_r, C_r)$ si

- $D_0 = C_0$ et pour $j \geq 1$, chaque matrice D_j est égale à $C_{i_j} \tilde{A}_{j-1}$ où $i_j \in \{0, \dots, r\}$ et $\tilde{A}_{j-1}$ est le produit de j matrices de la famille $\{A_0, \dots, A_r\}$;
- Si $D_j = C_{i_j} \tilde{A}_{j-1}$ alors D_{j+1} est de la forme $D_{j+1} = C_{i_{j+1}} A_{i_j} \tilde{A}_{j-1}$;

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.4.1. Soit $A_0, \dots, A_r$ $r+1$ matrices de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, $C_0, \dots, C_r$ $r+1$ matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $D_0, \dots, D_{n-1}$ une famille de matrice différentiellement liée à la famille $(A_0, C_0, \dots, A_r, C_r)$. Considérons l'ensemble

$$W = \{ (A_0, C_0, A_1, C_1, \dots, A_r, C_r) \in \mathcal{M}^{r+1} \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, D_0 x = D_1 x = \dots = D_{n-1} x = 0 \}$$

Alors W est une sous variété de $\mathcal{M}^{r+1}$ de codimension strictement supérieure à $(r + 1)m$.

Démonstration. Notons $\mathbb{P}^{n-1}$ l'espace projectif réel de dimension $n - 1$, et pour $k = 0, \dots, n - 1$, nous considérons les ensembles M_k constituer des éléments

$$(A_0, C_0, \dots, A_r, C_r, \ell) \in \mathcal{M}^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1}$$

tel que la famille $(\ell, \tilde{A}_0 \ell, \dots, \tilde{A}_{k-1} \ell)$ est linéairement indépendante (remarquons que si $k = 0$, cette famille se réduit à (ℓ)).

Remarquons que les ensembles M_k sont des ouvert dans $\mathcal{M}^{r+1} \times \mathbb{P}^n$; en outre si E est le sous ensemble de $\{C_0, \dots, C_r\}$ apparaissant dans la décomposition des matrices $D_0, \dots, D_k$, et si $\text{card } E < r + 1$, alors il existe r' matrices $D_{j_1}, \dots, D_{j_{r'}}$ telle que leur indices $j_1, \dots, j_{r'}$ sont supérieures à k et la famille $\{C_{j_1}, \dots, C_{j_{r'}}\}$ constitue le complément de E dans $\{C_0, \dots, C_r\}$. Donc $k + r' \leq r$.

Définissons les ensembles N_k définies par les éléments $(A_0, C_0, \dots, A_r, C_r, \ell)$ de M_k tel que

- Si $k < n - 1$, la famille $(\ell, \tilde{A}_0\ell, \dots, \tilde{A}_{k-1}\ell, \tilde{A}_k\ell)$ est linéairement dépendante.
- $D_0\ell = D_1\ell = \dots = D_k\ell = D_{j_r}\ell = \dots = D_{j_{r'}}\ell = 0$,

Soit π la projection de $\mathcal{M}^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ dans $\mathcal{M}^{r+1}$. Il est clair que $W \subset \cup_{k=0}^{n-1} \pi(M_k)$. En revanche, si on note F l'ensemble constitué par les éléments $(A_0, C_0, \dots, A_r, C_r, \ell)$ de M_k tel que si $k < n - 1$, la famille $(\ell, \tilde{A}_0\ell, \dots, \tilde{A}_{k-1}\ell, \tilde{A}_k\ell)$ est linéairement dépendante. Alors,

$$\text{codim}(N_k, \mathcal{M}^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1}) = \text{codim}(N_k, F) + \text{codim}(F, \mathcal{M}^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1})$$

or, $\text{codim}(N_k, F) = (k + 1 + r')p$ et nous montrons dans l'annexe A que, $\text{codim}(F, \mathcal{M}^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1}) = n - (k + 1)$

Donc,

$$\text{codim } N_k = n - (k + 1) + (k + 1 + r')p$$

Ce qui implique que la codimension de $\pi(N_k)$ est strictement supérieure à $n - (k + 1) + (k + 1 + r')p - (n - 1) = (k + 1 + r')p - k$, or W est inclut dans la réunion des $\pi(N_k)$, sa codimension est strictement supérieure à $\min_{0 \leq k \leq n-1} \text{codim}(N_k)$, mais

$$\begin{aligned} (k + 1 + r')p - k &\geq (k + 1 + r')(m + 1) && \text{puisque } p > m \\ &= (k + 1 + r')m + r' + 1 \\ &\geq (r + 1)m + r' + 1 \\ &> (r + 1)m \end{aligned}$$

D'où la démonstration de la proposition. $\square$

Démonstration du lemme 4.4.2

La démonstration résulte du théorème de la transversalité de Thom multijet. Fixons un entier $s \leq 2n$, nous allons montrer que l'ensemble des couples (f, h) tels que l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion en tout point périodique x de f est résiduel.

Soit x_0 un point périodique de période s correspondant à un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_U(X)$. D'après le lemme 4.4.3, nous pouvons écrire $r + 1$ égalités entre les x_i et les z_i .

