



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE

UNIVERSITÉ Paul Verlaine - METZ	
S.G.D.	
N° Inv.	
Cote	S/M305/04

THÈSE

Présentée à



UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE DE METZ

Par

Hala MOUHAMAD

Pour l'obtention du grade de :
Docteur de l'Université de Metz

Spécialité : Sciences de l'ingénieur
Option : Mécanique

Influence de l'écoulement interstitiel sur le comportement d'un matériau semi-solide

Soutenue le 5 avril 2005 devant le jury composé de :

BOBADILLA Manuel
DANGLA Patrick
GEINDREAU Christian
GIRAUD Albert
LESOULT Gérard
POTIER-FERRY Michel

Chercheur ARCELOR
Chercheur, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
Maître de Conférence HDR à l'Université Joseph Fourier
Professeur à l'Université de Metz
Professeur à l'École des Mines de Nancy
Professeur à l'Université de Metz

Examineur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de Thèse

REMERCIEMENTS

UNIVERSITE Paul Verlaine - METZ S.C.D.	
N° Inv.	
Cote	S/M ₃ 05/04
Loc	

Le travail présenté dans ce mémoire à été réalisé au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux dans l'équipe simulation numérique. Je remercie chaleureusement monsieur le Professeur Michel Potier-Ferry d'avoir dirigé cette thèse.

Je remercie Messieurs, Dangla, chercheur au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, et Geindreau, maître de conférence HDR à l'Université Joseph Fourier qui ont répondu de manière enthousiaste à la lourde tâche de rapporteur. Je suis très honoré de l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'ensemble de mes travaux.

Je remercie Messieurs les membres du jury, Bobadilla, chercheur ARCELOR, Giraud, professeur à l'Université de Metz, et Lesoult, professeur à l'Ecole des Mines de Nancy, pour avoir participer comme examinateur à ma thèse et d'avoir animé et rendu très intéressant l'oral de ma soutenance.

Je remercie toutes les personnes que j'ai rencontrées durant ma thèse et qui m'ont permis d'avancer. Je remercie mes amies et amis du LPMM pour leur soutien et leur sympathie et pour tous les bons moments que nous avons passés ensemble durant cette thèse.

Enfin de grands remerciements sont à adresser à ma famille qui m'a supporté même de Syrie et à Samuel qui m'a permis de garder confiance et de réaliser ce mémoire de qualité.

INFLUENCE DE L'ÉCOULEMENT INTERSTITIEL SUR LE COMPORTMENT D'UN MATÉRIAU SEMI-SOLIDE

Sommaire

Introduction Générale.....	3
Chapitre 1 : Description et modélisation de l'état semi-solide.....	7
Chapitre 2 : Une modélisation viscoplastique pour un milieu semi-solide.....	37
Chapitre 3 : Une solution analytique pour un milieu viscoplastique semi-solide.....	61
Chapitre 4 : Une modélisation et une solution analytique pour un milieu semi-solide élastoviscoplastique... ..	83
Conclusion Générale.....	115
Références bibliographiques.....	119
Annexes.....	129

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans les procédés classiques de mise en forme, le matériau est, soit dans un état complètement liquide comme pour le moulage ou la fonderie, soit dans un état complètement solide comme dans le cas du forgeage, du laminage ou du frittage.

Pourtant il y a beaucoup d'avantages à traiter le matériau à l'état semi-solide. Par exemple la diminution de la porosité améliore la qualité du produit, l'abaissement de la température et des efforts de mise en forme permettent d'économiser l'énergie et de faire durer davantage les outils. Le traitement des matériaux à l'état semi-solide permet aussi d'obtenir des formes finales plus variées. La compréhension du comportement des matériaux à l'état semi-solide est donc un thème important en vue de l'étude de nouveaux procédés de mise en forme. C'est aussi important pour la maîtrise de la coulée continue de l'acier, où une grande partie du produit est dans cet état.

L'écoulement interstitiel du fluide dans l'alliage métallique à l'état semi-solide engendre une répartition non homogène du solide et du liquide, que l'on appelle phénomène de ségrégation. Que ce soit pour des procédés nouveaux, comme le thixomoulage, ou plus traditionnels, comme la coulée continue, cette ségrégation a une grande influence sur la qualité du produit.

Dans la littérature, beaucoup de modèles utilisés considèrent l'alliage à l'état semi-solide comme un milieu monophasique. On trouve très peu de modélisations vraiment biphasiques des alliages semi-solides.

Beaucoup d'auteurs se concentrent sur le comportement du solide poreux, qui est certes un problème difficile. L'objectif de cette thèse est de comprendre l'influence de l'écoulement interstitiel sur le comportement global d'un domaine à l'état semi-solide.

Dans cette thèse, l'alliage semi-solide est considéré comme un milieu poreux saturé par le liquide. Nous avons essayé de mettre en place le modèle biphasique le plus simple possible : il couple un squelette compressible, décrit par la loi d'Abouaf et Chenot [ABO 1986] et un liquide interstitiel dont l'écoulement obéit à une loi de Darcy. Deux approches complémentaires seront utilisées pour analyser le comportement d'une portion de matériau à l'état semi-solide. D'abord, le modèle sera mis sous une forme adimensionnelle, ce qui fera apparaître deux paramètres sans dimension. Ensuite une approche complètement analytique permettra de distinguer plusieurs types de comportement, selon la valeur de l'un de ces nombres sans dimension.

Contenu de la thèse

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier est une étude bibliographique sur les matériaux semi-solides, leurs modélisations et les procédés où cet état existe.

Le second chapitre concerne la modélisation biphasique proposée, qui couple un squelette viscoplastique compressible et un fluide interstitiel. Le point original de ce chapitre est l'analyse dimensionnelle, qui fait apparaître deux nombres sans dimension caractérisant le modèle.

Dans le troisième chapitre, une étude analytique d'un échantillon unidimensionnel est réalisée. On trouve deux types de comportement en fonction de la vitesse de déformation imposée.

Le quatrième chapitre permettra d'évaluer l'influence de l'élasticité de la phase solide. L'analyse dimensionnelle fait apparaître un temps de relaxation, qui caractérise le temps nécessaire pour atteindre un état stationnaire. Une étude analytique a pu être menée pour analyser le comportement du modèle instationnaire.

CHAPITRE 1

Description et modélisation de l'état semi-solide

Chapitre 1 : Description et modélisation de l'état semi-solide

1. L'ETAT SEMI-SOLIDE DANS LES PROCEDES DE FABRICATION DES MATERIAUX	10
2. LA MODELISATION NUMERIQUE DES PROCEDES	11
2.1 PROCESSUS DE MISE EN FORME A L'ETAT SEMI-SOLIDE	11
2.2 PROCESSUS DE LA COULEE CONTINUE	14
2.2.1 <i>Présentation de la coulée continue</i>	14
2.2.2 <i>Caractéristiques de la coulée continue de l'acier</i>	15
2.2.3 <i>Coque initiale</i>	16
2.2.4 <i>Des paramètres importants pour la coulée continue</i>	17
2.2.4.1 Géométrie de la lingotière	17
2.2.4.2 Pression et vitesse	18
2.2.4.3 Déchirure et collage du brin	19
2.2.5 <i>Problèmes thermomécaniques couplés</i>	21
3. DESCRIPTION DES ALLIAGES A L'ETAT SEMI-SOLIDE	22
3.1 STRUCTURES DENDRITIQUE ET GLOBULAIRE	23
3.2 MECANISMES DE FORMATION DE LA STRUCTURE DENDRITIQUE	25
3.3 PASSAGE DE LA STRUCTURE DENDRITIQUE A LA STRUCTURE GLOBULAIRE	27
4. MODELES DE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE POUR L'ETAT SEMI-SOLIDE	29
4.1 ESSAIS RHEOLOGIQUES	30
4.1.1 <i>Introduction</i>	30
4.1.2 <i>Les essais de compression</i>	31
4.1.3 <i>Les essais de traction</i>	32
5. MODELES DE COMPORTEMENT BIPHASIQUE	33
5.1 GENERALITES	33
5.2 HOMOGENEISATION	34
6. OBJECTIF	36

1. L'état semi-solide dans les procédés de fabrication des matériaux

Les matériaux à l'état partiellement solide (pâteux) se caractérisent par la coexistence de deux phases solide et liquide. Ils se divisent en deux catégories [SUE 2002] :

- La première est l'état semi-liquide avec une fraction du solide bien inférieure à 45%. Ce matériau est proche du liquide et son comportement peut être décrit en termes de viscosité apparente, comme un milieu monophasique.
- La seconde concerne l'état semi-solide avec une fraction du solide comprise entre 45 et 55%. Le comportement de ce matériau est décrit par un milieu biphasique.

Il existe deux manières pour obtenir l'état semi-solide : à partir de l'état liquide par solidification partielle, ou à partir de l'état solide par fusion partielle (FIG.(1.1)).

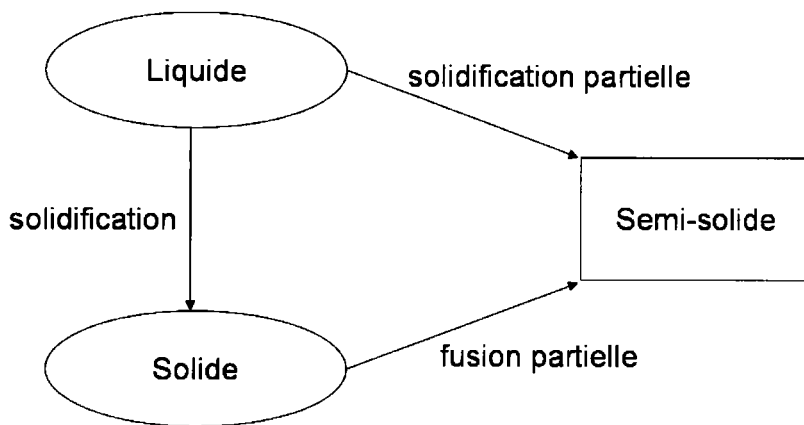


FIG.(1.1) Méthodes d'obtention de l'état semi-solide.

Normalement les procédés classiques de mise en forme sont appliqués soit :

- À partir de l'état complètement liquide comme dans un moulage, une fonderie, une coulée sous pression...
- À partir de l'état complètement solide comme dans le forgeage, le laminage, le frittage...

Les procédés de mise en forme à l'état semi-solide offrent plus d'avantages que ces anciens procédés : par exemple, ils permettent par rapport à l'état liquide de diminuer la porosité et les températures mises en jeu (économie d'énergie, augmentation de la durée de vie de l'outillage due à une réduction des chocs thermiques) ; et par rapport à l'état solide, de réduire les efforts exercés et d'obtenir des formes plus nombreuses [ROU 2003, ZAV 1995].

Lors de la mise en forme d'un alliage à l'état semi-solide pour une fraction du solide proche de 50 %, la viscosité est beaucoup plus élevée que celle de l'alliage totalement liquide et plusieurs avantages apparaissent également :

- L'écoulement dans le moule est laminaire de sorte qu'aucun emprisonnement d'air ne se fait, ce qui permet aux pièces de subir des traitements thermiques (ce n'est pas le cas pour la mise en forme à l'état liquide ou semi-liquide lors de laquelle les pièces ne pourront pas subir un traitement thermique car la fraction du solide est trop faible).
- Les différences de structure entre le centre et le cœur des pièces sont moins importantes que dans les pièces formées à partir de l'état liquide, ce qui conduit à des structures beaucoup plus homogènes qu'après une mise en forme à l'état liquide.
- Seule la partie liquide du métal se solidifie, ce qui entraîne la réduction des défauts comme par exemple les retassures.

2. La modélisation numérique des procédés

Il est nécessaire de comprendre et de modéliser le comportement rhéologique des alliages métalliques à l'état semi-solide. Ceci permet d'étudier les procédés nouveaux de mise en forme à l'état semi-solide (thixoformage) et de développer les procédés de type coulée continue où le matériau passe lors de la solidification par l'état semi-solide.

2.1 Processus de mise en forme à l'état semi-solide

Ces nouveaux procédés permettent d'obtenir des produits aux propriétés améliorées et de remplacer des pièces en acier forgé par des pièces en alliages d'aluminium et de magnésium (alliages à bas point de fusion).

Deux types de procédés de mise en forme à l'état semi-solide sont utilisés (FIG.(1.2)) :

- Le rhéoformage qui utilise directement le matériau après sa fabrication.
- Le thixoformage (thixomoulage, thixoforgeage, thixoextrusion) qui utilise une étape supplémentaire après la fabrication : le réchauffage qui permet d'obtenir l'état semi-solide du matériau. Si le réchauffage est inférieur à 45% (état semi-liquide), ces procédés sont appelés le Thixomolding.

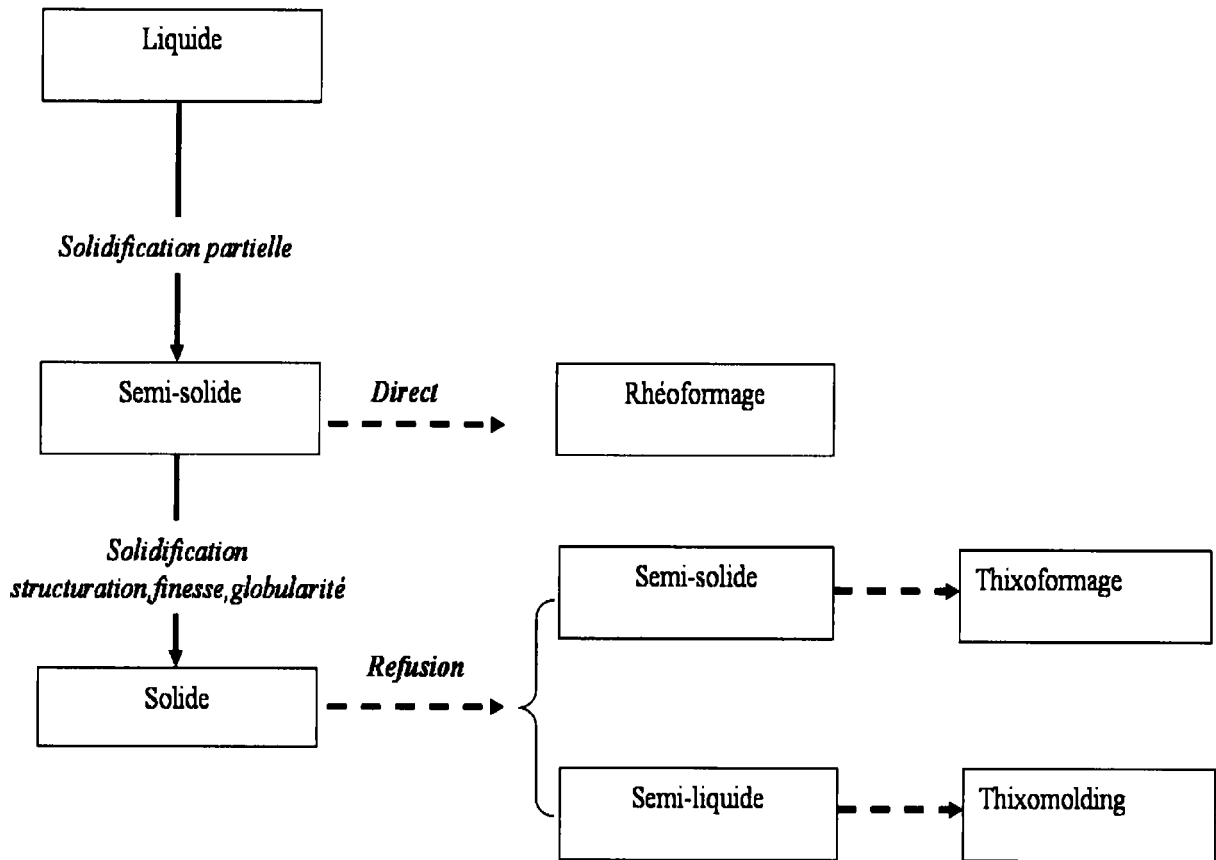


FIG.(1.2) Différents procédés de mise en forme à l'état semi-solide.

Dans l'industrie, les principes de mise en forme à l'état semi-solide le plus utilisés [SUE 2002] sont :

- La solidification avec brassage électromagnétique pour obtenir une structure globulaire du solide (paragraphe 3.3).
- La refusion partielle du matériau (obtention de l'état semi-solide).

- Le maintien à l'état semi-solide.
- La mise en forme proprement dite.

La simulation numérique de mise en forme à l'état semi-solide est largement développée et peut être relativement satisfaisante. Elle a permis d'optimiser la géométrie du moule et de déterminer des paramètres de procédés optimaux en utilisant la microstructure initiale, la température initiale de la billette, la température du moule, la vitesse d'injection, afin d'obtenir des pièces saines et éviter ainsi de longues étapes expérimentales. Zavaliangos et Lawley [ZAV 1995] ont présenté une bonne base sur la simulation numérique des processus de thixoformage en utilisant la méthode des éléments finis, pour décrire les aspects les plus importants de l'écoulement et de la déformation du matériau semi-solide avec haute fraction volumique de solide.

Beaucoup de travaux prennent en compte l'alliage semi-solide comme un milieu monophasique. Dans ce cas le comportement de ce milieu est décrit par sa viscosité. Cette viscosité du mélange semi-liquide et l'absence de turbulences lors de son introduction dans le moule sont très importantes dans l'étape de mise en forme. D'une part pour le bon remplissage du moule et d'autre part pour l'homogénéité et la microstructure du produit final. Les premières observations sur le comportement thixotrope (comportement matériel désignant la dépendance de la viscosité en temps, et caractérisé par la diminution réversible de la viscosité apparente due à l'application du cisaillement) furent exposées par Flemings et al. [FLE 1991, SPE 1972].

Joly et Mehrabian [JOL 1976] ont également étudié la thixotropie des alliages semi-solides. Ils ont établi une équation simple qui permet de modéliser l'influence de la fraction du solide sur la viscosité pendant le refroidissement de l'alliage.

Les travaux de ces auteurs ont permis de définir les aspects fondamentaux et les bases dans la phénoménologie du comportement des alliages semi-solides.

L'influence de la fraction du solide sur la viscosité des alliages semi-solides a été aussi étudiée par de nombreux auteurs sur plusieurs catégories d'alliages [TUR 1991], ainsi que dans un large domaine de taux de déformation (10^{-3} – 10^3 s⁻¹) [GEB 1999].

Des études sur les composites d'aluminium ont montré que l'addition de particules de renfort réduit la viscosité de l'alliage semi-solide, ce qui permet d'éviter l'agglomération des globules solides [NGU 1994].

Des études récentes prennent en compte l'aspect multiphasique et semblent bien avancées sur la mise en forme de l'état semi-solide (thixoformage) [MAR 1999, GEB 2000b].

2.2 Processus de la coulée continue

2.2.1 Présentation de la coulée continue

Le métal en fusion contenu dans une poche est lentement versé dans une lingotière ouverte. Il est refroidi par un système interne de circulation d'eau dans des tuyaux serpentant à proximité de la surface de contact avec le métal. La première solidification dans la coulée continue survient au point de contact entre le métal liquide et les parois de la lingotière en formant une coque mince contenant le liquide qui se solidifie graduellement pendant que le brin se déplace dans un puits sans fond. La coulée est guidée par un grand nombre de paires de rouleaux disposés sous la lingotière. Ces rouleaux soutiennent le métal et le font avancer dans la machine. Entre ces rouleaux, il y a un second système de refroidissement constitué de jets d'eau, plus un refroidissement par rayonnement. Quand le métal progresse dans la machine, l'épaisseur de la coque solidifiée augmente donc jusqu'à finalement se fermer au cœur du métal. Ensuite le produit semi-fini est découpé en éléments qui sont envoyés vers un parc de stockage (FIG.(1.3)).

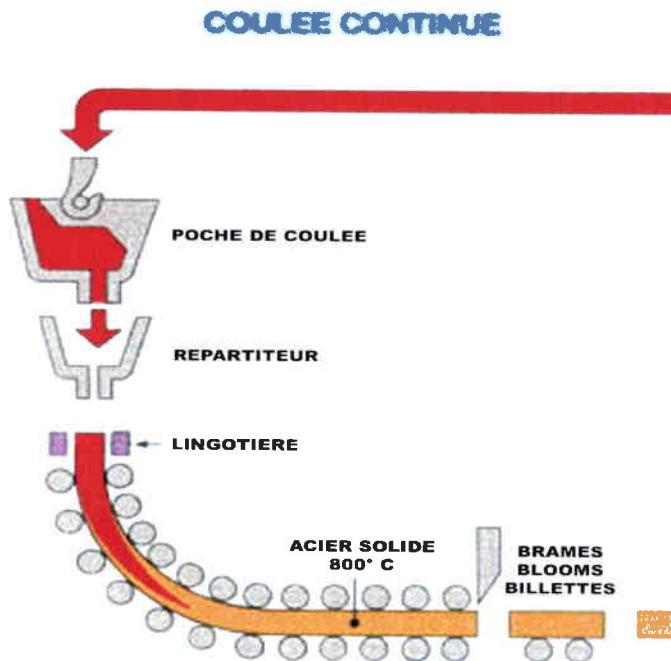


FIG.(1.3) Processus de la coulée continue.

exemple (quasi inexistante). La longueur de la zone de semi-solide s'explique par ces deux facteurs : la forte vitesse de coulée (1,25 m/min pour l'acier contre 60 cm/min pour l'aluminium) et la faible diffusivité thermique de l'acier (7 m²/s pour l'acier contre 95 m²/s pour l'aluminium) [HEI 2003].

Pour cette raison, la longueur de solidification de l'acier est plus grande ce qui implique le choix d'une géométrie courbe de la machine de la coulée continue de l'acier.

Dans notre travail, nous nous intéressons à la modélisation de la zone semi-solide parce que beaucoup de défauts matériels peuvent apparaître dans le produit semi-fini, dûs à une microségrégation associée à l'écoulement interstitiel du fluide dans cette zone, mais aussi parce que c'est la dernière étape où des changements peuvent être effectués avant la solidification finale et ainsi obtenir un produit de bonne qualité.

2.2.3 Coque initiale

Pendant la solidification initiée au niveau du ménisque dans la lingotière et complétée dans des zones de refroidissement secondaire, la coque solide subit une contraction thermique qui provoque la rétraction de cette coque loin de la lingotière.

Le comportement thermomécanique de la coque mince croissante pendant la descente du brin, est très important pour la qualité finale du produit semi-fini. Il existe pour ce produit plusieurs types de format (billet, bloom ou brame) qui se distinguent par leurs sections, respectivement circulaires, carrées ou rectangulaires (FIG.(1.5)). Mazumdar et Ray [MAZ 2001] ont étudié de manière approfondie la formation initiale de la coque et ses propriétés comme la solidité et la ductilité à haute température, l'épaisseur et la température correspondant aux phases solides, liquides et semi-solides pendant la solidification du brin aussi bien que Pascon al. [PAS 2000].

Pour comprendre le comportement de la coque, il est essentiel de connaître les caractères de l'espace situé entre la coque et la paroi de la lingotière de la machine de coulée continue. La présence de cet espace réduit considérablement le taux d'extraction thermique à la surface de la coque. Pascon et al. [PAS 2000] ont étudié l'évolution de la distance entre le brin et la lingotière et sont parvenus à modéliser les pertes et reprises de contact entre le brin d'acier et la lingotière ce qui joue un rôle important dans le refroidissement du brin.

La formation de cet espace dépend simultanément des conditions du flux thermique, des propriétés mécaniques de la coque et de quelques variables du processus. Ainsi la prédiction

de cet espace devrait être réalisée en combinant l'analyse du flux thermique et les contraintes [WAN 2001].

Autrefois beaucoup de chercheurs ont éprouvé des difficultés à prédire le flux thermique, la forme et la taille de cet espace entre la lingotière et la coque comme un phénomène couplé. Récemment, certains modèles mathématiques couplés ont permis de simuler le comportement thermomécanique de la coque en cours de solidification dans la coulée continue de la billette de l'acier [GRI 1976, KRI 1984]. Cependant ces modèles négligent quelques facteurs importants comme le taux de déformation plastique et le coin arrondi du brin. Une application principale du modèle pour prédire l'extension de l'espace entre la lingotière et la coque est traitée par Wang et He [WAN 2001]. Ils ont montré que l'espace se forme initialement dans les coins de la billette et se prolonge à la mi-face de cette billette.

2.2.4 Des paramètres importants pour la coulée continue

Plusieurs phénomènes ont lieu pendant la coulée continue de l'acier. Ces phénomènes nécessitent d'être compris et contrôlés pour optimiser ce processus, permettant non seulement une augmentation de la productivité et de la qualité du produit mais aussi le développement des processus de coulée.

Nous pouvons citer quelques phénomènes qui apparaissent durant la solidification [MIY 2001] : la cristallisation, l'enrichissement du soluté à l'interface solide-liquide, les phénomènes de transfert thermique, la région solide-liquide, l'agglomération et la flottaison d'inclusions non métalliques, une micro ou macro ségrégation, les fissures, les retassures, la précipitation et la croissance des inclusions...

2.2.4.1 Géométrie de la lingotière

La conicité de la lingotière joue un rôle important dans la qualité du produit. Si elle est trop faible, on observe une perte de contact entre le métal et la lingotière, aucun effort de contact mécanique n'est calculé et l'échange thermique est régi par une transmission de chaleur par convection et radiation. Le vide formé entre le métal et la lingotière peut se remplir alors de laitier et de poudre fondue. Wang et He [WAN 2001] ont trouvé qu'une conicité insuffisante de la lingotière contribue à créer des points chauds dans la région la plus éloignée des angles

qui correspond à moins d'épaisseur de la coque. Si la conicité est trop importante, un frottement existe entre le métal et la lingotière, ce qui induit des contraintes et des déformations dans la coque solidifiée [BOU 1998, PAS 2000]. En conséquence, la conicité doit être définie pour éviter les pertes de contact entre le métal et la lingotière qui réduisent l'échange thermique que l'on cherche à maximiser. On prend en compte ce facteur pour décrire le problème thermique qui dépend du déplacement relatif entre le métal et la lingotière, ce déplacement est une variable principale qui change avec la conicité de la lingotière [PAS 2000].

Wang et He [WAN 2001] ont étudié l'influence de la conicité de la lingotière sur le comportement thermomécanique de la billette pour aider à comprendre la formation de fissures dans les parties centrales de la billette et la formation de cassures dans la coque durant sa solidification. Huespe et al. [HUE 2000a] ont analysé la sensibilité des variables thermiques et mécaniques du processus au changement de conicité de la lingotière.

2.2.4.2 Pression et vitesse

La qualité du produit dépend aussi de la pression et de la vitesse de la coulée (c'est à dire la vitesse à laquelle le métal progresse dans la machine). L'application d'une pression pendant la solidification dans la lingotière, entraîne une solidification relativement plus rapide que dans les conditions habituelles. Si la pression est suffisante, elle augmente la température de fusion, ce qui contribue à accélérer la solidification et à rendre la billette parfaitement saine en évitant la formation de retassures et de pores [SUE 2002].

Si l'on augmente la vitesse de coulée, le brin reste moins longtemps dans la lingotière et la quantité de chaleur extraite diminue. Il en résulte une épaisseur de coque solide plus faible en sortie de lingotière, ce qui entraîne l'apparition de fissures transversales et d'autres défauts qui risquent de déchirer la coque et provoquer des dommages à la machine de coulée continue [PAS 2000]. Il faut donc bien contrôler la vitesse de coulée et l'intensité du refroidissement pour que le produit semi-fini soit bien solide en fin de processus.

