



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE	
N° inv	20030185
Cote	S/M7 03/06
Loc	

THÈSE

présentée pour l'obtention du

Doctorat en co-tutelle

Université de Metz – Université de Yaoundé I

(Spécialité : Mathématiques Appliquées)

par

Jean Claude KAMGANG

Contribution à la stabilisation des systèmes
mécaniques

Contribution à l'étude de la stabilité des modèles
épidémiologiques

soutenue publiquement le 22 septembre 2003 devant la commission d'examen :

Rapporteurs : C. LOBRY Professeur, INRIA Sophia Antipolis, Université de Nice
J. M. CORON Professeur, Université de Paris Sud
J. MAWHIN Professeur, Université de Louvain la Neuve

Examineurs : D. BÉKOLLÉ Professeur, Université de Yaoundé I
J. WOUAFO KAMGA Professeur, Université de Yaoundé I
G. SALLET Professeur, INRIA Lorraine, Université de Metz

Invité : P. ADDA Maître de Conférence, Université de Metz



BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 486052 5

À

Jeannette Meteh ma mère

Alain Bertrand Noupin mon fr

Edwige Mboudi mon amour

Remerciements

L'ensemble des travaux contenus dans ce mémoire n'aurait jamais vu le jour sans l'incomensurable soutien :

—> du CIMPA, le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées. C'est de cet organisme, que commence ce travail par la rencontre de mon directeur de thèse, Mr Gauthier SALLET. Je participais alors à une école d'été organisée par le CIMPA à Djerègbé, petit faubourg situé à mi-chemin entre Porto-Novo et Cotonou au Bénin en juillet 1997.

—> de l'INRIA Lorraine, par le canal du projet CONGÉ sis dans le département de mathématiques de l'UFR MIM de l'Université de Metz, qui est le cadre dans lequel la majeure partie de ce travail a été réalisée. Les diverses formes de soutiens qu'un thésard peut s'attendre dans sa scolarité de thèse m'ont été apportés par l'INRIA lorraine.

—> Du RUN 2000, le projet de recherche de l'Université de Ngaoundéré, qui m'a accordé une assistance financière pour mon premier séjour à l'Université de Metz, dans le cadre du Projet NTIC.

—> Le Projet UNICAM 2000 dans sa composante «*soutien à la formation des formateurs*». L'entière prise en charge de l'un de mes séjours est due à son assistance financière.

—> La mission de coopération Française au Cameroun qui m'a offert une précieuse bourse de recherche en alternance sans laquelle je n'aurais pas eu les moyens d'être en train de leur taper ces mots de dédicace qu'on fait en fin de parcours. Je salue la compétence de EGIDE qui est l'organisme gestionnaire des étrangers en séjour académique et de recherche en France, le canal de gestion de ma bourse.

A tous ces organismes instituts et projets, j'adresse mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance pour les soutiens.

Mes remerciements vont tout particulièrement à :

M. Gautier SALLET, Professeur à l'Université de Metz, mon co-directeur de thèse de l'Université de Metz. Merci pour ce parcours depuis juillet 1997 en terre Africaine... Vous m'avez tenu la main pour me conduire dans la théorie du contrôle et l'épidémiologie mathématique ; vous avez fait naître en moi l'envie d'en faire. Tout ce que je ferais en tant que chercheur ne se pourrait que grâce à vos apprentissages.

M. Claude LOBRY, Professeur à l'Université de Nice ; Vous êtes le premier émerveillement que j'ai eu dans cette mathématique qu'on fait en utilisant le moins possible le langage totalement mathématique, mais en lui donnant en permanence une connotation pratique. Je vous adresse ma reconnaissance également d'avoir accepté de participer au jugement de ce travail.

M. Jean WOUAFO KAMGA, Professeur à l'Université de Yaoundé I ; mon co-directeur de

l'Université de Yaoundé I; C'est sur vos conseils que cette que je me suis laissé séduire par l'envie de me remettre dans l'aventure occidentale. J'en suis plutôt fier, et je vous en sais gré.

MM. Jean MAWHIN, Professeur à l'Université de Louvain La neuve, et Jean-Michel CORON, Professeur à l'Université de Paris Sud; veuillez trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour avoir accepté de donner votre temps dans le jugement de ce travail en tant que rapporteur.

M. David BÉKOLLÉ, Professeur à l'Université de Yaoundé I; veuillez trouver ici ma profonde reconnaissance et mes sincères remerciements pour la présence dont vous avez su faire montre souvent quand j'étais dans le creux de la vague, et pour votre présence dans le jury de cette thèse.

M. Maurice TCHUENTE, actuel ministre de l'enseignement supérieur du Cameroun, Professeur de l'Université de Yaoundé I; grace à votre diligence et votre savoir dans la gestion des hommes, vous avez su préserver et attiser ma volonté d'arriver au bout en des moments cruciaux. Veuillez trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour ces actes essentiels dans l'aboutissement de ce travail.

Les membres du Projet CONGÉ, à savoir Phillipe ADDA, Abderrahman IGGIDR, pour toute l'amitié que vous m'avez accordée, surtout ces deux dernières années, et pour tous les conseils que vous m'avez prodigués durant mes divers séjours de thèse.

Il n'est point question de vous oublier, vous tous les autres qui de loin, et aussi souvent de près m'avez apporté ce supplément d'encadrement que le coté travail au sens strict du terme ne fait pas. Je ne peux pas vous citer tous sans risquer de transformer ce mémoire en un livre de remerciement... Mais je suis sûr que vous vous reconnaitrez dans ces quelques mots. Je vous remercie du fond de mon coeur pour vos apports sous diverses formes.

Table des matières

I	Contribution à la Stabilisation des systèmes mécaniques	1
1	Introduction	3
2	Généralités	7
2.1	Formulation du Problème	7
2.2	Stabilité et stabilisation des systèmes dynamiques	9
2.2.1	Notion de Système	10
2.2.2	Notions de stabilité	10
2.2.3	Stabilisation des systèmes contrôlés	12
2.3	Observabilité des systèmes dynamiques	18
2.3.1	Espace d'observation	19
2.3.2	Systèmes non linéaires	22
2.4	Observateurs des systèmes dynamiques	24
2.4.1	Introduction	24
2.4.2	Systèmes linéaires	25
2.4.3	Systèmes non linéaires	27
2.5	Conclusion	30
3	Stabilisation d'un objet cylindrique surmonté d'une antenne flexible	31
3.1	Introduction	31
3.2	Modélisation	33
3.3	Stabilisation par rétro-action statique	40
3.3.1	Les équilibres du système (Σ_n)	40
3.3.2	Stabilisabilité du système (Σ_n)	41

3.4	Observabilité, et observateurs	50
3.4.1	Observabilité du système (Γ_n)	50
3.4.2	Observateur pour le système (Σ_n)	52
3.5	Stabilisation par rétro-action dynamique	54
4	Conclusion et perspectives	57
	Bibliographie	59
II	Etude de la stabilité des modèles épidémiologiques	63
1	Introduction	65
2	Généralités	69
2.1	Principes Epidémiologiques	69
2.1.1	Description du cycle d'une infection épidémiologique	69
2.2	Structure compartimentale des modèles épidémiologiques	71
2.2.1	Un exemple classique : le modèle Kermack-Mckendrick	72
2.3	Modèles compartimentaux généraux	75
2.3.1	Convention de représentation des modèles compartimentaux	77
2.4	Les modèles épidémiologiques en tant que modèles compartimentaux	78
2.4.1	Incidences horizontales à partir du compartiment des susceptibles	78
2.4.2	L'intervention de la démographie dans les modèles	80
3	Quelques outils Mathématiques	83
3.1	Introduction	83
3.2	Les Modèles compartimentaux	83
3.2.1	Propriétés des systèmes et matrices compartimentaux	84
3.3	Les Matrices de Metzler	89
3.3.1	Matrices de Metzler Stables	94
3.4	Quelques théorèmes de stabilité des systèmes Autonomes	100
3.4.1	Notations et Préliminaires	100

3.4.2	Stabilité des systèmes d'équations différentielles ordinaires	103
3.4.3	Les Théorèmes de stabilité des systèmes compartimentaux	105
3.5	Conclusion	106
4	Stabilité globale de l'équilibre non endémique, et calcul de \mathcal{R}_0	109
4.1	Introduction	109
4.2	Caractérisation des modèles épidémiologiques	110
4.3	Le calcul de \mathcal{R}_0 pour les systèmes épidémiologiques	111
4.4	Un résultat de stabilité globale pour le DFE	114
4.5	Conclusion	116
5	Applications à différents modèles	117
	Introduction	117
5.1	Un exemple de modèle épidémiologique de la littérature	117
5.2	Exemple de modélisation	123
5.3	Exemple de modèle avec domaine non compact	130
5.3.1	Introduction	130
5.3.2	Un modèle SEIRS simple avec immigration	131
5.3.3	Un modèle d'une maladie avec hétérogénéité de la population	133
5.4	Un modèle Intra-Hôte du VIH-1	138
5.5	Un modèle de la Tuberculose avec réinfection	142
5.6	Les modèles à multicompartiments	146
5.6.1	Un modèle (SEIRS)_n	146
5.6.2	Un modèle (SIS)_n	149
5.7	Un modèle de la Diarrhée virale bovine	152
5.8	Modèles d'infection avec porteurs asymptomatiques	156
5.8.1	Un modèle SI₁I₂RS	157
5.8.2	Un modèle SEI₁I₂RS	159
5.8.3	Un modèle SE₁E₂I₁I₂RS	161
5.8.4	Généralisation du principe aux modèles S(E)_n(I)_m(R)_pS	164
	Conclusion	167

6 Conclusion	169
A Principe de réduction pour la stabilité. Application aux modèles épidémiologiques	171
A.1 Quelques résultats de réduction	171
A.2 Adaptation à des modèles compartimentaux	174
Bibliographie	179

Première partie

**Contribution à la Stabilisation des
systèmes mécaniques**

Chapitre 1

Introduction

En théorie du contrôle, une différence est établie entre les systèmes se présentant sous forme d'EDP et ceux se présentant sous forme d'EDO. Cette différence se justifie du fait que dans le premier cas, le système se présente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

- x , l'état du système est une fonction, c'est à dire un objet vivant généralement dans un certain espace vectoriel de dimension infinie,
- y est une fonction qui désigne la sortie du système ou l'observation

Dans le deuxième le système se présente sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1.2)$$

- \mathbf{x} , l'état du système est représenté par un vecteur d'un certain \mathbb{R}^n , qu'on désigne par «un point» du fait qu'il s'agisse d'un objet vivant dans un ensemble sur lequel fonctionne la géométrie classique,
- \mathbf{y} est un vecteur d'un certain \mathbb{R}^p , et désigne l'observation.

Cette différence s'étend dans les outils qu'on utilise pour aborder l'analyse de ces deux classes de systèmes suivant les divers aspects de la théorie du contrôle.

Pour les systèmes se présentant sous la forme d'EDP, les outils sont essentiellement fournis par l'analyse fonctionnelle, pendant que la géométrie est le principal pourvoyeur d'outils lorsqu'on traite des systèmes se présentant sous la forme d'EDO.

Les outils de l'analyse fonctionnelle, dans une certaine mesure présentent des rigidités qui peuvent avoir l'effet de masque sur les propriétés que l'on obtient à l'issue de l'étude des systèmes qui s'y rapportent. Dans la mise en œuvre de la résolution numérique des EDP, on est amené à considérer l'EDO obtenu par discrétisation.

La théorie du contrôle des systèmes en dimension finie contient de très importants résultats de

régularité qu'on souhaiterait quelquefois obtenir lorsqu'on fait l'analyse des systèmes en dimension infinie.

On se poserait alors la question de savoir si l'on ne peut pas analyser les systèmes en dimension infinie i.e. du type (1.1) en commençant par obtenir les propriétés des systèmes en dimension finie i.e. de type (1.2) obtenus de la discrétisation de cette première. Les propriétés des systèmes discrétisés qui sont issues du contrôle des EDO pourront peut être alors s'étendre dans une certaine mesure au système nominal !

Une catégorie de **problèmes** importants qui se posent en général en théorie du contrôle et auxquels nous nous intéressons dans cette partie de ce travail sont présentés par le schéma de principe suivant

Etant donné un système «entrées-sorties» du type (1.1) et (1.2) :

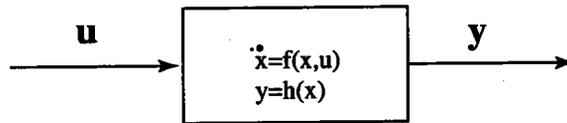


FIG. 1.1 – système nominal

—> Chercher une loi de commande par retour d'état (ou feedback) pour stabiliser le système en un point d'équilibre.

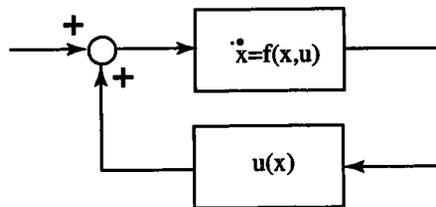


FIG. 1.2 – stabilisation par feedback

—> Observer le système, c'est-à-dire trouver un système dynamique (observateur) qui permet de reconstruire toutes les variables d'état du système.

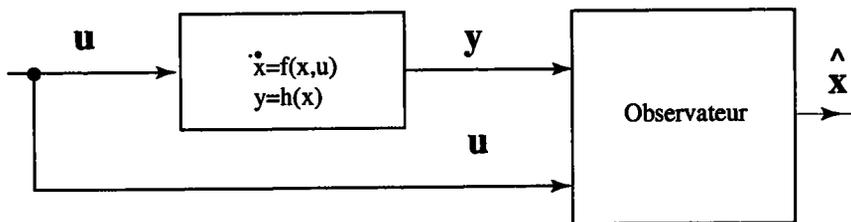


FIG. 1.3 – Observateur

—> Etudier la stabilité du système avec une configuration d'observateur c'est-à-dire avec un retour de sortie dynamique.

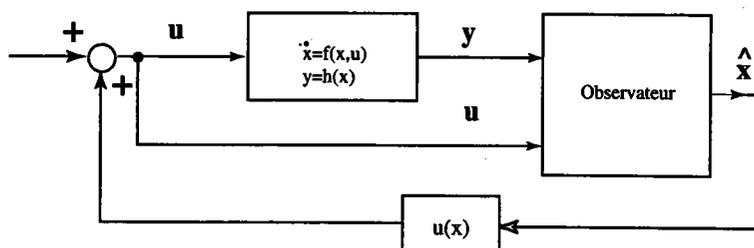


FIG. 1.4 – Régulateur par retour dynamique de sortie

Le travail que nous présentons dans cette partie consiste à appliquer le processus sous-tendu par la question ci-dessus dans le cadre d'un exemple de système qui a déjà été l'objet d'importants travaux par des spécialistes de la théorie du contrôle des EDP. Il s'agit du système constitué d'un objet cylindrique surmonté d'une antenne flexible, en rotation autour de son axe de symétrie ; le classique «*body beam system*».

L'objectif est de déterminer pour le système nominal qui est de type (1.1), une loi de stabilisation de meilleure régularité pour ce système que ceux qui sont déjà dans les travaux de la littérature existante. Le modèle d'état des formes discrétisées du système nominal sont des systèmes d'EDO du type (1.2) dont la littérature regorge d'outils permettant de les analyser. Dans cet exemple nous établissons que les systèmes discrétisés sont stabilisables globalement asymptotiquement en ses états d'équilibres faisables par des lois de retour d'états statiques de classe C^∞ . Notre objectif final est ensuite par passage à la limite d'espérer étendre cette propriété de C^∞ -stabilisabilité au système nominal qui est un système en dimension infinie. Le passage à la limite est assez délicat. Ce travail est en cours. Nous établissons que les systèmes discrétisés sont stabilisables par des retours d'états dynamiques. On est tout de suite tenté de se demander si on pourrait aussi faire de la régulation par retour d'état dynamique dans le système nominal ; c'est un problème difficile.

Pour mener à bien ce travail, nous l'avons organisé de la manière suivante.

Le chapitre 2 est consacré aux généralités.

Nous avons commencé dans une première partie par donner quelques résultats de la littérature sur la stabilisation des EDOs. Nous faisons également des rappels des différentes notions d'observabilité pour les EDOs. En particulier le concept d'observabilité pour les systèmes linéaires est global et ne dépend pas de l'entrée du système ; il n'en est pas de même pour les systèmes non linéaires. L'observabilité pour les systèmes non linéaires dépend de l'entrée introduite et aussi de la non linéarité du système.

Dans la deuxième section de ce même chapitre, nous faisons une revue bibliographique sur les techniques d'estimation que l'on rencontre dans la littérature. L'observateur d'un système du type (1.1) ou (1.2), lorsque sa synthèse est possible est décrite par un système qui admet pour entrées les entrées et les sorties du système observé. Sa dynamique est généralement décrite par un système d'équations du type :

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, y, u) \quad (1.3)$$

Nous présentons les différentes approches de construction d'un observateur pour les systèmes linéaires et pour des systèmes non linéaires.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation de notre travail sur la stabilisation du satellite cylindrique surmonté d'une antenne. Nous commençons par une section portant sur la construction du modèle d'états d'un système discrétisé du système nominal. Le système discrétisé consiste en un satellite surmonté d'une antenne constituée d'un certain nombre de tiges rigides soudées bout à bout en articulations qu'on suppose flexibles. (c.f. figure 3.4 page 34).

Dans la section suivante, nous nous intéressons à la stabilisation par rétro-action statique. Nous déterminons des lois de rétro-action de stabilisation des systèmes discrétisés que nous avons appelés (Σ_n) . Il s'agit des lois de classe C^∞ . Nous entendons dans le futur nous servir des observations faites sur la forme que présente les divers systèmes discrétisés, et la dépendance de l'expression des lois de rétro-action de la valeur n du rang de (Σ_n) parmi la suite des systèmes discrétisés pour obtenir une loi de rétro-action du système en dimension infinie de même régularité que celui des systèmes discrétisés. Ce travail constitue une première étape.

Dans la troisième section, nous abordons la construction des observateurs pour les systèmes discrétisés i.e. les systèmes (Σ_n) . Cette section est préparatoire à la suivante. En effet dans la quatrième section, nous présentons la stabilisation par rétro-action dynamique des systèmes (Σ_n) .

Chapitre 2

Généralités

Nous rassemblons ici des rappels classiques d'Automatiques non linéaires. Le lecteur familier avec ces notions peut passer directement au chapitre 3.

Nous avons organisé cette partie de notre mémoire autour du problème suivant :

2.1 Formulation du Problème

Soit un système dont l'évolution peut être décrite par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z}) + \omega^2 \mathbf{Y}(\mathbf{z}) \\ \dot{\omega} = u \\ (\mathbf{z}; \omega) \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (2.1)$$

Où \mathcal{M} , une variété différentielle connexe de dimension impaire, est l'espace des états du système, et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$. l'état du système à un instant t quelconque est $(\mathbf{z}(t); \omega(t))$. La dynamique du système est décrite par le champ $(\mathbf{X}(\mathbf{z}) + \omega^2 \mathbf{Y}(\mathbf{z}); u)$ défini sur \mathcal{M} . On va noter pour la suite, lorsque la concision est plus importante, $\mathbf{F}(\mathbf{z}; \omega) = \mathbf{X}(\mathbf{z}) + \omega^2 \mathbf{Y}(\mathbf{z})$. On suppose que la dérive du champ \mathbf{X} par rapport à \mathbf{z} à l'origine (i.e. $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=0}$) est Hamiltonienne dissipative. Nous considérons dans notre travail $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n+1}$ pour un entier naturel n quelconque.

Le problème que nous nous posons est de construire une loi de régulation dynamique du système (2.1) en ses points d'équilibre.

Il s'agit d'un problème de stabilisation, et d'observation des systèmes guidés.

A cet effet, nous consacrons la suite de ce chapitre à la revue de la littérature relative aux outils que nous utiliseront.

La stabilité consiste essentiellement à étudier le comportement du système au voisinage d'un point d'équilibre de ce système.

L'étude de la stabilisation revient à trouver une loi de commande u qui permet de stabiliser le système en un point d'équilibre.

Lorsque le système est linéaire, les premiers résultats significatifs sur la caractérisation des systèmes linéaires qui sont stables sont dûs à E.J. Routh et A.Hurwitz. Nous donnerons ici le critère

de stabilité de Hurwitz.

La condition suffisante de stabilité que nous allons utiliser la plupart du temps dans ce travail est donnée par le théorème de Lyapunov, et le théorème de LaSalle. Nous citerons ces théorèmes dans la première partie de ce chapitre ; nous en donnerons un résultat inverse dû à Massera

A la fin de la première partie, nous donnons quelques résultats de la littérature sur la stabilisation des systèmes contrôlés : le théorème de Brockett [9] qui donne une condition nécessaire et le théorème de Jurdjevic–Quinn [22], où les auteurs donnent des conditions suffisantes de stabilisabilité pour une classe particulière de systèmes non linéaires, proches du système que nous étudions. Précisons ici que les résultats de Jurdjevic–Quinn [22] ont été étendus depuis à d'autres classes de systèmes [19, 24, 37]

La deuxième partie de ce chapitre introduit les généralités relatives à l'observabilité des systèmes. En effet, réguler un système par un retour dynamique d'état nécessite que l'on utilise des outils se rapportant à la stabilité statique du système, en relation avec l'observabilité.

Nous commençons par le rappel des différentes notions d'observabilité. L'accent porte sur les systèmes non linéaires, pour lesquels l'observabilité dépend de la non linéarité et aussi des entrées appliquées au système.

Nous verrons également que les approches d'étude varient selon que le système est à une seule sortie ou à plusieurs sorties.

Ensuite nous donnons différentes méthodes de reconstruction des états du système.

Si on considère le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement l'état et l'entrée du système, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système (et représente les observations)

Le problème de la reconstruction de l'état consiste essentiellement à donner une estimation de l'état du système à partir des observations. La solution à ce problème est donnée généralement (quand on sait le faire) par une équation du type :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \tag{2.2}$$

Pour les systèmes linéaires, lorsqu'ils sont du type

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases}$$

Où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$,

la méthode présentée ici et qui sera généralisée à certains systèmes non linéaires est celle de Luenberger. Elle consiste en une copie du système à laquelle on ajoute un terme correctif qui est fonction de la sortie du système.

Lorsque le système linéaire est à temps variable, c'est-à-dire du type

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \end{cases}$$

C'est l'approche de Kalman étendue que nous allons présenter. Elle consiste en une extension du filtre de Kalman pour les systèmes dynamiques déterministes.

Pour les systèmes non linéaires, nous donnons une classification prenant en compte quelques méthodes de la littérature. Pour réaliser cette classification, nous nous sommes inspirés d'un article des auteurs E.A. Misawa et J.K Hedrick [33] au quel nous ajoutons des méthodes contemporaines [13, 14, 2].

—> Le premier groupe rassemble les méthodes dites de Linéarisation.

Le principe consiste soit à transformer le système en un autre, dont la partie non linéaire dépend uniquement de la sortie, soit à le développer autour d'un point d'équilibre ou un ensemble de points d'équilibres.

On peut alors appliquer les méthodes d'observations standard des systèmes linéaires.

—> Le deuxième groupe concerne les méthodes dites à grand gain.

Introduite par Thau [45], plusieurs approches similaires [2, 3] sont développées de nos jours.

Que le gain soit fixe ou variable, le principe consiste à trouver un gain suffisamment large pour «dominer» la partie non linéaire, lorsque le système est observable uniformément et de type Lipschitz.

—> Le troisième groupe représente les méthodes dites à modes glissant [47]. Assez proche des méthodes à grand gain, le but ici est de déterminer un gain qui permette de faire «glisser» l'erreur d'observation sur un hyperplan sur lequel l'erreur est linéaire et asymptotiquement stable.

—> Dans le dernier groupe, nous avons les méthodes numériques. Celle que nous présentons ici [42], se base sur la minimisation d'un critère quadratique pour donner une estimation de l'état courant du système.

2.2 Stabilité et stabilisation des systèmes dynamiques

Dans cette partie, nous abordons les notions de stabilité et de stabilisation des systèmes dynamiques. Après avoir rappelé les différentes notions de stabilité, nous donnons les théorèmes généraux sur ce concept.

En ce qui concerne la stabilisation des systèmes dynamiques, nous formulons le problème et

ensuite nous rappelons des conditions nécessaires et suffisantes pour stabiliser les systèmes dynamiques.

Nous commençons par donner une définition de la notion de système dans la section suivante.

2.2.1 Notion de Système

Définition 2.1 Nous désignerons par système un quadruplet $\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{U}, \mathcal{F}$ où

- i) \mathcal{M} est une variété différentiable de classe C^∞
 - ii) \mathcal{C} est l'espace des contrôles
 - iii) \mathcal{U} un espace de contrôles admissibles. Dans toute notre étude un contrôle admissible sera une application définie de $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
 - iv) \mathcal{F} est une famille de champs de vecteurs sur \mathcal{M} indexée par les contrôles
- Nous supposons que \mathcal{C} est un espace métrique et comme nous allons principalement nous intéresser aux systèmes «entrée-sortie», nous allons considérer de plus :
- v) un espace de sortie E qui sera un espace vectoriel réel de dimension finie et une application $h : \mathcal{M} \rightarrow E$ de classe C^∞

2.2.2 Notions de stabilité

Considérons le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{X}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) &= 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ est l'état du système et $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ désigne un point d'équilibre du système où l'on souhaite caractériser la stabilité. (comme nous l'avons déjà précisé plus haut, nous considérons dans la suite que $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$)

Nous notons dans toute cette section $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ la solution du système (2.3) à un instant t , telle que $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Définition 2.2 (Stabilité) On dit que \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0; \text{ tel que } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \alpha \Rightarrow \forall t \geq 0; \|\mathbf{X}_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| < \epsilon$$

Autrement dit, si on part d'assez près de \mathbf{x}_0 , on reste toujours aussi près de \mathbf{x}_0 qu'on veut.

Définition 2.3 (attractivité) On dit que \mathbf{x}_0 est attractif pour le système (2.3) s'il existe un scalaire strictement positif α tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \alpha, \mathbf{X}_t(\mathbf{x}) \text{ existe pour tout } t \geq 0, \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 \text{ (attractivité local)}$$

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on dit que \mathbf{x}_0 est globalement attractif

Définition 2.4 (Asymptotique stabilité) On dit que \mathbf{x}_0 est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif

\mathbf{x}_0 est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif

Définition 2.5 (Exponentielle stabilité) Si \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.3) et s'il existe deux constantes positives K et λ telles que l'on ait :

$$\|\mathbf{X}_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| \leq K \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| e^{-\lambda t}$$

pour tout \mathbf{x} dans un voisinage de \mathbf{x}_0 et tout $t > 0$, alors on dira que le système (2.3) est exponentiellement stable en \mathbf{x}_0

La stabilité des systèmes linéaires a une caractérisation simple donnée par le critère de Hurwitz. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.4)$$

La matrice \mathbf{A} est appelée la matrice du système (2.4)

Définition 2.6 On dit que \mathbf{A} est une matrice de Hurwitz si et seulement si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

Et un système linéaire est localement asymptotiquement stabilisable en l'origine si et seulement si sa matrice est une matrice de Hurwitz.

Pour un système dynamique quelconque, le théorème de Lyapunov donne une condition suffisante de stabilité. Pour garder une certaine cohérence à l'ensemble de ce travail, nous donnons une définition de la fonction dite de Lyapunov, que nous voulons différente d'une autre fonction que nous définirons plus tard comme fonction de LaSalle. À cet effet, soit \mathcal{V} un voisinage de \mathbf{x}_0 , Il s'énonce :

Définition 2.7 (Fonction de Lyapunov) Soit une fonction $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathcal{V} , admettant en tout point de \mathcal{V} une dérivée de Dini. Si la fonction V satisfait les propriétés

1. $V(\mathbf{x}_0) = 0$ et $V(\mathbf{x}) > 0$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ sur \mathcal{V} ;
2. $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$

elle est appelée fonction de Lyapunov pour le système (2.3) au point d'équilibre \mathbf{x}_0 .

Si de plus on a la propriété, $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{x}_0\}$, alors la fonction V est dite fonction de Lyapunov stricte pour le système (2.3) au point d'équilibre \mathbf{x}_0

Si par contre, on a la propriété $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{x}_0\}$, alors la fonction V est dite fonction de Lyapunov large pour le système (2.3) au point d'équilibre \mathbf{x}_0

Theorème 2.1 *S'il existe une fonction de Lyapunov (large) V , définie sur un voisinage \mathcal{V} du point d'équilibre \mathbf{x}_0 , alors \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre stable pour le système (2.3)*

Si de plus, il s'agit d'une fonction de Lyapunov stricte, alors le point d'équilibre \mathbf{x}_0 est asymptotiquement stable pour le système (2.3)

Il est à noter que dans les définitions et théorème ci-dessus, suivant que \mathcal{V} , le voisinage de \mathbf{x}_0 est restreint ou étendu à l'espace des états tout entier, il s'agit des définitions et résultats globaux respectivement.

On a le théorème inverse suivant, dû à Massera

Theorème 2.2 (Massera) *Si \mathbf{X} est continue, et si \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.3), alors le système (2.3) admet une fonction de Lyapunov stricte qui est de classe C^∞ dans un voisinage de \mathbf{x}_0*

D'après ces théorèmes, pour montrer qu'un point d'équilibre du système (2.3) est asymptotiquement stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov stricte. Les fonctions de Lyapunov strictes sont assez difficiles à déterminer pour un système donné.

Cependant, il est moins difficile de trouver des fonctions de Lyapunov larges. Lorsque un système tel que (2.3) admet une fonction de Lyapunov large, on a le résultat suivant qui permet de conclure à l'asymptotique stabilité

Theorème 2.3 (Principe d'invariance de Lasalle) *Soit V une fonction de Lyapunov large, de classe C^1 , pour le système (2.3) en \mathbf{x}_0 . Alors toutes les trajectoires bornées pour $t \geq 0$ tendent vers un ensemble Ω , le plus grand ensemble invariant pour le système (2.3) contenu dans $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$*

Si de plus V est propre ou radialement non bornée, (i.e. $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}) = +\infty$), alors toutes les trajectoires sont bornées pour $t \geq 0$; il s'ensuit donc que toutes les trajectoires tendent vers Ω . Pour montrer que \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre attractif, il suffit de montrer que $\Omega = \{\mathbf{x}_0\}$. Pour la suite de ce chapitre nous considérons $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, l'origine de \mathbb{R}^n .

2.2.3 Stabilisation des systèmes contrôlés

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de la stabilisation par bouclage. Le système étant soumis à un contrôle admissible, nous allons étudier ici le comportement du système au voisinage d'un point d'équilibre.

Considérons le système dynamique dont l'évolution est décrite par le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (2.5)$$

\mathcal{U} désigne l'ensemble des contrôles admissibles et $\mathbf{X}(0, 0) = 0$

Nous allons à travers cette section, rappeler les principaux résultats qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour trouver une loi de commande $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ telle que l'origine soit un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.5), bouclé par le contrôle $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Cette loi de contrôle sera appelée une rétro-action

Définition 2.8 (Stabilisabilité) *On dit que le contrôle système (2.5) est stabilisable s'il existe une loi de rétro-action $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ au moins continue tel que le système bouclé :*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$$

admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

On suppose que l'EDO bouclée admet des solutions uniques.

Le problème de stabilisation est déjà totalement résolu pour les systèmes linéaires (i.e. où $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$). On ne peut pas en dire de même pour des systèmes non linéaires. le Problème qui sous-tend ce travail est un problème de stabilisation de système contrôlé non linéaire.

Définition 2.9 *On appelle système linéarisé du système (2.5) à l'origine, le système défini par*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous pouvons énoncer un premier résultat démontré par Brockett [9] et qui donne des conditions nécessaires de stabilisabilité

Théorème 2.4 *Si le système (2.5) admet une rétro-action stabilisatrice de classe C^1 dans un voisinage de $\mathbf{0}$ alors :*

i) \rightarrow *Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.*

ii) \rightarrow *Il existe un voisinage N de $\mathbf{0}$ tel que pour tout $\xi \in N$, il existe un contrôle $\mathbf{u}_\xi(\cdot)$ défini sur $[0, \infty[$ qui ramène le système de l'état $\mathbf{x} = \xi$ en $t = 0$ à l'état $\mathbf{x} = 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Autrement dit, si $\mathbf{x}(t)$ est solution de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_\xi)$ vérifiant $\mathbf{x}(0) = \xi$ alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

iii) \rightarrow *Il existe un voisinage \mathcal{V} de l'origine dans \mathbb{R}^n tel que l'application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

soit surjective

Nous allons énoncer maintenant le théorème de Jurdjevic–Quinn, un des premiers résultats significatifs qui donne une condition suffisante de stabilisation pour les systèmes affines en contrôle et dont la dérive est linéaire et dissipative.

Théorème 2.5 (Jurdjevic–Quinn [22]) *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) + u\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, avec \mathbf{A} une matrice carrée d'ordre n avec n valeurs propres imaginaires distinctes.

Si

$$\{ad_{\mathbf{x}}^k \mathbf{Y}(\mathbf{x}), k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$$

alors le système (2.7) est globalement asymptotiquement stable pour la loi de rétro-action

$$u = - \langle \mathbf{x}, \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rangle$$

Rappelons la définition suivante relative à l'opérateur ad du théorème ci-dessus.

Définition 2.10 *Soit un champ de vecteurs de classe C^1 \mathbf{X} défini sur \mathbb{R}^n , soit une application $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1*

La dérivée de Lie de la fonction h suivant le champ \mathbf{X} est l'application qu'on note

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

définie pour tout $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par : $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x})$

On a

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{L}_{\mathbf{X}}^{k+1}h(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}^k h(\mathbf{x})) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Définition 2.11 *On définit sur l'ensemble de champs de vecteurs de classe C^{m-1} sur \mathbb{R}^n , $\mathfrak{X}^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur $ad_{\mathbf{X}}^k$ par :*

$$\begin{aligned} ad_{\mathbf{X}}^k : \mathfrak{X}^m(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}^{m-1}(\mathbb{R}^n) \\ \mathbf{Y} &\longmapsto ad_{\mathbf{X}}^k \mathbf{Y} \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, ad_{\mathbf{X}}^k \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = [ad_{\mathbf{X}}^{k-1} \mathbf{Y}, \mathbf{Y}](\mathbf{x}), \quad [ad_{\mathbf{X}}^0 \mathbf{Y}, \mathbf{Y}](\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})$

et $ad_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}(\mathbf{x})$

Le théorème 2.5 ci-dessus a été depuis généralisé par d'autres auteurs, notamment dans [13, 37] de la manière suivante :

¹, $m \in \mathbb{N}, m = \infty$, ou $m = \omega$ pour les champs analytiques

Theorème 2.6 *Soit*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u^i \mathbf{Y}^i(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

un système de classe C^∞ défini sur \mathbb{R}^n , avec $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

S'il existe une fonction de Lyapunov large V définie sur \mathbb{R}^n pour le système (2.8) d'entrée nulle, telle que l'ensemble

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathcal{L}_{\mathbf{X}}^{k+1} V(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}^k \mathcal{L}_{\mathbf{Y}^i} V(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m \}$$

est réduit à $\{\mathbf{0}\}$

Alors

Le système (2.8) bouclé par les lois de rétro-action $u^i(\mathbf{x}) = -\mathcal{L}_{\mathbf{Y}^i} V(\mathbf{x})$ $i = 1, \dots, m$, est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Ces résultats sont d'un grand impact dans notre travail ; c'est même pour cette raison que nous adoptons la définition suivante proposée dans [37], des systèmes de type de **Jurdjevic–Quinn**, ou en plus court les **J–Q** systèmes.

Définition 2.12 *On appellera un J–Q système tout contrôle-système de classe C^∞ , affine en contrôle, vérifiant le théorème 2.6 ci-dessus*

Tout autant, d'un grand impact sont les résultats portant sur la stabilisation des systèmes avec intégrateur [18, 43]. Il s'agit des systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{u} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.9)$$

A cet effet, la notion de fonction de Lyapunov large est très utile pour la stabilisation de tels systèmes.

Pour la stabilisation de ces systèmes, il est d'usage de considérer le système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.10)$$

qu'on appelle le système réduit du système (2.9)

On a les résultats obtenus dans les papiers [25, 41, 43] qui se résument en :

Theorème 2.7 *Si un système C^∞ de type (2.10) est stabilisable en l'origine de \mathbb{R}^n par une loi de rétro-action de classe C^∞ , alors le système (2.9) est stabilisable en l'origine de \mathbb{R}^{n+p} par une loi de rétro-action de classe C^∞ .*

Ce résultat est aussi connu sous le nom de «backstepping».

Pour étudier la stabilité du système (2.9), on recourt aux outils de stabilisation du système réduit (i.e. le système (2.10)) à savoir fonction de Lyapunov relative au système réduit (large souvent pour les moindres difficultés à les trouver. . .) et loi de rétro-action stabilisante du système réduit, afin de construire des outils de stabilisation du système d'origine, i.e. le système (2.9). L'un des outils de stabilisation répond à :

Définition 2.13 *On dira qu'un système C^∞ de type (2.10) est un système de type LaSalle si il existe :*

1. une fonction $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^r ($r \geq 1$) avec $k(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. une fonction scalaire V définie sur \mathbb{R}^n , de classe C^1 définie positive et propre, telle que :
 - (a) elle soit fonction de Lyapunov large, pour le champs de vecteur \mathbf{Y} définie sur \mathbb{R}^n par $\mathbf{Y} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, k(\mathbf{x}))$ (i.e. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}V(\mathbf{x}) \leq 0$)
 - (b) Le plus grand ensemble invariant pour le champ \mathbf{Y} contenu dans l'ensemble $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}V(\mathbf{x}) = 0\}$ est réduit à l'origine de \mathbb{R}^n

dans ce qui suit on notera **L-T** système pour désigner les systèmes de type LaSalle.

De [18], on a un résultat avec ce type de système, qui est le suivant :

Theorème 2.8 *Si le système (2.10) est un L-T système de loi de rétro-action stabilisatrice $k(\mathbf{x})$, alors, le système (2.9) est aussi un L-T système dont une loi de rétro-action stabilisante est donnée par :*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -\mathbf{y} + k(\mathbf{x}) + dk(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \cdot \nabla V(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, k(\mathbf{x})) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - k(\mathbf{x})) \quad (2.12)$$

Dans notre utilisation de ce théorème le choix que nous faisons de la matrice \mathbf{G} est :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, t\mathbf{y} + (1-t)k(\mathbf{x})) dt \quad (2.13)$$

Démonstration:

On suppose donc que le système (2.10) est un **L-T** système; donc, il existe deux fonctions k et V satisfaisant les conditions 1) et 2) de la définition 2.13. Notons $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, k(\mathbf{x}))$, et Ω le plus grand ensemble invariant pour la dynamique du système de champ de vecteurs $\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, contenu dans l'ensemble $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{X}}}V(\mathbf{x}) = 0\}$. Par hypothèse, on a $\Omega = \{\mathbf{0}\}$.

Soit

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

où

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{y} + k(\mathbf{x}) + dk(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \cdot \nabla V(\mathbf{x})$$

\mathbf{Z} est le champs de vecteur du système (2.9) bouclé par la loi de rétro-action donnée par (2.11); Soit la fonction

$$W : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} \mapsto W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - k(\mathbf{x})\|^2$$

W est une bonne fonction candidate de Lyapunov; en effet, elle est de classe \mathcal{C}^1 définie positive et propre. Sa dérivée pour tout $(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p}$,

$$\dot{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{L}_{\mathbf{Z}}W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}V(\mathbf{x}) - \|\mathbf{y} - k(\mathbf{x})\|^2 \leq 0$$

Donc l'origine de \mathbb{R}^{n+p} est un point d'équilibre stable pour le système (2.9) bouclé par la loi de rétro-action (2.11). Il faut pour en finir établir l'attractivité l'origine pour le système.

Soit

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \{(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} / \mathcal{L}_{\mathbf{Z}}W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \\ &= \{(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} / \mathcal{L}_{\mathbf{X}}V(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } \mathbf{y} = k(\mathbf{x})\} \end{aligned}$$

Notons $\tilde{\Omega}$ le plus grand ensemble des points invariants du système (2.9) bouclé par la loi de rétro-action donnée par (2.11), contenu dans \tilde{E} . Pour établir l'attractivité globale de l'origine, il suffit d'établir que $\tilde{\Omega}$ est réduit au singleton constitué de l'origine de \mathbb{R}^{n+p} . Soit $(\mathbf{x}_0; \mathbf{y}_0) \in \tilde{\Omega}$. Sur $\tilde{\Omega}$ la dynamique du système (2.9) bouclé par la loi de rétro-action donnée par (2.11) est décrite par le champs de vecteur

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, k(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = dk(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \cdot \nabla V(\mathbf{x})$$

Notons $(\mathbf{x}(t); \mathbf{y}(t))$ la solution du système correspondant d'état initial $(\mathbf{x}_0; \mathbf{y}_0)$. Puisque $\tilde{\Omega}$ est invariant pour le système de champs de vecteur \mathbf{Z} , on a $(\mathbf{x}(t); \mathbf{y}(t)) \in \tilde{\Omega}$ pour tout $t \geq 0$

On a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t)) = \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}(t))$$

d'où $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{X}}_t(\mathbf{x})$ avec $\hat{\mathbf{X}}_t(\cdot)$ le flot du champ de vecteurs $\hat{\mathbf{X}}$ définie sur \mathbb{R}^n .

Considérons l'ensemble

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / (\mathbf{x}; k(\mathbf{x})) \in \tilde{\Omega}\}$$

Soit $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in M$, on a $(\tilde{\mathbf{x}}_0; k(\tilde{\mathbf{x}}_0)) \in \tilde{\Omega}$, et $(\hat{\mathbf{X}}_t(\tilde{\mathbf{x}}_0); \tilde{\mathbf{y}}(t)) \in \tilde{\Omega}$; cela parce que $\tilde{\Omega}$ est invariant pour le système de champs de vecteur \mathbf{Z} , avec $\tilde{\mathbf{y}}(t) = k(\hat{\mathbf{X}}_t(\tilde{\mathbf{x}}_0))$. Ce qui montre que M est invariant pour

le système de champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{X}}$. Or, M est l'ensemble des points invariants du système (2.10) bouclé par la loi de rétro-action $k(\mathbf{x})$ qui sont inclus dans l'ensemble $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{X}}}V(\mathbf{x}) = 0\}$. on a donc $M = \{\mathbf{0}\}$ d'où $\tilde{\Omega} = \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$ \square

Nous allons aborder maintenant la deuxième partie de ce chapitre; c'est-à-dire la reconstruction des états des systèmes dynamiques. Mais avant de rappeler les différentes méthodes de reconstruction, nous allons d'abord introduire le concept qui étudie la «*faisabilité*» de la reconstruction, c'est-à-dire l'observabilité

2.3 Observabilité des systèmes dynamiques

Considérons le système dynamique sur lequel on fait les bonnes hypothèses de régularité décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.14)$$

Dans cette section, nous allons adopter la notation suivante :

Lorsque $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ désigne l'état du système à un instant t pour un contrôle \mathbf{u} , la sortie sera notée :

$$\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{X}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})) = \sigma(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t)$$

Définition 2.14 Deux états \mathbf{x}_0 et \mathbf{x}_1 distincts du système (2.14) sont dits distinguables s'il existe un contrôle \mathbf{u} et un temps t , $t \geq 0$ tels que :

$$\sigma(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) \neq \sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}, t)$$

Ce concept de distinguabilité permet de définir la notion d'observabilité.

Définition 2.15 Un système de type (2.14) est observable s'il n'existe aucune paire d'états indistinguables.

Cette définition de l'observabilité est difficile à obtenir dans la pratique; on vérifie plus souvent l'observabilité des systèmes de façon locale.

Avant d'aborder la notion de système localement observable nous allons d'abord définir les entrées universelles.

Définition 2.16 Une entrée $\mathbf{u}(\cdot)$ est dite universelle pour le système (2.14) sur un intervalle $[0, T]$, avec $T > 0$ donné si elle distingue tout couple $(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0)$ d'états initiaux du système (2.14) tel que $\mathbf{x}_0 \neq \tilde{\mathbf{x}}_0$. (i.e. $\forall \mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x}_0 \neq \tilde{\mathbf{x}}_0, \exists t \in [0, T]$ tel que $\sigma(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot), t) \neq \sigma(\tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(\cdot), t)$)

Définition 2.17 Le système (2.14) est dit uniformément observable sur un intervalle $[0, T]$, avec $T > 0$ donné si toute entrée admissible $\mathbf{u}(\cdot)$ est une entrée universelle pour le système sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Définition 2.18 Une entrée $\mathbf{u}(\cdot)$ est dite singulière pour le système (2.14) si elle ne permet de distinguer aucun couple d'états initiaux distincts du système (2.14).

Définition 2.19 Le système (2.14) est dit localement observable en \mathbf{x}_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\mathbf{x}_0}$ de \mathbf{x}_0 tel que tout état $\bar{\mathbf{x}}_0$, distinct de \mathbf{x}_0 , appartenant à $\mathcal{V}_{\mathbf{x}_0}$ est distinguable de \mathbf{x}_0

Une notion plus faible d'observabilité des systèmes dynamiques est donnée par :

Définition 2.20 Le système (2.14) est dit localement faiblement observable en un point \mathbf{x}_0 si pour tout voisinage $\mathcal{V}_{\mathbf{x}_0}$ de \mathbf{x}_0 , il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbf{x}_0}$ de \mathbf{x}_0 contenu dans $\mathcal{V}_{\mathbf{x}_0}$ tel que l'ensemble des états de (2.14) dans $\tilde{\mathcal{V}}_{\mathbf{x}_0}$ qui sont indistinguables de \mathbf{x}_0 pour toute trajectoire $\mathbf{X}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ ne contient que \mathbf{x}_0

2.3.1 Espace d'observation

Définition 2.21 L'espace d'observation notée $\mathcal{O}(h)$ relatif au système (2.14) est le plus petit sous espace vectoriel de l'espace des fonctions scalaires définies sur \mathbb{R}^n , contenant les observations h_i et fermé par la dérivation de Lie le long de tous les éléments de l'ensemble $\{\mathbf{X}(\cdot, \mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m\}$ i.e.

$$\mathcal{O}(h) = \left\langle \left\{ \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{\mathbf{u}_k}} \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{\mathbf{u}_{k-1}}} \dots \mathcal{L}_{\mathbf{X}_{\mathbf{u}_1}} h_i(\mathbf{x}) \mid 1 \leq i \leq p; k \geq 1; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m \right\} \right\rangle^2 \quad (2.15)$$

Une autre définition de l'observabilité, qui utilise l'espace d'observation est donnée par :

Définition 2.22 Le système (2.14) est dit observable au sens du rang en \mathbf{x}_0 si :

$$\dim d\mathcal{O}(h)(\mathbf{x}_0) = n$$

$$\text{où } d\mathcal{O}(h)(\mathbf{x}_0) = \{d\Psi(\mathbf{x}_0), \Psi \in \mathcal{O}(h)\}$$

Proposition 2.1 Si le système (2.14) est observable au sens du rang en \mathbf{x}_0 , alors il est localement faiblement observable en \mathbf{x}_0

Cas particulier des systèmes linéaires autonomes

Pour les systèmes linéaires la notion d'observabilité est globale

²espace vectoriel engendré par l'ensemble entre les angles

Considérons par exemple le système linéaire décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.16)$$

On montre assez facilement que l'espace d'observation dans ce cas est tel que en tout état \mathbf{x}_0 on ait :

$$d\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) = \mathfrak{S}[\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{A})^T \dots (\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1})^T]^T \quad (2.17)$$

Le système est observable si et seulement si la matrice suivante

$$\mathbf{M}_{obs} = [\mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{A})^T \dots (\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1})^T]^T \quad (2.18)$$

dite matrice d'observabilité du système (2.16) est de rang n

Pour les systèmes linéaires ce critère de rang est connu sous le nom de critère de Kalman d'observabilité.

Remarque 2.1 Il est d'usage lorsqu'on est dans une configuration d'observabilité de considérer la paire (\mathbf{C}, \mathbf{A}) comme la description de tout système de type (2.16).

Remarque 2.2 Puisque la matrice d'observabilité (2.18) est constante et ne dépend pas de l'état, dans ce cas si le système est observable en un point, il est observable en tout point.

Nous avons aussi les équivalences entre les propriétés suivantes :

- 1) \rightarrow le système linéaire (2.16) est observable,
- 2) \rightarrow le système linéaire (2.16) est complètement faiblement observable,
- 3) \rightarrow le système linéaire (2.16) est uniformément observable,
- 4) \rightarrow le système linéaire (2.16) vérifie la condition du rang.

On dit alors que la paire de matrices (\mathbf{C}, \mathbf{A}) est observable.

Une autre caractérisation de l'observabilité des systèmes linéaires, connue sous le nom de critère de Hautus pour l'observabilité, est la suivante

Proposition 2.2 *Le système (2.16) est observable si et seulement si pour tout $s \in \mathbb{C}$, le rang de la matrice*

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

est égal à n

Cas des systèmes linéaires non autonomes

Considérons à présent le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.19)$$

Définition 2.23 *Le système (2.19) est complètement observable sur un intervalle $[0, T]$ s'il est observable à tout instant $t \in [0, T]$*

Un objet mathématique permettant de caractériser les systèmes complètement observables est le grammien d'observabilité

Définition 2.24 *On appelle grammien d'observabilité du système (2.19) la matrice suivante*

$$\mathbf{W}(t, t+T) = \int_t^{t+T} \Phi^T(\tau, t) \mathbf{C}^T(\tau) \mathbf{C}(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau$$

où $\Phi(., .)$ est la solution du système :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \Phi(\tau, t) = \mathbf{A}(\tau) \Phi(\tau, t) \\ \Phi(t, t) = \mathbf{I} \end{cases} \quad (2.20)$$

Proposition 2.3 *Le système (2.19) est complètement observable s'il existe $T > 0$ et $t_0 > 0$ tels que le grammien d'observabilité correspondant, c'est-à-dire $\mathbf{W}(t_0, t_0 + T)$, est une matrice définie positive*

Définition 2.25 *S'il existe $T > 0$, $\eta > 0$ et $t_0 > 0$ tels que*

$$\forall t \geq t_0, \quad \mathbf{W}(t, t+T) \geq \eta \mathbf{I} > 0$$

alors le système (2.19) est dit complètement uniformément observable

Pour un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.21)$$

Le système homogène associé est donné par le système (2.19).

On a la proposition suivante.

Proposition 2.4 *Le système (2.21) est observable à l'instant t_0 si et seulement si le système homogène associé, système (2.19) est observable à l'instant t_0*

Proposition 2.5 *Le système (2.21) est observable à l'instant t_0 si et seulement si la sortie du système homogène associé, c'est-à-dire la sortie du système (2.19) soit $y(t, x_0, t_0)$, correspondant à un état initial non nul n'est pas identiquement nulle*

2.3.2 Systèmes non linéaires

Système affine en l'état

Ces systèmes sont, en général, décrits par l'ensemble d'équations

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(u(t))\mathbf{x} + \mathbf{B}(u(t)) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(u(t))\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.22)$$

Le système homogène associé au système (2.22) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(u(t))\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(u(t))\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.23)$$

Grâce à la linéarité des systèmes affines par rapport à l'état on montre que le système (2.22) est observable si et seulement si le système (2.23) est observable

Remarque 2.3 On considère les systèmes affines en l'état comme une famille particulière de systèmes linéaires temps variant indexée par l'espace fonctionnel des commandes.

On définit alors par analogie le grammien d'observabilité des systèmes affines en l'état, soit :

Définition 2.26 *Le grammien d'observabilité pour le système (2.22) est donné par :*

$$\mathbf{W}_u(t, t+T) = \int_t^{t+T} \Phi_u^T(\tau, t) \mathbf{C}_u^T(\tau) \mathbf{C}_u(\tau) \Phi_u(\tau, t) d\tau \quad (2.24)$$

où $\Phi_u(., .)$ est la solution du système :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \Phi_u(\tau, t) = \mathbf{A}_u \Phi_u(\tau, t) \\ \Phi_u(t, t) = \mathbf{I} \end{cases} \quad (2.25)$$

Proposition 2.6 *Une entrée $u(t)$ est universelle pour le système (2.22) s'il existe $T > 0$ et $t_0 > 0$, tels que pour tout $t \geq t_0$: $\sigma_{\min}(\mathbf{W}_u(t, t+T)) > 0$*

Remarque 2.4 $\sigma_{\min}(\mathbf{W}_u(t, t+T))$ est appelé l'indice d'universalité du système sur l'intervalle de temps $[t, t+T]$.