Considérons l'application suivante

$$\begin{aligned} j_{r+1}^1(f, h) : \quad (X \times U)^{(r+1)} &\longrightarrow J_{r+1}^1(X \times U, X \times \mathbb{R}^{(2n+1)p}) \\ (\xi_0, v_0, \dots, \xi_r, v_r) &\longmapsto (j^1(f, h)(\xi_0, v_0), \dots, j^1(f, h)(\xi_r, v_r)) \end{aligned}$$

Soit $(\mathcal{O}_i \times \mathcal{U}_i, (\varphi_i, \psi_i))$ une carte de $X \times U$ en (x_i, u_i) , l'expression locale de $j_{r+1}^1(f, h)$ est :

$$\begin{aligned} \bar{j} : \quad \varphi_0(\mathcal{O}_0) \times \psi_0(\mathcal{U}_0) \times \dots \times \varphi_r(\mathcal{O}_r) \times \psi_r(\mathcal{U}_r) &\longrightarrow E_0 \times \dots \times E_r \\ (\bar{\xi}_0, \bar{v}_0, \dots, \bar{\xi}_r, \bar{v}_r) &\longmapsto (\beta_0, \dots, \beta_r) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E_i &= \varphi_i(\mathcal{O}_i) \times \psi_i(\mathcal{U}_i) \times \text{GL } n \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ \beta_i &= (\bar{\xi}_i, \bar{v}_i, \bar{f}(\bar{\xi}_i, \bar{v}_i), \bar{h}(\bar{\xi}_i, \bar{v}_i), d\bar{f}(\bar{\xi}_i, \bar{v}_i), d\bar{h}(\bar{\xi}_i, \bar{v}_i)), \end{aligned}$$

$\bar{\xi}_i, \bar{v}_i, \bar{f}$ et $\bar{h}$ sont les expressions locales de ξ_i, v_i, f et h respectively. Posons $A_i = d\bar{f}(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$ et $C_i = d\bar{h}(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$.

Définissons localement la sous variété Z de $J_{r+1}^1(X \times U, X \times \mathbb{R}^{(2n+1)p})$, par une des égalités définies dans le lemme 4.4.3 et les relations entre A_i et C_i exprimées dans la proposition 4.4.1. Nous allons donner une estimation de $\text{codim}(Z)$.

Pour cela, introduisons la sous variété Z_1 définie seulement par les relations entre les matrices A_i et C_i , (il est clair que $Z \subset Z_1$), et soit π la projection

$$\pi : E \triangleq E_0 \times \cdots \times E_r \mapsto \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^{r+1}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{codim}(Z, E) = \mathrm{codim}(Z, Z_1) + \mathrm{codim}(Z_1, E)$$

Or

$$\mathrm{codim}(Z, Z_1) = (r+1)n$$

et

$$\mathrm{codim}(Z_1, E) \geq \mathrm{codim}(Z_2, \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^{r+1})$$

où $Z_2 \triangleq \pi(Z_1)$.

D'après la proposition 4.4.1, on déduit que la codimension de Z_2 dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^{r+1}$ est strictement supérieure à $(r+1)m$, ce qui entraîne que la codimension de Z est strictement supérieure à $(r+1)(n+m)$ qui est égale à la dimension de $(X \times U)^{(r+1)}$. Donc transversalité veut dire non appartenance autrement dit $\bar{j}$ est transverse à Z si et seulement si $\bar{j}(\bar{\xi}_0, \bar{v}_0, \dots, \bar{\xi}_r, \bar{v}_r) \notin Z$ pour tout $(\bar{\xi}_0, \bar{v}_0, \dots, \bar{\xi}_r, \bar{v}_r)$.

En conséquence, si pour tout $r \leq 2n$, nous prenons une famille $\mathcal{F}$ fini de cartes sur $(X \times U)^{(r+1)}$. Cette famille $\mathcal{F}$ constitue un recouvrement fini de $(X \times U)^{(r+1)}$ car elle est compact. Si nous appliquons le théorème de la transversalité multijets sur chaque carte de $\mathcal{F}$ comme précédemment nous pouvons conclure. En effet, soit $(f, h) \in \mathrm{Diff}_U(X) \times C^\infty(X, \mathbb{R}^p)$, et (x_0, u_{2n+1}) un point périodique de f de période inférieure ou égale à $2n$, considérons la liste L' (voir lemme 4.4.3), la famille $(x_0, u_0, \dots, x_i, u_i)$ constituant la liste L' appartient à une certaine carte de la famille $\mathcal{F}$, en outre on peut écrire $r+1$ égalités entre les x_i et les z_i (voir lemme 4.4.3).

D'autre part, d'après ce qui précède l'ensemble des couples (f, h) tel que l'application $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion en tout point périodique de f dans l'une des cartes de la famille $\mathcal{F}$ est résiduel, L'ensemble résultant de l'intersection dénombrable de tout ses ensembles résiduels caractérisant chaque carte de $\mathcal{F}$, est résiduel puisque $\mathrm{Diff}_U(X) \times C^\infty(X, \mathbb{R}^p)$ est un espace de Baire, ce qui achève la démonstration du lemme 4.4.2.

