

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
ET MECANIQUE DES MATERIAUX



Thèse

présentée par

Christophe CZARNOTA

pour l'obtention du grade de :

Docteur de l'Université Paul Verlaine de METZ

SPECIALITE : Physique et Sciences pour l'ingénieur

OPTION : Mécanique

**Endommagement ductile des matériaux métalliques sous
chargement dynamique - Application à l'écaillage**

Soutenue le 1^{er} décembre 2006 devant le jury composé de :

Saïd AHZI	Professeur, Université de Strasbourg	Rapporteur
Hervé COUQUE	Ingénieur HDR, Nexter Bourges	Rapporteur
Richard DORMEVAL	Ingénieur, CEA Valduc	Examineur
André DRAGON	DR CNRS, LMPM – ENSMA de Poitiers	Examineur
Sébastien MERCIER	Maître de Conférences, Université de Metz	Co-encadrant de thèse
Alain MOLINARI	Professeur, Université de Metz	Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz, sous la direction de Monsieur Alain MOLINARI, professeur à l'UPVM, que je remercie pour les conseils et la confiance qu'il m'a donnés et pour qui j'ai une très grande admiration. Ce travail a également été encadré par Monsieur Sébastien MERCIER, maître de conférences à l'UPVM, que je remercie particulièrement pour sa grande disponibilité, son soutien, et l'exemple qu'il incarne pour tout jeune chercheur. Qu'ils trouvent ici tous deux le témoignage d'une immense reconnaissance et d'un profond respect. Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Nicolas JACQUES, maître de conférences à l'ENSIETA, et grand spécialiste es éléments finis, pour sa disponibilité et son aide précieuse.

Je remercie Monsieur André DRAGON, directeur de recherche CNRS à l'ENSMA de Poitiers, d'avoir accepté de s'intéresser à mon travail et de m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Je remercie également MM. Saïd AHZI, professeur à l'université Louis Pasteur de Strasbourg, et Hervé COUQUE, ingénieur HDR chez Nexter à Bourges pour les conseils et critiques constructives qu'ils ont pu me faire bénéficier en rapportant ce travail. Mes remerciements s'adressent également à M. Richard DORMEVAL, ingénieur au CEA de Valduc, pour avoir bien voulu faire partie du jury et pour l'intérêt qu'il a témoigné à l'égard du travail réalisé.

Passons aux collègues et amis thésards du LPMM. Je ne peux citer tout le monde mais une pensée particulière ira vers ceux que j'ai connus dès les premières heures de mon arrivée au laboratoire. Ayoub d'in chnord ...d'un autre continent, Seb d'in chnord...des Vosges, Jérôme d'in chnord...d'une autre planète (où l'atmosphère hostile nécessite l'utilisation d'un ionisateur d'air et d'un simulateur d'aube...), Nicolas d'in chnord si on tourne la carte de France d' $\frac{1}{4}$ de tour dans le sens des aiguilles d'une montre (Yech'hed mat) et enfin Xavier un gars vraiment d'in chnord qui mérite de faire quelques progrès à $\circ \times \square \triangle$. Je salue aussi les nouveaux arrivants que je ne connais que depuis peu de temps mais pour qui j'ai déjà la plus grande amitié. Xavier surnommé à présent 'Six-un' et Yves alias 'mythique' en clin d'œil à sa passion pour la Grèce Antique. Enfin, je salue tous ceux que je connais pour n'oublier personne...

Je dédie ce travail à mes parents qui ont cru en moi et m'ont toujours fait confiance, à mon frère Stéphane et sa femme Virginie, et plus particulièrement à mon épouse Sandrine qui a su faire preuve de soutien et de compréhension dans les moments difficiles.

Table des matières

INTRODUCTION	1
I ETAT DE L'ART	9
Introduction	11
1 Evolution de l'endommagement dans les matériaux ductiles	13
1.1 Modèles d'endommagement non couplés	14
1.1.1 Cavité dans une matrice infinie parfaitement plastique	14
1.1.1.1 Cavité cylindrique	14
1.1.1.2 Cavité sphérique	16
1.1.2 Cavité dans une matrice infinie viscoplastique	17
1.1.2.1 Cavité cylindrique	17
1.1.2.2 Cavité sphérique	18
1.1.2.3 Comportement viscoplastique avec seuil	19
1.2 Modèles d'endommagement couplés	20
1.2.1 Endommagement macroscopique et contrainte effective	20
1.2.2 Critère développé par GURSON [58]	21
1.2.3 Critère de Gurson modifié	23
1.2.4 Extension du Critère de Gurson aux matériaux écrouissables ou visco-plastiques	25
1.2.5 Autres potentiels macroscopiques couplant endommagement et plasticité	26
1.3 Conclusion	28
2 Influence des effets micro-inertiels sur la croissance de cavités	29
2.1 Cavité isolée	29
2.1.1 Matrice à comportement rigide parfaitement plastique	29
2.1.2 Matrice viscoplastique - Matrice écrouissable	30

2.2	Sphère creuse	36
2.2.1	Approches fondatrices	36
2.2.2	Homogénéisation en dynamique	43
2.3	Conclusion	50
3	Modélisation de la rupture dynamique	53
3.1	Modélisation de la nucléation	53
3.1.1	Nucléation contrôlée par la contrainte	54
3.1.2	Cavitation dans les matériaux solides - Deux types d'approches	57
3.1.3	Approches statistiques	60
3.2	Croissance de l'endommagement	61
3.3	Coalescence des micro-vides	61
3.3.1	Taille critique de vides	62
3.3.2	Porosité critique	63
3.3.3	Instabilité plastique	64
3.4	Conclusion	65
4	Impact plaque / plaque et phénomène d'écaillage	67
4.1	Aspects théoriques	68
4.2	Traitement uniaxial	71
4.2.1	Comportement hydrodynamique	71
4.2.1.1	Relations de Rankine-Hugoniot	72
4.2.1.2	Représentation dans le plan (p, v)	72
4.2.1.3	Equations d'état	74
4.2.2	Comportement élastoplastique	74
4.3	Ecaillage	75
4.3.1	Observations expérimentales	76
4.3.2	Analyse du profil de vitesse en face arrière	77
4.3.3	Contrainte d'écaillage - Spall stress	80
4.4	Critères de rupture	82
4.4.1	Critères passifs	82
4.4.2	Critères actifs	85
4.5	Conclusion	86
5	Bilan	89

II ANALYSE ET DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE CROISSANCE DE VIDES	91
Introduction	93
1 Description du modèle	95
1.1 Cellule unitaire	95
1.2 Volume Élémentaire Représentatif - Population de sous-volumes	99
1.2.1 Moyenne sur le VER	100
1.2.2 Champ de contrainte uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Reuss »	100
1.2.3 Champ de vitesse de déformation uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Voigt »	101
2 Application aux matériaux poreux	103
2.1 Description statistique de la population de cavités	104
2.2 Chargement et critère de rupture	106
2.3 Champ de contrainte uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Reuss »	107
2.3.1 Matériau à distribution spatiale homogène de vides : MATb	107
2.3.2 Matériau à distribution homothétique de vides : MATf	109
2.4 Champ de vitesse de déformation uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Voigt »	112
2.4.1 Matériau à distribution spatiale homogène de vides : MATb	112
2.4.2 Matériau à distribution homothétique de vides : MATf	116
Conclusion	119
III MODÉLISATION SEMI-ANALYTIQUE DE LA RUPTURE DYNAMIQUE DES MATÉRIAUX DUCTILES	121
Introduction	123
1 Modélisation de la nucléation	125
1.1 Description statistique des sites de germination	125
1.2 Distance d'interaction entre deux sites	127
2 Comportement de la cellule unitaire	129
2.1 Cellule contenant un vide préexistant - <i>Modèle I</i>	129

2.2	Germination et premiers temps de croissance - Solution analytique pour le Modèle II	130
2.3	Un modèle valable à partir la nucléation jusqu'aux grands temps - Modèle III	138
3	Prédiction de la pression d'écaillage et analyse paramétrique	141
3.1	Observations expérimentales réalisées par ROY [116] - Identification des paramètres	141
3.2	Confrontation modélisation/expériences	145
3.3	Analyse paramétrique	147
	Conclusion	153
IV	PRISE EN COMPTE DE L'ELASTICITE DANS LE MODELE D'ENDOMMAGEMENT BASE SUR LA CROISSANCE DE VIDES. SIMULATION NUMÉRIQUE DU PHENOMENE D'ÉCAILLAGE LORS DU TEST D'IMPACT DE PLAQUES	155
	Introduction	157
1	Développement et intégration numérique du modèle d'endommagement - Structure de la VUMAT et relations incrémentales	159
1.1	Equations du modèle	159
1.1.1	Partie déviatorique	162
1.1.1.1	Loi de comportement	162
1.1.1.2	Plasticité déviatorique et surface de charge du matériau endommagé	162
1.1.2	Partie sphérique	163
1.1.2.1	Croissance avec effets de micro-inertie - Modèle III	163
1.1.2.2	Evaluation de la partie quasi-statique : utilisation du critère de Gurson-Tvergaard	164
1.2	Schémas d'intégration et algorithmes de résolution	165
1.2.1	Présentation d'ABAQUS/EXPLICIT	165
1.2.2	Partie sphérique - Algorithme du point fixe et schémas de Newmark	166
1.2.3	Partie déviatorique - Algorithme de retour radial	168
1.3	Distance d'interaction variable en fonction du nombre de sites activés	170
2	Applications à la simulation numérique de l'écaillage et comparaison avec les résultats expérimentaux de ROY [116]	173
2.1	Paramètres du matériau	173

2.2	Maillage et éléments choisis	175
2.3	Résultats	178
2.3.1	Evolution de la pression dans le plan d'écaillage	179
2.3.2	Profils de vitesse de face arrière	182
2.3.3	Sensibilité au maillage	186
Conclusion		189
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES		191
Bibliographie		195
Lexique		207
Liste des figures		209
Liste des tableaux		213

Introduction

Généralités – Position du problème

Les phénomènes dynamiques (grandes vitesses de sollicitations pour des temps de chargement très courts) présentent un intérêt considérable aussi bien pour les applications industrielles (mise en forme, usinage à grandes vitesses, etc.), médicales, que militaires. Dans ce dernier domaine en effet, on peut aisément imaginer le besoin de pouvoir prédire la capacité des matériaux constituant la protection des véhicules blindés ou des sites sensibles, à résister aux éventuelles menaces armées que peuvent représenter les charges creuses ou les projectiles cinétiques (appelés encore « flèches ») par exemple. Il semble alors impératif d'être capable de caractériser le comportement de ces matériaux lorsqu'ils sont soumis à des conditions extrêmes de chargement.

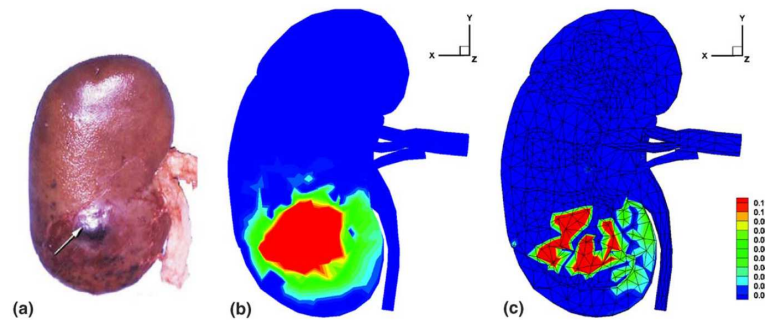


FIG. 1 – Observation typique d'un calcul dans un rein animal, d'après CLEVELAND ET AL. [25], et résultats d'une simulation numérique, d'après WEINBERG ET ORTIZ [148]

Dans le domaine de la santé, il devient presque commun d'avoir recours aux chocs lasers en chirurgie. On peut voir, sur la figure 1(a), le cliché d'un rein animal présentant une protubérance témoignant de la présence d'un calcul. L'organe est soumis à un choc laser générant une onde de compression d'amplitude de 30 à 80 MPa et qui peut provoquer, par réflexion à l'intérieur du rein, l'écaillage du calcul et en faciliter ainsi son élimination. Ce principe porte le nom de Lithotripsie ExtraCorporelle par Ondes de Choc (LECO ou LEC) qui présente l'avantage de ne pas nécessiter d'ouverture chirurgicale. Cependant les risques de déchirure du tissu rénal sont à prendre en compte et il est alors important de pouvoir modéliser le comportement dynamique du rein, comme l'illustrent les figures 1(b) et 1(c) montrant les résultats d'une simulation numérique réalisée par WEINBERG ET ORTIZ [148] en 2005.

L'illustration 2 présente la plupart des tests réalisables en laboratoire et mettant en jeu différentes vitesses de déformation, et différents états de contraintes ¹. Le plus usuel, pour

¹sur l'axe vertical est reportée la quantité σ_m / σ_y , appelée communément triaxialité des contraintes. Cette gran-

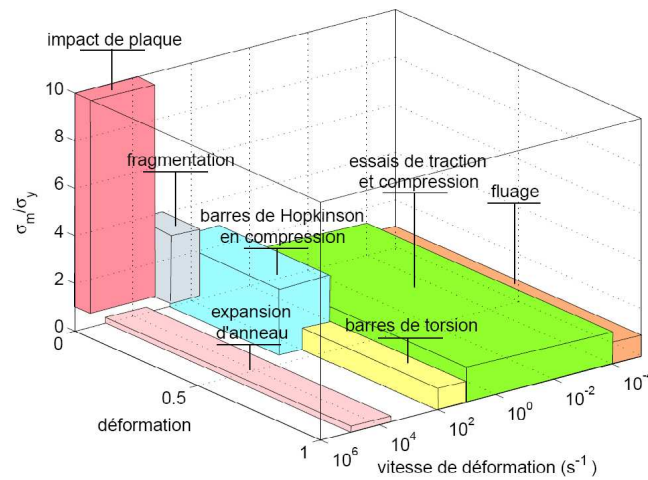


FIG. 2 – Gammes de contraintes, de déformations et de vitesses de déformation atteintes lors de différents tests mécaniques, d'après CURRAN ET AL. [30].

caractériser le comportement dynamique aux très hautes vitesses ($> 10^4 s^{-1}$) reste le test d'impact plan. Il s'agit de projeter une plaque sur une cible. Le résultat de l'interaction entre les ondes générées lors de l'impact est la mise en tension de l'échantillon pouvant mener à l'apparition d'une ouverture à l'intérieur de la cible : on parlera alors d'écaillage. La figure 3 illustre ce phénomène sur un échantillon de plutonium impacté.

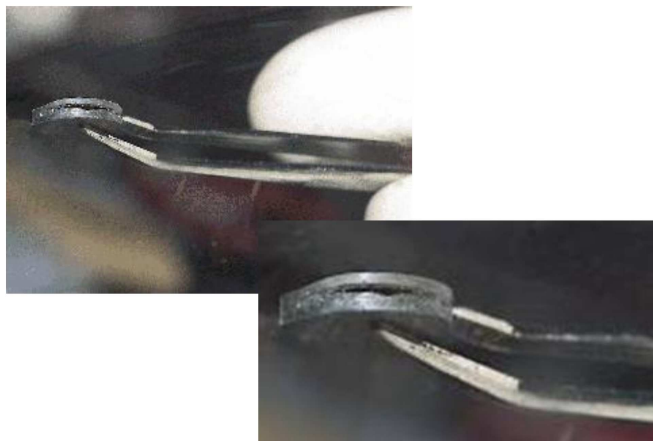


FIG. 3 – Ecaillage d'une cible en alliage de plutonium, Actinide Research Quartely, Los Alamos National Laboratory, 2001.

Le matériau étudié va donc, sous certaines conditions, se rompre. On distinguera généralement sans dimension est une indication de l'état de contraintes dans le matériau et précise la contribution de la partie sphérique par rapport à la partie déviatorique

ralement deux types de rupture : la rupture fragile et la rupture ductile par croissance et coalescence de vides. Plus généralement, l'observation du faciès de rupture d'une éprouvette permet d'identifier l'un ou l'autre de ces deux mécanismes. Sur la figure 4, on peut visua-

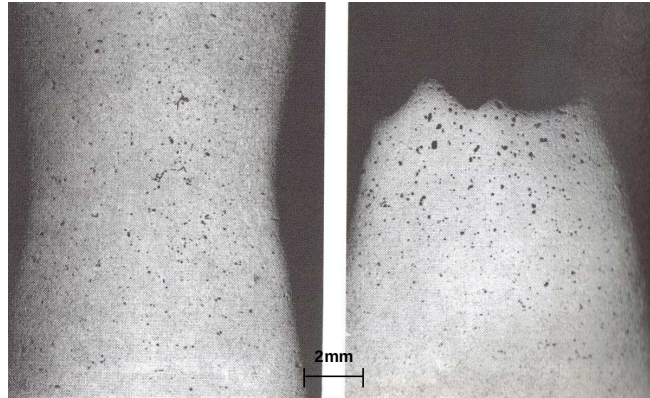


FIG. 4 – Micrographie d'un spécimen en acier de cuve A533B montrant la présence de cavités associée au processus de rupture ductile, CURRAN ET AL. [30].

liser la rupture dite ductile d'un échantillon chargé en traction. On notera sur cette figure la présence de micro-cavités à la périphérie de la zone de rupture. Le faciès présentera des cupules contenant ou non des inclusions à l'origine de la nucléation de vides. Le matériau fragile supportera très peu de déformation plastique, la rupture sera franche et on pourra alors observer sur l'échantillon une collection de micro-fissures comme le montre la figure 5. Une surface nette et brillante caractérise généralement un faciès de rupture fragile.

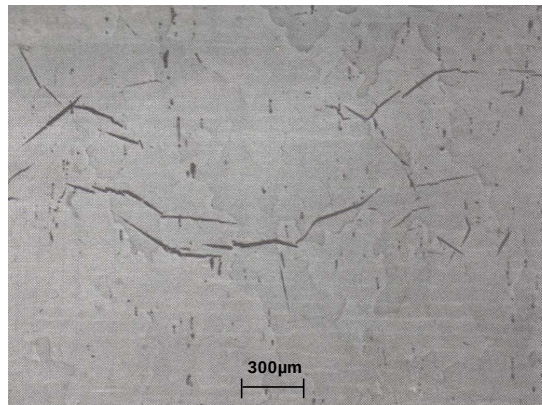


FIG. 5 – Micrographie montrant des fissures dans un fer Armco caractéristiques de la rupture fragile, CURRAN ET AL. [30].

Les matériaux qui nous intéressent plus particulièrement dans ces travaux sont les matériaux ductiles. Le processus menant à l'effondrement macroscopique de la structure est

généralement dans ce cas le résultat de trois étapes pouvant intervenir simultanément, figure 6 :

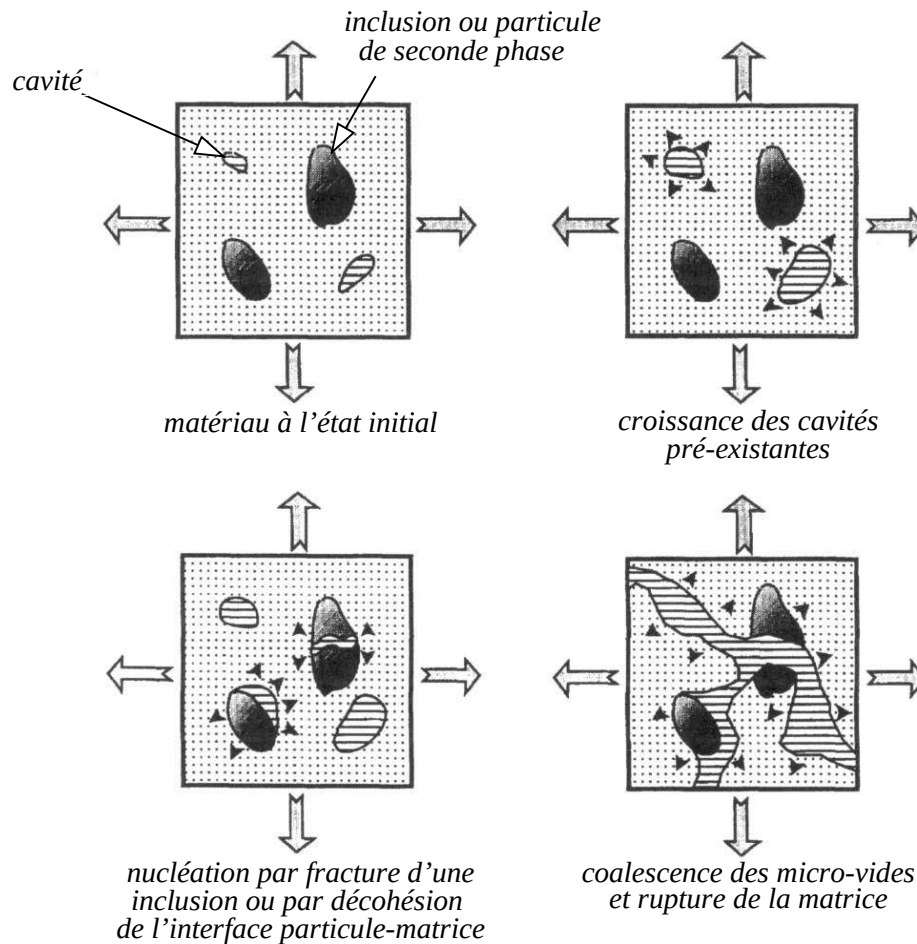


FIG. 6 – Description du processus de rupture ductile d'un matériau avec porosité résiduelle. L'évolution de l'endommagement peut être le résultat de la croissance de vides déjà présents, et de la création de nouvelles cavités par rupture d'une inclusion ou décohésion de l'interface inclusion–matrice. L'étape ultime du processus est l'apparition d'une macro-fissure, d'après LAURO ET AL. [85].

♦ nucléation des micro-vides

Les vides peuvent se créer au niveau des inclusions, des particules de seconde phase ou encore aux joints de grains, par décohésion de l'interface entre la particule et la matrice, ou par rupture de l'inclusion.

♦ croissance des micro-vides

Les cavités évoluent par déformation plastique de la matrice qui les entoure. Dépendant du chargement, ces vides se développent et changent de forme.

◇ **coalescence des micro-vides**

Lorsque la fraction volumique de vides devient importante, ou lorsque la distance entre les vides devient trop petite, la matrice entourant les cavités se rompt pour former des microfissures. Par propagation de celles-ci et par coalescence des vides présents en front de fissure, une macrofissure se crée conduisant à la ruine de la structure.

L'objectif de ce travail est de contribuer à l'analyse et à la modélisation de la rupture dynamique des matériaux métalliques ductiles et de simuler l'écaillage par impact de plaques. Les différents éléments de cette étude vont porter sur :

- la croissance des cavités, par déformation plastique de la matrice qui les entoure, avec contribution des effets micro-inertiels
- la description statistique des vides présents dans le matériau, si l'on considère un matériau poreux, ou de pressions de nucléation si le matériau est supposé initialement sain
- la proposition d'un modèle « complet » d'évolution de l'endommagement recouvrant les étapes de nucléation et de croissance associées au processus de rupture ductile
- l'implantation du modèle dans un code de calculs par éléments finis (ABAQUS/EXPLICIT) afin de simuler le test d'impact plan et d'analyser le phénomène d'écaillage

Première partie

ETAT DE L'ART

Introduction

Ce premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique relative aux travaux menés durant la thèse.

Cet « ETAT DE L'ART » se décompose comme suit :

- Dans une première partie sont présentés les travaux concernant l'évolution de l'endommagement en régime quasi-statique, notamment à travers diverses études menées sur la croissance de cavités.
- Dans une deuxième partie, nous rappellerons les résultats obtenus lorsque les effets micro-inertiels sont pris en compte dans la modélisation de l'expansion d'un vide. Le schéma de la sphère creuse et son utilisation seront notamment abordés ainsi que les travaux récents en homogénéisation dynamique.
- Le lecteur trouvera ensuite une partie traitant d'endommagement ductile en rappelant les différentes étapes menant à la rupture du matériau.
- Enfin, le modèle développé durant ce travail de thèse est appliqué au test d'impact plaque-plaque et à la rupture par écaillage. La dernière partie de la revue bibliographique porte donc sur des notions d'impact et de propagation d'ondes.

Chapitre 1

Evolution de l'endommagement dans les matériaux ductiles

Les différentes étapes menant à la rupture complète du matériau ductile sont supposées entièrement découplées. Nous nous intéressons, dans cette première partie, à la phase de croissance de l'endommagement uniquement. Si l'on considère comme VER (Volume Élémentaire Représentatif) une matrice contenant des vides, l'endommagement peut être caractérisé par la fraction volumique des vides, ou porosité, définie par :

$$f = \frac{V_v}{V} \quad (1.1)$$

où V_v désigne le volume de vide et V représente le volume total.

L'évolution de cette porosité provient de la nucléation de nouveaux vides et de la croissance de vides déjà présents dans la matrice (figure 6, page 6). Cependant, nous précisons une nouvelle fois que notre étude se limite pour le moment à la variation de porosité issue uniquement des cavités initialement présentes.

En dérivant l'expression (1.1) par rapport au temps et en considérant la matrice incompressible ($\dot{V} = \dot{V}_v$), on aboutit à :

$$\dot{f} = 3(1 - f)D_m, \quad (1.2)$$

où $D_m = \text{tr}(\underline{\underline{D}})/3$ est la partie sphérique du tenseur macroscopique des vitesses de déformation $\underline{\underline{D}}$ lorsque $\text{tr}(\cdot)$ désigne la trace du tenseur du second ordre $(\cdot)$. L'agrégat matrice-vides est ainsi compressible bien que la matrice ne le soit pas. En négligeant la partie élastique du tenseur des vitesses de déformation (petite devant la partie plastique dans beaucoup d'applications sur les métaux), la loi approchée d'évolution de la porosité devient :

$$\dot{f} = 3(1 - f)D_m^p, \quad (1.3)$$

où D_m^p représente la partie sphérique du tenseur macroscopique des vitesses de déformation plastique.

A partir de cette dernière équation, on voit bien qu'il nous faut connaître la partie sphérique de la vitesse de déformation pour décrire la loi d'évolution de la porosité. Tous les modèles d'endommagement ne tiennent pas compte de cette porosité comme nous allons le voir lors de la présentation de quelques travaux et résultats concernant la croissance de cavités dans les matériaux ductiles.

Parmi les modèles décrivant la dégradation des propriétés mécaniques qui mène à l'initiation de la rupture ductile, deux types de modèles se distinguent, BORNERT ET AL. [13] :

♦ **modèles d'endommagement non couplés.**

l'endommagement est déduit des champs de contraintes et de déformations mais n'aura aucun effet sur ces champs.

♦ **modèles d'endommagement couplés.**

les paramètres caractérisant l'endommagement sont pris en compte dans les lois constitutives du matériau. Il s'ensuit une redistribution des champs de contraintes et de déformations lorsque l'endommagement évolue.

Des exemples de ces deux types de modèles d'endommagement seront présentés dans les paragraphes suivants.

1.1 Modèles d'endommagement non couplés

Les premiers travaux menés dans le but de quantifier l'endommagement au travers de l'étude de croissance de vides sont réalisés en considérant une cavité dans un massif infini. La porosité est donnée par le rapport de volume de vide sur le volume total (vide + matrice) et est donc nulle dans le cas d'une matrice infinie. Le comportement macroscopique du matériau coïncide alors avec celui de la matrice : il n'y a pas de couplage. La rupture intervient dès lors que la cavité atteint une certaine taille (assez large pour considérer qu'elle va coalescer avec ses voisines).

1.1.1 Cavité dans une matrice infinie parfaitement plastique

1.1.1.1 Cavité cylindrique

En 1968, MCCLINTOCK [92] considère une matrice infinie contenant un vide cylindrique de section circulaire, et soumise à un allongement dans la direction de son axe principal, figure 1.1. Le comportement de la matrice est supposé rigide parfaitement plastique. Si l'on note R le rayon courant de la cavité et $\dot{\varepsilon}$ la vitesse de déformation axiale à l'infini, l'auteur montre que la vitesse relative de croissance du vide, $\dot{R}/\dot{\varepsilon}R$ s'exprime par :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh \left(\frac{\sqrt{3}\sigma_r^\infty}{\sigma_0} \right) - \frac{1}{2}, \quad (1.4)$$

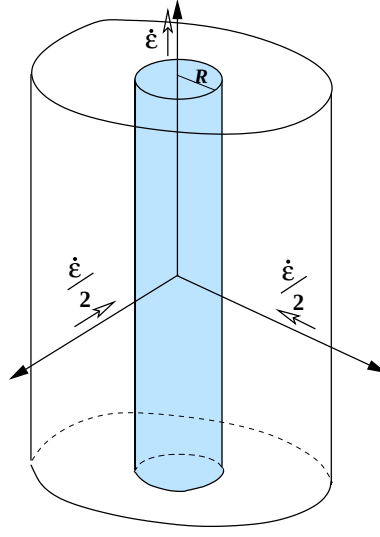


FIG. 1.1 – Vide cylindrique s'allongeant suivant son axe de révolution. $\dot{\epsilon}$ désigne la vitesse de déformation imposée le long de l'axe de l'allongement de la cavité dont le rayon courant est noté R .

où σ_0 désigne la limite d'élasticité de la matrice et σ_r^∞ la contrainte radiale à l'infini. L'équation (1.4) donne une dépendance implicite du taux d'expansion de la cavité à la contrainte hydrostatique à l'infini, $\sigma_m^\infty = \text{tr}(\underline{\sigma}^\infty)/3$ et ainsi à la triaxialité (σ_m^∞/σ_0). En effet, dans le cas étudié, le tenseur des contraintes s'écrit à l'infini :

$$\underline{\sigma}^\infty = A(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) + B(\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z), \quad (1.5)$$

pour un chargement axisymétrique autour de $\underline{e}_z$ lorsque $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ représente le repère cylindrique. La triaxialité à l'infini, notée ξ^∞ sera alors donnée par :

$$\xi^\infty = \frac{2A + B}{3(B - A)} = \frac{\sigma_r^\infty}{\sigma_0} + \frac{1}{3}, \quad (1.6)$$

et l'équation(1.4) pourra s'écrire :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\epsilon}R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh \left[\sqrt{3} \left(\xi^\infty - \frac{1}{3} \right) \right] - \frac{1}{2}. \quad (1.7)$$

Le résultat fondamental de MCCLINTOCK [92] est l'influence exponentielle de la triaxialité des contraintes. Notons que par intégration on obtient la relation suivante pour le rayon normalisé R/R_0 , R_0 étant le rayon initial de la cavité :

$$\frac{R}{R_0} = \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}\varepsilon}{2} \sinh \left[\sqrt{3} \left(\xi^\infty - \frac{1}{3} \right) \right] - \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (1.8)$$

MCCLINTOCK [92] prouve ainsi que pour une déformation ε fixée, le rayon normalisé est indépendant de la vitesse de déformation. A noter que le comportement de la matrice est

parfaitement plastique.

Pour un matériau écrouissable ($\sigma_{eq} = K\varepsilon_{eq}^n$), MCCLINTOCK [92] propose également une relation approchée de la vitesse d'expansion du vide faisant intervenir le coefficient décroissance n de la matrice :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left[\sqrt{3}(1-n) \left(\xi^\infty - \frac{1}{3} \right) \right] - \frac{1}{2}, \quad (1.9)$$

où n varie de 0 pour un matériau parfaitement plastique à 1 pour un matériau à écrouissage linéaire. Le cas $n = 0$ redonne l'équation (1.7) tandis que pour $n = 1$, la solution tend vers une relation linéaire entre $\dot{R}/\dot{\varepsilon}R$ et la triaxialité à l'infini, résultat obtenu par BERG [8] en 1962. L'équation (1.9) nous montre que la vitesse de croissance relative des cavités diminue avec l'augmentation du coefficient d'écrouissage d'où le caractère stabilisant de cet ingrédient.

1.1.1.2 Cavité sphérique

Le cas de la cavité sphérique est abordé par RICE ET TRACEY [110] en 1969. La matrice est supposée rigide parfaitement plastique et le chargement uniforme à l'infini. A partir d'une approche variationnelle, au moyen de divers champs tests, les auteurs parviennent à la loi d'évolution approchée :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = 0.558 \sinh \left(\frac{3\xi^\infty}{2} \right) + 0.008\nu \cosh \left(\frac{3\xi^\infty}{2} \right), \quad (1.10)$$

avec

$$\nu = -\frac{3\dot{\varepsilon}_{II}^\infty}{\dot{\varepsilon}_I^\infty - \dot{\varepsilon}_{III}^\infty},$$

où $\dot{\varepsilon}_I^\infty \geq \dot{\varepsilon}_{II}^\infty \geq \dot{\varepsilon}_{III}^\infty$ sont les composantes principales du tenseur des vitesses de déformation à l'infini. Le paramètre ν va alors varier de -1 à $+1$ avec $\nu = -1$ pour une compression simple (ou allongement biaxial), $\nu = 0$ pour un cisaillement simple et $\nu = +1$ pour un allongement simple (ou compression biaxiale).

Pour des hautes triaxialités, et sous un état de déformation uniaxiale (voir figure 1.2), RICE ET TRACEY [110] aboutissent à l'approximation suivante :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = 0.283 \exp \left(\frac{3\xi^\infty}{2} \right), \quad (1.11)$$

et obtiennent ainsi une influence exponentielle de la triaxialité des contraintes sur la croissance du vide.

Cette relation est cependant discutée et modifiée par HUANG [70] en 1989. Alors qu'il mène, en collaboration avec HUTCHINSON et TVERGAARD, des travaux portant sur la cavitation (HUANG ET AL. [71]), HUANG s'aperçoit que le résultat de RICE ET TRACEY [110] conduit à une sous-estimation de la vitesse de croissance de la cavité. En reprenant l'analyse variationnelle de RICE ET TRACEY [110], il considère des champs tests plus riches et plus nombreux

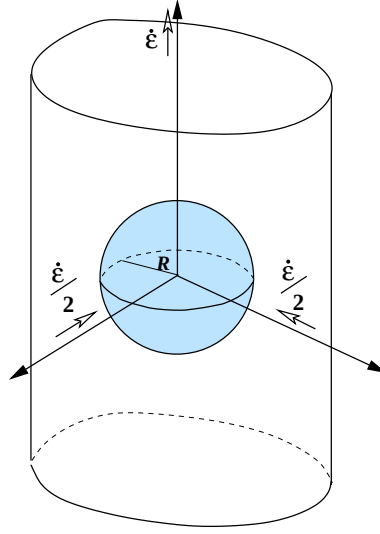


FIG. 1.2 – Vide sphérique, de rayon courant R , dans une matrice infinie soumise à un chargement de traction uniaxiale. L'élasticité est négligée.

pour aboutir à :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\epsilon}R} = 0.427 (\xi^\infty)^{0.25} \exp\left(\frac{3\xi^\infty}{2}\right) \quad \text{si } \frac{1}{3} \leq \xi^\infty \leq 1, \quad (1.12)$$

pour des triaxialités modérées et :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\epsilon}R} = 0.427 \exp\left(\frac{3\xi^\infty}{2}\right) \quad \text{si } \xi^\infty \geq 1, \quad (1.13)$$

pour des triaxialités plus élevées. Cette dernière relation montre que dans le cas de hautes triaxialités, l'approche de RICE ET TRACEY [110], formulée par l'équation (1.11), sous-estime de plus de 30% le taux de croissance de la cavité.

1.1.2 Cavité dans une matrice infinie viscoplastique

1.1.2.1 Cavité cylindrique

L'extension des travaux de MCCINTOCK [92] au cas viscoplastique est menée par BUDIANSKY ET AL. [17] en 1982. Les auteurs étudient le changement de forme de cavités cylindriques et sphériques entourées d'une matrice dont le comportement est décrit par une loi puissance :

$$\sigma_{eq} = K \dot{\epsilon}_{eq}^m, \quad (1.14)$$

où m représente la sensibilité à la vitesse de déformation et vaut 0 pour un matériau parfaitement plastique, et 1 pour un matériau newtonien. Le paramètre K représente la limite

d'écoulement de la matrice pour un test à une vitesse de déformation de $1s^{-1}$. Les auteurs obtiennent l'expression du taux de croissance de la cavité cylindrique :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = \frac{1}{2}(\kappa - 1) \quad (1.15)$$

où $\dot{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation à l'infini (voir figure 1.1), et κ dépend de la triaxialité à l'infini ξ^∞ et du coefficient de sensibilité m à travers la relation :

$$\xi^\infty = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\kappa/\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1-m}{2}}}. \quad (1.16)$$

En faisant tendre m vers 0, ce qui revient à considérer la matrice rigide parfaitement plastique, on peut évaluer le terme intégral et aboutir à la relation liant ξ^∞ et κ :

$$\xi^\infty - \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh^{-1}(\kappa/\sqrt{3}) = 0. \quad (1.17)$$

La solution de MCCLINTOCK [92] donnée par l'équation(1.7) est alors retrouvée. Notons que dans le cas d'un comportement newtonien, la relation correspondante s'écrit :

$$\xi^\infty - \frac{1}{3} - \frac{\kappa}{3} = 0. \quad (1.18)$$

Soulignons que la valeur de κ va conditionner la croissance ou la décroissance du rayon de la cavité, voir équation (1.15). Ceci va alors définir une triaxialité critique au delà de laquelle le rayon de la cavité va augmenter. Cette valeur seuil est obtenue pour $\kappa = 1$ et vaut 0.650 (respectivement 0.667) pour $m = 0$ (respectivement pour $m = 1$).

1.1.2.2 Cavité sphérique

Le problème de la cavité sphérique, traité par RICE ET TRACEY [110] dans le cas parfaitement plastique, est étendu au cas viscoplastique par BUDIANSKY ET AL. [17]. Le comportement de la matrice est toujours donné par l'équation(1.14), et la cavité est soumise à un chargement axisymétrique à l'infini, figure 1.2. Pour les hautes triaxialités, les auteurs aboutissent à une expression approchée de l'évolution du rayon de la cavité donnée par :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = \frac{\zeta}{2} \left\{ \frac{3m}{2} |\xi^\infty| + (1-m) [1 + mg(\zeta)] \right\}^{1/m}, \quad (1.19)$$

avec

$$g(\zeta) \cong \begin{cases} 0.4319 & \text{si } \zeta = 1 \\ 0.4031 & \text{si } \zeta = -1, \end{cases}$$

ζ étant égal au signe de ξ^∞ .

Lorsque $m = 1$ (matériau viscoplastique linéaire), la relation (1.19) restitue la solution exacte du problème (voir MONTHEILLET ET BRIOTTET [99]) :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = \frac{3|\xi^\infty|}{4}. \quad (1.20)$$

Le cas parfaitement plastique est retrouvé en faisant tendre m vers 0 dans l'équation (1.19). On obtient dans ce cas :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = \frac{\zeta}{2} \exp \left\{ \frac{1}{m} \ln \left[1 + m \left(\frac{3}{2} \xi^\infty + g(\zeta) - 1 \right) \right] \right\} \quad (1.21)$$

$$\xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{\zeta}{2} \exp [g(\zeta) - 1] \exp \left(\frac{3}{2} \xi^\infty \right), \quad (1.22)$$

qui mène aux relations suivantes :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = \begin{cases} 0.283 \exp \left(\frac{3}{2} \xi^\infty \right) & \text{si } \zeta = 1 \\ 0.275 \exp \left(\frac{3}{2} \xi^\infty \right) & \text{si } \zeta = -1, \end{cases} \quad (1.23)$$

que l'on peut comparer à l'équation (1.11), obtenue par RICE ET TRACEY [110].

1.1.2.3 Comportement viscoplastique avec seuil

Pour achever ce rappel de quelques travaux traitant de la cinétique de croissance de vides dans une matrice infinie, on peut citer les résultats obtenus par KLÖCKER [81] qui a examiné l'influence d'une loi de comportement linéaire¹ avec seuil sur la croissance d'une cavité :

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 + \beta \dot{\varepsilon}_{eq}. \quad (1.24)$$

GIANNOTTA [50] a mis en évidence l'existence d'une telle loi de comportement pour le cuivre sollicité par de grandes vitesses de déformation (cette loi a par ailleurs été utilisée par JOHNSON [73] dans le cadre de l'étude sur la rupture dynamique dans les matériaux ductiles). KLÖCKER [81] a confirmé le caractère stabilisant de cette loi de comportement linéaire avec seuil. C'est en mettant en évidence le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation, défini par $\frac{\partial \ln \sigma_{eq}}{\partial \ln \dot{\varepsilon}_{eq}} = \frac{1}{1 + \sigma_0 / \beta \dot{\varepsilon}_{eq}}$, que l'on s'aperçoit qu'une augmentation locale de la vitesse de déformation autour de la cavité va induire une augmentation du coefficient m . Ceci induira alors une croissance moins rapide de la cavité.

Concernant la cavité cylindrique, KLÖCKER retrouve le résultat (1.15), déjà obtenu par BUDIANSKY ET AL. [17] pour une matrice pseudoplastique. La relation reliant κ à la triaxialité des contraintes à l'infini ξ^∞ est, pour la loi (1.24) :

$$\left(\xi^\infty - \frac{1}{3} \right) (\sigma_0 + \beta \dot{\varepsilon}) - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sinh^{-1}(\kappa/\sqrt{3}) - \frac{\beta \kappa \dot{\varepsilon}}{3} = 0. \quad (1.25)$$

Cette dernière relation apparaît être une combinaison linéaire des équations (1.17) et (1.18) et restitue donc bien le cas rigide parfaitement plastique ($\beta = 0$) ou newtonien ($\sigma_0 = 0$).

¹comme son nom ne l'indique pas, cette loi correspond à un comportement non linéaire. Pour s'en persuader, il suffit de combiner cette loi constitutive avec la loi de normalité, $\underline{s} = \frac{2\sigma_{eq}}{3\dot{\varepsilon}_{eq}} \underline{\dot{\varepsilon}}$, $\underline{s}$ et $\underline{\dot{\varepsilon}}$ désignant respectivement le déviateur du tenseur des contraintes et le tenseur des vitesses de déformation (n'oublions pas que le matériau est supposé incompressible), pour observer que $\underline{s} = \frac{2\sigma_0}{3\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}}}\underline{\dot{\varepsilon}} + \frac{2\beta}{3}\underline{\dot{\varepsilon}}$

On aura mis en exergue, à travers les différents modèles exposés jusqu'à présent, l'importance de la triaxialité des contraintes. L'effet de la triaxialité ξ^∞ sur la croissance normalisée de la cavité peut se mettre sous la forme d'une fonction exponentielle si la matrice est parfaitement plastique (équations (1.8), (1.10)), d'une fonction puissance si la matrice est pseudoplastique (équation (1.19)), ou d'une fonction linéaire lorsque la matrice est supposée newtonienne (équations (1.15), (1.18), relation (1.19) avec $m = 1$).

1.2 Modèles d'endommagement couplés

Deux approches sont possibles afin d'introduire le couplage entre l'endommagement et le comportement macroscopique du matériau. La première est basée sur la notion d'endommagement macroscopique et de contraintes effectives. La seconde est basée sur l'existence de critères de plasticité couplés.

1.2.1 Endommagement macroscopique et contrainte effective

Cette théorie suppose l'existence d'une variable macroscopique d'endommagement, habituellement notée D , qui vaut 0 lorsque le matériau est sain et 1 lorsqu'il est entièrement endommagé (à la rupture). La dégradation du matériau est alors entièrement déterminée par la connaissance de D . LEMAITRE ET CHABOCHE [89] ont étendu à la rupture ductile la théorie développée par KACHANOV [75] dans les années 50, qui interprète la variable d'endommagement associée au processus de dégradation mécanique comme la densité surfacique de défauts (cavités, fissures, etc.) affectant la matière.

Considérons, à titre d'illustration, un effort F appliqué sur une section S d'un composite de forme cubique composé d'une matrice et d'une population de vides, figure 1.3 (a). La section effectivement résistante à la contrainte (tenant compte de la présence des cavités et des concentrations de contraintes au voisinage de celles-ci) est définie par :

$$\tilde{S} = S(1 - D) . \quad (1.26)$$

Il est alors possible d'introduire une contrainte effective, notée $\tilde{\sigma}$, définie comme étant celle agissant sur le matériau équivalent de section $\tilde{S}$ telle que (voir figure 1.3 (b)) :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} . \quad (1.27)$$

Par un principe d'équivalence en déformation, le comportement du matériau endommagé correspond à celui du matériau sain, en ayant pris soin de remplacer la contrainte usuelle par la contrainte effective. Cette approche permet de décrire la dégradation des propriétés mécaniques du matériau au cours du chargement. En effet, dans le cas simple d'un essai de

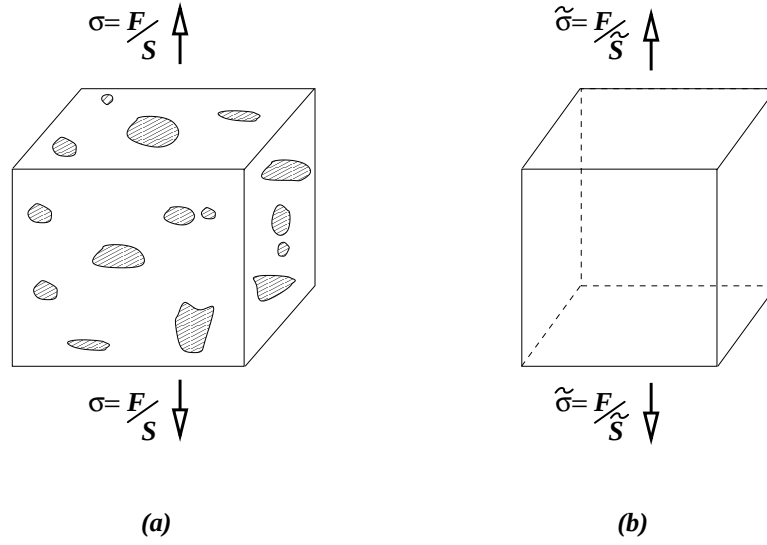


FIG. 1.3 – Agrégat matrice-vides soumis à une contrainte uniaxiale. La section effectivement résistante est notée $\tilde{S}$ et tient compte de la présence des vides et des concentrations de contraintes au voisinage de ceux-ci. Le comportement du matériau endommagé est alors semblable à celui du matériau sain, à condition de remplacer σ par la contrainte effective $\tilde{\sigma}$.

traction unidimensionnel, pour un matériau élastique, si l'on note ε la déformation élastique dans la direction de chargement, et $\tilde{E}$ le module de Young effectif, on a :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma} &= E\varepsilon \\
 &= E\sigma/\tilde{E} \\
 &\stackrel{(1,27)}{=} (1-D) \frac{E}{\tilde{E}} \tilde{\sigma} \\
 \Rightarrow \tilde{E} &= E(1-D).
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Les propriétés élastiques du matériau équivalent, dans ce cas simple, sont bien affectées par l'endommagement.

1.2.2 Critère développé par GURSON [58]

On a vu précédemment, au travers des différents travaux portant sur la croissance des vides, que la composante hydrostatique a un effet sur l'évolution du rayon de la cavité. En 1977, GURSON [58] propose un critère d'écoulement plastique, incluant une dépendance à la partie hydrostatique. Il a été développé en considérant un matériau poreux où la matrice est supposée rigide parfaitement plastique, obéissant au critère de plasticité de von Mises. Deux géométries sont considérées par l'auteur : des cavités cylindriques à section circulaire d'une part et des cavités sphériques d'autre part. Les déformations élastiques sont négligées.

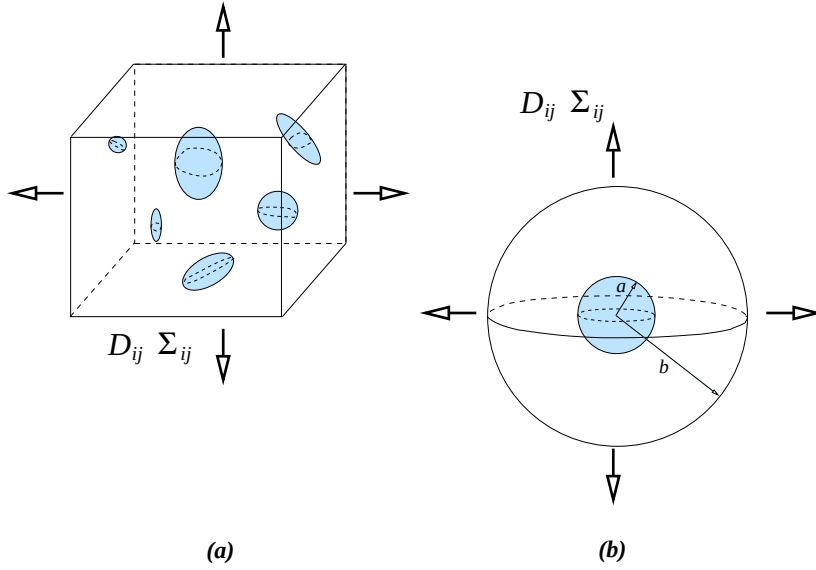


FIG. 1.4 – (a) Agrégat matrice-vides contenant des cavités de forme et d'orientation aléatoires. Les grandeurs macroscopiques sont désignées par les quantités Σ_{ij} et D_{ij} respectivement composantes des tenseurs de contraintes et de vitesses de déformation. (b) Modèle de sphère creuse utilisée par GURSON [58] pour représenter l'agrégat matrice-vides. La porosité du matériau composite est donnée par $f = a^3/b^3$.

L'analyse de GURSON [58] repose sur une méthode cinématique qui consiste à minimiser un potentiel de dissipation pour des champs de vitesses CA (Cinématiquement Admissibles). GURSON [58] définit le champ de vitesses CA comme étant la somme de deux contributions (démarche identique à celle de RICE ET TRACEY [110]) :

- ♦ un terme associé au changement de forme à volume constant, lié à $\underline{\underline{D'}}$, la partie déviatorique du tenseur des vitesses de déformation macroscopique.
- ♦ un terme associé au changement de volume sans changement de forme, lié à la partie hydrostatique D_m .

Par construction, le potentiel obtenu forme donc une borne supérieure de la limite d'écoulement.

Dans le cas du vide sphérique, GURSON [58] considère la sphère creuse comme représentative de l'agrégat matrice-vides (voir figure 1.4). Si l'on note a et b respectivement les rayons intérieur et extérieur du motif, la porosité de l'agrégat, définie par l'équation (1.1), est donnée par :

$$f = \frac{a^3}{b^3}. \quad (1.29)$$

L'analyse de GURSON [58] décrivant la croissance de cette cavité dans une matrice rigide parfaitement plastique, de limite d'élasticité notée σ_0 , conduit à l'expression du potentiel

plastique :

$$\Omega_G(\Sigma_m, \Sigma_{eq}, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - (1 + f^2) = 0, \quad (1.30)$$

où Σ_{eq} représente la contrainte équivalente macroscopique au sens de von Mises et Σ_m la contrainte hydrostatique macroscopique.

A ce critère est associée une loi d'écoulement macroscopique :

$$\underline{\underline{D}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Omega_G}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}}, \quad (1.31)$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique introduit par la loi de normalité ($\dot{\lambda} \geq 0$), et $\underline{\underline{D}}$ le tenseur des vitesses de déformation macroscopique.

Enfin, l'évolution de la porosité, en l'absence de nucléation de nouvelles cavités, est donnée par la conservation du volume (1.3), qui s'écrit dans le cas où les déformations élastiques sont négligées :

$$\dot{f} = 3(1 - f) D_m. \quad (1.32)$$

Notons que la fonction de charge définie par l'équation (1.30) présente les caractéristiques suivantes :

- ◇ lorsque la porosité f est nulle, on retrouve le critère de von Mises pour un matériau rigide plastique
- ◇ la dépendance vis à vis de la fraction volumique de vide est linéaire quand $\Sigma_m = 0$
- ◇ la dépendance vis à vis de la triaxialité Σ_m/σ_0 est exponentielle.

Plusieurs modifications ont été apportées au critère de GURSON [58] par l'introduction de paramètres supplémentaires qui permettent de tenir compte de la rapidité de croissance de la porosité au voisinage de la coalescence. D'autre part, en cisaillement simple ($\Sigma_m = 0$), l'équation (1.30) donne $\Sigma_{eq} = \sigma_0(1 - f)$ qui prédit une contrainte d'écoulement nulle pour une porosité égale à 1.

1.2.3 Critère de Gurson modifié

Plusieurs auteurs ont introduit différents paramètres ajustables. Par exemple, le critère de Gurson-Tvergaard (G-T) s'écrit :

$$\Omega_{GT} = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - (1 + q_3(f)^2) = 0. \quad (1.33)$$

Les paramètres q_2 et q_3 servent à corriger la valeur de la contrainte d'écoulement en cisaillement pur (qui sera alors nulle pour des porosités plus faibles), tandis que l'introduction de q_1 est le résultat de considérations géométriques. Ils ont été définis par TVERGAARD [133] en 1981 pour ajuster les vitesses de croissance sur des résultats obtenus par simulations numériques. Les différentes valeurs de q_1 que l'on peut trouver dans la littérature sont :

- ◇ $q_1 = 1$ pour GURSON [58]
- ◇ $q_1 = 1,25$ pour KÖPLIK ET NEEDLEMAN [83]
- ◇ $q_1 = 4/e$ pour PERRIN ET LEBLOND [106]
- ◇ $q_1 = 1,5$ pour TVERGAARD [133]

Par contre, ces auteurs s'accordent à choisir $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$.

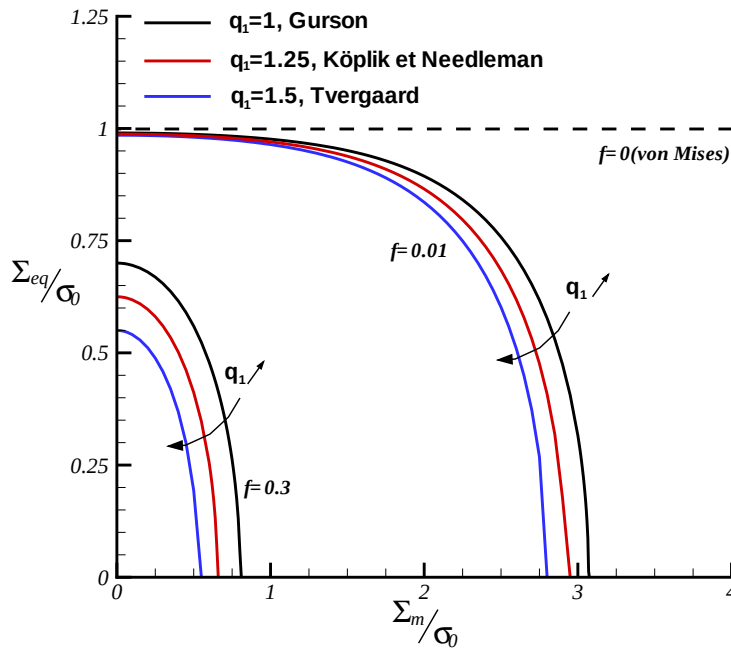


FIG. 1.5 – Surface de charge de G-T dans le plan $(\Sigma_m/\sigma_0, \Sigma_{eq}/\sigma_0)$ pour différentes valeurs de porosité f et différentes valeurs de q_1 . L'équation de la surface est donnée par la relation (1.33).

La figure 1.5 présente, dans le plan des contraintes, le potentiel donné par l'équation (1.33) avec $q_3 = q_1^2$ et $q_2 = 1$. On constate d'une part que l'endommagement couplé à la plasticité introduit une limite d'écoulement dans la direction de la contrainte hydrostatique (qui n'est pas observé par un critère de von Mises, trait discontinu), et d'autre part que la limite d'écoulement diminue avec l'augmentation de la porosité. On remarque également l'effet d'une variation du paramètre q_1 qui va conduire, par son augmentation, à la diminution du domaine élastique.

cavités non sphériques

LEE ET MEAR [87] et SØVIK ET THAULOW [125] ont étudié des vides de forme ellipsoïdale plutôt que sphérique et concluent que la porosité ne peut pas être uniquement décrite par

la fraction volumique des vides mais que le facteur d'aspect joue un rôle important.

Les corrections apportées au modèle de GURSON [58] consistent à introduire une variation de q_2 en fonction de l'écoulement, du niveau de contrainte hydrostatique et du facteur de forme. La fonction q_2 est cependant donnée sous forme graphique.

GOLOGANU ET AL. [52] développent en 1993 un potentiel pour des vides de forme ellipsoïdale qui se réduit à celui proposé par GURSON [58] dans le cas de vides sphériques. Pour des ellipsoïdes d'axes a, b, c ($a > b = c$), le potentiel s'écrit :

$$\Omega_{gol} = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f^* \cosh \left(\kappa \frac{\Sigma_{hyd}}{\bar{\sigma}} \right) - (1 + q_3 (f^*)^2) = 0. \quad (1.34)$$

où

$$\kappa = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2) \frac{e_a/e_b}{\ln f} \right]^{-1} \quad (1.35)$$

$$\Sigma_{hyd} = \alpha_2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (1 - 2\alpha_2) \sigma_{33}, \quad (1.36)$$

et

$$S = \ln \left(\frac{a}{b} \right); \quad e_a = \sqrt{1 - e^{-2S}}; \quad (1.37)$$

$$\frac{e_b^3}{1 - e_b^2} = f \frac{e_a^3}{1 - e_a^2}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2e_b^2} - \frac{1 - e_b^2}{2e_b^3} \tanh^{-1}(e_b). \quad (1.38)$$

f est la fraction volumique de vide, S le facteur de forme, e_a et e_b sont les excentricités, q_1, q_2 , et q_3 sont des constantes, σ_{11} et σ_{22} sont les contraintes principales dans les directions b et c , σ_{33} la contrainte principale dans la direction a , Σ_{hyd} désigne la contrainte hydrostatique, Σ_{eq} la contrainte équivalente, et $\bar{\sigma}$ la contrainte d'écoulement du matériau. Bien que l'équation constitutive de GOLOGANU [52] pour les cavités ellipsoïdales soit moins précise que celle suggérée par LEE ET MEAR [87] ou SØVIK ET THAULOW [125], son usage est semble-t-il plus aisé.

1.2.4 Extension du Critère de Gurson aux matériaux écrouissables ou viscoplastiques

Une manière assez immédiate d'introduire l'écrouissage dans le potentiel de GURSON [58] ou ses dérivés, est de remplacer dans les équations (1.30) ou (1.33) la limite d'élasticité de la matrice σ_0 par une contrainte d'écoulement « moyenne » de la matrice $\bar{\sigma}$, TVERGAARD [135], NEEDLEMAN ET AL. [100], BECKER [7]. Cette grandeur est fonction d'une déformation équivalente « moyenne » $\bar{\varepsilon}$ (variable d'écrouissage) dont l'évolution est donnée par l'équivalence entre la dissipation macroscopique et la dissipation microscopique issue uniquement du travail de la matrice entourant le vide, TVERGAARD [135], WORSWICK ET AL. [149], NEEDLEMAN ET AL. [100], LAURO ET AL. [85] :

$$(1 - f) \dot{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}}. \quad (1.39)$$

Le modèle est complété par une relation constitutive entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ (loi de comportement), qui inclut l'écrouissage ou la température et peut présenter une dépendance à la vitesse pour amener une extension au cas viscoplastique, TVERGAARD ET NEEDLEMAN [138], XU ET NEEDLEMAN [153], WORSWICK ET AL. [149], LAURO ET AL. [85], GERMAIN ET MOLINARI [49] :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T). \quad (1.40)$$

D'autres extensions du modèle de GURSON [58] au cas viscoplastique sont disponibles dans la littérature. Citons l'extension proposée par PERRIN [105] aux matériaux suivant le modèle d'écoulement visqueux de Bingham. Le potentiel obtenu par l'auteur s'écrit à partir du potentiel originel de GURSON [58], donné par l'équation (1.30), comme :

$$\Omega_G(\Sigma_m - 3\eta_m D_m, \Sigma_{eq} - 3\eta_e D_{eq}, f) = 0, \quad (1.41)$$

où $\eta_m = \frac{4}{3} \frac{1-f}{f} \eta$ et $\eta_e = (1-f)\eta$ sont des viscosités effectives lorsque η désigne la viscosité en cisaillement du matériau (similaire à celle des liquides). D_{eq} est la vitesse de déformation équivalente macroscopique.

1.2.5 Autres potentiels macroscopiques couplant endommagement et plasticité

Les critères de type Gurson, comme on vient de le voir, sont des critères macroscopiques d'écoulement plastique auxquels est associée la loi de normalité définie par l'équation (1.31). Il existe d'autres types de relations constitutives obtenues à partir de potentiels macroscopiques et nous proposons de les évoquer.

La vitesse de déformation microscopique $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (les déformations élastiques sont négligées) est régie par le potentiel de dissipation de la matrice :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}}(\underline{\sigma}), \quad \text{ou inversement} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}(\underline{\dot{\varepsilon}}) \quad (1.42)$$

En définissant les potentiels macroscopiques par :

$$\begin{aligned} \Psi(f, \underline{\underline{\Sigma}}) &= \langle \psi(\underline{\sigma}) \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \psi(\underline{\sigma}) dV \\ \Phi(f, \underline{\underline{D}}) &= \langle \phi(\underline{\dot{\varepsilon}}) \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \phi(\underline{\dot{\varepsilon}}) dV, \end{aligned} \quad (1.43)$$

le comportement macroscopique du matériau poreux dérive d'un potentiel par les relations suivantes :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}}(f, \underline{\underline{\Sigma}}), \quad \text{ou inversement} \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{D}}}(f, \underline{\underline{D}}). \quad (1.44)$$

Suivre l'évolution de l'endommagement nécessite alors de déterminer l'un des deux potentiels. Le potentiel macroscopique Ψ dépend de la porosité f et des trois invariants du tenseur des contraintes macroscopique. Cependant, il est d'usage de négliger l'influence du

troisième invariant lorsque l'on traite des milieux poreux (la validité de cette hypothèse est confirmée par les travaux de DUVA ET HUTCHINSON [38] en 1984 pour les matériaux à faible porosité ($f \ll 1$), et dans un cadre plus général par RICHELSEN ET TVERGAARD [111] dix ans plus tard). On a donc :

$$\Psi = \Psi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, f). \quad (1.45)$$

Selon ces considérations, plusieurs auteurs établissent des potentiels macroscopiques pour des matériaux viscoplastiques. En particulier si l'on définit le comportement de la matrice par la relation en loi puissance suivante :

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^m, \quad (1.46)$$

alors le potentiel de déformation microscopique exprimé par la relation (1.42) s'écrit :

$$\psi(\sigma_{eq}) = \frac{m}{1+m} \sigma_0 \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{1+1/m}, \quad (1.47)$$

et le potentiel macroscopique correspondant a pour expression :

$$\Psi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, f) = \frac{m}{1+m} \sigma_0 \dot{\epsilon}_0 \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{1+1/m} F(X, f), \quad (1.48)$$

avec $X = \frac{3\Sigma_m}{2\Sigma_{eq}}$ la triaxialité à une constante multiplicative près. La définition de la fonction F varie suivant les auteurs. DUVA ET HUTCHINSON [38] proposent un modèle pour des faibles porosités et DUVA [37] en 1986, comme COCKS [26] en 1989 ou LEBLOND ET AL. [86] en 1994, pour des fractions volumiques de vide arbitraires. Pour des cavités sphériques dans une matrice viscoplastique, on peut trouver dans la littérature, COCKS [26] :

$$F(X, f) = [A(f)X^2 + B(f)]^{(1+1/m)/2}, \quad (1.49)$$

avec

$$A(f) = \frac{2}{1+m} \frac{f}{(1+f)(1-f)^{2/(1+m)}}, \quad (1.50)$$

$$B(f) = \frac{1+2f/3}{(1-f)^{2/(1+m)}},$$

ou bien, DUVA ET HUTCHINSON [38] :

$$F(X, f) = 1 + fh(X), \quad (1.51)$$

avec

$$\begin{aligned} h(X) &= a(m) + b(m)X^2 && \text{pour } X < 1 \\ h(X) &= \frac{1}{1+m} \left(\frac{3|X|}{2}m + c(m) \right)^{1+1/m} && \text{pour } X > 1, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$a(m)$, $b(m)$, $c(m)$ sont des paramètres constants pour une sensibilité à la vitesse de déformation fixée.

D'un autre côté, en étudiant la compaction des poudres, OLEVSKY ET SKOROHOD [103] ont proposé une formulation phénoménologique pour définir le potentiel Φ :

$$\Phi = \langle \phi \rangle = \frac{A}{m+1} (1-f) W^{m+1}, \quad (1.53)$$

où

$$W = \sqrt{\frac{\theta \gamma^2 + \chi e^2}{1-f}}, \quad \theta = (1-f)^2, \quad \chi = \frac{2}{3} \frac{(1-f)^3}{f}, \quad (1.54)$$

$$\gamma^2 = \underline{\underline{D}}' : \underline{\underline{D}}' \quad \text{et} \quad e = \text{tr}(\underline{\underline{D}}),$$

où l'opérateur ':' désigne le produit doublement contracté et $\underline{\underline{D}}'$ le déviateur de $\underline{\underline{D}}$. Ce potentiel macroscopique a été obtenu en supposant la matrice viscoplastique avec le comportement décrit par le potentiel suivant :

$$\omega = \frac{A}{m+1} \gamma_s^{m+1}, \quad (1.55)$$

où $\gamma_s = \sqrt{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}$ et A est un paramètre du matériau entourant la cavité.