En particulier s'il existe $T > 0$; $t_0 > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, $\sigma_{\min}(\mathbf{W}_u(t, t+T)) > \alpha$ alors l'entrée u est dite régulièrement persistante

Système non linéaire uniformément observable

La propriété d'uniforme observabilité est relative à l'entrée du système. Les systèmes considérés ici sont les systèmes non linéaires généraux ; c'est à dire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y}(t) = h(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.26)$$

Définition 2.27 Le système (2.26) est dit uniformément observable si pour tout $t > t_0$, toute entrée admissible \mathbf{u} est universelle sur $[t_0, t]$

Nous allons donner une caractérisation de cette définition pour un type particulier de tels systèmes

Systèmes non linéaires affine en contrôle

Considérons le système non linéaire affine en contrôles décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) + u(t)\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.27)$$

Nous avons la caractérisation suivante

Theorème 2.9 ([3, 7]) Le système (2.27) est uniformément observable pour toute entrée si et seulement si il existe un difféomorphisme qui le transforme en :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) + u(t)\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.28)$$

où les fonctions $\hat{\mathbf{X}}$ et $\hat{\mathbf{Y}}$ sont définies de la façon suivante

$$\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \phi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

et $\hat{\mathbf{C}} = (1, 0, \dots, 0)$

Remarque 2.5 La forme (2.28) donnée ci-dessus est appelée la forme canonique d'observabilité uniforme

Dans un cadre plus général, c'est à dire le cadre des systèmes de la forme (2.26), lorsque $p = 1$, le théorème suivant a été démontré par les auteurs Gauthier et Kupka [15]

Theorème 2.10 ([15]) Si le système (2.26) est U -uniformément observable alors il existe un changement de variable qui le transforme en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{u}, x_1, x_2) \\ f_2(\mathbf{u}, x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ f_i(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_{i+1}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \\ y = f_0(\mathbf{u}, x_1) \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Où la fonction f est telle que :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(\mathbf{u}, x_1, \dots, x_{i+1}) \neq 0$$

2.4 Observateurs des systèmes dynamiques

2.4.1 Introduction

La reconstruction des états des systèmes dynamiques constitue une partie très importante de la théorie du contrôle. Wiener en 1946, a été le pionnier de l'étude de ce problème. Kalman en 1961 [23], a donné une solution dans le cas stochastique et plusieurs méthodes de reconstruction d'états de systèmes déterministes de nos jours sont une extension du filtre de Kalman Luenberger [32] (1966) a donné une solution du problème pour les systèmes linéaires déterministes. Cette solution est optimale et résout complètement le problème de l'observation des systèmes linéaires.

Pour les systèmes non linéaires, le problème est plus complexe. Le problème de l'observation va dépendre de l'entrée du système, et de sa non linéarité. Plusieurs approches ont été développées dans la littérature concernant l'observation de ces systèmes. Nous n'introduisons pas de nouveaux résultats dans ce chapitre mais nous nous appuyons sur ce qui existe dans la littérature [1, 3, 5,

7, 8, 21, 17, 20, 33, 30, 40, 44] pour présenter une revue bibliographique sur l'observation des systèmes dynamiques.

Nous traitons au début de cette partie, le cas des systèmes linéaires. Ensuite pour les systèmes non linéaires, nous avons classé les différentes approches d'observation suivant qu'elles sont à gain fixe ou à gain variable.

Le premier groupe concerne les méthodes qui linéarisent le système par une injection de la sortie [16, 26]. Cette approche consiste à linéariser le système soit par une transformation non linéaire (une approche globale), soit autour d'un point d'équilibre ou autour de l'ensemble des points d'équilibres (approche locale) [1]. Les méthodes d'observations des systèmes linéaires peuvent être alors adaptées aux cas des systèmes non linéaires.

Dans le deuxième groupe, nous retrouvons les méthodes dites à grand gain. Cette approche que l'on retrouve très souvent dans la littérature [3, 2] consiste dans un premier temps à transformer le système, lorsqu'il est uniformément observable, sous une forme canonique composée d'une partie linéaire et d'une partie non linéaire lipschtzienne. Le problème de l'observation revient alors à déterminer un gain suffisamment important pour dominer la non linéarité.

Le troisième groupe représente les méthodes d'observation à mode glissant. Les auteurs [46, 47] utilisent la méthode de grands gains d'observateur pour faire «glisser» l'erreur d'observation vers un hyperplan sur lequel cette dernière est linéaire et exponentiellement stable

Dans le dernier groupe, les méthodes utilisées donnent une solution numérique au problème de reconstruction des états du système étudié. Certains auteurs minimisent un critère coût quadratique pour trouver une estimation de l'état courant sur un horizon temps fini.

2.4.2 Systèmes linéaires

Cas des systèmes autonomes

Pour ces systèmes, l'approche proposée par Luenberger [31, 32] est simple et optimale. Aussi, c'est cette approche que nous allons développer la plupart du temps dans notre travail.

Considérons le système (2.16)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \text{ et } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

On va supposer également que la paire de matrices (\mathbf{C}, \mathbf{A}) est détectable

La paire (\mathbf{C}, \mathbf{A}) étant détectable, on peut trouver une matrice \mathbf{K} , de façon que le spectre de la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ soit dans le demi-plan complexe gauche. Cette opération est appelée placement de pôles.

Un observateur de type Luenberger pour ce système est décrit par l'équation :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ \hat{\mathbf{x}}_{t_0} &= \hat{\mathbf{x}}_0\end{aligned}\quad (2.30)$$

Cas des systèmes non autonomes

Un placement de pôle dans ce cas ne sert à rien dans la pratique puisque nous avons des matrices qui varient dans le temps.

Une solution au problème d'observation des systèmes linéaires temps variant est donné par l'observateur de type Kalman étendu

Soit le système (2.21)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \end{cases}$$

Theorème 2.11 ([6]) *Si le système (2.21) est complètement uniformément observable et si les matrices $\mathbf{A}(t)$ et $\mathbf{B}(t)$ sont bornées alors le système :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{P}\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}(t)^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}) \\ \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{P}\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{C}(t)\mathbf{P} + \mathbf{Q}(t) \end{cases}\quad (2.31)$$

est un observateur exponentiel global pour le système (2.21) avec $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0$ une matrice semi-définie. Les matrices $\mathbf{R}(t)$ et $\mathbf{Q}(t)$ sont des matrices bornées respectivement définies et semi-définies positives qui sont choisies de façon appropriée

systèmes affines en l'état

Considérons le système (2.22)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(u)\mathbf{x} + \mathbf{B}(u) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(u)\mathbf{x} \end{cases}$$

Les auteurs Bornard et al [6] ont démontré la proposition :

Proposition 2.7 *Toute entrée régulièrement persistante appliquée au système (2.22) engendre un système linéaire temps variant complètement uniformément observable.*

Le résultat suivant est démontré par les mêmes auteurs [6]

Theorème 2.12 *Soit le système (2.22) pour lequel la paire de matrices $(\mathbf{C}(u), \mathbf{A}(u))$ est uniformément observable dans le domaine des entrées admissibles. Alors pour toute entrée régulièrement persistante le système suivant :*

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}(u)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(u) + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}^T(u)(\mathbf{y} - \mathbf{C}(u)\hat{\mathbf{x}}) \\ \dot{\mathbf{S}} &= -\theta\mathbf{S} - \mathbf{A}^T(u)\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{A}(u) + \mathbf{C}^T(u)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(u)\end{aligned}\quad (2.32)$$

avec $\mathbf{S}(t_0) = \mathbf{S}_0 \geq 0$; $\mathbf{Q} \geq 0$ est un observateur exponentiel pour les système (2.22)

Démonstration:

Considérons l'erreur d'observation $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ et la fonction de Lyapounov

$$V(t) = \mathbf{e}(t)^T \mathbf{S}(t) \mathbf{e}(t).$$

On a

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}(u(t)) - \mathbf{S}^{-1}(t) \mathbf{C}^T(u(t)) \mathbf{Q} \mathbf{C}(u(t))) \mathbf{e}(t)$$

on trouve alors pour $\frac{d}{dt} V(t)$:

$$\frac{d}{dt} V(t) = -\theta \mathbf{e}^T(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}^T(t) \mathbf{C}^T(u(t)) \mathbf{Q} \mathbf{C}(u(t)) \mathbf{e}(t)$$

La matrice $\mathbf{C}^T(u(t)) \mathbf{Q} \mathbf{C}(u(t))$ étant non négative on peut écrire que :

$$\frac{d}{dt} V(t) \leq -\theta \mathbf{e}^T(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{e}(t)$$

soit

$$\frac{d}{dt} V(t) \leq -\theta V(t)$$

Les entrées étant régulièrement persistantes

$$\forall \theta > 0; \exists t_0 \geq 0 \exists \sigma > 0; \forall t \geq t_0, \mathbf{S}(t) \geq \sigma \mathbf{I}$$

Ainsi donc, pour $t \geq t_0$ $\|\mathbf{e}(t)\|^2 \leq \frac{V(0)}{\sigma} \exp(-\theta t)$ □

Remarque 2.6 Cette démonstration est encore valable pour prouver la convergence de l'observateur dans le cas des systèmes linéaires non autonomes

2.4.3 Systèmes non linéaires

Methodes linéarisant l'erreur d'observation

Nous présentons dans cette section les méthodes qui utilisent une linéarisation de l'erreur d'observation pour adapter les méthodes d'observations des systèmes linéaires aux cas non linéaires. Le principe de ces méthodes introduites par Bestle et Zeitz [4] est le suivant. En considérant le système (2.14)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

on cherche à trouver une transformation non linéaire \mathbf{T}_u telle que

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_u(\mathbf{z})$$

assure l'équivalence entre le système (2.14) et le système (2.33) suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} \end{cases} \quad (2.33)$$

où les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} ont les formes respectives suivantes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Une fois la transformation obtenue, la détectabilité de la paire (\mathbf{C}, \mathbf{A}) suffit pour la convergence de l'observateur de type Luenberger pour le système (2.33) qui est dans ce cas décrit par l'équations :

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}})$$

où \mathbf{K} est une matrice de placement de pôle relative à la détectabilité de la paire de matrices (\mathbf{C}, \mathbf{A}) .

Le système (2.33) est le système linéarisé du système (2.14).

Avant de donner les conditions suffisantes qui permettent d'obtenir la transformation désirée, nous introduisons les notations :

Pour une fonction $\mathcal{C}^\infty h$, on appelle indice d'observabilité de la fonction h , le plus petit p-uplet $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ tel que :

$$\sum_{i=1}^p \mu_i = n \text{ et } \dim [\langle \{\mathcal{L}_{\mathbf{x}}^j h(\mathbf{x}) ; j = 0, \dots, \mu_{i-1} ; i \in 1, \dots, p\} \rangle] = n \quad \text{pour tout } \mathbf{x}$$

Les auteurs Walcott, Corless, et Zac [46] ont montré que les conditions suivantes sont suffisantes pour que la transformation \mathbf{T}_u existe.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^0(dh)(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^1(dh)(\mathbf{x}) \\ \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^2(dh)(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{n-1}(dh)(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les auteurs Krener et Respondek [27] ont étendu cette condition au cas où le système est multi-sortie. Leur résultat est donné par le théorème :

Theorème 2.13 *Considérons le système (2.14) que nous rappelons*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Soient $\mathbf{Y}^1(\xi)$, $\mathbf{Y}^2(\xi)$, ..., $\mathbf{Y}^p(\xi)$ des champs de vecteurs définis par :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}^j} \mathcal{L}_{\mathbf{x}}^{n-1}(y^i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq l < k_i - 1 \\ \delta_i^j & \text{si } l = k_i - 1 \end{cases}$$

où

δ_i^j désigne le symbole de Kronecker, k_i désigne l'indice d'observabilité et $l = 0, \dots, k_i - 1$

Le changement de coordonnées $\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{z})$ existe si et seulement si

$$[\text{ad}_{-\mathbf{x}}^k \mathbf{Y}^i, \text{ad}_{-\mathbf{x}}^l \mathbf{Y}^j] = 0$$

pour tout $i, j = 1, \dots, p$; $k = 0, \dots, k_i - 1$ et $l = 0, \dots, k_j - 1$

Depuis, plusieurs autres chercheurs ont développé des extensions de ces méthodes. On peut citer les travaux de Reboulet et Champetier [38] où les auteurs ont développé une méthode consistant à linéariser le système au voisinage d'un point d'équilibre. On peut également citer la méthode de linéarisation étendue; cette méthode développée par Bauman et Rugh [1] consiste à corriger la dynamique de l'observateur par une fonction non linéaire déterminée de façon que les valeurs propres du système linéarisé tangent de l'erreur d'observation restent invariantes.

Observateurs de type Kalman étendu

Dans cette partie nous allons présenter essentiellement l'approche de Reif et al [21]. Comme dans le cas linéaire temps variant, Les auteurs Reif et al utilisent la solution d'une équation de Riccati pour construire le gain de l'observateur

Considérons le système non linéaire (2.14)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Les application $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont supposées au moins de classes \mathcal{C}^1

Le système (2.34) suivant a été proposé comme observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{P}\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - h(\hat{\mathbf{x}})) \\ \dot{\mathbf{P}} = (\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \alpha\mathbf{I})\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{F}^T(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \alpha\mathbf{I}) - \mathbf{P}\mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{P} + \mathbf{Q} \end{cases} \quad (2.34)$$

avec

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

$\alpha > 0$ et $\mathbf{Q} \geq \mu\mathbf{I}_n > 0$, $\mathbf{R} \geq r\mathbf{I}_p > 0$ sont des matrices constantes de pondération

Notons \mathbf{e} l'erreur d'observation on a alors :

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}$$

Puisqu'on a supposé \mathbf{X} et h de classe \mathcal{C}^1 on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) &= \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\mathbf{e} + \Phi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ h(\mathbf{x}) - h(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{e} + \chi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \end{aligned}$$

Theorème 2.14 *Considérons le système (2.14). Si on a :*

- i) *il existe un réel positif \bar{h} tel que $\|\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})\| \leq \bar{h}$*
- ii) *il existe des réels positifs ε_Φ , ε_χ , κ_Φ , $\kappa_\chi > 0$ tels que :*

$$\begin{cases} \|\Phi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\| \leq \kappa_\Phi \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| & \text{avec} \quad \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \varepsilon_\Phi \\ \|\chi(\mathbf{x}, \mathbf{e})\| \leq \kappa_\chi \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| & \text{avec} \quad \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \varepsilon_\chi \end{cases} \quad (2.35)$$

iii) *La solution de l'équation de Riccati vérifie*

$$\underline{\mathbf{p}} \leq \mathbf{P} \leq \bar{\mathbf{p}} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}} \quad \text{deux matrices définies positives}$$

alors le système (2.34) est un observateur exponentiel local pour le système (2.14)

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les principaux résultats que l'on trouve dans la littérature sur la stabilisation et l'observation des systèmes dynamiques. Plusieurs des résultats que nous avons cités ne nous servent pas dans notre travail ; cependant il est utile de mentionner leur existence dans la littérature.

Chapitre 3

Stabilisation d'un objet cylindrique surmonté d'une antenne flexible

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons l'objet qui sous-tend toute la première partie de notre thèse. Il nous a été donné de considérer le problème de la stabilisation d'un objet cylindrique, surmonté d'une antenne flexible, le classique «*Body Beam*», suivant une approche différente de la manière dont ce problème est souvent considéré. La stabilisation d'un objet cylindrique surmonté d'une antenne flexible a déjà fait l'objet d'un grand nombre de travaux, et la littérature contient beaucoup de résultats s'y rapportant (par exemple [10, 11, 28, 34, 35, 36] pour ne citer que ceux là). Dans tous ces travaux, l'approche est pratiquement toujours la même; Le système est modélisé suivant un système hybride EDO-EDP,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + \rho B \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \rho \omega^2(t) u(x, t) \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(L, t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \omega(t) (I_d + \rho \int_0^L u^2(x, t) dx) \right\} = \Gamma(t) \quad (3.2)$$

dans lequel, L est la longueur de l'antenne, ρ sa masse linéique, EI est sa raideur linéique, $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ est la vitesse angulaire du système à un instant t , I_d est le moment d'inertie du cylindre, $u(x, t)$ est le déplacement de l'antenne dans le plan de rotation de l'antenne à un instant t relativement à la variable x , $B \frac{\partial u}{\partial t}$ est le terme de frottement, et $\Gamma(t)$ est le couple de rappel appliqué sur le cylindre.

Les techniques utilisées dans la stabilisation sont basées sur la théorie des semi-groupes d'opérateurs non bornés, la loi de rétro-action stabilisatrice du système n'étant pas systématique.

Nous nous proposons de considérer le même problème avec une approche différente. Dans notre modélisation l'antenne est considérée comme la position limite d'une suite de représentations discrètes d'elle même, comme l'on peut le voir sur les figures 3.1 et 3.2.

Notre approche consiste à obtenir pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la stabilisation du système avec la forme discrète de l'antenne correspondant, que nous appelons alors Σ_n .

Le modèle d'état de chaque système Σ_n que nous appelons alors (Σ_n) est un système d'EDO non linéaires défini sur des variétés de dimension $2n + 1$ respectivement. Pour arriver à obtenir une telle modélisation, nous faisons l'hypothèse suivante sur la structure matérielle de l'antenne.

On suppose que l'antenne est réduite à une ligne abstraite de même masse et longueur que l'antenne réelle, et que la masse est également répartie sur toute la longueur de l'antenne.

Avec cette hypothèse, l'antenne flexible de longueur L et de masse M peut être approximée par un montage constitué d'un certain nombre $n \geq 1$ de bouts de tiges rigides de même longueur, $l_n = \frac{L}{n}$, et de même masse, $m_n = \frac{M}{n}$ soudés bout à bout dans des articulations élastiques, toute de même constante de flexibilité r_n .

Le système Σ_n qui est l'approximation d'ordre n du système original Σ est constitué de l'objet cylindrique surmonté en son centre par la nouvelle antenne, la n -approximation de l'antenne d'origine.

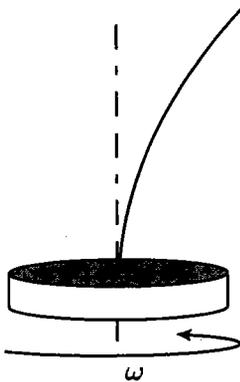


FIG. 3.1 – Le système Σ

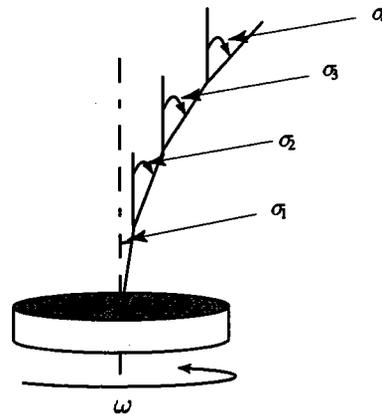


FIG. 3.2 – le système Σ_n pour $n=4$

L'idée est alors d'étudier la stabilisation des systèmes Σ_n pour les $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. et de constituer la suite des lois de commande de stabilisation correspondants.

Nous constituons la suite des lois de rétro-action de classe C^∞ de stabilisation correspondant à la suite des systèmes Σ_n . Nous présentons ensuite après avoir construit des observateurs pour les systèmes (Σ_n) , la stabilisation par retour d'états dynamique de ces derniers systèmes.

Nous organisons le chapitre de la manière suivante :

Dans la section 3.2, nous présentons la modélisation du système Σ_n . notre modélisation est basée sur le formalisme Lagrangien de la mécanique. Le modèle d'état que nous obtenons est un système

d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z}) + \omega^2 \mathbf{Y}(\mathbf{z}) \\ \dot{\omega} = u \\ (\mathbf{z}; \omega) \in \mathcal{M}, u \text{ et } v \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (3.3)$$

où \mathcal{M} est un sous ensemble de \mathbb{R}^{2n+1} et \mathbf{X} est un champ de vecteurs Hamiltonien dissipatif. les champs de vecteurs \mathbf{X} , et \mathbf{Y} sont précisés à l'issue de la modélisation.

Dans la section 3.3, nous présentons la stabilisation par rétro-action statique d'état du système (3.3) obtenu de la modélisation. Nous envisageons de stabiliser le satellite par une rétro-action dynamique d'état. Il est nécessaire à cet effet de disposer d'un observateur. Nous consacrons la section 3.4 à construire un observateur pour le système (3.3). Cette entreprise passe par différentes étapes. Il faut choisir un système entrée-sortie adéquat à partir du système (3.3) qui soit observable pour toute entrée, ensuite construire l'observateur du système (3.3) correspondant. Dans la section 3.5, nous utilisons les lois de rétro-action statiques obtenues dans la section 3.3 pour montrer la stabilisation au moyen des observateurs construits dans la section 3.4 ce qui est connu comme la stabilisation du système par rétro-action dynamique, ou encore principe de séparation.

3.2 Modélisation

Nous partons des hypothèses spécifiées dans la section précédente.

Nous supposons que la masse du $k^{\text{ième}}$ élément, segment rigide du bras articulé est concentrée à son articulation avec le $k + 1^{\text{ième}}$ élément, contrairement à l'approche qui consisterait à la considérer concentrée à son centre de masse. Cette approche est consistante, du moment où le centre de masse de chacun des éléments du bras articulé se confond avec son articulation lorsque le nombre de tige tend vers l'infini.

En rotation autour de l'axe du disque, l'antenne, que ce soit dans le cas des systèmes Σ_n , ou du système Σ , sous la charge de son poids, et des forces centrifuges subit une déformation.

La figure 3.3 donne une perception du système Σ_n suivant l'approche telle que décrite ci-dessus, pour $n = 4$.

On se met dans le cas où la rotation du système autour de l'axe du disque produit une déformation plane de l'antenne par rapport à la verticale du disque; cette situation se produit lorsque les articulations élastiques sont planaires. La figure 3.4 donne une perception du système Σ_n dans son mouvement de rotation, à un instant donné, pour $n = 4$

Pour raison de commodité, nous considérons le système Σ_n , comme constitué de $n + 1$ parties, indexés de 0 à n , dont la $0^{\text{ième}}$ partie est le disque, et les n autres sont les divers éléments

d'antennes rigides, chacun indexé par sa position dans l'assemblage à partir du disque, jusqu'à l'extrémité libre. Puisque le nombre n est fixé, nous en ferons abstraction dans l'écriture des paramètres du système.

Notons σ_k , l'angle de déviation du $k^{\text{ième}}$ élément du bras articulé avec l'axe du disque sous l'effet de la déformation; on a nécessairement $\sigma_0 = 0$

Notons ξ_k la position de la $k^{\text{ième}}$ articulation dans l'espace; ξ_0 est alors le point d'encrage de l'antenne sur le disque. On se place dans le repère affine, d'origine ξ_0 ; on a

$$\xi_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\xi_{i+1} - \xi_i), \quad k = 1, \dots, n$$

Considérons l'espace affine rapporté à la base orthonormée de \mathbb{R}^3 en coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$; Il vient, pour les $k = 1, \dots, n$

$$\xi_k = l \left[\left(\sum_{i=1}^k \cos \sigma_i \right) \vec{e}_z + \left(\sum_{i=1}^k \sin \sigma_i \right) \vec{e}_r \right]$$

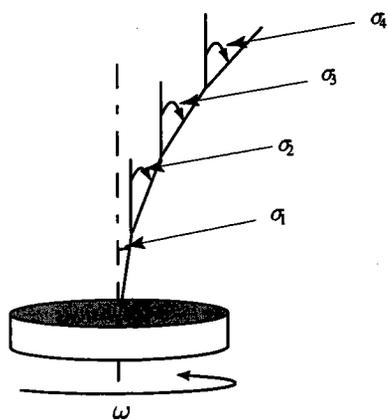


FIG. 3.3 - Le système Σ_4

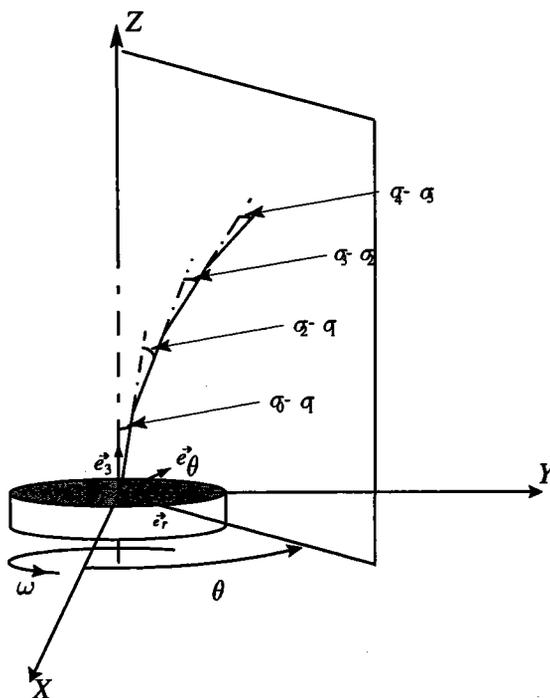


FIG. 3.4 - Le système Σ_4 à un instant donné

La dynamique du système est entièrement décrite par les lois de conservation d'énergie du système.

Soit à cet effet \mathcal{L} le Lagrangien du système Σ_n ; on a $\mathcal{L} = T - U$, où T et U sont respectivement les énergies cinétique et potentielle du système Σ_n . Venant à la considération faite plus haut

dans la description, nous écrivons

$$T = \sum_{k=0}^n T_k \quad \text{et} \quad U = \sum_{k=0}^n U_k$$

T_k , et U_k étant respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du $k^{\text{ième}}$ constituant du système Σ_n .

Nous écrivons d'abord ci-dessous les énergies cinétique et potentielle du systèmes Σ_n .

Expression de l'énergie cinétique du système Σ_n

On a : $T_0 = \frac{1}{2} I_d \dot{\theta}^2$ où I_d est le moment d'inertie de l'objet cylindrique que l'on peut supposer massique et de masse suffisamment importante par rapport à la masse de l'antenne.

Pour $k = 1, 2, \dots, n$, $T_k = \frac{1}{2} m \|\dot{\xi}_k\|^2$

On a

$$\dot{\xi}_k = l \left[\left(- \sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i \sin \sigma_i \right) \vec{e}_z + \left(\sum_{i=1}^k \sin \sigma_i \right) \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \left(\sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i \cos \sigma_i \right) \vec{e}_r \right]^1$$

et

$$\begin{aligned} \|\dot{\xi}_k\|^2 &= l^2 \left[\left(\sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i \sin \sigma_i \right)^2 + \dot{\theta}^2 \left(\sum_{i=1}^k \sin \sigma_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i \cos \sigma_i \right)^2 \right] \\ &= l^2 \left[\sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i^2 + 2 \sum_{i=1, i < j}^k \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j \cos(\sigma_i - \sigma_j) + \dot{\theta}^2 \left(\sum_{i=1}^k \sin \sigma_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Etant donné que l'antenne subit une déformation élastique pendant la rotation du système Σ , et donc aussi du système Σ_n , on suppose que les angles σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont assez petits pour qu'on puisse faire les approximations : $\sin \sigma_i \approx \sigma_i$, et $\cos \sigma_i = \cos(\sigma_i - \sigma_j) \approx 1$, i et j variant de 1 à n . Nous considérons dans la suite les approximations que :

$$\begin{aligned} \|\dot{\xi}_k\|^2 &= l^2 \left[\sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i^2 + 2 \sum_{i=1, i < j}^k \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j + \dot{\theta}^2 \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i \right)^2 \right] \\ &= l^2 \left[\left(\sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i \right)^2 + \dot{\theta}^2 \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$T_k = \frac{1}{2} m l^2 \left[\left(\sum_{i=1}^k \dot{\sigma}_i \right)^2 + \dot{\theta}^2 \left(\sum_{i=1}^k \sigma_i \right)^2 \right]$$

Posons

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{k,k} & \mathbf{0}_{k,n-k} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \mathbf{0}_{n-k,n-k} \end{pmatrix},$$

la matrice carrée réelle d'ordre n écrite comme matrice de bloc, dans laquelle, $\mathbf{a}_{k,k}$, est la matrice

¹Puisque n est fixé nous en faisons abstraction dans l'écriture des paramètres ; i.e. $m_n = m$ et $l_n = l$

carrée d'ordre k , avec tous les coefficients égaux à 1, et $\mathbf{0}_{p,q}$ est la matrice nulle de p lignes, et q colonnes.

Posons, \mathbf{s} le vecteur colonne $\mathbf{s} = (\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_n)$; il vient,

$$T_k = \frac{1}{2}ml^2 (\omega^2 \langle \mathbf{A}_k \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mathbf{A}_k \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}} \rangle)$$

$$T = T_0 + \sum_{k=1}^n T_k$$

$$= \frac{1}{2}I_d \omega^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}ml^2 (\omega^2 \langle \mathbf{A}_k \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mathbf{A}_k \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}} \rangle)$$

$$= \frac{1}{2}I_d \omega^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left[\omega^2 \left\langle \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k \right) \mathbf{s}, \mathbf{s} \right\rangle + \left\langle \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k \right) \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}} \right\rangle \right]$$

Posons $\hat{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_k$; l'énergie cinétique du système est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}I_d \omega^2 + \frac{1}{2}ml^2 (\omega^2 \langle \hat{\mathbf{A}} \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle + \langle \hat{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}} \rangle)$$

où $\hat{\mathbf{A}}$ est la matrice carrée d'ordre n donnée par :

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & n-j & \dots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \dots & n-j & \dots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & n-j & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-j & n-j & n-j & \dots & n-j & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Expression de l'énergie potentielle du système Σ_n

Soit r la constante de flexibilité; on a

pour $k = 0$, $U_0 = 0$

et pour $k = 1, 2, \dots, n$, $U_k = \frac{1}{2}r(\sigma_k - \sigma_{k-1})^2$;

considérons pour $k = 2, \dots, n$, les matrices carrées d'ordre n \mathbf{B}_k définies comme il suit :

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k-2,k-2} & \mathbf{0}_{k-2,2} & \mathbf{0}_{k-2,n-k} \\ \mathbf{0}_{2,k-2} & \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} & \mathbf{0}_{2,n-k} \\ \mathbf{0}_{n-k,k-2} & \mathbf{0}_{n-k,2} & \mathbf{0}_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1,n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

On a,

$$U_k = \frac{1}{2}r \langle \mathbf{B}_k \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle;$$

en posant $\hat{\mathbf{B}} = \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k \right)$, on a l'expression de l'énergie potentielle :

$$U = U_0 + \sum_{k=1}^n U_k = \frac{1}{2}r \left\langle \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k \right) \mathbf{s}, \mathbf{s} \right\rangle = \frac{1}{2}r \langle \hat{\mathbf{B}} \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle$$

avec $\hat{\mathbf{B}}$ la matrice carrée d'ordre n donnée par :

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient le Lagrangien du système Σ_n sous une forme «compacte»,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_d \omega^2 + \frac{1}{2}ml^2 \left(\omega^2 \langle \hat{\mathbf{A}} \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle + \langle \hat{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{s}}, \dot{\mathbf{s}} \rangle \right) - \frac{1}{2}r \langle \hat{\mathbf{B}} \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle \quad (3.4)$$

On peut noter dès à présent que pour toute valeur de n non nulle, $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ apparaissant dans l'expression (3.4) ci-dessus, sont des matrices carrées d'ordre n , symétriques, définies positives, la première, comme somme de matrices symétriques positives, dont l'une est définie positive, et la deuxième, comme matrice de déterminant non nul, somme de matrices symétriques positives.

On note également que le système Σ_n présente $n + 1$ degrés de libertés; les n premiers sont les angles d'inclinaison des diverses tiges constituant le bras articulé par rapport à la normale de l'objet cylindrique, qui sont les composantes du vecteur colonne \mathbf{s} , et le $n + 1^{\text{ème}}$, θ est la position à un instant donné du plan de déviation par rapport à l'axe des X .

L'équation de conservation d'énergie du système Σ_n s'exprime par les équations de Euler-Lagrange; à ce point, on fait le bilan des diverses actions externes qui peuvent agir sur le système. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons au cas où l'évolution du système Σ n'est soumis à aucun frottement, et dont la seule action externe au système est un couple de forces qu'on applique sur l'objet cylindrique dans le but de le mettre en rotation autour de son axe. C'est le cas le plus difficile de stabilisation [11].

Ces considérations faites sur les systèmes Σ_n , le formalisme de Euler-Lagrange correspondant s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{s}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\omega}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = g \end{cases} \quad (3.5)$$

où g est l'intensité du couple de forces qu'on applique au disque.

Un calcul simple nous permet d'obtenir du système d'équations (3.5) :

$$\begin{cases} ml^2 \widehat{\mathbf{A}}\ddot{\mathbf{s}} - ml^2 \omega^2 \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{s} + rl^2 \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{s} & = \mathbf{0} \\ (I_d + ml^2 \langle \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle) \dot{\omega} + 2\omega ml^2 \langle \widehat{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \rangle & = g \end{cases}$$

A présent, nous considérons les matrices $\mathbf{A} = l^2 \widehat{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{B} = l^{-2} \widehat{\mathbf{B}}$, le vecteur colonne $\mathbf{x} = (u_1; u_2; \dots; u_n)$ avec pour tout i , $0 \leq i \leq n$ $u_i = l\sigma_i$ l'approximation de la projection de ξ_i la position de la $i^{\text{ième}}$ tige du bras articulé sur l'axe (ξ_0, \vec{e}_r) . Soit ρ et $EI = rl$ les masse linéique, et constante de flexibilité linéaire du bras articulé,

on a :

$$\begin{cases} \rho \mathbf{A} \ddot{\mathbf{s}} - \rho \omega^2 \mathbf{A} \mathbf{s} + EI \mathbf{B} \mathbf{s} & = \mathbf{0} \\ (I_d + \rho l \langle \mathbf{A} \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle) \dot{\omega} + 2\omega \rho l \langle \mathbf{A} \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \rangle & = g \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \rho \mathbf{A} \ddot{\mathbf{x}} - \rho \omega^2 \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{x} + EI \mathbf{B} \mathbf{x} & = \mathbf{0} \\ (I_d + \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle) \dot{\omega} + 2\omega \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle & = g \end{cases}$$

Puisque la matrice \mathbf{A} est définie positive, on a pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $I_d + \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$; il vient

$$\begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{x}} = \omega^2 \rho \mathbf{x} - EI \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x} \\ \dot{\omega} = \frac{g - 2\omega \rho \langle \widehat{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{I_d + \rho \langle \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{cases}$$

Posons $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$, il s'ensuit le modèle d'état du système Σ_n , que nous notons (Σ_n) ,

$$(\Sigma_n) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} = \omega^2 \mathbf{x} - \frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x} \\ \dot{\omega} = \frac{g - 2\omega \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{I_d + \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{cases}$$

que l'on peut écrire de manière plus «compacte»,

$$(\Sigma_n) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(\omega^2)\mathbf{z} \\ \dot{\omega} = \frac{g - 2\omega\rho l \langle \widehat{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{I_d + \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \end{cases}$$

avec $\mathbf{H}(\omega^2)$ la matrice carrée d'ordre $2n$ écrite sous forme de matrice blocs donnée par :

$$\mathbf{H}(\omega^2) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \omega^2 \mathbf{I}_n - \frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

\mathbf{I}_n est la matrice carrée identité d'ordre n , et \mathbf{z} , le vecteur colonne à $2n$ composantes, dont les n premières sont les composantes du vecteur colonne \mathbf{x} , et les n suivantes, les composantes du vecteur colonne \mathbf{y} ; nous le notons $\mathbf{z} = (\mathbf{x}; \mathbf{y})^2$

L'espace des états du système (Σ_n) est $\mathcal{M} = \left(\prod_{k=1}^n]-\varepsilon_k, \varepsilon_k[\right) \times \mathbb{R}^{n+1}$ où les $\varepsilon_k, k = 1, \dots, n$ sont des réels positifs de petites valeurs.

Le système (Σ_n) se présente comme une cascade de deux sous-systèmes; en amont, on a le système intégrateur

$$\dot{\omega} = \frac{g - 2\omega\rho l \langle \widehat{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{I_d + \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

et en aval, le système

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(\omega^2)\mathbf{z}$$

qui est linéaire affine en l'état. Nous considérons à cet effet le système (Σ_n) dans un premier temps dans l'espace d'état étendu à \mathbb{R}^{2n+1} .

L'entrée du système (Σ_n) est la fonction $u = \frac{g - 2\omega\rho l \langle \widehat{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{I_d + \rho l \langle \widehat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, fonction de \mathbf{x} et de ω .

On considèrera l'espace des états $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n+1}$, l'espace d'état réel étant un sous ensemble non vide de ce dernier, ceci afin d'utiliser les propriétés d'espace vectoriel inhérentes au système (Σ_n) .

Nous noterons quelques fois la matrice $\mathbf{H}(\nu)$ par :

$$\mathbf{H}(\nu) = \mathbf{\Omega} + \nu \mathbf{\Psi} \quad (3.6)$$

Ceci termine la phase de modélisation du système Σ_n . Nous allons dans les sections suivantes effectuer la stabilisation de ce système.

²notatin matlab ; le point virgule « ; » lorsqu'il s'agit d'un vecteur colonne...

3.3 Stabilisation par rétro-action statique

Dans cette section, nous faisons l'étude de la stabilisabilité du système (Σ_n) obtenu dans la phase de modélisation. On a l'écriture suivante du système (Σ_n) :

$$(\Sigma_n) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{\Omega}\mathbf{z} + \omega^2 \mathbf{\Psi}\mathbf{z} \\ \dot{\omega} &= u \\ &(\mathbf{z}; \omega) \in \mathbb{R}^{2n+1}, u \in L^\infty \end{cases}$$

Cette section est organisée de la manière suivante ; nous commençons par déterminer les points d'équilibre du système (Σ_n) , puis ensuite, nous déterminons parmi ces équilibres, ceux en lesquels le système est stabilisable, en même temps qu'une loi de rétro-action stabilisation correspondante.

Il s'agit d'un système avec intégrateur. La difficulté provient du fait que le système réduit $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{z} + \omega^2 \mathbf{\Psi}\mathbf{z}$ est à contrôles positifs.

3.3.1 Les équilibres du système (Σ_n)

Proposition 3.1 *Un point $(\mathbf{z}; \omega) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ est un point d'équilibre du système (Σ_n) s'il est de la forme $(\mathbf{z}; \omega) = (\mathbf{0}; \omega)$ où $\omega \in \mathbb{R}$, ou encore de la forme $(\mathbf{z}; \omega) = (\mathbf{x}; \mathbf{0}; \omega)$, avec ω^2 , valeur propre de la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, et \mathbf{x} la matrice des composants d'un vecteur propre de l'endomorphisme de \mathbb{R}^{2n} dont $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ est la matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^{2n} .*

Démonstration:

Soit $(\mathbf{z}; \omega) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ un point d'équilibre du système (Σ_n) ; on a :

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}\mathbf{z} + \omega^2 \mathbf{\Psi}\mathbf{z} &= \mathbf{0} \\ \dot{\omega} &= 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} (\omega^2 \mathbf{I}_n - \frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \omega \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}}(\omega^2) \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \omega^2 \in \mathcal{Sp}(\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) \end{cases}$$

Dans l'expression ci-dessus, $\mathcal{Sp}(\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, et $\mathcal{E}_{\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}}(\omega^2)$ est le sous espace vectoriel propre de \mathbb{R}^{2n} associé à $\omega^2 \in \mathcal{Sp}(\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$, de l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^{2n} est $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$. \square

3.3.2 Stabilisabilité du système (Σ_n)

Nous commençons notre étude par envisager la stabilisabilité du système (Σ_n) en un de ses équilibres quelconques de la forme $(\mathbf{0}; \omega_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ avec $|\omega_0| < \omega_c$, ω_c une valeur critique réelle strictement positive que nous préciserons ; à cet effet, nous considérons le système $(\Sigma_n)_s$, obtenu en effectuant la translation de l'équilibre du système (Σ_n) en l'origine de l'espace des états. Le système $(\Sigma_n)_s$ est donc :

$$(\Sigma_n)_s \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{\Omega}\mathbf{z} + \omega_0\mathbf{\Psi}\mathbf{z} + \omega(\omega + 2\omega_0)\mathbf{\Psi}\mathbf{z} \\ \dot{\omega} &= u \end{cases}$$

nous adoptons la notation :

$$(\Sigma_n)_s \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{\Omega}_{\omega_0^2}\mathbf{z} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\mathbf{\Psi}\mathbf{z} \\ \dot{\omega} &= u \end{cases}$$

avec $\mathbf{\Omega}_{\omega_0^2}$ la matrice carrée d'ordre $2n$:

$$\mathbf{\Omega}_{\omega_0^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \omega_0^2\mathbf{I} - \frac{EI}{\rho}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Il est donc question de traiter de la stabilisabilité du système $(\Sigma_n)_s$ à l'origine de l'espace des états \mathbb{R}^{2n+1} , et d'en déduire par la translation inverse la stabilisabilité du système (Σ_n) en l'équilibre.

Stabilisabilité du système $(\Sigma_n)_s$ en l'origine

Les outils que nous entendons utiliser pour l'étude de la stabilisabilité du système $(\Sigma_n)_s$ en l'origine de son espace d'état exigent que la matrice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ soit symétrique. Ce qui n'est pas le cas. Nous commençons donc par construire un système équivalent au système $(\Sigma_n)_s$ où ne se pose pas ce problème. Nous appelons ce nouveau système $(\Sigma'_n)_s$. Nous étudions la stabilisabilité du système $(\Sigma'_n)_s$ au point d'équilibre correspondant, et nous en déduisons la propriété de stabilisabilité du système $(\Sigma_n)_s$ ensuite. On a la proposition suivante.

Proposition 3.2 *Le système $(\Sigma_n)_s$ est équivalent au système $(\Sigma'_n)_s$ suivant :*

$$(\Sigma'_n)_s \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} &= \left(\mathbf{\Phi}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\mathbf{\Psi} \right) \mathbf{z} \\ \dot{\omega} &= u \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{\Phi}_{\omega_0^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \omega_0^2\mathbf{I} - \frac{EI}{\rho}\mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de la matrice

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, qui sont des nombres réels strictement positifs.

Nous noterons quelque fois pour raison de concision $\mathbf{G}_{\omega_0^2}(\nu) = \Phi_{\omega_0^2} + \nu\Psi$

Démonstration:

\mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices carrées d'ordre n symétriques, définies positives. On peut écrire la décomposition de Choleski de la matrice \mathbf{B} par : $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, où \mathbf{L} est une matrice triangulaire inférieure. Soit $\mathbf{D} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}^{-T}$. La matrice \mathbf{D} est une matrice carrée symétrique définie positive au même titre que la matrice \mathbf{A} . On peut écrire la décomposition en valeurs singulières de la matrice \mathbf{D} par : $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}$, la paire de matrices $(\mathbf{Q}, \mathbf{\Lambda})$ étant unique (à une permutation près). (le choix d'écrire $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ est une question de commodité; il s'agit d'une matrice à termes diagonaux strictement positifs)

Notons dès à présent que les diverses valeurs singulières de la matrice \mathbf{D} qui sont aussi celles de la matrice \mathbf{A} sont les termes diagonaux de la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}^{-1}$. les matrices $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ et $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ sont semblables; en effet, $\mathbf{D} = \mathbf{L}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}^{-T}$, et donc $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E} = \mathbf{L}^{-T}\mathbf{Q}^T$.

Donc $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{E}$

On a également

$$\mathbf{E}^T\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}^{-T}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T = \mathbf{\Lambda}^{-1}$$

et

$$\mathbf{E}^T\mathbf{B}\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{L}^{-T}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$$

Soit la matrice $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$. On a

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}_{\omega_0^2}(\nu)\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \left(\omega_0^2\mathbf{I} - \frac{EI}{\rho}\mathbf{\Lambda}\right) + \nu\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{\omega_0^2}(\nu) \quad (3.7)$$

La transformation linéaire de \mathbb{R}^{2n+1} dont la projection sur l'espace \mathbb{R}^{2n} des $2n$ premières composantes est de matrice relativement à la base canonique \mathbf{F} et qui laisse invariant la $2n + 1^{\text{ième}}$ composante assume le changement de variable. ce qui termine la démonstration \square

Nous allons aborder l'étude de la stabilisabilité de $(\Sigma'_n)_s$ de la manière classique. Il s'agit d'un système avec intégrateur; classiquement, on se préoccupe d'abord de la stabilisabilité du système réduit de ce dernier (ou encore backstepping) (voir [18, 43]) comme nous l'avons rappelé dans le chapitre 2 sur les généralités. Nous appelons le système réduit de ce dernier $(S'_n)_s$. On a :

$$(S'_n)_s \quad \dot{\mathbf{z}} = \Phi_{\omega_0^2}\mathbf{z} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\Psi\mathbf{z}$$

Etudier la stabilisabilité du système $(S'_n)_s$ considéré sous cette forme n'est pas évidente. Pour le faire, nous recourons à des outils classiques [39] parlant de la géométrie des équivalences des systèmes. Le système $(S'_n)_s$ est un système affine en l'état, et quadratique en le contrôle. Son aspect est tel que ce système est contrôle-équivalent à un système que nous nommons $\widetilde{(S'_n)_s}$ par

la transformation définie par

$$(\mathbf{z}; \omega; \nu) \in \mathbb{R}^{2n} \times [-\omega_0, +\infty[\times \mathbb{R} \mapsto (\mathbf{z}; \omega(\omega + 2\omega_0); \nu) \in \mathbb{R}^{2n} \times [-\omega_0^2, +\infty[\times \mathbb{R} \quad (3.8)$$

qui est un difféomorphisme.

L'étude de la stabilisabilité des systèmes $(S'_n)_s$ et $(\widetilde{S'_n})_s$ est équivalente chacun sur l'espace respectif contenu dans la définition de la transformation (3.8). L'étude de la stabilisabilité du système $(\widetilde{S'_n})_s$ est plus aisée; on considère ce dernier système. Le système $(\widetilde{S'_n})_s$ est donnée par :

$$(\widetilde{S'_n})_s \quad \dot{\mathbf{z}} = \Phi_{\omega_0^2} \mathbf{z} + \nu \Psi \mathbf{z}$$

qui est affine en le contrôle.

Nous allons établir la stabilisabilité du système $(\Sigma'_n)_s$ en procédant à la stabilisation du système $(\widetilde{S'_n})_s$ (ce qui est équivalent à celle du système $(S'_n)_s$).

Stabilisabilité du système $(\widetilde{S'_n})_s$

Le système $(\widetilde{S'_n})_s$ est un **J-Q** système (voir la définition 2.12 de la page 15). L'étude de la stabilisabilité de tels systèmes est tributaire de la détermination d'une fonction de Lyapunov pour le système en l'origine. On a :

Proposition 3.3 *Pour tout réel ω_0 , tel que ω_0^2 soit strictement inférieur à la plus petite valeur propre de la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, le système $(\widetilde{S'_n})_s$ est globalement et asymptotiquement stabilisable à l'origine de \mathbb{R}^{2n} par la loi de rétro-action $\nu(\mathbf{z}) = -r \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$*

Démonstration:

$$(\widetilde{S_n})_s \quad \dot{\mathbf{z}} = \Phi_{\omega_0^2} \mathbf{z} + \nu \Psi \mathbf{z}$$

est un système affine en contrôle sur \mathbb{R}^{2n} d'entrée ν . Il nous suffit de déterminer une fonction de Lyapunov qui en fait un **J-Q** type système, suivant les hypothèses du Théorème 2.6 (page 15).

Considérons la fonction

$V : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \left(\left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \mathbf{\Lambda} - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \right) \in \mathbb{R}$; V est une fonction de Lyapunov large pour le système $(\widetilde{S_n})_s$; en effet;

1.—> elle est de classe \mathcal{C}^1 , définie positive et propre;

2.—> La dérivée par rapport au temps de la fonction V dans la direction du champ du système $(\widetilde{S_n})_s$ d'entrée nulle

$$\mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}) = - \left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \mathbf{\Lambda} - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{y}, \mathbf{x} \right\rangle + \left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \mathbf{\Lambda} - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle \equiv 0$$

Donc, $\mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$

3.—> Déterminons $W = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}}^{k+1} V(\mathbf{z}) = \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}}^k \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) = 0; k \in \mathbb{N} \right\}$;

De l'énumération précédente, on a : $\mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}) \equiv 0$; Il vient,

$$\mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}}^{k+1} V(\mathbf{z}) \equiv 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}} \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) &= \left\langle \Phi_{\omega_0^2}(\mathbf{z}), \nabla(\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z})) \right\rangle = \left\langle \Phi_{\omega_0^2}(\mathbf{z}), (\mathbf{y}; \mathbf{x}) \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}}^2 \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) &= \left\langle \Phi_{\omega_0^2}(\mathbf{z}), \nabla(\mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}} \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z})) \right\rangle \\ &= -4 \left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}}^3 \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) &= -4 \left\langle \Phi_{\omega_0^2}(\mathbf{z}), \nabla \left(\left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle \right) \right\rangle \\ &= 4 \left(\left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle - \left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{y}, \mathbf{y} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

On établit par récurrence que :

$$\mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}}^j \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) = \begin{cases} \alpha \left(\left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right)^{\frac{j+1}{2}} \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle - \left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right)^{\frac{j-1}{2}} \mathbf{y}, \mathbf{y} \right\rangle \right) & \text{si } j \text{ est impair} \\ \alpha \left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} \right)^{\frac{j}{2}} \mathbf{x}, \mathbf{y} \right\rangle & \text{si } j \text{ est pair} \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbb{Z}$

Nous notons $\Lambda_{\omega_0^2} = \Lambda - \omega_0^2 \mathbf{I} = \text{diag}(\lambda_i - \omega_0^2)_{1 \leq i \leq n}$

Considérons le système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}}^j \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) = 0 & j = 2p + 1, \\ 0 \leq p \leq n \end{cases} \quad (3.9)$$

dont les inconnues sont les $\xi_i = (\lambda_i - \omega_0^2)x_i^2 - y_i^2 \quad 1 \leq i \leq n$; $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$

Le système d'équations (3.9) admet pour ensemble des solutions $W_1 = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|\mathbf{y}\| = \|\Lambda_{\omega_0^2} \mathbf{x}\| \right\}$.

En effet, il s'agit d'un système de Cramer; en effet, le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde basé sur les termes diagonaux de la matrice $\Lambda_{\omega_0^2}$. Ce déterminant est non nul, du fait que les termes diagonaux de la matrice $\Lambda_{\omega_0^2}$ sont deux à deux distincts.

Le système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\Omega_{\omega_0^2}}^j \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) = 0 & j = 2p, \quad 0 \leq p \leq n \\ \mathbf{z} \in W_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

dont les inconnues sont les $x_i^2 \quad 1 \leq i \leq n$ admet pour ensemble solution $W_2 = \{\mathbf{0}\}$, pour la même raison que celle évoquée ci-dessus. Il s'ensuit que $W = \{\mathbf{0}\}$.

Ces trois conditions satisfaites font du système (\widetilde{S}_n) , un **J-Q** système. Un tel système, d'après le théorème 2.6 de la page 15, est globalement et asymptotiquement stabilisé à l'origine par la

loi de rétro-action $\nu(\mathbf{z})$ avec

$$\begin{aligned}\nu(\mathbf{z}) &= -r\mathcal{L}_{\Psi}V(\mathbf{z}) \\ &= -r\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle\end{aligned}\quad (3.11)$$

où r est un paramètre réel strictement positif, le gain de stabilisation.

Ce qui termine la démonstration. \square

Stabilisabilité du système $(S'_n)_s$

Le système $\widetilde{(S'_n)_s}$, est stabilisable en l'origine ; puisqu'il est contrôle-équivalent au système $(S'_n)_s$ par la transformation définie par (3.8), il s'ensuit que le système $(S'_n)_s$ est aussi stabilisable en l'origine.