4.5 conclusion

Nous avons montré jusqu'à ici que l'ensemble des couples $(f, h) \in \mathrm{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ telle que $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est une immersion est résiduel. Or d'après le théorème 4.4.1, l'ensemble des couples (f, h) tels que $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est injective est résiduel. Or les variétés X et U sont compacts l'ensemble $\mathrm{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ est un espace de Baire, il s'ensuit que l'ensemble des couples $(f, h) \in \mathrm{Diff}_U(X) \times C^\infty(X \times U, \mathbb{R}^p)$ tels que $\Theta_{2n+1}^{f,h}$ est un plongement est résiduel. Ce qui achève la démonstration du théorème 4.4.2.

Annexe A

Complément sur la codimension d'un ensemble de matrices

Nous allons prouver la proposition suivante :

Proposition A.0.1. *Considérons une suite de $r+1$ matrices carrées d'ordre n , $A_0, \dots, A_r$, ainsi qu'une suite qui lui est différentiellement associée : $\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_{n-1}$ c'est à dire*

- $\tilde{A}_0 = A_0$;
- pour $j \geq 1$, $\tilde{A}_j = A_{i_j} \tilde{A}_{j-1}$ ($i_j \in \{0, \dots, r\}$).

Soit $1 \leq k \leq n-1$. Nous considérons le sous-ensemble W_k de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ ($\mathbb{P}^{n-1}$ désigne l'espace projectif de dimension $n-1$), d'éléments $(A_0, \dots, A_r, l)$ tels que si $\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_{n-1}$ est une suite différentiellement associée à $(A_0, \dots, A_r)$ alors :

- la famille $(l, \tilde{A}_0 l, \dots, \tilde{A}_{k-2} l)$ est libre ;
- la famille $(l, \tilde{A}_0 l, \dots, \tilde{A}_{k-1} l)$ est liée ;

la codimension de W_k est alors égale à $n-k$.

Il faut bien voir dans cette proposition que la façon de construire une suite différentiellement associée à une suite données de matrices n'est pas unique, par exemple pour $r=1$ et $n=3$ et les matrices A_0 et A_1 , les suites $A_0, A_0^2, A_1 A_0^2$ et $A_0, A_1 A_0, A_0 A_1 A_0$ sont toutes deux différentiellement associées à la suite A_0, A_1 . Dans la proposition ci-dessus, on choisit une fois pour toute une façon de construire une suite différentiellement associée à une suite de $r+1$ matrices (bien sûr, il n'y a qu'un nombre fini de constructions possibles). D'autre part si l est un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$, dire que la famille $(M_0 l, \dots, M_s l)$ est libre (resp. liée) signifie que si x est un représentant de l , la famille $(M_0 x, \dots, M_s x)$ est libre (resp. liée) ; cette notion ne dépend évidemment pas du représentant choisi pour l . Nous commençons par ce lemme :

Lemme A.0.1. *Soit $n \geq 2$ un entier et $1 \leq k \leq n-1$; l'ensemble des suites de n vecteurs $v_0, \dots, v_{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que*

- la famille $v_0, \dots, v_{k-1}$ est libre ;
- la famille $v_0, \dots, v_{k-1}, v_k$ est liée

est une sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de codimension $n-k$

Naturellement l'ensemble des suites vecteurs $(v_0, \dots, v_{n-1})$ formant une famille libre est de codimension 0 (c'est un ouvert).

Démonstration. La démonstration est copiée sur celle de la proposition 5.3 (p. 60) de l'ouvrage Stable

Mappings and Their Singularities de Golubitsky et Guillemin. On commence par la constatation suivante : la matrice M définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $k \times k$ inversible, B est une matrice $k \times 1$, C est une matrice $(n-k) \times k$ et D une matrice $(n-k) \times (n-k)$, est de rang k si et seulement si on a l'égalité $D - CA^{-1}B = 0$. Pour le voir, il suffit de multiplier à gauche par la matrice $n \times n$ inversible

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Soit alors $(v_0, \dots, v_{n-1})$ une suite de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que la famille $(v_0, \dots, v_{k-1})$ est libre, considérons la matrice M de dimension $n \times (k+1)$ dont les colonnes sont les vecteurs $v_0, \dots, v_k$, puisque la famille $(v_0, \dots, v_{k-1})$ est libre, on peut extraire de la matrice de dimensions $n \times k$ dont les colonnes sont les vecteurs $v_0, \dots, v_{k-1}$ une matrice A de dimension $k \times k$ inversible. Nous allons supposer que cette matrice A est formée en prenant les k premières lignes et colonnes de la matrice $[v_0, \dots, v_{k-1}]$. Nous écrivons la matrice M par blocs comme ci-dessus et nous pouvons affirmer que la famille $(v_0, \dots, v_k)$ est liée si et seulement si $D - CA^{-1}B = 0$. Nous nous plaçons dans un ouvert U de $\mathbb{R}^{n^2}$ contenant la famille $(v_0, \dots, v_{n-1})$ et tel que pour tout $(v'_0, \dots, v'_{n-1})$ dans U , la famille $(v'_0, \dots, v'_{k-1})$ est libre et la matrice A' obtenue comme A à partir de cette famille est inversible. Nous considérons la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