1.3 Conclusion

L'ensemble des modèles de croissance de vides exposés met en évidence l'influence de la triaxialité des contraintes macroscopiques sur la croissance de l'endommagement. Cette dépendance varie en fonction du comportement du matériau : elle est exponentielle lorsque la matrice est rigide parfaitement plastique, en loi puissance si la matrice est viscoplastique. On aura également noté le caractère stabilisant du coefficient d'écrouissage et de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la croissance de vides.

On retiendra, pour les besoins de notre travail, que le modèle de GURSON [58], ou ses dérivés, initialement développé pour le cas rigide plastique, peut être étendu au cas viscoplastique en remplaçant dans le critère la limite d'élasticité en traction simple σ_0 par une contrainte équivalente dans la matrice $\bar{\sigma}$. L'expression analytique du critère (équation (1.33)) ne sera pas modifiée et la dépendance à la triaxialité restera exponentielle. La loi de normalité sera conservée pour décrire l'écoulement plastique associé.

Chapitre 2

Influence des effets micro-inertiels sur la croissance de cavités

Dans la partie précédente, nous avons présenté quelques modèles d'endommagement développés dans le cadre de sollicitations statiques. Or, lorsque les vitesses de déformation mises en jeu deviennent importantes, comme dans le régime dynamique moyen (entre 10 et $1000s^{-1}$) et surtout dans le régime dynamique rapide (au-delà de 10^4s^{-1}) rencontré lors d'un impact plan par exemple, la phénoménologie de l'endommagement conduit à de fortes quantités d'accélération localisées en paroi des cavités. Il devient alors nécessaire de prendre en compte les effets micro-inertiels dans l'évolution de l'endommagement.

Dans cette partie, nous présentons différents travaux menés dans le but de comprendre l'influence des effets micro-inertiels sur l'expansion de cavités noyées dans une matrice infinie. Le schéma de la sphère creuse avec le couplage aux effets micro-inertiels est ensuite évoqué par le biais d'approches cinématiques et des approches d'homogénéisation.

2.1 Cavité isolée

2.1.1 Matrice à comportement rigide parfaitement plastique

travaux de GLENNIE [51]

GLENNIE [51] étudie en 1972 la croissance d'un vide isolé dans une matrice rigide parfaitement plastique (masse volumique notée ρ) soumise à un chargement dynamique axisymétrique. La procédure utilisée par l'auteur, pour déterminer l'évolution du rayon de la cavité, est similaire à celle développée par RICE ET TRACEY [110] dans le cas quasi-statique. GLENNIE [51] obtient le résultat suivant :

$$\frac{\dot{R}}{\dot{\varepsilon}R} = 0.558 \sinh \left[\frac{3}{2\sigma_0} \left\{ \sigma_m^\infty - \rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 R^2 \right) \right\} \right], \quad (2.1)$$

et l'introduit dans un modèle d'endommagement dynamique appliqué au processus de propagation de fissures. L'équation (2.1) confirme les observations de MCCLINTOCK [92] et de RICE ET TRACEY [110] quant à l'influence de la triaxialité à l'infini (liée à la contrainte moyenne σ_m^∞) sur l'expansion de la cavité.

Il apparaît clairement par l'équation (2.1) que les effets d'inertie vont s'opposer aux effets de la contrainte moyenne et donc retarder la croissance du vide. L'auteur suggère en outre que les effets de micro-inertie deviennent significatifs dès lors que le terme inertiel dans l'argument du 'sinh' devient comparable à la contrainte moyenne σ_m^∞ .

2.1.2 Matrice viscoplastique - Matrice écrouissable

travaux de KLÖCKER [81]

KLÖCKER [81] évalue l'influence des effets d'inertie sur la croissance de cavités ellipsoïdales dans une matrice dont la loi de comportement est viscoplastique avec seuil (voir équation (1.24)) et chargée de façon axisymétrique à l'infini. Les premières conclusions de l'auteur portent sur l'importance des termes d'inertie variant comme le carré du rayon de la cavité¹ et le carré de la vitesse de déformation à l'infini.

Le cas particulier de la cavité sphérique est également abordé par KLÖCKER [81]. Le vide est alors supposé noyé dans une matrice infinie de rayon noté R^∞ supposé constant durant le processus de déformation du vide (approximation d'autant plus valable que le rayon initial de la cavité est petit devant celui de la matrice) et soumise à un chargement hydrostatique σ_m^∞ . L'équation gouvernant l'évolution du rayon du vide en présence d'effets micro-inertiels est donnée par :

$$\sigma_m^\infty = \frac{2}{3}\sigma_0 \ln \left(\frac{R^\infty}{R} \right)^3 + \frac{4}{3}\beta \frac{\dot{R}}{R} + \rho \left(\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} \right), \quad (2.2)$$

avec les conditions initiales $R(t=0) = R_0$, $\dot{R}(t=0) = 0$. Remarquons que dans le cas quasi-statique, l'équation (2.2) se réduit à :

$$\sigma_m^\infty = \frac{2}{3}\sigma_0 \ln \left(\frac{R^\infty}{R} \right)^3 + \frac{4}{3}\beta \frac{\dot{R}}{R}, \quad (2.3)$$

pour laquelle l'évolution du vide est déterminée de façon exacte :

$$\frac{R}{R_0} = \exp \left\{ \frac{\sigma_m^\infty - \sigma^*}{2\sigma_0} \left[\exp \left(\frac{3\sigma_0}{2\beta} \right) - 1 \right] \right\} \quad (2.4)$$

où $\sigma^* = \frac{2}{3}\sigma_0 \ln \left(\frac{R_0^\infty}{R_0} \right)^3$ est une contrainte seuil de plastification. Si le chargement imposé σ_m^∞ est inférieur à cette contrainte critique, le matériau reste rigide. Une fois celle-ci dépassée, le terme visqueux oppose une résistance (d'autant plus importante que β est élevé) au changement de volume de la cavité.

¹s'agissant de cavités ellipsoïdales, le rayon est défini comme la moyenne des demi-axes de l'ellipse

Concernant les effets inertiels, dans le cas d'une matrice au comportement rigide parfaitement plastique ($\beta = 0$), l'équation (2.2) aboutit à la relation suivante :

$$\sigma_m^\infty = \frac{2}{3}\sigma_0 \ln \left(\frac{R^\infty}{R} \right)^3 + \rho \left(\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} \right), \quad (2.5)$$

pour laquelle KLÖCKER [81] met en évidence l'existence d'une solution analytique :

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\frac{4\sigma_0}{3\rho R_0^2} \ln \frac{R}{R_0} - \alpha \left(1 - \frac{1}{(R/R_0)^3} \right)}, \quad \alpha = \frac{1}{3} \left[\frac{4\sigma_0}{3\rho R_0^2} - \frac{2(\sigma_m^\infty - \sigma^*)}{\rho R_0^2} \right]. \quad (2.6)$$

Il conclut alors que la vitesse de croissance de la cavité dépend essentiellement de la différence entre le chargement hydrostatique et la contrainte seuil $\sigma^* = \frac{2}{3}\sigma_0 \ln \left(\frac{R_0^\infty}{R_0} \right)^3$. KLÖCKER [81] constate notamment que des contraintes σ_m^∞ dépassant de peu le seuil de plastification ($\sim 1\%$) conduisent à un accroissement du rayon d'un facteur 10 en une demi microseconde. Malgré cela, il note que les effets d'inertie sont tout de même importants pour stabiliser la croissance du vide dans la mesure où l'analyse quasi-statique conduit à une vitesse d'expansion infinie.

travaux de ORTIZ ET MOLINARI [104]

Le couplage inertie-écrouissage-sensibilité à la vitesse de déformation est pris en compte dans les travaux de ORTIZ ET MOLINARI [104] en 1992. Le comportement de la matrice incompressible est donné par la loi puissance :

$$\sigma_{eq} = k \varepsilon_{eq}^n \dot{\varepsilon}_{eq}^m, \quad (2.7)$$

où k est une constante du matériau, n et m les coefficients d'écrouissage et de sensibilité à la vitesse de déformation, respectivement. Le matériau est soumis à l'infini à une pression (contrainte hydrostatique ²), que l'on note p . Le vide conserve sa forme initialement sphérique tout au long du chargement.

Par le principe de conservation de l'énergie, les auteurs obtiennent l'équation suivante, donnée sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{a}} = C \frac{f(\tilde{a})}{\tilde{a}} \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \right)^m + D \left(\frac{d\tilde{b}}{d\tilde{t}} + \frac{3}{2} \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \right), \quad (2.8)$$

avec $\tilde{a}(0) = 1$, $\tilde{b}(0) = 0$. La fonction $f(\tilde{a})$, dépendant de m et n , est donnée par :

$$f(\tilde{a}, n, m) = \int_1^\infty \left[\ln \left(\frac{x}{x-1+1/\tilde{a}^3} \right) \right]^n x^{m+1} dx, \quad (2.9)$$

² dans tout le manuscrit, la pression est définie de la même manière que la contrainte hydrostatique. Cette précision s'impose en raison des différentes conventions, respectées ou non, croisées dans la littérature. Ainsi, pour un chargement en expansion, la pression p sera positive

et où :

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \dot{\varepsilon}_{ref} t, \\ \tilde{a} &= a/a_0, \\ \tilde{b} &= d\tilde{a}/d\tilde{t}, \\ \tilde{p} &= p/\sigma_{ref},\end{aligned}\tag{2.10}$$

sont des nombres sans dimension. $\dot{\varepsilon}_{ref}$ est une vitesse de déformation de référence à choisir selon le type de problème traité (par exemple en fonction de la vitesse de chargement). Elle est liée à σ_{ref} via la relation :

$$\sigma_{ref} = k\dot{\varepsilon}_{ref}^m,\tag{2.11}$$

tandis que C et D sont des constantes du matériau définies par :

$$C = \left(\frac{2}{3}\right)^{1+n} 2^m, \quad D = \frac{\rho a_0^2 \dot{\varepsilon}_{ref}^2}{\sigma_{ref}} = \frac{\rho a_0^2}{k} \dot{\varepsilon}_{ref}^{2-m}.\tag{2.12}$$

Les effets d'inertie sont représentés par la constante D et sont donc proportionnels au carré du rayon initial de la cavité, au carré de la vitesse de déformation de référence et à la masse volumique du matériau ρ . On notera, si l'on réécrit $D = \dot{\varepsilon}_{ref}^2 \rho a_0^2 / \sigma_{ref}$, la similitude avec le terme $\rho R_0^2 / \sigma_0$ prédominant dans l'équation (2.6) et contrôlant les effets d'inertie dans le modèle étudié par KLÖCKER [81].

ORTIZ ET MOLINARI [104] s'attachent ensuite à analyser le comportement à court et long termes, lorsque le chargement adimensionnel $\tilde{p}$ est supposé varier comme suit :

$$\tilde{p} = \tilde{p} \tilde{t}^\gamma, \quad \gamma > 0, \quad \dot{\tilde{p}} = C^{te} > 0.\tag{2.13}$$

Par une analyse asymptotique de l'équation (2.8), les auteurs observent qu'aux temps courts ($\tilde{a}$ proche de 1) la composante inertielle (2^{nd} terme du membre de droite dans l'équation (2.8)) devient négligeable pour :

$$\gamma > \frac{2n+m}{1-n-m},\tag{2.14}$$

condition vérifiée dans la plupart des cas. En revanche, aux temps longs, le terme inertiel devient prépondérant pour :

$$\gamma > -m.\tag{2.15}$$

Cette dernière condition est toujours vérifiée si l'on considère une pression toujours croissante ($\gamma > 0$), pour toutes valeurs de m . Ainsi le résultat fondamental de ORTIZ ET MOLINARI [104] est mis en lumière : les grands temps sont dominés par les effets d'inertie tandis que les premiers temps de croissance sont pilotés par les effets visqueux.

Soulignons que dans le cas particulier où $m = 0$, les auteurs aboutissent à l'expression suivante de la vitesse de croissance relative du vide :

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}}\right)^2 = \frac{2}{3D}(\tilde{p} - \tilde{p}_{cr}),\tag{2.16}$$

$\tilde{p}_{cr}$ désignant une pression critique au-delà de laquelle le vide va croître de façon infinie :

$$\tilde{p}_{cr} = \frac{1}{1+n} C \int_1^\infty \left[\ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \right]^{1+n} dx. \quad (2.17)$$

Dans l'hypothèse d'un chargement surcritique avec $\tilde{p}$ constant tel que $\tilde{p} > \tilde{p}_{cr}$, il est possible de résoudre l'équation (2.16) définie pour les grands temps ($\tilde{a} \rightarrow \infty$). Les auteurs obtiennent :

$$\tilde{a} = \tilde{t} \sqrt{\frac{2}{3D} (\tilde{p} - \tilde{p}_{cr})} + 1. \quad (2.18)$$

Le vide présente alors une croissance linéaire avec le temps. A mesure que la pression p s'approche de la pression critique, la vitesse d'expansion du vide diminue. Au-dessous de cette valeur, ORTIZ ET MOLINARI [104] concluent que la croissance du vide est limitée et que l'on aboutit éventuellement à une configuration stationnaire.

travaux de WU ET AL. [151]

WU ET AL. [151] obtiennent en 2003 des résultats qui confirment ceux obtenus par ORTIZ ET MOLINARI [104]. Dans le cas d'un matériau non sensible à la vitesse de déformation, les auteurs aboutissent à la relation suivante :

$$\tilde{a}\ddot{\tilde{a}} + \frac{3}{2}\dot{\tilde{a}}^2 = \frac{p - p^c}{\sigma_y}, \quad (2.19)$$

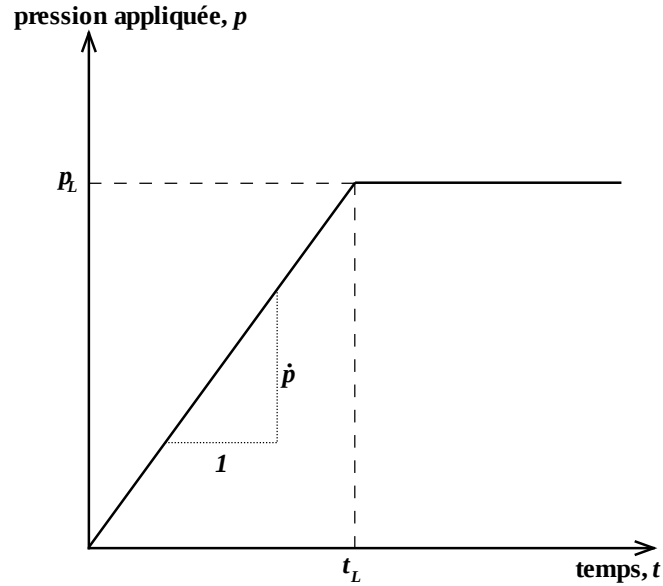


FIG. 2.1 – Histoire de la pression appliquée, dans l'analyse de WU ET AL. [151]. Initialement, la pression croît à vitesse constante $\dot{p}$ jusqu'à atteindre, au temps t_L , un plateau d'amplitude p_L .

$\tilde{a}$ désignant toujours le rapport a/a_0 et $\dot{\tilde{a}}$ la dérivée de $\tilde{a}$ par rapport à $\tilde{t} = t/(\rho a_0^2/\sigma_y)$. σ_y est la limite d'élasticité, p la pression appliquée et p^c une pression critique.

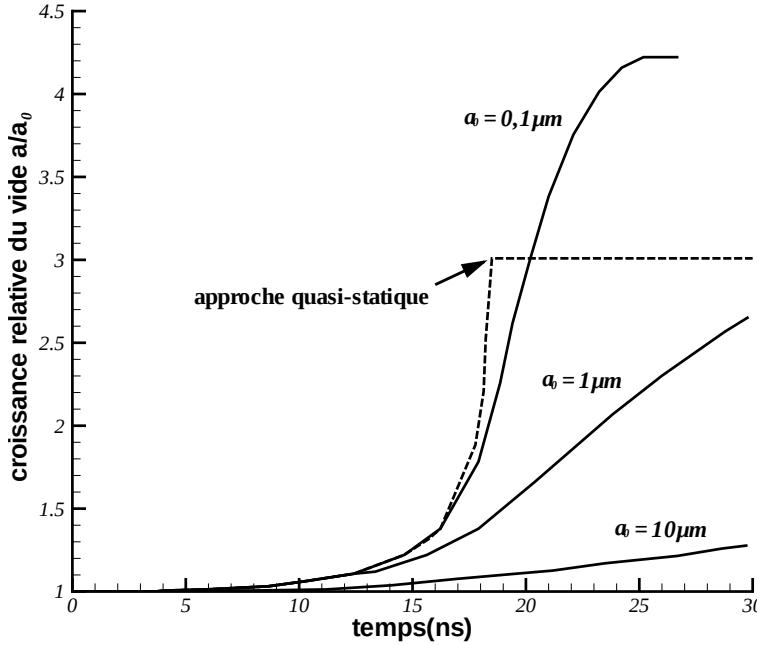


FIG. 2.2 – Résultats numériques (équation (2.19)) des croissances dynamique et quasi-statique d'un vide soumis à un chargement sous-critique dans un matériau non sensible à la vitesse de déformation, d'après WU ET AL. [151]. Le matériau considéré a les propriétés d'un titane- α avec $n = 0.15$. Le chargement appliqué est illustré sur la figure 2.1 avec $p_L = 6.5\sigma_y$ (la pression critique vaut $p^c = 6.7\sigma_y$). La vitesse de pression est $\dot{p} = 0.1 \text{ GPa/ns}$. 3 tailles initiales de vides sont considérées : $a_0 = 0.1 \mu m$, $a_0 = 1 \mu m$, et $a_0 = 10 \mu m$. L'analyse quasi-statique (indépendante de la taille initiale du vide) est représentée par le trait discontinu tandis que l'approche dynamique est représentée par les traits continus.

p^c a la même signification que p_{cr} dans les travaux de ORTIZ ET MOLINARI [104] et représente une nouvelle fois la pression critique qui définit si l'expansion du vide est infinie (régime surcritique) ou limitée (régime sous-critique).

En régime surcritique, les auteurs déterminent la vitesse stationnaire de croissance du vide qui s'exprime par :

$$\dot{a}_e = \sqrt{\frac{2C\sigma_y}{3\rho}}, \text{ où } C = \frac{p - p^c}{\sigma_y}, \quad (2.20)$$

et est identique à la valeur obtenue par ORTIZ ET MOLINARI [104] donnée par l'équation (2.16) avec $\dot{\tilde{a}} = \frac{\dot{a}}{a_0 \dot{\epsilon}_{ref}}$.

La figure 2.2 présente l'évolution relative de vides pour un matériau titane- α en régimes quasi-statique et dynamique pour 3 valeurs de rayon initial $a_0 = 0.1 \mu m$, $a_0 = 1 \mu m$, et $a_0 =$

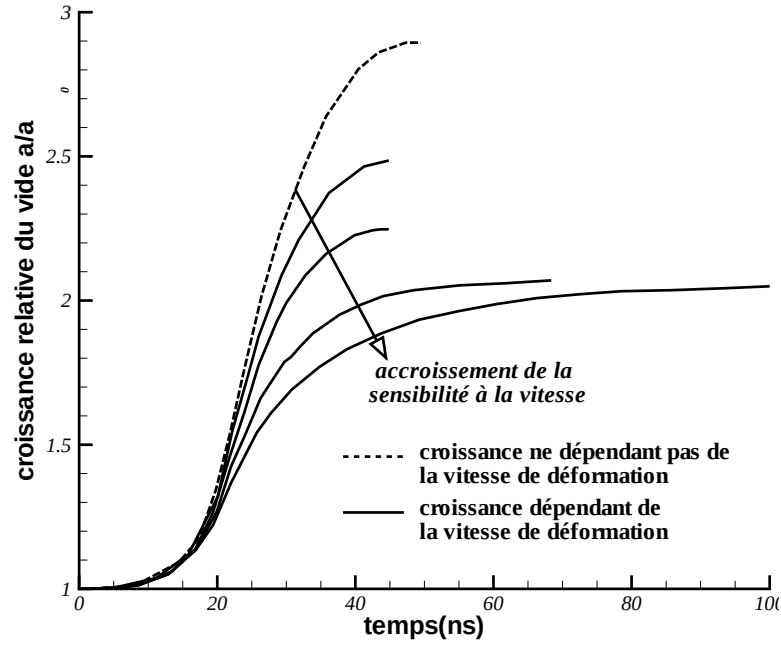


FIG. 2.3 – Résultats combinés des effets d’inertie et de sensibilité à la vitesse de déformation sur la croissance de vide pour un chargement sous-critique, d’après WU ET AL. [151]. La taille initiale du vide est $0.1\mu m$ et la sensibilité à la vitesse varie avec le coefficient c_2 dans l’équation (2.22). Le chargement est identique à celui de la figure 2.2. Le trait discontinu représente le cas d’un matériau indépendant à la vitesse et les traits continus sont pour les matériaux sensibles à la vitesse. Plusieurs valeurs de c_2 sont choisies : $c_2 = 2.10^9 s$, $4.10^9 s$, $6.10^9 s$, et $8.10^9 s$.

$10\mu m$. Le régime de chargement est sous-critique. Le comportement plastique du matériau considéré est décrit par une loi puissance :

$$\sigma_{eq} = \sigma_y \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} \right)^n, \quad (2.21)$$

où ε_y correspond à la déformation atteinte à la limite d’élasticité σ_y et vaut donc σ_y/E . Les paramètres prennent les valeurs $\sigma_y = 316.5 MPa$ pour la limite d’élasticité, et $E = 120 GPa$ pour le module de Young, $n = 0.15$ pour le coefficient d’écrouissage. Le chargement appliqué est illustré sur la figure 2.1. La vitesse de pression initiale est $0.1 GPa/ns$ et l’amplitude est $p_L = 6.5\sigma_y$. Le chargement est sous-critique puisque dans ce cas $p^c = 6.7\sigma_y$. Sur la figure 2.2, l’analyse quasi-statique est présentée en trait discontinu. Concernant l’analyse dynamique (trait continu), on observe un temps d’incubation et un ralentissement de l’expansion à mesure que le rayon initial est augmenté. La croissance dynamique « dépasse » la croissance quasi-statique, qui elle sature dès que le plateau de pression est atteint.

WU ET AL. [151] s’interessent ensuite à l’influence de la sensibilité à la vitesse de d for-

mation. La loi de comportement du matériau s'écrit :

$$\sigma_{eq} = \sigma_y \left(1 + \frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_y} \right)^n (1 + c_2 \dot{\varepsilon}_{eq}) , \quad (2.22)$$

où c_2 est un paramètre qui va contrôler la sensibilité à la vitesse. Les résultats sont présentés sur la figure 2.3 et sont obtenus pour un titane- α en régime dynamique, avec différentes valeurs de c_2 . Les effets stabilisant sont clairement mis en évidence lorsque c_2 augmente.

WU ET AL. [151] [152] examinent également l'effet combiné de l'inertie, l'adoucissement thermique et la conduction thermique sur l'expansion de la cavité sphérique. Ils concluent que l'adoucissement thermique diminue la valeur de la contrainte critique et déstabilise la croissance des vides. La conduction thermique a pour effet de réduire l'influence de l'adoucissement thermique et ce d'autant plus fortement que le vide est petit. Les auteurs relèvent aussi l'influence de la vitesse de pression sur les effets de la conductivité thermique. Pour les grands $\dot{p}$, une approche négligeant la conductivité thermique est validée.

2.2 Sphère creuse

2.2.1 Approches fondatrices

travaux de CARROLL ET HOLT [21]–JOHNSON [73]

Dans le but d'étudier les effets inertiels dans le processus de compression des matériaux poreux, CARROLL ET HOLT [21] développent un modèle à symétrie sphérique soumis à un chargement en pression à la frontière extérieure. Ce modèle est étendu par JOHNSON [73] quelques années plus tard dans le cadre de travaux sur l'écaillage du cuivre.

Le matériau est élastique parfaitement plastique (limite d'élasticité notée Y) incompressible. Le volume d'étude est la sphère creuse de rayons intérieur a (initial a_0) extérieur b (initial b_0). La distension α est définie comme le rapport :

$$\alpha = \frac{b^3}{b^3 - a^3} , \quad (2.23)$$

et est liée à la porosité $f = \frac{a^3}{b^3}$ via la relation :

$$\alpha = \frac{1}{1 - f} . \quad (2.24)$$

Durant le processus de déformation, la plasticité va s'initier à la paroi du vide puis va progresser jusqu'à la surface extérieure de la sphère (voir figure 2.4). On note c le front plastique caractérisant la transition élastique/plastique. CARROLL ET HOLT [21] sont amenés à considérer trois stades dans l'évolution du vide. La loi d'évolution de α est alors gouvernée par :

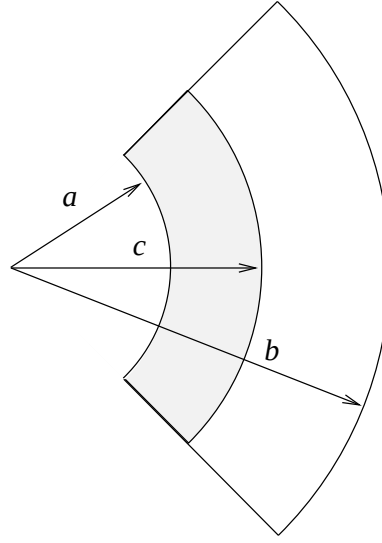


FIG. 2.4 – Propagation du front plastique dans une sphère creuse. Une fois la plasticité initiée à la frontière du vide, la zone plastique se propage jusqu'au bord extérieur du motif. Le rayon c divise la matrice en deux zones : une zone plastique (entre a et c) et une zone purement élastique (entre c et b).

- une phase élastique ($c = a$) où la sphère est entièrement élastique :

$$-p(t) - \frac{4G}{3\alpha} \left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha - 1} \right) = \tau^2 Y Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) , \text{ pour } \zeta(\alpha - \alpha_1) > 0 \quad (2.25)$$

- une phase élastoplastique ($a < c < b$) durant laquelle la matrice se scinde en une zone intérieure plastique, et une zone extérieure élastique, figure 2.4 :

$$-p(t) - \frac{2}{3} \zeta Y \left\{ 1 - \frac{2\zeta G}{Y} \left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha} \right) + \ln \left[\frac{2\zeta G}{Y} \left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha - 1} \right) \right] \right\} = \tau^2 Y Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) ,$$

pour $\zeta(\alpha - \alpha_2) > 0$ (2.26)

- une phase plastique ($c = b$) correspondant à un état où la sphère est entièrement plastifiée :

$$-p(t) - \frac{2}{3} \zeta Y \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) = \tau^2 Y Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) , \text{ pour } \zeta(\alpha - \alpha_2) < 0 . \quad (2.27)$$

Les conditions initiales sont données par $\alpha(0) = \alpha_0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$. τ désigne un temps caractéristique défini par :

$$\tau^2 = \frac{\rho a_0^2}{3Y(\alpha_0 - 1)^{2/3}} , \quad (2.28)$$

tandis que $Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ est donné par :

$$Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = -\ddot{\alpha} \left[(\alpha - 1)^{-1/3} - (\alpha)^{-1/3} \right] + \frac{1}{6} \dot{\alpha}^2 \left[(\alpha - 1)^{-4/3} - (\alpha)^{-4/3} \right] . \quad (2.29)$$

Les distensions α_1 et α_2 correspondent aux valeurs limites de passage d'une phase à l'autre et sont définies par :

$$\begin{cases} \alpha_1 &= \frac{Y + 2\zeta G \alpha_0}{Y + 2\zeta G} , \\ \alpha_2 &= \frac{2\zeta G \alpha_0}{Y + 2\zeta G} . \end{cases} \quad (2.30)$$

Le paramètre ζ dépend du signe de $p(t)$ et prend respectivement la valeur de 1 pour un chargement en compression et -1 pour un chargement en tension.

temps caractéristiques Dans les expressions précédentes, la contrainte inertielle (terme de droite dans les équations (2.25) à (2.27)) fait intervenir une grandeur caractéristique τ , donnée par l'équation (2.28), proportionnelle à la densité de la matrice, au rayon initial de la cavité, et à la distension initiale. Une interprétation de ce temps caractéristique est proposée dans DRAGON ET TRUMEL [36]. Dans un premier temps les auteurs introduisent τ_e , spécifique à la première phase et défini par :

$$\tau_e^2 = \frac{\rho a_0^2}{3G(\alpha_0 - 1)^{2/3}} . \quad (2.31)$$

De cette manière, l'évolution du vide durant la phase élastique, gouvernée par l'équation (2.25), se trouve donnée par :

$$-p(t) - \frac{4G}{3\alpha} \left(\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha - 1} \right) = \tau_e^2 G Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) , \quad (2.32)$$

où n'apparaît alors plus le "caractère plastique" initialement présent à travers la limite d'écoulement Y . Le temps τ dans les phases élastoplastique et purement plastique est remplacé par τ_p défini par :

$$\tau_p^2 = \tau^2 = \frac{\rho a_0^2}{3Y(\alpha_0 - 1)^{2/3}} , \quad (2.33)$$

les lois d'évolution restant inchangées pour ces deux phases. En écrivant τ_e et τ_p en fonction de la porosité initiale :

$$\tau_e^2 = \frac{\rho b_0^2}{3G} (1 - f_0)^{2/3} , \quad (2.34a)$$

$$\tau_p^2 = \frac{\rho b_0^2}{3Y} (1 - f_0)^{2/3} , \quad (2.34b)$$

et sous l'hypothèse d'un matériau initialement à faible porosité ($f_0 \ll 1$ ou encore $a_0 \ll b_0$), les relations (2.34) aboutissent à :

$$\tau_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b_0}{C_e} , \quad C_e = \sqrt{G/\rho} , \quad (2.35a)$$

$$\tau_p = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b_0}{C_p} , \quad C_p = \sqrt{Y/\rho} , \quad (2.35b)$$

où C_e et C_p sont les célérités des ondes (de cisaillement) respectivement élastiques et plastiques. A partir de (2.35), DRAGON ET TRUMEL [36] interprètent τ_e et τ_p comme les temps nécessaires à une information perçue à la paroi du vide pour être transmise à la frontière extérieure de la sphère creuse. Les auteurs notent également que bien souvent les termes inertiels sont dits dépendants du rayon absolu de la cavité, JOHNSON [73]. Or les équations (2.35) montrent, en particulier pour de faibles porosités, qu'ils sont plutôt dépendants de b_0 et donc du volume d'étude.

contribution inertielle Quelque soit la phase considérée, la pression appliquée se scinde en une contribution inertielle (résistance à l'évolution du vide) et une partie statique (résistance à l'écoulement plastique). La partie micro-inertielle reste inchangée durant les trois étapes et peut être, en utilisant la définition de la porosité en fonction de α (2.24), réécrite de la façon suivante :

$$\tau^2 Y Q(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \rho \left[a \ddot{a} \left(1 - f^{1/3} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{4}{3} f^{1/3} + \frac{1}{3} f^{4/3} \right) \right]. \quad (2.36)$$

Ce terme inertiel a déjà été rencontré dans des travaux antérieurs à CARROLL ET HOLT [21]. En 1964, KNOWLES ET JAKUB [82] ont étudié les vibrations engendrées par l'application d'une pression en paroi d'un vide sphérique. Le milieu est supposé élastique non linéaire incompressible et décrit par un potentiel hyperélastique. La démarche est menée en grandes déformations. La formulation obtenue par les auteurs fait intervenir une contribution inertielle identique à celle obtenue par CARROLL ET HOLT [21] (équation (2.36)) et une contribution statique tenant compte du comportement hyperélastique du matériau.

Soulignons qu'en 1960, HOPKINS [66] a étudié l'expansion d'une cavité sphérique dans une matrice infinie ayant un comportement élastique linéaire incompressible. Dans ce cas, l'évolution du vide se trouve gouvernée par :

$$p(t) = \frac{4E}{9} \left(1 - \frac{a_0^3}{a^3} \right) + \rho \left(a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right), \quad (2.37)$$

et la contribution inertielle est alors identique à celle de (2.36) avec $f = 0$.

modèle simplifié Après avoir constaté que la porosité n'évoluait que très peu durant les phases élastique et élastoplastique, le modèle finalement retenu par CARROLL ET HOLT [21] est donné par :

$$a = a_0, \quad \dot{a} = 0, \quad \text{si } p(t) \leq p_{st} \quad (2.38a)$$

$$p(t) - p_{st} = \rho \left[a \ddot{a} \left(1 - f^{1/3} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{4}{3} f^{1/3} + \frac{1}{3} f^{4/3} \right) \right] \quad (2.38b)$$

$$p_{st} = -\frac{2}{3} \zeta Y \ln(1/f). \quad (2.38c)$$

La contribution statique $p_{st} = -\frac{2}{3}\zeta Y \ln(1/f)$ est identique à celle obtenue par le potentiel de GURSON [58]. Ainsi, dans la plupart des études ultérieures, seule la phase de croissance plastique du vide sera considérée.

cas d'un chargement en tension - modèle de JOHNSON [73] Le modèle de CARROLL ET HOLT [21] est étendu au chargement en tension $\zeta = -1$ par JOHNSON [73] en 1981, dans le cadre d'études portant sur l'écaillage dynamique du cuivre. Le comportement est viscoplastique linéaire et défini par l'équation (1.24) :

$$\sigma_{eq} = Y + \beta \dot{\varepsilon}_{eq}. \quad (2.39)$$

L'auteur aboutit essentiellement aux mêmes conclusions que CARROLL ET HOLT [21] sur l'influence très peu marquée des phases élastique et élastoplastique.

De plus, l'utilisation de la loi de comportement définie par l'équation (2.39) ajoute un ingrédient visqueux à la loi d'évolution considérée par CARROLL ET HOLT [21]. On a vu que la viscosité avait un caractère stabilisant sur la croissance de l'endommagement, au même titre que l'inertie d'ailleurs, mais le choix particulier de cette loi de comportement (très forte sensibilité à la vitesse de déformation) va amplifier les effets visqueux et la contribution inertielle peut devenir négligeable. JOHNSON [73] utilise tout de même quelques précautions en précisant au lecteur que chaque cas doit être analysé de façon individuelle avant d'appliquer cette simplification. Quoiqu'il en soit, en négligeant le terme inertiel, il aboutit au modèle décrit par :

$$\alpha = \alpha_0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \text{si } \bar{p}(t) \leq p_{eq} \quad (2.40a)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{\eta} \alpha (\alpha - 1)^{1/3} (\bar{p}(t) - p_{eq}) \quad (2.40b)$$

$$p_{eq} = \frac{2Y}{3} \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right). \quad (2.40c)$$

On précisera que les conditions aux limites utilisées par JOHNSON [73] ne sont pas tout à fait les mêmes que celles utilisées par CARROLL ET HOLT [21], ce qui explique la différence entre les pressions limites p_{eq} et p_{st} des deux approches. En effet l'auteur considère une pression effective agissant sur un élément de matière, ajustée en raison de la présence des cavités. La pression alors appliquée à la frontière extérieure de la sphère creuse est $\bar{p}(t)\alpha$.

Le modèle de JOHNSON [73] est étendu aux matériaux écrouissables par PERZYNA [107] notamment (écrouissage linéaire) et les considérations restent les mêmes quant aux conditions aux limites, ou prépondérance des effets visqueux sur les effets inertiels. Dans la même famille de modèles, on trouvera les travaux de EFTIS ET AL. [40], EFTIS ET NEMES [42, 44].

travaux de CORTÉS [28]

Les analyses fondées sur l'approche initiée notamment par CARROLL ET HOLT [21] reposent sur l'équation du mouvement et son intégration sur le volume d'étude (entre a et b). Il vient :

$$p = 2 \int_a^b \frac{\sigma_{eq}}{r} dr + \text{effets d'inertie} \quad (2.41)$$

p désigne la pression appliquée en $r = b$ (ici, on ne tient pas compte de l'ajustement de la pression en fonction des défauts présents dans le matériau, comme dans les travaux de JOHNSON [73], PERZYNA [107]). Le terme quasi-statique est représenté par l'intégrale dans l'équation (2.41) et fait intervenir le comportement de la matrice.

En 1992, CORTÉS [28] s'attache à évaluer la contribution statique pour plusieurs lois de comportement incluant des ingrédients comme la sensibilité à la vitesse, l'écroutissage ou encore la sensibilité à la température. Le tableau 2.1 rapporte la plupart des résultats obtenus par l'auteur en intégrant la quantité complémentaire des effets d'inertie dans l'équation (2.41). Dans le tableau 2.1, T désigne la température et T_f la température de fusion du matériau, les autres grandeurs ayant préalablement été définies. Il est également fait référence à des fonctions $F_i(f, f_0)$ dont les expressions sont données par :

$$F_1(f, f_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1 - f_0/f}{1 - f_0} \right)^n (1 - f^n), \quad (2.42a)$$

$$F_2(f, f_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} \left(\frac{1 - f_0/f}{1 - f_0} \right)^n (1 - f^n), \quad (2.42b)$$

$$F_3(f, f_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1 - f_0/f}{1 - f_0} \right)^n \left[\frac{1 - f^n}{n^2} - \frac{f^n \ln(1/f)}{n} \right], \quad (2.42c)$$

$$F_4(f, f_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \frac{1}{n!n} \left(\frac{1 - f_0/f}{1 - f_0} \right)^n (1 - f^n), \quad (2.42d)$$

où $\lambda = (2\kappa\sigma_0)/(3\rho CT_f)$, C est la chaleur spécifique (en J/kgK). Durant le processus de déformation, le travail plastique dans les métaux peut être partiellement stocké dans le réarrangement microstructural, mais la grande majorité est dissipée sous forme de chaleur dont le pourcentage est traduit par κ le coefficient de TAYLOR ET QUINNEY [128] habituellement pris égal à 0.9.

loi de comportement	composante statique
$\sigma_{eq} = \sigma_0 h(\varepsilon_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq}, T)$ avec $h(\varepsilon_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq}, T) = \dots$	$\int_a^b \frac{2\sigma_{eq}}{r} dr$
1	$\frac{2\sigma_0}{3} \ln(1/f)$
$(1 + B\dot{\varepsilon}_{eq}^m)$	$\frac{2\sigma_0}{3} \ln(1/f) + \frac{2\sigma_0 B}{3m} \left(\frac{2\dot{f}}{3f(1-f)} \right)^m (1 - f^m)$
$(1 + \beta \ln(\dot{\varepsilon}_{eq}/\dot{\varepsilon}_0))$	$\frac{2\sigma_0}{3} \ln(1/f) + \frac{2\sigma_0 \beta}{3} \ln \left(\frac{2\dot{f}}{3f(1-f)\dot{\varepsilon}_0} \right) \ln(1/f) - \frac{\sigma_0 \beta}{3} [\ln(1/f)]^2$
$(1 + H\varepsilon_{eq})$	$\frac{2\sigma_0}{3} \ln(1/f) + \frac{4\sigma_0}{9} HF_1(f, f_0)$
$(1 + H\varepsilon_{eq})(1 + B\dot{\varepsilon}_{eq}^m)$	$\frac{2\sigma_0}{3} \ln(1/f) + \frac{4\sigma_0}{9} HF_1(f, f_0) + \frac{2\sigma_0 B}{3m} \left(\frac{2\dot{f}}{3f(1-f)} \right)^m (1 - f^m)$ $+ \frac{2\sigma_0 BH}{3} \left(\frac{2\dot{f}}{3f(1-f)} \right)^m F_2(f, f_0)$
$(1 + H\varepsilon_{eq})(1 + \beta \ln(\dot{\varepsilon}_{eq}/\dot{\varepsilon}_0))$	$\frac{2\sigma_0}{3} \ln(1/f) + \frac{2\sigma_0 \beta}{3} \ln \left(\frac{2\dot{f}}{3f(1-f)\dot{\varepsilon}_0} \right) \ln(1/f) - \frac{\sigma_0 \beta}{3} [\ln(1/f)]^2$ $+ \frac{4\sigma_0 H}{9} \left\{ F_1(f, f_0) \left[1 + \beta \ln \left(\frac{2\dot{f}}{3f(1-f)\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] - \beta F_3(f, f_0) \right\}$
$(1 - T/T_f)$	$\frac{2\sigma_0}{3} \ln(1/f) + \frac{2\sigma_0}{3} F_4(f, f_0)$

TAB. 2.1: Evaluation de la contribution quasi-statique dans le cas d'un chargement en pression, d'après CORTÉS [27]. Les fonctions $F_i(f, f_0)$ ($i = 1..4$) sont données par les équations (2.42a) à (2.42d)

CORTÉS [27] étudie l'influence des différentes sensibilités sur le comportement d'un aluminium et d'un cuivre. Il met en évidence l'effet important de la viscosité du matériau sur l'évolution du vide, en particulier aux grandes vitesses de déformation. L'écrouissage a un effet stabilisant mais son influence est moins prononcée. La conséquence de la prise en

compte de l'adoucissement thermique conduit à des effets négligeables. Bien que la température en paroi du vide soit très élevée (proche de la température de fusion de la matrice, déjà noté par JOHNSON [73]), il s'avère que le phénomène est si localisé que son incidence sur la résistance de la matrice reste minime. La conductivité thermique est négligée dans l'analyse de CORTÉS [27] mais l'auteur souligne que cela ne modifierait pas cette conclusion.

2.2.2 Homogénéisation en dynamique

Des approches basées sur l'homogénéisation en dynamique sont publiées au milieu des années 90 et permettent, contrairement aux analyses mécaniques précédentes (sauf celle proposée par GURSON [58]), de ne pas considérer uniquement des chargements sphériques. Les premiers travaux illustrant l'homogénéisation en dynamique sont issus de WANG [142] [143], WANG ET JIANG [145] suivis par ceux de MERCIER ET MOLINARI [93], MOLINARI ET MERCIER [97]. Le matériau reste rigide viscoplastique et le chargement fortement triaxial.

travaux de WANG [143], WANG ET JIANG [145]

La méthode utilisée par WANG [143], WANG ET JIANG [145] repose sur une extension de l'approche de GURSON [58] au cas dynamique. Les auteurs considèrent un VER Ω d'un matériau poreux et définissent un potentiel viscoplastique W tel que :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{D}}}, \quad (2.43)$$

où $\underline{\underline{\Sigma}}$ désigne le tenseur des contraintes macroscopiques et $\underline{\underline{D}}$ le tenseur des vitesses de déformation macroscopique, obtenus par moyenne sur le VER, de volume noté $|\Omega|$, des quantités microscopiques correspondantes $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle, \quad (2.44a)$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} d\Omega = \langle \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \rangle. \quad (2.44b)$$

Les auteurs montrent que W se décompose additivement en deux potentiels Φ et Π , respectivement appelés potentiel de déformation et potentiel cinétique. La contrainte macroscopique définie par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{D}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{D}}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{D}}} \quad (2.45)$$

est la somme d'une contrainte d'origine inertielle

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{dyn} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{D}}}, \quad (2.46)$$

et d'une contrainte d'origine viscoplastique

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{vp} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{D}}}. \quad (2.47)$$

application aux matériaux poreux Classiquement, le VER du matériau poreux est représenté par une sphère creuse de rayon intérieur a et extérieur b , de porosité $f = a^3/b^3$, soumise aux contraintes et vitesses de déformation macroscopiques. Le comportement local de la matrice est défini par un potentiel ϕ tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \phi(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}})}{\partial \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}}. \quad (2.48)$$

Dans cette étude, les auteurs utilisent le potentiel viscoplastique suivant :

$$\phi(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) = \frac{\dot{\epsilon}_0 \sigma_0}{1+m} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1+m}, \quad (2.49)$$

conduisant à la loi de comportement :

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^m. \quad (2.50)$$

Les auteurs se limitent ensuite au cas particulier d'un chargement axisymétrique et utilisent le champ de vitesse suivant, RICE ET TRACEY [110], GURSON [58] :

$$\underline{v} = \underline{v}^s + \underline{v}^v, \quad (2.51)$$

où $\underline{v}^s = \underline{D} \cdot \underline{x}$ est associé au changement de forme à volume constant et $\underline{v}^v = D_m (b/r)^3 \underline{x}$ le terme associé au changement de volume sans changement de forme. Le paramètre $r = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{1/2}$ désigne la norme du vecteur position $\underline{x}$. Une forme explicite des potentiels macroscopiques est finalement obtenue par les auteurs. Le potentiel cinétique s'écrit :

$$\Pi = a^2 f^{-2/3} \left\{ \frac{1}{4} D_m [f_1(f) D_m^2 + f_2(f) D_{eq}^2] + 3 [f_3(f) D_m \dot{D}_m + f_4(f) D_{eq} \dot{D}_{eq}] \right\} \quad (2.52)$$

avec

$$f_1(f) = 2(6f^{-1/3} - f^{-4/3} - 5), \quad (2.53a)$$

$$f_2(f) = 1 - f^{2/3}, \quad (2.53b)$$

$$f_3(f) = f^{-1/3} - 1, \quad (2.53c)$$

$$f_4(f) = (1 - f^{5/3})/10, \quad (2.53d)$$

et le potentiel de déformation macroscopique est donné par :

$$\Phi = \frac{\dot{\epsilon}_0 \sigma_0}{1+m} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1+m} Z(\omega, f), \quad (2.54)$$

avec :

$$Z(\omega, f) = \omega \int_{\omega}^{\omega_1} (1+y^2)^{\frac{1+m}{2}} y^{-2} dy, \quad \omega = \frac{2D_m}{D_{eq}}, \quad \omega_1 = \omega/f. \quad (2.55)$$

En particulier pour un matériau parfaitement plastique ($m = 0$) :

$$\Phi = \sigma_0 D_{eq} \left\{ \omega \left[\ln(1/f) + \ln \left(\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + f^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 + 1}} \right) \right] + \sqrt{\omega^2 + 1} - \sqrt{\omega^2 + f^2} \right\}, \quad (2.56)$$

ou, dans le cas d'un matériau à viscosité linéaire ($m = 1$) :

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_0 \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{D_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^2 \frac{1-f}{f} (f + \omega^2). \quad (2.57)$$

La relation entre grandeurs macroscopiques (loi de comportement du VER) est donc entièrement déterminée par l'équation (2.45) couplée aux expressions (2.52) et (2.54) des potentiels.

Pour un chargement hydrostatique, la contrainte macroscopique Σ_m est reliée à la porosité par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma_m = \frac{1}{m} \left(\frac{2}{3} \right)^{1+m} \frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}_0^m} \frac{1-f^m}{[f(1-f)]^m} \dot{f}^m \\ + \frac{1}{3} a_0^2 \left(\frac{1-f_0}{f_0} \right)^{2/3} (1-f)^{-8/3} \left[\left(f^{-1/3} + f - f^{2/3} \right) \ddot{f} \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left(12f^{-1/3} - f^{-4/3} - 11 \right) \dot{f}^2 \right], \end{aligned} \quad (2.58)$$

couplée à la loi d'évolution de la porosité issue de l'incompressibilité (1.2) :

$$\dot{f} = 3(1-f) D_m. \quad (2.59)$$

Remarquons que cette formulation a déjà été obtenue par CORTÉS [28] (voir le tableau 2.1 page 42, la 2^e ligne en remplaçant B par $1/\dot{\varepsilon}_0^m$) et mène aux résultats de CARROLL ET HOLT [21] lorsque le matériau est parfaitement plastique.

Pour un chargement purement déviatorique, la loi constitutive du matériau poreux devient :

$$\Sigma_{eq} = \left(\frac{D_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m (1-f) \sigma_0 + \Sigma_{eq}^{dyn}, \quad (2.60)$$

qui aboutit dans le cas parfaitement plastique et en l'absence de contribution inertielle :

$$\Sigma_{eq} = (1-f) \sigma_0. \quad (2.61)$$

Cette relation est couramment utilisée pour décrire la rupture dynamique des matériaux ductiles (JOHNSON [73], CURRAN ET AL. [30], SEAMAN ET AL. [119]) lorsque les effets d'inertie ne sont pas pris en compte.

WANG [143] quantifie par ailleurs l'effet de la température. La contrainte d'écoulement de la matrice s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma_T} \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^n, \quad (2.62)$$

γ_T désignant l'exposant d'adoucissement thermique et T_0 une température de référence. Les résultats finalement obtenus par WANG [143] montrent que les effets de température, d'inertie et de sensibilité à la vitesse de déformation augmentent avec la porosité. Il est également souligné le caractère stabilisant de m ainsi que de l'inertie, et celui déstabilisant de T , après avoir évalué la vitesse de croissance de vide $\dot{f}$ dans plusieurs cas. Les effets d'inertie sont prépondérants par rapport à l'influence des deux autres ingrédients, confirmant les résultats antérieurs de TONG ET RAVICHANDRAN [131].

travaux de MOLINARI ET MERCIER [97]

Les travaux de MOLINARI ET MERCIER [97] constituent également une approche fondamentale dans l'homogénéisation dynamique. Les auteurs soulignent une faiblesse dans le modèle développé par WANG [143] à travers la définition du tenseur macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$ (équation (2.44a)) qui est obtenu comme moyenne sur le VER du tenseur des contraintes microscopiques. Cette définition, valable en quasi-statique, devient inappropriée lorsque les quantités d'accélération sont prises en compte. MOLINARI ET MERCIER [97] proposent alors une alternative en définissant $\underline{\underline{\Sigma}}$ comme :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle + \langle \rho \underline{\gamma} \otimes \underline{x} \rangle \quad (2.63)$$

où $\underline{\gamma} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ désigne le vecteur accélération et l'opérateur ' $\otimes$ ' le produit tensoriel. Par le principe des puissances virtuelles, les auteurs aboutissent à :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \rho \frac{d|\underline{v}|^2}{dt} \right\rangle, \quad (2.64)$$

et, par la définition (2.63), permet aux grandeurs $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$ d'être variables conjuguées quelques soient les conditions aux limites imposées, en contraintes ou en vitesses. Précisons que l'approche de WANG [143], et la définition "statique" de la contrainte macroscopique (équation (2.44a)) conduit à des expressions différentes du principe des puissances virtuelles suivant le type de conditions imposées à la frontière $\partial\Omega$ du VER. En revanche, la définition dynamique de $\underline{\underline{\Sigma}}$ (équation (2.63)) proposée par MOLINARI ET MERCIER [97], conduit à la même expression donnée par (2.64).

Le comportement local est décrit par (2.48) et (2.49). En imposant des conditions aux limites cinématiques et en utilisant un principe variationnel, les auteurs aboutissent à la loi

de comportement dynamique du matériau homogénéisé :

$$(\underline{\underline{\Sigma}})^S = \underline{\underline{\Sigma}}^{static} + (\underline{\underline{\Sigma}}^{dyn})^S \quad (2.65)$$

$$(\underline{\underline{\Sigma}})^A = -(\underline{\underline{\Sigma}}^{dyn})^A \quad (2.66)$$

$(\cdot)^S$ et $(\cdot)^A$ désignant respectivement les parties symétrique et antisymétrique du tenseur du second ordre $(\cdot)$.

La contrainte macroscopique est ainsi la somme d'une contribution d'origine inertielle $\underline{\underline{\Sigma}}^{dyn}$ et d'une contribution d'origine viscoplastique obtenue à partir d'un potentiel Φ :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{static} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{D}}} . \quad (2.67)$$

La forme additive et la séparation des contributions au tenseur macroscopique des contraintes (équation (2.65)) permet un large choix de potentiels statiques pour évaluer $\underline{\underline{\Sigma}}^{static}$ (par exemple GURSON [58], OLEVSKY ET SKOROHOD [103], LEBLOND ET AL. [86]).

application aux matériaux poreux Le modèle est ensuite appliqué aux matériaux poreux. De la même manière que WANG [143], ou GURSON [58], le VER est schématisé par la sphère creuse (figure 1.4 (b)). Le comportement viscoplastique du matériau poreux en régime statique est supposé déterminé par le potentiel de OLEVSKY ET SKOROHOD [103] (équations (1.53) à (1.55)) qui conduit à :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{static} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{D}}} = AW^{m-1} (\theta \underline{\underline{D}}' + \chi e \underline{\underline{I}}) , \quad (2.68)$$

$(\cdot)'$ désignant le déviateur du tenseur du second ordre $(\cdot)$ et $\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité du second ordre.

En utilisant le champ de vitesses (2.51), les auteurs obtiennent une forme explicite pour $\underline{\underline{\Sigma}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} = & \underline{\underline{\Sigma}}^{static} + \rho a^2 \left[\frac{1}{5} (f^{-2/3} - f) \left(\underline{\underline{D}}' + \underline{\underline{C}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{C}}) \underline{\underline{I}} \right) + (f^{-2/3} - 1) D_m \underline{\underline{D}}' \right. \\ & + \frac{1}{6} (f^{-2/3} - 1) (\underline{\underline{D}}' : \underline{\underline{D}}') \underline{\underline{I}} - (f^{-2/3} - f^{-1}) \dot{D}_m \underline{\underline{I}} \\ & \left. + \left(3f^{-1} - \frac{5}{2} f^{-2/3} - \frac{1}{2} f^{-2} \right) D_m^2 \underline{\underline{I}} \right] , \end{aligned} \quad (2.69)$$

où $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{D}}' \cdot \underline{\underline{D}}'$. Le terme $\rho a^2 [\dots]$ définit la contribution inertielle.

Dans la même mesure que le résultat de WANG [143], l'équation (2.69) de MOLINARI ET MERCIER [97] s'applique à tout type de chargement avec une restriction tout de même sur la triaxialité qui doit être suffisamment grande, pour que le vide reste sphérique au cours du chargement.

chargement sphérique - étude de sensibilité MOLINARI ET MERCIER [97] appliquent leur modèle au chargement hydrostatique. Dans ce cas, la partie inertielle coïncide avec celle obtenue précédemment par CARROLL ET HOLT [21], KNOWLES ET JAKUB [82].

Les effets de la sensibilité à la vitesse sont illustrés sur la figure 2.5. Le matériau considéré est un aluminium ($A = 245 \text{ USI}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $a_0 = 20 \mu\text{m}$, $f_0 = 0.1$) soumis à une rampe de pression : $\Sigma_m = \dot{p}t$, $\dot{p} > 0$. On observe sur la figure 2.5 que l'augmentation de la vitesse de chargement (de 10 à 250 MPa/ns) conduit à une expansion anticipée du vide. On remarque aussi qu'à vitesse de chargement donnée, une augmentation de m retarde la croissance. De plus, au début de l'expansion, les analyses dynamique et quasi-statique ($\rho = 0$ dans l'équation (2.69)) sont identiques et l'évolution du vide est contrôlée par la viscosité du matériau. Dans un second temps, la solution statique croît plus vite que la dynamique et c'est alors l'inertie qui pilote la croissance, ce qui confirme les analyses de ORTIZ ET MOLINARI [104].

chargement axisymétrique - effet de la triaxialité Au travers d'un chargement axisymétrique, MOLINARI ET MERCIER [97] mesurent les effets de la triaxialité des contraintes

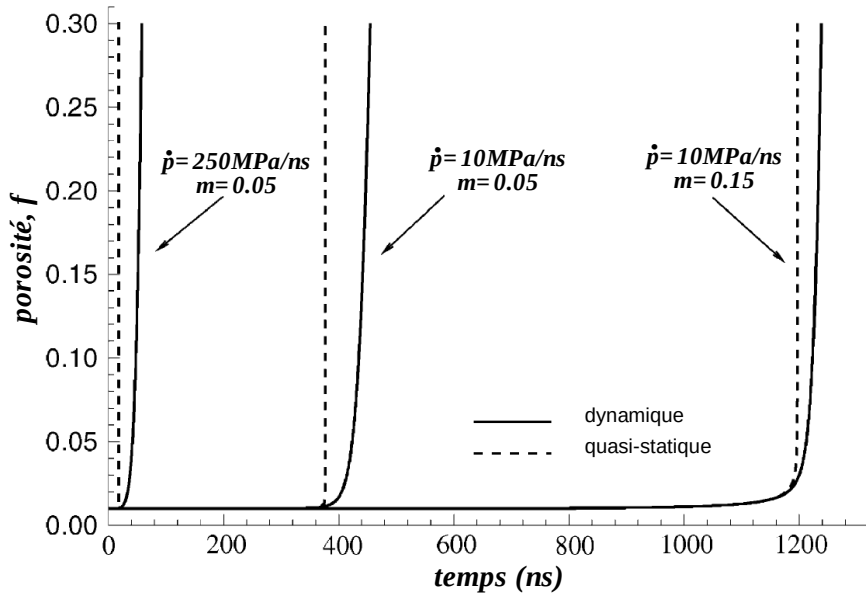


FIG. 2.5 – Expansion dynamique d'un matériau poreux ($\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $A = 245 \text{ USI}$, $f_0 = 0.1$, $a_0 = 20 \mu\text{m}$). Comparaison entre les analyses dynamique (équation (2.69), trait continu) et quasi-statique (équation (2.69) avec $\rho = 0$, trait discontinu) pour deux valeurs de sensibilité à la vitesse de déformation ($m = 0.05$ et $m = 0.15$) et deux vitesses de chargement ($\dot{p} = 10 \text{ MPa/ns}$ et $\dot{p} = 250 \text{ MPa/ns}$).

définie par :

$$T = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}} = \frac{1 + 2\alpha}{3|1 - \alpha|}, \quad (2.70)$$

α désignant un paramètre du chargement. La forme des vides doit évoluer sous chargement axisymétrique mais cet aspect n'est pas pris en compte dans le modèle de MOLINARI ET MERCIER [97].

BUDIANSKY ET AL. [17] et LEE ET MEAR [88] ont mené des études paramétriques sur T et ont montré qu'un vide sphérique va pouvoir adopter des formes variées (aiguille, cylindre, obloïde, sphère). Cependant, en comparant les prédictions de différents modèles tenant compte ou non du changement de forme, LEE ET MEAR [88] observaient très peu de différence pour $0.6 \leq \alpha \leq 1$. BUDIANSKY ET AL. [17] montrent que pour $\alpha \geq 0.4$ ($T \geq 1$), les vides peuvent être considérés de forme sphérique durant le processus de déformation. Se basant sur ces considérations, MOLINARI ET MERCIER [97] présentent des résultats pour $\alpha \geq 0.5$. Sur la figure 2.6 on observe qu'une augmentation de la triaxialité (α augmente) conduit à des temps de croissance plus élevés et à une différence moins marquée entre les analyses statique et dynamique. Pour une expansion hydrostatique ($\alpha = 1$) le temps nécessaire pour atteindre la porosité de 0.3 est de 17% plus élevé dans l'approche dynamique (par rapport à

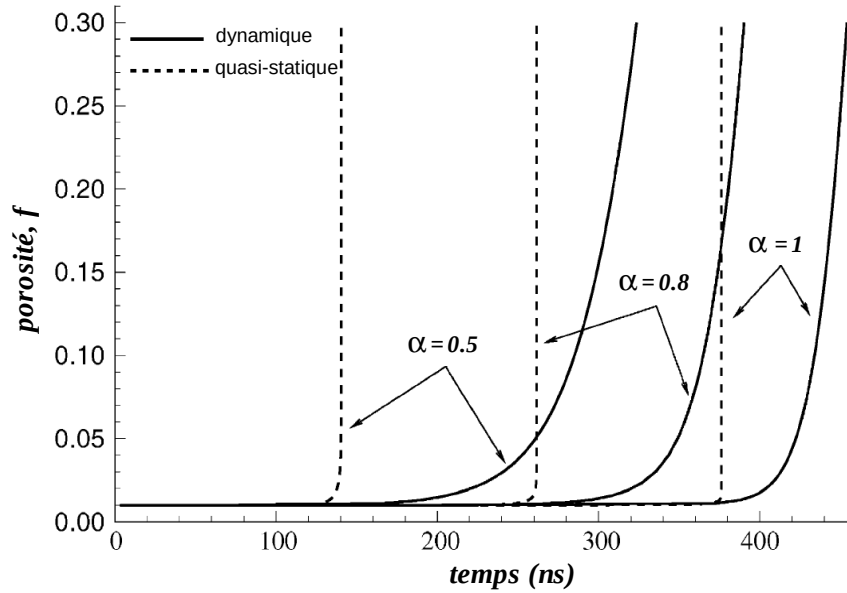


FIG. 2.6 – Influence de la triaxialité des contraintes sur l'évolution de la porosité pour un chargement axisymétrique, MOLINARI ET MERCIER [97]. Les paramètres du matériau sont identiques à ceux de la figure 2.5. Les données initiales sont $a_0 = 20\mu m$ et $f_0 = 0.01$ et la vitesse de chargement est de $10 MPa/ns$. Les analyses dynamique (équation (2.69), trait continu) et quasi-statique (équation (2.69) avec $\rho = 0$, trait discontinu) sont également comparées.

l'approche statique). la différence atteint 130% pour $\alpha = 0.5$.

2.3 Conclusion

On a vu dans cette partie essentiellement deux types d'approches. Les analyses mécaniques, distinguant les études de cavités isolées dans une matrice infinie des études de croissance de vides avec le motif de la sphère creuse, et les analyses basées sur des méthodes d'homogénéisation en dynamique. Ces dernières approches permettent de traiter, contrairement aux modèles de sphères creuses habituelles, des chargements triaxiaux. Soulignons que les différents travaux ne prennent pas en considération le changement de forme de la cavité et les applications se limitent donc aux chargements à forte triaxialité.

Notons aussi que les approches mécaniques et d'homogénéisation aboutissent à la même expression de la contribution inertielle dans le cas d'un chargement hydrostatique. Néanmoins, l'avantage des méthodes de transition d'échelle est de pouvoir définir le comportement du matériau par des potentiels de déformation quelconques (qui, s'ils sont judicieusement choisis, permettent de retrouver les résultats d'analyses mécaniques).

Les différentes études tendent à dégager les mêmes conclusions sur les effets stabilisant de l'inertie. Les effets de la sensibilité à la vitesse de déformation, et de l'écrouissage dans une moindre mesure, ralentissent la croissance. Au contraire, les effets thermiques accélèrent l'expansion du vide. Selon les analyses de ORTIZ ET MOLINARI [104] et MOLINARI ET MERCIER [97], les « premiers » instants sont pilotés par le comportement de la matrice (et en particulier par la viscosité) tandis que l'inertie domine dans les grands temps du processus de croissance de vides.

DRAGON ET TRUMEL [36] relèvent tout de même une limitation des approches homogénéisées aux chargements modérés. En effet, les gradients de contraintes et de déformation sont nécessairement conséquents si l'on considère des chargements fortement dynamiques. Ce fait est incompatible avec la définition classique du VER et le chargement homogène à la frontière. De plus, les effets d'inertie sont dépendants de la taille des vides. Il semble alors nécessaire de tenir compte d'une hétérogénéité de taille de vides en utilisant une distribution de cellules unitaires contenant chacune un vide.

Enfin, on notera que la plupart des approches néglige l'élasticité ou sinon estime que l'évolution de l'endommagement durant la phase élastique initiale (supposée incompressible dans l'ensemble des travaux) n'aura que peu d'influence sur le comportement global

du matériaux poreux. Cependant, ROY ET AL. [117] remettent en question ce concept et concluent que négliger l'élasticité conduit à un délai dans l'initiation de l'expansion ainsi qu'à une accélération de la croissance du vide, effets d'autant plus marqués que la porosité initiale est faible. ROY ET AL. [117] montrent que, s'il est vrai que la porosité évolue très peu durant la phase élastique, et c'est ce qui a motivé les différents auteurs à négliger son incidence sur l'évolution de l'endommagement, la condition initiale en vitesse imposée ($\dot{a} = 0$ dans l'équation (2.38)) conduit à une surestimation des temps de croissance. Toutefois, il est possible selon les auteurs de négliger l'élasticité, à condition seulement d'ajuster la valeur initiale de la vitesse utilisée dans le problème dynamique.

Chapitre 3

Modélisation de la rupture dynamique

Dans cette partie, nous nous intéressons à la modélisation de la rupture dynamique des matériaux ductiles. Dans un premier temps, nous présentons de manière générale le processus de rupture ductile (germination, croissance - déjà évoquée dans le chapitre précédent - et coalescence) et les modèles développés notamment du point de vue statistique pour appréhender le phénomène. Dans un second temps, nous proposons au lecteur une revue de quelques critères de rupture utilisés dans le cas particulier de chargements dynamiques.

3.1 Modélisation de la nucléation

Dans les matériaux métalliques, l'initiation de l'endommagement est généralement associée aux hétérogénéités présentes dans la matrice. On peut distinguer les hétérogénéités intrinsèques, en relation avec la microstructure et la composition chimique du matériau (issues éventuellement de changement de phases au cours de traitements thermomécaniques, ou résultant de l'évolution de la microstructure au cours de la sollicitation) et les hétérogénéités extrinsèques, liées à l'élaboration et à la mise en forme (inclusions résiduelles, microfissures, ou renforts inclus volontairement, dans les matériaux composites par exemple). La présence des défauts va engendrer des incompatibilités de déformation et s'accompagner de l'apparition de contraintes internes pouvant conduire à l'endommagement.

Suivant le type de sollicitation (état de contrainte, triaxialité, vitesse de chargement, température, ...), les mécanismes d'amorçage de l'endommagement mis en jeu peuvent varier. CURRAN ET AL. [30] les classent en deux catégories selon qu'ils soient contrôlés par la déformation plastique ou par le couplage contrainte/température. Pour les mécanismes et la modélisation de la nucléation par la déformation plastique, le lecteur pourra se reporter aux

travaux de CAMPAGNE [19]. On se limitera dans ce manuscrit à la nucléation contrôlée par la contrainte.

