



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

présentée à

L'Université Paul Verlaine - METZ

Faculté des Sciences

UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
(mention : AUTOMATIQUE)

par

Sofiène DELLAGI

Titre de la thèse :

**Développement de stratégies de maintenance dans un contexte
de sous-traitance partielle de production**

Soutenue le 07 Novembre 2006 devant le jury composé de :

Daoud AIT-KADI

Professeur à l'Université Laval Québec

Nouredine ZERHOUNI

Professeur à l'Université de Besançon

Olivier SENECHAL

Professeur à l'Université de Valenciennes

Benoit IUNG

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy

Xiaolan XIE

Professeur à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne

Jean-Baptiste LEGER

Président de PREDICT

Directeur de thèse :

Nidhal REZG

Professeur à l'Université Paul Verlaine de Metz

THÈSE

présentée à

L'Université Paul Verlaine - METZ

Faculté des Sciences

UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

(mention : AUTOMATIQUE)

par

Sofiène DELLAGI

Titre de la thèse :

**Développement de stratégies de maintenance dans un contexte
de sous-traitance partielle de production**

Soutenue le 07 Novembre 2006 devant le jury composé de :

Daoud AIT-KADI

Professeur à l'Université Laval Québec

Noureddine ZERHOUNI

Professeur à l'Université de Besançon

Olivier SENECHAL

Professeur à l'Université de Valenciennes

Benoît IUNG

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy

Xiaolan XIE

Professeur à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne

Jean-Baptiste LEGER

Président de PREDICT

Directeur de thèse :

Nidhal REZG

Professeur à l'Université Paul Verlaine de Metz

A mon père, ma mère, mon frère
A ma femme, mon fils
A tous les membres des familles
Dellagi et Hamrouni

Remerciements

Mes travaux de thèse ont été réalisés au sein de l'équipe SDP du laboratoire LGIPM de Metz dont je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à son directeur M. Nidhal REZG, Professeur à l'Université Paul Verlaine de Metz qui m'a suivi et guidé tout au long de ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude et mes remerciements les plus sincères pour ses conseils et le temps qu'il a consacré à diriger cette thèse. Je tiens à remercier aussi M Xiaolan XIE, Professeur à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne pour ses conseils. Je remercie aussi et M Christian CLEMENTZ, chercheur à l'ENIM, pour ses commentaires constructifs.

Ma gratitude et mes remerciements vont ensuite aux membres du jury :

A M Daoud AIT-KADI, Professeur à l'Université de Laval Québec, M Nouredine ZERHOUNI, Professeur à l'Université de Besançon, M. Olivier SENECHAL, Professeur à l'Université de Valenciennes, M Benoit IUNG, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, M Jean-Baptiste LEGER, Président de PREDICT pour avoir accepté d'examiner ce travail, pour l'intérêt qu'ils ont porté au sujet ainsi que pour leurs commentaires constructifs et leurs remarques pertinentes.

Je remercie vivement tous les membres du laboratoire LGIPM et en particulier Zied, Iyad, Smail et Mohammed, pour les encouragements et le soutien reçu durant ces trois années de thèse.

Je ne saurais assez remercier mes amis de toujours Younes, Mohamed, Nader, Tahar, et Omar.

Mes remerciements et ma gratitude vont à ma mère, mon père, mon frère et mes oncles Ammar et Abderrazek qui ont toujours eu confiance en moi, pour m'avoir encouragé et soutenu durant tous les moments difficiles.

Enfin, un remerciement à celle qui a tout quitté pour me rejoindre en France et qui m'a donné le courage pour surmonter les moments difficiles durant cette thèse, pour son amour, son soutien et sa confiance.

Table des matières

Introduction	1
<u>1 1 Stratégies de maintenance et de gestion de production : État de l'art.....</u>	<u>3</u>
<u>1.1 Introduction.....</u>	<u>4</u>
<u>1.2 Stratégies de maintenance et gestion de la production.....</u>	<u>4</u>
<u>1.2.1 Motivation de cette étude.....</u>	<u>4</u>
<u>1.2.2 Stratégie de commandes pour des système stochastiques multi- machines</u> <u>multi-produit : approche analytique</u>	<u>5</u>
<u>1.2.3 Travaux de Ouali et al. [ORX02].....</u>	<u>8</u>
<u>1.2.4 Travaux de Rezg et al. [RXM04].....</u>	<u>9</u>
<u>1.2.5 Autres travaux sur le couplage production/maintenance.....</u>	<u>10</u>
<u>1.2.6 Travaux d'Abbou et al. [Abb04].....</u>	<u>10</u>
<u>1.2.7 Travaux de Kaffel et al. [Kaf03].....</u>	<u>10</u>
<u>1.2.8 Travaux Benbouzid-Sitayeb et al [Ben05].....</u>	<u>11</u>
<u>1.2.9 Travaux de Muller et al [Mul05].....</u>	<u>11</u>
<u>1.3 Problématique de la maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance.....</u>	<u>11</u>
<u>1.3.1 Motivation de cette étude.....</u>	<u>11</u>
<u>1.3.2 Problématique industrielle : mise en situation.....</u>	<u>12</u>
<u>1.3.3 Problème posé par cette thèse.....</u>	<u>13</u>
<u>1.3.4 Objectif de cette étude.....</u>	<u>14</u>
<u>1.3.5 Notations</u>	<u>14</u>
<u>1.3.6 Volet d'étude.....</u>	<u>15</u>
<u>1.4 Conclusion.....</u>	<u>16</u>
<u>2 2 Description d'une politique de maintenance simple et développement d'une</u> <u>politique améliorée.....</u>	<u>17</u>
<u>2.1 Introduction.....</u>	<u>18</u>
<u>2.1 Politique de maintenance simple SMP.....</u>	<u>19</u>
<u>2.1.1 Définition.....</u>	<u>19</u>
<u>2.1.2 Politique de commande.....</u>	<u>19</u>

2.2 La Politique de maintenance améliorée IMP.....	20
2.2.1 Définition.....	20
2.2.2 Politique de commande.....	20
2.2.3 Motivation de la politique de maintenance améliorée IMP.....	20
2.3 Etude théorique de la différence entre les deux politiques SMP et IMP.....	21
2.3.1 Définition du cycle de production.....	21
2.3.2 Domaine d'étude.....	21
2.3.3 Outil mathématique	24
2.3.4 Etablissement de la différence entre les deux politiques IMP et SMP en terme de coût partiel moyen.....	25
2.3.5 Etude théorique de la différence entre les coûts partiels des deux politiques	29
2.3.6 Etude numérique de la performance de la politique IMP par rapport à la politique SMP.....	40
2.4 Etude de la différence entre les deux politiques SMP et IMP basée sur la simulation et le design experimental	42
2.4.1 But de l'étude basée sur la simulation	42
2.4.2 Modèle de simulation :.....	42
2.4.3 Choix du plan d'expérience	43
2.4.4 Optimisation de la politique IMP :.....	46
2.5 Conclusion:.....	46
3.3 Description d'une politique basée sur la construction d'un stock de sécurité (PMP).....	47
3.1 Introduction	48
3.2 Description de la politique de construction de stock de sécurité PMP.....	48
3.2.1 Définition.....	48
3.2.2 Politique de commande.....	49
3.2.3 Politique de maintenance.....	49
3.2.4 Problématique.....	49
3.3 Complexité de la résolution théorique du problème	50
3.3.1 Evolution cyclique du stock.....	50
3.3.2 Description des scénarios possibles.....	51
3.3.3 Complexité de la résolution théorique	58
3.4 Etude basée sur la simulation et le design experimental	60
3.4.1 But de l'étude basée sur la simulation	60
3.4.2 Modèle de simulation :.....	60
3.4.3 Choix du plan d'expériences	61
3.4.4 Etablissement du modèle mathématique.....	62

3.4.5 Optimisation.....	63
3.5 Analyse de la performance de la politique PMP par rapport aux politiques SMP et IMP	64
3.5.1 Performance de la politique PMP par rapport à la politique SMP	64
3.5.2 Performance de la politique PMP par rapport à la politique IMP	65
3.6 Conclusion.....	65
4 4 Intégration de la politique de maintenance améliorée (IMP) et la politique de construction d'un stock de sécurité (PMP).....	67
4.1 Introduction	68
4.1 Motivation.....	68
4.2 Etude de la politique IPMP.....	68
4.2.1 Définition.....	68
4.2.2 Objectif de la politique IPMP.....	69
4.2.3 Etude de la performance de la politique IPMP en utilisant la simulation.....	70
4.3 Etude de la politique IPMP $\cap$	76
4.3.1 Principe de la politique IPMP $\cap$	76
4.3.2 Objectif de la politique IPMP $\cap$	76
4.3.3 Etude de la performance de la politique IPMP $\cap$ en utilisant la simulation... ..	77
4.4 Etude de la politique IPMP $\cup$	81
4.4.1 Principe de la politique IPMP $\cup$	81
4.4.2 Objectif de la politique IPMP $\cup$	82
4.4.3 Etude de la performance de la politique IPMP $\cup$ en utilisant la simulation... ..	82
4.5 Interprétation de la performance des politiques étudiées par rapport à la politique de maintenance simple SMP.....	87
4.5.1 Bilan des politiques	87
4.5.2 Interprétation des résultats	87
4.6 Conclusion.....	88
Conclusion	91
Annexe	93
Bibliographie	141

Introduction

La concurrence industrielle incite les entreprises à rechercher la qualité et la réduction des coûts tout en fournissant les clients dans les délais demandés. Depuis un certain temps, la maintenance est devenue l'une des fonctions stratégiques de l'entreprise puisqu'elle représente le moyen privilégié pour maintenir un niveau de disponibilité acceptable. L'arrêt ou le fonctionnement anormal de l'outil de production, et le non-respect des délais qui s'en suit, engendrent une pénalité que les entreprises ne sont plus en état de supporter. Pour demeurer compétitive, l'entreprise ne doit plus subir les aléas, mais elle doit les prévoir et analyser leurs effets sur le long terme. Pour arriver à une telle finalité l'entreprise doit mener une politique de maintenance efficace pour son outil de production afin d'améliorer la disponibilité et réduire les pertes liées à la demande client non honorée.

La politique de maintenance de l'outil de production doit être en concordance avec la politique de la gestion de la production. Il est clair que la gestion de production joue un rôle important dans la satisfaction du client dans les délais. En effet, un bon réglage de la cadence de production permet de satisfaire au maximum les demandes des clients.

Suite à ce constat, il devient nécessaire de définir une politique de maintenance de l'outil de production intégrée à la gestion de la production afin de minimiser les coûts liés aux actions de maintenance et de pertes de la demande des clients tout en améliorant la disponibilité de l'outil de production. Dans la littérature, les politiques de maintenance ont été traitées d'une façon indépendante des politiques de la gestion de production industrielle. On rencontre actuellement des travaux qui visent à la mise en place des stratégies de maintenance intégrant l'aspect de la gestion de la production. Ces politiques de maintenance intégrées permettent de réaliser des économies intéressantes avec une amélioration de la disponibilité des moyens de production et une satisfaction optimale du client.

Les politiques de maintenance intégrée visent à considérer, simultanément, les contraintes des activités de la maintenance et les exigences de la production. Dans la littérature récente, on trouve les travaux de [BH90], [ADS95], [KG01], [GK03], [ORX02] et [CA04]. Ces travaux traitent de l'interaction entre les stratégies de la maintenance et de la gestion de la production de l'outil industriel.

De nos jours et afin de gagner de nouveaux marchés, les entreprises cherchent à réduire les coûts et les délais de production. Pour répondre à ces objectifs, certaines entreprises font appel à la sous-traitance. Ceci impose une nouvelle contrainte dans la gestion de la maintenance et de la production. En effet, les politiques de maintenance et de production traditionnelles ne permettent pas d'assurer la pérennité ainsi que la croissance durable sous cette nouvelle contrainte de sous-traitance. Il est nécessaire alors de développer des politiques de maintenance intégrée sous contrainte de sous-traitance. Dans ce cadre, on souhaite développer dans cette thèse de nouvelles politiques

de maintenance intégrées sous une contrainte de sous-traitance avec une interaction forte avec la gestion opérationnelle du système de production. Ceci passe par un couplage des scénarios de production aux scénarios de maintenance sous la contrainte de sous-traitance.

Le premier chapitre de ce mémoire présente la problématique de la maintenance intégrée qui consiste à définir une politique de gestion de la maintenance couplée à la production. Dans une première partie, nous présentons les principaux travaux existant dans la littérature qui se sont intéressés au couplage de la maintenance et la gestion de la production. Dans une deuxième partie, nous présentons le cadre général de cette thèse traitant de l'aspect de la sous-traitance dans un contexte de maintenance intégrée.

Le second chapitre de ce mémoire développe une stratégie de maintenance préventive intégrant une contrainte de sous-traitance. En effet, nous définissons dans ce chapitre une politique de maintenance simple SMP (Simple Maintenance Policy) qui ne dépend pas de l'état de la sous-traitance, et nous améliorons cette politique en proposant une politique de maintenance améliorée IMP (Improved Maintenance Policy) dépendant de l'état de la sous-traitance. La performance de la politique IMP par rapport à la politique SMP a été étudiée analytiquement. Les résultats théoriques obtenus ont été confrontés aux résultats issus des plans d'expériences et de la simulation.

Dans le troisième chapitre de ce mémoire, nous développons une nouvelle politique de maintenance intégrée avec la stratégie de gestion des stocks PMP (Production Maintenance Policy) et dont l'objectif est de réduire les coûts de maintenance et des demandes perdues sous la contrainte de la sous-traitance. A l'aide de la simulation et du design expérimental, nous avons étudié la performance de cette politique PMP par rapport aux politiques SMP et IMP et ses conditions d'efficacité en termes de coûts.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous avons proposé trois types de politiques de maintenance issues d'une intégration des politiques PMP et IMP. La première politique IPMP (Improved Production Maintenance Policy) consiste à intégrer la politique PMP avec la politique IMP d'une façon indépendante. Les deux autres politiques $IPMP^{\cap}$ (IPMP selon une logique «ET») et $IPMP^{\cup}$ (IPMP selon une logique OU) sont issues d'une intégration corrélée de PMP et IMP selon deux logiques ET ($\cap$) et OU ($\cup$). Une analyse des performances de ces différentes politiques par rapport à la politique de maintenance simple SMP est réalisée. Enfin les politiques établies dans cette thèse sont classées par ordre de performance par rapport à la politique de maintenance simple SMP.

Chapitre 1

Les stratégies de maintenance dans la gestion industrielle de la production : Etat de l'art

Ce chapitre présente la problématique de la maintenance intégrée et qui consiste à définir une politique de gestion de la maintenance couplée à la production. Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les principaux travaux dans la littérature qui se sont intéressés au couplage de la maintenance et la gestion de la production. Nous décrivons le problème qui traite les stratégies de commandes pour des systèmes stochastiques multi-machines et multi-produits. Nous présentons l'approche analytique qui a été posée par quelques auteurs pour résoudre ce problème. Par la suite nous décrivons quelques travaux s'intéressant à ce type de problématique ainsi que les méthodes de résolution proposées.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons le cadre général de cette thèse traitant l'aspect de la sous-traitance dans un contexte de maintenance intégrée. En effet l'objectif de cette thèse est de développer de nouvelles stratégies intégrant la maintenance et la gestion de production sous une forte contrainte de sous-traitance. Nous décrivons le problème général, ainsi que nous introduisons les notations et les données numériques adoptées dans le reste de la thèse.

1.1 Introduction

Un système de production est conçu dans l'objectif d'accomplir une mission de production des biens ou de services, dans des délais raisonnables et à un coût optimisé afin de satisfaire la demande des clients. Il est clair que la satisfaction du client doit être mesurée en terme de coût, de délai et de qualité du produit ou du service offert. Pour cela, il est nécessaire de mettre en place des politiques d'organisation et de gestion de l'outil de production afin de satisfaire au mieux cet objectif de qualité. Or un système de production est soumis à des pannes aléatoires qui perturbent la production et peut entraîner une perte des demandes clients. Par conséquent, la maintenance de l'outil de production est nécessaire pour le bon accomplissement des opérations de production. Ainsi, la mise en place de stratégies de maintenance adéquates devient nécessaire dans la gestion de l'outil de production. Ces stratégies de maintenance ont pour objectif essentiel l'amélioration de la fiabilité de ces outils de production.

Dans un premier temps, on s'intéressera dans ce chapitre aux stratégies de maintenance faisant le couplage avec les politiques de gestion de l'outil de production. Dans un second temps, on montrera que ces politiques doivent être étendues pour prendre en compte de nouvelles contraintes imposées par la modélisation telle que la contrainte de sous-traitance.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, on développe quelques études qui ont traité simultanément les stratégies de maintenance et de gestion de production. Dans la section 3 on définit la problématique de la maintenance intégrée dans le contexte de sous-traitance ainsi qu'on énonce le problème à étudier dans cette thèse. La conclusion est donnée par la section 4.

1.2 Stratégies de maintenance et gestion de la production

1.2.1 Motivation de cette étude

Il est important de remarquer que la plupart des modèles d'étude de fiabilité et de maintenance dépendent uniquement des données provenant des dossiers machines telles que les densités de probabilité de défaillance et de remplacement, les coûts associés aux actions de maintenance et l'approvisionnement en pièces de rechange. Ils ne prennent pas en compte les indicateurs de performance de production tels que le niveau des stocks et la demande prévisionnelle. Force est de constater que les anciens travaux existants sur la fiabilité des systèmes de production ignorent l'impact d'une panne ou d'une maintenance sur la production. En effet, dans un contexte de juste-à-temps, les arrêts accidentels du système de production sont considérés comme une source de perturbation et de perte de productivité. La disponibilité des équipements, au moment voulu, est une condition nécessaire au bon déroulement de la production et au respect des délais de livraison. La maintenance préventive est le moyen privilégié pour maintenir un niveau de disponibilité acceptable. Cependant, le déploiement des activités de maintenance nécessite généralement l'arrêt total des équipements de production. Pour minimiser l'impact de ces arrêts sur la production, les activités de maintenance doivent être intégrées à la gestion de la production. Ainsi, on est amené à considérer, simultanément, les contraintes des activités de maintenance et les exigences de gestion de production. Par conséquent il est clair que l'interaction entre les stratégies de maintenance et les politiques de gestion de la production est une problématique

intéressante et a donné dans les dernières années une série de travaux faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production. Dans la suite de ce chapitre, on fera un tour d'horizon sur les travaux les plus significatifs dans ce domaine.

1.2.2 Stratégie de commandes pour des système stochastiques multi-machines multi-produit : approche analytique

1.1.1.1 Description du problème

Le système de production considéré se compose de m machines sujettes à des défaillances aléatoires et produisant n types de produits P_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Les taux de panne et de réparation des m machines sont supposés constants. Les temps et les coûts de réglage sont négligeables. Le modèle mathématique et les conditions d'optimalité qui correspondent à ce système ont été détaillés dans [BH90] et [GK03]. Nous présentons dans ce qui suit les notations utilisées et la formulation du coût total moyen actualisé, qui représente la fonction à minimiser.

*Notations :

x_i : niveau de l'inventaire associé à la machine M_i ($i = 1, \dots, m$).

$X(t)$: vecteur niveau des inventaires $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ = vecteur d'état du système.

u^{ij} : taux de production du produit P_j sur la machine i .

$u_{\max}^{ij}$: taux maximum de production du produit P_j sur la machine i .

$U(t)$: vecteur taux de production $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ = vecteur de commande.

d : vecteur représentant les demandes.

$g(\cdot)$: fonction du coût instantanée.

$$x_j^+(\cdot) = \max(0, x_j(\cdot)) \text{ et } x_j^-(\cdot) = \max(-x_j(\cdot), 0).$$

c_j^+ et c_j^- : respectivement les coûts unitaires (par unité de temps) de stockage et de pénurie du produit P_j avec $j = 1, \dots, n$.

ρ : taux d'actualisation.

$E[A/B]$: probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé.

$\xi_i(t)$: état de la machine i à l'instant t , ($\xi_i(t) = 1$ si la machine est disponible, $\xi_i(t) = 2$ dans le cas contraire).

$$\text{Ind}\{\xi_i(t) = \delta\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i(t) = \delta \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$

q_{12}^i : taux de transition de l'état 1 à l'état 2 de la machine i .

$J(\cdot)$: la fonction du coût total moyen actualisé.

* Formulation du problème d'optimisation du coût

Le modèle mathématique détaillé dans [BH90] et [GK03] conduit à l'expression suivante de la fonction du coût total moyen actualisé :

$$J(x, \alpha, u(\cdot)) = E \left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \right] \text{ avec } x(0) = x, \xi(0) = \alpha \quad [1]$$

La problématique consiste à déterminer une solution admissible $u(t) \in U(t)$ qui minimise la fonction $J(\cdot)$ en tenant compte des contraintes suivantes ([2] à [5]) :

$$\dot{x}(t) = u(t) - d \quad [2]$$

représente la variation du stock,

$$p_j u_{ij(t) \leq \text{Ind}\{\xi_i(t)=1\}} j = 1, \dots, n \text{ et } u_{ik} = 0 \forall k \neq j, i = 1, \dots, m \quad [3] \text{ [BH90]}$$

représente les contraintes relatives au contrôle de la production.

$$d_j < \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^m u_{\max}^{ij} \sum_{i=1}^m \frac{q_{12}^i}{q_{12}^i + q_{21}^i} \quad [4] \text{ [BH90]}$$

définit les caractéristiques du système afin de satisfaire la demande aval.

$$g(x(\cdot), \cdot) = \sum_{j=1}^n (c_j^+ x_j^+(\cdot) + c_j^- x_j^-(\cdot)) \quad [5]$$

donne la valeur de la fonction du coût instantané.

Le problème peut être formulé à l'aide de la fonction suivante $v(\cdot, \alpha)$, qui considère le mode initial de la disponibilité des machines, α :

$$v(x, \alpha) = \inf_{u \in U(\alpha)} J(x, \alpha, u) \quad [6]$$

Il a été démontré dans [AK86] que sous certaines hypothèses, la fonction $v(x, \alpha)$ est solution des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) :

$$\rho v(x, \alpha) = \min_{u \in U(\alpha)} \left\{ (u - d) \times v_x(x, \alpha) + Qv(x, \cdot)(\alpha) + g(x, \alpha) \right\} + g(x, u) \forall x \in R^n \quad [7]$$

où $v_x(x, \alpha)$ représente la dérivée partielle de la fonction $v(x, \alpha)$. Cette fonction est convexe et la politique de commande $u(x, \alpha)$ qui lui est associée est optimale.

*Complexité du problème du contrôle optimal.

La taille des équations de HJB est donnée par la relation

$$\text{Dim} = 2^m \times 3^{m \times n} \times \prod_{j=1}^n N_h(x_j)$$

où $N_h(x_j)$ représente le card $[G_h(x_j)]$ et $G_h(x_j)$ représente une grille numérique donnant la relation entre les variables x_j et les produits $P_j, j = 1, \dots, n$.

[GK03] montrent par exemple que pour un système composé de deux machines et produisant cinq produits ($m = 2, n = 5$), et pour $N_h(x_j) = 100, j = 1, \dots, 5$, l'équation aux

dimensions donne 2.36×10^{15} états. La grande complexité d'implantation d'un algorithme de résolution pour un tel système est évidente.

Dans ce qui suit on présente quelques études qui se sont intéressées à ce type de problème et à des méthodes de résolution analytiques et par simulation.

1.1.1.2 Travaux de Boukas et al. [BH90]

Les travaux Boukas et al. considèrent que la probabilité de panne des machines dépend de leurs âges. Ils ajoutent aussi la possibilité d'appliquer des actions de maintenance préventive aux modèles existants. Ils proposent un modèle de commande stochastique pour le plan de la production et de la maintenance. Ainsi qu'ils développent une technique efficace pour déterminer la politique de contrôle optimale. Le modèle analytique proposé dans leurs travaux prolonge le modèle établi précédemment en incluant l'âge relié au taux de panne des machines, en intégrant la possibilité d'appliquer un contrôle sous la forme de maintenance préventive et repose sur l'utilisation des équations HJB. Le but de leurs travaux est de déterminer une stratégie de contrôle optimale. A l'aide d'une programmation dynamique dépendante de l'âge relatif à la machine, ils ont résolu le problème numériquement pour un système de production composé de deux machines identiques.

1.1.1.3 Travaux de Kenne et al. [KBG03]

Les travaux de Kenne et al. concernent l'aspect commande de la production d'un système de production soumis à des périodes de réparation suite aux pannes. Le système de production considéré est composé de m machines identiques capables de produire n types de produit. Chaque machine est sujette à des pannes aléatoires qui nécessitent des actions de maintenance corrective. Chaque machine est caractérisée par deux états, soit en fonctionnement soit en réparation. Les actions de maintenance corrective influent sur la disponibilité du système de production. L'augmentation de la disponibilité induit une amélioration de la productivité du système si la planification de la production est bien faite. Les variables de décisions adoptées dans leurs études sont le taux de production et le taux de réparation. Le taux de production agit sur le niveau de l'inventaire, quant au taux de réparation, il influe sur la capacité du système. Kenne et al. ont établi analytiquement l'expression du coût qui intègre le coût du surplus de production et le coût des actions de réparation. Le but de leurs travaux est de minimiser analytiquement l'expression du coût établi. A l'aide d'un algorithme basé sur des méthodes numériques, ils ont apporté une solution optimale au problème posé validée par un exemple numérique.

1.1.1.4 Travaux de Dong et al. [DY01]

Les travaux de Dong et al. ont pour but de montrer que la politique de commande de type point de commande (hedging point) est optimale dans le cadre d'un système de production composé d'une seule machine soumise à des pannes et fabriquant un seul type de produit et devant satisfaire une demande aléatoire à travers un stock. La machine possède plusieurs modes caractérisés par des états et dont sa capacité de production varie en fonction du mode considéré. Dong et al. utilisent un modèle exponentiel de paramètre λ_i pour caractériser la capacité de production pour le mode i . La transition d'un mode i à un mode j est de type markovien avec un taux de transition dépendant des modes i et j . La demande est de type poisson pour sa périodicité et

exponentiel pour sa quantité. Dong et al. ont résolu le problème analytiquement en utilisant la programmation dynamique discrète et en développant un algorithme d'itération afin d'optimiser le coût total moyen de la gestion du stock en présence de panne dans le système en fonction du niveau de stock optimal (hedging point).

1.2.3 Travaux de Ouali et al. [ORX02]

Les travaux de Ouali et al. consistent à optimiser simultanément les flux de la production et de la maintenance préventive. Le travail proposé permet de prendre en compte l'interaction entre la stratégie de la maintenance et de la politique de commande. En effet les indicateurs de performance du système sont exploités pour développer la stratégie de maintenance. Les indicateurs utilisés sont le niveau du stock et l'âge du système de production. La définition de stratégie de maintenance doit prendre en compte le calendrier de production ainsi que la disponibilité des ressources nécessaires à la réalisation des actions de maintenance.

Dans cette étude, le système de production considéré est composé d'une seule machine produisant un seul type de produit afin de satisfaire une demande constante dans le temps. La machine possède une cadence de production maximale supérieure à la demande. Ceci lui permet de construire un stock de sécurité. Quand le niveau de stock de sécurité est atteint la machine produit à la demande.

Du point de vue de la fiabilité, la machine est sujette à des pannes aléatoires qui nécessitent l'arrêt immédiat de la production. D'autre part, la machine est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge. Pendant les périodes de maintenance préventive ou corrective la demande est puisée dans le stock de sécurité. La non satisfaction de la demande suite au puisement total du stock de sécurité entraîne des pénuries. Dans un premier temps, Ouali et al. ont étudié la stratégie de maintenance et la stratégie de production d'une façon indépendante. En effet, en premier lieu, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps des actions de maintenance. En optimisant ce coût, ils ont déterminé l'âge optimal de la maintenance préventive minimisant le coût de maintenance établi. En second lieu, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps qui intègre les coûts d'inventaire et des demandes perdues. Un niveau de stock de sécurité optimal a été déterminé suite à la minimisation de ce coût. Par la suite, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps intégrant les coûts de maintenance, les coûts d'inventaire et les coûts des demandes perdues. L'expression analytique du coût est complexe. La minimisation analytique du coût est difficile. Pour cela ils ont opté pour la simulation pour résoudre le problème. Ce qui a permis de déterminer conjointement l'âge optimal de la maintenance préventive et le niveau optimal du stock de sécurité à maintenir. Les comparaisons des coûts optimaux obtenus entre les différentes politiques de gestion de la maintenance et de la production ont montré l'efficacité d'une maintenance intégrée en terme de gain.

1.1.1.5 Travaux de Chelbi et al. [CA04]

Les travaux de Chelbi et al. concernent l'étude d'un système de production composé d'une seule machine et devant satisfaire une demande constante. Pour satisfaire la demande la machine produit avec une cadence β . La machine est sujette à des pannes aléatoires qui nécessitent des actions de maintenance corrective, ainsi qu'elle est soumise à un programme de maintenance préventive de type block qui lui est appliqué aux instants $T, 2T, 3T \dots$

L'arrêt de la production suites aux actions de maintenance corrective ou préventive induit une perte de la demande en absence de stock de sécurité. Chelbi et al. ont proposé dans ce travail la construction d'un stock de sécurité de niveau S pour faire face aux flux de la demande pendant les périodes d'arrêts de la machine. Afin de construire le stock de sécurité désiré, la cadence de production de la machine au début du cycle est augmentée à $\alpha + \beta$. Chelbi et al. ont établi un modèle analytique exprimant le coût total moyen par unité de temps intégrant les coûts de la maintenance, de l'inventaire et des demandes perdues en se basant sur la valeur moyenne des temps de bon fonctionnement, les temps techniques de réparation et le nombre moyen des pannes pendant un cycle. Le but de leur travail est de déterminer la périodicité optimale des actions de maintenance préventive T^* , ainsi que le niveau de stock optimal S^* minimisant le coût obtenu, tout en satisfaisant la condition de construction du stock de niveau S avant le début des actions de maintenance préventive. Par une procédure numérique d'itération, Chelbi et al. ont déterminé la périodicité optimale des actions de maintenance préventive T^* et le niveau de stock optimal S^* .

1.2.4 Travaux de Rezg et al. [RXM04]

Rezg et al. considèrent le cas d'une ligne de production série composée de n machines avec un stock à la fin de la ligne où la demande est puisée à périodicité et quantité constantes. Les machines possèdent des cadences de production identiques supérieur à la demande. Les machines produisent à leur cadence maximale pour construire un stock de sécurité. Quand le niveau souhaité est atteint, les machines produisent à la demande. Les pannes aléatoires des machines entraînent l'interruption de la production, ainsi la demande sera satisfaite à partir du stock de sécurité construit. Dans le cas où le stock de sécurité est vide, les demandes sont perdues et un coût de pénurie est engendré. Les machines sont soumises à des actions de maintenance préventive de type âge. Les travaux de Rezg et al. sont menés en trois étapes. Dans la première étape, Rezg et al. se sont intéressés uniquement à la partie maintenance. En effet il ont établi un coût total moyen par unité de temps sur un horizon fini qui intègre les actions de maintenance corrective et préventive. Par une résolution numérique, ils ont minimisé la fonction coût pour obtenir l'âge optimal de la maintenance préventive. Dans une deuxième étape, ils ont étudié uniquement l'aspect production. Ils ont formulé un coût total moyen par unité de temps intégrant le coût des inventaires et des demandes perdues. Dans cette étape, ils ont considéré tous les scénarios d'évolution du stock possibles. Le but était de déterminer un niveau de stock optimal qui minimise le coût établi. Ils ont établi analytiquement les conditions d'existence d'une solution optimale. A l'aide d'une résolution numérique le niveau de stock optimal a été obtenu. Dans la troisième étape, ils ont traité l'aspect maintenance et production d'une façon simultanée. En effet, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps intégrant la maintenance, l'inventaire et les demandes perdues. Le modèle analytique obtenu est assez complexe à résoudre. D'autre part, afin de relaxer quelques hypothèses, ils ont opté pour la simulation pour résoudre le problème. Pour déterminer simultanément l'âge de la maintenance préventive optimal et le niveau de stock optimal, ils ont proposé une approche hybride basée sur l'utilisation de la simulation et les algorithmes génétiques pour déterminer le niveau de stock optimal et l'âge de la maintenance préventive optimal dans le cas d'une seule machine. Enfin une comparaison entre les trois étapes a prouvé que l'étude traitant simultanément la maintenance et la production est plus performante que l'étude traitant chaque aspect à part. Ces travaux ont été étendus à n machines.

1.2.5 Autres travaux sur le couplage production/maintenance

Le couplage de la production/maintenance a intéressé beaucoup d'auteurs. En effet, l'impact des stratégies de maintenance sur la production au juste à temps est étudié dans les travaux de [ADS95]. [Cha01] propose un modèle de simulation pour évaluer les performances d'une ligne de production fonctionnant en flux poussé. Plusieurs stratégies de maintenance sont comparées. Dans ce contexte, il existe aussi les travaux de [BS92], [DG92], [Xie93] et [Van95] sur l'évaluation des performances des systèmes de production soumis à des pannes. D'autres travaux traitent le contrôle des systèmes de production soumis à la maintenance préventive [GK00] et [KG01]. Ils développent des approches analytiques et par simulation intéressantes basées sur les modèles Markoviens. Il existe aussi quelques travaux sur l'optimisation des stratégies de maintenance et de gestion des stocks, appliqués à un système composé d'une seule machine et réalisant un seul produit. En particulier, [CH97] considèrent l'optimisation simultanée du stock de sécurité et la politique de maintenance du type "âge". On trouve aussi le travail de [DHS01] qui a examiné la stratégie de construction de stock de sécurité pour faire face aux demandes pendant les périodes d'interruption de production dues aux actions de maintenance. Dans le même contexte, [Ben02] a étudié les conditions de construction d'un stock de sécurité basé sur la quantité économique de commande notée EMQ (Economic Manufacturing Quantity). Dans le cas d'une demande aléatoire le même problème a été traité par [DRC05].

Plus récemment, on trouve dans la littérature des travaux qui se sont intéressés à l'évaluation des performances et des coûts ainsi que l'optimisation simultanée de la production et la politique de maintenance. Force est de constater qu'il n'est pas souvent facile de simplifier et de résoudre analytiquement les modèles proposés. Vu la complexité des modèles analytiques obtenus pour résoudre ces problèmes, [RCX05] a considéré une approche de résolution basée sur la simulation et les plans d'expériences. Dans un contexte de maintenance intégrée, on trouve les travaux de Tempelmeier [Tem01] qui considère l'évaluation des performances d'une ligne de production non homogène en fonction des paramètres de maintenance tel que l'âge des machines et la qualité des produits fabriqués.

1.2.6 Travaux d'Abbou et al. [Abb04]

Les travaux de recherche d'Abbou et al. consistent à la mise en oeuvre de maintenance centralisée dans les systèmes manufacturiers. La problématique d'Abbou et al. s'est portée sur la mise en place d'un système de maintenance dans une entreprise possédant plusieurs unités de production. Suite à l'approche d'une maintenance centralisée, ils ont conçu un atelier de maintenance. La structure de l'atelier établie et les ressources sont déterminées qualitativement suite à une étude fonctionnelle des machines de production. En tenant compte de l'évaluation des performances, Abbou et al. ont proposé un dimensionnement de l'atelier de maintenance. Par la suite ils ont intégré les coûts de maintenance afin d'assurer une efficacité aussi bien sur le plan technique qu'économique de l'entreprise.