construite comme la matrice M à partir de la suite $(v'_0, \dots, v'_k)$ et l'application φ qui à $(v'_0, \dots, v'_{n-1})$ associe la matrice colonne à $n-k$ lignes $D' - C'(A')^{-1}B'$; cette application est une submersion car si on considère les dérivées partielles de φ par rapport aux éléments de D on obtient une matrice de rang $n-k$. Par conséquent $\varphi^{-1}(0)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de codimension $n-k$ (la codimension de 0 dans $\mathbb{R}^{n-k}$) mais $\varphi^{-1}(0)$ est précisément égal à l'ensemble des suites finies de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ considérés dans le lemme. $\square$

Démonstration de la proposition

Les cartes de $\mathbb{P}^{n-1}$ sont les ensembles U_i , $i = 1, \dots, n$ dont les éléments sont les classes d'équivalences des éléments de $\mathbb{R}^n$ dont la i^{e} composante n'est pas nulle. Par ex. U_1 est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ dont un vecteur directeur est un élément x tel que $x_1 \neq 0$. Nous allons définir une application φ_i de U_i dans $\mathbb{R}^{n^2}$; dans ce qui suit nous allons raisonner uniquement avec φ_1 , l'argumentation étant identique pour les autres cartes. À chaque élément $(A_0, \dots, A_r, l)$ de U_1 , nous associons la suite finie $(\bar{l}, \bar{A}_0\bar{l}, \dots, \bar{A}_{n-1}\bar{l})$ où $\bar{l}$ est l'élément de $\mathbb{R}^n$ qui représente l et dont la première composante vaut 1.

Nous notons V_k l'ensemble des suites de n vecteurs $(v_0, \dots, v_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n^2}$ telles que

- la famille $(v_0, \dots, v_{k-1})$ est libre;
- la famille $(v_0, \dots, v_k)$ est liée.

Nous savons que $\text{codim } V_k = n-k$ et il est clair que $W_k \cap U_1 = \varphi_1^{-1}(V_k)$, malheureusement, φ_1 n'est pas une submersion, car la dérivée par rapport à l de $\varphi_1(A_0, \dots, A_r, l)$ a pour première colonne un vecteur dont la première composante est nulle. Nous allons donc démontrer que φ_1 est transverse à V_k .

Pour cela nous commençons par caractériser le plan tangent à V_k ; étant donné que V_k est caractérisé par l'équation $D - CA^{-1}B = 0$ (nous employons les mêmes notations que dans le lemme précédent), les vecteurs $(t_0, \dots, t_{n-1})$ tangents à V_k sont caractérisés par

$$L' - H'A^{-1}B + CA^{-1}HA^{-1}B - CA^{-1}L = 0 \tag{A.1}$$

où H est une matrice $k \times k$, H' une matrice $(n-k) \times k$, L une matrice $k \times 1$ et L' une matrice $(n-k) \times 1$ les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} H & L \\ H' & L' \end{pmatrix}$$

étant constituées des vecteurs $(t_0, \dots, t_k)$. Pour le voir, il suffit évidemment de différentier l'expression $D - CA^{-1}B$. Remarquons que l'égalité (A.1) peut encore s'écrire

$$(-CA^{-1} \quad I_{n-k}) \left\{ \begin{pmatrix} L \\ L' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} A^{-1}B \right\} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Soit $e = (A_0, \dots, A_r, l_0)$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ tel que $\varphi_1(e) \in V_k$, la différentielle de φ_1 est une application linéaire de $\mathcal{M}_n^{r+1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Soit $\tilde{A}_{k-1} = A_{i_{k-1}} \tilde{A}_{k-2}$, nous allons considérer uniquement la dérivée partielle de φ_1 par rapport à $A_{i_{k-1}}$. Si cette dernière matrice n'apparaît pas dans $\tilde{A}_{k-2}$, nous avons

$$d\varphi_1(e).(0, \dots, 0, M, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, M\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0, \dots)$$

(M et $M\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0$ sont à la k^{e} place). En remplaçant $(H, H')^T$ et $(L, L')^T$ par les composantes correspondantes de $d\varphi_1(e)$ dans le membre de droite de (A.2), on trouve

$$(-CA^{-1} \quad I_{n-k}) M\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0$$

et en jouant sur la matrice M , l'expression $M\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0$ peut être rendue égale à un vecteur arbitraire, on peut donc trouver $n-k$ (la codimension de V_k) matrices $M_1, \dots, M_{n-k}$ de sorte que les vecteurs $M_1\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0, \dots, M_{n-k}\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0$ sont indépendants et ne sont pas dans l'espace tangent à V_k , ce qui prouve que φ_1 est transverse à V_k en e .