3.1.1 Nucléation contrôlée par la contrainte

Lorsque les conditions de chargement induisent des températures élevées (c'est le cas du fluage à haute température) ou des contraintes fortement triaxiales (c'est le cas d'un impact de plaques à température ambiante), CURRAN ET AL. [30] précisent que le mécanisme de nucléation est piloté par le couple température/contrainte. Nous n'aborderons dans ce manuscrit que le second point et nous suggérons au lecteur susceptible de vouloir en savoir plus sur le fluage de se reporter au travail de KASSNER ET HAYES [78]. Evoquons seulement que le mécanisme de nucléation mis en jeu lors de fluage à haute température est principalement basé sur la diffusion de lacunes (voir CUITIÑO ET ORTIZ [29]). Lors de grandes vitesses de déformation et à température modérée (choc de plaques), il est d'usage de négliger son influence et la nucléation est contrôlée par des micromécanismes thermiquement activés. L'effet de la contrainte sur la nucléation se traduit alors par l'influence de celle-ci sur l'énergie d'activation des processus concernés.

Concernant les mécanismes pilotés par la contrainte, abordons tout d'abord les travaux expérimentaux développés par les membres du *Stanford Research Institute*. Les recherches reposent sur des analyses quantitatives menées sur des sections d'échantillons impactés sous différentes conditions de chargement et offrant ainsi plusieurs degrés d'endommagement. Les cavités observées sont comptées, mesurées et, moyennant une conversion de données surfaciques en données tridimensionnelles, décrites par une fonction de distribution qui s'exprime par :

$$N_g(R) = N_0 \exp(-R/R_1), \quad (3.1)$$

où N_g est le nombre cumulé de vides par cm^3 dont le rayon est supérieur à R , N_0 le nombre total de vides par cm^3 et R_1 est un paramètre de la distribution. Le volume total de vides obtenu par intégration sur toute la distribution vaut :

$$V_v = 8\pi N_0 R_1^3. \quad (3.2)$$

La distribution des tailles de vides peut alors être représentée à tout instant par N_0 , et R_1 ou V_v . La figure 3.1 présente un exemple de distributions de vides obtenues par SEAMAN ET AL. [119] en 1976 sur du cuivre OFHC (Oxygen Free High Conductivity, équivalent du Cu-c en français). Chaque courbe correspond à une zone différente, de largeur constante, prise à travers l'épaisseur de l'échantillon. L'endommagement le plus important (○) est situé approximativement au centre de la cible dans une zone relativement étroite appelée plan d'écaillage (rencontre des ondes de détente donnant lieu à un état de tension maximale). A la fois le

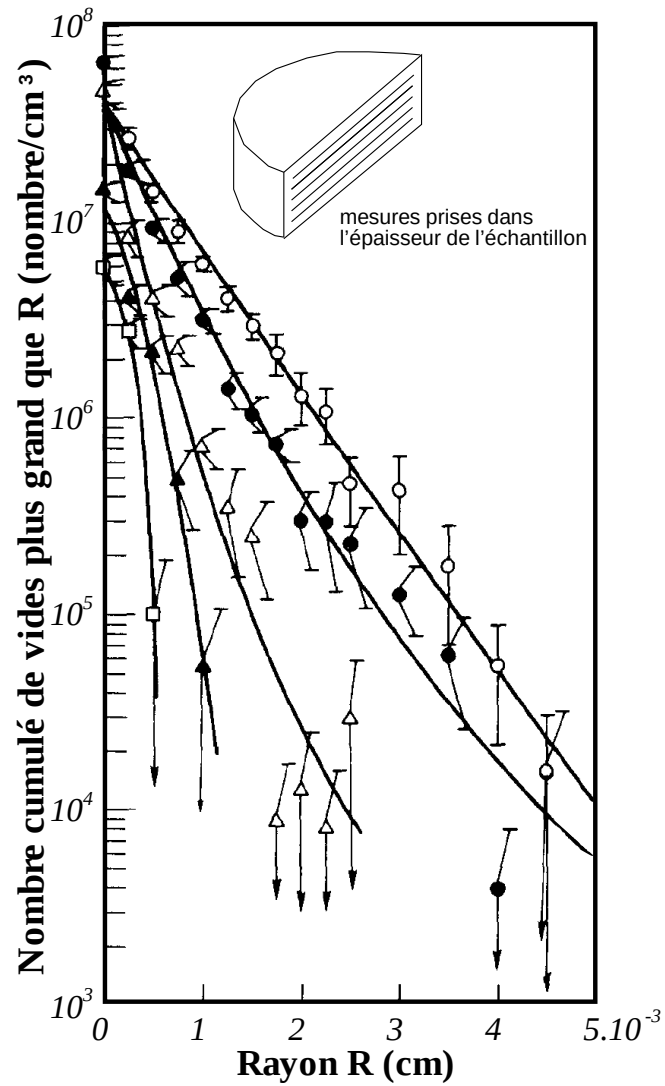


FIG. 3.1 – Synthèse de mesures obtenues par SEAMAN ET AL. [119] permettant de définir la fonction de répartition N_g donnée par l'équation (3.1). Les relevés sont effectués à plusieurs profondeurs dans l'échantillon. Les mesures correspondant à la zone la plus endommagée sont représentées par des cercles et correspondent à la zone de chargement maximal.

nombre et la taille des vides diminuent à mesure que l'on s'éloigne de part et d'autre de cette zone ($\bullet$, Δ , $\blacktriangle$, $\square$). On présentera plus en détail l'expérience de choc de plaques conduisant à l'écaillage dans le chapitre 4 de la partie 'Etat de l'art'.

L'évolution du nombre de cavités amorçées est gouvernée par un processus de germina-

tion thermiquement activé dominé par la pression dans le matériau. Cette loi s'écrit :

$$\dot{N}_p = \begin{cases} \dot{N}_0 \exp\left(\frac{p - p_n}{p_1}\right) & \text{si } p \geq p_n \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $\dot{N}_0$, p_n et p_1 des constantes du matériau, p désignant la pression (contrainte hydrostatique). p_n est une pression seuil de nucléation en dessous de laquelle toute germination n'est pas autorisée. Une fois nucléés, les vides apparaissent avec une taille initiale donnée par la distribution (3.1) avec $R_1 = R_n$, R_n désignant un paramètre du matériau à identifier. Ce modèle de nucléation permet aussi bien de traiter le comportement ductile que fragile (propagation de fissures dans le matériau soumis aux chocs) à grandes vitesses de déformation. Dans le premier cas, le modèle est nommé DFRACt pour Ductile FRACture (utilisé notamment par SEAMAN ET AL. [119] pour le cuivre et l'aluminium et par SHOCKEY ET AL. [121] pour un acier d'armement) et dans le second cas, il est appelé BFRACt pour Brittle FRACture (on trouvera son utilisation dans les travaux de SEAMAN ET AL. [119] pour un acier de cuve Armco, ou CURRAN ET AL. [31] pour un polycarbonate). Cette description de la nucléation, donnée par l'équation (3.3), se retrouve notamment dans les travaux de CAMPAGNE ET AL. [20] qui couple ce mécanisme de germination, contrôlé par la pression, à un mécanisme contrôlé par la déformation.

Un certain nombre de modèles de nucléation se base sur les observations expérimentales du *Stanford Research Institute*. Ainsi, PERZYNA [107] décrit l'évolution de la porosité liée à l'activation de nouveaux sites par la relation suivante :

$$\dot{f}_{nucl} = \frac{h(f)}{1 - f} \left[\exp\left(\frac{m\langle p - p_n \rangle}{k_B T}\right) - 1 \right], \quad (3.4)$$

avec

$$\langle p - p_n \rangle = \begin{cases} p - p_n & \text{si } p \geq p_n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans l'équation (3.4), m est un paramètre matériau et la quantité $m\langle p - p_n \rangle$ représente l'énergie d'activation du processus thermiquement activé. La fonction $h(f)$ a été introduite par PERZYNA [107] pour rendre compte des effets d'interaction entre les micro-vides. Le terme multiplicatif supplémentaire $1/(1 - f)$ est utilisé afin de décrire une singularité observée expérimentalement par GARBER ET AL. [47]. L'expression du taux de nucléation donnée par l'équation (3.4) est également utilisé dans les travaux de EFTIS ET NEMES [42, 43], ou ceux de EFTIS ET AL. [45].

Un des points fondamentaux de ce concept de nucléation par la contrainte est la nécessité de définir une valeur seuil d'amorçage. Les observations expérimentales, par des me-

sures de tailles de vides, d'évaluation de vitesse de nucléation, etc. permettent d'avoir accès à une estimation de cette grandeur. On trouve dans la littérature de nombreux travaux cherchant à déterminer cette valeur seuil, souvent appelée pression de nucléation. Un résumé de ces approches est proposé dans la suite.

3.1.2 Cavitation dans les matériaux solides - Deux types d'approches

Certaines approches sont basées sur l'analyse d'une sphère dense, c'est-à-dire ne contenant initialement aucun vide, et soumise à sa frontière à une expansion hydrostatique. L'application d'un effort dépassant une valeur limite peut alors conduire à l'apparition soudaine d'un vide au centre de la sphère. En 1982 BALL [4] étudie ce problème dans le cadre de l'élasticité non linéaire et montre, pour une certaine classe de solides, que si l'application d'un effort faible maintient la sphère dans un état homogène, au-delà d'une certaine limite, la solution homogène devient instable et il est énergétiquement plus favorable pour la sphère de nucléer une cavité en son centre. Cette analyse de bifurcation prédit directement la valeur de la contrainte de nucléation. Sans nous attarder plus longtemps sur le problème d'analyse de branches, citons les travaux de POLIGNONE ET HORGAN [108], HOU ET ABEYARATNE [69] ou SIVALOGANATHAN [122].

Le deuxième type d'approche se distingue de l'analyse de bifurcation par le fait qu'un vide est initialement présent dans une matrice supposée infinie. GENT ET LINDLEY [48] analysent en 1958 le comportement de cavités sphériques présentes dans un milieu élastique infini chargé en tension hydrostatique. Ils montrent l'existence d'une valeur critique du chargement à partir de laquelle la croissance du vide est rapide et sans limite. La théorie qu'ils développent leur permet de prédire avec fidélité l'apparition de vides dans un matériau en caoutchouc et par là même, la pression de nucléation.

Dans le cadre de développements basés sur la deuxième approche, on trouvera les travaux précurseurs de BISHOP ET AL. [9] et HILL [63]. Citons également HUANG ET AL. [71] et TVERGAARD [136] pour les études menées dans le cas de chargements non sphériques.

WU ET AL. [151, 152] considèrent une sphère infinie contenant une cavité de rayon a (initial a_0), et soumise à une tension hydrostatique p appliquée à sa frontière extérieure. L'intégration de l'équation d'équilibre, en l'absence d'effets d'inertie et en considérant le matériau incompressible (élastiquement et plastiquement), conduit à la relation suivante :

$$p = \int_0^{2\ln(a/a_0)} \frac{\sigma_{eq}}{\exp(3\epsilon/2) - 1} d\epsilon. \quad (3.6)$$

Dans l'équation (3.6), σ_{eq} désigne la contrainte équivalente dans la matrice. La croissance rapide du vide est liée à un chargement limite obtenu à partir de (3.6) en faisant tendre

$a/a_0 \rightarrow \infty$. Il vient :

$$p_c = \int_0^\infty \frac{\sigma_{eq}}{\exp(3\epsilon/2) - 1} d\epsilon. \quad (3.7)$$

On notera par ailleurs que si l'on fait tendre $a_0 \rightarrow 0$, on obtient la pression critique nécessaire à la création spontanée d'un vide dans la matrice. En remarquant que la déformation équivalente en paroi de cavité, $2 \ln(a/a_0)$, tend vers l'infini dans les deux cas, il apparaît que d'un point de vue mathématique, la recherche de la pression critique par l'une ou l'autre des approches est équivalente, même si d'un point de vue physique les deux notions sont conceptuellement différentes.

L'effet de la température est pris en compte dans les travaux de WU ET AL. [151, 152]. La matrice est élastoplastique et le comportement thermoplastique est donné par une relation couplant température et écrouissage :

$$\sigma_{eq} = \sigma_y f(\epsilon_{eq}) [1 - c_\theta T^*], \quad (3.8)$$

où c_θ est le coefficient d'adoucissement thermique, et T^* la variation de température (définie comme la différence entre les températures courante T et initiale T_0). La fonction f est définie par :

$$f(\epsilon_{eq}) = \begin{cases} \epsilon_{eq}/\epsilon_y & \text{si } \epsilon_{eq} \leq \epsilon_y \\ (\epsilon_{eq}/\epsilon_y)^n & \text{si } \epsilon_{eq} \geq \epsilon_y. \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans les relations (3.8) et (3.9), σ_y est la limite d'élasticité, ϵ_y une déformation caractéristique ($\epsilon_y = \sigma_y/E$, E le module de Young), n le coefficient d'écrouissage. Dans leurs travaux, l'adoucissement thermique est supposé linéaire et $c_\theta = 1/(T_f - T_0)$, T_f désignant la température de fusion du métal. En supposant que les déformations élastiques restent faibles ($\exp(3\epsilon/2) - 1 \approx 3\epsilon/2$), la pression de cavitation donnée par (3.7) devient :

$$p_c = \frac{2\sigma_y}{3} + \int_{\epsilon_y}^\infty \frac{\sigma_{eq}}{\exp(3\epsilon/2) - 1} d\epsilon. \quad (3.10)$$

Dans le cas d'un matériau élastique parfaitement plastique ($n = 0$), et en condition isotherme, la pression de nucléation est alors donnée par :

$$p_c = \frac{2\sigma_y}{3} \left[1 - \ln \left(\frac{3\sigma_y}{2E} \right) + \frac{3\sigma_y}{2E} \right], \quad (3.11)$$

résultat que l'on peut également trouver dans les travaux de HUANG ET AL. [71]. Soulignons que la cavitation est un processus gouverné entre autre par l'énergie élastique emmagasinée dans la matrice. En effet, si l'on ne prend pas en compte cet ingrédient, il faut une pression infinie pour nucléer un vide (voir équation (3.11) lorsque $E \rightarrow 0$).

La figure 3.2, issue des travaux de HUANG ET AL. [71] ou WU ET AL. [152], montre les variations de pressions critiques en fonction de la déformation $\epsilon_y = \sigma_y/E$ pour plusieurs valeurs de n . Notons que les effets de température ne sont pas pris en compte dans ces résultats.

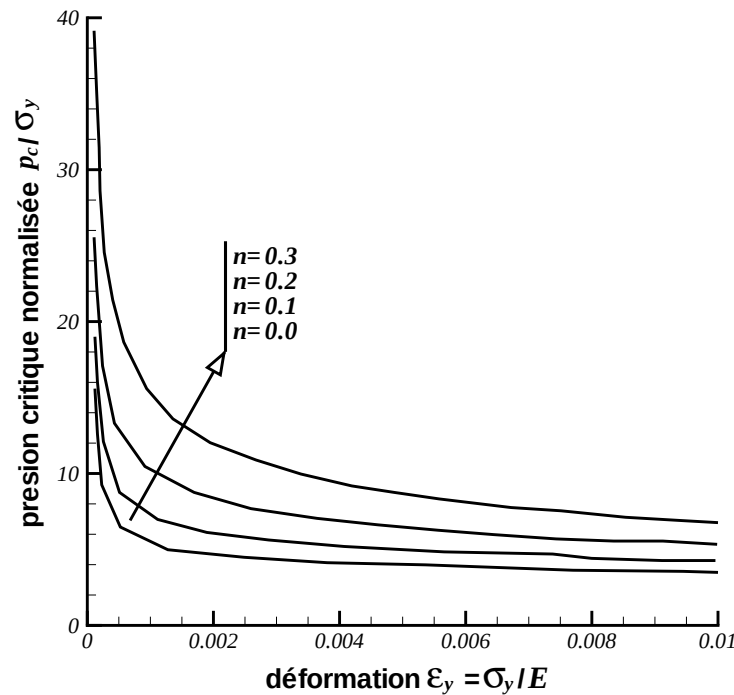


FIG. 3.2 – Influence du coefficient d'écrouissage et de la déformation à la limite d'élasticité sur la pression de cavitation, d'après HUANG ET AL. [71] et WU ET AL. [152]. Le matériau est élastoplastique et sa loi de comportement est donnée par les relations (3.8), (3.9). Une augmentation de n , ou une diminution de σ_y/E conduit à un accroissement de la pression critique p_c , donnée par (3.10). Les effets thermiques (adoucissement ou conduction) ne sont pas pris en compte.

On observe tout d'abord qu'une augmentation du coefficient d'écrouissage n conduit à une augmentation de la valeur de la pression critique. Ceci est dû au caractère stabilisant de ce paramètre. En effet, la croissance de la cavité est ralentie en présence d'écrouissage (voir premier chapitre) et l'équivalence pression de nucléation/pression de croissance infinie permet de prévoir cet effet. On peut, et pour les mêmes raisons, prévoir l'effet de l'adoucissement thermique qui favorise l'expansion de la cavité et donc réduit la valeur de p_c . Sur la figure 3.2, on remarquera le couplage « fort » entre n et ε_y . L'effet d'une augmentation de n ou d'une diminution de ε_y conduit à une augmentation de la pression critique.

Citons, sans plus de détails, que certains travaux évaluent l'influence des conditions de chargement à l'intérieur de la cavité. On verra alors apparaître un terme supplémentaire (additionnel) lors de l'intégration des relations d'équilibre. Par exemple, une condition aux limites en pression peut être prescrite sur le bord du vide et peut représenter la pression exercée par un gaz sur la paroi de la cavité (GUO ET CHENG [56,57]).

Evoquons enfin le résultat obtenu en 2003 par KENNEDY ET AL. [79] qui étudient, pour ainsi dire en parallèle, le même problème que WU ET AL. [151] en considérant cette fois un comportement élasto-viscoplastique donné par :

$$\sigma_{eq} = Y \left(1 + c \dot{\varepsilon}_{eq}^m \right) \quad (3.12)$$

où Y , c et m sont des constantes du matériau. Les auteurs montrent que la pression nécessaire pour causer la cavitation dans le cas dynamique, c'est-à-dire incluant les effets d'inertie et de sensibilité à la vitesse, est identique à celle obtenue dans le cas quasi-statique. Cette observation avait été mise en évidence dans le cas de matériaux élastiques par CHOU-WANG ET HORGAN [24].

3.1.3 Approches statistiques

Avant de clore le sujet sur la nucléation, on précise que cette étape associe souvent l'outil statistique. Depuis plus d'un siècle et les travaux de BOLTZMANN à Vienne à la fin des années 1860, des méthodes statistiques sont généralement admises dans plusieurs chapitres de la physique. RICHARD VON MISES [140] précisait lors d'une intervention à l'*Institut Henri Poincaré* de Nancy en 1932, que

« dès le temps de BOLTZMANN, les physiciens se sont accoutumés peu à peu à l'idée que le hasard ou la probabilité entre dans leur science ou jadis ne dominait que la certitude. »

On a pu se rendre compte déjà, au travers des travaux des membres du *Stanford Research Institute* (CURRAN ET AL. [31], SEAMAN ET AL. [119], SHOCKEY ET AL. [121]), ou de CAMPAGNE ET AL. [20], que l'approche stochastique est indispensable si l'on veut représenter l'étape de nucléation. En effet, elle intervient progressivement dans le matériau et le caractère diffus de ce processus impose l'utilisation de modèles statistiques, soit pour décrire une population de défauts (distribution de tailles de vides, d'espacement, etc.) faisant intervenir une longueur caractéristique, soit pour rendre compte d'une nucléation progressive en distribuant des sites potentiels dans le matériau, qui seront activés dans des circonstances dépendantes des conditions du chargement.

Citons les travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98], en 2005, qui considèrent une distribution de pressions de nucléation liée à la microstructure du matériau. Les lois statistiques considérées sont de types Gaussienne et de Weibull. Les auteurs mettent en évidence l'influence de l'inertie sur l'homogénéité de la distribution en taille des vides. En effet, aux

grandes vitesses de chargement, MOLINARI ET WRIGHT [98] constatent que les vides nucléés sont plus nombreux et qu'ils sont d'une taille plus petite. Ce travail est poursuivi par CZAR-NOTA ET AL. [32] qui considèrent l'influence de la porosité et proposent un modèle d'endommagement dynamique ductile valable de la nucléation jusqu'à la coalescence.

3.2 Croissance de l'endommagement

On oriente le lecteur vers les deux premiers chapitres de cette partie bibliographie où ont été abordés les modèles de croissance de vides en quasi-statique et en dynamique. Précisons néanmoins que dans le cas où l'on souhaite développer un modèle couplant nucléation et croissance, la variation de la porosité, ou du volume de vide, est le résultat cumulé de la nucléation de nouvelles cavités et de la croissance de vides préalablement créés. On aura alors :

$$\dot{f} = \dot{f}_{nucl} + \dot{f}_{croiss} , \quad (3.13)$$

où $\dot{f}_{nucl}$ est issue de la phase de nucléation et $\dot{f}_{croiss}$ est issue de la déformation plastique de la matrice et est donnée par :

$$\dot{f}_{croiss} = 3(1 - f)D_m , \quad (3.14)$$

D_m désignant la vitesse de déformation plastique sphérique.

3.3 Coalescence des micro-vides

Le dernier stade du processus de rupture ductile est la coalescence des vides, dont l'initiation est habituellement définie comme l'instant à partir duquel les vides commencent à interagir. On peut distinguer différents mécanismes de coalescence représentés sur la figure 3.3 issue des travaux de SCHLÜTER ET AL [118]. Le premier mode de coalescence (figure

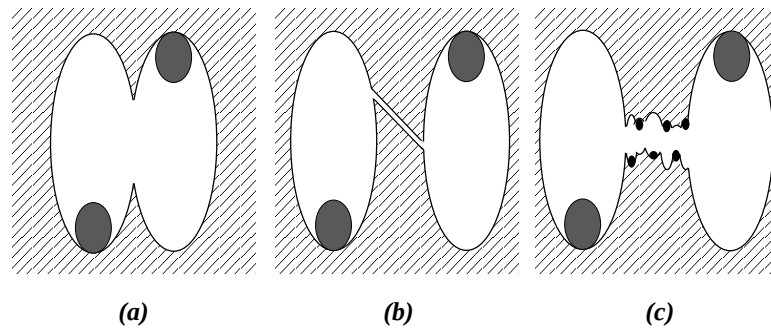


FIG. 3.3 – Mécanismes de coalescence de vides, d'après SCHLÜTER ET AL [118]. (a) empiètement géométrique traduit de l'anglais « direct impingement » - (b) coalescence par propagation d'une bande de cisaillement - (c) coalescence de vides nucléés à partir d'une population d'inclusions plus petites.

3.3(a)), nommé « empiètement géométrique », s'identifie par l'agglomération de cavités voisines. Les vides évoluent par déformation plastique de la matrice jusqu'à ce que leur paroi se rencontrent. Ce mécanisme témoigne d'une très grande ductilité de la matrice. Le second mécanisme de coalescence se caractérise par la formation et la propagation de bandes de cisaillement, et conduit à l'apparition de micro-fissures joignant deux cavités voisines (figure 3.3(b)). Enfin, un dernier mécanisme observable met en jeu une seconde population de cavités nucléées à partir d'inclusions plus petites (figure 3.3(c)). On trouvera dans la littérature bon nombre de critères d'initiation de la rupture finale, pilotés par une valeur limite soit de contrainte, de déformation, de taille de vides ou bien de porosité.

3.3.1 Taille critique de vides

Ce type de critère de coalescence est une extension des modèles de croissance de cavités dans un massif infini. Il est supposé que la coalescence a lieu dès que le vide atteint une certaine taille (suffisamment large pour admettre que le vide a pu créer un pont avec des cavités voisines). On trouvera plusieurs modèles fondés essentiellement sur les travaux de MCCLINTOCK [92] ou RICE ET TRACEY [110]. HANCOCK ET MACKENZIE [59] utilisent un critère basé sur le modèle de croissance de vides de RICE ET TRACEY [110]. La déformation à rupture, pour de hautes triaxialités ξ^∞ , vaut :

$$\bar{\varepsilon}_f = \frac{1}{0.283} \exp\left(-\frac{3}{2}\xi^\infty\right) \ln\left(\frac{R_f}{R_0}\right), \quad (3.15)$$

où R_f et R_0 désignent respectivement le rayon final et rayon initial des cavités (supposées toutes identiques). Précisons que l'équation (3.15) est valable pour des hautes triaxialités et ne peut en toute rigueur être utilisée dans d'autres circonstances (pour un test de traction par exemple où $\xi^\infty = 1/3$), contrairement à ce qu'on peut constater dans certains ouvrages. Dans le même esprit, on citera les travaux de :

TAI ET AL. [127] :

$$\bar{\varepsilon}_f = \frac{1}{A(0.434 + 0.6(\xi^\infty)^2)} \ln\left(\frac{R_f}{R_0}\right), \quad (3.16a)$$

SHOCKEY [120] :

$$\bar{\varepsilon}_f = \frac{1}{B\xi^\infty} \ln\left(\frac{R_f}{R_0}\right), \quad (3.16b)$$

SCHLÜTER ET AL. [118] :

$$\bar{\varepsilon}_f = \frac{1}{C} \exp(-D\xi^\infty) \ln\left(\frac{R_f}{R_0}\right). \quad (3.16c)$$

SCHLÜTER ET AL. [118] justifient l'introduction des paramètres A , B , C , ou D dans les différents modèles, par le fait qu'à chaque matériau peut être associé un mécanisme de rupture

particulier et qu'un seul jeu de paramètres (en l'occurrence le couple 0.283; 2/3 utilisé par RICE ET TRACEY [110]) ne peut suffire à définir un critère de rupture complet.

3.3.2 Porosité critique

Le critère de Gurson-Tvergaard (équation (1.33) page 23), qui considère une croissance stable de cavités, a été modifié dans le but de rendre compte de l'accélération de la croissance en début de coalescence. TVERGAARD [134] et TVERGAARD ET NEEDLEMAN [137] proposent ainsi de remplacer la porosité f par un paramètre f^* , dépendant de la fraction volumique de vides à partir de laquelle la coalescence intervient. Ces travaux définissent alors une nouvelle surface de charge communément appelée critère de Gurson, Tvergaard, Needleman (G-T-N) et qui s'écrit :

$$\Omega_{GTN} = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2 \sigma_0}\right) - (1 + q_3 (f^*)^2) = 0. \quad (3.17)$$

avec f^* définie par :

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c, \\ f_c + \frac{f_u^* - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c) & \text{si } f \geq f_c \end{cases} \quad (3.18)$$

où f_c , $f_u^* = 1/q_1$ et f_F contrôlent la vitesse de coalescence. f_c est la porosité à l'amorçage de la coalescence (l'effet de la contrainte hydrostatique est amplifié lorsque $f^* > f_c$, ce qui

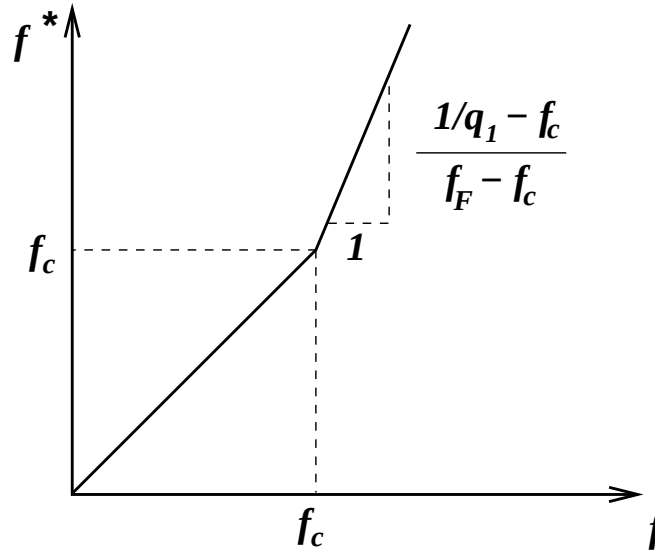


FIG. 3.4 – Evolution de la variable f^* , introduite par TVERGAARD [134], TVERGAARD ET NEEDLEMAN [137], en fonction de la porosité f , Eq.(3.18). Une fois la limite f_c atteinte, la porosité croît plus vite tenant compte de la chute de la résistance de la matrice.

a pour conséquence d'accélérer la vitesse de croissance de la porosité, figure 3.4), et f_F est la porosité à la fin de la coalescence (rupture du matériau). De nombreux travaux sur des cellules élémentaires ont permis de calibrer les porosités f_f et f_c . Il a été montré (KÖPLIK ET NEEDLEMAN [83], ZHANG ET AL. [154]) que f_c dépend de la porosité initiale.

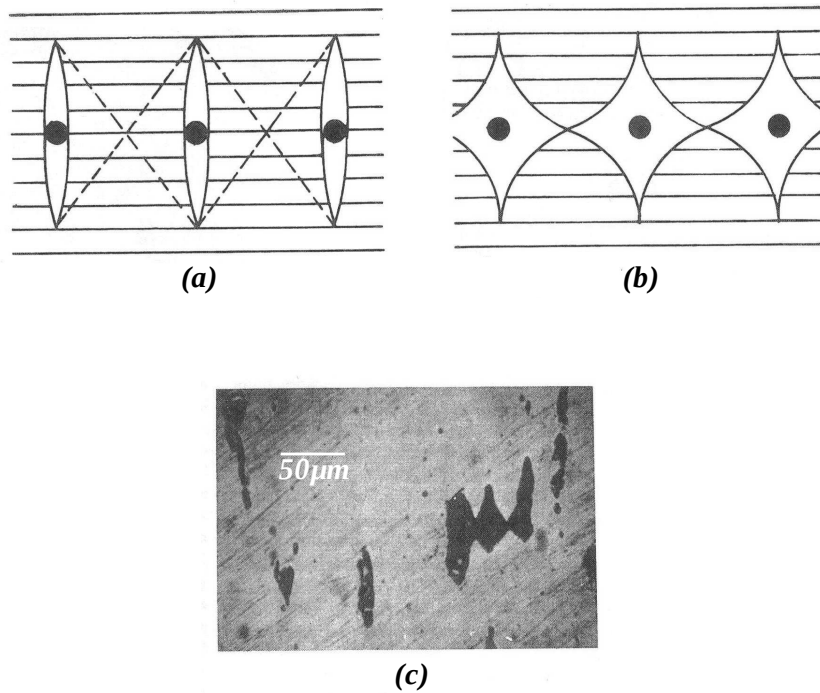


FIG. 3.5 – (a)-(b) Analyse développée par BROWN ET EMBURY [16] pour illustrer la coalescence des cavités. La rupture du ligament inter vides est effective lorsque la longueur des cavités allongées est égale à leur espacement - (c) Mise en évidence du processus par observation microscopique, d'après PUTTICK [109].

3.3.3 Instabilité plastique

En plus de critères basés sur une porosité ou un rayon critique, on peut citer des travaux menés sur des considérations géométriques. Ainsi, BROWN ET EMBURY [16] suggèrent que dès que l'espacement entre les parois de deux cavités voisines devient égal à la longueur caractéristique de la cavité, la déformation se localise dans un plan joignant les deux vides et la rupture ductile est immédiate, figure 3.5.

Dans une analyse plus rigoureuse, THOMASON [129] développe un critère de coalescence basé sur la définition d'une charge plastique limite. Le critère de THOMASON [129], obtenu

de façon empirique, s'écrit :

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_y} = \frac{\alpha}{\left(\frac{2a}{\omega}\right)^2} + \frac{\beta}{\left(\frac{2b}{2b + \omega}\right)^{1/2}}, \quad (3.19)$$

où a , b définissent les demi-axes de la cavité (supposée ellipsoïdale) tandis que ω est l'épaisseur du ligament séparant deux cavités voisines. La limite d'élasticité de la matrice est donnée par σ_y et σ_n est la contrainte moyenne à l'intérieur du ligament.

THOMASON [130] propose également une extension de son approche aux chargements dynamiques en introduisant l'influence des effets micro-inertiels. Il utilise un couplage avec l'analyse de ORTIZ ET MOLINARI [104] portant sur la croissance d'une cavité isolée dans une matrice viscoplastique (paragraphe 2.1.2, page 31). THOMASON [130] met alors en évidence l'influence de l'inertie sur la stabilisation de la déformation homogène.

3.4 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie la modélisation des différentes étapes menant à la rupture matériaux ductiles. L'étape initiale de nucléation et la notion de pression de cavitation nous ont intéressé plus particulièrement. La pression seuil va piloter l'apparition des cavités dans le matériau et dépend essentiellement des propriétés mécaniques du matériau. A l'image des résultats de HUANG ET AL. [71] et WU ET AL. [152] présentés sur la figure 3.2, la dépendance de cette pression de nucléation au comportement élastique et plastique de la matrice est mise en évidence.

On notera également la nécessité de faire appel à la statistique afin de décrire, non plus un matériau homogène comme pourrait le suggérer un modèle de type Gurson, mais une population de défauts (vides, sites potentiels, etc.) et ainsi rendre compte du caractère diffus du processus de nucléation. Ceci est d'autant plus important en dynamique où les effets de taille sont fondamentaux.

Nous noterons que la croissance des vides existants, gouvernée par la déformation plastique de la matrice, participe à l'évolution de l'endommagement conjointement avec les cavités issues de l'étape de nucléation.

Enfin, nous avons également évoqué l'étape de coalescence au travers de quelques approches et nous retiendrons, pour les besoins de l'analyse, que l'étape ultime du processus de rupture ductile peut être décrite en terme de porosité critique.

Chapitre 4

Impact plaque / plaque et phénomène d'écaillage

Les approches que nous avons développées dans le travail de thèse sont essentiellement destinées (en raison des hypothèses retenues) à la modélisation de phénomènes rencontrés lors de sollicitations à hautes triaxialités. Comme le montre la figure 2 de la page 4, parmi celles-ci, le test d'impact de plaques est le candidat tout désigné. Une partie du travail de thèse consistera à simuler cet essai et observer le phénomène d'écaillage. Nous proposons alors, dans le présent chapitre, d'aborder la théorie de propagation d'ondes et de préciser quelques éléments relatifs à ce moyen expérimental de caractériser le comportement dynamique des matériaux.

L'essai d'impact de plaques permet d'accéder au régime dynamique dans des conditions de hautes triaxialités. Les vitesses de déformation, $> 10^4 s^{-1}$, sont atteintes dans des conditions de déformation uniaxiale (assurée pour une dimension latérale de la plaque au moins égale à huit fois son épaisseur, MEYERS ET AIMONE [95]) et pour des temps de maintien très courts. Si les conditions de chargement le permettent, le résultat d'un impact peut conduire à la rupture interne du matériau, et l'on parle alors d'écaillage, voir l'illustration 4.1.

HOPKINSON [67, 68], au début du XX^e siècle, est le premier à relever des éléments permet-

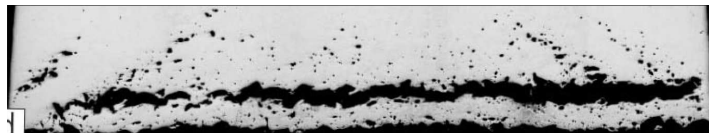


FIG. 4.1 – Ecaillage d'une cible en cuivre, HIXSON ET AL. [64].

tant d'identifier l'écaillage. Il observe sur un acier chargé par détonation, qu'une partie arrière de l'échantillon peut se décrocher et voler à une vitesse suffisante pour perforer une

épaisse planche en bois. Au début des années 1950, RINEHART [112–114] rapporte une étude détaillée du phénomène d'écaillage et attribue la cause de la rupture aux tensions dans le matériau résultant de la réflexion d'ondes de compression aux surfaces libres. En 1960, BROBERG [15] explique le mécanisme d'écaillage par le développement de micro-fissures et la coalescence de celles-ci pour former le plan d'écaillage. Ces développements posent les bases des premières études du phénomène de rupture par propagation d'ondes.

Dans cette partie, nous proposons au lecteur un aperçu de la théorie relative à l'impact plan et au phénomène d'écaillage rencontré lors de conditions de chargement intense. On ne saura que conseiller la lecture d'ouvrages de référence tels que ANTOUN ET AL. [2] et MEYERS [94].

4.1 Aspects théoriques

L'essai d'impact de plaques consiste à projeter, sur une cible immobile, un impacteur animé d'une vitesse initiale, dans le but de créer un choc lors du contact. Les moyens sont nombreux pour mettre en mouvement le projectile et on peut citer le chargement par détonation d'un explosif (KANEL ET AL. [77]), l'utilisation d'un canon à gaz (CHEVRIER ET KLEPACZKO [23]) ou encore le recours au laser pour fournir rapidement l'énergie cinétique à l'impacteur (ARRIGONI [3]). Afin de saisir le processus de formation d'une écaille lors d'un test d'impact plan, on se propose d'examiner la figure 4.2 qui présente, de manière simplifiée, la propagation des ondes générées lors d'un impact de deux plaques composées du même matériau.

fig. 4.2(a) L'impacteur, d'épaisseur notée e_i , est animé d'une vitesse initiale V_0 et vient percuter une cible immobile dont l'épaisseur est notée e_c .

fig. 4.2(b) A l'instant $t = 0^+$ de l'impact, une onde de compression est générée dans les deux plaques et se propage de part et d'autre de la surface de contact. On note C la vitesse de propagation, supposée constante.

fig. 4.2(c) Dans l'impacteur, d'épaisseur plus faible que la cible, l'onde de compression rencontre une surface libre et se réfléchit en onde de tension (changement de signe dû à la condition de surface libre en contraintes) de même amplitude, ce qui a pour effet de relâcher le chargement dans une partie de la plaque (voir la contrainte nette).

fig. 4.2(d) A l'instant $t_1 = 2e_i/C$, l'impacteur est entièrement déchargé (voir la contrainte nette). Il est important de souligner que le contact n'est toujours pas rompu et qu'une onde de détente est "générée" dans la cible à partir de t_1 .

fig. 4.2(e),(f) Ainsi, il y aura dans la plaque impactée un pulse d'une largeur égale à deux fois l'épaisseur du projectile se propageant vers le bord de la cible.

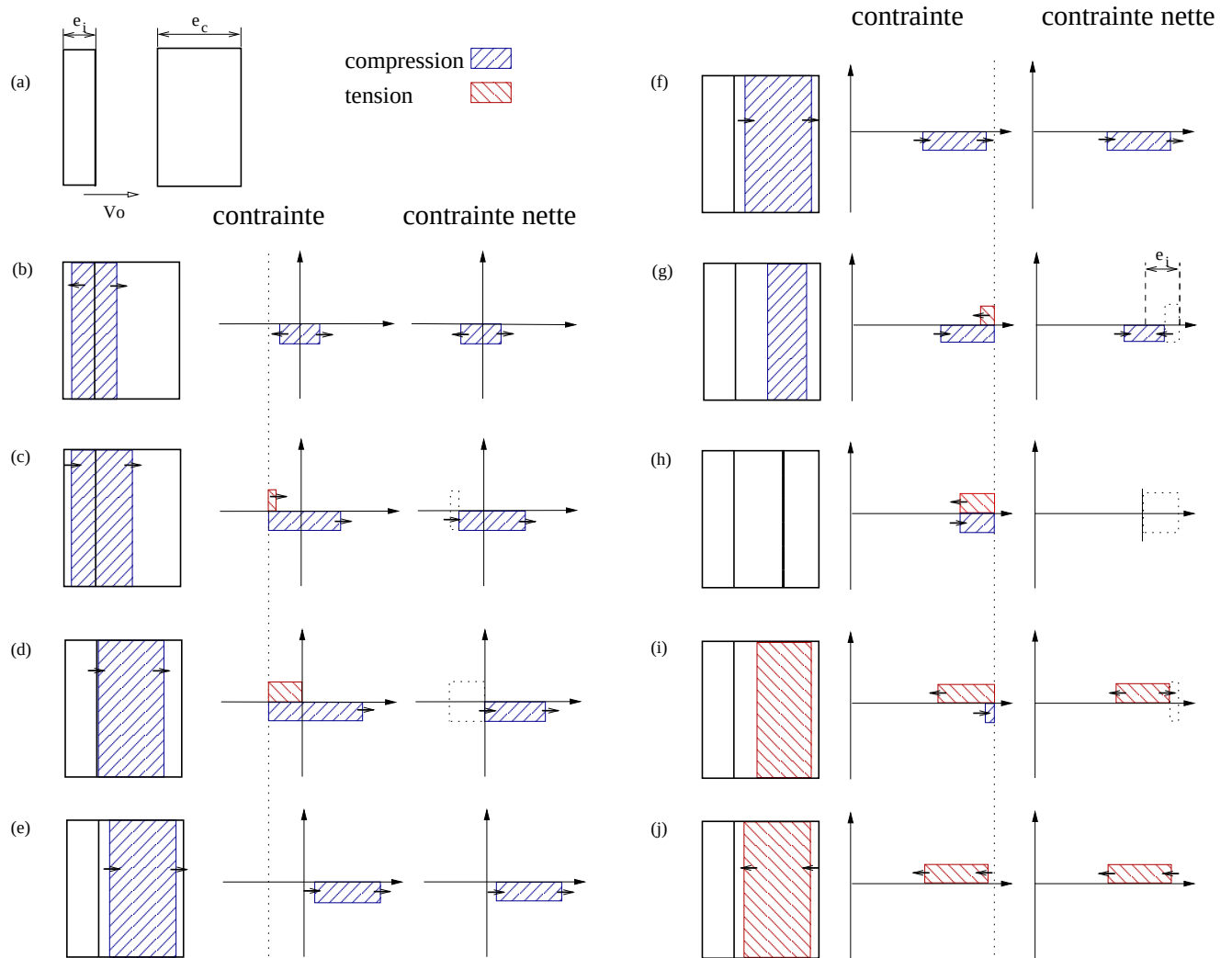


FIG. 4.2 – Représentation simplifiée de la propagation d'ondes lors d'un impact de plaques. Une plaque d'épaisseur e_i est projetée sur une cible stationnaire d'épaisseur e_c . La vitesse de propagation du front d'onde est notée C et la vitesse initiale de l'impacteur V_0 .

fig. 4.2(g) A sa rencontre avec la frontière libre, le pulse se réfléchit et change de signe pour les mêmes raisons que celles évoquées auparavant. On observe alors que le domaine soumis à la compression voit sa taille diminuer à mesure que les ondes de détente, issues de la réflexion aux bords, se rejoignent.

fig. 4.2(h) A une distance e_i de la surface libre, (qui correspond à la demi-largeur du pulse), la contrainte dans la plaque chute à 0 et à partir de cet instant, défini par $t_2 = (e_i + e_c)/C$, une partie de la cible est soumise à de la tension.

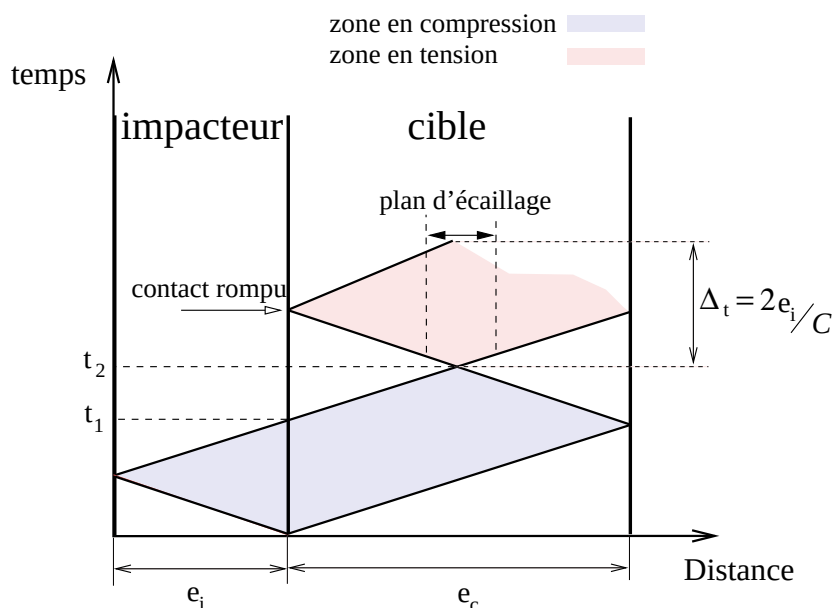


FIG. 4.3 – Représentation de Lagrange de l'impact de plaques et croisement des ondes dans le plan d'écaillage. Le plan d'écaillage se définit comme le lieu de croisement des ondes réfléchies aux surfaces libres, à l'endroit où la rupture apparaît.

fig. 4.2(i) La durée du maintien de la tension est maximale dans la zone du croisement des ondes de détente et il peut atteindre $2e_i/C$.

fig. 4.2(j) Si l'on n'observe aucun endommagement ou fracture, le pulse va continuer à se propager et se réfléchir aux surfaces libres.

Ce descriptif nous renseigne déjà sur deux éléments essentiels qui vont piloter l'essai d'impact de plaques (en dehors des propriétés mécaniques du matériau) : la vitesse initiale du projectile ainsi que son épaisseur. Le premier va conditionner l'amplitude du choc tandis que le second, comme on a pu le voir, va définir le temps de maintien dans la zone où va éventuellement apparaître la rupture. Si l'on définit des conditions de chargement telles que l'éprouvette ne puisse plus supporter la déformation, elle va se rompre à l'endroit de croisement des ondes appelé plan d'écaillage. Sur la figure 4.3, on présente une autre manière d'illustrer la propagation des ondes lors d'un impact de plaques. Il est courant en effet de décrire l'évolution de l'état de contraintes dans l'échantillon à l'aide d'un diagramme distance/temps, appelé diagramme de Lagrange ou diagramme (x, t) . Le plan d'écaillage y est repéré par le croisement des ondes issues de la réflexion aux surfaces libres. On retrouvera sur ce dessin les temps caractéristiques t_1 et t_2 évoqués précédemment.

4.2 Traitement uniaxial

L'impact plan génère un état de déformation uniaxiale et un champ de contraintes bidimensionnel dans la cible. Ceci est assuré par la géométrie de la cible choisie de façon à réduire les effets de détente latérales (cible en forme d'étoile, KUMAR ET CLIFTON [84], conçue pour piéger ces ondes, ou de dimension latérale suffisamment grande). Dans ces conditions, le tenseur des contraintes va s'écrire dans un repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ lié à l'observateur :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_t(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3), \quad (4.1)$$

où σ désigne la contrainte uniaxiale dans la direction de propagation de la déformation et σ_t la valeur de la contrainte dans toute direction transverse. L'opérateur ' $\otimes$ ' est le produit tensoriel.

L'expression de la composante hydrostatique, notée p ou indifféremment σ_m , est donnée par :

$$p = \sigma_m = \frac{1}{3} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}} = \frac{\sigma + 2\sigma_t}{3}, \quad (4.2)$$

l'opérateur ' $:$ ' désignant le produit doublement contracté et $\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité du second ordre. La contrainte équivalente au sens de von Mises σ_{eq} , obtenue à partir du déviateur des contraintes est donnée par :

$$\sigma_{eq} = \sigma - \sigma_t. \quad (4.3)$$

et les composantes du tenseur des contraintes peuvent alors s'écrire :

$$\sigma = p + \frac{2\sigma_{eq}}{3}, \quad (4.4a)$$

$$\sigma_t = p - \frac{\sigma_{eq}}{3}. \quad (4.4b)$$

Le problème d'impact, de manière générale, peut être traité de plusieurs façons dépendant essentiellement de la pression qui va régner à l'intérieur du matériau.

4.2.1 Comportement hydrodynamique

Pour les hautes pressions, le solide peut se comporter comme un fluide compressible. En effet, la théorie de la plasticité nous indique que la contrainte déviatorique est contrôlée et limitée par la loi d'écoulement. Sachant qu'en revanche, la pression n'est soumise a priori à aucune limite théorique, la situation où $p \gg \sigma_{eq}$ implique, au regard des équations (4.4a) et (4.4b), que le tenseur des contraintes est purement sphérique. Il est alors légitime d'assimiler le comportement du matériau, dans ce cas précis, à celui d'un fluide qui par définition ne peut supporter aucun cisaillement.

4.2.1.1 Relations de Rankine-Hugoniot

L'analyse du problème, de ce point de vue, nécessite la résolution des relations de Rankine-Hugoniot. Les ondes de choc présentent une discontinuité pour toutes les variables liées à l'écoulement et les relations de Rankine-Hugoniot sont des lois de bilan exprimant la conservation des flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à travers cette discontinuité non nécessairement plane ou de célérité constante (VIDAL ET AL. [139]).

Soit une perturbation propageant un saut de vitesse matérielle u à une célérité D et faisant passer le milieu d'un état thermodynamique initial (p_0, ρ_0, e_0) , à l'état (p, ρ, e) . Les variables p, ρ, e désignent respectivement la pression, la masse volumique (liée au volumique spécifique v par $v = 1/\rho$), l'énergie interne spécifique. L'indice $_0$ désigne les variables se référant à la configuration initiale. Les équations bilan au passage du choc s'écrivent :

$$\rho(D - u) = \rho_0 D \quad (4.5a)$$

$$p + \rho(D - u)^2 = p_0 + \rho_0 D^2 \quad (4.5b)$$

$$e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(D - u)^2 = e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{2}D^2. \quad (4.5c)$$

Les grandeurs p, ρ et e ne sont pas indépendantes mais liées entre elles via une relation appelée équation d'état du milieu :

$$f(p, \rho, e) = 0. \quad (4.6)$$

L'équation d'état va en outre nous renseigner sur la capacité qu'a le matériau à résister au changement de volume.

4.2.1.2 Représentation dans le plan (p, v)

Il est couramment utilisé la représentation de la solution des relations de Rankine-Hugoniot dans le plan pression-volume $(p, v = 1/\rho)$ sous forme de polaires. Ainsi, par combinaison des bilans de masse, (4.5a), et de quantité de mouvement, (4.5b), on aboutit à l'équation de la droite de Rayleigh :

$$p = p_R(v) = p_0 + \frac{D^2}{v_0} \left(1 - \frac{v}{v_0} \right), \quad (4.7)$$

créant la corde entre les deux états thermodynamiques (p_0, v_0) et (p, v) , voir figure 4.4. En combinant cette fois les trois équations bilans (4.5), on parvient à l'expression suivante de la conservation de l'énergie :

$$e - e_0 = \frac{1}{2} (p_0 + p) (v_0 - v), \quad (4.8)$$

qui est appelée adiabatique dynamique (ou relation d'Hugoniot). Si l'on y associe en plus l'équation d'état (4.6), on obtient une courbe dans le plan (p, v) appelée courbe d'Hugoniot :

$$p = p_H(v), \quad (4.9)$$

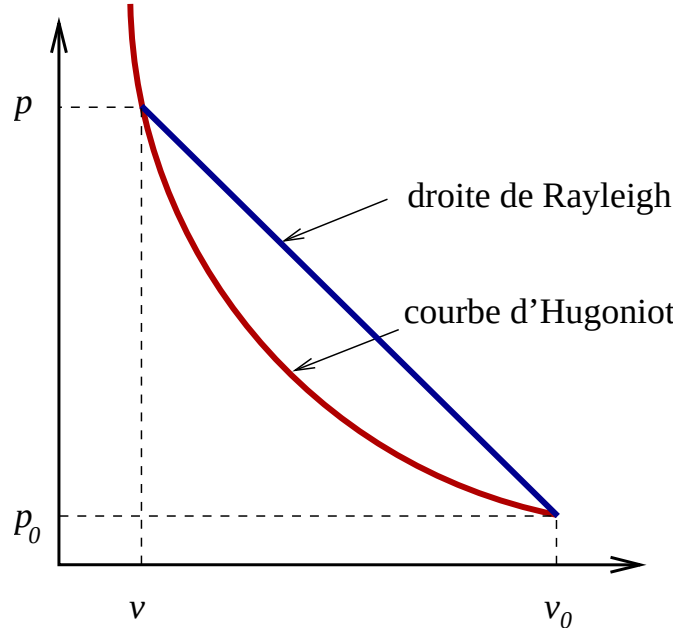


FIG. 4.4 – Courbe d'Hugoniot ou adiabatique dynamique représentant les états d'équilibres thermodynamiques lors du passage d'un choc. La corde reliant (p_0, v_0) à (p, v) est appelée droite de Rayleigh et correspond aux états hors équilibre suivis par le matériau au cours du choc.

qui représente tous les états que l'on peut obtenir par un choc à partir d'un état initial caractérisé par (p_0, v_0) . La figure 4.4 montre la courbe représentative de l'adiabatique dynamique ainsi que la droite de Rayleigh. Précisons qu'il existe d'autres polaires utilisées pour l'analyse des chocs (par exemple les polaires pression-vitesse matérielle).

La pression d'Hugoniot $p_H(v)$ est une fonction du volume seulement (ou de la densité $\rho = 1/v$) et peut être obtenue en général par analyse des données expérimentales. DAVISON ET GRAHAM [34], suite à de nombreux essais de chocs sur tous types de matériaux, mettent en évidence l'existence d'une relation linéaire entre la vitesse de propagation du front d'onde D et la vitesse de particule u située derrière l'onde :

$$D = c_0 + su, \quad (4.10)$$

où c_0 représente la célérité des ondes de dilatations, $c_0 = \sqrt{K/\rho_0}$, K étant le module de compressibilité. On trouvera, notamment dans les travaux de MEYERS ET MURR [96], une série de relevés de paramètres traduisant cette relation linéaire pour plusieurs matériaux.

La combinaison de la relation (4.10) et des équations bilan de Rankine-Hugoniot (4.5) conduisent à l'expression de la pression $p_H(v)$ sur l'Hugoniot :

$$p_H(v) = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta}{(1 - s\eta)^2}, \quad (4.11)$$

et de l'énergie associée $e_H(v)$:

$$e_H(v) = \frac{c_0^2 \eta^2}{2(1 - s\eta)^2}, \quad (4.12)$$

avec $\eta = 1 - v/v_0$.

4.2.1.3 Equations d'état

Afin de décrire l'état d'équilibre d'un système, la relation de Mie-Grüneisen constitue l'équation d'état la plus utilisée dans l'étude de chocs dans les matériaux solides. L'équation de Mie-Grüneisen (dont le détail d'obtention, basé sur les vibrations du réseau cristallin, est fourni par MEYERS [94]) s'écrit :

$$p - p_{ref}(v) = \frac{\gamma(v)}{v} (e - e_{ref}(v)), \quad (4.13)$$

où p_{ref} et e_{ref} sont une pression et une énergie de référence pour un volume v fixé et où γ est la fonction de Grüneisen. En faisant référence à la pression $p_H(v)$ se trouvant sur l'Hugoniot, qui est déterminée de manière expérimentale, et en y associant l'énergie $e_H(v)$, l'équation d'état s'écrit :

$$p = p_H(v) + \frac{\gamma(v)}{v} (e - e_H(v)). \quad (4.14)$$

WALSH ET AL. [141] montrent que $\gamma(v)$ peut être décrit par une expression polynomiale en fonction de la déformation volumique $\eta/(1 - \eta)$. Le développement au premier ordre de $\gamma(v)$ s'écrit :

$$\frac{\gamma(v)}{v} = \frac{\gamma_0}{v_0} = \gamma_0 \rho_0, \quad (4.15)$$

où γ_0 est la constante de Grüneisen. En remplaçant p_H et e_H dans l'équation (4.15), par leurs expressions respectives (4.11) et (4.12), on aboutit à :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta}{(1 - s\eta)^2} \left(1 - \frac{\gamma_0 \eta}{2} \right) + \rho_0 \gamma_0 e. \quad (4.16)$$

Cette dernière relation définit le comportement élastique non linéaire de la composante sphérique.

4.2.2 Comportement élastoplastique

Dans le cas d'une déformation uniaxiale, les composantes du tenseur des contraintes sont données par les équations (4.4). Pour un matériau homogène élastique linéaire isotrope, les équations (4.4) conduisent à :

$$\sigma = \left(K + \frac{4G}{3} \right) \varepsilon \quad (4.17a)$$

$$\sigma_t = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \varepsilon \quad (4.17b)$$

$$p = K\varepsilon, \quad (4.17c)$$

où ε est la déformation uniaxiale et G le module de cisaillement. La quantité $K + 4G/3$, notée F , est appelé module longitudinal.

Le comportement plastique du matériau est décrit par la loi découlement qui peut dépendre des déformation et vitesse de déformation équivalentes plastiques, de la température T , etc. :

$$\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\varepsilon_{eq}^p, \dot{\varepsilon}_{eq}^p, T, \dots) . \quad (4.18)$$

L'expression de la contrainte hydrostatique p , donnée par la relation (4.17c), reste inchangée. Pour un matériau élastique parfaitement plastique de limite d'élasticité σ_0 , la contrainte uniaxiale vaut alors :

$$\sigma = \sigma_{LEH} = \sigma = \left(\frac{K}{2G} + \frac{2}{3} \right) \sigma_0 . \quad (4.19)$$

σ_{LEH} , appelée limite élastique d'Hugoniot, définit alors la limite d'élasticité du matériau en déformation uniaxiale.

4.3 Ecaillage

L'écaillage est le résultat d'un chargement fortement triaxial observé dans le plan de rencontre des ondes de détente, issues de la réflexion aux surfaces libres du choc généré initialement par l'impact. Les conditions contrôlant le processus de rupture dynamique sont habituellement définies en termes de contrainte et de temps de maintien.

La vitesse de propagation des ondes lors de l'impact va principalement dépendre de l'amplitude du choc généré. Si le chargement est relativement faible (de l'ordre de σ_{LEH}), une onde élastique va se propager à travers le matériau avec une vitesse c_l définie par :

$$c_l = \sqrt{\frac{F}{\rho}} , \quad (4.20)$$

où F est le module longitudinal donné par :

$$F = K + \frac{4G}{3} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} , \quad (4.21)$$

ν désignant le coefficient de Poisson du matériau et E son module de Young.

Si la plaque est impactée à vitesse modérée, des ondes élastiques et plastiques sont créées au contact et se propagent à des vitesses distinctes. La célérité de l'onde élastique, appelée alors précurseur élastique, est toujours donnée par la relation (4.21) tandis que l'onde plastique se propage plus lentement, à une vitesse dépendant de la loi d'écoulement du matériau et de l'état de déformation du matériau.

Enfin, si la vitesse est encore plus grande, il n'y a pas dédoublement de l'onde, un choc est créé et se propage dans le matériau à une vitesse donnée par la courbe d'Hugoniot du matériau. La figure 4.5 résume les différents cas de propagation.

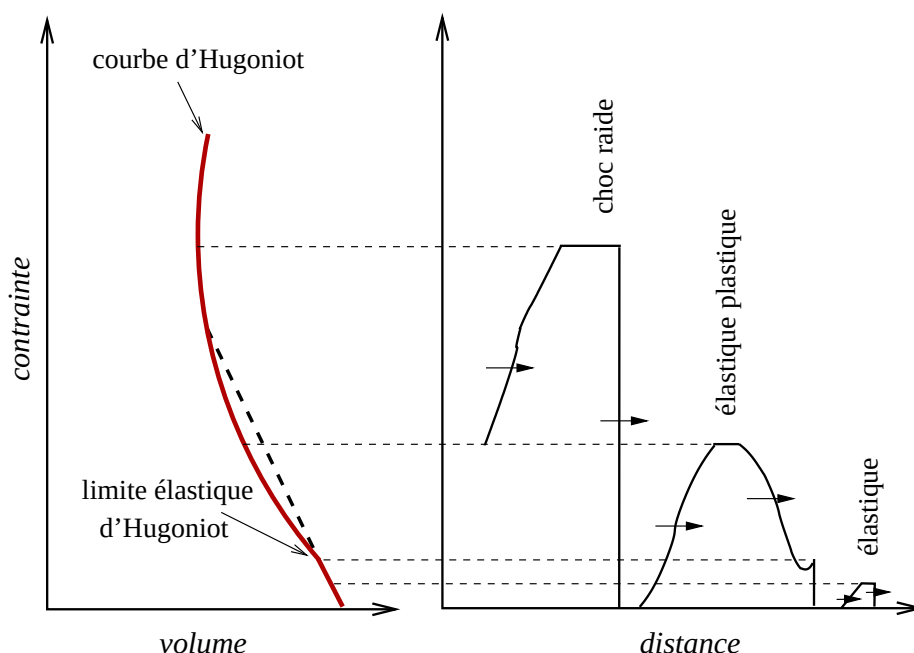


FIG. 4.5 – Front d'onde se propageant dans un solide, d'après GRAHAM [54]

4.3.1 Observations expérimentales

Il est admis à partir de la propagation des ondes dans la cible, que dans le plan de rupture (croisement des ondes de détente), l'histoire du chargement peut être schématisée par une rampe linéaire de pression jusqu'à atteindre l'écaillage. Cette approximation est également utilisée dans les approches de MOLINARI ET WRIGHT [98] ou CZARNOTA ET AL. [32]. Bien qu'à l'impact, l'onde émise est très raide, le comportement élastoplastique du matériau modifie le pulse qui, en se réfléchissant puis en rencontrant l'onde de détente venant en sens inverse, va créer une rampe de tension dans le plan d'écaillage, lieu du croisement de ces deux ondes.

Parmi les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature, on se propose de présenter plus précisément ceux obtenus par ROY [116] sur un tantale de nuance très pure. L'auteur mène une campagne d'essais conséquente sur l'impact de plaques en faisant varier la vitesse d'impact, l'épaisseur du projectile, de manière à modifier les conditions de chargement dans le plan d'écaillage. La figure 4.6 présente les contraintes d'écaillage obtenues pour différents essais en fonction de la vitesse de chargement dans le plan d'écaillage. Il est clairement mis en évidence par l'auteur qu'une augmentation de la vitesse de chargement conduit à une élévation de la contrainte d'écaillage. Ce résultat, montrant l'effet stabilisant de la vitesse de chargement (intimement liée aux effets micro-inertiels) sur la contrainte

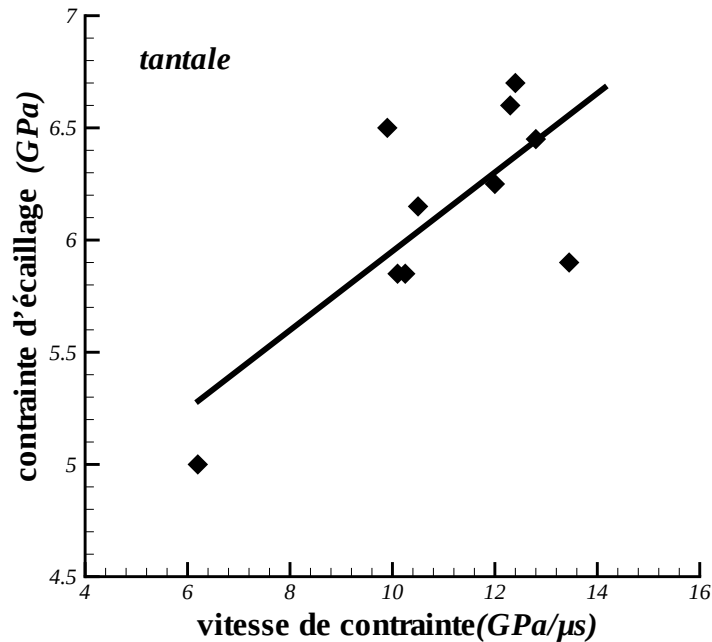


FIG. 4.6 – Contrainte d'écaillage en fonction de la vitesse de chargement, d'après ROY [116]. Une augmentation de la vitesse de sollicitation dans le plan d'écaillage conduit à une augmentation de la contrainte à rupture.

à rupture, a également été mis en lumière expérimentalement notamment par KANEL ET AL. [77]. On présente ainsi sur la figure 4.7 l'influence de la vitesse de déformation sur la contrainte d'écaillage. Ces derniers auteurs ont abordé l'effet de la microstructure du matériau. La différence entre le polycristal et le monocristal provient de l'existence de joints de grains qui peuvent servir de sites préférentiels de nucléation (le lecteur intéressé peut consulter le travail de synthèse de MEYERS ET AIMONE [95] concernant l'écaillage).