1.2.7 Travaux de Kaffel et al. [Kaf03]

Les travaux Kaffel et al. portent sur le développement des outils d'aide à la décision pour la gestion de processus de maintenance. L'approche développée propose une méthodologie efficace basée sur l'analyse des processus et des processeurs. Kaffel et al

gènèrent et évaluent des scénarios d'association processus-processeur qui sont analysés d'un point de vue technique, stratégique et économique. La méthodologie adoptée considère à la fois les processeurs internes disponibles et les partenaires externes dont la relation peut être de type sous-traitance. Par cette approche Kaffel et al ont donné naissance au concept de la maintenance distribuée. Par ce travail Kaffel et al. introduisent un nouvel aspect de la maintenance qui participent à la compétitivité des entreprises.

1.2.8 Travaux Benbouzid-Sitayeb et al [Ben05]

Les travaux de Benbouzid-Sitayeb et al. portent sur le problème de la planification de la maintenance. Ils proposent quelques éléments de réponse au problème de la planification commune et intégrée des tâches de maintenance et de production. Dans cette étude ils prennent en considération le respect des contraintes intrinsèques au problème. D'une part Benbouzid-Sitayeb et al. ont démontré la nécessité de développer des heuristiques d'ordonnancement conjoint production/maintenance pour atteindre l'objectif d'optimisation de la sûreté de fonctionnement du système de production. Ils ont proposé l'adaptation d'un certain nombre d'heuristiques des approches constructives, itératives et évolutives pour le cas de l'ordonnancement conjoint production/maintenance. D'autre part, ils ont étudié la contribution de la maintenance à la robustesse de ces ordonnancements conjoints. Le modèle proposé, a pour objectif d'inscrire la génération d'ordonnancements conjoints comme une démarche proactive, et de démontrer que l'intégration de la maintenance lors de la génération des ordonnancements de production est à mettre au profit de la robustesse de ces derniers.

1.2.9 Travaux de Muller et al [Mul05]

Les travaux de Muller et al portent sur l'intégration de l'aspect pronostic pour gérer le processus de maintenance. Les travaux proposés reposent sur le constat de l'influence du processus de maintenance sur la performance globale d'un système de production et qui reste difficile à maîtriser suite à l'évolution continue de son environnement et le vieillissement de ses composants et la nécessité de la mise en place d'un système Intégré de Maintenance Prévisionnelle (SIMP). La mise en place d'un SIMP est une tâche délicate à réaliser vu le manque des outils et des méthodes pour la modélisation et l'intégration du processus de maintenance. Pour répondre à ce problème, le concept du pronostic est utilisé pour proposer une démarche de modélisation fondée d'une part sur le couplage d'une représentation probabiliste de l'état d'un système basée sur le formalisme des Réseaux Bayésiens Dynamiques (RBD), et de l'autre part, sur une approche événementielle de la surveillance de la dégradation de ses composants. Il ont démontré la faisabilité de sa méthode en mettant en œuvre le processus de pronostic sur le système de Déroulage / Pressage de la plate-forme TELMA.

1.3 Problématique de la maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance

1.3.1 Motivation de cette étude

La modélisation impose de nos jours une remise à plat des politiques de gestion industrielles. Cette remise à plat est nécessaire pour la survie des entreprises évoluant

dans un contexte de concurrence exacerbé et sans limite, parfois même avec des règles du jeu bafouées. Les politiques de maintenance des systèmes de production de biens et de services, n'échappent pas à ce constat et leur remise en cause est nécessaire dans ce contexte. En effet, les politiques de maintenance traditionnelles ne permettent pas d'assurer la pérennité ainsi que la croissance durable pour les entreprises d'aujourd'hui, où la réduction des coûts et des délais est devenue l'objectif principal. Pour répondre à cet objectif, une des solutions est trouvée est de faire appel à la sous-traitance qui est devenue la règle et non l'exception. Ce qui impose une nouvelle contrainte dans la gestion de la production et de la maintenance. Ainsi, les nouvelles politiques de production et de maintenance doivent intégrer ce type de contrainte afin d'être réactives pour anticiper sur les solutions de recouvrement simples et robustes pour respecter les délais de production ou de services et satisfaire au mieux les clients. La sous-traitance permet de répondre en partie à cet objectif. Dans ce cadre, on souhaite développer de nouvelles politiques de maintenance intégrées sous une contrainte de sous-traitance avec une interaction avec la gestion opérationnelle du système de production. Ceci passe par un couplage des scénarios de production aux scénarios de maintenance sous la contrainte de sous-traitance. La section qui suit présente une problématique industrielle faisant appel à la sous-traitance. L'étude menée dans cette thèse est issue de cette problématique industrielle et se place sur le plan stratégique de management de la production et de la maintenance sous une contrainte de sous-traitance avec une formalisation mathématique du problème et une analyse des performances en termes de coûts des différents politiques de maintenances proposées.

1.3.2 Problématique industrielle : mise en situation

L'entreprise considérée fabrique des blocs moteurs pour différents types de voitures. Dans l'objectif d'augmenter sa productivité, réduire ses coûts et pour éviter une délocalisation, l'entreprise a adopté une nouvelle stratégie de production basée sur l'appel à la sous-traitance dans des pays où les coûts de production sont moins élevés et elle a varié sa production par de nouveaux blocs moteurs pour d'autre type de voitures. La sous-traitante est localisée en Roumanie. Suite à l'adoption de cette stratégie de sous-traitance l'entreprise se trouve confronter aux problèmes suivants :

- Le problème de transport qui induit un coût plus élevé.
- Le problème de contrôle qualité du produit; vu l'implantation géographique des deux entreprises, l'entreprise est incapable d'effectuer le contrôle qualité du produit fabriqué par le sous-traitant. Par conséquent, l'entreprise peut recevoir des produits non conformes aux normes désirées et pouvant ainsi être rejetés ce qui engendre un manque à gagner.
- Le problème de la gestion de la maintenance pour l'ensemble des acteurs, c'est à dire l'entreprise et son sous-traitant. En effet le sous-traitant n'est pas géré par l'entreprise. Par conséquent, l'efficacité des actions de maintenance sur les machines du sous-traitant n'est pas assurée et par la suite le degré de fiabilité de ses machines est inconnu. Ceci induit des périodes d'indisponibilité incontrôlables du sous-traitant et pour lesquelles il y a perte de production.

Suite aux problèmes posés par le sous-traitant, l'entreprise décide de produire à sa cadence maximale et de compléter le reste de la demande en faisant appel à la sous-

traitance. La gestion de maintenance pour l'entreprise permet d'améliorer la fiabilité de ses équipements. Contrairement à l'entreprise sous-traitante, la gestion de maintenance de ses machines n'est pas gérée par l'entreprise donneur d'ordre qui ne peut pas agir pour l'amélioration de la fiabilité. On note que la gestion de la maintenance de l'entreprise donneur d'ordre est gérée indépendamment du sous-traitant. En effet les stratégies des actions de maintenance adoptées par l'entreprise donneur d'ordre ne dépendent que de l'historique des machines. Elles ne tiennent pas compte de l'état du sous-traitant qui impose des périodes d'indisponibilité pouvant coïncider avec les périodes de maintenance des machines de l'entreprise donneur d'ordre. Par la suite il est intéressant de penser à améliorer la gestion de maintenance de l'entreprise donneur d'ordre en tenant compte de l'état du sous-traitant. Plus précisément, l'objectif est d'éviter tant que possible l'indisponibilités des deux entreprises afin de réduire les demandes perdues. Suite à ce constat, nous avons apporté dans cette thèse une contribution dans le domaine du management des politiques de maintenances dans un contexte de sous-traitance partielle pour le problème industriel posé à travers une étude réduites.

1.3.3 Problème posé par cette thèse

Le cadre général de cette thèse est la maintenance intégrée pour les systèmes de production. Nous souhaitons intégrer dans cette approche de maintenance intégrée la contrainte de sous-traitance dans l'objectif de proposer des politiques économiques de maintenance et de gestion de la production. Le système de production considéré dans cette thèse est composé d'une seule machine M_1 produisant un seul type de produit. La machine M_1 doit satisfaire une demande client à débit et à périodicité constants. Etant donnée que la cadence de production maximale U_{max}^1 de la machine M_1 est inférieure à la demande client d , on fait appel à la sous-traitance pour compléter le reste de la demande. La sous-traitance est représentée par une machine M_2 de cadence de production maximale U_{max}^2 . A noter que dans ce cadre on a les conditions suivantes :

- a. $U_{max}^1 < d$.
- b. $U_{max}^2 < d$.
- c. $U_{max}^1 + U_{max}^2 \geq d$.

La loi de dégradation de la machine M_1 est de type Weibul dont le taux de pannes est croissant avec l'usage. La machine sous-traitante M_2 n'est pas sous contrôle de point de vue de la maintenance puisqu'elle se situe chez le sous-traitant et on n'a pas de contrôle sur sa politique de maintenance. Elle impose des périodes d'indisponibilité aléatoires dans le temps. Par conséquent, on a supposé dans cette étude que le taux de défaillance de la machine sous-traitante M_2 est constant. La machine M_1 est soumise à une politique de maintenance préventive de type âge dont le but est de réduire l'occurrence des pannes. Les périodes d'indisponibilité de M_1 et de M_2 suite à des arrêts de maintenance engendrent une perte de la demande. La figure 1.1 schématise notre système de production composé de la machine M_1 et de sa machine sous-traitante M_2 .

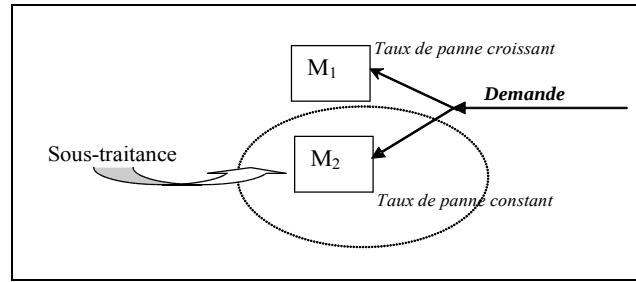


Figure 1-1. Problématique générale.

1.3.4 Objectif de cette étude

Le but recherché par cette thèse est de proposer des politiques de maintenance intégrées sous contrainte de sous-traitance. Il s'agit dans un premier temps de montrer que la contrainte de sous-traitance ajoute une nouvelle dimension et impose une remise à plat des politiques de maintenance intégrées et développées dans la littérature. La contrainte de sous-traitance engendre une nouvelle complexité du problème initial lié au couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production. Au cours des prochains chapitres, nous avons développé des politiques de maintenance tenant compte de la sous-traitance. Pour ces politiques développées, nous avons montré pour chacune d'elle ses conditions d'application ainsi que son apport en terme de gain économique. Une politique de maintenance simple (Simple Maintenance Policy) a été utilisée comme référentiel de gain pour comparer les politiques de maintenance développées.

1.3.5 Notations

On présente dans cette section les principales notations utilisées dans ce mémoire :

- C_{mp} : Coût d'une action de maintenance préventive pour la machine M_1 ,
- C_{mcl} : Coût d'une action de maintenance corrective pour la machine M_1 ,
- C_p : Coût unitaire des demandes perdues,
- C_s : Coût unitaire du stockage,
- α : Le rapport du coût unitaire des demandes perdues par le coût unitaire de stockage ($\alpha = C_p / C_s$),
- m : L'âge de la maintenance préventive,
- h : Le niveau maximal du stock de sécurité,
- z_p^k : Durée d'une action de maintenance préventive pour la machine M_1 pendant le cycle K ,
- μ_p : Durée moyenne d'une action de maintenance préventive,
- z_{cl}^k : Durée d'une action de maintenance corrective pour la machine M_1 pendant le cycle K ,
- μ_{cl} : Durée moyenne d'une action de maintenance corrective pour la machine M_1 ,
- z_{c2}^k : Durée d'une action de maintenance corrective de la sous-traitante la machine M_2 pendant le cycle K ,
- μ_{c2} : Durée moyenne d'une action de maintenance corrective de la sous-traitante la machine M_2 ,
- F_i, R_i : Fonction de défaillance, de fiabilité de la machine M_i ,
- f_i : Densité de probabilité de défaillance de la machine M_i ,
- g_{cl} : Densité de probabilité des actions de maintenance corrective de la machine M_i ,

- g_p : Densité de probabilité des actions de maintenance préventive de la machine M_1 ,
 f_2 : Densité de probabilité de défaillance de la sous-traitante machine M_2 ,
 g_{c2} : Densité de probabilité des actions de maintenance corrective de la sous-traitante machine M_2 ,
 $f_{1/2}$: Densité de probabilité de la fonction de défaillance plus réparation de la sous-traitante machine M_2 , ($f_{1/2}=f_2*g_{c2}$)
 f_{123} : Densité de probabilité de la fonction de défaillance plus réparation de la sous-traitante machine M_2 moins les actions de maintenance préventive de la machine M_2 , ($f_{123}=f_2*g_{c2}*(-g_p)$)
 $\lambda_1(t)$: Taux de défaillance de la machine M_1 , i.e., $\lambda_1(t)=f_1(t)/R_1(t)$,
 U_{max}^1 : Taux de production maximal de la machine M_1 ,
 U_{max}^2 : Taux de production maximal la sous-traitante la machine M_2 ,
 d : Quantité de la demande (fréquence et débit constants),
 W_k^1 : le temps de bon fonctionnement de la machine M_1 pendant le cycle K .
 D_k^1 : le temps des actions de maintenance de la machine M_1 pendant le cycle K .
 W_k^2 : le temps de bon fonctionnement de la machine M_2 pendant le cycle K' .
 D_k^2 : le temps de réparation de la machine M_2 pendant le cycle K' .

1.3.6 Volet d'étude

La description du problème industriel précédemment présenté est transposable au cas d'une machine notée M_1 soumise à un programme de maintenance préventive de type âge produisant à sa capacité maximale pour assurer une partie d'une demande client. Cette machine représente l'entreprise donneur d'ordre dans notre cas. Le reste de la demande est complété par une deuxième machine M_2 représentant le sous-traitant et dont le taux de défaillance est supposé constant. Cette hypothèse est justifiée dans notre cas, car la maintenance du sous-traitant n'est pas assurée par l'entreprise donneur d'ordre. Le sous-traitant engendre des périodes d'indisponibilité représentées par les périodes liées aux actions de maintenance sur la machine M_2 . Ainsi, on se propose d'étudier et de formaliser dans cette thèse le problème de la gestion de la maintenance et de la production dans un contexte de sous-traitance par le biais d'un modèle de deux machines en parallèles. Cette formalisation mathématique a pour objectif de déterminer un ensemble de politiques économiques de maintenance couplées à la production efficaces par une analyse de leurs coûts.

Les hypothèses utilisées dans cette thèse sont les suivantes:

Pour la machine M_1 :

- Les coûts des actions de maintenance, les coûts unitaires de stockage et de pénuries sont supposés fixes et connus.
- Le temps de bon fonctionnement et les durées des actions de maintenance sont des variables aléatoires suivant des lois connues.
- Les agents de maintenance sont disponibles.
- La machine M_1 est supposée neuve après chaque action de maintenance corrective ou préventive (As Good as New).

Pour la machine M_2 :

- La période de disponibilité de la machine sous-traitante suit une loi probabiliste connue.

- La période d'indisponibilité suit également une loi probabiliste dont la densité est connue.
- La date à partir de laquelle la sous-traitante, la machine M_2 , devient indisponible est supposée comme étant une date de panne de la sous-traitante.
- La période d'indisponibilité est considérée comme une période relative à une action de maintenance.

Les données numériques issues de la problématique industrielles sont les suivantes :

	<i>Loi de panne</i>	U_{max}^i (pièce/ut)	MTB F	g_{ci} (ut)	g_p (ut)	C_{mc} (um) _i	C_{mp} (um)	C_p (um)	d (pièce/ut)
Machine M_1	Weibull (2,100)	20	88.6	EXP (30)	EXP (20)	2000	500	250	30
Sous-traitant (M_2)	EXP(50)	20	50	EXP (10)	— —	— —	— —		

Tableau 1.1 : Données numériques.

D'autres données numériques seront introduites au cours des prochains chapitres.

1.4 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté les différents travaux faisant le couplage entre la maintenance et la gestion de la production. Ces travaux ont pour objectif d'obtenir une stratégie de commande intégrant la maintenance et considère conjointement les paramètres liés à la maintenance et ceux relatifs à la production comme la taille des lots à produire, la taille des stocks tampons etc. Les approches proposées par ces travaux utilisent des méthodes de résolutions basées sur les modèles analytiques telles que les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) ou des méthodes de résolutions hybrides faisant appel à la simulation et au design experimental.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons introduit la contrainte de sous-traitance dans le cadre d'une stratégie de maintenance intégrée. Le système de production considéré est composé d'une seule machine et fait appel à une machine sous-traitante pour satisfaire une demande client constante dans le temps pour sa périodicité et pour sa quantité. L'objectif recherché par cette étude est de proposer des politiques de maintenance intégrée efficace tenant compte de l'aspect de la sous-traitance. La mesure de l'efficacité d'une politique de maintenance intégrée est celle du gain économique engendré comparé à une politique de maintenance simple ne tenant pas compte de la contrainte de sous-traitance.

Chapitre 2

Description d'une politique de maintenance simple et développement d'une politique améliorée

Dans ce chapitre nous développons une stratégie de maintenance préventive intégrant une contrainte de sous-traitance. Le système de production considéré est constitué d'une machine M_1 produisant un seul type de produit. Dans un contexte de juste à temps, la machine M_1 est incapable de satisfaire une demande constante au cours du temps. Pour cela, nous faisons appel à la sous-traitance pour répondre à la totalité de la demande. La sous-traitance est représentée par une machine M_2 . Deux politiques de maintenance pour la machine M_1 sont testées. Une politique de maintenance simple (Simple Maintenance policy) SMP qui ne dépend pas de l'état de la sous-traitance, et une deuxième politique de maintenance améliorée (Improved Maintenance Policy) IMP qui dépend de l'état de la sous-traitance. Nous étudions dans ce chapitre la différence en terme de coût entre ces deux politiques de maintenance. Nous montrons analytiquement l'existence d'un intervalle d'âge de maintenance préventive adopté pour la machine M_1 dans lequel la politique IMP est plus économique que la politique SMP en terme de coût. Les résultats théoriques obtenus ont été confrontés aux résultats de simulation obtenus à partir d'un modèle de simulation et de l'utilisation du Design experimental en prenant l'intervalle d'âge de maintenance préventive établi par l'étude analytique comme condition d'existence d'un gain économique. A la fin de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'optimisation de la politique IMP. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet des publications [DRX06a], [DRX06b] et [DRX06c].

2.1 Introduction

L'optimisation des coûts des actions de maintenance pour les systèmes de production a été étudiée dans beaucoup de travaux. Dans [Ber78] les auteurs ont développé une stratégie de maintenance basée sur un optimal dans le but de minimiser le coût total moyen de maintenance. [Val89] a développé un modèle d'inspection pour minimiser les coûts de réparation. [BH60] ont étudié l'effet économique des modèles de remplacement de type âge et de type bloc. Tous ces travaux ont pour but la minimisation des coûts de maintenance sans trop tenir compte de l'aspect de perte de production suite aux arrêts liés à la maintenance. Dans ce contexte de juste à temps on trouve les travaux de [ADS95], [BH90], [GK00] et [KG01] qui ont étudié l'aspect de la stratégie de maintenance dans le contexte de production à la demande.

Dans ce chapitre nous continuons avec le même aspect (JIT) pour étudier l'influence de la sous-traitance sur le choix d'une politique de maintenance sur un système de production composé d'une seule machine M_1 qui peut produire à une cadence maximale U_{max}^I mais incapable de satisfaire la totalité de la demande d qui arrive à débit et fréquence constants. Pour compléter le reste de la demande $(d - U_{max}^I)$, nous faisons appel à la sous-traitance qui est représentée par une machine M_2 .

D'un point de vue fiabilité, nous supposons que le taux de défaillance de la machine M_2 est constant. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la machine M_2 est maintenue par une autre équipe de maintenance propre à la sous-traitance et selon des critères inconnus de notre système de production représenté par la machine M_1 . Ainsi la machine M_2 est incontrôlable d'un point de vue maintenance et on subit l'effet d'un arrêt pour maintenance de défaillance, ce qui justifie l'hypothèse d'un taux de défaillance constant pour la machine M_2 . La machine M_1 , dont le taux de défaillance est croissant, est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge.

Dans ce chapitre nous définissons deux politiques de maintenance. Une politique de maintenance simple SMP (Simple Maintenance policy) et une politique de maintenance améliorée IMP (Improved Maintenance Policy). La politique SMP consiste à effectuer des actions de maintenance préventive sur la machine M_1 à un certain âge m sans tenir compte de l'état de la sous-traitance.

La politique IMP tient compte de l'état de la sous-traitance. Elle consiste à décaler l'âge de la maintenance préventive de la machine M_1 si la machine M_2 est en maintenance. Dans ce chapitre nous démontrons analytiquement que, sous certaines conditions, la politique IMP est plus économique que la politique SMP. Nous déterminons dans la suite à l'aide de la simulation et le design experimental un âge de maintenance préventive m^* et une période de décalage optimale Δm^* pour lesquels nous obtenons une performance optimale de la politique IMP.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2 et 3 nous avons défini respectivement les deux politiques SMP et IMP. Dans la section 4 nous avons étudié théoriquement la différence entre les deux politiques en terme de coût. Dans la section 5 nous avons généralisé le résultat théorique obtenu dans la section 4 par une étude basée sur la simulation et le design experimental. La conclusion est donnée par la section 6.

2.1 Politique de maintenance simple SMP

2.1.1 Définition

La politique de maintenance simple consiste à appliquer les actions de maintenance corrective à la machine M_1 à chaque fois qu'elle tombe en panne, ou bien à lui appliquer des actions de maintenance préventive de type âge à l'âge $m(H_1)$. L'âge $m(H_1)$ dépend de l'historique H_1 de la machine M_1 sans tenir compte de l'état de la sous-traitance représentée par la machine M_2 . La machine de la sous-traitance M_2 peut avoir deux états : en fonctionnement ou en maintenance.

Formellement la politique appliquée est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Effectuer les actions de maintenance préventive pour la machine } M_1 \text{ à l'âge } m(H_1) \\ \text{ou} \\ \text{Effectuer les actions de maintenance corrective pour la machine } M_1 \text{ si elle tombe en panne avant l'âge } m(H_1) \text{ } (\xi_1^k \leq m(H_1)) \end{array} \right\}$$

Avec :

$m(H_1)$: âge de la maintenance préventive qui dépend de l'historique H_1 de la machine M_1 .

ξ_1^k : La date de la $k^{\text{ième}}$ panne de la machine M_1 (panne dans le cycle k).

Remarque : On notera dans la suite $m(H_1)$ par m .

Etant donnée qu'au début du cycle de production la machine M_1 est supposée neuve, par rapport au cycle de production l'âge m sera considéré comme la date du début des actions de maintenance préventive.

2.1.2 Politique de commande

Les deux machines ont pour but de satisfaire la demande dans le contexte de production à la demande. En effet, la machine M_1 produit à sa cadence maximale U_{max}^1 . La machine M_2 produira le reste de la demande ($d - U_{max}^1$). L'arrêt de chacune des deux machines pour des actions de maintenance entraîne des demandes perdues. Pour diminuer les demandes perdues causées par l'arrêt de la machine M_1 , la machine M_2 produit à sa cadence maximale U_{max}^2 durant cette période d'arrêt de la machine M_1 . Formellement la politique de commande adoptée est la suivante :

$$U(t) = (u_1(t), u_2(t)) = \begin{cases} (U_{max}^1, d - U_{max}^1) & \text{Si } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont en marche.} \\ (U_{max}^1, 0) & \text{Si } M_1 \text{ est en marche et } M_2 \text{ est en panne.} \\ (0, U_{max}^2) & \text{Si } M_1 \text{ est en panne et } M_2 \text{ est en marche.} \end{cases}$$

Sous les contraintes suivantes:

$$\begin{cases} U_{max}^i < d & \forall i \in \{1, 2\} \\ \sum_{i=1}^2 U_{max}^i \geq d \end{cases}$$

Remarque : Le coût de production sur la machine M_2 est plus coûteux que celui sur la machine M_1 . Ce qui justifie que la machine M_1 soit chargée à U_{max}^1 .

2.2 La Politique de maintenance améliorée IMP

2.2.1 Définition

Dans cette politique de maintenance on tient compte de l'état de la sous-traitance (la machine M_2). La politique de maintenance IMP consiste à appliquer les actions de maintenance corrective à la machine M_1 à chaque fois qu'elle tombe en panne et de lui appliquer des actions de maintenance préventive à un certain âge qui dépend de l'historique H_1 de la machine M_1 ainsi que de l'état de la machine M_2 . En effet, l'âge de la maintenance préventive de la machine M_1 sera décalé d'une période Δm à chaque fois qu'il coïncide avec la période des actions de maintenance de la machine M_2 . Formellement la mise en œuvre de la politique IMP est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Effectuer les actions de maintenance préventive pour la machine } M_1 \text{ à l'âge } m' \\ \text{ou} \\ \text{Effectuer les actions de maintenance corrective pour la machine } M_1 \text{ si elle tombe en panne avant l'âge } m' \left(\xi_1^k \leq m' \right) \end{array} \right\}$$

Avec:

$$m' = \begin{cases} m(H_1) & \text{si } m(H_1) \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[\\ m(H_1) + \Delta m & \text{si } m(H_1) \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[. \end{cases}$$

$\xi_2^{k'}$: Date de la $k^{\text{ième}}$ panne de la machine M_2 (panne de la machine M_2 pendant le cycle k)

$z_{c2}^{k'}$: La durée de réparation de la machine M_2 suite à sa $k^{\text{ième}}$ panne.

On décale l'âge de la maintenance préventive de la machine M_1 d'un Δm si et seulement si la machine M_2 est en réparation : $(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[)$

Remarque : Si on n'effectue pas le décalage Δm , on retrouve la politique SMP.

2.2.2 Politique de commande

Pour la politique de maintenance améliorée (IMP), la politique de commande est la même que celle adoptée pour la politique de maintenance simple (SMP). La différence entre les deux politiques apparaît dans la stratégie de maintenance adoptée.

2.2.3 Motivation de la politique de maintenance améliorée IMP

Pour la politique de maintenance améliorée IMP et à chaque fois que l'âge de maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , on le décale pour une période Δm . Ce décalage est opéré dans le but de réduire le coût des demandes perdues. En effet, en appliquant les actions de maintenance préventive de la machine M_1 à un âge m qui coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , on aura une perte totale de la demande. Cette perte totale de la demande est causée par l'arrêt simultané des deux machines pour des actions de maintenance. Tandis que le décalage de l'âge de maintenance préventive permettra à la machine M_1 de continuer sa production jusqu'à atteindre le nouvel âge de maintenance m' . Dans ce cas, pendant la

période de décalage Δm , la perte totale de la demande d est réduite à $(d - U_{\max}^1)$ puisque la machine M_1 continue sa production pendant la période de décalage Δm (voir figure 2.1).

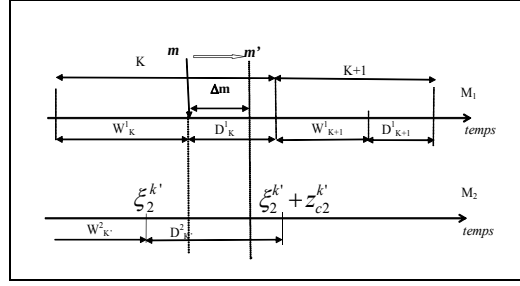


Figure 2.1 : Influence du décalage Δm sur le cycle de production

2.3 Etude théorique de la différence entre les deux politiques SMP et IMP

2.3.1 Définition du cycle de production

Le cycle de production considéré K est relatif à la machine M_1 et ne tient pas compte de l'état de la machine M_2 . En effet, le cycle de production considéré commence quand la machine M_1 est en fonctionnement et sa fin coïncide avec la fin des actions de maintenance de la machine M_1 .

2.3.2 Domaine d'étude

Si la machine M_1 tombe en panne avant d'atteindre l'âge de maintenance préventive $m(H_1)$, il n'y aura pas de différence entre les deux politiques SMP et IMP. En effet la différence entre les deux politiques apparaît pendant la phase de maintenance de la machine M_1 . Suite à ce constat, l'étude théorique sera établie sur la période de maintenance de la machine M_1 tout en supposant que la machine M_1 atteint l'âge de maintenance préventive prévu pour la politique SMP $m(H_1)$.

Remarque :

Pour la politique IMP, si pendant le décalage Δm la machine M_1 tombe en panne l'étude sera établie sur cette période de réparation de la machine M_1 qui correspond à des actions de maintenance.

Deux scénarios sont possibles :

Scénario 1 : L'âge de maintenance préventive $m(H_1)$ atteint par la machine M_1 ne coïncide pas avec la phase de maintenance corrective de la machine M_2 $m(H_1) \notin [\zeta_2^{k'}, \zeta_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]$.

Scénario 2 : L'âge de maintenance préventive $m(H_1)$ atteint par la machine M_1 coïncide avec la phase de maintenance corrective de la machine M_2 $m(H_1) \in [\zeta_2^{k'}, \zeta_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]$.

Les figures 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 représentent le domaine de calcul du coût total moyen de maintenance et des demandes perdues pour chaque politique SMP et IMP.

Politique SMP :

Scénarios 1 : $m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$

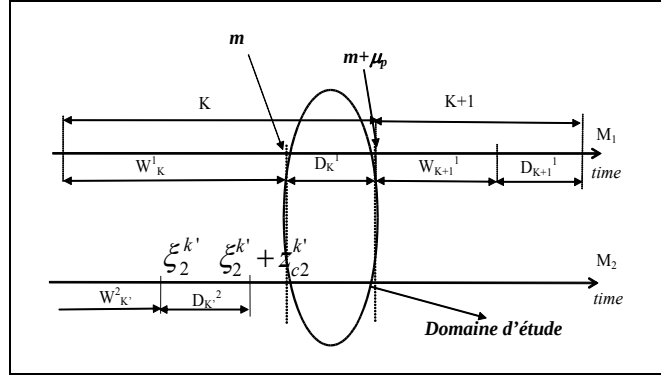


Figure 2.2 : Domaine d'étude de la politique SMP pour le scénario1

$$m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$$

Scénario 2 : $m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$

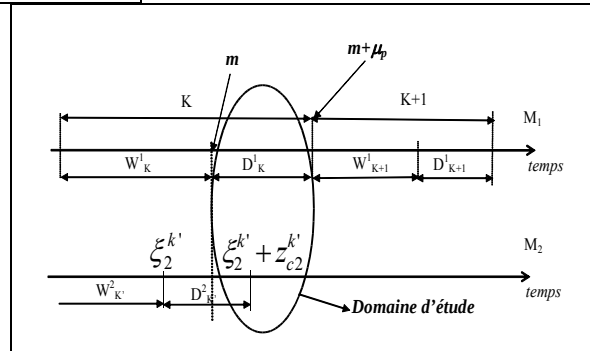


Figure 2.3 : Domaine d'étude de la politique SMP pour le scénario2

$$m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$$

Politique IMP :

Scénario 1 : $m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$

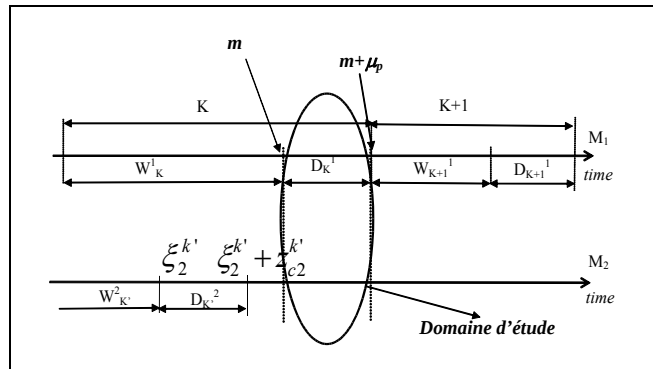


Figure 2.4 : Domaine d'étude de la politique IMP pour le scénario1

$$m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$$

Scénario 2 : $m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$

Pour le scénario 2 ($m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[$), en appliquant la politique (IMP), l'âge de maintenance préventive sera décalé de Δm . On assiste alors à deux sous scénarios possibles :

- Sous-scénario 2.1 : La machine M_1 atteint le nouvel âge de maintenance préventive $m + \Delta m$ sans tomber en panne ($\xi_1^k \notin [m, m + \Delta m]$).
- Sous-scénario 2.2 : La machine M_1 tombe en panne avant d'atteindre l'âge de maintenance préventive $m + \Delta m$ ($\xi_1^k \in [m, m + \Delta m]$).

Le domaine d'étude pour les deux sous-scénarios 2.1 et 2.2 est représenté par les figures ci-dessous (figures 2.5 et 2.6)

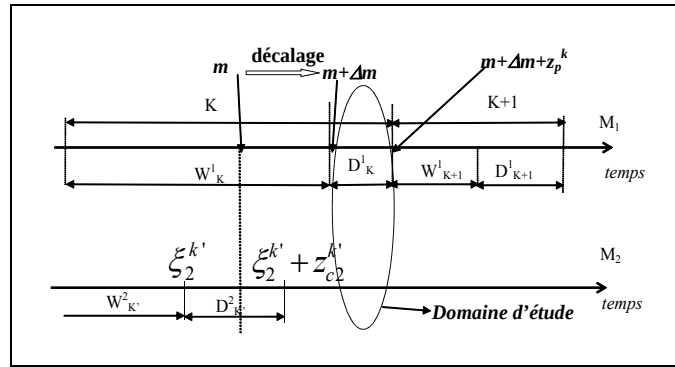


Figure 2.5 : Domaine d'étude de la politique IMP pour le sous-scénario 2.1

$$(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[) \cap (\xi_1^k \notin [m, m + \Delta m])$$

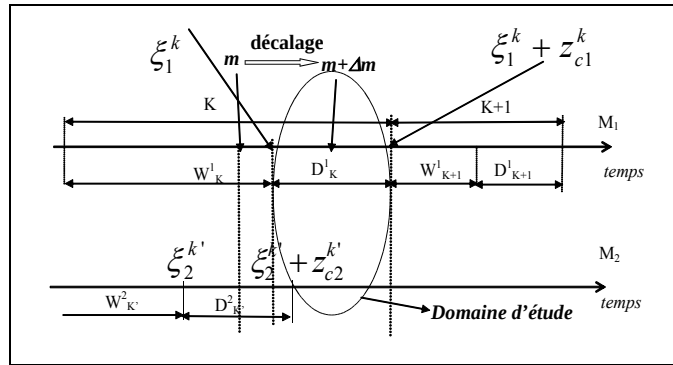


Figure 2.6 : Domaine d'étude de la politique IMP pour le sous-scénario 2.2

$$(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[) \cap (\xi_1^k \in [m, m + \Delta m])$$

Remarque : Pour le sous-scénario 2.2 où la machine M_1 tombe en panne avant d'atteindre l'âge $m + \Delta m$ on a supposé le cas extrême de cette politique : la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_1 ($\xi_1^k + z_{c1}^k$) dépasse la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_2 ($\xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}$).