Si la matrice $A_{i_{k-1}}$ apparaît dans $\tilde{A}_{k-2}$, l'expression de $d\varphi_1(e)$ est un peu plus compliquée, nous avons

$$d\varphi_1(e).(0, \dots, 0, M, 0, \dots, 0) = (0, \psi_0(M, \bar{l}_0), \dots, \psi_{k-2}(M, \bar{l}_0), M\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0 + A_{i_{k-1}}\psi_{k-2}(M, \bar{l}_0), \dots)$$

où $\psi_i(M, \bar{l}_0)$ est l'expression obtenue en remplaçant successivement chaque occurrence de $A_{i_{k-1}}$ dans $\tilde{A}_i$, ainsi par exemple si $\tilde{A}_i$ contient 3 fois le terme $A_{i_{k-1}}$, $\psi_i(M, \bar{l}_0)$ est une somme de 3 termes obtenus en remplaçant dans $\tilde{A}_i\bar{l}_0$ une occurrence de $A_{i_{k-1}}$ par M . Notons, $w_0, \dots, w_{k-2}$ les vecteurs $\bar{l}_0, \tilde{A}_0\bar{l}_0, \dots, \tilde{A}_{k-3}\bar{l}_0$, l'expression $\psi_i(M, \bar{l}_0)$ est soit nulle soit une somme d'expressions de la forme $B_j M w_j$ avec $0 \leq j \leq k-2$, comme les vecteurs $w_0, \dots, w_{k-2}$ sont linéairement indépendants, il est possible de trouver une matrice M telle que $M w_j = 0$ pour $j = 0, \dots, k-2$, de plus on peut aussi imposer que $M\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0$ soit égal à un vecteur arbitraire donné à l'avance. En remplaçant dans le membre de droite de (A.2), $(H, H')^T$ et $(L, L')^T$ par les composantes correspondantes de $d\varphi_1(e)$, on trouve donc une expression du type

$$(-CA^{-1} \quad I_{n-k}) M\tilde{A}_{k-2}\bar{l}_0$$

qui peut être rendue non nulle, on peut donc conclure comme plus haut.

Conclusion

Il est maintenant facile de voir que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{r+1} \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})^{r+1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ qui vérifient les hypothèses du lemme 2 dans notre papier est de codimension $n - (k+1) + (k+1+r')p$, en effet, pour dire les choses vaguement (mais ceci peut être rigoureusement démontré, aux conditions sur les matrices A_i , on rajoute $(k+1+r')p$ équations portant sur les matrices C_i d'où l'expression de la codimension.

Bibliographie

- [1] Abraham, R. and Robbin, J.W, *Transversal Mappings and Flows*, Publisher : W. A. Benjamin, 1967, New York
- [2] Alberto Isidori. (1989), *Non linear control systems*, Second dition & Springer-verlag.
- [3] A. J. Fossard et D. Normand-Cyrot. Eds, *Systèmes non linéaires modélisation-estimation*, Masson, Paris, 1993.
- [4] A.J. Kerner and A. Isidori, *Linearisation by output injection and nonlinear observers*, syst-Contr-Letters, No 3 pp47-52, 1983.
- [5] A.J. Vander Schaft, (1985), *On nonlinear observers*, IEEE Trans Automa Contr., vol 30.,no 12, pp 1254-1256., No 3 pp47-52, 1983.
- [6] A. Loria, (1996), *Global tracking control of one degree of freedom Euler-Lagrange systems without velocity measurments*, European journal of control.
- [7] A.Loria and E. Pantely. (1999) *A separation principle for a class of Euler-Lagrange systems*. Lecture Notes in Information Sciences, N244, New directions in nonlinear observer design, Springer Berlin, pp. 229-247.
- [8] Ammar.S and J-C. Vivalda, (2004), *On the preservation of observability under sampling*, Systems & Control Letters, Volume 52, Pages 7-15.
- [9] Ammar.S and J-C. Vivalda, (2005), *On the genericity of the observability of controlled discrete-time systems*, ESAIM : Control, Optimisation and calculs of variations. Vol : 11, pp : 161-179.
- [10] D. Aeyels, *On the number of samples necessary to achieve observability*, Systems & Control Letters, 1981,volume 1, number 2, pages : 92-94,
- [11] Bélanger. P, *Estimation of angular velocity and acceleration from shaft encoder measurements* , In Proc IEEE Conf Robotics Automat, volume1, pages :585-592, Nice France.
- [12] Bedrossian, N.S, (1992), *Linearizing coordinate transformations and Euclidean systems*, IEEE Robotics and Automation conferences.
- [13] Bedrossian, N.S., and Spong, M.W, (1995) *Feedback Linearization of Robot Manipulators and Riemannian Curvature*, Journal of Robotic Systems, Vol. 12, No. 8, pp. 541-552.
- [14] M.D. Di Benedetto and P. Luicibello, *nonlinear observer for a class of mechanical systems*, In. proc 27th IEEE Conf. on decision and control, Austin, Texas, USA, pp : 934-935,1988.
- [15] B. d'Andréa Novel et M. Cohen de Lara, *Commande linéaire des systèmes dynamiques* , Masson, 1994.
- [16] B. d'Andrea-Novet and J. Lévine, (1990), *Modelling and nonlinear control of an overhead crane*. In M.A. Kashoeck, J.H. van Schuppen, and A.C.M. Rand, editors, Robust Control of Linear and Nonlinear Systems, MTNS'89, volume II, pages 523-529. Birkäuser, Boston, 1990.
- [17] Besançon, G, (2000). *Global output feedback tracking control for a class of lagrangian systems*. Automatica.36, PP. 1915-1921.
- [18] Besançon, G, *Contributions à l'étude et à l'observation des systèmes non linéaires avec recours au calcul Formel*, Thèse de doctorat à l'Université de Grenoble, 1996.