Nous allons maintenant déterminer la loi de rétro-action ω du système $(S'_n)_s$, tel que $\nu = \omega(\omega + 2\omega_0)$ soit une loi de rétro-action stabilisante du système $\widetilde{(S'_n)_s}$, telle que déterminée dans la section précédente.

La loi de contrôle ω du système $(S'_n)_s$ requiert que la fonction $\omega : \nu \mapsto \omega(\omega + 2\omega_0)$ soit bornée inférieurement par $-\omega_0^2$. La conséquence de ceci est qu'aucune des solutions de l'équation $\nu(\mathbf{z}) = \omega(\omega + 2\omega_0)$ en ω , où $\nu(\mathbf{z})$ est donné par l'équation (3.11), ne serait pas une rétro-action satisfaisante pour la stabilisation du système $(S'_n)_s$. En effet, pour certaines valeurs de \mathbf{z} , $\nu(\mathbf{z})$ est inférieur à $-\omega_0^2$. On se sert néanmoins de la loi de rétro-action stabilisatrice du système $\widetilde{(S'_n)_s}$ pour fabriquer une loi de rétro-action stabilisatrice pour le système $(S'_n)_s$ d'après le résultat qui suit. Le principe de ce résultat est simple ; il s'agit de trouver une fonction qui mettra à zéro $\nu(\mathbf{z})$ chaque fois qu'on se trouve en des \mathbf{z} où l'équation $\nu(\mathbf{z}) = \omega(\omega + 2\omega_0)$ n'a pas de solution, et en veillant aussi que la solution obtenue reste C^∞ .

Proposition 3.4 *Soit ϕ une fonction indéfiniment dérivable définie sur \mathbb{R} , positive, de valeur nulle pour les valeurs négatives de la variable, et ayant la propriété de plus forte décroissance que toute puissance rationnelle au voisinage de 0 ; soit un réel ω_0 tel que décrit dans la proposition 3.3 ;*

La fonction k_{ω_0} définie sur \mathbb{R}^{2n} par :

$$k_{\omega_0}(\mathbf{z}) = -\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(-r\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)} \quad (3.12)$$

est une loi de rétro-action globalement et asymptotiquement stabilisatrice pour le système $(S'_n)_s$ en l'origine, et telle pour tout $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$, $k_{\omega_0}(\mathbf{z})(k_{\omega_0}(\mathbf{z}) + 2\omega_0)$ est bornée inférieurement par $-\omega_0^2$.

Démonstration:

Il nous suffit, pour établir ceci de prouver que le système $(S'_n)_s$, pour le choix de la fonction k_{ω_0} de la proposition ci-dessus vérifie les conditions de la définition 2.13 de la page 16 établissant que $(S'_n)_s$ est un **L-T** système, ce qui, par l'entremise du théorème de LaSalle [29], impliquera

que la loi de rétro-action k_{ω_0} stabilise globalement et asymptotiquement le système (S'_n) , à l'origine.

Posons à cet effet $\tilde{\mathbf{G}}_{\omega_0^2} = \mathbf{G}_{\omega_0^2}(k_{\omega_0}(\mathbf{z})(k_{\omega_0}(\mathbf{z}) + 2\omega_0))$.

Il vient,

k_{ω_0} est une fonction \mathcal{C}^∞ , positive, et on a $k_{\omega_0}(\mathbf{0}) = 0$.

Considérons la fonction candidate de Lyapunov

$$V : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \left(\left\langle \left(\frac{EI}{\rho} \mathbf{\Lambda} - \omega_0^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \right) \in \mathbb{R};$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{G}}_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}) &= \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}) + \phi(-r\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}))\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \\ &= \phi(-r\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}))\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

En effet, pour les $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$ pour lesquels $\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \geq 0$, on a $-r\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \leq 0$, et donc,

$$\phi(-r\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z})) = 0;$$

Pour les $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$ pour lesquels $\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \leq 0$, on a $-r\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \geq 0$, et donc, $\phi(-r\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z})) \geq 0$

Déterminons à présent l'ensemble L des points invariants de LaSalle, c'est à dire le plus grand ensemble invariant pour $\tilde{\mathbf{G}}_{\omega_0^2}$ contenu dans $E = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \dot{V}(\mathbf{z}) = 0 \right\}$

On a

$$E = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{G}}_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}) = 0 \right\}$$

Il ressort de l'égalité (3.13) qu'on peut encore écrire

$$E = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \geq 0 \right\}$$

Il va de soi que $\mathbf{0} \in L$; soit $\mathbf{z}_0 \in L$, $\mathbf{z}_0 \neq \mathbf{0}$.

Notons $\mathbf{z}_t = \left(\tilde{\mathbf{G}}_{\omega_0^2} \right)_t (\mathbf{z}_0)$ un point à un instant t de la trajectoire du point \mathbf{z}_0 dans le champ de vecteurs $\tilde{\mathbf{G}}_{\omega_0^2}$

Il vient, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{G}}_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}_t) = \mathcal{L}_{\Phi_{\omega_0^2}} V(\mathbf{z}_t) = 0 \quad (3.14)$$

Puisque, sur L , on a $\phi(-r\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z})) \equiv 0$, il vient, $k_{\omega_0}(\mathbf{z}_t) \equiv 0$

Ainsi, on a pour tout $t \geq 0$,

$$V(\mathbf{z}_t) = V(\mathbf{z}_0) = a^2 \geq 0 \quad (3.15)$$

Des égalités (3.14) et (3.15) Il s'ensuit que les fonctions

$$\begin{cases} g_i : \mathbf{z} \mapsto g_i(\mathbf{z}) = (\lambda_i - \omega_0^2)x_i^2 + y_i^2 \\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

sont les integrales premières du champ de vecteurs $\Phi_{\omega_0^2} \mathbf{z}$.

\mathbf{z}_t dans ce cas vit dans le tore ellipsoïdale de \mathbb{R}^{2n}

$$\mathbb{T}^{2n} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \begin{cases} g_i(\mathbf{z}) = a_i^2 \\ 1 \leq i \leq n \end{cases} \right\}$$

où les a_i sont des constantes réelles positives telles que $g_i(\mathbf{z}_0) = a_i^2$; on a $\sum_{i=1}^n a_i^2 = V(\mathbf{z}_0) = a^2$.

L'une des deux situations suivantes est satisfaite :

Soit la trajectoire de \mathbf{z}_0 est périodique.

Ce cas se produit dans les situations de rationnelle dépendance des valeurs propres de la matrice $(\frac{El}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \omega_0^2 \mathbf{I})$. Il s'agit de la situation pathologique de notre problème. Dans ce cas, on a L n'est par réduit au singleton origine de l'espace des états du système $(S'_n)_s$.

Il s'agit d'une situation qui n'est pas générique; en effet, la matrice $(\frac{El}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \omega_0^2 \mathbf{I})$ dépend de la longueur l de chaque élément du bras articulé.

Soit la trajectoire de \mathbf{z}_0 est dense dans \mathbb{T}^{2n} .

Soit $\mathbf{z}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_a; \mathbf{y}_a) \in \mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$\mathbf{y}_a = (a_1; a_2; \dots; a_n), \text{ et } \mathbf{x}_a = \left(\frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1 - \omega^2}}; \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1 - \omega^2}}; \dots; \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n - \omega^2}} \right)$$

On a $\mathbf{z}_a \in \mathbb{T}^{2n}$; en effet, pour tout i , $1 \leq i \leq n$,

$$g_i(\mathbf{z}_a) = (\lambda_i - \omega^2)(\mathbf{x}_a)_i^2 + (\mathbf{y}_a)_i^2 = a_i^2$$

$$\mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}_a) = \langle \mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\sqrt{(\lambda_i - \omega_0^2)}} < 0$$

donc $\mathbf{z}_a \in \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) < 0\}$.

Ce résultat est absurde, car la fermeture de la trajectoire de \mathbf{z}_0 qui dans ce cas est le tore \mathbb{T}^{2n} est incluse dans $\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} / \mathcal{L}_{\Psi} V(\mathbf{z}) \geq 0\}$. dans ce cas, on a $L = \{\mathbf{0}\}$.

En dehors du cas non générique de la première énumération ci-dessus, les trois conditions de définition des L-T systèmes sont vérifiées par le système $(S'_n)_s$. Il s'ensuit que $(S'_n)_s$, pour la loi de rétro-action k_{ω_0} est globalement et asymptotiquement stable à l'origine de \mathbb{R}^{2n} . \square

Stabilisation du système $(\Sigma'_n)_s$ en l'origine

Proposition 3.5 Soit un réel ω_0 tel que ω_0^2 soit strictement inférieur à la plus petite valeur propre de la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, soit ϕ une fonction telle que décrite dans la proposition 3.4, soit k_{ω_0} la fonction réelle introduite dans la proposition 3.4 comme loi de rétro-action stabilisatrice du système $(S'_n)_s$, le système $(\Sigma_n)_s$ est globalement et asymptotiquement stabilisable à l'origine de \mathbb{R}^{2n+1} par la loi de rétro-action $u_{\omega_0}(\mathbf{z}; \omega)$ avec :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{z}; \omega) = & -(\omega + \omega_0)(1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)}(1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \\ & - r \tilde{k}'_{\omega_0}(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \left(\|\mathbf{y}\|^2 + (\omega + \omega_0)^2 \|\mathbf{x}\|^2 - \left\langle \frac{EI}{\rho} \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec $\tilde{k}_{\omega_0} : s \in \mathbb{R} \mapsto \tilde{k}_{\omega_0}(s) = -\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(s)}$ et \tilde{k}'_{ω_0} sa dérivée.

Démonstration:

Le théorème 2.8 de la page 16 établit la corrélation entre la stabilisabilité d'un système, et l'extension de ce dernier par ajout d'un intégrateur. Précisément ce résultat dit que le système $(S_n)_s$ est un **L-T** système, Il s'ensuit que son extension par ajout d'un intégrateur $(\Sigma_n)_s$ est en conséquence de cause un **L-T** système.

Il vient de ce fait que le système $(\Sigma_n)_s$ est globalement et asymptotiquement stabilisable à l'origine de \mathbb{R}^{2n+1} par les lois de rétro-action $\tilde{u}(\mathbf{z}; \omega)$ définies sur \mathbb{R}^{2n+1} par :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{z}; \omega) = & -\omega + k_{\omega_0}(\mathbf{z}) + dk_{\omega_0}(\mathbf{z}) \cdot \left[\tilde{\mathbf{G}}_{(\omega_0^2)} \mathbf{z} + \Xi(\mathbf{z}, \omega) \cdot (\omega - k_{\omega_0}(\mathbf{z})) \right] \\ & - \Xi(\mathbf{z}, \omega)^T \cdot \nabla V(\mathbf{z}) \\ = & -(\omega + \omega_0)(1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)}(1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \\ & - r \tilde{k}'_{\omega_0}(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \left(\|\mathbf{y}\|^2 + (\omega + \omega_0)^2 \|\mathbf{x}\|^2 - \left\langle \frac{EI}{\rho} \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

avec $\Xi(\mathbf{z}, \omega) = (\omega + 2\omega_0 + k_{\omega_0}(\mathbf{z}))(\mathbf{0}; \mathbf{x})$ □

Stabilisabilité du système $(\Sigma_n)_s$

La stabilisabilité du système $(\Sigma_n)_s$ est équivalente à celle du système $(\Sigma'_n)_s$. Puisque le deuxième système est globalement asymptotiquement stabilisable en l'origine de \mathbb{R}^{2n+1} par la rétro-action d'état donnée par 3.16, il s'ensuit que le système $(\Sigma_n)_s$ est globalement et asymptotiquement stabilisable en l'équilibre correspondant de \mathbb{R}^{2n+1} (qui est l'origine car la transformation réalisant l'équivalence entre les deux systèmes est linéaire) par la loi de rétro-action obtenue en appliquant aux composantes de l'état du système $(\Sigma'_n)_s$ la transformation inverse établissant l'équivalence

entre les deux systèmes. cette loi est donnée par :

$$u(\mathbf{z}; \omega) = -(\omega + \omega_0)(1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}}) + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}})}(1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}}) \quad (3.17) \\ - r \tilde{k}'_{\omega_0}(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}}) \left(\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{B}}^2 + (\omega + \omega_0)^2 \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{B}}^2 - \left\langle \frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle_{\mathbf{B}} \right)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{B}}$ le produit scalaire défini sur \mathbb{R}^{2n} qui à $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ fait correspondre $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{B} \mathbf{y} \rangle$, et $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$ la norme associée

Stabilisabilité du système (Σ_n)

Theorème 3.1 Soit un réel ω_0 tel que ω_0^2 soit strictement inférieur à la plus petite valeur propre de la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, soit ϕ une fonction telle que décrite dans la proposition 3.4, et soit k_{ω_0} la fonction réelle introduite dans la proposition 3.4 ; Le système (Σ_n) est stabilisable globalement et asymptotiquement en ses points d'équilibres de la forme $(\mathbf{0}; \omega_0)$, respectivement par la loi de rétro-action

$$u_{\omega_0}(\mathbf{z}; \omega) = -\omega(1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}}) + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}})}(1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}}) \\ - r \tilde{k}'_{\omega_0}(-r \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}}) \left(\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{B}}^2 + \omega^2 \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{B}}^2 - \left\langle \frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle_{\mathbf{B}} \right) \quad (3.18)$$

Démonstration:

Des états d'équilibres du système (Σ_n) , ceux dont le carré du $2n+1^{\text{ième}}$ composant, ω_0^2 strictement inférieur à la plus petite valeur propre de la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ sont de la forme $(\mathbf{0}; \omega_0)$. Ces états sont ceux qui correspondent aux démonstrations ci-dessus. Ils sont par conséquent les équilibres où (Σ_n) est stabilisable. Soit $(\mathbf{0}; \omega_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ un tel point d'équilibre; les systèmes $(\Sigma_n)_s$ et (Σ_n) , sont équivalents à la translation suivant le composant ω de l'état du système. Pour obtenir la rétro-action qui stabilise en $(\mathbf{0}; \omega_0)$ le système (Σ_n) globalement asymptotiquement, il suffit d'appliquer à la rétro-action de stabilisation du système $(\Sigma_n)_s$ à l'origine de \mathbb{R}^{2n+1} la translation inverse. Il s'ensuit la loi (3.18) de l'énoncé du résultat ci-dessus. Ce qui termine la démonstration.

□

Remarque 3.1 La stabilisation du système (Σ_n) présentée ci-dessus a commencé par la détermination des équilibres du système (Σ_n) , ensuite la prise en considération des équilibres de la forme $(\mathbf{0}; \omega_0)$, pour les $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tels que ω_0^2 soit strictement inférieur à la plus petite des valeurs propres de la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$. La motivation de ceci est de conserver à la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \omega_0^2 \mathbf{I}$ le signe positif. Pour des valeurs de ω_0 en dehors de cette caractérisation, la matrice $\frac{EI}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \omega_0^2 \mathbf{I}$ n'est plus postive. Dans ce cas, la matrice Ω_{ω_0} est instable, ce qui implique l'instabilité du système (Σ_n) en tous les équilibres correspondants à de tels ω_0 .

3.4 Observabilité, et observateurs

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier les propriétés d'observabilité du système (Σ_n) auquel nous avons ajouté quelques équations, caractérisant certaines sorties; nous avons appelé le système obtenu (Γ_n) . Le but de cette manœuvre est d'utiliser les propriétés d'observabilité de (Γ_n) dans la construction d'un observateur pour le système (Σ_n) , de s'en servir ensuite pour recueillir des informations sur le système (Σ_n) que nous utilisons dans la stabilisation de ce dernier par rétro-action dynamique d'état. Ce qui correspond au procédé bien connu du principe de séparation.

Les quantités que nous mesurons sont : la position du bout de l'antenne libre (i.e. l'écart de celui-ci par rapport à l'axe du système), et la vitesse angulaire de l'ensemble du système; ceci donne le système à une entrée et deux sorties :

$$(\Gamma_n) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{z} + \omega^2 \mathbf{\Psi}\mathbf{z} \\ \dot{\omega} = u \\ s = \mathbf{C}\mathbf{z} \\ \sigma = \omega \end{cases}$$

où, $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{0})$, $\mathbf{C}_1 = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ fois}})$ et $\mathbf{0} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ fois}})$

3.4.1 Observabilité du système (Γ_n)

Nous allons décomposer l'étude de l'observabilité du système (Γ_n) en deux étapes. Nous commençons par établir l'observabilité du système réduit (γ_n) , et nous nous servons des résultats de cet étape pour établir l'observabilité du système (Γ_n) . L'introduction du système réduit est liée aux facilités que nous en tirons dans la suite. En effet, la $2n + 1^{\text{ième}}$ composante de l'état du système (Σ_n) est mesurée dans le système (Γ_n) , il est donc question d'étudier la distingabilité des $2n$ premières composantes de l'état de (Σ_n) .

$$(\gamma_n) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{z} + \nu \mathbf{\Psi}\mathbf{z} \\ s = \mathbf{C}\mathbf{z} \end{cases}$$

Proposition 3.6 *Le système (γ_n) est uniformément observable sur \mathbb{R}^{2n}*

Démonstration:

Le système (γ_n) est un système bilinéaire. d'après la remarque 2.1 de la page 20 et le théorème 2.10 de la page 24 il est observable si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

1. \rightarrow la paire de matrice $(\mathbf{C}, \mathbf{\Omega})$ est observable
2. \rightarrow le système à une seule entrée, une seule sortie (SISO-système³) (γ_n) est équivalent au système

$$(\gamma'_n) \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Nz} + \mathbf{\Delta z} + \nu \mathbf{Mz} \\ s = x_1 \end{cases}$$

où (γ'_n) est un SISO-système sous la forme canonique d'observabilité.

Nous procédons suivant l'énumération ci-dessus.

Observabilité de la paire $(\mathbf{C}, \mathbf{\Omega})$

L'observabilité de la paire $(\mathbf{C}, \mathbf{\Omega})$ est équivalente à celle de la paire $(\mathbf{C}_1, \frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$; ceci provient de la structure des deux matrices dans la paire $(\mathbf{C}, \mathbf{\Omega})$.

La paire $(\mathbf{C}_1, \frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$ est observable si et seulement si la condition du rang est satisfaite. i.e.

$$\det \left(\mathbf{C}_1^T, \left(\frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right) \mathbf{C}_1^T, \left(\frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right)^2 \mathbf{C}_1^T, \dots, \left(\frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right)^{n-1} \mathbf{C}_1^T \right) \neq 0$$

En effet, Considérons la décomposition en de la matrice $\frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ déjà évoquée lors de la démonstration de la proposition 3.2 page 44; il vient que

$$\det \left(\mathbf{C}_1^T, \left(\frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right) \mathbf{C}_1^T, \dots, \left(\frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right)^{n-1} \mathbf{C}_1^T \right) = \det(\mathbf{E}) \det \left(\widehat{\mathbf{C}}_1^T, \mathbf{\Lambda}^1 \widehat{\mathbf{C}}_1^T, \dots, \mathbf{\Lambda}^{n-1} \widehat{\mathbf{C}}_1^T \right)$$

avec $\frac{\mathbf{EI}}{\rho} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{E} = \mathbf{\Lambda}$ (cf proposition 3.2) et $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{E}^{-1}$. Nous devons donc établir que

$$\det \left(\widehat{\mathbf{C}}_1^T, \mathbf{\Lambda}^1 \widehat{\mathbf{C}}_1^T, \mathbf{\Lambda}^2 \widehat{\mathbf{C}}_1^T, \dots, \mathbf{\Lambda}^{n-1} \widehat{\mathbf{C}}_1^T \right) \neq 0$$

La matrice $\mathbf{\Lambda}$ étant une matrice diagonale. $\det \left(\widehat{\mathbf{C}}_1^T, \mathbf{\Lambda}^1 \widehat{\mathbf{C}}_1^T, \mathbf{\Lambda}^2 \widehat{\mathbf{C}}_1^T, \dots, \mathbf{\Lambda}^{n-1} \widehat{\mathbf{C}}_1^T \right)$ est le produit des composants du vecteur $\widehat{\mathbf{C}}_1$, et d'un déterminant de Vandermonde basé sur les coefficients de la matrice $\mathbf{\Lambda}$

$$\det \left(\widehat{\mathbf{C}}_1^T, \mathbf{\Lambda}^1 \widehat{\mathbf{C}}_1^T, \mathbf{\Lambda}^2 \widehat{\mathbf{C}}_1^T, \dots, \mathbf{\Lambda}^{n-1} \widehat{\mathbf{C}}_1^T \right) = \prod_{i=1}^n c_i \prod_{i=1, j>i}^n (\lambda_i - \lambda_j)$$

Les coefficients $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux distincts; en effet, il s'agit des valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive générique.

On a aussi $c_i \neq 0$ pour tous les i , $1 \leq i \leq n$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un i , $1 \leq i \leq n$, avec $c_i = 0$; le $i^{\text{ième}}$ terme diagonal de la matrice $\widehat{\mathbf{C}}_1^T \widehat{\mathbf{C}}_1$ est égal à zéro, et pourtant on a l'égalité

$$\widehat{\mathbf{C}}_1^T \widehat{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{E}^{-T} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^{-1}$$

Tous les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1$ sont égaux à 1 donc non nul. Le $i^{\text{ième}}$ terme diagonal de la matrice $\mathbf{E}^{-T} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^{-1}$ est égal au carré de la norme de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice \mathbf{E}^{-1} , qui ne peut être nul.

Mise sous forme normale

Le système (γ_n) est bilinéaire. Dans la littérature, il existe des résultats proposant un changement

³Single Input Single Ouput system

de variable permettant de mettre un tel système sous la forme canonique [48]. Nous considérons la transformation linéaire de matrice (relativement à la base canonique de \mathbb{R}^{2n}) \mathbf{R} donnée par :

$$\mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{C}^T; \Omega \mathbf{C}^T; \Omega^2 \mathbf{C}^T; \dots; \Omega^{2n-1} \mathbf{C}^T)$$

On a :

$$\mathbf{R}^{-1} (\Omega + \nu \Psi) \mathbf{R} = \mathbf{N} + \Delta + \nu \mathbf{M}$$

Dans notre cas, $\mathbf{M} = \text{diag}(D_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une matrice bloc diagonale de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ avec

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq n$$

$$\mathbf{C}\mathbf{R} = (1, 0, \dots, 0)$$

Cette transformation nous permet donc de mettre le système (γ_n) sous la forme canonique d'observabilité, et ce qui achève la démonstration de la deuxième énumération pour ce cas.

La conséquence de ce résultat est que le système est uniformément observable sur \mathbb{R}^{2n} . \square

Proposition 3.7 *Le système (Γ_n) est uniformément observable*

Démonstration:

Ceci n'est qu'une conséquence de la proposition 3.6 et du fait que la $2n + 1^{\text{ième}}$ composante de l'état du système (Σ_n) est mesuré dans le système (Γ_n) . \square

3.4.2 Observateur pour le système (Σ_n)

L'Observateur que nous proposons est une copie de l'observateur du système bilinéaire (S_n) que nous avons étendu au système (Σ_n) .

Proposition 3.8 *Le système*

$$(\hat{S}_n) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{z}}} &= (\Omega + \nu \Psi) \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \\ \dot{\hat{\mathbf{S}}} &= -\theta \mathbf{S} - (\Omega + \nu \Psi)^T \mathbf{S} - \mathbf{S} (\Omega + \nu \Psi) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \end{cases}$$

est l'observateur étendu du type de Kalman à gain variable pour le système (S_n)

avec θ un nombre réel positif assez grand, \mathbf{S} est une matrice appartenant au cône des matrices symétriques définies positives, Σ^+ .

La démonstration de ceci est typiquement celle proposée par les auteurs de [12] dans leur article. En effet, le système (S_n) est bilinéaire. Il s'agit d'un observateur qui converge exponentiellement.

Cet observateur est valide pour des contrôles bornés régulièrement persistants.

Proposition 3.9 *le système*

$$(\widehat{\Sigma}_n) \quad \begin{cases} \dot{\widehat{\mathbf{z}}} = \Omega \widehat{\mathbf{z}} + \omega^2 \Psi \widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} (\widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \\ \dot{\mathbf{S}} = -\theta \mathbf{S} - (\Omega + \omega^2 \Psi)^T \mathbf{S} - \mathbf{S} (\Omega + \omega^2 \Psi) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \end{cases}$$

est un observateur exponentiel pour le système (Σ_n)

Démonstration:

La dynamique de l'erreur d'estimation $\mathbf{e} = \widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ entre le système (Σ_n) et le système $(\widehat{\Sigma}_n)$ est régie par le système :

$$\dot{\mathbf{e}} = (\Omega + \omega^2 \Psi) \mathbf{e} - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (3.19)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = -\theta \mathbf{S} - (\Omega + \omega^2 \Psi)^T \mathbf{S} - \mathbf{S} (\Omega + \omega^2 \Psi) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (3.20)$$

Considérons la fonction de Lyapunov

$$V : (\mathbf{e}, \mathbf{S}) \mapsto \langle \mathbf{e}, \mathbf{S} \mathbf{e} \rangle$$

en se servant des équations (3.19) et (3.20) ci-dessus, on a

$$\dot{V} = -\theta \langle \mathbf{e}, \mathbf{S} \mathbf{e} \rangle - \|\mathbf{C} \mathbf{e}\|^2$$

soit

$$\dot{V} \leq -\theta V$$

et

$$V \leq V(0) e^{-\theta t}$$

Sous l'hypothèse que la quantité ω^2 est régulièrement persistante, ce qui s'exprime autrement par :

$$\forall \theta, \exists t_0 \exists \alpha > 0 / \forall t \geq t_0, \mathbf{S}(t) \geq \alpha \mathbf{I}$$

on a :

$$\|\mathbf{e}\|^2 \leq \frac{V(0)}{\alpha} e^{-t\theta}$$

d'où la décroissance exponentielle de \mathbf{e} . Ce qui termine la démonstration. \square

3.5 Stabilisation par rétro-action dynamique

Dans cette section, il est question d'établir que le système

$$(\tilde{\Sigma}_n) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{z}}} = \boldsymbol{\Omega}\hat{\mathbf{z}} + \omega^2\boldsymbol{\Psi}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} \\ \dot{\omega} = u \\ \dot{\mathbf{S}} = -\theta\mathbf{S} - (\boldsymbol{\Omega} + \omega^2\boldsymbol{\Psi})^T\mathbf{S} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega} + \omega^2\boldsymbol{\Psi}) + \mathbf{C}^T\mathbf{C} \\ \dot{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{\Omega} + \omega^2\boldsymbol{\Psi})\mathbf{e} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} \end{cases}$$

pour la loi de rétro-action donnée par :

$$\mu_{\omega_0} : (\hat{\mathbf{z}}; \omega) \mapsto \mu_{\omega_0}(\hat{\mathbf{z}}; \omega) = u_{\omega_0}(\hat{\mathbf{z}}; \omega) \quad (3.21)$$

est globalement asymptotiquement stable au point d'équilibre $(\mathbf{0}; \omega_0; \mathbf{S}_0; \mathbf{0})$. u_{ω_0} est donnée par (3.18)

Il revient au même d'établir que le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{z}}} = \boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2}\hat{\mathbf{z}} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} \\ \dot{\omega} = u \\ \dot{\mathbf{S}} = -\theta\mathbf{S} - (\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi})^T\mathbf{S} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi}) + \mathbf{C}^T\mathbf{C} \\ \dot{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi})\mathbf{e} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} \end{cases} \quad (3.22)$$

pour la loi de rétro-action donnée par

$$\mu : (\hat{\mathbf{z}}; \omega) \mapsto \mu(\hat{\mathbf{z}}; \omega) = u(\hat{\mathbf{z}}; \omega) \quad (3.23)$$

avec u donnée par (3.17) est globalement asymptotiquement stable au point d'équilibre $(\mathbf{0}; 0; \mathbf{S}_0; \mathbf{0})$. \mathbf{S}_0 étant la solution de l'équation

$$-\theta\mathbf{S} - (\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi})^T\mathbf{S} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi}) + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Nous considérons le système réduit (3.22), qui est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{z}}} = \boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2}\hat{\mathbf{z}} + \nu\boldsymbol{\Psi}\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{S}} = -\theta\mathbf{S} - (\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi})^T\mathbf{S} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi}) + \mathbf{C}^T\mathbf{C} \\ \dot{\mathbf{e}} = (\boldsymbol{\Omega}_{\omega_0^2} + (\omega(\omega + 2\omega_0))\boldsymbol{\Psi})\mathbf{e} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{e} \end{cases} \quad (3.24)$$

Ce système entre dans le cadre des systèmes considérés par Gauthier et Kupka dans [12]. Il s'agit d'un système obtenu du système $(S_n)_s$ qui est un système bilinéaire, et qui est globalement asymptotiquement stabilisable à l'origine de son espace des états par la loi de rétro-action donnée

par :

$$k_{\omega_0}(\mathbf{z}) = -\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(-\langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{y} \rangle)}$$

Dans leur papier, les auteurs établissent que dans cette situation, le système (3.24) est globalement asymptotiquement stabilisable au point $(\mathbf{0}; \mathbf{S}_0; \mathbf{0})$ par la loi de rétro-action

$$k_{\omega_0}(\hat{\mathbf{z}}) = -\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \phi(-\langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{B}\hat{\mathbf{y}} \rangle)}$$

Le système (3.22) est obtenu par ajout d'intégrateur dans le système (3.24). Il vient des résultats de [18] sur l'ajout de l'intégrateur dans un système, que la loi de rétro-action donnée par (3.23) stabilise globalement asymptotiquement le système (3.22) en l'équilibre considérée. \square

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

Notre travail dans cette partie a consisté essentiellement sur un exemple de stabilisation d'un système décrit par un système hybride EDP EDO que nous appelons (Σ) .

Nous avons considéré les systèmes discrétisés de (Σ) que nous avons appelés (Σ_n) . Nous avons établi que ceux ci pour toutes valeurs de $n \geq 1$ sont stabilisables globalement asymptotiquement par de lois de commande de classe C^∞ . Notre intension est de prouver que les propriétés obtenues dans les systèmes discrétisés qui sont des systèmes en dimension fini s'étendent au système (Σ) qui est un système en dimension infinie. En clair, que l'on peut trouver une loi de commande de classe C^∞ pour la stabilisation du système (Σ) . Ce travail est en cours, et le passage à la limite est assez délicat.

Nous nous sommes lancés ensuite pour un $n \geq 1$ fixé, dans la construction d'un estimateur pour le système (Σ_n) . Pour cela, nous avons considéré quelques mesures ou sorties des systèmes (Σ_n) que nous avons ajoutées au système (Σ_n) afin de construire un système entrées-sorties que nous appelons alors (Γ_n) qui est observable pour toute entrée. Nous nous servons du système (Γ_n) pour fabriquer un estimateur qui converge exponentiellement pour le système (Σ_n) . Il n'est question dans cet étape que d'un soigneux exercice à l'aide des résultats de la littérature.

Nous utilisons enfin cet estimateur pour établir que le système (Σ_n) est stabilisable par retour d'état dynamique. La question du passage à la limite pour la stabilisation par retour d'états dynamique du système (Σ) à l'aide des résultats obtenus pour les systèmes (Σ_n) reste ouverte.

Ce travail est l'objet d'un article que nous avons soumis, dans une revue (ESAIM COCV), qui a été accepté et que nous sommes entrain de réviser. La version originale n'avait pas les ambitions qui se sont dégagées des commentaires des rapporteurs de la revue. A l'origine, l'ambition n'était pas de faire le contrôle d'un système hybride EDP-EDO.

Nous avons établi dans cette première version que les systèmes (Σ_n) pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont stabilisables, chacune par une rétro-action dynamique de classe C^∞ . A présent nous sommes en train d'établir des adaptations afin d'étendre ces propriétés au système (Σ) .

Bibliographie

- [1] W. Baumann and W.J. Rugh. Feedback control of nonlinear systems by extend linearization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31(4) :40–46, 1986.
- [2] O. Bernard, G. Sallet, and A. Sciendra. Nonlinear observers for a class of biological systems : Application to validation of a phytoplanktonic growth model. *IEEE Trans. Autom. Contr*, 43(8) :1056–1065, 1998.
- [3] G. Besançon and H. Hammouri. On uniform observation of nonuniformly observable systems. *Systems & Control letters*, 29 :9–19, 1996.
- [4] D. Bestle and M. Zeitz. A canonical form observer design for nonlinear time-variable systems. *Int. J. Control*, 38 :419–431, 1983.
- [5] J. Birk and M. Zeitz. Extend luenberger observer for nonlinear multi-variable systems. *Int.J.Control*, 47(6) :1823–1836, 1988.
- [6] G. Bornard, N. Couenne, and F. Celle. Regularly persistent observers for bilinear systems new trends in nonlinear control theory. In *Lectures notes in Control information Sciences*. Springer Verlag Berlin New York, 1989.
- [7] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Proc.30th IEEE conf.on.Dec.*, pages 1494–1496, 1991.
- [8] S.A. Bortoff and A.F. Lynch. Synthesis of optimal nonlinear observer. *Proc.34th IEEE conf.on.Dec.*, pages 95–100, 1995.
- [9] R. W. Brockett. *Differential geometric control theory*, chapter Asymptotic Stability and feedback stabilization, pages 181–191. Brockett Milmann Sussmann, 1983.
- [10] J. Baillieul C. Z. Xu. Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control. *IEEE Trans on Aut. Cont.*, 38(12) :1754–1765, December 1993.
- [11] J. M. Coron and B. d'andréa Novel. Stabilization of a body-beam without damping. *IEEE Trans. on Aut.*, 43(5) :608–618, 1998.
- [12] J. P. Gauthier and I. A. Kupka. A separation principe for bilinear systems with dissipative drift. *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 37(12) :1970–1974, 1992.
- [13] J.P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systemes. *IEEE Trans. on autom. control*, 26(4) :922–926, 1981.

- [14] J.P. Gauthier and H. Hammouri. Global time-varying linearization up to output injection. *SIAMJ on Control and Optimization*, 30(6) :1295–1310, 1992.
- [15] J.P. Gauthier and K. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAMJ on Control and Optimization*, 32(4) :975–994, 1994.
- [16] R. Hermann and J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE.Trans.Autom.Contr.*, 22(5) :728–740, 1977.
- [17] X. Hu. On state observers for nonlinear systemes. *systems and Control Letters*, 17 :465–473, 1991.
- [18] A. Iggidr and G. Sallet. Nonlinear stabilization by adding integrators. *Kibernetica*, 30(5) :381–389, 1994.
- [19] A. Iggidr and J.C. Vivalda. Stabilization of a class of multi-inputs nonlinear systems. *Int. J. Control*, 35(4) :407–417, 1994.
- [20] M. Jankovic. A new observer for a class of nonlinear systems. *J.of Mathematical Systems, Estimation and Control*, 3(2) :225–246, 1993.
- [21] N.H. Jo, S. Joo, and J.H. Seo. Generalized luenberger-like observer for nonlinear systems. *Proc.American Control Conference*, pages 2180–2183, 1997.
- [22] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *J.of Diff.Eq.*, 28 :381–389, 1978.
- [23] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering. *Transactions of the ASMEJ of Basic Engineering*, 83 :35–45, 1960.
- [24] M. Kawski. Stabilisation of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control letters*, 12 :169–175, 1990.
- [25] P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 13 :125–133, 1989.
- [26] A.J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control letters*, 3 :47–52, 1983.
- [27] A.J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linearizable error. *SIAMJ Control and Optimization*, 23 :197–216, 1985.
- [28] H. Laousy, C. Z. Xu, and G. Sallet. Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam. *IEEE Trans on Aut. Cont.*, 41(2) :241–245, Febuary 1996.
- [29] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Lyapunov's direct method with applications*. Academic Press New York, 1961.
- [30] C. Van Loan. How near is a stable matrix to an unstable matrix. *Contemporary mathematics*, 47 :465–478, 1985.
- [31] D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE.Trans.Autom.Contr.*, 11(2) :190–197, 1966.

- [32] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 16(6) :596–602, 1971.
- [33] E.A. Misawa and J.K. Hedrick. Nonlinear observers - a state of the art survey. *ASMEJ Dynamical Systems, Measurement and Control*, 111 :344–352, 1989.
- [34] Ö. Morgül. Orientation and stabilization of a flexible beam attached to a rigid body : Planar motion. *IEEE Trans on Aut. Cont.*, 36(8) :953–962, August 1991.
- [35] Ö. Morgül. Constant angular velocity control of a rotating flexible structure. In *Proc. 2nd European Conf. ECC'93*, pages 299–302, 1993.
- [36] Ö. Morgül. Control and stabilization of a rotating flexible structure. *Automatica*, 30(2) :351–356, 1994.
- [37] R. Outbib and G. Sallet. Stabilisability of angular velocity of a rigid body revisited. *Systems and Control Lett.*, 18 :93–98, 1992.
- [38] C. Reboulet and C. Champetier. A new method for linearizing nonlinear systems the pseudolinearization. *Int. J. Cont.*, 43(4) :631–638, 1984.
- [39] W. Respondek. Geometry of static and dynamic feedback. Lecture Note given at the Summer School on Mathematical Control theory, 2002.
- [40] D.G. Robertson, J.H. Lee, and J.B. Rowlings. A moving horizon-based approach for least-square estimation. *AIChE J*, 42(8) :2209–2224, 1996.
- [41] A. Saberi, P.V. Kokotovic, and H.J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composed systems. *SIAMJ. Control and Optimization*, 28 :1491–1503, 1990.
- [42] J.J. Slotine, J.K. Hedrick, and A. Misawa. On sliding observers for nonlinear systems. *ASMEJ of Dynamical Systems, Measurement and Control*, 109 :245–252, 1987.
- [43] E.D.; Sontag and h.J. Sussmann. Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body. *Systems & Control Letters*, 12 :213–217, 1988.
- [44] H.J. Sussmann. Single-input observability of continuous-time systems. *Mathematical Systems Theory*, 12 :371–393, 1979.
- [45] F.E. Thau. Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int. J. Control*, 17(3) :471–479, 1973.
- [46] B. L. Walcott, M.J. Corless, and S. H. Zak. Comparative study of non-linear state-observation techniques. *Int. J. Control*, 45 :2109–2132, 1987.
- [47] B. L. Walcott and S. H. Zak. State estimation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 32 :166–170, 1987.
- [48] D. Williamson. Observability of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–250, 1977.

Deuxième partie

Etude de la stabilité des modèles épidémiologiques

Chapitre 1

Introduction

Le 30 avril 1760, Daniel Bernoulli présenta un article intitulé « *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de la prévenir* » à l'académie des sciences de Paris. Pour la première fois, un modèle mathématiques fut utilisé pour évaluer l'efficacité des techniques de lutte contre la variole. Bernoulli formula le modèle d'équations différentielles correspondant, et le résolut. Le résultat montrait que la variolation se traduisait en terme d'accroissement de l'espérance de vie.

Les pionniers de l'épidémiologie mathématiques sont des médecins épidémiologistes avec une passion pour les mathématiques. Ils ont utilisé les mathématiques pour étudier la transmission des maladies infectieuses.

En épidémiologie, le fondateur de l'utilisation des équations différentielles ordinaires et des systèmes compartimentaux est sans doute Sir Ronald Ross.

Sir Ronald Ross a obtenu le deuxième prix Nobel de médecine en 1902 pour avoir prouvé que la transmission du paludisme était faite par un moustique, l'anophèle. Sir Ronald Ross était convaincu que pour éradiquer le paludisme, il suffisait de faire baisser la population des anophèles femelles, et qu'il n'était point nécessaire d'éradiquer cette population. Cette hypothèse était alors considérée comme peu crédible. Pour cela, Sir Ronald Ross développa un modèle d'équations différentielles ordinaires pour soutenir cette thèse en 1911, ce qui fut fait avec succès.

On peut dire que ce modèle est le premier modèle compartimental proie-prédateur, bien avant les fameux modèles de Lotka–Volterra. Le modèle de R. Ross s'exprime simplement par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y(1 - x) - r x \\ \dot{y} = \beta x(1 - y) - \mu y \end{cases} \quad (1.1)$$

basé sur les proportions des deux espèces en interaction. x désigne la proportion d'humains infectieux, et y la proportion d'anophèles infectieux. les coefficients α et β désignent respectivement les taux d'incidence de l'infection dans la population des humains et des anophèles, les coefficients r et μ désignent respectivement les taux suivant lesquels humains et anophèles quittent la classe des infectieux ; ce qui peut se traduire soit par la guérison, soit par la mort des individus des classes respectives.

Cette découverte marque le début de l'histoire des modèles «*proie-prédateur*». Historiquement, le premier modèle proie-prédateur fut donc formulé par Sir Ronald Ross, dans une situation où la proie est l'humain, et le prédateur l'anophèle.

A. Lotka, en 1913 étudia en détail le modèle de Ross. Il est à remarquer que les modèles de Lotka et Volterra furent formulés dans les environs des années 1925–1926, plusieurs années après le modèle de la même classe de similitude dû à R. Ross. Une expression élémentaire de ces modèles est :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = bxy - cy \end{cases} \quad (1.2)$$

dans lequel la variable x représente la quantité des proies, et la variable y , la quantité des prédateurs. Les équations du système (1.2) expriment l'accroissement de la quantité x des proies qui se fait suivant le taux instantané a qui entre temps est ralenti du fait des contacts avec les prédateurs en quantité y suivant une incidence instantané bxy . Cependant, la survie de la quantité y des prédateurs dépend des contacts qu'ils ont avec la quantité x des proies, suivant l'incidence ci-dessus, et disparaît suivant le taux instantané c .

Entre les années 1927 et 1929, W.O. Kermack et A. G. McKendrick proposèrent un modèle d'équations différentielles ordinaires pour simuler une épidémie de peste à Bombay. Ce modèle s'écrit classiquement :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta xy \\ \dot{y} = \beta xy - \nu y \\ \dot{z} = \nu y \end{cases} \quad (1.3)$$

Il s'agit d'un modèle dit **SIR** (comme il va apparaître un peu plus loin dans un tableau descriptif, **S** pour Susceptible, **I** pour Infectieux, et **R** pour Rétablis). McKendrick débuta sa carrière en tant que médecin de l'armée. Au même temps que R. Ross, il exerça dans le service médical de l'armée de sa majesté la reine en Inde. Il apparût que A.G. McKendrick était un brillant Mathématicien, et de plus, il travailla avec R. Ross dans ses premières années de carrière en Sierra Leone. Le plus saillant des résultats de McKendrick fut le très célèbre **théorème du seuil**. Ce théorème stipule que l'introduction dans une communauté d'individus susceptibles d'individus infectieux ne provoquerait pas une explosion de l'épidémie, tant que la densité des susceptibles demeurent en deçà d'une certaine valeur critique. D'un autre côté, si le seuil critique est dépassé, l'épidémie s'installe. C'est le début de l'histoire du fameux nombre \mathcal{R}_0 .

Il semble peu connu que R. Ross publia certaines équations épidémiologiques qui sont attribuées à A. G. McKendrick (Ross et Hudson 1917). De plus, Le premier théorème du seuil est attribuable à R. Ross, qui identifia le seuil critique en densité de moustiques par rapport aux humains, en deçà duquel la pérennisation du paludisme ne pouvait pas s'entretenir d'elle-même. (Fine 1975, Dietz 1985).

Le couple «*Principe du seuil*» et «*la loi de masse-action*» forme la pierre angulaire de la théorie moderne de l'épidémiologie mathématique.

Nous concluons ce survol historique par une citation de Sir Ronald Ross

« As a matter of fact, all epidemiology concerned as it is with variation of disease from time to time or from place to place, must be considered mathematically, however many variables are implicated, if it is to be considered at all. To say that a disease depends upon certain factors is not to say much, until we can also form an estimate as to how largely each factor influences the whole result. And the mathematical method of treatment is really nothing but the application of careful reasoning to the problem at issue »

Depuis ces pionniers, l'essor de la contribution des mathématiques dans la compréhension et la prise en main des systèmes de l'épidémiologie s'est accrue. Cette contribution, du fait de la grande complexité des systèmes de l'épidémiologie se focalise sur l'acquisition des données, la construction des modèles déterministes et stochastiques décrivant de mieux en mieux la dynamique dans ces systèmes, et l'analyse de la stabilité des équilibres.

Les modèles déterministes en dimension finie rencontrés en épidémiologie mathématique sont des modèles compartimentaux particuliers. Il existe une abondante littérature sur les modèles compartimentaux. Les recherches dans l'épidémiologie mathématiques s'en trouveront enrichies par l'assimilation des résultats déjà existant sur les modèles compartimentaux.

Dans cette partie de notre mémoire, nous amorçons un travail visant à cette assimilation. nous caractérisons les modèles déterministes de l'épidémiologie mathématiques en tant que modèles compartimentaux. Il en résulte des systèmes avec une écriture particulière qui permettent d'établir la stabilité du «*point d'équilibre non endémique*».

Le chapitre 2 est consacré à la modélisation épidémiologique. Les systèmes obtenus sont en dimension finie et déterministes. Ils vont se décrire par des EDO.

La première section précise le vocabulaire classique utilisé. La deuxième section donne une description en tant que modèle compartimental de l'évolution d'une épidémie. Nous donnons quelques exemples standards. Dans la troisième section, nous rappelons pour la commodité du lecteur les notations utilisées dans la description d'un modèle compartimental. Nous profitons pour fixer les notations qui seront utilisées par la suite. La quatrième section décrit les spécificités des modèles épidémiologiques en tant que modèles compartimentaux.

Le chapitre 3 rassemble les outils classiques dont nous avons besoins. Il reprend essentiellement les notions introduites par Jacquez [20]. Nous faisons le lien avec des résultats de LaSalle [24]. Nous rappelons aussi un résultat de Bhatia–Szegő [3] qui est d'une grande importance dans nos résultats. Les modèles épidémiologiques sont des modèles compartimentaux particuliers. Les matrices de Metzler y jouent un rôle important. Pour rendre notre travail auto-référent, nous rappelons des résultats dispersés dans la littérature. Le problème de donner un crédit particulier

à chaque résultat est difficile, voire impossible. Un facteur de complication supplémentaire est la diversité des applications des Matrices de Metzler stable, qui a pu conduire à des critères établis de façon indépendante. Ce que nous appelons une matrice de Metzler, suivant Hearon, Luenberger, Arrow, LaSalle, Gantmacher est l'opposé d'une M-matrice stable pour Bergmann et Plemmons...

Le chapitre 4 propose, une méthode pour calculer facilement une expression liée au \mathcal{R}_0 des épidémiologistes, et une méthode systématique pour déterminer la globale asymptotique stabilité de l'équilibre non endémique (DFE) des modèles épidémiologiques. Il y a très peu de résultats globaux pour la stabilité du DFE dans la littérature.

Le chapitre 5 reprend une série d'exemples de la littérature. Nous améliorons les résultats obtenus, et prouvons une conjecture de Perelson Kirshner et De Boer. Cela illustre l'effectivité des résultats du chapitre 4. Les exemples ne sont pas exhaustifs.

en Annexe, nous reprenons un résultat de réduction qui nous est utile pour la stabilité.

Chapitre 2

Généralités

2.1 Principes Epidémiologiques

Avant de mathématiser les phénomènes liés aux maladies infectieuses, nous allons décrire brièvement le scénario du cycle d'une maladie infectieuse.

La transmission d'une maladie peut se faire de différentes manières. Par exemple, dans le cas de la Tuberculose, il suffit d'inhaler les germes émis par une personne infectieuse. Dans le cas d'une maladie sexuellement transmissible (blennorragie, syphilis ...), Il faut avoir un contact sexuel avec une personne infectieuse. Il s'agit des infections par contact direct. Dans certains cas, la transmission se fait par un hôte secondaire insecte ou animal, on parle alors de maladie à vecteur ; Il faut par exemple la piqûre d'un moustique contaminé (le paludisme, la fièvre jaune, la RVF, ...), ou la morsure d'un animal (la rage, la peste ...); il s'agit de la transmission indirecte.

Dans tous les cas on dit que la contamination d'un individu susceptible est suite à un «*contact adéquat*» de cet individu avec des individus infectieux.

2.1.1 Description du cycle d'une infection épidémiologique

On appelle **susceptible** tout individu de la population en considération qui n'est ni malade, ni immunisé contre la maladie considérée, et qui suite à un contact adéquat peut développer cette maladie.

Le cycle d'une infection épidémiologique commence par une certaine quantité d'individus **susceptibles**, et d'au moins un individu malade de la maladie en considération. Les individus malades et transmettant la maladie sont dits **infectieux**. Lors de contacts adéquats des individus susceptibles avec des individus infectieux, les individus susceptibles vont être contaminés par la maladie.

En général, on ne devient pas infectieux tout de suite ; il existe une **période de latence**. Durant cette période, le développement des organismes responsables de la maladie est purement interne, sans aucun symptôme externe faisant état de la maladie. Les individus contaminés durant cette

période sont dits **Latents**, et ne peuvent pas transmettre la maladie. A la fin de la période, les individus concernés peuvent alors transmettre la maladie à d'autres individus susceptibles. Ils sont devenus des individus infectieux. La période pendant laquelle un individu infectieux peut transmettre la maladie en cas de contact adéquat avec des individus susceptibles est appelée la **période infectieuse** pour ce dernier.

A un certain moment du cycle de l'infection, apparaissent les symptômes reconnaissables faisant état de la maladie. la période allant du point d'infection, à l'instant de l'apparition des premiers symptômes est reconnu sous l'expression de **Période d'incubation**.

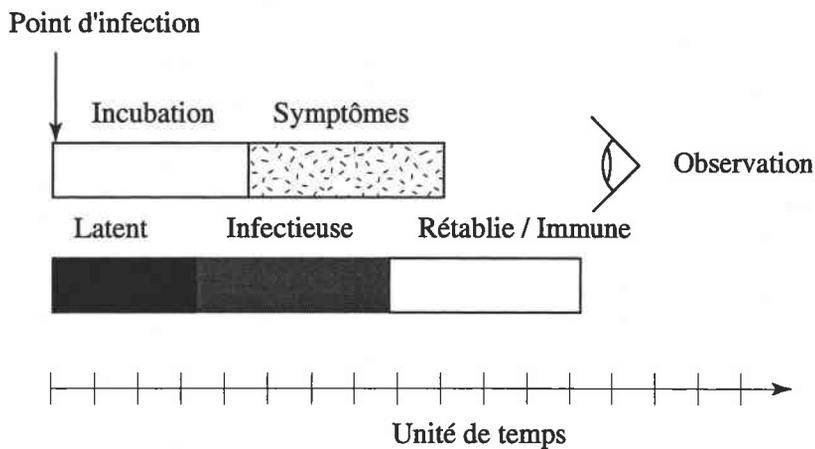


FIG. 2.1 – un cycle d'infection

Dépendant de l'infection, les symptômes peuvent apparaître avant ou après le début de la période infectieuse, et la durée des symptômes n'est pas nécessairement synchronisée sur celle-ci.

La période d'incubation n'a pas d'intérêt du point de vue de la transmission en général, en raison du manque de synchronisme avec le début de la période infectieuse. Cependant, dans les cas des infections dangereuses du point de vue de la santé publique, l'apparition des symptômes est le signal pour la mise en quarantaine des malades ; Elle a alors une signification pour la modélisation. Le tableau 2.1 présente une récapitulation de quelques cas de figure.

A la fin de la période infectieuse les individus guérissent (ou il meurent) dans tous les cas, ils ne transmettent plus la maladie.

Suivant la maladie considérée, les individus guéris peuvent avoir une immunité acquise ou non. Les personnes ou les animaux ont des anticorps spécifiques ou une immunité cellulaire. Cette immunité peut être temporaire. Dans le cas du paludisme, il n'y a pas à proprement parler d'immunité, de même qu'il n'y a pas d'immunité pour la Trypanosomiase, la blennorragie, la fièvre au virus d'Ebola–Marburg... Dans le cas de la variole, l'immunité est très longue. Dans le cas du tétanos, l'immunité (obtenu par vaccination) est d'au moins une dizaine d'années

Les individus qui portent un agent responsable d'une maladie spécifique en l'absence de toute manifestation clinique discernable de la maladie sont appelés des **porteurs**. Ils sont une source

Maladie infectieuse	Période en jours		
	d'incubation	de latence	Infectieuse
Rougeole	8-13	6-9	6-7
Oreillons	12-26	12-18	4-8
Coqueluche	6-10	21-23	7-10
Rubéole	14-21	7-14	11-12
Diphtérie	2-5	14-21	2-5
Varicelle	13-17	8-12	10-11
Hépatite B	30-80	13-17	19-22
Poliomyélite	7-12	1-3	14-20
Grippe	1-3	1-3	2-3
Variole	10-15	8-11	2-3
Scarlatine	2-3	1-2	14-21

TAB. 2.1 – Période d'Incubation, de Latence et Infectieuse (en jours)

potentielle de l'infection.