2.3.3 Outil mathématique

Pour établir un modèle mathématique exprimant la différence entre les deux politiques en terme de coût partiel moyen de maintenance et de demandes perdues dans le domaine d'étude présenté par 2.4.2, un certain nombre de probabilités doivent être définies :

* P , la probabilité que l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de réparation de la machine M_2

$$P = \text{prob}(\xi_2^{k'} \leq m \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) = \left(\int_0^m f_2(t) dt \right) \times \left(1 - \int_0^m f_{1/2}(t) dt \right)$$

* $\boxed{\frac{1}{2}}$, la probabilité que pendant le décalage de l'âge de la maintenance préventive par Δm la machine M_1 tombe en panne

$$\tilde{P}_1 = \text{prob}(m \leq \xi_1^k \leq m + \Delta m) = \frac{\int_m^{m+\Delta m} f_1(t) dt}{R_1(m)}$$

* $\boxed{\frac{1}{2}}$, la probabilité qu'on décide de décaler l'âge de maintenance préventive, que la machine M_1 tombe en panne pendant ce décalage et que cette panne arrive avant la fin de maintenance de la machine M_2

$$\tilde{P}_2 = \text{prob}(m \leq \xi_1^k \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) = \frac{1 - \int_0^m f_{1/2}(t) dt}{1 - \int_0^m f_1(t) dt} \times P$$

* $\boxed{\frac{1}{2}}$, la probabilité que l'âge atteint après le décalage $(m + \Delta m)$ ne dépasse pas la fin de la phase de maintenance de la machine M_2

$$P_{1/2} = \text{prob}(\xi_2^{k'} \leq m + \Delta m \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) = \frac{\left(\int_0^m f_2(t) dt \right) \times \left(1 - \int_0^{m+\Delta m} f_{1/2}(t) dt \right) \times \left(1 - \int_0^{m+\Delta m} f_1(t) dt \right)}{\left(\int_0^{m+\Delta m} f_2(t) dt \right) \times \left(1 - \int_0^m f_{1/2}(t) dt \right) \times \left(1 - \int_0^m f_1(t) dt \right)}$$

* $\boxed{\frac{1}{2}}$, la probabilité que la fin des actions de maintenance préventive ayant commencée à l'âge décalé $(m + \Delta m)$ ne dépasse pas la fin de la phase de maintenance de la machine M_2

$$\tilde{P}_3 = \text{prob}(m + \Delta m + z_p \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) = \frac{\left(1 - \int_0^{m+\Delta m} f_{123}(t) dt \right) \times P}{R_1(m)}$$

* $\boxed{\dot{P}_1}$, la probabilité que l'âge de maintenance préventive m coïncide avec la phase de maintenance de M_2 et que la fin des actions de maintenance préventive ayant commencée à l'âge non décalé (m) ne dépasse pas la fin de la phase de maintenance de la machine M_2

$$\tilde{P}_{3/0} = \text{prob}(m + z_p \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) = \frac{\left(1 - \int_0^m f_{123}(t) dt\right) \times P}{R_1(m)}$$

2.3.4 Etablissement de la différence entre les deux politiques IMP et SMP en terme de coût partiel moyen

Afin d'établir la différence en terme de coût entre les deux politiques, on a besoin d'introduire le lemme suivant :

Lemme 1 :

Soient T_K^0 la durée du cycle de production de la politique SMP et T_K^1 la durée du cycle de production de la politique IMP. On a $E(T_K^0) \cong E(T_K^1)$. On notera par la suite :

$$E(T) = E(T_K^0) = E(T_K^1).$$

Démonstration

On rappelle :

$$P = \text{prob}(\{\xi_2^{k'} \leq m < \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}\})$$

$$\tilde{P}_1 = \text{prob}(\{m \leq \xi_1^k < m + \Delta m\})$$

Or

$$E(T_K^0) = E(\min(m, \xi_1^k)) + F(m)\mu_{c1} + R(m)\mu_p$$

$$E(T_K^1) = P \times [E(\min(m + \Delta m, \xi_1^k)) + F(m + \Delta m)\mu_{c1} + R(m + \Delta m)\mu_p] \\ + (1 - P)[E(\min(m, \xi_1^k)) + F(m)\mu_{c1} + R(m)\mu_p]$$

Avec :

$$E(\min(m, \xi_1^k)) = \int_0^m \text{prob}(t < \xi_1^k) dt = \int_0^m R_1(t) dt$$

$$E(\min(m + \Delta m, \xi_1^k)) = \int_0^{m+\Delta m} P(t < \xi_1^k) dt = \int_0^m P(t < \xi_1^k) dt + \int_m^{m+\Delta m} P(t < \xi_1^k) dt = \int_0^m R_1(t) dt + \int_m^{m+\Delta m} R_1(t) dt$$

$$\Rightarrow E(\min(m + \Delta m, \xi_1^k)) = E(\min(m, \xi_1^k)) + \int_m^{m+\Delta m} R_1(t) dt$$

$$F_1(m) = \text{prob}(\xi_1^k \leq m) \text{ et } R_1(m) = 1 - F(m)$$

$$F_1(m + \Delta m) = \text{prob}(\xi_1^k \leq m + \Delta m) \text{ et } R_1(m + \Delta m) = 1 - F_1(m + \Delta m)$$

$$\text{prob}(\xi_1^k \leq m + \Delta m) = \text{prob}(\xi_1^k \leq m) + \text{prob}(\{m \leq \xi_1^k \leq m + \Delta m\})$$

$$\Rightarrow \text{prob}(\xi_1^k \leq m + \Delta m) = \text{prob}(\xi_1^k \leq m) + \tilde{P}_1$$

En utilisant les équations précédentes nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & E\left(\min(m + \Delta m, \xi_1^k)\right) + F(m + \Delta m) \mu_{c1} + R(m + \Delta m) \mu_p = E\left(\min(m, \xi_1^k)\right) + F(m) \mu_{c1} + R(m) \mu_p \\
 & \quad + \int_m^{m+\Delta m} R_1(t) dt + \tilde{P}_1(\mu_{c1} - \mu_p) \\
 & \Rightarrow E(T_k^1) = E(T_k^0) + P \times \left(\int_m^{m+\Delta m} R_1(t) dt + \tilde{P}_1(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\
 & \Rightarrow E(T_k^1) - E(T_k^0) = P \times \left(\int_m^{m+\Delta m} R_1(t) dt + \tilde{P}_1(\mu_{c1} - \mu_p) \right); 0 \\
 & \Rightarrow E(T_k^1) \equiv E(T_k^0)
 \end{aligned}$$

Fin démonstration

*Coût partiel moyen pour la politique SMP :

On désigne par $\bar{C}(SMP)$ le coût partiel moyen par unité de temps de la politique SMP qui représente le coût de maintenance et des demandes perdues de la politique SMP dans le domaine d'étude précisé dans le paragraphe 2.4.2. On note par $C(SMP)$ le coût partiel de la politique SMP. On obtient alors :

$$C(SMP) = (1-P) \left(C_{mp} + C_p \left(d - U_{\max}^2 \right) \right) + P \left(C_{mp} + \left(1 - \tilde{P}_{3/0} \right) \left[C_p d \left(\xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'} - m \right) + C_p \left(d - U_{\max}^2 \right) \left(m + z_p - \xi_2^{k'} - z_{c2}^{k'} \right) \right] \right) \quad (1)$$

Le terme A1 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique SMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m ne coïncide pas avec la période de maintenance de la machine M_2 ($m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]$).

Le terme B1 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique SMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 ($m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]$).

Le terme B11 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique SMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , et la fin des actions de maintenance préventive $m + z_p^k$ ne dépasse pas la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_2 ($(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \cap (m + z_p^k \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'})$).

Le terme B12 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique SMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , et la fin des

actions de maintenance préventive $m+z_p^k$ dépasse la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_2 ($m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}] \cap (m + z_p^k > \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'})$).

Par conséquent, on déduit que :

$$\bar{C}(IMP) = \frac{E(C(IMP))}{E(T)} = \frac{(1-P)(C_{np} + C_p \mu_p (d - U_{\max}^2)) + P \left(C_{np} + \left[\begin{aligned} &\tilde{P}_{30} C_p d \mu_p \\ &+ (1 - \tilde{P}_{30}) \left[C_p d (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{32} - m) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + C_p (d - U_{\max}^2) (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{32}) \right] \right] \right)}{E(T)} \quad (2) \end{aligned}$$

*Coût partiel moyen pour la politique IMP :

On désigne par $\bar{C}(IMP)$ le coût partiel moyen par unité de temps de la politique IMP qui représente le coût de maintenance et des demandes perdues de la politique IMP dans le domaine d'étude précisé dans le paragraphe 2.4.2.

On note par $C(IMP)$ le coût partiel de la politique IMP. On obtient alors :

$$\begin{aligned} C(IMP) = & (1-P) \underbrace{(C_{np} + C_p z_p (d - U_{\max}^2))}_{\text{terme A2}} \\ & + P \left[\begin{aligned} &\tilde{P}_1 \left[\begin{aligned} &\tilde{P}_2 (C_{m21} + C_p d (\xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'} - \xi_1^k) + C_p (d - U_{\max}^2) (\xi_1^k + z_{c1}^k - \xi_2^{k'} - z_{c2}^{k'})) \\ &+ (1 - \tilde{P}_2) (C_{m21} + C_p (d - U_{\max}^2) z_{c1}^k) \end{aligned} \right] \\ &\quad \text{terme C11} \\ &\quad \text{terme C12} \\ &\quad \text{terme C1} \\ &+ (1 - \tilde{P}_1) \left[\begin{aligned} &\tilde{P}_3 (C_{mp} + C_p dz_p) \\ &+ (1 - \tilde{P}_3) \left(C_{mp} + C_p d (\xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'} - m - \Delta m) \right. \\ &\quad \left. + C_p (d - U_{\max}^2) (m + \Delta m + z_p - \xi_2^{k'} - z_{c2}^{k'}) \right) \end{aligned} \right] \\ &\quad \text{terme C211} \\ &\quad \text{terme C212} \\ &\quad \text{terme C21} \\ &+ (1 - \tilde{P}_1) (C_{np} + C_p (d - U_{\max}^2) z_p) \\ &\quad \text{terme C22} \\ &\quad \text{terme C2} \end{aligned} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

Le terme A2 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m ne coïncide pas avec la période de maintenance de la machine M_2 :

$$(m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]).$$

Le terme B2 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 :

$$(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]).$$

Le terme C1 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 et la machine M_1 tombe en panne pendant le décalage Δm :

$$\left(\left(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}] \right) \cap (\xi_1^k \in [m, m + \Delta m]) \right).$$

Le terme C11 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , la machine M_1 tombe en panne pendant le décalage Δm et que la date de la panne de la machine M_1 ne dépasse pas la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_2 :

$$\left(\left(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}] \right) \cap (\xi_1^k \in [m, m + \Delta m]) \cap (\xi_1^k \in [m, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \right).$$

Le terme C12 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , la machine M_1 tombe en panne pendant le décalage Δm et que la date de la panne de la machine M_1 dépasse la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_2 :

$$\left(\left(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}] \right) \cap (\xi_1^k \in [m, m + \Delta m]) \cap (\xi_1^k > \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) \right).$$

Le terme C2 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 et la machine M_1 ne tombe pas en panne pendant le décalage Δm (la machine M_1 survit jusqu'à l'âge $(m + \Delta m)$):

$$\left(\left(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}] \right) \cap (\xi_1^k > m + \Delta m) \right)$$

Le terme C21 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , la machine M_1 ne tombe pas en panne pendant le décalage Δm (la machine M_1 survit jusqu'à l'âge $(m + \Delta m)$) et l'âge de maintenance préventive $m + \Delta m$ ne dépasse pas la fin des actions de maintenance de la machine M_2 :

$$\left(\left(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}] \right) \cap (\xi_1^k > m + \Delta m) \cap (m + \Delta m \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) \right)$$

Le terme C211 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , la machine M_1 ne tombe pas en panne pendant le décalage Δm (la machine M_1 survit jusqu'à l'âge $(m + \Delta m)$), l'âge de maintenance préventive $m + \Delta m$ ne dépasse pas la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_2 et la fin des actions de maintenance préventive qui ont débuté à l'âge $m + \Delta m$ ne dépasse pas la fin des actions de maintenance corrective de la machine M_2 :

$$\left(\left(m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}] \right) \cap (\xi_1^k > m + \Delta m) \cap (m + \Delta m < \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) \cap (m + \Delta m + z_p^k \leq \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) \right)$$

Le terme C212 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , la machine M_1 ne tombe pas en panne pendant le décalage Δm (la machine M_1 survit jusqu'à l'âge $(m + \Delta m)$), l'âge de maintenance préventive $m + \Delta m$ ne dépasse pas la fin des actions de maintenance de la machine M_2 et la fin des actions de maintenance préventive qui ont débuté à l'âge $m + \Delta m$ dépasse la fin des actions de maintenance de la machine M_2 :

$$\left((m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \cap (\xi_1^k > m + \Delta m) \cap (m + \Delta m < \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) \cap (m + \Delta m + z_p^k > \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) \right)$$

Le terme C22 désigne le coût de maintenance et des demandes perdues pour la politique IMP dans le domaine défini précédemment dans le cas où l'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de maintenance de la machine M_2 , la machine M_1 ne tombe pas en panne pendant le décalage Δm (la machine M_1 survit jusqu'à l'âge $(m + \Delta m)$) et l'âge de maintenance préventive $m + \Delta m$ dépasse la fin des actions de maintenance de la machine M_2 :

$$\left((m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \cap (\xi_1^k > m + \Delta m) \cap (m + \Delta m > \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}) \right).$$

Par conséquent on déduit que :

$$\bar{C}(IMP) = \frac{E(C(IMP))}{E(T)} = \frac{(1-P)(C_{mp} + C_p \mu_p (d - U_{\max}^2)) + \left[\tilde{P}_1 \left[\tilde{P}_2 (C_{mc1} + C_p d (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - E(\xi_1^k)) + C_p (d - U_{\max}^2) (E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2})) \right] + (1 - \tilde{P}_2) (C_{mc1} + C_p (d - U_{\max}^2) \mu_{c1}) \right] + \left[P \left[\tilde{P}_3 (C_{mp} + C_p d \mu_p) + (1 - \tilde{P}_3) \left(C_{mp} + C_p d (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - m - \Delta m) + C_p (d - U_{\max}^2) (m + \Delta m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2})) \right) \right] + (1 - P_{1/2}) (C_{mp} + C_p (d - U_{\max}^2) \mu_p) \right] \right]}{E(T)} \quad (4)$$

Suite aux relations (2) et (4), on établit la différence entre les deux politiques en terme de coût partiel moyen intégrant la maintenance et les demandes perdues noté H . On obtient alors :

$$H = \bar{C}(IMP) - \bar{C}(SMP) = \frac{\left[-\tilde{P}_2 \tilde{P}_3 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) + \tilde{P}_1 (C_{mc1} - C_{mp} + C_p (d - U_{\max}^2) (\mu_{c1} - \mu_p)) + P_{1/2} (1 - \tilde{P}_1) C_p U_{\max}^2 \left(\tilde{P}_3 (m + \Delta m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) - (m + \Delta m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \right) - \tilde{P}_{3/0} C_p U_{\max}^2 (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) + C_p U_{\max}^2 (m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \right]}{E(T)}$$

2.3.5 Etude théorique de la différence entre les coûts partiels des deux politiques

Suite à l'expression de H , on établit le théorème 1 :

Théorème 1

Satisfaisant les conditions (C1), (C2) et (C3) ci-dessous la politique IMP est plus économique que la politique SMP quelque soit la période du décalage.

Formellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C1): E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - \mu_p \leq m \leq E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2}, \\ (C2): C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \\ (C3): C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \end{array} \right\} \Rightarrow H = \bar{C}(IMP) - \bar{C}(SMP) \leq 0 \forall \Delta m$$

$$\Rightarrow \{ \forall m \in [a, b] \} \Rightarrow H = \bar{C}(IMP) - \bar{C}(SMP) \leq 0 \forall \Delta m$$

Avec :

$$\begin{array}{l} a = E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - \mu_p \\ b = \inf \left(\begin{array}{l} E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2}, \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - \mu_p - \frac{C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p)}{C_p U_{\max}^2} \right), \\ \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - \mu_p - \frac{C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p)}{C_p U_{\max}^2} \right) \end{array} \right) \end{array}$$

Vérifiant les conditions C1, C2 et C3, en appliquant la politique IMP au lieu de la politique SMP, on assure une diminution des demandes perdues. Par conséquent la politique IMP est plus économique que la politique SMP quelque soit la valeur du décalage Δm .

Pour tout décalage Δm appliqué à un âge de maintenance préventive appartenant à l'intervalle $[a, b]$, on assure la diminution du coût des demandes perdues et par conséquent l'efficacité économique de la politique IMP par rapport à la politique SMP.

Démonstration :

On rappelle l'expression de H :

$$H = \frac{\begin{array}{l} -\tilde{P}_1 \tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right) \\ + \tilde{P}_1 \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p (d - U_{\max}^2) (\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ + P_{1/2} (1 - \tilde{P}_1) C_p U_{\max}^2 \left(\tilde{P}_3 (m + \Delta m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \right. \\ \left. - (m + \Delta m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \right) \\ - \tilde{P}_{3/0} C_p U_{\max}^2 (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ + C_p U_{\max}^2 (m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \end{array}}{E(T)}$$

$$\Rightarrow H = \frac{P}{E(T)} \left[\tilde{P}_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - E(\xi_1^k)) \\ (C_{mc1} - C_{mp} + C_p (d - U_{\max}^2) (\mu_{c1} - \mu_p)) \\ P_{1/2} \tilde{P}_3 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - m - \Delta m - \mu_p) \\ P_{1/2} C_p U_{\max}^2 (m + \Delta m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} + P_{1/2} \left(\tilde{P}_3 C_p U_{\max}^2 (m + \Delta m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \right) \\ C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - m - \Delta m) \end{pmatrix}}_{\beta_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{P}_{3/0} (C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - m - \mu_p)) \\ + C_p U_{\max}^2 (m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \end{pmatrix}}_{\alpha_2} + \underbrace{\alpha_3}_{\beta_2} \right]_B$$

Pour $P=0 \Rightarrow H=0$.

On suppose maintenant que $P \neq 0$. On obtient :

$$H = \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_1 A + B).$$

*Cas 1 : A=0

$$A = 0 \Rightarrow H = \frac{PB}{E(T)} \Rightarrow H = \frac{P}{E(T)} (P_{1/2} \beta_1 + \beta_2)$$

*Cas 1.1 : $\beta_1=0$

$$\beta_1 = 0 \Rightarrow H = \frac{P\beta_2}{E(T)} \Rightarrow H = \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_{3/0} \alpha_2 + \alpha_3)$$

*Cas 1.1.1 : $\alpha_2=0$

$$\alpha_2 = 0 \Rightarrow H = \frac{P\alpha_3}{E(T)} \Rightarrow H = \frac{PC_p U_{\max}^2}{E(T)} (m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}).$$

$$\text{Or } \frac{PC_p U_{\max}^2}{E(T)} \geq 0 \Rightarrow \text{For } (m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \leq 0 \Rightarrow \frac{P\alpha_3}{E(T)} \leq 0 \Rightarrow H \leq 0.$$

Dans ce cas on établit la deuxième partie de la condition (C1) :

$$(m \leq E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2}).$$

*Cas 1.1.2 : $\alpha_2 < 0$

$$\text{On a : } H = \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_{3/0} \alpha_2 + \alpha_3).$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P}{E(T)} \\ \alpha_2 < 0 \\ 0 \leq \tilde{P}_{3/0} \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_2 \leq \tilde{P}_{3/0} \alpha_2 \leq 0 \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 \leq \tilde{P}_{3/0} \alpha_2 + \alpha_3 \leq \alpha_3$$

$$\Rightarrow \frac{P}{E(T)} (\alpha_2 + \alpha_3) \leq \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_{3/0} \alpha_2 + \alpha_3) \leq \frac{P \alpha_3}{E(T)}$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P \alpha_3}{E(T)}.$$

D'après la deuxième partie de la condition (C1) établi, on a : $\frac{P \alpha_3}{E(T)} \leq 0$

D'où $H \leq 0$.

*Cas 1.1.3 : $\alpha_2 > 0$

$$\text{On a : } H = \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_{3/0} \alpha_2 + \alpha_3).$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P}{E(T)} \\ \alpha_2 > 0 \\ 0 \leq \tilde{P}_{3/0} \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq \tilde{P}_{3/0} \alpha_2 \leq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 \leq \tilde{P}_{3/0} \alpha_2 + \alpha_3 \leq \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\Rightarrow \frac{P \alpha_3}{E(T)} \leq \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_{3/0} \alpha_2 + \alpha_3) \leq \frac{P}{E(T)} (\alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)} (\alpha_2 + \alpha_3).$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P \left[\left(C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - m - \mu_p) + C_p U_{\max}^2 (m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \right) \right]}{E(T)}$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{-P C_p U_{\max}^2 \mu_p}{E(T)} \leq 0.$$

*Cas 1.2 : $\beta_i < 0$

$$\text{On a : } H = \frac{P \beta}{E(T)} \Rightarrow H = \frac{P}{E(T)} (P_{1/2} \beta_1 + \beta_2).$$

On a :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq P_{1/2} \leq 1 \\ \beta_1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_1 \leq P_{1/2} \beta_1 \leq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 \leq P_{1/2} \beta_1 + \beta_2 \leq \beta_2$$

$$\Rightarrow \frac{P}{E(T)} (\beta_1 + \beta_2) \leq \frac{P}{E(T)} (P_{1/2} \beta_1 + \beta_2) \leq \frac{P \beta_2}{E(T)}$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P \beta_2}{E(T)}.$$

D'après la deuxième partie de la condition (CI), on a montré que $\frac{P\beta_2}{E(T)} \leq 0$. Or dans ce cas, on a $H \leq \frac{P\beta_2}{E(T)}$. Par conséquent, on peut affirmer que suite à la deuxième partie de la condition (CI) établi que $H = 0$.

*Cas 1.3 : $\beta_1 > 0$

On a $H = \frac{PB}{E(T)}$.

$$\Rightarrow H = \frac{P}{E(T)} (P_{1/2}\beta_1 + \beta_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq P_{1/2} \leq 1 \\ \beta_1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq P_{1/2}\beta_1 \leq \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \leq P_{1/2}\beta_1 + \beta_2 \leq \beta_1 + \beta_2$$

$$\Rightarrow \frac{P\beta_2}{E(T)} \leq \frac{P}{E(T)} (P_{1/2}\beta_1 + \beta_2) \leq \frac{P}{E(T)} (\beta_1 + \beta_2)$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)} (\beta_1 + \beta_2)$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P \left(C_p U_{\max}^2 (\tilde{P}_3 - \tilde{P}_{3/0}) (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) + C_p U_{\max}^2 \Delta m (\tilde{P}_3 - 1) \right)}{E(T)}.$$

Pour $C_p U_{\max}^2 \Delta m (\tilde{P}_3 - 1)$:

$$(\tilde{P}_3 - 1) \leq 0 \Rightarrow C_p U_{\max}^2 \Delta m (\tilde{P}_3 - 1) \leq 0$$

Pour $C_p U_{\max}^2 (\tilde{P}_3 - \tilde{P}_{3/0}) (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2})$:

$$\left. \begin{array}{l} (\tilde{P}_3 - \tilde{P}_{3/0}) \leq 0 \\ C_p U_{\max}^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_p U_{\max}^2 (\tilde{P}_3 - \tilde{P}_{3/0}) \leq 0$$

$$\Rightarrow \text{Pour } (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \geq 0 \Rightarrow C_p U_{\max}^2 (\tilde{P}_3 - \tilde{P}_{3/0}) (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \leq 0$$

On établit ainsi la première partie de la condition (CI) : $m \geq E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - \mu_p$.

*Cas 2 : $A < 0$

On a $H = \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_1 A + B)$.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \tilde{P}_1 \leq 1 \\ A < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A \leq \tilde{P}_1 A \leq 0 \Rightarrow A + B \leq (\tilde{P}_1 A + B) \leq B$$

$$\Rightarrow \frac{P}{E(T)}(A + B) \leq \frac{P}{E(T)}(\tilde{P}_1 A + B) \leq \frac{P}{E(T)}B$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)}B$$

Suite à la condition $C(I)$ on a : $H = \frac{PB}{E(T)} \leq 0$. Or dans ce cas on a : $H \leq \frac{P}{E(T)}B$. Par conséquent : $H \leq 0$

*Cas 3 : $A > 0$

On a : $H = \frac{P}{E(T)}(\tilde{P}_1 A + B)$.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \tilde{P}_1 \leq 1 \\ A > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq \tilde{P}_1 A \leq A \Rightarrow B \leq (\tilde{P}_1 A + B) \leq A + B$$

$$\Rightarrow \frac{PB}{E(T)} \leq \frac{P}{E(T)}(\tilde{P}_1 A + B) \leq \frac{P(A + B)}{E(T)}$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P(A + B)}{E(T)}$$

En remplaçant A et B par leurs expressions analytiques on obtient:

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)} \left(\begin{array}{l} \tilde{P}_2 \left(C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - E(\xi_1^k) \right) \right) \\ + C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \\ + \tilde{P}_{3/0} C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - m - \mu_p \right) \end{array} \right)$$

Suite à la première partie de la condition (CI) :

$$\tilde{P}_{3/0} C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - m - \mu_p \right) \leq 0.$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)} \left(\begin{array}{l} \underbrace{\tilde{P}_2 \left(C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - E(\xi_1^k) \right) \right)}_{\theta_1} \\ + \underbrace{C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right)}_{\theta_2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)}(\tilde{P}_2 \theta_1 + \theta_2)$$

*Cas 3.1 : $\theta_l = 0$

On a
$$H \leq \frac{P\theta_2}{E(T)}.$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)} \left(C_{mc_1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c_1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c_2} + \mu_{c_1} - m - \mu_p \right) \right)$$

Pour: $C_{mc_1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c_1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c_2} + \mu_{c_1} - m - \mu_p \right) \leq 0 \Rightarrow \frac{P\theta_2}{E(T)} \leq 0 \Rightarrow H \leq 0.$

On établit alors la condition (C2) :

$$(C2): C_{mc_1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c_1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c_2} + \mu_{c_1} - m - \mu_p \right).$$

*Cas 3.2 : $\theta_l < 0$

On a :
$$H \leq \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_2 \theta_1 + \theta_2).$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \tilde{P}_2 \leq 1 \\ \theta_1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \leq \tilde{P}_2 \theta_1 + \theta_2 \leq \theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{P}{E(T)} (\theta_1 + \theta_2) \leq \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_2 \theta_1 + \theta_2) \leq \frac{P\theta_2}{E(T)}$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P\theta_2}{E(T)}.$$

D'après la condition (C2) on a :

$$\frac{P\theta_2}{E(T)} \leq 0 \Rightarrow H \leq 0.$$

*Case 3.3 : $\theta_l > 0$

On a :
$$H \leq \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_2 \theta_1 + \theta_2).$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \tilde{P}_2 \leq 1 \\ \theta_1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta_2 \leq \tilde{P}_2 \theta_1 + \theta_2 \leq \theta_1 + \theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{P\theta_2}{E(T)} \leq \frac{P}{E(T)} (\tilde{P}_2 \theta_1 + \theta_2) \leq \frac{P}{E(T)} (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P(\theta_1 + \theta_2)}{E(T)}.$$

Si on remplace θ_l et θ_2 par leur expression analytique on obtient :

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)} \left(C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c_2} - E(\xi_1^k) \right) + C_{mc_1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c_1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c_2} + \mu_{c_1} - m - \mu_p \right) \right)$$

$$\Rightarrow H \leq \frac{P}{E(T)} \left(C_{mc_1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c_1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c_1} - m - \mu_p \right) \right).$$

Pour: $(C_{mc_1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c_1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) + \mu_{c_1} - m - \mu_p)) \leq 0 \Rightarrow H \leq 0.$

On établit alors la condition (C3) :

$$(C3) : C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p).$$

Finalement, on obtient que sous les conditions (C1), (C2) et (C3) on a $H \leq 0$.

A partir de l'expression de H on établit aussi le lemme suivant :

Fin démonstration

Lemme 2 :

Satisfaisant les conditions (C1), (C2) et (C3) la valeur de H en zéro est nulle ainsi que la limite de H tend vers une constante négative quand Δm tend vers l'infini.

Formellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C1) : E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - \mu_p \leq m \leq E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2}, \\ (C2) : C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \\ (C3) : C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H(0) = 0 \\ \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} H(\Delta m) = \text{cte} \leq 0 \end{array} \right\}$$

Démonstration :

Pour $\Delta m = 0$, on a $P_1 = 0$ et $P_{1/2} = 1$ (voir les expressions des probabilités 2.4.3). En remplaçant ces valeurs de probabilité dans l'expression de H on obtient :

$$H = \frac{\begin{array}{l} +C_p U_{\max}^2 \left(\tilde{P}_{3/0} (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \right) \\ -\tilde{P}_{3/0} C_p U_{\max}^2 (m + \mu_p - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ +C_p U_{\max}^2 (m - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \end{array}}{E(T)} \Rightarrow H = 0$$

D'après les expressions théoriques des probabilités (section 2.4.3), on a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} \tilde{P}_1 = 1 \\ \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} P_{1/2} = 0 \\ \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{3/0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} (H) = \frac{P \left[-\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) + (C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p)) \right]}{E(T)} = \text{cte}$$

$$0 \leq \tilde{P}_2 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\tilde{P}_2 \leq 0$$

$$\text{1}^{\text{ier}} \text{ cas : } (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) = 0$$

$$\text{Pour } (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) = 0 \text{ on obtient :}$$

$$\text{cte} = \frac{P \left[\left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right) \right]}{E(T)}$$

Or d'après la condition (C2) on a :

$$C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{P \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)}{E(T)} \leq 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} H(\Delta m) = \text{cte} \leq 0$$

$$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas}} : \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right) \leq 0$$

$$\left(-1 \leq -\tilde{P}_2 \leq 0 \right) \Rightarrow 0 \leq -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right) \leq -C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p)}{-C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right)} \right) \leq \left(\frac{-\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right)}{\left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)} \right) \leq \left(\frac{-C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right)}{\left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p)}{-C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right)} \right) \leq \left(\frac{-\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right)}{\left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)} \right) \leq \left(\frac{C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p)}{-C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p \right)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{P \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)}{E(T)} \leq \frac{P \left(\frac{-\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right)}{\left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)} \right)}{E(T)} \leq \frac{P \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)}{E(T)}$$

Or d'après la condition (C3) on a :

$$C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{P \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)}{E(T)} \leq 0$$

Or on a :

$$\frac{P \left(\frac{-\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right)}{\left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)} \right)}{E(T)} \leq \frac{P \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \right)}{E(T)}$$

D'où :

$$\frac{P \left(\begin{array}{l} -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ + \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right)}{E(T)} \leq 0$$

Par conséquent : $\lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} H(\Delta m) = \text{cte} \leq 0$

3^{ème} cas : $(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) > 0$

$$\begin{aligned} & \left(-1 \leq -\tilde{P}_2 \leq 0 \right) \Rightarrow -C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \leq -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \leq 0 \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{l} -C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ + \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ + \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right) \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{l} C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ + \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{l} C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right) \\ & \Rightarrow \frac{P \left(\begin{array}{l} C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right)}{E(T)} \leq \frac{P \left(\begin{array}{l} -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ + \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right)}{E(T)} \leq \frac{P \left(\begin{array}{l} C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right)}{E(T)} \end{aligned}$$

Or d'après la condition (C2), on a :

$$C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{P \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \right)}{E(T)} \leq 0$$

Or on a :

$$\frac{P \left(\begin{array}{l} -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 (E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2}) \\ + \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right)}{E(T)} \leq \frac{P \left(\begin{array}{l} C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \\ - C_p U_{\max}^2 (E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p) \end{array} \right)}{E(T)}$$

D'où :

$$P \left[\frac{\begin{aligned} & -\tilde{P}_2 C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) - E(\xi_2^{k'}) - \mu_{c2} \right) \\ & + \left(C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \right) \\ & - C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \end{aligned}}{E(T)} \right] \leq 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} H(\Delta m) = \text{cte} \leq 0$$

On obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(0) = 0 \\ \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} H(\Delta m) = \text{cte} \leq 0 \end{array} \right\}$$

Fin démonstration

Suite aux théorèmes 1 et au lemme 2, on a établi le théorème 2 :

Théorème 2

Satisfaisant les conditions (C1), (C2) et (C3) il existe une période de décalage optimale Δm^* pour la quelle la différence entre les deux politiques en terme de coût partiel moyen intégrant la maintenance et les demandes perdues H est minimale et par conséquent la performance de IMP par rapport à SMP est maximale.

Formellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C1): E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} - \mu_p \leq m \leq E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2}, \\ (C2): C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_2^{k'}) + \mu_{c2} + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \\ (C3): C_{mc1} - C_{mp} + C_p d(\mu_{c1} - \mu_p) \leq C_p U_{\max}^2 \left(E(\xi_1^k) + \mu_{c1} - m - \mu_p \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \Delta m^* / H(\Delta m^*) \text{ est minimale}$$

Démonstration :

D'après le théorème 1 on a :

$H \leq 0$ puisque C1, C2 et C3 sont satisfaites.

D'après le lemme 2 on a :

$$\left\{ H(0) = 0 \text{ et } \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} H(\Delta m) = \text{cte} \leq 0 \right\}.$$

Or:

$$\left\{ \begin{array}{l} H \text{ est une fonction continue dérivable } \forall \Delta m \geq 0 \left(H \in C^1(\mathbb{R}^+) \right) \\ H(0) = 0 \\ H \leq 0 \quad \forall \Delta m \geq 0 \\ \lim_{\Delta m \rightarrow +\infty} H(\Delta m) = \text{cte} \leq 0 \quad \forall \Delta m \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \Delta m^* / H(\Delta m^*) \text{ est minimale}$$

On peut conclure qu'en satisfaisant les trois conditions C1, C2 et C3, il existe un certain décalage Δm^* pour lequel H admet un minimum.

Fin démonstration

2.3.6 Etude numérique de la performance de la politique IMP par rapport à la politique SMP

Suite aux données numériques citées au chapitre 1 (section 1.3.6), pour satisfaire les conditions énoncées au théorème 1, l'âge de la maintenance préventive m doit vérifier les conditions suivantes :

D'après C1, $40 \leq m \leq 60$.

D'après C2, $m \leq 54,7$.

D'après C3, $m \leq 83,3$.

Par conséquent, pour ($40 \leq m \leq 54,7$) la politique de maintenance améliorée IMP est plus économique que la politique de maintenance simple SMP.

On a tracé la courbe de variation de la différence en terme de coût entre les deux politiques (H) en fonction de la période de décalage Δm . On a considéré des âges de maintenance appartenant à l'intervalle établi ($40 \leq m \leq 54,7$). Les figures 2.7, 2.8 et 2.9 représentent les courbes de H en fonction de la période de décalage Δm pour $m=40$, $m=45$ et $m=50$.

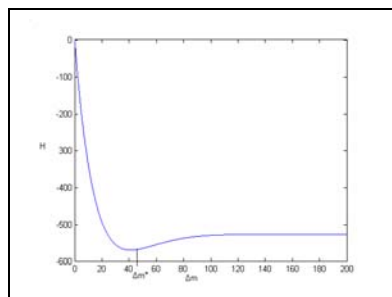


Figure 2.7 : Courbe de $H(\Delta m)$ pour $m=40$

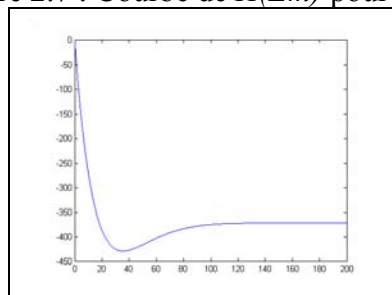


Figure 2.8 : Courbe de $H(\Delta m)$ pour $m=45$

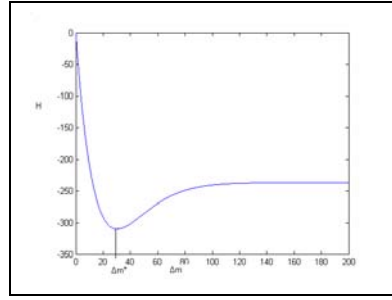


Figure 2.9 : Courbe de $H(\Delta m)$ pour $m=50$

Les courbes obtenues confirment le résultat énoncé au théorème 1. En effet, la différence entre les deux politiques en terme de coût est toujours négative, ce qui confirme que la politique IMP est plus économique que la politique SMP, ainsi que pour un décalage nulle la performance est nulle aussi. Plus la valeur de Δm augmente, plus la valeur de la performance est plus importante. Il existe une valeur optimale Δm^* pour laquelle la performance de la politique IMP par rapport à SMP est maximale. La concavité des courbes obtenues est issue des formes exponentielles exprimées par les probabilités.