- [19] Besançon, G. and Bornard, G., *state equivalent based observers design for a class of non linear system*. Proceedings of IFAC world congress, San Francisco, CA, USA, pp 287-292.
 - [20] Besançon, G. et H. Hammouri, *On Observer Design for Interconnected Systems*. Mathematical Systems, Estimation and Control, vol.8, No4, 1998.
 - [21] Besançon, G et H. Hammouri, *On uniform observation of nonuniformly observable systems*. System and Control letters, 1996.
 - [22] Besançon, G., Battilotti, S., Lanari, L. (1998). *State transformation and global output feedback disturbance attenuation for a class of mechanical systems*. IEEE Mediterranean control conference, Alghero, Sardinia, Italy, PP. 561-566.
 - [23] Besançon, G, Battilotti, S and Lanari, L. (2003). *A new separation result for a class of quadratic-like systems with application to Euler-Lagrange models* Automatica, vol. 39, n°6, pp. 1085-1093.
 - [24] Burkov, I V (1995), *Mechanical system stabilization via differential observer*. In IFAC Conference on System Structure and Control pages :532-535, Nantes France.
 - [25] Bouazza, K. E., Boutayeb, M., et Darouach, M. (2004c), *State and output feedback stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems* . Dans Proc. IEEE American Contr. Conf., Boston. USA.
 - [26] Grizzle, J. W. (1986), *Feedback linearization of discrete-time systems*. in Lect. Notes in Contr. and Info. Sciences 83. New York : Springer Verlag, 273-281.
 - [27] C. Canudas de Wit, N. Fixot, K.J. Astrom, *Trajectory Tracking in Robot Manipulators via Nonlinear Estimated State Feedback*, IEEE Trans. on Robot. and Autom., 8, 1, 138-144, 1992.
 - [28] Chorot T, J. de Leon, *Nonlinear stabilizing control law, with a dynamical high gain observer. Application to mechanical systems*. Conf. IEEE-CDC., Brighton.
 - [29] C. J. Wan, D. S. Bernstein, and V. T. Coppola. (1996), *Global stabilization of the oscillating eccentric rotor*. Nonlinear dynamics, 10 :49-62.
 - [30] C. Qian, W. Lin, *Output feedback control of a class of nonlinear systems : a non-separation principle diagram*. IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. 47, pp. 1710-1715, 2000.
 - [31] D. Angeli, *Input to state stability of PD controlled robotic systems*. Automatica, vol. 35, pp. 1285-1290, 1999.
 - [32] D.A. Anisi, J. Hamberg, *Riemannian observers for Euler-Lagrange systems*. IFAC World Congress, Prague, Czech Republik, July 2005.
 - [33] D. Bestle et M. Zeitz, (1983), *Canonical form observer for nonlinear time-variable systems*. Int.J. Control, vol 8, no 2, pp-419-431.
 - [34] D.G. Luenberger *Observing the state of a linear system*. IEEE Trans. Mil.Electron., vol 6, pp 74-80, 1964.
 - [35] D.G. Luenberger *An introduction to observers*. IEEE Trans. Autom. Contr vol 16, no 6, 1971
 - [36] D. Aeyels, *On the number of samples necessary to achieve observability*. Systems & Control Letters, 1981, volume 1, number 2, pages : 92-94,
 - [37] D.S. Laila, D. Nesic, *Changing supply rates for input-output to state stable discrete-time nonlinear systems with applications*. Automatica, 2003.
 - [38] D.T. Greenwood, *Principles of dynamics*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-hall, 1988.
 - [39] D. Williamson, (1987), *observation of bilinear systems with application to biological control*. Automatica, vol 13.
 - [40] E. Sontag, (1991), *I/O equations for nonlinear systems and observation spaces*. Proc. CDC'1991, Brighton, Angleterre, pp : 720-725.
 - [41] F. Mazenc and J.C. Vivalda. (2002). *Global asymptotic output feedback stabilization of feedforward systems*. European journal of Control, vol. 8, no. 6, pp. 519-530.
 - [42] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J.P. Gauthier, D. Rakotopara, *Exponential Observers for Nonlinear Systems*. IEEE Trans. on Aut. Contr., 38, 3, 482-484, 1993.
 - [43] F. Mazenc, F and L.Praly, (1996). *Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems*. IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol 41, no 11.
-