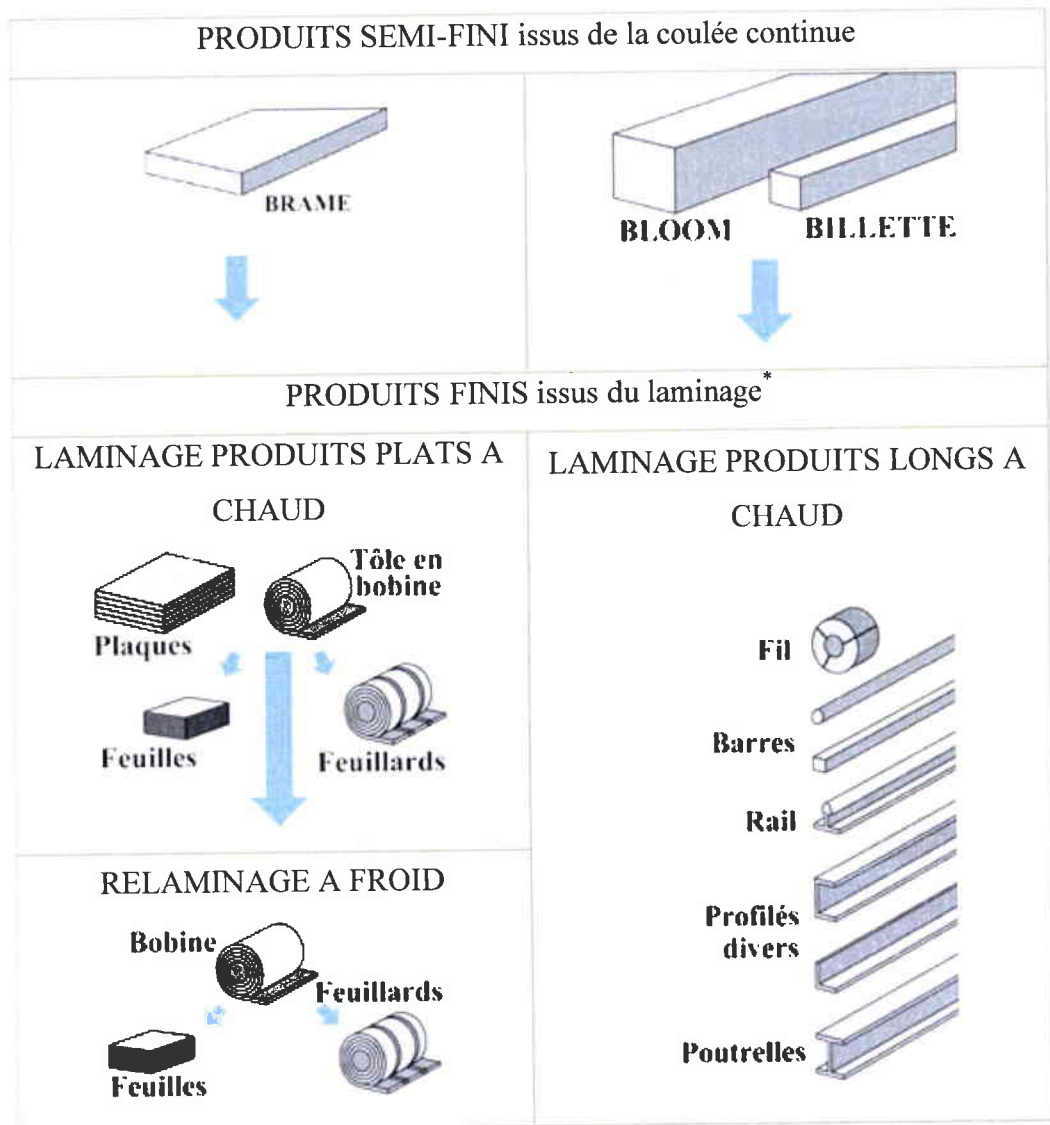


FIG.(1.5) Produits en acier.

2.2.4.3 Déchirure et collage du brin

En cours de solidification, la prévention de la déchirure et du collage de la coque mince pendant l'avancement du brin sont des fonctions importantes de la lingotière dans la coulée continue. Le frottement entre le brin et la lingotière doit être maintenu sous un niveau critique

* Tous les produits ne sont pas mis en forme par laminage : ils peuvent être forgés, moulés à partir d'acier liquide ou encore fabriqués à l'aide de poudres d'alliages.

pour éviter le collage du métal et la déchirure de la coque. La minimisation du frottement et le dégagement continu de la coque de la lingotière sont réalisés en faisant osciller la lingotière : pertes et reprises de contact se succèdent. Cette oscillation provoque plusieurs effets comme par exemple la pression de scories infiltrées entre la coque solidifiée et la lingotière, le taux de flux de scories et la formation de traces d'oscillation qui a des emplacements typiques sur la surface du produit de la coulée. Ces traces peuvent être accompagnées par la formation des crochets solidifiés. Mazumdar et Ray [MAZ 2001] ont montré un modèle de l'oscillation de la lingotière, de la profondeur de la trace d'oscillation résultante et de mécanismes de lubrification et friction de la paroi de la lingotière pour améliorer le glissement du métal dans la machine et éviter l'altération du produit. Ils ont analysé l'effet de ces résultats sur la productivité et la qualité du produit de la coulée continue.

Takeuchi et al. [TAK 1984] ont étudié les analyses de traces d'oscillation dans la coulée continue de la plaque d'acier et leur prédiction. Et Takeuchi et al. [TAK 1991] ont traité le contrôle de la formation de ces traces dans la coulée continue.

En 1965, Henzel et Keverian [HEN 1965] ont développé un système analytique pour prédire les modèles de solidification de la coulée en utilisant la théorie du transfert thermique. Ce système est limité aux formes géométriques simples. Les calculs numériques ont permis l'introduction progressive des techniques numériques dans le processus de la coulée continue dès 1980.

Les deux techniques numériques de base pour simuler ce processus sont les méthodes d'éléments finis et de différences finies.

La technique de l'élément fini dérivée par l'approximation d'équations différentielles partielles utilisant les séries de Taylor est tout à fait efficace pour résoudre l'équation de la conduction thermique transitoire non linéaire associée à la solidification de la coulée [LOU 1993].

L'utilisation de la méthode des différences finies est également répandue grâce à la relative simplicité apportée par les géométries non-complexes [GRI 1976, CHA 1994].

Tieu et Kim [TIE 1997] ont présenté un modèle de différences finies qui permet de prédire le profil de température dans une plaque en coulée et d'obtenir une plaque de bonne qualité. Ils ont déterminé la forme et la position de l'interface du solide-liquide et les ont comparés aux résultats des autres modèles et mesures expérimentales.

2.2.5 Problèmes thermomécaniques couplés

Pour résoudre les problèmes thermomécaniques couplés, beaucoup d'auteurs ont largement utilisé dans la littérature le schéma itératif suivant qui est facile à mettre en application :

- a) Un problème mécanique est résolu pour obtenir les déplacements, les contraintes et les déformations avec le champ de la température fixé.
- b) Un problème de transfert thermique est résolu en prenant un champ de déplacement fixe qui est calculé lors de l'étape mécanique précédente.

La littérature contient de nombreux travaux sur les analyses thermomécaniques de la première étape de la coulée continue dans la lingotière où apparaissent plusieurs types de fissurations et de défauts [SAM 1982, KEL 1988, VOL 1990, THO 1995].

Une analyse spéciale a été réalisée par Kozlowski et al. [KOZ 1992] sur le comportement viscoplastique unidimensionnel pour l'acier à haute température. Ce modèle est généralisé par Huespe et al. [HUE 2000b] pour le cas tridimensionnel en simulant le comportement thermomécanique de l'acier avec simple carbone à haute température, dans le domaine de la phase austénitique (950-1300°C). Cette étude prend en compte le phénomène de traction mais nous pouvons trouver des travaux prenant en compte le phénomène de compression dans la lingotière [KRI 1982, THO 1997].

Il existe aussi une étude [WAN 2001] sur le modèle bidimensionnel et transitoire prenant en compte des contraintes et le transfert thermique et permettant de simuler le comportement de la billette d'acier en cours de solidification dans la lingotière de la coulée continue.

Pascon et al. [PAS 2000], par la méthode des éléments finis, ont décrit le comportement thermomécanique du brin dans la lingotière. Ce modèle permet de prédire la distribution des températures et l'évolution de l'épaisseur du brin lors des différentes phases, la distribution des contraintes et des déformations à la sortie de la lingotière et la distribution des contraintes de frottement entre le brin et la lingotière.

Huespe et al. [HUE 2000a] ont aussi résolu numériquement par la méthode des éléments finis, un modèle thermomécanique d'une billette ronde, en déterminant les contraintes et les déformations à l'intérieur du matériau solidifié.

Ils ont proposé un schéma d'intégration et appliqué deux exemples numériques pour prouver son exactitude, sa robustesse et son efficacité. Un de ces exemples correspond à l'analyse des contraintes mécaniques dans la coque solide de la coulée continue de la billette. Ils ont aussi montré que les contraintes pour trois matériaux différents sont tout à fait similaires lors de la

première étape de la coulée continue et que la relaxation des contraintes viscoplastiques est diminuée par rapport aux contraintes élasto-plastiques.

Toutes les études précédentes se sont intéressées particulièrement à la première étape de la solidification de la coulée continue en prenant en compte le semi-solide comme un seul fluide (semi-liquide) à l'échelle macroscopique. Mais il existe peu de travaux sur l'état semi-solide vu comme un milieu biphasique dans le processus de la coulée continue car le comportement de ces milieux est généralement complexe.

Le travail de cette thèse porte sur l'état semi-solide de l'acier, en prenant en compte la séparation entre la phase solide et la phase liquide.

3. Description des alliages à l'état semi-solide

Le comportement rhéologique des alliages métalliques à l'état semi-solide est très complexe. Les résultats analytiques et expérimentaux montrent que ce comportement des alliages semi-solides dépend fortement de la fraction volumique du solide qui dépend de la morphologie du solide et de l'histoire thermomécanique du mélange [SUE 1982, FLE 1991, MAR 1997a, GEI 1999]. En prenant en considération que la fraction volumique de solide et la phase du solide complètement connectée (c'est-à-dire, chaque point du solide est lié à un autre point du solide par un trajet entièrement situé dans la phase solide), ainsi que les deux phases solide et liquide elles aussi complètement connectées, le mélange liquide-solide est considéré par beaucoup d'auteurs [LAL 1985, NGU 1992] comme un milieu poreux viscoplastique saturé par du liquide. Mais quand la phase solide est non connectée, le mélange liquide-solide est en général décrit comme une suspension des particules viscoplastiques dans un fluide incompressible [KUM 1993, KUM 1994, MAR 1994]. Plus précisément lorsque la fraction de solide est inférieure à 0.6 environ, le matériau est souvent considéré comme une suspension. Lorsque la fraction de solide est supérieure à 0.6, le matériau semi-solide est généralement assimilé à un milieu poreux viscoplastique compressible saturé par un liquide newtonien incompressible.

La connectivité des phases solide et liquide est un facteur très important pour contrôler la déformation de la matrice solide ainsi que le phénomène de répartition non-uniforme des constituants (solide et liquide) appelé phénomène de ségrégation de la phase liquide.

Dans notre étude, la phase solide est bien connectée, ainsi que les deux phases solide et liquide. Ce qui nous amène à considérer le mélange solide-liquide comme un milieu poreux saturé.

3.1 Structures dendritique et globulaire

Une solidification classique engendre une **morphologie dendritique** qui est associée à la ségrégation de la phase liquide. Cette ségrégation est fortement nuisible aux propriétés finales de la pièce en cours d'élaboration (FIG.(1.6)).

Une morphologie dendritique entraîne des déformations moins homogènes qu'une morphologie non dendritique qui est appelée également **morphologie globulaire** ou thixotrope obtenue par des traitements thermomécaniques spécifiques (FIG.(1.7)).

La morphologie dendritique sera d'autant plus fine que la vitesse de refroidissement sera grande.

De nombreux auteurs qui ont étudié le comportement rhéologique des alliages semi-solides, ont montré l'influence de la morphologie de la phase solide et de la fraction du solide sur ce comportement [MAR 1997b, MAR 1999].

Il existe aussi dans la littérature des études sur le comportement d'alliage Sn-Pb (Etain-Plomb) à haute fraction volumique de solide (>0.60) sous trois types de structures [MAR 1995] :

- Dendritique.
- Globulaire obtenue par réchauffage de la structure dendritique fine (R.G.).
- Globulaire obtenue par excitation pendant la solidification (S.G.) en utilisant le rhéomètre de Couette.

Flemings et al. [SUE 1982, CHA 1985] ont fait des expériences de compression sur les alliages semi-solides de Sn-Pb, afin de caractériser le comportement des matériaux semi-solides à haute fraction volumique de solide. De plus, Suery et Flemings [SUE 1982] ont étudié les effets du taux de déformation sur le comportement de l'alliage semi-solide dendritique de Sn-Pb en compression avec des taux de déformation variant entre $1.3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et $1.2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ et une fraction volumique de solide variant entre 0.63 et 0.69. Ils ont montré que pour cet alliage il y a deux comportements en compression :

- À haut taux de déformation (supérieur à 10 s^{-1}), il n'y a pas ségrégation de la phase liquide, la déformation du matériau est homogène et le mélange semi-solide peut être considéré comme un matériau à une seule phase.
- À bas taux de déformation (entre 10^{-4} et 10^{-1} s^{-1}), l'alliage montre un degré élevé de ségrégation de la phase liquide pendant la compression. Cette ségrégation augmente avec la déformation jusqu'à devenir totale dans la partie centrale de l'éprouvette et le matériau est considéré comme un milieu biphasique.

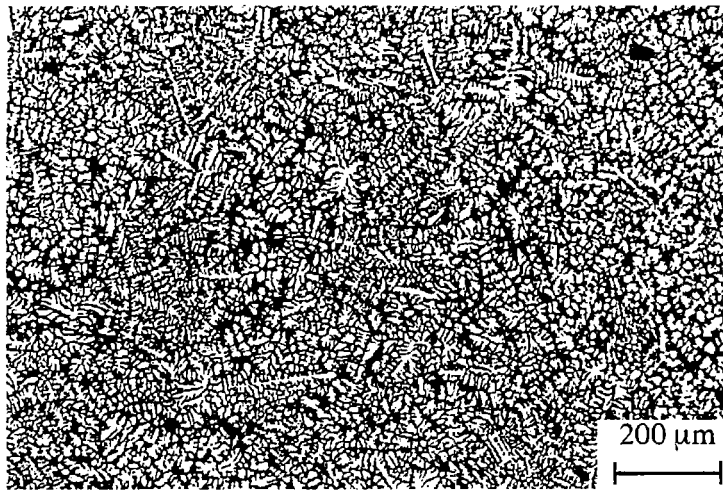


FIG.(1.6). La morphologie dendritique de la phase solide de Sn-15wt%Pb (en noir la phase liquide et en blanc la phase solide).

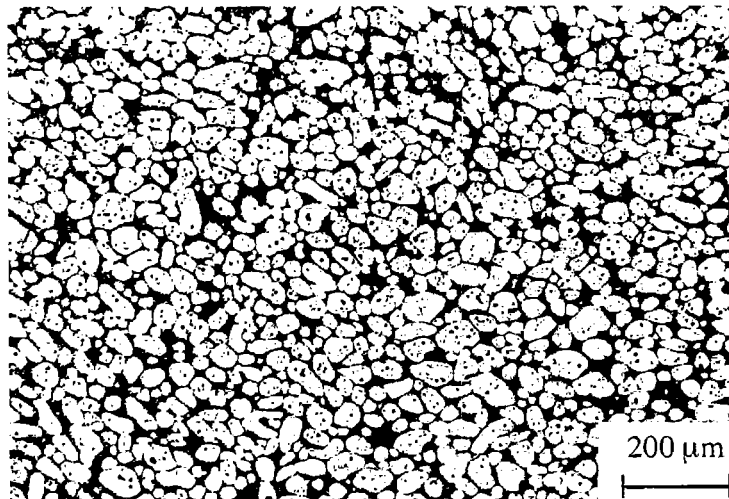


FIG.(1.7) La morphologie globulaire de la phase solide de Sn-15wt%Pb.

Charreyron et Flemings [CHA 1985] ont étudié le comportement de la phase solide de l'alliage Sn-Pb dans l'état semi-solide à bas taux de déformation en utilisant les expériences de filtration et de compression simple.

Metz et Flemings [MET 1969] ont étudié des alliages semi-solides de Al-Cu et Al-Si ayant des microstructures dendritiques de diverses tailles en appliquant les essais de rhéomètre de Couette et de compression. Ils ont lié l'apparition de fissures sur la surface des échantillons à un écoulement insuffisant du liquide pour remplir ces fissures pour des grandes fractions de solides. Ils ont montré que la résistance à la déformation était moins faible dans une structure dendritique fine que dans une structure dendritique grossière. Ils ont trouvé que la contrainte s'accroissait en fonction des déformations, de la taille de grains et de la fraction volumique de solide.

Geindreau et Auriault [GEB 1999] ont réalisé des expériences de refusion partielle pour déterminer l'évolution de la microstructure du matériau sous l'influence de la température et du maintien du matériau dans un état semi-solide.

Rouff [ROU 2003] a appliqué divers essais rhéologiques pour étudier la microstructure et la vitesse de déformation d'alliages à l'état semi-solide.

3.2 Mécanismes de formation de la structure dendritique

Durant la solidification qui débute au contact de la paroi de la lingotière et se développe dans la masse liquide, la microstructure dendritique se forme en deux phases [SUE 2002] : la germination et la croissance.

- **La germination** des particules solides dans le liquide consiste en la formation de germes solides instables qui pourront croître pour former des cristaux si leur taille dépasse un rayon critique. La formation de ces germes solides est liée aux niveaux de variation d'énergie (énergie d'activation) du système.

Une germination hétérogène se formera dans une zone à fort gradient thermique au contact de la paroi de la lingotière ou lors d'inclusions étrangères dans le liquide. Alors qu'une germination homogène se formera plutôt au sein d'une masse liquide de température homogène.

- **La croissance** de ces germes, théoriquement sphérique en milieu homogène, devient rapidement dendritique du fait des instabilités. Dans la lingotière de la coulée, une peau très fine de petits cristaux se forme d'abord dans les zones de contact lingotière-métal en fusion.

La morphologie des dendrites de la zone de peau est équiaxe. Ensuite une structure dendritique colonnaire générée par le flux thermique se développe. Enfin une structure équiaxe se développera dans la zone centrale du produit (FIG.(1.8)).

Le développement de ces zones de cristallisation (peau, colonnaire, équiaxe) est dépendant du matériau et des conditions de coulée et de refroidissement.

La solidification commence donc par la germination au sein du liquide, ensuite une croissance peut apporter deux formes des microstructures : colonnaire et équiaxe.

Depuis quelques années, les études ont porté sur la microstructure des matériaux. Cette microstructure dirige le comportement rhéologique du mélange semi-solide.

Il existe différents paramètres qui décrivent les microstructures des mélanges semi-solides et leurs évolutions (fraction du solide, fraction du liquide, fraction du liquide piégé dans les particules solides, morphologie du solide, cohésion du solide, taille des particules solides et la distribution de cette taille, ...) [SUE 2002].

Plusieurs techniques sont utilisées pour caractériser les microstructures du mélange semi-solide, comme les analyses d'images en 2D [LOU 1995] et la tomographie par rayons X en 3D [BAR 2000]. Cette dernière permet d'étudier efficacement le comportement rhéologique des alliages semi-solides (proportion de liquide piégé et connectivité de la phase solide).

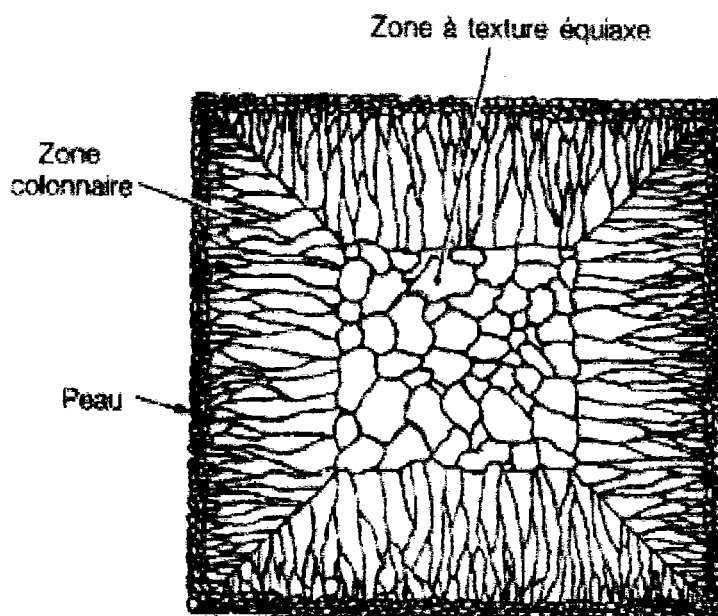


FIG.(1.8) Structure dendritique du produit de la coulée.

3.3 Passage de la structure dendritique à la structure globulaire

Dans les procédés de solidification usuelle, comme par exemple la coulée continue, le type de structure du squelette solide est dendritique et la vitesse de déformation est faible. Mais dans les nouveaux procédés de mise en forme des alliages semi-solides associés à une vitesse de déformation plus élevée, la structure du squelette solide est globulaire.

De nombreux travaux [SUE 1982, FLE 1976, SPE 1972] montrent que la structure dendritique de la phase solide n'est pas adaptée aux procédés de mise en forme à l'état semi-solide car la déformation de cette structure est hétérogène. Le risque de ségrégation du liquide ou de déchirement du solide est élevé et, de plus, un alliage à structure dendritique est très difficile à mettre en forme à l'état semi-solide (le solide constituant un réseau fortement interconnecté même pour des fractions liquides élevées) [SUE 2002].

Pour ces raisons, il vaut mieux utiliser des structures globulaires qui permettent une déformation plus facile et nécessitent moins d'efforts.

De nombreux moyens peuvent être mis en place pour modifier la structure dendritique et ainsi parvenir à une microstructure qui convient à la mise en forme (obtention d'une structure globulaire). Ils peuvent être regroupés en deux catégories :

a) Durant la solidification :

- **Le brassage** : mécanique (utilisation d'un batteur) [FLE 1976], passif (passage de la coulée dans des chicanes) [ABI 1992], ou électromagnétique (appliqué par un champ électromagnétique) permet d'imposer des cisaillements suffisamment importants pour briser les dendrites et empêcher leur croissance. Par exemple, le brassage électromagnétique, est utilisé industriellement dans le processus de la coulée continue des bielles [NIE 1998].

- **Des décharges électriques** : permettent de modifier la structure dendritique [NIE 1998].

- **Les ultra-sons** : permettent d'agir au niveau de la germination afin d'obtenir directement une structure globulaire. Ils sont déjà utilisés dans le cas de la coulée verticale et en cours de développement dans la coulée horizontale [VIV 1991].

- **L'ajout d'éléments d'affinages** : permet d'obtenir une structure dendritique équiaxe, en évitant la formation de dendrites colonnaires, ce qui permet de raccourcir la phase de transformation en structure globulaire par refusion. Ce procédé est généralement associé à un brassage électromagnétique pour obtenir une structure globulaire très fine. De plus si le brassage est appliqué dans de bonnes conditions, l'ajout d'éléments chimiques n'est pas nécessaire [GAB 1992].

- **Thermique** : le but est d'obtenir rapidement une structure globulaire à partir d'une structure dendritique assez fine. Cette méthode est basée sur la variation des conditions de refroidissement de l'alliage. En effet, plus la vitesse de refroidissement est rapide plus la structure dendritique est fine et donc plus la transformation en structure globulaire est rapide [TZI 1998].

- **Le procédé NRC** (New Rheo Casting) sert à la fois à la fabrication du matériau semi-solide et à la mise en forme du produit. Ce processus, appliqué en coulée dans des moules métalliques avec une faible surchauffe permet de verser le métal dans les moules rapidement et uniformément en dessous de la température de liquidus (c'est la température au-dessus de laquelle tout le matériau est liquide), ce qui entraîne une formation de microstructure fine. Il suffit alors de laisser l'alliage refroidir lentement et ainsi de manière homogène jusqu'à la température de mise en forme [KAU 2000].

b) À partir du solide :

L'état solide initial joue un rôle majeur dans l'obtention de la structure globulaire. Il existe trois types de procédés [SUE 2002].

- **Métallurgie des poudres** : dans ce procédé, les poudres fines compactées de deux ou plusieurs alliages ayant des températures de fusion différentes sont chauffées jusqu'à la température de fusion de l'une des poudres, en conservant le reste à l'état solide [YOU 1986]. Il faut choisir des poudres assorties et des bonnes conditions de réchauffage pour obtenir une structure globulaire. La production restant limitée, ce procédé est utilisé seulement pour des pièces particulières.

- **Procédés de déformation** : il consiste à faire subir une déformation plastique au mélange avant une refusion partielle comme le procédé SIMA (Strain Induced Melt Activated) qui est utilisé industriellement [KEN 1988].

- **Thixomolding** : l'alliage semi-solide est réchauffé pendant son déplacement dans la machine de Thixomolding jusqu'à son injection dans le moule afin d'obtenir un alliage à structure globulaire. Ce procédé est utilisé pour les alliages de magnésium [PAS 1992].

4. Modèles de comportement viscoplastique pour l'état semi-solide

Les alliages métalliques à l'état semi-solide à haute température, considérés comme des milieux poreux viscoplastiques saturés par du métal liquide, ont des comportements différents de ceux des milieux poreux saturés par du liquide (beaucoup traités) dans la mécanique des sols [COU 1991, LEW 1998].

Dans la littérature, Charreyron et Flemings [CHA 1985] ont étudié le comportement de l'alliage Sn-Pb à l'état semi-solide qui est considéré comme un milieu poreux viscoplastique à une seule phase en négligeant la pression interstitielle de la phase liquide.

Une autre étude réalisée par Lalli [LAL 1985] prend en compte la déformation de la matrice solide et l'écoulement du liquide interstitiel pour un modèle unidimensionnel isotherme en compression simple, en définissant la contrainte du mélange solide-liquide comme une sommation de deux tenseurs des contraintes des phases solide et liquide.

Abouaf et Chenot [ABO 1986] ont étudié le comportement d'alliages en introduisant la porosité (ou d'une façon équivalente la fraction volumique de solide) dans la loi viscoplastique compressible mais sans les effets du fluide, en montrant le comportement de la poudre métallique sous compactage à chaud. Ils ont développé la loi de comportement à froid pour définir la contrainte équivalente à partir des invariants du tenseur de contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{eq} = \left[3A(f^s)J_2 + B(f^s)I_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

où :

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s) \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^{s^{dev}} : \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^{s^{dev}})$$

$$\underline{\hat{\sigma}}^{s^{dev}} = \underline{\hat{\sigma}}^s - \left(\frac{I_1}{3}\right)\underline{I}$$

$A(f^s)$ et $B(f^s)$ sont des coefficients caractérisant le comportement du matériau viscoplastique. Ils dépendent de la fraction volumique du solide f^s et $\underline{\hat{\sigma}}^s$ est le tenseur des contraintes effectives de la phase solide.

Plus récemment, Nguyen et al. [NGU 1992] ont présenté un modèle isotherme basé sur la théorie des mélanges en négligeant aussi la pression du liquide. Le comportement de la phase solide est défini par le potentiel viscoplastique qui est dérivé de la contrainte équivalente (1.1) proposée par Abouaf et Chenot [ABO 1986].

Martin et al. [MAR 1997a] ont approfondi ces travaux en tenant compte cette fois-ci de la porosité et de l'écoulement du fluide interstitiel, en proposant des équations constitutives qui décrivent le comportement compressible de la phase solide. De plus, ils ont montré des exemples de deux situations différentes : l'une où la pression interstitielle de la phase liquide qui est négligeable par rapport à la contrainte macroscopique (les tests drainés) et l'autre non négligeable (les tests non drainés). Ils ont montré que le comportement de l'alliage semi-solide est dissymétrique entre la tension et la compression.

Par la suite, Martin et al. [MAR 1999] ont proposé une autre forme de contrainte équivalente pour mieux prendre en compte cette dissymétrie.

Ces modèles demeurant complexes et nouveaux, nous avons décidé pour notre travail, de prendre la formule de la contrainte équivalente (1.1) proposé par Abouaf et Chenot [ABO 1986], afin de chercher à décrire le comportement de l'alliage semi-solide à haute température de la manière la plus simple.

4.1 Essais rhéologiques

4.1.1 Introduction

De nombreuses méthodes expérimentales ont été utilisées pour caractériser la rhéologie des alliages semi-solides comme par exemple les essais de rhéomètre (viscosimètre) de Couette [SPE 1972, JOL 1976], de compression œdométrique et triaxiale drainée [NGU 1992, NGU

1994, CHA 1985, SUE 1982], d'indentation [ROU 2003], de filage [ROU 2003], de traction [GEB 1999, MAR 1999]...

Ces dispositifs ont permis d'obtenir une base de données expérimentale utile pour la construction et l'identification des modèles rhéologiques des semi-solides.

Dans beaucoup de processus comme la coulée continue, la solidification dans un moule, la mise en forme à l'état semi-solide,... l'alliage solide-liquide est soumis aux déformations de natures différentes (refroidissement, laminage, cintrage, décintrage, champs de vitesse,...) qui génèrent divers états des contraintes (cisaillement, compression, tension,...).