On a considéré deux âges de maintenance qui n'appartiennent pas à l'intervalle déterminé précédemment ($40 \leq m \leq 54,7$). On a tracé les courbes de H en fonction du décalage Δm pour les âges de maintenance préventive $m=65$ et $m=90$. (Figures 2.10 et 2.11) :

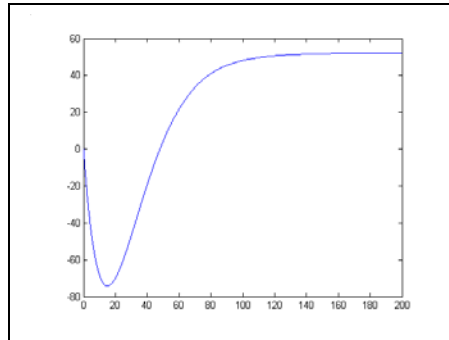


Figure 2.10 : Courbe de $H(\Delta m)$ pour $m=65$

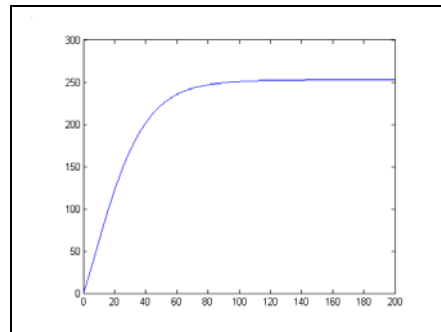


Figure 2.11 : Courbe de $H(\Delta m)$ pour $m=90$

On remarque que pour l'âge de maintenance préventive $m=65$ et à partir d'une certaine valeur de décalage Δm , la différence H entre les coûts partiels des deux politiques

devient positive. Ce qui signifie qu'à partir d'un certain décalage Δm la politique IMP devient moins économique que la politique SMP. Pour un âge de la maintenance préventive de $m=90$ quelque soit le décalage Δm de la politique IMP, la différence H est toujours positive. Par conséquent la politique SMP est plus économique que la politique IMP quelque soit le décalage Δm . A partir de ces courbes, on peut remarquer que la politique IMP est plus économique que la politique SMP $\forall m \in [40, 54.7]$. En dehors de cet intervalle l'économie réalisée par IMP n'est plus garantie. En s'appuyant sur les courbes $m=65$ et $m=90$ ce qui affirme que les conditions C1-C3 du théorème 1 sont suffisantes mais pas nécessaires pour montrer l'efficacité de la politique IMP par rapport à la politique SMP.

2.4 Etude de la différence entre les deux politiques SMP et IMP basée sur la simulation et le design experimental

2.4.1 But de l'étude basée sur la simulation

A cause de la complexité du cycle de production, on a décidé d'établir l'étude théorique sur le domaine où on a une différence entre les deux politiques (Paragraphe 2.4.2). La différence entre les deux politiques était en terme de coût partiel moyen par unité de temps étant donné le domaine partiel d'étude. Afin de généraliser le résultat et d'établir une différence entre les deux politiques en terme de coût total moyen, on a établi une étude basée sur la simulation. Pour cela, on a conçu un modèle de simulation pour déterminer le coût total moyen pour chacune des deux politiques SMP et IMP et pour estimer la performance de la politique IMP par rapport à la politique SMP.

Un modèle analytique représentant le coût total moyen des actions de maintenance et de production de la politique IMP est obtenu en utilisant le design experimental. Les variables de décision sont le décalage Δm et l'âge de maintenance préventive m . Le modèle obtenu est optimisé pour déterminer les valeurs de m^* et Δm^* . La figure 2.12 décrit la méthodologie utilisée pour optimiser la politique IMP.

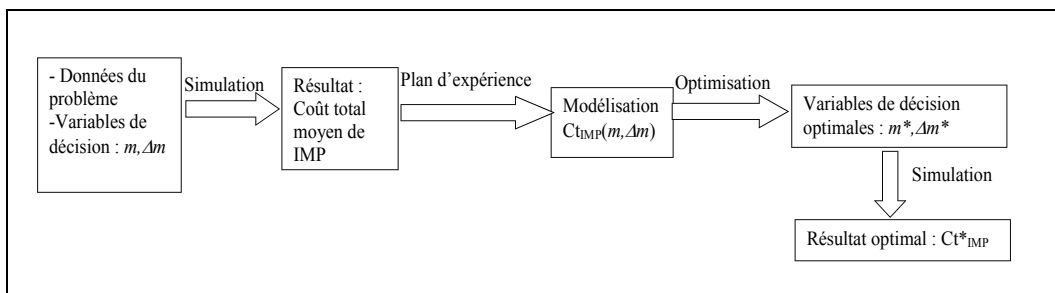


Figure 2.12 : Méthodologie utilisée pour l'optimisation de IMP.

2.4.2 Modèle de simulation :

On a établi un modèle de simulation dans le but de déterminer le coût total moyen intégrant la maintenance et les demandes perdues pour chacune des deux politiques SMP et IMP. On introduit dans notre modèle toutes les données du problème, on fera varier les valeurs des variables de décision et on notera le coût total moyen obtenu.

Suite à l'étude théorique établie précédemment, on a montré que si l'âge de la maintenance préventive m appartient à l'intervalle $[40, 54.7]$ la politique IMP est plus économique que la politique SMP. Suite à ce résultat, on considèrera dans notre étude que l'âge de la maintenance préventive varie entre 40 et 54.7. Δm est une période de décalage par rapport à l'âge de la maintenance préventive initial m , pour cela on considère que le décalage Δm est inférieur ou égal à l'âge de la maintenance préventive m ($\Delta m \leq m$). Le modèle de simulation est présenté dans l'annex.

2.4.3 Choix du plan d'expérience

Pour la modélisation des résultats de la simulation, on a utilisé le design experimental à trois niveaux (-1, 0, 1) et à deux facteurs. Les deux facteurs sont les variables de décision qui sont l'âge de maintenance préventive m et la période de décalage Δm . L'âge de maintenance préventive varie entre 40 et 54.7. La période de décalage Δm est inférieure ou égale à l'âge de maintenance préventive m . On a tracé les courbes du coût total moyen de la politique IMP en fonction de la période de décalage Δm pour différents âges de la maintenance préventive dans l'intervalle déterminé ($m=40, 47, 54$) (voir figure 2.13, 2.14 et 2.15). On a remarqué que le coût total moyen minimal de la politique IMP est obtenu pour une période de décalage Δm inférieure ou égale à 16. Par conséquent, les variables de décisions vérifient : $(m, \Delta m) \in ([40, 54.7], [0, 16])$

Les niveaux de plan d'expériences sont présentés dans le tableau suivant :

	-1	0	1
m	40	47.35	54.7
Δm	0	8	16

Tableau 2.1 : Niveaux du plan d'expériences

Par conséquent :

$$X_m = \frac{1}{7.35}m - \frac{47.35}{7.35} \quad (5) \text{ et } X_{\Delta m} = \frac{1}{8}\Delta m - 1 \quad (6)$$

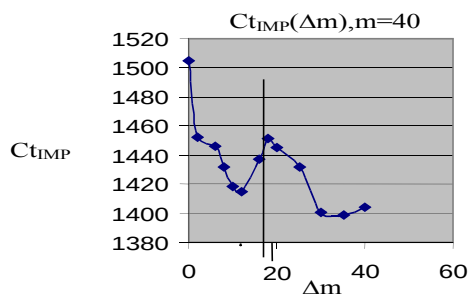


Figure 2.13: Le coût total moyen $Ct_{IMP}(\Delta m)$ pour $m=40$

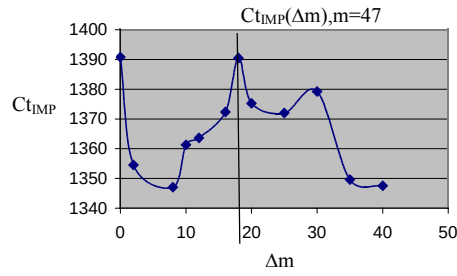


Figure 2.14 : Le coût total moyen $Ct_{IMP}(\Delta m)$ pour $m=47$

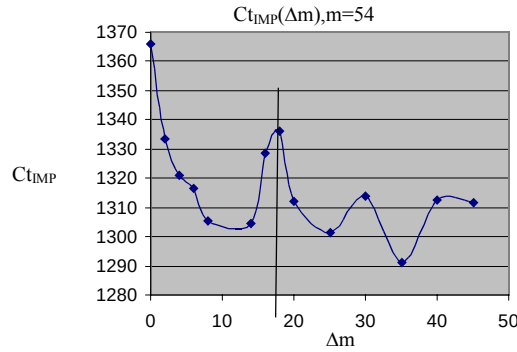


Figure 2.15: Le coût total moyen $Ct_{IMP}(\Delta m)$ pour $m=54$

A partir de ces différentes courbes représentées par les figures 2.13, 2.14 et 2.15, on peut conclure que le modèle analytique du coût total moyen Ct_{IMP} est quadratique. Formellement, le coût total moyen Ct_{IMP} s'écrit sous la forme suivante:

$$Ct_{IMP} = a_0 + a_1 X_m + a_2 X_{\Delta m} + a_3 X_m^2 + a_4 X_{\Delta m}^2 + a_5 X_m X_{\Delta m} \quad (7)$$

Avec :

X_m et $X_{\Delta m}$ sont les variables de décisions de l'âge de la maintenance préventive et du décalage Δm .

Ct_{IMP} : le coût total moyen des actions de maintenance et des demandes perdues pour la politique de maintenance améliorée IMP.

En effectuant la simulation (5 répliques*1000 000ut), on obtient la matrice des essais suivante :

essai	m	Δm	Ct_{IMP}
1	40	0	1504.91
2	40	8	1431.88
3	40	16	1436.98
4	47.35	0	1412.83
5	47.35	8	1372.24
6	47.35	16	1357.28
7	54.7	0	1347.41
8	54.7	8	1298.22

9	54.7	16	1337.42
---	------	----	---------

Tableau 2.2 : Matrice des essais

Par régression multilinéaire on obtient :

$$Ct_{IMP} = 1359.4 - 65.12X_m - 22.24X_{\Delta m} + 12.02X_m^2 + 32.02X_{\Delta m}^2 + 14.48X_mX_{\Delta m} \quad (8)$$

On a étudié l'analyse de la variance des coefficients issus de la régression multilinéaire. On obtient le tableau de l'analyse de la variance suivant :

Coefficients	signification	dl	Significatio n moyenne	F- expérimental	F- théorique	S/N
m	25443.68	1	25443.68	162.56	10.1	S
Δm	2699.04	1	2699.04	18.96	10.1	S
m^2	288.96	1	288.96	1.84	10.1	N
Δm^2	2051.20	1	2051.20	13.10	10.1	S
m. Δm	839.26	1	839.26	5.36	10.1	N
régression	17390397.78	6	2898399.63	18518.58	8.94	GS
résidu	469.54	3	156.51			
Total	17390867.32	9				

R=96.09%

Tableau 2.3 : Analyse de la variance

Les résultats de l'analyse de la variance montrent que les coefficients a_3 et a_5 sont non significatifs. Le modèle mathématique devient :

$$Ct_{IMP} = 1359.4 - 65.12X_m - 22.24X_{\Delta m} + 32.02X_{\Delta m}^2 \quad (9)$$

En utilisant les expressions (5) et (6) on obtient :

$$Ct_{IMP} = 1833.03 - 8.84m - 10.78\Delta m + 0.5\Delta m^2 \quad (10)$$

A partir de l'équation (10), on trace les courbes isoréponses (figures 16.2) :

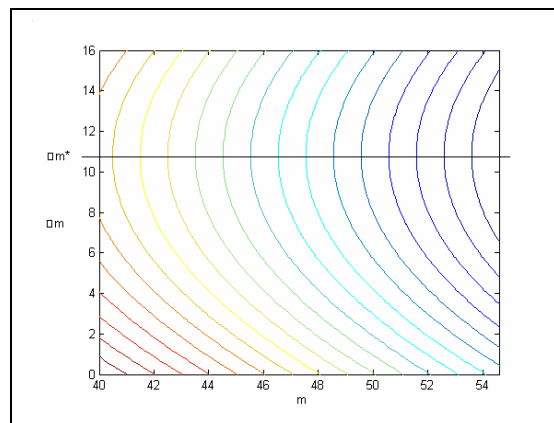


Figure 2.16: Les courbes isoréponses de Ct_{IMP} en fonction de m et Δm

2.4.4 Optimisation de la politique IMP :

En utilisant l'équation (10) :

$$\left. \frac{\partial(Ct_{IMP})}{\partial \Delta m} \right|_{\Delta m^*} = 0 \Rightarrow \Delta m^* = 10.78$$

A partir de l'équation (10), on remarque Ct_{IMP} est décroissante en fonction de l'âge m , par conséquent le coût minimal de la politique IMP est obtenu pour $m=54.7$. Par conséquent : $Ct_{IMP}^* = Ct_{IMP}(m^* = 54.7, \Delta m^* = 10.78) = 1291.37 \text{ um / ut}$.

L'intervalle de confiance du coût total moyen Ct_{IMP} est [1288.9 1362.4] (5 répliques). En effectuant la simulation (5 répliques * 1000 000ut) pour $m^*=54.7$ et $\Delta m^*=10.78$ on obtient : $Ct_{IMP/sim}^* = 1298.16 \text{ um/ut}$

On rappelle que la politique SMP est obtenue en appliquant un décalage nul. Par conséquent en effectuant la simulation (5 répliques * 1000 000ut) pour $m=54.7$ et $\Delta m=0$, on obtient $Ct_{SMP/sim} = 1343.09 \text{ um/ut}$. On désigne par G_{IMP} le pourcentage de gain de la politique de maintenance améliorée IMP par rapport à la politique de maintenance simple SMP :

$$G_{IMP} = \frac{Ct_{SMP/sim} - Ct_{IMP/sim}^*}{Ct_{SMP/sim}} = 3,34\%$$

2.5 Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons défini et comparé deux politiques de maintenance pour un système de production composé d'une seule machine et soumise à une contrainte de sous-traitance. Il s'agit d'une politique de maintenance simple SMP et de la politique de maintenance améliorée IMP. La IMP permet de tenir compte de l'état de la sous-traitance lors de la réalisation des actions de maintenance préventive du système de production. Nous avons prouvé analytiquement le profit réalisé par IMP par rapport à SMP sous certaines conditions qui sont suffisantes mais pas nécessaires. Nous avons également utilisé la simulation pour conforter nos résultats théoriques. Pour cela, nous avons établi un modèle de simulation permettant de déterminer le coût total moyen de maintenance et de demandes perdues pour chacune des deux politiques en utilisant le design experimental. Un modèle analytique a été obtenu par régression multilinéaire pour la politique IMP dont les variables de décision sont m et Δm . Dans ce chapitre on a démontré qu'il existe un âge optimal de maintenance préventive m^* corrélé à un décalage optimal et pour lesquels la performance de IMP par rapport à SMP est maximale en termes de gain en coût.

Dans le prochain chapitre, on se propose d'améliorer l'impact de la politique SMP sur la perte des demandes client par la mise en place d'une politique de maintenance avec prise en compte de l'aspect de la gestion de production à travers la mise en place d'un stock tampon.

Chapitre 3

Description d'une politique intégrant la maintenance et la gestion de production basée sur la construction d'un stock tampon (PMP)

Le présent chapitre développe une nouvelle politique de maintenance intégrée avec la stratégie de gestion des stocks PMP (Production Maintenance Policy) dans l'objectif de réduire les coûts de maintenance et des demandes perdues dans le contexte de la sous-traitance. La politique PMP vise à mettre en place un stock de sécurité pour faire face à un éventuel arrêt de la machine M_1 ou de la sous-traitance. Contrairement à la politique IMP, la politique PMP ne tient pas compte de l'état de la sous-traitance pour réaliser les opérations de maintenance préventive de la machine M_1 . La politique de maintenance de la machine M_1 pour PMP est de type âge.

3.1 Introduction

L'interaction entre les stratégies de maintenance et la politique de commande a déjà fait l'objet de plusieurs travaux que l'on retrouve dans la littérature des quinze dernières années. [CR05] analysent à l'aide d'une approche analytique un système avec une seule machine devant alimenter une ligne d'assemblage à un taux constant. Ils déterminent l'âge optimal pour effectuer une maintenance préventive ainsi que la taille optimale du stock tampon à construire de façon à minimiser le coût total moyen par unité de temps d'exploitation et à garantir simultanément un niveau minimum de disponibilité de la machine considérée. [RCX05] traitent le même problème mais en considérant également une approche de résolution basée sur la simulation et les plans d'expériences. Toujours dans le même contexte, le cas d'une ligne de production en série composée de n machines a été traité par [RXM04]. Une approche hybride basée sur la simulation et les algorithmes génétiques a été proposée pour déterminer de manière optimale les valeurs des variables de décision, à savoir les périodicités des maintenances préventives à effectuer sur chaque machine, ainsi que le niveau du stock de sécurité de la ligne à mettre en place.

En se basant sur ce type de politiques de maintenance proposées pour les approches précédentes présentées, on se propose dans ce chapitre de tester et évaluer l'impact d'une politique de maintenance intégrée avec une stratégie de gestion des stocks notée PMP (Production Maintenance Policy) dans un contexte de sous-traitance. Pour cette politique PMP, du point de vue commande, la machine M_1 et la sous-traitante (machine M_2) ont pour but de construire un stock de sécurité $S(t)$ de niveau h . Du point de vue de la maintenance, les deux machines M_1 et M_2 subissent des actions de maintenance corrective à leurs pannes. Seule la machine M_1 est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge à un certain âge m . L'optimisation de la politique PMP est basée sur la détermination d'un âge de maintenance préventive optimal m^* pour la machine M_1 et d'un niveau de stock optimal h^* qui minimisent le coût total moyen par unité de temps intégrant la maintenance, le stockage et les demandes perdues. Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, on définit la politique PMP ; la section 3 décrit la complexité de la résolution théorique du problème ; dans la section 4 on présente une résolution du problème à l'aide d'une étude basée sur la simulation et le design experimental ; dans la section 5, on évalue la performance de la politique PMP par rapport à la politique SMP et la politique IMP. La conclusion sera présentée dans la section 6.

3.2 Description de la politique de construction de stock de sécurité PMP

3.2.1 Définition

Pour faire face aux flux des demandes, un stock de sécurité $S(t)$ est construit par la machine M_1 et la machine sous-traitante M_2 . Les deux machines produisent à leurs cadences maximales pour construire le stock de sécurité de niveau h . Si le niveau h est atteint les deux machines produisent à la demande.

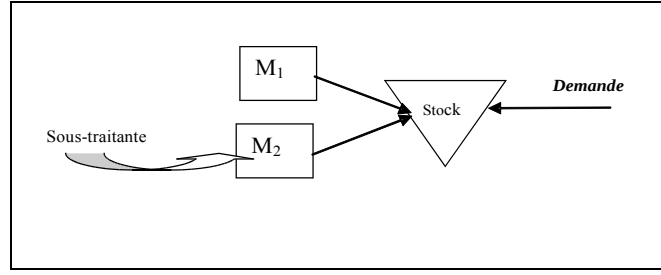


Figure.3.1 : Scénario de production avec la machine M_1 et sa sous-traitante, la machine M_2

3.2.2 Politique de commande

La stratégie de commande adoptée pour la politique PMP est la suivante :

$$U(t) = (U^1(t), U^2(t)) = \begin{cases} (U_{\max}^1, U_{\max}^2) & \text{si } M_1 \text{ est en marche, } M_2 \text{ est en marche et } S(t) < h, \\ (U_{\max}^1, d - U_{\max}^1) & \text{si } M_1 \text{ est en marche, } M_2 \text{ est en marche et } S(t) = h, \\ (0, U_{\max}^2) & \text{si } M_1 \text{ est en panne, } M_2 \text{ est en marche} \\ (U_{\max}^1, 0) & \text{si } M_1 \text{ est en marche, } M_2 \text{ est en panne} \end{cases}$$

Sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} U_{\max}^2 < d \\ U_{\max}^1 < d \\ U_{\max}^1 + U_{\max}^2 > d \end{cases}$$

3.2.3 Politique de maintenance

On rappelle que le taux de panne de la machine M_1 est croissant. Pour réduire le nombre de pannes de la machine M_1 on lui applique des actions de maintenance préventive de type âge. Les actions de maintenance préventive pour la machine M_1 sont effectuées à un âge $m(H_1)$ qui dépend de l'historique H_1 de la machine M_1 . On rappelle aussi que la machine sous-traitante M_2 n'est pas contrôlable de point de vue maintenance par notre système de production et son taux de défaillance est supposé constant. La politique de maintenance adoptée pour la politique PMP est la même que celle adoptée pour la politique de maintenance simple SMP (voir chapitre 2).

Formellement, la politique de maintenance adoptée est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Effectuer les actions de maintenance préventive pour la machine } M_1 \text{ à l'âge } m(H_1) \\ \text{ou} \\ \text{Effectuer les actions de maintenance corrective pour la machine } M_1 \text{ si elle tombe en panne avant l'âge } m(H_1) \left(\xi_1^k \leq m(H_1) \right) \end{array} \right\}$$

3.2.4 Problématique

Pour la politique PMP, on définit un coût total moyen par unité de temps C_{tPMP} , qui intègre le coût de stockage, des demandes perdues et des actions de maintenance de la machine M_1 . Le but souhaité est l'optimisation de ce coût en fonction de l'âge m de la maintenance préventive de la machine M_1 et le niveau maximal h du stock de sécurité. Par conséquent les variables de décision du problème sont l'âge de la maintenance

préventive m et le niveau du stock h . Dans la suite de ce chapitre on se basera sur les données présentées au chapitre 1 (chap 1 paragraphe 1.6.4). On définit une nouvelle variable notée α qui représente le rapport du coût unitaire de pénurie C_p par le coût unitaire de stockage C_s ($\alpha = C_p / C_s$). Le but est d'établir un modèle mathématique exprimant le coût total moyen par unité de temps Ct_{PMP} en fonction des variables de décision m et h . Par la suite on déterminera l'âge optimal de la maintenance préventive m^* et le niveau de stock optimal h^* minimisant Ct_{PMP} .

3.3 Complexité de la résolution théorique du problème

3.3.1 Evolution cyclique du stock

Le comportement du stock de sécurité S est cyclique dans le temps et il comporte plusieurs scénarios possibles. Le comportement cyclique est dû à l'état fiabiliste de la machine M_1 et de sa sous-traitante la machine M_2 . Ainsi, la délimitation temporelle du comportement cyclique du stock est basée sur les deux machines qui sont supposées neuves au début d'un cycle. En d'autres termes, un nouveau cycle ne peut démarrer que si les deux machines M_1 et M_2 ont subi des actions de maintenance. Par conséquent, le comportement cyclique du stock comprend trois phases :

1^{ère} phase : Phase de construction du stock de sécurité

Pendant la première phase, représentée par la figure 3.2, on assiste à la construction du stock de sécurité de niveau h . La construction du stock se fait avec une pente de cadence égale à $U^1_{max} + U^2_{max} - d$.

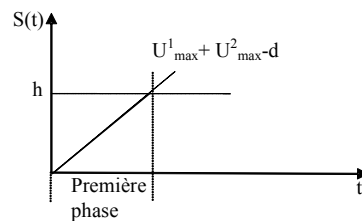


Figure 3.2 : La phase de construction du stock

2^{ème} phase : Phase de production à la demande

Quand le niveau h est atteint les deux machines produisent à la demande. La somme des cadences de production des deux machines sera égale à la demande. La deuxième phase est représentée par la figure 3.3.

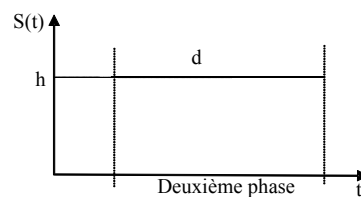


Figure 3.3 : La phase de la production à la demande

3^{ème} phase : Phase de puisement du stock de sécurité

La troisième phase est caractérisée par le puisement de la demande dans le stock de sécurité suite à l'arrêt pour les actions de maintenance de chacune des deux machines (figure 3.4).

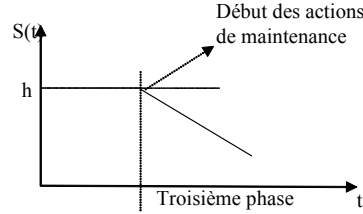


Figure 3.4 : La phase de puisement du stock h

Pendant la troisième phase, on assiste à deux types de scénario. Pour le premier type de scénario, on considère que les deux machines ne s'arrêtent pas simultanément pour leurs actions de maintenance. Pour le deuxième type de scénario, on assiste à un arrêt simultané des deux machines pour des actions de maintenance. D'autre part, à chaque fois que la durée des actions de maintenance dépasse la durée de puisement du stock de sécurité h , on aura des pénuries. Les pénuries peuvent être causées par l'arrêt successif ou l'arrêt simultané des deux machines. Suite à ce constat, pour chaque type de scénarios cités, on distingue deux cas possibles : soit des pénuries pendant les périodes de maintenance des deux machines, soit la fin du cycle sans pénurie est atteinte. Par conséquent, on classe les scénarios de la façon suivante :

	Pas d'arrêt simultané	Arrêt simultané
Sans pénurie	A	B
Avec pénurie	C	D

3.3.2 Description des scénarios possibles

Pour construire le stock de sécurité de niveau h , on suppose que les deux machines M_1 et M_2 ne sont pas arrêtées pour des actions de maintenance avant que le niveau de stock de sécurité h ne soit atteint. En d'autres termes, le risque de panne avant la construction du stock est nul. Formellement, suite à cette hypothèse on a :

$$h \leq (U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d) \times (\min(W_k^{1(c)}, m, W_k^{2(c)})) \quad (1)$$

Avec :

$W_k^{1(c)}$: Le temps de bon fonctionnement de la machine M_1

m : L'âge de la maintenance préventive pour la machine M_1

$W_k^{2(c)}$: Le temps de bon fonctionnement de la machine M_2

$$A_1 = \min(X_k, \xi_k^1)$$

$$X_k = \min(\xi_k^1, m)$$

$$A_2 = \bar{A}_1$$

$D_k^{1(c)}$: La durée d'une action de maintenance corrective pour la machine M_1

$D_k^{1(p)}$: La durée d'une action de maintenance préventive pour la machine M_1

$D_k^{2(c)}$: La durée d'une action de maintenance corrective pour la machine M_2

W_1 : La période de bon fonctionnement de la première machine arrêtée pour les actions de maintenance.

D_1 : La période de maintenance de la première machine arrêtée pour les actions de maintenance.

W_2 : La période de bon fonctionnement de la deuxième machine arrêtée pour les actions de maintenance.

D_2 : La période de maintenance de la deuxième machine arrêtée pour les actions de maintenance.

Scénarios de type A (pas d'arrêt simultané des deux machines et pas de pénuries) :

Dans ce type de scénario les deux machines ne subissent pas les actions de maintenance simultanément. Les périodes d'action de maintenance des deux machines sont séparées. Entre la fin des actions de maintenance de la première machine arrêtée et l'arrêt de la deuxième, les deux machines produisent à leurs cadences maximales afin de reconstruire de nouveau le stock de sécurité h . Suite à ce constat, on assiste à deux cas possibles : soit le niveau du stock de sécurité h peut être atteint de nouveau, soit il ne peut ne pas l'être. Par conséquent, on a deux cas de scénarios :

1^{er} cas : on n'atteint pas le niveau h une deuxième fois (figure 3.5)

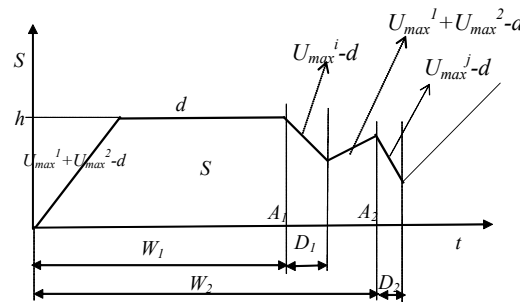


Figure 3.5 : Scénario de type A où on n'atteint pas de nouveau le niveau h

Condition : $(W_2 - W_1 - D_1)(U_{max}^1 + U_{max}^2 - d) \leq (U_{max}^1 - d) D_1$

Pour ce type de scénario, on assiste à 4 sous scénarios possibles qui sont développés en Annexe.

2^{ème} cas : on atteint le niveau h une deuxième fois (figure 3.6)

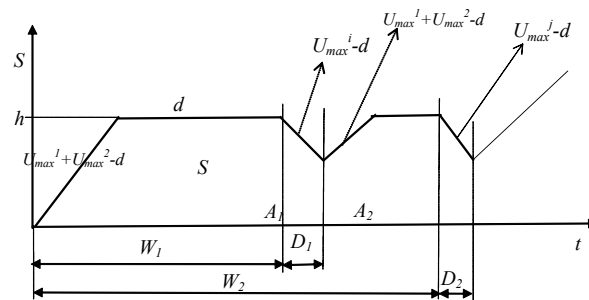


Figure 3.6 : Scénario de type A et on atteint de nouveau le niveau h

Condition : $(W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d) \geq (U_{\max}^1 - d)D_1$

Pour ce type de scénarios, on assiste à 4 sous scénarios possibles qui sont développés en Annexe.

Par conséquent, pour le type de scénario A (Pas d'arrêt simultané et sans pénurie), on a 8 scénarios possibles.

*Scénarios du type B (Arrêt simultané des deux machines sans pénuries) :

Dans ce cas de scénario, pendant la phase de non fonctionnement de la première machine arrêtée pour les actions de maintenance, l'autre machine s'arrête aussi pour des actions de maintenance. (Voir figure 3.7)

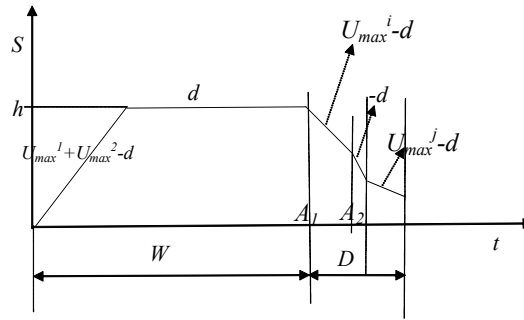


Figure 3.7 : Scénario de type B (Arrêt simultané des deux machines et pas de pénuries)

Avec : $W = \min(W_k^{1(c)}, m, W_k^{2(c)})$

$$D = (\max(W_k^{2(c)} + D_k^{2(c)}, W_k^{1(c)} + D_k^{1(c)}) - W) \times \text{Ind}(X_k = \xi^k) + (\max(W_k^{2(c)} + D_k^{2(c)}, m + D_k^{1(p)}) - W) \times \text{Ind}(X_k = m)$$

Pour ce cas, on assiste à 8 sous scénarios possibles développées en annexe.

Par conséquent, pour le type de scénario B (Arrêt simultané et sans pénurie), on a 8 scénarios possibles.

*Scénarios de type C (Pas d'arrêt simultané des deux machines avec pénuries) :

Pour ce type de scénarios, les périodes d'arrêts pour les actions de maintenance des deux machines sont séparées. Pendant la période qui sépare la fin de la réparation de la première machine arrêtée pour des actions de maintenance et l'arrêt de l'autre machine, les deux machines vont produire à leur cadence maximale afin de reconstruire de nouveau le stock de sécurité h on assiste à deux cas possibles : soit le niveau de stock h est atteint de nouveau soit il ne l'est pas. D'autre part, pour ce type de scénario, on assiste à des pénuries. Les pénuries peuvent être causées uniquement par l'arrêt d'une des deux machines, comme elles peuvent être causées par l'arrêt des deux machines. Suite à ces possibilités, on distingue dans ce type de scénarios (type C) 24 sous scénarios décrits selon les six cas suivant:

1^{ier} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on n'atteint pas h une deuxième fois et des pénuries sont causées par l'arrêt des deux machines (figure 3.8).

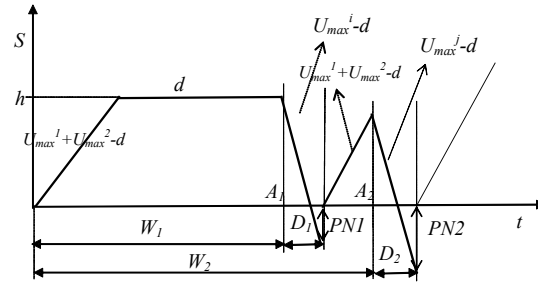


Figure 3.8 : Scénario de type C, Pas d'arrêt simultané, on n'atteint pas h une 2^{ème} fois et des pénuries sont causées par l'arrêt des deux machines

Condition :

$h < D_1 (U_{\max}^1 - d)$
$(W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d) < h$
$\frac{(W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d)}{(U_{\max}^1 - d)} \leq D_2$

Dans ce cas (1^{ier} CAS), on assiste à 4 sous scénarios possibles qui sont développées en annexe.

2^{ième} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on n'atteint pas h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la 2^{ème} machine arrêtée pour les actions de maintenance (figure 3.9) :

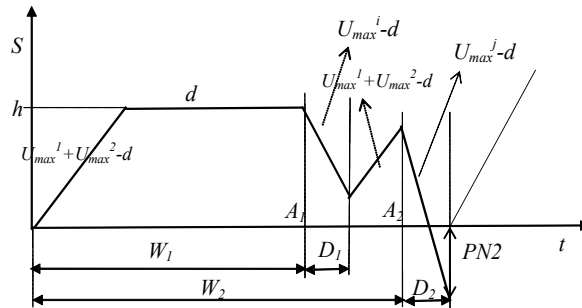


Figure 3.9 : Scénario de type C, Pas d'arrêt simultané, h non atteint une deuxième fois et existence de pénuries par arrêt de la 2^{ième} machine qui subit les actions de maintenance

Conditions:

$h > D_1 (U_{\max}^1 - d)$
$(W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d) < D_1 (U_{\max}^1 - d)$

$$\frac{h - D_1 (U_{\max}^i - d) + (W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d)}{(U_{\max}^j - d)} \leq D_2$$

Dans ce cas (2^{ème} CAS), on assiste à 4 sous scénarios possibles qui sont développées en annexe.

3^{ème} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on n'atteint pas h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la première machine qui doit subir des actions maintenance (figure 3.10)

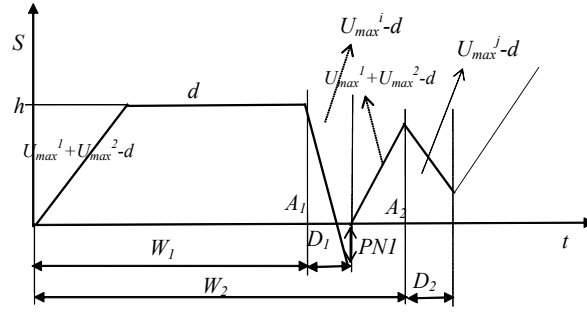


Figure 3.10 : Scénario de type C, pas d'arrêt simultané, h non atteint une 2^{ème} fois, existence de pénuries par arrêt de la 1^{ère} machine qui subit les actions de maintenance

Conditions :

$$\begin{aligned} h &< D_1 (U_{\max}^i - d) \\ (W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d) &< h \\ \frac{(W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d)}{(U_{\max}^j - d)} &> D_2 \end{aligned}$$

Dans ce cas (3^{ème} CAS) on assiste à 4 sous scénarios possibles qui sont développées en annexe.