4.3.2 Analyse du profil de vitesse en face arrière

L'outil de mesure dédié pour l'analyse des vitesses de face arrière est le VISAR (Velocity Interferometer System for Any Reflector). Cette technique, mise au point par BARKER ET HOLLENBACH [6] en 1972, permet de mesurer la vitesse de la particule en face arrière. Le principe consiste à diviser un rayon incident en deux parties, l'une venant frapper la surface libre, l'autre un miroir situé à une égale distance. L'interférence relevée entre les deux rayons alors recombinaison peut être utilisée pour déterminer la vitesse et l'accélération ou la décélération. Sur la figure 4.8 est représenté le relevé type d'une mesure de vitesse de face arrière obtenue par un VISAR. Nous allons détailler ce profil en nous basant sur les hypothèses admises dans

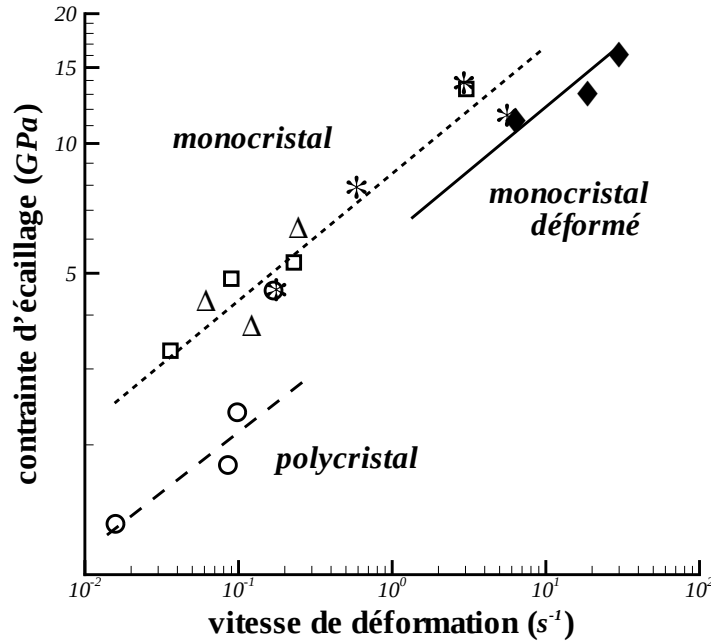


FIG. 4.7 – Dépendance de la contrainte d'écaillage à la vitesse de déformation pour le molybdène. Influence de la microstructure, d'après KANEL ET AL. [77]. L'orientation du monocrystal par rapport au chargement est $\langle 110 \rangle$: (*), $\langle 100 \rangle$: (□), $\langle 111 \rangle$: (Δ); (◆) : monocrystal laminé d'orientation $\langle 100 \rangle$; (○) : polycrystal.

la littérature. L'onde élastique (précurseur élastique), plus rapide, arrive la première en surface libre (1) et la met en mouvement augmentant la vitesse à un niveau associé à la limite élastique d'Hugoniot. La contrainte correspondante, σ_{LEH} , peut être estimée en considérant la vitesse de propagation des ondes élastiques (approximation acoustique) de la façon suivante :

$$\sigma_{LEH} = \frac{1}{2} \rho c_l V_{LEH} \quad (4.22)$$

où V_{LEH} est la vitesse mesurée au point (1). Le signal persiste à cette limite jusqu'à ce que l'onde plastique, plus lente, débouche en face arrière (1') pour porter la vitesse de celle-ci au niveau approximatif de V_{impact} , la vitesse d'impact du projectile (2). La vitesse est maintenue jusqu'à ce que l'onde de détente élastique (provenant de la réflexion sur le bord libre de l'impacteur) arrive (3) et la fasse diminuer d'une amplitude d'environ égale à V_{LEH} (3'). Puis suit la détente plastique (3') qui fait chuter la vitesse à zéro dans le cas où l'écaillage n'a pas lieu. En revanche, si le chargement est suffisamment élevé et maintenu suffisamment longtemps, de manière à créer la rupture au cœur de la cible, on constate une réaccélération du signal de vitesse (S) due à l'arrivée d'une onde de recompression (issue de la relaxation générée par

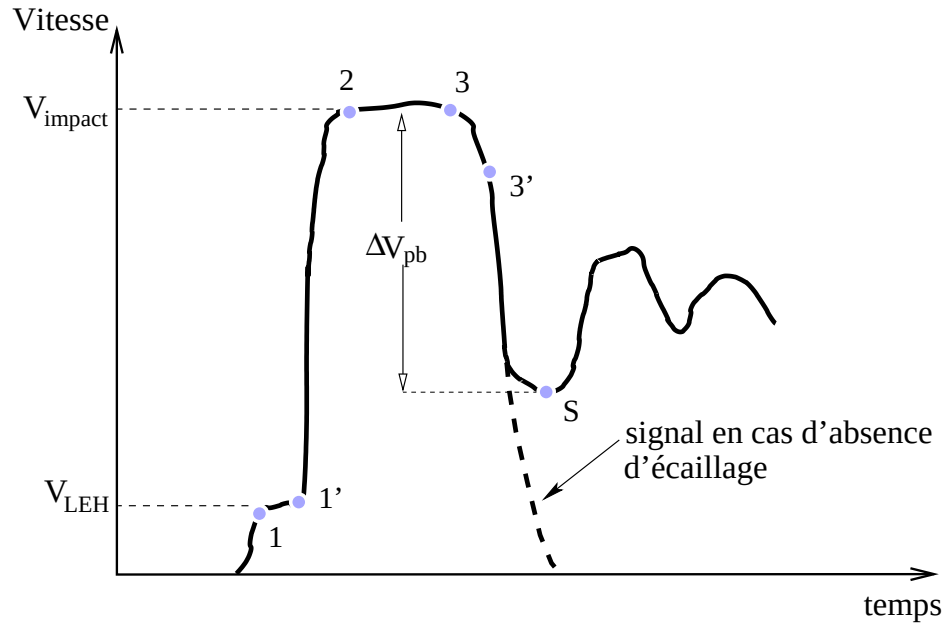


FIG. 4.8 – Vitesse de surface libre type obtenue par un VISAR. Le point S identifie l'apparition de l'écaillage au cœur de la cible

l'endommagement). Les rebonds successifs observés ensuite sont le résultat de la réflexion (appelée aussi réverbération) des ondes emprisonnées entre la surface nouvellement créée et le bord libre.

L'information émanant de la surface libre est donc essentielle pour comprendre la manière dont évolue la contrainte dans le matériau. Il faut cependant prendre note que la propagation des ondes à l'intérieur du matériau (élastique, viscoplastique, avec changement de phase, etc.) peut rendre difficile l'établissement d'un lien évident entre la vitesse mesurée et la pression au plan d'écaillage. A ce propos d'ailleurs, on peut citer le commentaire de ROY [116] quant aux tests d'impact réalisés sur un tantale de très haute pureté, et les vitesses de surface libre relevées, lorsqu'il précise que la mesure de vitesse matérielle en surface libre est rarement un indicateur fiable sur l'état microstructural de la cible : la différence de réponse qu'il constate entre un cas d'endommagement diffus et une fissuration nette est en effet peu marquée. Pour les matériaux très ductiles, nous montrerons en dernière partie de ce manuscrit, que l'endommagement s'initie en S et que la rupture arrive plus tardivement.

Quoiqu'il en soit, la contrainte d'écaillage (de rupture dans le plan d'écaillage) est évaluée de plusieurs manières à partir du relevé de vitesse en face arrière et nous évoquons dans le paragraphe suivant quelques approches à ce sujet.

4.3.3 Contrainte d'écaillage - Spall stress

Toutes les formulations amenant à évaluer la contrainte d'écaillage σ_{ec} font intervenir la différence entre le pic de vitesse V_{max} ($\approx V_{impact}$) et la vitesse V_{min} correspondant au premier rebond, témoin d'une relaxation des contraintes dans la cible. On notera cette différence ΔV_{pb} , voir figure 4.8. La formulation couramment admise pour évaluer la contrainte d'écaillage est l'approximation acoustique (appelée également formule de Taylor, SPEIGHT ET TAYLOR [123]) introduite par NOVIKOV ET AL. [102] en 1966 :

$$\sigma_{ec} = \frac{1}{2} \rho C \Delta V_{pb}, \quad (4.23)$$

où ρ est la densité du matériau et C une vitesse de propagation de l'onde appropriée, GRADY ET KIPP [53]. Par exemple, si la réponse du matériau est élastique, la célérité C sera donnée par $C = c_l = \sqrt{(F/\rho)}$ et dans le cas d'un comportement hydrodynamique, on choisira $C = c_b = \sqrt{(K/\rho)}$.

En 1976, STEPANOV [124] prend en compte le fait que le front de l'onde se propage à la célérité des ondes plastiques alors que la queue de l'onde se déplace à la vitesse de propagation des ondes élastiques, voir figure 4.9(a). Il adapte alors l'équation (4.23) :

$$\sigma_{ec} = \rho \bar{C} \Delta V_{pb} \quad \text{avec} \quad \bar{C} = \frac{c_l}{1 + c_l/c_b}. \quad (4.24)$$

Dans leurs travaux publiés en 1980, ROMANCHENKO ET STEPANOV [115] tiennent compte de l'atténuation de l'onde à mesure qu'elle progresse vers la surface libre en raison du compor-

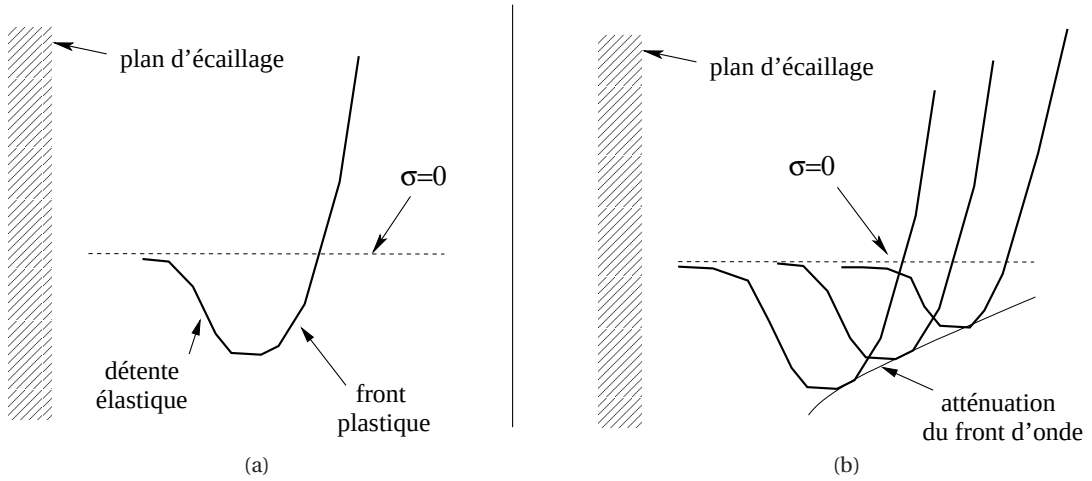


FIG. 4.9 – Propagation du signal d'écaillage du plan de rupture vers la surface libre où est effectuée la mesure de vitesse, d'après GRADY ET KIPP [53]. Le comportement élastoplastique du matériau rend compliquée l'interprétation du profil de vitesse de face arrière. (a) - Le front d'onde se propage à la célérité des ondes plastiques alors que la queue de l'onde se déplace à la vitesse des ondes élastiques. (b) - L'onde peut s'atténuer en raison de la propagation plus rapide de la détente élastique qui va venir écrêter le signal d'écaillage.

tement élastoplastique du matériau. Cette réduction est due à l'onde de relaxation élastique provenant du plan d'écaillage, qui se propage plus rapidement et finit par rattraper le front d'onde plastique pour réduire son amplitude, voir figure 4.9(b). La contrainte de rupture dans le plan d'écaillage, donnée par (4.24), est alors ajustée de la manière suivante :

$$\sigma_{ec} = \rho \bar{C} \Delta V_{pb} + \Delta \sigma \quad (4.25)$$

avec

$$\Delta \sigma = \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dt} \left(\frac{h}{c_b} - \frac{h}{c_l} \right), \quad (4.26)$$

h désignant l'épaisseur de l'impacteur et $\frac{d\sigma}{dt}$ la vitesse à laquelle le matériau est mis en tension :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} \rho c_l \frac{\Delta V_{pb}}{\Delta t_{pb}}, \quad (4.27)$$

Δt_{pb} représentant le temps pour passer de la vitesse V_{max} à V_{min} .

Visiblement, la correction $\Delta \sigma$ dépend de la pente du profil de vitesse. KANEL ET AL. [76] suggèrent en 1984, l'expression suivante :

$$\sigma_{ec} = \frac{1}{2} \rho c_b \Delta V_{pb} + \Delta \sigma \quad \text{avec} \quad \Delta \sigma = \frac{1}{2} \rho c_b \left(\frac{h}{c_b} - \frac{h}{c_l} \right) \frac{|\dot{u}_1 \dot{u}_2|}{|\dot{u}_1| + \dot{u}_2}, \quad (4.28)$$

où $\dot{u}_1$ et $\dot{u}_2$ désignent respectivement le gradient de vitesse devant et derrière le signal d'écaillage, figure 4.10. Dans le cas où $\dot{u}_1 = \dot{u}_2$, on retrouve le résultat de ROMANCHENKO ET

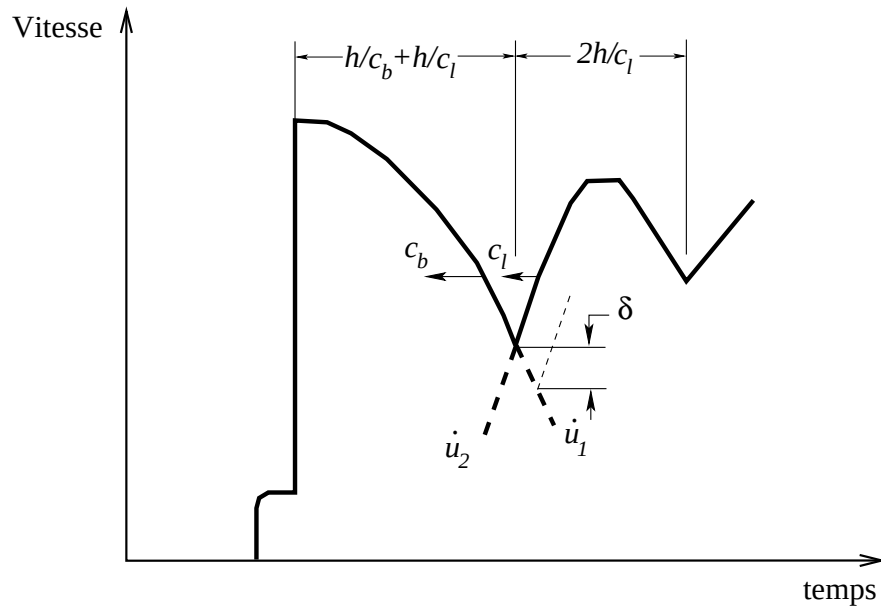


FIG. 4.10 – Profil de face arrière et méthode de mesure de la contrainte d'écaillage, d'après AUTOUN ET AL. [2]. Les paramètres font référence à la relation (4.28).

STEPANOV [115], donné par les équations (4.26) et (4.27).

Précisons, comme le signalent ANTOUN ET AL. [2] que les expressions précédentes ne tiennent pas compte de l'endommagement et ont été développées sous l'hypothèse d'une fracture instantanée. Certes, l'atténuation de l'onde est prise en compte dans certaines approches, dûe à la nature élastoplastique du matériau, mais on peut imaginer que la prise en compte de l'endommagement atténuerait d'autant plus le signal de face arrière. Ceci rejoint la remarque faite précédemment, suite aux observations faites par ROY [116] sur le tantale, quant aux précautions à prendre lors d'une analyse de profil de vitesse en face arrière. On peut citer les travaux récents de CHEN ET AL. [22] qui, après avoir passé en revue un certain nombre de modèles permettant d'accéder à la contrainte d'écaillage à partir du profil de vitesse, remettent en cause la validité de ces approches pour les matériaux ductiles et insistent sur le fait que le couplage avec l'endommagement est indispensable. C'est ce que nous allons montrer dans la dernière partie.

Nous proposons, dans la section suivante, d'évoquer les différents critères de rupture développés pour le cas de chargements dynamiques.

4.4 Critères de rupture

Beaucoup de critères ont été développés afin de prévoir la rupture dynamique en général, et la rupture dans les matériaux ductiles en particulier. Le lecteur trouvera une revue d'un certain nombre d'approches de la rupture dynamique dans les travaux de HANIM ET AHZI [61] notamment. On rencontre également dans certains ouvrages la classification des critères de rupture en deux catégories : les critères dits « actifs » et les critères « passifs ».

Les critères actifs sont basés sur l'intégration de l'endommagement dans le comportement du matériau. Par critères passifs, on entend des approches où la condition de rupture n'est associée à aucune histoire de l'endommagement. Cela signifie que bien que les contraintes et déformations ne soient pas affectées par l'endommagement, elles peuvent servir à justifier du matériau s'il reste sain ou s'il se fracture.

4.4.1 Critères passifs

Un premier type de critère se rapportant à cette catégorie est basé sur la définition de la rupture comme étant effective une fois atteinte une valeur limite de tension dans le matériau. En quasi-statique, on pourrait se référer au critère de GRIFFITH [55] développé pour les matériaux fragiles, qui est basé sur une approche énergétique. La notion de valeur critique de contrainte est un concept assez simple mais ne répond pas à la phénoménologie de l'en-

dommagement dynamique qui on le sait n'est pas instantané. On voit alors apparaître des critères « cumulatifs » à l'image de celui développé par TULER ET BUTCHER [132], qui tiennent leur nom du fait qu'ils sont liés à l'amplitude du chargement ainsi qu'au temps de maintien de celui-ci. L'endommagement est alors cumulé dans le plan d'écaillage pendant toute la durée du processus de déformation.

Critère de TULER ET BUTCHER [132]

L'approche de TULER ET BUTCHER [132], basée sur une loi empirique, détermine le dommage cumulé en un point du matériau, soumis à une tension σ , à partir d'un terme intégral défini par :

$$I = \int_0^t f[\sigma(t)] dt, \quad \text{avec } f[\sigma(t)] = \begin{cases} [\sigma(t) - \sigma_R]^A & \text{si } \sigma \geq \sigma_R \\ 0 & \text{si } \sigma(t) < \sigma_R \end{cases} \quad (4.29)$$

où σ_R est une valeur seuil d'initiation de l'endommagement (une contrainte de nucléation en quelque sorte) et A une constante du matériau. On notera que pour des temps de maintien très longs $f[\sigma(t)]$ doit tendre vers 0. La contrainte d'initiation de l'endommagement σ_R correspond à la tension de rupture instantanée en régime quasi-statique.

A partir de l'équation (4.29), l'effondrement de la structure est supposé avoir lieu lorsque I atteint une valeur limite K à un endroit du matériau où a évolué la contrainte $\sigma(t)$. Le critère s'écrit alors :

$$\int_0^{t_F} [\sigma(t) - \sigma_R]^A dt = K \quad \text{pour } \sigma(t) \geq \sigma_R, \quad (4.30)$$

ou encore :

$$t_R = \int_0^{t_F} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_R} - 1 \right]^A dt, \quad \text{avec } t_R = \frac{K}{\sigma_R^A}. \quad (4.31)$$

t_R est un temps caractéristique dépendant du matériau et t_F le temps d'obtention de la rupture. Les avantages d'un tel critère sont la simplicité d'utilisation et le nombre réduit de paramètres à identifier (A , σ_R et K sont déterminés par comparaison avec l'expérience). Il a notamment été utilisé par BOUSTIE ET COTTET [14] et implanté dans les codes monodimensionnels *SHYLAC*¹ et tridimensionnel *RADIOSS*² dans le but d'analyser le comportement sous choc de l'aluminium et du cuivre.

Critère de Klepaczko

A côté de critères purement phénoménologiques, comme celui de TULER ET BUTCHER [132], on peut citer des approches plus physiques comme celle de KLEPACZKO [80]. La démarche, initiée par ZHURKOV [155], repose sur la définition de la rupture comme un processus thermiquement activé. Tenant compte de cet aspect et se basant sur la statistique

¹le code *SHYLAC*, pour Simulation HYdrodynamique LAgrangienne de Choc, a été développé au Laboratoire de Combustion et de Détonique à Poitiers à la fin des années 1980

²le code de simulation *RADIOSS*TM a vu le jour en 1986 et est distribué par une société française Mecalog Group

de Boltzmann, KLEPACZKO [80] propose un critère cumulatif développé pour les temps de chargement courts qui s'écrit :

$$t_R = \int_0^{t_F} \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_R} \right]^{\alpha(T)} dt, \quad t_F \leq t_R, \quad \sigma(t) \geq \sigma_R, \quad (4.32)$$

avec

$$\alpha(T) = \frac{\Delta G_0}{k_B T}, \quad (4.33)$$

T désignant la température, k_B la constante de BOLTZMANN et ΔG_0 l'énergie d'activation. σ_R , t_R et α sont des constantes du matériau pour une température T fixée. Le temps caractéristique t_R représente le temps critique à rupture lors d'une analyse quasi-statique où $\sigma(t_R) = \sigma_R$. Le critère s'adapte au cas non isotherme ($T = T(t)$) en définissant α en fonction du temps et de la température par $\alpha(T, t) = \Delta G_0 / k_B T(t)$.

On pourra une nouvelle fois relever la forme simple d'un critère cumulatif et le nombre réduit de paramètres. Notons que dans le cas de chargements élémentaires (rampe de pression ou pulse carré), le critère de TULER ET BUTCHER [132], donné par l'équation (4.31), ou celui de KLEPACZKO [80], donné par la relation (4.32), peut s'intégrer de façon immédiate. Le critère de KLEPACZKO [80] a été utilisé dans de nombreux travaux relatifs à l'écaillage. On citera par exemple CHEVRIER ET KLEPACZKO [23] pour des études sur un acier martensitique, BOIDIN ET AL. [10] pour l'analyse du comportement sous choc du titane TA6V, ou enfin HANIM ET KLEPACZKO [62] pour des simulations d'impact sur un alliage d'aluminium, via une implantation du critère dans un code de calculs.

Le critère de KLEPACZKO [80] est étendu par HANIM [60] en 1998, avec la prise en compte de la température dans la contrainte seuil. A partir d'une analyse de la dégradation des propriétés mécaniques du matériau avec l'augmentation de la température, l'auteur aboutit à l'expression de la contrainte seuil :

$$\sigma_R(T) = \sigma_R^0 \left\{ 1 - \frac{T}{T_m} \exp \left[\theta^* \left(1 - \frac{T_m}{T} \right) \right] \right\}, \quad (4.34)$$

où θ^* est une constante du matériau et T_m la température de fusion. Cette expression utilisée conjointement avec la relation (4.32), permet de reformuler le critère.

Extension des précédents critères - transition vers un caractère actif

Les critères passifs sont souvent améliorés. Les modifications successives apportées tendent à les basculer vers une définition plutôt active. Par exemple, les critères de TULER ET BUTCHER [132] et de KLEPACZKO [80] sont étendus dans les travaux de HANIM ET AHZI [61]

avec prise en compte de l'effet du couplage de la pression et de la température sur l'évaluation de la contrainte seuil.

Dans le même esprit, CAGNOUX [18] et WANJIA [146] proposent une extension du modèle de TULER ET BUTCHER [132] en y associant le paramètre d'endommagement D (notation habituelle dans la thermodynamique des phénomènes irréversibles). Dans l'approche de CAGNOUX [18] par exemple, la loi proposée gouvernant le cumul de l'endommagement s'écrit :

$$\frac{1}{B} \int_0^t \left[\frac{\sigma(t) - \sigma_R}{1 - D} \right] (1 - D)^{\gamma - b\sigma} dt = D, \quad (4.35)$$

avec b , B et γ des paramètres.

4.4.2 Critères actifs

Critère de DAVISON ET STEVENS [35]

Un autre exemple d'extension du critère de TULER ET BURCHER [132] est proposé par DAVISON ET STEVENS [35]. Dans leur revue des différentes approches permettant de prédire l'écaillage, les auteurs précisent que le modèle de TULER ET BURCHER [132] prédit, pour une charge constante, un cumul d'endommagement à vitesse constante. Lors des évolutions de la déformation et de l'endommagement, le matériau va s'affaiblir, facilitant ainsi le cumul d'un endommagement ultérieur. Cette observation n'est pas traduite dans le critère de TULER ET BUTCHER. DAVISON ET STEVENS [35] développent une loi d'évolution pour la variable D , contrôlant l'endommagement :

$$\dot{D} = \varphi(\sigma, D). \quad (4.36)$$

A partir de la relation (4.36), il est possible de déterminer le temps t nécessaire pour cumuler la quantité D :

$$t = \int_0^D [\varphi(\sigma, \delta)]^{-1} d\delta. \quad (4.37)$$

Dans un critère cumulatif simple, la fonction φ ne dépendrait pas de D . DAVISON ET STEVENS [35] ont proposé d'écrire la relation (4.36) de la manière suivante :

$$\frac{\dot{D}}{D^*} = \frac{1}{\tau_0} \left(\varphi_0(\sigma) + \varphi_1(\sigma) \frac{D}{D^*} \right), \quad (4.38)$$

avec D^* la valeur critique d'endommagement conduisant à la rupture. τ_0 et les fonctions φ_0 et φ_1 sont à évaluer.

Les travaux de BARBEE ET AL. [5] sur l'aluminium et les mesures de vitesse de nucléation, de croissance, de contrainte de nucléation permettent l'identification des fonctions φ_1 et φ_0 . Contrairement aux critères cumulatifs simples, l'approche de DAVISON ET STEVENS [35] prédit un taux de croissance de l'endommagement variable. Dans le même esprit, on peut citer les travaux de SUFFIS [126].

Critères liés à la mécanique des milieux endommageables

Ce sont les approches basées sur la cinétique de croissance des vides incluant ou non les effets micro-inertiels, visqueux, élastiques, etc. On a déjà eu l'occasion d'aborder ce sujet d'une manière générale lorsqu'on évoquait dans le chapitre 3 les modèles d'endommagement ductile et de manière plus précise lorsqu'on traitait de l'expansion des vides dans les deux premiers chapitres. Il faut souligner une nouvelle fois que la triaxialité des contraintes est particulièrement élevée dans l'essai d'impact de plaques. Par conséquent, les modèles de croissance de cavités utilisés reposent essentiellement sur les développements menés en considérant l'expansion d'un vide sphérique sous chargement hydrostatique.

On se propose ici de simplement citer quelques travaux, basés sur la croissance de l'endommagement d'un point de vue micromécanique, et appliqués à l'écaillage.

La rupture dans le plan d'écaillage est supposée avoir lieu une fois que le paramètre d'endommagement a atteint une valeur critique. C'est par exemple, et souvent dans la modélisation de la rupture dynamique des matériaux ductiles, une valeur de porosité limite qui contrôle la rupture du matériau. Cette grandeur est en général identifiée à partir d'observations et de mesures de distributions de porosités dans le plan d'écaillage.

Des approches basées sur ce type de critère développées dans le but de modéliser les phénomènes dynamiques, et en particulier l'écaillage, sont proposées entre autres dans les travaux de JOHNSON [73], de EFTIS ET AL. [45], de EFTIS ET NEMES [43], ou encore de WANG ET AL. [144].

Critères basés sur la micro-statistique

Ce type d'approche est fondé sur l'observation de la microstructure du matériau après rupture. Les échantillons sont soigneusement étudiés et les vides ou fissures sont comptés individuellement afin de construire la fonction de distribution de défauts. Nous avons proposé un aperçu de ces modèles dans le chapitre précédent, et le lecteur est invité à consulter le travail de CURRAN ET AL. [30] qui présente les détails de l'approche micro-statistique. Citons pour une application de ces développements les travaux de BARBEE ET AL. [5], SEAMAN ET AL. [119], SHOCKEY ET AL. [121].

4.5 Conclusion

Concernant l'aspect théorique de la propagation des ondes dans les matériaux solides et du problème d'impact, les éléments essentiels à retenir sont l'état de déformation uniaxiale à l'intérieur de la cible et la triaxialité élevée, notamment dans le plan d'écaillage, où le milieu est soumis à une très forte tension hydrostatique.

On prendra également note des précautions à prendre quant à l'interprétation d'une mesure de la vitesse en face arrière et au lien avec la pression à l'intérieur du matériau. En effet, on a vu que le comportement élastoplastique complique déjà considérablement l'évolution du profil de pression. L'endommagement, dont les effets ne sont pas pris en compte dans le calcul de la tension d'écaillage (à partir de la vitesse en surface libre), ajoute à l'incertitude d'une éventuelle interprétation. L'étape de validation d'un modèle d'endommagement dynamique appliqué à l'écaillage passe nécessairement par la confrontation au profil de vitesse en face arrière.

Nous avons également évoqué différents critères de rupture, passifs ou actifs, existants dans la littérature. Dans notre approche la rupture sera supposée effective une fois que la fraction volumique de vide aura atteint une valeur critique.

Chapitre 5

Bilan

Cette étude bibliographique s'est voulue assez large de manière à présenter des modèles et outils que je n'ai pas repris dans mon doctorat. Le cheminement de la démarche que nous allons présenter dans les prochains chapitres s'appuie sur des éléments présentés, à savoir :

l'endommagement dynamique ductile

nucléation

L'étape de nucléation sera représentée par une approche statistique. On a pu s'apercevoir qu'il s'agit d'un élément indispensable à la description de l'endommagement. L'étape d'amorçage de cavités est supposée contrôlée par la pression. Lorsque celle-ci atteint une valeur critique, un vide peut alors apparaître spontanément et commencer à croître. Cette valeur critique est donnée par la pression de cavitation p_c . Le couplage entre la statistique et p_c nous amène, comme dans les travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98], à considérer une distribution de pressions de nucléation dans un matériau supposé initialement sain.

croissance

La croissance de cavités est le cœur du problème. Le modèle que l'on propose tient compte des effets micro-inertiels et est valable pour des chargements fortement triaxiaux, en raison des hypothèses sur le changement de forme des cavités. Dans le cas hydrostatique (chargement en pression), on a vu que l'ensemble des analyses conduisaient à la même forme de la contribution inertielle.

La description de l'étape de croissance s'appuie sur l'analyse de MOLINARI ET MERCIER [97], développée dans le cadre plus général de chargements quelconques. Le critère de Gurson-Tvergaard [58, 133] étendu à un comportement viscoplastique (ou avec écrouissage), servira au calcul de la contribution quasi-statique. L'endommagement dans le matériau sera décrit

par une distribution de tailles de vides. Elle sera héritée de la distribution des pressions de nucléation lorsque l'on s'intéressera aux phases nucléation + croissance, ou de la distribution des tailles initiales de vides dans un matériau poreux lorsqu'on se limite à la phase de croissance.

coalescence

Le stade ultime du processus de rupture ductile est très compliqué à modéliser, et les instabilités de type bandes de cisaillement, ou de localisation, ne sont pas prises en compte dans l'analyse que l'on développera. La coalescence est supposée se produire par empiètement géométrique (rencontre des parois de deux cavités voisines) et le critère retenu pour définir l'apparition de la rupture est une valeur critique de porosité.

La rupture ductile que nous cherchons à modéliser est donc essentiellement gouvernée par les deux premières étapes du processus.

l'application à l'impact de plaques

L'impact de plaques génère un état de contrainte fortement triaxial dans la cible et permet donc de valider l'approche hydrostatique de la modélisation du phénomène ainsi que l'hypothèse de conservation de l'aspect sphérique des cavités.

L'application de notre analyse à la situation de l'impact s'appuiera dans un premier temps sur l'histoire du chargement dans le plan d'écaillage qui sera, en première approximation, représentée par une rampe linéaire de contrainte.

L'approche que nous aurons développée servira finalement à la construction d'un modèle élasto-viscoplastique avec endommagement qui sera implanté dans un code de calculs par éléments finis (ABAQUS/EXPLICIT). Les confrontations des profils de vitesse de surface libre obtenus par simulation numérique à ceux relevés expérimentalement nous permettront de valider notre modèle.

Deuxième partie

ANALYSE ET DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DE CROISSANCE DE VIDES

Introduction

Dans cette partie, nous analysons l'alternative au modèle de sphère creuse unique comme représentation d'un VER de matériaux poreux. Il est expérimentalement observé, dans le cas d'impact de plaques par exemple, une distribution de cavités de tailles différentes dans l'épaisseur de l'échantillon impacté, voir figure 3.1 page 55. La description de cette caractéristique de l'endommagement nécessite l'adoption d'une approche statistique afin de représenter la population de cavités présentes dans le matériau.

L'étape de nucléation, supposée découplée de la croissance, n'est pas prise en compte dans cette partie et le matériau étudié est présumé contenir initialement des populations de cavités. La distribution des vides dans la matrice est représentée par une description statistique en taille de vides à l'instant $t = 0$. Dans l'approche proposée, chaque vide est contenu dans une matrice viscoplastique de dimension finie. Le VER soumis à l'étude est défini par un ensemble de cellules sphériques élémentaires, chacune identifiée par un rayon intérieur et un rayon extérieur. Le comportement d'un vide est déterminé par l'analyse du schéma classique de la sphère creuse.

Deux principaux schémas d'homogénéisation sont évoqués afin de relier les grandeurs macroscopiques (définies à la frontière du VER) aux grandeurs locales (rencontrées à la frontière extérieure de chaque cellule élémentaire). Dans l'approche de type « Reuss », il est supposé que tous les motifs sont soumis au même chargement en contrainte coïncidant avec celui appliqué à la frontière du VER. Dans une seconde approche, qualifiée de type « Voigt », l'effort appliqué va au contraire fluctuer d'une sphère creuse à l'autre, tandis que la vitesse de déformation macroscopique sera appliquée à l'ensemble des motifs.

Dans le premier chapitre nous présentons la description plus en détail du comportement d'une cellule unitaire. La loi d'évolution de la sphère creuse (matrice finie contenant un vide) viscoplastique est basée sur l'approche de MOLINARI ET MERCIER [97] développée pour les matériaux poreux. Les deux principales méthodes d'homogénéisation sont également évoquées et les relations liant les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques sont explicitées.

Dans le deuxième chapitre, les deux approches sont utilisées pour prédire l'expansion dy-

namique de deux types de matériaux : une première catégorie de matériaux est caractérisée par une distribution de cellules unitaires de même rayon extérieur initial. La deuxième famille est identifiée par une distribution homothétique de motifs qui présentent initialement la même porosité locale. Les limitations du modèle de sphère creuse unique seront ainsi mises en évidence. Les aspects statistiques apparaîtront indispensables à la caractérisation de l'endommagement ductile dynamique.

Chapitre 1

Description du modèle

Le matériau est supposé contenir une population de cavités sphériques toutes noyées dans une matrice finie viscoplastique. Le comportement macroscopique du VER est déterminé dès lors que l'évolution de chaque cellule élémentaire (basée sur l'approche de la sphère creuse) est connue.

Le comportement d'une cellule unitaire est précisé dans un premier temps. L'évolution du vide est gouvernée par la loi constitutive développée par MOLINARI ET MERCIER [97] pour les matériaux poreux. L'approche que les auteurs proposent est basée sur une approche d'homogénéisation en dynamique (voir la partie bibliographie de ce manuscrit, section 2.2.2). Nous précisons ensuite le comportement du VER. Les approches de type « Reuss » et de type « Voigt » conduisent à un comportement macroscopique sensiblement différent.

1.1 Cellule unitaire

loi constitutive

le comportement d'une cellule unitaire est tout d'abord examiné. Considérons une sphère creuse soumise à un état de contraintes ou de vitesses de déformation macroscopiques, représentés respectivement par les tenseurs $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$, (voir figure 1.1). a et b désignent les rayons intérieur et extérieur, et f est la porosité définie par :

$$f = \frac{a^3}{b^3} . \quad (1.1)$$

Dans notre analyse, identique à celle déjà obtenue par JOHNSON [73], EFTIS ET NEMES [42], le matériau est supposé incompressible et les déformations élastiques ne sont pas prises en compte. L'hypothèse d'incompressibilité se traduit par la conservation du volume de matrice $V_m = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)$ et conduit à :

$$b^3 - a^3 = b_0^3 - a_0^3 = C^{\text{te}} , \quad (1.2)$$

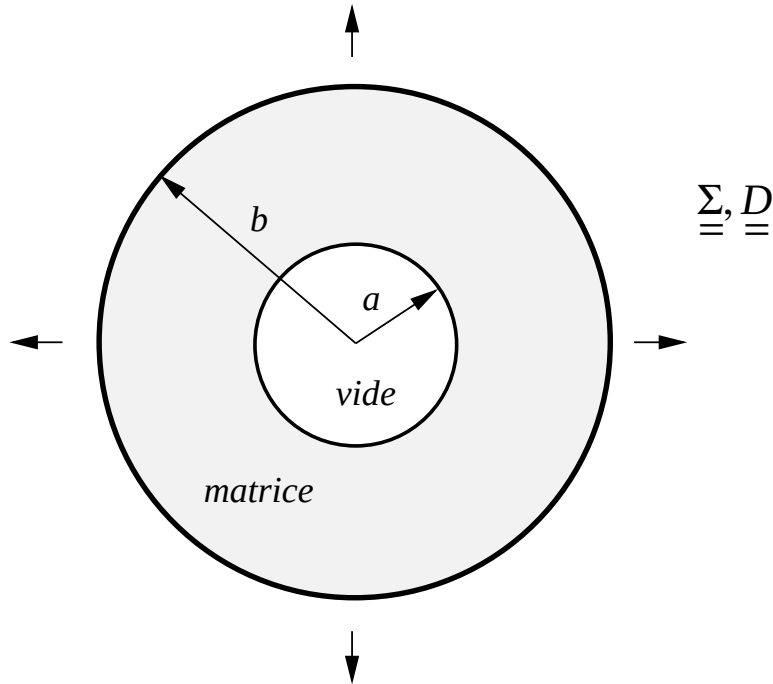


FIG. 1.1 – Schéma de la sphère creuse utilisé pour l'étude du comportement dynamique d'une cellule élémentaire. $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$ désignent respectivement les tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation agissant à la frontière extérieure du motif.

a_0 et b_0 désignant respectivement les rayons initiaux intérieur et extérieur de la sphère creuse. Par dérivation par rapport au temps de l'équation (1.2), l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice s'écrit aussi :

$$b^2 \dot{b} = a^2 \dot{a} \Rightarrow \frac{\dot{b}}{b} = f \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.3)$$

En dérivant par rapport au temps la relation (1.1) et par combinaison avec (1.3), il est obtenu la condition de conservation du volume écrite sous sa forme la plus usuelle :

$$\dot{f} = 3(1 - f)D_m, \quad (1.4)$$

où $D_m = \frac{1}{3} (\text{tr} \underline{\underline{D}}) = \dot{b}/b$ est la partie sphérique du tenseur des vitesses de déformation plastique.

Par le principe des puissances virtuelles et en utilisant un champ de vitesses CA de type de celui utilisé par GURSON [58], MOLINARI ET MERCIER [97] obtiennent une relation explicite

entre les grandeurs macroscopiques $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{D}}$ (voir pour les détails la section 2.2.2, page 46) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} = & \underline{\underline{\Sigma}}^{static} + \rho a^2 \left[\frac{1}{5}(f^{-2/3} - f) \left(\underline{\underline{\dot{D}}} + \underline{\underline{C}} - \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{C}})\underline{\underline{I}} \right) + (f^{-2/3} - 1)D_m \underline{\underline{D}}' \right. \\ & + \frac{1}{6}(f^{-2/3} - 1)(\underline{\underline{D}}' : \underline{\underline{D}}')\underline{\underline{I}} - (f^{-2/3} - f^{-1})\dot{D}_m \underline{\underline{I}} \\ & \left. + \left(3f^{-1} - \frac{5}{2}f^{-2/3} - \frac{1}{2}f^{-2} \right) D_m^2 \underline{\underline{I}} \right], \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur identité du second ordre, $\underline{\underline{D}}'$ le déviateur de $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{D}}' \cdot \underline{\underline{D}}'$. Dans (1.5), $\underline{\underline{\Sigma}}^{static}$ est un tenseur de contraintes d'origine viscoplastique obtenu à partir d'un potentiel quasi-statique. Le terme multiplié par ρ après $\underline{\underline{\Sigma}}^{static}$ représente les effets de micro-inertie qui vont stabiliser la croissance de la cavité. Ces effets sont d'autant plus marqués que la masse volumique ρ , ou le carré du rayon a , est importante. Soulignons que le vide est initialement sphérique et qu'il le reste durant tout le chargement, ceci en raison du choix de la forme du champ de vitesses. Comme le précisent MOLINARI ET MERCIER [97], l'expression (1.5) est alors valable pour des chargements à haute triaxialité (voir également HUANG ET AL. [70], BUDIANSKY ET AL. [17]).

Dans le cas particulier d'un chargement purement hydrostatique, les parties déviatoriques s'annulent et les vides conservent leur forme sphérique. En notant p et p^{visco} les parties sphériques de $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^{static}$ respectivement, l'équation (1.5) devient :

$$p = p^{visco} + \rho a^2 \left[\dot{D}_m (f^{-1} - f^{-2/3}) + D_m^2 \left(3f^{-1} - \frac{5}{2}f^{-2/3} - \frac{1}{2}f^{-2} \right) \right]. \quad (1.6)$$

En utilisant la relation $D_m = f\dot{a}/a$ (issue de l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice), l'équation (1.6) s'écrit aussi :

$$p = p^{visco} + \rho \left[a\ddot{a} \left(1 - f^{1/3} \right) + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \left(1 - \frac{4}{3}f^{1/3} + \frac{1}{3}f^{4/3} \right) \right]. \quad (1.7)$$

Remarquons que l'équation (1.7) ainsi obtenue correspond au résultat de CARROLL ET HOLT [21] (équation (2.38) page 39) avec une expression différente de la contribution quasi-statique.

Contribution quasi-statique

Afin d'évaluer p^{visco} , nous considérons l'expansion du vide en régime quasi-statique. La loi constitutive du matériau poreux est donnée par l'équation (1.5) avec $\rho = 0$. Dans ce paragraphe Σ_m , Σ_{eq} et $\underline{\underline{\Sigma}}$ dénotent les grandeurs macroscopiques faisant référence à la contribution statique viscoplastique.

Le tenseur macroscopique des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ peut être lié à $\underline{\underline{D}}$ par l'intermédiaire d'un potentiel. Par exemple, MOLINARI ET MERCIER [97] ont utilisé un potentiel phénoménologique développé pour les matériaux poreux par OLEVSKY ET SKOROHOD [103] (voir équation (2.68) page 47). Il est proposé dans ce travail, en raison de son usage très courant, d'utiliser

la surface de charge de GURSON [58] modifiée par TVERGAARD [133]. Son expression dans le cas d'un comportement viscoplastique est donnée par (voir le paragraphe 1.2.4 de la partie bibliographie, page 25) :

$$\Omega = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3q_2}{2} \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - [1 + (q_1 f)^2] = 0, \quad (1.8)$$

où $\bar{\sigma}$ est une contrainte moyenne dans la matrice. L'équivalence du travail plastique peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = (1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}, \quad (1.9)$$

$\bar{\varepsilon}$ désignant une déformation moyenne liée à $\bar{\sigma}$ via la loi de comportement de la matrice.

La matrice est supposée rigide viscoplastique et son comportement est décrit par une loi puissance de type Norton Hoff (NORTON [101], HOFF [65]) :

$$\sigma_{eq} = K \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m, \quad (1.10)$$

où $K, \dot{\varepsilon}_0$ sont des constantes du matériau et $\sigma_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq}$ désignent la contrainte microscopique équivalente et la vitesse de déformation microscopique équivalente. La formulation reliant les grandeurs moyennes $\bar{\sigma}$ et $\dot{\bar{\varepsilon}}$ s'obtient en remplaçant le couple $(\sigma_{eq}, \dot{\varepsilon}_{eq})$ par $(\bar{\sigma}, \dot{\bar{\varepsilon}})$ dans l'équation (1.10) :

$$\bar{\sigma} = K \left(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m. \quad (1.11)$$

Soulignons que la loi de comportement (1.10) permet d'obtenir une forme explicite de la contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ en fonction de la contrainte équivalente σ_{eq} . Par définition, l'équivalence du travail plastique s'exprime par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq} dV \\ &= (1 - f) \left(\frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma_{eq} \dot{\varepsilon}_{eq} dV_m \right) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} (1 - f) \left(\frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma_{eq}^{1+1/m} dV_m \right) \frac{\dot{\varepsilon}_0}{K^{1/m}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où V désigne le volume total (vide+matrice) de la sphère creuse, tandis que $V_m = (1 - f)V$ représente le volume de matrice. En posant (voir DUVA [37]) :

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma_{eq}^{1+1/m} dV_m \right)^{\frac{1}{1+1/m}}, \quad (1.13)$$

et en utilisant la relation (1.11), on retrouve l'expression de l'équivalence du travail plastique donnée par la relation (1.9).

Cela dit, une forme explicite des quantités moyennes n'est toutefois pas nécessaire, les définitions de $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ données par l'équation (1.9) et par une loi de comportement plus générale $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T)$ sont suffisantes.

Chargement hydrostatique Dans le cas d'un chargement hydrostatique, le potentiel de Gurson-Tvergaard (1.8) avec $\Sigma_{eq} = 0$ mène à :

$$\Omega = 2q_1 f \cosh \left(\frac{3q_2 \Sigma_m}{2 \bar{\sigma}} \right) - \left[1 + (q_1 f)^2 \right] = 0, \quad (1.14)$$

et à partir de (1.14), la contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ s'exprime comme :

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{2} q_2 |\Sigma_m| \frac{1}{\cosh^{-1} \left[\frac{1 + (q_1 f)^2}{2q_1 f} \right]}. \quad (1.15)$$

La fonction $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ est définie sur $[1; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. En général, $q_1 f < 1$ et dans ce cas, $\cosh^{-1} \left[\frac{1 + (q_1 f)^2}{2q_1 f} \right] = \ln[1/(q_1 f)]$ si bien que la contrainte moyenne se trouve donnée par :

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{2} q_2 |\Sigma_m| \frac{1}{\ln[1/(q_1 f)]}. \quad (1.16)$$

L'équivalence du travail plastique (1.9) s'écrit dans le cas hydrostatique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = 3|D_m| |\Sigma_m| = (1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}. \quad (1.17)$$

En combinant les équations (1.11), (1.16), (1.17), et en notant $p^{visco} = \Sigma_m$ la partie hydrostatique de $\underline{\underline{\Sigma}}$, l'expression de la contribution quasi-statique du tenseur des contraintes macroscopiques devient :

$$p^{visco} = -\zeta \frac{K}{3} \left(\frac{|D_m|}{1 - f} \right)^m \left\{ \frac{2 \ln[1/(q_1 f)]}{q_2} \right\}^{m+1}, \quad q_1 f < 1, \quad (1.18)$$

où $\zeta = -D_m/|D_m|$ vaut -1 pour un chargement en tension hydrostatique. Dès que la porosité locale est telle que $q_1 f \geq 1$, la résistance statique de la matrice p^{visco} est prise égale à 0. Il est à noter que dans le cas d'un matériau parfaitement plastique ($m = 0$) et en prenant $q_1 = q_2 = 1$ comme dans le potentiel original développé par GURSON [58], l'expression suivante pour p^{visco} est obtenue :

$$p^{visco} = -\frac{2}{3} \zeta K \ln(1/f), \quad (1.19)$$

résultat identique à celui de CARROLL ET HOLT [21] (équation (2.38), page 39).

1.2 Volume Élémentaire Représentatif - Population de sous-volumes

A l'échelle locale, à l'intérieur du domaine matériel, chaque cavité est supposée noyée dans une matrice sphérique viscoplastique finie. A tout instant, le comportement de chaque cellule élémentaire de rayons intérieur a et extérieur b (de porosité $f = a^3/b^3$) est établi par

l'approche proposée au paragraphe précédent. Le chargement appliqué est supposé tel que $\zeta = -1$ et la recherche de l'évolution du vide se résume à la résolution du système d'équations suivant :

$$p = p^{visco} + \rho a^2 \left[\dot{D}_m \left(f^{-1} - f^{-2/3} \right) + D_m^2 \left(3f^{-1} - \frac{5}{2}f^{-2/3} - \frac{1}{2}f^{-2} \right) \right], \quad (1.20a)$$

$$p^{visco} = \begin{cases} \frac{K}{3} \left(\frac{D_m}{1-f} \right)^m \left\{ \frac{2 \ln [1/(q_1 f)]}{q_2} \right\}^{m+1} & q_1 f < 1, \\ 0 & q_1 f \geq 1, \end{cases} \quad (1.20b)$$

$$\text{avec à } t = 0, \quad a = a_0 \text{ et } \dot{a} = 0, \quad (1.20c)$$

$$\text{où la porosité } f \text{ est donnée par : } f = \frac{a^3}{a^3 + b_0^3 - a_0^3}, \quad (1.20d)$$

$$\text{et où l'incompressibilité de la matrice s'écrit : } \dot{f} = 3(1-f)D_m = 3f(1-f)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.20e)$$

a_0 et b_0 désignant respectivement les rayons initiaux intérieur et extérieur de la sphère creuse considérée.

1.2.1 Moyenne sur le VER

Désignons par $\varphi(\mathbf{x})$ une grandeur locale susceptible de varier à l'intérieur du domaine matériel avec la position spatiale $\mathbf{x}$. Il est alors possible d'évaluer la grandeur macroscopique $\langle \varphi \rangle$ comme la moyenne volumique sur le VER de la quantité locale $\varphi(\mathbf{x})$ à la position $\mathbf{x}$:

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varphi(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}). \quad (1.21)$$

Le comportement du matériaux poreux est déterminé par la connaissance du lien unissant les quantités macroscopiques appliquées à la frontière du VER. Nous proposons une analyse des deux principaux schémas d'homogénéisation permettant de réaliser le passage du comportement local des cellules élémentaires à celui du VER et donc du matériau poreux.

1.2.2 Champ de contrainte uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Reuss »

Supposons tout d'abord, dans une approche qui peut être qualifiée de type « Reuss », que la contrainte macroscopique appliquée sur le VER ne fluctue pas d'une cellule élémentaire à l'autre, si bien que le chargement $p^{app} = \langle p \rangle$ appliqué aux bords du VER coïncide avec celui

appliqué à la frontière extérieure de chaque sphère creuse. Ainsi, $p^{app} = p$ et la loi constitutive du matériau poreux (1.6) ou (1.20a) s'écrit, par passage à la moyenne sur le VER :

$$p = \langle p^{visco} \rangle + \rho \left\langle a^2 \left[\dot{D}_m \left(f^{-1} - f^{-2/3} \right) + D_m^2 \left(3f^{-1} - \frac{5}{2}f^{-2/3} - \frac{1}{2}f^{-2} \right) \right] \right\rangle \quad (1.22)$$

L'approche de type « Reuss » implique que les vides grossissent de manière complètement autonome, indépendamment de l'évolution de cavités voisines. L'interaction entre les sites est cependant prise en compte dans le calcul de grandeurs moyennes comme le suggère la relation (1.21).

1.2.3 Champ de vitesse de déformation uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Voigt »

La vitesse de déformation ne fluctue pas d'un sous-volume à un autre, approche qualifiée de type « Voigt » et le chargement en contraintes résultant aux bords du VER est donné par $\langle p \rangle$. En notant que D_m^{app} et $\dot{D}_m^{app}$, les grandeurs appliquées au bord du VER, sont maintenant identiques à celles mesurées en paroi extérieure de tous les motifs ($D_m^{app} = D_m$ et $\dot{D}_m^{app} = \dot{D}_m$), la loi constitutive du matériaux poreux se trouve donnée par :

$$\langle p \rangle = \langle p^{visco} \rangle + \rho \dot{D}_m \left\langle a^2 \left(f^{-1} - f^{-2/3} \right) \right\rangle + \rho D_m^2 \left\langle a^2 \left(3f^{-1} - \frac{5}{2}f^{-2/3} - \frac{1}{2}f^{-2} \right) \right\rangle . \quad (1.23)$$

A noter que pour chaque configuration, nous supposons que le chargement du VER se fait

en contraintes. Ainsi, dans la première configuration p est appliqué à chaque motif, dans la seconde configuration, p est appliqué et D_m est obtenu de sorte que (1.23) soit vérifiée. En ce sens, les interactions sont plus fortes dans cette configuration.

Chapitre 2

Application aux matériaux poreux

Le matériau considéré contient une population de vides dont la description est donnée par une distribution de tailles initiales de cavités. Nous proposons l'étude du comportement de deux types de matériaux poreux. Il est suggéré en effet, disposant d'une distribution initiale fixée de rayons de vides, de distinguer un matériau pour lequel le rayon extérieur de toutes les sphères creuses est identique (appelé **MATb**, figure 2.1-a) d'un second matériau contenant les mêmes populations de cavités pour lequel la porosité locale est supposée identique pour chaque motif (appelé **MATf**, figure 2.1-b). Ces deux familles de matériau ont en commun la distribution initiale de tailles de vides. Par ailleurs, pour pouvoir comparer les résultats, la porosité globale du VER sera identique pour les deux matériaux **MATb** et **MATf**. Après avoir présenté la distribution choisie ainsi que le schéma de discrétisation adopté, nous proposons l'analyse du comportement dynamique des deux types de matériaux, **MATb**

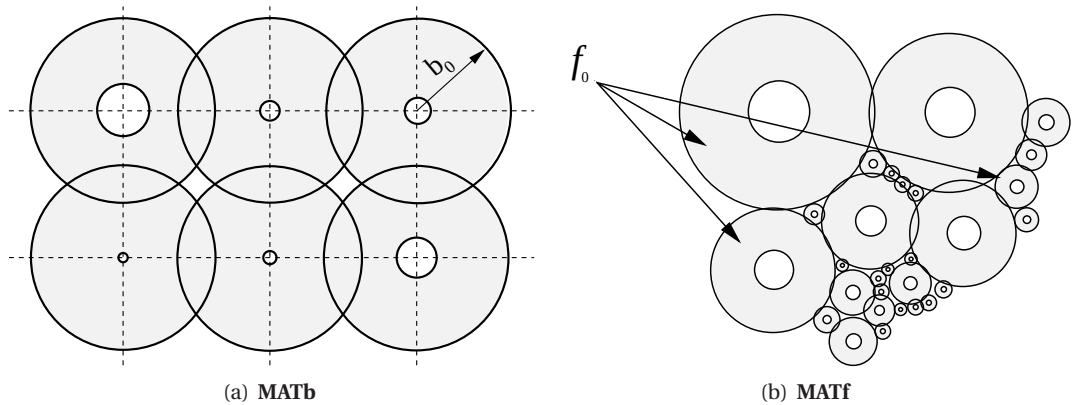


FIG. 2.1 – Configuration initiale de distribution de sphères creuses pour deux types de matériaux. (a) - Dans le matériau **MATb**, les sphères creuses ont un rayon extérieur initial identique noté b_0 . Ce matériau est susceptible de représenter une distribution « homogène » de vides dans le domaine. (b) - Dans le matériau **MATf**, les motifs sont supposés être définis par la même porosité initiale f_0 .

et **MATf**, par les deux approches de type « Reuss » et de type « Voigt », présentées précédemment.

2.1 Description statistique de la population de cavités

Schéma de discrétisation, figure 2.2

La présence des vides dans le matériau est représentée par une distribution statistique de rayons initiaux compris entre une borne inférieure, notée a_{0inf} , et une borne supérieure, notée a_{0sup} . Ces deux bornes sont choisies de manière à ce que la probabilité de trouver un vide en dehors de l'intervalle $[a_{0inf}, a_{0sup}]$ soit négligeable. Pour les besoins de l'analyse, le domaine $[a_{0inf}, a_{0sup}]$ est discrétisé en un nombre impair $I = 2k + 1$ d'intervalles de longueur $L = (a_{0sup} - a_{0inf})/I$. Le i^{eme} intervalle $\text{Int}(i)$ défini par :

$$\text{Int}(i) = [a_{01i}, a_{02i}] \quad a_{01i} = a_{0inf} + L(i - 1) \quad a_{02i} = a_{01i} + L \quad (2.1)$$

est centré sur le rayon initial :

$$a_{0i} = a_{0inf} + L\left(i - \frac{1}{2}\right). \quad (2.2)$$

F_i désigne la famille de sphères creuses dont le rayon de vide initial appartient à l'intervalle $\text{Int}(i)$.

A chaque famille F_i est associée la fréquence d'apparition Pr_i de a_{0i} , qui correspond à la probabilité qu'a une sphère creuse d'appartenir à l'ensemble F_i :

$$Pr_i = Pr(a_{01i}, a_{02i}) = Pr(a_{01i} \leq a_{0i} \leq a_{02i}). \quad (2.3)$$

Le schéma de discrétisation nous permet d'évaluer la grandeur moyenne $\langle \varphi \rangle$ donnée par l'équation (1.21). En effet, $V = \sum_i Pr_i V_i = \sum_i \frac{4}{3} Pr_i \pi b_i^3$ où V_i est le volume de sphère creuse (vide+matrice) des éléments appartenant à la famille F_i , et b_i le rayon extérieur de cette sphère. En supposant que $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_i$ est constant sur V_i , la moyenne volumique $\langle \varphi \rangle$ s'obtient alors par :

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle &= \frac{\sum_{i=1}^I \varphi_i Pr_i V_i}{\sum_{i=1}^I Pr_i V_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I \varphi_i Pr_i b_i^3}{\sum_{i=1}^I Pr_i b_i^3}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Distribution de Gauss

La distribution des rayons initiaux de vides est décrite par une loi de probabilité de Gauss dont l'expression est donnée par :

$$G(a_0) = \frac{1}{\sigma_G \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_0 - \bar{a}_0}{\sigma_G} \right)^2 \right], \quad (2.5)$$

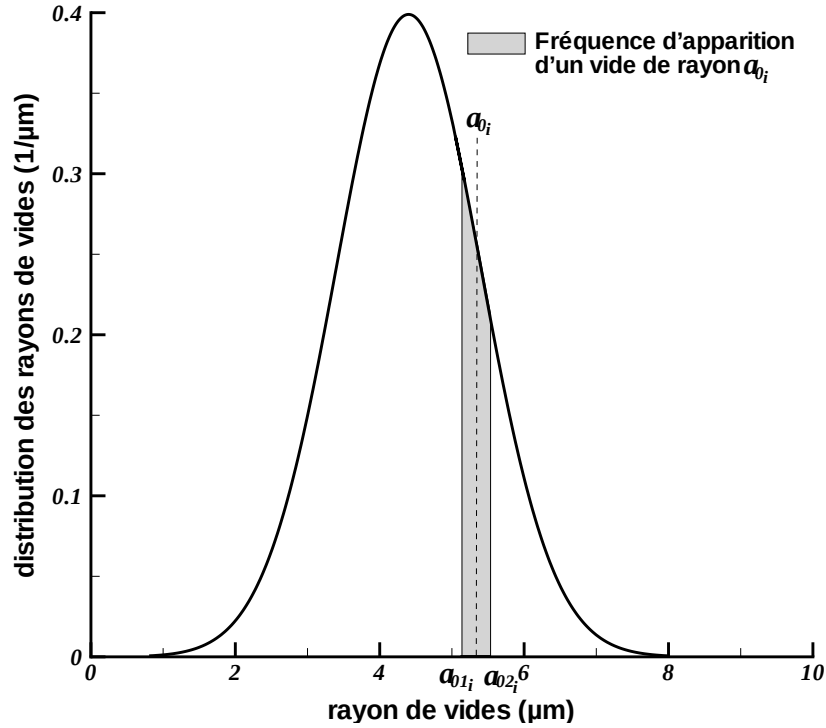


FIG. 2.2 – Distribution de Gauss de tailles initiales de cavités. Les paramètres de la distribution sont donnés dans le tableau 2.1. La fréquence d'apparition d'un motif de rayon initial a_{0i} , représentée par l'aire grisée, est donnée par l'équation (2.6).

où σ_G désigne l'écart-type de la distribution tandis que $\bar{a}_0$ est sa valeur moyenne. D'après le schéma de discrétisation adopté, la probabilité de trouver un vide de rayon initial a_{0i} appartenant à la famille F_i est donnée par :

$$\begin{aligned} Pr_i = Pr(a_{01i}, a_{02i}) &= \int_{a_{01i}}^{a_{02i}} G(a_{0i}) da_{0i} , \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{a_{02i} - \bar{a}_0}{\sigma_G \sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{a_{01i} - \bar{a}_0}{\sigma_G \sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

où $\operatorname{erf}(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\theta^2) d\theta$ est la fonction erreur. Le résultat (2.6) est obtenu en faisant le changement de variable $\theta = \frac{a_{0i} - \bar{a}_0}{\sigma_G \sqrt{2}}$ afin de se ramener à une gaussienne centrée réduite.

Le tableau 2.1 résume les paramètres du matériau ($K, m, \dot{\epsilon}_0$), de la distribution ($\sigma_G, \bar{a}_0$) et de sa discrétisation (a_{0inf}, a_{0sup}, I). Précisons que dans toute cette partie, nous ne nous sommes pas attachés à analyser l'influence de ces paramètres sur l'évolution de l'endommagement et les valeurs se trouvant dans le tableau 2.1 restent inchangées. Il en est de même pour les constantes intervenant dans la loi de comportement viscoplastique de la matrice

(équation (1.10)) également reportés dans le tableau 2.1.

σ_G (μm)	$\bar{a}_0$ (μm)	a_{0inf} (μm)	a_{0sup} (μm)	I (SU)	f^s (SU)	$\dot{\varepsilon}_0$ (s^{-1})	K (MPa)	m (SU)
1	4.4	0.8	8	51	0.1	1	300	0.02

TAB. 2.1 – Paramètres de distribution et de discrétisation utilisés dans toute la partie II. Les constantes K , m , et $\dot{\varepsilon}_0$ sont liés au comportement viscoplastique de la matrice donné par la loi puissance (1.10). Le matériau poreux est soumis à un chargement hydrostatique et la rupture est supposée avoir lieu lorsque la porosité globale atteint la valeur critique f^s

2.2 Chargement et critère de rupture

Le matériau est soumis à une rampe linéaire de pression :

$$p = \dot{p}t, \quad (2.7)$$

avec $\dot{p}$ la vitesse de pression supposée constante durant le chargement.

Le critère de porosité critique est adopté pour caractériser la ruine du matériau. Lorsque $f_{tot} = f^s$ la rupture se produit. La valeur $f^s = 0.1$ est adoptée tout au long de cette partie. Notons que la porosité totale f_{tot} obtenue par moyenne volumique sur tous les motifs s'exprime à tout instant, en considérant l'approche discrétisée (équation (2.4)), par :

$$\begin{aligned} f_{tot} &= \frac{\sum_{i=1}^I f_i Pr_i b_i^3}{\sum_{i=1}^I Pr_i b_i^3} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I Pr_i a_i^3}{\sum_{i=1}^I Pr_i b_i^3} \\ &= \frac{a_{eq}^3}{b_{eq}^3}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où a_{eq}^3 et b_{eq}^3 sont des volumes équivalents exprimés par :

$$a_{eq}^3 = \langle a^3 \rangle \quad b_{eq}^3 = \langle b^3 \rangle, \quad (2.9)$$

et a_{eq} est une mesure de taille moyenne de vides présents dans le matériau.

Dans la suite, nous proposons d'analyser les évolutions des deux familles identifiées l'une par le rayon initial le plus petit, noté a_{min0} et l'autre par le plus grand, noté a_{max0} . Ces deux familles sont respectivement désignées par F_{min} et F_{max} . On notera V_{min} pour le vide de rayon minimum, V_{max} pour le vide de rayon maximum et enfin a_{min} et a_{max} les rayons courants des vides V_{min} et V_{max} .

2.3 Champ de contrainte uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Reuss »

Chaque élément appartenant à la famille F_i va évoluer selon la loi constitutive (1.20a) :

$$p = p_i^{visco} + \rho a_i^2 \left[\dot{D}_{m_i} \left(f_i^{-1} - f_i^{-2/3} \right) + D_{m_i}^2 \left(3f_i^{-1} - \frac{5}{2}f_i^{-2/3} - \frac{1}{2}f_i^{-2} \right) \right], \quad (2.10)$$

couplée à l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice conduisant à la loi d'évolution de la porosité dans les motifs :

$$\dot{f}_i = 3(1 - f_i)D_{m_i}. \quad (2.11)$$

La partie inertielle joue un rôle prépondérant dans la croissance de la cavité et va réduire sa vitesse d'expansion. Cet effet stabilisant est d'autant plus important que le rayon du vide est grand. Il faut remarquer cependant que la partie viscoplastique p^{visco} a également une influence sur la croissance du vide, notamment durant les premiers temps, ORTIZ ET MOLINARI [104]. Son amplitude dépend des paramètres du comportement viscoplastique de la matrice mais aussi de la porosité initiale ; elle diminue lorsque la porosité initiale du matériau augmente, voir équation (1.18).

2.3.1 Matériau à distribution spatiale homogène de vides : MATb

Considérons dans un premier temps le matériau **MATb** (figure 2.1-a) et fixons le rayon extérieur initial $b_0 = 400\mu m$ pour toutes les familles. Les porosités locales vont varier de 10^{-8} pour la famille F_{min} à $7.8 \cdot 10^{-6}$ pour la famille F_{max} , la porosité initiale moyenne se trouvant égale à $f_0 = 1.5 \cdot 10^{-6}$. La masse volumique du matériau est $\rho = 2700 kg/m^3$ et la vitesse de chargement est $\dot{p} = 10 GPa/\mu s$.

La figure 2.3 présente les évolutions des vides V_{min} (trait fin) et V_{max} (trait épais) ainsi que l'expansion du vide de rayon initial équivalent $(a_{0_{eq}} = \langle a_0^3 \rangle^{1/3} = 4.62\mu m)$ correspondant au modèle classique de sphère creuse unique (trait discontinu). Tout d'abord, il est observé que V_{min} commence à croître après V_{max} , ceci s'explique par la valeur de p^{visco} , pression seuil inférieure pour le vide V_{max} (la sensibilité à la vitesse de déformation est suffisamment faible pour ne tenir compte que du terme en $\ln(1/f)$ dans l'équation (1.18)). D'autre part, V_{min} tend à rattraper V_{max} à la fin de la déformation. Les effets de la micro-inertie ralentissent plus la population des grosses cavités. L'inertie tend à rendre la population de vides plus homogène. En effet, le rapport des rayons a_{max}/a_{min} , qui peut être une mesure de l'hétérogénéité de l'endommagement au sein du matériau, passe d'une valeur initiale de 10 à 1.7 à la fin du test.