Il est nécessaire d'indiquer que la plupart des essais qui étudient le comportement du mélange semi-solide, utilisent des alliages à bas point de fusion comme le Sn-Pb (l'alliage Sn-Pb atteint l'état semi-solide à une température de 185°C, alors que par exemple, l'alliage Al-Si atteint l'état semi-solide à la température de 580°C [NGU 1992]). Mais récemment, des essais sur les alliages à haut point de fusion [ROU 2003, GEB 1999] ont été réalisés même si leur mise en œuvre reste difficile.

4.1.2 Les essais de compression

Les essais de compression sont appliqués entre deux plateaux parallèles et sont utilisés pour mesurer la compressibilité du solide et déterminer la viscosité du semi-solide et le taux de déformation. Ces essais ainsi que les essais de filage sont réalisés pour de petites vitesses de cisaillement ($<10 \text{ s}^{-1}$). Pour des essais avec une vitesse de cisaillement plus grande ($>10 \text{ s}^{-1}$) on utilise les essais de rhéomètre de Couette. Récemment Yurko et Flemings [YUR 2001] ont développé les essais de compression pour élargir la gamme de vitesse de cisaillement jusqu'à 10^4 s^{-1} .

Beaucoup de travaux expérimentaux sont effectués sur le comportement de compression du mélange métallique solide-liquide. Nguyen et al. [NGU 1992] ont utilisé les tests de compression drainée avec pression latérale, pour étudier le comportement des deux sortes d'alliages partiellement réchauffés (Al-Si et Sn-Pb) et ils ont montré l'influence de la pression interstitielle sur le comportement de la phase solide. Ces tests ont permis de déterminer quelques propriétés du matériau, mais ils sont insuffisants pour déduire le comportement général des alliages semi-solides.

De plus Nguyen et al. [NGU 1994] ont appliqué, dans des conditions isothermes et avec des déformations d'échantillon homogènes, des tests de compression et de filtration dans le cas

semi-solide pour l'alliage A356 (Al-7% Si et 0.3% Mg) de structure globulaire déformable, avec un taux de déformation (10^{-3} - 10^{-1} s⁻¹) et une température de 584°C, afin d'identifier la contrainte équivalente d'Abouaf et Chenot [ABO 1986]. Ils ont aussi réalisé des tests de traction dans l'état solide isotherme du même alliage avec le même taux de déformation à diverses températures (300°C-530°C) pour identifier la déformation équivalente proposée par [SEL 1966].

Gebelin et al. [GEB 1999] ont étudié le comportement rhéologique des alliages AZ91 en utilisant divers essais expérimentaux, comme par exemple des essais de filtration pour déterminer le comportement de densification de la phase solide.

4.1.3 Les essais de traction

L'étude du comportement de l'alliage semi-solide sous l'effet de la traction est très importante pour des applications pratiques, surtout dans la coulée continue où l'alliage peut être soumis à des contraintes de traction dans diverses parties durant sa solidification.

Les essais de traction sont appliqués lorsque les fractions du solide sont assez élevées pour avoir une cohésion suffisante au matériau. Donc ces essais ne sont généralement pas appliqués dans des alliages semi-solides à structure globulaire car la cohésion du solide dans ces alliages est plus faible que dans les alliages à structure dendritique.

Les contraintes de tension entraînent alors une dilatation du squelette solide. Cette dilatation a des conséquences sur la ségrégation de la phase liquide et détériore le produit. De plus, les contraintes de traction peuvent provoquer des ruptures (fractures) dans le squelette solide dendritique, entraînant des défauts nuisibles pour le produit final.

Les essais ont montré que l'alliage semi-solide présentait une résistance en traction beaucoup plus faible qu'en compression, ce qui entraîne des ruptures plus nombreuses en traction.

Pour tenir compte de cette différence de comportement entre la traction et la compression, Martin et al. [MAR 1997a, MAR 1999] ont introduit la cohésion dans la loi de comportement des alliages semi-solides.

De plus en plus d'expérimentations sur le comportement de tension dans le mélange solide-liquide sont effectuées. À partir de leurs données expérimentales dans la compression [MAR 1997a, MAR 1997b] Martin et al. ont étendu ces travaux pour étudier le comportement de tension de milieu poreux métallique viscoplastique saturé par le liquide [MAR 1999]. Deux types d'essais ont été effectués sur l'alliage Sn-Pb à l'état semi-solide avec microstructures

dendritiques : le premier est un essai de traction simple et le second est un essai d'expansion radiale d'anneau à l'état semi-solide. Ces études sont très importantes pour étudier le comportement à la rupture de ce matériau dans le domaine de la dilatation.

Gebelin et al. [GEB 1999] ont aussi réalisé des essais de traction sur les alliages industriels. c'est-à-dire présentant des températures de solidus élevées (c'est la température en dessous de laquelle tout le matériau est solide). Ils ont déterminé le comportement de tension de l'alliage de magnésium AZ91 à l'état semi-solide avec haute fraction volumique de solide (0.98-0.87). Ces essais ont été effectués à basses températures (500-545°C), puisque à température élevée l'échantillon devient très mou, ce qui empêche les mesures des contraintes de traction. Ils en ont conclu que les contraintes de la traction sont entre dix et cent fois plus faibles que celles mesurées dans les essais de compression.

5. Modèles de comportement biphasique

5.1 Généralités

Nous avons vu qu'il y a deux modes de déformation : le premier est observé lors des procédés de thixoformage (forte vitesse de déformation, particules solides globulaires) et le deuxième est rencontré lors la coulée continue (faible vitesse de déformation, particules solides dendritiques).

Les déformations de l'alliage métallique à l'état semi-solide au cours de la coulée continue ou des procédés de mise en forme à l'état semi-solide à haute température (thixoformage), engendrent des ségrégations des phases fluides. Il est nécessaire de pouvoir prédire les ségrégations accompagnant l'élaboration des matériaux. Ces ségrégations peuvent avoir des conséquences importantes par exemple sur la qualité du produit, ou sur l'efficacité d'un traitement thermique post-élaboration ou bien sur la fatigue des pièces produites.

Le fait de prendre en compte le formalisme biphasique du mélange semi-solide peut aider à prédire ces ségrégations au cours des procédés. Ce caractère biphasique est utilisé pour décrire la rhéologie complexe du semi-solide.

Le traitement théorique le plus général des milieux biphasés est basé sur les concepts de la mécanique des milieux continus ainsi que sur la théorie des mélanges. Cette dernière modélise

le milieu multiphasique comme la superposition des milieux continus, chacun associé à une phase [BOW 1976].

En vue de la simulation numérique des procédés d'élaboration, le comportement du système biphasique doit être écrit par des modèles macroscopiques qui peuvent être obtenus de deux manières : directement à l'échelle macroscopique en réalisant des études expérimentales ou par changement d'échelles (homogénéisation ou passage micro-macro) à partir de la description des phénomènes physiques à l'échelle microscopique.

L'homogénéisation est la méthode la plus intéressante pour obtenir la structure macroscopique car elle permet d'avoir en plus leurs domaines de validité.

5.2 Homogénéisation

Au cours de la mise en forme, l'alliage métallique à l'état semi-solide peut être considéré microscopiquement comme un milieu poreux constitué d'un squelette solide visqueux incompressible et saturé par un fluide visqueux incompressible newtonien.

Pour modéliser un milieu hétérogène périodique, il est nécessaire de remplacer la description complexe de ce milieu qui est impossible à gérer dans la pratique, par une description continue macroscopique équivalente.

En utilisant la méthode d'homogénéisation par échelle multiple des milieux hétérogènes périodiques [SAN 1980], nous pouvons obtenir le comportement de système biphasique macroscopique afin de simuler le procédé de mise en forme. Cette méthode impose l'existence d'un volume élémentaire représentatif (VER) et qui vérifie la condition de séparation d'échelles (petit par rapport au volume macroscopique considéré), $\varepsilon = l / L \ll 1$

l est la taille caractéristique du volume élémentaire représentatif du matériau et L une longueur caractéristique macroscopique de l'échantillon (FIG.(1.9)).

Une modélisation d'un milieu poreux viscoplastique non-saturé est étudiée par Auriault et al. [AUR 1991] en appliquant l'homogénéisation des structures périodiques et en décrivant macroscopiquement la poudre métallique compactée à haute température à partir de sa description microscopique. Par contre, le comportement viscoplastique du milieu poreux saturé par liquide a été étudié par Geindreau et Auriault [GEI 1999] en utilisant la même technique d'homogénéisation d'alliage dans l'état semi-solide. En supposant que le fluide est Newtonien et que le solide obéit à la loi de Norton-Hoff (donc incompressible), ils établissent par l'homogénéisation que le modèle macroscopique déduit est biphasique : le comportement

macroscopique du fluide obéit à une loi de Darcy. Et ces travaux montrent que l'alliage métallique à l'état semi-solide peut présenter différents comportements en fonction de l'ordre de grandeur d'un nombre sans dimension. La loi de comportement macroscopique du solide est viscoplastique et compressible et son expression peut être très complexe, en fonction de la morphologie de la microstructure.

Dans cette thèse nous adoptons une loi macroscopique biphasique avec la même loi de Darcy pour le fluide. Quant au solide, nous nous contenterons de la plus simple des lois viscoplastiques compressibles qui est celle d'Abouaf et Chenot présentée précédemment.

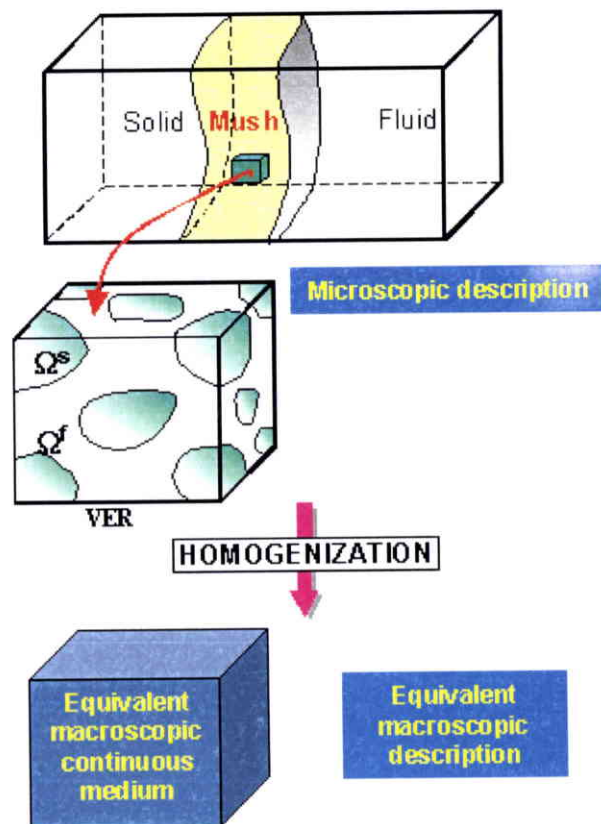


FIG.(1.9) Homogénéisation du milieu semi-solide.

6. Objectif

Il est intéressant pour la simulation numérique des processus d'élaborations industrielles des alliages à l'état semi-solide, de modéliser le comportement du modèle avec des variations de température, bien que l'on ait restreint notre étude au cas de conditions isothermes pour les deux phases solide et fluide.

Dans ce travail, nous présentons une approche complètement analytique pour étudier le comportement mécanique biphasique des alliages à l'état semi-solide de l'acier, en considérant le métal semi-solide comme un milieu poreux saturé par le fluide. Le squelette solide viscoplastique compressible est modélisé par un modèle de type Biot dérivé du potentiel viscoplastique de dissipation, qui est une fonction de la contrainte équivalente (1.1) d'Abouaf et Chenot [ABO 1986]. L'écoulement du métal fluide visqueux par le squelette solide est décrit par la loi de Darcy.

CHAPITRE 2

Une modélisation viscoplastique pour un milieu semi-solide

Chapitre 2 : Une modélisation viscoplastique pour un milieu semi-solide

1. INTRODUCTION	40
2. UN MODELE VISCOPLASTIQUE BIPHASIQUE	40
2.1 FORMALISMES LAGRANGIEN ET EULERIEN.....	41
2.2 CONSERVATION DE LA MASSE.....	43
2.2.1 Conservation de la masse de la phase solide.....	43
2.2.2 Conservation de la masse de la phase liquide	44
2.2.3 Incompressibilité globale.....	45
2.3 TENSEUR DES CONTRAINTES.....	45
2.3.1 Tenseur des contraintes de la phase liquide	45
2.3.2 Tenseur des contraintes de la phase solide. Contrainte effective	46
2.4 COMPORTEMENT DU LIQUIDE - LOI DE DARCY.....	47
2.5 COMPORTEMENT DE LA PHASE SOLIDE	49
2.6 ÉQUATION D'ÉQUILIBRE	52
2.7 UNE EQUATION DIFFERENTIELLE POUR LA CONTRAINTE EFFECTIVE $\hat{\sigma}^s(x)$	52
2.8 SYNTHÈSE.....	53
3. ANALYSE DIMENSIONNELLE	54
3.1 LOI DE COMPORTEMENT DU SOLIDE SANS DIMENSION. INTRODUCTION D'UN COEFFICIENT SANS DIMENSION ..	54
3.2 LOI DE DARCY SANS DIMENSION	57
3.3 ÉQUATION D'ÉQUILIBRE SANS DIMENSION.....	59
3.4 SYNTHÈSE.....	59

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons les équations qui décrivent le milieu semi-solide en prenant en compte la déformation du solide et l'écoulement du fluide, c'est-à-dire un milieu biphasique.

L'objectif est de mettre en place le modèle biphasique le plus simple possible pour représenter le comportement de la partie semi-solide qui apparaît lors de la solidification de certains métaux.

La première simplification est de supposer que les matériaux constitutifs (phases solide et liquide) sont incompressibles. En particulier cela implique de négliger l'élasticité de la phase solide.

Notons que l'incompressibilité des constituants n'implique pas l'incompressibilité du squelette, dont le volume peut varier lorsque le fluide interstitiel s'écoule. C'est pourquoi le squelette solide sera modélisé par une loi viscoplastique compressible. De telles lois ont été proposées dans la littérature pour représenter le comportement des poudres compactées. L'une des lois les plus simples est celle d'Abouaf et Chenot : c'est celle que nous retiendrons. Quant au métal liquide, nous décrirons son écoulement par la loi de Darcy.

Une analyse dimensionnelle est présentée. Elle permet de montrer que le modèle semi-solide ne dépend que de deux paramètres sans dimension ; l'un représente la compressibilité, l'autre le rapport entre les viscosités du liquide et du solide.

2. Un modèle viscoplastique biphasique

On considère un système biphasique occupant un volume V et ayant deux composants : le squelette solide et le métal liquide de volumes respectifs V^s et V^l . Chaque point du volume V est considéré comme le centre du volume élémentaire représentatif (VER).

On désigne par φ_s et φ_l les quantités microscopiques, locales ou intrinsèques de la grandeur φ relative aux phases solide et liquide, et par φ^s et φ^l les quantités macroscopiques de cette grandeur φ .

Généralement dans la théorie des mélanges, le milieu multiphasique est considéré comme une superposition de milieux continus et les formules multiphasiques impliquent de définir des grandeurs pour chaque phase de ce milieu.

Dans le milieu biphasique solide-liquide, la phase du solide est caractérisée par sa vitesse $\underline{v}^s$ et par sa fraction volumique f^s et la phase du liquide est décrite par sa vitesse $\underline{v}^l$ et par sa fraction volumique f^l , de sorte que :

$$f^s = \frac{DV^s}{DV} \quad , \quad f^l = \frac{DV^l}{DV}$$

où DV^s et DV^l sont les volumes élémentaires occupés par les phases solide et liquide dans le volume DV . Si le milieu biphasique est saturé, nous avons en tout point et à tout moment la relation :

$$f^s + f^l = 1 \quad (2.1)$$

Définition

La vitesse relative $\underline{w}$ est la vitesse de la phase liquide par rapport à la phase solide [COU 1991, MAR 1997a] :

$$\underline{w} = \underline{v}^l - \underline{v}^s \quad (2.2)$$

2.1 Formalismes lagrangien et eulérien

Pour décrire un milieu monophasé ou multiphasé, il est essentiel de choisir une description du mouvement qui peut être soit une description lagrangienne, soit eulérienne.

Généralement, dans la mécanique des milieux poreux, le concept de dérivée matérielle est adopté pour écrire les équations de conservation. La dérivée matérielle d'une grandeur correspond au taux de variation de cette grandeur.

Dans un milieu monophasique, l'expression de la dérivée matérielle d'une fonction différentiable $\varphi(\underline{x}, t)$ suivant la description lagrangienne ou matérielle est :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et suivant la description eulérienne ou spatiale :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{grad} \varphi \cdot \underline{v}$$

Dans notre travail, nous adoptons la description eulérienne pour les deux phases solide et liquide. Pour cette description, les expressions de la dérivée matérielle d'une fonction différentiable $\varphi(\underline{x}, t)$ en suivant la phase solide et liquide s'écrivent [SUE 2002, COU 1991] :

$$\frac{D^s \varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{grad} \varphi \cdot \underline{v}^s \quad (2.3)$$

$$\frac{D^l \varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{grad} \varphi \cdot \underline{v}^l \quad (2.4)$$

D'une autre façon, en introduisant la vitesse relative de la phase liquide $\underline{w}$, les équations (2.3) et (2.4) deviennent :

$$\frac{D^l \varphi}{Dt} = \frac{D^s \varphi}{Dt} + \underline{grad} \varphi \cdot \underline{w}$$

2.2 Conservation de la masse

Nous allons présenter les équations de conservation de la masse pour le mélange solide-liquide, puis nous déduirons les conditions d'incompressibilité de ce mélange à partir de la conservation de la masse des deux phases solide et liquide. Dans ce chapitre, les matériaux solide et liquide sont supposés incompressibles.

2.2.1 Conservation de la masse de la phase solide

L'équation macroscopique de la conservation de la masse de la phase solide s'écrit [LEW 1998] :

$$\frac{D^s \rho^s}{Dt} + \rho^s \operatorname{div} \underline{v}^s = 0 \quad (2.5)$$

En utilisant l'équation (2.3) et la relation suivante :

$$\operatorname{div}(\rho^s \underline{v}^s) = \rho^s \operatorname{div} \underline{v}^s + \underline{\operatorname{grad}} \rho^s \underline{v}^s \quad (2.6)$$

l'équation (2.5) devient :

$$\frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^s \underline{v}^s) = 0 \quad (2.7)$$

Soit ρ_s la densité volumique microscopique de la phase solide et Dm^s la masse située dans le volume élémentaire DV^s :

$$\rho^s = f^s \rho_s = \frac{Dm^s}{DV} \quad (2.8)$$

L'équation (2.7) devient dans le cas d'une phase solide incompressible (ρ_s constante) :

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + \text{div}(f^s \underline{v}^s) = 0 \quad (2.9)$$

L'équation précédente (2.9) est la condition d'incompressibilité du solide.

2.2.2 Conservation de la masse de la phase liquide

L'équation macroscopique de la conservation de la masse de la phase liquide est [LEW 1998] :

$$\frac{D' \rho^l}{Dt} + \rho^l \text{div} \underline{v}^l = 0 \quad (2.10)$$

Si nous utilisons les relations (2.4) et (2.6), nous avons :

$$\frac{\partial \rho^l}{\partial t} + \text{div}(\rho^l \underline{v}^l) = 0 \quad (2.11)$$

Soit ρ_l la densité volumique microscopique de la phase solide et Dm^l la masse située dans le volume élémentaire DV^l :

$$\rho^l = (1 - f^s) \rho_l = \frac{Dm^l}{DV} \quad (2.12)$$

L'équation (2.11) devient dans le cas d'une phase liquide incompressible :

$$-\frac{\partial f^s}{\partial t} + \text{div}((1 - f^s) \underline{v}^l) = 0 \quad (2.13)$$

Les équations de la conservation de la masse du mélange solide-liquide dans le cas où les phases solide et liquide sont compressibles, sont rappelées dans l'annexe A.

2.2.3 Incompressibilité globale

À partir des conditions d'incompressibilité des phases solide (2.9) et liquide (2.13) et de la relation (2.2), la condition d'incompressibilité globale du mélange solide-liquide est [MAR 1997a] :

$$\text{div} \left[(1 - f^s) \underline{w} + \underline{v}^s \right] = 0 \quad (2.14)$$

2.3 Tenseur des contraintes

En prenant en compte la ségrégation de la phase liquide, le tenseur des contraintes macroscopiques total du milieu biphasique $\underline{\underline{\sigma}}$ est décomposé en deux tenseurs des contraintes : l'un est affecté à la phase solide $\underline{\underline{\sigma}}^s$, l'autre à la phase liquide $\underline{\underline{\sigma}}^l$ [MAR 1997a, COU 1991, LAL 1985] :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^s + \underline{\underline{\sigma}}^l \quad (2.15)$$

2.3.1 Tenseur des contraintes de la phase liquide

La majorité des modèles utilisés dans la simulation numérique ne prennent en compte qu'une partie hydrostatique du tenseur de contrainte de la phase liquide [MAR 1997a, COU 1991] :

$$\underline{\underline{\sigma}}^l = - (1 - f^s) p^l \underline{\underline{I}} \quad (2.16)$$

où p^l est la pression interstitielle (pression du liquide) et $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur unité.

Récemment, d'autres modèles ont été proposés et prennent en compte la partie hydrostatique et déviatoire du tenseur des contraintes du liquide [GEB 2000a] :

$$\underline{\underline{\sigma}}^l = 2(1 - f^s)\eta_l \underline{\underline{D}}^{ldev} - (1 - f^s)p^l \underline{\underline{I}} \quad (2.17)$$

avec : η_l la viscosité de la phase liquide, et $\underline{\underline{D}}^{ldev}$ le déviateur du tenseur taux de déformation $\underline{\underline{D}}^l$ de la phase liquide.

Dans notre travail, nous adoptons le tenseur sphérique hydrostatique des contraintes pour la phase liquide.

2.3.2 Tenseur des contraintes de la phase solide. Contrainte effective

On décompose le tenseur des contraintes de la phase solide :

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = f^s \left(\underline{\underline{\sigma}}^{sdev} - p^s \underline{\underline{I}} \right) \quad (2.18)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^{sdev}$ est la partie déviatoire du tenseur des contraintes du solide et p^s est la pression du solide avec :

$$tr \underline{\underline{\sigma}}^s = -3f^s p^s$$

La loi de comportement de la phase solide est introduite par la notion du tenseur des contraintes effectives $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^s$. Ce tenseur est responsable des déformations viscoplastiques du solide. Il est défini par [LEW 1998] :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^s = \underline{\underline{\sigma}} + p^l \underline{\underline{I}} \quad (2.19)$$

Cette équation correspond au principe de Terzaghi pour une hypothèse de l'incompressibilité du matériau solide. Si nous prenons en compte la compressibilité du solide [LEW 1998, MAR

1997a, COU 1991], le tenseur des contraintes effectives (2.19) est modifié par un nombre b , appelé coefficient de Biot :

$$\underline{\hat{\sigma}}^s = \underline{\sigma} + b p^l \underline{I} \quad (2.20)$$

où :

$$1 - b = \frac{K_T}{K_s} \quad (2.21)$$

K_T est le module de compressibilité du squelette solide et K_s est le module de compressibilité du matériau solide.

Dans notre étude, nous prenons en compte le cas où le matériau solide est incompressible, ce qui entraîne :

$$\frac{1}{K_s} = 0, \quad b=1 \quad (2.22)$$

et la relation (2.19) est valable.

2.4 Comportement du liquide - loi de Darcy

L'écoulement du métal liquide au travers du squelette solide est décrit par la loi de conduction du liquide linéaire dite la loi de Darcy. Celle-ci prend en compte les effets de pesanteur [COU 1991, DOM 2002, LEW 1998] et s'écrit :

$$(1 - f^s) \underline{w} = -K \left[\underline{grad} p^l + \rho^l \underline{g} \right] \quad (2.23)$$

où g est la gravité et K est le tenseur de perméabilité du milieu qui dépend de la géométrie du réseau poreux (morphologie) au travers duquel s'effectue l'écoulement, de la porosité f^l et de la viscosité du liquide.

La perméabilité n'est donc pas une grandeur intrinsèque du réseau poreux puisqu'elle dépend du liquide qui le sature. Il est possible d'écrire le tenseur de perméabilité sous cette forme :

$$K = \frac{k_1}{\mu} \quad (2.24)$$

où μ est la viscosité dynamique du liquide et k_1 est le tenseur de perméabilité intrinsèque, précisément au sens où il est indépendant du liquide saturant et ne dépend que de la géométrie du réseau poreux.

Cette grandeur peut être déterminée expérimentalement (essai de filtration) ou approchée à partir de modèles théoriques issus de la littérature. Si l'on suppose que le semi-solide est un milieu isotrope, alors k_1 est réduit à un scalaire.

En négligeant les effets de pesanteur et en utilisant l'équation (2.24), la loi de Darcy (2.23) devient :

$$(1 - f^s) \underline{w} = - \frac{k_1}{\mu} \underline{grad} p' \quad (2.25)$$

L'écoulement de la phase liquide au travers de la phase solide produit un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds R_{en} qui est défini par [COU 1991] :

$$R_{en} = \frac{\rho_l v' L}{\mu}$$

où v' , L sont la vitesse et la longueur caractéristiques de l'écoulement étudié et ρ_l est la densité du liquide.

Ce nombre est utilisé pour déterminer si un écoulement est laminaire ou turbulent. Lorsque ce nombre est inférieur à une valeur critique R_c qui est déterminée expérimentalement, l'écoulement est laminaire et les mouvements des particules liquides sont bien définis. Par contre, lorsque le nombre Reynolds R_{en} est supérieur à R_c , l'écoulement du liquide n'est

plus laminaire ce qui rend la loi de Darcy (2.23) inapplicable. Cette loi peut être remplacée par la loi de Forchheimer [FOR 2001].

Dans notre travail, nous supposons que le nombre de Reynolds est petit et donc que l'écoulement de la phase liquide est laminaire et que la loi de Darcy est valable.

2.5 Comportement de la phase solide

Le comportement macroscopique de la phase solide est supposé visqueux non linéaire et compressible. On notera que cette hypothèse de compressibilité du squelette solide n'est pas incompatible avec l'incompressibilité intrinsèque du matériau solide. En effet, la diffusion du liquide permet une évolution du volume occupé par le solide. Pour décrire ce comportement, beaucoup de modèles utilisent le formalisme du comportement des poudres métalliques à haute température [ABO 1985, ABO 1986, CHE 1990].

Le comportement de la phase solide est défini en supposant l'existence d'un potentiel de dissipation viscoplastique Ω . Ce potentiel est une fonction de la température et une fonction soit de la contrainte équivalente σ_{eq} , soit de la vitesse de déformation équivalente D_{eq} (la variable duale de la contrainte équivalente σ_{eq}).

Afin de décrire le comportement de la phase solide, nous avons choisi dans notre travail le modèle d'Abouaf et Chenot [ABO 1986] pour la compaction des poudres à haute température. Ce modèle a été choisi parce qu'il est l'un des plus simples possibles pour décrire un milieu viscoplastique compressible. On introduit une notion de contrainte équivalente à partir des invariants du tenseur des contraintes effectives du solide $\underline{\hat{\sigma}}^s$:

$$\sigma_{eq} = \left[3A(f^s)J_2 + B(f^s)I_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

où :

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\hat{\sigma}}^s) \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\hat{\sigma}}^{s^{dev}} : \underline{\hat{\sigma}}^{s^{dev}})$$

$$\underline{\hat{\sigma}}^{s^{dev}} = \underline{\hat{\sigma}}^s - \left(\frac{I_1}{3} \right) \underline{I}$$

$A(f^s)$ et $B(f^s)$ sont des coefficients sans dimension caractérisant le comportement du matériau viscoplastique. Ils dépendent de la fraction volumique du solide f^s et sont déterminés par l'expérience [ABO 1986, MAR 1997b, NGU 1992, ZAV 1993]. On notera que si $A=1$ et $B=0$; on retrouve la contrainte de Von Mises qui permet de décrire le matériau de Norton-Hoff, qui est incompressible. La contrainte équivalente (2.26) introduit la compressibilité du milieu grâce au second terme. Cette équation est représentée dans le plan $(I_1, \sqrt{J_2})$, par une ellipse centrée. Des formules de la contrainte équivalente plus compliquées que (2.26) représentées par une ellipse décentrée [MAR 1997a] ou par deux demi-ellipses décentrées [MAR 1999] ont été proposées pour prendre en compte une différence de comportement entre la traction et la compression.