4^{ème} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on atteint le niveau h une deuxième fois avec des pénuries causées par l'arrêt des deux machines (figure 3.11):

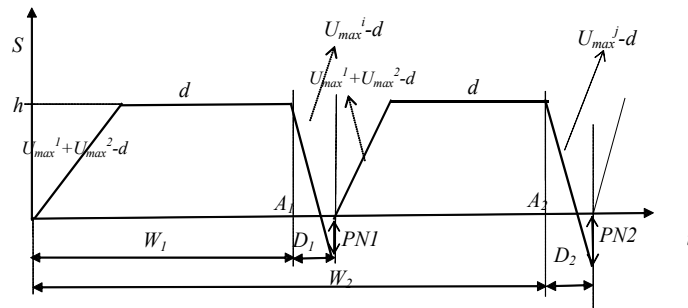


Figure 3.11 : Scénario de type C, pas d'arrêt simultanée niveau h atteint une deuxième fois, existence de pénuries causées par l'arrêt des deux machines

Conditions :

$$\begin{aligned} D_1(U_{\max}^i - d) &> h \\ (W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d) &> h \\ D_2(U_{\max}^j - d) &> h \end{aligned}$$

Pour ce cas (4^{ème} CAS), on a 4 sous scénarios possibles qui sont développées en annexe.

5^{ème} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on atteint le niveau h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la deuxième machine qui subit des actions de maintenance (figure 3.12) :

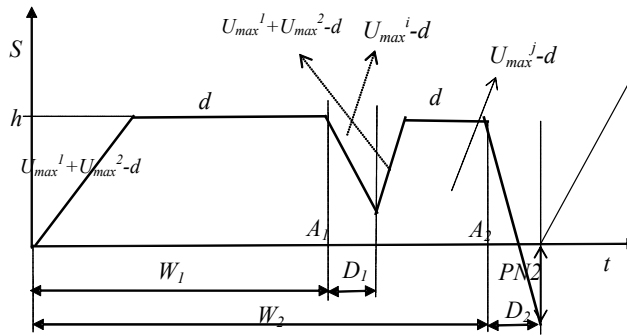


Figure 3.12 : Scénario de type C, pas d'arrêt simultanée des deux machines, niveau h atteint une deuxième fois, existence de pénuries par arrêt de la deuxième machine qui subit les actions de maintenance

Conditions :

$$\begin{aligned} D_1(U_{\max}^i - d) &< h \\ (W_2 - W_1 - D_1)(U_{\max}^1 + U_{\max}^2 - d) &> (U_{\max}^i - d) D_1 \\ D_2(U_{\max}^j - d) &> h \end{aligned}$$

Pour ce cas (5^{ème} CAS) on assiste à 4 sous scénarios possibles qui sont développées en annexe.

6^{ème} CAS: Pas d'arrêt simultané des deux machines, on atteint de nouveau h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la première machine qui subit des actions de maintenance (figure 3.13) :

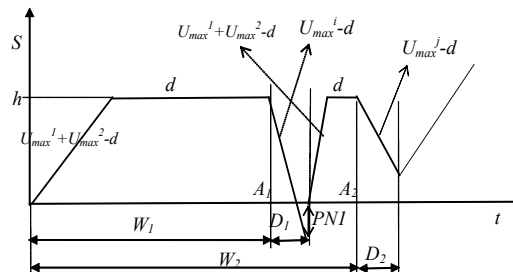


Figure 3.13 : Scénario de type C, pas d'arrêt simultané, h atteint une deuxième fois, existence de pénuries par arrêt de la première machine qui subit les actions de maintenance

Pour ce cas (6^{ième} CAS) on assiste à 4 sous scénarios possibles qui sont développées en annexe.

On conclut que pour le type C des scénarios (pas d'arrêt simultané des deux machines et avec pénurie) on aboutit à 24 scénarios.

*Scénarios du type D (Arrêt simultané des deux machines et avec des pénuries):

Dans ce type de scénario, les périodes de maintenance des deux machines coïncident et provoquent des pénuries. On peut assister à des pénuries soit pendant la phase de maintenance de la première machine arrêtée pour cette cause avant que l'autre machine ne soit aussi arrêtée pour des actions de maintenance, soit après la restauration de l'une des deux machines, soit pendant la phase d'arrêt simultané des deux machines pour des actions de maintenance. Suite à ce constat, pour le type de scénario D, on assiste à 24 sous scénarios possibles classés suivant 3 cas :

1^{ier} Cas: Début des pénuries après la restauration d'une des deux machines arrêtées pour les actions de maintenance (figure 3.14) (8 scénarios possibles).

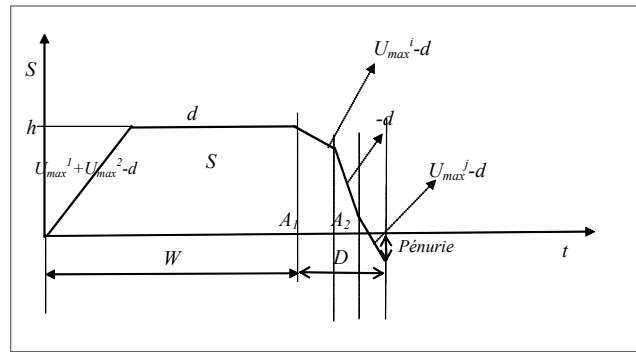


Figure 3.14 : Scénario de type D, début des pénuries après restauration d'une des deux machines arrêtées pour actions de maintenance

Pour ce premier cas, on assiste à 8 sous scénarios possibles qui sont développées en annexe.

2^{ième} Cas : Début des pénuries pendant la phase d'arrêt simultanée des deux machines (figure 3.15) (8 scénarios possibles)

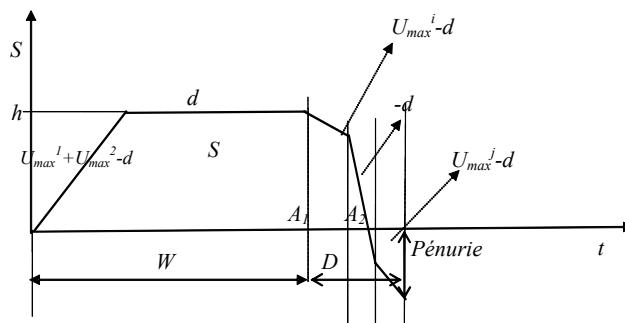


Figure 3.15 : Scénario de type D, début des pénuries pendant la phase d'arrêt pour maintenance simultané des deux machines

Dans ce cas, on assiste à 8 sous scénarios qui sont développées en annexe.

3^{ème} Cas: Début des pénuries pendant la phase de réparation de la première machine arrêtée pour les actions de maintenance et avant que l'autre machine ne soit arrêtée pour les actions maintenance (figure 3.16) (8 scénarios possibles).

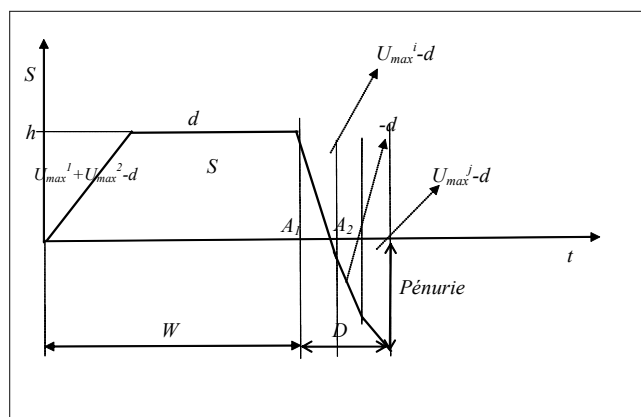


Figure 3.16 : Scénario de type C, début des pénuries pendant la phase de réparation de la première machine arrêtée pour actions de maintenance et avant que la deuxième machine ne soit arrêtée pour les actions maintenance

Pour ce cas, on assiste à 8 sous scénarios qui sont développées en annexe.

Finalement, on a pour le type C de scénario (arrêt simultané des deux machines avec pénurie) 24 scénarios possibles.

Résumé des scénarios :

Type de scénario	Sans pénurie		Avec pénurie	
	Pas d'arrêt simultané	Arrêt simultané	Pas d'arrêt simultané	Arrêt simultané
Nombre de scénarios	8	8	24	24
Total	64			

Tableau 3.1 : Résumé des scénarios possibles

On assiste à 64 scénarios possibles.

3.3.3 Complexité de la résolution théorique

Le coût total moyen par unité de temps Ct_{PMP} de la politique PMP intégrant les coûts de la maintenance de la machine M_1 et de l'inventaire et les coûts des demandes perdues en fonction de l'âge m et du niveau du stock h est donnée par la relation suivante :

$$Ct_{PMP} = \frac{Cmc_1 \times (1 - R_1(m)) + Cmp \times R_1(m) + \delta(h, m)}{E(\text{cycle})} \quad (1)$$

Avec $E(\text{cycle})$ est l'espérance du cycle dont l'expression analytique est la suivante :

$$E(\text{cycle}) = \left(\begin{array}{l} \left(E(W_1^{k(c)}) + \mu_{c1} \right) \left(P(\xi_1^k < m) \times P(W_1^{k(c)} + D_1^{k(c)} > W_2^{k'} + D_2^{k'}) \right) \\ \left(E(W_1^{k(p)}) + \mu_p \right) \left(P(m < \xi_1^k) \times P(W_1^{k(p)} + D_1^{k(p)} > W_2^{k'} + D_2^{k'}) \right) \\ \left(E(W_2^{k'}) + \mu_{c2} \right) \left(P(\xi_1^k < m) \times P(W_2^{k'} + D_2^{k'} > W_1^{k(c)} + D_1^{k(c)}) \right) \\ \left(E(W_2^{k'}) + \mu_{c2} \right) \left(P(m < \xi_1^k) \times P(W_2^{k'} + D_2^{k'} > W_1^{k(p)} + D_1^{k(p)}) \right) \end{array} \right)$$

et:

- Cmc_1 : Le coût d'une action de maintenance corrective pour la machine M_1
- Cmp : Le coût d'une action de maintenance préventive pour la machine M_1
- $R_1(m)$: La fiabilité de la machine M_1 à l'âge m
- $\delta(m, h)$ est le coût de l'inventaire et des demandes perdues dont l'expression analytique est la suivante :

Formellement :

$$\delta(m, h) = \frac{C_p}{\alpha} \times \sum_{i=1}^{N_{sp}} P_{spi} E(S_{spi}) + \sum_{j=1}^{N_{ap}} P_{apj} \left(\left(\frac{C_p}{\alpha} \times E(S_{apj}) \right) + (C_p \times E(dp_{apj})) \right)$$

Avec :

C_p : Le coût unitaire de pénurie

C_s : Le coût unitaire de stockage

α : Le rapport du coût unitaire de pénurie par le coût unitaire de stockage : $\alpha = C_p / C_s$

N_{sp} : Nombre de scénarios possibles pour un cycle sans pénurie

N_{ap} : Nombre de scénarios possibles pour un cycle avec pénurie

P_{spi} : La probabilité de chaque scénario sans pénurie, $i \in \{1, 2, \dots, N_{sp}\}$

P_{apj} : La probabilité de chaque scénario avec pénurie, $j \in \{1, 2, \dots, N_{ap}\}$

S_{spi} : L'aire de la surface relatif au stock pour chaque scénario sans pénurie, $i \in \{1, 2, \dots, N_{sp}\}$

$E(S_{spi})$: La valeur moyenne de l'aire de la surface relatif au stock pour chaque scénario sans pénurie, $i \in \{1, 2, \dots, N_{sp}\}$

S_{apj} : L'aire de la surface relatif au stock pour chaque scénario avec pénurie, $j \in \{1, 2, \dots, N_{ap}\}$

$E(S_{apj})$: La valeur moyenne de l'aire de la surface relatif au stock pour chaque scénario avec pénurie, $j \in \{1, 2, \dots, N_{ap}\}$

dp_{apj} : La quantité des demandes perdues pour chaque scénario avec pénurie, $j \in \{1, 2, \dots, N_{ap}\}$

$E(dp_{apj})$: La valeur moyenne de la quantité des demandes perdues pour chaque scénario avec pénurie, $j \in \{1, 2, \dots, N_{ap}\}$

La résolution théorique du problème consiste à optimiser l'expression du coût total moyen par unité de temps Ct_{PMP} de la politique PMP afin de déterminer les variables de décision optimales m^* et h^* . A partir de l'expression de Ct_{PMP} établie (1), on est

contraint d'étudier les probabilités, les aires relatives au stockage et les demandes perdues pour les 64 scénarios établis au paragraphe 3.2. On note aussi qu'à la fin du cycle, on a supposé que les deux machines sont neuves, alors que dans tous les scénarios étudiés, on a vu qu'une des deux machines est restaurée avant l'autre. Par conséquent, la machine rétablie en premier reprend son fonctionnement avant la fin du cycle, par conséquent cette dernière ne sera plus neuve au début du cycle suivant. D'autre part, on a supposé que les deux machines ne sont pas arrêtées pour des actions de maintenance avant la construction du stock de niveau h (condition (1), paragraphe (2.2)), alors que cette condition n'est pas toujours vérifiée en réalité. Vu toutes ces hypothèses ainsi que l'étude de 64 différents scénarios, il est difficile de résoudre le problème analytiquement. Pour toutes ces raisons on a opté pour la simulation.

3.4 Etude basée sur la simulation et le design experimental

3.4.1 But de l'étude basée sur la simulation

On a présenté au paragraphe 3.3.3 la difficulté de résolution analytique du problème, par conséquent, on a opté pour une étude basée sur la simulation et le design experimental. On a développé un modèle de simulation dont l'algorithme est décrit ci-après pour calculer le coût total moyen par unité de temps de la politique PMP.

A l'aide des plans d'expériences, on a modélisé le résultat obtenu par la simulation afin d'obtenir un modèle mathématique exprimant le coût total moyen par unité de temps Ct_{PMP} de la politique PMP en fonction des variables de décision qui sont l'âge de la maintenance préventive m et le niveau de stock maximal h . En optimisant le modèle mathématique obtenu, on a alors déterminé l'âge de maintenance préventive optimal m^* et le niveau de stock optimal h^* minimisant Ct_{PMP} . La figure 3.17 décrit les étapes de la démarche de résolution utilisée pour la détermination de m^* et h^* .

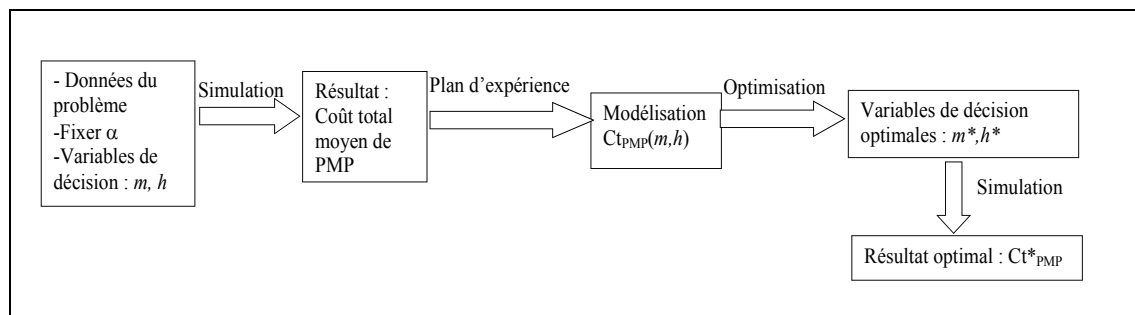


Figure 3.17 : Méthodologie utilisée pour optimiser la politique PMP

3.4.2 Modèle de simulation :

Le modèle de simulation établi permet de calculer le coût total moyen intégrant les coûts de maintenance, les coûts de l'inventaire et les coûts des demandes perdues pour la politique PMP. On introduit dans le modèle toutes les données du problème et la valeur de α . On fait varier les valeurs des variables de décision (m, h) et on obtient le coût total moyen par unité de temps. L'algorithme de simulation est présenté dans l'annexe.

3.4.3 Choix du plan d'expériences

Afin de comparer les politiques PMP et IMP, on a respecté le théorème 1 du chapitre 2. Ceci impose que l'âge de la maintenance préventive m pour la machine M_1 doit appartenir à l'intervalle $[40, 54.7]$. On rappelle que le but de la politique PMP est de construire un stock de sécurité pour faire face au flux des demandes, par conséquent diminuer les demandes perdues. Suite à ce constat, on fait varier l'âge de la maintenance préventive entre 40 et 54.7. Pour différents âges de maintenance préventive fixés dans l'intervalle $[40, 54.7]$, on a tracé les courbes du coût total moyen par unité de temps de PMP obtenu par la simulation en fonction du niveau de stock h . A partir de ces courbes, le coût total moyen par unité de temps minimal de la politique PMP est obtenu pour des niveaux de stock entre 5 et 19 (voir figures 3.18, 3.19 et 3.20). Si la valeur α ($\alpha = C_p / C_s$) est très élevée, le coût relié au stockage sera très faible par rapport au coût des demandes perdues, par conséquent, les courbes du coût total de la politique PMP en fonction du niveau de stock h seront strictement décroissantes. Dans le cas contraire, α très faible, les courbes du coût total de la politique PMP en fonction de h seront strictement croissantes. En se basant sur ce résultat, on a déterminé un intervalle de valeurs de α pour lesquelles les courbes du coût total en fonction du niveau de stock h sont convexes. L'intervalle obtenu est $[500, 1500]$. On considère dans la suite que $\alpha = 1500$. Le plan d'expériences utilisé est de trois niveaux et présenté par le tableau 3.2 :

	-1	0	1
m	40	47.35	54.7
h	5	12	19

Tableau 3.2 : Les niveaux du plan d'expériences.

Avec $\alpha = 1500$

Par conséquent, on établit l'expression des indices codés :

$$X_m = \frac{1}{7.35}m - \frac{47.35}{7.35} \quad \text{et} \quad X_h = \frac{1}{2}h - \frac{5}{2} \quad (2)$$

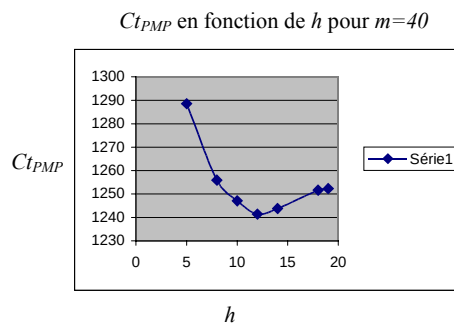


Figure 3.18 : Coût total moyen de PMP en fonction du niveau de stock h pour $m=40$.

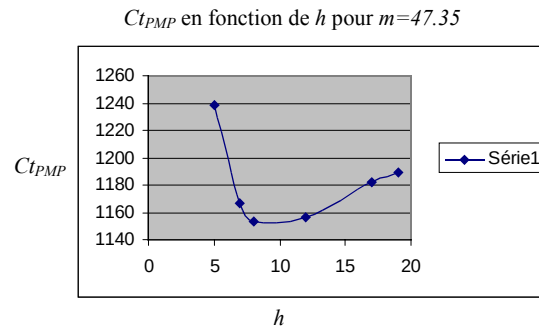


Figure 3.19 : Coût total moyen de PMP en fonction du niveau de stock h pour $m=47.35$.

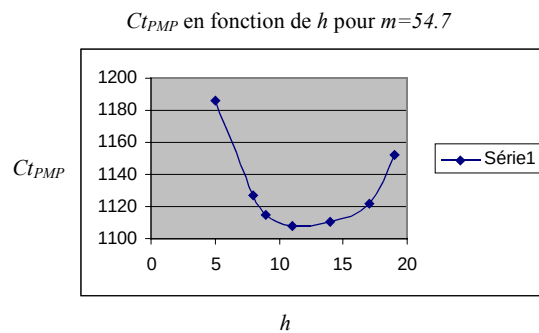


Figure 3.20 : Coût total moyen de PMP en fonction du niveau de stock h pour $m=54.7$.

3.4.4 Etablissement du modèle mathématique

En effectuant une simulation de (1000000ut*5répliques), on obtient la matrice des essais suivante :

essai	m	h	Ct_{IMP}
1	40	5	1288.60
2	40	12	1241.43
3	40	19	1252.30
4	47.35	5	1238.78
5	47.35	12	1156.15
6	47.35	19	1188.73
7	54.7	5	1185.89
8	54.7	12	1123.07
9	54.7	19	1152.55

Tableau 3.3 : Matrice des essais.

Par régression multilinéaire on a exprimé le coût total moyen par unité de temps Ct_{PMP} de la politique PMP en fonction des indices codés on obtient :

$$Ct_{PMP/sim} = 1165.04 - 53.47X_m - 19.94X_h + 12.75X_m^2 + 42.25X_h^2 + 0.74X_mX_h \quad (3)$$

On a étudié l'analyse de la variance des coefficients (Snedecor) issus de la régression multilinéaire. On a obtenu le tableau de l'analyse de la variance suivant :

Coefficient s	signification	dl	Significatio n moyenne	F- expérimental (Snedecor)	F- théorique	S/N
m	17154.24	1	17154.24	145.6	10.1	S
h	2387.61	1	2387.61	20.27	10.1	S
m ²	325.29	1	325.29	2.76	10.1	N
h ²	3917.60	1	3917.60	33.26	10.1	S
m.h	2.19	1	2.19	0.01	10.1	N
régression	13049870.9 7	6	2174978.49	18471.15	8.94	GS
résidu	353.26	3	117.75			
Total	13050224.2 3	9				

R =96.09%

Tableau 3.4 : Analyse de la variance.

Les résultats de l'analyse de la variance montrent que les coefficients a_3 et a_5 sont non significatifs. Le modèle mathématique devient :

$$Ct_{PMP/sim} = 1165.04 - 53.47X_m - 19.94X_h + 42.25X_h^2 \quad (4)$$

En décodant les indices on obtient le coût total moyen de la politique PMP en fonction de l'âge de la maintenance préventive m et le niveau de stock maximale h :

$$Ct_{PMP/sim} = 1673.62 - 7.27m + 0.9h^2 - 24.51h \quad (5)$$

Les courbes isoréponses sont données par la figures 3.21

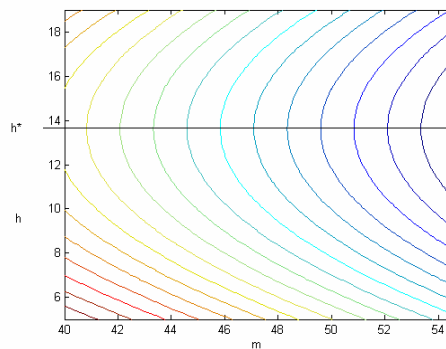


Figure 3.21: Les courbes isoréponses de Ct_{PMP} en fonction de m et h .

3.4.5 Optimisation

On minimise le coût total moyen de la politique PMP :

$$\left. \frac{\partial (Ct_{PMP})}{\partial h} \right|_{h^*} = 0 \Rightarrow h^* = 13.61$$

A partir de l'équation (5), on remarque que le coût de la politique PMP est décroissant en fonction de l'âge m , par conséquent le coût minimal est obtenu pour $m=54.7$. Par conséquent, le coût total moyen optimal de la politique PMP est obtenu pour $(m^*, h^*) = (54.7, 13.61)$ et $Ct_{PMP}(m^* = 54.7, h = 13.61) = 1109.07 \text{ um / ut}$

L'intervalle de confiance de coût total moyen est $[1103.96, 1116.62]$ (5 répliques). En effectuant la simulation avec les variables de décisions optimales on obtient :

$$Ct_{PMP/sim}((m^*, h^*, \alpha) = (54.7, 13.61, 1500)) = 1115.34 \text{ um/ut}$$

3.5 Analyse de la performance de la politique PMP par rapport aux politiques SMP et IMP

3.5.1 Performance de la politique PMP par rapport à la politique SMP

On rappelle que le coût total moyen par unité de temps de la politique SMP est $Ct_{SMP}((m = 54.7)) = 1343.09 \text{ um/ut}$. Par conséquent le gain optimal de la politique PMP par rapport à la politique SMP est défini par : $G^*(PMP/SMP) = 16.95\%$

Remarque :

Le coût total moyen par unité de temps optimal de la politique PMP $Ct_{PMP/sim}^*$ et le gain optimal par rapport à la politique SMP $G^*(PMP/SMP)$ sont obtenus pour un rapport α de l'ordre de 1500. Si le coefficient α diminue, le coût unitaire de stockage augmente et par conséquent le coût total moyen par unité de temps de la politique PMP augmente, par la suite le gain de la politique PMP par rapport à la politique SMP décroît vers 0. A partir d'une valeur seuil $\alpha_{seuil} = 316.45$, la politique SMP devient plus économique que la politique PMP. La valeur α_{seuil} est obtenue en variant la valeur initiale α et en comparant le coût total moyen par unité de temps de la politique PMP avec celui de la politique SMP tout en adoptant les variables de décisions optimales trouvées m^* et h^* . Le gain $G(PMP/SMP)$ évolue de la façon suivante :

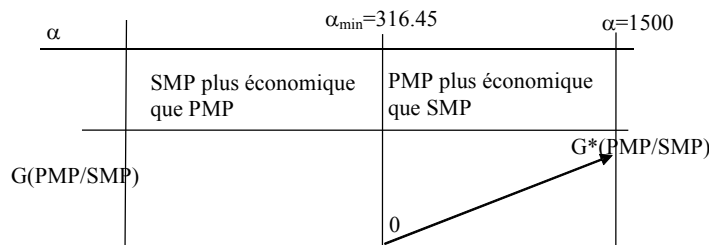


Figure 3.22 : Variation du gain de la politique PMP par rapport à la politique SMP en fonction de α .

3.5.2 Performance de la politique PMP par rapport à la politique IMP

On rappelle que le coût total moyen par unité de temps optimal de la politique IMP est $Ct^*_{IMP/sim} ((m^*, \Delta m^*) = (54.7, 10.78)) = 1298.16 \text{ um/ut.}$ Par conséquent, le gain de la politique PMP par rapport à la politique IMP est défini par : $G^*(PMP/IMP) = 14.08\%$

Remarque :

Le coût total moyen par unité de temps optimal pour la politique PMP $Ct^*_{PMP/sim}$ et le gain optimal par rapport à la politique IMP $G^*(PMP/IMP)$ sont obtenus pour un rapport α de l'ordre de 1500. Si le coefficient α diminue, le coût unitaire de stockage augmente et par conséquent le coût total moyen de la politique PMP augmente, par la suite le gain de la politique PMP par rapport à la politique IMP décroît vers 0. A partir d'une valeur seuil $\alpha_{seuil} = 342.46$ la politique IMP devient plus économique que la politique PMP. La valeur α_{seuil} est obtenue en variant la valeurs initiale α et en comparant le coût total moyen par unité de temps de la politique PMP avec celui de la politique IMP tout en adoptant les variables de décisions optimale trouvées m^* et h^* . Le gain $G(PMP/IMP)$ évolue de la façon suivante :

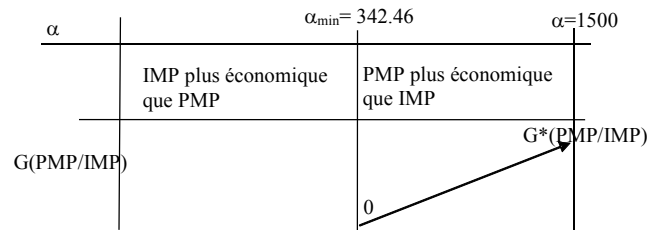


Figure 3.23 : Variation du gain de la politique PMP par rapport à la politique IMP en fonction de α .

3.6 Conclusion

Dans le but de minimiser les coûts de la maintenance, de stockage et de la perte des demandes, on a défini dans ce chapitre une nouvelle politique, Production Maintenance Policy, notée PMP. Cette politique est basée sur la construction d'un stock de sécurité de niveau h pour faire face au flux des demandes pendant les périodes d'arrêt pour la maintenance de la machine M_1 et de sa sous-traitante la machine M_2 . La politique de maintenance adoptée est similaire à celle de la politique SMP, la machine M_1 subit des actions de maintenance corrective suite aux pannes et elle est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge. Les actions de maintenance préventive sont appliquées à un certain âge m . La machine sous-traitante M_2 n'est pas contrôlable d'un point de vue de la maintenance. Son arrêt engendre la perte d'un certain nombre de demandes. Le but de ce chapitre est de déterminer l'âge de maintenance préventive optimal m^* et le niveau de stock optimal h^* pour avoir un coût total moyen par unité de temps minimal de la politique PMP. Pour établir le coût total moyen par unité de temps de la politique PMP, on a introduit un nouveau coefficient notée α représentant le rapport du coût unitaire de pénurie par le coût unitaire de stockage $\alpha = Cp/Cs$. On a montré dans ce chapitre la difficulté d'obtenir un modèle analytique de Ct_{PMP} suite aux nombres importants de scénarios et leurs complexités. Pour cela on a résout le

problème par une étude basée sur la simulation en développant un modèle de simulation. A l'aide des plans d'expériences on a modélisé le résultat de la simulation. On a établi un modèle mathématique exprimant le coût total moyen de la politique PMP en fonction des variables de décisions m et h . En optimisant le modèle établi, on a conclut qu'en effectuant les actions de maintenance préventive pour la machine M_1 à un âge optimal m^* et limitant la capacité du stock de sécurité à un niveau h^* on obtient un coût total moyen minimal. Par conséquent on obtient un gain maximal de la politique PMP par rapport à la politique SMP. Ce résultat est obtenu pour un coefficient α ($\alpha = C_p / C_s$) fixé. Si le coefficient α diminue, le coût unitaire de stockage augmente et par conséquent le coût total moyen de la politique PMP augmente, par la suite le gain de la politique PMP par rapport à la politique SMP décroît vers 0. En effet en dessous d'une valeur seuil α_{seuil} la politique PMP devient moins économique que la politique SMP. On conclut donc que c'est plus économique d'adopter la politique de construction de stock PMP avec des variables de décisions optimales m^* et h^* sous la condition d'avoir un rapport α strictement supérieur à la valeur seuil α_{seuil} .

A partir des deux politiques IMP et PMP développées dans les chapitres 2 et 3, on a obtenu une amélioration en terme de coût par rapport à SMP. Suite à ce résultat, on se propose dans le prochain chapitre le développement de nouvelles politiques par des combinaisons des politiques IMP et SMP.

Chapitre 4

Développement de politiques de maintenance et de production par combinaison des politiques IMP et PMP

Dans ce chapitre, nous développons trois types de politiques issues d'une intégration des politiques PMP et IMP. La première politique IPMP (Improved Production Maintenance Policy) consiste à intégrer la politique PMP pour la construction du stock de sécurité avec la politique IMP pour le décalage de l'âge de maintenance préventive. Les deux autres politiques $IPMP^{\cap}$ (IPMP selon une logique ET) et $IPMP^{\cup}$ (IPMP selon une logique OU) sont issues d'une intégration corrélée de PMP et IMP selon deux logiques ET ($\cap$) et OU ($\cup$). Une analyse de performances de ces différentes politiques est réalisée. Nous avons montré en nous basant sur la simulation et le design experimental que la politique $IPMP^{\cup}$ est la plus économique selon les conditions du théorème 1.

4.1 Introduction

Au cours des deux précédents chapitres, nous avons développé deux politiques de maintenance IMP et PMP dans le but de réduire le coût total moyen de maintenance et de demandes perdues. Ces deux politiques ont fait l'objet de deux stratégies différentes. La première politique IMP présente une stratégie de décalage de l'âge de la maintenance préventive de la machine M_1 sous certaines conditions. La deuxième politique PMP consiste à construire un stock de sécurité de capacité h . Les deux politiques ont pour but la réduction du coût total moyen par unité de temps de la maintenance, de l'inventaire et des demandes perdues. Ces deux politiques ont été testées et optimisées suite à l'étude de leurs performances par rapport à la politique de maintenance simple Simple Maintenance Policy SMP. Dans ce chapitre on a combiné les deux politique IMP et PMP afin d'obtenir une politique plus économique. En premier lieu on a défini une politique Improved Production Maintenance Policy notée IPMP qui consiste à intégrer les deux politiques IMP et PMP. Cela revient à appliquer les deux politiques en même temps sans que l'une dépende de l'autre. Par la suite on a établi deux politiques $IPMP^{\cup}$ et $IPMP^{\cap}$. Contrairement à la politique IPMP les deux politiques $IPMP^{\cup}$ et $IPMP^{\cap}$ présentent une intégration dépendante des deux politiques IMP et PMP. En effet dans ces deux politiques $IPMP^{\cup}$ et $IPMP^{\cap}$, la stratégie de décalage dépendra de la stratégie de construction du stock de sécurité. Ce qui explique l'intégration dépendante des deux politiques IMP et PMP. Les trois politiques IPMP, $IPMP^{\cap}$ et $IPMP^{\cup}$ sont optimisées suite à une étude basée sur la simulation tout en utilisant le résultat du théorème 1 établi dans le chapitre 2. Par la suite on a classé toutes les politiques suivant leur degré de performance par rapport à la politique de maintenance simple SMP. Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, on présente la problématique. Dans les sections 3, 4 et 5, on étudie respectivement les politiques IPMP, $IPMP^{\cup}$ et $IPMP^{\cap}$. Dans la section 6 on interprète les performances des politiques développées par rapport à la politique de maintenance simple SMP. On conclut dans la section 7.

4.1 Motivation

Toujours dans le contexte de la réduction des demandes perdues et des coûts de maintenance, on a intégré les deux politiques IMP et PMP présentées dans les chapitres précédents. Suite à l'intégration de ces deux politiques, la réduction des demandes perdues est obtenue grâce à deux différentes stratégies qui sont le décalage de l'âge de la maintenance préventive de la machine M_1 et la construction d'un stock de sécurité. En se basant sur les avantages des politiques IMP et PMP, on intègre les politiques IMP et PMP de trois façons différentes. Par conséquent, on a obtenu trois politiques IPMP, $IPMP^{\cup}$ et $IPMP^{\cap}$ qui seront détaillées respectivement dans les sections suivantes.

4.2 Etude de la politique IPMP

4.2.1 Définition

Cette politique consiste à intégrer les deux politiques IMP et PMP indépendamment. En d'autres termes, on va appliquer les deux politiques IMP et PMP chacune à part. Par

conséquent, du point de vue de la commande, la machine M_1 et sa sous-traitante la machine M_2 produisent chacune à sa cadence maximale afin de construire un stock de sécurité de niveau h . Quand le niveau h est atteint, la machine M_1 continue à produire à sa cadence maximale mais la sous-traitante, la machine M_2 rattrape juste le reste de la demande. Pendant les phases de maintenance des deux machines, la demande sera puisée dans le stock de sécurité construit. Formellement, la politique de commande adoptée est la suivante :

$$U(t) = (U^1(t), U^2(t)) = \begin{cases} (U_{\max}^1, U_{\max}^2) & \text{si } M_1 \text{ en marche, } M_2 \text{ en marche et } S(t) < h, \\ (U_{\max}^1, d - U_{\max}^1) & \text{si } M_1 \text{ en marche, } M_2 \text{ en marche et } S(t) = h, \\ (0, U_{\max}^2) & \text{si } M_1 \text{ en panne, } M_2 \text{ en marche} \\ (U_{\max}^1, 0) & \text{si } M_1 \text{ en marche, } M_2 \text{ panne} \end{cases}$$

Sous les mêmes contraintes énoncées dans les chapitres précédents :

$$\begin{aligned} U_{\max}^2 &< d \\ U_{\max}^1 &< d \\ U_{\max}^1 + U_{\max}^2 &> d \end{aligned}$$

Seule la machine M_1 subit des actions de maintenance préventive à un certain âge m . En appliquant le principe de la politique IMP, l'âge de maintenance préventive m de la machine M_1 sera décalé de Δm s'il coïncide avec la période de réparation de la sous-traitante la machine M_2 . Par conséquent, la politique de maintenance adoptée dans ce cas est la suivante :

$$\delta_{m'} = \begin{cases} \text{Effectuer les actions de maintenance préventive pour la machine } M_1 \text{ à l'âge } m' \\ \text{ou} \\ \text{Effectuer les actions de maintenance corrective pour la machine } M_1 \text{ si elle tombe en panne avant l'âge } m' \left(\xi_1^k \leq m' \right) \end{cases}$$

Avec:

$$m' = \begin{cases} m & \text{si } m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[\\ m + \Delta m & \text{si } m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}[. \end{cases}$$

On remarque que pour la politique IPMP, on a adopté la politique de commande de la politique PMP et la politique de maintenance de la politique IMP. Ce qui confirme l'intégration indépendante des deux politiques IMP et PMP.