- [44] F. Bullo and R. M. Murray (1999), *Tracking for fully actuated mechanical systems : A geometric framework*. Automatica, 35(1) : 17-34.
 - [45] F. Plestan, A. Glumineau et C. H. Moog, (1995) *Algebraic conditions for linearization by input output injection*. IFAC Conference on system structure and control, Nantes, France, pp 161-166
 - [46] Gu, Y-L and Loh, N. K, (1987), *Control systems modeling by use of a canonical transformation*. IEEE International conference on robotics and Automation, Raleigh NC, pp : 484-489.
 - [47] H. Berghuis, H. Nijmeijer, *Robust Control of Robots via Linear Estimated State Feedback*. IEEE Trans. on Aut. Contr., 39, 10, 2159-2162, 1994.
 - [48] H. Berghuis, H. Nijmeijer, *Global Regulation of Robots Using Only Position Measurements*. Syst. & Contr. Lett., 21, 289-293, 1993.
 - [49] H. Berghuis and H. Nijmeijer, *A passivity approach to controllerobserver design for robots*. IEEE Trans. Robotics and Automation, vol. 9, pp. 940-954, 1993.
 - [50] H.J. Sussmann, *Single input observability of continuous time systems*. Math Systems Theory, vol 12, 1979.
 - [51] H. D. Angelo, *Linear time-varying systems : Analysis and Synthesis*. Allyn & Bacon, Boston 1970.
 - [52] H. Goldstein. (1980), *Classical mechanics*. Reading, Massachusetts : Addison-wesely, 1980.
 - [53] H. J. Sussmann, (1998), *Geometry and optimal control*. from the book *Mathematical Control Theory* by J. Baillieul and J. C. Willems, Springer-Verlag, pp : 140-198.
 - [54] H. Keller, (1987), *Nonlinear observers design by transformation into a generalized observers canonical form*. Int. J. Cont, vol 46, pp : 1915-1930.
 - [55] H. Nijmeijer and A. J. Van Der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer.
 - [56] J. Birk et M. Zeitz, (1988), *Extended Luenberger observers for nonlinear multivariable systems*. Int. J. Cont, vol 47, pp : 1823-1836.
 - [57] J-B. Pomet, R. M. Hirschorn, W. A. Cebuhar. (1993), *Dynamic output feedback regulation for a class of nonlinear systems*. Math Control signals and systems,, 6, pp. 106-124.
 - [58] J.-C. Vivalda, *On the genericity of the observability of uncontrolled discrete nonlinear systems*, SIAM J. Control and Optimization, 2003, v : 42, n : 4.
 - [59] J. Hernandez, (1994), *sur la synthèse de lois de commande non linéaires avec observateurs : applications à la robotique et l'électrotechnique*, Thèse de doctorat, Université d Paris sud Orsay.
 - [60] Gauthier, J.-P. and Kupka, I., *Observability for systems with more outputs than inputs and asymptotic observers*, Mathematische Zeitschrift, 1996, v. 223, pp : 47-78.
 - [61] J.P. Gauthier and I. Kupka. (2001). *Deterministic observation theory and applications*. Cambridge university Press.
 - [62] J.P. Gauthier and I. Kupka. (1994). *observability and observers for non-linear systems*. Control and Optimisation,, vol. 32, no. 4, pp. 975-999.
 - [63] J.P. Gauthier and G. Bornard, (1981) *Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems*. IEEE Trans Autom Cont, vol 26-no 4-pp 922-926
 - [64] Gauthier, J.-P. and Hammouri, H. and Kupka, I., *Observers for nonlinear systems*. Proc. of the IEEE 30th CDC, 1991, pp : 1483-1489
 - [65] J.P. Gauthier , H. Hammouri and S. Othman, (1992), *A simple observer for nonlinear systems*. IEEE Trans Aut Cont, 37, pp 875-880.
 - [66] Johanson, R. (1999). *Adaptive control of robot manipulators*. IEEE Trans RA-6 : 1230-1233.
 - [67] H. Khalil, *Nonlinear Systems* Third Edition, Prentice Hall, 2002 ISBN 0-13-067389-7.
 - [68] Koditschek, D. E, (1985), *Robot kinematics and coordinates transformations*. IEEE Conference on Decision and Control, p : 1-4.
 - [69] L. Praly and Z.P. Jiang. (1993). *Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics*. Syst. Cont. Lett., vol. 21, pp. 19-33.
-