Le potentiel de dissipation viscoplastique supposé de la forme [MAR 1997a, ZAV 1998] :

$$\Omega = \frac{k(T)}{n+1} \left[3 A J_2 + B I_1^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} \quad (2.27)$$

où $1/n$ est le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation et $k(T)$ est la consistance du matériau qui dépend de la température T .

Pour notre travail nous allons adopter cette formule (2.27). Zavagliangos et al. [ZAV 1995] ont proposé une variante de ce potentiel :

$$\Omega = \frac{k(T)}{n+1} \left[\left(\sqrt{3 J_2} \right)^{n+1} + \left(a J_2 + b I_1^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \quad (2.28)$$

où a et b sont des coefficients du matériau dépendant de la fraction volumique du solide f^s et déterminés par l'expérience [ZAV 1993].

Le taux de déformation du squelette solide viscoplastique est exprimé par la dérivée du potentiel viscoplastique par rapport au tenseur des contraintes effectives du solide $\underline{\hat{\sigma}}^s$ [ABO 1986, MAR 1997a] tel que :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}^s &= \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\sigma}^s} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \cdot \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \hat{\sigma}^s} = D_{eq} \cdot \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \hat{\sigma}^s} \\ &= k \left(3AJ_2 + BI_1^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(B \operatorname{tr}(\hat{\sigma}^s) \underline{\underline{I}} + \frac{3}{2} A \hat{\sigma}^{s\,dev} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

En inversant la loi de comportement (2.29), le tenseur des contraintes effectives de la phase solide s'écrit :

$$\hat{\sigma}^s = \frac{1}{3C(\underline{\underline{D}}^s)} \left[\left(\frac{1}{3B} - \frac{2}{3A} \right) \operatorname{tr}(\underline{\underline{D}}^s) \underline{\underline{I}} + \frac{2}{A} \underline{\underline{D}}^s \right] \quad (2.30)$$

où :

$$C(\underline{\underline{D}}^s) = k^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{9B} (\operatorname{tr} \underline{\underline{D}}^s)^2 + \frac{4}{3A} \underline{\underline{D}}^s_{II} \right]^{\frac{n-1}{2n}}$$

$$\underline{\underline{D}}^s_{II} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\underline{\underline{D}}^{s\,dev} : \underline{\underline{D}}^{s\,dev})$$

Si dans l'équation (2.30), le terme volumique n'existe pas, alors nous retrouvons la loi de Norton-Hoff pour les matériaux viscoplastiques incompressibles.

Dans la suite, on étudiera un cas unidimensionnel, où la déformation est uniaxiale :

$$\underline{v}^s = v^s(x) \underline{e}_x, \quad \underline{\underline{D}}^s = \frac{dv^s}{dx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (2.31)$$

Dans ce cas, on ne considère que la contrainte effective de la phase solide $\hat{\sigma}^s_{xx}(\underline{x})$, notée $\hat{\sigma}^s(x)$. On écrit alors la loi de comportement sous la forme suivante :

$$\hat{\sigma}^s(x) = A_1 \left(\frac{dv^s}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.32)$$

avec :

$$A_1 = \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{1}{9B(f^s)} + \frac{4}{9A(f^s)} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \quad (2.32 \text{ bis})$$

2.6 Équation d'équilibre

L'équation d'équilibre du mélange solide-liquide, en utilisant l'équation (2.19) et en négligeant l'inertie et les forces volumiques, est donnée par cette formule :

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{div}(\underline{\underline{\hat{\sigma}}^s}) - \underline{\underline{\text{grad}}} p^l = 0 \quad (2.33)$$

Dans le cas unidimensionnel, en supposant que les contraintes et les pressions ne dépendent que d'une seule variable x , les trois équations (2.33) se réduisent à une seule :

$$\frac{d\hat{\sigma}^s}{dx} - \frac{dp^l}{dx} = 0 \quad (2.34)$$

2.7 Une équation différentielle pour la contrainte effective $\hat{\sigma}^s(x)$

On reste ici dans le cas unidimensionnel : toutes les variables caractéristiques du milieu v^s , $\hat{\sigma}^s$, p^l ne dépendent que d'une seule variable d'espace x et la déformation est supposée uniaxiale, conformément à l'hypothèse (2.31). La loi de Darcy se réduit à :

$$(1 - f^s) w = - \frac{k_1}{\mu} \frac{dp^l}{dx} \quad (2.35)$$

où $w(x)$ est la composante sur $\underline{e}_x$ de la vitesse relative. On reporte la loi de Darcy (2.35) dans l'équation d'équilibre (2.34) et après dérivation de cette équation par rapport à x , on obtient :

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}^s}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left[\frac{\mu}{k_1} (1 - f^s) w \right] = 0 \quad (2.36)$$

Et en utilisant l'incompressibilité globale du milieu (2.14), l'équation (2.36) devient :

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}^s}{dx^2} - \frac{\mu}{k_1} \frac{dv^s}{dx} = 0 \quad (2.37)$$

À partir de la loi de comportement du solide (2.32) et de (2.37), nous pouvons ramener le modèle semi-solide à une seule équation différentielle de second ordre satisfaite par la contrainte effective $\hat{\sigma}^s(x)$:

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}^s}{dx^2} - \frac{\mu}{k_1} \left(\frac{\hat{\sigma}^s}{A_1} \right)^n = 0 \quad (2.38)$$

2.8 Synthèse

Nous pouvons ainsi résumer les équations proposées pour décrire le comportement du métal viscoplastique semi-solide en cours de solidification :

- L'incompressibilité globale

$$\text{div} \left[(1 - f^s) \underline{w} + \underline{v}^s \right] = 0 \quad (2.14)$$

- La conservation de la masse du solide

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + \text{div} \left(f^s \underline{v}^s \right) = 0 \quad (2.9)$$

- La loi de comportement viscoplastique du solide (d'après Abouaf et Chenot)

$$\underline{\underline{D}}^s = k \left(3AJ_2 + BI_1^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(Btr(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s) \underline{\underline{I}} + \frac{3}{2} A \underline{\underline{\hat{\sigma}}}^{s,dev} \right) \quad (2.29)$$

- Le comportement du liquide (loi de Darcy)

$$(1 - f^s) \underline{\underline{w}} = - \frac{k_1}{\mu} \underline{\underline{grad}} p^l \quad (2.25)$$

- L'équation d'équilibre

$$div(\underline{\underline{\sigma}}) = div(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s) - \underline{\underline{grad}} p^l = 0 \quad (2.33)$$

3. Analyse dimensionnelle

Nous nous plaçons à présent dans le cas tridimensionnel afin de déterminer les deux paramètres sans dimension qui caractérisent de manière optimum notre modèle : l'un représentera la compressibilité et l'autre le rapport entre la viscosité du liquide et celle du solide.

3.1 Loi de comportement du solide sans dimension. Introduction d'un coefficient sans dimension

Démarche :

On se donne une longueur caractéristique L et une vitesse caractéristique V , représentatives du problème de structure qu'on se pose. On adimensionnalise toutes les longueurs par rapport à L et toutes les vitesses par rapport à V :

$$\underline{x} = L \tilde{x}$$

$$\underline{v} = V \tilde{v} \quad , \quad \underline{w} = V \tilde{w}$$

On adimensionnalise toutes les contraintes et les pressions par rapport à une contrainte caractéristique c_1 , qui sera choisie de façon à obtenir une écriture simple de la loi de comportement du squelette :

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s = c_1 \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s, \quad p^l = c_1 \tilde{p}^l, \quad I_1 = c_1 \tilde{I}_1, \quad J_2 = c_1^2 \tilde{J}_2$$

De même, la contrainte équivalente d'Abouaf et Chenot (2.26) s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_{eq} = c_1 \tilde{\sigma}_{eq} = c_1 (3A)^{\frac{1}{2}} \left[\tilde{J}_2 + C \tilde{I}_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

où C est un paramètre sans dimension qui représente la compressibilité du squelette solide :

$$C = \frac{B}{3A} \tag{2.39}$$

Nous réécrivons la loi de comportement du solide (2.29) dans le but de déterminer c_1 :

$$\frac{V}{L} \underline{\underline{\tilde{D}}}^s = \frac{k}{2} c_1^n (3A)^{\frac{n+1}{2}} \left(\tilde{J}_2 + C \tilde{I}_1^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(2C \operatorname{tr}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^{s^{dev}} \right) \tag{2.40}$$

Dans (2.40), il apparaît une contrainte équivalente sans dimension :

$$\tilde{\sigma}_{eq}^* = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}}{(3A)^{\frac{1}{2}}} = \left(\tilde{J}_2 + C \tilde{I}_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.41}$$

en sorte que la loi de comportement (2.40), s'écrive sous la forme sans dimension suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{D}}}^s = \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{eq}^{*n-1} \left(2C \text{tr}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^{s^{dev}} \right) \quad (2.42)$$

Pour obtenir la loi de comportement sous cette forme, il faut choisir le coefficient c_1 :

$$c_1 = \left(\frac{2V}{kL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{(3A)^{\frac{n+1}{2n}}} \quad (2.43)$$

Interprétation du nombre sans dimension C

Ce nombre représente la compressibilité du milieu puisqu'on retrouve le matériau de Norton-Hoff lorsque $C = 0$. Pour cela on considère une sorte de coefficient de Poisson ν définie par :

$$\nu = - \frac{D_{yy}}{D_{xx}} \quad (2.44)$$

Lorsque le matériau est en traction simple ($\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s = \hat{\sigma}^s \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x$), la loi de comportement (2.42) implique :

$$\tilde{D}_{xx}^s = \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{eq}^{*n-1} \left(2C \tilde{\sigma}^s + \frac{2\tilde{\sigma}^s}{3} \right) \quad (2.45)$$

$$\tilde{D}_{yy}^s = \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{eq}^{*n-1} \left(2C \tilde{\sigma}^s - \frac{\tilde{\sigma}^s}{3} \right) \quad (2.46)$$

Le coefficient de Poisson (2.44) s'exprime donc en fonction de C :

$$\nu = \frac{-2C + \frac{1}{3}}{2C + \frac{2}{3}} \quad (2.47)$$

Inversant cette dernière relation, on voit que C est relié au « coefficient de Poisson visqueux » par :

$$C = \frac{1 - 2\nu}{6(1 + \nu)} \quad (2.48)$$

Ce coefficient devrait évoluer entre $C = 0$ (cas incompressible $\nu = 0.5$) et $C = \frac{1}{6}$ (cas extrême $\nu = 0$ où une traction uniaxiale n'entraîne pas de déformation dans le sens transverse). Si le coefficient de Poisson ν vaut 0.3, alors $C \approx 0.0513$.

3.2 Équation d'équilibre sans dimension

À partir des équations (2.33) et (2.25), nous obtenons une équation d'équilibre sans dimension telle que :

$$\frac{c_1}{L} \operatorname{div} \underline{\tilde{\sigma}}^s + (1 - f^s) \frac{V\mu}{k_1} \underline{\tilde{w}} = 0$$

L'équation précédente apparaît un nombre sans dimension R qui caractérise l'influence du liquide sur le solide en sorte qu'elle se réécrit sous la forme suivante :

$$\operatorname{div} \underline{\tilde{\sigma}}^s + (1 - f^s) R \underline{\tilde{w}} = 0 \quad (2.49)$$

où :

$$R = \frac{VL\mu}{c_1 k_1} = \frac{k_1^{\frac{1}{n}} \mu}{k_1} \frac{(3A)^{\frac{n+1}{2n}}}{2^{\frac{1}{n}}} V^{\frac{n-1}{n}} L^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.50)$$

Ce nombre sans dimension R peut s'écrire de la manière suivante :

$$R = \frac{\mu}{\mu^s} \left(\frac{L}{k_1^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \quad (2.50 \text{ bis})$$

où :

$$\mu^s = g(A, B) k_1^{\frac{1}{n}} \left(\frac{V}{L} \right)^{\frac{1-n}{n}}$$

Ce nombre sans dimension R dépend du rapport entre deux viscosités :

- la viscosité dynamique du fluide μ .
- la viscosité apparente du solide μ^s .

Cette viscosité apparente du solide est le rapport entre la contrainte et le taux de déformation en cisaillement. Et ce nombre dépend aussi du rapport entre une longueur caractéristique de l'échantillon L et une longueur caractéristique de la taille des pores du squelette viscoplastique $k_1^{1/2}$. Le nombre R est comparable à celui établi lors de la modélisation de matériau semi-solide par l'homogénéisation [GEI 1999].

On voit qu'une faible vitesse implique une petite valeur du nombre R , ce qui équivaut à un fluide peu visqueux ou à une forte valeur du coefficient de perméabilité. Donc à faible vitesse, le milieu biphasique se comportera comme un solide. Au contraire si la vitesse V est grande, R sera grand et l'écoulement du fluide interstitiel aura beaucoup d'influence sur le comportement global. Nous illustrerons ces propriétés en étudiant le comportement d'un échantillon unidimensionnel.

3.3 Loi de Darcy sans dimension

La version modifiée de la loi de Darcy (2.25) sans dimension s'écrit :

$$(1 - f^s) V \underline{\tilde{w}} = - \frac{k_1}{\mu} \frac{c_1}{L} \underline{\text{grad}} \tilde{p}^l$$

ou alors :

$$(1 - f^s) R \underline{\tilde{w}} = - \underline{\text{grad}} \tilde{p}^l \quad (2.51)$$

3.4 Synthèse

Nous donnons ici un bilan des équations adimensionnalisées proposées pour décrire le comportement du métal viscoplastique semi-solide en cours de solidification :

- La loi de comportement viscoplastique du solide

$$\underline{\tilde{D}}^s = \left(\tilde{J}_2 + C \tilde{I}_1^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(2C \text{tr}(\underline{\tilde{\sigma}}^s) \underline{\underline{I}} + \underline{\tilde{\sigma}}^{s^{dev}} \right) \quad (2.42)$$

- Le comportement du liquide

$$(1 - f^s) R \underline{\tilde{w}} = - \underline{\text{grad}} \tilde{p}^l \quad (2.51)$$

- L'incompressibilité globale

$$\text{div} \left[(1 - f^s) \underline{\tilde{w}} + \underline{\tilde{v}}^s \right] = 0 \quad (2.52)$$

- La conservation de la masse du solide

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + \frac{V}{L} \text{div} \left(f^s \underline{\tilde{v}}^s \right) = 0 \quad (2.53)$$

- L'équation d'équilibre

$$\operatorname{div}\left(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^s\right)-\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\tilde{p}'=0 \quad (2.54)$$

CHAPITRE 3

Une solution analytique pour un milieu viscoplatique semi-solide

Chapitre 3: Une solution analytique pour un milieu viscoplastique semi-solide

1. INTRODUCTION	64
2. PROBLEME AUX LIMITES AVEC VITESSE IMPOSEE	64
3. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE	66
4. SOLUTION EXACTE DU PROBLEME A VITESSE IMPOSEE	68
5. PROBLEME AUX LIMITES AVEC CONTRAINTE IMPOSEE	73
6. SOLUTION EXACTE DU PROBLEME A CONTRAINTE IMPOSEE	76
7. CONCLUSION	81

1. Introduction

On a présenté au chapitre précédent un modèle relativement simple pour décrire le comportement de la partie semi-solide d'un métal en cours de solidification. Dans ce modèle, nous avons mis en évidence deux paramètres sans dimension, dont l'un est facile à interpréter (compressibilité du squelette solide). L'objectif de ce chapitre est de montrer comment le second paramètre, noté R , influe sur le comportement global du milieu biphasique. Pour cela, nous étudions dans ce chapitre un problème aux limites unidimensionnel, avec des conditions aux limites portant sur la phase solide et la phase liquide.

2. Problème aux limites avec vitesse imposée

Nous nous sommes proposés d'étudier le comportement d'un échantillon unidimensionnel de milieu poreux déformable, en utilisant le modèle viscoplastique du chapitre 2, soumis à diverses conditions aux limites.

Nous avons considéré un échantillon de longueur L , avec un bord fixé ($v^s = 0$) et non-drainé ($w = 0$). L'autre bord de l'échantillon est soumis à une vitesse du solide imposée ($v^s = V$) et à la condition aux limites drainée (la pression interstitielle du mélange semi-solide p' est égale à la pression de liquide à l'extérieur p ; $p' = p$) (FIG.(3.1)). Ces conditions aux limites permettent de décrire la situation où la partie semi-solide est située entre une partie liquide et une partie solide. Le problème à vitesse imposée vise à décrire la situation où la partie semi-solide est soumise à une vitesse de déformation V/L .

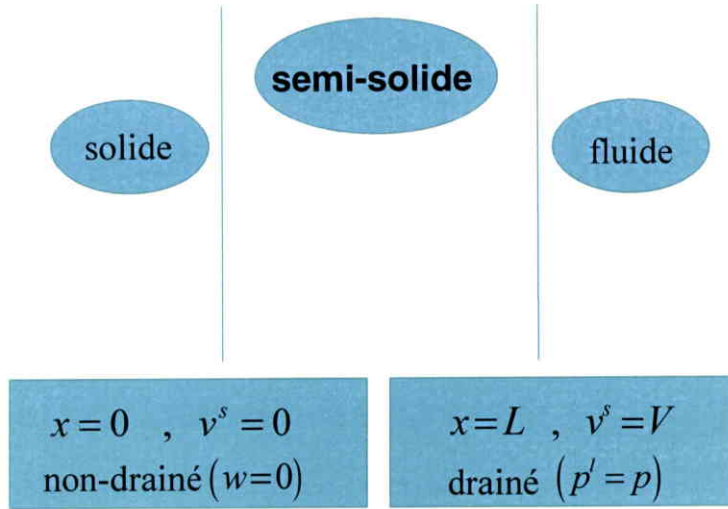


FIG.(3.1) Conditions aux limites de l'échantillon étudié.

Dans notre étude, nous avons supposé la fraction volumique de la phase solide f^s constante et la déformation isotherme.

➤ En utilisant les conditions aux limites sur le bord non-drainé et en intégrant la condition d'incompressibilité globale du mélange (2.14), nous avons :

$$(1 - f^s)w = -v^s \quad (3.1)$$

➤ À partir de la loi de Darcy (2.25) et de la loi viscoplastique du solide (2.32), l'équation (2.34) devient :

$$\frac{\mu}{k_1}(1 - f^s)w + \frac{d}{dx} \left[A_1 \left(\frac{dv^s}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = 0 \quad (3.2)$$

Des équations (3.1) et (3.2) et des conditions aux limites sur les bords drainé et non-drainé, nous nous ramenons à une équation différentielle du second ordre satisfaite pour la vitesse du solide $v^s(x)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\mu}{k_1} v^s + \frac{d}{dx} \left[A_1 \left(\frac{dv^s}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = 0 \\ v^s(0) = 0 \\ v^s(L) = V \end{array} \right. \quad (3.3)$$

3. Mise sous forme adimensionnelle

On met maintenant l'équation différentielle (3.3) sous forme adimensionnelle, en reprenant la démarche présentée au chapitre 2.

➤ Nous écrivons l'équation de comportement du solide (2.32) sous une forme adimensionnelle avec une déformation uniaxiale :

$$C^* \tilde{\sigma}^s = A_1 \left(\frac{V}{L} \frac{d\tilde{v}^s}{d\tilde{x}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

et donc :

$$\tilde{\sigma}^s = \left(\frac{d\tilde{v}^s}{d\tilde{x}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.4)$$

et

$$C^* = A_1 \left(\frac{V}{L} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.5)$$

➤ L'équation différentielle (3.3) devient sous une forme sans dimension :

$$-R_1 \tilde{v}^s + \frac{d}{d\tilde{x}} \left(\frac{d\tilde{v}^s}{d\tilde{x}} \right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (3.6)$$

où :

$$R_1 = \frac{V^{\frac{n-1}{n}} L^{\frac{n+1}{n}} \mu}{A_1 k_1}$$

est un nombre sans dimension. En utilisant la relation (2.32 bis), ce nombre devient

$$R_1 = \frac{k^{\frac{1}{n}} \mu}{k_1} \left(\frac{1}{9B} + \frac{4}{9A} \right)^{-\frac{n+1}{2n}} V^{\frac{n-1}{n}} L^{\frac{n+1}{n}} \quad (3.7)$$

Ce nombre R_1 dépend du rapport entre deux viscosités : la viscosité dynamique du fluide μ et la viscosité apparente du solide μ^s (voir (2.50 bis)). Il dépend de la vitesse imposée V sur le bord drainé. La relation entre ce nombre sans dimension et le nombre R , qui est défini par l'équation (2.50) est :

$$\frac{R}{R_1} = \frac{C^*}{c_1} = 2^{-\frac{1}{n}} (3A)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{1}{9B} + \frac{4}{9A} \right)^{\frac{n+1}{2n}} = 2^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{9C} + \frac{4}{3} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \quad (3.8)$$

où C est le nombre sans dimension qui représente la compressibilité et qui est défini dans l'équation (2.36). En pratique, les deux nombres sans dimension R et R_1 ne sont pas très différents. Par exemple si on prend un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ ($C = 0.0513$) et un exposant d'écrouissage $n = 6$, le rapport $\frac{R}{R_1}$ vaut 1.849. Bien entendu, ce rapport $\frac{R}{R_1}$ peut évoluer en fonction de ν et n , mais cette variation est relativement peu importante. C'est pourquoi nous discuterons la solution du problème aux limites en fonction du nouveau paramètre sans dimension R_1 .

Le problème aux limites (3.3) sous une forme adimensionnelle pour la vitesse du solide $Y(X) = \tilde{v}^s(\tilde{x})$ (on note $X = \tilde{x}$) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 Y - \left(Y' \frac{1}{n} \right)' = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(1) = 1 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$Y(X)$ minimise la fonctionnelle strictement convexe :

$$\Phi(Y) = \int_0^1 \left\{ -\frac{Y'^{\frac{n+1}{n}}}{n+1} + \frac{R_1 Y^2}{2} \right\} dX \quad (3.10)$$

sur les $Y(X)$ admissibles (c'est-à-dire satisfaisant les conditions aux limites).

Donc (3.9) a une solution unique.

4. Solution exacte du problème à vitesse imposée

En réalisant une fois l'intégration de l'équation différentielle du second ordre (3.9), nous obtenons une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{R_1 Y^2}{2} - \frac{1}{n+1} Y'^{\frac{n+1}{n}} = C_1$$

Ou d'une autre façon :

$$\left(\frac{dY}{dX} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{R_1 (n+1)}{2} Y^2 - C_1 (n+1) \quad (3.11)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{dY}{dX} = F \left(Y^2 - C_2 \right)^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.12)$$

où :

$$F = \left(\frac{R_1 (n+1)}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad C_2 = \frac{2C_1}{R_1} \quad (3.12 \text{ bis})$$

Afin d'obtenir la vitesse du solide $Y(X)$, nous allons chercher à déterminer la valeur de la constante d'intégration C_2 .

En utilisant les deux conditions aux limites du système (3.9), nous obtenons une équation scalaire qui caractérise la constante C_2 :

$$\int_0^1 \frac{dY}{\left(Y^2 - C_2 \right)^{\frac{n}{n+1}}} = F \quad (3.13)$$

Le premier membre de (3.13) est une fonction de la constante d'intégration C_2 . En utilisant le code de calcul symbolique MAPLE, on obtient ce premier membre qui s'exprime à partir d'une fonction « hypergéométrique » $H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; \frac{1}{C_2}\right)$ dont la définition et quelques propriétés sont rappelées en annexe B. À l'aide de cette fonction hypergéométrique, on peut réécrire l'équation (3.13) (l'inconnue étant C_2) de la manière suivante :

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; \frac{1}{C_2}\right) - F \left(-C_2 \right)^{\frac{n}{n+1}} = 0 \quad (3.14)$$

Nous remarquons que grâce à l'équation (3.14) la constante C_2 dépend de l'inverse du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation n et du coefficient F qui dépend du nombre sans dimension R_1 . La résolution de l'équation algébrique (3.14), puis de l'équation différentielle (3.12) ont été réalisées à l'aide du code MAPLE. Dans un premier temps, la

solution C_2 de (3.14) est obtenue numériquement. Ensuite la solution de l'équation différentielle du premier ordre (3.12), associée à la condition $Y(0)=0$, est obtenue de manière exacte en fonction des données n , F et C_2 . L'expression de cette solution $Y(X)$, qui est assez complexe, n'a pas été reportée dans ce document. À titre d'exemple, nous présentons les graphes de $Y(X)$, pour un exposant $n=6$, et pour diverses valeurs du nombre sans dimension R_l allant de $R_l=10^{-5}$ à $R_l=10^4$. Rappelons que R_l dépend de la vitesse imposée V et du rapport de la viscosité du fluide et du solide : une faible valeur de R_l correspond à une vitesse faible, une grande valeur de R_l à une grande vitesse.

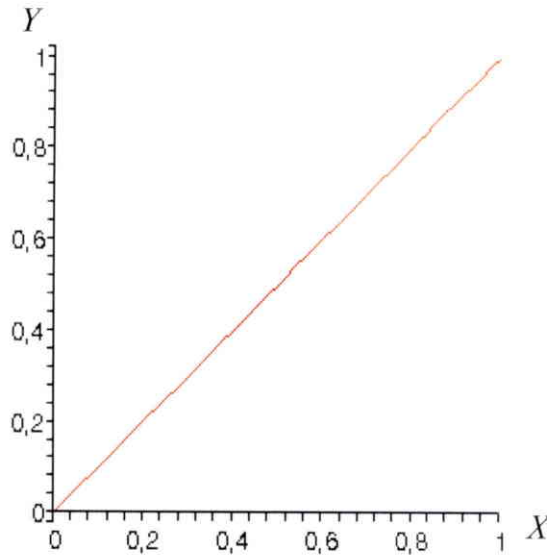


FIG.(3.2) La vitesse du solide $Y(X)$ pour de petites valeurs du nombre sans dimension $R_l = 10^{-5}$, 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} .

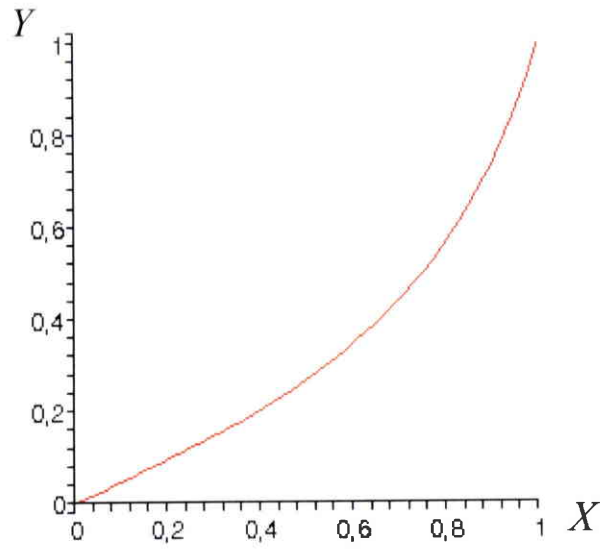


FIG.(3.3) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 1$.

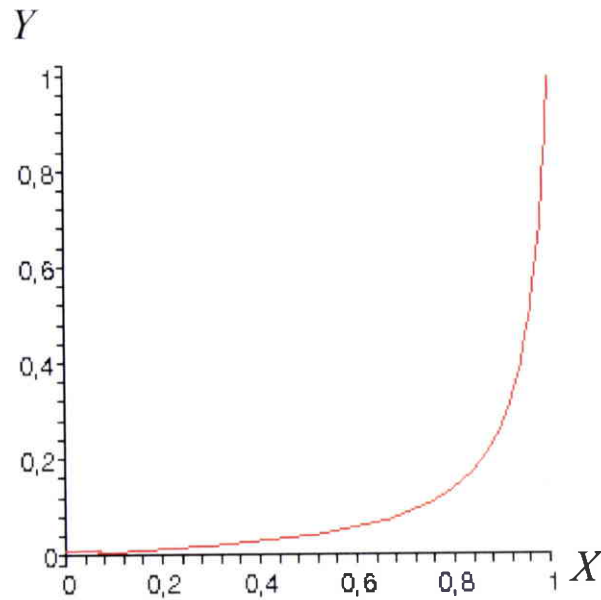


FIG.(3.4) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10$.