Pour visualiser l'effet de l'inertie sur l'homogénéité de l'endommagement, la vitesse de chargement $\dot{p}$ est multipliée par 100, voir figure 2.4. La différence de rayons entre les deux cavités V_{min} et V_{max} s'estompe rapidement. Le rapport a_{max}/a_{min} atteint la valeur 1 à la fin

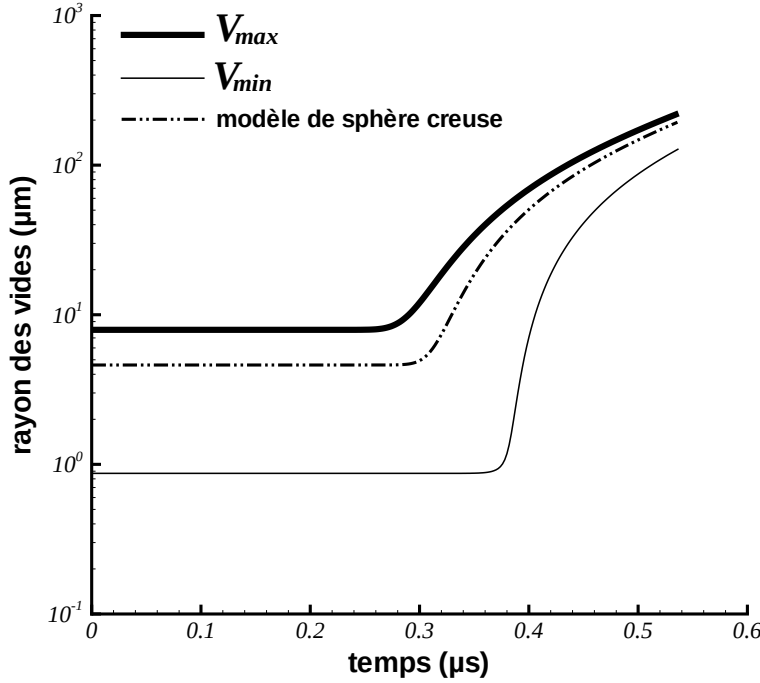


FIG. 2.3 – Evolution des rayons a_{min} (trait fin), a_{max} (trait épais), et a_{eq} (trait discontinu) pour le matériau **MATb** soumis à un chargement en expansion. Les paramètres de la distribution de vides initiale ainsi que ceux de la loi de comportement viscoplastique de la matrice sont reportés dans le tableau 2.1. Le rayon initial de matrice entourant chaque cavité est de $400\mu m$. La porosité globale marquant la fin du test est fixée à 0.1. La masse volumique du matériau est $\rho = 2700 kg/m^3$ et la vitesse de chargement est de $10 GPa/\mu s$. Le rapport entre les rayons a_{max}/a_{min} passent d'une valeur initiale d'environ 10 à 1.7, voir tableau 2.2.

de la déformation. Une augmentation de la vitesse de chargement conduit ainsi à des tailles de cavités plus homogènes autour d'une valeur uniforme a_{unif}^s exprimée par :

$$a_{unif}^s = b_0 (1 - f_0)^{1/3} \left(\frac{f^s}{1 - f^s} \right)^{1/3} = 192 \mu m. \quad (2.12)$$

Cette valeur de a_{unif}^s correspond à la taille finale des vides (pour $f^s = 0.1$) lorsque tous sont supposés avoir le même rayon courant.

L'effet de l'inertie peut être aussi quantifié en faisant varier la valeur de la masse volumique. La figure 2.5 présente les évolutions des rayons de vides lorsque la masse volumique ρ augmente de $2700 kg/m^3$ à $7800 kg/m^3$. La vitesse de chargement vaut $\dot{p} = 10 GPa/\mu s$. Les effets d'inertie sont alors amplifiés (voir équation (2.10)) et la croissance des cavités est ralentie (le temps à rupture passe de $0.54 \mu s$ à $0.66 \mu s$). Le rapport a_{max}/a_{min} passe de 1.72 pour $\rho = 2700 kg/m^3$ à 1.35 pour $\rho = 7800 kg/m^3$, témoignant d'une plus grande homogénéité.

Il faut nuancer les deux manières évoquées d'accentuer la contribution inertielle. Le ré-

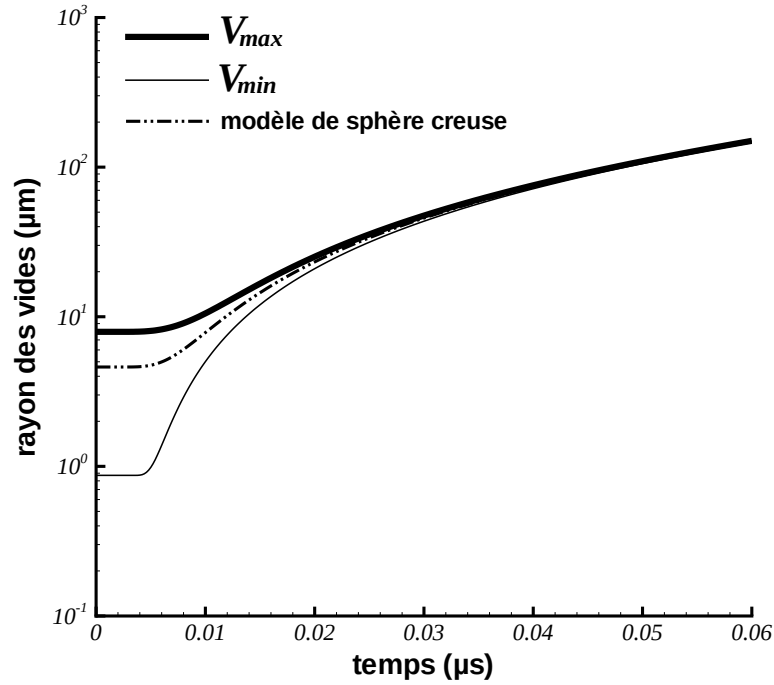


FIG. 2.4 – Evolution des rayons a_{min} (trait fin), a_{max} (trait épais), et a_{eq} (trait discontinu) pour un matériau **MATb** soumis à un chargement en expansion. Les paramètres du matériau sont identiques à ceux de la figure 2.3 mais la vitesse de chargement $\dot{p}$ est multipliée par 100. On constate une plus grande homogénéité de tailles de vides en mesurant le rapport a_{max}/a_{min} qui cette fois est pratiquement égal à 1 à la fin du test, voir tableau 2.2.

sultat d'un accroissement de $\dot{p}$ ou ρ mène effectivement dans les deux cas à une plus grande homogénéité des tailles de vides. Augmenter $\dot{p}$ conduit à réduire l'intervalle de temps entre le départ de V_{min} et celui V_{max} permettant ainsi aux cavités initialement plus petites de rattraper les plus grosses.

Soulignons qu'une augmentation du rayon extérieur b_0 des sphères creuses mène aussi, par l'ajout de matière autour des vides, à l'augmentation des effets micro-inertiels. Toutefois, la conséquence immédiate est la diminution de la porosité initiale et donc l'augmentation du niveau de la contrainte seuil p^{visco} (voir équation (1.20b)). Cela peut s'accompagner éventuellement, dans le cas où le chargement appliqué est inférieur à p^{visco} , à un possible « ancrage » des petites cavités.

2.3.2 Matériau à distribution homothétique de vides : MATf

Considérons à présent le matériau **MATf** (figure 2.1-b) avec la porosité locale $f_0 = 1.5 \cdot 10^{-6}$ identique à tous les sous-volumes. La valeur de f_0 fait varier le rayon extérieur des sphères

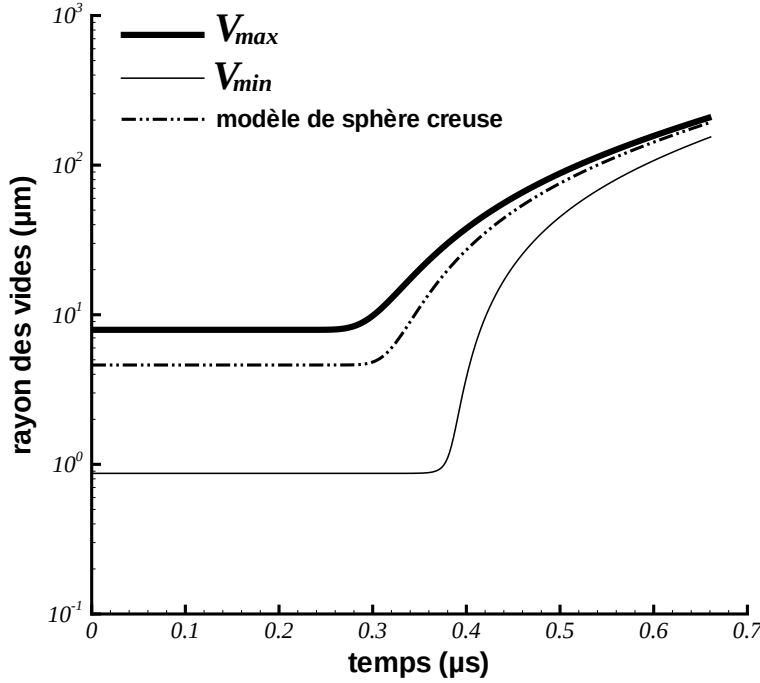


FIG. 2.5 – Evolution des rayons a_{min} (trait fin), a_{max} (trait épais), et a_{eq} (trait discontinu) pour le matériau **MATb** soumis à un chargement en expansion. Les paramètres du matériau sont identiques à ceux de la figure 2.3 mais la masse volumique du matériau est de 7800 kg/m^3 . A la fin du test, le rapport $a_{max}/a_{min} \simeq 1.35$ témoignant d'une plus grande homogénéité en raison d'une augmentation des effets d'inertie, voir tableau 2.2.

masse vo- luminique $\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	vitesse de pression $\dot{p} \text{ (GPa/}\mu\text{s)}$	rayon final $a_{min} \text{ (}\mu\text{m)}$	rayon final $a_{max} \text{ (}\mu\text{m)}$	porosité finale de $V_{min} \text{ (su)}$	porosité finale de $V_{max} \text{ (su)}$	rapport des rayons $a_{max}/a_{min} \text{ (su)}$
2700	10	128	222	0.032	0.145	1.72
2700	1000	190	194	0.097	0.103	1.02
7800	10	155	210	0.055	0.126	1.35

TAB. 2.2 – Résultats obtenus lorsque le matériau **MATb** avec les paramètres reportés dans le tableau 2.1, est soumis à des vitesses de pression $\dot{p} = 10 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ et $\dot{p} = 1000 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ (voir figures 2.3, 2.4). On y reporte également le résultat du test présenté sur la figure 2.5, où la masse volumique du matériau passe à $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ pour lequel la vitesse de chargement est $\dot{p} = 10 \text{ GPa}/\mu\text{s}$.

creuses de $b_0 \simeq 75 \mu\text{m}$ pour les éléments appartenant à F_{min} , à $b_0 \simeq 687 \mu\text{m}$ pour ceux appartenant à F_{max} . Le rayon équivalent obtenu par moyenne volumique (équation (2.9)) est donné par $b_{0_{eq}} = \langle b_0^3 \rangle^{1/3} = 400 \mu\text{m}$, valeur identique au cas **MATb** déjà étudié.

La figure 2.6 présente les évolutions des cavités appartenant aux familles F_{min} et F_{max} ,

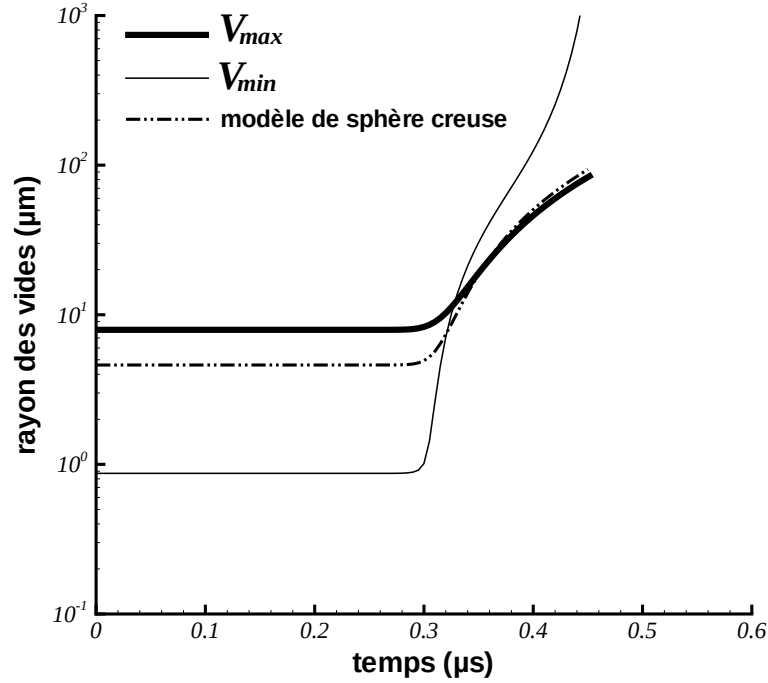


FIG. 2.6 – Evolution des rayons a_{min} (trait fin), a_{max} (trait épais), et a_{eq} (trait discontinu) pour le matériau **MATf** soumis à un chargement en expansion. Les paramètres de la distribution initiale de vides ainsi que les constantes intervenant dans la loi de comportement viscoplastique de la matrice sont reportés dans le tableau 2.1. La porosité initiale de chaque sphère creuse est identique et s'élève à $1.56 \cdot 10^{-6}$. Le matériau équivalent (modèle de sphère creuse unique) est similaire à celui défini dans la section 2.3.1. Le vide associé à la famille contenant les plus petites cavités croît de façon dramatique et contribue largement à l'endommagement macroscopique.

ainsi que celle issue d'un calcul de sphère creuse unique. La vitesse de chargement est $\dot{p} = 10 \text{ GPa}/\mu\text{s}$. En raison d'une porosité locale identique pour toutes les familles, les vides vont tous commencer à croître en même temps. En effet, chaque motif possède la même pression d'origine visqueuse : p^{visco} . On observe que le vide V_{min} croît de façon catastrophique. La contribution inertielle pour la population F_{min} est faible compte tenu du peu de matrice entourant les petites cavités. D'autre part, l'augmentation de la porosité conduit à la chute très rapide de la résistance quasi-statique de la matrice contrôlée par p^{visco} . La croissance s'en trouve alors accentuée. Soulignons que le modèle de sphère creuse unique montre ici ses limites pour prédire la croissance de l'endommagement pour ce type de matériaux. Par exemple, pour un temps t aux alentours de $0.4 \mu\text{s}$, le modèle de sphère creuse unique prédit une porosité de l'ordre de 0.002 alors que localement, elle atteint près de 0.8 à la périphérie des cavités initialement plus petites. Dans cette configuration, il est probable que la ruine du matériau **MATf** soit déjà effective.

2.4 Champ de vitesse de déformation uniforme à la frontière des sous-volumes - Approche de type « Voigt »

Le chargement du VER reste gouverné par la pression macroscopique : $p = \dot{p}t$. Jusqu'ici, l'expansion de toutes les cellules était autonome et dépendait uniquement des conditions initiales et du chargement. En effet, la loi d'évolution ne faisait intervenir que la porosité locale (propre au motif considéré) et la déformation locale. L'interaction n'était présente qu'au travers du calcul de porosité moyenne, cette valeur moyenne de porosité n'ayant aucun effet sur le comportement du motif. Dans ce paragraphe en revanche, sous l'hypothèse de vitesse de déformation uniforme, toutes les populations vont interagir entre elles et influencer le comportement local de leurs voisines.

L'évolution de chaque motif d'une famille F_i donnée est maintenant gouvernée par :

$$p_i = p_i^{visco} + \rho a_i^2 \left[\dot{D}_m \left(f_i^{-1} - f_i^{-2/3} \right) + D_m^2 \left(3f_i^{-1} - \frac{5}{2}f_i^{-2/3} - \frac{1}{2}f_i^{-2} \right) \right]. \quad (2.13)$$

L'hypothèse d'incompressibilité s'écrit, dans le cas d'une déformation uniforme aux frontières de toutes les cellules :

$$\dot{f}_i = 3(1 - f_i)D_m. \quad (2.14)$$

La contrainte viscoplastique p_i^{visco} est donnée par l'équation (1.20b) :

$$p_i^{visco} = \frac{K}{3} \left(\frac{D_m}{1 - f_i} \right)^m \left\{ \frac{2 \ln [1/(q_1 f_i)]}{q_2} \right\}^{m+1}. \quad (2.15)$$

D_m est obtenu par la relation $p = \langle p \rangle$. Compte tenu de (2.14) et sous l'hypothèse d'une vitesse de déformation identique en paroi de chaque sphère creuse, l'activation d'un premier vide va entraîner la croissance de tous les autres.

2.4.1 Matériau à distribution spatiale homogène de vides : MATb

Considérons tout d'abord le matériau **MATb** et désignons par P et Q deux motifs distincts dont les rayons extérieurs de sphères creuses sont notés b_p et b_q . La vitesse de déformation $D_m = \dot{b}/b$ s'écrit, pour les deux populations :

$$D_m = \frac{\dot{b}_p}{b_p} = \frac{\dot{b}_q}{b_q}. \quad (2.16)$$

Par intégration avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} b_p(t=0) &= b_0 \\ b_q(t=0) &= b_0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

la relation suivante peut être obtenue :

$$b_p(t) = b_q(t) = b(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.18)$$

A chaque instant, les sphères creuses gardent le même rayon extérieur. En utilisant l'hypothèse d'incompressibilité $D_m = f \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a^2 \dot{a}}{b^3}$ couplée à la relation (2.18), il vient :

$$[a^2 \dot{a}]_p(t) = [a^2 \dot{a}]_q(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.19)$$

L'intégration de l'équation (2.19) conduit à :

$$a_p^3(t) - a_{p_0}^3 = a_q^3(t) - a_{q_0}^3, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.20)$$

où $a_p(t)$ (respectivement $a_q(t)$) désigne le rayon courant de la population P (respectivement Q), $a_{p_0} = a_p(t=0)$ et $a_{q_0} = a_q(t=0)$.

En conséquence, si $a_{p_0} < a_{q_0}$, alors :

- les cavités de la population Q seront toujours plus larges que celles de la population P , car :

$$a_q^3(t) = a_p^3(t) + \underbrace{(a_{q_0}^3 - a_{p_0}^3)}_{> 0}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.21)$$

- la vitesse de croissance des petites cavités sera toujours plus élevée que celle des gros vides. En effet :

$$\dot{a}_p(t) = \underbrace{\frac{a_q^2(t)}{a_p^2(t)}}_{> 1} \dot{a}_q(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.22)$$

Ainsi, durant le chargement, les tailles de vides vont s'homogénéiser. Identifions P à F_{min} et Q à F_{max} . Le rapport a_{max}/a_{min} , évaluant l'hétérogénéité de l'endommagement dans le matériau, s'écrit à partir de (2.21) :

$$\frac{a_{max}(t)}{a_{min}(t)} = \left\{ 1 + \left[\frac{a_{max_0}}{a_{min}(t)} \right]^3 \left[1 - \left(\frac{a_{min_0}}{a_{max_0}} \right)^3 \right] \right\}^{1/3}. \quad (2.23)$$

Avec les paramètres de distribution donnés dans le tableau 2.1, le rapport $a_{max_0}/a_{min_0} \simeq 10$ et la relation (2.23) conduit à :

$$\frac{a_{max}(t)}{a_{min}(t)} \simeq \left\{ 1 + \left[\frac{a_{max_0}}{a_{min}(t)} \right] \right\}^{1/3}. \quad (2.24)$$

Nous proposons d'évaluer ce rapport à deux instants. Soit T' le temps pour lequel V_{min} atteint la taille initiale de V_{max} , c'est-à-dire $a_{min}(T') = a_{max_0}$, alors le rapport des rayons vaut :

$$\frac{a_{max}(T')}{a_{min}(T')} \simeq \sqrt[3]{2} \simeq 1,3. \quad (2.25)$$

On note T'' l'instant où le rayon de V_{max} double en taille. Le rapport des rayons devient :

$$a_{max} = 2a_{max_0} \Rightarrow \frac{a_{max}(T'')}{a_{min}(T'')} \simeq 1,05. \quad (2.26)$$

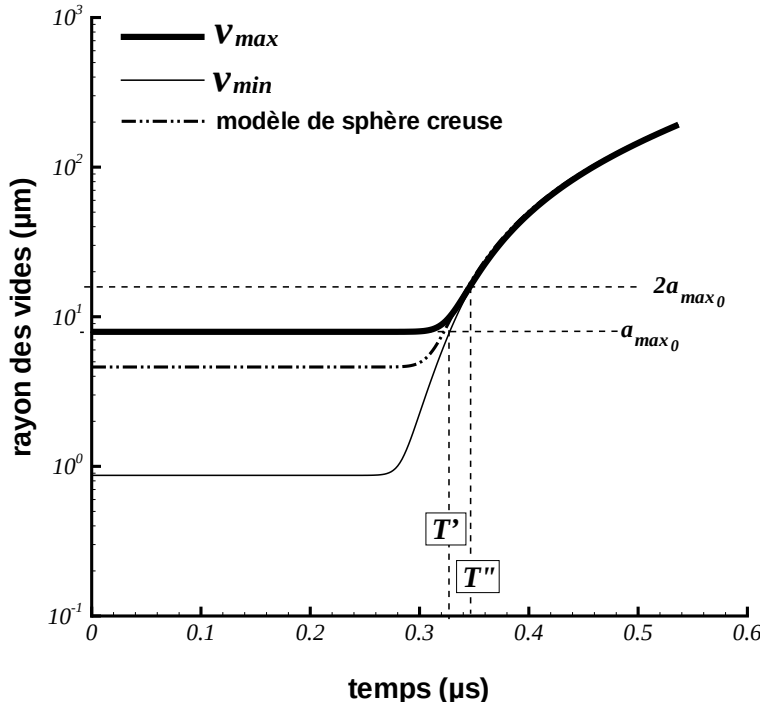


FIG. 2.7 – Evolution des rayons a_{min} (trait fin), a_{max} (trait épais), et a_{eq} (trait discontinu) pour le matériau **MATb** soumis à un chargement en expansion. Les paramètres du matériau et les conditions de chargement sont identiques à ceux de la figure 2.3. Les tailles de vides sont rapidement homogènes. Au temps T' marquant l'instant où le vide V_{min} a un rayon égal au rayon initial de V_{max} , $a_{min}(T') = a_{max0}$, le rapport $a_{max}/a_{min} = 1.3$. Au temps T'' , le vide V_{max} a doublé en taille et le rapport a_{max}/a_{min} vaut déjà environ 1.

Les deux cavités ont quasiment la même taille. L'endommagement est fortement homogène. La figure 2.7 présente les évolutions de V_{max} et V_{min} pour la configuration suivante : $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $b_0 = 400 \mu\text{m}$ et $\dot{p} = 10 \text{ GPa}/\mu\text{s}$. Remarquons que le vide V_{max} est presque instantanément rattrapé par V_{min} . Les temps T' et T'' sont également reportés sur la figure. Notons à titre de comparaison que dans les mêmes conditions, l'approche de type « Reuss » prévoit qu'aux temps $T' = 0.327 \mu\text{s}$ et $T'' = 0.347 \mu\text{s}$, le vide V_{min} n'a pas encore commencé à croître alors que le rayon de V_{max} est $a_{max}(T') \simeq 21.7 \mu\text{m}$ et $a_{max}(T'') \simeq 31.9 \mu\text{m}$.

La figure 2.8 nous montre quelle contribution permet aux petites cavités de rattraper les plus grosses. Cette figure présente l'évolution du chargement appliqué ainsi que la contribution quasi-statique pour les populations appartenant aux familles F_{min} (traits fins) et F_{max} (traits épais). Comme la pression appliquée sur chaque population n'est pas la même, la croissance des grosses cavités est réduite car la pression appliquée au motif est plus faible. Le trait en pointillé, $\dot{p}t$, représente la contrainte macroscopique et est obtenue par moyenne

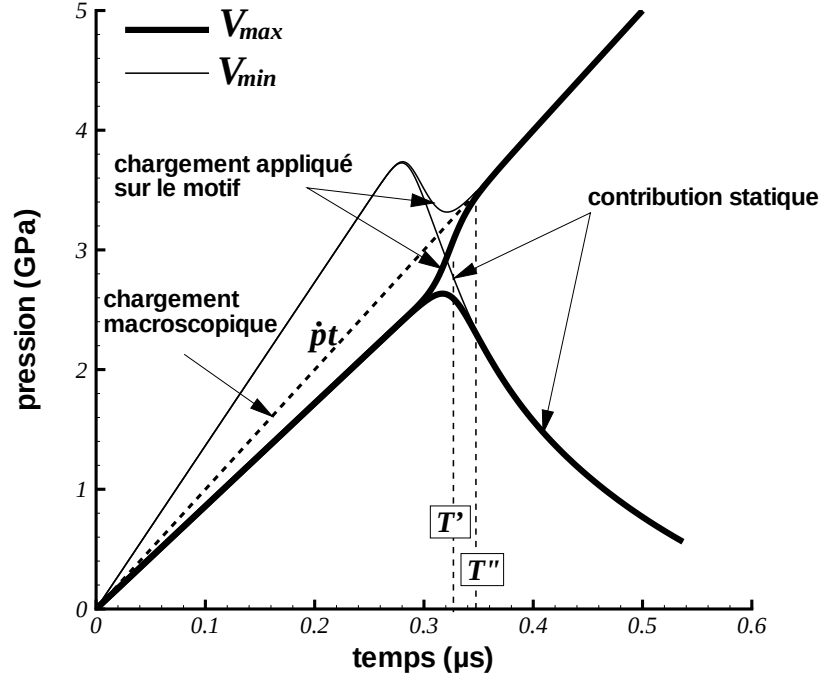


FIG. 2.8 – Evolution des pressions appliquées et des contributions statiques viscoplastiques sur les vides V_{min} (trait fin) et V_{max} (trait épais). Les résultats présentés sont associés à la figure 2.7. La moyenne des chargements appliqués sur toutes les sphères creuses est le chargement macroscopique $\dot{p}t$ (trait discontinu). Le « croisement » des différentes contributions (au temps $t \simeq T'$) marque l'initiation d'une homogénéisation de tailles de vides. Au temps T'' , le vide V_{max} a doublé en taille et le rapport a_{max}/a_{min} vaut environ 1.

volumique des pressions appliquées sur chaque sous-volume. C'est donc l'effet simultané de l'inertie et de la répartition de la charge sur tous les motifs qui va conduire à une plus grande homogénéité de tailles de vides.

Contrairement à l'approche de type « Reuss », le degré d'hétérogénéité, évalué par le rapport a_{max}/a_{min} , est indépendant de la masse volumique et de la vitesse de sollicitation. En effet, la relation (2.23) peut aussi s'écrire :

$$\frac{a_{max}(t)}{a_{min}(t)} = \left\{ 1 - \left[\frac{a_{max0}}{a_{max}(t)} \right]^3 \left[1 - \left(\frac{a_{min0}}{a_{max0}} \right)^3 \right] \right\}^{-1/3}, \quad (2.27)$$

avec

$$\left[\frac{a_{max0}}{a_{max}(t)} \right]^3 = \frac{1/f_{max}(t) - 1}{1/f_{max0} - 1}, \quad (2.28)$$

qui ne dépend que de la porosité locale de la famille F_{max} à l'instant t . Pour une porosité globale f fixée, compte tenu de (2.18) à (2.21), la taille des différentes populations de vides

est fixée quelque soient les conditions de chargement. Par conséquent, f_{max} est unique donc le rapport a_{max}/a_{min} aussi. Il est ainsi prouvé qu'un ajustement des effets d'inertie par une augmentation de $\dot{p}$ ou ρ ne mène pas à une plus grande homogénéité, dès lors qu'il est supposé que l'évolution de l'endommagement est déterminée en terme de f .

Une augmentation du rayon de matrice entourant initialement les vides conduit par contre, pour une porosité donnée, à une diminution du rapport a_{max}/a_{min} , équations (2.27) (2.28).

2.4.2 Matériau à distribution homothétique de vides : MATf

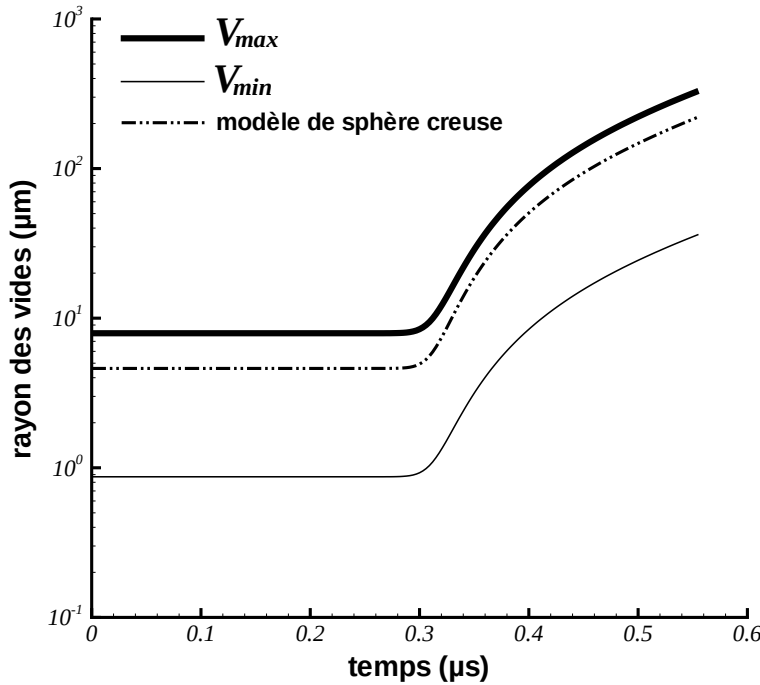


FIG. 2.9 – Evolution des rayons a_{min} (trait fin), a_{max} (trait épais), et a_{eq} (trait discontinu) pour le matériau **MATf** soumis à un chargement en expansion. Les paramètres du matériau et les conditions de chargement sont identiques à ceux de la figure 2.7. Le rapport des rayons de vides a_{max}/a_{min} , donné par l'équation (2.29), est constant au cours du temps.

L'analyse portant sur le matériau **MATf** nous indique qu'il est impossible pour une cavité donnée de rattraper une cavité plus grosse. La figure 2.9 montre les évolutions de a_{min} , a_{max} et a_{eq} pour une vitesse de pression $\dot{p} = 10 GPa/\mu s$. La porosité initiale moyenne est de $1.56 \cdot 10^{-6}$ et correspond à celle de tous les sous-volumes. La configuration initiale ainsi que les conditions de chargement sont identiques à celles utilisées dans la section 2.3.2. Il est observé sur la figure 2.9 que le vide V_{min} ne rattrape pas V_{max} et que l'endommagement ma-

croscopique est dû à la participation équitable de toutes les populations. Comparativement, l'approche de type « Reuss » (voir figure 2.6) prévoit la croissance « explosive » de V_{min} qui participera en grande partie à la porosité globale.

Ce résultat pouvait être prévisible en raison notamment de l'hypothèse sur la condition ci-

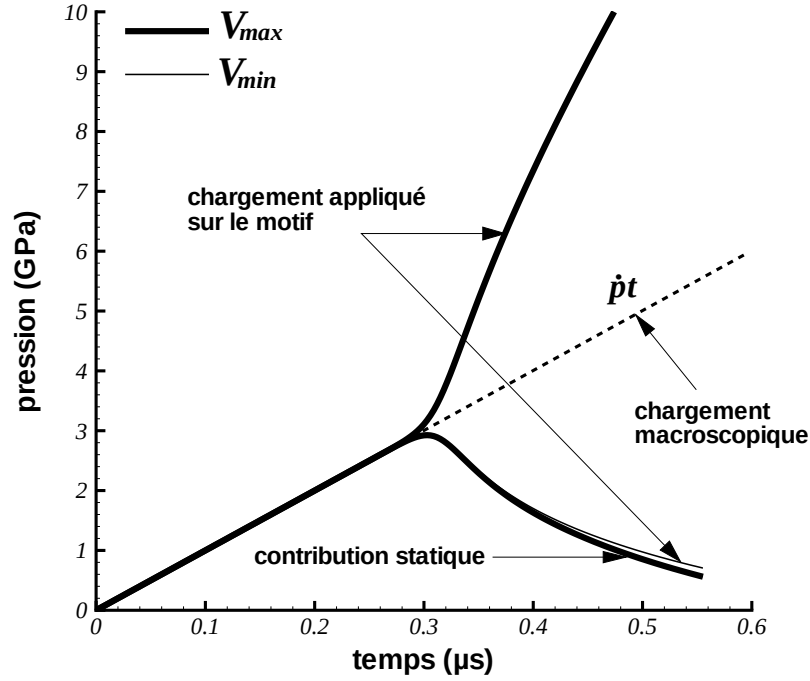


FIG. 2.10 – Evolution des pressions appliquées et des contributions statiques viscoplastiques sur les vides V_{min} (trait fin) et V_{max} (trait épais). Les résultats présentés sont associés à la figure 2.9. La moyenne des chargements appliqués sur toutes les sphères creuses est le chargement macroscopique p_t (trait discontinu). Le rapport entre les contributions inertielles lors de l'expansion de V_{max} et de V_{min} est constant au cours du temps et donné par l'équation (2.30).

nématique supposée identique à toutes les sphères creuses. En effet, la loi d'évolution de la porosité, donnée par l'équation (2.14), nous indique que la porosité d'un motif donné reste identique à celle d'un autre motif. Ainsi, si l'on intègre la relation $D_m = f\dot{a}/a$, on s'aperçoit que le rapport des rayons de vides de deux populations distinctes reste constant au cours de la déformation et est donné par le rapport de leur rayon initial. En particulier en ce qui concerne les cavités V_{min} et V_{max} :

$$\frac{a_{max}(t)}{a_{min}(t)} = \frac{a_{max0}}{a_{min0}} \simeq 10 \quad (2.29)$$

La figure 2.10 présente les évolutions des contributions quasi-statiques p_{min}^{visco} et p_{max}^{visco} relatives aux vides V_{min} et V_{max} ainsi que les chargements appliqués aux frontières de ces deux

populations. Soulignons tout d'abord, en raison d'une part de l'approche de type « Voigt » et d'autre part du matériau **MATf** considéré, que la partie statique est identique pour toutes les familles. Ensuite, le chargement appliqué sur V_{min} est très faible, ce qui peut expliquer la raison pour laquelle sa croissance n'est pas catastrophique. Finalement, la contribution inertielle (correspondant à la différence entre la pression appliquée et la pression viscoplastique) est nettement plus importante pour V_{max} . Il est possible d'évaluer le rapport entre les composantes inertielles des éléments de la famille F_{max} et celles des éléments appartenant à la famille F_{min} . La loi constitutive (2.13) met en évidence que la partie inertielle (terme multiplié par la masse volumique ρ dans le membre de droite de l'équation) varie d'une famille à l'autre par le carré du rayon de vide uniquement (la porosité, comme la vitesse de déformation sont identiques pour toutes les familles). Ainsi, en notant p_{min}^{ine} et p_{max}^{ine} les contraintes inertielles relatives à V_{min} et V_{max} , il vient :

$$\frac{p_{max}^{ine}}{p_{min}^{ine}} = \frac{a_{max}^2}{a_{min}^2} \stackrel{(2.29)}{=} \frac{a_{max0}^2}{a_{min0}^2} \simeq 100. \quad (2.30)$$

Conclusion

Dans cette partie, une alternative au schéma de la sphère creuse unique a été étudiée en considérant un matériau poreux contenant une distribution de tailles initiales de cavités, DRAGON ET TRUMEL [36], MOLINARI ET WRIGHT [98]. Deux schémas principaux d'homogénéisation ont été utilisés afin de décrire le comportement macroscopique du matériau poreux. Les approches de type « Reuss » et de type « Voigt » ont été appliquées à deux matériaux différents.

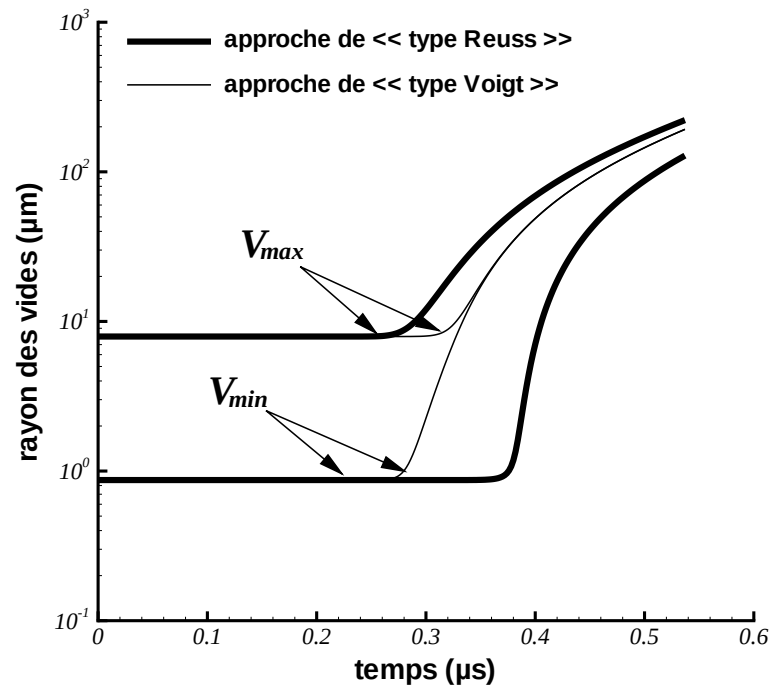


FIG. 2.11 – Evolution des rayons de vides pour le matériau **MATb** et comparaison des deux approches de type « Reuss » et de type « Voigt ». La vitesse de pression $\dot{p}$ est de $10\text{GPa}/\mu\text{s}$ et la masse volumique du matériau est fixée à $2700\text{kg}/\text{m}^3$.

La figure 2.11 présente pour le matériau **MATb**, les évolutions des vides V_{min} et V_{max} obtenues par les deux approches évoquées précédemment. La configuration suivante est adoptée dans ce calcul : $\dot{p} = 10\text{GPa}/\mu\text{s}$ pour $b_0 = 400\mu\text{m}$, les paramètres de la distribution et du comportement viscoplastique de la matrice sont résumés dans le tableau 2.1. Ces deux analyses constituent des situations extrêmes pour la solution exacte où à la fois les contraintes et les vitesses de déformation fluctuent d'une cellule à l'autre.

Pour le matériau **MATb**, il a été évoqué l'influence des effets inertiels sur l'homogénéité de l'endommagement. Une augmentation des effets micro-inertiels conduit à un endommagement plus homogène avec le schéma de type « Reuss ». En revanche, il a été montré que pour l'analyse de type « Voigt », une variation de la masse volumique ρ ou de la vitesse de sollicitation $\dot{p}$ n'a aucune influence sur l'hétérogénéité de l'endommagement. Pour le matériau **MATf**, le modèle de type « Voigt » prévoit une vitesse de croissance relative constante (en raison de l'incompressibilité) pour tous les vides présents dans le matériau. En revanche, l'analyse basée sur l'approche de type « Reuss » conduit à la croissance démesurée des petites cavités.

Ces différentes observations sont directement liées au comportement du matériau. En effet, l'élasticité étant négligée, imposer une vitesse de déformation identique aux frontières de toutes les populations (approche qualifiée de type « Voigt ») signifie que la même contribution plastique est retrouvée pour toutes les populations. Par conséquent, et en raison de l'incompressibilité, nous avons montré que l'inertie n'a aucune influence sur l'hétérogénéité de l'endommagement lorsque l'approche de type « Voigt » est adoptée. Fort de ce constat, et comme l'élasticité est négligée dans une grande partie du travail (sauf dans le dernier chapitre relatif à l'implantation dans un code de calculs par éléments finis) nous adoptons par la suite l'approche de type « Reuss ».

Soulignons enfin que le schéma de la sphère creuse unique montre très vite ses limitations en dynamique lorsqu'il est nécessaire de décrire un endommagement caractérisé par de nombreuses tailles de vides différentes. Néanmoins, dans le cas du matériau **MATb**, cette représentation simplifiée du matériau poreux peut être suffisante dans des conditions particulières de chargement (grand $\dot{p}$, figure 2.4) ou avec l'utilisation de l'approche de type « Voigt » (figure 2.7).

Troisième partie

**MODÉLISATION
SEMI-ANALYTIQUE DE LA
RUPTURE DYNAMIQUE DES
MATÉRIAUX DUCTILES**

Introduction

Dans cette partie, un modèle d'endommagement dynamique prenant en compte les deux premières étapes du processus de rupture ductile est présenté. Le modèle est donc par construction valable pour les temps couvrant l'étape d'initiation de la nucléation jusqu'à l'amorce de la coalescence.

Le matériau étudié est supposé initialement sain (sans aucune cavité) mais contient des sites potentiels de nucléation. Lorsque localement la pression appliquée atteint une valeur critique p_c au niveau d'un site donné, un vide apparaît spontanément et commence à croître par déformation plastique de la matrice qui l'entoure.

La répartition des sites de nucléation dans le matériau suit une loi de probabilité de WEI-BULL [147]. Chaque site est supposé être contenu dans une matrice sphérique finie de rayon initial b_0 . Cette grandeur représente une mesure de la demi distance moyenne séparant deux sites voisins. Une cellule unitaire peut être définie par les deux ingrédients : une pression de cavitation et un rayon initial de sphère dense.

Une approche de type « Reuss » est adoptée et la pression macroscopique appliquée au domaine matériel est reportée identiquement à la frontière de chaque cellule unitaire. Lorsqu'un vide est nucléé au centre d'une cellule, son évolution est déterminée sur la base du schéma classique de la sphère creuse.

Aux premiers instants du chargement, l'endommagement est contrôlé par la pression de cavitation dont l'amplitude dépend des caractéristiques élastique et (visco-)plastique de la matrice (voir section 3.1.2 dans la partie bibliographie du manuscrit, page 57). A mesure que l'endommagement progresse, la matrice va opposer moins de résistance à la croissance des vides. Cet aspect est pris en compte dans le modèle complet qui sera exposé dans cette partie.

L'approche qui est proposée s'inspire des travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98] pour ce qui concerne l'étape de nucléation, et est basée sur l'analyse de MOLINARI ET MERCIER [97], déjà utilisée dans la deuxième partie du manuscrit, pour décrire l'étape de croissance.

Dans le premier chapitre est présenté le modèle statistique utilisé afin de décrire la dis-

tribution des sites de nucléation dans le matériau.

Le comportement de chaque cellule élémentaire est ensuite exposé dans le deuxième chapitre. Une solution analytique pour la croissance des vides est obtenue dans le cas d'un chargement en rampe de pression pour un modèle particulier couplant l'étape de nucléation avec les effets de la porosité sur la micro-inertie.

Dans le dernier chapitre enfin, les résultats obtenus par la modélisation avancée sont comparés aux mesures expérimentales de pressions d'écaillage de ROY [116] sur un tantale de très haute pureté. Les effets de l'inertie sur l'homogénéisation de l'endommagement et l'influence de différents paramètres sur le niveau de la pression d'écaillage sont illustrés dans le dernier chapitre.

Chapitre 1

Modélisation de la nucléation

Il est admis dans nos travaux que l'étape de nucléation de micro-cavités est pilotée par la contrainte. L'apparition spontanée d'un vide au centre d'un site donné dépend des propriétés élastiques et viscoplastiques de la matrice et est gouvernée par l'amplitude de la pression de nucléation. Quelques éléments traitant de la cavitation sont présentés dans la partie bibliographie de ce manuscrit, section 3.1.2. Une analyse de l'influence des propriétés mécaniques sur le niveau de la pression de cavitation est notamment détaillée dans les travaux de WU ET AL. [151].

Tous les sites potentiels de nucléation ne sont pas activés au même moment et la pression de cavitation peut varier d'un site à un autre, dépendant essentiellement de la micro-structure et des propriétés mécaniques de la matrice. Pour cela, une approche statistique est adoptée.

1.1 Description statistique des sites de germination

loi de distribution de WEIBULL [147]

La pression de cavitation p_c est supposée varier d'un site à un autre et la répartition des sites dans le matériau est déterminée par une densité de probabilité décrite par une loi de WEIBULL [147].

$$W(p_c) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{p_c - p_{oc}}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{p_c - p_{oc}}{\eta} \right)^{\beta} \right], \quad \text{pour } p_c \geq p_{oc} \quad (1.1)$$

où $\eta > 0$ est le paramètre d'échelle et $\beta > 0$ le paramètre de forme de la distribution. p_{oc} représente le paramètre de position et joue le rôle de valeur seuil en dessous de laquelle aucun site ne peut être activé ($W(p_c) = 0$ si $p_c \leq p_{oc}$). La forme de la distribution dépend essentiellement de la valeur de β et nous choisissons $\beta > 1$. Dans ce cas, $W(p_c)$ croît avec p_c

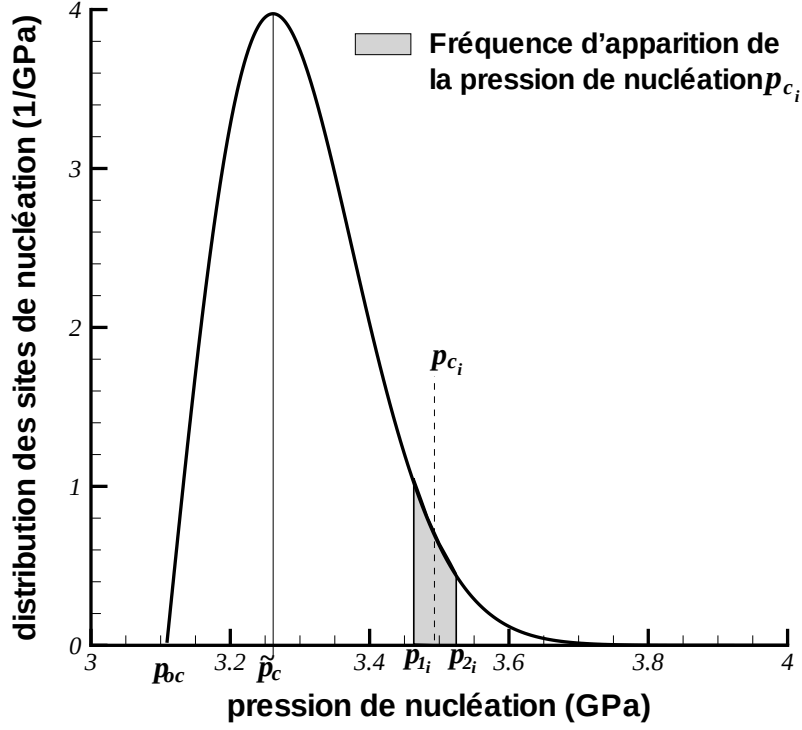


FIG. 1.1 – Distribution de WEIBULL [147] des pressions de nucléation (équation (1.1)). Les paramètres de la distribution sont reportés dans le tableau 3.1 (page 143) et correspondent à ceux utilisés pour les calculs de pressions d'écaillage dans le tantale. La fréquence d'apparition d'un site de pression de nucléation p_{c_i} (équation (1.9)) est représentée par l'aire grisée sous la courbe. p_{oc} est le paramètre de position de la distribution de Weibull et $\tilde{p}_c$ le maximum de la courbe (équation (1.2)).

jusqu'à $\tilde{p}_c$ (appelé le mode en analyse statistique) :

$$\tilde{p}_c = p_{oc} + \eta (1 - 1/\beta)^{1/\beta}, \quad (1.2)$$

puis décroît ensuite de façon exponentielle. La pression de cavitation moyenne $\bar{p}_c$ est donnée par :

$$\bar{p}_c = p_{oc} + \eta \Gamma(1/\beta + 1), \quad (1.3)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma définie par $\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1} dx$. L'écart type de la distribution, mesurant la dispersion autour de $\bar{p}_c$, s'exprime par :

$$\sigma_w = \eta \sqrt{\Gamma(2/\beta + 1) - \Gamma(1/\beta + 1)^2} \quad (1.4)$$

et la variance est définie par le carré de l'écart type σ_w^2 .

schéma de discrétisation

Le schéma utilisé dans cette partie repose sur la même approche que celle initiée dans la partie précédente (section 2.1, page 104). La démarche est mise à jour en considérant, non pas des fluctuations des tailles de vides initiales, mais des pressions de nucléation.

Les pressions de nucléation dans le matériau sont supposées comprises entre la borne inférieure p_{oc} et une borne supérieure notée p_{csup} . L'intervalle $[p_{oc}, p_{csup}]$ est discrétisé en un nombre impair $I = 2k + 1$ d'intervalles de longueur $L_c = (p_{csup} - p_{oc})/I$. Le i^{eme} intervalle $\text{Int}(i)$:

$$\text{Int}(i) = [p_{1_i}, p_{2_i}] \quad p_{1_i} = p_{oc} + L_c(i - 1) \quad p_{2_i} = p_{1_i} + L_c \quad (1.5)$$

est centré sur la pression critique :

$$p_{c_i} = p_{oc} + L_c\left(i - \frac{1}{2}\right). \quad (1.6)$$

La famille F_i de sites potentiels de nucléation est définie comme l'ensemble des sites dont la pression de cavitation appartient à l'intervalle $\text{Int}(i)$:

$$F_i = \{\text{Sites dont la pression critique } p_c \in \text{Int}(i)\}. \quad (1.7)$$

Dans le schéma de discrétisation employé, les pressions de nucléation de tous les sites appartenant à la famille F_i sont remplacées par la même pression p_{c_i} , donnée par l'équation (1.6). La famille F_i est de plus caractérisée par la fréquence d'apparition Pr_i de p_{c_i} (voir figure 1.1), qui est la probabilité qu'un site potentiel de nucléation d'appartenir à la famille F_i :

$$Pr_i = Pr(p_{1_i}, p_{2_i}) = Pr(p_{1_i} \leq p_{c_i} \leq p_{2_i}). \quad (1.8)$$

Compte tenu de la loi de probabilité adoptée (équation (1.1)), la fréquence d'apparition Pr_i s'exprime par :

$$\begin{aligned} Pr_i = Pr(p_{1_i}, p_{2_i}) &= \int_{p_{1_i}}^{p_{2_i}} W(p_{c_i}) dp_{c_i}, \\ &= \exp\left[-\left(\frac{p_{1_i} - p_{oc}}{\eta}\right)^\beta\right] - \exp\left[-\left(\frac{p_{2_i} - p_{oc}}{\eta}\right)^\beta\right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

La figure 1.1 présente une distribution de Weibull avec les paramètres $\beta = 2$, $\eta = 0.216 GPa$, et $p_{oc} = 3.1 GPa$. La fréquence d'apparition, donnée par l'équation (1.9), représente l'aire grisée sous la courbe $W(p_c)$.

1.2 Distance d'interaction entre deux sites

La distance moyenne séparant deux sites voisins décroît avec l'augmentation de la pression appliquée. Cette diminution de la distance moyenne inter sites peut être prise en compte via une loi d'évolution appropriée. Cependant, nous proposons dans cette partie une

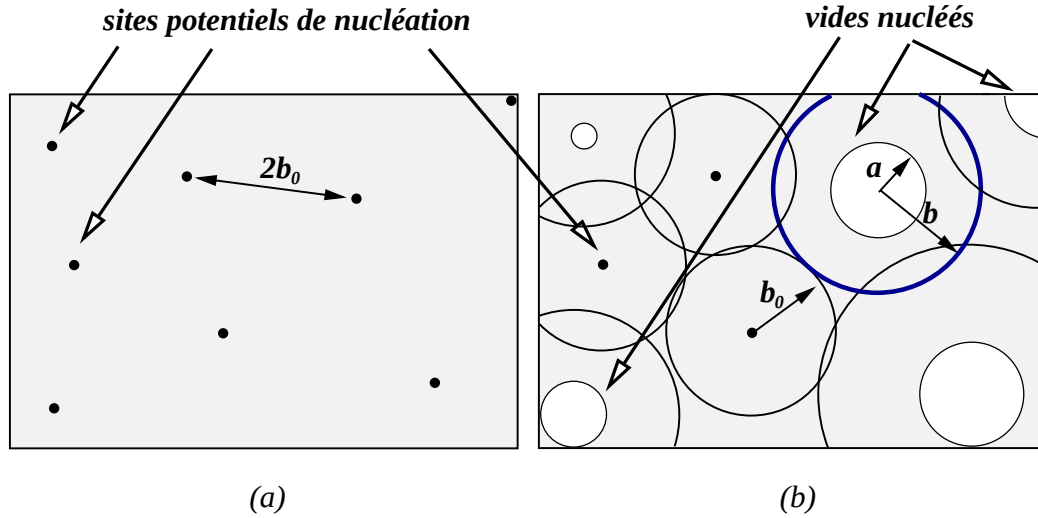


FIG. 1.2 – (a) - Répartition des sites potentiels de nucléation dans le matériau. $2b_0$ représente la distance moyenne séparant deux sites voisins. (b) - Chaque site est supposée contenu dans une matrice sphérique finie de rayon initial b_0 . Une fois que la pression appliquée dépasse la pression de cavitation p_c d'un site donné, un vide est nucléé et son évolution est déterminée par une approche basée sur le schéma classique de la sphère creuse.

approche simplifiée basée sur une valeur effective que l'on note $2b_0$ mesurant l'espacement moyen entre sites voisins. Cette grandeur peut être identifiée par calibration sur des mesures expérimentales.

Dans les travaux que nous proposons, chaque site potentiel est considéré comme entouré d'une matrice sphérique viscoplastique finie de rayon b_0 , voir figure 1.2. Une cellule élémentaire peut alors être définie et identifiée par la pression de nucléation p_c et le rayon extérieur initial de la sphère (initialement dense) b_0 . Un vide est nucléé au centre de la cellule élémentaire une fois que la pression $p \geq p_c$, et croît par déformation plastique de la matrice. L'évolution de la cavité est obtenue par le schéma classique de la sphère creuse (CARROLL ET HOLT [21], MOLINARI ET MERCIER [97]). Dans l'approche que nous proposons, il est supposé que la pression macroscopique coïncide avec celle appliquée à la frontière de chaque sphère creuse (approche « de type Reuss »). Le comportement d'une cellule unitaire est déterminé à l'aide du modèle développé par MOLINARI ET MERCIER [97] pour les matériaux poreux.

Chapitre 2

Comportement de la cellule unitaire

Dans un premier temps, on considère qu'un vide est déjà présent dans la matrice et son évolution est obtenue par l'approche de MOLINARI ET MERCIER [97]. Cette étude a déjà été développée dans une partie antérieure du manuscrit et on ne rappellera ici que les équations essentielles. On présente ensuite un modèle de nucléation et croissance (une extension aux travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98]) pour lequel il est montré l'existence d'une solution analytique. Finalement un modèle plus complet est proposé, capable de décrire l'endommagement à partir de la nucléation jusqu'à la coalescence.

2.1 Cellule contenant un vide préexistant - *Modèle I*

L'analyse a été développée à la section 1.1 page 95 et on ne rappelle ici que les équations essentielles. L'évolution d'une cavité de rayon courant a (initial a_0) dans une matrice viscoplastique de rayon courant b (initial b_0), de porosité $f = a^3/b^3$, est donnée par :

$$p = p^{visco} + \rho a^2 \left[\dot{D}_m \left(f^{-1} - f^{-2/3} \right) + D_m^2 \left(3f^{-1} - \frac{5}{2}f^{-2/3} - \frac{1}{2}f^{-2} \right) \right] . \quad (2.1)$$

La loi de comportement viscoplastique de la matrice est donnée par une loi puissance :

$$\sigma_{eq} = K \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^m , \quad (2.2)$$

où K , $\dot{\epsilon}_0$ sont des constantes du matériau et σ_{eq} , $\dot{\epsilon}_{eq}$ les contrainte et vitesse de déformation microscopiques équivalentes. En utilisant l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice $D_m = f \frac{\dot{a}}{a}$, l'équation (2.1) peut s'écrire :

$$p - p^{static} = \rho \left[a \ddot{a} \left(1 - f^{1/3} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{4}{3}f^{1/3} + \frac{1}{3}f^{4/3} \right) \right] , \quad (2.3)$$

où p^{visco} a été remplacé par p^{static} pour les besoins de l'analyse et permettre ainsi différents choix de p^{static} .

L'équation (2.3) est la relation essentielle dans l'analyse que nous proposons. Différentes expressions seront proposées pour p^{static} , correspondant à différents stades dans la croissance du vide. Ainsi, lorsque $p^{static} = p^{visco}$, la contribution quasi-statique est évaluée à l'aide du modèle de Gurson-Tvergaard (équation (1.33), page 23) étendu au cas viscoplastique (équation (1.20b), page 100) :

$$p^{static} = p^{visco} = \begin{cases} \frac{K}{3} \left(\frac{D_m}{1-f} \right)^m \left\{ \frac{2 \ln [1/(q_1 f)]}{q_2} \right\}^{m+1} & q_1 f < 1, \\ 0 & q_1 f \geq 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) avec ce choix particulier de p^{static} correspond à un modèle d'endommagement que l'on dénomme par la suite **Modèle I**.

2.2 Germination et premiers temps de croissance - Solution analytique pour le **Modèle II**

MOLINARI ET WRIGHT [98] ont récemment étudié la nucléation et la croissance d'un vide dans une matrice infinie soumise à un chargement en pression. Se fondant sur les travaux de WU ET AL. [151], les auteurs supposent qu'une fois nucléé, un vide croît en suivant la loi d'évolution donnée par (pour $p \geq p_c$) :

$$p - p_c = \rho \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right), \quad (2.5)$$

où p désigne la pression appliquée à la frontière du domaine matériel et p_c la pression de cavitation en dessous de laquelle aucun site potentiel ne peut être activé. Notons que la formulation (2.5) ne tient pas compte de l'interaction entre les vides (la matrice est infinie et la porosité est donc nulle). Remarquons également les similitudes entre les équations (2.3) et (2.5). En effet l'équation (2.3), dans le cas d'une matrice infinie ($f \rightarrow 0$), conduit à la relation (2.5) après avoir remplacé p^{static} par p_c .

A partir de l'équation (2.5), en remplaçant le membre de droite de manière à introduire l'influence de la porosité f sur la contribution inertielle comme dans la formulation (2.3), nous définissons alors le **Modèle II** :

$$p - p_c = \rho \left[a\ddot{a} \left(1 - f^{1/3} \right) + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \left(1 - \frac{4}{3}f^{1/3} + \frac{1}{3}f^{4/3} \right) \right]. \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) peut être retrouvée en analysant le comportement dynamique d'une sphère creuse (élastoplastique) soumise à un chargement en expansion. Nous présentons ci-dessous cette analyse.

expansion dynamique d'une sphère creuse, CARROLL ET HOLT [21], GUO ET CHENG [56]

Considérons une cavité sphérique dans une matrice finie élastoplastique (rayon initial noté b_0 , rayon dans la configuration actuelle noté b) soumise à un chargement hydrostatique en tension noté p . Les coordonnées sphériques d'un point matériel dans la configuration lagrangienne sont désignées par (R, θ, ϕ) . En raison de l'hypothèse d'incompressibilité, le tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ et le tenseur gradient des vitesses $\underline{\underline{L}}$ sont donnés par :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{dr}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{R} \end{bmatrix}_{R\theta\phi} \quad \underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{dr}}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{r}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{r}}{r} \end{bmatrix}_{R\theta\phi}, \quad (2.7)$$

où r désigne la position de la particule dans la configuration actuelle et $(\dot{})$ est l'opérateur dérivée par rapport au temps. Comme le mouvement étudié n'engendre aucune rotation, le tenseur des vitesses de déformation est égal au tenseur gradient des vitesses. Par conservation du volume (le matériau est supposé élastiquement incompressible), la déformation équivalente totale ε_e s'exprime par ¹ :

$$\varepsilon_e = \int_0^t \frac{2\dot{r}}{r} dt = 2 \ln \frac{r}{R}. \quad (2.8)$$

La conservation du volume mène à :

$$\frac{dr}{dR} = \frac{R^2}{r^2} \quad (2.9a)$$

$$r^3 - R^3 = a^3 - a_0^3. \quad (2.9b)$$

avec a_0 le rayon initial de la cavité et a son rayon courant.

Dans une approche quasi-statique (l'inertie est négligée), l'équation d'équilibre locale en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2\sigma_e}{r} = 0, \quad (2.10a)$$

où σ_e est la contrainte équivalente au sens de von Mises. La sphère est soumise à sa frontière extérieure ($r = b$) à la pression appliquée p tandis que la surface intérieure (paroi du vide $r = a$) est libre de contraintes :

$$\sigma_r = 0 \quad \text{en} \quad r = a \quad \text{et} \quad \sigma_r = p \quad \text{en} \quad r = b. \quad (2.10b)$$

Par intégration de l'équation d'équilibre (2.10a), et en utilisant les conditions aux limites (2.10b), la pression p se trouve exprimée par :

$$p - \int_{r=a}^{r=b} \frac{2\sigma_e}{r} dr = 0. \quad (2.11)$$

¹on remarquera que la déformation équivalente est notée ε_e et non ε_{eq} comme dans tout le reste du manuscrit pour souligner la distinction entre le cas où les déformations élastiques ne sont pas négligées (cas présent) et celui où elles le sont.

Par combinaison des équations (2.8) et (2.9a), il vient :

$$d\varepsilon_e = \frac{2dr}{r} \left(1 - \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} \right) \quad (2.12)$$

$$= \frac{2dr}{r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \quad (2.13)$$

$$= \frac{2dr}{r} \left[1 - \exp \left(\frac{3\varepsilon_e}{2} \right) \right]. \quad (2.14)$$

L'équation (2.11) peut alors également s'écrire :

$$p = \int_{\varepsilon_e(r=b)}^{\varepsilon_e(r=a)} \frac{\sigma_e}{\exp \left(\frac{3\varepsilon_e}{2} \right) - 1} d\varepsilon_e. \quad (2.15)$$

Pour un matériau initialement sain au comportement élasto-(visco)plastique, la pression de cavitation p_c peut être définie par :

$$p_c = \int_0^\infty \frac{\sigma_e}{\exp \left(\frac{3\varepsilon_e}{2} \right) - 1} d\varepsilon_e. \quad (2.16)$$

Lorsque l'accélération est prise en compte, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2\sigma_e}{r} = \rho \ddot{r}. \quad (2.17)$$

Les conditions aux limites sont toujours données par la relation (2.10b). En utilisant l'équation (2.9b), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \dot{r}r^2 = \dot{a}a^2 \Rightarrow \ddot{r} &= \frac{2\dot{a}^2a + a^2\ddot{a}}{r^2} - \frac{2r\dot{r}\dot{a}a^2}{r^4} \\ &= \frac{2\dot{a}^2a + a^2\ddot{a}}{r^2} - \frac{2a^4\dot{a}^2}{r^5} \\ &= \frac{d}{dr} \left(-\frac{2\dot{a}^2a + a^2\ddot{a}}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^4\dot{a}^2}{r^4} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

L'intégration de l'équation du mouvement (2.17) avec les conditions aux limite (2.10b) conduit à :

$$p - \int_{r=a}^{r=b} \frac{2\sigma_e}{r} dr = \rho \left\{ a\ddot{a} \left(1 - f^{1/3} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{4}{3} f^{1/3} + \frac{1}{3} f^{4/3} \right) \right\}, \quad \text{avec } f = \frac{a^3}{b^3}. \quad (2.19)$$

L'évolution du rayon extérieur de la sphère creuse est obtenue par la relation d'incompressibilité (2.9b) exprimée en $r = b$. Au final, la croissance de la cavité est gouvernée par la loi (pour $p \geq p_c$) :

$$p - p_c = \rho \left\{ a\ddot{a} \left(1 - f^{1/3} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{4}{3} f^{1/3} + \frac{1}{3} f^{4/3} \right) \right\}, \quad (2.20)$$

et la relation (2.6) est retrouvée.

La formulation (2.20) est obtenue en admettant que le terme intégral dans la relation (2.19) reste constant ($= p_c$). Ceci n'est valable qu'aux premiers instants de la croissance du vide. Lorsque la cavité atteint une taille importante, le terme intégral dans (2.19) doit diminuer avec l'augmentation de la porosité. Cet aspect de l'endommagement est pris en compte dans la construction d'un nouveau modèle plus complet, le **Modèle III** (figure 2.3 que nous expliciterons plus loin dans la section 2.3).

Soulignons que l'interaction entre les cavités, négligée dans l'analyse de MOLINARI ET WRIGHT [98], est prise en compte dans le **Modèle II** au travers de l'influence de la porosité sur les effets micro-inertiels. Ce modèle, tenant compte de la nucléation, est valide pour les premiers temps de croissance de vides. Le **Modèle I** (équations (2.3) et (2.4)) permet a contrario d'analyser la croissance du vide lorsque celui-ci a déjà une taille suffisante.

valorisation du **Modèle II** au travers d'une solution analytique

Dans ce paragraphe, le chargement appliqué est une rampe linéaire de pression $p = \dot{p}t$ ($\dot{p}$ la vitesse de pression constante). Le matériau est supposé ne contenir initialement aucune cavité et un vide apparaît lorsque la pression appliquée p atteint la valeur critique p_c au temps t_c défini par $t_c = p_c/\dot{p}$. Dans ce cas, nous démontrons l'existence d'une solution analytique si la croissance de la cavité est gouvernée par le **Modèle II** (équation (2.6)).