4.2.2 Objectif de la politique IPMP

Dans la politique IPMP, on a adopté deux stratégies dans le but de réduire les coûts de maintenance et des demandes perdues. La première stratégie consiste à décaler de Δm l'âge de la maintenance préventive m de la machine M_1 , si ce dernier coïncide avec la période de réparation de la sous-traitante, la machine M_2 . Ce décalage est opéré dans le but de prolonger la période de production de la machine M_1 quand la sous-traitante est en panne pour éviter la perte totale de la demande. La deuxième stratégie consiste à

construire un stock de sécurité de niveau h pour faire face au flux de la demande pendant les périodes de maintenance des deux machines.

4.2.3 Etude de la performance de la politique IPMP en utilisant la simulation

4.3.3.1 But de l'étude de simulation

La politique IPMP consiste en la construction d'un stock de sécurité de niveau h . Pour étudier théoriquement la performance de la politique IPMP par rapport aux politiques précédentes, on sera contraint d'étudier 64 scénarios détaillés dans le paragraphe 3.3.2. Par conséquent, c'est difficile d'étudier la performance de la politique IPMP analytiquement. Suite à ce constat, on a opté pour la simulation afin d'étudier la performance de la politique IPMP. La politique IPMP est une intégration des deux politiques IMP et PMP, par la suite les variables de décision adoptées pour la politiques IPMP sont celles des deux politiques IMP et PMP. Par conséquent les variables de décisions de la politique IPMP sont l'âge de la maintenance préventive m de la machine M_1 , la période de décalage Δm et le niveau du stock h .

4.3.3.2 Modèle de simulation

On établit un modèle de simulation, dont l'algorithme est donné à la fin de ce chapitre, qui permet de calculer le coût total moyen par unité de temps intégrant la maintenance, l'inventaire et les demandes perdues pour la politique IPMP. On introduit dans le modèle toutes les données du problème et la valeur du coefficient $\alpha = C_p/C_s$. Pour la valeur de α , on a choisi la même valeur adoptée dans le chapitre 3 pour pouvoir comparer la politique IPMP avec la politique PMP du chapitre précédent. On a fixé alors α à 1500. On a fait varier les valeurs des variables de décision (m , Δm , h) et on a relevé le coût total moyen par unité de temps pour la politique IPMP.

La figure 4.1 décrit les étapes de la démarche de résolution utilisée pour optimiser IPMP.

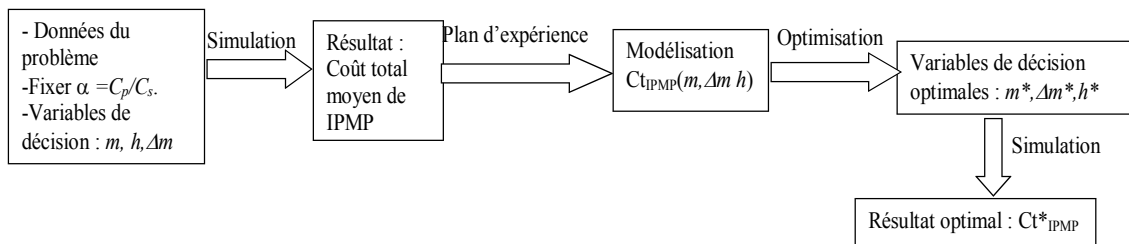


Figure 4.1 : Méthodologie utilisée pour optimiser la politique IPMP.

4.3.3.3 Choix du plan d'expériences

Pour cette étude, on a trois variables de décisions. On a adopté un plan d'expériences à trois niveaux $(-1, 0, 1)$ et trois facteurs représentant l'âge de la maintenance préventive m , le décalage Δm et le niveau de stock h .

Remarque 1 :

Dans le chapitre 2, on a établi d'après le théorème 1 que l'intervalle d'âge de maintenance préventive pour lequel on peut réduire les demandes perdues quelque soit la période de décalage Δm . L'intervalle obtenu était $[40, 54.7]$. Suite à ce constat, on a varié l'âge de la maintenance préventive m dans cet intervalle. D'autre part, la période de décalage Δm est appliquée à l'âge initial de maintenance préventive m . Par conséquent, on a considéré que le décalage Δm est inférieur à l'âge de maintenance préventive m ($\Delta m \leq m$).

Pour déterminer les niveaux réels de chacune des trois variables de décision, on a fixé deux variables parmi les trois et on a tracé la courbe du coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP en fonction de la troisième variable non fixée. Par la suite, on a estimé l'intervalle dans lequel appartient le coût total moyen minimal par unité de temps de la politique IPMP. En effet, la détermination des niveaux réels se fait en trois étapes :

1^{ère} étape :

On a fixé l'âge de maintenance préventive m et la période de décalage Δm et on a tracé les courbes du coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP en fonction du niveau de stock maximal h . L'âge de maintenance préventive m et la période de décalage Δm fixés satisferont le résultat énoncé dans la remarque précédente ($m \in [40, 54, 7]$ et $\Delta m \leq m$). A partir des courbes, on a noté que le coût total moyen minimal par unité de temps de la politique IPMP est établi pour $h \in [5, 19]$. Par conséquent, les niveaux réels du stock de sécurité h sont 5 pour le niveau -1, 12 pour le niveau 0 et 19 pour le niveau 1.

2^{ème} étape :

On a fixé l'âge de la maintenance préventive m et le niveau du stock h et on a tracé les courbes du coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP en fonction de la période de décalage Δm . L'âge de maintenance préventive m fixé satisfait le résultat de la remarque précédente ($m \in [40, 54, 7]$). Quand au niveau du stock de sécurité h fixé, il vérifie le résultat de la première étape ($h \in [5, 19]$). A partir des courbes tracées, on a noté que le coût total moyen minimal par unité de temps de la politique IPMP appartient à l'intervalle $[\Delta m = 0, \Delta m = 40]$. Par conséquent, les niveaux réels de la période de décalage Δm sont : 0 pour le niveau -1, 20 pour le niveau 0 et 40 pour le niveau 1.

3^{ème} étape :

Dans cette étape, on a fixé la période de décalage Δm et le niveau du stock h et on a tracé les courbes du coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP en fonction de l'âge de maintenance préventive m . La période de décalage Δm fixée satisfait le résultat de la deuxième étape ($\Delta m \in [0, 40]$). Quant au niveau du stock de sécurité h fixé, il vérifie le résultat de la première étape ($h \in [5, 19]$). A partir des courbes tracés, on a noté que le coût total moyen minimal par unité de temps de la politique IPMP appartient à l'intervalle établi par le théorème 1 du chapitre 2 $m \in [40, 54, 7]$. Par conséquent les niveaux réels de l'âge de la maintenance préventive m sont 40 pour le niveau -1, 47.35 pour le niveau 0 et 54.7 pour le niveau 1.

Formellement la méthode de détermination des niveaux réels est la suivante :

Etape 1:

$$*m_i \in [40, 54.7], \Delta m_i \leq m_i$$

$$*(m, \Delta m) = (m_i, \Delta m_i)$$

*On trace les courbes $\xi_i : Ct_{PIMPi(m=m_i, \Delta m=\Delta m_i)}(h)$

$$*Ct_{PIMPi(m=m_i, \Delta m=\Delta m_i)}^* \in [h_{i \min}, h_{i \max}]$$

$$*\cap_i [h_{i \min}, h_{i \max}] = [5, 19] \Rightarrow \text{les niveaux réels de } h \text{ sont : } (5, 12, 19)$$

Etape 2:

$$*m_j \in [40, 54.7], h_j \in [1, 7]$$

$$*(m, h) = (m_j, h_j)$$

*On trace les courbes $\xi_j : Ct_{PIMPj(m=m_j, h=h_j)}(\Delta m)$

$$*Ct_{PIMPj(m=m_j, h=h_j)}^* \in [\Delta m_{j \min}, \Delta m_{j \max}]$$

$$*\cap_j [\Delta m_{j \min}, \Delta m_{j \max}] = [0, 40] \Rightarrow \text{les niveaux réels de } \Delta m \text{ sont : } (0, 20, 40)$$

Etape 3:

$$*\Delta m_k \in [0, 40], h_k \in [5, 19]$$

$$*(\Delta m, h) = (\Delta m_k, h_k)$$

*On trace les courbes $\xi_k : Ct_{PIMPk(\Delta m=\Delta m_k, h=h_k)}(m)$

$$*Ct_{PIMPk(\Delta m=\Delta m_k, h=h_k)}^* \in [m_{k \min}, m_{k \max}]$$

$$*\cap_k [m_{k \min}, m_{k \max}] = [40, 54.7] \Rightarrow \text{les niveaux réels de } m \text{ sont : } (40, 47.35, 54.7)$$

Suite à ces résultats, le plan d'expérience adopté est le suivant (Tableau 4.1) :

	-1	0	1
m	40	47.35	54.7
Δm	0	20	40
h	5	12	19

Tableau 4.1 : Les niveaux du plan d'expériences.

Avec $\alpha=1500$

Par conséquent, on établit les expressions analytiques des indices codés :

$$X_m = \frac{1}{7.35}m - \frac{47.35}{7.35}$$

$$X_{\Delta m} = \frac{1}{20}\Delta m - 1$$

$$X_h = \frac{1}{7}h - \frac{12}{7}$$

4.3.3.4 Etablissement du modèle mathématique

En effectuant une simulation de (1000000heures*5répliques), on obtient la matrice des essais suivante :

Essai	m	Δm	h	Ct_{IPMP}
1	40	0	5	1272.15
2	40	0	12	1241.47
3	40	0	19	1267.35
4	40	20	5	1243.37
5	40	20	12	1172.19
6	40	20	19	1211.68
7	40	40	5	1232.25
8	40	40	12	1159.34
9	40	40	19	1214.18
10	47.35	0	5	1244.79
11	47.35	0	12	1156.19
12	47.35	0	19	1188.81
13	47.35	20	5	1245.82
14	47.35	20	12	1150.93
15	47.35	20	19	1172.73
16	47.35	40	5	1222.87
17	47.35	40	12	1113.22
18	47.35	40	19	1134.90
19	54,7	0	5	1185.91
20	54,7	0	12	1123.11
21	54,7	0	19	1152.58
22	54,7	20	5	1134.09
23	54,7	20	12	1062.37
24	54,7	20	19	1151.05
25	54,7	40	5	1155.86
26	54,7	40	12	1079.06
27	54,7	40	19	1088.24

Tableau 4.2 : Matrice des essais.

Par régression multilinéaire, on a exprimé le coût total moyen de la politique IPMP (Ct_{IPMP}) en fonction des indices codés on obtient :

$$Ct_{IPMP} = 1138.7 - 48.98X_m - 24.02X_{\Delta m} - 19.75X_h - 6.34(X_m)^2 + 7.99(X_{\Delta m})^2 + 55.71(X_h)^2 + 3.06X_mX_{\Delta m} - 2.45X_mX_h - 6.62X_{\Delta m}X_h \quad (1)$$

On a étudié l'analyse de la variance des coefficients (Snedecor) issus de la régression multilinéaire. L'étude de l'analyse de la variance est présentée par le tableau 4.3.

A partir de l'analyse de la variance, on note que les coefficients a_4 , a_5 , a_7 , a_8 et a_9 sont non significatifs. Le modèle mathématique établi dans l'équation (1) devient alors :

$$Ct_{IPMP} = 1138.7 - 48.98X_m - 24.02X_{\Delta m} - 19.75X_h + 55.71(X_h)^2 \quad (2)$$

En décodant les indices, on obtient le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP en fonction de l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau de stock h :

$$Ct_{IPMP} = 1675.81 - 6.66m - 1.2\Delta m + 1.13h^2 - 30.1h \quad (3)$$

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental (Snedecor)	F-théorique	S/N
m	43189.58	1	43189.58	106.66	4.45	S
Δm	10389.13	1	10389.13	25.65	4.45	S
h	7024.68	1	7024.68	17.34	4.45	S
m^2	241.80	1	241.80	0.59	4.45	N
Δm^2	383.04	1	383.04	0.94	4.45	N
h^2	18624.96	1	18624.96	45.99	4.45	S
$m.\Delta m$	112.60	1	112.60	0.27	4.45	N
$m.h$	72.17	1	72.17	0.17	4.45	N
$h.\Delta m$	527.35	1	527.35	1.3	4.45	N
régression	37478587.11	10	3747858.71	9256.02	2.41	GS
résidu	6883.54	17	404.91			
Total	37485470.65	27				

$$R^2=87.96$$

Tableau 4.3 : Analyse de la variance.

4.3.3.5 Optimisation

On minimise le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP en fonction de l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau de stock h :

$$\left. \frac{\partial (Ct_{IPMP})}{\partial h} \right|_{h^*} = 0 \Rightarrow 2.26h^* - 30.1 = 0 \Rightarrow h^* = 13.31$$

A partir de l'équation (3), on remarque que le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP Ct_{IPMP} est décroissant en fonction de l'âge m et du décalage Δm . Par conséquent le coût total moyen minimal par unité de temps est obtenu pour $m^*=54.7$ et $\Delta m^*=40$.

On conclut que le coût total moyen optimal par unité de temps est exprimé ainsi :

$$Ct_{IPMP}^* = Ct_{IPMP}(m^* = 54.7, \Delta m^* = 40, h^* = 13.31) = 1063.06 \text{ um / ut}$$

L'intervalle de confiance du coût total moyen par unité de temps de IPMP est [1056.94 1107.73] (5 répliques).

On a effectué la simulation pour les variables de décisions optimales et on a obtenu le résultat suivant :

$$Ct_{IPMP/sim}((m^*, h^*, \Delta m^*, \alpha) = (54.7, 13.31, 40, 1500)) = 1070.55 \text{ um/ut}$$

4.3.3.6 Evaluation de la performance de la politique IPMP par rapport aux politiques SMP, IMP et PMP

On rappelle les coûts totaux moyen par unité de temps optimaux des politiques IMP, PMP, IPMP ainsi que le coût total moyen de politique simple SMP:

$$Ct_{SMP}(m=54.7) = 1343.09 \text{ um/ut (Chapitre 2)}$$

$$Ct^*_{IMP}/sim((m^*, \Delta m^*) = (54.7, 10.78)) = 1298.16 \text{ um/ut (Chapitre 2)}$$

$$Ct^*_{PMP/sim}((m^*, h^*, \alpha) = (54.7, 13.61, 1500)) = 1115.34 \text{ um/ut (Chapitre 3)}$$

$$Ct^*_{IPMP/sim}((m^*, h^*, \Delta m^*, \alpha) = (54.7, 13.31, 40, 1500)) = 1070.55 \text{ um/ut}$$

Suite à ces résultats numériques, on obtient :

Le gain optimal de IPMP par rapport à la politique SMP est de $G^*(IPMP/SMP)=20.29\%$

Le gain optimal de IPMP par rapport à la politique IMP est de $G^*(IPMP/IMP)=17.53\%$

Le gain optimal de IPMP par rapport à la politique PMP est de $G^*(IPMP/PMP)=4.01\%$

Remarque :

Le coût total moyen optimal de la politique IPMP ($Ct^*_{IPMP/sim}$) et les gains optimaux par rapport à la politique SMP $G^*(IPMP/SMP)$ et par rapport à la politique IMP $G^*(IPMP/IMP)$ sont obtenus pour un coefficient α de l'ordre de 1500. Si le coefficient α diminue, le coût unitaire de stockage augmente et par conséquent le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP augmente, par la suite le gain de la politique IPMP par rapport à la politique SMP ainsi que celui par rapport à la politique IMP tendent vers 0. A partir d'une certaine valeur seuil $\alpha_{seuil1/SMP}$ ($\alpha_{seuil1/SMP}=265.95$) la politique SMP devient plus économique que la politique IPMP. De la même manière, il existe une valeur seuil $\alpha_{seuil1/IMP}$ ($\alpha_{seuil1/IMP}=287.35$) en dessous de laquelle la politique IMP devient plus économique que la politique IPMP. Formellement les gains optimaux respectifs de la politique IPMP par rapport aux politiques SMP et IMP varient en fonction de α de la façon suivante :

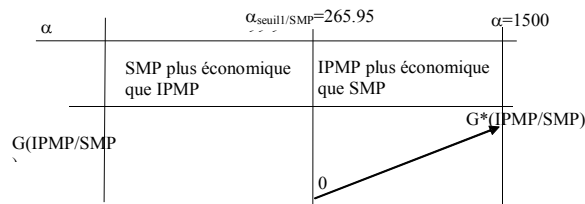


Figure 4.2 : Variation du gain de la politique IPMP par rapport à la politique SMP en fonction de α .

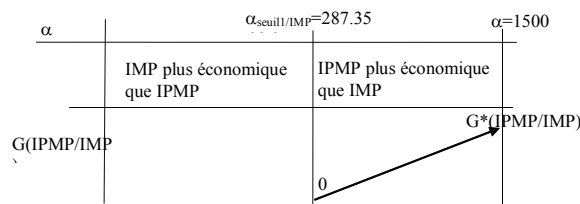


Figure 4.3 : Variation du gain de la politique IPMP par rapport à la politique IMP en fonction de α .

Le gain optimal de la politique IPMP par rapport à la politique PMP ne varie pas, vue qu'on a adopté le même coefficient α pour les deux politiques $\alpha=1500$.

4.3 Etude de la politique IPMP[∧]

4.3.1 Principe de la politique IPMP[∧]

Cette politique consiste à intégrer les deux politiques IMP et PMP de façon dépendante. En effet, dans ce cas, on va appliquer la politique de construction de stock de sécurité PMP et la politique IMP qui dépend cette fois ci de la politique PMP.

Du point de vue commande la politique IPMP[∧] est similaire à la politique IPMP (Voir section 3.1). Du point de vue de la maintenance, seule la machine M_1 subit des actions de maintenance préventive à un certain âge m . L'âge de maintenance préventive m de la machine M_1 sera décalé de Δm s'il coïncide avec la période de réparation de la machine sous-traitante M_2 et si à cet âge m , le niveau de stock de sécurité h n'est pas atteint. Par conséquent, la politique de maintenance adopté dans ce cas est la suivante :

$$\delta_{m'} = \begin{cases} \text{Effectuer les actions de maintenance préventive pour la machine } M_1 \text{ à l'âge } m' \\ \text{ou} \\ \text{Effectuer les actions de maintenance corrective pour la machine } M_1 \text{ si elle tombe en panne avant l'âge } m' \left(\xi_1^k \leq m' \right) \end{cases}$$

Avec:

$$m' = \begin{cases} m & \text{si } \left((m \notin [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \cup (Ns(t=m) = h) \right) \\ m + \Delta m & \text{si } \left((m \in [\xi_2^{k'}, \xi_2^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \cap (Ns(t=m) < h) \right). \end{cases}$$

Avec $Ns(t=m)$: le niveau de stock de sécurité quant on atteint l'âge de maintenance préventive m

En effet, le décalage Δm , adopté dans la politique dépendra de l'état de la sous-traitante, la machine M_2 ainsi que du niveau de stock h atteint. Ce qui confirme l'intégration dépendante des deux politique IMP et PMP.

4.3.2 Objectif de la politique IPMP[∧]

Dans la politique IPMP[∧] on a adopté deux stratégies dans le but de réduire le coût total moyen par unité de temps intégrant les coûts de la maintenance, de l'inventaire et des demandes perdues. La première stratégie, celle adoptée dans la politique PMP (voir chapitre 3), consiste à construire un stock de sécurité de niveau h pour faire face au flux de la demande pendant les périodes de maintenance des deux machines. La politique IPMP[∧] consiste à décaler de Δm l'âge de la maintenance préventive m de la machine M_1 si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- ❖ Condition C_1 : L'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de réparation de la sous-traitante la machine M_2 . Dans ce cas le décalage est opéré dans le but de prolonger la période de production de la machine M_1 pour éviter la

- ❖ Condition C_2 : On atteint l'âge de la maintenance préventive m et le niveau de stock de sécurité h n'est pas atteint. Dans cette situation le décalage Δm est opéré dans le but de prolonger la période de production de la machine M_1 pour assurer la continuation de la construction du stock de sécurité, afin d'atteindre le niveau h .

Dans ce cas, la politique $IPMP^\wedge$ n'est plus une intégration directe de PMP et de IMP mais une intégration corrélée par un ET ($\cap$) logique des conditions C_1 et C_2 ($IPMP^\wedge : C_1 \cap C_2$).

On note que le décalage dans le deuxième cas dépend du niveau du stock ($S(t=m) < h$). Cela justifie l'idée de l'intégration dépendante des deux politiques IMP et PMP. La différence entre la politique $IPMP^\wedge$ et la politique précédente IPMP est que dans la politique $IPMP^\wedge$ le décalage Δm est opéré si on a à la fois les deux conditions C_1 et C_2 , par contre le décalage Δm pour la politique IPMP est opéré si on a seulement la condition C_1 .

4.3.3 Etude de la performance de la politique $IPMP^\wedge$ en utilisant la simulation

1.1.1.6 But de l'étude de simulation

La politique $IPMP^\wedge$ consiste à la construction d'un stock de sécurité de niveau h . Par conséquent, comme dans le cas des politiques PMP et IPMP il est difficile d'étudier analytiquement la performance de la politique $IPMP^\wedge$ vu le nombre de scénarios possibles et leurs complexités. (64 scénarios, voir chapitre 3 section 3). On a opté pour la simulation pour étudier la performance de la politique $IPMP^\wedge$. Il est évident de constater que les variables de décision adoptées à la politique $IPMP^\wedge$ sont les mêmes que celles adoptées pour la politique IPMP. Par conséquent les variables de décision de la politique $IPMP^\wedge$ sont l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau du stock h .

1.1.1.7 Modèle de simulation

On établit un modèle de simulation, dont l'algorithme est décrit à la fin de ce chapitre, qui permet de calculer le coût total moyen par unité de temps intégrant les coûts de la maintenance, de l'inventaire et des demandes perdues pour la politique $IPMP^\wedge$. On introduit dans le modèle toutes les données du problème et la valeur du coefficient $\alpha = C_p/C_s$. La valeur de α adoptée est la même valeur que celle adoptée dans le chapitre précédent. On a fixé alors α à 1500. On fait varier les valeurs des variables de décision (m , Δm , h) et on note le coût total moyen par unité de temps de la politique $IPMP^\wedge$.

1.1.1.8 Choix du plan d'expérience

Comme pour la politique précédente IPMP, on a adopté dans cette politique $IPMP^\wedge$ un plan d'expériences à trois niveaux (-1, 0, 1) et à trois facteurs. Pour déterminer les niveaux réels du plan d'expériences on a procédé de la même manière que la politique IPMP (voir section 3.3.3). On a obtenu le plan d'expériences suivant (Tableau 4.4):

	-1	0	1
m	40	47.35	54,7
Δm	0	20	40
h	5	12	19

Tableau 4.4 : Les niveaux du plan d'expériences.

Avec $\alpha=1500$

Les expressions analytiques des indices codées sont les suivantes :

$$X_m = \frac{1}{7,35}m - \frac{47,35}{7,35}, \quad X_{\Delta m} = \frac{1}{20}\Delta m - 1 \quad \text{et} \quad X_h = \frac{1}{7}h - \frac{12}{7}$$

1.1.1.9 Etablissement du modèle mathématique

En effectuant une simulation de (1000000ut*5répliques), on obtient la matrice des essais suivante :

Essai	m	Δm	h	$Ct_{IPMP}^{\cap}$
1	40	0	5	1271.15
2	40	0	12	1241.47
3	40	0	19	1267.35
4	40	20	5	1243.37
5	40	20	12	1175.98
6	40	20	19	1213.09
7	40	40	5	1230.31
8	40	40	12	1169.59
9	40	40	19	1214.18
10	47.35	0	5	1244.79
11	47.35	0	12	1156.19
12	47.35	0	19	1188.81
13	47.35	20	5	1245.82
14	47.35	20	12	1154.09
15	47.35	20	19	1172.73
16	47.35	40	5	1222.87
17	47.35	40	12	1113.22
18	47.35	40	19	1134.90
19	54,7	0	5	1185.91
20	54,7	0	12	1123.11
21	54,7	0	19	1152.58
22	54,7	20	5	1134.09
23	54,7	20	12	1062.37
24	54,7	20	19	1151.05
25	54,7	40	5	1155.86
26	54,7	40	12	1079.06
27	54,7	40	19	1088.24

Tableau 4.5 : Matrice des essais.

Par régression multilinéaire, on a exprimé le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP[∧] $Ct_{IPMP^{\wedge}}$ en fonction des indices codés et on obtient :

$$Ct_{IPMP^{\wedge}} = 1140.7 - 49.67X_m - 23.5X_{\Delta m} - 19.51X_h - 6X_m^2 + 7.46X_{\Delta m}^2 + 53.71X_h^2 + 2.28X_mX_{\Delta m} - 2.81X_mX_h - 6.55X_hX_{\Delta m} \quad (4)$$

On a étudié l'analyse de la variance des coefficients (Snedecor) issus de la régression multilinéaire. On a obtenu le tableau de l'analyse de la variance suivant :

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental (Snedecor)	F-théorique	S/N
m	44423.85	1	44423.85	108.71	4.45	S
Δm	9946.61	1	9946.61	24.34	4.45	S
h	6853.86	1	6853.86	16.77	4.45	S
m^2	216.32	1	216.32	0.52	4.45	N
Δm^2	334.55	1	334.55	0.81	4.45	N
h^2	17314.31	1	17314.31	42.37	4.45	S
$m.\Delta m$	62.79	1	62.79	0.15	4.45	N
$m.h$	95.09	1	95.09	0.23	4.45	N
$h.\Delta m$	514.96	1	514.96	1.26	4.45	N
régression	37514677.51	10	3751467.75		2.41	GS
résidu	6946.35	17	408.6		9181.27	
Total	37521623.87	27				

$$R^2 = 87.74\%$$

Tableau 4.6 : Analyse de la variance.

A partir de l'analyse de la variance, on note que les coefficients a_4 , a_5 , a_7 , a_8 et a_9 sont non significatifs. Le modèle mathématique de l'équation (4) devient :

$$Ct_{IPMP^{\wedge}} = 1140.7 - 49.67X_m - 23.5X_{\Delta m} - 19.51X_h + 53.71X_h^2 \quad (5)$$

En décodant les indices, on obtient le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP[∧] en fonction de l'âge de la maintenance préventive m , de la période de décalage Δm et du niveau de stock h :

$$Ct_{(IPMP^{\wedge})} = 1672.46 - 6.75m - 1.175\Delta m + 1.09h^2 - 26.08h \quad (6)$$

1.1.1.10 Optimisation

On minimise le coût total moyen de la politique IPMP[∧] en fonction de l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau du stock h :

$$\left\{ \frac{\partial (Ct_{IPMP^{\wedge}})}{\partial h} \right\}_{h=h^*} = 0 \Rightarrow 2.18h^* - 26.08 = 0 \Rightarrow h^* = 11.96$$

On remarque d'après l'équation (6) que le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP[∧] est décroissant en fonction de m et du décalage Δm . Par conséquent, le

coût total moyen minimal par unité de temps de la politique $IPMP^\wedge$ est obtenu pour $m^*=54.7$ et $\Delta m^*=40$. On conclut que :

$$Ct_{(IPMP^\wedge)}^* = Ct_{(IPMP^\wedge)}(m^* = 54,7, \Delta m^* = 40, h^* = 11.96) = 1100.2 \text{ um / ut}$$

L'intervalle de confiance du coût total moyen de la politique $IPMP^\wedge$ est [1034.5 1123.6]. (3 répliques).

On a effectué la simulation pour les variables de décisions optimales et on a obtenu le résultat suivant :

$$Ct_{IPMP^\wedge/sim}((m^*, h^*, \Delta m^*, \alpha) = (54,7, 11.96, 40, 1500)) = 1065.73 \text{ um/ut}$$

1.1.1.11 Evaluation de la performance de la politique $IPMP^\wedge$ par rapport aux politiques SMP, IMP, PMP et IPMP

On rappelle les coûts totaux moyens optimaux par unité de temps des politiques IMP, PMP, IPMP, $IPMP^\wedge$ ainsi que le coût total moyen de politique simple SMP sont:

$$Ct_{SMP}(m=54.7) = 1343.09 \text{ um/ut (Chapitre 2)}$$

$$Ct_{IMP}^*/sim((m^*, \Delta m^*) = (54.7, 10.78)) = 1298.16 \text{ um/ut (Chapitre 2)}$$

$$Ct_{PMP/sim}((m^*, h^*, \alpha) = (54.7, 13.61, 1500)) = 1115.34 \text{ um/ut}$$

$$Ct_{IPMP/sim}((m^*, h^*, \Delta m^*, \alpha) = (54.7, 13.31, 40, 1500)) = 1070.55 \text{ um/ut (Chapitre 4)}$$

$$Ct_{IPMP^\wedge/sim}((m^*, h^*, \Delta m^*, \alpha) = (54.7, 11.96, 40, 1500)) = 1065.73 \text{ um/ut (Chapitre 4)}$$

Suite à ces résultats numériques on obtient :

Le gain optimal de $IPMP^\wedge$ par rapport à la politique SMP est de $G^*(IPMP^\wedge/SMP)=20.65\%$

Le gain optimal de $IPMP^\wedge$ par rapport à la politique IMP est : $G^*(IPMP^\wedge/IMP)=17.90\%$

Le gain optimal de $IPMP^\wedge$ par rapport à la politique PMP est : $G^*(IPMP^\wedge/PMP)=4.44\%$

Le gain optimal de $IPMP^\wedge$ par rapport à la politique IPMP est : $G^*(IPMP^\wedge/IPMP)=0.45\%$

Remarque :

Le coût total moyen optimal par unité de temps de la politique $IPMP^\wedge$ et les gains optimaux par rapport à la politique SMP ($G^*(IPMP^\wedge/SMP)$) et par rapport à la politique IMP ($G^*(IPMP^\wedge/IMP)$) sont obtenus pour un coefficient α de l'ordre de 1500. A partir d'une certaine valeur seuil $\alpha_{seuil3/SMP}$ ($\alpha_{seuil2/SMP}=238.09$) la politique SMP devient plus économique que la politique $IPMP^\wedge$. De même, il existe une valeur seuil $\alpha_{min3/IMP}$ ($\alpha_{seuil2/IMP}= 257.73$) en dessous de laquelle la politique IMP devient plus économique que la politique $IPMP^\wedge$. Formellement les gains optimaux respectifs de la politique $IPMP^\wedge$ par rapport aux politiques SMP et IMP varient en fonction de α de la manière suivante :

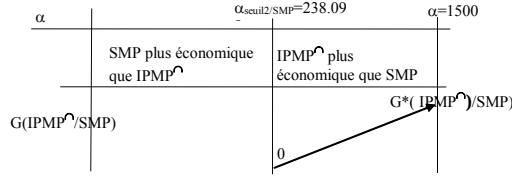


Figure 4.4 : Variation du gain de la politique $IPMP^{\wedge}$ par rapport à la politique SMP en fonction de α .

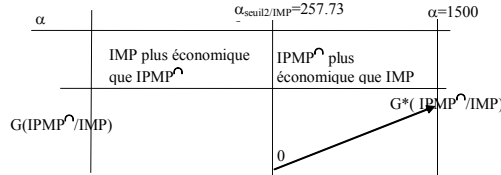


Figure 4.5 : Variation du gain de la politique $IPMP^{\wedge}$ par rapport à la politique IMP en fonction de α .

Le gain optimal de la politique $IPMP^{\wedge}$ par rapport à la politique PMP ne varie pas, étant donné qu'on a adopté le même coefficient α pour les deux politiques ($\alpha=1500$).

4.4 Etude de la politique $IPMP^{\cup}$

4.4.1 Principe de la politique $IPMP^{\cup}$

Cette politique consiste à intégrer les deux politiques IMP et PMP de façon dépendante. Dans ce cas, la réalisation des actions de maintenance préventive sur M_1 dépendra du niveau du stock atteint à cette date. Du point de vue commande, la politique $IPMP^{\cup}$ est similaire à la politique IPMP. (Voir section 3.1)

Du point de la maintenance, seule la machine M_1 subit des actions de maintenance préventive à un certain âge m . L'âge de maintenance préventive m de la machine M_1 sera décalé de Δm s'il coïncide avec la période de réparation de la sous-traitante la machine M_2 ou si le niveau de stock de sécurité h n'est pas atteint. Par conséquent, la politique de maintenance adoptée dans ce cas est la suivante :

$$\delta_{m'} = \begin{cases} \text{Effectuer les actions de maintenance préventive pour la machine } M_1 \text{ à l'âge } m' \\ \text{ou} \\ \text{Effectuer les actions de maintenance corrective pour la machine } M_1 \text{ si elle tombe en panne avant l'âge } m' \left(z_{s1}^k \leq m' \right) \end{cases}$$

Avec:

$$m' = \begin{cases} m & \text{si } \left((m \notin [z_{s2}^{k'}, z_{s2}^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \cap (Ns(t=m) = h) \right) \\ m + \Delta m & \text{si } \left((m \in [z_{s2}^{k'}, z_{s2}^{k'} + z_{c2}^{k'}]) \cup (Ns(t=m) < h) \right). \end{cases}$$

Avec $Ns(t=m)$: le niveau de stock de sécurité quand on atteint l'âge de la maintenance préventive m .

En effet, le décalage Δm adopté à cette politique, dépend de l'état de la sous-traitante, la machine M_2 , ainsi que du niveau de stock de sécurité h atteint à cette date. Ce qui confirme l'intégration dépendante des deux politiques IMP et PMP.

4.4.2 Objectif de la politique $IPMP^\cup$

Pour la politique $IPMP^\cup$ on a adopté deux stratégies dans le but de réduire le coût total moyen par unité de temps intégrant les coûts de la maintenance, de l'inventaire et des demandes perdues. La première stratégie, celle adoptée dans la politique PMP (voir chapitre 3), consiste à construire un stock de sécurité de niveau h pour faire face au flux de la demande pendant les périodes de maintenance des deux machines. La politique $IPMP^\cup$ consiste à décaler de Δm l'âge de la maintenance préventive m de la machine M_1 si l'une des deux conditions suivantes sont satisfaites :

- ❖ Condition C_1 : L'âge de la maintenance préventive m coïncide avec la période de réparation de la sous-traitante la machine M_2 . Dans ce cas le décalage est opéré dans le but de prolonger la période de production de la machine M_1 pour éviter la perte totale de la demande (M_2 est en réparation à l'âge m).
- ❖ Condition C_2 : On atteint l'âge de la maintenance préventive m et le niveau de stock de sécurité h n'est pas atteint. Dans cette situation le décalage Δm est opéré dans le but de prolonger la période de production de la machine M_1 pour assurer la continuation de la construction du stock de sécurité, afin d'atteindre le niveau h .

Dans ce cas, la politique $IPMP^\cup$ est une intégration corrélée de PMP et IMP selon un OU ($\cup$) logique des conditions C_1 et C_2 . ($IPMP^\cup : C_1 \cup C_2$)

4.4.3 Etude de la performance de la politique $IPMP^\cup$ en utilisant la simulation

4.5.3.1 But de l'étude de simulation

La politique $IPMP^\cup$ consiste à la construction d'un stock de sécurité de niveau h . Par conséquent, comme dans le cas des politiques PMP et IPMP, il est difficile d'étudier analytiquement la performance de la politique $IPMP^\cup$ vu le nombre de scénarios possibles et leurs complexités (64 scénarios, chapitre 3 section 3). On a opté pour la simulation pour étudier la performance de la politique $IPMP^\cup$. Il est évident de constater que les variables de décision adoptées à la politique $IPMP^\cup$ sont les mêmes que celles adoptées pour la politique IPMP. Par conséquent les variables de décision de la politique $IPMP^\cup$ sont l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau du stock h .