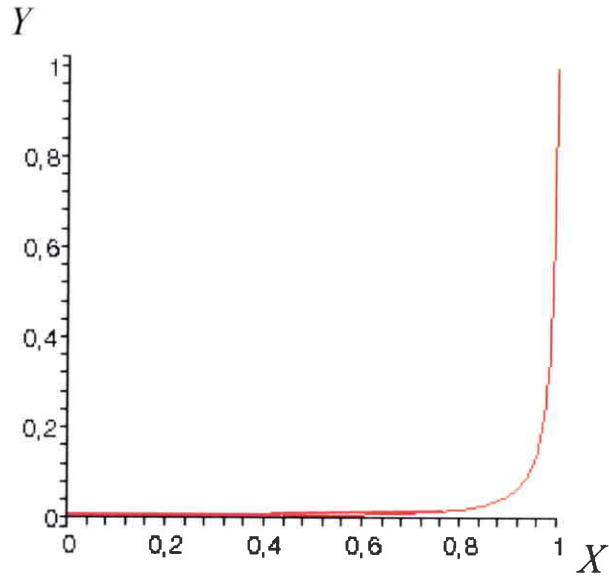


FIG.(3.5) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 100$.

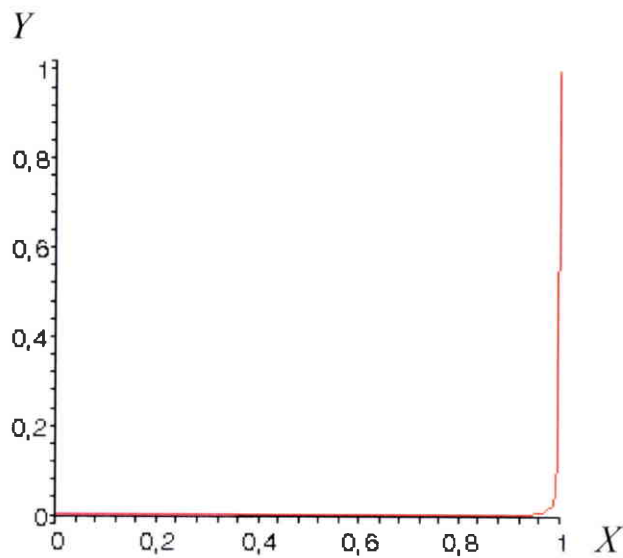


FIG.(3.6) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 1000$.

À partir de ces résultats, on peut mieux comprendre l'interaction entre le comportement du solide et l'écoulement du fluide interstitiel.

- Regardons d'abord le cas de petites valeurs du nombre sans dimension R_l ($R_l \leq 10^{-1}$), ce qui correspond à des vitesses imposées faibles (FIG.(3.2)). Dans ce cas, le profil de vitesse est linéaire. Donc le gradient de la vitesse et donc la contrainte dans le solide sont constants dans l'échantillon. Dans ce cas d'une faible vitesse, le fluide n'a aucune influence sur le comportement du solide : comme les vitesses sont lentes, le fluide a tout son temps pour s'écouler vers l'extrémité $x = L$.
- À partir de $R_l = 1$, le comportement change et le profil de vitesse n'est plus linéaire (FIG.(3.3)). La vitesse est devenue suffisamment rapide pour que le fluide n'ait plus le temps de s'écouler totalement vers la droite. Dans ce cas on ne peut négliger l'influence de l'écoulement interstitiel sur le comportement de l'échantillon. Bien entendu, ce profil non-linéaire dépend de la condition aux limites de perméabilité.
- Lorsqu'on augmente la vitesse ($R_l \geq 10$), voir les figures (FIG.(3.4), FIG.(3.5) et FIG.(3.6)), la déformation est de plus en plus localisée près du bord drainé. Le comportement global est dominé par l'écoulement du fluide, qui est lui aussi localisé près du bord drainé. Pour de fortes vitesses ($R_l \geq 100$), il n'y a presque pas de déformations et de contraintes sur une grande partie de l'intervalle.

5. Problème aux limites avec contrainte imposée

Nous avons étudié le comportement du même échantillon unidimensionnel que dans l'exemple précédent, en y remplaçant la vitesse imposée V sur le bord drainé par une contrainte imposée (FIG.(3.7)) :

$$\Sigma = F^s - p^l$$

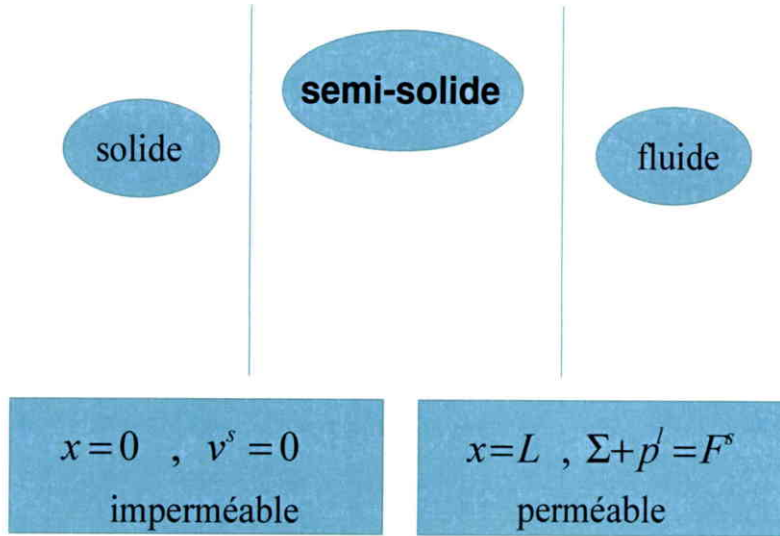


FIG.(3.7) Conditions aux limites de l'échantillon étudié.

À partir de l'équation (2.32), la condition aux limites sur le bord drainé est :

$$\frac{dv^s}{dx}(L) = \left(\frac{F^s}{A_1} \right)^n \quad (3.15)$$

où F^s est la contrainte imposée dans la partie solide sur le bord drainé.

En suivant la même démarche qu'au paragraphe 2 de ce chapitre pour obtenir l'équation différentielle du second ordre (3.3) et avec les mêmes notations, le problème aux limites qui décrit ce modèle est :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\mu}{k_1} v^s + \frac{d}{dx} \left[A_1 \left(\frac{dv^s}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = 0 \\ v^s(0) = 0 \\ v^{s'}(L) = \left(\frac{F^s}{A_1} \right)^n \end{array} \right. \quad (3.16)$$

qui est une équation différentielle du second ordre pour la vitesse du solide $v^s(x)$ avec une condition aux limites de Neumann.

Pour ce modèle, on adimensionnalise toutes les vitesses par rapport à V^* une vitesse caractéristique qui est définie ci-dessous.

En utilisant la condition aux limites sur le bord drainé (3.15) et en normalisant la condition aux limites en $\tilde{x} = 1$, nous obtenons :

$$V^* = L \left(\frac{F^s}{A_1} \right)^n \quad (3.17)$$

Le problème aux limites (3.16) sous une forme adimensionnelle pour la vitesse du solide $Y(X) = \tilde{v}^s(\tilde{x})$ (on note $X = \tilde{x}$) devient :

$$\begin{cases} -KY + \left(Y' \frac{1}{n} \right)' = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y'(1) = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

où :

$$K = \frac{V^{*\frac{n-1}{n}} L^{\frac{n+1}{n}} \mu}{A_1 k_1} = \frac{L^2 F^{s^{n-1}} \mu}{A_1^n k_1}$$

est un nombre sans dimension. On peut l'écrire à partir de l'équation (2.32 bis) en fonction des coefficients du modèle tridimensionnel :

$$K = \frac{k \mu}{k_1} \left(\frac{1}{9B} + \frac{4}{9A} \right)^{-\frac{n+1}{2}} L^2 F^{s^{n-1}} \quad (3.19)$$

On remarque à partir de l'équation (3.19) que le nombre K dépend aussi du rapport entre deux viscosités : la viscosité dynamique du fluide μ et la viscosité apparente du solide μ^s (voir (2.50 bis)). Il dépend de la contrainte imposée F^s sur le bord drainé.

6. Solution exacte du problème à contrainte imposée

En effectuant une fois l'intégration de l'équation différentielle du second ordre (3.18), nous obtenons une équation différentielle du premier ordre :

$$\left(\frac{dY}{dX} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{K(n+1)}{2} Y^2 + a_1(n+1) \quad (3.20)$$

ou d'une autre façon :

$$\frac{dY}{dX} = F_1 (Y^2 + a_2)^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.21)$$

où :

$$F_1 = \left(\frac{K(n+1)}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad a_2 = \frac{2a_1}{K} \quad (3.21 \text{ bis})$$

Pour avoir la vitesse du solide $Y(X)$, nous allons chercher à déterminer la valeur de la constante d'intégration a_2 . En utilisant les deux conditions aux limites du système (3.18), nous obtenons une équation scalaire qui caractérise la constante a_2 :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2}{K(n+1)} - a_2}} \frac{dY}{(Y^2 + a_2)^{\frac{n}{n+1}}} = F_1 \quad (3.22)$$

Le premier membre de (3.22) est une fonction de la constante d'intégration a_2 . En utilisant le code de calcul symbolique MAPLE, on montre que ce premier membre s'exprime à partir d'une fonction « hypergéométrique » $H\left(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - \frac{2}{K(n+1)a_2}\right)$. À l'aide de cette fonction hypergéométrique, on peut réécrire l'équation (3.22) de la manière suivante :

$$a_2^{-\frac{n}{n+1}} \sqrt{\frac{2}{K(n+1)} - a_2} H\left(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1 - \frac{2}{K(n+1)a_2}\right) = F_1 \quad (3.23)$$

Nous remarquons que la solution a_2 de l'équation (3.23) dépend de l'inverse du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation n et du coefficient F_1 qui dépend du nombre sans dimension K . La solution de l'équation algébrique (3.23), puis de l'équation différentielle (3.21) ont été obtenues en se servant du code MAPLE. Dans un premier temps, la solution a_2 de (3.23) est obtenue numériquement. Ensuite la solution de l'équation différentielle du premier ordre (3.21) est obtenue de manière exacte en fonction des données n , F_1 et a_2 . L'expression de cette solution $Y(X)$, qui est assez complexe, n'a pas été reportée dans ce document. Nous présentons les graphes de $Y(X)$, pour un exposant $n=6$, et pour diverses valeurs du nombre sans dimension K allant de $K=10^{-3}$ à $K=10^3$. Rappelons que K dépend de la contrainte imposée F^s et du rapport de la viscosité du fluide et du solide : une faible valeur de K correspond à une contrainte faible, une grande valeur de K à une grande contrainte.

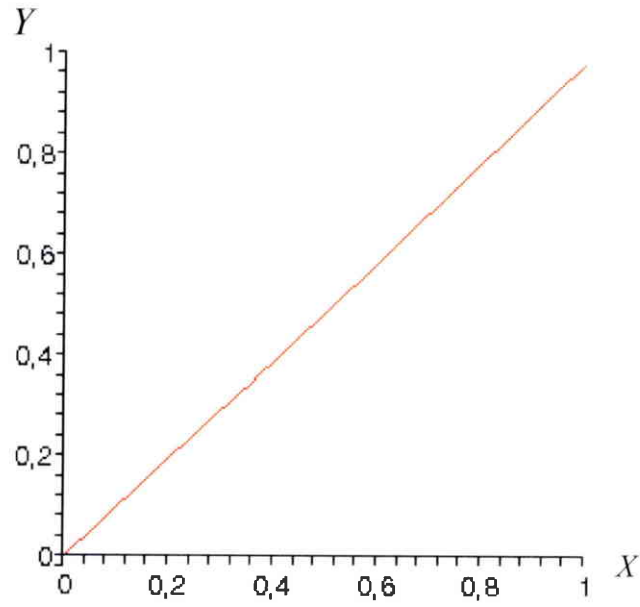


FIG.(3.8) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $K = 10^{-3}, 10^{-2}$.

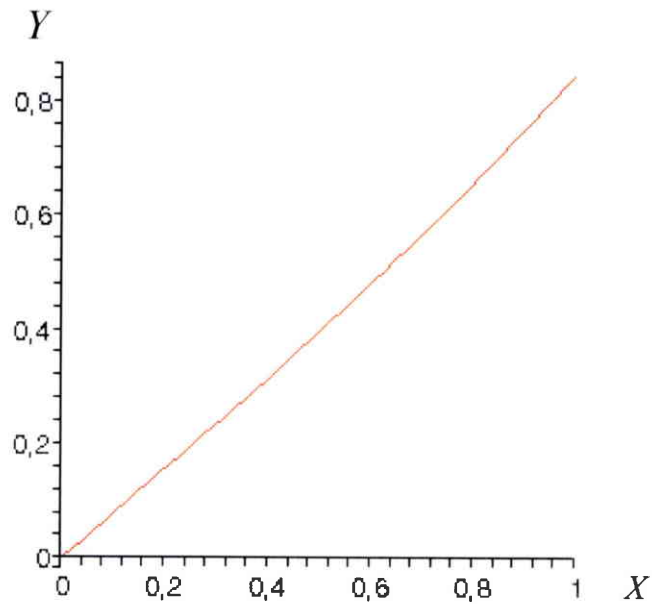


FIG.(3.9) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $K = 10^{-1}$.

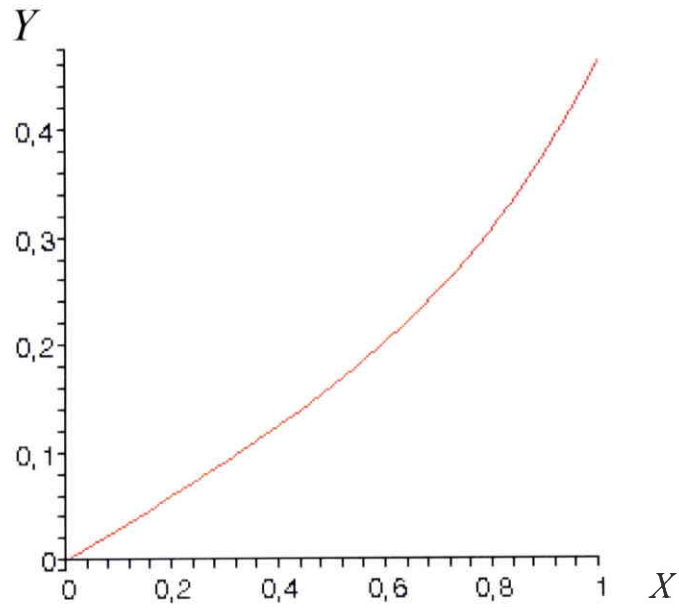


FIG.(3.10) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $K = 1$.

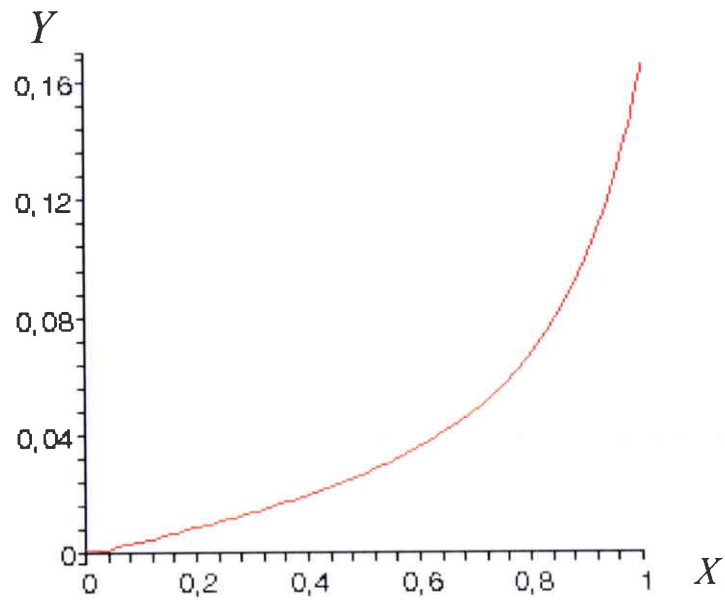


FIG.(3.11) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $K = 10$.

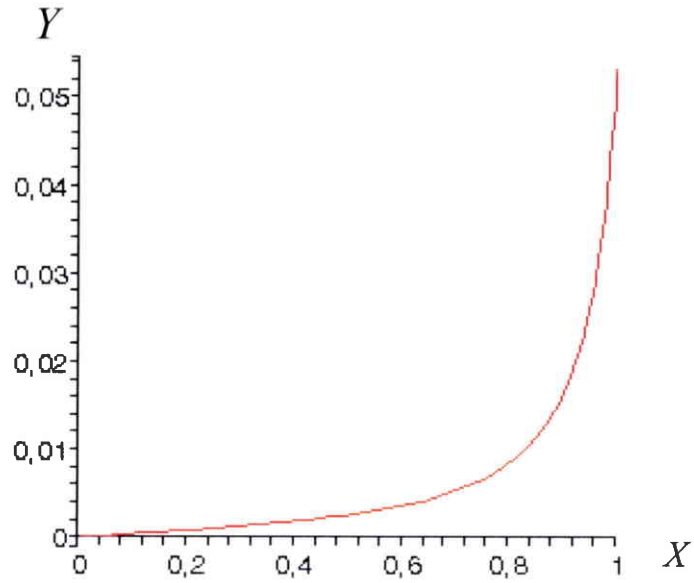


FIG.(3.12) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $K = 100$.

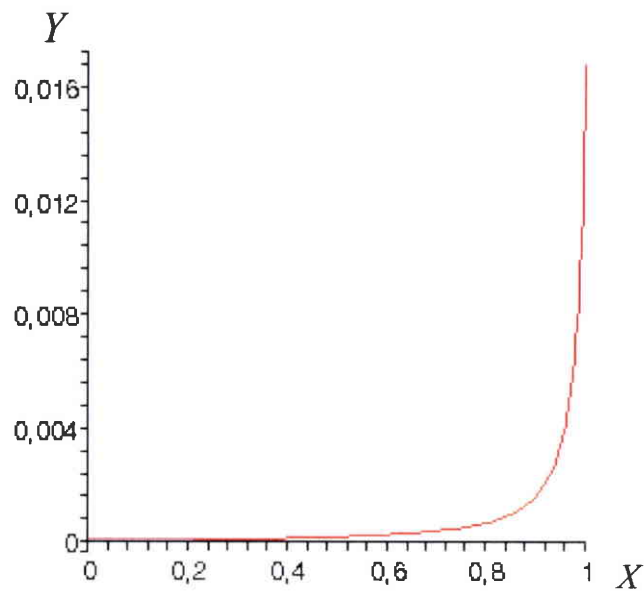


FIG.(3.13) La vitesse du solide $Y(X)$ pour le nombre sans dimension $K = 1000$.

L'analyse de ces résultats est tout à fait comparable à celle des résultats à vitesse imposée. Pour des petites valeurs de la force imposée ($K \leq 10^{-2}$), le profil de la vitesse $Y(X)$ est linéaire (FIG.(3.8)) : l'écoulement n'a pas d'influence sur la réponse. Au-delà de ce seuil (FIG.(3.9), FIG.(3.10) et FIG.(3.11)), la courbe $Y(X)$ est non linéaire et la déformation a tendance à se concentrer près du bord drainé. Pour de grandes valeurs de K (FIG.(3.12) et FIG.(3.13)), la déformation du solide et l'écoulement sont très localisés. On notera qu'il y a une similitude entre les courbes à vitesse imposée et celles à contraintes imposées. En conséquence, lorsqu'on augmente la valeur de K , la vitesse maximale $Y(1)$ diminue.

7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu des solutions analytiques des problèmes aux limites pour le modèle de milieu poreux viscoplastique décrit au chapitre précédent. Dans un cadre unidimensionnel, le comportement de l'échantillon dépend d'un nombre sans dimension R_1 , qui n'est pas très différent du nombre R obtenu dans le cas tridimensionnel. L'étude analytique a mis en évidence l'existence d'un seuil pour ce nombre R_1 (en gros $R_1 \approx 1$). Lorsque la vitesse est inférieure à ce seuil, le comportement est celui du solide et le fluide interstitiel n'a pas d'influence sur la réponse du solide. Lorsque la vitesse est très supérieure à ce seuil, la déformation du solide et l'écoulement interstitiel sont fortement couplés. De plus, ils ont tendance à se localiser près du bord drainé.

La solution analytique a été obtenue lorsque les coefficients sont constants et donc lorsque la porosité est constante. Or la conservation de la masse (2.9) nous donne une équation d'évolution pour la fraction volumique du solide (en utilisant les relations (2.6) et (2.3)) :

$$\frac{D^s f^s}{Dt} + f^s \frac{\partial v^s}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

Lorsque la vitesse est importante, on a vu que le gradient de vitesse est plus important près du bord drainé. Donc l'évolution de la fraction volumique ne sera pas uniforme dans

l'échantillon. En traction ($\frac{\partial v^s}{\partial x} > 0$), la fraction volumique du solide va diminuer près du bord drainé et la porosité va augmenter. On peut donc penser que les ruptures éventuelles d'un solide en traction se produiront en priorité près du bord drainé. De plus, de grandes vitesses de déformations favorisent ces ruptures. En revanche, il n'y aura pas de risque de rupture lorsque le produit est en compression, puisque d'après l'équation (3.24), la fraction volumique du solide augmente si ($\frac{\partial v^s}{\partial x} < 0$).

CHAPITRE 4

Une modélisation et une solution analytique pour un milieu semi-solide élastoviscoplastique

Chapitre 4 : Une modélisation et une solution analytique pour un milieu semi-solide élastoviscoplastique

- 1. INTRODUCTION 86**
- 2. LES EQUATIONS CARACTERISTIQUES DU MILIEU ELASTOVISCOPLASTIQUE SEMI-SOLIDE 86**
 - 2.1 CONSERVATION DE LA MASSE, INCOMPRESSIBILITE, ELASTICITE 86
 - 2.2 LOIS DE COMPORTEMENT 87
 - 2.3 ÉQUATION D'EQUILIBRE..... 88
- 3. ETUDE DU PROBLEME UNIDIMENSIONNEL INCOMPRESSIBLE 88**
 - 3.1 PROBLEME AUX LIMITES 89
 - 3.2 LE MODELE SOUS FORME ADIMENSIONNALISEE 92
 - 3.3 RESOLUTION EN ESPACE..... **ERREUR ! SIGNET NON DEFINI**.4
 - 3.4 RETOUR SUR LE PROBLEME SANS ELASTICITE 98
 - 3.5 ÉTUDE NUMERIQUE DU PROBLEME ELASTOVISCOPLASTIQUE 106
- 4. CONCLUSION 109**

1. Introduction

Pour un métal en cours de solidification, il est bien difficile de savoir s'il faut négliger l'élasticité du matériau solide. De toute manière, il n'existe pas beaucoup de données fiables sur les propriétés élastiques à ce niveau de température. Mais il y a une motivation pour introduire des déformations élastiques dans le modèle précédent : il existe actuellement beaucoup plus de codes de calcul prenant en compte l'élasticité que de codes purement viscoplastiques. Avec la collaboration du CEA (A. MILLARD), nous avons essayé de construire un modèle numérique à l'intérieur du code CAST3M, qui couple un fluide interstitiel et un solide poreux viscoplastique. La structure de CAST3M nous a obligé à prendre en compte les déformations élastiques. Suite aux difficultés de mise au point et de validation de ce modèle numérique, nous avons essayé d'analyser l'influence de l'élasticité sur les comportements étudiés aux chapitres précédents.

Dans un premier temps, nous modifierons le modèle viscoplastique incompressible pour tenir compte des déformations élastiques. Ensuite nous étudierons, comme au chapitre 3, le comportement d'un échantillon à une dimension. Nous verrons qu'il est plus facile de travailler avec une inconnue de type contrainte qu'avec une vitesse.

2. Les équations caractéristiques du milieu élastoviscoplastique semi-solide

2.1 Conservation de la masse, incompressibilité, élasticité

Il est classique de décomposer le taux de déformation en une partie élastique et une partie non élastique (ici viscoplastique) :

$$\underline{\underline{D}}^s = \underline{\underline{D}}^{s^e} + \underline{\underline{D}}^{s^{vp}} \quad (4.1)$$

Avec l'hypothèse des petites perturbations, l'évolution de la déformation élastique est décrite à l'aide d'un tenseur de souplesse P :

$$\underline{\underline{D}}^{s^e} = P : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^s \quad (4.2)$$

où $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^s$ est la dérivée par rapport au temps du tenseur des contraintes effectives de la phase solide (rappelons qu'on se place en petites perturbations et qu'il n'est pas nécessaire d'introduire une dérivée objective).

Nous supposons toujours que le fluide est incompressible. En revanche, à cause de l'élasticité, le matériau solide peut devenir compressible. À partir de (2.5), (2.8) et (2.13), la conservation de la masse pour les deux phases solide et fluide conduit aux équations suivantes :

$$\frac{D^s f^s}{Dt} + f^s \operatorname{div} v^s + \frac{f^s}{\rho_s} \frac{D^s \rho_s}{Dt} = 0 \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \left[(1 - f^s) w + v^s \right] + \frac{f^s}{\rho_s} \frac{D^s \rho_s}{Dt} = 0 \quad (4.4)$$

L'évolution de la masse volumique de la phase solide introduit la compressibilité de la matériau solide et elle définit à partir de l'équation de l'état de la phase solide [LEW 1998] (A.5) :

$$\frac{f^s}{\rho_s} \frac{D^s \rho_s}{Dt} = \frac{[b - (1 - f^s)]}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} - (1 - b) \operatorname{div} v^s \quad (4.5)$$

2.2 Lois de comportement

À partir de la loi de comportement viscoplastique de la phase solide (2.29) et de la loi élastique (4.2), la loi de comportement élastoviscoplastique du solide devient :

$$\underline{\underline{D}}^s = P : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^s + k \left(3AJ_2 + BI_1^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(B \operatorname{tr}(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^s) \underline{\underline{I}} + \frac{3}{2} A \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{s^{dev}} \right) \quad (4.6)$$

À cause de l'élasticité, (4.6) c'est une équation différentielle qui définit l'évolution de la contrainte en fonction du taux de déformation.

Le comportement du liquide est toujours décrit par la loi de Darcy :

$$(1 - f^s) \underline{w} = - \frac{k_l}{\mu} \underline{\text{grad}} p' \quad (4.7)$$

2.3 Équation d'équilibre

$$\text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{div}(\underline{\underline{\hat{\sigma}}}^s) - b \underline{\text{grad}} p' = 0 \quad (4.8)$$

où b est le coefficient de Biot qui est défini dans (2.21).

3. Etude du problème unidimensionnel incompressible

Notre objectif est de montrer l'influence de l'élasticité du solide sur les solutions obtenues au chapitre précédent. Une première modification apparaît dans la loi de comportement du solide (4.6) : la relation algébrique entre la contrainte et le taux de déformation devient une équation différentielle. Le problème devient donc instationnaire et l'élasticité caractérise le comportement transitoire. De même, les équations (4.3) à (4.5) conduisent à des équations de type diffusion satisfaite par la pression p^s . Comme la résolution analytique de ces équations de diffusion semble très difficile, nous avons étudié le cas où le matériau solide est totalement incompressible, aussi bien pour la partie élastique (coefficient de Poisson $\nu = 1/2$, $K_s = \infty$) et pour la partie viscoplastique. De toute manière, il est difficile de caractériser l'élasticité d'un matériau en cours de solidification. D'après cette hypothèse d'incompressibilité,

$1/K_s = 0$, $b = 1$, $\frac{D^s \rho_s}{Dt} = 0$ et l'équation (4.4) est la même qu'au chapitre précédent.

3.1 Problème aux limites

Nous avons pris le même échantillon que celui de l'exemple dans le chapitre 3 (la partie 2.1). Cet échantillon de milieu semi-solide est unidimensionnel de longueur L , son bord $x = 0$ est fixé ($v^s = 0$) et non-drainé ($w = 0$) et son autre bord est soumis à une vitesse de solide imposée ($v^s = V$) et à une condition aux limites drainée ($p^l = p$) (FIG.(3.1)).

Ainsi nous désirons étudier le comportement élastoviscoplastique de la phase solide avec la contrainte comme inconnue.

Dans ce cas unidimensionnel, le taux de déformation élastique (4.2) s'écrit :

$$D^{s^e} = tr(D^{s^e}) = \frac{1}{E'(f^s)} \frac{\partial \hat{\sigma}^s}{\partial t} \quad (4.9)$$

où :

$$E'(f^s) = \frac{E(f^s)}{1-\nu^2} = \frac{4}{3} E(f^s) \quad (4.9 \text{ bis})$$

E est le module d'Young et $\nu = 1/2$ est le coefficient de Poisson élastique.