Compte tenu de l'incompressibilité de la matrice, la porosité f vaut $f = a^3/(a^3 + b_0^3)$. L'équation (2.6) peut alors s'écrire :

$$\frac{\dot{p}}{\rho}T = a\ddot{a} \left\{ 1 - \frac{a}{b_0} \left[\frac{1}{1 + (a/b_0)^3} \right]^{1/3} \right\} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \left\{ 1 - \frac{4}{3}\frac{a}{b_0} \left[\frac{1}{1 + (a/b_0)^3} \right]^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b_0} \right)^4 \left[\frac{1}{1 + (a/b_0)^3} \right]^{4/3} \right\}, \quad (2.21)$$

avec $T = t - t_c$, et $a = 0$ pour $T = 0$. L'équation (2.21) gouvernant l'expansion de la cavité met en jeu 5 grandeurs physiques. En notant respectivement $[L]$, $[M]$, $[T]$, les dimensions de base désignant la longueur, la masse et le temps, la matrice des exposants aux dimensions s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc} & [a] & [\dot{p}] & [\rho] & [T] & [b_0] \\ \begin{array}{l} L \\ M \\ T \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & & & \end{array} \quad (2.22)$$

Le rang de la matrice est égal à 3 et d'après le théorème de Vaschy-Buckingham (ou théorème II), il est alors possible de former $5 - 3 = 2$ paramètres sans dimension. Soient π_1 et π_2 ces

deux quantités. En choisissant $\dot{p}$, ρ et T comme grandeurs de dimensions indépendantes, on définit les deux nombres adimensionnels :

$$\pi_1 = \frac{a}{T^{3/2}} \left(\frac{\rho}{\dot{p}} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \pi_2 = \frac{b_0}{T^{3/2}} \left(\frac{\rho}{\dot{p}} \right)^{1/2} = \frac{b_0}{a} \pi_1. \quad (2.23)$$

D'après le théorème de Vaschy-Buckingham, il existe une fonction Φ telle que :

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b_0} = \frac{1}{\pi_2} \Phi(\pi_2), \quad (2.24)$$

où il apparaît que le rayon normalisé a/b_0 est lié à la quantité adimensionnelle π_2 . La fonction Φ est universelle dans le sens où elle ne dépend ni des propriétés du matériau ni des conditions de chargement. Nous proposons de déterminer cette fonction par une approche analytique.

Nous utilisons tout d'abord le développement en séries de Laurent de la fonction $\Phi(\pi_2)$ et la relation (2.24) peut alors s'exprimer par :

$$\frac{a}{b_0} = \frac{T^{3/2}}{b_0} \left(\frac{\dot{p}}{\rho} \right)^{1/2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r_i \left(\frac{b_0}{T^{3/2}} \left(\frac{\rho}{\dot{p}} \right)^{1/2} \right)^i. \quad (2.25)$$

Dans les tous premiers temps de la croissance, ou lorsque la matrice entourant le vide est supposée infinie, la porosité de la cellule élémentaire peut être négligée et l'équation (2.6) (ou l'équation (2.21)) devient :

$$\frac{\dot{p}}{\rho} T = a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2, \quad (2.26)$$

dont la solution est donnée par (voir WRIGHT ET AL. [150]) :

$$a = \sqrt{\frac{8}{33}} \left(\frac{\dot{p}}{\rho} \right)^{1/2} T^{3/2}. \quad (2.27)$$

La solution exacte (2.25) est aussi valable pour la croissance d'un vide dans une matrice infinie. En conséquence, l'expansion en séries de Laurent doit conduire à la solution analytique (2.27) pour $b_0 \rightarrow +\infty$. Il vient alors :

$$r_0 = \sqrt{\frac{8}{33}} \quad \text{et} \quad r_i = 0, \text{ pour } i > 0. \quad (2.28)$$

La relation (2.25) se simplifie et donne :

$$\frac{a}{b_0} = h_0 T^{3/2} \left[1 + \lim_{N_L \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{N_L} h_i \left(h_0 T^{3/2} \right)^i \right], \quad (2.29)$$

où $h_0 = \sqrt{\frac{8}{33}} \left(\frac{\dot{p}}{\rho b_0^2} \right)^{1/2}$, et h_i sont des constantes à déterminer.

Afin de trouver une solution analytique de l'équation (2.21) et d'évaluer les constantes

h_i , nous recourons au développement de Taylor au voisinage de 0 et à l'ordre n , des termes $(1 + (a/b_0)^3)^\alpha$ apparaissant dans l'équation (2.21) :

$$\left[1 + \left(\frac{a}{b_0}\right)^3\right]^\alpha = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \left(\frac{a}{b_0}\right)^{3n}. \quad (2.30)$$

En utilisant la relation (2.30) pour $\alpha = -1/3$, et $\alpha = -4/3$, la loi d'évolution du vide (2.21) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{p}}{\rho b_0^2} T = \frac{a}{b_0} \frac{\ddot{a}}{b_0} & \left[1 - \left(\frac{a}{b_0}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b_0}\right)^4 - \frac{2}{9} \left(\frac{a}{b_0}\right)^7 + \frac{14}{81} \left(\frac{a}{b_0}\right)^{10} - \dots \right] \\ & + \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{a}}{b_0}\right)^2 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{a}{b_0}\right) + \frac{7}{9} \left(\frac{a}{b_0}\right)^4 - \frac{20}{27} \left(\frac{a}{b_0}\right)^7 + \frac{182}{243} \left(\frac{a}{b_0}\right)^{10} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si un nombre infini de termes dans l'équation (2.31) est considéré, alors la formulation (2.31) est absolument identique à (2.21) tant que le rayon normalisé a/b_0 reste inférieur au rayon de convergence de la série ($R_c = 1$) c'est-à-dire pour $a < b_0$. Par conséquent, la solution proposée se limite à des tailles de cavités inférieures à la distance moyenne inter sites b_0 correspondant à une porosité de 0.5. La plupart des observations expérimentales montrent que la coalescence des cavités intervient pour des porosités bien en dessous de cette valeur. En effet, en fonction du comportement du matériau, la coalescence, et donc la rupture complète, intervient pour des porosités comprises entre 0.05 et 0.35.

Afin de déterminer complètement la solution, le développement de a/b_0 en séries de Laurent (2.29) est « injectée » dans la formulation (2.31) qui a été tronquée à l'ordre 4. Les constantes h_i sont alors obtenues par résolution d'un système d'équations linéaires à l'aide du logiciel de calcul formel *Maxima*. Les valeurs de h_i , pour $1 \leq i \leq 10$ sont :

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.259 & h_2 &= 0.176 \\ h_3 &= 0.156 & h_4 &= 0.124 \\ h_5 &= 0.097 & h_6 &= 0.068 \\ h_7 &= 0.031 & h_8 &= -0.018 \\ h_9 &= -0.079 & h_{10} &= -0.154 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Notons qu'une augmentation de l'ordre de troncature des expansions en série de Taylor conduit aux mêmes valeurs de coefficients h_i , tout au moins pour les 10 premiers coefficients.

Il est également proposé un jeu de coefficients h_i obtenu par ajustement sur le résultat exact de l'équation (2.21). Une méthode des moindres carrés permet d'obtenir les coeffi-

cients h_i suivants :

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 0.259 & h_2 &= 1.951 \\
 h_3 &= -24.970 & h_4 &= 143.824 \\
 h_5 &= -440.039 & h_6 &= 798.664 \\
 h_7 &= -886.858 & h_8 &= 593.186 \\
 h_9 &= -219.865 & h_{10} &= 34.826
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Remarquons que le coefficient h_1 est choisi identique à sa valeur obtenue par l'approche analytique (2.32), de manière à conserver la solution exacte de l'expansion d'un vide dans une matrice infinie (WRIGHT ET AL. [150]).

La fonction Φ est alors entièrement déterminée et son usage permet de connaître à tout instant l'évolution d'un vide dans une matrice finie (extension de la solution de WU ET AL.

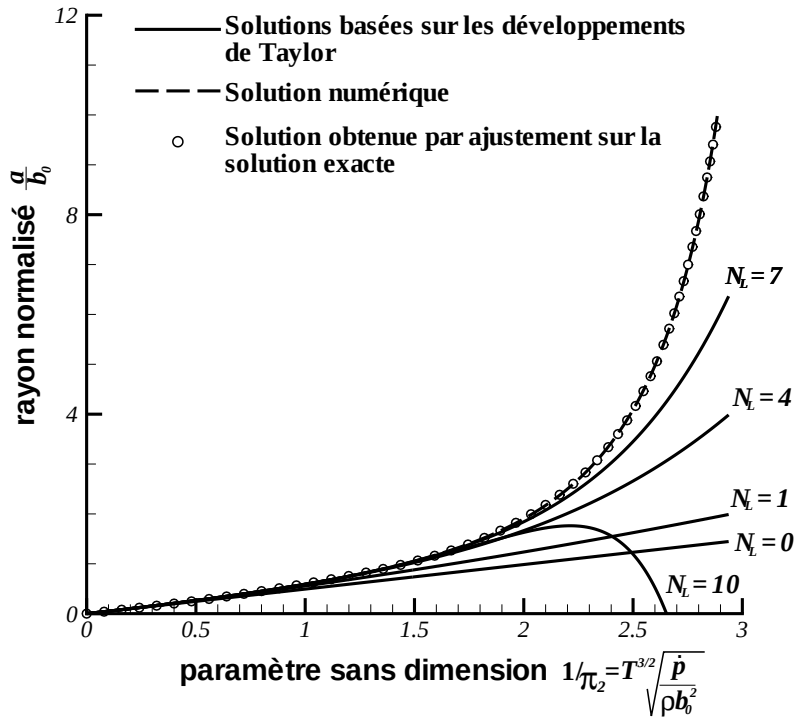


FIG. 2.1 – Evolution du rayon normalisé a/b_0 en fonction du paramètre adimensionnel $1/\pi_2 = T^{3/2} [\dot{p}/(\rho b_0^2)]^{1/2}$. Le trait discontinu correspond à la solution numérique de l'équation (2.21). Les solutions basées sur les développements de Taylor sont obtenues par combinaison des relations (2.29) et (2.32). N_L représente le nombre de termes utilisés dans le développement en séries de Laurent de la solution analytique (2.29) (traits continus). On reporte également (cercles) la solution basée sur un développement contenant 10 termes représentatifs et obtenue par ajustement sur la solution exacte (voir équations (2.29) et (2.33)).

[151] au cas où l'interaction entre les vides est prise en compte au travers du couplage entre la porosité f et la contribution inertielle).

La figure 2.1 présente l'évolution du rayon normalisé a/b_0 en fonction de la grandeur sans dimension $1/\pi_2 = T^{3/2}[\dot{p}/(\rho b_0^2)]^{1/2}$. La solution analytique proposée semble relativement précise s'il est tenu compte d'un nombre N_L suffisant de coefficients h_i dans l'expansion en séries de Laurent (2.29). En effet, il apparaît sur la figure 2.1 qu'avec $N_L \geq 4$, la solution en séries (2.29) est très proche de la solution numérique (obtenue par un schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre 4) pour $a < b_0$. Le cas particulier où $N_L = 0$ fournit une relation linéaire entre les deux nombres sans dimension a/b_0 et $1/\pi_2$ et correspond à l'approche menée par MOLINARI ET WRIGHT [98] pour la croissance d'une cavité en milieu infini. Soulignons aussi la relative précision du modèle analytique avec $N_L = 7$ coefficients jusqu'à des valeurs de

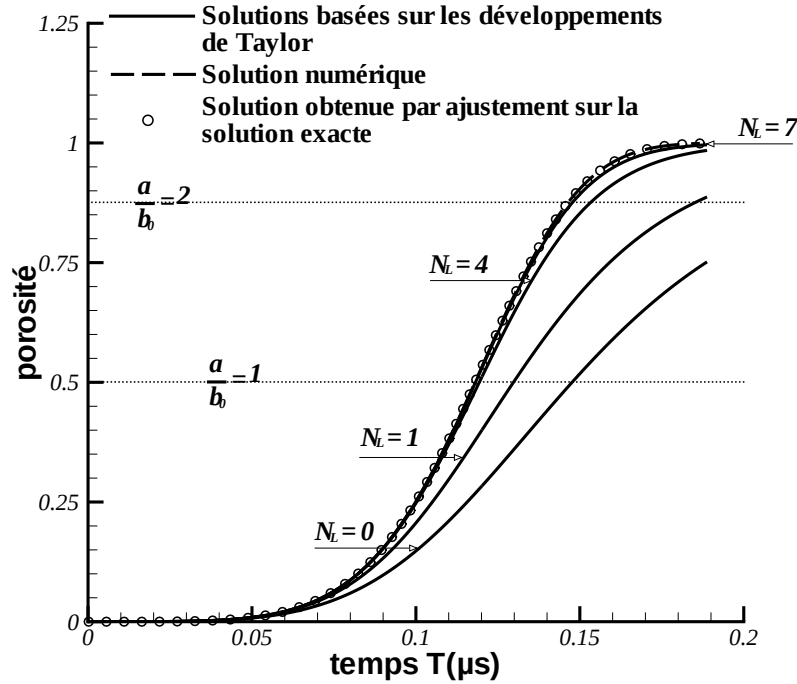


FIG. 2.2 – Croissance de la porosité en fonction du temps T défini par $T = (p - p_c)/\dot{p}$, pour un chargement linéaire à vitesse $\dot{p}$ constante. Le trait discontinu correspond à la solution numérique de l'équation (2.21). Les solutions basées sur les développements de Taylor sont obtenues par combinaison des relations (2.29) et (2.32). N_L représente le nombre de termes utilisés dans le développement en séries de Laurent de la solution analytique (2.29). Les conditions de chargement et les paramètres du matériau sont donnés par : $b_0 = 100\mu m$, $\rho = 7800 kg/m^3$ et $\dot{p} = 100 GPa/\mu s$. On reporte également (cercles) la solution basée sur un développement contenant 10 termes représentatifs et obtenue par ajustement (méthode des moindres carrés) sur la solution exacte (voir équations (2.29) et (2.33)).

a/b_0 de l'ordre de 2. Néanmoins, lorsque les termes négatifs h_8, h_9, h_{10} sont pris en compte, la solution en séries de Laurent diverge de la solution exacte pour $a/b_0 > 1$.

La figure 2.2 présente l'évolution de la porosité en fonction du temps T défini par $T = (p - p_c)/\dot{p}$. La masse volumique du matériau considéré est $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ et la matrice entourant le site de nucléation a un rayon initial $b_0 = 100 \mu\text{m}$. La vitesse de pression appliquée au motif est $\dot{p} = 100 \text{ GPa}/\mu\text{s}$. La solution basée sur l'approche analytique avec $N_L = 7$ (équations (2.29), (2.32)), et la solution obtenue par ajustement sur la solution numérique (équations (2.29), (2.33)) reproduisent avec précision le résultat exact pour une porosité pouvant atteindre une valeur de $f \simeq 0.9$ (c'est-à-dire pour $a/b_0 \simeq 2$). L'analyse dimensionnelle et l'expression de la fonction Φ (équation (2.29)) permettent de dégager les influences de différents paramètres sur la croissance de l'endommagement. En effet, le coefficient h_0 dépend de la masse volumique ρ , du rayon initial de la sphère b_0 et de la vitesse de sollicitation $\dot{p}$. Les puissances associées à chacune de ces contributions nous indiquent par exemple qu'une augmentation de la masse volumique d'un facteur λ équivaut à une diminution de la vitesse de pression du même facteur ou à une augmentation de b_0 d'un facteur $\lambda^{1/2}$.

Soulignons également que l'analyse proposée peut être étendue à l'histoire d'un vide dont le rayon initial est non nul, $a_0 \neq 0$. Dans ce cas, la fonction Φ est inchangée et son argument π_2 fait toujours apparaître une distance caractéristique liée à la quantité de matière présente dans la sphère creuse. Cette distance est obtenue en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice et la porosité f s'écrit alors : $f = a^3/(a^3 + c_0^3)$, avec $c_0 = (b_0^3 - a_0^3)^{1/3}$. Les conclusions et remarques concernant b_0 sont maintenant valables pour c_0 . Les effets d'inertie sont contrôlés par cette grandeur c_0 et lorsque c_0 augmente, l'endommagement est retardé.

2.3 Un modèle valable à partir la nucléation jusqu'aux grands temps - *Modèle III*

Sur la figure 2.3, présentant l'histoire de p^{static} en fonction de la porosité (et du temps), le trait noir correspondrait à une théorie exacte décrivant la perte de résistance de la matrice avec l'augmentation de la porosité. Nous proposons de décrire l'évolution complète d'une cavité par le **Modèle III** obtenu en faisant la jonction entre le **Modèle I** le **Modèle II** comme le montre la figure 2.3 (trait rouge). Dans le **Modèle III**, la croissance du vide est gouvernée par l'équation (2.3) où la résistance de la matrice p^{static} est donnée par :

$$p^{static} = \inf(p_c, p^{visco}) . \quad (2.34)$$

Cette définition de p^{static} prend en compte la chute de résistance de la matrice avec l'augmentation de l'endommagement et ainsi l'adoucissement du matériau favorisant l'écoulement plastique. La formulation (2.4), déduite de l'utilisation du critère de Gurson-Tvergaard

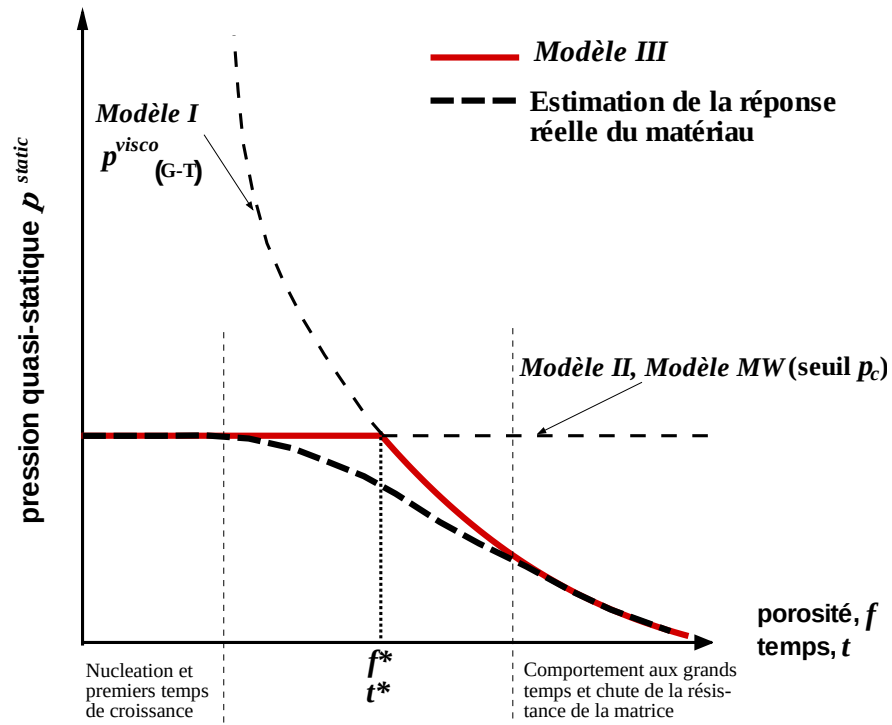


FIG. 2.3 – Evolution de la contribution quasi-statique p^{static} en fonction de la porosité (et de manière équivalente en fonction du temps) lorsque l'adoucissement de la matrice est pris en compte. p^{static} reste constant pour un temps $t \leq t^*$, alors que p^{static} décroît pour $t > t^*$ selon une formulation dérivant de l'utilisation du potentiel de G-T étendu au comportement viscoplastique (équation (2.4)). Le **Modèle MW** fait référence aux travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98] où la contribution statique est constante (comme pour le **Modèle II**) et où la contribution inertielle ne fait pas intervenir la porosité f (voir équation (2.5))

au cas viscoplastique, est utilisée pour décrire la perte de résistance de la matrice : $p^{static} = p^{visco}$ pour $f > f^*$ ($t > t^*$), avec p^{visco} donné par la relation (2.4).

Chapitre 3

Prédiction de la pression d'écaillage et analyse paramétrique

Les différents modèles qui ont été introduits précédemment sont à présent utilisés afin d'évaluer la pression d'écaillage dans le tantale. En 2003, ROY [116] a mené une étude détaillée du comportement sous chargement dynamique d'un tantale de très haute pureté et a notamment mis en évidence la dépendance de la pression d'écaillage à la vitesse de chargement dans le plan d'écaillage.

Dans un premier temps, nous nous proposons de préciser quelques éléments de l'analyse de ROY [116] qui vont nous servir à identifier les paramètres du modèle. Les résultats obtenus par les différents modèles sont ensuite comparés aux mesures expérimentales réalisées par ROY [116].

Une étude paramétrique est finalement proposée et les effets de l'inertie sur l'homogénéité de l'endommagement sont particulièrement soulignés.

3.1 Observations expérimentales réalisées par ROY [116] - Identification des paramètres

Le tantale, en raison de sa haute densité $\rho \simeq 16660 \text{ kg/m}^3$, est un matériau particulièrement sensible aux effets micro-inertiels. Une nuance de tantale très pure se caractérise par une extrême ductilité et est donc le candidat idéal à la validation d'un modèle d'endommagement dynamique ductile.

Il est reporté dans la partie bibliographie de ce manuscrit quelques éléments relatifs à l'impact de plaques et au phénomène d'écaillage en particulier. Il est rappelé ici les éléments essentiels permettant de valider l'analyse qui est menée. Dans l'essai d'impact de plaques classique (voir figure 4.2, page 69) le projectile, en frappant la cible, génère des ondes de

compression qui vont se propager de part et d'autre de la surface de contact. Lorsque ces ondes rencontrent les surfaces libres de l'impacteur puis de la cible, elles se réfléchissent en ondes de tension. Le plan d'écaillage, lieu du croisement de ces ondes à l'intérieur de la cible, est soumis à un état de tension fortement triaxial et l'écaillage peut avoir lieu si le chargement appliqué est suffisamment élevé ou si le temps de maintien est suffisamment long.

Nous allons adopter l'hypothèse admise dans la littérature, ROY [116], MOLINARI ET WRIGHT [98], que le chargement dans le plan d'écaillage peut être représenté en première approximation par une rampe linéaire de pression :

$$p = \dot{p}t, \quad \dot{p} > 0. \quad (3.1)$$

L'évolution de la pression dans le plan d'écaillage ne peut pas être mesurée de façon directe

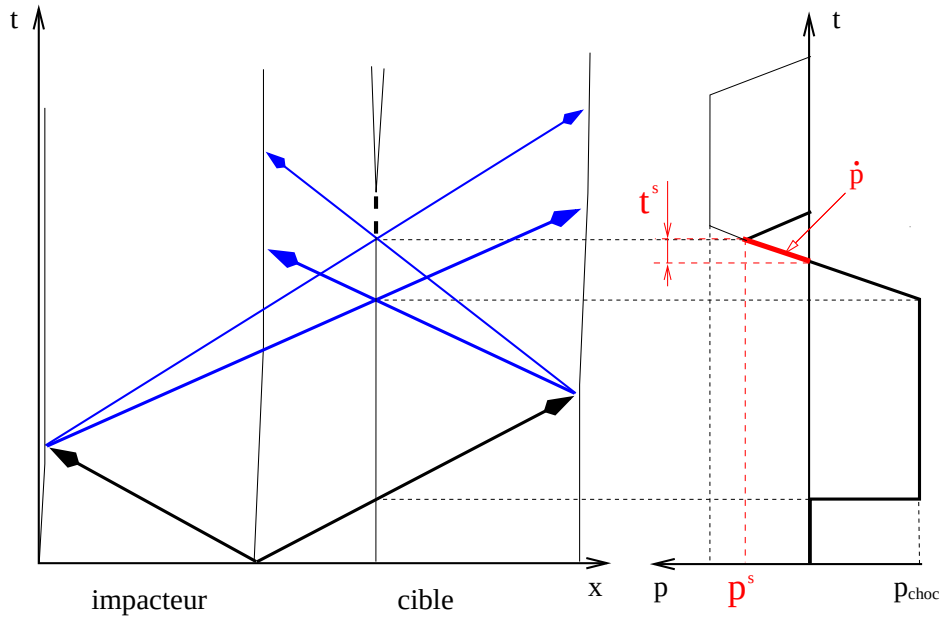


FIG. 3.1 – Evolution de la pression dans le plan d'écaillage, d'après ROY [116]. L'atténuation de la vitesse de propagation des ondes de détente dans la cible (dûe à la plasticité) est à l'origine de l'approximation de l'histoire de p dans le plan d'écaillage. La pression p appliquée est définie par une rampe linéaire et la vitesse de chargement (supposée constante) est notée $\dot{p}$. Lorsque la rupture du matériau intervient, la pression atteinte dans le plan d'écaillage est notée p^s . Le temps de maintien t^s de la sollicitation s'obtient par la relation $t^s = p^s / \dot{p}$.

et l'équation (3.1) reste une approximation de l'histoire du chargement. L'analyse du profil de vitesse mesuré en face arrière exhibe une décroissance quasi-linéaire à partir de l'instant où la face arrière décélère, voir par exemple la figure 4.8. Ceci s'explique par le comportement élastoplastique du matériau et le résultat du croisement d'ondes de tension élastiques et plastiques dans le plan d'écaillage (figure 3.1) conduit à l'approximation du chargement en rampe. On montrera dans la dernière partie du travail de thèse que cette hypothèse est

en partie justifiée et que l'écaillage du tantale, matériau très ductile, est un phénomène plus complexe et nécessite un temps de maintien assez long.

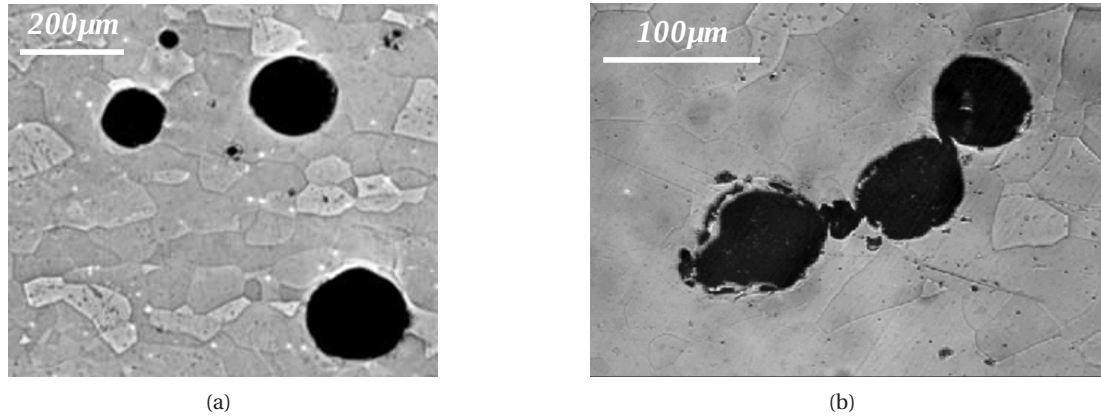


FIG. 3.2 – Micrographies d'échantillons de tantale impactés à pressions de choc modérées ($< 13 GPa$), d'après ROY [116]. (a) - mise en évidence de la croissance quasi-sphérique des cavités et validation de l'approche proposée ne tenant pas compte du changement de forme des vides. (b) - coalescence par empiètement géométrique (les cavités croissent jusqu'à ce que leurs parois se rencontrent) témoignant d'une très grande ductilité du matériau et indiquant que le processus de rupture est essentiellement gouverné par les étapes de nucléation et de croissance.

ROY [116] observe dans le tantale une germination homogène aussi bien aux joints de grains qu'à l'intérieur des grains. L'auteur observe également, comme l'illustre la figure 3.2(a), que les cavités évoluent en conservant une forme quasi-sphérique. Il note aussi que la croissance (très importante) des cavités est stable pour tous les échantillons testés avec des pressions de choc allant de 6 à $13 GPa$. En effet, la rupture se fait par empiètement géométrique et la localisation en bandes de cisaillement entre les cavités n'est pas observée, voir figure 3.2(b). Les différents éléments qui viennent d'être évoqués suggèrent que le modèle d'endommagement dynamique ductile développé dans le chapitre précédent semble approprié à la modélisation du comportement du tantale.

$\bar{p}_c$ (GPa)	σ^2 (GPa ²)	p_{oc} (GPa)	β (SU)	η (GPa)	$2b_0$ (μm)	ρ (kg/m ³)	f^s (SU)	$\dot{\epsilon}_0$ (s ⁻¹)	K (MPa)	m (SU)
3.3	0.01	3.11	2	0.216	200	16600	0.35	1	350	0.06

TAB. 3.1 – Paramètres matériau utilisés pour évaluer la contrainte d'écaillage dans le tantale.

Dans l'approche qui est proposée, la distance moyenne séparant deux sites voisins est prise constante. La valeur $2b_0 = 200 \mu m$ correspond à la mesure obtenue expérimentalement

par ROY [116], pour un impact à pression de choc relativement faible de 6GPa . Ceci conduit à une estimation du rayon extérieur de chaque cellule élémentaire $b_0 = 100\mu\text{m}$ (supposée constante quelque soit la pression de choc).

Le modèle étudié par MOLINARI ET WRIGHT [98], concernant l'évolution de cavités dans une matrice infinie, est également analysé ici. Précisons que dans leur approche, les auteurs introduisent le nombre total N de sites potentiels par unité de volume. En supposant que le domaine matériel est entièrement pavé d'un empilement de sphères denses de rayon b_0 , le lien unissant N et b_0 s'écrit :

$$N = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{b_0^3}. \quad (3.2)$$

Ainsi, la valeur choisie de $b_0 = 100\mu\text{m}$ conduit à $N \cong 239\text{mm}^{-3}$.

D'après ROY [116], le comportement mécanique du tantale à grandes vitesses de déformation peut être décrit par un modèle viscoplastique parfait. Les paramètres intervenant dans la loi puissance choisie pour le comportement de la matrice (K , m , $\dot{\epsilon}_0$ dans l'équation (2.2)) sont déterminés à partir de courbes de consolidation du tantale présentées par ROY [116]. Les valeurs adoptées pour $\dot{\epsilon}_0$, K et m (voir tableau 3.1) conduisent à une limite d'écoulement de la matrice de 529.7MPa à 10^3s^{-1} et de 698.3MPa à 10^5s^{-1} , en bon accord avec les mesures obtenues dans le tantale [116].

Dans l'approche que nous proposons, la pression de cavitation varie d'un site à un autre. Cette variation est décrite par une densité de probabilité de Weibull. Les pressions de nucléation sont supposées distribuées de façon relativement serrée autour de la valeur moyenne $\bar{p}_c = 3.3\text{GPa}$ estimée sur la base de mesures expérimentales. Il existe plusieurs méthodes pour évaluer la pression seuil d'initiation de l'endommagement. Expérimentalement, il est possible par exemple de positionner un matériau arrière avant l'impacteur et d'en faire varier l'impédance au cours d'essais à même vitesse d'impact. La pression générée à l'intérieur de la cible va alors varier. ROY [116] estime par cette méthode une pression d'initiation de l'endommagement de 3.2GPa avec une incertitude de $\pm 0.2\text{GPa}$. Il est possible également d'approcher la pression de cavitation par une analyse théorique comme celle décrite dans la partie bibliographie (section 3.1.2, page 57) basée sur l'expansion d'un vide dans une matrice infinie. La figure 1.1 page 126 montre l'allure de la distribution de pressions de nucléation avec les paramètres reportés dans le tableau 3.1. Avec le paramètre de forme de la loi de Weibull $\beta = 2$ (voir équation (1.1), page 125), la probabilité de trouver un site de nucléation avec une pression d'activation $p_c > p_{oc} + 9\sigma_w$ est négligeable. Le schéma de discrétisation adopté est présenté au chapitre 1 (section 1.1, page 125).

Chaque cellule élémentaire subit le chargement appliqué aux frontières du VER (approche

de type « Reuss »). Lorsque la pression p atteint la valeur critique p_c d'un site donné, un vide apparaît spontanément au cœur de la sphère dense de rayon b_0 et son évolution est gouvernée par la loi constitutive (2.3) où p^{static} peut prendre différentes expressions en fonction du modèle considéré.

La rupture finale du matériau (coalescence des vides par empiètement géométrique) est supposée avoir lieu lorsque la porosité globale f_{tot} atteint une valeur critique f^s . Ce concept de porosité critique est utilisé dans la plupart des travaux traitant de l'endommagement ductile dynamique avec application à l'écaillage (JOHNSON [73], JOHNSON ET ADDESSIO [74], EF-TIS ET NEMES [42]). En dessous de f^s , l'endommagement est cumulé par croissance de vides. ROY [116] observe des valeurs de porosité dans le plan d'écaillage de l'ordre de 0.35, valeur de f^s retenue dans notre analyse.

3.2 Confrontation modélisation/expériences

La figure 3.3(a) montre l'influence de la vitesse de chargement sur la contrainte à l'écaillage, définie comme la pression à laquelle la porosité totale atteint la valeur limite $f_{tot} = f^s$. La vitesse de chargement $\dot{p}$ varie de $5\text{GPa}/\mu\text{s}$ à $15\text{GPa}/\mu\text{s}$. La contrainte d'écaillage est déduite du profil de face arrière sur la base de la formulation proposée par ROMANCHENKO ET STEPANOV [115] (relations (4.25) à (4.27) dans la partie bibliographie, page 81). Les résultats expérimentaux (♦) montrent une augmentation de la contrainte d'écaillage en fonction de la vitesse de sollicitation. Cette tendance est reproduite par les différents modèles discutés auparavant. L'analyse de MOLINARI ET WRIGHT [98], où l'interaction entre vides n'est pas prise en compte, surestime le niveau de la pression maximale atteinte dans le plan d'écaillage en comparaison avec les prédictions obtenues par le **Modèle II**, qui lui, considère le couplage entre la porosité et la contribution inertielle. Le **Modèle III**, qui tient compte en plus de la chute de résistance de la matrice, restitue assez fidèlement les mesures expérimentales. Ainsi, dans le **Modèle III**, la porosité apparaît dans deux termes différents, p^{static} et la contrainte inertielle.

Pour un matériau très ductile comme le tantale, l'influence de f sur l'inertie et sur p^{static} est un élément indispensable à prendre en compte dans le modèle d'endommagement dynamique ductile. Dans cette étude, les pressions de nucléation sont distribuées suivant une loi de probabilité de Weibull. Les paramètres utilisés (tableau 3.1) sont estimés en admettant que les pressions d'activation des sites sont resserrées autour de $\bar{p}_c = 3.3\text{GPa}$. Cependant, la valeur moyenne $\bar{p}_c$ n'est pas une donnée accessible et nous aurions pu supposer une dis-

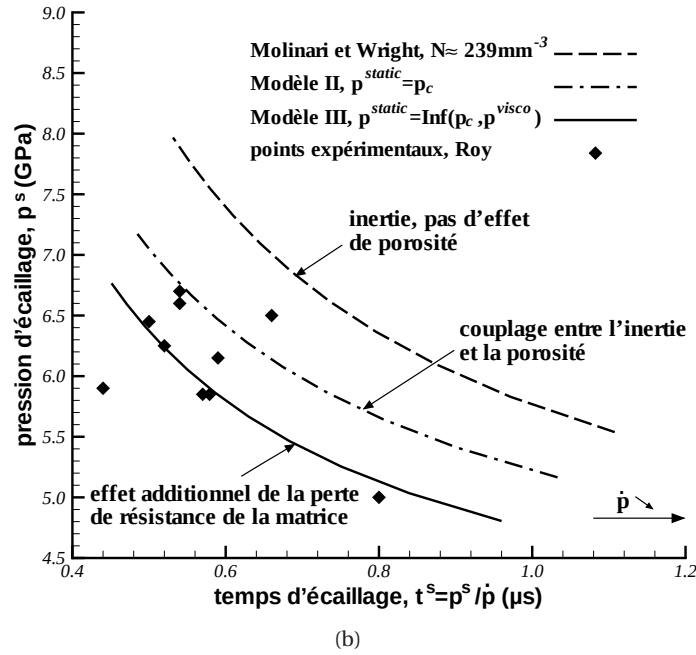
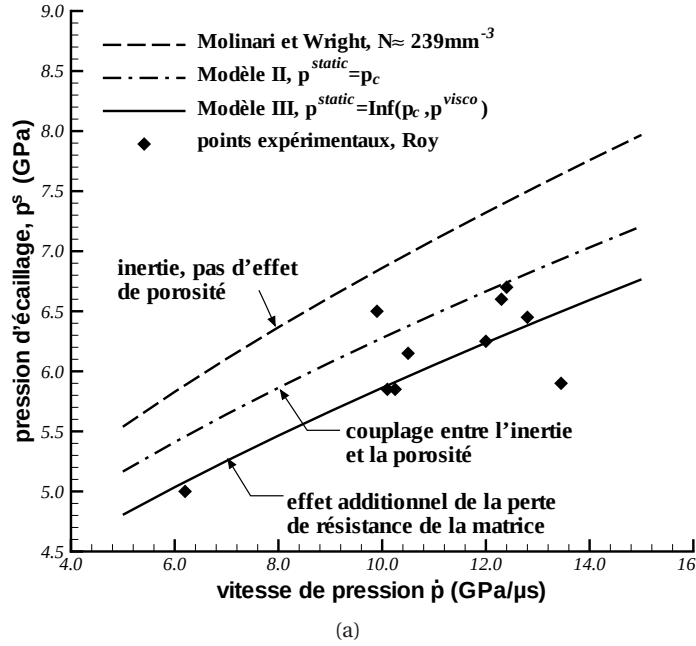


FIG. 3.3 – Comparaison des résultats expérimentaux de pressions d'écaillage dans le tantale (ROY [116]) avec les différents modèles proposés. Les paramètres utilisés pour les calculs sont reportés dans le tableau 3.1. Le nombre N , utilisé dans les travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98], désigne le nombre de sites potentiels par unité de volume. (a) - pression d'écaillage p^s en fonction de la vitesse de pression $\dot{p}$. Le **Modèle III** (trait continu) tient compte d'éléments physiques du processus de rupture ductile et montre une bonne corrélation avec les mesures expérimentales ($\blacklozenge$). (b) - représentation équivalente de l'évolution de p^s en fonction du temps à rupture $t^s = p^s / \dot{p}$.

tribution plus large de pressions critiques. Cependant, les mêmes tendances auraient été observées et auraient conduit aux mêmes conclusions.

La figure 3.3(b) montre l'évolution de la pression d'écaillage p^s en fonction du temps critique t^s (voir figure 3.1). Cette représentation est très courante dans l'analyse de la rupture par écaillage (voir par exemple CHEVRIER ET KLEPACZKO [23] pour l'aluminium ou encore BOIDIN ET AL. [10] pour des résultats sur un alliage de titane) et nous renseigne sur les échelles de temps rencontrées lors de tests d'impact (autour de la microseconde). Les résultats des figures 3.3(b) et 3.3(a) sont similaires via la relation $t^s = \frac{p^s}{\dot{p}}$.

3.3 Analyse paramétrique

Nous allons tout d'abord mettre en évidence l'influence de la vitesse de chargement sur la distribution de l'endommagement (au travers de la proportion de sites activés et la distribution de rayons de vide) lorsque la porosité totale atteint f^s . Les différents modèles (le **Modèle MW** faisant référence aux travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98], le **Modèle II** et le **Modèle III**) prenant en compte ou non l'interaction entre les vides, sont comparés en considérant un matériau sain soumis à un chargement en rampe de pression exprimé par la relation (3.1).

Les paramètres du matériau sont proches de ceux utilisés dans MOLINARI ET WRIGHT [98] pour décrire un acier (voir tableau 3.2). La valeur de $2b_0 = 20\mu m$, distance moyenne in-

$\bar{p}_c$ (GPa)	σ_w^2 (GPa ²)	p_{oc} (GPa)	β (SU)	η (GPa)	$2b_0$ (μm)	ρ (kg/m ³)	f^s (SU)	$\dot{\varepsilon}_0$ (s ⁻¹)	K (MPa)	m (SU)
2.5	0.2	1.64	2	0.965	20	7800	0.05	1	250	0.02

TAB. 3.2 – Paramètres matériau utilisés pour évaluer la contrainte d'écaillage dans un acier.

ter sites, représente une densité de sites potentiels de nucléation définie par MOLINARI ET WRIGHT [98] (équation (3.2)) égale à $N \cong 239.10^3 \text{ mm}^{-3}$.

La figure 3.4(a) présente la densité de distribution de porosité exprimée par :

$$p_c \mapsto h(p_c) = \frac{f(p_c)b^3(p_c)W(p_c)}{\int_{p_{oc}}^{p_{oc}+9\sigma_w} b^3(p_c)W(p_c)dp_c}, \quad (3.3)$$

pour les trois modèles lorsque la porosité totale atteint $f^s = 0.05$. p^s désigne la pression d'écaillage atteinte pour $f_{tot} = f^s$. Notons que $\int_{p_1}^{p_2} h(p_c)dp_c$ représente la porosité globale

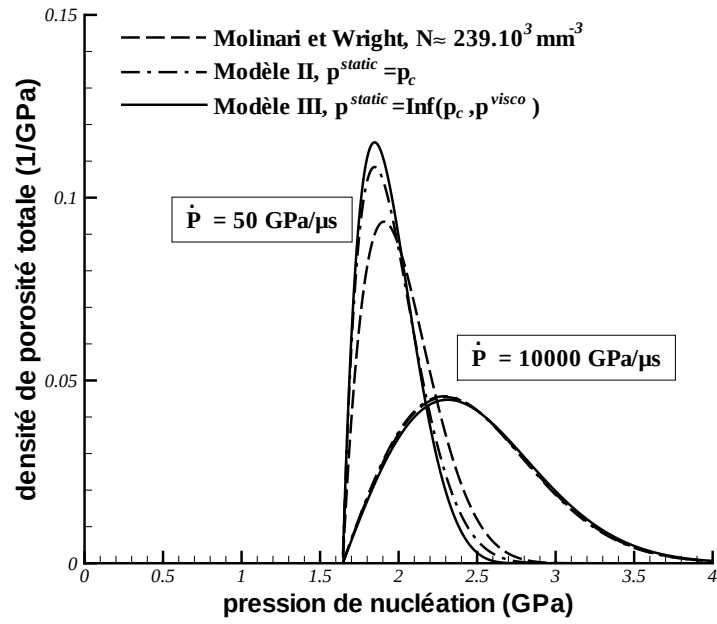
associée aux sites de nucléation compris dans l'intervalle $p_1 \leq p_c \leq p_2$. Deux vitesses de chargement $\dot{p} = 50 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ et $\dot{p} = 10000 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ sont considérées. Soulignons que f^s , donnée par $f^s = \int_{p_{oc}}^{p^s} h(p_c) dp_c$ correspond à l'aire sous chacune des courbes de la figure 3.4(a). Pour $\dot{p} = 50 \text{ GPa}/\mu\text{s}$, le nombre de sites activés prédit par le **Modèle MW** est plus important que pour les deux autres modèles. En effet, la valeur de p^s est plus grande pour le **Modèle MW** (voir tableau 3.3).

vitesse de pression $\dot{p}$ (GPa/ μs)	Modèles	pression d'écaillage p^s (GPa)	temps à rupture t^s (μs)	rayon a_{dom} du vide dominant (μm)	pression de nucléation de V_{dom} (GPa)	proportion de sites activés (%)
50	Modèle MW	3.29	0.066	5.72	1.908	94.52
	Modèle II	3.16	0.063	6.50	1.847	91.47
	Modèle III	2.90	0.058	6.63	1.847	81.63
10000	Modèle MW	38.11	0.0038	3.78	2.300	100
	Modèle II	35.61	0.0036	3.78	2.293	100
	Modèle III	35.00	0.0035	3.76	2.316	100

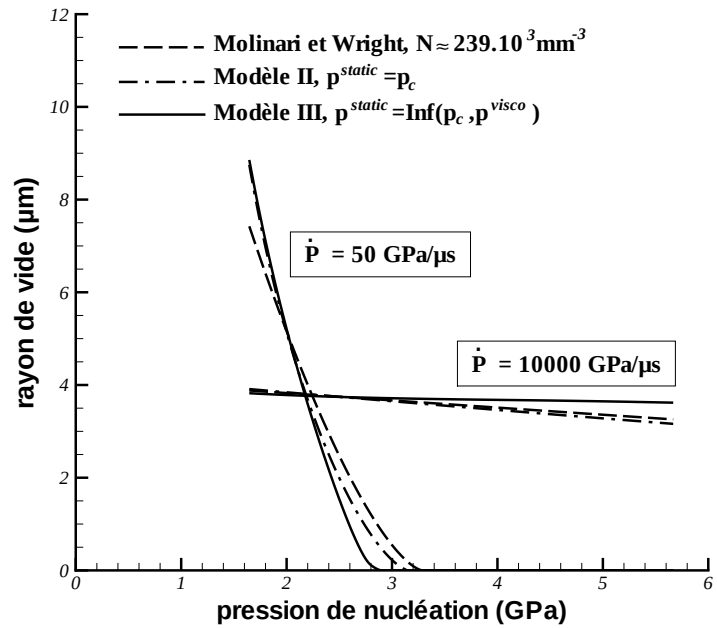
TAB. 3.3 – Résultats obtenus lorsque le matériau défini par les paramètres reportés dans le tableau 3.2 est soumis à des vitesses de pression $\dot{p} = 50 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ et $\dot{p} = 10000 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ (voir figures 3.4(a) et 3.4(b)). Le 'Modèle MW' fait référence aux travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98].

Cette observation est directement liée au temps t^s nécessaire pour cumuler la porosité critique f^s (voir tableau 3.3). En effet, pour un niveau de pression donné, le couplage entre la porosité et la contribution inertielle accélère la croissance du vide. L'écaillage apparaîtra alors plus rapidement avec le **Modèle II** qu'avec le **Modèle MW**. Dans le même esprit, la prise en compte du couplage entre la porosité et la chute de résistance de la matrice conduit à des vitesses de croissance de vides plus importantes. La porosité critique est alors atteinte plus tôt (c'est-à-dire pour une pression p^s plus faible) avec le **Modèle III** comparativement au **Modèle II**. Ainsi, lorsque l'écaillage intervient, le nombre de sites activés est le plus faible pour le **Modèle III**, et le plus grand pour le **Modèle MW**. A très grande vitesse de chargement, $\dot{p} = 10000 \text{ GPa}/\mu\text{s}$, les trois modèles donnent des résultats très comparables sur la distribution de porosité. Dans ce cas, tous les sites de nucléation sont activés et les courbes de distribution de porosité sur la figure 3.4(a) tendent vers la densité de probabilité de Weibull (équation (1.1), page 125) pondérée par la porosité moyenne totale ($f^s = 0.05$), témoignant d'un endommagement plus homogène.

Comme dans les travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98], le vide dominant, noté V_{dom} , est défini comme celui appartenant à la famille des vides contribuant le plus à la porosité totale. La pression de nucléation associée au vide dominant, déduite de la figure 3.4(a), correspond au maximum de la courbe de distribution de porosité (par exemple, 1.908 GPa pour le **Modèle MW** et $\dot{p} = 50 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ (voir figure 3.4(a) et tableau 3.3)). La figure 3.4(a) montre qu'une augmentation de la vitesse de chargement conduit à une augmentation de la pression de nu-



(a)



(b)

FIG. 3.4 – Influence de la vitesse de sollicitation sur la densité de probabilité de porosité (a) et sur la distribution de rayons de vides (b). Le matériau est un acier. Les paramètres caractéristiques sont reportés dans le tableau 3.1. Le nombre N , utilisé dans les travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98], désigne le nombre de sites potentiels par unité de volume. Deux vitesses de chargement $\dot{p} = 50 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ et $\dot{p} = 10000 \text{ GPa}/\mu\text{s}$ sont considérées. La porosité totale à la fin de l'essai, prise égale à $f^s = 0.05$, correspond à l'aire sous chacune des courbes de la figure (a).

cléation de V_{dom} . La valeur limite de cette pression critique est obtenue aux grands $\dot{p}$ et vaut la valeur du mode $\tilde{p}_c$ (voir équation (1.2)). En effet, à grande vitesse de chargement, toutes les cavités ont quasiment le même rayon. La famille qui participe le plus à la porosité globale est alors celle qui est affectée de la plus grande présence. Les vides dominants sont ceux associés aux sites présentant la plus grande fréquence d'apparition. La pression de cavitation associée aux sites les plus nombreux vaut donc par définition $\tilde{p}_c$.

Tous les modèles prédisent une distribution de tailles de vides plus homogène au grand $\dot{p}$, figure 3.4(b). A grande vitesse de pression, $\dot{p} = 10000 GPa/\mu s$, tous les sites sont activés et en raison des forts effets d'inertie, tous les vides ont presque la même taille. La différence entre le **Modèle III** et le **Modèle II** s'explique par la définition de p^{static} . Alors que pour le **Modèle II** elle est constante, la pression p^{static} décroît rapidement pour le **Modèle III**. Cette décroissance s'accompagne donc d'une augmentation de la contribution inertielle et au final conduit à une plus grande homogénéité à grande vitesse de chargement, comme le montre la figure 3.4(b). La figure 3.5 présente l'évolution du rayon a_{dom} du vide dominant en fonction de la vitesse de chargement. Aux grandes vitesses, tous les modèles tendent vers une valeur asymptotique. Cette valeur, notée a_{unif}^s , est obtenue en supposant que tous les sites potentiels sont activés et qu'ils ont même pression de cavitation. a_{unif}^s est alors donné par (voir équation (2.12) page 108, avec $f_0 = 0$) :

$$a_{unif}^s = b_0 \left(\frac{f^s}{1 - f^s} \right)^{1/3}. \quad (3.4)$$

L'écart entre a_{dom} et a_{unif}^s est un indicateur de l'hétérogénéité dans le matériau, MOLINARI ET WRIGHT [98]. Il est constaté qu'une diminution de la vitesse de chargement mène à une augmentation du rayon a_{dom} et ainsi à un accroissement de l'hétérogénéité des rayons de vides. Aux faibles vitesses, la différence entre les trois modèles est significative. A la vitesse de $1 GPa/\mu s$ par exemple, le **Modèle III** prédit une valeur de a_{dom} environ 8 fois supérieure à celle obtenue par le **Modèle MW**. Cette observation confirme les commentaires de la figure 3.4(a) concernant la vitesse de croissance plus importante pour le **Modèle III** que pour le **Modèle MW**.

Pour terminer cette partie, une étude de sensibilité de différents paramètres sur la valeur de la contrainte d'écaillage est proposée en adoptant le **Modèle III**. Le matériau référence est défini par les paramètres résumés dans le tableau 3.2. La figure 3.6 présente les résultats de l'étude paramétrique obtenue en faisant varier la masse volumique ρ , la porosité totale à l'écaillage f^s , la distance moyenne entre deux sites de nucléation $2b_0$ et la variance de la distribution de Weibull, σ_w^2 . L'inertie ralentit l'évolution de l'endommagement. De ce fait, augmenter la masse volumique ρ ou la quantité de matière entourant les vides b_0 conduit instantanément à une amplification des effets d'inertie et donc à une contrainte finale à

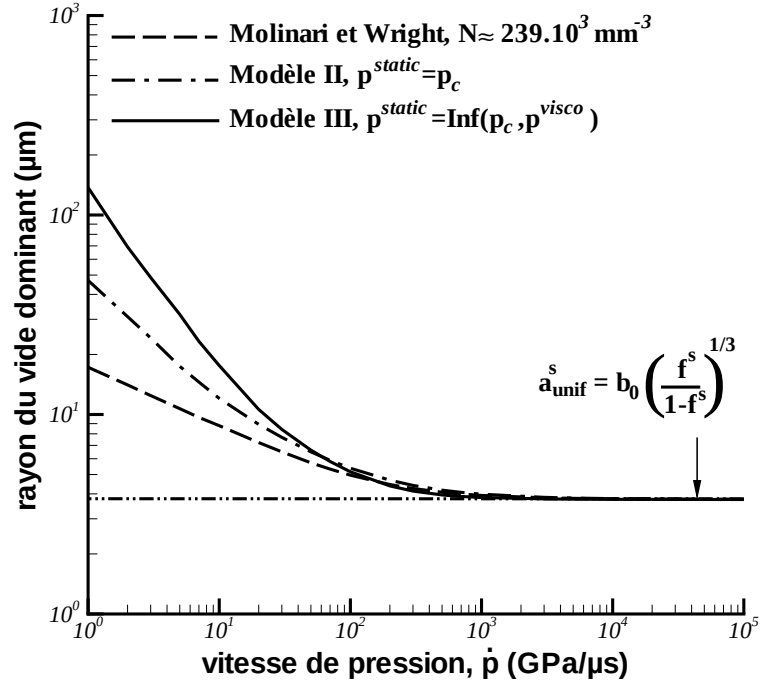


FIG. 3.5 – Effet de la vitesse de sollicitation $\dot{p}$ sur le rayon a_{dom} du vide dominant appartenant à la famille dont la contribution au niveau de porosité globale f^s ($= 0.05$) est la plus élevée (voir MOLINARI ET WRIGHT [98]). Les paramètres du matériau sont reportés dans le tableau 3.2. Le nombre N , utilisé dans les travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98], désigne le nombre de sites potentiels par unité de volume. La valeur asymptotique a_{unif}^s est obtenue en supposant que tous les sites sont activés et que tous les vides ont le même rayon (équation (3.4)). Avec les paramètres du tableau 3.2, $a_{unif}^s = 3.75 \mu m$.

rupture p^s plus grande. Lorsque la valeur de la porosité critique f^s est plus élevée, la durée de maintien t^s du chargement est indubitablement augmentée et il en est alors de même pour la pression d'écaillage $p^s = \dot{p}t^s$. Néanmoins ces tendances, dues à un ajustement de ρ , b_0 et f^s , sont moins prononcées aux faibles vitesses de chargement. Dans ce cas, les effets d'inertie deviennent négligeables et la valeur de la contrainte d'écaillage est proche de p_{oc} , le paramètre de position de la distribution de Weibull associé à la pression d'écaillage quasi-statique. En régime quasi-statique, l'expansion du vide lié à la pression de nucléation la plus faible ($\simeq p_{oc}$), est si rapide que la porosité critique f^s est atteinte presque instantanément. On observe sur la figure 3.6 que l'influence du paramètre de la distribution, σ_w^2 , devient négligeable pour les grandes vitesses de sollicitation. En fait, l'inertie va conduire à une grande homogénéité de l'endommagement et l'information concernant la distribution de pressions de nucléation disparaît. La contrainte d'écaillage ne dépend alors plus de la description sta-

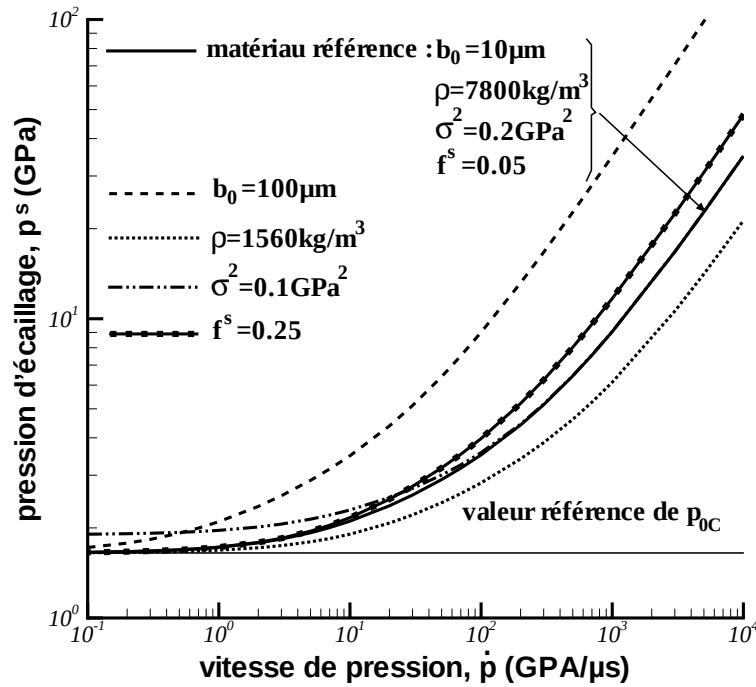


FIG. 3.6 – Effet de la masse volumique, du rayon initial de matrice contenant les sites potentiels et de la variance σ_w^2 sur l'évolution de la pression d'écaillage en fonction de la vitesse de chargement. Les paramètres du matériau référence sont reportés dans le tableau 3.2.

tistique. Ceci corrobore les commentaires et conclusions de MOLINARI ET WRIGHT [98].

Conclusion

Dans cette partie, plusieurs modèles d'endommagement dynamique ductile sont proposés et discutés. Ces modèles sont construits comme des extensions des travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98] et prennent en compte l'interaction entre les vides via l'effet de la porosité sur le terme inertiel. L'évolution d'un vide unique dans une cellule de rayon b_0 peut être obtenue analytiquement. L'analyse dimensionnelle menée afin de construire la solution nous renseigne en outre sur l'influence du volume de matrice entourant les sites potentiels (ou les cavités). Une augmentation du volume de matière conduit à un accroissement des effets inertiels et à un ralentissement de l'évolution de l'endommagement.

Dans l'approche développée par MOLINARI ET WRIGHT [98], chaque vide est isolé dans une matrice infinie et l'interaction entre les cavités n'est de ce fait pas prise en compte. Dans nos travaux, l'interaction entre cavités est prise en compte par l'introduction d'une mesure effective de la distance entre sites potentiels. Une fois nucléé, le vide commence à croître et l'évolution de son rayon est décrite par un modèle de sphère creuse ayant pour rayon extérieur initial b_0 et définissant ainsi une cellule élémentaire. Les effets d'inertie sont alors dépendants de la porosité. L'adoucissement de la matrice, dû à l'évolution de la porosité est aussi inclus dans le modèle complet.

Les différents modèles sont comparés aux valeurs expérimentales de contrainte d'écaillage obtenues par ROY [116]. Ces valeurs sont déduites de mesures de vitesses de surface libre et correspondent à la pression maximale atteinte dans le plan d'écaillage. Le modèle complet restitue l'accroissement du niveau de contrainte avec l'augmentation de la vitesse de sollicitation.

Précisons que le tantale étudié par ROY [116] se caractérise par son extrême ductilité. Le mécanisme de coalescence observé dans ce matériau, pour une gamme de pressions modérées, révèle que le processus de rupture ductile est essentiellement gouverné par la nucléation et la croissance de micro-vides. Lorsque la coalescence est le résultat de phénomènes de localisation (striction des ligaments ou cisaillement intense entre les vides), l'approche proposée doit être utilisée avec précaution car ces types d'instabilités ne sont pas pris en compte. Toutefois, si le temps associé à ce phénomène de localisation est faible devant le

temps de croissance des cavités, cette approche reste valable. Un dernier aspect abordé dans cette partie concerne les effets de l'inertie. Lorsque la vitesse de sollicitation est très importante, tous les sites de nucléation sont activés et l'information statistique disparaît. Toutes les cavités présentes à la fin du test ont une taille identique. L'étude paramétrique révèle qu'une augmentation de ρ , b_0 ou f^s , et une diminution de σ_w^2 , conduisent à une augmentation de la pression d'écaillage. Cette étude souligne aussi que l'effet de σ_w^2 (paramètre statistique) s'estompe à mesure que croît la vitesse de chargement (résultats de MOLINARI ET WRIGHT [98]).

Quatrième partie

PRISE EN COMPTE DE L'ELASTICITE DANS LE MODELE D'ENDOMMAGEMENT BASE SUR LA CROISSANCE DE VIDES. SIMULATION NUMÉRIQUE DU PHENOMENE D'ÉCAILLAGE LORS DU TEST D'IMPACT DE PLAQUES

Introduction

Dans cette partie, nous utilisons le modèle de croissance de vides présenté précédemment (*Modèle III*), tenant compte de l'effet de la porosité sur la contribution inertielle et sur la résistance de la matrice, dans la construction d'un modèle d'endommagement complet incluant le comportement élastoplastique du matériau. Nous procédons ensuite à son implantation dans le code de calculs par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT via un sous-programme utilisateur VUMAT. Une confrontation entre les profils de vitesse en face arrière mesurés expérimentalement par ROY [116] et les résultats numériques permettent de valider l'approche proposée. Les simulations numériques nous permettent de mieux comprendre dans quelle mesure l'endommagement peut se cumuler dans le plan d'écaillage. Cet élément est essentiel dans la compréhension du signal de vitesses et confirme la nécessité de prendre des précautions quant à son interprétation.

Nous présentons en premier lieu le modèle d'endommagement complet (élastoplastique) incluant l'approche développée précédemment pour contrôler l'endommagement par croissance de vides (*Modèle III*). Nous évoquons, dans le même temps, l'utilisation d'ABAQUS/EXPLICIT et les formes discrétisées des équations du modèle qui est implanté dans le code. Finalement, les résultats obtenus par simulation numérique sont comparés aux résultats expérimentaux de ROY [116] sur le tantale.

Chapitre 1

Développement et intégration numérique du modèle d'endommagement - Structure de la VUMAT et relations incrémentales

Dans ce chapitre sont présentées les équations du modèle d'endommagement. Le matériau est décrit par un comportement élasto-viscoplastique en grandes déformations. Les déformations plastiques auront deux origines : une contribution classique d'origine déviatorique et une contribution générée par la croissance des vides. Le couplage entre les deux sera en grande partie négligée (à la différence des modèles de type Gurson). Dans une seconde étape, nous explicitons les différents algorithmes de résolution utilisés en vue de l'implantation du modèle dans ABAQUS/EXPLICIT.

1.1 Equations du modèle

Nous supposons que les déformations élastiques restent faibles. Le tenseur des vitesses de déformation $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ se décompose en une partie élastique, notée $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e$, et une partie d'origine viscoplastique qui est notée $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$:

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e + \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p. \quad (1.1)$$

Le comportement hypoélastique du matériau tient compte de la dégradation des modules élastiques au cours de la croissance des vides et est donné par la relation suivante, voir ADAM [1] :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e + \underline{\underline{\dot{C}}} : \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}, \quad (1.2)$$

où $\underline{\underline{C}}$ désigne le tenseur du 4^e ordre des modules élastiques. Dans la relation (1.2), $\dot{\underline{\underline{C}}}$ désigne la dérivée temporelle de $\underline{\underline{C}}$ et traduit la variation des propriétés élastiques du matériau avec l'évolution de l'endommagement. $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}$ représente une dérivée objective du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$. Notons qu'il existe plusieurs manières de définir une mesure objective du taux de contraintes. A titre d'exemple, le logiciel de calculs par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT utilise la dérivée de Jaumann ou encore celle de Green-Naghdi lorsqu'un sous-programme utilisateur VUMAT est sollicité.

Nous considérons que le matériau est élastique linéaire isotrope et dans ce cas, la loi de Hooke permet d'écrire le tenseur $\underline{\underline{C}}$ sous la forme :

$$\underline{\underline{C}} = \lambda \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{I}} = \left(k - \frac{2}{3}\right) \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{I}}, \quad (1.3)$$

où $\underline{\underline{I}}$ désigne le tenseur identité d'ordre 4. λ, μ sont les constantes de Lamé du matériau et k désigne le module de compressibilité défini par $3k = 2\mu + 3\lambda$. Dans l'analyse que nous développons, le traitement des parties sphérique et déviatorique se fait de manière découplée (mais le couplage est tout de même présent au travers de l'influence de l'endommagement sur les modules élastiques et sur la surface de charge déviatorique comme nous le verrons plus loin). Ainsi, en notant $\dot{p}$ la partie sphérique (objective en raison de sa qualité d'invariant) du tenseur taux de contrainte $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}$, et $\overset{\nabla}{\underline{\underline{s}}}$ son déviateur, la combinaison des relations (1.1), (1.2) et (1.3) conduit à :

$$\dot{p} = \frac{\dot{k}}{k} p + 3k(\dot{\varepsilon}_m - \dot{\varepsilon}_m^p), \quad (1.4a)$$

$$\overset{\nabla}{\underline{\underline{s}}} = \frac{\dot{\mu}}{\mu} \underline{\underline{s}} + 2\mu(\dot{\underline{\underline{e}}} - \dot{\underline{\underline{e}}}^p), \quad (1.4b)$$

où $\underline{\underline{s}}, \dot{\underline{\underline{e}}}$ et $\dot{\underline{\underline{e}}}^p$ sont les déviateurs des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{e}}$ et $\underline{\underline{e}}^p$ respectivement, $p, \dot{\varepsilon}_m$ et $\dot{\varepsilon}_m^p$ leur partie hydrostatique.

En dynamique, plusieurs modèles existent pour traduire le lien entre pression et déformation sphérique. Par exemple, pour des vitesses d'impact très élevées de l'ordre de $6km/s$, EFTIS ET AL. [40] utilisent une équation d'état de type Mie-Grüneisen (paragraphe 4.2.1.3, page 74) où la pression est fonction de la densité et de l'énergie interne du matériau. Ce comportement élastique non linéaire est justifié par les grandes déformations volumiques et les effets de température conséquents pour les gammes de vitesses d'impact modélisées dans les travaux de EFTIS ET AL. [40]. Notre volonté est de simuler les conditions de tests expérimentaux de ROY [116] pour lesquels la vitesse d'impact est inférieure à $500m/s$. Dans une étude préliminaire, nous avons conduit deux simulations d'impact de plaques (sans prise en compte de l'endommagement). Dans la première, la relation entre pression et déformation sphérique est gouvernée par la loi de Hooke incrémentale (équation (1.4)). Dans la seconde,

une loi de type Mie-Grüneisen est utilisée (diponible dans le logiciel ABAQUS/EXPLICIT). Nous avons constaté que la distribution des pressions dans la plaque impactée est pratiquement identique pour les deux configurations. Fort de ce constat, nous avons décider d'adopter la loi de Hooke incrémentale pour gouverner la réponse élastique du matériau.