4.5.3.2 Modèle de simulation

On établit un modèle de simulation, dont l'algorithme est décrit à la fin de ce chapitre, permettant de calculer le coût total moyen par unité de temps intégrant les coûts de la maintenance, de l'inventaire et des demandes perdues pour la politique $IPMP^\cup$. On introduit dans le modèle toutes les données du problème et le coefficient $\alpha = C_p/C_s$. La valeur de α adoptée est la même valeur que celle du chapitre précédent (chapitre 3, $\alpha = 1500$). On fait varier les valeurs des variables de décision (m , Δm , h) et on note le coût total moyen par unité de temps de la politique $IPMP^\cup$.

4.5.3.3 Choix du plan d'expériences

Comme pour la politique précédente IPMP, on a adopté pour cette politique IPMP^U un plan d'expériences à trois niveaux (-1, 0, 1) et à trois facteurs. Pour déterminer les niveaux réels du plan d'expériences on a procédé de la même manière que la politique IPMP (voir section 3.3.3). On a obtenu le plan d'expériences suivant (Tableau 4.4) :

	-1	0	1
m	40	47,35	54,7
Δm	0	20	40
h	5	12	19

Tableau 4.7 : Les niveaux du plan d'expérience.

Les expressions analytiques des indices codés sont les suivantes :

$$X_m = \frac{1}{7,35}m - \frac{47,35}{7,35}, \quad X_{\Delta m} = \frac{1}{20}\Delta m - 1 \quad \text{et} \quad X_h = \frac{1}{7}h - \frac{12}{7}$$

4.5.3.4 Etablissement du modèle mathématique

En effectuant une simulation de (1000000heures*5répliques) on obtient la matrice des essais suivante :

Essai	m	Δm	h	Ct _{IPMP^U}
1	40	0	5	1303.84
2	40	0	12	1220.51
3	40	0	19	1270.01
4	40	20	5	1048.15
5	40	20	12	1022.49
6	40	20	19	1045.35
7	40	40	5	1036.11
8	40	40	12	1008.81
9	40	40	19	1048.49
10	47.35	0	5	1236.08
11	47.35	0	12	1156.4
12	47.35	0	19	1193.55
13	47.35	20	5	1039.63
14	47.35	20	12	967.04
15	47.35	20	19	1045.51
16	47.35	40	5	1009.42
17	47.35	40	12	1013.82
18	47.35	40	19	1034.29
19	54.7	0	5	1185.86
20	54.7	0	12	1123.26
21	54.7	0	19	1152.75
22	54.7	20	5	1017.93
23	54.7	20	12	1019.40
24	54.7	20	19	1005.96
25	54.7	40	5	1025.11
26	54.7	40	12	967.56
27	54.7	40	19	1025.65

Tableau 4.8 : Matrice des essais.

Par régression multilinéaire, on a exprimé le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP^u en fonction des indices codés et on obtient :

$$Ct_{IPMP^u} = 991.61 - 26.68X_m - 92.93X_{\Delta m} - 4.47X_h + 7.54X_m^2 + 88.26X_{\Delta m}^2 + 40.27X_h^2 + 21.44X_mX_{\Delta m} + 1.69X_mX_h + 12.27X_hX_{\Delta m} \quad (7)$$

L'étude de l'analyse de la variance des coefficients (Snedecor) est donnée par le tableau suivant :

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental (Snedecor)	F-théorique	S/N
m	12820.27	1	12820.27	33.13	4.45	S
Δm	155477.46	1	155477.46	401.83	4.45	S
h	360.64	1	360.64	0.93	4.45	N
m^2	341.81	1	341.81	0.88	4.45	N
Δm^2	46740.14	1	46740.14	120.8	4.45	S
h^2	9731.37	1	9731.37	25.15	4.45	S
$m.\Delta m$	5516.94	1	5516.94	14.25	4.45	S
$m.h$	34.30	1	34.30	0.08	4.45	N
$h.\Delta m$	1807.12	1	1807.12	4.67	4.45	S
régression	31862030.26	10	3186203.02	8234.84	2.41	GS
résidu	6577.59	17	386.91			
Total	31868607.85	27				

R²=95.79%

Tableau 4.9 : Analyse de la variance.

A partir de cette analyse, on note que les coefficients a_3 , a_4 et a_8 sont non significatifs. Le modèle mathématique obtenu dans l'équation (7) devient :

$$Ct_{IPMP^u} = 991.61 - 26.68X_m - 92.93X_{\Delta m} + 88.26X_{\Delta m}^2 + 40.27X_h^2 + 21.44X_mX_{\Delta m} + 12.27X_hX_{\Delta m} \quad (8)$$

En décodant les indices, on obtient le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP^u en fonction de l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau de stock h :

$$Ct_{IPMP^u} = 1622.17 - 6.53m + 0.22\Delta m^2 - 21.41\Delta m + 0.82h^2 - 21.47h + 0.14m\Delta m + 0.087\Delta mh \quad (9)$$

4.5.3.5 Optimisation

On minimise le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP^u en fonction de l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau de stock h :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (Ct_{IPMP^u})}{\partial h} = 0 \Rightarrow 1.64h^* - 21.47 + 0.087\Delta m^* = 0 \Rightarrow h^* = 13.09 - 0.05\Delta m^* (10) \\ \frac{\partial (Ct_{IPMP^u})}{\partial \Delta m} = 0 \Rightarrow 0.441\Delta m^* - 21.41 + 0.14m + 0.087h^* = 0 (11) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} h=h^* \\ \Delta m=\Delta m^* \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (10) \\ (11) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta m^* = 47.13 - 0.32m (12)$$

En remplaçant les équations (10) et (12) dans l'équation (9) on obtient l'expression du coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP^u en fonction de l'âge m . La courbe de coût total moyen Ct_{IPMP^u} en fonction de l'âge m est présentée par la figure suivante :

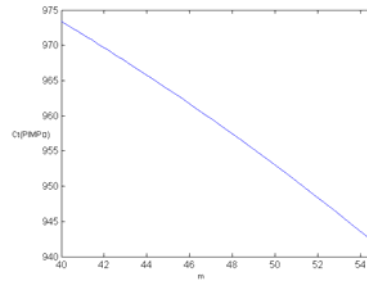


Figure 4.6 : Courbe du coût total moyen de IPMP^u en fonction de l'âge m .

A partir de cette courbe on remarque que le coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP^u est décroissant en fonction de l'âge m . Par conséquent le coût total moyen minimal est obtenu pour $m^* = 54.7$.

En utilisant les équations (12) et (10), on obtient $(\Delta m, h^*) = (29.62, 11.6)$. Par conséquent :

$$Ct_{IPMP^u}^* = Ct_{IPMP^u}(m^* = 54.7, \Delta m^* = 29.62, h^* = 11.6) = 941.83 \text{ um / ut}$$

L'intervalle de confiance du coût total moyen par unité de temps de la politique IPMP^u est [939.51 1056.99]. (5 répliques).

On a effectué la simulation pour les variables de décisions optimales et on a obtenu le résultat suivant :

$$Ct_{IPMP^u} /_{sim} ((m^*, \Delta m^*, h^*, \alpha) = (54.7, 29.62, 11.6, 1500)) = 985.38 \text{ um/ut}$$

4.5.3.6 Evaluation de la performance de la politique IPMP^u par rapport aux politiques SMP, IMP, PMP, IPMP et IPMP[^]

On rappelle les coûts totaux moyens optimaux par unité de temps des politiques IMP, PMP, IPMP, IPMP[^], IPMP^u ainsi que le coût total moyen de politique simple SMP :

$Ct_{SMP}(m=54.7)=1343.09 \text{ um/ut}$ (Chapitre 2)

$Ct_{IMP}^{\cup}/sim ((m^*, \Delta m^*) = (54.7, 10.78)) = 1298.16 \text{ um/ut}$ (Chapitre 2)

$Ct_{PMP}^{\cup}/sim ((m^*, h^*, \alpha) = (54.7, 13.61, 1500)) = 1115.34 \text{ um/ut}$ (Chapitre 3)

$Ct_{IPMP}^{\cup}/sim ((m^*, h^*, \Delta m^*, \alpha) = (54.7, 13.31, 40, 1500)) = 1070.55 \text{ um/ut}$

$Ct_{IPMP}^{\cap}/sim ((m^*, h^*, \Delta m^*, \alpha) = (54.7, 11.96, 40, 1500)) = 1065.73 \text{ um/ut}$

$Ct_{IPMP}^{\cup}/sim ((m^*, \Delta m^*, h^*, \alpha) = (54.7, 29.62, 11.6, 1500)) = 985.38 \text{ um/ut}$

Suite à ces résultats numériques, on obtient :

Le gain optimal de $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique SMP est de $G^*(IPMP^{\cup}/SMP) = 26.63 \%$

Le gain optimal de $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique IMP est de $G^*(IPMP^{\cup}/IMP) = 24.09\%$

Le gain optimal de $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique PMP est de $G^*(IPMP^{\cup}/PMP) = 11.65\%$

Le gain optimal de $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique IPMP est de $G^*(IPMP^{\cup}/IPMP) = 7.95\%$

Le gain optimal de $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique $IPMP^{\cap}$ est de $G^*(IPMP^{\cup}/IPMP^{\cap}) = 7.53\%$

Remarque :

Le coût total moyen optimal de la politique $IPMP^{\cup}$ et les gains optimaux par rapport à la politique SMP $G^*(IPMP^{\cup}/SMP)$ et par rapport à la politique IMP $G^*(IPMP^{\cup}/IMP)$ sont obtenus pour un coefficient α de l'ordre de 1500. A partir d'une certaine valeur seuil $\alpha_{seuil3/SMP}$ ($\alpha_{seuil3/SMP} = 203.25$) la politique SMP devient plus économique que la politique $IPMP^{\cup}$. Ainsi qu'il existe une valeur seuil $\alpha_{seuil3/IMP}$ ($\alpha_{seuil3/IMP} = 227.27$) en dessous de laquelle la politique IMP devient plus économique que la politique $IPMP^{\cup}$. Formellement les gains optimaux respectifs de la politique $IPMP^{\cup}$ par rapport aux politiques SMP et IMP varient en fonction de α de la façon suivante :

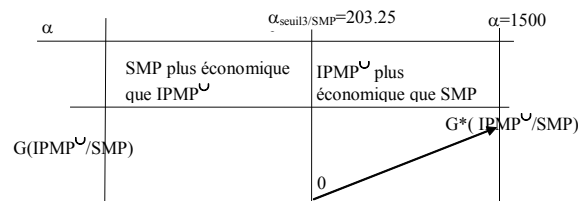


Figure 4.7 : Variation du gain de la politique $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique SMP en fonction de α ;

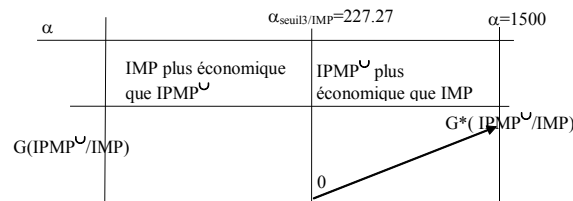


Figure 4.8 : Variation du gain de la politique $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique IMP en fonction de α .

Pour le gain optimal de la politique $IPMP^{\cup}$ par rapport à la politique PMP, $IPMP$ et $IPMP^{\cap}$ ne varie pas, vu qu'on a adopté le même rapport α pour les trois politiques ($\alpha = 1500$).

4.5 Interprétation de la performance des politiques étudiées par rapport à la politique de maintenance simple SMP

4.5.1 Bilan des politiques

Le Tableau 4.10 résume les résultats des différentes politiques ainsi que leurs performances par rapport à la politique de maintenance simple SMP.

Variables de décision optimales Politiques	m^*	Δm^*	h^*	Performance par rapport à SMP
IMP	54.7	10.78	—	3.34 %
PMP	54.7	—	13.61	16.95 %
IPMP	54.7	40	13.31	20.29 %
$IPMP^{\cap}$	54.7	40	11.96	20.65 %
$IPMP^{\cup}$	54.7	29.62	11.6	26.63%

Tableau 4.10 : Tableau de performance

4.5.2 Interprétation des résultats

A partir de l'étude de ces politiques, on remarque que la politique la plus économique est la politique $IPMP^{\cup}$, celle qui consiste à décaler l'âge de la maintenance préventive m s'il coïncide avec la période de réparation de la machine sous-traitante M_2 ou bien si cet âge est atteint à une date où le niveau de stock de sécurité h n'est pas atteint. Suite à ce constat, on conclut que la politique de décalage est souhaitée dans le cas d'indisponibilité de la sous-traitante ou dans le cas de non atteinte du niveau du stock de sécurité h . Ce résultat est logique puisque pendant la non disponibilité de la sous-traitante le décalage permet la continuation de la production de la machine M_1 pour réduire les demandes perdues. Dans le cas de non atteinte du niveau h , le décalage permet le prolongement de la période de production de la machine M_1 pour construire le niveau désiré h du stock de sécurité.

D'autre part, on rappelle que la politique optimale $IPMP^{\cup}$ consiste à intégrer d'une façon corrélée les deux politiques IMP et PMP. A partir des variables de décision optimales obtenues pour chaque politique (Voir tableau 4.10), on remarque que le décalage optimal Δm^* de la politique optimale est supérieur à celui de la politique IMP. Par contre, le niveau de stock optimal h^* de la politique $IPMP^{\cup}$ est inférieur à celui de la politique PMP. A travers l'analyse du tableau des performances (4.10), on remarque que l'idée du décalage apporte une solution intéressante pour l'amélioration des performances par rapport à la construction d'un stock de sécurité.

Par conséquent, on note que la stratégie du décalage est favorisée par rapport à la stratégie de construction de stock de sécurité. Ce résultat se traduit par le fait que le seul inconvénient d'adopter le décalage est le risque de défaillance de la machine M_1 pendant le décalage. Par conséquent un choix favorable de la période de décalage Δm minimise ce risque de panne. Par contre la construction du stock de sécurité de niveau maximal h engendre un coût d'inventaire dépendant du coefficient α et du niveau h . Le degré de performance de la politique $IPMP^\cup$ par rapport aux politiques SMP et IMP varie suivant la valeur du coefficient α . Formellement :

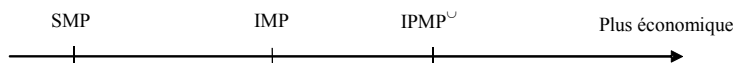
*Si $\alpha < \alpha_{seuil3/SMP} = 203.25$ on a :



*Si $\alpha_{seuil3/SMP} = 203.25 \leq \alpha < \alpha_{seuil3/IMP} = 227.27$ on a :



*Si $\alpha \geq \alpha_{seuil3/IMP} = 227.27$ on a :



Remarque :

Quelque soit la valeur de α , la politique IMP est plus économique que la politique SMP.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a intégré les deux politiques IMP et PMP développées dans les chapitres précédents. Cette intégration a abouti à trois politiques $IPMP$, $IPMP^\cup$ et $IPMP^\cap$. La première politique est une intégration indépendante des deux politiques IMP et PMP. Quant aux deux autres, l'intégration des politiques IMP et PMP est corrélée. Dans cette étude on a optimisé les trois politiques en fonction des variables de décisions issues des deux politiques IMP et PMP. Les variables de décision sont l'âge de la maintenance préventive m , la période de décalage Δm et le niveau de stock h . Selon une étude basée sur la simulation et les plans d'expériences, on a montré que la politique

IPMP^U est la plus économique selon les conditions établies par le théorème 1 du chapitre 2. Pour obtenir une performance maximale par rapport à la politique de maintenance simple SMP, on applique la politique IPMP^U en adoptant un âge de maintenance préventive optimal m^* en construisant un stock de sécurité de niveau optimal h^* et en appliquant un décalage optimal Δm^* . Le décalage optimal Δm^* est appliqué si l'âge de la maintenance préventive optimal m^* coïncide avec la période de réparation de la sous-traitante ou si à cet âge le niveau du stock de sécurité h n'est pas encore atteint. En appliquant cette politique, dans ces valeurs de décision optimales, on réalise une performance maximale par rapport à la politique de maintenance simple SMP. En comparant les variables de décision optimales de toutes les politiques étudiées, on a noté qu'afin d'aboutir à une politique plus économique intégrant les deux politiques PMP et IMP, la stratégie du décalage est plus souhaitée que la stratégie de construction de stock.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la maintenance intégrée faisant le couplage entre la gestion de la production et les stratégies de maintenances dans un contexte de juste à temps et sous la contrainte de sous-traitance. Le problème posé consiste à proposer des politiques de maintenance intégrée économiques en termes de coûts engendrés tout en assurant au mieux au respect des délais de production pour un système de production faisant appel à la sous-traitance pour satisfaire une demande client.

Le système de production considéré est représenté par une machine M_1 . Pour satisfaire une demande client, il est nécessaire de faire appel à un sous-traitant représenté par une machine M_2 . La sous-traitance impose des périodes d'indisponibilité incontrôlables. De ce fait, nous avons supposé tout le long de cette thèse que le taux de défaillance de la machine sous-traitante M_2 est constant. Par conséquent la machine M_2 engendre une perte de la demande suite à ces périodes d'indisponibilité qui peuvent être liées à des actions de maintenance. La machine M_1 est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge dont l'objectif est de réduire la probabilité d'occurrence des pannes.

Dans un premier temps et selon une production à la demande, on a défini une politique de maintenance simple SMP (Simple Maintenance Policy). Cette politique est caractérisée par le fait qu'on ne tient pas compte de l'état de la sous-traitance dans la stratégie de maintenance adoptée à la machine M_1 . La politique SMP a été améliorée en développant une politique de maintenance IMP (Improved Maintenance Policy) permettant de tenir compte de l'état de la sous-traitance dans la politique de maintenance adoptée à la machine M_1 . La politique IMP consiste à décaler les actions de maintenance préventive de la machine M_1 d'un certain âge si celles-ci coïncident avec les périodes d'indisponibilité de la machine sous-traitante M_2 . Nous avons montré analytiquement l'efficacité d'une politique IMP par rapport à une politique SMP sous certaines conditions. Par la suite nous avons optimisé la politique IMP en déterminant l'âge et le décalage optimaux pour la maintenance préventive de la machine M_1 .

Dans un second temps, la politique de production a évolué vers une production avec stock. La machine M_1 et sa sous-traitante la machine M_2 construisent un stock de d'un certain niveau où la demande est puisée. Ce stock permettra de compenser les périodes d'indisponibilité des machines pour la satisfaction de la demande. En adoptant cette stratégie de commande, nous avons proposé une politique de maintenance couplée à la production PMP (Production Maintenance Policy). La stratégie de maintenance utilisée est similaire à celle de SMP. Les variables de décisions adoptées pour cette politique sont l'âge de la maintenance préventive et le niveau de stock de sécurité. La politique PMP a été améliorée pour sa stratégie de maintenance en utilisant la politique de maintenance IMP. La politique PMP améliorée est notée IPMP (Improved Maintenance Policy) et consiste à intégrer d'une façon indépendante les stratégies PMP et IMP. Les variables de décisions de la politique IPMP sont l'âge de la maintenance préventive, le

décalage de l'âge de la maintenance préventive et le niveau du stock de sécurité. La politique IPMP a été optimisée et sa performance démontrée par rapport aux politiques PMP, IMP, SMP sous certaines conditions liées aux coûts de pénuries et de stockage. Dans une seconde étape nous avons fait évoluer la politique IPMP vers des politiques $IPMP^{\wedge}$ et $IPMP^{\vee}$. Ces politiques sont des intégrations corrélées des politiques IMP et PMP dans le sens du ET logiques ($\wedge$) et dans le sens du OU logique ($\vee$). La politique $IPMP^{\wedge}$ consiste à décaler l'âge de maintenance préventive de la machine M_1 s'il coïncide avec la période de réparation de la machine sous-traitante M_2 et si à cet âge, le niveau de stock de sécurité n'est pas atteint. Quant à la politique $IPMP^{\vee}$ elle consiste à décaler l'âge de la maintenance préventive de la machine M_1 s'il coïncide avec la période de réparation de la sous-traitante la machine M_2 ou si le niveau de stock de sécurité n'est pas atteint. Les variables de décision des politiques $IPMP^{\wedge}$ et $IPMP^{\vee}$ sont les mêmes que celles adoptées pour la politique IPMP soit l'âge de la maintenance préventive, la période de décalage et le niveau du stock de sécurité. Les politiques $IPMP^{\wedge}$ et $IPMP^{\vee}$ ont été optimisées en fonction de leurs variables de décision et leurs performances démontrées par rapport aux politiques IPMP, PMP, IMP, SMP. Enfin, on a classé toutes les politiques développées par ordre croissant de performance par rapport à la politique de maintenance simple SMP en indiquant leurs variables de décisions optimales. Ces résultats ont montré que la politique $IPMP^{\vee}$ est la plus économique. Suite à cette étude, on a constaté qu'en tenant compte de l'état de la sous-traitance dans le choix de la stratégie de maintenance et de commande de la production on peut réduire le coût total moyen par unité de temps intégrant la maintenance, l'inventaire et les demandes perdues.

Annexe

Les algorithmes de simulation

Algorithme de simulation de la politique IMP

Input :

$m, \Delta m, Cmp, Cmc_1, Cp, qd, Td, U^1_{max}, U^2_{max}, Tsim,$

Output :

Lm, Lp, Ct

Début :

Initialiser l'âge de la maintenance préventive $\text{âge} \leftarrow m$

Initialiser l'horloge effective de simulation $\text{horloge} \leftarrow 0$

Initialiser le niveau de stock $Ns \leftarrow 0$

Initialiser le coût moyen par unité de temps des actions de maintenance $Lm \leftarrow 0$

Initialiser le coût moyen par unité de temps des demandes perdues $Lp \leftarrow 0$

Initialiser le coût total moyen par unité de temps $Ct \leftarrow 0$

Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_1 $D_1 \leftarrow 0$

Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_2 $D_2 \leftarrow 0$

Générer $W1/f_1(t)$

Générer $W2/f_2(t)$

Etape 1:

Si les deux machines sont en panne **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, D2, Td)$

Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z,$

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z,$

Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$

Si $D1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en fonctionnement

Générer $W1 / f_1(t)$

Initialiser l'âge de la maintenance préventive

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U^1_{max}$

Fin Si

Si $D2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en fonctionnement

Générer $W2 / f_2(t)$

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U^2_{max}$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U^2_{max}$

Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**

Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**

Actualiser Ns

Sinon

Actualiser Lp, Ns

Fin Si

Actualiser la fréquence de la demande Td

Fin Si

Aller à Résultat

Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, W2, Td, a2)$

Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,

Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,

Si $D1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en fonctionnement

Générer $W1 / f_1(t)$

Initialiser l'âge de la maintenance préventive

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$

Fin Si

Si $W2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en maintenance

Générer $D2 / g_{c2}(t)$

Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**

Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d **alors**

Actualiser N_s

Sinon

Actualiser L_p, N_s

Fin Si

Actualiser la fréquence de la demande Td

Fin Si

Si $a2 = 0$ **alors**

Actualiser N_s

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$

Fin Si

Aller à Résultat

Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est en panne **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, D2, Td, a1, \text{âge})$

Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,

Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,

Si $W1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en maintenance

Générer $D1 / g_{c1}(t)$

Actualiser L_m

Fin Si

Si $D2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en fonctionnement

Générer $W2 / f_2(t)$

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(d-U_{\max}^1)$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(d-U_{\max}^1)$

Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser L_p, N_s
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Si $a_1 = 0$ **alors**
 Actualiser N_s
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
Fin Si
Si âge = 0 **alors**
 Décaler âge : âge $\leftarrow$ âge + Δm
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W_1, D_2, T_d, a_1, \text{âge})$
 Actualiser $W_1 \leftarrow W_1 - z,$
 Actualiser $D_2 \leftarrow D_2 - z,$
 Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z,$
 Actualiser $a_1 \leftarrow a_1 - z,$
 Actualiser âge $\leftarrow$ âge - $z,$
 Si $W_1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D_1 / g_{c1}(t)$
 Actualiser L_m
 Fin Si
 Si $D_2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W_2 / f_2(t)$
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(d-U_{max}^l)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(d-U_{max}^l)$
 Fin Si
 Si $T_d = 0$ **alors**
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser L_p, N_s
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande T_d
 Fin Si
 Si $a_1 = 0$ **alors**
 Actualiser N_s
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
 Fin Si
 Si âge = 0 **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D_1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser L_m
 Fin Si

Aller à Résultat
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si
Si les deux machines sont en en fonctionnement alors
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, W2, Td, a1, a2, \text{âge})$
 Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z,$
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z,$
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
 Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z,$
 Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z,$
 Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z,$
 Si $W1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_{c1}(t)$
 Actualiser Lm
 Fin Si
 Si $W2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D2 / g_{c2}(t)$
 Fin Si
 Si $a1 = 0$ **alors**
 Actualiser Ns
 Initialiser $a1 \leftarrow 1/U_{\max}^l$
 Fin Si
 Si $a2 = 0$ **alors**
 Actualiser Ns
 Initialiser $a2 \leftarrow 1/(d-U_{\max}^l)$
 Fin Si
 Si $Td = 0$ **alors**
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Lp, Ns
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
 Fin Si
 Si $\text{âge} = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm
 Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si
Résultat :
Actualiser $\text{horloge} \leftarrow \text{horloge} + z$
Si $\text{horloge} < T_{\text{sim}}$ **alors**
 Aller à Etape 1

Sinon $Ct \leftarrow Lm + Lp$

Afficher Ct

Fin Si

Fin

Algorithme de simulation de la politique PMP

Input :

$m, h, Cmp, Cmc_1, Cp, Cs, qd, Td, U_{max}^1, U_{max}^2, Tsim,$

Output :

$Lm, Lp, Ls, Ct,$

Début :

Initialiser l'âge de la maintenance préventive $\text{âge} \leftarrow m$

Initialiser l'horloge effective de simulation $\text{horloge} \leftarrow 0$

Initialiser le niveau de stock $Ns \leftarrow 0$

Initialiser le coût moyen par unité de temps des actions de maintenance $Lm \leftarrow 0$

Initialiser le coût moyen par unité de temps des demandes perdues $Lp \leftarrow 0$

Initialiser le coût moyen par unité de temps de stockage $Ls \leftarrow 0$

Initialiser le coût total moyen par unité de temps $Ct \leftarrow 0$

Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_1 $D_1 \leftarrow 0$

Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_2 $D_2 \leftarrow 0$

Générer $W1/f_1(t)$

Générer $W2/f_2(t)$

Etape 1:

Si les deux machines sont en maintenance **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, D2, Td)$

Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z,$

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z,$

Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$

Si $D1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en fonctionnement

Générer $W1 / f_1(t)$

Initialiser l'âge de la maintenance préventive

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$

Fin Si

Si $D2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en fonctionnement

Générer $W2 / f_2(t)$

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$

Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**

Actualiser $Ls,$

Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**

Actualiser Ns

Sinon

Actualiser Ns, Lp

Fin Si

Actualiser la fréquence de la demande Td

Fin Si

Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, W2, Td, a2)$

Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,

Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,

Si $D1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en fonctionnement

Générer $W1 / f_1(t)$

Initialiser l'âge de la maintenance préventive

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$

Fin Si

Si $W2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en maintenance

Générer $D2 / g_{c2}(t)$

Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**

Actualiser Ls ,

Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**

Actualiser Ns

Sinon

Actualiser Ns, Lp

Fin Si

Actualiser la fréquence de la demande Td

Fin Si

Si $a2 = 0$ **alors**

Si $Ns < h$ **alors**

Actualiser Ns

Actualiser Ls

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$

Sinon

Bloquer la machine M_2

Fin Si

Fin Si

Aller à Résultat

Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est en panne **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, D2, Td, a1, \text{âge})$

Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,

Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,

Si $W1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en maintenance

Générer $D1 / g_{c1}(t)$
Actualiser Lm
Fin Si
Si $D2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W2 / f_2(t)$
 Si $Ns < h$ **alors**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$
 Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si les deux machines sont en en fonctionnement **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, W2, Td, a1, a2, \text{âge})$
 Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z,$
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z,$
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
 Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z,$
 Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z,$
 Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z,$
 Si $W1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_{c1}(t)$
Actualiser L_m
Fin Si
Si $W2 = 0$ alors
Mettre la machine M_2 en maintenance
Générer $D2 / g_{c2}(t)$
Fin Si
Si $a1 = 0$ alors
Si $N_s < h$ alors
Actualiser N_s
Actualiser L_s
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Sinon
Bloquer la machine M_1
Fin Si
Fin Si
Si $a2 = 0$ alors
Si $N_s < h$ alors
Actualiser N_s
Actualiser L_s
Si $N_s < h$ alors
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^1)$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^1)$
Fin Si
Sinon
Bloquer la machine M_2
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ alors
Actualiser L_s
Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande qd alors
Actualiser N_s
Sinon
Actualiser N_s, L_p
Fin Si
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Si $\hat{a}ge = 0$ alors
Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_p(t)$
Initialiser l'âge de la maintenance préventive
Actualiser L_m
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est bloquée **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, Td)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$
 Fin Si
 Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls, Ns
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$
 Actualiser la fréquence de la demande Td
 Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est bloquée **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, \text{âge}, a1, Td)$
 Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,
 Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,
 Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Si $W1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_{c1}(t)$
 Actualiser Lm
 Fin Si
 Si $\text{âge} = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm
 Fin Si
 Si $a1 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si

Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser Ls, Ns
*Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors***
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W2, a2, Td)$
Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z,$
Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z,$
Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
Si $W2 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_2 en maintenance
Générer $D2 / g_{c2}(t)$
Fin Si
Si $a2 = 0$ **alors**
Si $Ns < h$ **alors**
Actualiser Ns
Actualiser Ls
Si $Ns < h$ **alors**
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$
Fin Si
Sinon
Bloquer la machine M_2
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser Ls, Ns
*Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors***
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^l$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$

Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en panne **alors**
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D2, Td)$
Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,
Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Si $D2 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Générer $W2 / f_2(t)$
Si $Ns < h$ **alors**
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{\max}^l)$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{\max}^l)$
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{\max}^l$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^l$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si les deux machine sont bloquées **alors**
 $z = Td$
Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{\max}^l$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^l$
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$

Actualiser la fréquence de la demande T_d
Aller à Résultat
Fin Si
Résultat :
Actualiser horloge $\leftarrow$ horloge + z
Si horloge < T_{sim} **alors**
 Aller à Etape 1
Sinon $C_t \leftarrow L_m + L_p + L_s$
 Afficher C_t
Fin Si
Fin

Algorithme de simulation de la politique IPMP

Input :
 $m, \Delta m, h, Cmp, Cmc_1, Cp, Cs, qd, Td, U^1_{max}, U^2_{max}, Tsim,$
Output :
 $Lm, Lp, Ls, Ct,$
Début :
Initialiser l'âge de la maintenance préventive $\hat{a} \leftarrow m$
Initialiser l'horloge effective de simulation horloge $\leftarrow 0$
Initialiser le niveau de stock $N_s \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps des actions de maintenance $L_m \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps des demandes perdues $L_p \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps de stockage $L_s \leftarrow 0$
Initialiser le coût total moyen par unité de temps $C_t \leftarrow 0$
Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_1 $D_1 \leftarrow 0$
Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_2 $D_2 \leftarrow 0$
Générer $W1/f_1(t)$
Générer $W2/f_2(t)$
Etape 1:
Si les deux machines sont en maintenance **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, D2, Td)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z,$
 Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z,$
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
 Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U^1_{max}$
 Fin Si
 Si $D2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W2 / f_2(t)$
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U^2_{max}$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U^2_{max}$
 Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, W2, Td, a2)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,
 Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U^1_{\max}$
 Fin Si
 Si $W2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D2 / g_{c2}(t)$
 Fin Si
 Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
 Fin Si
 Si $a2 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U^2_{\max}$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U^2_{\max}$
 Sinon
 Bloquer la machine M_2
 Fin Si
 Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est en panne **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, D2, Td, a1, \text{âge})$

Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,

Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,

Si $W1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en maintenance

Générer $D1 / g_{cl}(t)$

Actualiser Lm

Fin Si

Si $D2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en fonctionnement

Générer $W2 / f_2(t)$

Si $Ns < h$ **alors**

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$

Sinon

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$

Fin Si

Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**

Actualiser Ls ,

Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**

Actualiser Ns

Sinon

Actualiser Ns, Lp

Fin Si

Actualiser la fréquence de la demande Td

Fin Si

Si $a1 = 0$ **alors**

Si $Ns < h$ **alors**

Actualiser Ns

Actualiser Ls

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$

Sinon

Bloquer la machine M_1

Fin Si

Fin Si

Si $\text{âge} = 0$ **alors**

Décaler $\text{âge} : \text{âge} \leftarrow \text{âge} + \Delta m$

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, D2, Td, a1, \text{âge})$

Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,

Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,

Si $W1 = 0$ alors
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_{c1}(t)$
 Actualiser Lm
 Fin Si
Si $D2 = 0$ alors
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W2 / f_2(t)$
 Si $Ns < h$ alors
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$
 Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ alors
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd alors
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Si $a1 = 0$ alors
 Si $Ns < h$ alors
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si
Fin Si
Si âge = 0 alors
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm
 Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si

Si les deux machines sont en fonctionnement alors
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, W2, Td, a1, a2, \text{âge})$
 Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,
Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,
Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,
Si $W1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_{c1}(t)$
 Actualiser Lm
Fin Si
Si $W2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D2 / g_{c2}(t)$
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Initialiser $a1 \leftarrow 1/U^l_{max}$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si
Fin Si
Si $a2 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Si $Ns < h$ **alors**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U^2_{max}$
 Initialiser $a2 \leftarrow 1/U^2_{max}$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd-U^l_{max})$
 Initialiser $a2 \leftarrow 1/(qd-U^l_{max})$
 Fin Si
 Sinon
 Bloquer la machine M_2
 Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm

Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est bloquée **alors**
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, Td)$
Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,
Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Si $D1 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Générer $W1 / f_1(t)$
Initialiser l'âge de la maintenance préventive
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est bloquée **alors**
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, \text{âge}, a1, Td)$
Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,
Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,
Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,
Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Si $W1 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_{c1}(t)$
Actualiser Lm
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ **alors**
Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_p(t)$
Initialiser l'âge de la maintenance préventive
Actualiser Lm
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
Si $Ns < h$ **alors**
Actualiser Ns
Actualiser Ls

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
Sinon
 Bloquer la machine M_1
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser L_s, N_s
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W_2, a_2, Td)$
 Actualiser $W_2 \leftarrow W_2 - z$,
 Actualiser $a_2 \leftarrow a_2 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Si $W_2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D_2 / g_{c2}(t)$
 Fin Si
 Si $a_2 = 0$ **alors**
 Si $N_s < h$ **alors**
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Si $N_s < h$ **alors**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$
 Fin Si
 Sinon
 Bloquer la machine M_2
 Fin Si
 Fin Si
 Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser L_s, N_s
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p

Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^1$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en panne **alors**
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D2, Td)$
Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,
Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Si $D2 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Générer $W2 / f_2(t)$
Si $N_s < h$ **alors**
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^1)$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^1)$
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser L_s, N_s
Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
Actualiser N_s
Sinon
Actualiser N_s, L_p
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^1$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si les deux machine sont bloquées **alors**
 $z = Td$
Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Actualiser L_s, N_s
Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
Actualiser N_s
Sinon
Actualiser N_s, L_p
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^1$

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Aller à Résultat
Fin Si
Résultat :
Actualiser horloge $\leftarrow$ horloge + z
Si horloge $< T_{sim}$ **alors**
 Aller à Etape 1
Sinon $Ct \leftarrow Lm + Lp + Ls$
 Afficher Ct
Fin Si
Fin

Algorithme de simulation de la politique IPMP[∧]