L'objectif de ce chapitre est de proposer un modèle de milieu poreux élastoviscoplastique et de décrire son comportement à l'aide de solutions analytiques. Pour cette raison, nous proposons l'incompressibilité du matériau solide, ce qui nous permettra de résoudre le problème instationnaire à l'aide de fonctions hypergéométriques. La conservation de la masse pour les deux phases solide et fluide (4.3) et (4.4) dans ce cas unidimensionnel devient :

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + div(f^s v^s) = 0 \quad (4.10)$$

et

$$div[(1-f^s)w + v^s] = 0 \quad (4.11)$$

Dans le cas d'une déformation uniaxiale, à partir de la loi de comportement viscoplastique unidimensionnelle (2.32) et de la relation (4.9), la loi de comportement élastoviscoplastique du solide (4.6) s'écrit :

$$\frac{\partial v^s}{\partial x} = \left(\frac{\hat{\sigma}^s}{A_1} \right)^n + \frac{1}{E'} \frac{\partial \hat{\sigma}^s}{\partial t} \quad (4.12)$$

où :

$$A_1 = k^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{9B(f^s)} + \frac{4}{9A(f^s)} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \quad (4.12 \text{ bis})$$

En utilisant l'équation de Darcy (4.7) et l'équation d'équilibre (4.8) dans le cas unidimensionnel, on arrive à :

$$\frac{\partial \hat{\sigma}^s}{\partial x} + \frac{\mu}{k_1} (1 - f^s) w = 0 \quad (4.13)$$

En dérivant l'équation (4.13) puis en utilisant l'équation (4.11), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \hat{\sigma}^s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{k_1} \left(\frac{\partial v^s}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.14)$$

Ensuite en portant la loi de comportement du solide (4.12) dans l'équation (4.14), l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{\partial^2 \hat{\sigma}^s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{k_1} \left(\frac{\hat{\sigma}^s}{A_1} \right)^n - \frac{\mu}{k_1 E'} \frac{\partial \hat{\sigma}^s}{\partial t} = 0 \quad (4.15)$$

C'est une équation de type équation de la diffusion, Pour résoudre analytiquement nous avons négligé le troisième terme. Et donc nous pouvons remarquer que nous arrivons à la même

équation que dans le chapitre 2 pour le cas sans élasticité (équation (2.38)). Avec les hypothèses simplificatrices qui ont été faites, l'élasticité ne modifie pas l'équation différentielle par rapport à la variable d'espace.

À partir de la condition non-drainée ($w = 0$) et de l'équation d'équilibre (4.13), nous obtenons la condition aux limites sur le bord non-drainé :

$$\frac{\partial \hat{\sigma}^s}{\partial x} = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad (4.16)$$

La condition aux limites sur la partie solide est :

$$\int_0^L \frac{\partial v^s}{\partial x} dx = V \quad (4.17)$$

En prenant en compte (4.12), la condition aux limites (4.17) devient :

$$\int_0^L \left(\frac{\hat{\sigma}^s}{A_1} \right)^n dx + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{\hat{\sigma}^s}{E'} dx = V \quad (4.18)$$

Les équations (4.15), (4.16) et (4.18) conduisent à une équation différentielle du second ordre en espace avec deux conditions aux limites, l'inconnue étant la contrainte dans la phase solide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{\sigma}^s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{k_1} \left(\frac{\hat{\sigma}^s}{A_1} \right)^n = 0 \\ \frac{\partial \hat{\sigma}^s}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \int_0^L \left(\frac{\hat{\sigma}^s}{A_1} \right)^n dx + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{\hat{\sigma}^s}{E'} dx = V \end{array} \right. \quad (4.19)$$

L'influence de l'élasticité se traduit par une équation différentielle par rapport au temps. Ce terme de dérivée en temps ne concerne que la deuxième condition aux limites.

3.2 Le modèle sous forme adimensionnalisée

Pour écrire le système (4.19) sous une forme sans dimension, nous allons utiliser le même procédé que celui utilisé dans la partie 3 du chapitre 3 avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} x &= L \tilde{x} \\ v &= V \tilde{v} \quad , \quad w = V \tilde{w} \\ \hat{\sigma}^s &= C^* \tilde{\sigma}^s \quad , \quad p' = C^* \tilde{p}' \end{aligned} \quad (4.20)$$

où :

$$C^* = \left(\frac{V}{L} \right)^{\frac{1}{n}} A_1$$

- L'équation différentielle du second ordre pour la contrainte du solide (4.19) sous la forme sans dimension est :

$$\frac{C^*}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^s}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\mu C^{*n}}{k_1 A_1^n} \tilde{\sigma}^{s^n} = 0 \quad (4.21)$$

D'une autre façon :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^s}{\partial \tilde{x}^2} - R_1 \tilde{\sigma}^{s^n} = 0 \quad (4.22)$$

où :

$$R_1 = \frac{V^{\frac{n-1}{n}} L^{\frac{n+1}{n}} \mu}{A_1 k_1} = \frac{k_1^{\frac{1}{n}} \mu}{k_1} \left(\frac{1}{9B} + \frac{4}{9A} \right)^{-\frac{n+1}{2n}} V^{\frac{n-1}{n}} L^{\frac{n+1}{n}}$$

où R_1 est un nombre sans dimension défini précédemment (voir (3.7)).

➤ La forme sans dimension de l'équation (4.11) est :

$$\frac{V}{L} \frac{\partial \tilde{v}^s}{\partial \tilde{x}} = \left(\frac{C^*}{A_1} \right)^n \tilde{\sigma}^{s^n} + \frac{C^*}{E'} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}^s \quad (4.23)$$

ou d'une autre façon :

$$\frac{\partial \tilde{v}^s}{\partial \tilde{x}} = \tilde{\sigma}^{s^n} + \tau \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}^s \quad (4.24)$$

L'équation différentielle fait apparaître un temps de relaxation τ , qui est une autre caractéristique du problème :

$$\tau = \frac{L^{\frac{n-1}{n}} A_1}{V^{\frac{n-1}{n}} E'} = \frac{\mu L^2}{k_1 R_1 E'} \quad (4.24 \text{ bis})$$

➤ La troisième équation du système (4.19) sous une forme adimensionnalisée est :

$$\int_0^1 \tilde{\sigma}^{s^n} d\tilde{x} + \frac{\partial}{\partial t^*} \int_0^1 \tilde{\sigma}^s d\tilde{x} = 1 \quad (4.25)$$

où on a introduit une variable temporelle sans dimension :

$$t^* = \frac{t}{\tau}$$

À partir des équations (4.22) et (4.25), on trouve la forme sans dimension du problème aux limites (4.19). Elle ne dépend plus que des deux mêmes nombres sans dimension que dans le cas sans élasticité R_1 et n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^s}{\partial \tilde{x}^2} - R_1 \tilde{\sigma}^{s^n} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}^s}{\partial x}(0, t^*) = 0 \\ \int_0^1 \tilde{\sigma}^{s^n} d\tilde{x} + \frac{\partial}{\partial t^*} \int_0^1 \tilde{\sigma}^s d\tilde{x} = 1 \end{array} \right. \quad (4.26)$$

3.3 Résolution en espace

La forme particulière du problème spatio-temporel (4.26) permet une résolution en deux étapes. Dans un premier temps, on va résoudre l'équation différentielle du second ordre (4.26a) en ne tenant compte que de la première condition aux limites (4.26b). L'objectif est de se ramener à une équation différentielle en temps satisfaite par une constante d'intégration.

D'abord nous réalisons une première intégration de l'équation différentielle (4.26) :

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}^s}{\partial \tilde{x}} \right)^2 = \frac{2R_1}{n+1} \left(\tilde{\sigma}^{s^{n+1}} - c^{ste} \right)$$

La condition aux limites $\tilde{x} = 0$ permet d'interpréter la constante d'intégration comme la contrainte σ_0^s en $\tilde{x} = 0$:

$$\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}^s}{\partial \tilde{x}} \right)^2 = \frac{2R_1}{n+1} \left(\tilde{\sigma}^{s^{n+1}} - \sigma_0^{s^{n+1}} \right) \quad (4.27)$$

où :

$$\sigma_0^s(t^*) = \tilde{\sigma}^s(0, t^*) \quad (4.27 \text{ bis})$$

Pour caractériser les solutions de (4.27), nous faisons plusieurs changements de variable. Le premier changement de variable va normaliser la contrainte par rapport à sa valeur en $\tilde{x} = 0$:

$$\Sigma(\tilde{x}, t^*) = \frac{\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t^*)}{\sigma_0^s(t^*)} \quad (4.28)$$

Reportant (4.28) dans l'équation différentielle (4.27), on obtient une équation différentielle du premier ordre, où n'intervient qu'une seule constante d'intégration, notée $A(t^*)$:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{x}} = \pm \left[A(\Sigma^{n+1} - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

où :

$$\Sigma(0, t^*) = 1$$

$$A(t^*) = \frac{2\sigma_0^{s^{n-1}}(t^*)R_1}{n+1}$$

Pour résoudre l'équation différentielle (4.29) où apparaissent deux inconnues $\Sigma(\tilde{x}, t^*)$ et $\sigma_0^s(t^*)$, nous effectuons deux changements de variable pour $\tilde{x}$ et Σ , les nouvelles variables étant appelées h et Y :

$$\sqrt{A} \tilde{x} = -\Sigma h + c_1 \quad (4.30)$$

et :

$$Y = \Sigma^{n+1} \quad (4.31)$$

où c_1 est une constante d'intégration.

La transformation (4.30) permet de passer de la variable $\tilde{x}$ à la variable h :

$$\sqrt{A} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \Sigma} = - \left(h + \Sigma \frac{\partial h}{\partial \Sigma} \right) \quad (4.32)$$

La transformation (4.31) permet de passer de la variable Σ à la variable Y :

$$\frac{dY}{Y} = (n + 1) \frac{d\Sigma}{\Sigma} \quad (4.33)$$

En utilisant les inverses des équations (4.32) et (4.33), nous avons :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{x}} = \frac{\sqrt{A}}{-\left(h + (n + 1)Y \frac{\partial h}{\partial Y}\right)} \quad (4.34)$$

Maintenant nous pouvons transformer l'équation (4.29) pour $\Sigma(\tilde{x})$ en une équation différentielle pour $h(Y)$:

$$h + (n + 1)Y \frac{\partial h}{\partial Y} = \mp \frac{1}{(Y - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.35)$$

Notons que le changement (4.30) et (4.31) a permis d'éliminer la constante d'intégration A (ou σ_0^s). Des deux équations différentielles (4.35) que nous obtenons, une seule est intéressante. Il s'agit du cas où le deuxième membre de l'équation (4.35) est négatif. La solution de cette équation est obtenue par MAPLE, elle s'exprime à partir d'une fonction hypergéométrique $H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1-Y\right)$. Cette fonction a déjà été utilisée au chapitre précédent et introduite en annexe B :

$$h(Y) = \frac{1}{(n + 1)Y^{\frac{1}{n+1}}} \left[-2(Y - 1)^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1-Y\right) + c_2(n + 1) \right] \quad (4.36)$$

où c_2 est une constante d'intégration.

Maintenant que l'équation différentielle du premier ordre a été résolue, on va revenir aux variables initiales $\tilde{x}$ et Σ : Nous portons l'équation (4.36) dans l'équation (4.30), et nous arrivons à cette équation :

$$\frac{\sqrt{A}(n+1)}{2}(\tilde{x} + c_3) = (Y-1)^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1-Y\right) \quad (4.37)$$

où apparaît une constante d'intégration :

$$c_3 = \left(\frac{c_2 - c_1}{\sqrt{A}} \right)$$

Or les variables $\Sigma(\tilde{x}, t^*)$ et $Y(\tilde{x}, t^*)$ ont été définies en sorte que :

$$\Sigma(0, t^*) = 1, \quad Y(0, t^*) = 1 \quad (4.38)$$

La condition (4.38) permet alors de définir la constante d'intégration c_3 . L'équation (4.37) devient :

$$\frac{\sqrt{A}(n+1)}{2}\tilde{x} = (\Sigma^{n+1} - 1)^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma^{n+1}\right) \quad (4.39)$$

où :

$$A = \frac{2\sigma_0^{s^{n-1}}(t^*)R_1}{n+1}, \quad R_1 = \frac{\mu V^{\frac{n-1}{n}} L^{\frac{n+1}{n}}}{A_1 k_1}$$

L'équation (4.39) définit complètement l'évolution spatiale de la contrainte $\Sigma(\tilde{x})$. En effet (4.39) donne explicitement le produit $\tilde{x}\sqrt{A}$ en fonction de la seule variable Σ . L'inversion numérique de (4.39) permettra de définir la contrainte Σ en fonction du produit $\tilde{x}\sqrt{A}$, $A(t^*)$ étant une constante d'intégration qui reste à déterminer.

3.4 Retour sur le problème sans élasticité

La résolution de l'équation différentielle (4.26) a permis de décrire l'évolution spatiale de la contrainte $\Sigma(\tilde{x}, t^*)$ grâce à (4.39). Comme on a tenu compte d'une condition aux limites, il ne reste qu'une inconnue à déterminer, notée A , à porter de la seconde condition aux limites. Pour faciliter la compréhension, on se limitera d'abord à l'étude du cas sans élasticité, qui avait été étudié au chapitre précédent pour une approche en vitesse. Dans ce cas, la seconde condition aux limites (4.26c) s'écrit :

$$\int_0^1 \tilde{\sigma}^{s^n} d\tilde{x} = 1 \quad (4.40)$$

On effectue la transformation $\tilde{\sigma}^s \rightarrow \Sigma$ à partir de (4.28) et on tient compte de l'équation différentielle (4.29). La deuxième condition aux limites (4.40) devient :

$$\frac{\sigma_0^{s^n}}{\sqrt{A}} \int_1^{\Sigma_m} \frac{\Sigma^n d\Sigma}{\sqrt{\Sigma^{n+1} - 1}} = 1 \quad (4.41)$$

où on appelle Σ_m la valeur de la contrainte Σ en $\tilde{x}=1$ (en pratique Σ_m sera le maximum de $\Sigma(\tilde{x})$).

On effectue le changement $Y = \Sigma^{n+1}$. De même on posera :

$$Y_m = \Sigma_m^{n+1} = Y(\tilde{x}=1)$$

L'intégrale dans (4.41) peut être déterminée complètement :

$$\int_1^{\Sigma_m} \frac{\Sigma^n d\Sigma}{\sqrt{\Sigma^{n+1} - 1}} = \frac{1}{n+1} \int_1^{Y_m} \frac{dY}{\sqrt{Y - 1}} = \frac{2}{n+1} \sqrt{Y_m - 1}$$

Ce qui permet d'obtenir Y_m puis Σ_m en fonction de la constante d'intégration σ_0^s .

$$Y_m = 1 + \left(\frac{n+1}{2\sigma_0^{s^n}} \right)^2 A \quad (4.42)$$

En prenant en compte $A = \frac{2\sigma_0^{s^{n-1}} R_1}{n+1}$, on obtient une relation entre les deux contraintes Σ_m et σ_0^s :

$$\Sigma_m = \left(1 + \frac{(n+1)R_1}{2\sigma_0^{s^{n+1}}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.43)$$

Il reste à tenir compte de la résolution de l'équation en espace (4.39). Si on l'applique pour $\tilde{x}=1$, on trouve :

$$\sigma_0^s = \left\{ \frac{2}{(n+1)R_1} (\Sigma_m^{n+1} - 1) \right\}^{\frac{1}{n-1}} \left\{ H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right\}^{\frac{2}{n-1}} \quad (4.44)$$

Deux équations (4.43) et (4.44) ont été obtenues pour les deux inconnues Σ_m et σ_0^s . L'équation (4.43) permet d'éliminer Σ_m et de se ramener le problème à une équation scalaire pour l'inconnue σ_0^s (ou par l'inconnue Z) ;

$$1 - Z H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; -\frac{(n+1)R_1}{2} Z^{\frac{n+1}{n}}\right) = 0 \quad (4.45)$$

où :

$$Z = \sigma_0^{s^{-n}}$$

Nous avons résolu l'équation (4.45) numériquement par MAPLE pour plusieurs valeurs du nombre sans dimension R_1 et nous avons déterminé la contrainte σ_0^s . Puis, nous avons résolu l'équation (4.39) par MAPLE, pour déterminer analytiquement la contrainte dans la phase

solide $\tilde{\sigma}^s$ en fonction de $\tilde{x}$ pour différentes valeurs du nombre R_1 , allant de $R_1=10^{-4}$ à $R_1=10^4$. Les profils de contrainte obtenus sont présentés sur les figures suivantes pour $n=6$: FIG.(4.1), FIG.(4.2), FIG.(4.3), FIG.(4.4), FIG.(4.5), FIG.(4.6), FIG.(4.7), FIG.(4.8)et FIG.(4.9).

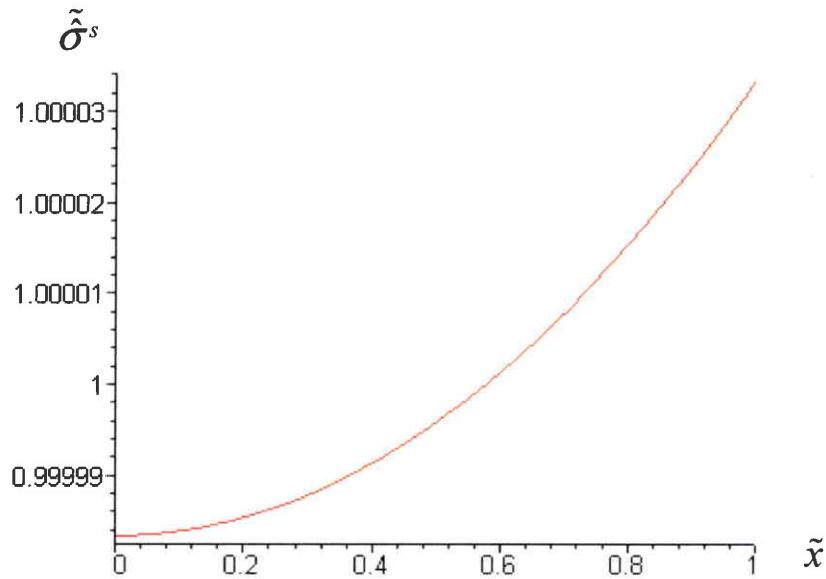


FIG.(4.1) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^{-4}$.

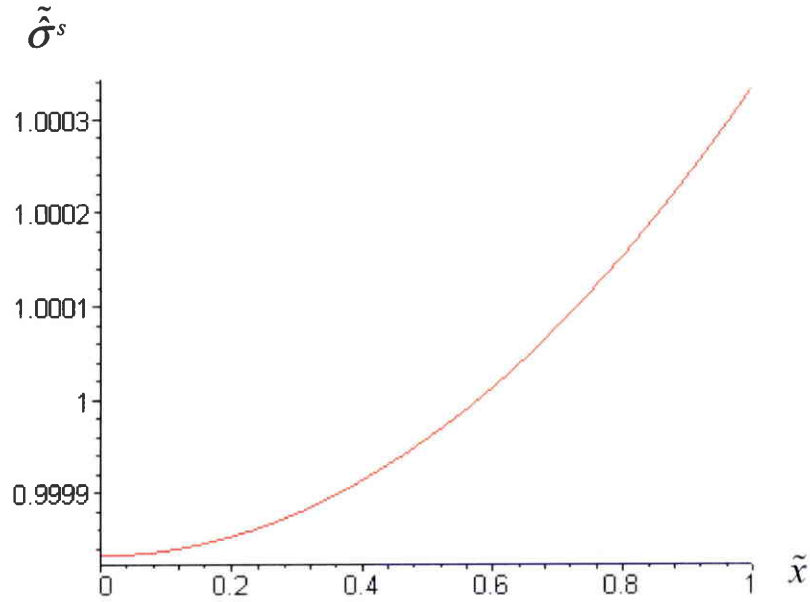


FIG.(4.2) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^{-3}$.

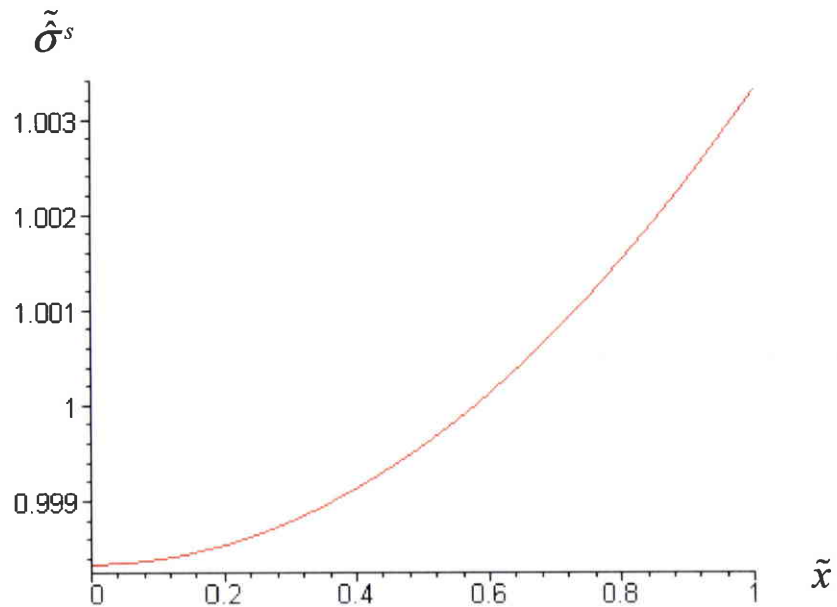


FIG.(4.3) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^{-2}$.

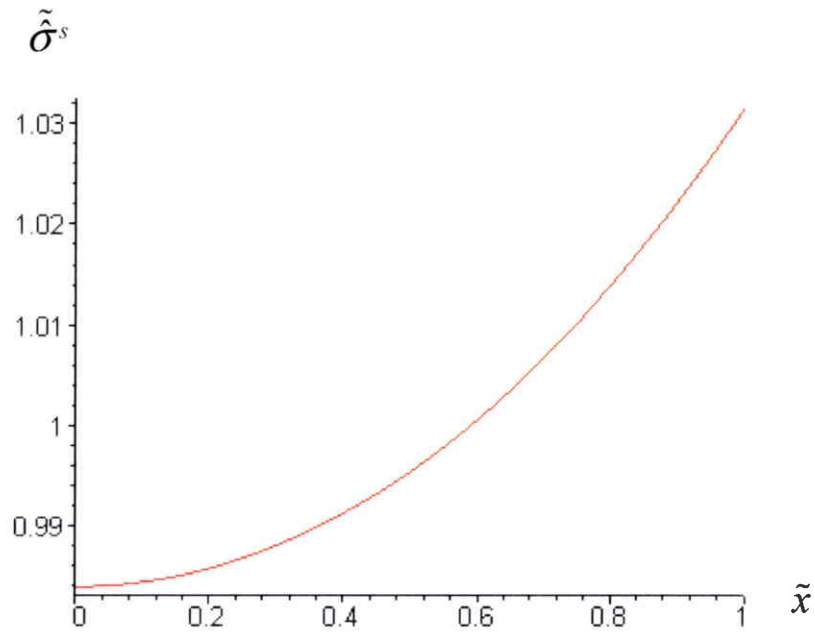


FIG.(4.4) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^{-1}$.

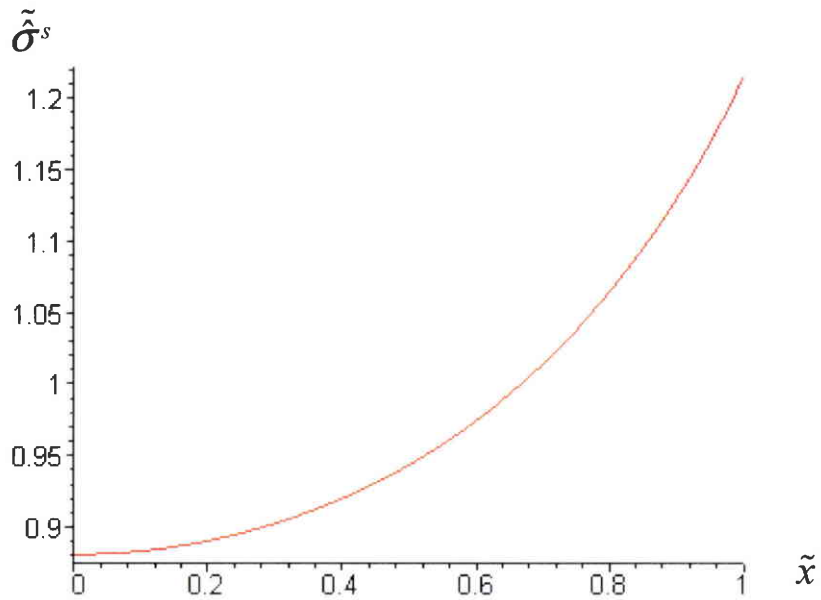


FIG.(4.5) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 1$.

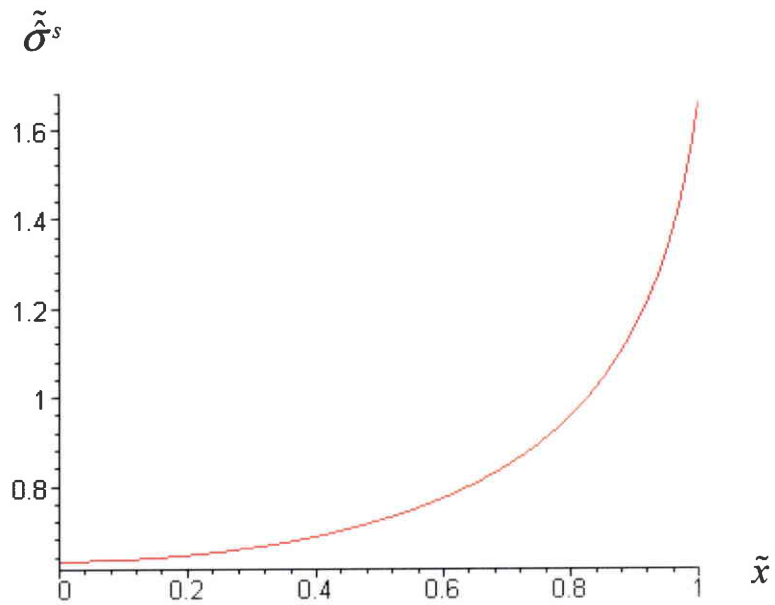


FIG.(4.6) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_l = 10$.

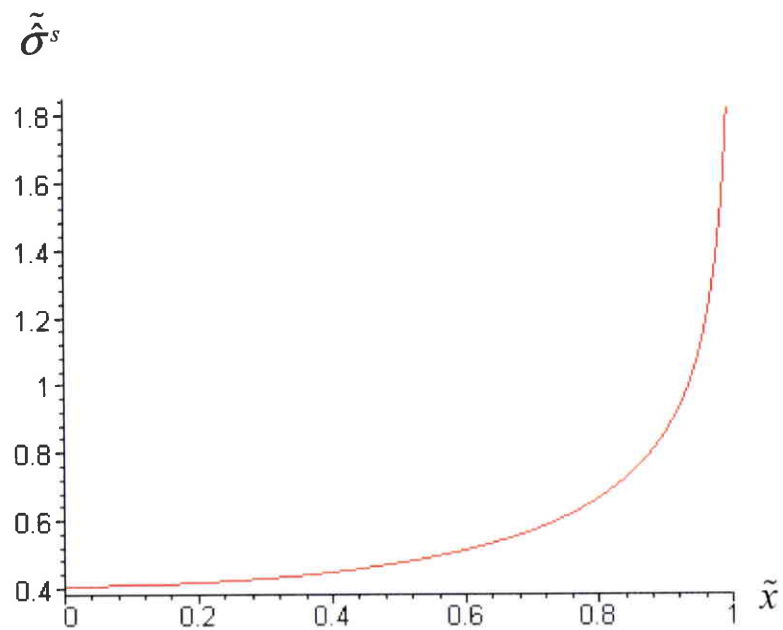


FIG.(4.7) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_l = 10^2$.

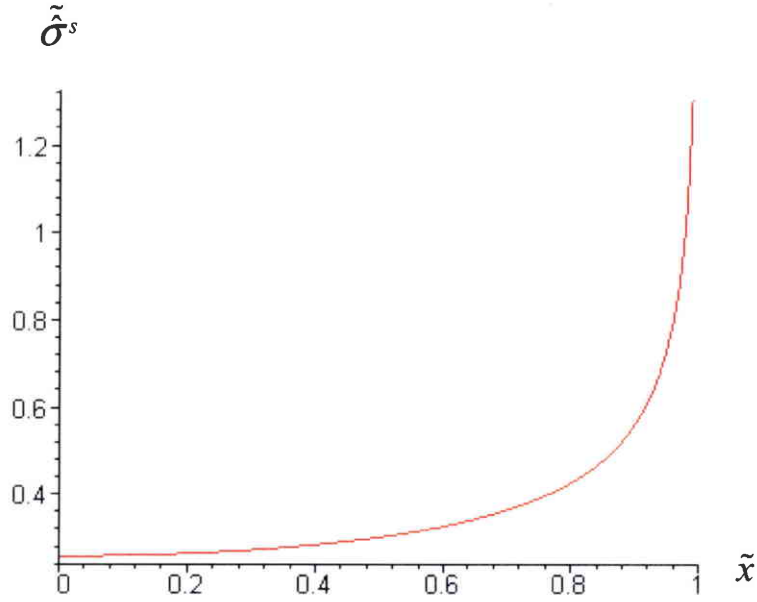


FIG.(4.8) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^3$.