L'état de porteur peut exister chez des individus infectieux pour lesquels il n'y a aucune manifestation apparente d'infectiosité discernable pendant leur période d'infectieuse. De tels individus sont appelés des **porteurs sains**, ou aussi des porteurs asymptomatiques.

L'état de porteur peut être considéré pendant la période d'incubation, de convalescence ou de post-convalescence. On parle alors de porteurs incubants ou de porteurs convalescents. Dans tous les cas, l'état de porteur peut être d'une durée variable, courte ou longue. Les porteurs temporaires ou chroniques jouent dans certaines maladies un rôle très important dans la pérennisation de la maladie. C'est le cas pour : l'hépatite B, la typhoïde, le choléra, La poliomyélite, la tuberculose...

2.2 Structure compartimentale des modèles épidémiologiques

L'utilisation des modèles compartimentaux a une longue histoire en épidémiologie mathématique, depuis Sir Ronald Ross (1911) Kermack et Mac Kendrick (1929) ...

Comme on l'a vu précédemment, les individus peuvent être répartis en diverses classes **Susceptibles, Latents, Infectieux, Rétablis**, ... Le principe de la modélisation par compartiments consiste à créer des «réservoirs» virtuels qu'on nomme alors les compartiments.

Un compartiment est un réservoir hypothétique ou conteneur, ne correspondant pas forcément à une représentation physique volumique, spatiale ou massique, ou à un espace physiologique.

Par exemple l'on considère le compartiment des «susceptibles» ... L'hypothèse est que le compartiment est une structure homogène. Autrement dit, pour le compartiment des susceptibles,

chaque susceptible est identique à tout autre du point de vue de l'épidémiologie. C'est ainsi que dans le cas des maladies sexuellement transmissibles par exemple où la transmission est relative aux habitudes sexuelles des individus de la population concernée, on suppose que les habitudes sexuelles des individus d'un compartiment sont les mêmes.

Les éléments dans un compartiment sont considérés comme des particules, des éléments de matière. La modélisation va consister à décrire le flot de particules entre les divers compartiments.

Un modèle compartimental peut être graphiquement représenté par un ensemble de boîtes, chacune étant un compartiment du modèle, et un système d'arcs orientés reliant les compartiments. Si un arc orienté va d'un compartiment **A** vers un compartiment **B**, cela signifie que les éléments de **A** sont susceptibles de passer dans **B**.

Dans un modèle compartimental, il est essentiel de faire l'hypothèse d'homogénéité dans les compartiments ; c'est-à-dire, que la matière dans un compartiment ne présente pas de différence, et que, une unité de matière qui entre dans un compartiment se mélange instantanément au contenu du compartiment.

Les modèles compartimentaux furent utilisés d'abord en physiologie, où il est question de décrire des flots de matières (des biomasses, de l'énergie ...) entre les compartiments. À présent, les modèles compartimentaux sont assez largement utilisés en modélisation mathématique. Leur utilisation permet d'exprimer le comportement des dynamiques apparaissant dans l'étude des traceurs cinétiques, dans des réactions chimiques, en biochimie, en écologie, dans les applications médicales...

En épidémiologie, les compartiments correspondent naturellement à des classes homogènes d'individus ; différents types de compartiments de susceptibles, de latents d'infectieux etc ... Dans le tableau récapitulatif 2.2 nous donnons une description de la terminologie des notations usuellement utilisées pour désigner les compartiments dans des cycles épidémiologiques. Les termes et notations sont d'origine anglo-saxonnes ; nous en donnons pour chacun la signification en Français.

2.2.1 Un exemple classique : le modèle Kermack-Mckendrick

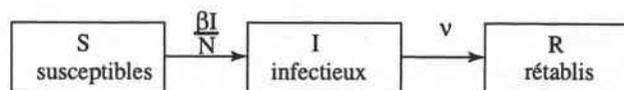
Pour donner un exemple, nous allons considérer le modèle classique de Kermack et McKendrick déjà présenté en page 66, et que nous rappelons ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\beta xy \\ \dot{y} &= \beta xy - \nu y \\ \dot{z} &= \nu y \end{cases}$$

Tableau terminologique			
Nom du compartiment en Anglais	signification en Français	Notation	Commentaires
Susceptibles	Susceptibles	S	Individus qui peuvent être atteints par l'infection
Infective	Infectieux	I	Individus atteints par l'infection et qui peuvent la transmettre
Exposed	Latents ou Exposés	E	Individus atteints par l'infection, mais inapte à la transmettre
Removed	Rétablis ou Immuns	R	Individus guéris de l'infection et prémunis contre elle
Mother protected children	Bébés sous anti corps maternels	M	Individus protégés par les anti corps acquis
Carrier	Porteurs	C	Individus de saine apparence, mais aptes à transmettre l'infection (i.e. Porteurs sains)
Vaccinated	Vaccinés	V	Individus vaccinés contre l'infection
Treated	Traités	T	Individus ayant reçu avec succès le traitement contre l'infection
Quarantine	Quarantaine	Q	Individus mis en quarantaine
		N	Nombre total des individus en considération

TAB. 2.2 – Récapitulatif des termes et notations utilisées dans les modèles épidémiologiques

Kermack et McKendrick avaient pour but d'étudier une épidémie de peste dans l'île de Bombay entre le 17 décembre 1905 et le 21 juillet 1906. Il s'agit d'un modèle **SIR**. Ce qui signifie que les individus passent du compartiment des susceptibles à celui des infectieux et enfin à celui des «removed». On considère que la population de l'île est homogène. Les quantités x , y et z représentent les proportions de population respective de **S**, **I** et **R**. L'unité étant le millier, on considère que ces quantités sont des réels. Il est clairement indiqué par Kermack et McKendrick qu'il s'agit en fait de densités surfaciques. En effet la population vivait sur une surface fixe. Le diagramme de flux entre les compartiments du modèle est présenté dans la figure 2.2 suivante

FIG. 2.2 – diagramme de flux de matière entre compartiments du modèle **SIR**

Le terme $-\beta xy$ représente la quantité «instantanée» de population des susceptibles devenus infectieux. Les nouveaux infectieux proviennent des susceptibles qui ont eu un contact adéquat avec un infectieux. Kermack et McKendrick ont choisi de l'exprimer par la «loi d'action de

masse» : un coefficient β multiplié par le produit des densités des susceptibles et des infectieux, xy . Nous reviendrons plus loin sur ce choix de modélisation.

Le terme βxy qui apparaît dans l'équation différentielle, exprime l'accroissement de la quantité des individus dans le compartiment des infectieux. C'est le principe du bilan de matière.

Le terme $-\nu y$ représente la vitesse de guérison des infectieux qui passent dans le compartiment des Rétablis **R**.

Il est fait l'hypothèse que l'immunité acquise est permanente, ou plus exactement, l'épidémie est étudiée sur une période de temps assez courte relativement à la durée de vie moyenne d'un individu, et l'immunité est considérée comme permanente sur cette période.

De même Kermack et McKendrick en raison de la brièveté de la période de la maladie ont supposé la population constante, (y compris avec **R** qui comprenait les décédés). Autrement dit les naissances sont négligées.

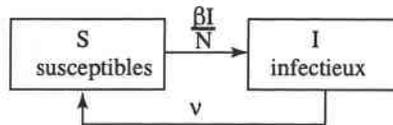


FIG. 2.3 – Modèle SIS

Dans des infections où les individus gardent de manière permanente leur immunité, les modèles **SIR** sont appropriés pour la modélisation. On rencontre ces situations dans des infections dont les parasites responsables sont les virus par exemple, la rougeole, la varicelle, les oreillons...

Lorsque l'immunité d'un individu qui est guéri d'une infection comme dans la situation précédente n'est pas permanente, au bout d'un certain temps, d'immunité, ce dernier retourne dans le compartiment des **S**. Les modèles **SIRS** sont appropriés pour la modélisation des maladies correspondantes.

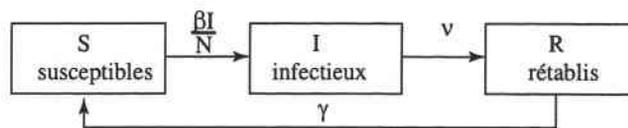
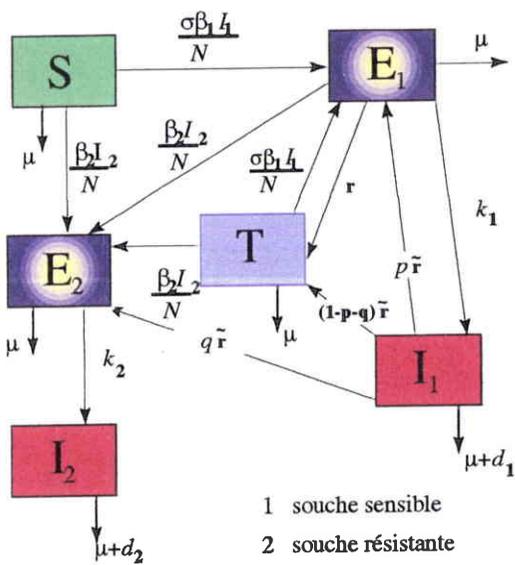


FIG. 2.4 – Modèle SIRS

Les modèles épidémiologiques déterministes modélisés par les équations différentielles ordinaires sont des modèles compartimentaux. Ces modèles peuvent être très compliqués. Par exemple, nous donnons le diagramme des flux entre compartiments du modèle de la tuberculose dans la figure 2.5 où nous exprimons pour l'instant les taux instantanés relatifs aux différents arcs d'interconnection par des descriptions. cette figure sera reprise plus loin dans le chapitre sur les exemples d'application de nos résultats.



- $\frac{\sigma\beta_1 I_1}{N}$ infection à la souche 1
 - $\frac{\beta_2 I_2}{N}$ infection à la souche 2
 - k_i passage de l'état de latent à l'état d'infectieux, souche i
 - $q\tilde{r}$ prise incorrecte de traitement
 - $p\tilde{r}$ prise incorrecte de traitement
 - $(1-p-q)\tilde{r}$ traitement avec succès
 - r traitement avec succès
 - μ mortalité par voie naturelle
 - d_i surmortalité de la souche i par maladie
- Dès qu'on entre dans la branche de la souche 2 on n'en sort que mort...

FIG. 2.5 – diagramme de flux entre les compartiment du modèle de la tuberculose à deux souches

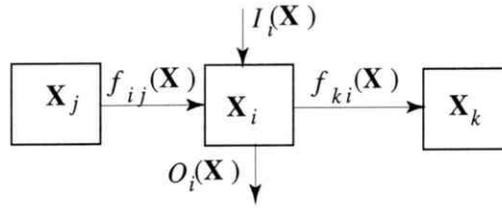
Nous reviendrons en détail sur le modèle correspondant à cette figure plus loin. pour le moment, il nous suffit de savoir qu'à chaque modèle compartimental correspond un diagramme de flux présentant des compartiments et des arcs orientés matérialisant les flots de matières entre les compartiments.

Avant d'étudier des modèles épidémiologiques spécifiques, nous allons donner les principes de base des modèles compartimentaux dont nous avons besoin.

2.3 Modèles compartimentaux généraux

On considère un système quelconque, sujet à une modélisation compartimentale. Par rapport aux hypothèses de base, l'ensemble des matières dans le système est subdivisé en un certain nombre de classes de matières élémentaires avec chacune des propriétés communes qui définissent l'homogénéité de la classe correspondante; il s'agit là des compartiments. Supposons dans notre cas que les matières sont réparties dans n compartiments, chacun repéré par un indice i , $1 \leq i \leq n$. On note X_i la quantité de matière dans le compartiment i ; usuellement, le compartiment i est aussi appelé le compartiment X_i . L'état du système est un vecteur colonne $\mathbf{X} = (X_1; X_2; \dots; X_n) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^n$, dont les différents composants sont les variables représentant l'état du compartiment du même nom. La figure 2.6 ci-dessous donne un aperçu du diagramme des flux du compartiment X_i . On a naturellement $X_i(t) \geq 0$.

On note par $f_{ji}(\mathbf{X})$ la vitesse à laquelle la matière quitte le compartiment X_i pour aller dans le compartiment X_j , $O_i(\mathbf{X})$ désigne la vitesse de sortie du système vers l'environnement extérieur par le compartiment X_i , et $I_i(\mathbf{X})$ désigne la vitesse de rentrée venant de l'environnement extérieur par le compartiment X_i .

FIG. 2.6 – Représentation des échanges des matières du compartiment \mathbf{X}_i

Un bilan de matière donne pour le compartiment \mathbf{X}_i l'équation différentielle

$$\dot{X}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ij}(\mathbf{X}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_{ji}(\mathbf{X}) - O_i(\mathbf{X}) + I_i(\mathbf{X})$$

Les fonctions f_{ij} et O_i ont une propriété particulière. Quand le compartiment \mathbf{X}_i est vide (i.e. $X_i = 0$), il ne peut rien en sortir ; donc, pour les points de la forme $\overset{\circ}{\mathbf{X}}_i = (X_1; \dots; X_{i-1}; 0; X_{i+1}; \dots; X_n) \in \mathcal{M}$, on a

$$f_{ji}(\overset{\circ}{\mathbf{X}}_i) = 0 \quad \text{et} \quad O_i(\overset{\circ}{\mathbf{X}}_i) = 0$$

Il est bien connu que si f_{ji} est de classe \mathcal{C}^1 , alors on peut écrire pour tout \mathbf{X} , $f_{ji}(\mathbf{X}) = a_{ji}(\mathbf{X})X_i$ où

$$a_{ji}(\mathbf{X}) = \int_0^1 \frac{\partial f_{ji}}{\partial X_i}(X_1; X_2; \dots; X_{i-1}; tX_i; X_{i+1}; \dots; X_n) dt$$

De même si O_i est de classe \mathcal{C}^1 alors on a $O_i(\mathbf{X}) = o_i(\mathbf{X})X_i$, avec

$$o_i(\mathbf{X}) = \int_0^1 \frac{\partial O_i}{\partial X_i}(X_1; X_2; \dots; X_{i-1}; tX_i; X_{i+1}; \dots; X_n) dt$$

On supposera que c'est le cas pour la suite.

Avec ces notations, le bilan de matière pour le compartiment \mathbf{X}_i donne :

$$\dot{X}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}(\mathbf{X})X_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji}(\mathbf{X})X_i - o_i(\mathbf{X})X_i + I_i(\mathbf{X})$$

Soit \mathbf{A} l'application définie sur \mathcal{M} qui à tout $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$ associe la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = (a_{ij}(\mathbf{X}))$ avec les termes $a_{ii}(\mathbf{X})$ défini par :

$$a_{ii}(\mathbf{X}) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji}(\mathbf{X}) - o_i(\mathbf{X})$$

on a :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \mathbf{X} + \mathbf{I}(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

avec $\mathbf{I}(\mathbf{X}) = (I_1(\mathbf{X}); I_2(\mathbf{X}); \dots; I_n(\mathbf{X}))$

L'application \mathbf{A} est particulière : pour tout $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$,

– les termes hors diagonaux de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ sont positifs (i.e. $a_{ij}(\mathbf{X}) \geq 0$ pour les $i \neq j$)

– Les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ sont négatifs (i.e. $a_{ii}(\mathbf{X}) \leq 0$), et tels que

$$-a_{ii}(\mathbf{X}) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji}(\mathbf{X})$$

Remarque 2.1 L'équation fondamentale (2.1) d'un système compartimental n'est en aucun cas unique. L'intérêt sera de choisir la représentation de l'application \mathbf{A} la plus intéressante possible.

Définition 2.1 (Matrice de Metzler) Toute matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} \geq 0$ pour tout $i \neq j$ est appelée matrice de Metzler

Définition 2.2 (Matrice Compartimentale) Toute matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est une matrice de Metzler, et telle que $a_{ii} \leq 0$, et $-a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_{ji}$ pour tout i , $1 \leq i \leq n$ est appelée

matrice compartimentale

2.3.1 Convention de représentation des modèles compartimentaux

L'équation fondamentale d'un système compartimentale est donné par l'équation (2.1) que nous rappelons ci-dessous.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \mathbf{X} + \mathbf{I}$$

définie sur un ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^n$, avec \mathbf{A} une application définie sur \mathcal{M} , telle que pour tout $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$, $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ soit une matrice compartimentale.

Les applications a_{ij} correspondants aux termes non diagonaux des valeurs de l'application \mathbf{A} sont de dimension T^{-1} (T représentant ici l'unité de temps). Chacune représente le taux par unité de temps suivant lesquels la matière est transférée du compartiment \mathbf{X}_j vers le compartiment \mathbf{X}_i . On parlera de taux instantané de transfert de matière du compartiment \mathbf{X}_j vers le compartiment \mathbf{X}_i .

On conviendra de représenter le modèle compartimental par un graphe orienté avec le cas échéant les arcs à un seul sommet. que nous appelons le diagramme de flux de matière du modèle.

- Les sommets seront les compartiments.
- Un arc joindra deux sommets de i vers j s'il existe un flux de matière du compartiment \mathbf{X}_i vers le compartiment \mathbf{X}_j .
- On attachera à l'arc $[i, j]$ a_{ji} , le taux instantané de transfert de matière du compartiment \mathbf{X}_j vers le compartiment \mathbf{X}_i .

- On attachera le cas échéant à l'arc $[i, \rightarrow [o_i$, le taux instantané de transfert de matière vers l'environnement extérieur lorsqu'il existe un transfert de matière vers l'environnement extérieur par le compartiment X_i et à l'arc $] \rightarrow, i] I_i$, la vitesse de rentrée de matière dans le système par le compartiment X_i , lorsqu'il existe un transfert de matière de l'environnement extérieur vers le système par le compartiment X_i

La figure 2.7 ci-dessous donne un aperçu de la représentation d'un modèle compartimental correspondant au compartiment X_i .

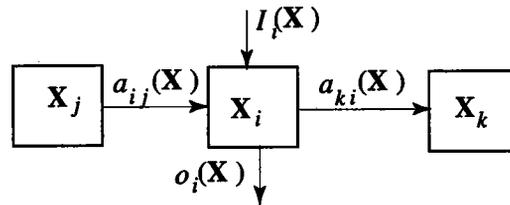


FIG. 2.7 - Diagramme de flux de matière au niveau du compartiment X_i

De cette représentation, on obtient automatiquement l'équation fondamentale (2.1).

2.4 Les modèles épidémiologiques en tant que modèles compartimentaux

En général un modèle épidémiologique déterministe est un modèle compartimental où les quantités de matières correspond au nombre d'individus mesuré avec une certaine unité (centaine, millier, million, etc ...)

On appelle **incidences horizontales** dans un modèle épidémiologique les lois qui caractérisent les arcs entre un compartiment d'individus sains et un compartiment d'individus infectés. Ces lois sont caractéristiques de la maladie correspondant au modèle. Les **incidences verticales** sont les lois qui caractérisent les entrées et sorties des compartiments.

2.4.1 Incidences horizontales à partir du compartiment des susceptibles

Un susceptible quitte le compartiment des susceptibles quand il est infecté lors d'un contact adéquat avec des individus infectés. On va considérer à titre d'exemple une maladie hypothétique dans une population homogène avec un seul compartiment des individus susceptibles que nous notons S , et un compartiment d'individus infectieux que nous notons I . Le vecteur $\mathbf{X} = (S; I; \dots)$ désigne l'état du système. la restriction du diagramme de flux entre les compartiments du modèle au niveau du compartiment S se présente comme sur la figure 2.8 ci-dessous.

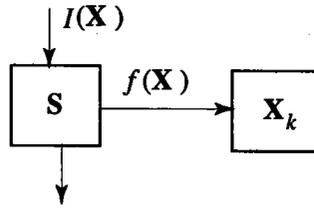


FIG. 2.8 – Restriction du diagramme de flux des matières au compartiment S

où $f(\mathbf{X})$ est la vitesse de transfert de matières du compartiment S vers les autres compartiments auxquels il est connecté par un arc.

Si le bilan instantané de matière au niveau du compartiment S donne

$$\dot{S} = -f(\mathbf{X}) + \text{autres termes}$$

on a

$$S = 0 \Rightarrow f(\mathbf{X}) = 0$$

$$I = 0 \Rightarrow f(\mathbf{X}) = 0$$

Si la fonction f est de classe C^1 , alors on peut écrire

$$f(\mathbf{X}) = a(\mathbf{X}) I S$$

et l'équation différentielle exprimant la variation dans le compartiment S s'écrit :

$$\dot{S} = -a(\mathbf{X}) I S + \text{autres termes}$$

La fonction

$$\mathbf{X} : \mapsto a(\mathbf{X}) I$$

qui est le taux instantané de "quittage" du compartiment S est par définition la loi d'incidence horizontale de la maladie sur la population considérée. On parle aussi de taux d'incidence.

La forme la plus commune de cette loi est la loi dite d'action de masse ou vraie loi d'action de masse donnée par :

$$a(\mathbf{X}) I = \beta \frac{I}{N}$$

où N est la population totale.

β est le nombre moyen de contacts adéquats par individu et par unité de temps.

L'interprétation en modélisation est la suivante :

Les susceptibles au nombre de S font instantanément βS contacts adéquats, mais seuls $\frac{I}{N}$ de ces contacts sont avec les infectieux qui transmettent alors la maladie.

Avec nos conventions de notation, on aura :

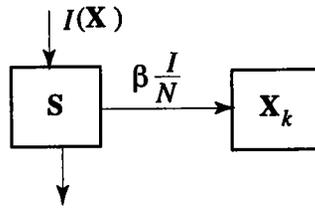


FIG. 2.9 – Restriction du diagramme de flux des matières au compartiment S

Il existe dans la littérature une autre loi d'incidence appelée **pseudo loi d'action de masse**, où

$$a(\mathbf{X})I = \beta I$$

Elle est utilisée par May et Anderson [1]

Des essais de modélisation du taux d'incidence pour diverses maladies ont été faits sur plusieurs modèles épidémiologiques. On a considéré la loi

$$\eta N^\nu \frac{I}{N}$$

pour des systèmes constitués de populations variant entre 1000 et 400000 individus ; les diverses valeurs de ν obtenues varient entre 0.03 et 0.07.

2.4.2 L'intervention de la démographie dans les modèles

Toute population se déplace, se reproduit et décède. Les systèmes épidémiologiques considèrent généralement des populations confinées dans un espace géographique limité. Dans certain cas, il est nécessaire de prendre en compte ces variations de population, surtout lorsque l'échelle de temps dans la maladie considérée est assez grande. La prise en compte des variations de la population se caractérise par des entrées et sorties des compartiments du modèle correspondant. Ces entrées et/ou sorties mettent en relation le système avec l'environnement extérieur suivant des taux par unité de temps donnés. Généralement, les arcs représentant des recrutements dans le modèle sont annotés par les vitesses auxquelles les compartiments reçoivent de la matière, contrairement aux autres arcs, dont les annotations utilisées sont les taux instantanés de transfert de matières correspondants. Les recrutements correspondent à des naissances, les transmissions verticales, et les immigrations. Ils sont représentés sur le graphique du modèle compartimental par des arcs dépendant d'un seul compartiment.

La figure 2.5 à la page 75 est le graphique d'un modèle épidémiologique où tous les compartiments sont sujets aux décès de leurs membres. Dans ce modèle, le recrutement de nouveaux membre n'est considérée dans aucun compartiment.

La figure 5.2 de la page 123 est la représentation du diagramme des flux entre compartiments d'un modèle **MSEIR** où la reproduction des membres de certains compartiments est prise en compte. Le décès des membres de tous les compartiments est également pris en compte. L'immigration cependant n'est prise en compte dans aucun des compartiments.

La figure 5.3 de la page 131 est la représentation du diagramme des flux entre compartiments d'un modèle **SEIR** où la reproduction n'est prise en compte dans aucun compartiment. Le décès des membres de tous les compartiments est également pris en compte. L'immigration est prise en compte dans le compartiment **S**.

La démographie joue un rôle assez important dans les systèmes épidémiologiques. Il est arrivé quelquefois que l'immigration d'un seul individu contaminé par le paludisme soit à l'origine d'une épidémie dans une région où cette infection était inconnue.

Chapitre 3

Quelques outils Mathématiques

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté des généralités sur l'épidémiologie. L'usage des modèles compartimentaux dans la modélisation des infections épidémiologiques est naturel. La modélisation suivant des structures compartimentales sont des techniques assez répandues dans la modélisation des systèmes en sciences fondamentales telles que les biosciences ou l'économie [21, 19]. Les modèles déterministes de l'épidémiologie mathématique sont des modèles compartimentaux. Ceci nous conduit à consacrer une partie de ce chapitre aux modèles compartimentaux. Nous présentons les modèles compartimentaux de manière générale. Nous présentons dans la partie suivante un certain nombre de résultats, essentiellement contenus dans [2] et [20] sur les matrices quasi positives ou matrices de Metzler, qui sont à la base de nos résultats. Les démonstrations que nous en donnons pourraient parfois être nouvelles.

En épidémiologie mathématique, le Principe de LaSalle se trouve être souvent évoqué, lorsque il est question d'analyser la stabilité des points d'équilibre des systèmes. On rencontre souvent des utilisations abusives de ce Principe. En effet, le Principe de LaSalle établit l'attractivité des points d'équilibre. Ce critère seul ne suffit pas à conclure à l'asymptotique stabilité des points d'équilibre en considération. Nous consacrons la quatrième partie de ce chapitre au Principe de LaSalle et les résultats de stabilité et de stabilité asymptotique qui s'y rapportent.

3.2 Les Modèles compartimentaux

Sous des conditions de régularité suffisante des vitesses de transferts de matières entre compartiments d'un modèle compartimental, la dynamique dans celui-ci s'exprime par l'équation fondamentale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{I} \quad (3.1)$$

définie sur un ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^n$ qui est l'orthant positif de \mathbb{R}^n , avec \mathbf{A} l'application

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \in \mathcal{M} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (3.2)$$

telle que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ soit une matrice compartimentale.
Inversement, Soit une application

$$\mathbf{B} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{x}) = (b_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (3.3)$$

où pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, on a :

- Les $b_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0$ pour les $i \neq j$
- les $b_{ii}(\mathbf{x}) \leq 0$ $1 \leq i \leq n$
- pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $|b_{ii}(\mathbf{x})| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ji}(\mathbf{x})|$

Le système

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{I} \quad (3.4)$$

est le modèle d'état d'un système compartimental constitué de n compartiments, dont les vitesses de transfert de matière du compartiment \mathbf{x}_i est donné par :

- > $b_{ji}(\mathbf{x})x_i$ pour la part cédée au compartiment \mathbf{x}_j ,
- > $-(b_{ii}(\mathbf{x}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ji}(\mathbf{x}))x_i$ cédée à l'environnement extérieur au système

$(\mathbf{I})_i$ est la vitesse de réception de matière dans le compartiment \mathbf{x}_i .

Définition 3.1 (Système compartimental) On appelle système compartimental de classe \mathcal{C}^1 , tout système d'équations différentielles qui peut se mettre sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{I} \quad (3.5)$$

définie sur un ensemble $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^n$, avec l'application

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \in \mathcal{M} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

de classe \mathcal{C}^1 tel que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$

1. —> $a_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0$ pour tous les i et j avec $i \neq j$
2. —> $a_{ii}(\mathbf{x}) \leq 0$ pour tous les i , $1 \leq i \leq n$
3. —> $|a_{ii}(\mathbf{x})| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji}(\mathbf{x})$ pour tous les i , $1 \leq i \leq n$

3.2.1 Propriétés des systèmes et matrices compartimentaux

L'usage dans l'analyse des systèmes compartimentaux impose une terminologie qui emprunte les mots et expressions à des disciplines connexes. Par exemple à la théorie des graphes, les

nœuds, les arcs et la matrice d'adjacence ; les nœuds correspondent aux compartiments, les arcs, aux interconnexions entre compartiments en interactions ; la matrice d'adjacence, ou la matrice d'incidence sommet-sommet correspond à la matrice du système. On parlera donc de système compartimental connexe, fortement connexe, et autres d'après les précisions suivantes.

Définition 3.2 (système fortement connexe) *On dira qu'un système compartimental est fortement connexe si pour tout couple de compartiments du modèle, il existe toujours un chemin orienté pour aller de l'un à l'autre.*

Définition 3.3 (système connecté sur fuite) *On dira qu'un système compartimental est connecté sur fuite si tout compartiment du système est relié par un chemin à un compartiment qui a une fuite ou sortie sur l'environnement extérieur.*

Définition 3.4 (Système à piège) *Un système compartimental est à piège s'il existe un sous ensemble non vide de compartiments interconnectés en sous système fortement connexe où toute matière qui y entre ne repartira plus vers les autres compartiments. Le sous ensemble des compartiments correspondant est appelé le piège du système compartimental.*

Ceci peut avoir des caractérisations numériques ; il est nécessaire pour cela de donner quelques définitions supplémentaires

Remarque 3.1 Dans la littérature on trouve le terme de trappe ; notre notion de piège est un peu plus générale. Dans la littérature anglo-saxonne, la trappe est un ensemble de compartiments, d'un système compartimental, constituant un sous système dans lequel toute matière qui entre ne « ressort plus ». Ce qui exclut la possibilité d'excrétion vers l'extérieur. Dans notre cas, le piège peut avoir des sorties sur l'extérieur.

Définition 3.5 (Matrice réductible, matrice irréductible) *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.*

On dit que la matrice A est réductible, si il existe une matrice de permutation P tel que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La matrice A est dite irréductible si et seulement si elle n'est pas réductible.

Remarque 3.2 Il est à noter dans la définition 3.5 ci-dessus, il est question d'une matrice semblable, mais seul sont concernés comme matrice de passage, les $n!$ matrices de permutations de la base usuelle de \mathbb{R}^n .

La réductibilité de la matrice A peut s'exprimer autrement ; si $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ est la base usuelle

de \mathbb{R}^n , il existe $V = \langle (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \rangle$ sous espace propre de \mathbb{R}^n (i.e. $p < n$) tel que $AV \subset V$. L'irréductibilité d'une matrice A est caractéristique de la connexité de l'hypothétique système compartimental dont la matrice associée prend pour tout état la valeur matrice constante A .

On a le résultat suivant :

Theorème 3.1 Soit un système compartimental de type (3.5)

$$\dot{x} = A(x)x + I$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) \rightarrow pour tout $x \in \mathcal{M}$, la matrice $A(x)$ du système est irréductible
- 2) \rightarrow Le système (3.5) est fortement connexe sur \mathcal{M} .

Démonstration:

Supposons que pour un x , la matrice $A = A(x)$ soit réductible; Soit $S = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ l'ensemble des indices des vecteurs de la base usuelle de \mathbb{R}^n , tel que $V = \langle (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \rangle$ (V étant un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n tel que $AV \subset V$). Soit $i \in S$, on a pour tout $j \notin S$, $a_{ij}(x) = 0$ ce qui signifie concrètement que les compartiments x_i , $i \in S$, et x_j , $j \notin S$ ne sont pas en connections dans le sens $x_j \rightarrow x_i$. La conséquence en est qu'il n'y a pas de chemin pour aller d'un compartiment x_i , $i \in S$ vers un compartiment x_j , $j \notin S$, et donc le système correspondant n'est pas fortement connexe.

Supposons réciproquement que le système envisagé ci-dessus n'est pas fortement connexe. Il existe en conséquence de cause un couple de compartiments (x_i, x_j) , tel qu'il n'existe pas de chemin pour aller du premier vers le deuxième. Soit $S = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ l'ensemble des indices des compartiments tel qu'il existe un chemin $(x_i \leftrightarrow x_k)$, $k \in S$. On a $\text{card}(S) < n$ car sinon le système serait fortement connexe. Soit $j \notin S$ on a nécessairement pour un $x \in \mathcal{M}$, $a_{jk}(x) = 0$ pour tout $k \in S \cup \{i\}$; en effet, si tel n'est pas le cas, c'est à dire pour un $k \in S \cup \{i\}$ $a_{jk}(x_0) \neq 0$ pour tout $x_0 \in \mathcal{M}$, alors les compartiments x_k serait en connection avec le compartiment x_j dans le sens $x_k \rightarrow x_j$, et il existerait le chemin $(x_i \rightarrow x_j)$. Soit $(e_i, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})$ une famille constitué des vecteurs de la base canonique, indexé par les éléments de S , soit $(e_j, e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_q})$ la famille constituée des vecteurs e_l de la base canonique de \mathbb{R}^n , tel que $l \notin S \cup \{i\}$; notons $\mathcal{E} = (e_i, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, e_j, e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_q})$; \mathcal{E} est une base de \mathbb{R}^n . Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice relativement à la base canonique de \mathbb{R}^n est $A(x_0)$. On a, la matrice de f relativement à la base \mathcal{E} , $\mathcal{M}(f, \mathcal{E}) = \tilde{A}(x_0)$ est une matrice de la forme donnée dans l'égalité (3.6). Il s'en suit que la matrice $A(x_0)$ est réductible. \square

Définitions 3.6 Soit un système donné par (3.5), (système compartimental ou non).

\rightarrow On dit que le système (3.5) est fortement connexe si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ est irréductible.

—> On dit que le système (3.5) est **connecté sur fuite** si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il existe un j_i , tel que

- $a_{i j_i}(\mathbf{x}) \neq 0$
- $|a_{j_i j_i}(\mathbf{x})| > \sum_{k=1, k \neq j_i}^n a_{k j_i}(\mathbf{x})$

—> On dira que le système (3.5) est à **piège** Si :

- il existe un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ soit réductible
- pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un sous ensemble d'indice $J = \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$, $q < n$, et pour tout j , $1 \leq i_j \leq n$, tel que le système (3.5) admet un sous système correspondant à $\mathbf{x}_J = (x_{i_1}; x_{i_2}; \dots; x_{i_q}) \in \mathbb{R}^q$ qui s'écrit de la forme

$$\mathbf{x}_J = \mathbf{A}_J(\mathbf{x})\mathbf{x}_J + \mathbf{I}_J$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{A}_J(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ une matrice irréductible

Les caractérisations numériques de ces définitions conduisent aux définitions suivantes.

Définitions 3.7 (Matrice à diagonale dominante) Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice

—> On dit que \mathbf{A} est une **matrice à diagonale dominante colonne** si pour tout i , $1 \leq i \leq n$,

$$\text{on a } |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}|$$

—> On dit que \mathbf{A} est une **matrice à diagonale dominante ligne** si pour tout i , $1 \leq i \leq n$,

$$\text{on a } |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

—> On parlera de **matrice à diagonale dominante stricte colonne** (respectivement **ligne**) lorsque les signes d'inégalités dans les relations respectives ci-dessus sont plutôt des inégalités strictes

Définitions 3.8 (Matrice fortement connexe, matrice connectée sur fuite)

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice

—> On dira que \mathbf{A} est une **matrice fortement connexe** Si elle est irréductible

—> On dira que \mathbf{A} est une **matrice connectée sur fuite colonne** (respectivement **ligne**), Si pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il existe un j_i , tel que :

- $a_{i j_i} \neq 0$ (respectivement $a_{j_i i} \neq 0$)
- $|a_{j_i j_i}| > \sum_{k=1, k \neq j_i}^n |a_{k j_i}|$ (respectivement $|a_{j_i j_i}| > \sum_{k=1, k \neq j_i}^n |a_{j_i k}|$)

Définition 3.9 (Matrice compartimentale)

On appelle **matrice compartimentale**, toute matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients vérifient les propriétés :

- $a_{ij} \geq 0$ pour tous les i et j avec $i \neq j$

- $a_{ii} \leq 0$ pour tous les i , $1 \leq i \leq n$
- \mathbf{A} est à Diagonale dominante Colonne

L'usage des matrices compartimentales est lié à l'analyse des systèmes dont les états restent positifs tout le temps. La comparaison des vecteurs et matrices est souvent utilisée dans cette analyse. On se sert à cet effet de l'extension de l'ordre usuel dans \mathbb{R} , le « \leq » et l'ordre strict associé « $<$ » sur l'ensemble des matrices. L'utilisation de ces relations, du fait qu'il s'agisse des relations d'ordre partielles masque les détails de comparaison; Nous précisons ci-dessous l'usage, tel que nous ferons dans la suite. Nous précisons aussi l'usage de la relation « \ll » associée au symbole de l'ordre ci-dessus.

Définition 3.10 Soient $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(m, n)$

—> On dit que le vecteur \mathbf{x} , (respectivement la matrice \mathbf{A}) est strictement positif, et on note $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ (respectivement $\mathbf{A} \gg \mathbf{0}$), Si pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $x_i > 0$ (respectivement Pour tout i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $a_{ij} > 0$)

—> On dit que le vecteur \mathbf{x} , respectivement la matrice \mathbf{A}) est positif, et on note $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ (respectivement $\mathbf{A} > \mathbf{0}$), Si pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $x_i \geq 0$ et pour au moins un i , $x_i > 0$ (respectivement Pour tout i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $a_{ij} \geq 0$ et pour au moins un couple (i, j) , $a_{ij} > 0$)

—> On dit que le vecteur \mathbf{x} , (respectivement la matrice \mathbf{A}) est positif (largement), et on note $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (respectivement $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$), Si $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (respectivement $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ ou $\mathbf{A} = \mathbf{0}$).

Ces notations sont d'usage assez courant dans l'analyse des systèmes dont les états évoluent dans l'orthant positif. D'une référence à une autre, on note cependant des différences de sens entre l'inégalité stricte, et l'inégalité large. Nous avons adopté celle qui est la plus courante [2, 55].

La classe des matrices compartimentales est d'une grande importance dans les systèmes dont les états évoluent dans l'orthant positif d'un espace \mathbb{R}^n . De tels systèmes constituent une classe plus importante.

Soit un système linéaire

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3.7}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'un des composants $x_i(t)$ d'une courbe solution du système (3.7) $\mathbf{x}(t)$ reste positif tout à tout instant est que $\dot{x}_i \geq 0$ pendant que $x_i = 0$, et $x_j \geq 0$ pour les $j \neq i$ cette condition est remplie pour le système (3.7) si et seulement si $a_{ij} \geq 0$ pour tous les i, j , $i \neq j$. Toute matrice qui satisfait à cette condition est une matrice dite de Metzler [16, 15, 32].

Les matrices de Metzler sont utilisées dans une classe de systèmes assez large. De nombreux systèmes de la biologie, de l'économie et même des sciences physiques appartiennent à cette classe. Dans la section suivante, nous portons notre attention sur les matrices de Metzler, dans le but d'utiliser les résultats dans la caractérisation des systèmes épidémiologiques.

3.3 Les Matrices de Metzler

Définition 3.11 (Matrices de Metzler) On appelle matrice de Metzler, toute matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients vérifient la propriété :

$$a_{ij} \geq 0 \text{ pour tous les } i \text{ et } j \text{ avec } i \neq j$$

(i.e. dont tous les coefficients extra-diagonaux sont positifs)

Les matrices de Metzler sont aussi connues sous le nom de « matrices quasipositives » [50]

Nous commençons par le résultat suivant qui est dû à Gershgorin [12]. Il est lié au théorème de Hadamar–Frobenius qui a été démontré à plusieurs reprises par plusieurs auteurs différents dans des cadres qui se rapprochent [12, 22, 40, 41, 44, 42, 43, 47, 55, 52, 58].

Theorème 3.2 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Le Spectre de la matrice \mathbf{A} , $Sp(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}$ est contenu dans la réunion des disques dont les centres sont les coefficients diagonaux de la matrice \mathbf{A} , les a_{ii} , et dont les rayons respectifs sont les sommes des valeurs absolues des coefficients extra-diagonaux lignes correspondantes, les $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

En d'autres termes, pour tout i , $1 \leq i \leq n$, si on pose $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, on a

$$Sp(\mathbf{A}) \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_{ii}, r_i)$$

La preuve de ce théorème nécessite que le résultat préalable suivant soit établi

Lemme 3.1 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Si \mathbf{A} est une matrice singulière, Alors il existe un indice i_0 tel que

$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| \text{ (i.e. le terme diagonal } a_{i_0 i_0} \text{ est dominé par la ligne } i_0)$$

Démonstration du lemme 3.1:

Soit un n quelconque fixé, on va supposer que \mathbf{A} est une matrice singulière. On va aussi faire l'abus de noter la matrice \mathbf{A} et l'endomorphisme de \mathbb{R}^n correspondant par le même symbole, \mathbf{A} . On a $\ker \mathbf{A} \neq \{0\}$; soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \ker \mathbf{A}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, soit i_0 l'indice du composant de \mathbf{x} tel que $|x_{i_0}|$ réalise la norme du maximum de \mathbf{x} (i.e. $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = \|\mathbf{x}\|_\infty$)

On a $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, et donc $(\mathbf{Ax})_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = 0$;

il s'ensuit,

$$-a_{i_0 i_0} x_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0 j} x_j$$

Il vient

$$\begin{aligned} |a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| |x_j| \\ &\leq |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| \end{aligned}$$

puisque $x_{i_0} \neq 0$ il vient enfin

$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}|$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Pour ce lemme, on a le corollaire suivant, qui se trouve être plus adapté au théorème que le lemme 3.1.

Corollaire 3.1 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Si \mathbf{A} est une matrice singulière, Alors il existe un indice i_0 tel que

$$|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i_0 \neq j}}^n |a_{j i_0}| \quad (\text{i.e. le terme diagonale } a_{i_0 i_0} \text{ est dominé par la colonne } i_0)$$

La démonstration est identique à celle du lemme 3.1 ci dessus, où on remplace la matrice \mathbf{A} par sa transposée, \mathbf{A}^T qui a les même propriétés de régularité que la matrice \mathbf{A} .

Démonstration du théorème 3.2:

Considérons une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; pour tout $\lambda \in Sp(\mathbf{A})$, on a $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ est une matrice singulière. Par application du lemme 3.1, on a :

pour tout $\lambda \in Sp(\mathbf{A})$, il existe $i_\lambda \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_\lambda \leq n$ tel que $|a_{i_\lambda i_\lambda} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_\lambda}}^n |a_{i_\lambda j}|$

Si on pose $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i j}|$, la ligne ci-dessus s'exprime autrement par :

pour tout $\lambda \in Sp(\mathbf{A})$, il existe $i_\lambda \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_\lambda \leq n$ tel que $\lambda \in \mathcal{B}(a_{i_\lambda i_\lambda}, r_{i_\lambda})$

Si on considère indifféremment toutes les boules $\mathcal{B}(a_{ii}, r_i)$ pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il vient que

tout $\lambda \in Sp(\mathbf{A})$ est dans l'une d'entre elle, et donc, $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(a_{ii}, r_i)$. □

Notons au passage le corollaire du théorème 3.2 qui est plus adapté à la notion de dominance colonne :

Corollaire 3.2 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Le Spectre de la matrice \mathbf{A} , $Sp(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}$ est contenu dans la réunion des disques dont les centres sont les coefficients diagonaux de la matrice \mathbf{A} , les a_{ii} , et dont les rayons sont respectifs sont les sommes des valeurs absolues des coefficients extra-diagonaux colonne correspondants, les $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$

En d'autre terme, pour tout i , $1 \leq i \leq n$, si on pose $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$, on a

$$Sp(\mathbf{A}) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}(a_{ii}, r_i)$$

Le résultat suivant, dû à Hadamard–Frobénius [2]. Nous le traitons en tant que corollaire du théorème 3.2.

Corollaire 3.3 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Si \mathbf{A} est une matrice à diagonale dominante stricte, alors \mathbf{A} est une matrice inversible.

Démonstration:

Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 3.2, et du corollaire 3.2; en effet, Si \mathbf{A} est à Diagonale Dominante Stricte, on a pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $|a_{ii}| > r_i$,¹ et donc aucune des boules $\mathcal{B}(a_{ii}, r_i)$ ne contient l'origine de \mathbb{C} , et par conséquent aucune des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} ne peut être nulle. □

Corollaire 3.4 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Si \mathbf{A} est une matrice compartimentale à diagonale dominante Stricte, alors \mathbf{A} est une matrice asymptotiquement stable

Démonstration:

Dans le théorème de Hadamard–Frobénius qui est le corollaire 3.3 ci-dessus, le spectre de \mathbf{A} a le droit de se trouver dans n'importe lequel des demi plans complexes où il y a un des coefficients diagonaux de la matrice \mathbf{A} , les a_{ii} . Le fait que \mathbf{A} est une matrice compartimentale force tous les a_{ii} à se trouver sur le demi axe réel gauche du plan complexe; et donc toutes les valeurs propres

¹avec $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|$ si ce sont les colonnes qui sont concernées, ou $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ si ce sont les lignes qui sont concernées

de la matrice \mathbf{A} sont dans des boules strictement incluses dans le demi plan complexe gauche. d'où l'Asymptotique stabilité de la matrice \mathbf{A} \square

Du résultat suivant, on établit aisément une corrélation entre les systèmes linéaires positivement invariants dans \mathbb{R}_+^n et les matrices de Metzler.

Theorème 3.3 *Soit le système définie sur \mathbb{R}^n par*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (3.8)$$

On a :

Si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))$ est une matrice de Metzler alors le système (3.8) laisse positivement invariant l'orthant positif \mathbb{R}_+^n

Démonstration:

Supposons que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ soit une matrice de Metzler ; on a, pour tous les $i, j, i \neq j$ $a_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0$; soit un i quelconque, $1 \leq i \leq n$, on a : sur l'ensemble $\mathcal{H}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, / x_i = 0\} \cap \mathbb{R}_+^n$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})x_j \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}(\mathbf{x})x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Autrement dit sur les ensembles \mathcal{H}_i qui sont les diverses faces de la frontière de \mathbb{R}_+^n , la restriction du système (3.8) a un champ de vecteurs qui pointe vers l'intérieur de \mathbb{R}_+^n . et par continuité du flot, aucune trajectoire de ce système qui commence dans \mathbb{R}_+^n n'en sort pas. \square

Remarque 3.3 La reciproque de la propriété énoncée dans ce théorème dans le cas général est fausse, comme on peut le voir sur un exemple simple pris dans le plan, avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 - x_1^2 & 1 - x_1 + x_2^2 \\ 1 + x_1^2 - x_2 & -1 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice qui laisse invariant \mathbb{R}_+^2 sans être pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ une matrice de Metzler. Cependant, dans les cas où la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ serait constante pour tout \mathbf{x} $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$, l'implication reciproque est aussi vraie ; en effet, le système (3.8) dans ce cas particulier laisse positivement invariant \mathbb{R}_+^n ; Sur les \mathcal{H}_i , sa restriction est l'équation différentielle scalaire

$$\dot{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j$$

qui est positif. Sa valeur en $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ est a_{ij} où \mathbf{e}_j est l'un des vecteur de la base canonique qui est inclu dans l'hyperplan \mathcal{H}_i .

Donc pour tous les i et j $i \neq j$ et pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $a_{ij} \geq 0$, et \mathbf{A} est une matrice de Metzler.

Le résultat suivant est un classique théorème de Perron–Frobenius; il établit une certaine caractérisation des matrices positives que nous utilisons par la suite dans la caractérisations des Matrices de Metzler. Ce résultat fut présenté en premier par O. Perron [46] dans le cadre des matrices positives, et ensuite étendu par G. Frobenius [11] à des matrices irréductibles.

Theorème 3.4 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

—> Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, alors le rayon spectral de la matrice \mathbf{A} est une valeur propre de la matrice \mathbf{A} , et il existe un vecteur propre associé \mathbf{v} , avec $\mathbf{v} > \mathbf{0}$

—> Si $\mathbf{A} \gg \mathbf{0}$, alors, le rayon spectral de \mathbf{A} , $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple et strictement positive de la matrice \mathbf{A} ; de plus, il existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{A} \mathbf{v} = \rho(\mathbf{A}) \mathbf{v}$

—> Si $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ et de plus \mathbf{A} est une matrice irréductible, alors, le rayon spectral de \mathbf{A} , $\rho(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple de la matrice \mathbf{A} ; de plus, il existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{A} \mathbf{v} = \rho(\mathbf{A}) \mathbf{v}$

Des démonstrations assez techniques de ce résultat peuvent être trouver dans [33]

Ce résultat possède d'importantes conséquences pour des systèmes dont les états évoluent dans un orthant positif. Le résultat suivant est l'une de ces conséquences sur les matrices de Metzler.

Theorème 3.5 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Metzler donnée. Notons $\alpha(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \mathcal{S}_p(\mathbf{A})} \Re(\lambda)$, le module de stabilité de la matrice \mathbf{A} .

—> $\alpha(\mathbf{A})$ est une valeur propre de la matrice \mathbf{A} à laquelle est associé un vecteur propre positif (i.e. $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tel que, $\mathbf{A} \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{A}) \mathbf{v}$)

—> Si de plus, la matrice \mathbf{A} est irréductible, alors $\alpha(\mathbf{A})$ est une valeur propre simple de la matrice \mathbf{A} à laquelle est associé un vecteur propre strictement positif (i.e. $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$ tel que, $\mathbf{A} \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{A}) \mathbf{v}$)

Démonstration:

Soit $m = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} a_{ii}, 0 \right\}$; on a, $\mathbf{A} - m \mathbf{I} \geq \mathbf{0}$;

On applique à la matrice $\mathbf{A} - m \mathbf{I}$ le théorème 3.4 ci-dessus;

Il vient,

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n, / (\mathbf{A} - m \mathbf{I}) \mathbf{v} = \rho(\mathbf{A} - m \mathbf{I}) \mathbf{v}$$

autrement dit,

$$\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n, / \mathbf{A} \mathbf{v} = (\rho(\mathbf{A} - m \mathbf{I}) + m) \mathbf{v}$$

Le vecteur \mathbf{v} est vecteur propre de la matrice \mathbf{A} .

La valeur propre de la matrice \mathbf{A} à laquelle ce vecteur propre est associé est $\rho(\mathbf{A} - m \mathbf{I}) + m$; on a nécessairement $\rho(\mathbf{A} - m \mathbf{I}) + m = \alpha(\mathbf{A})$. En effet, il est bien connu que pour une matrice

carrée \mathbf{B} donnée, on a $\mathcal{S}p(\mathbf{B} + \zeta\mathbf{I}) = \zeta + \mathcal{S}p(\mathbf{B})$; $(\rho(\mathbf{A} - m\mathbf{I}) + m) \in \mathbb{R}$;
 puisque

$$\rho(\mathbf{A} - m\mathbf{I}) = \max_{\lambda \in \mathcal{S}p(\mathbf{A} - m\mathbf{I})} \Re(\lambda)$$

on a

$$\rho(\mathbf{A} - m\mathbf{I}) + m = \max_{\lambda \in \mathcal{S}p(\mathbf{A} - m\mathbf{I} + m\mathbf{I})} \Re(\lambda) = \max_{\lambda \in \mathcal{S}p(\mathbf{A})} \Re(\lambda) = \alpha(\mathbf{A})$$

□

Remarque 3.4 Ce théorème est caractéristique des matrices de Metzler. Il dit littéralement que toute matrice de Metzler admet une valeur propre réelle qui est le module de stabilité de la matrice en considération, dont un vecteur propre associé est positif.

Cette caractérisation, et d'autres propriétés auxquelles nous avons déjà fait allusion, vont nous permettre de parler ci-après d'une sous classe de la classe de matrices de Metzler, les matrices de Metzler Stables.

3.3.1 Matrices de Metzler Stables

L'une des propriétés les plus importantes dans la théorie des systèmes est celle de la stabilité. Pour cette raison, de la classe des matrices de Metzler qui représente un grand nombre de systèmes se dégage naturellement la sous classe de ceux qui de plus ont la propriété d'être stable. Du théorème 3.5, il se dégage le fait que les matrices de Metzler stables se caractérisent par le fait d'avoir un module de stabilité qui est négatif, et strictement négatif pour les matrices de Metzler asymptotiquement stables.