-
- [70] M. Erlic, W.-S. Lu, *A Reduced-Order Adaptive Velocity Observer for Manipulator Control*. IEEE Trans. on Robot. and Autom., 11, 2, 293-303, 1995.
 - [71] M.F. KheK, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, E. Richard, M. Darouach, *Reduced- Order Observer-Based Point-To- Point and Trajectory Controllers for Robot Manipulators*. Contr. Eng. Pract., 4, 7, 991-1000, 1996
 - [72] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Graduate texts in mathematics. Stable mappings and their singularities*.
 - [73] M. Mabrouk and J.C. Vivalda. (2005), *State transformation for Euler-Lagrange systems* International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, September 2005 Barcelona-Spain.
 - [74] M. Mabrouk, F. Mazenc and J.C. Vivalda .(2004), *On Global Observers for some Mechanical Systems*. Proceedings of 2nd IFAC Symposium on System Structure and Control (SSSC), Oaxaca, Mexique, December 2004.
 - [75] M. Mabrouk, J-C. Vivalda, *Global Output Feedback Stabilization of a Family of Euler-Lagrange Systems*. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, July 5-7 2006, Toulouse, France.
 - [76] N. Aghannan and P. Rouchon, (2003), *An intrinsic observer for a class of Lagrangian systems*. IEEE Transactions on automatic Control, 48(6) : 936-945.
 - [77] Ole Morten Aamo, Murat Arcak, Thor I. Fossen and Petar V. Kokotovic, *Global Output Tracking Control of a Class of Euler-Lagrange Systems*. Proceedings of the 39 IEEE Conference on Decision and Control Sydney, Australia December 2000,
 - [78] F. Celle, J-P. Gauthier, D. Kazakos and G. Sallet, *Synthesis of nonlinear observers. A harmonic analysis approach*, Math system theory, vol 22, pp 291-322, 1989.
 - [79] R. Hermann and A. Kerner, (1981), *Nonlinear controllability and observability*, IEEE trans autom Control, vol 22, pp 728-740.
 - [80] A. Kerner and W. Respondek (1985), *Nonlinear observers with linearizable error*, SIAM journal of control and optimaization.
 - [81] R. Ortega, A. Loria, P. Nicklasson and H. Sira-Ramirez. (1998) *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems*. Springer.
 - [82] Ortega R and Spong M ,(1989) *Adaptive motion control of rigid robots A tutorial*. Automatica 25-6-pp877-888.
 - [83] R. Kelly, *A Simple Set-Point Robot Controller by Using Only Position Measurements*. Proc. 12th IFAC World Congr., 6, 173-176, 1993.
 - [84] R. Olfati-Saber. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, February 2001.
 - [85] Rodolphe Sepulchre, Mrdjan Jankovic and Petar Kokotovic; *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag.
 - [86] Slotine, J.J.E and Li, W, *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, USA.
 - [87] Spivak, M, *Comprehensive Introduction to diffeerential geometry*. Vol. 2, Publish or Perish, Bosten 1970.
 - [88] M. Spong and Vidyasagar. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Wiley & Sons, New York.
 - [89] S. Nicosia, A. Tornambè, P. Valigi, *Experimental Results in State Estimation of Industrial Robots*. Proc. 29th IEEE Conf. on Dec. and Contr., 360-365, 1990.
 - [90] S. Nicosia, A. Tornambb, *High-gain observers in the state and parameter estimation of robots having elastic joints*. Systems d Control Letters, 13, 331-337, 1989.
 - [91] Takens, F *Detecting strange attractors in turbulence*. Springer-Verlag, 1981.
 - [92] Stark, J., *Delay Embedding for Forced Systems – I. Deterministic forcing*, Journal of Nonlinear Science, 1999, v,9, pp :255-332.
 - [93] T. Kailath, 1980 *Linear system*. Ed. Prentice-Hall, Engelewood Cliffs, new-jersey.
-

- [94] Trélat. E, *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005, ISBN : 2 7117 7175 X.
 - [95] S.R. Kou, D.L. Elliot, T.J. Tarn, *On exponential observers for nonlinear dynamic systems*. Information and control, vol,29,1975.
 - [96] F. E. Thau, *Observing the state of nonlinear dynamic system*. Int-J-C, vol 17, 1973.
 - [97] Wen J T and Bayard S D, (1988), *New class of control laws for robot manipulators Part I*. International Journal of Control , 47-5, pp1288-1300.
 - [98] X. H. Xia et W. B. Gao, (1988), *On exponential observers for nonlinear systems*. Syst. contr. Letters, Vol. 11, PP. 319-325.
 - [99] Zhang, F, Dawson, D, de Queiroz, M. S. and Dixon .W. (1997), , *Global adaptative output feedback tracking control of robot manipulators*. Proceedings of 36th conference on decision and control, San Diego, CA, USA.
 - [100] Z.P. Jiang, I. Kanellakopoulos : *Global Output-Feedback Tracking for a Benchmark Nonlinear System*. IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. 45, no. 5, pp. 1023-1027, 2000.
 - [101] Z. P. Jiang, D. J. Hill and Y. Guo, *Stabilization and tracking via output feedback for the nonlinear benchmark system*. Automatica, July, pp. 907-915, 1998.
 - [102] Z.P. Jiang, I. Kanellakopoulos : *Global Output-Feedback Tracking for a Benchmark Nonlinear System*. IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. 45, no. 5, pp. 1023-1027, 2000.
 - [103] Z. Qu, J. Dorsey, *Robust Tracking Control of Robots by a Linear Feedback Law*, IEEE Trans. on Aut. Contr., 36, 3, 1081-1084, 1331.
 - [104] Stark, J. and Broomhead, D.S. and Davies, M.E. and Huke, J., *Delay Embedding for Forced Systems - I. Stochastic forcing* Journal of Nonlinear Science, To appear.
 - [105] Walcott, B.L, Corless, M. J and Zak S.H. *Comparative study of non-linear state observation techniques* Int. J. Control, 45- :2109-2132, 1987.
 - [106] W. Baumann and W.J. Rugh, *Feedback control of nonlinear system by extend linearization*. IEEE, 1986.
 - [107] C. Reboulet and C. Champetier, *A new method for linearizing nonlinear systems the pseudolinearization*. INT. J-C, 1984.
-