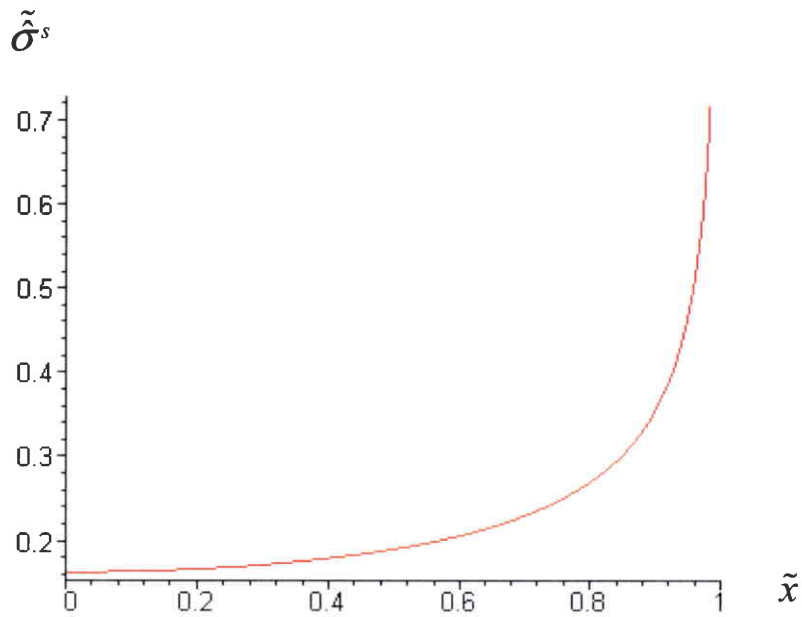


FIG.(4.9) La contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^4$.

Les résultats sont tout à fait cohérents avec ceux du chapitre précédent. Pour de faibles vitesses ($10^{-4} \leq R_1 \leq 10^{-1}$), la contrainte dans le solide est à peu près uniforme. On retrouve une propriété déjà établie : à faible vitesse, l'écoulement du fluide n'a pas d'influence sur l'état de contrainte du solide. À partir de $R_1 = 1$, on obtient des variations plus importantes de la contraintes $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x})$. Lorsque la vitesse devient plus grande ($R_1 = 10^2$ à 10^4), la contrainte est à peu près constante près du bord non drainé et il y a une forte localisation des efforts près du bord drainé.

À partir de la connaissance de la contrainte, on peut retrouver la vitesse du solide $\tilde{v}^s$ (cf (4.24)).

$$\tilde{v}^s(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} \tilde{\sigma}^{s^n} d\tilde{x} \quad (4.46)$$

En prenant en compte les équations (4.28), (4.29) et (4.31), la vitesse du solide (4.46) devient :

$$\tilde{v}^s(\tilde{x}) = \frac{2\sigma_0^{s^n}}{\sqrt{A}(n+1)} (\Sigma^{n+1} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

D'une autre façon :

$$\tilde{v}^s(\tilde{x}) = \left[\frac{2}{(n+1)R_1} \left(\tilde{\sigma}^{s^{n+1}} - \sigma_0^{s^{n+1}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

Et à partir des équations (4.27) et (4.47), nous avons :

$$\tilde{v}^s(\tilde{x}) = \pm \frac{1}{R_1} \frac{\partial \tilde{\sigma}^s}{\partial \tilde{x}} \quad (4.48)$$

Nous avons tracé les courbes de la vitesse de la phase solide $\tilde{v}^s$ pour différentes valeurs du nombre sans dimension R_1 , et donc pour différentes valeurs de la vitesse imposée V . Nous

avons obtenu les mêmes solutions que dans la partie 4 du chapitre précédent où nous avons résolu le problème aux limites de vitesse.

3.5 Étude numérique du problème élastoviscoplastique

On revient maintenant dans le cas avec l'élasticité, où la deuxième condition aux limites (4.26c) est une équation différentielle par rapport au temps sans dimension t^* .

D'après (4.39), on a vu que le champ de contrainte $\Sigma(\tilde{x})$ est une fonction de $\tilde{x}$ et d'une constante d'intégration A , qui maintenant dépend du temps.

En passant de l'inconnue $\tilde{\sigma}^s$ à Σ par le changement (4.28) et en tenant compte de l'équation différentielle (4.29), la deuxième condition aux limites (4.26c) s'écrit :

$$\frac{\sigma_0^{s^n}}{\sqrt{A}} \int_1^{\Sigma_m} \frac{\Sigma^n d\Sigma}{\sqrt{\Sigma^{n+1} - 1}} + \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{\sigma_0^s}{\sqrt{A}} \int_1^{\Sigma_m} \frac{\Sigma d\Sigma}{\sqrt{\Sigma^{n+1} - 1}} \right] = 1 \quad (4.49)$$

On a donc trouvé une équation différentielle scalaire (4.49) satisfaite pour la constante d'intégration $\sigma_0^s(t^*) = \tilde{\sigma}^s(0, t^*)$.

Pour faciliter le calcul des deux intégrales dans (4.49), on introduit une nouvelle variable :

$$z(\tilde{x}, t^*) = Y - 1 = \Sigma^{n+1} - 1 \quad (4.50)$$

$$z_m(t^*) = Y_m - 1 = \Sigma_m^{n+1} - 1 = z(1, t^*) \quad (4.51)$$

On transforme (4.48) en :

$$\frac{\sigma_0^{s^n}}{\sqrt{A}(n+1)} \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{\sigma_0^s}{\sqrt{A}(n+1)} \int_0^{z_m} \frac{(z+1)^{\frac{1-n}{1+n}} dz}{\sqrt{z}} \right] = 1 \quad (4.52)$$

En effectuant les intégrales à l'aide de MAPLE dans l'équation (4.52) et en utilisant (4.51) nous avons :

$$\frac{\sqrt{2} \sigma_0^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{R_1}} (\Sigma_m^{n+1} - 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dt^*} \left[\frac{\sqrt{2} \sigma_0^{\frac{3-n}{2}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{R_1}} (\Sigma_m^{n+1} - 1)^{\frac{1}{2}} H\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right] = 1 \quad (4.53)$$

Ainsi nous avons obtenu une équation (4.53) avec deux inconnues Σ_m et σ_0^s .

Il est facile d'éliminer σ_0^s à partir de (4.39) pour $\tilde{x}=1$, en tenant compte de $\Sigma_m = \Sigma(\tilde{x}=1)$.

Nous arrivons ainsi à une seule équation différentielle pour $\Sigma_m(t^*)$:

$$\left\{ \frac{2}{(n+1) R_1} (\Sigma_m^{n+1} - 1) \right\}^{\frac{n}{n-1}} \left\{ H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right\}^{\frac{n+1}{n-1}} + \frac{d}{dt^*} \left[\left\{ \frac{2}{(n+1) R_1} (\Sigma_m^{n+1} - 1) \right\}^{\frac{1}{n-1}} \left\{ H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right\}^{\frac{3-n}{n-1}} \left\{ H\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right\} \right] = 1$$

Que nous pouvons écrire sous cette forme :

$$F_1(\Sigma_m) + \frac{d}{dt^*} F_2(\Sigma_m) = 0 \quad (4.54)$$

avec :

$$F_1 = \left\{ \frac{2}{(n+1) R_1} (\Sigma_m^{n+1} - 1) \right\}^{\frac{n}{n-1}} \left\{ H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right\}^{\frac{n+1}{n-1}} - 1$$

$$F_2 = \left\{ \frac{2}{(n+1) R_1} (\Sigma_m^{n+1} - 1) \right\}^{\frac{1}{n-1}} \left\{ H\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right\}^{\frac{3-n}{n-1}} \left\{ H\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{n+1}; \frac{3}{2}; 1 - \Sigma_m^{n+1}\right) \right\}$$

À l'aide du logiciel MAPLE, nous avons résolu numériquement l'équation différentielle (4.54), pour obtenir la contrainte maximale $\Sigma_m(t^*)$ en fonction du temps.

Les données du calcul numérique présentées ici sont $\Sigma_m(0)=2$ MPa, $n=6$, la viscosité dynamique du liquide $\mu=1$ MPa.s, la perméabilité $k_l=1$ mm², la longueur $L=1000$ mm, $b=1$, $E'=157333.3$ MPa.

Ces données ont été choisies de façon arbitraire. De toute manière, l'analyse dimensionnelle a montré que les équations sans dimension ne dépendent que de deux paramètres sans dimension R_l et n . Une modification des données ne modifiera pas le comportement global de l'échantillon, mais seulement les valeurs du nombre sans dimension R_l et du temps de relaxation τ .

La contrainte en $\tilde{x}=0$, $\sigma_0^s(t^*)$ est ensuite obtenue à partir de (4.39) écrite pour $\tilde{x}=1$. À partir de la contrainte $\sigma_0^s(t^*)$, nous avons résolu analytiquement (4.39) pour obtenir la contrainte normalisée $\Sigma(\tilde{x},t^*)$. Enfin on revient à la contrainte dans le solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x},t^*)$ grâce à (4.28).

L'évolution de la contrainte $\tilde{\sigma}^s$ en fonction de $\tilde{x}$ et t est présentée sur les figures (FIG.(4.10), FIG.(4.11), FIG.(4.12), FIG.(4.13), FIG.(4.14), FIG.(4.15), FIG.(4.16), FIG.(4.17), FIG.(4.18)).

Le calcul numérique montre que la contrainte $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x},t)$ converge toujours vers la solution stationnaire lorsque t tend vers l'infini. Pour de petites valeurs de R_l ($R_l \leq 10^{-1}$), cette solution stationnaire correspond à une contrainte du solide à peu près uniforme : on retrouve le fait que pour des vitesses faibles, le liquide n'a pas d'influence sur le comportement global. Pour des valeurs de R_l plus grandes, la solution stationnaire n'est plus uniforme et elle est de plus en plus localisée. Au fur et à mesure qu'on augmente la vitesse : on retrouve le phénomène de localisation dû à l'évacuation du liquide par le bord drainé.

On a reporté sur les graphiques l'évolution en fonction du temps et, dans chaque cas, le temps de relaxation, qui est proportionnel à $\frac{1}{R_l}$. Les résultats numériques montrent que la convergence vers la solution stationnaire est atteinte pour un temps t du même ordre que le temps de relaxation τ .

4. Conclusion

Dans ce chapitre, on a abordé l'influence de l'élasticité sur le comportement d'un milieu poreux viscoplastique. Au prix d'une simplification, nous avons établi un modèle unidimensionnel, qui peut être résolu de manière analytique. Deux nombres caractérisent ce modèle. D'une part, il y a un nombre sans dimension R_l , analogue au nombre R défini précédemment, qui augmente avec la vitesse et qui prend en compte le rapport des viscosités du liquide et du solide. D'autre part, le modèle fait apparaître un temps de relaxation τ qui est proportionnel à $\frac{1}{R_l}$. Donc, plus la vitesse imposée est grande, plus la convergence vers l'état stationnaire est rapide.

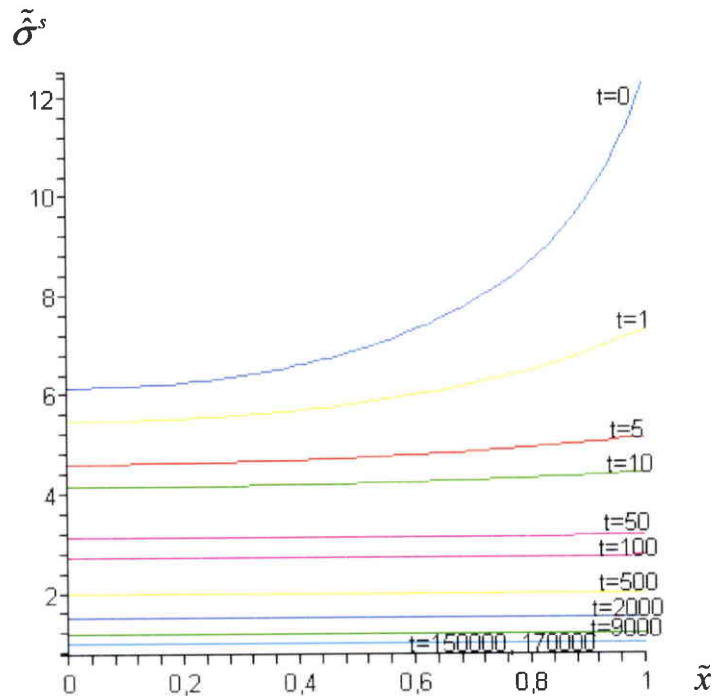


FIG.(4.10) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t)$ pour le nombre sans dimension $R_l = 10^{-4}$, $\tau \approx 75000 s$.

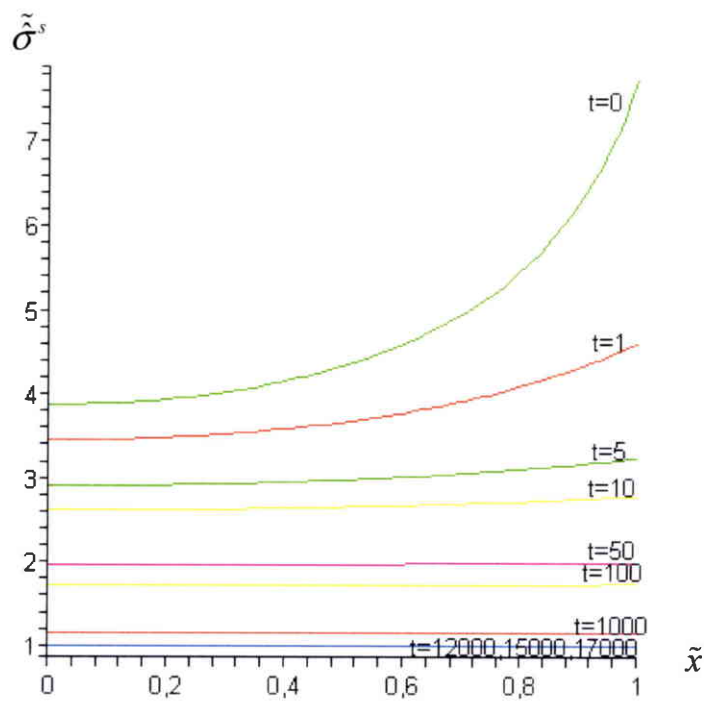


FIG.(4.11) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x},t)$ pour le nombre sans dimension $R_l = 10^{-3}$, $\tau \simeq 7500\,s$.

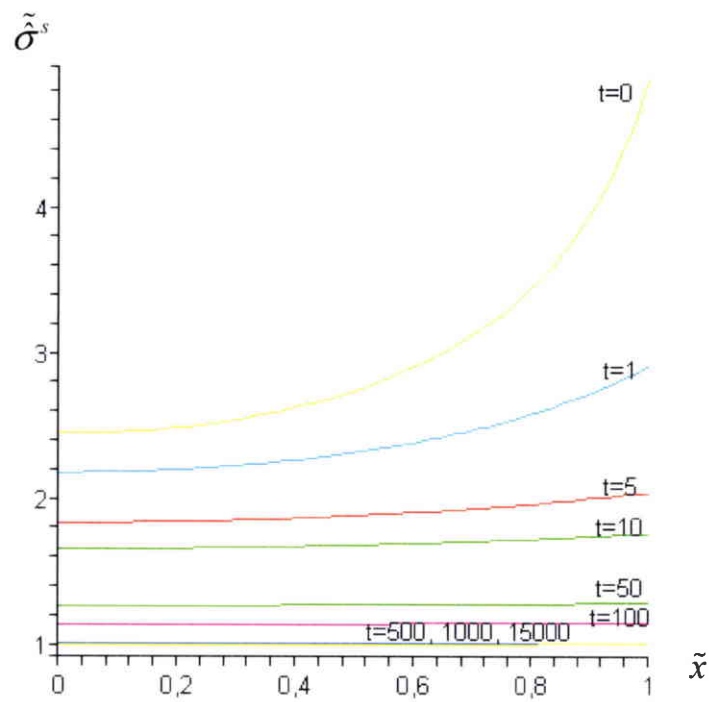


FIG.(4.12) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x},t)$ pour le nombre sans dimension $R_l = 10^{-2}$, $\tau \simeq 750\,s$.

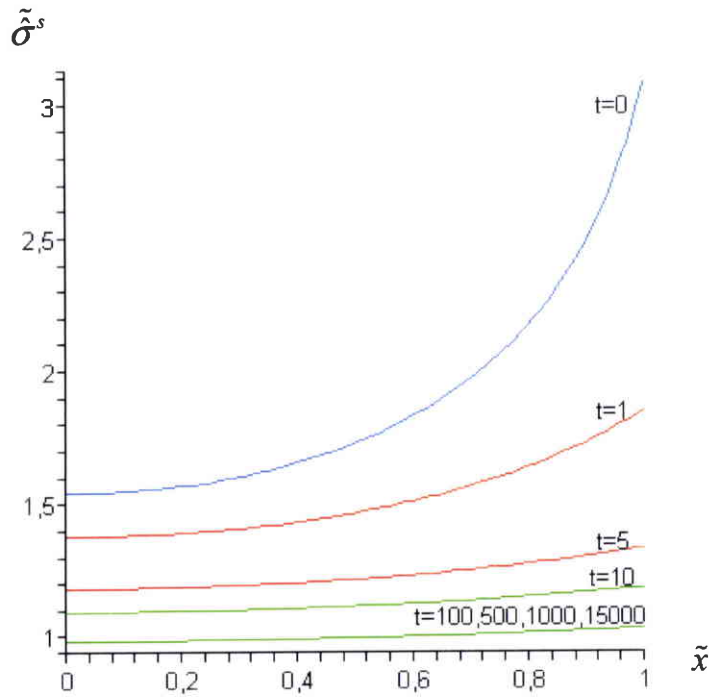


FIG.(4.13) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^{-1}$, $\tau \simeq 75s$.

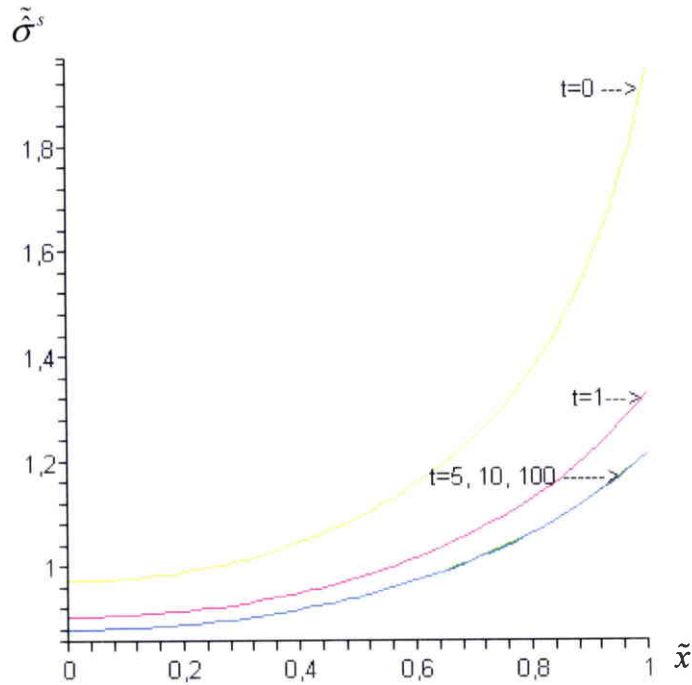


FIG.(4.14) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 1$, $\tau \simeq 7s$.

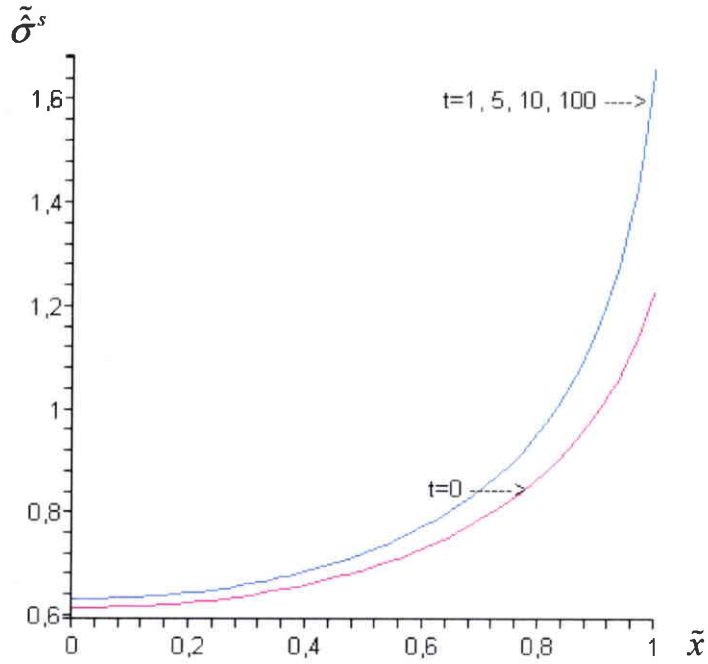


FIG.(4.15) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t)$ pour le nombre sans dimension $R_l = 10$, $\tau \simeq 7.10^{-1} s$.

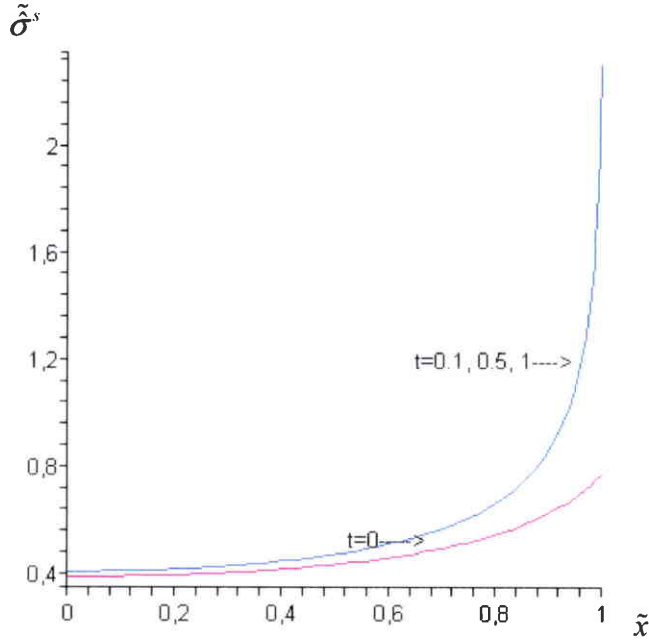


FIG.(4.16) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t)$ pour le nombre sans dimension $R_l = 10^2$, $\tau \simeq 7.10^{-2} s$.

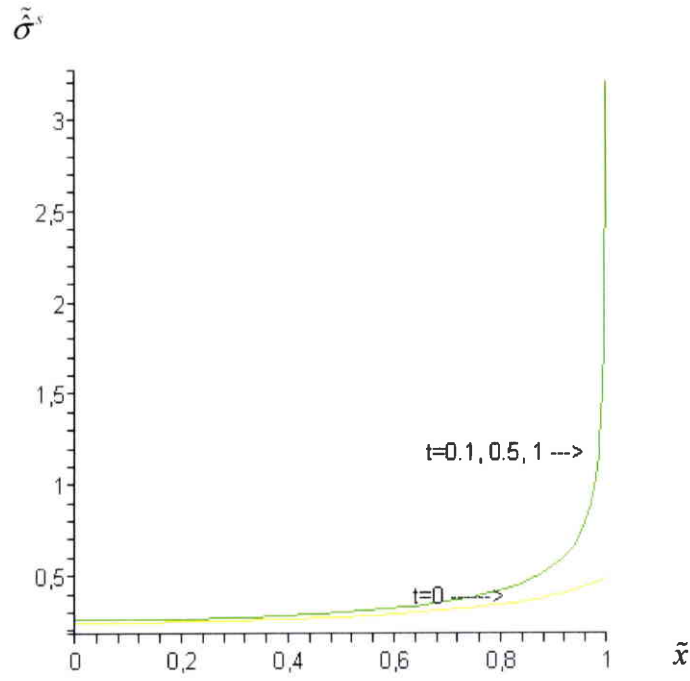


FIG.(4.17) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^3$, $\tau \approx 7.10^{-3} s$.

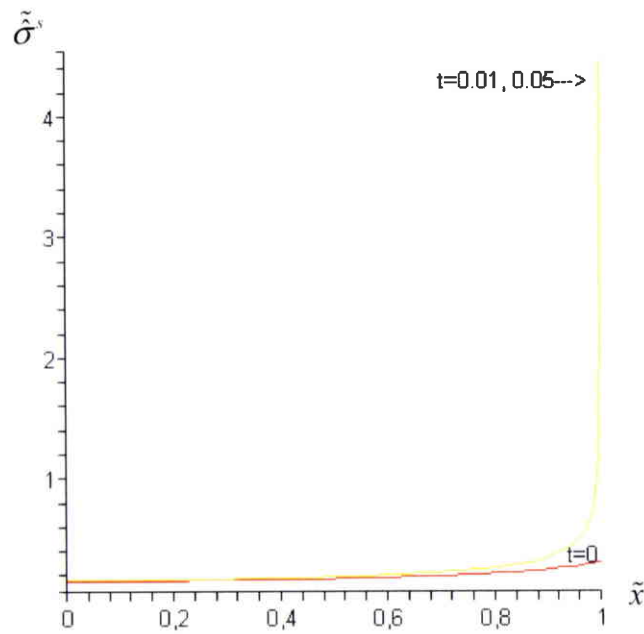


FIG.(4.18) La variation de contrainte du solide $\tilde{\sigma}^s(\tilde{x}, t)$ pour le nombre sans dimension $R_1 = 10^4$, $\tau \approx 7.10^{-4} s$.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette thèse a permis de décrire qualitativement les mécanismes qui régissent l'écoulement interstitiel dans un milieu semi-solide, ainsi que son influence sur le comportement du squelette. Notre travail repose sur un modèle de solide viscoplastique compressible couplé à l'écoulement interstitiel d'un liquide, chaque constituant étant incompressible. Le point central de notre analyse est un nombre sans dimension, noté R , qui prend en compte les viscosités des deux constituants et la vitesse caractéristique du problème.

Pour comprendre la nature de ces modèles biphasiques, nous avons étudié le cas d'une déformation unidimensionnelle. Nous avons montré que l'étude de ces problèmes unidimensionnels peut être menée de manière complètement analytique, même si la solution est assez complexe. L'analyse de cette solution exacte fait apparaître deux types de comportements du milieu. À faible vitesse, le fluide n'a pas d'influence sur la réponse du squelette solide. À grande vitesse, l'écoulement n'est pas homogène et peut même se localiser près des bords où le fluide peut s'écouler. Cette localisation de l'écoulement induit une localisation de la déformation, ce qui peut favoriser l'apparition locale d'une rupture du squelette.

L'évolution de la porosité en fonction de la déformation permettrait de caractériser l'apparition de la rupture du squelette. Cette phase n'a pas été abordée dans cette thèse, car il faudrait alors résoudre le problème en vitesse avec une porosité variant dans l'espace, ce qui ne peut être traité de manière analytique. La prévision de la rupture du squelette est évidemment l'une des principales perspectives ouvertes par notre travail, mais cela ne pourra être mené à bien qu'à l'aide d'un traitement numérique des équations différentielles.