Dans le théorème suivant nous donnons des caractérisations des matrices de Metzler stables que nous utilisons dans nos résultats.

Il s'agit d'un extrait d'un résultat donné dans le livre de Berman et Plemmons [2], sous forme d'une cinquantaine de conditions équivalentes pour qu'une matrice soit une M -matrice² inversible. Nous avons donc considéré de ces équivalences celles que nous utilisons dans nos résultats.

Comme les résultats dans [2] sont donnés par référence à la littérature, nous donnons les démonstrations.

Theorème 3.6 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Metzler, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. \rightarrow La matrice \mathbf{A} est globalement asymptotiquement stable.
2. \rightarrow La matrice $-\mathbf{A}^{-1}$ est strictement positive (i.e. $-\mathbf{A}^{-1} \gg \mathbf{0}$)
3. \rightarrow Si $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^n$ est un vecteur strictement positif ($\mathbf{b} \gg \mathbf{0}$), Alors l'équation $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ admet une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, strictement positive (i.e. $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$)

²Une matrice \mathbf{A} est dite M -matrice si et seulement si $-\mathbf{A}$ est une matrice de Metzler stable

4. \rightarrow Il existe un vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^n$, strictement positif (i.e. $\mathbf{c} \gg \mathbf{0}$) tel que le vecteur $\mathbf{A}\mathbf{c}$ soit strictement négatif (i.e. $\mathbf{A}\mathbf{c} \ll \mathbf{0}$)
5. \rightarrow Il existe une matrice diagonale $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$, tel que la matrice \mathbf{AD} soit à Diagonale Dominante Stricte Colonne (respectivement \mathbf{DA} soit à diagonale Dominante Stricte Ligne)
6. \rightarrow Il existe une matrice diagonale $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$, avec $\text{diag}(\mathbf{D}) \gg \mathbf{0}$ tel que la matrice $-(\mathbf{A}^T\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A})$ soit symétrique définie positive.

Démonstration:

Nous allons établir successivement les implications 1. \rightarrow 2., 2. \rightarrow 3., 3. \rightarrow 4., 4. \rightarrow 5., 5. \rightarrow 1.

1. \rightarrow 2.

La matrice \mathbf{A} est globalement asymptotiquement stable, elle est par conséquent inversible, et on a $\alpha(\mathbf{A}) < 0$; Il existe donc un scalaire positif K tel que pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\|e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0\| \leq Ke^{\alpha(\mathbf{A})t}\|\mathbf{x}_0\|$$

Il s'ensuit donc que la matrice $\int_0^\infty e^{t\mathbf{A}} dt$ est absolument convergente, car en effet, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{\alpha(\mathbf{A})t} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est $L^1(0, \infty)$, et on a

$$\mathbf{B} = \int_0^\infty e^{t\mathbf{A}} dt = -\mathbf{A}^{-1}$$

Déterminons le signe de chacun des coefficients de la matrice $\mathbf{B} = (b_{ij})$;

Considérons à cet effet la base canonique de \mathbb{R}^n , (\mathbf{e}_i) on a pour tout i , $\mathbf{e}_i > \mathbf{0}$

il vient

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \langle \mathbf{B}\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = (\mathbf{B}\mathbf{e}_j)_i = \left\langle \int_0^\infty e^{t\mathbf{A}} dt \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \langle e^{t\mathbf{A}} \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle dt = \int_0^\infty (e^{t\mathbf{A}} \mathbf{e}_j)_i dt > 0 \end{aligned}$$

cette dernière inégalité est due au fait que le coefficient $(e^{t\mathbf{A}} \mathbf{e}_j)_i$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions exponentielles. Ce qui prouve la première implication.

2 \rightarrow 3

Considérons $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\mathbf{b} \gg \mathbf{0}$; soit $\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$; on a nécessairement $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ comme produit de deux matrices strictements positives; il vient la relation $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ escomptée, ce qui achève la preuve de la deuxième implication.

3 \rightarrow 4

Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\mathbf{b} \gg \mathbf{0}$; soit $\mathbf{c} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$; il va de soi que $\mathbf{A}\mathbf{c} = -\mathbf{b} \ll \mathbf{0}$, ce qui prouve la troisième implication

4 \rightarrow 5

Considérons l'un des vecteurs $\mathbf{c} = (c_1; ; c_2, \dots; c_n)$ vérifiant la propriété 4.

On a $\mathbf{A} \mathbf{c} \ll \mathbf{0}$; soit $i, 1 \leq i \leq n$,

$$(\mathbf{A} \mathbf{c})_i = c_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^n a_{ij} c_j < 0$$

Cette inégalité implique :

$$c_i a_{ii} < - \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^n a_{ij} c_j < 0 \quad (3.9)$$

ceci du fait que $\mathbf{c} \gg \mathbf{0}$, et \mathbf{A} est une matrice de Metzler ; il s'en suit

$$|c_i a_{ii}| > \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^n |a_{ij} c_j| \quad (3.10)$$

Soit $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ la matrice diagonale tel que $\mathbf{c} = \text{diag}(\mathbf{D})$; on a $\mathbf{A} \mathbf{D} = (a_{ij} c_j)$, et l'inégalité (3.10) nous permet d'avoir la conclusion escomptée, d'où la fin de la quatrième implication.

5 \rightarrow 1

Considérons le vecteur \mathbf{c} de la propriété 4. (i.e. $\mathbf{A} \mathbf{c} \ll \mathbf{0}$)

Soit $\alpha(\mathbf{A})$ le module de stabilité de la matrice \mathbf{A} ; d'après le théorème 3.5, appliqué à la matrice \mathbf{A}^T il existe un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{A} \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{A}^T) \mathbf{v}$; ce qui revient au même en transposant d'écrire $\mathbf{v}^T \mathbf{A} = \alpha(\mathbf{A}^T) \mathbf{v}^T$. Faisons le produit des vecteurs (ligne) de cette égalité par le vecteur (colonne) \mathbf{c} ; on a $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{A}^T) \mathbf{v}^T \mathbf{c}$. Le scalaire $\mathbf{v}^T \mathbf{c}$ est strictement positif comme produit de d'une matrice positive \mathbf{v}^T , et d'une matrice strictement positive \mathbf{c} ; le scalaire $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{c}$ est strictement négatif comme produit d'une matrice positive \mathbf{v}^T et d'une matrice strictement négative $\mathbf{A} \mathbf{c}$; il s'en suit que le module de stabilité de \mathbf{A} , $\alpha(\mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{A}^T)$ est strictement négatif, d'où l'asymptotique stabilité de la matrice \mathbf{A} .

Nous allons démontrer l'équivalence 1. \leftrightarrow 6. en nous servant des résultats des diverses implications précédentes.

6. \rightarrow 1.

On suppose qu'on a une matrice diagonale \mathbf{D} , avec $\text{diag}(\mathbf{D}) \gg \mathbf{0}$ telle que $-(\mathbf{A}^T \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{A})$ soit symétrique définie positive. Soit la fonction scalaire $V : \mathbf{x} \mapsto V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{D} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$; il s'agit d'une fonction de Lyapunov stricte pour la matrice \mathbf{A} sur \mathbb{R}^n ; il s'en suit que \mathbf{A} est une matrice Metzler asymptotiquement stable.

1. \rightarrow 6.

La propriété 5. nous garantit l'existence d'une matrice diagonale \mathbf{D}_1 , avec $\text{diag}(\mathbf{D}_1) \gg \mathbf{0}$ telle que $\mathbf{A} \mathbf{D}_1$ soit une matrice à diagonale dominante stricte ligne; Puisque $\mathbf{A} \mathbf{D}_1$ est encore une matrice de Metzler, on re-applique la propriété 5. à la matrice $\mathbf{A} \mathbf{D}_1$; elle nous garantit l'ex-

istence d'une matrice \mathbf{D}_2 , avec $\text{diag}(\mathbf{D}_2) \gg \mathbf{0}$ telle que $\mathbf{D}_2\mathbf{A}\mathbf{D}_1$ soit une matrice à diagonale dominante stricte colonne; Il en est de même pour sa transposée, $\mathbf{D}_1\mathbf{A}^T\mathbf{D}_2$. Il vient, la matrice $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_1\mathbf{A}^T\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{A}\mathbf{D}_1$ est une matrice de même nature que les deux précédentes, avec en plus qu'elle est symétrique, et que tous les coefficients diagonaux sont strictements négatifs, d'après l'inégalité (3.9) et le théorème 3.4 la matrice \mathbf{Q} est une matrice asymptotiquement stable. La Matrice $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{D}_1^{-1} = \mathbf{A}^T\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1^{-1} + \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{D}_2\mathbf{A}$ est asymptotiquement stable au même titre que la matrice \mathbf{Q} , d'où le fait qu'elle soit définie négative, et symétrique au même titre que \mathbf{Q} . Ce qui termine la démonstration du théorème. \square

Le théorème suivant donne aussi une caractérisation des matrices de Metzler stables. Ce résultat a été obtenu par Varga et exprimé pour les M -matrices. Pour ce résultat nous avons besoin d'une définition :

Définition 3.12 (décomposition régulière) *Pour une matrice réelle de Metzler \mathbf{A} , $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{M}$ est une décomposition régulière si \mathbf{D} est Metzler stable et $\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$.*

Theorème 3.7 (Varga : [57, theorem 3.13]) *Soit $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{M}$ une décomposition régulière d'une matrice réelle \mathbf{A} , alors \mathbf{A} est Metzler stable si et seulement si $\rho(-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) < 1$.*

La preuve de ce théorème est dans le livre de Varga [57], on le trouve aussi dans le livre de Bermann and Plemmons [2], c'est la condition N_{45} . De ce théorème, on déduit immédiatement

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{A}) < 0 &\iff \rho(-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) < 1 \\ \alpha(\mathbf{A}) = 0 &\iff \rho(-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) = 1 \\ \alpha(\mathbf{A}) > 0 &\iff \rho(-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) > 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Toute décomposition régulière donne une condition de seuil équivalente sur les paramètres.

Définition 3.13 (Matrice à diagonale dominante généralisée)

Une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale dominante stricte généralisée ligne (respectivement colonne) si il existe un vecteur $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \gg \mathbf{0}$ tel que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, on ait

$$c_i|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j|a_{ij}| \quad (\text{respectivement} \quad c_i|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j|a_{ji}|)$$

\mathbf{A} est dite à diagonale dominante généralisée ligne (respectivement colonne) au cas où dans les inégalités ci-dessus, on a à la place des inégalités strictes, des inégalités larges.

On a de cette définition le résultat suivant qui est corollaire du théorème 3.6 ci-dessus

Corollaire 3.5 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Metzler; On a :

\mathbf{A} est globalement asymptotiquement stable si et seulement si elle est une matrice à diagonale dominante stricte généralisée lignes et colonnes.

Démonstration:

Il suffit de poser $\mathbf{D} = \text{diag}(c)$, et la propriété 5. du théorème 3.6 est exactement la caractérisation du fait que \mathbf{A} est une matrice à diagonale dominante stricte généralisée lignes et colonnes. \square

Remarque 3.5 Le champ d'applications de ce corollaire est celui des matrices de Metzler; l'équivalence est brisée lorsqu'on prend une matrice à diagonale dominante stricte généralisée complètement quelconque; rien ne nous garantit plus même seulement qu'elle soit stable. Cependant la propriété d'être à diagonale dominante généralisée stricte lignes et colonnes munit la matrice considérée de propriétés de stabilité énoncées dans le résultat suivant.

Theorème 3.8 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée. On a :

Si \mathbf{A} est une matrice à diagonale dominante stricte généralisée lignes et colonnes, Alors \mathbf{A} est une matrice asymptotiquement stable.

Démonstration:

On suppose que \mathbf{A} est une matrice à diagonale dominante stricte généralisée lignes et colonnes; en exploitant la démarche utilisée dans la preuve de l'implication des propriétés 1. \rightarrow 6. du théorème 3.6 ci-dessus, il vient qu'il existe une matrice diagonale $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ telle que la matrice $-(\mathbf{A}^T \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{A})$ soit une matrice symétrique, définie positive.

La fonction $V : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto V(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ est une fonction de Lyapunov stricte pour la matrice \mathbf{A} , comme il en ressort de la preuve de l'implication des propriétés 6. \rightarrow 1. du théorème 3.6. Il s'ensuit donc que \mathbf{A} est une matrice asymptotiquement stable. \square

Le résultat suivant dû à Hadamard–Frobenius, est dans le même ordre que celui donné en corollaire 3.3, aussi résultat des même auteurs. Dans le cas présent, la perspective est plus large; en effet, il définit une classe plus importante de matrices inversibles que celle que le corollaire 3.3 permet d'avoir.

Theorème 3.9 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée à Diagonale Dominante.

Si \mathbf{A} est une matrice connectée sur fuite, alors \mathbf{A} est une matrice inversible

La démonstration de ce résultat requiert le résultat intermédiaire suivant.

Lemme 3.2 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Metzler et $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont inférieurs à zéro (i.e. $b_{ii} \leq 0$ pour tous les i).

On suppose que $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$

Si \mathbf{A} asymptotiquement stable, alors \mathbf{B} aussi.

Démonstration du lemme 3.2:

\mathbf{A} est une matrice de Metzler asymptotiquement stable; elle est donc à diagonale dominante généralisée stricte. Le théorème 3.6, propriété 3. nous garantit l'existence d'un vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\mathbf{c} \gg \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{A}\mathbf{c} \ll \mathbf{0}$. Considérons un tel vecteur. La post-multiplication des matrices de l'inégalité $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ par \mathbf{c} ne change pas le sens de l'inégalité, puisque $\mathbf{c} \gg \mathbf{0}$; plus encore, on a $\mathbf{B}\mathbf{c} \leq \mathbf{A}\mathbf{c} \ll \mathbf{0}$; (i.e. $\mathbf{B}\mathbf{c} \ll \mathbf{0}$); de même, la pré-multiplication de l'inégalité $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ par le vecteur \mathbf{c}^T nous conduit à : $\mathbf{c}^T\mathbf{B} \ll \mathbf{0}$. De l'implication des propriétés 4. \rightarrow 5. du théorème 3.6 il vient que la matrice \mathbf{B} est une matrice à diagonale dominante stricte généralisée lignes et colonnes. le théorème 3.8 permet de conclure à l'asymptotique stabilité de la matrice \mathbf{B} . \square

Démonstration du théorème 3.9:

Considérons la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ Soit $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij})$ une matrice construite comme il suit :

\rightarrow pour $i \neq j$, $\hat{a}_{ij} = |a_{ij}|$

\rightarrow pour i , $1 \leq i \leq n$ $\hat{a}_{ii} = -|a_{ii}|$

Par hypothèse, nous avons déjà que $\hat{\mathbf{A}}$ est une matrice compartimentale en même temps qu'elle est connectée sur fuite. C'est donc un cas particulier du théorème A.6 donnée à la page 177, avec la fonction à valeurs matricielles qui est constante. La matrice $\hat{\mathbf{A}}$ est donc asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_+^n . Elle est nécessairement aussi asymptotiquement stable dans \mathbb{R}^n ; en effet, toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative, car $\alpha(\hat{\mathbf{A}}) < 0$ (Sinon, le fait qu'il existe un vecteur propre $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ associé à la valeur propre $\alpha(\hat{\mathbf{A}})$ de $\hat{\mathbf{A}}$ (i.e. $\exists \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ $\alpha(\hat{\mathbf{A}})\mathbf{v} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}$) impliquerait l'instabilité de $\hat{\mathbf{A}}$ dans \mathbb{R}_+^n).

Soit la matrice $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{ij})$ telle que

$\rightarrow \bar{a}_{ij} = a_{ij}$ pour les $i \neq j$

$\rightarrow \bar{a}_{ii} = -|a_{ii}|$ pour tous les i , $1 \leq i \leq n$

On a : $\bar{\mathbf{A}} \leq \hat{\mathbf{A}}$, et la matrice $\hat{\mathbf{A}}$ est une matrice de Metzler asymptotiquement stable. Par application du lemme 3.2, il vient que la matrice $\bar{\mathbf{A}}$ est asymptotiquement stable.

La conclusion à l'inversibilité de \mathbf{A} tient à ce qui suit :

si \mathbf{D} est une matrice diagonale avec $\mathbf{c} = \text{diag}(\mathbf{D}) \gg \mathbf{0}$ tel que $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{D}$ soit une matrice à diagonale dominante stricte ligne, on a nécessairement que $\mathbf{A}\mathbf{D}$ est aussi une matrice à diagonale dominante stricte ligne. Il vient, $\mathbf{A}\mathbf{D}$ est inversible; Puisque la matrice \mathbf{D} est inversible, il en est de même pour la matrice \mathbf{A} . \square

Le résultat suivant est une caractérisation des matrices de Metzler stable qui s'inscrit comme un complément des caractérisations que nous donne le théorème 3.5 dans le cadre de notre travail.

Theorème 3.10 Soit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Metzler stable qui admet une valeur propre nulle de multiplicité algébrique égale à la multiplicité géométrique. On a le résultat :
Il existe un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{0}$

Démonstration:

Toute matrice de Metzler $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{A}} \mathbf{P}$, avec \mathbf{P} une matrice de permu-

tation des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n , et $\widehat{\mathbf{A}}$ une matrice blocs triangulaire supérieure (ou inférieure), dont tous les blocs diagonaux sont irréductibles. Dans cette décomposition, tous les blocs hors de la diagonale de la matrice $\widehat{\mathbf{A}}$ sont des matrices constituées des termes positifs. Considérons une matrice \mathbf{A} Metzler stable, suivant la propriété définie dans le théorème. Soit $\widehat{\mathbf{A}}$ la matrice bloc diagonale supérieure vérifiant la propriété sus-décrite. On a :

$$\mathbf{PAP}^T = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{A}}_{21} & \widehat{\mathbf{A}}_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\mathbf{A}}_{s1} & \widehat{\mathbf{A}}_{s2} & \cdots & \widehat{\mathbf{A}}_{ss} \end{pmatrix}$$

On suppose que l'ordre des matrices blocs diagonales dans $\widehat{\mathbf{A}}$ est décroissant. Si 0 est valeur propre de \mathbf{A} d'ordre r , on a alors $\widehat{\mathbf{A}}_{ii} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}$, pour $s - r - 1 \leq i \leq s$, et $\widehat{\mathbf{A}}_{ji} = \mathbf{0}$ vecteur ligne de $\in \mathbb{R}^{rj}$ pour $s - r - 1 \leq i \leq s$ et pour $s - r - 1 \leq j \leq s$.

Posons

$$\widehat{\mathbf{A}}_s = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \widehat{\mathbf{A}}_{21} & \widehat{\mathbf{A}}_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\mathbf{A}}_{s-r1} & \widehat{\mathbf{A}}_{s-r2} & \cdots & \widehat{\mathbf{A}}_{s-rs-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$$

la matrice bloc diagonale de la matrice \mathbf{PAP}^T correspondant à la partie dont les matrices bloc diagonales sont non nulles. La matrice $\widehat{\mathbf{A}}_s$ est une matrice de Metzler asymptotiquement stable. On applique la propriété 3). du théorème 3.6. Il vient qu'il existe un vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^{n-r}$, $\mathbf{c} \gg \mathbf{0}$ tel que $\widehat{\mathbf{A}}_s \mathbf{c} \ll \mathbf{0}$. Considérons le vecteur $\widehat{\mathbf{v}} = (\mathbf{c}; \mathbf{b}) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^r$ $\mathbf{b} \gg \mathbf{0}$ quelconque. On a $\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{v}} \leq \mathbf{0}$. Considérons le vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{P}\widehat{\mathbf{v}}$; on a $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$, car $\mathbf{P} \gg \mathbf{0}$, et $\mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{0}$. □

3.4 Quelques théorèmes de stabilité des systèmes Autonomes

3.4.1 Notations et Préliminaires

Dans cette partie, nous considérons \mathcal{U} un sous ensemble de \mathbb{R}^n d'intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ connexe non vide. Nous considérons un système équations différentielles autonomes définie sur \mathcal{U}

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) . \tag{3.12}$$

On suppose que le champ de vecteurs $\mathbf{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continu. Nous notons pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ par $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ la solution du système (3.12) que nous supposons définie pour tout $t \geq 0$, et telle que $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. On suppose \mathbf{X} satisfait des conditions telles que $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ une fonction continue de (t, \mathbf{x}) . Les points d'équilibres du système (3.12) sont des points $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ tels que $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Définition 3.14 (Lyapunov stabilité) Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ un point d'équilibre. Le système (3.12) est stable (ou Lyapunov stable) au point \mathbf{x}_0 (ou \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre stable pour le système (3.12)), Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel positif δ tel que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ avec $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, la solution $\mathbf{X}_t(\mathbf{x}_0)$ est définie dans \mathcal{U} pour tout $t \geq 0$, et satisfait $\|\mathbf{X}_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Le système (3.12) est instable au point \mathbf{x}_0 si il n'est pas Lyapunov stable au point \mathbf{x}_0 .

Définition 3.15 (Attractivité) Un point d'équilibre \mathbf{x}_0 du système (3.12) est dit être attractif (on dit aussi que le système (3.12) est attratif au point \mathbf{x}_0) s'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de \mathbf{x}_0 , tel que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ la trajectoire commençant au point \mathbf{x} à l'instant $t = 0$, $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ du système (3.12) est définie pour tout $t \geq 0$ et tend vers \mathbf{x}_0 lorsque t tend vers l'infinie i.e., $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{X}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Le point d'équilibre \mathbf{x}_0 est dit globalement attractif si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{X}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$

Le domaine d'attraction d'un point d'équilibre \mathbf{x}_0 $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0)$ est l'ensemble de tous les points $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ tels que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{X}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$

Définition 3.16 (Asymptotique stabilité) Un état d'équilibre \mathbf{x}_0 est dit asymptotiquement stable pour le système (3.12) si il est Lyapunov-stable et attractif.

Remarque 3.6 Il est bien connu qu'un point d'équilibre peut être attractif sans être stable. L'exemple classique du système en dimension 2 en coordonnées polaires (ρ, θ) suivant permet d'illustrer ce fait.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho) \\ \dot{\theta} = \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ce système a deux points d'équilibres. L'origine $\mathbf{0}$ du plan \mathbb{R}^2 et le point \mathbf{x}_0 défini par $\rho = 1$ et $\theta = 0$. Il peut être prouvé que le point \mathbf{x}_0 est attractif, et que le domaine d'attraction est $\mathcal{R}(\mathbf{x}_0) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Cependant, ce point d'équilibre n'est pas stable. voir figure 3.1

Définition 3.17 Un ensemble $G \subset \mathcal{U}$ est dit positivement invariant pour le système (3.12) si pour tout $\mathbf{x} \in G$ et tout $t \geq 0$, on a $\mathbf{X}_t(\mathbf{x}) \in G$. Il est dit invariant (sans précision) si $\mathbf{X}_t(\mathbf{x}) \in G$ pour tout $\mathbf{x} \in G$ et tout $t \in \mathbb{R}$.



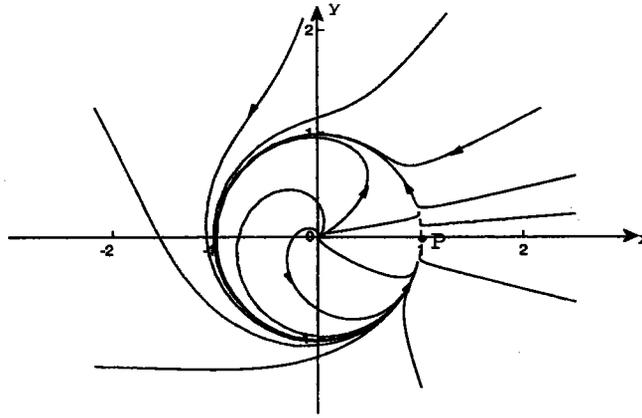


FIG. 3.1 – Attractivité Sans stabilité.

Définition 3.18 Soit G un sous ensemble positivement invariant de \mathcal{U} , d'intérieur non vide et connexe. Soit $x_0 \in G$ un point d'équilibre du système (3.12). Le système (3.12) est dit stable en x_0 relativement à l'ensemble G si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in G$ avec $\|x - x_0\| < \delta$, on a $X_t(x) \in G$ pour tout $t \geq 0$ et $\|X_t(x) - x_0\| < \varepsilon$ pour tout $t > 0$.

Remarque 3.7 Soit G un sous ensemble positivement invariant de \mathcal{U} , un état d'équilibre $x_0 \in G$ du système (3.12) peut être stable (respectivement attractif) pour le système (3.12) considéré comme système définie sur G sans être stable (respectivement attractif), si l'on considère système (3.12) comme système définie sur \mathcal{U} . Un exemple académique tout simple est le cas du système (3.14) en dimension 2

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y^2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Le portrait de phase de ce système est donné sur la figure 3.2.

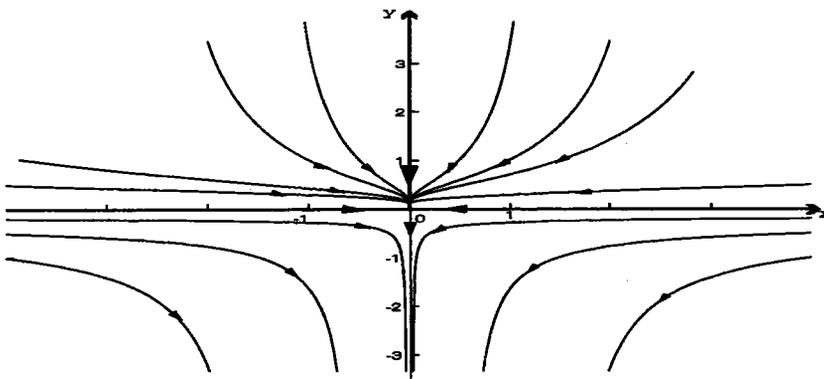


FIG. 3.2 – Point d'équilibre noeud-selle (saddle-node).

L'origine de \mathbb{R}^2 est un point d'équilibre du système (3.14). Il est clair que l'origine est un point d'équilibre instable et non attractif pour le système (3.14) d'éfinie sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$. Cependant, ce point est un équilibre asymptotiquement stable pour le système (3.14) sur l'ensemble positivement invariant sous la dynamique du système (3.14), $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$. On peut

remarquer que ce point d'équilibre est sur la frontière ∂G de G . Le point \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (3.13) relativement au sous ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \leq 0\}$ positivement invariant sous la dynamique du système (3.13), et se trouve sur la frontière de celui-ci. Ce type de situation se produit très souvent dans des modèles biologiques, où très souvent les états des systèmes sont appelés à vivre dans l'orthant positif d'un certain \mathbb{R}^n , comme nous allons le voir plus loin.

Dans une vaste majorité de la littérature classique, il est accepté qu'une fonction $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov si elle est continue définie positive sur \mathcal{U} , au delà des hypothèses de régularité. Nous adhérons à cette convention. Nous distinguons donc du fait de cette positivité les fonctions de Lyapunov des fonctions de LaSalle :

Définition 3.19 (fonction de LaSalle) Soit $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit G un sous ensemble de \mathcal{U} . On dira que L est une fonction de LaSalle pour le système (3.12) sur G si L est continue, Dini-dérivable en tout point $\mathbf{x} \in G$ et $\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in G$

Relativement à la fonction de LaSalle L pour le système (3.12) nous introduisons les notations suivantes :

La fonction L est supposée seulement continue et \dot{L} est définie par :

$$\dot{L}(\mathbf{x}) = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left(L(\mathbf{X}_t(\mathbf{x})) - L(\mathbf{x}) \right)$$

est fini pour tout $\mathbf{x} \in G$.

Dans certaines applications, il est souvent nécessaire de considérer des fonctions L qui soient de classe \mathcal{C}^1 ; dans ces cas, $\dot{L}(\mathbf{x})$ est donnée par le produit scalaire : $\langle \mathbf{X}(\mathbf{x}), \nabla L(\mathbf{x}) \rangle$.

3.4.2 Stabilité des systèmes d'équations différentielles ordinaires

Theorème 3.11 (Principe d'Invariance de LaSalle : [26] et [25, Chap 2, Théorème 6.4])
Soit L une fonction de LaSalle pour le système (3.12) sur G , un sous-ensemble quelconque de \mathcal{U} ; Soit $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ une solution du système (3.12) qui demeure dans G pour tous les temps $t \geq 0$. Si l'ensemble $\{\mathbf{X}_t(\mathbf{x}) \mid \forall t \geq 0\}$ est borné³, Alors, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, tel que $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ tend vers $M \cap L^{-1}(\{c\})$ lorsque t tend vers $+\infty$. M étant le plus grand ensemble invariant pour le système (3.12) contenu dans l'ensemble $E = \{\mathbf{x} \in \bar{G} \cap \mathcal{U} : \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$

En conséquence, on a :

Si l'ensemble $M \cap L^{-1}(\{c\})$ est constitué de points isolés, ces points isolés sont nécessairement des points d'équilibre du système (3.12) pour tout c ; alors toute solution bornée $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ tend vers un point d'équilibre du système (3.12) lorsque t tend vers l'infini.

³On dit dans ce cas que la trajectoire $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ est bornée dans son futur

Remarque 3.8 Le théorème 3.11 précédent donne seulement des informations sur l'attractivité de l'ensemble M . Plus précisément il dit que M est un attracteur de toutes les trajectoires bornées du système (3.12) qui demeurent dans G . Cependant, il ne dit rien à propos de la stabilité de l'ensemble M , ou des équilibres du système (3.12).

Remarque 3.9 Le théorème 3.11 n'exclut pas la possibilité d'avoir des attracteurs qui soient inclus dans la frontière ∂G de l'ensemble G .

Le Théorème de LaSalle suivant donne un critère d'asymptotique stabilité (pas seulement d'attractivité) assez important :

Theorème 3.12 (LaSalle : [24, Corollary 1] et [25, Chapitre 2, Théorème 7.8])

Soit G un ouvert positivement invariant de \mathcal{U} avec la propriété que toute trajectoire du système (3.12) qui commence dans G reste bornée et ne possède de pas de point oméga limite sur la frontière de G . Soit M le plus grand ensemble invariant pour le système (3.12) contenu dans l'ensemble $E = \{\mathbf{x} \in \bar{G} \cap \mathcal{U} : \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$. Si

i) $\rightarrow L$ est une fonction de LaSalle du système (3.12) sur G ,

ii) $\rightarrow M_0 = \overline{M \cap G} \subset G$

iii) $\rightarrow M_0$ est compact

alors, M_0 est un attracteur et $G \subset \mathcal{R}(M_0)$.

Si de plus

iv) $\rightarrow L$ est constante sur la frontière de M_0 ,

alors, M_0 est asymptotiquement stable.

Remarque 3.10 Ce théorème fut d'abord énoncé dans [26] sans démonstration, puis ensuite avec des preuves dans [24] et [25]. À la différence du théorème 3.11, dans ce cas, on suppose que l'ensemble G est ouvert, que les trajectoires du système (3.12) commençant dans G n'admettent pas de point oméga limite sur la frontière de G , et que l'ensemble M_0 est compact inclus dans G .

Le cas où est pris en compte le fait que G peut ne pas être un ensemble ouvert, et donc que l'ensemble M puisse contenir les points frontières de G est dû à G. P. Bhatia et N. P. Szegö [3]. Ce résultat est présenté dans le théorème suivant :

Theorème 3.13 (Bhatia–Szegö : [3, Theorem 3.7.11]) *Soit G un ensemble borné positivement invariant pour le système (3.12) contenu dans \mathcal{U} ; Soit L une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur G . On suppose que :*

$\rightarrow L$ est une fonction de LaSalle du système (3.12) sur G ;

Soit les ensembles suivants

- i) $\rightarrow E = \{x \in \bar{G} / \dot{L}(x) = 0\}$
- ii) $\rightarrow M$ le plus grand ensemble invariant pour le système (3.12) contenu dans E
- iii) $\rightarrow S$ Le plus grand ensemble invariant le système (3.12) contenu dans \bar{G}

On a les résultats :

- a) $\rightarrow M$ est attractif pour le système (3.12) relativement à \bar{G}
- b) $\rightarrow S$ est asymptotiquement stable pour le système (3.12) relativement à \bar{G}
- c) $\rightarrow S = D_G^+(M) = \{y / \exists \{x_n\}_n \subset \bar{G}, \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x_n \rightarrow x \in M, X_{t_n}(x_n) \rightarrow y\}$
- d) $\rightarrow S$ est le plus petit ensemble asymptotiquement stable contenant M
- e) \rightarrow Si de plus L est constante sur la frontière de M , alors $M = S$ et M est asymptotiquement stable pour le système (3.12) relativement à \bar{G}
- f) \rightarrow Si on a soit $S \subset \overset{\circ}{G}$ ou $M \subset \overset{\circ}{G}$, alors l'expression « relativement à G » dans les énoncés précédents est à supprimer

Le théorème suivant est dû à B. Kalitine; Il a originalement été énoncé dans le cadre de la stabilité des ensembles compacts pour les systèmes dynamiques définies sur un espace métrique localement compact.

Theorème 3.14 Soit G un ensemble borné, positivement invariant pour le système (3.12) contenu dans \mathcal{U} ; soit K un compact positivement invariant, contenu dans \bar{G} , soit \mathcal{V} un voisinage de K . On suppose qu'il existe une fonction continue définie sur \mathcal{V} tel que :

- i) $\rightarrow V(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{V}$ et $V(x) = 0 \forall x \in K$
- ii) $\rightarrow \dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \mathcal{V}$
- iii) \rightarrow L'ensemble $(\mathcal{V} \cap E) \setminus K$ ne contient aucune demi-trajectoire où $E = \{x \in \bar{G} / \dot{V}(x) = 0\}$ alors K est asymptotiquement stable

3.4.3 Les Théorèmes de stabilité des systèmes compartimentaux

Sur l'étude de la stabilité des systèmes compartimentaux, la littérature est très riche est très dispersée. Une raison possible est la dispersion des spécificités des domaines ayant sous-tendu la conception de ces systèmes. Les résultats de stabilité s'étendent du domaine des systèmes d'équations différentielles autonomes en général aux systèmes coopératifs et compartimentaux spécialisés. Dans l'article de Jacquez et Simon [20], se trouve un compte rendu des principaux résultats sur la stabilité des systèmes compartimentaux; ces résultats sont dûs à Maeda et al. [34] et à Sandberg [49]. Cependant un résultat plus général dû à Jacquez et Al. est le suivant :

Theorème 3.15 Soit un système de type (3.12), de classe C^1 . on suppose que la matrice Jacobienne de X , $\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)$ est une matrice compartimentale pour tout $x \in \mathcal{U}$. On a :

- 1) \rightarrow La fonction : $x \in \mathcal{U} \mapsto \sum_{i=1}^n |X_i(x)|$ est monotone décroissante le long des trajectoires

solutions du système (3.12)

2) \rightarrow Toute trajectoire solution du système (3.12) est soit non bornée, soit convergente vers l'ensemble des équilibres du système

Une preuve de dispersion dont nous faisons allusion est ce théorème. Les articles relatifs à ce théorème [20, 34, 49] sont postérieurs aux résultats de LaSalle, Aucun cependant ne semble connaître les travaux de LaSalle. Les Travaux de LaSalle auraient contribué à simplifier les outils et techniques que ces derniers utilisent dans les démonstrations de leurs résultats. Ce résultat est déjà énoncé dans le papier de Rosenbrock [48].

En effet, La matrice jacobienne de \mathbf{X} en tout point de \mathcal{U} étant une matrice compartimentale, il vient que tout point d'équilibre du système est localement stable pour le système. (une matrice compartimentale est une matrice de Metzler asymptotiquement stable). Le principe d'invariance de LaSalle est l'équivalent de la deuxième conclusion du théorème.

Le résultat ci-dessus peut être considéré comme une étape dans la preuve de la conjecture de Markus–Yamabe–Hartman (Markus et Yamabe [14], Hartman [35]) sur l'étude de la stabilité des équations différentielles. Cette conjecture est la suivante :

Conjecture 3.1 (Markus–Yamabe–Hartman) Soit \mathbf{X} un champs de vecteur de classe C^1 défini sur un convexe $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que :

- i) $\rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
- ii) \rightarrow la matrice jacobienne de \mathbf{X} en tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, $\left(\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right)$ a toutes ses valeurs propres dans le demi-plan complexe gauche (i.e. de partie réelle strictement négative).

Alors

$\mathbf{0}$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système d'équations différentielles $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ sur \mathcal{U} .

Dans le cas donc où la matrice Jacobienne du champs de vecteur \mathbf{X} en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ est une matrice compartimentale, le théorème 3.15 est une réponse à cette conjecture.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons regroupé des outils et résultats de la littérature sur les modèles compartimentaux, les théorèmes de stabilité et de stabilité asymptotique des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Nous ne pouvons pas prétendre avoir été exhaustifs ; en effet, la littérature sur les modèles compartimentaux et des études connexes est assez étendue et dispersée [11, 12, 18, 21, 34, 43] pour ne citer que ceux là. Concernant l'étude de la stabilité et la stabilité asymptotique des systèmes, la littérature est énorme.

Pour rendre notre travail autonome, nous avons proposé pour quelques résultats des démonstrations ; ces démonstrations peuvent avoir déjà été proposées par d'autres auteurs. Nos démonstrations sont cependant adaptées à nos objectifs.

En effet, notre objectif est d'étudier la globale asymptotique stabilité du point d'équilibre non endémique «*Desease Free Equilibrium*» des modèles épidémiologiques. Il s'agit des cas particuliers de système d'équations différentielles aux quels s'appliquent le théorème de Bhatia–Szegö (théorème 3.13), avec l'ensemble M se trouvant sur la frontière de G et réduit au seul point d'équilibre non endémique. Ces systèmes ont la propriété supplémentaire d'être des systèmes compartimentaux, ou le cas échéant à quelques changements de variables près, présentent une composante compartimentale.

Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats de nos investigations, suivi par un chapitre où nous présentons quelques applications de ces résultats.

Chapitre 4

Stabilité globale de l'équilibre non endémique, et calcul de \mathcal{R}_0

4.1 Introduction

Les résultats du type théorème du seuil ont toujours joué un rôle important en épidémiologie. Le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 est défini typiquement (Diekmann–Heesterbeek [8]) comme :

le nombre moyen de cas secondaires engendrés par un individu typique infectieux, durant toute sa période d'infectiosité quand il est introduit dans une population de susceptibles.

La relation entre les théorèmes de seuil et le nombre \mathcal{R}_0 est donnée par une situation que l'on rencontre dans de nombreux modèles. En général on trouve deux équilibres : l'équilibre non endémique (le DFE), et un autre équilibre endémique. Très souvent si $\mathcal{R}_0 < 1$ alors le DFE est localement asymptotiquement stable et dans de nombreux cas, si $\mathcal{R}_0 > 1$, il y a un unique équilibre endémique localement asymptotiquement stable, contenu dans l'orthant positif.

Très souvent on obtient les théorèmes de seuil en calculant le Jacobien du système au DFE, et en utilisant le critère de Routh–Hurwitz. Bien évidemment, cela est difficilement envisageable au delà de la dimension 4. Comme le font remarquer Diekmann et Heesterbeek, bien souvent le critère de Routh–Hurwitz reste implicite et ne donne pas de formule directement exploitable. De plus, \mathcal{R}_0 a une signification biologique et les théorèmes de seuil sont souvent les conditions équivalente à $\mathcal{R}_0 < 1$, mais différentes.

Dans ce chapitre, nous allons donner un algorithme pour déterminer une condition de seuil. Très souvent, ce sera \mathcal{R}_0 qui apparaîtra dans la formule comme on le verra dans les exemples d'application. Cette condition exploite la structure particulière des modèles épidémiologiques. En utilisant cette condition de seuil, nous donnons une condition nécessaire de stabilité du DFE sous certaines hypothèses biologiquement raisonnables. Ce théorème donne un résultat de **globale stabilité** et répond à ce qui se passe pour le point de bifurcation $\mathcal{R}_0 = 1$.

Nous montrons ensuite que ce théorème s'applique à de nombreux exemples pris dans la littérature bio-mathématiques.

4.2 Caractérisation des modèles épidémiologiques

Les systèmes épidémiologiques sont des systèmes compartimentaux particuliers. Une particularité des modèles compartimentaux est que quand il n'y a plus de matière dans un compartiment il ne peut y avoir de sortie. Les modèles épidémiologiques ont la particularité que l'on ne peut avoir un flux vers les compartiments «infectés, latents ...» que s'il y a contact adéquat avec des malades. En un certain sens le flux des susceptibles vers les compartiments «malades» est «receveur» contrôlé. C'est cette remarque que nous allons formaliser.

Nous considérons un système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}_+^{n_2}$, et f et g sont C^1

La variable \mathbf{x}_1 désigne le nombre (où la concentration) dans les compartiments des susceptibles, des immunisés, etc ... en fait ceux qui ne transmettent pas la maladie. La variable \mathbf{x}_2 représente toutes les classes des individus ne transmettant pas la maladie. De cette présentation découle des hypothèses sur les fonctions f et g de nature biologique.

1. On suppose que le système est défini sur un sous-ensemble Ω positivement invariant de l'orthant positif $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$; cela signifie que le modèle est bien posé.
2. L'apparition de nouveaux individus «infectés» provient des rencontres adéquates avec les différents individus des compartiments «transmetteurs». En d'autres termes si $\mathbf{x}_2 = 0$ le flux vers les compartiments correspondant sera nul. Ce qui signifie que $g(\mathbf{x}_1, 0) = 0$. Comme g est C^1 on a $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \mathbf{x}_2$ où $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est une matrice continue $n_2 \times n_2$.
3. On suppose qu'il existe un équilibre «sans maladie» (disease free equilibrium DFE) que l'on notera par abus de langage par \mathbf{x}_1^* en identifiant $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ avec $\mathbb{R}_+^{n_1}$. Cela signifie que l'on peut écrire $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*) + \mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_2$

On peut donc maintenant écrire le système (4.1) sous une forme pseudo triangulaire :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*) + \mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \mathbf{x}_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Comme nous avons affaire à un modèle compartimental, les termes hors diagonaux sont positifs. A la différence de ce qui avait été fait dans le chapitre 3, les matrices ne sont pas nécessairement à diagonale dominante. Les systèmes épidémiologiques peuvent donc, à quelques aménagements près dans la structure des variables, être écrits sous la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ qui s'écrit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

est une matrice de Metzler, où pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, la matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ correspond au groupement des compartiments qui constitue un piège du système (Tout ce qui rentre dans le groupe de compartiments, ne peut repartir vers les autres compartiments mais peut aller vers l'environnement extérieur).

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}_1(\mathbf{x})\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0})$$

On va maintenant faire une autre hypothèse raisonnable que l'on trouve dans beaucoup d'exemples de la littérature : l'équilibre non endémique est démographiquement asymptotiquement stable. Autrement dit on suppose qu'en l'absence de maladie la population se stabilise en \mathbf{x}_1^* . Ce que l'on peut formuler en disant que \mathbf{x}_1^* est un équilibre globalement asymptotiquement stable du système

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{0}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*).$$

sur $\Omega \cap \mathbb{R}_+^{n_1}$. Ce que l'on peut encore exprimer en disant que l'origine est un équilibre globalement asymptotiquement stable du système

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^*, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{x}_1$$

Nous allons exploiter cette structure dans la section suivante.

4.3 Le calcul de \mathcal{R}_0 pour les systèmes épidémiologiques

Dans la littérature le nombre \mathcal{R}_0 , est appelé le rapport de reproduction de base. Il est typiquement défini comme le nombre moyen de cas secondaires créés par l'introduction d'un individu infectieux, au cours de sa période d'infectiosité, dans une population de susceptibles.

Ce nombre \mathcal{R}_0 a été défini mathématiquement par O. Diekmann et al dans [8, 9] en utilisant la décomposition régulière de la matrice de Metzler associée aux individus «infectieux».

Comme le font remarquer O. Diekmann et J.A.P. Heesterbeek dans [8] :

beaucoup de modélisateurs sont habitués à écrire des équations différentielles et à dériver une condition de seuil en déterminant la stabilité du DFE (par exemple en considérant le critère de Routh-Hurwitz)... Souvent le critère de Routh-Hurwitz reste implicite et ne permet pas d'obtenir directement une formule explicite.

Nous pouvons aussi ajouter qu'il est difficile d'utiliser le critère de Routh-Hurwitz au delà de la

dimension 4, même avec des systèmes de calcul formel.

Toute décomposition régulière donne une condition de seuil équivalente sur les paramètres. Seul le rayon spectral associé à la décomposition régulière correspondant à la diagonale de \mathbf{A} correspond à \mathcal{R}_0 . Dans [8] ce résultat est attribué à Nold (1980) [39], mais on le retrouve pourtant dans Varga en 1960 [56, 57].

Cette section va fournir un algorithme explicite et facile d'application pour obtenir des conditions de seuil. Ces conditions sont équivalentes à celles utilisant \mathcal{R}_0 .

Si on considère le Jacobien du système (4.2) calculé au DFE, il s'écrit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0}) & \mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0}) \\ 0 & \mathbf{A}_2(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0}) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Comme le système $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^*, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{x}_1$ est globalement asymptotiquement stable à l'origine, la matrice $\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0})$ est non instable, i.e. $\alpha(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0})) \leq 0$.

En raison de la forme triangulaire de \mathbf{J} la stabilité de \mathbf{x}_1^* est associée à la stabilité asymptotique de $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0})$. Donc une condition de seuil pour la locale stabilité est

$$\alpha(\mathbf{A}_2(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0})) < 0$$

Si on considère une décomposition régulière de $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0})$, on aura une condition de seuil : si $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}_1^*; \mathbf{0}) = \mathbf{D} + \mathbf{M}$ on aura stabilité locale si $\rho(-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}) < 1$.

Le rapport de reproduction de base correspondra à une décomposition régulière où $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A}_2)$ est la diagonale de \mathbf{A}_2 [6, 8, 9].

Nous allons exploiter les propriétés particulières des matrices de Metzler. Les faits suivants sont bien connus et faciles à démontrer à partir du théorème 3.6 :

—> Toute sous-matrice principale d'une matrice de Metzler stable est une matrice de Metzler stable.

—> Une condition nécessaire pour qu'une matrice de Metzler soit stable est que sa diagonale soit strictement négative.

La proposition suivante constitue une méthode de réduction par récurrence. Cette proposition semble nouvelle, même si elle est à peu près évidente.

Proposition 4.1 *Si une matrice de Metzler \mathbf{M} se décompose en blocs*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

\mathbf{M} est Metzler stable si et seulement si \mathbf{A} et $\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ sont Metzler stables.

Démonstration:

Montrons que la condition est nécessaire

Puisque \mathbf{M} est une matrice de Metzler stable, il existe un vecteur d'un certain \mathbb{R}_+^n de dimension adéquate, $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \gg \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{M}\mathbf{c} \ll \mathbf{0}$; ce qui est équivalent de dire :

$$\mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \mathbf{B}\mathbf{c}_2 \ll \mathbf{0} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{c}_1 + \mathbf{D}\mathbf{c}_2 \ll \mathbf{0} \quad (4.6)$$

De ces deux inégalités, il vient $\mathbf{A}\mathbf{c}_1 \ll \mathbf{0}$ et $\mathbf{D}\mathbf{c}_2 \ll \mathbf{0}$ ce qui prouve que les matrices \mathbf{A} et \mathbf{D} sont Metzler stables (cf théorème 3.6). Puisque \mathbf{A} est une matrice de Metzler stable, on a : $-\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$. On va pré-multiplier l'inégalité (4.5) par la matrice $\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$; on obtient

$$-\mathbf{C}\mathbf{c}_1 - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{c}_2 \leq \mathbf{0} \quad (4.7)$$

De l'inégalité (4.6) autrement exprimé par : $\mathbf{D}\mathbf{c}_2 \ll -\mathbf{C}\mathbf{c}_1$ combiné avec l'inégalité (4.7), on a

$$(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{c}_2 \ll \mathbf{0}$$

ce qui implique que $\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ est une matrice de Metzler stable.

Montrons que la condition est suffisante.

On suppose que \mathbf{A} et $\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ sont des matrices de Metzler stables. Il vient qu'il existe un vecteur \mathbf{c}_2 de dimension adéquate, $\mathbf{c}_2 \gg \mathbf{0}$ tel que

$$(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{c}_2 \ll \mathbf{0}.$$

Soit le vecteur $\mathbf{c}_3 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{c}_2 \geq \mathbf{0}$; il vient que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}_3 + \mathbf{B}\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{C}\mathbf{c}_3 + \mathbf{D}\mathbf{c}_2 \ll \mathbf{0}$.

Soit $\mathbf{v} \gg \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{A}\mathbf{v} \ll \mathbf{0}$, et soit $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_3 + \varepsilon\mathbf{v}$ avec $\varepsilon > 0$; on a $\mathbf{c}_1 \gg \mathbf{0}$ pour tout ε . On choisit ε assez petit pour que

$$\mathbf{C}\mathbf{c}_1 + \mathbf{D}\mathbf{c}_2 = (\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{c}_2 + \mathbf{C}\varepsilon\mathbf{v} \ll \mathbf{0} \quad (4.8)$$

On a également

$$\mathbf{A}\mathbf{c}_1 + \mathbf{B}\mathbf{c}_2 = \mathbf{A}\varepsilon\mathbf{v} \ll \mathbf{0} \quad (4.9)$$

nous déduisons des inégalités (4.8) et (4.9) que \mathbf{M} est une matrice de Metzler stable. Ce qui termine la démonstration. \square

Cet algorithme sera utilisé dans les applications au chapitre 5

4.4 Un résultat de globale stabilité pour le DFE

On va maintenant donner un résultat de stabilité pour le DFE sous des conditions de seuil, en utilisant la section précédente et un principe de réduction.

Theorème 4.1 Soit $G \subset \mathcal{U} = \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ un ensemble d'intérieur non vide. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*) + A_{12}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

qu'on suppose au moins de classe C^1 défini sur \mathcal{U}

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- 1) \rightarrow l'ensemble G est positivement invariant pour le système
- 2) \rightarrow toute trajectoire positive du système commençant en un point $\mathbf{x} \in \bar{G}$, $\gamma^+(\mathbf{x})$ est relativement compacte
- 3) \rightarrow le sous-système $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^*, 0)\mathbf{x}_1$ est globalement asymptotiquement stable en l'origine
- 4) \rightarrow La matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est Metzler et irréductible pour tout $\mathbf{x} \in \bar{G}$
- 5) \rightarrow Il existe une matrice $\bar{\mathbf{A}}_2$ qui est un majorant pour l'ensemble $\mathcal{M} = \{\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R}) / \mathbf{x} \in \bar{G}\}$ avec la propriété que soit $\bar{\mathbf{A}}_2 \notin \mathcal{M}$ ou si $\bar{\mathbf{A}}_2 \in \mathcal{M}$, (i.e., $\bar{\mathbf{A}}_2 = \max_{\bar{G}} \mathcal{M}$), alors pour tout $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{G}$ tel que $\bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2(\bar{\mathbf{x}})$, on a $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^{n_1} \times \partial\mathbb{R}_+^{n_2}$ (i.e., les points où le maximum est réalisé sont sur la frontière de l'orthant dans \bar{G})
- 6) $\rightarrow \alpha(\bar{\mathbf{A}}_2) \leq 0$.

Alors l'équilibre non endémique $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{0})$ est globalement asymptotiquement stable dans \bar{G} .

Remarque 4.1 Les conditions 1) à 4) sont naturelles et très souvent satisfaites dans la littérature, comme on pourra le vérifier au chapitre 5. La condition 4) exige que $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ soit irréductible, cela signifie biologiquement qu'il n'y a pas un compartiment ou un groupe de compartiments complètement sans relation avec les autres dans le groupement de compartiment correspondant à la variable \mathbf{x}_2 . On peut s'y ramener en considérant des sous-systèmes isolés. La condition 5) est tout simplement une condition de seuil obtenue par l'algorithme de la section précédente.

Remarque 4.2 La condition 5) est compliquée. La raison en est que nous cherchons le meilleur majorant pour obtenir la meilleure majoration de la condition 6). C'est le cas quand le majorant est un maximum. Voir le lemme technique ci-dessous.

Remarque 4.3 Le théorème 4.1 ci-dessus est un théorème général ; les conditions de globale stabilité qu'on en obtient ne sont pas toujours optimales. Il retrace cependant le cheminement qu'on utilise lorsqu'on est en quête des conditions optimales.