Nous reprécisons que les modules élastiques varient en fonction de l'endommagement. Ainsi, dans les relations (1.4a) et (1.4b), k et μ sont des modules effectifs du matériau endommagé. A mesure que l'endommagement croît, les propriétés élastiques du matériau chutent. Plusieurs modèles traduisant cet influence de l'endommagement sur les modules élastiques sont disponibles dans la littérature. Nous avons choisi l'approche proposée par JOHNSON [73] où les modules k et μ s'expriment par :

$$k = k_0(1 - f) \frac{4\mu_0}{3k_0f + 4\mu_0}, \quad \mu = \mu_0(1 - f) \left(1 - \frac{6k_0 + 12\mu_0}{9k_0 + 8\mu_0} f \right). \quad (1.5)$$

Les grandeurs indicées d'un zéro correspondent aux modules élastiques du matériau dans son état initial ($f = 0$). D'autres expressions existent et on peut citer par exemple les développements de DUYSINX [39] obtenus à l'aide d'un schéma d'homogénéisation de type Mori-Tanaka. La définition du module de compressibilité k donnée par (1.5) est identique à celle proposée dans l'analyse de MACKENZIE [91] en 1950. En revanche, l'expression du module de cisaillement est différente et tient compte de la perte complète de résistance en cisaillement pour une porosité $f = 1$. Notons que le module de cisaillement effectif peut se mettre sous la forme :

$$\mu = \mu_0 [(1 - F_0f) + (F_0 - 1)f^2], \quad \text{avec} \quad F_0 = \frac{15k_0 + 20\mu_0}{9k_0 + 8\mu_0}. \quad (1.6)$$

Dans le cas dilué $f \ll 1$, l'expression du module de cisaillement de MACKENZIE [91] est retrouvé. Cette approche, couramment utilisée, est adoptée dans les travaux de CURRAN ET SEAMAN [30], CAMPAGNE [19], IKKURTHI ET CHATURVEDI [72].

Dans le modèle d'endommagement que nous proposons, les parties sphérique et déviatorique sont découplées. Pour cela, la partie déviatorique du tenseur des contraintes et des déformations est gouvernée par une loi de plasticité de type Prandtl-Reuss, donc sans effet de la contrainte hydrostatique sur le critère de plasticité. Nous considérons également que l'évolution de la porosité est gouvernée par les composantes sphériques des tenseurs des contraintes et des déformations.

1.1.1 Partie déviatorique

1.1.1.1 Loi de comportement

Aux grandes vitesses de chargement, le comportement viscoplastique de la matrice est sensible à la vitesse et tient compte en plus de l'écrouissage. La limite d'écoulement est décrite par une loi puissance :

$$\sigma_y = K(\varepsilon_0 + \varepsilon^p)^n (\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}^p)^m, \quad (1.7)$$

où ε_0 et $\dot{\varepsilon}_0$ sont des déformation et vitesse de déformation plastiques de référence. K est un paramètre d'ajustement du niveau de la limite d'élasticité, n et m sont les coefficients d'écrouissage et de sensibilité à la vitesse de déformation. La variable ε^p représente la déformation plastique cumulée et est liée à la vitesse de déformation plastique équivalente $\dot{\varepsilon}^p$ par la relation :

$$\varepsilon^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}^p dt. \quad (1.8)$$

L'effet de la température est susceptible d'influencer la rhéologie du matériau pour des sollicitations très rapides (vitesses d'impact de $2km/s$ à plus de $30km/s$, EFTIS ET AL. [41]). Pour simuler le test d'impact de plaques pour des pressions de choc modérées et des vitesses d'impact $< 500m/s$, EFTIS ET AL. [41] ont montré que l'effet de la température n'était pas significatif.

1.1.1.2 Plasticité déviatorique et surface de charge du matériau endommagé

La surface de plasticité de la matrice poreuse est décrite par une fonction de charge, notée Φ_d , qui tient compte de la présence des vides dans le matériau. En supposant l'écrouissage isotrope, elle est définie par :

$$\Phi_d = \frac{\sigma_{eq}}{1 - \alpha f^\beta} - \sigma_y(\varepsilon^p, \dot{\varepsilon}^p) = 0, \quad (1.9)$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente au sens de von Mises et σ_y est la limite d'écoulement de la matrice définie par l'équation (1.7). α et β sont des paramètres d'ajustement contrôlant l'influence de l'endommagement sur la surface de plasticité. Plusieurs couples (α, β) sont proposés dans la littérature et nous adoptons les valeurs $\alpha = 1/(f^s)^{0.5}$ et $\beta = 0.5$ (PERZYNA [107], EFTIS ET AL. [45], EFTIS ET NEMES [43], ŁODYGOWSKI ET PERZYNA [90]).

En cas de charge plastique, le tenseur déviateur des vitesses de déformation plastique, de part la règle de normalité, s'écrit :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{3\dot{\varepsilon}^p}{2\sigma_{eq}} \underline{s}, \quad (1.10)$$

où $\dot{\varepsilon}^p$ est la vitesse de déformation plastique équivalente. Notons que dans le cas d'un matériau sain ($f = 0$) les relations (1.9) et (1.10) se réduisent au critère de plasticité isotrope de

von Mises. Comme précisé précédemment, la partie déviatorique ne participe pas à l'évolution de l'endommagement.

1.1.2 Partie sphérique

1.1.2.1 Croissance avec effets de micro-inertie - *Modèle III*

La partie sphérique va contrôler la croissance de l'endommagement au moyen du **Modèle III** développé dans la partie précédente. L'influence de la porosité sur les effets micro-inertiels ainsi que la diminution de la résistance de la matrice avec l'évolution de l'endommagement sont pris en compte.

Le matériau étudié est supposé ne contenir initialement aucune cavité mais des sites potentiels de nucléation dans le VER (voir partie précédente). La distribution des pressions d'activation des sites est décrite par une loi de probabilité de Weibull (équation (1.1), page 125). Dans la partie III du manuscrit de thèse, tous les sites potentiels sont supposés entourés d'une matrice sphérique de rayon initial b_0 représentant la demi-distance moyenne séparant deux sites voisins. En réalité, avec l'augmentation de la pression, le nombre de sites activés croît et la distance inter sites diminue. Cet aspect sera dorénavant inclus dans la modélisation. Dès qu'un nouveau vide est nucléé, le volume de matrice entourant les cavités déjà présentes dans le matériau est redistribué uniformément sur tous les sites. Nous proposons dans la section 1.3 de ce chapitre d'évoquer plus précisément la manière dont est gérée l'activation des nouveaux sites.

Lorsqu'un vide est nucléé à partir d'un site i donné, l'évolution de son rayon est gouvernée par l'équation (voir relations (2.3), (2.34) et figure 2.3 de la partie précédente) :

$$p_i - p_i^{static} = \rho \left[a_i \ddot{a}_i \left(1 - f_i^{1/3} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}_i^2 \left(1 - \frac{4}{3} f_i^{1/3} + \frac{1}{3} f_i^{4/3} \right) \right], \quad (1.11)$$

avec $f_i = a_i^3/b_i^3$ la porosité locale. L'évolution de cette dernière grandeur est donnée par l'incompressibilité plastique de la matrice :

$$\dot{f}_i = 3(1 - f_i) f_i \frac{\dot{a}_i}{a_i}. \quad (1.12)$$

La porosité globale est définie par :

$$f = \frac{V_v}{V}, \quad (1.13)$$

où V_v désigne le volume de vides et V le volume du VER. Le taux de croissance de la porosité globale $\dot{f}$ est aussi gouverné par l'incompressibilité plastique de la matrice et conduit à :

$$\dot{f} = 3(1 - f) \dot{\epsilon}_m^p. \quad (1.14)$$

Dans la loi d'évolution du vide (1.11), $p_i^{static} = \text{Inf}(p_{c_i}, p_i^{visco})$ représente la résistance de la matrice à la nucléation du vide et à sa croissance. p_i^{visco} désigne la contribution d'origine

viscoplastique et est issue du critère de Gurson-Tvergaard (nous proposons une formulation explicite de p_i^{visco} dans le paragraphe suivant).

Parmi les deux schémas possibles d'homogénéisation discutés dans la deuxième partie du manuscrit, nous adoptons l'approche de type « Reuss ».

1.1.2.2 Evaluation de la partie quasi-statique : utilisation du critère de Gurson-Tvergaard

Afin d'alléger les notations, les indices i précisant qu'il s'agit de grandeurs locales associées à un site donné i , n'apparaissent pas dans ce paragraphe. La chute de résistance de la matrice avec l'augmentation de la porosité est une nouvelle fois estimée à partir du critère de Gurson-Tvergaard. L'analyse est similaire à celle développée dans la deuxième partie du manuscrit pour un comportement viscoplastique en loi puissance (voir section 1.1, page 97). Dans le cadre de notre étude, la relation liant les quantités microscopiques « effectives » $\bar{\varepsilon}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ et $\bar{\sigma}$ est donnée par la loi de comportement de la matrice (équation (1.7)) :

$$\bar{\sigma} = K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n (\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\bar{\varepsilon}})^m. \quad (1.15)$$

Pour un chargement sphérique, la contrainte $\bar{\sigma}$ est donnée par (voir aussi l'équation (1.16) page 99) :

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{2} q_2 p^{visco} \frac{1}{\ln[1/(q_1 f)]}. \quad (1.16)$$

En utilisant l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice, l'équivalence du travail plastique conduit à l'expression de la vitesse de déformation microscopique $\dot{\bar{\varepsilon}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}} &= \frac{p^{visco}}{\bar{\sigma}} \frac{\dot{f}}{(1-f)^2} \\ &= \frac{2}{3q_2} \ln\left(\frac{1}{q_1 f}\right) \frac{\dot{f}}{(1-f)^2}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

où $\bar{\sigma}$ a été remplacé par son expression (1.16). La déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}$ est obtenue par intégration de la vitesse de déformation $\dot{\bar{\varepsilon}}$. En remarquant que :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\ln[1/(q_1 f)]}{1-f} \right\} = \frac{\ln[1/(q_1 f)] \dot{f}}{(1-f)^2} - \frac{1}{1-f} \frac{\dot{f}}{f}, \quad (1.18)$$

la déformation $\bar{\varepsilon}$ s'écrit :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3q_2} \ln \left[\frac{[1/(q_1 f)]^{f/(1-f)}}{1-f} \right]. \quad (1.19)$$

En utilisant (1.17), (1.19), (1.15) dans (1.16), la pression p^{visco} est alors définie par :

$$\begin{aligned} p^{visco} &= \frac{2K}{3q_2} \ln\left(\frac{1}{q_1 f}\right) \left\{ \varepsilon_0 + \frac{2}{3q_2} \ln \left[\frac{[1/(q_1 f)]^{f/(1-f)}}{1-f} \right] \right\}^n \dots \\ &\dots \left\{ \dot{\varepsilon}_0 + \frac{2}{3q_2} \ln\left(\frac{1}{q_1 f}\right) \frac{\dot{f}}{(1-f)^2} \right\}^m. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Au final, dans l'équation (1.11), p^{static} est définie par : $p^{static} = \text{Inf}(p_c, p^{visco})$ où p^{visco} est donnée par (1.20).

1.2 Schémas d'intégration et algorithmes de résolution

1.2.1 Présentation d'ABAQUS/EXPLICIT

Pour simuler le test d'impact de plaques, nous allons utiliser le logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT dédié aux problèmes dynamiques, avec un sous-programme utilisateur appelé VUMAT.

La résolution d'un problème dynamique par un code de calculs tel que ABAQUS/EXPLICIT passe obligatoirement par sa discrétisation en espace et en temps. De nombreux ouvrages de mécanique et d'analyse numérique traitant des éléments finis sont disponibles dans la littérature (voir par exemple ZIENKIEWICZ ET TAYLOR [156], BONNET [12], DARIDON [33]).

La discrétisation dans l'espace est basée sur la méthode des éléments finis et la discrétisation dans le temps est réalisée par l'utilisation de schémas d'intégration aux différences finies. Comme la plupart des logiciels de « dynamique explicite », ABAQUS/EXPLICIT utilise la méthode des différences centrées pour intégrer dans le temps les équations du mouvement. Le schéma aux différences centrées est conditionnellement stable et la stabilité est basée sur la condition de Courant, Friedrich et Levy (FRIED [46]). Cette condition stipule que sur la durée d'un pas de temps, un front d'onde élastique ne doit pas parcourir une distance supérieure à la taille de la plus petite maille de la structure discrétisée. Cela se traduit par l'expression du pas de temps critique Δt^{cri} en fonction de L_{min} la largeur de la plus petite maille comme :

$$\Delta t^{cri} = \frac{L_{min}}{c_d}, \quad (1.21)$$

où c_d s'exprime, dans le cas d'un matériau élastique isotrope, par :

$$c_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}. \quad (1.22)$$

Le logiciel ABAQUS/EXPLICIT estime au cours du temps la limite de stabilité et ajuste en conséquence le pas de temps. Il est important de noter que le pas de temps proposé par le code éléments finis assure la stabilité de l'intégration dans le temps du comportement dynamique de la structure. Cela ne signifie en aucun cas que la discrétisation temporelle est suffisamment fine pour intégrer correctement la loi de comportement, plus particulièrement lorsque cette loi est implantée dans un sous-programme utilisateur tel que VUMAT.

Après résolution des équations du mouvement en chaque point de Gauss de la structure discrétisée, le code de calculs ABAQUS/EXPLICIT évalue l'incrément de déformation $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{t+\Delta t} - \underline{\underline{\varepsilon}}_t$ dans le pas de temps Δt , à partir du déplacement actualisé. Dans la suite, on notera $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_m$. L'incrément de déformation est ensuite utilisé par le sous-programme utilisateur VUMAT qui est en charge de mettre à jour les contraintes et les variables internes éventuelles en utilisant la loi de comportement du matériau.

Dans les paragraphes suivants, nous proposons d'établir les relations du modèle (discrétisées dans le temps) et de présenter l'algorithme de résolution de l'ensemble des équations du comportement. Précisons les notations qui vont être utilisées. $\Delta(\cdot)$ désigne la variation de la grandeur $(\cdot)$ dans le pas de temps Δt et est définie par $\Delta(\cdot) = (\cdot)_{(t+\Delta t)} - (\cdot)_{(t)}$.

1.2.2 Partie sphérique - Algorithme du point fixe et schémas de Newmark

La forme additive (1.1) de la vitesse de déformation conduit à :

$$\Delta \varepsilon_m = \Delta \varepsilon_m^e + \Delta \varepsilon_m^p. \quad (1.23)$$

A partir de la relation (1.4a), la pression au temps $(t + \Delta t)$ est donnée au 1^e ordre par ¹ :

$$p_{(t+\Delta t)} = \left(1 + \frac{\Delta k}{k_{(t)}}\right) [p_{(t)} + 3k_{(t)} (\Delta \varepsilon_m - \Delta \varepsilon_m^p)], \quad (1.24)$$

On rappelle que l'incrément de déformation plastique $\Delta \varepsilon_m^p$ est relié à la porosité globale du domaine matériel via (1.14), et donc aux rayons des vides dans ce domaine. La croissance de chaque cavité est gouvernée par l'équation (1.11). La résolution de ce couplage et la détermination de l'incrément de déformation plastique $\Delta \varepsilon_m^p$ sont réalisées par l'utilisation de l'algorithme itératif du point fixe.

Le point de départ de ce schéma de résolution est obtenu en considérant que la pression résulte d'une évolution purement élastique de la déformation totale. De (1.24), avec $\Delta \varepsilon_m^p = 0$, $\Delta f = 0$, $\Delta k = 0$, il vient :

$$p_{(t+\Delta t)} = p_{(t)} + 3k_{(t)} \Delta \varepsilon_m. \quad (1.25)$$

Commence alors la procédure itérative. Compte tenu du schéma d'homogénéisation de type « Reuss » adopté, la pression $p_{(t+\Delta t)}$ est identique pour tous les sites. Cette prédiction est utilisée pour actualiser le rayon $a_{i(t+\Delta t)}$ d'un site donné i en résolvant l'équation (1.11) qui,

¹lorsqu'on écrit par exemple $\Delta p = \dot{p} \Delta t$, il est possible de choisir $\dot{p}$ au temps t (résolution explicite), au temps $t + \Delta t$ (résolution implicite) ou entre les deux (résolution semi-implicite). Le schéma explicite est plus simple mais le schéma implicite se caractérise par une plus grande robustesse. Nous adoptons ce dernier et dans ce cas $\Delta p = \dot{p}_{(t+\Delta t)} \Delta t$.

sous forme incrémentale, s'écrit :

$$p_{(t+\Delta t)} - p_{i(t+\Delta t)}^{static} = \rho \left[a_{i(t+\Delta t)} \ddot{a}_{i(t+\Delta t)} \left(1 - f_{i(t+\Delta t)}^{1/3} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}_{i(t+\Delta t)}^2 \left(1 - \frac{4}{3} f_{i(t+\Delta t)}^{1/3} + \frac{1}{3} f_{i(t+\Delta t)}^{4/3} \right) \right] . \quad (1.26)$$

En raison de l'incompressibilité, la porosité locale f_i est donnée par :

$$f_{i(t+\Delta t)} = \frac{a_{i(t+\Delta t)}^3}{b_{i(t+\Delta t)}^3} = \frac{a_{i(t+\Delta t)}^3}{b_{i(t)}^3 - a_{i(t)}^3 + a_{i(t+\Delta t)}^3} . \quad (1.27)$$

Le rayon de chaque site est estimé à l'aide d'un schéma d'intégration de Newmark qui sera précisé dans quelques lignes.

La porosité globale actualisée est maintenant connue :

$$f_{(t+\Delta t)} = \frac{\sum_{i=1}^{I_a} Pr_i a_{i(t+\Delta t)}^3}{\sum_{i=1}^{I_a} Pr_i b_{i(t+\Delta t)}^3} , \quad (1.28)$$

où I_a désigne le nombre de sites activés. A partir de (1.14), l'incrément de déformation plastique vaut :

$$\Delta \varepsilon_m^p = \frac{\Delta f}{3(1 - f_{(t+\Delta t)})} . \quad (1.29)$$

Connaissant Δf et $\Delta \varepsilon_m^p$, la pression $p_{(t+\Delta t)}$ est recalculée par la relation (1.24). Ce schéma itératif du point fixe se poursuit jusqu'à convergence. Nous vérifions ensuite l'éventuelle activation de nouveaux sites de nucléation. Si tel est le cas, le rayon de la matrice entourant chaque vide est ajusté (voir paragraphe 1.3).

intégration de la relation (1.26) - Utilisation d'un schéma de Newmark

Nous utilisons les équations de Newmark pour exprimer les vitesse et accélération dans l'équation (1.26) en fonction du rayon $a_{i(t+\Delta t)}$ à déterminer. De manière générale, la famille des schémas numériques de Newmark exprime les vitesse et accélération au temps $t + \Delta t$ à partir des grandeurs au temps t , en faisant intervenir deux paramètres γ_N et β_N :

$$\begin{cases} a_{i(t+\Delta t)} = a_{i(t)} + \dot{a}_{i(t)} \Delta t + [(1/2 - \beta_N) \ddot{a}_{i(t)} + \beta_N \ddot{a}_{i(t+\Delta t)}] \Delta t^2 \\ \dot{a}_{i(t+\Delta t)} = \dot{a}_{i(t)} + [(1 - \gamma_N) \ddot{a}_{i(t)} + \gamma_N \ddot{a}_{i(t+\Delta t)}] \Delta t \end{cases} \quad (1.30)$$

Selon les valeurs des paramètres γ_N et β_N , les propriétés des schémas numériques varient (voir SUFFIS [126]). En particulier, pour $\gamma_N = 1/2$ et $\beta_N = 0$, on retrouve un schéma d'intégration aux différences centrées. Nous choisissons le couple $\gamma_N = 1/2$ et $\beta_N = 1/4$ pour lequel le schéma numérique est inconditionnellement stable et d'un ordre de précision de 2,

SUFFIS [126]. Dans ce cas, la vitesse $\dot{a}_{i(t+\Delta t)}$ et l'accélération $\ddot{a}_{i(t+\Delta t)}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{a}_{i(t+\Delta t)} = 2 \frac{a_{i(t+\Delta t)} - a_{i(t)}}{\Delta t} - \dot{a}_{i(t)} \\ \ddot{a}_{i(t+\Delta t)} = 2 \frac{\dot{a}_{i(t+\Delta t)} - \dot{a}_{i(t)}}{\Delta t} - \ddot{a}_{i(t)} = 4 \left(\frac{a_{i(t+\Delta t)} - a_{i(t)}}{\Delta t^2} - \frac{\dot{a}_{i(t)}}{\Delta t} \right) - \ddot{a}_{i(t)} \end{cases} \quad (1.31)$$

Avec les équations (1.31), l'équation (1.26) fournit une relation pour l'inconnue $a_{i(t+\Delta t)}$.

1.2.3 Partie déviatorique - Algorithme de retour radial

La loi d'élasticité linéaire (1.4b) aboutit, au 1^e ordre, à la forme suivante :

$$\underline{s}_{(t+\Delta t)} = \left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu(t)} \right) \left[\underline{s}_{(t)} + 2\mu(t) (\Delta\underline{e} - \Delta\underline{e}^p) \right]. \quad (1.32)$$

Connaissant $\Delta\underline{e}$ (donné par le logiciel de calcul ABAQUS/EXPLICIT), il s'agit de calculer la contribution plastique $\Delta\underline{e}^p$ afin d'actualiser les contraintes. Le traitement de la partie déviatorique intervient après que la porosité ait été mise à jour par la déformation plastique volumique. Le module élastique dans la relation (1.32) $\Delta\mu$ est alors connu. La règle d'écoulement plastique (1.10) s'écrit :

$$\Delta\underline{e}^p = \frac{3\Delta\varepsilon^p}{2\sigma_{eq(t+\Delta t)}} \underline{s}_{(t+\Delta t)}. \quad (1.33)$$

Introduisons, comme dans BONNET [12] par exemple, le tenseur du second ordre $\underline{N}$ défini par :

$$\underline{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sigma_{eq}} \underline{s}. \quad (1.34)$$

Ce tenseur de norme unité représente la normale à la surface de charge car il est colinéaire à $\Delta\underline{e}^p$. En combinant les relations (1.33) et (1.34), il vient :

$$\Delta\underline{e}^p = \Delta\varepsilon^p \sqrt{\frac{3}{2}} \underline{N}_{(t+\Delta t)}. \quad (1.35)$$

Afin de déterminer la valeur $\Delta\underline{e}^p$, nous utilisons un algorithme de prédiction-correction. La prédiction en contrainte est définie en faisant temporairement l'hypothèse d'une évolution purement élastique des déformations déviatoriques ($\Delta\underline{e} = \Delta\underline{e}^e$). Ainsi, lorsque $\Delta\underline{e}^p = \underline{0}$, l'équation (1.32) conduit à :

$$\underline{s}_{(t+\Delta t)}^{pred} = \left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu(t)} \right) \left[\underline{s}_{(t)} + 2\mu(t) \Delta\underline{e} \right], \quad (1.36)$$

où $\underline{s}_{(t+\Delta t)}^{pred}$ désigne la prédiction élastique. Il convient de vérifier si l'état de contrainte se trouve ou non sur la surface de charge. Deux possibilités se présentent. Si Φ_d calculée pour l'état de contrainte $\underline{s}_{(t+\Delta t)}^{pred}$ prend une valeur négative, il y a charge/décharge élastique. Dans

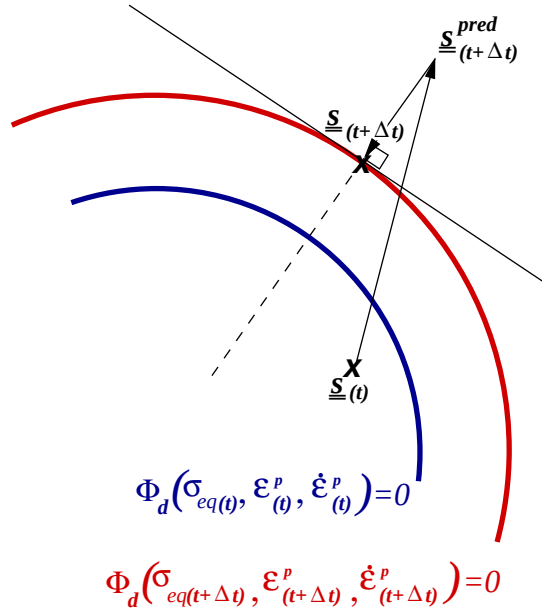


FIG. 1.1 – Interprétation géométrique dans le plan π des contraintes déviatoriques et schématisation de l'algorithme de retour radial. La correction est colinéaire à la direction radiale joignant le centre de la surface de plasticité au déviateur du prédicteur élastique.

ce cas, la contrainte déviatorique actualisée est donnée par $\underline{s}(t+\Delta t) = \underline{s}_{(t+\Delta t)}^{pred}$ et $\varepsilon^p(t+\Delta t) = \varepsilon^p(t)$. Au contraire si $\Phi_d > 0$, la prédiction viole la surface de charge et il y a écoulement plastique. Il faut donc ramener par une correction plastique la contrainte sur la surface de charge (voir figure 1.1). Dans ce cas, $\Delta \underline{\varepsilon}^p \neq 0$, $\Delta \varepsilon^p > 0$, et la contrainte au temps $t + \Delta t$ s'écrit à partir de (1.32) et (1.36) :

$$\underline{s}(t+\Delta t) = \underline{s}_{(t+\Delta t)}^{pred} - 2\mu_{(t+\Delta t)}\Delta \underline{\varepsilon}^p. \quad (1.37)$$

En utilisant (1.37), (1.35) et la définition de $\underline{N}_{(t+\Delta t)}^{pred}$ à partir de (1.34), la correction se fait le long de la direction $\underline{N}_{(t+\Delta t)}^{pred}$ et il vient :

$$\underline{N}_{(t+\Delta t)} = \underline{N}_{(t+\Delta t)}^{pred}, \quad (1.38)$$

De (1.38), $\underline{s}(t+\Delta t)$ s'écrit :

$$\underline{s}(t+\Delta t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sigma_{eq(t+\Delta t)}^{pred} - 3\mu_{(t+\Delta t)}\Delta \varepsilon^p \right) \underline{N}_{(t+\Delta t)}^{pred}. \quad (1.39)$$

La contrainte équivalente vaut alors :

$$\sigma_{eq(t+\Delta t)} = \sigma_{eq(t+\Delta t)}^{pred} - 3\mu_{(t+\Delta t)}\Delta \varepsilon^p. \quad (1.40)$$

L'incrément $\Delta \varepsilon^p$ est finalement obtenu car la condition de consistance impose à la contrainte déviatorique actualisée de se trouver sur la surface d'écoulement. Cela se traduit par

la relation suivante ($\Phi_d = 0$) :

$$\frac{\sigma_{eq(t+\Delta t)}}{1 - \alpha f_{(t+\Delta t)}^\beta} - \sigma_y \left(\varepsilon_{(t)}^p + \Delta \varepsilon^p, \frac{\Delta \varepsilon^p}{\Delta t} \right) = 0. \quad (1.41)$$

Par combinaison de (1.40) et (1.41), $\Delta \varepsilon^p$ est solution de l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{\sigma_{eq(t+\Delta t)}^{pred}}{1 - \alpha f_{(t+\Delta t)}^\beta} - 3\mu_{(t+\Delta t)} \frac{\Delta \varepsilon^p}{1 - \alpha f_{(t+\Delta t)}^\beta} - \sigma_y \left(\varepsilon_{(t)}^p + \Delta \varepsilon^p, \frac{\Delta \varepsilon^p}{\Delta t} \right) = 0. \quad (1.42)$$

La contrainte déviatorique peut alors être mise à jour par la relation (1.39).

1.3 Distance d'interaction variable en fonction du nombre de sites activés

On a considéré dans les deux premières parties du manuscrit que la grandeur « effective » caractérisant la distance inter cavités était constante et donnée par b_0 . Cette approche peut être suffisante si l'on considère une répartition homogène de sites de nucléation d'une part, et d'autre part si dans un très court laps de temps, tous les sites sont activés. Dans la partie précédente (section 1.2, page 127) on pouvait justifier ce b_0 constant car les distributions considérées étaient relativement serrées autour d'une valeur moyenne de pression de nucléation. Cependant, dans l'hypothèse d'une distribution de pressions de nucléation plus large, il faut tenir compte de la variation de la distance séparant deux sites voisins au cours du temps. Dans l'approche que nous proposons, l'activation d'une nouvelle famille va engendrer un réajustement du rayon extérieur de chaque motif avec pour seule contrainte la conservation du volume de matrice. A cet instant, toutes les cellules unitaires présentes dans le VER sont affectées du même rayon extérieur noté $\bar{b}$. La porosité locale des différents motifs sera discontinue mais la porosité globale sera une grandeur continue. Notons N_{tot} le nombre total de sites potentiels, $2b_0$ la distance qui sépare deux sites voisins dans le cas où tous sont activés au même instant, et V_{mat} le volume initial de matrice donné par :

$$V_{mat} = N_{tot} \frac{4\pi}{3} b_0^3, \quad (1.43)$$

Supposons, à un instant t fixé, que J familles distinctes de sites de nucléation sont activées. Le volume de matrice, donné par la relation (1.43), vérifie également compte tenu de l'incompressibilité :

$$V_{mat} = \sum_{i=1}^J N_i \frac{4\pi}{3} (b_i^3 - a_i^3) \quad (1.44)$$

où N_i est le nombre de sites appartenant à la famille F_i (identifiée après nucléation par des sphères creuses de rayon intérieur a_i et de rayon extérieur b_i). Durant le passage de t à $t + \Delta t$,

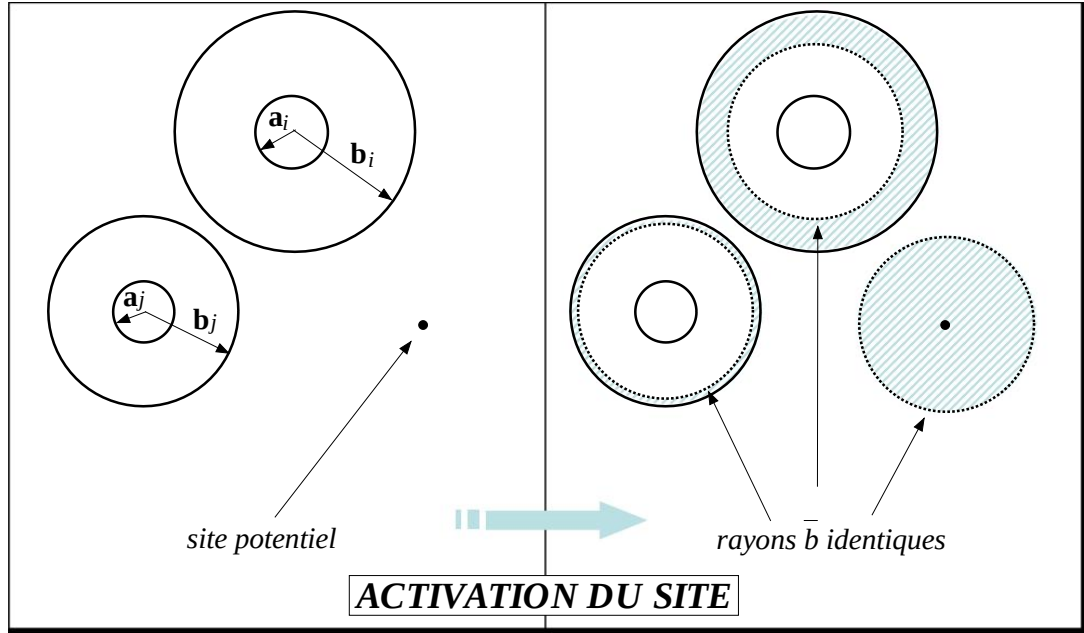


FIG. 1.2 – Réduction de la distance inter cavités à l'apparition d'un nouveau vide.

on constate l'activation d'une nouvelle famille contenant N_{J+1} sites. Alors, par incompressibilité il vient :

$$N_{tot} \frac{4\pi}{3} b_0^3 = \sum_{i=1}^{J+1} N_i \frac{4\pi}{3} (\bar{b}^3 - a_i^3) . \quad (1.45)$$

La valeur du rayon extérieur $\bar{b}$ de toutes les cellules (voir figure 1.2), vaut alors :

$$\bar{b} = \left(\frac{\sum_{i=1}^J Pr_i b_i^3}{\sum_{i=1}^{J+1} Pr_i} \right)^{1/3} , \quad (1.46)$$

où $Pr_i = N_i/N_{tot}$ désigne la fréquence d'apparition de la famille i .

Chapitre 2

Applications à la simulation numérique de l'écaillage et comparaison avec les résultats expérimentaux de ROY [116]

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de simulations numériques du test d'écaillage du tantale, obtenus à l'aide du modèle élasto-viscoplastique avec endommagement développé dans le chapitre précédent.

Nous indiquons dans une première partie les paramètres (distribution de pressions de nucléation, loi de comportement) utilisés pour décrire le tantale. Nous présentons ensuite, après avoir évoqué le maillage utilisé, les résultats des simulations numériques et les confrontons aux relevés expérimentaux de ROY [116].

2.1 Paramètres du matériau

comportement mécanique

Le matériau considéré est le tantale. Les paramètres de la loi de comportement (1.7) sont évalués à partir de courbes de traction-compression présentées dans le travail de thèse de

k_0 (GPa)	μ_0 (GPa)	ρ (kg/m ³)	K (MPa s ^m)	ε_0 (SU)	n (SU)	$\dot{\varepsilon}_0$ (s ⁻¹)	m (SU)	f^s (SU)
200	68.3	16600	528	0.055	0.155	10 ⁻⁴	0.058	0.30

TAB. 2.1 – Paramètres matériau utilisés pour les simulations numériques d'écaillage du tantale.

ROY [116] et sont résumés dans le tableau 2.1. Compte tenu du niveau de porosité observé après impact dans le tantale par ROY [116], nous avons choisi la valeur suivante pour la porosité critique : $f^s = 0.3$.

distribution des pressions de cavitation

$\bar{p}_c$ (GPa)	σ_w (GPa)	p_{oc} (GPa)	β (SU)	η (GPa)	L_c (GPa)	b_0 (μm)
31.48	18.8	3	1.55	31.33	0.2	50

TAB. 2.2 – Paramètres de distribution utilisés pour les simulations numériques d'écaillage du tantale. La densité de probabilité correspondante, donnée par l'équation (1.1) page 125, est présentée sur la figure 2.1

Les paramètres de la distribution de Weibull (équations (1.1) à (1.4), page 125) des pressions de nucléation sont résumés dans le tableau 2.2. Les valeurs adoptées conduisent à une distribution très large (voir figure 2.1) comparativement à celle utilisée dans la troisième partie du manuscrit (figure 1.1, page 126). Le paramètre $p_{oc} = 3GPa$ est choisi en bon accord avec la valeur de pression seuil déterminée expérimentalement par ROY [116] et avec certains résultats théoriques, GUO ET CHENG [57], WU ET AL. [152]. Soulignons que le choix d'une distribution très large est compatible avec l'observation expérimentale de ROY [116]. En effet, l'auteur montre une augmentation toujours croissante du nombre de sites activés avec la pression de choc.

Compte tenu de l'approche que nous avons adoptée, considérant que la distance séparant deux sites diminue avec l'augmentation de la pression, le paramètre $b_0 = 50\mu m$ est lié à la distribution. Il correspond à la demi-distance séparant deux sites lorsque tous sont activés (pour une pression $\gg 120GPa$, voir figure 2.1).

discrétisation de la distribution de Weibull

Nous n'avons pas discrétisé sur l'intervalle $[3 - 120]GPa$. En effet, les pressions atteintes dans la cible sont limitées et très inférieures à $120GPa$. La pression p_{csup} , désignant la borne supérieure du domaine discrétisé, a été choisie de manière à ce que celle-ci soit supérieure aux niveaux de pressions atteints lors des simulations numériques. Nous nous sommes alors contentés de discrétiser une partie seulement de la distribution comme l'illustre la figure 2.1. Le pas de discrétisation L_c est choisi égal à $0.2GPa$ (équations (1.5), (1.6) de la partie III). Il a été vérifié, pour chaque essai simulé, que la pression p_{csup} n'est pas atteinte.

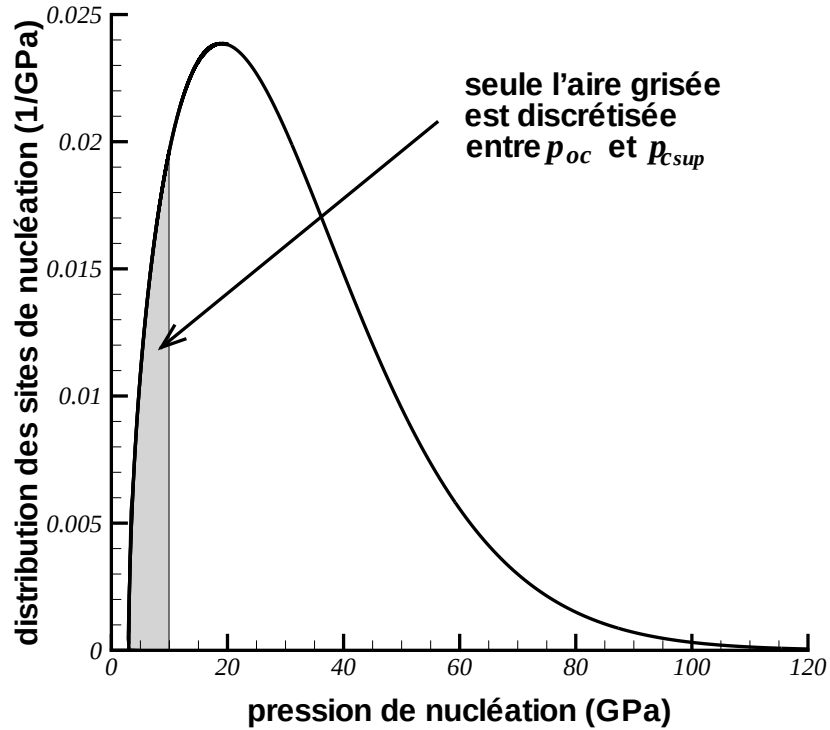


FIG. 2.1 – Distribution de pressions de nucléation dans le tantale utilisée pour la simulation numérique d’impacts de plaques. Les paramètres sont résumés dans le tableau 2.2. Une partie seulement de la distribution est discrétisée, en s’assurant que la pression p_{sup} ne soit jamais atteinte.

2.2 Maillage et éléments choisis

Pour des raisons de symétrie (chargement et géométrie), seule une section des plaques est représentée, figure 2.2. Cette simplification implique l’hypothèse supplémentaire que la répartition des sites de germination suit les mêmes conditions de symétrie. Le maillage est réalisé à partir d’éléments finis nommés CAX4R. Ce sont des éléments quadrangles prenant en compte le caractère axisymétrique du problème et possédant un unique point d’intégration. Nous retiendrons pour l’ensemble des tests présentés ici une maille de dimension $25\mu m \times 75\mu m$. Une analyse de sensibilité au maillage a été conduite pour valider ce choix (voir plus loin la section 2.3.3).

Dans le but de confronter les résultats de simulations numériques à ceux obtenus expérimentalement, les géométries et vitesses d’impact sélectionnées correspondent à celles utilisées dans la thèse de ROY [116]. Nous considérons pour les simulations numériques plu-

sieurs vitesses d'impact, $V_{\text{impact}} = 207, 303, 306, 307, 415 \text{ m/s}$ et trois épaisseurs de projectile, $e_i = 2, 3, 4 \text{ mm}$. La cible est de dimension constante (diamètre 50 mm , épaisseur $e_c = 4.95 \text{ mm}$) et contient, compte tenu du maillage utilisé, 65934 éléments CAX4R. Dans la plaque impactrice, de même diamètre, on dénombre 39960 éléments lorsque l'épaisseur est choisie $e_i = 3 \text{ mm}$. Nous présentons par la suite des simulations numériques du test d'impact de plaques. Le matériau considéré est le tantale et les paramètres utilisés sont présentés au début de ce chapitre (tableaux 2.1 et 2.2). Le modèle complet décrivant le comportement élasto-viscoplastique avec endommagement est implanté dans le code de calculs par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT.

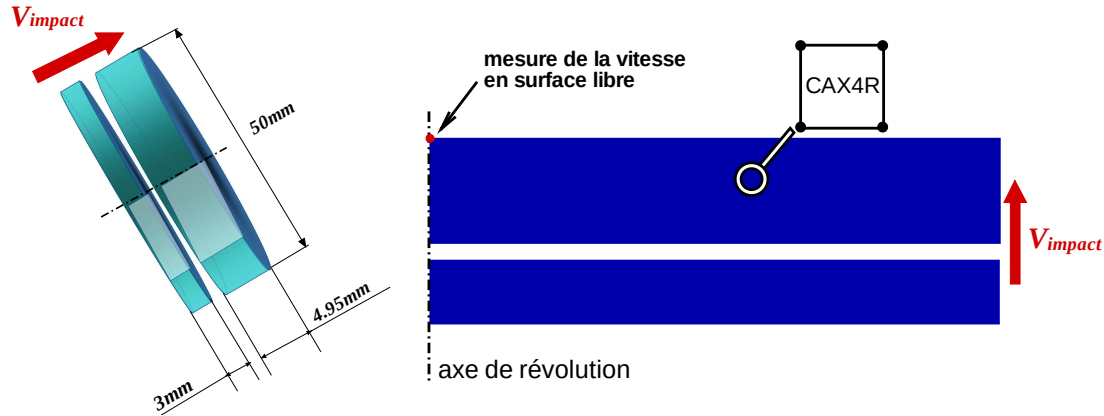


FIG. 2.2 – Géométrie et approche axisymétrique de l'impact de plaques. Les dimensions de la cible et de l'impacteur correspondent aux conditions géométriques utilisées par ROY [116]. Compte tenu de la géométrie des pièces et du chargement, seule une représentation axisymétrique est nécessaire. Le point rouge sur la cible indique le nœud du maillage servant au relevé de la vitesse de surface libre.

Il a déjà été évoqué, dans la première partie du manuscrit et de manière simplifiée, la propagation des ondes générées lors d'un essai d'impact (voir figure 4.2, page 69). La figure 2.3 illustre par une simulation numérique la propagation des ondes de dilatation (compression-tension) pour une vitesse d'impact de 306 m/s . Les géométries et conditions de chargement sont présentées sur la figure 2.2. Les temps indiqués sur la figure 2.3 peuvent être approchés en utilisant la vitesse de propagation des ondes de dilatation, $C_b = \sqrt{k_0/\rho} \simeq 3450 \text{ m/s}$ et la géométrie de l'essai (voir partie I, chapitre 3). L'onde incidente générée dans le projectile rencontre la paroi libre de l'impacteur au bout de $t = 0.84 \mu\text{s}$, puis, à l'instant $t = 1.43 \mu\text{s}$, l'onde transmise dans la cible rencontre la surface libre. A $t = 2.13 \mu\text{s}$, les fronts d'ondes de détente issus de la réflexion aux surfaces libres sont sur le point de se croiser. La zone de rencontre est le siège d'un chargement fortement hydrostatique et la pression augmente alors de façon critique. La mise en tension dure près d'une microseconde avant que la fissure n'apparaisse

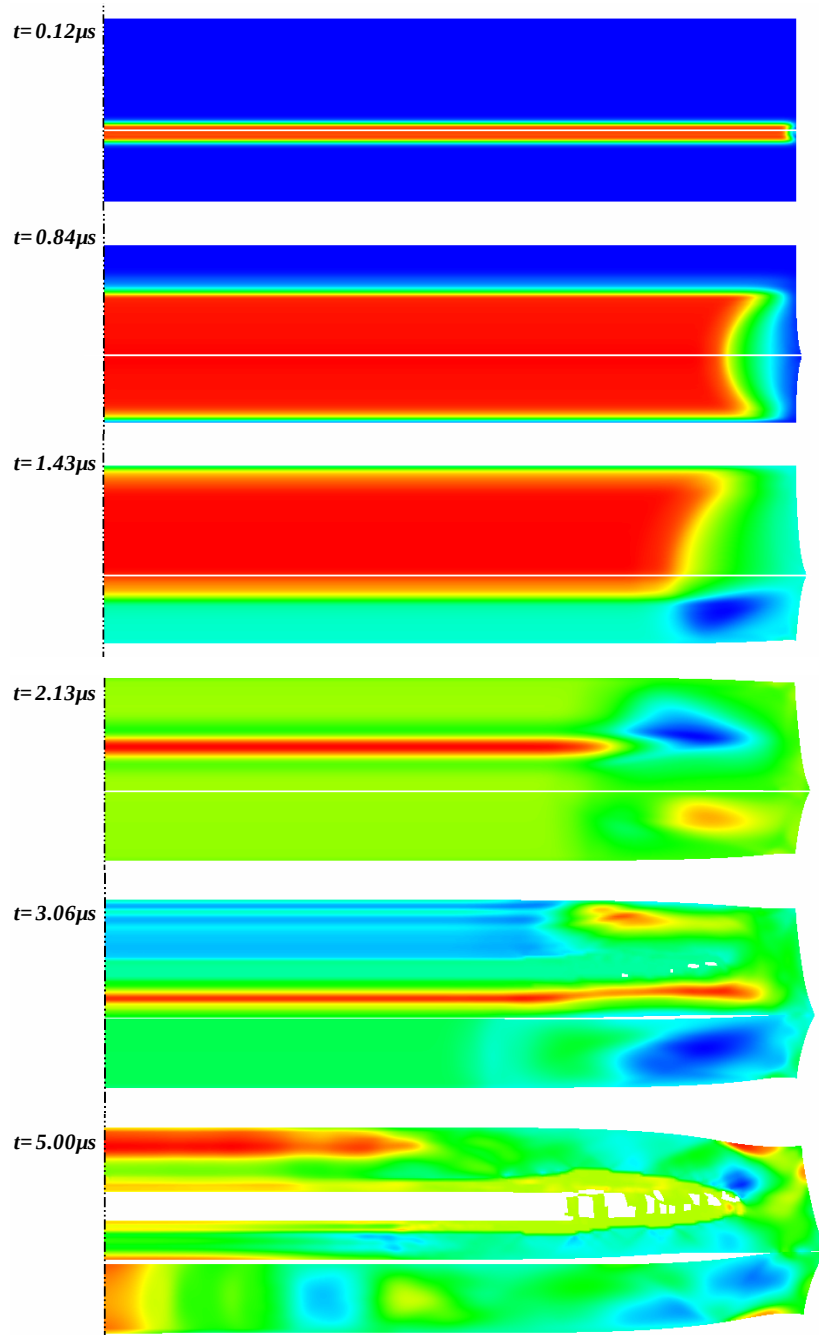


FIG. 2.3 – Simulation numérique illustrant la propagation des ondes de dilatation lors d'un impact de plaques. Le trait discontinu représente l'axe de symétrie. A $t = 3.06\mu s$, l'endommagement est initié dans une zone perturbée par les détentes provenant des bords libres (à droite sur les illustrations). A la fin du test ($t = 5\mu s$), la cible est fortement endommagée : il y a écaillage. Signalons qu'un trait blanc est ajouté afin de distinguer les deux plaques, le contact rompu n'est réellement apparent que sur la dernière image ($t = 5\mu s$).

dans le plan d'écaillage.

Il est à noter que l'endommagement s'initie dans une zone particulière de l'éprouvette située près du bord droit de la cible. Cette observation expérimentale s'explique par l'interaction entre les ondes de détente provenant des surfaces libres, et les ondes de détente latérales liées aux effets de bord, ROY [116]. La simulation numérique reproduit bien cette observation (identifiable à $t = 3.06\mu s$ sur la figure 2.3).

2.3 Résultats

Le logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT donne à chaque pas de temps l'incrément de déformation total et le sous-programme utilisateur VUMAT est sollicité. En étude préliminaire, nous avons réalisé des simulations numériques sur un élément unique

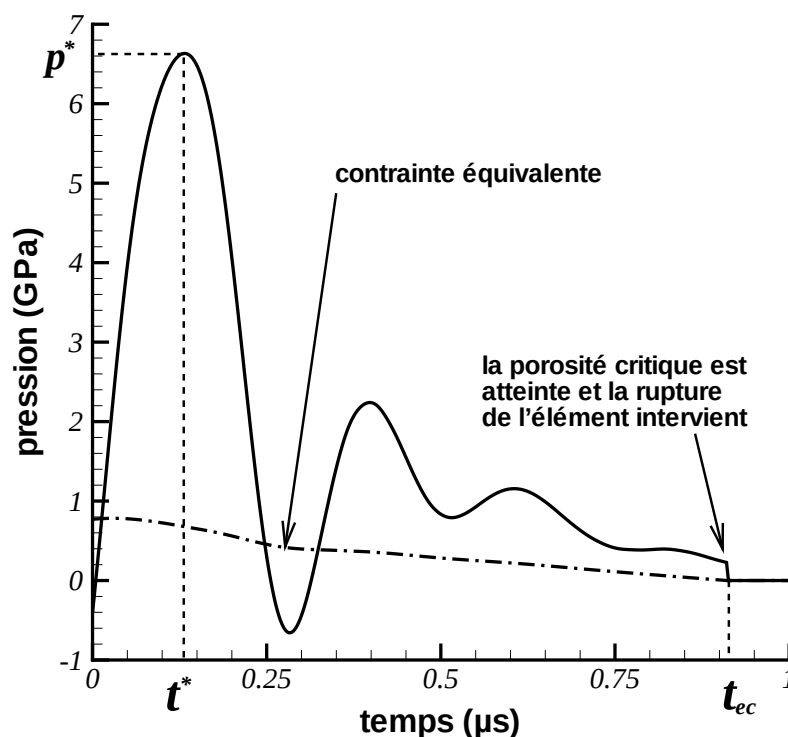


FIG. 2.4 – Evolution de la pression dans le plan d'écaillage en fonction du temps. Le temps t^* correspond à l'instant où la pression atteint le maximum p^* tandis que t_{ec} désigne le temps où la porosité atteint la valeur critique f^s . A titre indicatif, la contrainte équivalente nous indique le haut taux de triaxialité généré dans le plan d'écaillage. Rappelons que cet élément est essentiel pour valider l'approche de croissance de vides sous chargement dynamique hydrostatique.

C3D8R¹ afin d'observer la réponse du modèle pour une déformation uniaxiale à vitesse de déformation constante. Ce chargement est rencontré typiquement lors du test d'impact. Cette première étape n'est pas présentée ici en raison des similitudes avec les résultats obtenus dans le plan d'écaillage lorsque l'essai d'impact complet est modélisé.

2.3.1 Evolution de la pression dans le plan d'écaillage

Reprenons la simulation numérique de l'impact d'une plaque d'épaisseur $e_i = 3mm$, à une vitesse $V_{impact} = 306m/s$ (voir figure 2.2). Dans la suite, le plan d'écaillage désigne le plan où la pression maximale est atteinte au niveau de l'axe de symétrie de l'éprouvette. Ce plan est situé approximativement à la distance e_i de la face, e_i désignant l'épaisseur de l'impacteur.

La figure 2.4 montre l'évolution de la pression en fonction du temps dans le plan d'écaillage (trait continu). Dans un premier temps, la pression augmente très rapidement. Les premiers sites sont activés à $3.1GPa$ (figure 2.1) et la pression continue à croître jusqu'à une valeur maximum, $p^* = 6.63GPa$ pour un temps de montée d'environ $0.13\mu s$. La vitesse de chargement calculée par moyenne sur tout l'intervalle de temps est estimée à $47GPa/\mu s$. Concernant l'allure du chargement, il apparaît, d'après la figure 2.4, que la représentation du chargement comme une rampe linéaire de pression (MOLINARI ET WRIGHT [98], ROY [116], CZARNOTA ET AL. [32]) n'est valable que durant la phase initiale de nucléation. Cette approximation peut alors être utilisée à la détermination de la pression maximale atteinte dans le plan d'écaillage, ou encore à la pression de rupture dans le cas d'un matériau fragile. Pour ce type de matériau en effet, la rupture est généralement définie en terme de valeur limite de contrainte (pression maximale) sans prise en compte de l'endommagement qui par ailleurs demeure très faible. Notons les faibles porosités atteintes lorsque le pic de pression est atteint (voir figure 2.5). Précisons que la vitesse de chargement déduite expérimentalement à partir de mesures de vitesse en surface libre est estimée par ROY [116] à $8.5GPa/\mu s$. La simulation numérique prévoit une valeur 5 fois plus grande (voir tableau 2.3).

Dans notre analyse, la pression est couplée à l'endommagement. La chute de la pression, pour $p = p^*$, est due à la déformation plastique volumique engendrée par la croissance des vides. A partir de p^* , la pression diminue fortement. Certains vides continuent à évoluer alors même que la pression dans le plan d'écaillage passe en dessous de p^{static} . En effet, du fait de l'inertie, la pression limite de croissance contient un terme inertiel en plus de la résistance quasi-statique de la matrice. Même lorsque la pression p devient négative, les vides peuvent

¹élément fini cubique, C3D8R dans la dénomination du logiciel de calcul ABAQUS/EXPLICIT, possédant 8 nœuds et un unique point de Gauss (intégration réduite)

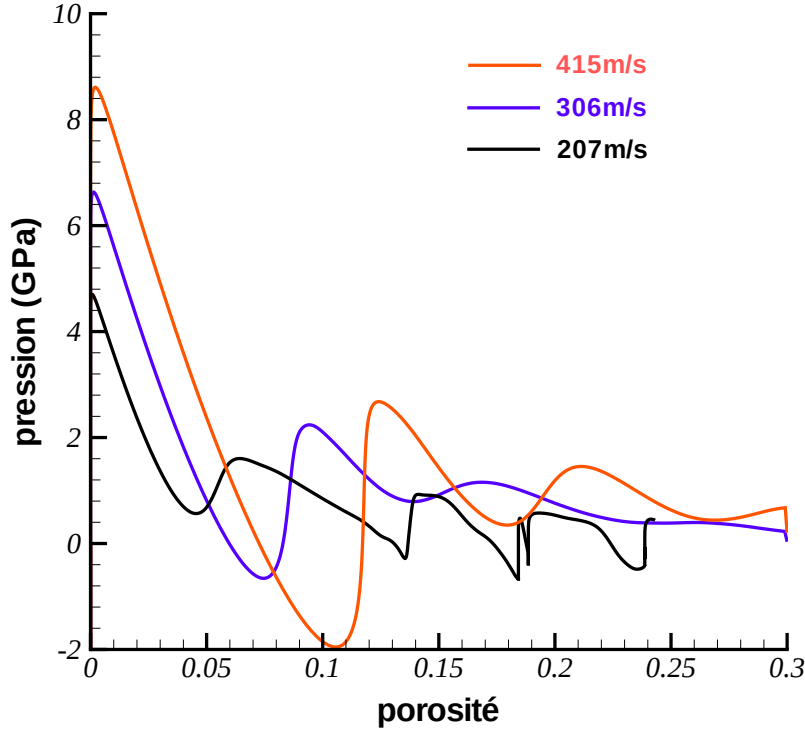


FIG. 2.5 – Evolution de la pression en fonction de la porosité pour trois vitesses d'impact. Une augmentation de la vitesse d'impact conduit à une pression maximum p^* dans le plan d'écaillage plus élevée. Le tableau 2.3 résume l'ensemble des résultats relatifs aux simulations numériques.

continuer à croître, en raison des quantités d'accélération disponibles en paroi de cavités. Les effets d'inertie concourent alors à l'évolution de l'endommagement.

La première réaccélération de la face arrière est due à l'onde de relaxation résultant de l'évolution de l'endommagement dans le plan d'écaillage. Le signal est alors identique à celui qui identifie habituellement la rupture dans les matériaux fragiles. Or, sur la figure 2.4, la rupture n'est effective que beaucoup plus tard ($\simeq 1\mu s$). Le premier rebond observé par exemple sur la figure 2.7 ne correspond donc pas à l'écaillage mais à une relaxation des contraintes due à l'endommagement. Ceci est un résultat fondamental de l'analyse que nous avons développé et corrobore les travaux de CHEN ET AL. [22].

La figure 2.5 présente l'évolution de la pression en fonction de la porosité pour trois vitesses d'impact $V_{impact} = 207, 306, 415 m/s$. Pour les trois vitesses, il apparaît que la porosité

atteinte au moment du pic de pression est extrêmement faible. Pour $V_{\text{impact}} = 306 \text{ m/s}$ par exemple, on trouve $f \simeq 0.001$ avec $p^* = 6.63 \text{ GPa}$. Il apparaît sur la figure 2.5 qu'une augmentation de la vitesse d'impact conduit à une pression p^* plus élevée, voir tableau 2.3. En effet, les effets d'inertie participent à l'augmentation du niveau de pression maximal atteint puisqu'ils ralentissent la croissance de l'endommagement et conduisent à un taux de déformation plastique $\Delta \varepsilon_m^p$ plus faible. En l'absence d'effets d'inertie, la relaxation intervient dès que la pression de nucléation des premiers vides est atteinte. La figure 2.5 nous indique que lorsque la vitesse d'impact est de 207 m/s , la porosité à la fin du test est de 0.25 et la rupture n'a pas eu lieu. Cependant, nous verrons dans la prochaine section que le profil de vitesse en surface libre présente néanmoins toutes les caractéristiques de ce qui pourrait identifier un écaillage.

L'augmentation de la pression p^* avec la vitesse d'impact conduit à l'activation de plus nom-

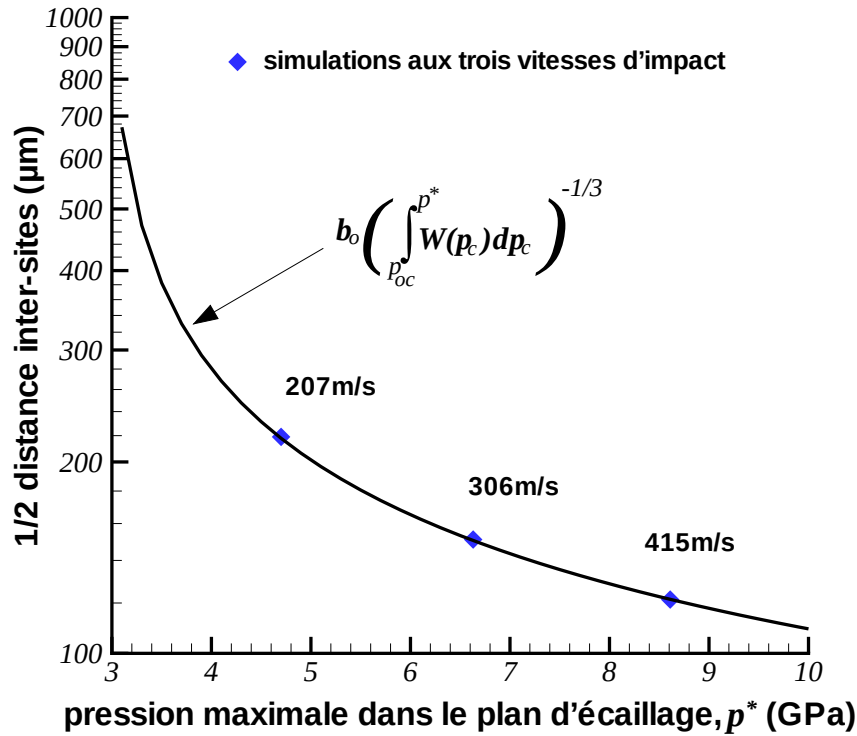


FIG. 2.6 – Evolution de la demi-distance moyenne séparant deux sites voisins. Cette grandeur (obtenue à la fin de la simulation numérique du test d'impact de plaques) dépend de la distribution des pressions de nucléation et de la pression maximale atteinte dans le plan d'écaillage. Les résultats des simulations numériques à trois vitesses d'impact sont reportés sur cette figure. Le paramètre b_0 représente la valeur de la demi-distance entre deux sites lorsque tous sont activés. La courbe est obtenue pour la valeur de $b_0 = 50 \mu\text{m}$ choisie.

breux sites et la distance moyenne séparant deux sites voisins diminuent. ROY [116] observe dans le tantale une relation croissante en loi puissance ($N_{sites} = 0.0069p_{choc}^{6.1098}$) entre la densité N_{sites} de sites activés et la pression de choc p_{choc} . Or N_{sites} est lié à la demi-distance moyenne séparant deux sites voisins via une relation du type de celle donnée par l'équation (1.43) page 170. Ainsi, même s'il ne permet pas de reproduire exactement la loi d'évolution déterminée expérimentalement par ROY [116], le modèle que nous proposons reproduit la tendance à savoir l'accroissement du nombre de sites avec l'augmentation de la pression de choc (ou de la vitesse d'impact). La figure 2.6 présente l'évolution de la distance moyenne entre deux sites en fonction de la pression p^* atteinte dans le plan d'écaillage. Les valeurs de demi-distance correspondant aux essais d'impact simulés à différentes vitesses sont résumées dans le tableau 2.3.

Dans la prochaine section, l'analyse des vitesses en surface libre permet de comprendre comment l'endommagement peut influencer sur la propagation de l'onde de tension du plan d'écaillage vers la surface libre où la vitesse est mesurée.

2.3.2 Profils de vitesse de face arrière

Les vitesses en face arrière sont déduites de la vitesse matérielle du nœud situé sur l'axe de symétrie (point coloré sur la figure 2.2). Nous allons proposer une comparaison avec les mesures expérimentales de ROY [116] pour différentes vitesses d'impact et différentes épaisseurs de projectile. Le tableau 2.3 résume l'ensemble des résultats. Nous notons p^* la pression maximale atteinte dans le plan d'écaillage au temps noté t^* . Nous désignons par ailleurs t_{ec} le temps, à partir de la mise en tension, nécessaire pour que la porosité atteigne la valeur critique f^s (voir figure 2.4).

V_{impact} (m/s)	e_i (mm)	$\dot{p}$ (GPa/ μ s)	ΔV_{pb} (m/s)	p^* (GPa)	b_0 (μ m)	t_{ec} (μ s)	t^* (μ s)
207	3	15	146	4.7	220	/	0.238
306	3	47	134	6.63	150	0.905	0.127
415	3	95	136	8.6	121	0.674	0.094
307	2	48	175	6.75	149	0.829	0.119
303	4	48	102	6.45	156	1.319	0.134

TAB. 2.3 – Résumé des résultats des différentes simulations numériques. t^* désigne le temps où la pression p atteint la valeur maximale p^* . La rupture intervient au temps noté t_{ec}

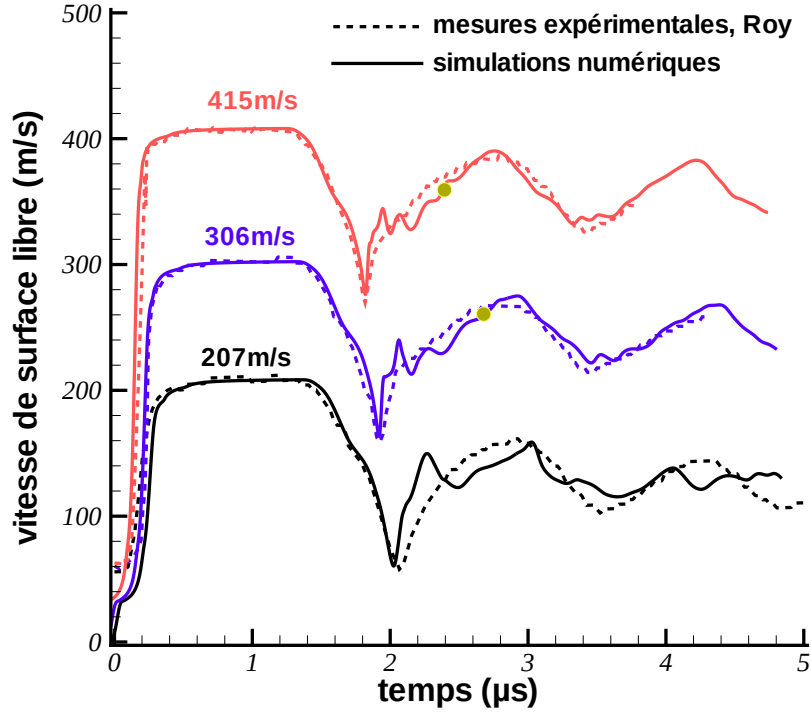


FIG. 2.7 – Confrontation des simulations numériques avec les résultats expérimentaux de ROY [116]. Les signaux de face arrière sont reproduits de manière assez fidèle par la simulation numérique. Le premier rebond de chaque signal correspond à une relaxation des contraintes dans le plan d'écaillage. Les points colorés indiquent de manière approximative le signal d'écaillage obtenu par simulation numérique. Ils ne font ici offices que d'indicateurs témoignant que la rupture intervient bien après le 1^{er} rebond. Les points sont placés en considérant que la distance les séparant du premier rebond est donnée par $t_{ec} - t^*$, voir tableau 2.3. Pour la vitesse d'impact de 207 m/s, la simulation numérique ne prévoit pas de rupture.