L'élasticité du squelette a été prise en compte dans le quatrième chapitre. Par rapport au cas sans élasticité, l'analyse dimensionnelle met en évidence un paramètre supplémentaire, qui est un temps de relaxation. Au prix d'une simplification, le problème de l'échantillon unidimensionnel a pu être résolu analytiquement, avec un solide poreux élastoviscoplastique saturé. La solution analytique montre que ce temps de relaxation représente le temps de convergence vers un état stationnaire, obtenu en négligeant les effets élastiques. Dans ce cas-là aussi, il ne semble pas possible de pousser plus loin cette analyse sans passer par une résolution numérique de type éléments finis ou différences finies.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ABI 1992] Abis, S. (1992). Industrial production of semi-solid aluminium alloys billets by passive stirring (PS). 2nd International Conference On Semi-Solid Processing of Alloys and Composites. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge. Addendum.
- [ABO 1985] Abouaf, M. (1985). Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées-Approche par la mécanique des milieux continus, Thèse d'Etat, INPG, Grenoble.
- [ABO 1986] Abouaf, M. et Chenot, J.L. (1986). Modélisation numérique de la déformation à chaud de poudres métalliques. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée. 5, p. 121-140.
- [AUR 1991] Auriault, J.-L. (1991). Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible? International Journal of Engineering Science. 29. p. 785-795.
- [BAR 2000] Barbé, J.C., Perez, M. et Papoular, M. (2000). Microstructure and viscosity of semi-solid mixtures. Journal of physics Condensed matter. 12, p. 2567-2577.
- [BOU 1998] Bourdouxhe, M., Habraken, A.-M. et Pascon, F. (1998). Mathematical modelisation of beam blank casting in order to optimise the mould taper, in : 3rd European Conference on Continuous Casting, October, p. 20-23.
- [BOW 1976] Bowen, R.M. (1976). Continous Physics III-Mixture Theory, dans A.C. Eringen, Academic Press, New York, p. 1-127.
- [CHA 1994] Chabchoub, F., Argyropoulos, S.A. et Mostaghimi, J. (1994). Mathematical modelling and experimental measurements on the horizontal Ohno continuous casting process for pure tin. Canadian Metallurgical Quarterly. 33, p. 73-88.
- [CHA 1985] Charreyron, P.O. et Flemings, M.C. (1985). Rheology of semi-solid dendritic Sn-Pb alloys at low strain rates : application to forming process. International Journal of Mechanical Science. 27, p. 781-791.
- [CHE 1990] Chenot, J.L., Bay, F. et Fourment, L. (1990). Finite element simulation of metal powder forming. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 30, p. 1649-1674.
- [COU 1991] Coussy, O. (1991). Mécanique des Milieux Poreux. Technip, Paris.

- [DOM 2002] Domieux, L. et Bourgeois, E. (2002). Introduction à la micromécanique des milieux poreux. Presses de l'école nationale des pontes et chaussées.
- [FLE 1976] Flemings, M.C., Riek, R.G. et Young, K.P. (1976). Rheocasting. *Materials Science and Engineering*. 25, p. 103-117.
- [FLE 1991] Flemings, M.C. (1991). Behavior of metal alloys in the semi-solid state. *Metallurgical and Materials Transactions B*. 22, p. 269-293.
- [FOR 2001] Forchheimer, P. (2001). Wasserbewegung durch boden, *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. 45, p. 1782-1901.
- [GAB 1992] Gabathuler, J.P., Barras, D., Krahenbuhl, Y. et Weber, J.C. (1992). Evaluation of various processes for the production of billets with thixotropic properties. 2nd International Conference On Semi-Solid Processing of Alloys and Composites. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, p. 33-46.
- [GEB 1999] Gebelin, J.C., Suéry, M. et Favier, D. (1999). Characterisation of the Rheological Behaviour in the Semi-Solide State of Grain-Refined AZ91 Magnesium Alloys. *Materials Science and Engineering*. A272, p. 134-144.
- [GEB 2000a] Gebelin, J.C. (2000). Etude expérimentale et simulation numérique du comportement de l'alliage de magnésium AZ91 à l'état semi-solide, Thèse, INPG, Grenoble.
- [GEB 2000b] Gebelin, J.C., Geindreau, C., Orgéas, L., Royer, P., Favier, D. et Auriault, J.L. (2000). Influence of liquid flow through the solid skeleton on the overall deformation of metallic alloys in semi-solid state, dans G.L. Chiarmetta et M.Rosso, *Proc. of 6th ICSSPAC*, Edimet, Brescia, p. 155-160.
- [GEI 1999] Geindreau, C. et Auriault, J.-L. (1999). Investigation of the viscoplastic behaviour of alloys in the semi-solid state by homogenization. *Mechanics of Materials*. 31, p. 535-551.
- [GRI 1976] Grill, A., Sorimachi, K. et Brimacombe, J.K. (1976). Heat flow, gap formation and break-outs in the continuous casting of steel slabs, *Metallurgical Transactions B*. 7, p. 177.
- [HEI 2003] Heinrich, A. (2003). Modélisation thermomécanique de la coulée continue d'acier en deux dimension, Thèse, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [HEN 1965] Henzel, J.G. et Keverian, J. (1965). The theory and application of a digital computer in predicting solidification patterns. *Journal. Met.* 5, p. 83.
- [HUE 2000a] Huespe, A.E., Cardona, A. et Fachinotti, V. (2000). Thermomechanical model of a continuous casting process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 182, p. 439-455.

- [HUE 2000b] Huespe, A.E., Cardona, A., Nigro, N. et Fachinotti, V. (2000). Visco-plastic constitutive models of steel at high temperature. *Journal of Materials Processing Technology*. 102, p. 143-152.
- [IMB 1984] Imbert, J.F. (1984). *Analyse des structures par éléments finis*, Ecole Nationale Supérieure De l'Aéronautique et de l'Espace. Cepadues editions.
- [JAM 1997] James, B. Seaborn. (1997). *Hypergeometric Functions and Their Applications*. Springer-Verlag.
- [JOL 1976] Joly, P.A. et Mehrabian, R. (1976). The Rheology of a Partially Solid Alloy. *Journal of Materials Science*. 11, p. 1393-1418.
- [KAU 2000] Kaufmann, H., Wabusseg, H. et Uggowtzer, P.J. (2000). Metallurgical and processing aspect of the NRC semi-solid casting technology Aluminium. 76, p. 70-75.
- [KEL 1988] Kelly, J.E., Michalek, K.P., O'Connor, T.G., Thomas, B.G., et Dantzing, J.A. (1988). Initial development of thermal and stress fields in continuously cast steel billet. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 19, p. 2589-2602.
- [KEN 1988] Kenney, M.P. et al. (1988). Semisolid metal casting and forging. *Metals Handkook*, 9^e edition, ASM International, Metals Park, Etats-Unis. 15, p. 327-338.
- [KOZ 1992] Kozlowski, P.F., Thomas, B.G., Azzi, J.A. et Wang, H. (1992). Simple constitutive equations for steel at high temperature. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 23, p. 903-918.
- [KRI 1982] Kristiansson, J.O. (1982). Thermal stresses in the early stage of solidification of steel. *Journal Thermal Stresses*. 5, p. 315-330.
- [KRI 1984] Kristiansson, J.O. (1984). Thermomechanical behavior of the solidifying shell within continuous-casting billet molds-a numerical approach. *Journal of Thermal Stresses*. 7, p. 209.
- [KUM 1993] Kumar, P., Martin, C.L. et Brown, S.B. (1993). Shear rate thickening flow behaviour of semisolid slurries. *Metallurgical. Transations A*. 24, p. 1107-1116.
- [KUM 1994] Kumar, P., Martin, C.L. et Brown, S.B. (1994). Constitutive modeling and characterization of the flow behavior of semi-solid metal alloy slurries : Part I. The flow reponse. *Acta Metallurgica et Materialia*. 42, p. 3595-3602.
- [LAL 1985] Lalli, A. (1985). A model for deformation and segregation of solid-liquid mixtures. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 16, p. 1393-1403.
- [LEW 1998] Lewis, R.W. et Schrefler, B.A. (1998). *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. Wiley.

- [LOU 1995] Loué, W.R. et Suéry, M. (1995). Microstructural evolution during partial remelting of Al-Si7Mg alloys. *Materials Science and Engineering A*. 203, p. 1-13.
- [LOU 1993] Louhenkilpi, S., Laitinen, E. et Ninemine, R. (1993). Real-time simulation of heat transfer in continuous casting. *Metallurgical Transactions B*. 24, p. 685.
- [MAR 1994] Martin, C.L., Kumar, P. et Brown, S.B. (1994). Constitutive modeling and characterization of the flow behavior of semi-solid metal alloy slurries : Part II. Structural evolution under shear deformation. *Acta Metallurgica et Materialia*. 42, p. 3603-3614.
- [MAR 1995] Martin, C.L., Brown, S.B., Favier, D. et Suéry, M. (1995). Shear deformation of high solid fraction (>0.60) semi-solid Sn-Pb under various structures. *Materials Science and Engineering A*. 202, p. 112-122.
- [MAR 1997a] Martin, C.L., Favier, D. et Suéry, M. (1997a). Viscoplastic behaviour of porous metallic materials saturated with liquid. Part I : Constitutive equations. *International Journal of Plasticity*. 13, p. 215-235.
- [MAR 1997b] Martin, C.L., Favier, D. et Suéry, M. (1997b). Viscoplastic behaviour of porous metallic materials saturated with liquid. Part II : Experimental identification on a Sn-Pb alloy. *International Journal of Plasticity*. 13, p. 237-259.
- [MAR 1999] Martin, C.L., Favier, D. et Suéry, M. (1999). Fracture behaviour in tension of viscoplastic porous metallic materials saturated with liquid. *International Journal of Plasticity*. 15, p. 981-1008.
- [MAZ 2001] Mazumdar, S. et Ray, S.K. (2001). Solidification control in continuous casting of steel. *Sadhana*. 26, p. 179-198.
- [MCM 1991] McMeeking, R.M. et Kuhn, L.T. (1991). A diffusional creep law for powder compacts. *Acta Metallurgica et Materialia*. 40, p. 961.
- [MET 1969] Metz, S.A. et Flemings, M.C. (1969). Hot Tearing in Cast Metals. *Trans. Amer. Foundrymen's Society*. 77, p. 329-334.
- [MIY 2001] Miyazawa, K.I. (2001). Continuous casting of steels in Japan. *Science and Technology of Advanced Materials*. 2, p. 59-65.
- [NGU 1992] Nguyen, T.G., Suéry, M. et Favier, D. (1992). Mechanical behaviour of semi-solid alloys under undrained compression with lateral pressure. In : Brown, S.B. et Flemings, M.C. (Eds), *Proceedings of the Conference on Semi-Solid Processing of Alloys and Composites*, MIT, Cambridge, p. 296-305.
- [NGU 1994] Nguyen, T.G., Favier, D. et Suéry, M. (1994). Theoretical and experimental study of the isothermal mechanical behaviour of alloys in the semi-solid state. *International Journal of Plasticity*. 10, p. 663-693.

- [NIE 1998] Niedermeyer, F., Langartiner, J., Hirt, G. et Niedick, I. (1998). Contribution dans 5th International Conference On Semi-Solid Processing of Alloys and Composites. The Colorado School of Mines, Golden, Etats-Unis, p. 407-414.
- [PAS 2000] Pascon, F., Habraken, A.-M., Bourdouxhe, M. et Labory, F. (2000). Modélisation des phénomènes thermomécaniques dans une lingotière de coulée continue. *Mécanique et Industries*. 1, p. 61-70.
- [PAS 1992] Pasternak, L., Carnahan, R., Decker, R. et Kilbert, R. (1992). Semi-solid production processing of magnesium alloys by ThixomoldingTM. 2nd International Conference On Semi-Solid Processing of Alloys and Composites. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, p. 159-169.
- [ROU 2003] Rouff, C. (2003). Contribution à la caractérisation et à la modélisation du comportement d'un acier à l'état semi-solide. Application au thixoforgeage, Thèse, ENSAM, Metz.
- [SAM 1982] Samarasekera, I.V. et Brimacombe, J.K. (1982). Thermal and mechanical behaviour of continuous casting billet moulds. *Ironmaking and Steelmaking*. 9, p. 267-281.
- [SAN 1980] Sanchez-Palencia, E. (1980). Non-homogeneous medium and vibration theory. Springer-Verlag, Lectures Notes in physics. 127, Berlin.
- [SEL 1966] Sellars, C.M. et McG. Tegart, W.J. (1966). La relation entre la résistance et la structure dans la déformation à chaud. *Mem. Sci. Rev. Metall.* 63. p. 731.
- [SPE 1972] Spencer, D.B., Mehrabian, R. et Flemings, M.C. (1972). Rheological Behavior of Sn-15Pct Pb in the Crystallization Range. *Metallurgical Transactions*. 3, p. 1925-1932.
- [SUE 1982] Suéry, M. et Flemings, M.C. (1982). Effect of Strain Rate on Deformation Behavior of Semi-Solid Dendritic Alloys. *Metallurgical Transactions A*. 13, p. 1809-1819.
- [SUE 2002] Suéry, M. (2002). Mise en forme des alliages métalliques à l'état semi-solide. *Mécanique et Ingénierie des Matériaux*. Hermes Lavoisier.
- [TAK 1984] Takeuchi, E. et Brimacombe, J.K. (1984). The formation of oscillation marks in the continuous casting of steel slabs, *Metallurgical Transactions B*. 15, p. 493-509.
- [TAK 1991] Takeuchi, S., Miki, Y., Itoyama, S., Kobayishi, K., Sorimachi, K. et Sakuraya, T. (1991). Control of oscillation mark formation during continuous casting. *Steelmaking Conference of Processing* (Warrendale, PA : Iron and Steel Soc.). 74, p.303.

- [THO 1995] Thomas, B.G., Moitra, A. et Zhu, A. (1995). Coupled thermo-mechanical model of solidifying steel shell applied to depression defects in continuous-cast slabs, in : Modeling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes VIII, London, England, September.
- [THO 1997] Thomas, B.G. et Parkman, J.T. (1997). Simulation of thermal mechanical behavior during initial solidification, in: Thermec'97, International Conference of Thermal Processing of Steel and Other Materials, Wollongong, Australia, p. 7-11.
- [TIE 1997] Tieu, A.K. et Kim, I.S. (1997). Simulation of the continuous casting process by a mathematical model. International Journal of Mechanical Sciences. 39, p. 185-192.
- [TUR 1991] Turng, L.S. et Wang, K.K. (1991). Rheological behaviour and modeling of semi-solid Sn-15%Pb alloy. Journal of Materials Science. 26, p. 2173-2183.
- [TZI 1998] Tzimas, E., Zavaliangos, A. et Lawley, A. (1998). The effect of microstructure on the rheological response of alloys in semi-solid : a comparison of MHD, SIMA and Spray cast alloys. 5th International Conference On Semi-Solid Processing of Alloys and Composites. The Colorado School of Mines, Golden, Etats-Unis, p. 345-352.
- [VIV 1991] Vivès, C. (1991). New electromagnetic rheocaster for the production of thixotropic aluminium alloy slurries. Szekely, J., Evans, J.W., Blazek, K. et El-Kaddah, N., Magnetohydrodynamics in Process Metallurgy, The Minerals, Metals & Materials Society, Warrendale, Etats-Unis. p. 169-174.
- [VOL 1990] Voller, V.R., Swaminathan, C.R. et Thomas, B.G. (1990). Fixed grid techniques for phase-change problems : a review. International Journal on Numerical Methods in Engineering. 30, p. 875-898.
- [WAN 2001] Wang, E.G. et He, J.C. (2001). Finite element numerical simulation on thermo-mechanical behavior of steel billet in continuous casting mold. Science and Technology of Advanced Materials. 2, p. 257-263.
- [YOU 1986] Young, R.M.K. et Clyne, T.W. (1986). A powder-based approach to semisolid processing of metals for fabrication of die-castings and composites. Journal of Materials Science. 21, p. 1057-1069.
- [YUR 2001] Yurko, J.A. et Flemings, M.C. (2001). A novel compression technique for examining semisolid alloys. Proc. Of the Merton C. Flemings Symposium on Solidification and Materials Processing, TMS, Warrendale, Etats-Unis, p. 281-285.
- [ZAV 1993] Zavaliangos, A. et Anand, L. (1993). Thermo-elasto-viscoplasticity of isotropic porous metals. International Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 41, p. 1087-1118.

- [ZAV 1995] Zavaliangos, A. et Lawley, A. (1995). Numerical Simulation of Thixoforming. *Journal of Materials Engineering and Performance*. 40, p. 40-47.
- [ZAV 1998] Zavaliangos, A. (1998). Modeling of the mechanical behavior of semisolid metallic alloys at high volume fractions of solid. *International Journal of Mechanical Science*. 40, p. 1029-1043.

ANNEXES

ANNEXES

ANNEXE A : LA CONSERVATION DE LA MASSE DU MELANGE SOLIDE-LIQUIDE.....	132
A.1 ÉQUATION DE L'ETAT DE LA PHASE SOLIDE	132
A.2 ÉQUATION DE L'ETAT DE LA PHASE LIQUIDE	133
A.3 ÉQUATIONS DE LA CONSERVATION DE LA MASSE DU MELANGE	134
ANNEXE B : LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE.....	137
B.1 ÉQUATION HYPERGEOMETRIQUE	137
B.2 PROPRIETES DE LA FONCTION HYPERGEOMETRIQUE	138
B.3 FONCTION HYPERGEOMETRIQUE GENERALISEE	139

Annexe A : La conservation de la masse du mélange solide-liquide

Nous montrons dans cette partie les équations de conservation de la masse du mélange solide-liquide, dans le cas où les phases solide et liquide sont compressibles. Nous commençons à montrer ces équations à partir de la conservation de la masse de deux phases et des équations de l'état de ces phases.

A.1 Équation de l'état de la phase solide

À partir de l'équation de la conservation de la masse de la phase solide nous avons :

$$\frac{D^s (\rho_s V^s)}{Dt} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Si la phase solide est compressible, la densité volumique de cette phase n'est pas constante ; on suppose en général qu'elle est une fonction de la pression du solide p^s , de la température T et du premier invariant du tenseur des contraintes effectives $I_1 = \text{tr} \hat{\underline{\underline{\sigma}}}^s$: $\rho_s = \rho_s(p^s, T, I_1)$. Nous en déduisons [LEW 1998] :

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D^s \rho_s}{Dt} = -\frac{1}{V^s} \frac{D^s V^s}{Dt} = \frac{1}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} - \alpha_s \frac{D^s T}{Dt} - \frac{1}{3f^s K_s} \frac{D^s I_1}{Dt} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial p^s} &= \frac{1}{K_s} \\ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial T} &= -\alpha_s \\ \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial I_1} &= -\frac{1}{3f^s K_s} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où K_s est le module de compressibilité du matériau solide, et α_s est le coefficient d'extension thermique de la phase solide.

On calcule la dérivée matérielle du premier invariant [LEW 1998] qui est :

$$\frac{D^s I_1}{Dt} = 3K_T \left(\text{div } \underline{v}^s + \frac{1}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} - \alpha_s \frac{D^s T}{Dt} \right) \quad (\text{A.4})$$

où K_T est le module de compressibilité du squelette solide.

Ainsi nous obtenons à partir des équations (A.2) et (A.4) l'équation suivante :

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{D^s \rho_s}{Dt} = \frac{1}{f^s} \left[[b - (1 - f^s)] \frac{1}{K_s} \frac{D^s p^s}{Dt} - \alpha_s [b - (1 - f^s)] \frac{D^s T}{Dt} - (1 - b) \text{div } \underline{v}^s \right] \quad (\text{A.5})$$

où b est le coefficient de Biot défini par la relation (2.24).

A.2 Équation de l'état de la phase liquide

En prenant en compte la densité volumique de la phase liquide ρ_l qui est une fonction de la pression interstitielle p^l et de $T = \theta - \theta_0$ qui représente la différence des températures par rapport à la température de référence θ_0 , l'équation de l'état de la phase liquide [LEW 1998] s'écrit :

$$\rho_l = \rho_0 \exp \left[1 - \alpha_l T + C_l (p^l - p^0) \right] \quad (\text{A.6})$$

où α_l est le coefficient d'extension thermique de la phase liquide, C_l est le coefficient de la compressibilité du liquide, et l'indice 0 désigne l'état initial.

En ne prenant en compte que le premier terme de la série d'expansion de la relation (A.6), nous obtenons :

$$\rho_l = \rho_{l_0} \left[1 - \alpha_l T + C_l (p' - p'^0) \right] \quad (\text{A.7})$$

et

$$\frac{1}{\rho_{l_0}} \frac{D' \rho_l}{Dt} = \frac{1}{K_l} \frac{D' p'}{Dt} - \alpha_l \frac{D' T}{Dt} \quad (\text{A.8})$$

où $K_l = \frac{1}{C_l}$ est le module de la compressibilité du liquide.

et

$$\frac{1}{\rho_{l_0}} \frac{\partial \rho_l}{\partial p'} = \frac{1}{K_l} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{\rho_{l_0}} \frac{\partial \rho_l}{\partial T} = -\alpha_l$$

Nous pouvons avoir la même équation (A.8) à partir de l'équation de conservation de la masse de la phase liquide.

A.3 Équations de la conservation de la masse du mélange

Si nous prenons l'équation de la conservation de la masse de la phase solide (2.7), et la relation (2.8) et en négligeant la gradient de $(f^s \rho_s)$, nous obtenons :

$$\frac{f^s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial f^s}{\partial t} + f^s \text{div} \underline{v}^s = 0 \quad (\text{A.10})$$

De même, à partir de l'équation (2.11) et (2.12), nous ajoutons les termes $\pm(1-f^s)\rho_l \text{div} \underline{v}^s$ en négligeant la gradient de $(1-f^s)\rho_l$, et nous avons :

$$-\frac{\partial f^s}{\partial t} + \frac{(1-f^s)}{\rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \operatorname{div} \left[(1-f^s) \rho_l \underline{w} \right] + (1-f^s) \operatorname{div} \underline{v}^s = 0 \quad (\text{A.11})$$

Nous sommions les équations (A.10) et (A.11) pour obtenir :

$$\frac{f^s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{v}^s + \frac{(1-f^s)}{\rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \operatorname{div} \left[(1-f^s) \rho_l \underline{w} \right] = 0 \quad (\text{A.12})$$

Dans l'hypothèse d'un petit déplacement, à partir des équations (A.5) et (A.8), et en prenant en compte que la pression interstitielle est égale à la pression de solide (2.20), l'équation (A.12) devient [LEW 1998] :

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p^l}{\partial t} + b \operatorname{div} \underline{v}^s - \alpha_{sl} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \operatorname{div} \left[(1-f^s) \rho_l \underline{w} \right] = 0 \quad (\text{A.13})$$

Avec :

$$\frac{1}{M} = \frac{b - (1-f^s)}{K_s} + \frac{(1-f^s)}{K_l} \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha_{sl} = \left[b - (1-f^s) \right] \alpha_s + (1-f^s) \alpha_l \quad (\text{A.15})$$

où M est le module de Biot [DOM 2002].

Les équations (A.10) et (A.13) sont les équations de la conservation de la masse pour le mélange solide-liquide dans le cas où les deux phases du mélange sont compressibles.

Dans le cas isotherme ($\alpha_s, \alpha_l = 0$), et dans le cas de l'incompressibilité du solide et du liquide nous avons :

$$\frac{1}{K_s}, \frac{1}{K_l} = 0, \quad b=1$$

l'équation de la conservation de la masse du solide (A.10) devient :

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + \text{div}(f^s \underline{v}^s) = 0 \quad (\text{A.16})$$

et l'équation de l'incompressibilité globale (A.13) devient :

$$\text{div}[(1 - f^s) \underline{w} + \underline{v}^s] = 0 \quad (\text{A.17})$$

Annexe B : La fonction hypergéométrique

B.1 Équation hypergéométrique

L'équation hypergéométrique de Gauss est l'équation différentielle suivante [JAM 1997] :

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (\text{B.1})$$

où a , b et c sont des paramètres indépendants de z , réels ou complexes.

En utilisant la méthode de séries pour résoudre cette équation, la solution de l'équation hypergéométrique (B.1) est :

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+s} \quad (\text{B.2})$$

En imposant $c_0 \neq 0$, l'équation (B.1) a deux solutions indépendantes linéairement :

$$u_1(z) = c_0 H(a, b; c; z) \quad (\text{B.3})$$

et :

$$u_2(z) = c_0 z^{1-c} H(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z) \quad (\text{B.4})$$

où :

$$H(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n \quad (\text{B.5})$$

est la fonction hypergéométrique, et $(a)_n$ est le symbole Pochhammer qui est défini par :

$$\begin{aligned} (a)_0 &= 1 \\ (a)_n &= a(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+n-1), \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

La solution générale de l'équation hypergéométrique est :

$$u(z) = c_1 H(a, b; c; z) + c_2 z^{1-c} H(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z) \quad (B.7)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration, déterminées par les conditions aux limites.

B.2 Propriétés de la fonction hypergéométrique

Si c n'est pas zéro, ni un entier négatif, la série hypergéométrique (B.5) converge absolument pour $|z| < 1$ et elle diverge pour $|z| > 1$. Pour $|z| = 1$, la fonction converge absolument si $\text{Re}(c - a - b) > 0$ [JAM 1997].

On introduit le concept de fonction Gamma :

$$(s)_n \Gamma(s) = \Gamma(s+n) \quad (B.8)$$

$$\Gamma(s)\Gamma(m) = \Gamma(s+m) \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{m-1} dt \quad (B.9)$$

nous avons :

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt \quad (B.10)$$

En utilisant les relations (B.8) et (B.10), la fonction hypergéométrique (B.5) devient :

$$H(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (zt)^n \right] dt \quad (B.11)$$

À partir de la définition de la série de Taylor :

$$(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (zt)^n \quad (\text{B.12})$$

la relation (B.11) devient pour $\text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0$ et $|z| < 1$:

$$H(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \quad (\text{B.13})$$

Par le prolongement analytique de l'intégrale précédente, on peut définir la fonction hypergéométrique pour $|z| > 1$.

B.3 Fonction hypergéométrique généralisée

La fonction hypergéométrique peut être généralisée dans la forme suivante [JAM 1997] :

$${}_pH_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n}{n! (b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n} z^n \quad (\text{B.14})$$

où p est le nombre des paramètres au numérateur a_i et q est le nombre des paramètres au dénominateur b_j .

Dans ce cas la fonction hypergéométrique $H(a, b; c; z)$ a une autre notation ${}_2H_1(a, b; c; z)$.

Influence de l'écoulement interstitiel sur le comportement d'un matériau semi-solide

Résumé : L'objectif de cette thèse est de décrire les mécanismes qui régissent l'écoulement interstitiel dans un milieu semi-solide, ainsi que son influence sur le comportement du squelette. L'étude porte sur un modèle de solide viscoplastique compressible couplé à l'écoulement interstitiel d'un liquide. Une analyse dimensionnelle de ce modèle a été faite. Cette analyse montre deux paramètres sans dimension C et R qui caractérisent le modèle ; le premier représente la compressibilité et le deuxième caractérise l'influence du liquide sur le solide et il dépend de la vitesse caractéristique du problème et du rapport entre la viscosité dynamique du liquide et la viscosité apparente du solide. Pour bien comprendre le comportement de ces modèles biphasiques, nous avons étudié le cas d'une déformation unidimensionnelle. Nous avons montré que les solutions des problèmes unidimensionnels peuvent être menées de manière complètement analytique. Ces études analytiques ont permis de distinguer deux types de comportement du milieu selon l'ordre de grandeur du nombre sans dimension R . À faible vitesse, le fluide n'a pas d'influence sur la réponse du squelette solide. À grande vitesse, l'écoulement est très localisé près des bords où le fluide peut s'écouler.

En introduisant l'élasticité du squelette dans le modèle précédent, nous avons trouvé une solution analytique approchée. Cette analyse montre un paramètre supplémentaire : un temps de relaxation qui caractérise ce modèle. Ce temps est inversement proportionnel au nombre R .

Mots clés : semi-solide, comportement viscoplastique, écoulement interstitiel, milieu poreux, fonctions hypergéométriques.

Influence of the interstitial flow on the behaviour of a semi-solid material

Abstract : The aim of the paper is to describe the mechanisms which govern the interstitial flow in a semi-solid medium and its influence on the behaviour of the skeleton. A model for the compressible viscoplastic solid coupled with the liquid interstitial flow was studied. A dimensional analysis of this model was made. This analysis shows two dimensionless parameters C and R which characterize the model ; the first represents compressibility and the second characterizes the liquid influence on the solid and it depends on the characteristic velocity of the problem and on the ratio between the dynamic viscosity of the liquid and the apparent viscosity of the solid. In order to understand the behaviour of these biphasic models, we studied the case of an unidimensional deformation. We have found an analytical solution for the unidimensional problems. These analytical studies show two types of behaviour of the medium according to the order of magnitude of the dimensionless number R . At low velocity, the fluid does not have any influence on the response of the solid skeleton. At high velocity, the flow is very localised close to the edges where the fluid can run out.

By introducing the elasticity of the skeleton into the preceding model, we found an analytical approached solution. This analysis shows an additional parameter : a relaxation time which characterizes this model. We have showed that this time is proportional to the inverse of the number R .

Keywords : semi-solid, viscoplastic behaviour, interstitial flow, porous medium, hypergeometric function.