Remarque 4.4 Le théorème va s'appliquer quand on regroupe les compartiments «sains» et les compartiments des «malades». Mais il peut aussi s'appliquer à un regroupement des compartiments «receveur controlé» si les autres conditions du théorème sont vérifiées. En fait le théorème s'applique à toute décomposition pseudo triangulaire convenable.

Lemme 4.1 Si \mathbf{A}_2 est une matrice de Metzler irréductible et $\mathbf{0} < \mathbf{A}_2 < \bar{\mathbf{A}}_2$, alors $\alpha(\mathbf{A}_2) < \alpha(\bar{\mathbf{A}}_2)$

Démonstration:

Il existe une constante positive m tel que $\mathbf{0} \leq \mathbf{A}_2 - m\mathbf{I} < \bar{\mathbf{A}}_2 - m\mathbf{I}$. Puisque \mathbf{A}_2 est irréductible, il en est de même de $\mathbf{A}_2 - m\mathbf{I}$. nous avons établi dans la démonstration du théorème 3.5 que $\rho(\mathbf{A}_2 - m\mathbf{I}) + m = \alpha(\mathbf{A}_2)$. D'après le théorème 3.4, on a $\rho(\mathbf{A}_2 - m\mathbf{I}) < \rho(\bar{\mathbf{A}}_2 - m\mathbf{I})$. Il s'ensuit immédiatement que $\alpha(\mathbf{A}_2) < \alpha(\bar{\mathbf{A}}_2)$. \square

Démonstration du théorème 4.1:

La matrice $\bar{\mathbf{A}}_2$ est irréductible comme $\bar{\mathbf{A}}_2 \geq \mathbf{A}_2(\mathbf{x})$, et $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est irréductible. Il vient du théorème de Perron-Frobenius (théorème 3.5) que $\alpha(\bar{\mathbf{A}}_2)$ est dans le spectre de $\bar{\mathbf{A}}_2$, et il existe un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^{n_2}$, $\mathbf{u} \gg \mathbf{0}$ tel que

$$\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{A}}_2 = \alpha(\bar{\mathbf{A}}_2) \mathbf{u}^T$$

Soit la fonction L défini sur \mathcal{U} par :

$$L : \mathbf{x} \in \mathcal{U} \mapsto L(\mathbf{x}) = \langle (\mathbf{0}; \mathbf{u}), (\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle$$

L est une fonction de classe C^∞ sur \mathcal{U} , et sa dérivée en tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ est :

$$\dot{L}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, \dot{\mathbf{x}}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}_2 \rangle \quad (4.10)$$

En prenant en compte l'hypothèse 5), on obtient de (4.10) que :

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{x}) &\leq \langle \mathbf{u}, \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{x}_2 \rangle \\ &\leq \langle \mathbf{u}, \alpha(\bar{\mathbf{A}}_2) \mathbf{x}_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.11)$$

En utilisant l'hypothèse 6), il vient que $\dot{L} \leq 0$, sur \mathcal{U} . Il vient donc que L est bien une fonction de LaSalle sur \mathcal{U}

Il nous reste à établir que le DFE est globalement asymptotiquement stable pour le système (4.2) restreint à à l'ensemble M , le plus grand ensemble invariant pour le système contenu dans $E = \{\mathbf{x} \in \tilde{G} / \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$. Nous aurons ainsi toutes les hypothèses du théorème de réduction, le théorème A.2.

De (4.10), il vient que $E = \{\mathbf{x} \in \tilde{G} / \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}_2 \rangle = 0\}$. Nous affirmons que $E \subset W = (\mathbb{R}_+^{n_1} \times \partial\mathbb{R}_+^{n_2}) \cap \tilde{G}$. En effet, soit $\mathbf{x} \in E$; si $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{A}}_2$, il n'y a rien à prouver, car par l'hypothèse 5) $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{x} \in W$.

Supposons maintenant que $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) < \bar{\mathbf{A}}_2$; par le lemme 4.1, on en déduit que $\alpha(\mathbf{A}_2(\mathbf{x})) < \alpha(\bar{\mathbf{A}}_2) \leq 0$. Ceci prouve que la matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est inversible. De cette inégalité, puisque $\mathbf{u} \gg \mathbf{0}$, on a encore

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

si \mathbf{x} n'est pas dans la frontière, et donc $\mathbf{x}_2 \gg \mathbf{0}$, comme $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est inversible, le vecteur $\mathbf{u}^T \mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ n'est pas nul; donc, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\mathbf{x}_2 \rangle < 0$. Ce qui est une contradiction, et donc \mathbf{x} ne pourrait pas être dans E .

Nous affirmons à présent que $M \subset \mathbb{R}_+^{n_1} \cap \bar{G}$. En effet soit $\mathbf{x} \in M \subset E \subset W$, il existe $i \in N_2 = [0, n_2]$ tel que $x_i(t) = 0$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$). Donc

$$(\dot{\mathbf{x}}_2)_i(t) = \sum_{j \in N_2, j \neq i} (\mathbf{A}_2)_{ij} x_j = 0.$$

Ainsi, on a $x_j = 0$ pour tous les $j \in N_2$ tel que $(\mathbf{A}_2)_{ij} \neq 0$ sur un intervalle réel positif. Ceci prouve que les variables x_j représentant les compartiments connectés au compartiment d'indice i sur le graphe du diagramme des flux correspondant de la matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ sont toutes nulles. Puisque la matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est irréductible pour tout \mathbf{x} , le graphe correspondant est fortement connexe. Ce qui prouve que $M \subset \mathbb{R}_+^{n_1} \cap \bar{G}$, et donc la restriction du système (4.2) à M est globalement asymptotiquement stable au DFE par le principe de réduction, le corollaire A.1. Ce qui termine la démonstration \square

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un moyen systématique pour donner des conditions nécessaires de globale stabilité du DFE.

Ces conditions utilisant les structures des matrices de Metzler sont facilement calculables; nous en apporterons la preuve dans les exemples qui suivent. Cependant, certains systèmes échappent à cette technique. Plus exactement, la condition obtenue par le théorème 4.1 peut être affaiblie en tenant compte de certaines particularités des systèmes rencontrés. L'exemple d'un modèle intra-hôte du VIH sera donné.

Le théorème de stabilité présenté généralise et corrige un théorème de Castillo-Chavez, Feng et Huang [6]; en particulier la compacité des trajectoires dans le futur est essentielle pour la globale stabilité.

Chapitre 5

Applications à différents modèles

Introduction

Les résultats que nous avons fournis dans le chapitre précédent sont motivés par un besoin d'outils permettant de traiter de la stabilité des points d'équilibre qui se trouvent sur la frontière de l'espace des états d'un système biotechnologique ; précisément lorsque l'ensemble des états de ce système sont dans l'orthant positif d'un certain \mathbb{R}^n .

Dans ce chapitre, nous considérons un certain nombre de ces systèmes, qui présentent des équilibres frontières, et utilisons successivement les divers résultats de stabilité afin de les éprouver. Il s'agit des exemples que nous avons pris dans la littérature, et dont quelques fois l'appréciation donnée par les auteurs de leur stabilité est hâtive.

Nous proposons ensuite un exemple de modèle **MSEIR**, qui est une extension d'un modèle **SEIR** que nous avons pris dans la littérature. Il s'agit d'un modèle dû à D. Greenhalgh [13], qui peut se prêter à la modélisation par compartimentale de plusieurs maladies. Notre extension prend en compte l'introduction d'un compartiment **M**. Nous analysons la stabilité du point d'équilibre non endémique, car c'est le point d'équilibre qui dans ce cas se prête à l'application de nos résultats. Nous justifions le fait que ce résultat correspond à une extension des résultats existants déjà dans la littérature. Nous donnons un sens à ce fait, en l'apparentant suivant les cas à divers modèles épidémiologiques existants, suivant les spécifications des paramètres.

5.1 Un exemple de modèle épidémiologique de la littérature

Dans [27], un modèle **SEIR** (5.1) de transmission d'une maladie infectieuse est considérée. Il s'agit d'un modèle **SEIR** avec loi d'action de masse standard et démographie exponentielle. Ce modèle peut s'appliquer suivant le choix des paramètres à une classe de maladies dans lesquelles on peut subdiviser la population concernée en les quatre compartiments dont les initiales dans l'ordre constituent le nom du modèle : les susceptibles, les exposés, les infectieux, et les rétablis. Le diagramme de flux entre compartiment de tels modèle est représenté sur la figure 5.1.

Remarquons que dans ces modèles on considère les paramètres de telle sorte que seul le com-

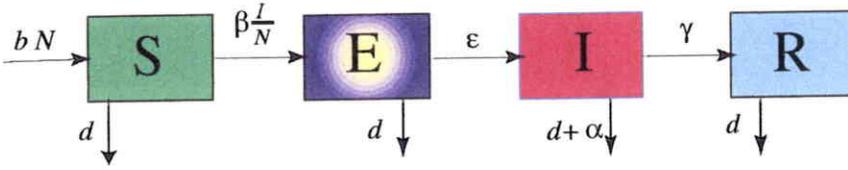


FIG. 5.1 – Représentation du diagramme de flux du modèle

partiment des individus susceptibles reçoit des nouveaux individus, et ceci par des naissances. Il s'agit d'une concession biologiquement acceptable car à la naissance, les individus sont généralement naïfs au regard des maladies concernées dans ces modèles. Le système (5.1) d'équations différentielles suivant s'en déduit par le bilan de matières dans chaque compartiment

$$\begin{cases} \dot{s} = b - bs - \beta is + \alpha is, \\ \dot{e} = \beta is - (\varepsilon + b)e + \alpha ie, \\ \dot{i} = \varepsilon e - (\gamma + \alpha + b)i + \alpha i^2, \\ \dot{r} = \gamma i - br + \alpha ir \end{cases} \quad (5.1)$$

défini normalement dans $\mathcal{U} = \mathbb{R}^4$. L'espace de faisabilité épidémiologique est

$$G = \{(s, e, i, r) \in \mathbb{R}_+^4 / s + e + i + r = 1\}.$$

Du fait qu'il s'agit d'un système d'équations différentielles surdéterminé sur G , une simplification possible, que l'on considère défini sur $\Delta = \{(s, e, i) \in \mathbb{R}_+^3 / s + e + i \leq 1\}$ est donnée par le système d'équations différentielles suivant.

$$\begin{cases} \dot{s} = b - bs - \beta is + \alpha is, \\ \dot{e} = \beta is - (\varepsilon + b)e + \alpha ie, \\ \dot{i} = \varepsilon e - (\gamma + \alpha + b)i + \alpha i^2. \end{cases} \quad (5.2)$$

Notons que Δ est un simplexe compact positivement invariant pour le système (5.2)

Le point $(1, 0, 0) \in \Delta$ est un équilibre de (5.2), qui est point situé sur la frontière de Δ .

Dans les nouvelles coordonnées $x_1 = s - 1$, $x_2 = e$, $x_3 = i$, le système (5.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + (\alpha - \beta)x_3 + (\alpha - \beta)x_1x_3, \\ \dot{x}_2 = \beta x_3 - (\varepsilon + b)x_2 + \beta x_1x_3 + \alpha x_2x_3, \\ \dot{x}_3 = \varepsilon x_2 - (\gamma + \alpha + b)x_3 + \alpha x_3^2. \end{cases} \quad (5.3)$$

défini sur $\tilde{\Delta} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq x_1, x_1 + x_2 + x_3 \leq 0\}$.

Le point d'équilibre du système (5.3) est $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$.

$$\text{Soit } \mathcal{R}_0 = \frac{\beta\varepsilon}{(\varepsilon + b)(\gamma + \alpha + b)}.$$

La matrice Jacobienne du système à l'état d'équilibre est

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b & 0 & \alpha - \beta \\ 0 & -b - \varepsilon & \beta \\ 0 & \varepsilon & -\frac{\varepsilon \beta}{(b + \varepsilon) \mathcal{R}_0} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de \mathbf{A} est :

$$P(X) = (b + X)(X^2 + (\varepsilon + \gamma + \alpha + 2b)X + \beta \varepsilon (\frac{1}{\mathcal{R}_0} - 1))$$

1. \rightarrow Si $\mathcal{R}_0 < 1$, les trois valeurs propres de la matrice Jacobienne du système (5.3) \mathbf{A} à l'équilibre sont propres à partie réelles strictement négatives. Donc, le point d'équilibre $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.
2. \rightarrow Si $\mathcal{R}_0 > 1$ Alors \mathbf{A} a une valeurs propre à partie réelle strictement positif. Il s'en suit dans ce cas le point d'équilibre $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$ est instable.
3. \rightarrow Si $\mathcal{R}_0 = 1$ les valeurs propres de \mathbf{A} sont : $0, -b, -(\varepsilon + \gamma + \alpha + 2b)$. La linéarisation n'est pas suffisante pour conclure à la stabilité du système (5.3) en l'équilibre $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$.

Cas : $\mathcal{R}_0 = 1$

Nous explorons les propriétés de stabilité du système (5.3) comme un système sur l'espace \mathbb{R}^3 tout entier. Nous utilisons à cet effet les techniques de la variété centrale.

Dans une base constituée des vecteurs propres de la matrice du linéarisé, le système (5.3) prend la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 = -bx_2 + f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 = -(\varepsilon + \gamma + \alpha + 2b)x_3 + f_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad (5.4)$$

où $f_i(0, 0, 0) = 0, \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0, 0, 0) = 0$. D'après [4], le système (5.4) a une variété centrale qui peut être localement représenté par $x_2 = h_2(x_1), x_3 = h_3(x_1)$ with $h_i(0) = \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(0) = 0$. De plus, les propriétés de stabilité de (5.4) sont les mêmes que celles du système suivant :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, h_2(x_1), h_3(x_1)). \quad (5.5)$$

Pour le système (5.4), nous avons,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) = & \overbrace{\left(\alpha(b + \varepsilon)^2 + \alpha \varepsilon \beta + \frac{\varepsilon(b + \varepsilon)(\alpha - \beta)\beta}{b} \right)}^A x_1^2 \\ & + \varepsilon(b + \varepsilon)\beta x_1 x_2 + \varepsilon(b + \varepsilon)\beta x_2 x_3 - \frac{(b + \varepsilon)^2(\alpha - \beta)\beta}{b + \varepsilon + \beta} x_3^2 \\ & + \left(\alpha(b + \varepsilon)^2 + \alpha \varepsilon \beta + \frac{\varepsilon(b + \varepsilon)(\alpha - \beta)\beta}{b} - \frac{(b + \varepsilon)^2(\alpha - \beta)\beta}{b + \varepsilon + \beta} \right) x_1 x_3 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de h_i et le fait que $A > 0$, on a

$$f_1(x_1, h_2(x_1), h_3(x_1)) = Ax_1^2 + \text{termes d'ordres supérieurs}.$$

Donc, la solution nulle de (5.5) est instable; il en est donc de même pour la solution nulle de l'équation différentielle (5.4).

Nous résumons dans le tableau suivant les propriétés de stabilité du point d'équilibre $(1, 0, 0)$ du système (5.2) obtenu de l'étude du système linéarisé, et des techniques de la variété centrale

	système (5.2) défini sur \mathbb{R}^3	système (5.2) défini sur Δ
$\mathcal{R}_0 < 1$	asymptotiquement stable (locale)	asymptotiquement stable (locale)
$\mathcal{R}_0 > 1$	instable	instable
$\mathcal{R}_0 = 1$	instable	?

Nous utilisons d'autres outils pour étudier la stabilité globale du point d'équilibre $(1, 0, 0)$ du système (5.2) défini sur Δ . On peut voir sur les équations du système (5.4) que le point d'équilibre non endémique est un point d'équilibre nœud-selle. Nous allons prouver que en regard du simplexe Δ , on est exactement dans la situation de la remarque 3.7, page 102. Il peut actuellement être établi que la valeur $\mathcal{R}_0 = 1$ est un point de bifurcation transcritique pour le système (5.2).

Dans [27], Les auteurs prouvent que la fonction L définie par

$$L = \epsilon e + (\epsilon + b)i$$

est une fonction de LaSalle pour le système (5.2) sur Δ (voir aussi [31] où une telle fonction est utilisée). Ils concluent que le point d'équilibre non endémique $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable sur Δ en invoquant le théorème de LaSalle, théorème 3.11 ([25], Chapitre 2, Théorème 6.4). Mais ce théorème ne peut être utilisé que pour prouver que l'équilibre $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ est globalement attractif, et ne peut donner d'informations sur sa stabilité. D'un autre côté, le théorème 3.12 ([24, Corollaire 1] et [25, Chapitre 2, Théorème 7.8]) ne peut non plus être utilisé du moment où l'ensemble Δ considéré est fermé, et le point d'équilibre est un point frontière de Δ . La même remarque peut être faite relativement à certains articles qui se trouvent dans la littérature (voir [29, 27, 30, 37, 28, 38]), où le théorème de LaSalle ([25], Chapitre 2, Théorème 6.4). est à chaque fois invoqué un peu trop rapidement.

Nous pouvons à l'aide de nos résultats, le théorème 4.1, donner des preuves simples et correctes.

Nous écrivons le système sous la forme requise par le théorème 4.1 Les équations du système (5.2) sont déjà écrites suivant le regroupement de variable nécessaire pour l'application du théorème.

On considère les regroupements $\mathbf{x}_1 = s$ et $\mathbf{x}_2 = (e; i)$. Le système s'écrit donc

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{5.6}$$

avec

$$\mathbf{A}_1 = -b - \beta i, \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\varepsilon + b) & \beta s + \alpha e \\ \varepsilon & -(\alpha(1 - i) + \gamma + b) \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathbf{b} = (b; 0; 0)$$

Le maximum de la matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ n'est pas réalisé en un point de Δ ; il existe néanmoins un majorant, matrice irréductible qui est atteint au point $\bar{\mathbf{x}} = (1, 1, 1)$ qui est un point situé en dehors du Δ . Si nous notons $\bar{\mathbf{A}}_2$ ce majorant, on a :

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} -(\varepsilon + b) & \beta + \alpha \\ \varepsilon & -(\gamma + b) \end{pmatrix}$$

En effet la matrice

$$\bar{\mathbf{A}}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta(1 - s) + \alpha(1 - e) \\ 0 & \alpha(1 - i) \end{pmatrix}$$

est positive

L'hypothèse 6) du théorème 4.1 requiert que $\alpha(\bar{\mathbf{A}}_2) \leq 0$; ce qui est équivalent à :

$$\frac{\varepsilon(\beta + \alpha)}{(\varepsilon + b)(\gamma + b)} \leq 1 \quad (5.7)$$

Les diverses autres hypothèses sont triviales. En effet,

—> en hypothèse 3) il est nécessaire que le système réduit à $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1; \mathbf{0})\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1$, qui dans notre cas se réduit à l'équation différentielle $\dot{s} = b - bs$ soit globalement et asymptotiquement stable au point d'équilibre correspondant au DFE. Ce qui est le cas.

Il s'ensuit donc d'après le théorème 4.1 que sous la condition $\frac{\varepsilon(\beta + \alpha)}{(\varepsilon + b)(\gamma + b)} \leq 1$, le point $\mathbf{x}_0 = (1; 0; 0)$, DFE du système (5.2) est globalement asymptotiquement stable relativement à Δ .

Cependant, si on considère la matrice bloc \mathbf{J}_2 de la matrice jacobienne du champ du système (5.6) correspondant à la matrice bloc $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ à l'équilibre $\mathbf{x}_0 = (1; 0; 0)$ qui est :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(\varepsilon + b) & \beta \\ \varepsilon & -(\alpha + \gamma + b) \end{pmatrix},$$

elle ne réalise une majoration pour les matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Delta$. Elle est tout de même irréductible au même titre que les matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$. Nous dérivons en nous servant du théorème de réduction, le corollaire A.1 une condition nécessaire de globale asymptotique stabilité du DFE meilleure que celle que nous obtenons du théorème 4.1.

Soit le vecteur $\mathbf{u} = (\varepsilon; (\varepsilon + b)) \in \mathbb{R}_+^2$; on a : $\mathbf{x} \in \Delta$, $\mathbf{J}_2^T \mathbf{u} = (0; \varepsilon\beta - (\varepsilon + b)(\alpha + \gamma + b))$; pour que $\mathbf{J}_2^T \mathbf{u} \leq \mathbf{0}$, il suffit que

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\varepsilon\beta}{(\varepsilon + b)(\alpha + \gamma + b)} \leq 1 \quad (5.8)$$

Considérons la fonction candidate

$$L : \mathbf{x} \in \Delta \mapsto L(\mathbf{x}) = \langle (0; \mathbf{u}), \mathbf{x} \rangle = \varepsilon e + (\varepsilon + b)i$$

C'est une fonction de classe C^∞ , et sa dérivée sur Δ est donnée par ;

$$\dot{L} = \langle \mathbf{J}_2^T \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = i [\beta \varepsilon - (b + \varepsilon)(\alpha + b + \gamma) + \varepsilon(\beta(s - 1) + \alpha e) + \alpha(b + \varepsilon)i]$$

Le terme entre les crochets est une fonction affine de (s, e, i) . Les extrema de cette expression dans le simplexe Δ sont atteints sur les sommets de Δ . Donc l'une des quantités suivantes est une borne supérieure de la fonction \dot{L} sur Δ :

$$\beta \varepsilon - (b + \varepsilon)(\alpha + b + \gamma) = (b + \varepsilon)(\alpha + b + \gamma)(\mathcal{R}_0 - 1) \leq 0 \text{ (du fait que } \mathcal{R}_0 \leq 1),$$

$$\alpha \varepsilon - (b + \varepsilon)(\alpha + b + \gamma) < 0$$

$$\alpha(b + \varepsilon) - (b + \varepsilon)(\alpha + b + \gamma) < 0$$

$$-(b + \varepsilon)(\alpha + b + \gamma) < 0$$

Ceci prouve que la fonction L est bien une fonction de LaSalle sur Δ .

Avec les notations (corollaire A.1), considérons l'ensemble $E = \{(s, e, i) \in \Delta \mid \dot{L}(s, e, i) = 0\}$; on a $E \subset \{(s, e, i) \in \Delta \mid i = 0\}$.

Le système (5.2) restreint à l'ensemble E est donné par l'équation différentielle

$$\dot{s} = b - bs$$

Le plus grand ensemble invariant pour le système (5.2) contenu dans E est $M = \{(1, 0, 0)\}$.

Par l'usage du théorème de réduction, le corollaire A.1, on conclut à la globale asymptotique stabilité de l'état d'équilibre $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ pour le système (5.2) sur Δ . \square

Commentaire :

On a deux conditions de seuil ci dessus pour la stabilité du DFE du système (5.2) et par la même celui du système (5.1). Ces deux conditions dérivent des théorème 4.1 et corollaire A.1 respectivement. chacune assurant l'asymptotique stabilité du DFE. La condition obtenue du théorème de réduction i.e. le corollaire A.1 est la condition classique de la littérature. Cependant, on a l'inégalité :

$$\frac{\varepsilon \beta}{(\varepsilon + b)(\alpha + \gamma + b)} < \frac{\varepsilon(\beta + \alpha)}{(\varepsilon + b)(b + \gamma)}$$

Ce qui établit que la condition de seuil donnée par l'inégalité (5.8) est meilleure que la condition correspondant à l'inégalité (5.7). En effet, elle est optimale, car la valeur $\mathcal{R}_0 = \frac{\varepsilon \beta}{(\varepsilon + b)(\alpha + \gamma + b)}$ est un point de bifurcation.

5.2 Exemple de modélisation

Introduction et présentation du modèle épidémiologique

Dans cette section, nous donnons un exemple de modèle épidémiologique **M S E I R S** relatif à une population homogène. Nous entendons par là une population soumise à une maladie telle que les divers compartiments de la modélisation épidémiologique **M S E I R** classiques sont supposés homogènes. Notre modèle est une extension d'un modèle **S E I R S** qui a déjà été considéré par Greenhalgh [13]. Dans notre cas, nous faisons des hypothèses plus larges que celles faites par Greenalgh pour son modèle. Nous considérons ce modèle ici afin de présenter un exemple de modélisation. Il s'agit d'un travail qui va au delà du cadre de cette thèse. Nous allons nous intéresser ici à présenter le modèle, et à analyser la stabilité du point d'équilibre non endémique sous certaines restrictions qui seront précisées plus loin. La représentation schématique du diagramme de flux dans les compartiments du modèle est donnée par la figure 5.2.

Pour les passages entre le compartiments **M** \rightarrow **S**, **E** \rightarrow **I**, **I** \rightarrow **R** et **R** \rightarrow **S**, nous n'échangeons

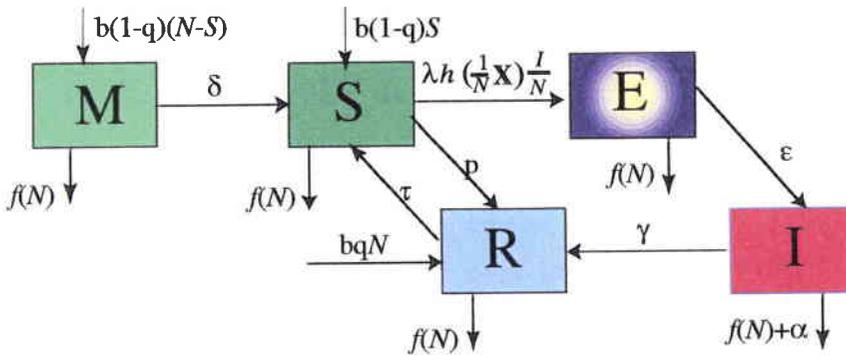


FIG. 5.2 – Représentation du diagramme de flux du modèle

rien à ce qui est pratiquement devenu un classique ; Les taux par unité de temps de passage correspondant sont respectivement δ , ϵ , γ , et τ .

On suppose que pour la maladie considérée, une politique de vaccination de la population est définie ; les individus soumis aux vaccins sont les susceptibles, c'est à dire les individus du compartiment **S**. On suppose que le vaccin immunise les individus vaccinés contre la maladie. Ce fait se matérialise par une connection **S** \rightarrow **R**. Soit p le taux par unité de temps régissant cette connection.

On suppose aussi que pour la maladie, les enfants sont soumis à la vaccination, ceci indépendamment du compartiment d'appartenance de leur mère. Le succès de cette opération confère aux enfants vaccinés une immunité, leur permettant d'entrer dans le compartiment **R**. Si la probabilité du succès de vaccination est donné par q , puisque le recrutement des nouveaux nés se fait classiquement suivant le taux par unité de temps b , le compartiment **R** reçoit par bouclage du système bqN individus par unité de temps.

Il s'ensuit en conséquence que les $b(1 - q)N$ enfants par unité de temps correspondent au cas d'échec de la vaccination. Ceci devrait être le recrutement par unité de temps du compartiment **M** ; On peut cependant faire aussi l'hypothèse que les enfants de parents susceptibles c'est à dire sans immunité ne reçoivent aucune prémunition contre la maladie. Auquel cas, les enfants pour qui l'opération de vaccination aurait été sans succès restent donc totalement exposé au même titre que tout autre susceptible ; ce qui justifie que la quantité $b(1 - q)N$ correspond à un recrutement de $b(1 - q)S$ individus par unité de temps par le compartiment **S**, et de $b(1 - q)(N - S)$ individus par unité de temps par le compartiment **M**.

Puisqu'il s'agit des populations de vivants, ces derniers sont sujets à la sortie des divers compartiments c'est à dire au décès, soit par voie naturelle, soit par maladie. Nous supposons à cet effet, que le taux de mortalité par voie naturelle est le même quel que soit le compartiment d'appartenance, et qu'il est une fonction de N le nombre totale de la population $f(N)$. La fonction $f(N)$ peut être sujette à divers critères de régularité souhaitables correspondant le mieux avec la réalité modélisée. On suppose aussi, pour la prise en compte des décès causés par la maladie, que le compartiment **I**, présente un taux de fuite du système $f(N) + \alpha$, α étant le taux de décès par unité de temps dans le compartiment causé par la maladie. Ceci est d'autant plus vraisemblable que la vitesse à laquelle une population est décimée par une épidémie quelconque donnée dépend de la taille de la population.

Enfin, Nous présentons le taux d'incidence de la maladie sur le modèle ; pour cela, nous allons poser $\mathbf{X} = (M; S; E; I; R)$ l'état du système à un instant donné. Le taux d'incidence de la maladie, est caractérisé par le coefficient souvent noté β ; Ce taux caractérise la connection **S** \rightarrow **E**. Dans le modèle, on va supposer qu'il s'agit d'une fonction de l'état du système, $\beta(\mathbf{X}) = \lambda h(\frac{1}{N}\mathbf{X})\frac{I}{N}$. On suppose que la fonction h a toutes les bonnes propriétés de régularité.

On peut déjà constater à ce niveau que tous les paramètres classiquement utilisés sont pris en compte. Le modèle peut s'appliquer à une grande classe de maladies infectieuses.

On peut aussi constater que à des variations dans le choix des divers taux directeurs des flux d'échanges entre compartiments, On a un modèle qui couvre un grand nombre de modèles qui ont déjà fait l'objet d'analyse, et se trouvent dans la littérature.

Le modèle d'état M S E I R S proposé

Le modèle compartimental sur le système constitué de la population s'écrit aisément en effectuant le bilan de masse par unité de temps des divers compartiments décrit par la figure 5.2 de la

page 123. ce modèle est donné par le système d'équations différentielles (5.9) qui suit

$$\begin{cases} \dot{M} &= b(1-q)(N-S) - (f(N) + \delta)M \\ \dot{S} &= \delta M + b(1-q)S + \tau R - (f(N) + p)S - \lambda h(\frac{1}{N}\mathbf{X})\frac{I}{N}S \\ \dot{E} &= \lambda h(\frac{1}{N}\mathbf{X})\frac{I}{N}S - (f(N) + \varepsilon)E \\ \dot{I} &= \varepsilon E - (f(N) + \gamma + \alpha)I \\ \dot{R} &= bqN + \gamma R - (f(N) + \tau)R + pS \\ \dot{N} &= (b - f(N))N - \alpha I \end{cases} \quad (5.9)$$

Le choix de la fonction $f(N)$ devra être telle que la population N ne croisse pas indéfiniment. la loi logistique est un cas particulier d'une telle fonction.

Le passage au modèle sur les proportions se fait de manière naturelle ; en effet, les seules entrées dans le système dépendent de ses états. Soit \mathbf{W} un compartiment, et $w = \frac{\mathbf{W}}{N}$ la proportion de ce compartiment dans le système, on a

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{\dot{W}}{N} - w\frac{\dot{N}}{N} \\ &= \frac{\dot{W}}{N} - w(b - f(N) - \alpha i) \end{aligned}$$

ce qui se traduit dans le système (5.9) par :

$$\begin{cases} \dot{m} &= b(1-q)(1-s) - (b + \delta)m + \alpha im \\ \dot{s} &= \delta m + \tau r - (bq + p)s + -\lambda h(\mathbf{x})is + \alpha is \\ \dot{e} &= \lambda h(\mathbf{x})is - (b + \varepsilon)e + \alpha ie \\ \dot{i} &= \varepsilon e - (b + \gamma + \alpha)i + \alpha i^2 \\ \dot{r} &= \gamma i + ps - (b + \tau)r + \alpha ir + bq \end{cases} \quad (5.10)$$

Remarque 5.1 L'état du système est $\mathbf{x} = (m, s, e, i, r)^T \in [0, 1]^5 = \mathcal{U}$

Remarque 5.2 du fait de la réalité du système, on a $G = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U}, / m + s + e + i + r = 1\}$

Analyse du comportement asymptotique au DFE

Dans cette section, nous proposons une analyse asymptotique du système (5.10) obtenu dans la section précédente. Il va de soi que le comportement asymptotique du système (5.10) est caractéristique du comportement asymptotique du système (5.9). Un avantage certain du choix du système (5.10) est que le domaine de faisabilité biologique est compact, contrairement à celui du système (5.9). De plus, il est indépendant de la fonction $f(N)$. Il importe qu'avant toute investigation nous notions la nécessité de regrouper les variables dans le but d'appliquer les résultats de réduction.

L'ensemble G est positivement invariant pour le système (5.10). Puisque le système (5.10) est surdéterminé du fait qu'en tout point $\mathbf{x} \in G$, on doit avoir $m + s + e + i + r = 1$, on peut réaménager le système de plusieurs manières en système constitué de quatre équations scalaires. Chacun des systèmes possibles de l'aménagement du système (5.10) décrit ci-dessus peut être mis de plusieurs manières sous la forme

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.11)$$

avec $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})$ une matrice de Metzler stable.

Certaines des formes présentent un léger avantage par rapport à d'autres. Il s'agit des formes permettant une lisibilité de le piège du système sans qu'il soit nécessaire d'effectuer des transformations supplémentaires. Nous choisissons pour notre usage de prendre les équations relatives aux variables m , r , e , et i ; afin de mettre en groupe les variables correspondant à un piège du système, $\hat{\mathbf{x}}_2 = (e; i)$ et les autres $\hat{\mathbf{x}}_1 = (m; r)$, et de considérer la matrice :

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -(bq + \delta) & b(1 - q) & b(1 - q) & b(1 - q) + \alpha m \\ 0 & -(b + \tau + p) & 0 & \gamma + \alpha r \\ 0 & 0 & -(b + \varepsilon) & \lambda h(\mathbf{x})s + \alpha e \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(b + \gamma + \alpha(1 - i)) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}); 0; 0) \quad \text{avec } \mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}) = (b(1 - q); bq + p(1 - m - e - i))$$

l'ensemble de définition de ce système correspondant à G est alors le simplexe

$$\Delta = \{\hat{\mathbf{x}} = (m, r, e, i) \in \mathbb{R}_+^4 / m \leq 1, e \leq 1, i \leq 1, r \leq 1, m + r + e + i \leq 1\}$$

Nous montrons que le système (5.11) est bien positivement invariant dans Δ , son espace des états.

En effet, pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in \Delta$, $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})$ est une matrice de Metzler, il vient d'après le théorème 3.3 de la page 92 que le système $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}}$ est positivement invariant sur \mathbb{R}_+^4 ; puisque pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in \Delta$, $\mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}})$ est un vecteur positif, il s'ensuit que le système (5.11) est positivement invariant dans \mathbb{R}_+^4 ;

Il ne reste qu'à établir que la face $\mathcal{F}_{\text{sup}} = \{\hat{\mathbf{x}} \in \Delta / m + r + e + i = 1\}$ repousse toutes les trajectoires solutions du système commençant en un point de Δ vers l'intérieur de Δ . En d'autres termes, que le vecteur $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{I}(\hat{\mathbf{x}})$ en tout $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_{\text{sup}}$ est rentrant dans Δ . Un calcul simple nous permet d'avoir que le composant du vecteur $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{I}(\hat{\mathbf{x}})$ en tout $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_{\text{sup}}$ par rapport à la normale est donnée par $b(q - 1) - \delta m - \tau r$, qui est bien négative en tout point $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_{\text{sup}}$.

Nous avons ainsi prouvé que l'espace des états Δ est un compact positivement invariant pour le système (5.11) d'où la positive invariance de G pour le système (5.10).

Nous nous intéressons à l'analyse de la stabilité du point d'équilibre non endémique du modèle, c'est à dire le point d'équilibre où le composant correspondant au compartiment des infectieux est égal à zéro. Ce point d'équilibre existe bien pour le système (5.11); il est donné par :

$\hat{\mathbf{x}}_0 = (m_0, r_0, 0, 0)$, avec

$$m_0 = \frac{b(1-q)(bq+p)}{p(b+\delta) + (bq+\delta)(b+\tau)},$$

$$r_0 = \frac{(\delta+bq)(bq+p)}{p(b+\delta) + (bq+\delta)(b+\tau)},$$

Nous allons maintenant présenter l'analyse de la stabilité du point d'équilibre non endémique du système (5.11) dans Δ .

Nous utilisons pour procéder à cette analyse le théorème 4.1.

Des prérequis, Les matrices $\mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{x}})$ et $\mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{x}})$ sont respectivement donnée par :

$$\mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -(bq+\delta) & b(1-q) \\ 0 & -(b+\tau+p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -(b+\varepsilon) & \lambda h(\mathbf{x})s + \alpha e \\ \varepsilon & -(b+\gamma + \alpha(1-i)) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{x}})$ est bel et bien une matrice de Metzler pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in \Delta$, irréductible.

Supposons que le maximum de $\mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{x}})$ est atteint en un point $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{m}; \bar{r}; \bar{e}; \bar{i})$. On a nécessairement $\bar{i} = 1$ et $\bar{e} = 1$. La matrice $\bar{\mathbf{A}}_2$ correspondant à ce maximum s'écrira alors :

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} -(b+\varepsilon) & \lambda h(\bar{\mathbf{x}})\bar{s} + \alpha \\ \varepsilon & -(b+\gamma) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Au cas où ce maximum n'est pas réalisé en un point, son existence est lié à l'existence d'un maximum pour la fonction $\mathbf{x} : \mapsto h(\mathbf{x})s$. Nous supposons que le maximum de cette fonction est atteint en un point $\bar{\mathbf{x}} : h(\bar{\mathbf{x}})\bar{s}$. Dans ce cas, l'expression de la matrice $\bar{\mathbf{A}}_2$ sera celle dans l'égalité (5.12). Dans tous les cas, il s'agit d'une matrice irréductible correspondant à l'hypothèse 5) du théorème 4.1.

l'hypothèse 6) du même théorème requiert que $\alpha(\bar{\mathbf{A}}_2) \leq 0$; ce qui est équivalent à :

$$\frac{\varepsilon(\lambda h(\bar{\mathbf{x}})\bar{s} + \alpha)}{(b+\varepsilon)(b+\gamma)} \leq 1 \quad (5.13)$$

L'hypothèse 3) est vérifiée comme nous allons l'établir plus bas lorsque nous allons considérer le cas particulier où $\bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{J}_2$ avec \mathbf{J}_2 la matrice bloc de la matrice Jacobienne \mathbf{J} du champ de vecteurs du système (5.11) au point d'équilibre $\hat{\mathbf{x}}_0$ correspondant à la matrice bloc $\mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{x}})$.

nous avons ainsi toute les hypothèses du théorème 4.1; on peut donc conclure à la globale asymptotique stabilité du DFE du système (5.11) sous la condition de seuil donnée par l'inégalité (5.13).

Dans ce qui suit, nous établissons la globale et asymptotique stabilité du DFE du système (5.11) en appliquant le théorème de réduction, le corollaire A.1. A cet effet, nous devons trouver une

fonction de LaSalle pour le système. Celle ci est tributaire d'une matrice à la «hypothèse 5)» du théorème 4.1 qui ne satisfait par toujours la condition dans cet hypothèse. Le bloc \mathbf{J}_2 de la matrice jacobienne du système (5.11) au DFE, correspondant la l'application \mathbf{A}_2 est convenable. La matrice \mathbf{J}_2 est :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(b + \varepsilon) & \lambda h(\mathbf{x}_0) s_0 \\ \varepsilon & -(b + \gamma + \alpha) \end{pmatrix}$$

La matrice

$$\mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda(h(\mathbf{x}_0)s_0 - h(\mathbf{x})s) - \alpha e \\ 0 & -\alpha i \end{pmatrix}$$

Considérons le vecteur $\mathbf{u} = (\varepsilon; (b + \varepsilon))$; on a $\mathbf{J}_2^T \mathbf{u} = (0; h(\mathbf{x}_0)s_0 \varepsilon \lambda - (b + \varepsilon)(b + \gamma + \alpha))$

Pour avoir $\mathbf{J}_2^T \mathbf{u} \leq \mathbf{0}$ il suffit que $\frac{\varepsilon \lambda h(\mathbf{x}_0) s_0}{(b + \varepsilon)(b + \gamma + \alpha)} \leq 1$ Cependant, la matrice $\mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2$ n'est pas de signe constant sur Δ

On considère la fonction candidate

$$V : \hat{\mathbf{x}} \in \Delta \mapsto V(\hat{\mathbf{x}}) = \langle (0; 0; \mathbf{u}), \hat{\mathbf{x}} \rangle$$

Il s'agit d'une fonction de classe C^∞ sur Δ et sa dérivée le long de trajectoires du système est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{\mathbf{x}}) &= \langle \mathbf{J}_2^T \mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle - \langle (\mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\hat{\mathbf{x}}))^T \mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}}_2 \rangle \\ &= [h(\mathbf{x}_0)s_0 \varepsilon \lambda - (b + \varepsilon)(b + \gamma + \alpha) - \varepsilon \lambda (h(\mathbf{x}_0)s_0 - h(\mathbf{x})s) + \varepsilon \alpha e + (b + \varepsilon) \alpha i] i \\ &= [\varepsilon \lambda h(\mathbf{x})s + \alpha e e + \alpha (b + \varepsilon) i - (b + \varepsilon)(b + \gamma + \alpha)] i \end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$\mathcal{R} : \hat{\mathbf{x}} \in \Delta \mapsto \mathcal{R}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\varepsilon \lambda h(\mathbf{x})s + \alpha e e + (b + \varepsilon) \alpha i}{(b + \varepsilon)(b + \gamma + \alpha)} \quad (5.14)$$

$$\text{On a } \dot{V}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{(b + \varepsilon)(b + \gamma + \alpha)} (\mathcal{R}(\hat{\mathbf{x}}) - 1) i$$

La fonction \mathcal{R} a les propriétés de régularité de la fonction h . Nous faisons l'hypothèse que ces propriétés de régularité sont telles que \mathcal{R} admette un maximum sur Δ ; notons par \mathcal{R}_0 ce maximum.

$$\mathcal{R}_0 = \max_{\hat{\mathbf{x}} \in \Delta} \mathcal{R}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.15)$$

Si donc $\mathcal{R}_0 \leq 1$, il s'ensuit que $\dot{V}(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$ pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in \Delta$, d'où la fonction V est bien une fonction de LaSalle sur Δ pour le système (5.11).

Considérons l'ensemble $E = \{\hat{\mathbf{x}} \in \Delta / \dot{V}(\hat{\mathbf{x}}) = 0\}$; E est contenu dans la face de Δ , $\{\hat{\mathbf{x}} \in \Delta / i = 0\}$

Le système (5.11) restreint à l'ensemble E est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}_1) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= \mathbf{0} \end{cases}$$

avec $\mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}_1) = (b(1-q); bq+p(1-m))$ Soit M le plus grand ensemble invariant du système (5.11) contenu dans E ; il vient que

$$M \subset \{(\hat{\mathbf{x}}_1; \mathbf{0}) \in \Delta / \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}_1)\}$$

Il reste à établir que le point $\hat{\mathbf{x}}_0 = (\hat{\mathbf{x}}_{10}; \mathbf{0})$ est globalement asymptotiquement stable pour le système (5.11) restreint à M . Ce qui revient au même d'établir que le point $\hat{\mathbf{x}}_{10}$ est globalement et asymptotiquement stable pour le système

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{x}}_1)\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}_1) \quad (5.16)$$

sur $\Delta_2 = \{\hat{\mathbf{x}}_1 = (m; r) \in \mathbb{R}_+^2 / m \leq 1, r \leq 1, m + r \leq 1\}$

Le système (5.16) est positivement invariant sur Δ_2 ; en effet, pour tout $\hat{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}_+^2$, la matrice $\mathbf{A}_1(\hat{\mathbf{x}}_1)$ est une matrice de Metzler, et le champ de vecteurs défini par \mathbf{b}_1 est positif ; il s'en suit le système (5.16) est positivement invariant sur \mathbb{R}_+^2 ; la face $\mathcal{H}_{\text{sup}} = \{\hat{\mathbf{x}}_1 \in \Delta_2 / m + r = 1\}$ de Δ_2 repousse toute trajectoire solution du système (5.16) de point initial dans Δ_2 à l'intérieur de Δ_2 , car par un calcul simple on peut constater qu'en tout point $\hat{\mathbf{x}}_1 \in \mathcal{H}_{\text{sup}}$, le composant du champ de vecteurs du système (5.16) relative à la normale sortante à \mathcal{H}_{sup} , $\tau(m-1) - b(1-q) - \delta m$ est négative.

Le système (5.16) admet dans Δ_2 un unique point d'équilibre qui est $\hat{\mathbf{x}}_{10}$, et la matrice Jacobienne du système en ce point

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -(bq + \delta) & b(1-q) \\ 0 & -(b + \tau) \end{pmatrix}$$

admet deux valeurs propres strictement négatives, et par conséquent le point $\hat{\mathbf{x}}_{10}$ est localement asymptotiquement stable. Puisque toutes les trajectoires sont relativement compactes, et pour cause, le domaine Δ_2 est compact, le point $\hat{\mathbf{x}}_{10}$ est un point attractif pour toutes les trajectoires solutions du système (5.16) dans Δ_2 ; D'où la globale asymptotique stabilité du point $\hat{\mathbf{x}}_{10}$

Il s'ensuit que le point d'équilibre non endémique $\hat{\mathbf{x}}_0$ est globalement asymptotiquement stable du système (5.11) dans M .

Le théorème A.1 a toutes ses hypothèses remplies ; à la condition que le coefficient donnée par l'inégalité (5.15) $\mathcal{R}_0 \leq 1$, le point d'équilibre non endémique $\hat{\mathbf{x}}_0$ est globalement asymptotiquement stable pour le système (5.11) dans Δ .

Il va alors de soi que si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ le point $(1 - m_0 - r_0; m_0; 0; 0; r_0)$ qui est le point d'équilibre non endémique pour le système (5.10) est globalement asymptotiquement stable pour ce système dans G . Dans le cas où Le maximum de la fonction $\mathcal{R}(\hat{x})$ est réalisé au DFE, la condition donnée par l'inégalité (5.15) est optimale. En effet, si $\mathcal{R}_0 > 1$ le point d'équilibre non endémique est instable; car, la matrice Jacobienne du champ de vecteurs du système (5.10) en ce point admet une valeur propre positive. \square

Commentaire

Cet exemple est un cas particulier où le théorème 4.1 donne une condition nécessaire de globale asymptotique stabilité du DFE qui n'est pas optimale. Comme nous l'avons mentionné plus haut, les particularités de ce système nous offrent la possibilité d'appliquer le théorème de réduction où l'on dérive lorsque cela est possible une condition nécessaire de globale stabilité du DFE meilleure que celle du théorème précédent. Dans le cas où le maximum de la fonction $\mathcal{R}(\hat{x})$ est réalisé au DFE, la condition donnée par l'inégalité (5.15) est optimale.

5.3 Exemple de modèle avec domaine non compact

5.3.1 Introduction

Dans les modèles présentés dans les sections précédentes, nous nous trouvons avec des systèmes sur des domaines compacts. Ceci est courant dans les modèles épidémiologiques correspondants aux modèles compartimentaux d'infections sur des populations d'individus où les seuls recrutements admis dans les systèmes sont les entrées en boucle fermée; en d'autres termes le diagramme des flux ne présente le cas échéant que des flux entrants dans les compartiments qui sont des fonctions des divers composants de l'état du systèmes. Le cas de l'exemple de modélisation présenté dans la section 5.2 est un tel cas, et on peut le constater sur le diagramme des flux présenté par la figure 5.2 de la page 123.

Dans ces cas, on recourt au modèle sur les proportions, qui réduit alors le domaine du système à un n -simplexe donc un ensemble compact.

Si un compartiment reçoit de la matière de l'environnement extérieur totalement indépendante du système, les choses se passent différemment. On ne peut plus passer au modèle sur les proportions; le cas échéant, cela engendre les calculs compliqués. En effet, lorsqu'on quotiente les équations caractéristiques de l'évolution dans les compartiments où interviennent un flux entrant de matière par la somme des matières dans le système à un instant donné, les termes relatifs aux entrées de matière ne sont pas résolus. Cette situation est caractéristique des immigrations des populations dans les modèles épidémiologiques.

Pour illustrer ces cas, nous considérons deux exemples. Le premier correspond à un modèle classique de l'épidémiologie, représentant un cas de modèle **SEIRS** dans une population qui

est sujette à l'immigration de population correspondant à un recrutement dans le système de Λ individus par unité de temps. En deuxième exemple, nous considérons un cas d'une maladie, dont certains compartiments présentent une hétérogénéité dans leurs éléments ; nous avons déjà représenté le diagramme des flux entre compartiments sur la figure 2.5 à la page 75. La maladie concernée dans ce modèle est la tuberculose avec deux souches de malades. Nous commençons par donner une description du diagramme des flux.

5.3.2 Un modèle SEIRS simple avec immigration

Présentation de l'infection

Comme nous avons dit dans la section introductive précédente, il s'agit d'un modèle **SEIRS** simple avec action de masse standard. Il s'agit d'un modèle dû à Hethcote [36]. La population concernée est homogène. Les divers autres taux directeurs des flux entre compartiments sont ceux qui sont classiquement utilisés.

Nous présentons sur la figure 5.3 le diagramme de flux dans le système pour compléter la description du système.

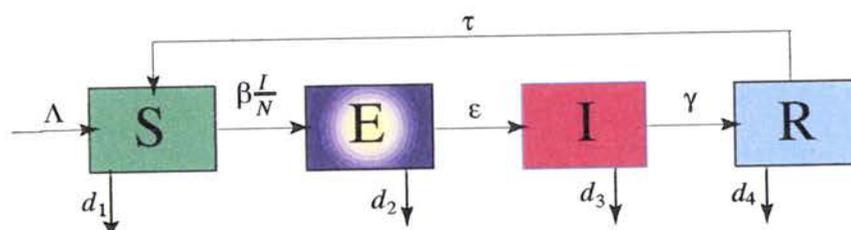


FIG. 5.3 – Représentation du diagramme de flux d'un modèle **SEIRS** simplifié

Nous supposons, comme il peut être lu sur le diagramme de flux du modèle que tout nouvel individu arrivant est totalement naïf et sans aucune prémunition immunitaire relativement à la maladie considérée (On suppose aussi que les immigrants sont naïfs...). On ne fait pas d'hypothèse sur l'accroissement de la population par des naissances. L'intérêt mathématique que nous trouvons à cet exemple vient du fait qu'on a un cas simple où pour le modèle d'états qui en découle, l'ensemble invariant de LaSalle n'est pas confiné au seul point d'équilibre dont nous analysons la stabilité.

Modèle d'états et analyse de la stabilité

Le modèle compartimental sur le système constitué de la population s'écrit aisément en effectuant le bilan de masse suivant le schéma décrit par la figure 5.3. Ce système est donné par les

équations (5.17) qui suivent

$$\begin{cases} \dot{S} &= \Lambda + \tau R - d_1 S - \beta \frac{I}{N} S \\ \dot{E} &= \beta \frac{I}{N} S - (d_2 + \varepsilon) E \\ \dot{I} &= \varepsilon E - (d_3 + \gamma) I \\ \dot{R} &= \gamma I - (d_4 + \tau) R \end{cases} \quad (5.17)$$

On est en présence d'un système bien déterminé.

Pour des raisons de commodité, notons $d = \min_{1 \leq i \leq 4} d_i$; on a $d_i = d + \alpha_i$; l'équation régissant la variation de la **population totale** définie sur \mathbb{R}_+ est

$$\dot{N} = \Lambda - dN - \alpha_1 S - \alpha_2 E - \alpha_3 I - \alpha_4 R$$

Il s'agit de l'équation sur la variable somme des différents composants d'état. Il est clair que l'intervalle $[0, \frac{\Lambda}{d}]$ est globalement attractif pour cette équation différentielle. Il s'agit donc d'un système dissipatif. La conséquence en est que, toutes les trajectoires du système (5.17) sont positivement bornées dans \mathbb{R}_+^4 .

Nous considérons la variable $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) = (S; R; E; I) \in G = \mathbb{R}_+^4$ avec $\mathbf{x}_1 = (S; R)$ et $\mathbf{x}_2 = (E; I)$, dans le but de l'application du théorème 4.1; il vient dans ce cas pour tout $\mathbf{x} \in G$ l'application à valeur matricielle \mathbf{A} est donnée par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -d_1 - \beta \frac{I}{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(d_2 + \tau) & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -(d_2 + \varepsilon) & \beta \frac{S}{N} \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(d_3 + \gamma) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}_1(\mathbf{x}); 0, 0) \quad \text{avec } \mathbf{b}_1 = (\Lambda; 0)$$

Les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont données pour tout $\mathbf{x} \in G$ par :

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -d_1 - \beta \frac{I}{N} & 0 \\ 0 & -(d_2 + \tau) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(d_2 + \varepsilon) & \beta \frac{S}{N} \\ \varepsilon & -(d_3 + \gamma) \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ que nous avons choisie pour tout $\mathbf{x} \in G$ est une matrice de Metzler, ce qui apporte le fait que l'espace des états est positivement invariant pour le système (5.17).