Epaisseur constante pour trois vitesses d'impact

La figure 2.7 présente les vitesses de surface libre correspondant aux trois vitesses d'impact discutées précédemment (voir figure 2.5). L'épaisseur de la plaque impactrice est $e_i = 3\text{ mm}$ pour les trois essais. La modélisation par éléments finis restitue assez fidèlement les profils obtenus expérimentalement par ROY [116], pour les trois vitesses. Le premier rebond (correspondant à la relaxation dans le plan d'écaillage) ainsi que la réaccélération sont reproduits pour les essais à vitesses d'impact $V_{\text{impact}} = 306\text{ m/s}$ et 415 m/s . La valeur de ΔV_{pb} (marquant le saut de vitesse entre le plateau $\simeq V_{\text{impact}}$ et le premier rebond, voir figure 4.8 page 79) reste du même ordre de grandeur pour les trois essais (voir tableau 2.3). Soulignons, comme le montre la figure 2.5, que pour l'essai à $V_{\text{impact}} = 207\text{ m/s}$, la porosité n'a pas atteint la valeur critique f^s et que la rupture n'a donc pas eu lieu. Néanmoins, le profil de vitesse

s'apparente bien à celui qui habituellement permet d'affirmer que la rupture s'est produite dans le plan d'écaillage.

Signalons que dans le cas d'un matériau fragile, l'écoulement plastique est très faible et la rupture dans le plan d'écaillage est quasiment instantanée. La relaxation de la contrainte dans le plan d'écaillage sera alors due à la création d'une nouvelle surface. Le signal de remontée de la vitesse pourra alors sans ambiguïté correspondre, dans ce cas, à la pression de rupture du matériau. Pour les matériaux ductiles, il est indispensable de considérer le couplage avec l'évolution de l'endommagement qui modifie l'analyse des signaux de face arrière.

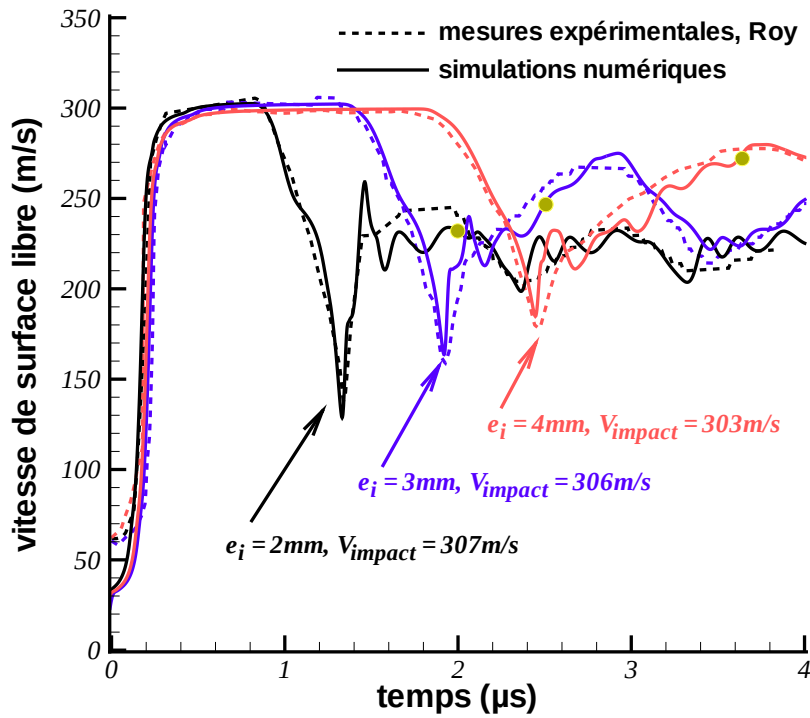


FIG. 2.8 – Confrontation des simulations numériques avec les résultats expérimentaux de ROY [116]. La vitesse d'impact est approximativement 300m/s et différentes épaisseurs d'impacteur sont considérées. Une augmentation de l'épaisseur éloigne le plan d'écaillage de la surface libre, et la pression de relaxation, responsable du premier rebond, s'estompe de manière plus importante pour $e_i = 4\text{mm}$. Les points colorés indiquent de manière approximative le signal d'écaillage obtenu par simulation numérique. Ils ne font ici offices que d'indicateurs témoignant que la rupture intervient bien après le 1^{er} rebond. Les points sont placés en considérant que la distance les séparant du premier rebond est donnée par $t_{ec} - t^*$, voir tableau 2.3.

Vitesse d'impact d'environ $300m/s$ pour trois épaisseurs d'impacteur

La figure 2.8 montre les résultats obtenus pour une vitesse d'impact d'environ $300m/s$ pour trois épaisseurs différentes $e_i = 2, 3, 4mm$. Les résultats sont résumés dans le tableau 2.3. Les profils de vitesses obtenus expérimentalement par ROY [116] sont relativement bien restitués par les simulations numériques. On observe notamment que ΔV_{pb} , la différence entre le premier plateau et le premier rebond, diminue avec l'augmentation de l'épaisseur. Ce phénomène est un peu plus marqué pour les simulations numériques. Comme nous l'avons remarqué précédemment, le premier rebond correspond à l'initiation de la relaxation de la pression dans le plan d'écaillage. Or, nous constatons que pour les trois essais, la pression maximale atteinte dans le plan de rupture est approximativement identique (voir tableau 2.3). La raison pour laquelle le saut de vitesse n'est pas le même s'explique par le fait que l'endommagement n'est pas uniquement localisé dans le plan d'écaillage. L'onde de tension née dans le plan d'écaillage va se propager vers la surface libre. A mesure qu'elle s'en approche, elle s'estompe du fait de l'apparition de l'endommagement sur son chemin. Pour une épaisseur d'impacteur plus élevée, le plan d'écaillage est plus éloigné de la surface libre. La distance à parcourir est alors plus grande. L'atténuation est donc plus importante et le rebond plus faible.

Distribution de la pression maximale atteinte dans l'épaisseur de la cible

La figure 2.9 présente la distribution de la pression maximale p^* dans l'épaisseur de la plaque impactée pour tous les essais réalisés. Les traits de couleur bleue représentent les résultats obtenus pour une même épaisseur d'impacteur $e_i = 3mm$ et les traits discontinus, pour une même vitesse d'impact $V_{impact} \simeq 306m/s$. Les profils de pression maximale sont une indication de l'atténuation de l'onde émise à partir du plan d'écaillage. On constate, pour une même épaisseur $e_i = 3mm$, que l'onde s'estompe plus rapidement lorsque la vitesse d'impact est plus élevée (c'est-à-dire lorsque p^* est plus élevée). Dans une zone proche de la surface libre, la pression p^* est très proche pour les trois vitesses. Le saut observé sur la vitesse de face arrière est alors approximativement le même (voir tableau 2.3). En revanche, si l'épaisseur varie pour une même vitesse d'impact, la différence entre les trois profils est maintenant nettement plus marquée. La pression p^* , dans la zone proche de la surface libre, est plus élevée pour l'essai avec un impacteur d'épaisseur $e_i = 2mm$ (c'est-à-dire lorsque le plan d'écaillage est le plus proche). L'onde s'estompe moins dans cette configuration et le saut de vitesse est alors plus important.

Soulignons une nouvelle fois la nécessité d'interpréter avec précaution l'information déduite de la mesure expérimentale de vitesse en surface libre. Il semble en effet bien difficile de relier ΔV_{pb} à p^* lorsque le matériau présente un comportement ductile comme le tantale.

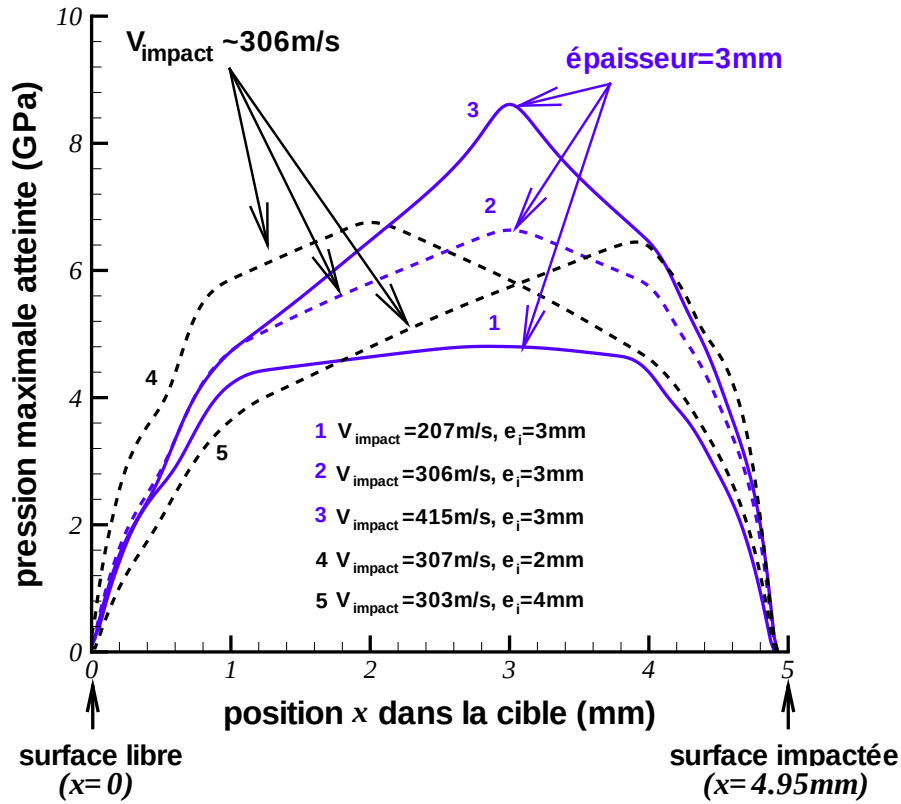


FIG. 2.9 – Valeur de la pression maximale atteinte dans l'épaisseur de la cible. L'endroit où elle est la plus élevée correspond au plan d'écaillage. Les traits de couleur bleue correspondent aux essais menés pour une même épaisseur de projectile, $e_i = 3\text{mm}$, tandis que les traits discontinus se réfèrent aux essais à même vitesses d'impact $V_{\text{impact}} \simeq 306\text{m/s}$.

2.3.3 Sensibilité au maillage

Plusieurs tailles de maille ont été testées afin de valider le modèle numérique. Les éléments testés mesurent de $100\mu\text{m} \times 100\mu\text{m}$ pour le maillage le plus grossier à $15\mu\text{m} \times 75\mu\text{m}$ pour le maillage le plus fin, la plus petite dimension se trouvant dans l'épaisseur des échantillons. Cette étude se fait en considérant une épaisseur d'impacteur $e_i = 3\text{mm}$ pour une vitesse de projectile $V_{\text{impact}} = 306\text{m/s}$.

Cette étape de validation est particulièrement importante dans le développement d'un modèle d'endommagement. Il est en effet remarqué que de nombreux modèles d'endommagement causent des problèmes d'objectivité vis à vis du maillage, rendant délicat l'interprétation des résultats, en particulier pour ce qui concerne la position de la zone endommagée, et l'épaisseur de cette zone, SUFFIS [126]. La figure 2.10 montre la répartition de l'endommagement à l'intérieur de la cible impactée dans la configuration non déformée. On constate

d'une part que la position de la zone endommagée (à 3 mm du bord libre de la cible, correspondant à l'épaisseur de l'impacteur) ne dépend pas du maillage et que sa taille ne varie plus de façon significative à partir d'une taille de maille de $25\mu\text{m} \times 75\mu\text{m}$. Elle mesure approximativement $165\mu\text{m}$ et contient 7 éléments pour le maillage $25\mu\text{m} \times 75\mu\text{m}$ et 11 pour la maille de taille $15\mu\text{m} \times 75\mu\text{m}$.

La figure 2.11 présente les différents profils de vitesses obtenus pour les 4 maillages considérés. Une nouvelle fois, la convergence au maillage est vérifiée et les mailles $15\mu\text{m} \times 75\mu\text{m}$ et $25\mu\text{m} \times 75\mu\text{m}$ ne révèlent aucune différence significative.

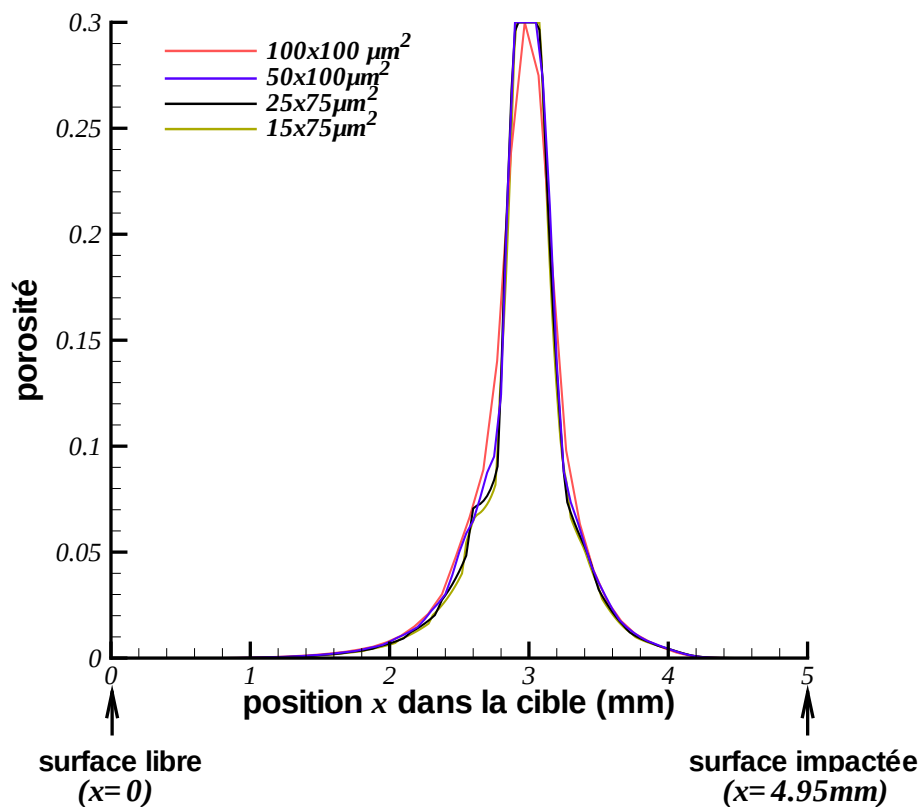


FIG. 2.10 – Distribution de l'endommagement et convergence au maillage. Un raffinement du maillage ne conduit pas à une position différente de la zone endommagée et la variation en épaisseur devient négligeable pour une taille de maille de $25\mu\text{m} \times 75\mu\text{m}$.

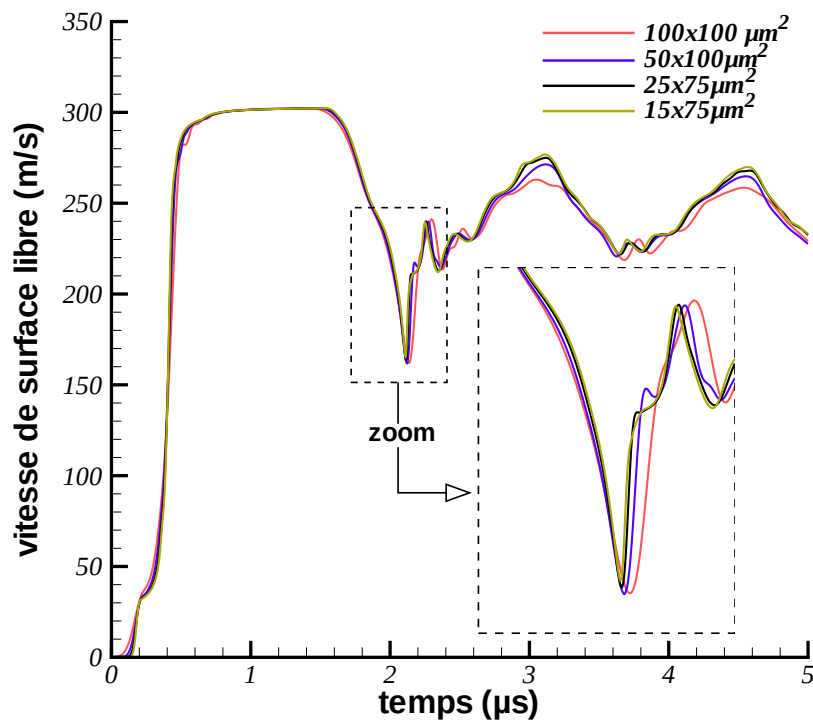


FIG. 2.11 – Profils de vitesses en face arrière obtenus pour différents maillages. La convergence est observée à partir d'une taille d'élément de $25\mu m \times 75\mu m$.

L'étude menée dans ce dernier paragraphe permet de valider le modèle d'endommagement et le maillage $25\mu m \times 75\mu m$ utilisé dans tous les résultats présentés tout au long de la partie simulation.

Conclusion

Nous avons étendu le modèle d'endommagement développé dans la partie précédente en prenant en compte les effets élastiques. Ce modèle a ensuite été implanté dans le code de calculs par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT via un sous-programme utilisateur VUMAT. Les simulations numériques permettent de retrouver les profils de vitesse de face arrière mesurés expérimentalement par ROY [116] sur le tantale. Pour cela, la distribution de Weibull (WEIBULL [147]) traduisant la répartition des pressions de nucléation est prise très large. De ce fait, nous observons un accroissement du nombre de sites de nucléation avec l'augmentation de la vitesse d'impact, fait relevé par ROY [116].

Les simulations numériques des tests d'impact de plaques ont permis d'analyser l'évolution de la pression dans le plan d'écaillage. Il a été mis en évidence que les déformations plastiques résultant de l'endommagement du tantale, matériau extrêmement ductile, sont à l'origine d'une relaxation de la contrainte dans le plan d'écaillage. La porosité, à cet instant, est très faible et la rupture est loin d'être effective. La réaccélération de la face arrière est généralement attribuée à l'apparition d'une fissure dans le plan d'écaillage. Cette interprétation, sans doute valable pour les matériaux fragiles, n'est plus adaptée aux matériaux ductiles.

Nous avons également montré que le rebond, abusivement appelé « signal d'écaillage », n'est pas lié seulement à la pression maximale atteinte dans le plan d'écaillage, mais également à l'endommagement apparu entre la surface libre et le plan d'écaillage. Ces résultats viennent compléter ceux de CHEN ET AL. [22], et ANTOUN AL. [2] qui soulignaient déjà l'importance de la prise en compte de l'endommagement dans l'essai d'impact de plaques. L'onde de tension issue du cœur de la cible s'atténue à mesure qu'elle se dirige vers la surface libre. Ainsi, plus l'épaisseur de l'impacteur est grande (l'onde s'estompe sur une plus grande distance), plus le saut de vitesse diminue. L'effet de la relaxation des contraintes que peut engendrer un endommagement très faible (et ce au sein de toute l'éprouvette) est fondamental dans l'analyse que nous avons développée.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de cette thèse était de proposer une modélisation de l'endommagement par croissance de cavités, pour des chargements dynamiques à forte triaxialité. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux étapes de nucléation et de croissance. La rupture des matériaux intervient par nucléation, croissance et coalescence de micro-cavités.

L'étape d'apparition des vides peut être contrôlée par plusieurs mécanismes, notamment la cavitation. La pression conduisant à l'apparition spontanée d'un vide dans le matériau est étroitement liée aux propriétés élastiques et viscoplastiques de la matrice. Une fois que le vide est nucléé, il croît par déformation plastique de la matrice qui l'entoure. L'étape ultime du processus de rupture ductile est la coalescence. C'est la plus difficile à modéliser en raison des problèmes de localisation. Néanmoins, pour les matériaux extrêmement ductiles, nous avons vu qu'il est couramment admis que la rupture finale peut être décrite par une valeur critique de porosité. La partie bibliographie nous a aussi donné l'occasion de présenter les approches statistiques utilisées dans la modélisation de l'endommagement.

Lorsque le matériau est soumis à des sollicitations très rapides, la micro-inertie présente à la périphérie des vides ralentit leur expansion et permet ainsi de retarder l'endommagement. Nous avons à cette occasion rappelé l'existence de deux types d'approches : les analyses mécaniques (initiées par KNOWLES ET JAKUB [82], CARROLL ET HOLT [21]) et les approches récentes d'homogénéisation en dynamique (voir par exemple WANG [143], MOLINARI ET MERCIER [97]). Il est alors souligné, outre l'influence de l'inertie sur l'expansion des vides, la nécessité de considérer une distribution de populations de défauts lorsque les vitesses de sollicitations sont importantes.

Fort du constat de la dépendance des effets inertiels sur la taille des vides, dans la deuxième partie de ce manuscrit, nous avons proposé d'analyser le comportement d'un matériau poreux contenant une distribution en taille initiale de cavités. La croissance des vides présents dans le matériaux est gouvernée par la loi constitutive développée par MOLINARI

ET MERCIER [97] pour les matériaux poreux. La pression appliquée à un motif (sphère creuse unitaire) est la somme d'une contribution quasi-statique, prenant en compte le comportement viscoplastique de la matrice à partir d'un critère de type Gurson, et d'une contribution inertielle.

Nous avons alors considéré deux types d'approches d'homogénéisation permettant de relier les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques du VER. Le schéma de type « Reuss » considère que la pression appliquée au VER est identique à celle aux frontières de chaque cellule élémentaire (représentée chacune par une sphère creuse). Pour un schéma de type « Voigt », la même vitesse de déformation est imposée à toutes les cellules élémentaires.

En particulier, nous avons montré que pour un type de matériau (contenant une population de vides entourés d'une matrice de même rayon extérieur), les effets micro-inertiels conduisent au développement d'un endommagement plus homogène lorsque le schéma de type « Reuss » est adopté. Pour ce même matériau, le degré d'hétérogénéité apparaît insensible aux effets inertiels lorsque le schéma de type « Voigt » est adopté.

Dans la troisième partie, nous étendons cette modélisation au cas d'un matériau initialement sain (ne contenant aucune cavité). Ce matériau possède en son sein des sites potentiels de nucléation. Les pressions d'activation associées aux différents sites sont distribuées selon une statistique de Weibull. Le schéma de type « Reuss » a finalement été sélectionné pour le développement de notre modèle d'endommagement couvrant les étapes de nucléation et de croissance de cavités.

Dans le cas particulier d'un chargement à vitesse de pression constante, nous avons montré l'existence d'une solution analytique capable de décrire la croissance d'une cavité dans une matrice finie. L'influence de l'interaction entre les vides (à travers la porosité) est incluse dans le terme inertiel et la solution obtenue constitue une extension de la solution exacte utilisée par MOLINARI ET WRIGHT [98]. Un modèle plus complet, prenant en compte la chute de résistance de la matrice, a été proposé et nous permet de prédire l'influence de la vitesse de chargement sur le niveau de la pression d'écaillage dans le tantale.

Une comparaison avec les résultats expérimentaux de ROY [116] a révélé que ce modèle complet permettait de reproduire les niveaux de pression d'écaillage obtenus à partir de profils de vitesse de face arrière. Pour cela, nous avons admis que le chargement dans le plan d'écaillage pouvait être décrit par une rampe de pression.

L'approche décrivant l'étape de nucléation et croissance de cavités, développée dans la troisième partie du manuscrit, a ensuite été utilisée afin de construire un modèle d'endommagement élasto-viscoplastique valable pour des chargements à forte triaxialité mais pas forcément sphériques. L'écoulement plastique déviatorique du matériau est décrit à l'aide

d'une surface de charge influencée par l'endommagement. La plasticité d'origine sphérique est contrôlée par la croissance de vides.

Nous avons procédé ensuite à l'implantation du modèle dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT via un sous-programme utilisateur VUMAT en vue de la simulation du test d'impact de plaques. Les travaux très documentés de ROY [116] nous ont permis de confronter la modélisation à des résultats expérimentaux obtenus pour le tantale. Les profils de vitesse de surface libre sont correctement reproduits par les simulations numériques. Les développements nous ont permis notamment de mieux comprendre le phénomène d'écaillage rencontré dans ce type d'essai. Les éléments essentiels qui se dégagent de notre étude sont venus corroborer et compléter les résultats de CHEN ET AL. [22] et ANTOUN ET AL. [2]. Nous avons en effet mis en évidence l'importance de l'endommagement sur l'atténuation de l'onde de tension provenant du plan d'écaillage. Les taux de déformation plastique engendrés, en raison de la croissance des vides, provoquent une relaxation de la contrainte dans le plan d'écaillage pour des porosités encore relativement faibles. Nous avons montré que le signal, qui est habituellement interprété comme l'apparition de la fissure dans l'échantillon, correspond en réalité à la relaxation des contraintes dans le plan d'écaillage, réponse du matériau au développement de la déformation plastique. Il a été montré l'influence des effets de micro-inertie sur la pression maximale atteinte dans le plan d'écaillage.

Les travaux présentés dans ce document appellent naturellement à poursuivre certaines investigations.

Dans la dernière partie du manuscrit, le comportement du VER a été déterminé en utilisant une approche d'homogénéisation de type « Reuss ». Il existe bien d'autres schémas qui auraient pu être testés. Nous avons vu en particulier une approche de type « Voigt » dans la deuxième partie du manuscrit, à travers un modèle qui ne tenait pas compte de l'élasticité. L'objectif premier consiste alors à intégrer le schéma de type « Voigt » dans le modèle élasto-viscoplastique avec endommagement et de simuler le test d'impact de plaques.

Le modèle présenté ici est isotherme. Pour des conditions de sollicitations extrêmes mettant en jeu des vitesses de déformation de 10^6 à $10^8 s^{-1}$ et pour des vitesses de projectiles pouvant atteindre $30 km/s$, la prise en compte des effets de température sur la rhéologie du matériau est nécessaire, EFTIS ET AL. [40].

Dans le dernier chapitre, nous avons simulé l'essai d'impact de plaques. D'autres tests dynamiques peuvent permettre de valider le modèle d'endommagement proposé. A l'image de ce qui a été proposé dans les travaux de CAMPAGNE [19], l'impact d'une bille sur une plaque ainsi que l'impact de Taylor sont envisagés dans les développements futurs.

Enfin, il serait intéressant de pouvoir utiliser notre modélisation sur un autre matériau que le tantale. La campagne d'essais conduite par ROY [116] a fourni une base de données très

complète sur ce matériau et sur les profils de vitesses en surface libre. Les travaux récents de BOLIS ET VOLTZ [11] ont révélé, dans une analyse préliminaire, de fortes similitudes entre le tantale et l'alliage Plomb-Calcium. Le mécanisme de coalescence (empiètement géométrique) et la germination dans ce matériau laissent présager un comportement au choc similaire à celui du tantale.

Bibliographie

1. L. Adam. Modélisation du comportement thermo-élasto-viscoplastique des métaux soumis à grandes déformations. Application au formage superplastique. Thèse, Université de Liège, Belgique, 2003.
2. T. Antoun, L. Seaman, D. Curran, G. I. Kanel, S. V. Razorenov et A. V. Utkin. Spall Fracture. Springer-Verlag, 2003.
3. M. Arrigoni. Etude de l'influence des rugosités d'interface, de porosités et de l'épaisseur de l'échantillon sur la propagation des chocs laser dans des systèmes revêtus. Application au procédé LASAT (LASer Adhérence Test). Thèse, Université de Poitiers, France, 2004.
4. J. M. Ball. Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 306 :557–611, 1982.
5. T. W. Barbee Jr., L. Seaman, R. Crewdson et D. R. Curran. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals. *Journal of Materials*, 7 :393–401, 1972.
6. L. M. Barker et R. E. Hollenbach. Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface. *Journal of Applied Physics*, 43(11) :4669, 1972.
7. R. Becker. Ring fragmentation predictions using the gurson model with material stability conditions as failure criteria. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :3555–3580, 2002.
8. C. A. Berg. The motion of cracks in plane viscous deformation. [In]Proceedings of the Fourth U. S. National Congress of Applied Mechanics Berkeley. pages 885–892, 1962.
9. R. F. Bishop, R. Hill et N. F. Mott. The theory of indentation and hardness tests. *The Proceedings of the Physical Society*, 57(321) :147–159, 1945.
10. X. Boidin, P. Chevrier, J. R. Klepaczko et H. Sabar. Identification of damage mechanism and validation of a fracture model based on mesoscale approach in spalling of titanium alloy. *International Journal of Solids and Structures*, 43(14-15) :4595–4615, 2006.

11. C. Bolis et C. Voltz. Non localization of nucleation during lead-calcium alloy spall under Taylor's wave sollicitation : Comparison between metallographic observations and numerical simulations. *Journal de Physique IV France*, 134 :877–882, 2006.
12. M. Bonnet. Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis, Ecole Polytechnique, <http://www.lms.polytechnique.fr/users/bonnet/ens001.html>.
13. M. Bornert, T. Brettheau et P. Gilormini. Homogénéisation en mécanique des matériaux : comportements non linéaires et problèmes ouverts. Hermès Science Publication, 2001.
14. M. Boustie et F. Cottet. Experimental and numerical study on laser driven spallation into aluminium and copper targets. *Journal of Applied Physics*, 69(11) :7533–7538, 1991.
15. K. B. Broberg. International symposium on stress wave propagation in materials, Pennsylvania State University, Interscience, New York. 4 :229, 1960.
16. L. M. Brown et J. D. Embury. The initiation and growth of voids at second phase particles [In]Proceedings of the Third International Conference on Strength of Metals and Alloys, Institute of Metals, London, England. pages 164–169, 1973.
17. B. Budiansky, J. W. Hutchinson et S. Slutsky. Void growth and collapse in viscous solids. In Hopkins H. G. and Sewell M. J, eds. *Mechanics of Solids—The Rodney Hill 60th Anniversary Volume*. Pergamon Press, pages 13–45, 1982.
18. J. Cagnoux. Déformation et ruine d'un verre Pyrex soumis à un choc intense : Etude expérimentale et modélisation du comportement. Thèse, Université de Poitiers, 1985.
19. L. Campagne. Modélisation et simulation de la viscoplasticité et de l'endommagement en grandes vitesses de déformation. Thèse, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France, 2003.
20. L. Campagne, L. Daridon et S. Ahzi. A physically based model for dynamic failure in ductile metals. *Mechanics of Materials*, 37 :869–886, 2005.
21. M. M. Carroll et A. C. Holt. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, 43 :1626–1636, 1972.
22. D. N. Chen, Y. Y. Yu, Z. H. Yin, H. R. Wang et G. Q. Liu. On the validity of the traditional measurement of spall strength. *International Journal of Impact Engineering*, 31 :811–824, 2005.
23. P. Chevrier et J. R. Klepaczko. Spall fracture : Mechanical and microstructural aspects. *Engineering Fracture Mechanics*, 63 :273–294, 1999.
24. M.-S. Chou-Wang et C. O. Horgan. Cavitation in non linear elastodynamics for neo-hookean materials. *International Journal of Engineering Science*, 27 :967–973, 1989.

25. R. O. Cleveland, D. A. Lifshitz, B. A. Connors, A. P. Evan, L. R. Willis et L. A. Crum. In vivo pressure measurements of lithotripsy shock waves in pigs. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 24(2) :293–306, 1998.
26. A. C. F. Cocks. Inelastic deformation of porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37(6) :693–715, 1989.
27. R. Cortés. Dynamic growth of microvoids under combined hydrostatic and deviatoric stresses. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :1637–1645, 1992.
28. R. Cortés. The growth of microvoids under intense dynamic loading. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :1339–1350, 1992.
29. A. M. Cuitiño et M. Ortiz. Ductile fracture by vacancy condensation in f.c.c. single crystals. *Acta Materialia*, 44(2) :427–436, 1996.
30. D. R. Curran, L. Seaman et D. A. Shockey. Dynamic failure of solids. *Physics Reports*, 147 Nos. 5 & 6 :253–388, 1987.
31. D. R. Curran, D. A. Shockey et L. Seaman. Dynamic fracture criteria for a polycarbonate. *Journal of Applied Physics*, 44(9) :4025–4038, 1973.
32. C. Czarnota, S. Mercier et A. Molinari. Modelling of nucleation and void growth in dynamic pressure loading, application to spall test on tantalum. *International Journal of Fracture*, 141 :177–194, 2006.
33. L. Daridon. Cours Eléments finis. Université Louis Pasteur/IPST de Strasbourg, <http://www-ipst.u-strasbg.fr/loic/el-finis/>.
34. L. Davison et R. A. Graham. Shock compression of solids. *Physics Reports*, 55(4) :255–279, 1979.
35. L. Davison et A. L. Stevens. Continuum measures of spall damage. *Journal of Applied Physics*, 43(3) :988–994, 1972.
36. A. Dragon et H. Trumel. Damage under impact loading – some modelling challenges. [In] Constitutive laws, damage and fracture Fifth International Symposium High Dynamic Pressures, Tome I. pages 267–283, 2003.
37. J. M. Duva. A constitutive description of nonlinear materials containing voids. *Mechanics of Materials*, 5 :137–144, 1986.
38. J. M. Duva et J. W. Hutchinson. Constitutive potentials for dilutely voided nonlinear materials. *Mechanics of Materials*, 3 :41–54, 1984.
39. P. Duysinx. Optimisation topologique : du milieu continu à la structure élastique. Thèse, Université de Liège, Belgique, 1996.

40. J. Eftis, C. Carrasco et R. Osegueda. Simulations of hypervelocity impact damage and fracture of aluminium targets using a constitutive-microdamage material model. *International Journal of Impact Engineering*, 26 :157–168, 2001.
41. J. Eftis, C. Carrasco et R. A. Osegueda. A constitutive-microdamage model to simulate hypervelocity projectile-target impact, material damage and fracture. *International Journal of Plasticity*, 19 :1321–1354, 2003.
42. J. Eftis et J. A. Nemes. Evolution equation for the void volume growth rate in a viscoplastic-damage constitutive model. *International Journal of Plasticity*, 7 :275–293, 1991.
43. J. Eftis et J. A. Nemes. Modelling of impact-induced spall fracture and post spall behavior of a circular plate. *International Journal of Fracture*, 53 :301–324, 1992.
44. J. Eftis et J. A. Nemes. On the propagation of elastic-viscoplastic waves in damage-softened polycrystalline materials. *International Journal of Plasticity*, 12 :1005–1022, 1996.
45. J. Eftis, J. A. Nemes et P. W. Randles. Viscoplastic analysis of plate-impact spallation. *International Journal of Plasticity*, 7 :15–39, 1991.
46. I. Fried. Numerical solution of differential equations. Academic Press, New York, 1979.
47. R. Garber, I. M. Bernstein et A. W. Thompson. Hydrogen assisted ductile fracture of spheroidized carbon steels. *Metallurgical Transactions*, 12A :225–234, 1981.
48. A. N. Gent et P. B. Lindley. Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension. *Proceeding of the Royal Society of London, Series A*, 249 :195–205, 1958.
49. Y. Germain et A. Molinari. Creep failure analysis of bars sustaining constant tensile loads. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 4 :57–379, 2000.
50. J. C. Giannotta. Comportement mécanique et évolution structurale de cuivres de haute pureté dans le domaine dynamique. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 1986.
51. E. B. Glennie. The dynamic growth of a void in a plastic material and application to fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20 :415–429, 1972.
52. M. Gologanu, J. B. Leblond et J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids : Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :1723–1754, 1993.
53. D. E. Grady et M. E. Kipp. Dynamic fracture and fragmentation. [In]High-Pressure Shock Compression of Solids J. R. Asay, M. Shahinpoor Eds, Springer-Verlag Chapter 8. pages 265–322, 1993.

54. R. A. Graham. Introduction to high-pressure shock compression of solids [In]High-Pressure Shock Compression of Solids J. R. Asay, M. Shahinpoor Eds, Springer-Verlag Chapter 8. pages 1–5, 1993.
55. A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 221 :163–179, 1921.
56. T. F. Guo et L. Cheng. Thermal and vapor pressure effects on cavitation and void growth. *Journal of Material Science*, 36 :5871–5879, 2001.
57. T. F. Guo et L. Cheng. Vapor pressure and void size effects on failure of a constrained ductile film. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 :993–1014, 2003.
58. A. L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15, 1977.
59. J. W. Hancock et A. C. Mackenzie. On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24 :147–160, 1976.
60. S. Hanim. Modélisation de l'écaillage d'un aluminium et d'un acier, effet de la température initiale. Thèse, Université de Metz, France, 1998.
61. S. Hanim et S. Ahzi. A unified approach for pressure and temperature effects in dynamic failure criteria. *International Journal of Plasticity*, 17 :1215–1244, 2001.
62. S. Hanim et J. R. Klepaczko. Numerical study of spalling in an aluminium alloy 7020-t6. *International Journal of Impact Engineering*, 22 :649–673, 1999.
63. R. Hill. The mathematical theory of plasticity. Oxford University Press, Oxford, 1950.
64. R. S. Hixson, G. T. Gray, P. A. Rigg, L. B. Addessio et C. A. Yablinsky. Dynamic damage investigations using triangular waves. In M. D. Furnish, Y. M. Gupta et J. F. Forbes, editors, *Shock Compression of Condensed Matter–2003, Part I*, AIP Conference Proceedings 706, pages 469–472, Melville, NY, 2004.
65. N. J. Hoff. Approximate analysis of structures in presence of moderately large creep deformation. *Quarterly of Applied Mathematics*, 12 :49–55, 1954.
66. H. G. Hopkins. Dynamic expansion of spherical cavities in metals. [In]Progress in Solid Mechanics, vol. 1, Edited by I. N. Sneddon and R. Hill. pages 83–64, 1960.
67. B. Hopkinson. Scientific papers. Cambridge University Press, London, 1910.
68. B. Hopkinson. A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 213 :437–456, 1914.

69. H.-S. Hou et R. Abeyaratne. Cavitation in elastic and elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(3) :571–592, 1991.
70. Y. Huang. Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields. Report Mech 155, Division of Applied Sciences. Harvard University, 1989.
71. Y. Huang, J. W. Hutchinson et V. Tvergaard. Cavitation instabilities in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 :223–241, 1991.
72. V. R. Ikkurthi et S. Chaturvedi. Use of different damage models for simulating impact-drive spallation in metal plates. *International Journal of Impact Engineering*, 30 :275–301, 2004.
73. J. N. Johnson. Dynamic fracture and spallation in ductile solids. *Journal of Applied Physics*, 52(4) :2812–2825, 1981.
74. J. N. Johnson et F. L. Addessio. Tensile plasticity and ductile fracture. *Journal of Applied Physics*, 64(12) :6699–6712, 1988.
75. L. M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiia Akademii Nauk, SSSR, Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk(Russe)*, 8 :26–31, 1958.
76. G. I. Kanel, S. V. Razorenov et V. E. Fortov. Kinetics of spallation rupture in the aluminium alloy AMg6M. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 25(5) :707–711, 1984.
77. G.I. Kanel, S.V. Razorenov, A. V. Utkin, V. E. Fortov, K. Baumung, H. U. Karow, D. Rusch et V. Licht. Spall strength of molybdenum single crystals. *Journal of Applied Physics*, 12 :7162–7165, 1993.
78. M. E. Kassner et T. A. Hayes. Creep cavitation in metals. *International Journal of Plasticity*, 19 :1715–1748, 2003.
79. T. C. Kennedy, T. Puttapitukporn et M. E. Kassner. Dynamic effects on cavitation instabilities in solids. *Acta Mechanica*, 165 :73–85, 2003.
80. J. R. Klepaczko. Dynamic crack initiation, some experimental methods and modelling [In]Crack dynamics in metallic materials J. R. Klepaczko editor, Springer. pages 255–453, 1990.
81. H. Klöcker. Analyse théorique de la croissance d'une cavité dans un matériau viscoplastique. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Etienne, France, 1991.
82. J. K. Knowles et M. T. Jakub. Finite dynamic deformations of an incompressible elastic medium containing a spherical cavity. *Archive For Rational Mechanics and Analysis*, 18(5) :367–378, 1964.
83. J. Köplik et A. Needleman. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 24 :835–853, 1988.

84. P. Kumar et J. Clifton. A star-shaped flyer for plate-impact recovery experiments. *Journal of Applied Physics*, 48(11) :4850–4852, 1977.
85. F. Lauro, B. Bennani, P. Drazetic, J. Oudin et X. Ni. Ductile damage and fracture finite element modelling of elasto-viscoplastic voided materials. *Computational Materials Science*, 7 :295–307, 1997.
86. J. B. Leblond, G. Perrin et P. Suquet. Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *International Journal of Plasticity*, 14 :213–235, 1994.
87. B. J. Lee et M. E. Mear. Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :1805–1836, 1992.
88. B. J. Lee et M. E. Mear. Studies of the growth and the collapse of voids in viscous solids. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116 :348–358, 1994.
89. J. Lemaitre et J. L. Chaboche. Mécanique des matériaux solides. Dunod, Paris, 1985.
90. T. Łodygowski et P. Perzyna. Numerical modelling of localized fracture of inelastic solids in dynamic loading processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :4137–4158, 1997.
91. J. K. Mackenzie. The elastic constants of a solid containing spherical holes. *Proceedings of the Physical Society*, 63(B) :1–11, 1950.
92. F. M. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :363–371, 1968.
93. S. Mercier et A. Molinari. Micromechanics of void growth at high rates. *Journal de Physique IV France*, 4 :415–420, 2000.
94. M. A. Meyers. Dynamic behavior of materials. John Wiley & Sons, 1994.
95. M. A. Meyers et C. T. Aimone. Dynamic fracture (spalling) of metals. *Progress in Materials Science*, 28 :1–96, 1983.
96. M. A. Meyers et L. E. Murr. Propagation of stress waves in metal. [In]Exploive welding, forming and compaction t. z. blazynski editor, elsevier, chapter 2. pages 17–82, 1983.
97. A. Molinari et S. Mercier. Micromechanical modelling of porous materials under dynamic loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :1497–1516, 2001.
98. A. Molinari et T. W. Wright. A physical model for nucleation and early growth of voids in ductile materials under dynamic loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53 :1476–1504, 2005.
99. F. Montheillet et L. Briottet. Endommagement et ductilité en mise en forme. *Techniques de l'Ingénieur, Traité Matériaux Métalliques*.

100. A. Needleman, V. Tvergaard et J. W. Hutchinson. Void growth in plastic solids. In A. S. Argon, editor, *Topics in Fracture and Fatigue*, Berlin, 1992. Springer-Verlag.
101. F. H. Norton. *Creep of steel at high temperature*. McGraw-Hill, New York, 1929.
102. S. A. Novikov, I. I. Divnov et A. G. Ivanov. The study of fracture of steel, aluminium, and copper under explosive loading. *Physical Metals and Metal Science(Russe)*, 21(4) :608–615, 1966.
103. E. Olevsky et V. Skorohod. Some questions of sintering of porous bodies. *International Journal of Plasticity*, 16 :1–37, 1988.
104. M. Ortiz et A. Molinari. Effect of strain hardening and rate sensitivity on the dynamic growth of a void in a plastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 114 :48–53, 1992.
105. G. Perrin. Homogenized behavior equations for porous bingham viscoplastic material. *Journal of Engineering Mechanics- American Society of Civil Engineers*, 128 :885–888, 2002.
106. G. Perrin et J. B. Leblond. Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension. application to some problems in ductile fracture of metals. *International Journal of Plasticity*, 6 :677–699, 1990.
107. P. Perzyna. Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids. *International Journal of Solids and Structures*, 22(7) :797–818, 1986.
108. D. A. Polignone et C. O. Horgan. Cavitation for incompressible anisotropic nonlinearly elastic spheres. *Journal of Elasticity*, 33 :27–65, 1993.
109. K. E. Puttick. Ductile fracture in metals. *Philosophical Magazine*, 4 :964–969, 1959.
110. J. R. Rice et D.M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17 :201–217, 1969.
111. A. B. Richelsen et V. Tvergaard. Dilatant plasticity or upper bounds estimates for porous ductile solids. *Acta Metallurgica et Materialia*, 42 :2561–2577, 1994.
112. J. S. Rinehart. Some experimental indications of the stresses produced in a body by an exploding charge. *Journal of Applied Physics*, 22(9) :1178–1181, 1951.
113. J. S. Rinehart. Some quantitative data bearing on the scabbing of metals under explosive attack. *Journal of Applied Physics*, 22(5) :555–560, 1951.
114. J. S. Rinehart. Scabbing of metals under explosive attack : multiple scabbing. *Journal of Applied Physics*, 23(11) :1229–1233, 1952.
115. V. I. Romanchenko et G. V. Stepanov. The dependance of critical stresses upon the time parameters of load at spalling in copper, aluminium, and steel. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 21(4) :141–147, 1980.

116. G. Roy. Vers une modélisation approfondie de l'endommagement ductile dynamique. Investigation expérimentale d'une nuance de tantale et développements théoriques. Thèse, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aéronautique, Université de Poitiers, France, 2003.
117. G. Roy, H. Trumel et A. Dragon. Spall damage modelling. inertia effects in fully elastic-plastic range. [In] Plasticity, Damage and Fracture at Macro, Micro and Nano scales (Proc. PLASTICITY'02) A.S. Khan, O. Lopez-Pamies editors, Neat Press. pages 666–668, 2002.
118. N. Schlüter, F. Grimpe, W. Bleck et W. Dahl. Modelling of the damage in ductile steels. *Computational Materials Science*, 7 :27–33, 1996.
119. L. Seaman, D. R. Curran et D. A. Shockey. Computational models for ductile and brittle fracture. *Journal of Applied Physics*, 47(11) :4814–4826, 1976.
120. D. A. Shockey, K. C. Dao, L. Seaman et D. R. Curran. A computational model of microstructural fracture processes in A533B pressure vessel steel, NP-1398, Final report. EPRI, 1980.
121. D. A. Shockey, L. Seaman et D. R. Curran. The micro-statistical fracture mechanics approach to dynamic fracture problems. *International Journal of Fracture*, 27 :145–157, 1985.
122. J. Sivaloganathan. On cavitation and degenerate cavitation under internal hydrostatic pressure. *Proceeding of the Royal Society of London, Series A*, 455 :3645–3664, 1999.
123. C. S. Speight et P. F. Taylor. Metallurgical applications of shock-wave and high strain rate phenomena. [In] L. E. Murr, K. P. Standhammer, P. F. Taylor Eds, International Conference Portland, USA. 1986.
124. G. V. Stepanov. Spall fracture of metals by elastic-plastic loading waves. *Problemy Prochnosti(Russe)*, 8 :66–70, 1976.
125. O. P. Søvik et C. Thaulow. Growth of spheroidal voids in elastic-plastic solids. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 20 :1731–1744, 1997.
126. A. Suffis. Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts. Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, 2004.
127. W. H. Tai. Plastic damage and ductile fracture in mild steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 37(4) :853–880, 1990.
128. G.J. Taylor et H. Quinney. The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proceeding of the Royal Society of London, Series A*, 143 :307–326, 1934.

129. P. F. Thomason. Three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. *Acta Materialia*, 33(6) :1079–1085, 1985.
130. P. F. Thomason. Ductile spallation fracture and the mechanics of void growth and coalescence under shock-loading conditions. *Acta Materialia*, 47(13) :3633–3646, 1999.
131. W. Tong et G. Ravichandran. Dynamic pore collapse in viscoplastic material. *Journal of Applied Physics*, 74 :2425–2435, 1993.
132. F. R. Tuler et B. M. Butcher. A criterion for time dependance of dynamic fracture. *International Journal of Fracture Mechanics*, 4(4) :431–437, 1968.
133. V. Tvergaard. Influence of voids on shear bands instabilities under plain strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17 :389–407, 1981.
134. V. Tvergaard. Material failure by void coalescence in localized shear bands. *International Journal of Solids and Structures*, 18 :659–672, 1982.
135. V. Tvergaard. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 27 :83–151, 1990.
136. V. Tvergaard. Effect of large elastic strains on cavitation instability predictions for elastic-plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :5453–5466, 1999.
137. V. Tvergaard et A. Needleman. Analysis of cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32 :157–169, 1984.
138. V. Tvergaard et A. Needleman. Effect of material rate sensitivity on failure modes in the charpy v-notch test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(3) :213–241, 1986.
139. P. Vidal, D. Desbordes, B. Khasainov, H.-N. Presles et R. Zitoun. Dynamique des détonations dans les gaz, Ecole de Combustion, 9–15 mai 2004, La Vieille Perrotine, CAES du CNRS, Oléron. 2004.
140. R. von Mises. Théorie des probabilités. Fondements et applications. Annales de l'Institut Henri Poincaré, tome 3(2) :137–190, 1932.
141. J. M. Walsh, M. H. Rice, R. G. McQueen et F. L. Yarger. Shock-wave compressions of 27 metals. equations of state of metals. *Physical Review*, 108(2) :196–216, 1957.
142. Z. P. Wang. Growth of voids in porous ductile materials at high strain rate. *Journal of Applied Physics*, 76 :1535–1542, 1994.
143. Z. P. Wang. Void-containing nonlinear materials subject to high-rate loading. *Journal of Applied Physics*, 81 :7213–7227, 1997.

144. Z. P. Wang, F. L. Huang, M. Hou, S. R. Yun et J. Ding. Description of two-dimensional spallation in pure copper. *International Journal of Fracture*, 60 :195–208, 1993.
145. Z. P. Wang et Q. Jiang. A yield criterion for porous ductile media at high strain rate. *Journal of Applied Mechanics*, 64 :503–509, 1997.
146. Z. Wanjia, Z. Yuanjin, S. Chunxiang et W. Wu. Study on dynamic damage-accumulation for the stainless steel (00cr18ni9). [In]Proceedings of the International Symposium on Intense Dynamic Loading and Its Effects, Chengdu, China. pages 339–443, 1992.
147. W. Weibull. A statistical distribution of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :293–297, 1951.
148. K. Weinberg et M. Ortiz. Shock wave induced damage in kidney tissue. *Computational Materials Science*, 32 :588–593, 2005.
149. M. J. Worswick, B. Wong et R. J. Pick. Void growth during high velocity impact : experiment and model. *Journal de Physique IV France*, 1 :605–612, 1991.
150. T. W. Wright, S. E. Schoenfeld, K. T. Ramesh et X. Y. Wu. Progress in computational models for damage from shear bands and voids. In M. D. Furnish, Y. M. Gupta et J. F. Forbes, editors, *Shock Compression of Condensed Matter–2003, Part I*, AIP Conference Proceedings 706, pages 629–632, Melville, NY, 2004.
151. X. Y. Wu, K. T. Ramesh et T. W. Wright. The dynamic growth of a single void in a viscoplastic material under transient hydrostatic loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 :1–26, 2003.
152. X. Y. Wu, K. T. Ramesh et T. W. Wright. The effects of thermal softening and heat conduction on the dynamic growth of voids. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :4461–4478, 2003.
153. X. P. Xu et A. Needleman. Simulations of ductile failure with two size scales of voids. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 10(5) :459–484, 1991.
154. Z. L. Zhang, C. Thaulow et J. Ødergård. An improved gurson-type model for hardenable ductile metals. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 10(4) :499–527, 1995.
155. S. N. Zhurkov. Kinetic concept of the strength of solids. *International Journal of Fracture*, 1 :311–323, 1965.
156. O. C. Zienkiewicz et R. L. Taylor. *The Finite Element Method - Volume 2 :Solid Mechanics*. Butterworth Heinemann, 2000.

Lexique

Nous rappelons simplement ici les différents modèles et notions abordés dans le manuscrit. Les équations ne sont pas reprises mais les renvois aux éléments complémentaires sont précisés.

approche de type « Reuss » approche de type « Voigt »	Dans l'analyse de populations de vides (ou de sites potentiels de nucléation), cette approche suppose que le tenseur des contraintes macroscopique est le même pour toutes les populations (voir paragraphe 1.2.2 page 100). Dans l'analyse de populations de vides (ou de sites potentiels de nucléation), cette approche suppose que le tenseur des vitesses de déformation macroscopique est le même pour toutes les populations (voir paragraphe 1.2.3 page 101).
MATb MATf	Matériau poreux identifié par une répartition uniforme de vides dans la matrice. Chaque cavité sphérique est supposée se trouver dans une calotte sphérique de même rayon extérieur initial. La distribution en tailles de vides conduit alors à une distribution de porosités initiales (voir figure 2.1-(a) page 103). Matériau poreux identifié par une population de sphères creuses présentant la même porosité locale. Chaque cavité sphérique est supposée se trouver initialement dans une calotte sphérique finie où l'on trouve la même porosité. La distribution en tailles de vides conduit alors à une distribution de rayons extérieurs initiaux de cellules sphériques (voir figure 2.1-(b) page 103).
Modèle MW	Modèle de nucléation et croissance de vides faisant référence aux travaux de MOLINARI ET WRIGHT [98]. Dans cette approche, la croissance des vides est gouvernée par la loi d'évolution (2.5) page 130, où l'interaction entre les vides n'est pas prise en compte (la matrice est supposée infinie). La contribution statique est constante et est donnée par p_c, la pression de nucléation.
Suite page suivante ...	

Suite ...	
Modèle I	Modèle de croissance de vides développé par MOLINARI ET MERCIER [97] sur la base d'une approche d'homogénéisation en dynamique. Cette analyse est utilisée pour décrire le comportement d'une cellule élémentaire lorsque le vide est déjà présent. La contribution inertielle tient compte de l'interaction entre les vides via la porosité f (la matrice est supposée finie, voir équation (2.3) page 129) et la contribution statique évolue avec l'endommagement (voir équation (2.4) page 130).
Modèle II	Modèle de nucléation et croissance de vides développé dans le présent travail de thèse. Ce modèle est une extension du Modèle MW avec la prise en compte de l'interaction entre les vides dans le terme inertiel (voir relation (2.6) page 130). Une solution analytique pour ce modèle est mise en évidence dans nos travaux (voir équation (2.29) page 134).
Modèle III	Modèle couvrant le processus de rupture ductile de la nucléation jusqu'à l'amorce de la coalescence. Ce modèle que nous développons est obtenu par combinaison du Modèle I et du Modèle II . La partie inertielle tient donc compte de la porosité (voir équation (2.3) page 129) et la contribution statique est constante au début du processus (donnée par p_c) puis décroît avec l'endommagement (voir équation (2.34) page 138 et figure 2.3 page 139).

Liste des figures

INTRODUCTION

1	Observation typique d'un calcul dans un rein animal, d'après CLEVELAND ET AL. [25], et résultats d'une simulation numérique, d'après WEINBERG ET ORTIZ [148]	3
2	Gammes de contraintes, de déformations et de vitesses de déformation atteintes lors de différents tests	4
3	Ecaillage d'une cible en alliage de plutonium	4
4	Micrographie d'un specimen en acier de cuve	5
5	Micrographie montrant des fissures dans un fer Armco	5
6	Description du processus de rupture ductile d'un matériau	6

PARTIE I

1.1	Vide cylindrique s'allongeant suivant son axe de révolution.	15
1.2	Vide sphérique dans une matrice infinie soumise à un chargement de traction uniaxiale	17
1.3	Agrégat matrice-vides soumis à une contrainte uniaxiale	21
1.4	Agrégat matrice-vides contenant des cavités de forme et d'orientation aléatoires, et modèle de sphère creuse utilisé par GURSON [58]	22
1.5	Surface de charge de G-T dans le plan $(\Sigma_m/\bar{\sigma}, \Sigma_{eq}/\bar{\sigma})$	24
2.1	Histoire de la pression appliquée dans l'analyse de WU ET AL. [151]	33
2.2	Croissances dynamique et quasi-statique d'un vide soumis à un chargement sous-critique dans un matériau non sensible à la vitesse de déformation, d'après WU ET AL. [151]	34
2.3	Influence des effets d'inertie et de sensibilité à la vitesse de déformation sur la croissance de vide pour un chargement sous-critique, d'après WU ET AL. [151]	35
2.4	Propagation du front plastique dans une sphère	37

2.5	Comparaison des analyses dynamique et quasi-statique lors de l'expansion d'un vide dans une matrice viscoplastique, d'après MOLINARI ET MERCIER [97]	48
2.6	Influence de la triaxialité des contraintes sur l'évolution de la porosité, MOLINARI ET MERCIER [97]	49
3.1	Exemple de synthèse de mesures obtenues par SEAMAN ET AL. [119] permettant de définir la fonction de répartition de tailles de vides	55
3.2	Influence du coefficient d'écrouissage et de la déformation à la limite d'élasticité sur la pression de cavitation, d'après HUANG ET AL. [71] et WU ET AL. [152]	59
3.3	Mécanismes de coalescence de vides, d'après SCHLÜTER ET AL [118]	61
3.4	Evolution de la variable f^* , introduite par TVERGAARD [134], TVERGAARD ET NEEDLEMAN [137], en fonction de la porosité f	63
3.5	Mise en évidence par PUTTICK [109] du modèle de coalescence proposé par BROWN ET EMBURY [16]	64
4.1	Ecaillage d'une cible en cuivre, HIXSON ET AL. [64]	67
4.2	Représentation simplifiée de la propagation d'ondes lors d'un impact de plaques	69
4.3	Représentation de Lagrange de l'impact de plaques et croisement des ondes dans le plan d'écaillage	70
4.4	Représentation des états d'équilibre thermodynamiques lors du passage d'un choc	73
4.5	Front d'onde se propageant dans un solide, d'après GRAHAM [54]	76
4.6	Contrainte d'écaillage en fonction de la vitesse de chargement, d'après ROY [116]	77
4.7	Dépendance de la contrainte d'écaillage à la vitesse de déformation pour le molybdène. Influence de la microstructure, d'après KANEL ET AL. [77]	78
4.8	Vitesse de surface libre type obtenue par un VISAR	79
4.9	Propagation du signal d'écaillage du plan de rupture vers la surface libre où est effectuée la mesure de vitesse, d'après GRADY ET KIPP [53]	80
4.10	Profil de face arrière et méthode de mesure de la contrainte d'écaillage, d'après AUTOUN ET AL. [2]	81

PARTIE II

1.1	Schéma de la sphère creuse utilisé pour le comportement dynamique d'une cellule élémentaire	96
2.1	Configuration initiale de distribution de sphères creuses pour deux types de matériaux	103
2.2	Distribution de Gauss de tailles initiales de cavités utilisée.	105

2.3	Evolution des rayons de vides pour le matériau MATb en utilisant l'approche de type « Reuss ». La vitesse de pression est de $10\text{GPa}/\mu\text{s}$ et la masse volumique du matériau est fixée à $2700\text{kg}/\text{m}^3$	108
2.4	Evolution des rayons de vides pour le matériau MATb en utilisant l'approche de type « Reuss ». La vitesse de pression est de $1000\text{GPa}/\mu\text{s}$ et la masse volumique du matériau est fixée à $2700\text{kg}/\text{m}^3$	109
2.5	Evolution des rayons de vides pour le matériau MATb en utilisant l'approche de type « Reuss ». La vitesse de pression est de $10\text{GPa}/\mu\text{s}$ et la masse volumique du matériau est fixée à $7800\text{kg}/\text{m}^3$	110
2.6	Evolution des rayons de vides pour le matériau MATf soumis à une vitesse de pression de $10\text{GPa}/\mu\text{s}$. L'approche adoptée est de type « Reuss »	111
2.7	Evolution des rayons de vides pour le matériau MATb en utilisant l'approche de type « Voigt »	114
2.8	Evolution des pressions appliquées et des contributions statiques viscoplastiques pour le matériau MATb en utilisant l'approche de type « Voigt »	115
2.9	Evolution des rayons de vides pour le matériau MATf en utilisant l'approche de type « Voigt »	116
2.10	Evolution des pressions appliquées et des contributions statiques viscoplastiques pour un matériau MATf en utilisant l'approche de type « Voigt »	117
2.11	Evolution des rayons de vides pour le matériau MATb et comparaison des deux approches de type « Reuss » et de type « Voigt ». La vitesse de pression est de $10\text{GPa}/\mu\text{s}$ et la masse volumique du matériau est fixée à $2700\text{kg}/\text{m}^3$	119

PARTIE III

1.1	Distribution de WEIBULL [147] des pressions de nucléation utilisée pour les calculs de pressions d'écaillage dans le tantale	126
1.2	Répartition des sites potentiels de nucléation dans le matériau	128
2.1	Evolution du rayon normalisé a/b_0 en fonction du paramètre adimensionnel $T^{3/2} \sqrt{\frac{\dot{p}}{\rho b_0^2}}$	136
2.2	Croissance de la porosité en fonction du temps T défini par $T = (p - p_c)/\dot{p}$, pour un chargement linéaire à vitesse $\dot{p}$ constante et présentation de la solution analytique	137
2.3	Evolution de la contribution quasi-statique p^{static} lorsque l'adoucissement de la matrice est pris en compte	139
3.1	Approximation de l'évolution de la pression dans le plan d'écaillage, d'après ROY [116]	142

3.2	Micrographies d'échantillons de tantale impactés à pressions de choc modérées ($< 13\text{GPa}$), d'après ROY [116]	143
3.3	Comparaison des résultats expérimentaux de pressions d'écaillage dans le tantale (ROY [116]) avec les différents modèles proposés	146
3.4	Influence de la vitesse de sollicitation sur la densité de probabilité de porosité et sur la distribution de rayons de vides	149
3.5	Effet de la vitesse de sollicitation sur le rayon du vide dominant	151
3.6	Etude des effets de différents paramètres sur la valeur de la pression d'écaillage	152

PARTIE IV

1.1	Schématisation de l'algorithme de retour radial	169
1.2	Réduction de la distance inter-cavités à l'apparition d'un nouveau vide	170
2.1	Distribution de pressions de nucléation dans le tantale utilisée pour la simulation numérique d'impacts de plaques	175
2.2	Géométrie et approche axisymétrique de l'impact de plaques	176
2.3	Simulation numérique illustrant la propagation des ondes de dilatation lors d'un impact de plaques	177
2.4	Evolution de la pression dans le plan d'écaillage	179
2.5	Evolution de la pression en fonction de la porosité pour trois vitesses d'impact	180
2.6	Evolution de la demi-distance moyenne séparant deux sites voisins en fonction de la pression maximale p^* atteinte dans le plan d'écaillage	182
2.7	Confrontation des simulations numériques avec les résultats expérimentaux de ROY [116]	183
2.8	Confrontation des simulations numériques avec les résultats expérimentaux de ROY [116]	185
2.9	Valeur de la pression maximale atteinte dans l'épaisseur de la cible	186
2.10	Distribution de l'endommagement et convergence au maillage	187
2.11	Profils de vitesses en face arrière obtenus pour différents maillages	188

Liste des tableaux

PARTIE I

2.1	Evaluation de la contribution quasi-statique dans le cas d'un chargement en pression, d'après CORTÉS [27]	42
-----	---	----

PARTIE II

2.1	Paramètres de distribution et de discrétisation ainsi que les constantes du matériau utilisés dans toute la partie II	106
2.2	Résumé des résultats relatifs aux figures 2.3, 2.4 et 2.5	110

PARTIE III

3.1	Paramètres matériau utilisés pour évaluer la contrainte d'écaillage dans le tantale	143
3.2	Paramètres matériau utilisés pour évaluer la contrainte d'écaillage dans un acier	147
3.3	Résumé des résultats relatifs aux figures 3.4(a) et 3.4(b)	148

PARTIE IV

2.1	Paramètres matériau utilisés pour les simulations numériques d'écaillage du tantale	173
2.2	Paramètres de distribution utilisés pour les simulations numériques d'écaillage du tantale	174
2.3	Résumé des résultats des différentes simulations numériques	184

Résumé

Les phénomènes dynamiques (grandes vitesses de sollicitation pour des temps de chargement très courts) suscitent, dans le monde de la recherche, une attention toute particulière aussi bien pour les applications industrielles (mise en forme, usinage à grande vitesse), médicales (intervention chirurgicale par choc laser) que militaires (perforation, impact). Le processus de rupture ductile se déroule en trois étapes : la nucléation, la croissance et la coalescence de vides. Le but de la thèse est de modéliser le comportement des matériaux métalliques ductiles soumis à un chargement dynamique.

Les conditions de sollicitations suggèrent la prise en compte d'une population de défauts dans le matériau. Après une étude préliminaire sur différentes approches d'homogénéisation établissant le lien entre le comportement macroscopique et l'évolution individuelle des vides, le schéma micro-macro de type « même condition en contrainte » est adopté. Il est alors montré que dans ce cas, et pour un comportement viscoplastique, l'hétérogénéité de l'endommagement est étroitement liée aux effets inertiels.

Dans un deuxième temps, le matériau est supposé initialement sain. L'étape de nucléation est prise en compte via la notion de sites potentiels de nucléation. Lorsque la pression appliquée atteint une valeur critique pour un site potentiel donné, un vide apparaît spontanément et commence à croître par déformation plastique de la matrice. Nous adoptons une approche statistique de la distribution des pressions de cavitation dans le matériau. Il est alors mis en évidence, dans la construction d'un nouveau modèle d'endommagement, la nécessité de tenir compte des effets de la porosité sur l'influence micro-inertielle et sur la chute de résistance de la matrice viscoplastique.

Le modèle de nucléation et croissance de vides est ensuite utilisé afin de construire un modèle complet élasto-viscoplastique avec endommagement. Le comportement déviatorique est géré par une loi de plasticité classique de type Prandtl-Reuss tandis que la partie sphérique est gouvernée par la croissance des cavités avec effet micro-inertiel. Ce modèle d'endommagement est implanté dans le code de calculs par éléments finis ABAQUS/EXPLICIT, via un sous-programme utilisateur VUMAT. L'essai d'impact de plaques est simulé et les résultats obtenus révèlent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux sur le tantale issus de la littérature.

Mots clés *endommagement ductile, micro-inertie, dynamique, nucléation, statistique, élasto-viscoplasticité, écaillage, éléments finis*

Intitulé et adresse du laboratoire

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM)

UMR CNRS 7554, Université Paul Verlaine - Metz

Ile du Saulcy, 57045 METZ, France