Input :
 $m, \Delta m, h, Cmp, Cmc_1, Cp, Cs, qd, Td, U_{max}^1, U_{max}^2, Tsim,$
Output :
 $Lm, Lp, Ls, Ct,$
Début :
Initialiser l'âge de la maintenance préventive $\hat{a} \leftarrow m$
Initialiser l'horloge effective de simulation horloge $\leftarrow 0$
Initialiser le niveau de stock $Ns \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps des actions de maintenance $Lm \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps des demandes perdues $Lp \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps de stockage $Ls \leftarrow 0$
Initialiser le coût total moyen par unité de temps $Ct \leftarrow 0$
Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_1 $D_1 \leftarrow 0$
Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_2 $D_2 \leftarrow 0$
Générer $W1/f_1(t)$
Générer $W2/f_2(t)$
Etape 1:
Si les deux machines sont en maintenance **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, D2, Td)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z,$
 Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z,$
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
 Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
 Fin Si
 Si $D2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W2 / f_2(t)$

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, W2, Td, a2)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,
 Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
 Fin Si
 Si $W2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D2 / g_{c2}(t)$
 Fin Si
 Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
 Fin Si
 Si $a2 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Bloquer la machine M_2
 Fin Si
Fin Si

Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est en panne **alors**

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, D2, Td, a1, \text{âge})$

Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,

Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,

Si $W1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en maintenance

Générer $D1 / g_{cl}(t)$

Actualiser Lm

Fin Si

Si $D2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en fonctionnement

Générer $W2 / f_2(t)$

Si $Ns < h$ **alors**

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$

Sinon

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$

Fin Si

Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**

Actualiser Ls ,

Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**

Actualiser Ns

Sinon

Actualiser Ns, Lp

Fin Si

Actualiser la fréquence de la demande Td

Fin Si

Si $a1 = 0$ **alors**

Si $Ns < h$ **alors**

Actualiser Ns

Actualiser Ls

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$

Sinon

Bloquer la machine M_1

Fin Si

Fin Si

Si $\text{âge} = 0$ et $Ns < h$ **alors**

Décaler $\text{âge} : \text{âge} \leftarrow \text{âge} + \Delta m$

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, D2, Td, a1, \text{âge})$

Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,

Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,
Actualiser $\hat{a}ge \leftarrow \hat{a}ge - z$,
Si $W1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_{cl}(t)$
 Actualiser Lm
Fin Si
Si $D2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W2 / f_2(t)$
 Si $Ns < h$ **alors**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$
 Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser Ls ,
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
Sinon
 Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si
Fin Si
Si $\hat{a}ge = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si
Si $\hat{a}ge = 0$ et $Ns = h$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm

Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si les deux machines sont en fonctionnement alors

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, W2, Td, a1, a2, \text{âge})$

Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,

Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,

Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,

Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,

Si $W1 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_1 en maintenance

Générer $D1 / g_{c1}(t)$

Actualiser Lm

Fin Si

Si $W2 = 0$ **alors**

Mettre la machine M_2 en maintenance

Générer $D2 / g_{c2}(t)$

Fin Si

Si $a1 = 0$ **alors**

Si $N_s < h$ **alors**

Actualiser N_s

Actualiser L_s

Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$

Sinon

Bloquer la machine M_1

Fin Si

Fin Si

Si $a2 = 0$ **alors**

Si $N_s < h$ **alors**

Actualiser N_s

Actualiser L_s

Si $N_s < h$ **alors**

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$

Sinon

Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^1)$

Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^1)$

Fin Si

Sinon

Bloquer la machine M_2

Fin Si

Fin Si

Si $Td = 0$ **alors**

Actualiser L_s ,

Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande qd **alors**

Actualiser N_s

Sinon

Actualiser N_s, L_p
Fin Si
Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Si âge = 0 **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser L_m
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est bloquée **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, T_d)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z,$
 Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z,$
 Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$
 Fin Si
 Si $T_d = 0$ **alors**
 Actualiser L_s, N_s
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$
 Actualiser la fréquence de la demande T_d
 Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est bloquée **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, \text{âge}, a1, T_d)$
 Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z,$
 Actualiser âge $\leftarrow \text{âge} - z,$
 Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z,$
 Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z,$
 Si $W1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_{cl}(t)$
 Actualiser L_m
 Fin Si
 Si âge = 0 **alors**

Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_p(t)$
Initialiser l'âge de la maintenance préventive
Actualiser L_m
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
 Si $N_s < h$ **alors**
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si
Fin Si
Si $T_d = 0$ **alors**
Actualiser L_s, N_s
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W2, a2, T_d)$
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z,$
 Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z,$
 Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z,$
 Si $W2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D2 / g_{c2}(t)$
 Fin Si
 Si $a2 = 0$ **alors**
 Si $N_s < h$ **alors**
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Si $N_s < h$ **alors**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(q_d - U_{max}^l)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(q_d - U_{max}^l)$
 Fin Si
 Sinon

Bloquer la machine M_2
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ alors
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd alors
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^l$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en panne alors
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D2, Td)$
Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z,$
Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
Si $D2 = 0$ alors
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Générer $W2 / f_2(t)$
Si $Ns < h$ alors
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ alors
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd alors
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^l$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si les deux machine sont bloquées alors
 $z = Td$

Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
Sinon
 Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^1$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Aller à Résultat
Fin Si
Résultat :
Actualiser horloge $\leftarrow$ horloge + z
Si horloge $< T_{sim}$ **alors**
 Aller à Etape 1
Sinon $Ct \leftarrow Lm + Lp + Ls$
 Afficher Ct
Fin Si
Fin

Algorithme de simulation de la politique IPMP^u

Input :
 $m, \Delta m, h, Cmp, Cmc_1, Cp, Cs, qd, Td, U_{max}^1, U_{max}^2, Tsim$,
Output :
 Lm, Lp, Ls, Ct ,
Début :
Initialiser l'âge de la maintenance préventive $\hat{a} \leftarrow m$
Initialiser l'horloge effective de simulation horloge $\leftarrow 0$
Initialiser le niveau de stock $Ns \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps des actions de maintenance $Lm \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps des demandes perdues $Lp \leftarrow 0$
Initialiser le coût moyen par unité de temps de stockage $Ls \leftarrow 0$
Initialiser le coût total moyen par unité de temps $Ct \leftarrow 0$
Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_1 $D_1 \leftarrow 0$
Initialiser la durée d'action de maintenance de la machine M_2 $D_2 \leftarrow 0$
Générer $W1/f_1(t)$
Générer $W2/f_2(t)$
Etape 1:
Si les deux machines sont en maintenance **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, D2, Td)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,
 Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,

Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Fin Si
Si $D2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W2 / f_2(t)$
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, W2, Td, a2)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z$,
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,
Si $D1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Fin Si
Si $W2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D2 / g_{c2}(t)$
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls ,
 Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Si $a2 = 0$ **alors**

Si $N_s < h$ **alors**
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Sinon
 Bloquer la machine M_2
Fin Si
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est en panne **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W_1, D_2, T_d, a_1, \text{âge})$
 Actualiser $W_1 \leftarrow W_1 - z$,
 Actualiser $D_2 \leftarrow D_2 - z$,
 Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z$,
 Actualiser $a_1 \leftarrow a_1 - z$,
 Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,
Si $W_1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D_1 / g_{c1}(t)$
 Actualiser L_m
Fin Si
Si $D_2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W_2 / f_2(t)$
 Si $N_s < h$ **alors**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(q_d - U_{max}^l)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(q_d - U_{max}^l)$
 Fin Si
Fin Si
Si $T_d = 0$ **alors**
 Actualiser L_s ,
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Si $a_1 = 0$ **alors**
 Si $N_s < h$ **alors**
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
 Sinon

Bloquer la machine M_1
Fin Si
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ alors
 Décaler $\text{âge} \leftarrow \text{âge} + \Delta m$
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, D2, Td, a1, \text{âge})$
 Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,
 Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,
 Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,
 Si $W1 = 0$ alors
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_{c1}(t)$
 Actualiser Lm
 Fin Si
 Si $D2 = 0$ alors
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Générer $W2 / f_2(t)$
 Si $N_s < h$ alors
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{\max}^1)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{\max}^1)$
 Fin Si
 Fin Si
 Si $Td = 0$ alors
 Actualiser L_s ,
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande qd alors
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Si $a1 = 0$ alors
 Si $N_s < h$ alors
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ alors
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm

Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si les deux machines sont en en fonctionnement alors
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, W2, Td, a1, a2, \text{âge})$
Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z,$
Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z,$
Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z,$
Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z,$
Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z,$
Si $W1 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_{c1}(t)$
Actualiser Lm
Fin Si
Si $W2 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_2 en maintenance
Générer $D2 / g_{c2}(t)$
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
Si $Ns < h$ **alors**
Actualiser Ns
Actualiser Ls
Initialiser $a1 \leftarrow 1/U^1_{\max}$
Sinon
Bloquer la machine M_1
Fin Si
Fin Si
Si $a2 = 0$ **alors**
Si $Ns < h$ **alors**
Actualiser Ns
Actualiser Ls
Si $Ns < h$ **alors**
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U^2_{\max}$
Initialiser $a2 \leftarrow 1/U^2_{\max}$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U^1_{\max})$
Initialiser $a2 \leftarrow 1/(qd - U^1_{\max})$
Fin Si
Sinon
Bloquer la machine M_2
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser $Ls,$
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**

Actualiser N_s
Sinon
Actualiser N_s, L_p
Fin Si
Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ et $N_s = h$ **alors**
Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_p(t)$
Initialiser l'âge de la maintenance préventive
Actualiser L_m
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ et $N_s < h$ **alors**
Décaler $\text{âge} : \text{âge} \leftarrow \text{âge} + \Delta m$
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, W2, T_d, a1, a2, \text{âge})$
Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z,$
Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z,$
Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z,$
Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z,$
Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z,$
Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z,$
Si $W1 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_1 en maintenance
Générer $D1 / g_{c1}(t)$
Actualiser L_m
Fin Si
Si $W2 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_2 en maintenance
Générer $D2 / g_{c2}(t)$
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
Si $N_s < h$ **alors**
Actualiser N_s
Actualiser L_s
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U^1_{\max}$
Sinon
Bloquer la machine M_1
Fin Si
Fin Si
Si $a2 = 0$ **alors**
Si $N_s < h$ **alors**
Actualiser N_s
Actualiser L_s
Si $N_s < h$ **alors**
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U^2_{\max}$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U^2_{\max}$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(q_d - U^1_{\max})$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(q_d - U^1_{\max})$
Fin Si

Sinon
Bloquer la machine M_2
Fin Si
Fin Si
Si $T_d = 0$ alors
 Actualiser L_s ,
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d alors
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Si âge = 0 et $N_s = h$ alors
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser L_m
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en maintenance et la machine M_2 est bloquée alors
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D1, T_d)$
 Actualiser $D1 \leftarrow D1 - z,$
 Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z,$
 Si $D1 = 0$ alors
 Mettre la machine M_1 en fonctionnement
 Générer $W1 / f_1(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$
 Fin Si
 Si $T_d = 0$ alors
 Actualiser L_s, N_s
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d alors
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
 Mettre la machine M_2 en fonctionnement
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{\max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$
 Actualiser la fréquence de la demande T_d
 Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est en fonctionnement et la machine M_2 est bloquée alors

Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, \text{âge}, a1, Td)$
Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,
Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,
Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,
Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
Si $W1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 **en maintenance**
 Générer $D1 / g_{cl}(t)$
 Actualiser Lm
Fin Si
Si $a1 = 0$ **alors**
 Si $Ns < h$ **alors**
 Actualiser Ns
 Actualiser Ls
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{\max}^1$
 Sinon
 Bloquer la machine M_1
 Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
 Actualiser Ls, Ns
 Si le niveau de stock Ns **est supérieur ou égale à la demande** qd **alors**
 Actualiser Ns
 Sinon
 Actualiser Ns, Lp
 Fin Si
 Mettre la machine M_2 **en fonctionnement**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 **à** $1/U_{\max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{\max}^2$
 Actualiser la fréquence de la demande Td
 Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ **et** $Ns = h$ **alors**
 Mettre la machine M_1 **en maintenance**
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser Lm
Fin Si
Si $\text{âge} = 0$ **et** $Ns < h$ **alors**
 Décaler âge : $\text{âge} \leftarrow \text{âge} + \Delta m$
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W1, \text{âge}, a1, Td)$
 Actualiser $W1 \leftarrow W1 - z$,
 Actualiser $Td \leftarrow Td - z$,
 Actualiser $a1 \leftarrow a1 - z$,
 Actualiser $\text{âge} \leftarrow \text{âge} - z$,
 Si $W1 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_1 **en maintenance**
 Générer $D1 / g_{cl}(t)$
 Actualiser Lm
 Fin Si
 Si $a1 = 0$ **alors**

Si $N_s < h$ **alors**
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^1$
Sinon
 Bloquer la machine M_1
Fin Si
Fin Si
Si $T_d = 0$ **alors**
 Actualiser L_s, N_s
 Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande q_d **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
 Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Si âge = 0 et $N_s = h$ **alors**
 Mettre la machine M_1 en maintenance
 Générer $D1 / g_p(t)$
 Initialiser l'âge de la maintenance préventive
 Actualiser L_m
Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si
 Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en fonctionnement **alors**
 Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(W2, a2, T_d)$
 Actualiser $W2 \leftarrow W2 - z$,
 Actualiser $a2 \leftarrow a2 - z$,
 Actualiser $T_d \leftarrow T_d - z$,
 Si $W2 = 0$ **alors**
 Mettre la machine M_2 en maintenance
 Générer $D2 / g_{c2}(t)$
 Fin Si
 Si $a2 = 0$ **alors**
 Si $N_s < h$ **alors**
 Actualiser N_s
 Actualiser L_s
 Si $N_s < h$ **alors**
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
 Sinon
 Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(q_d - U_{max}^1)$
 Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(q_d - U_{max}^1)$
 Fin Si
 Sinon
 Bloquer la machine M_2

Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^l$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si

Si la machine M_1 est bloquée et la machine M_2 est en panne **alors**
Déterminer le prochain événement $z = \text{MIN}(D2, Td)$
Actualiser $D2 \leftarrow D2 - z,$
Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
Si $D2 = 0$ **alors**
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Générer $W2 / f_2(t)$
Si $Ns < h$ **alors**
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U_{max}^2$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U_{max}^2$
Sinon
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/(qd - U_{max}^l)$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/(qd - U_{max}^l)$
Fin Si
Fin Si
Si $Td = 0$ **alors**
Actualiser Ls, Ns
Si le niveau de stock Ns est supérieur ou égale à la demande qd **alors**
Actualiser Ns
Sinon
Actualiser Ns, Lp
Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U_{max}^l$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U_{max}^l$
Actualiser la fréquence de la demande Td
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si
Si les deux machine sont bloquées **alors**
 $z = Td$
Actualiser $Td \leftarrow Td - z,$
Si $Td = 0$ **alors**

Actualiser L_s, N_s
Si le niveau de stock N_s est supérieur ou égale à la demande *qd* **alors**
 Actualiser N_s
 Sinon
 Actualiser N_s, L_p
 Fin Si
Mettre la machine M_1 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_1 à $1/U^1_{max}$
Initialiser $a_1 \leftarrow 1/U^1_{max}$
Mettre la machine M_2 en fonctionnement
Ajuster la cadence de production de la machine M_2 à $1/U^2_{max}$
Initialiser $a_2 \leftarrow 1/U^2_{max}$
Actualiser la fréquence de la demande T_d
Fin Si
Aller à Résultat
Fin Si
Résultat :
Actualiser horloge $\leftarrow$ horloge + z
Si horloge < T_{sim} **alors**
 Aller à Etape 1
Sinon $C_t \leftarrow L_m + L_p + L_s$
 Afficher C_t
Fin Si
Fin

Développements des scénarios possibles (section 3.3.2)

On note que:

$e(M_i)$: L'état de la machine M_i ($i \in \{1, 2\}$)

Avec

$e(M_i) = 1$: la machine M_i est en fonctionnement.

$e(M_i) = 0$: la machine M_i est en arrêt pour maintenance

$e(M_i) = 0$ (pénurie) : la machine M_i est en arrêt pour maintenance et l'arrêt cause des pénuries

$\{i, j\} \in \{1, 2\}$

*Scénarios de type A (pas d'arrêt simultané des deux machines et pas de pénuries) :

1^{er} cas: on n'atteint pas le niveau h une deuxième fois.3. (4 scénarios possibles)

Sous scénario 1: $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on a :

$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{1(c)}, D_k^{1(c)}, W_k^2, D_k^2), X_k = \xi_1^k \text{ et } (i, j) = (2, 1)$
--

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénario 2 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on a :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{l(p)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénario 3 : si $(A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas on a :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0	1	1

Sous scénario 4 : si $(A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m)$

Dans ce cas on a :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, m, D_k^{l(p)}) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0	1	1

2^{ème} cas : on atteint le niveau h une deuxième fois. (4 scénarios possibles)

Sous scénario 5 : si $(A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on a :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénario 6 : si $(A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on a :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{l(p)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénario 7 : si $(A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas on a :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
--	----------------	----------------	----------------	--------------

e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0	1	1

Sous scénario 8 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m)$

Dans ce cas on a :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_{k'}^2, D_{k'}^2, m, D_k^{l(p)}) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0	1	1

*Scénarios du type B (Arrêt simultané des deux machines sans pénuries) :

Pour ce cas, on assiste à 8 sous scénarios possibles :

Sous scénarios 9 et 10 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on a :

$$(W, D) = (W_{k'}^1, \max(W_k^2 + D_{k'}^2, W_k^{l(c)} + D_k^{l(c)}) - W) \quad , \quad (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'}) \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1) \quad (2 \text{ scénarios possibles})$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	0	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénarios 11 et 12 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on a :

$$(W, D) = (m, \max(W_k^2 + D_{k'}^2, m + D_k^{l(p)}) - m) \quad , \quad (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'}) \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1) \quad (2 \text{ scénarios possibles})$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	0	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénarios 13 et 14 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas on a :

$$(W, D) = (W_{k'}^2, \max(W_k^2 + D_{k'}^2, W_k^{l(c)} + D_k^{l(c)}) - W_{k'}^2) \quad , \quad (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k) \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2) \quad (2 \text{ scénarios possibles})$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0	0	1

Sous scénarios 15 et 16 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m)$

Dans ce cas on a :

$$(W, D) = (W_{k'}^2, \max(W_k^2 + D_{k'}^2, m + D_k^{l(p)}) - W_{k'}^2) \quad , \quad (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m) \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2) \quad (2 \text{ scénarios possibles})$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1

e(M ₂)	1	0	0	1
--------------------	---	---	---	---

*Scénarios de type C (Pas d'arrêt simultané des deux machines avec pénuries) :

1^{ier} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on n'atteint pas h une deuxième fois et des pénuries sont causées par l'arrêt des deux machines. (4 scénarios possibles)

Sous scénario 17 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{(c)}, D_k^{(c)}, W_k^2, D_k^2), \quad X_k = \xi_1^k \text{ et } (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 18 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{(p)}, W_k^2, D_k^2), \quad X_k = m \text{ et } (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 19 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^k, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{(c)}, D_k^{(c)}), \quad X_k = \xi_1^k \text{ et } (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

Sous scénario 20 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^k, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, m, D_k^{(p)}), \quad X_k = m \text{ et } (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

2^{ième} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on n'atteint pas h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la 2^{ème} machine arrêtée pour les actions de maintenance (4 scénarios possibles)

Sous scénario 21 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^k)$

Dans ce cas on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 22: $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient:

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{l(p)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 23 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient:

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0	1	1

Sous scénario 24 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, m, D_k^{l(p)}) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0	1	1

3^{ème} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on n'atteint pas h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la première machine qui doit subir des actions maintenance

Sous scénario 25 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénario 26 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{(p)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous Scénario 27 : si $(A_1, A_2) = (\xi_2^k, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{(c)}, D_k^{(c)}) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

Sous Scénario 28 : si $(A_1, A_2) = (\xi_2^k, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, m, D_k^{(p)}) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

4^{ième} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on atteint le niveau h une deuxième fois avec des pénuries causées par l'arrêt des deux machines. (4 scénarios possibles)

Sous scénario 29 : si $(A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{(c)}, D_k^{(c)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 30 : si $(A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{(p)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 31 : si $(A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{(c)}, D_k^{(c)}) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

Sous scénario 32 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^k, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, m, D_k^{(p)}) \quad , \quad X_k = m \text{ et } (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

5^{ème} CAS : Pas d'arrêt simultané des deux machines, on atteint le niveau h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la deuxième machine qui subit des actions de maintenance. (4 scénarios possibles)

Sous scénario 33 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{(c)}, D_k^{(c)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \text{ et } (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 34 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{(p)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = m \text{ et } (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	1	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénario 35 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^k, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{(c)}, D_k^{(c)}) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \text{ et } (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0	1	1

Sous scénario 36 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^k, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, m, D_k^{(p)}) \quad , \quad X_k = m \text{ et } (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0	1	1

6^{ème} CAS: Pas d'arrêt simultané des deux machines, on atteint de nouveau h une deuxième fois avec des pénuries causées seulement par l'arrêt de la première machine qui subit des actions de maintenance. (4 scénarios possibles)

Sous scénario 37 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénario 38 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (m, D_k^{l(p)}, W_k^2, D_k^2) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	1	1
e(M ₂)	1	1	0	1

Sous scénario 39 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient:

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, W_k^{l(c)}, D_k^{l(c)}) \quad , \quad X_k = \xi_1^k \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

Sous scénario 40 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W_1, D_1, W_2, D_2) = (W_k^2, D_k^2, m, D_k^{l(p)}) \quad , \quad X_k = m \quad \text{et} \quad (i, j) = (1, 2)$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	1	1

*Scénarios du type D (Arrêt simultané des deux machines et avec des pénuries):

1^{ier} Cas: Début des pénuries après la restauration d'une des deux machines arrêtées pour les actions de maintenance (8 scénarios possibles).

Sous scénarios 41 et 42: $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_{ke}^1, \max(W_k^2 + D_k^2, W_k^{l(c)} + D_k^{l(c)}) - W) \quad , \quad (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'}) \quad \text{et} \quad (i, j) = (2, 1) \quad (2 \text{ scénarios possibles})$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	0	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénarios 43 et 44 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (m, \max(W_k^{2*} + D_k^{2*}, W_k^{1(p)} + D_k^{1(p)}) - m) \text{ , } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'}) \text{ et } (i, j) = (2, 1) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0	0	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénarios 45 et 46 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_k^{2*}, \max(W_k^{2*} + D_k^{2*}, W_k^{1(c)} + D_k^{1(c)}) - W_k^{2*}) \text{ , } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k) \text{ et } (i, j) = (1, 2) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0	0	1

Sous scénarios 47 et 48 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_k^{2*}, \max(W_k^{2*} + D_k^{2*}, m + D_k^{1(p)}) - W_k^{2*}) \text{ , } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m) \text{ et } (i, j) = (1, 2) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0	0	1

2^{ème} Cas : Début des pénuries pendant la phase d'arrêt simultanée des deux machines (8 scénarios possibles)

Sous scénarios 49 et 50 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_{kc}^1, \max(W_k^{2*} + D_k^{2*}, W_k^{1(c)} + D_k^{1(c)}) - W) \text{ , } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'}) \text{ et } (i, j) = (2, 1) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	0	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénarios 51 et 52 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (m, \max(W_k^{2*} + D_k^{2*}, m + D_k^{1(p)}) - W_k^{1(p)}) \text{ , } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'}) \text{ et } (i, j) = (2, 1) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	0	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénarios 53 et 54 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_k^2, \max(W_k^2 + D_k^2, W_k^{1(c)} + D_k^{1(c)}) - W_k^2), (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k) \text{ et } (i, j) = (1, 2) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	0	1

Sous scénarios 55 et 56 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_k^2, \max(W_k^2 + D_k^2, m + D_k^{1(p)}) - W_k^2), (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, m) \text{ et } (i, j) = (1, 2) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	0	1

3^{ème} Cas: Début des pénuries pendant la phase de réparation de la première machine arrêtée pour les actions de maintenance et avant que l'autre machine ne soit arrêtée pour les actions maintenance (8 scénarios possibles).

Sous scénarios 57 et 58 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_k^1, \max(W_k^2 + D_k^2, W_k^{1(c)} + D_k^{1(c)}) - W_k^1), (A_1, A_2) = (\xi_1^k, \xi_2^{k'}) \text{ et } (i, j) = (2, 1) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	0	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénarios 59 et 60 : $\text{si } (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'})$

Dans ce cas on obtient :

$$(W, D) = (m, \max(W_k^2 + D_k^2, m + D_k^{1(p)}) - W_k^{1(p)}), (A_1, A_2) = (m, \xi_2^{k'}) \text{ et } (i, j) = (2, 1) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	0 (pénurie)	0	1
e(M ₂)	1	1	0 (pénurie)	1

Sous scénarios 61 et 62 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k)$

Dans ce cas, on obtient :

$$(W, D) = (W_k^2, \max(W_k^2 + D_k^2, W_k^{1(c)} + D_k^{1(c)}) - W_k^2), (A_1, A_2) = (\xi_2^{k'}, \xi_1^k) \text{ et } (i, j) = (1, 2) \text{ (2 scénarios possibles)}$$

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1

e(M ₂)	1	0 (pénurie)	0	1
--------------------	---	-------------	---	---

Sous scénarios 63 et 64 : $\text{si } (A_1, A_2) = (\mathcal{G}_2^{k^*}, m)$

Dans ce cas on obtient :

$(W, D) = (W_{k^*}^2, \max(W_{k^*}^2 + D_{k^*}^2, m + D_k^{1(p)}) - W_{k^*}^2) \quad , \quad (A_1, A_2) = (\mathcal{G}_2^{k^*}, m) \quad \text{et } (i, j) = (1, 2) \quad (2 \text{ scénarios possibles})$
--

	Début du cycle	A ₁	A ₂	Fin du cycle
e(M ₁)	1	1	0 (pénurie)	1
e(M ₂)	1	0 (pénurie)	0	1

Bibliographie

- [Abb03] Abbou R., "[Contribution à la mise en oeuvre d'une maintenance centralisée](#): conception et optimisation d'un atelier de maintenance", Université Joseph Fourier (Grenoble), 2003.
- [ADS95] Abdelnour G., Duddek R.A., Smith M.L., "Effect of maintenance policies on just-in-time production system", *International Journal of Production Research*, vol. 33, pp 565-585, 1995.
- [AK86] Akella R., Kurnar P.R., "Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, pp 116-126, 1986.
- [Ben02] Ben-Daya M., "The Economic Production Lot-sizing Problem With Imperfect Production Processes And Imperfect Maintenance", *International Journal of Production Economics*, vol. 76, pp 257-264, 2002.
- [Ben05] Benbouzid-Sitayeb F " Contribution à l'étude de la performance et de la robustesse des ordonnancements conjoints Production/Maintenance - Cas du flowshop", Université de Franche-Comté, 2005.
- [Ber78] Bergman B., "Optimal replacement under a general failure model", *Adv. Appl. Probab.*, vol. 10, pp 431-451, 1978.
- [BH60] Barlow R., Hunter L., "Optimum Preventive Maintenance Policies", *Operations Research*, vol. 8, pp 90-100, 1960.
- [BH90] Boukas E.K., Haurie A., "Manufacturing flow control and preventive maintenance: a stochastic control approach", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 35, pp 1024-1031, 1990.
- [BS92] Buzacott J.A., Shanthikumar J.G., "Stochastic models of manufacturing systems", *Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ*, 1992.
- [CA04] Chelbi A., Ait-Kadi D., "Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance", *European Journal of Operational Research*, pp 712-718, 2004.
- [CH97] Cheung K.L., Hausmann W.H., "Joint Optimization of Preventive Maintenance and Safety Stocks in an Unreliable Production Environment", *Naval Research Logistics*, vol. 44, pp 257-272, 1997.
- [Cha01] Chan F.T.S., "Simulation analysis of maintenance policies in a flow line production system", *International Journal of Computer Applications in Technology*, vol. 14, n° 1-3, pp 78-86, 2001.

- [CR05] Chelbi A., Rezg N., "Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit subjected to a minimum required availability level", *International Journal of Production Economics*, pp 131-143, 2005.
- [DG92] Dallery Y., Gershwin S.B., "Manufacturing flow line systems: a review of models and analytical results", *Queueing Systems*, vol. 12, pp 3-94, 1992.
- [DHS01] Dohi T., Hiroyuki O., Shunji O., "Optimal control of preventive maintenance schedule and safety stocks in an unreliable manufacturing environment", *International Journal of Production Economics*, vol. 74, Issues 1-3, pp 147-155, December 2001.
- [DRC05] Dellagi S., Rezg N., Chelbi A., "Contribution à l'élaboration d'une politique de commande optimale intégrant la maintenance : Cas d'une demande aléatoire", *6^{ème} Congrès international de Génie industriel*, Besançon, France, Juin, 2005.
- [DRX06a] Dellagi S., Rezg N., Xie X., "Preventive Maintenance of Manufacturing Systems Under Environmental Constraints", *International Journal of Production Research*, à paraître.
- [DRX06b] Dellagi S., Rezg N., Xie X., "Choix de la politique de maintenance préventive pour un système de production sous une contrainte de sous-traitance", *MOSIM 2006, 6^{ème} Conférence Francophone de Modélisation et Simulation*, Rabat, Maroc, Avril 2006.
- [DRX06c] Dellagi S., Rezg N., Xie X., "Preventive Maintenance of Manufacturing Systems under subcontractor Constraints", *INCOM 2006, 12th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing*, Saint Etienne, France, Mai 2006.
- [DY01] Dong-Ping S., You-Xian S., "Optimal hedging point for a failure-prone manufacturing system", *International Journal Of Systems Science*, vol. 32, n° 6, pp 681-688, 2001.
- [GK00] Gharbi A., Kenne J.P., "Production and corrective maintenance planning of FMS through simulation optimisation", *4th International Conference on Engineering Design and Automation*, Orlando, Florida, USA, 2000.
- [GK03] Gharbi A., Kenné, J.P., "Optimal Production Control problem in stochastic multiple-product multi-machines manufacturing systems", *IIE Transactions*, n° 35, pp. 941-952, 2003.
- [Kaf01] Kaffel H., "La maintenance distribuée : concept, évaluation et mise en oeuvre", Faculté des études supérieures de l'Université Laval, 2003.
- [KBG03] Kenne, J. P., Boukas E. K., Gharbi A., "Control of Production and Corrective Maintenance Rates in a Multiple-Machine, Multiple-Product Manufacturing System". *Mathematical and Computer Modelling*, 38, pp351-365, 2003.

- [KG01] Kenne J.P., Gharbi A., "[A simulation optimization approach in production planning of failure prone manufacturing systems](#)", *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 12, Issue 5/6, pp 421-431, 2001.
- [Mul 05] Muller A., "Contribution à la maintenance prévisionnelle des systèmes de production par la formalisation d'un processus de pronostic", Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2005.
- [ORX02] Ouali M.S., Rezg N., Xie X., "Maintenance préventive et optimisation des flux d'un système de production", *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, Vol. 36, N°1, pp 97-116, 2002.
- [RCX05] Rezg N., Chelbi A., Xie X., "Modeling and optimizing a joint buffer inventory and preventive maintenance strategy for a randomly failing production unit: Analytical and simulation approaches", *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 2005.
- [RXM04] Rezg, N., Xie X., Mati Y., "Joint optimisation of preventive maintenance and inventory control in a production line using simulation", *International Journal of Production Research*, 44, pp 2029-2046. 2004.
- [Tem01] Tempelmeier H., "Performance evaluation of unbalanced flow lines with general distributed processing times, failures and imperfect production", *IIE Transactions*, vol. 33, n° 4, pp 293-302, 2001.
- [Val89] Valdez-Flores C., "Survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems", *Naval Research Logistics*, vol. 36, n° 4, pp 419-446, 1989.
- [Van95] Van Bracht E., "Performance analysis of a serial production line with machine breakdowns", *IEEE Symposium on Emerging Technologies & Factory Automation*, vol. 3, pp. 417-424, 1995.
- [Xie93] Xie X.L., "Performance analysis of a transfer line with unreliable machines and finite buffers", *IIE Transactions*, vol. 25, n° 1, pp 99-108, 1993.

Développement de stratégies de maintenance dans un contexte de sous-traitance partielle de production

Résumé

La modélisation impose de nos jours une remise à plat des politiques de gestion industrielle. Cette remise à plat est nécessaire pour la survie des entreprises évoluant dans un contexte de concurrence exacerbé et sans limite. Les politiques de maintenance des systèmes de production n'échappent pas à ce constat et leur remise en cause est nécessaire dans ce contexte. En effet, les politiques de maintenance traditionnelle ne permettent pas d'assurer la pérennité ainsi que la croissance durable pour les entreprises d'aujourd'hui, où la réduction des coûts et des délais est devenue l'objectif principal. Pour répondre à cet objectif, les entreprises font appel souvent à la sous-traitance qui est devenue la règle et non l'exception. Ceci impose une nouvelle contrainte dans la gestion de la maintenance.

Dans ce cadre, le travail présenté dans cette thèse constitue une contribution à l'élaboration d'une politique de maintenance faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production dans un contexte de sous-traitance. Le problème posé dans cette thèse traite des politiques de maintenance intégrant l'aspect production sous la contrainte de sous-traitance. Le système de production considéré se compose d'une seule machine M_1 . Pour satisfaire une demande client, il est nécessaire de faire appel à la sous-traitance représentée par une machine M_2 . La sous-traitance impose des périodes d'indisponibilité incontrôlables. D'un point de vue fiabilité, nous supposons que le taux de défaillance de la sous-traitance de la machine M_2 est constant. Seule la machine M_1 est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge, dont l'objectif de réduire la probabilité d'occurrence des pannes. Différentes politiques de maintenance intégrant l'aspect production ont été élaborées pour tenir compte de la contrainte de sous-traitance. Ces politiques ont été comparées par rapport à une politique de maintenance simple SMP (Simple Maintenance Policy) ne tenant pas compte de la sous-traitance. Dans la première partie de cette thèse, une nouvelle politique de maintenance a été proposée dans cette thèse, il s'agit de la politique de maintenance améliorée IMP (Improved Maintenance Policy) et qui tient compte de la contrainte de sous-traitance. Les conditions d'efficacité en termes de performances de IMP ont été prouvées analytiquement. Dans la deuxième partie de cette thèse, des extensions de IMP ont été proposées dans l'objectif d'améliorer la performance en termes de coûts. Les conditions d'existence et d'unicité de l'optimalité de ces extensions ont été prouvées.

Mots-clés : sous-traitance, maintenance préventive, maintenance corrective, performance, simulation plan d'expérience, optimisation, gestion de la production.

Abstract :

Nowadays, the enterprises move under a hard competition. The satisfaction of the client in time became a difficult spot. Since that, the majority of the actual company call upon to the subcontractor in order to cover the client demand and to reduce the demand loss. In fact, it's time to expand new maintenance/production strategies by taking into account the context of subcontractor. In this memory we treat some maintenance policies integrated with production under the subcontractor constraint. The manufacturing system under consideration consists on machine M_1 which produces a single product. In order to satisfy a constant demand d , the system called upon to subcontractor. The subcontractor is presented by another machine M_2 which produces at a certain rate the same type of product as M_1 . Both machines are subject to random failures. An age-limit policy is used for preventive maintenance of machine M_1 . Point of view maintenance actions, the subcontractor is not controlled by us. We considered that the subcontractor imposes some unavailability periods. That's why we suppose that the failure rate of the subcontractor is constant. In this work we elaborated different strategies integrating maintenance and production. In these strategies we are taking in account the constraint of subcontractor. These strategies are optimised and its performances are compared to a simple maintenance policy SMP in which we don't taking in account the subcontractor. Finally, we classified all the strategies developed in this work according its performances orders compared to SMP and noted the performance constraints of theses policies.

Keywords: subcontractor, preventive maintenance, corrective maintenance, profit, simulation, Experimental Design, optimisation.