En résumé, nous avons que :

Le système (5.17) est positivement invariant sur G qui est un ensemble non compact; de plus, toutes les trajectoires du système (5.17) dans G sont positivement bornées. Comme on pouvait s'y attendre, pour tout $\mathbf{x} \in G$ la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est réductible, et le piège du système correspond

aux compartiments **E**, et **I**.

Nous nous intéressons maintenant à la stabilité du système au voisinage du point d'équilibre non endémique, le point $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_{10}; 0; 0) = (S_0; R_0; 0; 0)$.

La matrice bloc \mathbf{J}_2 de la matrice Jacobienne du champ de vecteurs du système (5.17) au point d'équilibre correspondant à l'application à valeurs matricielles \mathbf{A}_2 , est donnée par :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(d_2 + \varepsilon) & \beta \\ \varepsilon & -(d_3 + \gamma) \end{pmatrix}$$

réalise le maximum de l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$, pour tout $\mathbf{x} \in G$. En effet, l'application à valeur matricielle qui à tout $\mathbf{x} \in G$ associe

$$\widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta(1 - \frac{S}{N}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de signe positif sur G

La matrice \mathbf{J}_2 est une matrice de Metzler, irréductible. L'hypothèse 6) du théorème 4.1 requiert que $\alpha(\mathbf{J}_2) \leq 0$; ce qui est équivalent au fait que

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\varepsilon\beta}{(d_3 + \gamma)(d_2 + \varepsilon)} \leq 1$$

L'hypothèse 3) est aussi satisfaite. En effet, le sous-système $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1$ est globalement asymptotiquement stable en son équilibre sur \mathbb{R}_+^2 comme système d'équations différentielles affine dont la matrice du système homogène associé est de spectre dans le demi-plan complexe gauche. Toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites dans ce cas. On conclut donc à la globale asymptotique stabilité du système (5.17) au point d'équilibre \mathbf{x}_0 sur G sous la condition $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

□

5.3.3 Un modèle d'une maladie avec hétérogénéité de la population

Le modèle que nous considérons dans cette section est proposé par Castillo-Chavez et Feng [5]. Nous présentons sur la figure 5.4 le diagramme des flux entre compartiments du modèle de l'infection. Nous donnons dans le paragraphe suivant une description des divers arcs d'interconnection des compartiments. L'intérêt de cet exemple réside dans le fait qu'il nous permet de mettre en application la remarque 4.4. En effet, nous allons appliquer le théorème 4.1 deux fois en cascade.

Dans une première décomposition du système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1(x)x_1 + A_{12}(x)x_2 + b_1(x) \\ \dot{x}_2 = A_2(x)x_2 \end{cases}$$

pour appliquer le théorème 4.1 nous avons besoin que le système soit globalement asymptotiquement stable. pour prouver cette stabilité, nous allons encore faire de la réduction et réutiliser le théorème 4.1. On utilise deux fois le théorème 4.1 relativement à un groupement «receveur contrôlé» de compartiment à chaque fois.

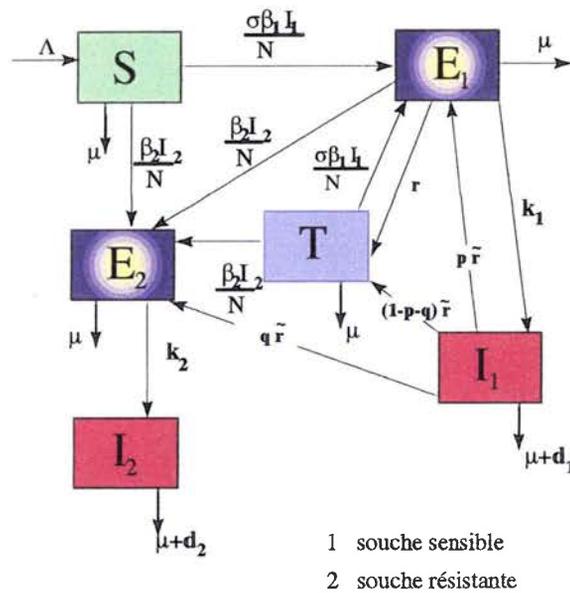


FIG. 5.4 – graphique de modèle compartimental pour une population non homogène

Présentation de la maladie

La maladie concernée dans ce modèle est la tuberculose. On suppose qu'elle présente deux souches différentes : une souche résistante, et une souche sensible. La résistance est relative au traitement de la maladie. Ce qui implique l'existence de deux compartiments distincts d'infectieux I_1 et I_2 , deux compartiments de latents E_1 et E_2 , correspondants à la souche sensible et à la souche résistante respectivement. La contamination par la souche sensible se produit dans les contacts adéquats entre individus du compartiment S des susceptibles ou du compartiment T des traités avec les infectieux du compartiment I_1 . On suppose cependant que l'adéquation du contact est soumise à une probabilité σ . Le taux d'incidence correspondant est alors $\sigma\beta_1\frac{I_1}{N}$, avec N la population totale considérée.

La contamination par la souche résistante se produit dans les contacts adéquats entre individus du compartiment S des susceptibles, du compartiment T des traités ou du compartiments E_1 des latents de la maladie de souche sensible, avec les infectieux du compartiment I_2 . Le taux d'incidence correspondant est alors $\beta_2\frac{I_2}{N}$.

Les transferts d'individus entre compartiments $E_1 \rightarrow I_1$ et $E_2 \rightarrow I_2$ se font suivant les taux

k_1 et k_2 par unité de temps respectivement.

Les coefficients r et \tilde{r} sont utilisés pour désigner le taux par unité de temps de récupération après traitement pour les malades en phase latente et infectieuse de la souche sensible. (i.e. les compartiments concernés sont respectivement E_1 et I_1 et les transferts sont $E_1 \rightarrow T$ et $I_1 \rightarrow T$ respectivement). On fait l'hypothèse qu'en cas d'échec du traitement des individus du compartiment I_1 , deviennent des latents du compartiment E_1 suivant une probabilité p , des latents du compartiment E_2 suivant une probabilité q (mutation de la souche), et guérissent complètement pour la probabilité complémentaire, i.e. $1 - p - q$; d'où les taux directeurs des flux d'échanges $p\tilde{r}$, $q\tilde{r}$ et $(1 - p - q)\tilde{r}$ par unité de temps entre compartiments $I_1 \rightarrow E_1$, $I_1 \rightarrow E_2$ et $I_1 \rightarrow T$ respectivement.

La sortie du système (par décès...) est prise en compte suivant un taux directeur de flux par unité de temps égal μ , auquel on augmente pour les compartiments des infectieux d_i suivant les souches comme sortie liée à la maladie.

Ces considérations restent dans une certaine mesure assez simple, car les entrées dans le système ne sont considérées que par voie d'immigration, ceci suivant un flux de Λ individus par unité de temps (i.e. une entrée en boucle ouverte). Il n'est point fait d'hypothèse sur des entrées en boucle fermée dans le système.

Modèle et analyse de la stabilité

Le modèle compartimental sur le système constitué de la population s'écrit aisément en effectuant le bilan de masse suivant le schéma décrit par la figure 5.4. Du fait du grand nombre de compartiment, le réaménagement suggéré dans le théorème 4.1 donné en page 114 est d'un grand intérêt dans cette situation. Le bloc (E_2, I_2) n'a que des flèches rentrantes et rien ne sort. Un groupement «receveur contrôlé» du système est constitué des compartiments E_2 et I_2 . Nous allons donc écrire le modèle du système d'équations différentielles dans l'ordre des lettres du mot $STE_1I_1E_2I_2$. C'est donné par le système d'équations (5.18) qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{S} &= \Lambda - (\sigma\beta_1\frac{I_1}{N} + \beta_2\frac{I_2}{N} + \mu)S \\ \dot{T} &= rE_1 + (1 - p - q)\tilde{r}I_1 - (\sigma\beta_1\frac{I_1}{N} + \beta_2\frac{I_2}{N} + \mu)T \\ \dot{E}_1 &= \sigma\beta_1\frac{I_1}{N}S + \sigma\beta_1\frac{I_1}{N}T + p\tilde{r}I_1 - (k_1 + r + \mu + \beta_2\frac{I_2}{N})E_1 \\ \dot{I}_1 &= k_1E_1 - (\tilde{r} + \mu + d_1)I_1 \\ \dot{E}_2 &= \beta_2\frac{I_2}{N}(S + E_1 + T) + q\tilde{r}I_1 - (k_2 + \mu)E_2 \\ \dot{I}_2 &= k_2E_2 - (\mu + d_2)I_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

L'équation régissant la variation de la population totale définie sur \mathbb{R}_+ est donnée par :

$$\dot{N} = \Lambda - \mu N - d_1I_1 - d_2I_2 \quad (5.19)$$

Il est clair que l'ensemble $[0, \frac{\Lambda}{\mu}]$ est attractif pour l'équation (5.19) dans \mathbb{R}_+ . Il s'ensuit que toutes les trajectoires du système (5.18) sont relativement compactes dans $G = \mathbb{R}_+^6$ qui est

l'espace de faisabilité biologique du modèle, et bornées dans le futur.

Nous notons $\mathbf{x}_1 = (S; T; E_1; I_1)$, $\mathbf{x}_2 = (E_2; I_2)$ et $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2)$.

Le groupe de compartiments correspondant à la variable \mathbf{x}_2 ne reçoit de la « matière » que si $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. On peut donc «mettre en facteur» \mathbf{x}_2 et écrire la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ du système (5.20) en faisant apparaître un bloc sous-diagonal nul

Si l'on considère la matrice $\mathbf{A}_1(\mathbf{x})$, de la même façon, le bloc de compartiments (E_1, I_1) ne reçoit de la « matière » que si $(E_1, I_1) \neq (0, 0)$.

On va donc pouvoir de nouveau faire apparaître dans \mathbf{A}_1 un bloc sous-diagonal nul.

On peut écrire le système sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (5.20)$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\sigma\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N} + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N} + \mu) & r & (1-p-q)\tilde{r} \\ 0 & 0 & -(k_1 + r + \mu + \beta_2 \frac{I_2}{N}) & \sigma\beta_1 \frac{S+T}{N} + p\tilde{r} \\ 0 & 0 & k_1 & -(\tilde{r} + \mu + d_1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(k_2 + \mu) & \beta_2 \frac{S+E_1+T}{N} \\ k_2 & -(\mu + d_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_1 = (\Lambda; 0; 0; 0)$$

Si \mathbf{J} est la matrice Jacobienne du système (5.18) en l'équilibre non endémique, le bloc \mathbf{J}_2 correspondant à l'application \mathbf{A}_2 est donnée par :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(k_2 + \mu) & \beta_2 \\ k_2 & -(\mu + d_2) \end{pmatrix}$$

Il s'agit bien d'une matrice de Metzler irréductible, qui réalise la majoration des matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in G$. L'hypothèse 6) du théorème 4.1 requiert que $\alpha(\mathbf{J}_2) \leq 0$; ce qui est équivalent au fait que l'inégalité

$$\frac{\beta_2 k_2}{(\mu + k_2)(\mu + d_2)} \leq 1$$

soit satisfaite.

L'hypothèse 3) requiert que le sous-système

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1; 0; 0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1$$

soit globalement asymptotiquement stable en son point d'équilibre correspondant au DFE du système (5.18) relativement à $G_1 = \mathbb{R}_+^4$.

Ceci qui nous amène à considérer l'analyse de la stabilité du système

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{b}} \quad (5.21)$$

défini sur $G_1 = \mathbb{R}_+^4$ avec pour tout $\mathbf{x}_1 \in G_1$ $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1; 0; 0)$

De la même façon que la première étape, le système (5.21) présente un groupement «receveur controlé» est constitué du groupement des deux variables E_1 et I_1 comme on peut le voir sur la matrice $\mathbf{A}_1(\mathbf{x})$ ci-dessus. On constitue les groupements $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (S; T)$, $\tilde{\mathbf{x}}_2 = (E_1; I_1)$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_1; \tilde{\mathbf{x}}_2)$. On procède de manière similaire à l'itération précédente. La matrice

$$\tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) & \tilde{\mathbf{A}}_{12}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -(\sigma\beta_1 \frac{I_1}{N} + \mu) & 0 \\ 0 & -(\sigma\beta_1 \frac{I_1}{N} + \mu) \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -(k_1 + r + \mu) & \sigma\beta_1 \frac{S+T}{N} + p\tilde{r} \\ k_1 & -(\tilde{r} + \mu + d_1) \end{pmatrix}$$

et $\tilde{\mathbf{b}}_1 = (\Lambda; 0)$

Soit $\tilde{\mathbf{J}}_2$ la matrice bloc de la matrice jacobienne du système (5.21) au point d'équilibre $\tilde{\mathbf{x}}_0$ correspondant à l'application $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}})$. Son expression est :

$$\tilde{\mathbf{J}}_2 = \begin{pmatrix} -(k_1 + r + \mu) & \sigma\beta_1 + p\tilde{r} \\ k_1 & -(\tilde{r} + \mu + d_1) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est une matrice de Metzler, irréductible et réalise une majoration des matrices $\tilde{\mathbf{A}}_2(\tilde{\mathbf{x}})$ pour tout $\tilde{\mathbf{x}} \in G_1$.

L'hypothèse 6) du théorème 4.1 requiert que $\alpha(\tilde{\mathbf{J}}_2) \leq 0$ ce qui revient au même que l'inégalité

$$\frac{k_1(\sigma\beta_1 + p\tilde{r})}{(\tilde{r} + \mu + d_1)(k_1 + r + \mu)} \leq 1$$

soit satisfaite.

L'hypothèse 3) du théorème 4.1 requiert que le sous-système

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \tilde{\mathbf{A}}_1(\tilde{\mathbf{x}}_1; \mathbf{0})\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_1$$

admette $\tilde{\mathbf{x}}_{10}$ comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_+^2 .

Ceci nous amène à considérer l'analyse de l'asymptotique stabilité du système

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}} \quad (5.22)$$

défini sur $G_2 = \{\hat{\mathbf{x}} = (S; T) \in \mathbb{R}_+^2\}$ au point d'équilibre $\hat{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_{10}$; ce qui impliquerait donc la

globale asymptotique stabilité du point d'équilibre $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (\tilde{\mathbf{x}}_0; \mathbf{0})$. dans le système (5.22), on a pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in G_2$, $\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{A}}_1(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{0})$, et $\hat{\mathbf{b}} = (\Lambda; \mathbf{0})$.

On a pour tout $\hat{\mathbf{x}} \in G_2$,

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

qui est une matrice globalement asymptotiquement stable. Il vient, la globale et asymptotique stabilité du point $\hat{\mathbf{x}}_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}; 0)$ pour le système (5.22) dans G_2 . Ceci implique la globale asymptotique stabilité du point d'équilibre $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (\hat{\mathbf{x}}_0; 0; 0)$ du système (5.21) dans G_1 . Cette dernière conséquence correspond à la globale asymptotique stabilité du point d'équilibre $\mathbf{x}_0 = (\tilde{\mathbf{x}}_0; 0; 0)$ du système (5.18) pour sa restriction à l'ensemble M . Ce qui est le résultat que nous voulons. D'où la globale asymptotique stabilité du point \mathbf{x}_0 pour le système (5.18) défini dans G , sous les conditions,

$$\frac{k_1(\sigma\beta_1 + p\tilde{r})}{(\tilde{r} + \mu + d_1)(k_1 + r + \mu)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\beta_2 k_2}{(\mu + k_2)(\mu + d_2)} \leq 1,$$

Le point d'équilibre non endémique $\mathbf{x}_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}; 0; 0; 0; 0; 0)$ est globalement asymptotiquement stable pour le système (5.18) définie dans G , sous ces conditions. \square

Conclusion

Par rapport à la littérature citée, nous retrouvons facilement le \mathcal{R}_0 , qui est le maximum des deux quantités. Nous obtenons le résultat plus précis que, si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ alors le DFE est globalement et asymptotiquement stable (Dans [5] le résultat est seulement pour $\mathcal{R}_0 < 1$). La démonstration utilise les techniques de «limiting system» [53, 54] qui permet de prouver l'attractivité; la stabilité étant obtenue par l'étude du Jacobien; ce qui impose $\mathcal{R}_0 < 1$. Notre méthode permet de conclure pour la valeur de bifurcation.

5.4 Un modèle Intra-Hôte du VIH-1

Dans un article sur la modélisation intra-hôte du VIH, Perelson, Kirchner et De Boers [45] donnent une conjecture sur la condition de stabilité globale de l'équilibre sans virus, ni lymphocytes infectés. Le modèle intra-hôte du VIH qu'ils proposent est un modèle avec deux populations d'hôtes, les cellules T $CD4^+$ quantifiées par unité de volume¹ dans laquelle on a trois compartiments homogènes qu'on peut désigner dans le langage classique de l'épidémiologie par un SEI et une population de virus, qui dans ce cas est une population de vecteur transmettant la maladie.

Nous prouvons la conjecture énoncée dans [45].

Le modèle d'interaction du VIH avec les cellules T $CD4^+$ est donné par le système d'équations suivant :

¹l'unité de volume ici est le mm^3

$$\begin{cases} \dot{T} &= s - \mu_T T + r T \left(1 - \frac{T_{tot}}{T_{max}}\right) - k_1 V T \\ \dot{T}_e &= k_1 V T - \mu_T T_e - k_2 T_e \\ \dot{T}_i &= k_2 T_e - \mu_b T_i \\ \dot{V} &= N \mu_b T_i - k_1 V T - \mu_V V \end{cases} \quad (5.23)$$

Dans ce modèle, T représente le nombre de cellules $T CD4^+$ par unité de volume non infecté par le virus, T_e et T_i représentent respectivement le nombre de cellules latentes et le nombre de cellules activement infectées (i.e. les cellules qui produisent de nouveaux virus dans le sang), les deux par unité de volume. Le nombre de virus libres dans le sang par unité de volume est représenté par V . La population totale des cellules $T CD4^+$ par unité de volume est : $T_{tot} = T + T_e + T_i$. Ce nombre N est la quantité de virus qui sont produits par unité de temps par une cellule T infectée.

Les restrictions

$$0 < s < \mu_T T_{max} \quad ; \quad \mu_T < \mu_b$$

sont imposées sur les paramètres μ_T et μ_b pour garantir que le modèle garde une dynamique de population réaliste des cellules T . La première condition garantit que le nombre total de cellules T reste bornée; en d'autres termes, en l'absence des virus, l'intervalle $(0, T_{max})$ pour l'équation donnée par :

$$\dot{T} = s - \mu_T T + r T \left(1 - \frac{T}{T_{max}}\right),$$

est positivement invariant avec un unique point d'équilibre T_0 satisfaisant $0 < T_0 < T_{max}$.

On peut écrire la dynamique des cellules $T CD4^+$ en l'absence des virus par :

$$s - \mu_T T + r T \left(1 - \frac{T}{T_{max}}\right) = -(T - T_0) \left(T + \frac{sr}{T_{max} T_0}\right)$$

La deuxième condition dit que la mort causée par la cytopathicité virale arrive en moyenne plus vite que la mort naturelle.

Dans [45], les auteurs supposant que $N < 1 + \mu_T/k_2$, prouvent que la fonction

$$L : \mathbf{x} = (T; T_e; T_i; V) \mapsto L(\mathbf{x}) = T_e + N T_i + V$$

est une fonction de LaSalle du système. Comme nous l'avons déjà dit, ceci n'est pas suffisant pour prouver que le point d'équilibre est globalement attractif. Une condition de dissipativité (i.e. l'existence d'un ensemble globalement attractif, [51]) est nécessaire. Dans le papier cité, il est supposé que le point d'équilibre non endémique est localement asymptotiquement stable. Nous sommes en mesure d'établir avec notre résultat, que l'état d'équilibre non endémique est globalement asymptotiquement stable, si $N \leq 1 + \mu_T/k_2$.

Dans ce même papier, les auteurs calculent sans l'exprimer ainsi un seuil \mathcal{R}_0 . Ils donnent une valeurs critique N_{crit} , et \mathcal{R}_0 peut alors s'exprimer $\mathcal{R}_0 = \frac{N}{N_{crit}}$. Ils conjecturent que si $N < N_{crit}$ alors le DFE est globalement asymptotiquement stable. Comme $N_{crit} = (1 + \frac{\mu_v}{k_1 T_0})(1 + \frac{\mu_T}{k_2})$, on a évidemment $1 + \frac{\mu_T}{k_2} < N_{crit}$.

Nous allons prouver que si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors le DFE est globalement asymptotiquement stable, ce qui constitue la conjecture de [45], et réglant aussi le point de bifurcation. Nous allons voir que le théorème 4.1 permet seulement d'obtenir une condition nécessaire plus forte que $\mathcal{R}_0 \leq 1$, et moins forte que $N < 1 + \frac{\mu_T}{k_2}$. Pour prouver la conjecture, il va falloir adapter la démonstration du théorème 4.1. Nous allons d'abord étudier le système sur un ensemble positivement invariant plus petit.

Lorsqu'on écrit l'équation de la population totale de lymphocytes T_{tot} , on a

$$\dot{T}_{tot} = s - \mu_T T_{tot} - (\mu_b - \mu_T) T_i + rT(1 - \frac{T_{tot}}{T_{max}}) \quad (5.24)$$

Comme $\mu_b \geq \mu_T$, et $T \leq T_{tot}$, le membre de droite de (5.24) est majoré par

$$s - \mu_T T_{tot} + rT(1 - \frac{T_{tot}}{T_{max}}) = -(T_{tot} - T)(T_{tot} + \frac{sr}{T_{max}T_0})$$

ce qui prouve que pour (5.24) l'intervalle $[0, T_0]$ est positivement invariant.

Si on se restreint à $T + T_e + T_i \leq T_0$, alors on a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= N\mu_b T_i - k_1 VT - \mu_V V \\ &\leq N\mu_b T_0 - \mu_V V \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ce qui prouve que (5.25) laisse invariant l'intervalle $[0, \frac{N\mu_b T_0}{\mu_V}]$

Nous venons ainsi de prouver que l'ensemble

$$\Omega = \{(T; T_e; T_i; V) \in G / T_{tot} \leq T_0, V \leq \frac{N\mu_b T_0}{\mu_V}\}$$

est positivement invariant et attractif pour le système (5.23)

Nous commençons par écrire le système (5.23) sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

défini sur Ω , avec $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ sous la forme pseudo triangulaire, où les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont définies par :

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = -\mu_T - k_1 V \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\mu_T - k_2 & 0 & k_1 T \\ k_2 & -\mu_b & 0 \\ 0 & N\mu_b & -k_1 T - \mu_V \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\mathbf{b} = \left(s + rT \left(1 - \frac{T_{tot}}{T_{max}} \right); 0; 0; 0 \right)$

La matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler irréductible. Le bloc \mathbf{J}_2 de la matrice Jacobienne du champ de vecteurs du système (5.23) au point d'équilibre $\mathbf{x}_0 = (T_0; 0; 0; 0)$ est donné par :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -\mu_T - k_2 & 0 & k_1 T_0 \\ k_2 & -\mu_b & 0 \\ 0 & N\mu_b & -k_1 T_0 - \mu_V \end{pmatrix}$$

On remarque qu'à cause du terme sur la diagonal (3, 3), $-k_1 T_0 - \mu_V$, \mathbf{J}_2 ne peut pas majorer la matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$. Si l'on veut majorer l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ pour les $\mathbf{x} \in \Omega$, on aura

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} -\mu_T - k_2 & 0 & k_1 T_0 \\ k_2 & -\mu_b & 0 \\ 0 & N\mu_b & -\mu_V \end{pmatrix}$$

Cela nous donnera une valeur seuil pour la stabilité globale de DFE, par application du théorème 4.1. En utilisant la technique de la proposition 4.1, pour les matrices de Metzler, cette valeur s'obtient facilement en exprimant que la matrice

$$(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -\mu_b & \frac{k_1 k_2 T_0}{\mu_T + k_2} \\ N\mu_b & -\mu_V \end{pmatrix}$$

est Metzler stable : i.e.

$$\mathcal{R}_c = \frac{k_1 k_2 N T_0}{(\mu_T + k_2) \mu_V} \leq 1$$

on remarque $\bar{\mathbf{A}}_2$ est un majorant et non un maximum.

Si on cherche à exprimer que \mathbf{J}_2 est une matrice de Metzler stable, on trouve de la même façon

$$\mathcal{R}_0 = \frac{k_1 k_2 N T_0}{(\mu_T + k_2)(k_1 T_0 + \mu_V)} \leq 1$$

On a évidemment $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_c$.

La démonstration du théorème 4.1, en majorant $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ permet de trouver une fonction de LaSalle. Ici, le fait que $k_1 T$ et $-k_1 T$ apparaissent dans la troisième colonne de la matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ permet de conserver cette fonction de LaSalle et de démontrer directement le résultat.

Soit la fonction de LaSalle associée au vecteur $\mathbf{u} = (k_1 T_0 + \mu_V; k_1 T_0 N; k_1 T_0) \in \mathbb{R}_+^3$ i.e.

$$L : \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^4 \mapsto L(\mathbf{x}) = (k_1 T_0 + \mu_V) k_1 T_0 T_e + N T_i + k_1 T_0 V$$

Il s'agit bien d'une fonction C^∞ sur \mathbb{R}_+^4 ; sa dérivée sur \mathbb{R}_+^4 est donnée par :

$$\dot{L}(\mathbf{x}) = (k_1 k_2 N T_0 - (k_1 T_0 + \mu_V)(k_2 + \mu_T)) T_e - k_1 \mu_V (T_0 - T) V$$

Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$ et $T \leq T_0$, on a $\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0$

Considérons $E = \{\mathbf{x} \in \Omega / \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$; on a $E = \{\mathbf{x} = (T; T_e; T_i; V) \in \Omega / T = T_0 \vee V = 0\}$

Soit M le plus grand ensemble invariant pour le système (5.23) contenu dans E ; pour tout $\mathbf{x} \in M$, on a $V = 0$ ce qui entraîne $T_i = T_e = 0$; $T = T_0$ correspond au DFE. Ceci prouve bien que

$$M \subset \{(T; 0; 0; 0) \in \Omega / \dot{T} = s - \mu_T T + rT(1 - \frac{T}{T_{max}})\}$$

L'équation

$$\dot{T} = s - \mu_T T + rT(1 - \frac{T}{T_{max}})$$

pour les conditions retenues dans le problème admet T_0 comme point d'équilibre globalement et asymptotiquement stable. Il s'ensuit donc que le système (5.23) restreint à M admet $\mathbf{x}_0 = (T_0; 0; 0; 0)$ comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. On a ainsi par le principe de réduction démontré la stabilité globale du DFE sur Ω .

Maintenant, s'il n'y a pas de virus, alors T_0 est globalement asymptotiquement stable (loi logistique); s'il y a des virus, alors toutes les trajectoires finissent par rentrer dans Ω , à cause des équations (5.24) et (5.25). Ceci établit que le DFE sous la condition $\mathcal{R}_0 \leq 1$ est globalement asymptotiquement stable dans G . □

5.5 Un modèle de la Tuberculose avec réinfection

Dans cet exemple nous considérons le modèle de la tuberculose avec réinfection exogène de la population déjà considéré dans la littérature dans [10] :

Le diagramme de flux de matière entre les compartiments du modèle est représenté sur la figure 5.5.

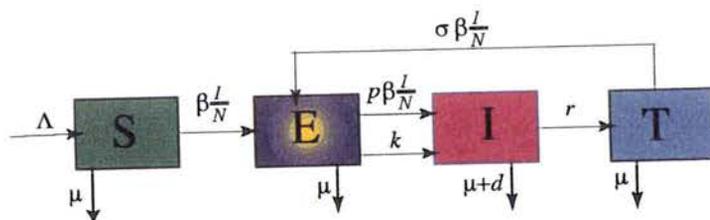


FIG. 5.5 – graphique des flux entre les compartiments du modèle

Le coefficient β est le taux directeur correspondant à toute infection, ou réinfection. Ce taux, dans le cas d'une réinfection des individus traités (i.e. du compartiment T) est soumis à une probabilité σ , si on suppose que ces individus sont moins disposés à l'infection du fait d'avoir acquis une

certaine immunité d'avoir été malades. La réinfection exogène correspond à une infection possible des individus du compartiment **E** (qui est une deuxième infection avant que la maladie ne soit déclarée). Un coefficient $p \in \mathbb{R}_+$ permet alors de distinguer le degré de cette deuxième infection. Les divers autres taux directeurs s'expliquent simplement à partir du diagramme de flux entre compartiment ci-dessus. Le modèle de système d'équations différentielles correspondants est le suivant

$$\begin{cases} \dot{S} &= \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \dot{T} &= rI - \sigma \beta T \frac{I}{N} - \mu T \\ \dot{E} &= \beta \frac{I}{N} (S + \sigma T - pE) - (\mu + k)E \\ \dot{I} &= p\beta E \frac{I}{N} + kE - (\mu + r + d)I \end{cases} \quad (5.26)$$

\mathbb{R}_+ est donnée par :

$$N = S + T + E + I$$

Nous réécrivons donc le système sous la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (5.27)$$

avec pour tout $\mathbf{x} = (S; T; E; I) \in G = \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\beta \frac{I}{N} + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma \beta \frac{I}{N} + \mu) & 0 & r \\ 0 & 0 & -(p\beta \frac{I}{N} + \mu + k) & \beta \frac{S + \sigma T}{N} \\ 0 & 0 & (p\beta \frac{I}{N} + k) & -(\mu + r + d) \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1; 0; 0)$, $\mathbf{b}_1 = (\Lambda; 0)$; Les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 , dans ce cas sont définies pour tout $\mathbf{x} \in G$ par :

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\beta \frac{I}{N} + \mu) & 0 \\ 0 & -(\sigma \beta \frac{I}{N} + \mu) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(p\beta \frac{I}{N} + \mu + k) & \beta \frac{S + \sigma T}{N} \\ (p\beta \frac{I}{N} + k) & -(\mu + r + d) \end{pmatrix}$$

Nous nous intéressons au point d'équilibre non endémique, le point $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_{10}; 0; 0)$, $\mathbf{x}_{10} = (\frac{\Lambda}{\mu}; 0)$. La matrice Jacobienne du système (5.27) en l'équilibre \mathbf{x}_0 est donnée par :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & r \\ 0 & 0 & -(\mu + k) & \beta \\ 0 & 0 & k & -(\mu + r + d) \end{pmatrix}$$

Cette matrice qui est une matrice de Metzler admet trois valeurs propres strictement négative si et seulement si $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta k}{(\mu + r + d)(\mu + k)} < 1$.

Il s'ensuit que le point d'équilibre \mathbf{x}_0 est localement asymptotiquement stable pour le système (5.27) sous la condition $\mathcal{R}_0 < 1$

Nous nous intéressons maintenant à l'application du principe de réduction, le corollaire A.1 pour l'analyse de la stabilité du point d'équilibre \mathbf{x}_0 . Nous établissons à cet effet que les diverses hypothèses du corollaire A.1 sont satisfaites dans certaines conditions que nous allons spécifier.

Le champ de vecteurs du système (5.27) s'écrit comme somme de champ de vecteurs positivement invariant sur G ; pour tout $\mathbf{x} \in G$ la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler, et donc d'après le théorème 3.3, tout système d'équations différentielles de champ de vecteurs donné par l'application

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

avec $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ matrice de Metzler pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ est positivement invariant dans \mathbb{R}_+^n ; le vecteur \mathbf{b} est positif. Il s'ensuit donc que le système (5.27) est positivement invariant sur G .

La dynamique de la population totale dans le modèle est donnée par :

$$\dot{N} = \Lambda - \mu N - dI \quad (5.28)$$

toute trajectoire solution de l'équation différentielle (5.28) dans \mathbb{R}_+ entre dans l'intervalle compact $[0; \frac{\Lambda}{\mu}]$. Il s'ensuit que toute trajectoire solution de l'équation différentielle (5.27) est relativement compacte sur \mathbb{R}_+^4 .

Considérons La matrice bloc \mathbf{J}_2 de la matrice Jacobienne du système (5.27) en l'équilibre, correspondant à l'application \mathbf{A}_2 ; on a :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(\mu + k) & \beta \\ k & -(\mu + r + d) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de Metzler irréductible, stable si et seulement si $\alpha(\mathbf{J}_2) \leq 0$; en d'autres termes, si et seulement si $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta k}{(\mu + r + d)(\mu + k)} \leq 1$.

Considérons l'application définie pour tout $\mathbf{x} \in G$ par $\hat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x})$; on a pour tout $\mathbf{x} \in G$,

$$\hat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p\beta \frac{I}{N} & \beta(1 - \frac{S + \sigma T}{N}) \\ -p\beta \frac{I}{N} & 0 \end{pmatrix}$$

L'application $\hat{\mathbf{A}}_2$ n'est pas de signe constant. Cependant, on a néanmoins que : la fonction

$$L : \mathbf{x} \in G \mapsto L(\mathbf{x}) = \langle (0; 0; \mathbf{u}), \mathbf{x} \rangle = kE + (\mu + k)I$$

est de classe \mathcal{C}^∞ , positive sur G , et sa dérivée sur G est définie pour tout $\mathbf{x} \in G$ par :

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{J}_2^T \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle - \langle \widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x})^T \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle \\ &= \left(\frac{S + \sigma T}{N} k\beta + p\mu\beta \frac{E}{N} - (k + \mu)(\mu + r + d) \right) I \\ &= \left(\left(\frac{S}{N} + \sigma \frac{T}{N} + \frac{p\mu}{k} \frac{E}{N} \right) k\beta - (k + \mu)(\mu + r + d) \right) I \\ &\leq \left((k + p\mu)\beta - (k + \mu)(\mu + r + d) \right) I \end{aligned}$$

L est donc une fonction de LaSalle pour le système (5.27) sur G à condition que l'inégalité

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\beta(p\mu + k)}{(\mu + r + d)(\mu + k)} \leq 1 \tag{5.29}$$

soit satisfaite

Soit $E = \{\mathbf{x} \in G \mid \dot{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$; Il va de soi que $E \subset \{(\mathbf{x}_1; 0; 0) \in G\}$. Soit M Le plus grand ensemble invariant pour le système (5.27) contenu dans E ; on a

$M \subset \{(\mathbf{x}_1; 0; 0) \in G \mid \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1; \mathbf{0})\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1\}$. Nous devons établir que la restriction du système (5.27) à l'ensemble M est globalement asymptotiquement stable en \mathbf{x}_0 . Il revient au même d'établir que le système

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1 \tag{5.30}$$

avec $\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1; \mathbf{0})$ est globalement asymptotiquement stable au point d'équilibre \mathbf{x}_{10} . Ceci a déjà été fait dans le cadre de l'exemple de la tuberculose avec deux souches voir page 137

Nous avons donc que sous la condition que $\mathcal{R}_1 \leq 1$ toutes les hypothèses du corollaire A.1 satisfaites; ce qui nous permet de conclure à la globale asymptotique stabilité du système (5.27) au point \mathbf{x}_0 dans G . Il s'agit d'un condition qui n'est pas optimale.

Maintenant, en appliquant le théorème 4.1, nous arrivons a dériver une autre condition différente de celle donnée par (5.29) sur les coefficients du modèles d'état du systèmes.

En considérant la matrice $\tilde{\mathbf{J}}_2$ suivante

$$\tilde{\mathbf{J}}_2 = \begin{pmatrix} -(\mu + k) & \beta \\ p\beta + k & -(\mu + r + d) \end{pmatrix}$$

qui est une matrice de Metzler, irréductible qui est un majorant de l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ pour les $\mathbf{x} \in G$; en effet l'application $\tilde{\mathbf{A}}_2$ définie pour tout $\mathbf{x} \in G$ par

$$\tilde{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{J}}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p\beta \frac{I}{N} & \beta \left(1 - \frac{S + \sigma T}{N} \right) \\ p\beta \left(1 - \frac{I}{N} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

est positive sur G . Il s'agit donc d'une matrice de l'hypothèse 5) du théorème 4.1 pour le système (5.27).

L'Hypothèse 6) requiert que $\alpha(\tilde{\mathbf{J}}_2) \leq 0$; ce qui est équivalent à l'inégalité :

$$\mathcal{R}_{max} = \frac{\beta(p\beta + k)}{(\mu + r + d)(\mu + k)} \leq 1 \quad (5.31)$$

Les diverses autres hypothèses sont vérifiées pour le système comme il ressort de l'application du corollaire A.1 ci-dessus. On conclut donc à la globale asymptotique stabilité de l'équilibre \mathbf{x}_0 sous la condition donnée par l'inégalité (5.31) sur G . \square

Discussion : Nous avons donné deux conditions nécessaires de globale asymptotique stabilité du DFE, avec $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_{max}$. L'exemple étudié est particulier. Castillo-Chavez Feng et Capuro dans [10] ont prouvé que pour $\mathcal{R}_0 < 1$, il peut y avoir deux équilibres endémiques faisables pour $\mathcal{R}_c < \mathcal{R}_0 < 1$ (où \mathcal{R}_c est une constante déterminée). Le DFE est seulement localement asymptotiquement stable, pour $\mathcal{R}_c < \mathcal{R}_0 \leq 1$.

5.6 Les modèles à multicompartiments

Dans cette section, nous présentons les applications du théorème 4.1 à des cas de maladies qui se caractérisent par une certaine hétérogénéité dans les diverses classes de la modélisation compartimentale classique. Il s'agit des modèles $(\mathbf{SIS})_n$ et des modèles $(\mathbf{SEIRS})_n$; c'est à dire, les modèles de maladies relatives à une population, constituée de n sous populations distinctes; une sous population d'indice i (par exemple) constituée \mathbf{N}_i individus présente une division en compartiment \mathbf{S}_i et \mathbf{I}_i (respectivement \mathbf{S}_i , \mathbf{E}_i , \mathbf{I}_i et \mathbf{R}_i). Les sous populations sont en contact croisés; en d'autres termes on considère que les individus susceptibles d'un compartiment \mathbf{S}_i dans de contacts adéquats avec des individus infectieux de de n'importe quelle sous population, font des infectés de la sous population dont ils sont membres. Il s'agit des exemples de la littérature existante, [23] pour le modèle $(\mathbf{SIS})_n$ où les auteurs s'intéressent à la blénnoragie, et [17] pour le modèle $(\mathbf{SEIRS})_n$. Dans ce dernier article, les auteurs s'intéressent un modèle $(\mathbf{SIRS})_n$ où ils donnent une analyse de la condition d'existence du point d'équilibre endémique, et l'analyse de la stabilité de ce point d'équilibre. Dans notre cas, nous étendons leur modèle en incluant les compartiments des latents, les \mathbf{E}_i ; nous analysons la stabilité du point d'équilibre non endémique, comme conséquence de nos résultats, et nous faisons une ouverture sur l'existence du point d'équilibre non endémique en nous appuyant sur les résultats de [17].

5.6.1 Un modèle $(\mathbf{SEIRS})_n$

Le modèle que nous considérons dans cet exemple correspond au diagramme des flux de la figure 5.6

Pour des raisons de simplicité, nous considérons que les recrutements et les sorties des compartiments du modèle sont telles que la population considérée reste constante. Comme il est de

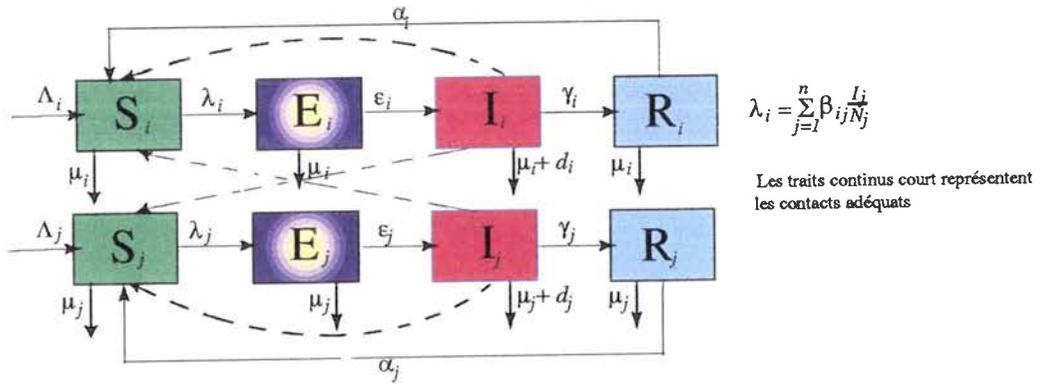


FIG. 5.6 – graphique des flux entre les compartiments du modèle

coutume dans de telles situations, on considère le modèle sur les proportions des populations dans divers compartiments. Dans le cas présent, les proportions sont à considérer relativement aux sous populations. en d'autres termes, si W_i est un compartiment correspondant à la sous population N_i le compartiment de proportion correspondant est noté $w_i = \frac{W_i}{N_i}$.

Le modèle de système d'équations différentielles décrivant la dynamique dans le système sur les proportions est donné par :

$$\begin{cases} \dot{s}_j = - \left(\sum_{k=1}^n \beta_{jk} i_k s_k \right) - \mu_j s_j + \alpha_j r_j + \mu_j \\ \dot{r}_j = \gamma_j i_j - (\alpha_j + \mu_j) r_j \\ \dot{e}_j = \left(\sum_{k=1}^n \beta_{jk} i_k \right) s_j - (\varepsilon_j + \mu_j) e_j \\ \dot{i}_j = \varepsilon_j e_j - (\gamma_j + \mu_j) i_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n \quad (5.32)$$

$$s_j + r_j + e_j + i_j = 1 \quad 1 \leq j \leq n$$

le domaine de faisabilité biologique est le simplexe de \mathbb{R}^{4n}

$G = \{(\mathbf{s}; \mathbf{r}; \mathbf{e}; \mathbf{i}) \in \mathbb{R}_+^{4n} / s_j + r_j + e_j + i_j = 1 \quad 1 \leq j \leq n\}$ avec $\mathbf{s} = (s_j)$, $\mathbf{r} = (r_j)$, $\mathbf{e} = (e_j)$, et $\mathbf{i} = (i_j)$ les vecteurs de \mathbb{R}^n dont les composants sont les variables du système organisées suivant les classes d'appartenance. Le point d'équilibre auquel nous nous intéressons, le point d'équilibre non endémique est le point $(\mathbf{1}; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0})$ avec $\mathbf{1} = (1; 1; \dots; 1)$ et $\mathbf{0} = (0; 0; \dots; 0)$ dans \mathbb{R}^n

Du fait qu'il s'agisse d'un système surdéterminé, nous considérons le système de $3n$ équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{r}_j = \gamma_j i_j - (\alpha_j + \mu_j) r_j \\ \dot{e}_j = \left(\sum_{k=1}^n \beta_{jk} i_k \right) s_j - (\varepsilon_j + \mu_j) e_j \\ \dot{i}_j = \varepsilon_j e_j - (\gamma_j + \mu_j) i_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n \quad (5.33)$$

définie sur le simplexe de \mathbb{R}^{3n}

$$\Omega = \{ \mathbf{x} = (\mathbf{r}; \mathbf{e}; \mathbf{i}) \in \mathbb{R}_+^{3n} \mid r_j + e_j + i_j \leq 1, \quad 1 \leq j \leq n \};$$

le point d'équilibre du système (5.33) correspondant au point d'équilibre du système (5.32) donné ci-dessus est l'origine de \mathbb{R}^{3n} .

Soient $\mathbf{B} = (\beta_{jk})$, $\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_j)$, $\mathbf{E} = \text{diag}(\varepsilon_j)$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\alpha_j)$ et $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_j)$ les matrices des coefficients du système (5.33).

Le système (5.33) à l'aide de ces notations prend la forme abrégée :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = -(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M})\mathbf{r} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{e}} = -(\mathbf{E} + \mathbf{M})\mathbf{e} + \text{diag}(\mathbf{s})\mathbf{B}\mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{i}} = -(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{M})\mathbf{i} + \mathbf{E}\mathbf{e} \end{cases} \quad (5.34)$$

La forme réquise par le théorème 4.1 s'en suit facilement, car nous l'avons déjà préparé dans la présentation du système ci-dessus. La trappe du système est constituée des variables $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{e}; \mathbf{i})$; on a donc $\mathbf{x} = (\mathbf{r}; \mathbf{x}_2)$. Le domaine de faisabilité du système (5.34) est le simplexe Ω de \mathbb{R}^{3n} .

Sur Ω , on a :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5.35)$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M}) & 0 & \mathbf{\Gamma} \\ 0 & -(\mathbf{E} + \mathbf{M}) & \text{diag}(\mathbf{s})\mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{E} & -(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{M}) \end{pmatrix}$$

Nous établissons à présent que les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites par le système (5.35) en l'équilibre qui nous intéresse, à savoir l'origine de \mathbb{R}^{3n} .

Le système (5.35) est positivement invariant sur Ω ; en effet, l'application \mathbf{A} dans le champ de vecteurs du système (5.35) a des valeurs qui sont des matrices de Metzler en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$; La face $\mathcal{F}_{sup} = \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid r_j + e_j + i_j = 1 \quad 1 \leq j \leq n \}$ repousse toute trajectoire du système (5.35) commençant en un point intérieur à Ω à l'intérieur de Ω ; en effet, la valeur du champ de vecteurs du système (5.35) en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{sup}$ relativement aux normales sortantes de chacune des faces $\{ (r_j; e_j; i) \mid r_j + e_j + i_j = 1 \}$ valent respectivement $-(\alpha_j r_i + \mu_j)$, qui sont

négatives. Ceci nous permet d'établir que le domaine Ω du système est positivement invariant, et puisqu'il s'agit d'un compact, toute trajectoire du système dont la source est dans Ω est relativement compacte.

Les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont données pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = -(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mathbf{E} + \mathbf{M}) & \text{diag}(s)\mathbf{B} \\ \mathbf{E} & -(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{M}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

La matrice $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler irréductible.

Soit \mathbf{J}_2 la matrice bloc de la matrice Jacobienne du système (5.35) en l'origine, correspondant à l'application \mathbf{A}_2 ; on a

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(\mathbf{E} + \mathbf{M}) & \mathbf{B} \\ \mathbf{E} & -(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{M}) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est un majorant de l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$; en effet, soit $\widehat{\mathbf{A}}_2$ l'application définie pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \text{diag}(1-s)\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

l'application $\widehat{\mathbf{A}}_2$ est positive sur Ω . Il s'agit donc d'une matrice candidate pour l'hypothèse 5) du théorème 4.1

L'hypothèse 6) du théorème 4.1 requiert que $\alpha(\mathbf{J}_2) \leq 0$ ce qui est équivalent (cf théorème 3.5) à l'inégalité

$$\rho(\mathbf{B}(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{M})^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{E} + \mathbf{M})^{-1}) \leq 1 \quad (5.36)$$

L'hypothèse 3) requiert que le sous-système

$$\dot{\mathbf{r}} = -(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{M})\mathbf{r} \quad (5.37)$$

défini sur le simplexe de \mathbb{R}^n $\Omega_1 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n \mid r_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ admette l'origine de \mathbb{R}^n pour point d'équilibre globalement asymptotiquement stable

Il est évident que ce système qui est un système linéaire homogène découplé est globalement et asymptotiquement stable à l'origine de \mathbb{R}^n dans Ω_1 .

Nous avons ainsi réuni toutes les hypothèses du théorème 4.1; on conclut donc que sous la condition de l'inégalité (5.36), le système (5.32) est globalement asymptotiquement au point $(\mathbf{1}; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0})$ dans G \square

5.6.2 Un modèle (SIS)_n

Le modèle que nous considérons dans cet exemple correspond au diagramme des flux de la figure 5.7.

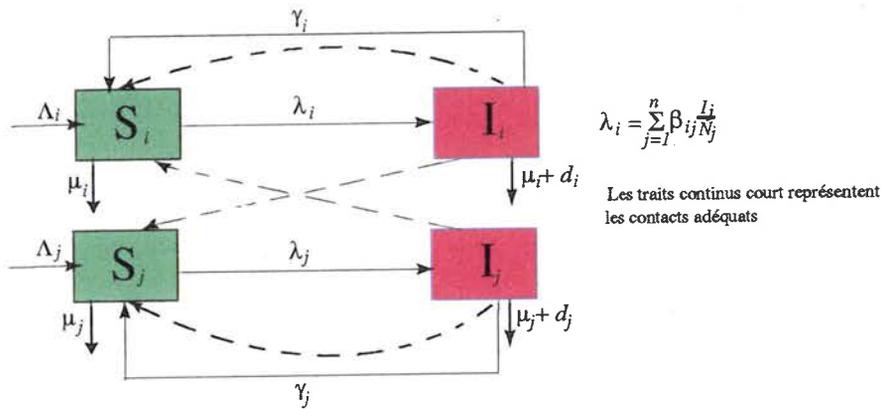


FIG. 5.7 – graphique des flux entre les compartiments du modèle

Les hypothèses sur la démographie des groupes de population dans le modèle sont les mêmes que pour le modèle $(SEIRS)_n$ de la section précédente ; c'est à dire, les sorties et les recrutements dans les divers compartiments du modèle sont tel que les groupes N_i pour tout $i, 1 \leq i \leq n$ restent invariant. Les recrutements instantanés dans chaque groupe se font par le compartiment S_i par des naissances et valent $\mu_i N_i$. A nouveau, on considère le modèle sur les proportions des populations dans divers compartiments. Dans le cas présent, les proportions sont à considérer relativement aux sous populations.

Le modèle de système d'équations différentielles décrivant la dynamique dans le système sur les proportions est donné par :

$$\begin{cases} \dot{s}_j = - \left(\sum_{k=1}^n \beta_{jk} i_k \right) s_j - \mu_j s_j + \gamma_j i_j + \mu_j \\ \dot{i}_j = -(\gamma_j + \mu_j) i_j + \left(\sum_{k=1}^n \beta_{jk} i_k \right) s_k \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n \quad (5.38)$$

$$s_j + i_j = 1 \quad 1 \leq j \leq n$$

le domaine de faisabilité biologique est le simplexe de \mathbb{R}^{2n}

$G = \{(\mathbf{s}; \mathbf{i}) \in \mathbb{R}_+^{2n} / s_j + i_j = 1 \quad 1 \leq j \leq n\}$ avec $\mathbf{s} = (s_j)$, et $\mathbf{i} = (i_j)$ les vecteurs de \mathbb{R}^n dont les composants sont les variables du système organisés suivant les classes d'appartenance. Le point d'équilibre auquel nous nous intéressons, le point d'équilibre non endémique est le point $(\mathbf{1}; \mathbf{0})$

Du fait qu'il s'agit d'un système surdéterminé, nous considérons le système de n équations

différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_j = -(\gamma_j + \mu_j)x_j + \left(\sum_{k=1}^n \beta_{jk}x_k \right) (1 - x_j) \\ 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (5.39)$$

définie sur le simplexe de \mathbb{R}^n $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid x_j \leq 1, \quad 1 \leq j \leq n\}$; le point d'équilibre correspondant au point d'équilibre du système (5.38) donné ci-dessus est l'origine de \mathbb{R}^n .

Soient $\mathbf{B} = (\beta_{jk})$, et $\mathbf{D} = \text{diag}(\gamma_j + \mu_j)$ les matrices des coefficients du système (5.39).

Le système (5.39) à l'aide de ces notations prend la forme compacte :

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D}\mathbf{x} + \text{diag}(\mathbf{1} - \mathbf{x})\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (5.40)$$

La forme requise par le théorème 4.1 s'ensuit facilement; sous l'hypothèse que la matrice \mathbf{B} est irréductible; ceci prend tout son sens, car il s'agit de la matrice représentant le contact entre les individus du modèle sur lesquels on fait l'hypothèse qu'ils sont en contact les uns avec les autres.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5.41)$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D} + \text{diag}(\mathbf{1} - \mathbf{x})\mathbf{B}$$

Nous établissons à présent que les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites par le système (5.41) en l'équilibre qui nous intéresse, à savoir l'origine de \mathbb{R}^n .

Le système (5.41) est positivement invariant sur Ω ; en effet, l'application \mathbf{A} dans le champ de vecteurs du système (5.41) est une matrice de Metzler en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$;

La face $\mathcal{F}_{sup} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_i = 1, \quad x_j \leq 1 \quad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ repousse toute trajectoire du système (5.41) commençant en un point intérieur à Ω à l'intérieur de Ω ; en effet, la valeur du champ de vecteurs du système (5.41) en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{sup}$ relativement à la normale sortante sur la face $\{x_i = 1 \text{ et } x_j \leq 1\}$ pour $j \neq i$ est $-(\gamma_i + \mu_i)$ qui est négatif. pour tout i . Ceci établit que le domaine Ω est positivement invariant, et puisqu'il s'agit d'un compact, toute trajectoire du système (5.41) originaire d'un point intérieur à Ω est relativement compacte.

Soit \mathbf{J} la matrice Jacobienne du système (5.41) en l'équilibre qui nous intéresse; on a

$$\mathbf{J} = \mathbf{B} - \mathbf{D}$$

Cette matrice est un majorant de l'ensemble des matrices $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$; en effet, soit $\widehat{\mathbf{A}}$ l'application définie pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{J} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{diag}(\mathbf{x})\mathbf{B}$$

l'application $\widehat{\mathbf{A}}$ est positive sur Ω .

L'hypothèse 6) du théorème 4.1 requiert que le module de stabilité de la matrice \mathbf{J} , $\alpha(\mathbf{J}) \leq 0$; ce qui est équivalent à l'inégalité

$$\rho(\mathbf{BD}^{-1}) \leq 1 \quad (5.42)$$

Nous aurons ainsi toutes les hypothèses du théorème 4.1. On conclut à la globale asymptotique stabilité de l'origine de \mathbb{R}^n pour le système (5.41) dans Ω sous la condition exprimée par l'inégalité (5.42). Ce qui entraîne par la même la globale asymptotique stabilité du DFE $(\mathbf{1}; \mathbf{0})$ pour le système (5.38) dans G . On retrouve le résultat de Lajmanovitch et Yorke [23] \square

5.7 Un modèle de la Diarrhée virale bovine

Pour montrer la facilité d'application de nos résultats, nous traitons un exemple de la littérature vétérinaire. La dimension est sept. Après regroupement des compartiments suivant le principe «receveur contrôlé», on obtient une matrice de Metzler en dimension quatre. L'application directe des critères de Routh–Hurwitz sera difficile.

Nous concluons encore une fois à la stabilité globale quand $\mathcal{R}_0 \leq 1$. Dans l'article original [7], les auteurs calculent \mathcal{R}_0 avec l'hypothèse que les animaux infectés temporaires ne jouent aucun rôle, i.e. avec nos notations $\beta_1 = 0$ (les animaux du compartiment **I** ne transmettent pas); seuls les animaux infectés de façon persistente (les animaux du compartiment **P**) transmettent la maladie. Aucun résultat de stabilité n'est donné, et \mathcal{R}_0 est estimé par des considérations biologiques. Le théorème 4.1 permet de conclure, dans le cas général, à la globale asymptotique stabilité du DFE pour $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

Dans cet exemple nous considérons le modèle d'une maladie des animaux, à savoir l'infection diarrhéique virale bovine. Ce modèle a déjà été considéré dans la littérature [7] dans le cadre de l'évaluation du contrôle du virus de la Diarrhée virale dans les cheptels bovins, par l'utilisation des modèles mathématiques déterministes de la dynamique de l'infection. Ce modèle mathématique est issu d'une modélisation compartimentale de la maladie considérée.

Sur la figure 5.8, nous donnons le diagramme de flux de matière entre les compartiments du modèle, suivi des explications nécessaires à la compréhension de la maladie.

Description des compartiments :

Comme le diagramme de flux de la figure 5.8 le montre, la population concernée dans le modèle est divisée en un compartiment **M** des bêtes protégées par les anticorps, un compartiment **S** des bêtes susceptibles, un compartiment **E** des bêtes infectées en phase d'incubation de l'infection, un compartiment **I** des bêtes activement infectées (i.e. malades), des compartiments **R_i**, $1 \leq i \leq 3$ des bêtes rétablies et disposant d'une certaine immunité, et d'un compartiment **P** des bêtes devenues incurables.

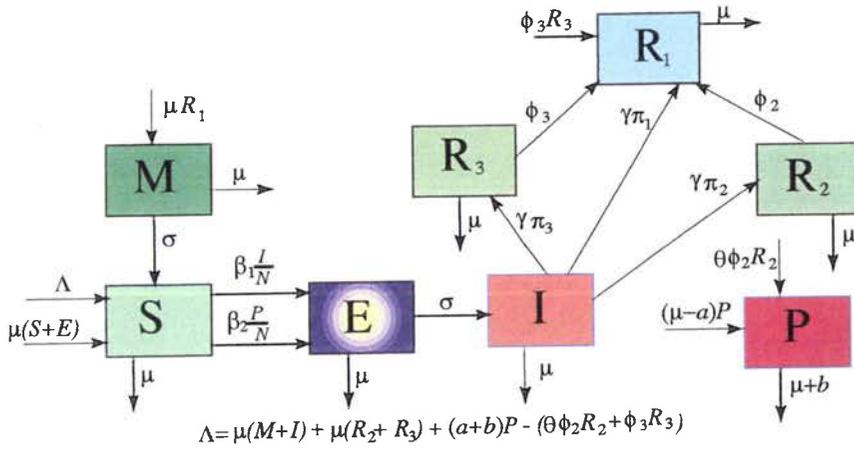


FIG. 5.8 – graphique des flux entre les compartiments du modèle

Description des transferts entre compartiments :

On suppose qu'une bête susceptible (du compartiment **S**) attrape la maladie dans un contact adéquat avec des bêtes infectieuses (du compartiment **I** avec un taux instantané de transfert $\beta_1 I$ ou du compartiment **P** avec un taux instantané de transfert $\beta_2 P$). D'où le taux d'incidence $\beta_1 I$ et $\beta_2 P$ de l'infection sur la population considérée. Les hypothèses de variation démographique sont telles que la population reste invariable ; et en conséquence, les diverses variables sont des proportions.

Rétablissement ou la sortie du compartiment I : Les bêtes infectieuses se rétablissent de l'infection gagnent une certaine prédisposition immunitaire contre l'infection. On suppose que le rétablissement se fait suivant un taux γ par unité de temps. Cette prédisposition immunitaire varie suivant l'état des individus concernés d'être en grossesse ou non.

On suppose que les bêtes qui ne sont pas en grossesse se rétablissent complètement, et sont totalement immunisées contre la maladie ; elles deviennent alors des bêtes du compartiment **R₁** (suivant un taux instantané de transfert $\gamma\pi_1$).

Les bêtes en grossesses, restent dans un état transitoire de rétablissement où elles ne sont pas totalement immunisées contre la maladie, dépendant de la durée de leur grossesse. Si cette durée est en dessous d'un certain temps T en nombre de jours donné, les bêtes concernées sont transférées dans le compartiment **R₂** (suivant un taux instantané $\gamma\pi_2$).

Lorsque cette durée excède le temps T , les bêtes concernées sont transférées dans le compartiment **R₃** (suivant un taux de transfert $\gamma\pi_3$).

Les bêtes du compartiment **R₃** complètent l'acquisition totale de leur immunité après avoir mis bas. Les bêtes du compartiment **R₃** sont transférées dans le compartiment **R₁** suivant un taux instantané de transfert ϕ_3 . On a $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Le compartiment **R₂** est celui des bêtes dont la maladie présente des complications. Elles vont donner naissance à des bêtes dont l'infection sera persistante. Ces nouveaux nés sont transférés

dans le compartiment **P** suivant le taux instantané $\theta\phi_2$, avec $0 < \theta < 1$, soit donc $\theta\phi_2\mathbf{R}_2$ par unité de temps.

La sortie du système : La sortie des bêtes du système se fait par abattage, vente, ou décès indépendant de la maladie des bêtes. Ces sorties sont appliquées à tous les compartiments du modèle suivant un taux instantané de μ . On suppose des sorties additionnelles dans les compartiments **I** et **P** dues à la maladie, suivant les taux instantanés d_I et d_P respectivement. Il va de soi que $d_I \leq d_P$

Les recrutements dans le système : Les entrées des bêtes dans le système se font par des naissances ou reconstitution du troupeau par l'exploitant par des animaux sains. On suppose que les individus des compartiments **S** et **E** donnent naissance à des bêtes qui sont tout autant susceptibles du fait que les parents n'ont pas de prémunition contre la maladie. Les bêtes du compartiment **R**₁ donnent naissance à des bêtes qui entrent de fait dans le compartiment **M** suivant un taux instantané μ . En effet, les nouveaux nés acquièrent les anticorps de leur mère. Les naissances pendant la «résidence» dans le compartiment **R**₃ se passent à la sortie de ce compartiment. Les nouveaux nés sont alors supposés avoir les mêmes dispositions immunitaires que leur mère; d'où un recrutement instantané équivalent au transfert instantané des parents dans le compartiment **R**₁.

Les bêtes du compartiment **P** ont une mortalité juvénile supérieure aux autres animaux. D'où $(\mu - a)\mathbf{P}$ et donnent naissance à des animaux infectés de façon persistente. Leur mortalité est aussi plus grande

Modèle d'états et analyse de la stabilité du DFE

Le modèle de système d'équations différentielles décrivant la progression de l'infection dans la population est obtenu en effectuant le bilan de matière dans chaque compartiment. Ce système est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{M} = \mu R_1 - (\mu + \sigma)M \\ \dot{S} = \sigma M + \mu(S + E) + \Delta - \mu S - (\beta_1 I + \beta_2 P)S \\ \dot{E} = (\beta_1 I + \beta_2 P)S - (\mu + \alpha)E \\ \dot{I} = \alpha E - (\mu + \gamma)I \\ \dot{R}_1 = \gamma\pi_1 I + \phi_2 R_2 + 2\phi_3 R_3 - \mu R_1 \\ \dot{R}_i = \gamma\pi_i I - (\mu + \phi_i)R_i \quad (i = 2, 3) \\ \dot{P} = \theta\phi_2 R_2 + (\mu - a)P - (\mu + b)P \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Nous donnons une analyse de la stabilité du point d'équilibre non endémique de ce modèle. A cet effet, nous écrivons le système sous la forme requise pour l'application du théorème 4.1. Du fait qu'il s'agisse d'un système surdéterminé, nous considérons les sept dernières équations du système. On met les variables du système en groupement $\mathbf{x}_1 = (S; R_1; R_3)$ et $\mathbf{x}_2 = (R_2; E; I; P)$ suivant qu'ils font partie du plus grand piège du système ou non, et le système est ainsi défini

sur le simplexe

$\Omega = \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}_+^7 \mid x_i \leq 1 \ 1 \leq i \leq 7\}$. Le système prend la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (5.44)$$

où le champ de vecteurs \mathbf{b} est défini pour tout \mathbf{x} par :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (\mathbf{b}_1(\mathbf{x}); 0; 0; 0; 0) \quad \text{avec} \quad \mathbf{b}_1(\mathbf{x}) = (\widehat{\Delta}(\mathbf{x}); 0, 0)$$

avec $\widehat{\Delta}(\mathbf{x}) = \sigma(M + S) + \mu(M + E + S) + (a + b)P + \mu(R_2 + R_3) - (\theta\phi_2 R_2 + \phi_3 R_3)$ et l'application \mathbf{A} est de la forme triangulaire avec les blocs \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 données pour tout \mathbf{x} par :

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\beta_1 I + \beta_2 P) - (\sigma + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 2\phi_3 \\ 0 & 0 & -(\mu + \phi_3) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu + \phi_2) & 0 & \gamma\pi_2 & 0 \\ 0 & -(\mu + \alpha) & \beta_1 S & \beta_2 S \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) & 0 \\ \theta\phi_2 & 0 & 0 & -(a + b) \end{pmatrix}$$

Le système (5.44) est positivement invariant sur Ω ; En effet, il est positivement invariant sur $\mathbb{R}_+^7 \cap \Omega$, car son champ de vecteurs est somme de champs de vecteurs positivement invariants sur $\mathbb{R}_+^7 \cap \Omega$ (en tout point de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^7 \cap \Omega$ la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler, et le vecteur $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ est positif); La face $\mathcal{F}_{sup} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \sum_{i=1}^7 x_i = 1\}$ de Ω repousse toute trajectoire du système (5.44) de point initial dans Ω vers l'intérieur de Ω ; en effet, le composant du champ de vecteurs du système (5.44) relatif à la normale sortante de \mathcal{F}_{sup} , qui est égale à $-\mu R_1$ est négative.

Considérons la matrice bloc \mathbf{J}_2 de la matrice Jacobienne du système (5.44) correspondant à l'application \mathbf{A}_2 au point d'équilibre. La matrice \mathbf{J}_2 est donnée par :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(\mu + \phi_2) & 0 & \gamma\pi_2 & 0 \\ 0 & -(\mu + \alpha) & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \alpha & -(\mu + \gamma) & 0 \\ \theta\phi_2 & 0 & 0 & -(a + b) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de Metzler irréductible qui est une majoration de l'ensemble des matrices

$\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ pour les $\mathbf{x} \in \Omega$; en effet, l'application $\widehat{\mathbf{A}}_2$ définie pour tout \mathbf{x} par

$$\widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1(1-S) & \beta_2(1-S) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est positive sur Ω .

L'hypothèse 6) du théorème 4.1 requiert que $\alpha(\mathbf{J}_2) \leq 0$.

Si nous notons pour résumer $\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, puisque suivant cette notation, les matrices blocs \mathbf{A} et \mathbf{D} sont déjà des matrices de Metzler stable, il vient que l'inégalité $\alpha(\mathbf{J}_2) \leq 0$ est équivalente à l'inégalité $\alpha(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \leq 0$ (ou de la même manière $\alpha(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) \leq 0$) (cf proposition 4.1 de la page 112).

Dans le cas où les matrices blocs dans l'expression compacte de \mathbf{J} ci-dessus sont les divers blocs carrés, l'inégalité $\alpha(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \leq 0$ est équivalente à :

$$\frac{\alpha(\beta_1(\mu + \phi_2)(a + b) + \beta_2\theta\phi_2\gamma\pi_2)}{(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)(\mu + \phi_2)(a + b)} \leq 1 \quad (5.45)$$

L'hypothèse 3) du théorème 4.1 requiert que le sous-système

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_1; \mathbf{0})\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}_1; \mathbf{0})$$

défini $\Omega \cap \mathbb{R}_+^3$ soit globalement asymptotiquement stable en \mathbf{x}_{10} . Il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaire de matrice

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -(\mu + \sigma) & -(\mu + \sigma) & -(\sigma + \phi_3) \\ 0 & -\mu & 2\phi_3 \\ 0 & 0 & -(\mu + \phi_3) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice admet trois valeurs propres réelles strictement négatives.

Toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites. On conclut à la globale asymptotique stabilité du DFE du système (5.44) sur Ω sous la condition (5.45). \square

5.8 Modèles d'infection avec porteurs asymptotiques

L'infection aux virus de la Diarrhée virale bovine (BVDV) se présente à tout point de vue comme un cas atypique de modèle avec deux compartiments d'infectés, des compartiments \mathbf{I} et \mathbf{P} . Généralement, on devient infecté après la période d'incubation; Dans le cas de la BVDV, le deuxième compartiment des individus infectés est comme le présente la figure 5.8, sans connec-

tion aux réseaux des autres compartiments. Dans les exemples suivants, nous allons considérer les cas d'infections épidémiologiques qui se prêtent à la modélisation par les compartiments, où on peut avoir différents compartiments d'individus infectés après la période de latence. Nous présentons les cas d'un modèle SI_1I_2RS , d'un modèle SEI_1I_2RS , où on a deux compartiments d'individus infectés, et le cas d'un modèle $SE_1E_2I_1I_2RS$ présentant en plus des deux compartiments d'individus infectés, deux compartiments d'individus en période de latence. Ce genre de modélisation se retrouve dans les maladies où la classe des infectés présente des variances parmi les individus qu'il contient. Les cas où on a deux compartiments d'individus infectés, sont caractéristiques des maladies où on a des individus malades qui ne présentent aucun symptôme de la maladie. Le cas d'un modèle SI_1I_2RS se trouve dans l'infection au virus de l'hépatite B, où suivant les prédispositions immunitaires des individus, on peut être infectieux, et ne présenter aucun symptôme clinique.

5.8.1 Un modèle SI_1I_2RS

Le modèle que nous considérons dans cet exemple correspond au diagramme des flux de la figure 5.9 suivante

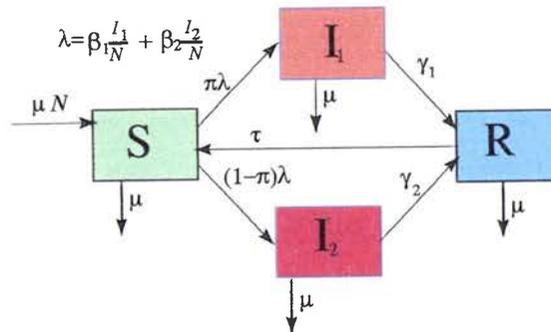


FIG. 5.9 – graphique des flux entre les compartiments du modèle

Pour des raisons de simplicité, on fait l'hypothèse que tout nouveau né est susceptible; μ est également le taux instantané suivant lequel tout compartiment perd ses membres. On fait également l'hypothèse de l'existence d'une probabilité π pour qu'un individu susceptible dans un contact adéquat avec un infectieux devienne infectieux du compartiment I_1 , et $(1 - \pi)$ pour qu'il devienne infectieux du compartiment I_2 .

Le système d'équations différentielles régissant la dynamique dans ce modèle est le suivant

$$\begin{cases} \dot{S} &= -(\mu + \beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S + \tau R + \mu N \\ \dot{R} &= -(\mu + \tau)R + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{I}_1 &= -(\mu + \gamma_1)I_1 + \pi(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{I}_2 &= -(\mu + \gamma_2)I_2 + (1 - \pi)(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \end{cases} \quad (5.46)$$

Les hypothèses du problème font en sorte que la population dans le modèle est invariante. Le système (5.46) est surdéterminé; le domaine de faisabilité biologique de ce système est donc $G = \{(S; R; I_1; I_2) \in \mathbb{R}_+^4 \mid S + R + I_1 + I_2 = N\}$. Nous considérons les trois dernières équations; le système que nous considérons est donc :

$$\begin{cases} \dot{R} = -(\mu + \tau)R + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{I}_1 = -(\mu + \gamma_1)I_1 + \pi(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{I}_2 = -(\mu + \gamma_2)I_2 + (1 - \pi)(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \end{cases} \quad (5.47)$$

Sur l'ensemble $\Omega = \{\mathbf{x} = (R; I_1; I_2) \in \mathbb{R}_+^3 \mid R + I_1 + I_2 \leq N\}$ Le point d'équilibre non endémique du système (5.47) correspondant au point d'équilibre non endémique du système (5.46) est l'origine de \mathbb{R}^3 . Nous donnons ci-dessous l'analyse du point d'équilibre non endémique du système (5.46) par l'intermédiaire de celui du système (5.47).

Nous appliquons le théorème 4.1; il est nécessaire d'établir que le système (5.47) vérifie toutes les hypothèses de ce théorème pour le point d'équilibre considéré. En effet, on peut écrire le système (5.47) sous la forme requise dans ce théorème, c'est à dire

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5.48)$$

avec l'application \mathbf{A} définie sur Ω par

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau) & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & -(\mu + \gamma_1) + \pi\beta_1 \frac{S}{N} & \pi\beta_2 \frac{S}{N} \\ 0 & (1 - \pi)\beta_1 \frac{S}{N} & -(\mu + \gamma_2) + (1 - \pi)\beta_2 \frac{S}{N} \end{pmatrix}$$

Le système (5.48) est positivement invariant sur Ω ; en effet, ce système est positivement invariant sur $\mathbb{R}_+^3 \cap \Omega$, car en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3 \cap \Omega$, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler; La face $\mathcal{F}_{sup} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid R + I_1 + I_2 = N\}$ repousse toute trajectoire solution du système (5.48) de point initial dans Ω à l'intérieur de Ω ; en effet, la composante du champ de vecteurs du système (5.48) relativement à la normale sortante de la face \mathcal{F}_{sup} en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{sup}$, qui est égale à $-\mu - \tau R$ est négative.

Les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 ici sont définies pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = -(\mu + \tau), \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu + \gamma_1) + \pi\beta_1 \frac{S}{N} & \pi\beta_2 \frac{S}{N} \\ (1 - \pi)\beta_1 \frac{S}{N} & -(\mu + \gamma_2) + (1 - \pi)\beta_2 \frac{S}{N} \end{pmatrix}$$

Soit \mathbf{J}_2 la matrice bloc de la matrice Jacobienne du système (5.48) correspondant à l'application

\mathbf{A}_2 au point d'équilibre; on a :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(\mu + \gamma_1) + \pi\beta_1 & \pi\beta_2 \\ (1 - \pi)\beta_1 & -(\mu + \gamma_2) + (1 - \pi)\beta_2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est un majorant de l'ensemble de matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$, pour les $\mathbf{x} \in \Omega$; en effet, soit l'application $\widehat{\mathbf{A}}_2$ définie pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par

$$\widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{S}{N}\right) \begin{pmatrix} \pi\beta_1 & \pi\beta_2 \\ (1 - \pi)\beta_1 & (1 - \pi)\beta_2 \end{pmatrix}$$

On a pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, $\widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$

\mathbf{J}_2 est une matrice de Metzler irréductible, stable si et seulement si

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\pi\beta_1}{\mu + \gamma_2} + \frac{(1 - \pi)\beta_2}{\mu + \gamma_1} \leq 1 \tag{5.49}$$

Ce qui correspond à la condition de l'hypothèse 6) du théorème 4.1. On suppose cette condition satisfaite pour la suite.

L'hypothèse 3) du théorème 4.1 requiert que le sous-système $\dot{R} = -(\mu + \tau)R$ soit globalement asymptotiquement stable en l'origine relativement à $\Omega \cap \mathbb{R}$. Ceci est trivialement vérifié.

On a toutes les hypothèses du théorème 4.1. On conclut donc à la globale asymptotique stabilité de l'origine de \mathbb{R}^3 pour le système (5.48) relativement à Ω sous la condition (5.49). \square

5.8.2 Un modèle SEI_1I_2RS

Le modèle que nous considérons dans cet exemple correspond au diagramme des flux de la figure 5.10 suivante

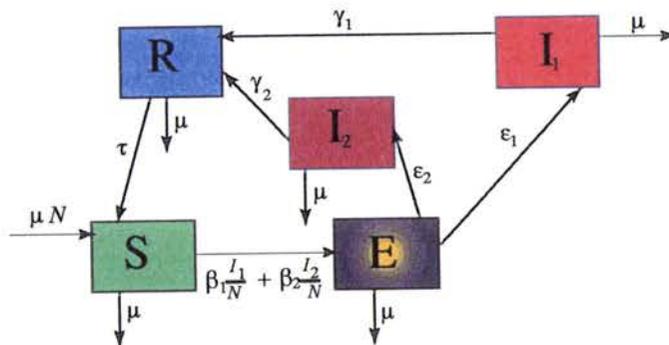


FIG. 5.10 – graphique des flux entre les compartiments du modèle

On fait l'hypothèse que l'entrée dans le système est par naissance, qui se fait suivant un taux instantané μ , et que tout nouveau né est susceptible; μ est également le taux instantané suivant lequel tout compartiment perd ses membres.

Le système d'équations différentielles régissant la dynamique dans ce modèle est le suivant

$$\begin{cases} \dot{S} = -(\mu + \beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S + \tau R + \mu N \\ \dot{R} = -(\mu + \tau)R + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{E} = -(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)E + (\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{I}_1 = -(\mu + \gamma_1)I_1 + \varepsilon_1 E \\ \dot{I}_2 = -(\mu + \gamma_2)I_2 + \varepsilon_2 E \end{cases} \quad (5.50)$$

Les hypothèses du problème font en sorte que la population dans le modèle est invariante. Le système (5.50) est surdéterminé; le domaine de faisabilité biologique de ce système est donc $G = \{(S; R; E; I_1; I_2) \in \mathbb{R}_+^5 \mid S + R + E + I_1 + I_2 = N\}$. Nous considérons les quatre dernières équations; le système que nous considérons est donc :

$$\begin{cases} \dot{R} = -(\mu + \tau)R + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{E} = -(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)E + (\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{I}_1 = -(\mu + \gamma_1)I_1 + \varepsilon_1 E \\ \dot{I}_2 = -(\mu + \gamma_2)I_2 + \varepsilon_2 E \end{cases} \quad (5.51)$$

Sur l'ensemble

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (R; E; I_1; I_2) \in \mathbb{R}_+^4 \mid R + E + I_1 + I_2 \leq N\}$$

Le point d'équilibre non endémique du système (5.51) correspondant au point d'équilibre non endémique du système (5.50) est l'origine de \mathbb{R}^4 . Nous donnons ci-dessous l'analyse du point d'équilibre non endémique du système (5.50) par l'intermédiaire de celui du système (5.51).

Nous appliquons le théorème 4.1; il est nécessaire d'établir que le système (5.51) vérifie toutes les hypothèses de ce théorème pour le point d'équilibre considéré. En effet, on peut écrire le système (5.51) sous la forme requise dans ce théorème, c'est à dire

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5.52)$$

avec l'application \mathbf{A} définie sur Ω par

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau) & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & -(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) & \beta_1 \frac{S}{N} & \beta_2 \frac{S}{N} \\ 0 & \varepsilon_1 & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{pmatrix}$$

Le système (5.52) est positivement invariant sur Ω ; en effet, ce système est positivement invariant sur $\mathbb{R}_+^3 \cap \Omega$, car en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3 \cap \Omega$, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler; La face $\mathcal{F}_{sup} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid R + E + I_1 + I_2 = N\}$ repousse toute trajectoire solution du

système (5.52) de point initial dans Ω à l'intérieur de Ω ; en effet, la composante du champ de vecteurs du système (5.52) relativement à la normale sortante de la face \mathcal{F}_{sup} en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{sup}$, qui est égale à $-\mu - \tau R$ est négative.

Les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 ici sont définies pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = -(\mu + \tau) \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) & \beta_1 \frac{S}{N} & \beta_2 \frac{S}{N} \\ \varepsilon_1 & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{pmatrix}$$

Soit \mathbf{J}_2 la matrice bloc de la matrice Jacobienne du système (5.52) correspondant à l'application \mathbf{A}_2 au point d'équilibre; on a :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) & \beta_1 & \beta_2 \\ \varepsilon_1 & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est un majorant de l'ensemble des matrices $\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$; en effet, l'application $\widehat{\mathbf{A}}_2$ définie pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par $\widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est positive.

La matrice \mathbf{J}_2 est une matrice de Metzler irréductible, stable si et seulement si

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\varepsilon_1 \beta_1}{(\mu + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_2 + \varepsilon_2)} + \frac{\varepsilon_2 \beta_2}{(\mu + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2 + \varepsilon_2)} \leq 1 \quad (5.53)$$

Ce qui correspond à l'inégalité de l'hypothèse 6) du théorème 4.1. On suppose cette condition satisfaite pour la suite.

L'hypothèse 3) du théorème 4.1 requiert que l'équation différentielle $\dot{R} = -(\mu + \tau)R$ soit globalement asymptotiquement stable en l'origine de \mathbb{R} relativement à $\Omega \cap \mathbb{R}$. Ceci est vérifié.

On a toutes les hypothèses du théorème 4.1. On conclut donc à la globale asymptotique stabilité de l'origine de \mathbb{R}^3 pour le système (5.48) relativement à Ω sous la condition que l'inégalité (5.53) soit satisfaite. D'où la globale asymptotique stabilité du point d'équilibre $(N; 0; 0; 0; 0)$ pour le système (5.50) dans G si et seulement si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, avec \mathcal{R}_0 donné dans l'expression (5.53). \square

5.8.3 Un modèle $\mathbf{SE}_1\mathbf{E}_2\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{RS}$

Le modèle que nous considérons dans cet exemple correspond au diagramme des flux de la figure 5.11.

Dans cet exemple, on fait l'hypothèse qu'un individu susceptible lors de son infection soit transféré dans le compartiment des incubants \mathbf{E}_1 avec une probabilité π , et dans le compartiment des \mathbf{E}_2 avec la probabilité complémentaire $1 - \pi$

Le système d'équations différentielles régissant la dynamique dans ce modèle est le suivant

$$\begin{cases} \dot{S} = -(\mu + \beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S + \tau R + \mu N \\ \dot{R} = -(\mu + \tau)R + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{E}_1 = -(\mu + \varepsilon_1)E_1 + \pi(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{E}_2 = -(\mu + \varepsilon_2)E_2 + (1 - \pi)(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{I}_1 = -(\mu + \gamma_1)I_1 + \varepsilon_1 E_1 \\ \dot{I}_2 = -(\mu + \gamma_2)I_2 + \varepsilon_2 E_2 \end{cases} \quad (5.54)$$

définie dans $G = \{(S; R; E_1; E_2; I_1; I_2) \in \mathbb{R}_+^7 \mid S + R + E_1 + E_2 + I_1 + I_2 = N\}$ N étant

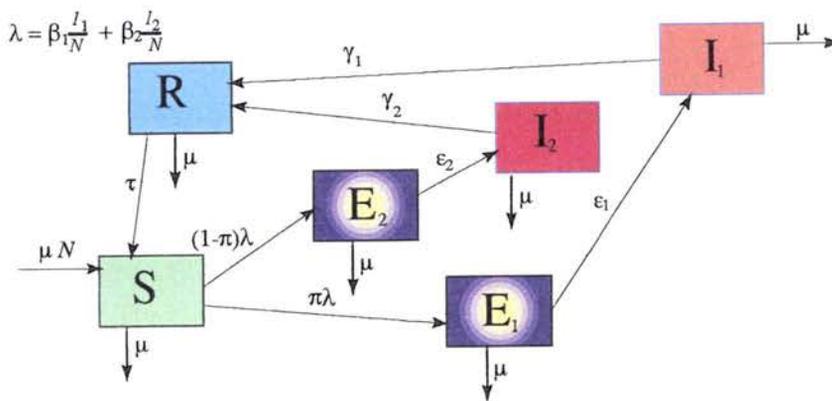


FIG. 5.11 – graphique des flux entre les compartiments du modèle

constante.

Nous donnons une analyse de la stabilité du point d'équilibre $(N; 0; 0; 0; 0; 0)$ de ce système. Le système étant surdéterminé sur G , nous considérons le système constitué des cinq dernières équations, c'est à dire :

$$\begin{cases} \dot{R} = -(\mu + \tau)R + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ \dot{E}_1 = -(\mu + \varepsilon_1)E_1 + \pi(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{E}_2 = -(\mu + \varepsilon_2)E_2 + (1 - \pi)(\beta_1 \frac{I_1}{N} + \beta_2 \frac{I_2}{N})S \\ \dot{I}_1 = -(\mu + \gamma_1)I_1 + \varepsilon_1 E_1 \\ \dot{I}_2 = -(\mu + \gamma_2)I_2 + \varepsilon_2 E_2 \end{cases} \quad (5.55)$$

définie sur $\Omega = \{\mathbf{x} = (R; E_1; E_2; I_1; I_2) \in \mathbb{R}_+^5 \mid R + E_1 + E_2 + I_1 + I_2 \leq N\}$

Le point d'équilibre du système (5.54) que nous considérons correspond pour le système (5.55) à l'origine de \mathbb{R}^5 . Nous appliquons le théorème 4.1 au système (5.55) pour le point d'équilibre $\mathbf{0}$. Il est nécessaire comme nous l'avons fait dans les exemples précédents que nous établissions que le système (5.55) vérifie les hypothèses de ce théorème.

On peut le mettre sous la forme requise dans le théorème 4.1 à savoir :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5.56)$$

avec l'application \mathbf{A} définie pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu + \tau) & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & -(\mu + \varepsilon_1) & 0 & \pi\beta_1 \frac{S}{N} & \pi\beta_2 \frac{S}{N} \\ 0 & 0 & -(\mu + \varepsilon_2) & (1 - \pi)(\beta_1 \frac{S}{N}) & (1 - \pi)(\beta_2 \frac{S}{N}) \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{pmatrix}$$

Le système (5.55) est positivement invariant dans Ω ; en effet, le système est positivement invariant sur $\mathbb{R}_+^5 \cap \Omega$ car en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^5 \cap \Omega$ la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler ;

La face $\mathcal{F}_{sup} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbb{R} + E_1 + E_2 + I_1 + I_2 \leq N\}$ repousse toute les trajectoires solutions du système (5.55) de point initial dans Ω à l'intérieur de Ω ; en effet, la composante du champ de vecteurs du système (5.55) relativement à la normale sortante du système (5.55) en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{sup}$ qui est égale à $-\mu - \tau R$ est négative.

Les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 ici sont définies par :

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = -(\mu + \tau) \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu + \varepsilon_1) & 0 & \pi\beta_1 \frac{S}{N} & \pi\beta_2 \frac{S}{N} \\ 0 & -(\mu + \varepsilon_2) & (1 - \pi)(\beta_1 \frac{S}{N}) & (1 - \pi)(\beta_2 \frac{S}{N}) \\ \varepsilon_1 & 0 & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{pmatrix}$$

Soit \mathbf{J}_2 la matrice bloc de la matrice Jacabienne du système (5.55) en l'équilibre correspondant à l'application \mathbf{A}_2 ; on a :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -(\mu + \varepsilon_1) & 0 & \pi\beta_1 & \pi\beta_2 \\ 0 & -(\mu + \varepsilon_2) & (1 - \pi)\beta_1 & (1 - \pi)\beta_2 \\ \varepsilon_1 & 0 & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{pmatrix}$$

L'application $\widehat{\mathbf{A}}_2$ définie pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\widehat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi\beta_1(1 - \frac{S}{N}) & \pi\beta_2(1 - \frac{S}{N}) \\ 0 & 0 & (1 - \pi)\beta_1(1 - \frac{S}{N}) & (1 - \pi)\beta_2(1 - \frac{S}{N}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est positive sur Ω

\mathbf{J}_2 est une matrice de Metzler, irréductible, stable si et seulement si on a

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\pi\beta_1\varepsilon_1}{(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \gamma_1)} + \frac{(1 - \pi)\beta_2\varepsilon_2}{(\mu + \varepsilon_2)(\mu + \gamma_2)} \leq 1 \quad (5.57)$$

On suppose pour la suite que cette condition est satisfaite par les coefficients du modèle.

L'hypothèse 3) du théorème 4.1 requiert que l'équation différentielle $\dot{R} = -(\mu + \tau)R$ soit globalement asymptotiquement stable en l'origine de \mathbb{R} relativement à $\Omega \cap \mathbb{R}$. Ceci est vérifié.

On a toutes les hypothèses du théorème 4.1. On conclut donc à la globale asymptotique stabilité de l'origine de \mathbb{R}^3 pour le système (5.56) relativement à Ω sous la condition que l'inégalité (5.53) soit satisfaite. D'où la globale asymptotique stabilité du point d'équilibre $(N; 0; 0; 0; 0; 0)$ pour le système (5.54) dans G si et seulement si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, avec \mathcal{R}_0 donné dans l'expression (5.57). \square

5.8.4 Généralisation du principe aux modèles $\mathbf{S}(\mathbf{E})_n(\mathbf{I})_m(\mathbf{R})_p\mathbf{S}$

Les trois exemples ci-dessus nous permettent d'évoquer une situation générale, où on serait en présence d'une hypothétique maladie avec un seul compartiment de susceptibles \mathbf{S} , un nombre n de compartiments d'individus latents (qui peut être nul) \mathbf{E}_i , $1 \leq i \leq n$ (si $n \neq 0$), un nombre m de compartiments d'individus infectieux avec $m \geq 1$ \mathbf{I}_j , $1 \leq j \leq m$, et un nombre p de compartiments d'individus rétablis avec $p \geq 1$ \mathbf{R}_k , $1 \leq k \leq p$.

On fait l'hypothèse qu'à chaque compartiment \mathbf{I}_j d'infectieux, correspond une incidence d'infection sur les individus susceptibles $\beta_j \frac{I_j}{N}$ par unité de temps de taux directeur β_j . Le taux d'incidence de la maladie est donc donnée par : $\lambda = \sum_{j=1}^m \beta_j \frac{I_j}{N}$

Les individus susceptibles (i.e. du compartiment \mathbf{S}) suite à un contact adéquat avec des individus infectieux dans notre modèle ne transitent pas tous par un compartiment de latent (i.e. un compartiment \mathbf{E}_i); nous faisons l'hypothèse que certains compartiments d'individus infectieux sont sujets aux transferts directs des individus nouvellement contaminés au même titre que tous les compartiments des latents. Le transfert des individus du compartiment \mathbf{S} aux compartiments auxquels il est connecté est soumis à une distribution de probabilité $(\pi_i)_{1 \leq i \leq q}$, (q est le nombre de compartiments auxquels \mathbf{S} est connecté; on a $\sum_{i=1}^q \pi_i = 1$). D'une façon similaire, nous supposons que lorsque tout compartiment \mathbf{W} transfert ses matières suivant un taux instantané fixe ω , et lorsque ce transfert le met en connection avec un nombre p de compartiments, ceci est fait avec une distribution de probabilité correspondant aux divers compartiments conjoints. Nous présentons ci-dessous un exemple de diagrammes de flux entre les compartiments.

Nous notons par :

$\rightarrow \varepsilon_i$ le taux instantané de sortie du compartiment \mathbf{E}_i ,

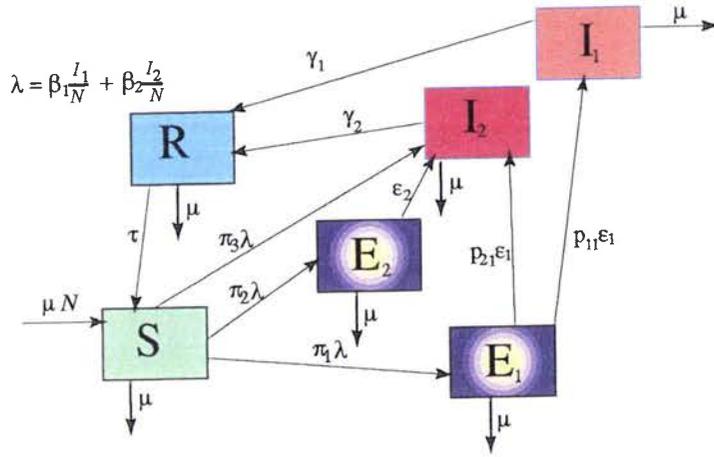


FIG. 5.12 – Exemple de graphique des flux entre les compartiments du modèle pour illustration

—> γ_i le taux instantané de sortie du compartiment I_i ,

—> τ_i le taux instantané de sortie du compartiment R_i

Le système d'équations différentielles régissant la dynamique du système est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -(\lambda + \mu)S + \sum_{k=1}^l \tau_k R_k + \mu N \\ \dot{R}_j = -(\mu + \tau_j)R_j + \sum_{k=1}^m q_{jk} \gamma_k I_k \quad 1 \leq j \leq l \\ \dot{E}_j = -(\mu + \varepsilon_j)E_j + \sum_{k=1}^m \left(\pi_j \beta_k \frac{S}{N} \right) I_k \quad 1 \leq j \leq n \\ \dot{I}_j = -(\mu + \gamma_j)I_j + \sum_{k=1}^m \left(\tilde{\pi}_j \beta_k \frac{S}{N} \right) I_k + \sum_{k=1}^n p_{jk} \varepsilon_k E_k \quad 1 \leq j \leq m \end{array} \right. \quad (5.58)$$

défini dans $G = \left\{ (S; \mathbf{r}; \mathbf{e}; \mathbf{i}) \in \mathbb{R}_+^{m+n+l+1} \mid S + \sum_{j=1}^l R_j + \sum_{j=1}^m E_j + \sum_{j=1}^n I_j = N \right\}$

avec $\mathbf{e} = (E_1; E_2; \dots; E_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $\mathbf{i} = (I_1; I_2; \dots; I_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $\mathbf{r} = (R_1; R_2; \dots; R_l) \in \mathbb{R}_+^l$. Le point d'équilibre qui nous intéresse, (i.e. le point d'équilibre non endémique) est $(N; \mathbf{0}) \in G$.

Le système (5.58) est surdéterminé; nous considérons le système (5.59) ci-dessous constitué des $m+n+l$ dernières équations du système (5.58), qui est un système bien déterminé correspondant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_j = -(\mu + \tau_j)R_j + \sum_{k=1}^m q_{jk} \gamma_k I_k \quad 1 \leq j \leq l \\ \dot{E}_j = -(\mu + \varepsilon_j)E_j + \sum_{k=1}^m \left(\pi_j \beta_k \frac{S}{N} \right) I_k \quad 1 \leq j \leq n \\ \dot{I}_j = -(\mu + \gamma_j)I_j + \sum_{k=1}^m \left(\tilde{\pi}_j \beta_k \frac{S}{N} \right) I_k + \sum_{k=1}^n p_{jk} \varepsilon_k E_k \quad 1 \leq j \leq m \end{array} \right. \quad (5.59)$$

l'ensemble de faisabilité biologique de notre système correspondant à l'ensemble G du système (5.58)

est le simplexe :

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} = (\mathbf{r}; \mathbf{e}; \mathbf{i}) \in \mathbb{R}_+^{m+n+l} \ / \ R_j \leq N, E_j \leq N, I_j \leq N, \sum_{j=1}^l (R_j + E_j + I_j) \leq N \right\},$$

et le point d'équilibre correspondant à celui du système (5.58) est l'origine de \mathbb{R}^{m+n+l}

Soient les matrices à coefficients réelles positifs suivantes :

- $\mathbf{P} = (p_{ij}\varepsilon_j) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(n, m)$
- $\mathbf{Q} = (q_{ij}\gamma_j) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(l, m)$
- $\mathbf{B} = (\pi_i\beta_j) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_+}(m, n)$
- $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{\pi}_i\beta_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$

Le système (5.59) prend la forme compacte

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = -\text{diag}(\mu + \tau_j)\mathbf{r} + \mathbf{Q}\mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{e}} = -\text{diag}(\mu + \varepsilon_j)\mathbf{e} + \frac{S}{N}\mathbf{B}\mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{i}} = -\text{diag}(\mu + \gamma_j)\mathbf{i} + \frac{S}{N}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{i} + \mathbf{P}\mathbf{e} \end{cases} \quad (5.60)$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5.61)$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\text{diag}(\mu + \tau_j) & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & -\text{diag}(\mu + \varepsilon_j) & \frac{S}{N}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & -\text{diag}(\mu + \gamma_j) + \frac{S}{N}\tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix}$$

Nous nous proposons d'appliquer à ce système théorème 4.1; nous établissons à cet effet que le système satisfait toutes les hypothèses dudit théorème.

Le système(5.61) est positivement invariant dans Ω ; en effet, il est positivement invariant dans $\Omega \cap \mathbb{R}^{n+m+l}$, en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler; Il reste à montrer

que la face $\mathcal{F}_{sup} = \{\mathbf{x} \in \Omega \ / \ \sum_{i=1}^{n+m+l} x_i = N\}$ de Ω repousse toute trajectoire solution du système (5.61) d'état initial dans Ω à l'intérieur de Ω . En effet, la composante du champ de vecteurs du système (5.61) relative à la normale sortante à la face \mathcal{F}_{sup} et en tout $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{sup}$ qui est égal à $-\mu N - \sum_{k=1}^l \tau_k R_k$ est négative.

Les applications \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont ici définies pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) &\equiv -\text{diag}(\mu + \tau_j) \in \mathcal{M}_l(\mathbb{R}) \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -\text{diag}(\mu + \varepsilon_j) & \frac{S}{N}\mathbf{B} \\ \mathbf{P} & -\text{diag}(\mu + \gamma_j) + \frac{S}{N}\tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Soit \mathbf{J}_2 la matrice bloc de la matrice Jacobienne du système (5.61) à l'équilibre de Ω , relatif à l'application \mathbf{A}_2 ; on a

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -\text{diag}(\mu + \varepsilon_j) & \mathbf{B} \\ \mathbf{P} & -\text{diag}(\mu + \gamma_j) + \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \mathbf{M} - \mathbf{D}$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{P} & \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \text{diag}(\mu + \varepsilon_j) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}(\mu + \gamma_j) \end{pmatrix}$$

La matrice \mathbf{J}_2 est telle que l'application $\hat{\mathbf{A}}_2$ définie pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par :

$$\hat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_2 - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (1 - \frac{s}{N})\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & (1 - \frac{s}{N})\tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix}$$

est positive sur Ω

La prochaine étape du théorème 4.1 exige que la matrice \mathbf{J}_2 soit Metzler irréductible et stable; \mathbf{J}_2 est évidemment déjà une matrice de Metzler irréductible; en effet, l'écriture $\mathbf{J}_2 = \mathbf{M} - \mathbf{D}$ proposé ci-dessus est une décomposition régulière de la matrice \mathbf{J}_2 . Pour que la matrice \mathbf{J}_2 soit stable, il suffit que $\alpha(\mathbf{J}_2) \leq 0$, (où $\alpha(\mathbf{J}_2)$ est le module de stabilité de la matrice \mathbf{J}_2); ce qui est équivalent au fait que $\rho(\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1}) \leq 1$.

nous supposons pour la suite que cette condition est satisfaite.

La dernière hypothèse à établir est celle relative à la globale asymptotique stabilité de l'origine de \mathbb{R}^l pour le sous-système

$$\dot{\mathbf{r}} = -\text{diag}(\mu + \tau_j)\mathbf{r}$$

relativement à $\Omega \cap \mathbb{R}^l$. Ce qui est évident.

Toutes les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites par le système (5.61). Il s'ensuit que l'origine de $\mathbb{R}^{m+n+l+1}$ est globalement et asymptotiquement stable pour le système (5.61) sur Ω . Ce qui apporte en conséquence la globale asymptotique stabilité du point d'équilibre $(N; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0})$ pour le système (5.58) dans G si et seulement si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, avec $\mathcal{R}_0 = \rho(\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1})$. \square

Conclusion

Dans ce chapitre, se trouvent quelques exemples de modèles épidémiologiques, dont nous avons étudié la stabilité asymptotique du DFE à l'aide de nos théorèmes de réduction. La quasi totalité de ces modèles proviennent de la littérature existante sur l'épidémiologie mathématique.

Il en ressort que notre théorème de réduction et les aménagements que nous y avons faits sont des outils adaptés pour l'analyse de la stabilité du point d'équilibre non endémique des modèles épidémiologiques. Elles nous permet de donner de manière plus systématique l'analyse de la

stabilité du point d'équilibre non endémique que ce qui est déjà fait par les auteurs des travaux qui se rapportent, et qui existent déjà dans la littérature. Généralement, un recours est fait aux résultats de LaSalle et les conditions d'application de ces résultats pour déduire à la stabilité asymptotique ne sont pas suffisantes pour tirer des conclusions.

Nous avons dans la lancée répondu à une question posée par Perelson Kirshner et De Boers [45] dans leur papier parlant du VIH-Sida.

Dans certains cas nos techniques permettent d'étudier la stabilité globale de l'équilibre endémique. Mais il s'agit pour le moment de modèle assez particuliers.

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette partie de notre thèse, nous nous sommes intéressés à l'analyse systématique de la stabilité du point d'équilibre non endémique (DFE) des modèles épidémiologiques.

Ce problème est apparu en consultant des références de la littérature où la déduction de l'équilibre asymptotique du DFE était incomplète.

La littérature de l'épidémiologie mathématiques traitant de l'analyse de la stabilité du DFE des modèles épidémiologiques est en pleine expansion, et les résultats de stabilité qui sont établis très souvent ne le sont pas de manière systématique.

Nous avons réuni les travaux existants en vue de placer les systèmes épidémiologiques déterministes dans un contexte dans lequel on peut développer des résultats de stabilité systématiques. Nous avons construit un résultat de stabilité à la LaSalle, en appliquant le principe de réduction de Florio–Seibert.

De ce théorème de réduction, nous avons établi un théorème assez général, qui permet de déterminer de façon systématique des conditions d'asymptotique stabilité du DFE des systèmes épidémiologiques. Ce résultat, comme c'est le cas des résultats généraux, ne permet pas de dériver les conditions optimales dans tous les cas. Dans le cas où on n'obtient pas des résultats optimaux, le recours au théorème de réduction permet quelques fois d'obtenir de meilleurs résultats.

Nous avons donné un algorithme qui peut s'implémenter facilement, de calcul du rapport de reproduction de base, qui est un élément important en épidémiologie mathématique. Nous avons consacré tout un chapitre à confronter notre méthode à des exemples que nous avons pris dans la littérature en vue de les éprouver.

Annexe A

Principe de réduction pour la stabilité.

Application aux modèles épidémiologiques

Pour l'étude de la stabilité du DFE, nous avons besoin d'un résultat de réduction. ce résultat ne se trouve pas de façon explicite dans la littérature; c'est pourquoi nous en donnons une démonstration. Cela dit, cela peut être considéré comme un exercice élémentaire d'application des résultats du livre de Bhatia-Szëgo [3].

Nous considérons $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ est un ouvert connexe non vide. Nous considérons un système d'équations différentielles autonomes défini sur \mathcal{U}

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On suppose que le champ $\mathbf{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continu et admet une solution maximale unique. Nous notons pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ par $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ la solution du système (A.1) que nous supposons définie pour tout $t \geq 0$, et telle que $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. On suppose que \mathbf{X} satisfait des conditions telles que $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ soit une fonction continue de $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$. Les points d'équilibres du système (A.1) sont des points $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{U}$ tels que $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

A.1 Quelques résultats de réduction

Nous allons donner des résultats de réduction. Ils ne sont pas plus difficiles à montrer dans le cadre des systèmes dynamiques et de la stabilité asymptotique des compacts positivement invariants. Cela dit, l'utilisation que nous ferons sera quand K sera réduit au point d'équilibre.

Theorème A.1 *Soit $G \subset \mathcal{U}$ un ouvert borné positivement invariant pour le système (A.1); On suppose que :*

1) \rightarrow *il existe L une fonction de classe C^1 définie sur \mathcal{U} , qui est une fonction de LaSalle sur \bar{G} . Soit $E = \{\mathbf{x} \in \bar{G} / \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$, soit M^* le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E .*

2) \rightarrow *Soit K un compact tel que : $K \subset M^*$ et K soit asymptotiquement stable pour le sys-*

tème(A.1) relativement à M^*

3) $\rightarrow L$ soit constante sur la frontière ∂K de K

alors K est asymptotiquement stable pour le système (A.1) relativement à \bar{G}

Démonstration:

On désigne par M le plus grand ensemble invariant contenu dans E ;

On va successivement établir que K est attractif, et qu'il est stable pour le système (A.1) relativement à \bar{G} .

attractivité de K : K est un compact stable relativement à M^* d'après [3, corollaire 1.5.26] il est positivement invariant. (La stabilité implique la positive invariance)

On va maintenant prouver que $M \subset K$. On a $M \cap K \neq \emptyset$ car, $\forall y \in M$, on $\Lambda^+(y) \subset M \subset M^*$, (c'est le principe de LaSalle) et $\Lambda^+(y) \subset K$ (car par hypothèse K est attractif relativement à M^*) donc $\emptyset \neq \Lambda^+(y) \subset M \cap K$

Supposons par l'absurde que $M \setminus K \neq \emptyset$; soit donc $x \in M \setminus K$; on a $\Lambda^-(x) \subset M$, car M est un compact invariant; on a également $\Lambda^-(x) \cap K = \emptyset$; en effet, si ce n'était pas le cas, on aurait une trajectoire négative $\gamma^-(x)$ (qui est contenue dans M) qui tendrait vers K , avec $x \notin K$; et cela contredit la stabilité de K relativement à M^* .

Maintenant, soit $z \in \Lambda^-(x)$; puisque $\Lambda^-(x)$ est un compact invariant, on a $\Lambda^+(z) \subset \Lambda^-(x) \subset M^*$, et donc

$$\Lambda^+(z) \cap K = \emptyset \quad \text{avec } z \in M^*,$$

ce qui contredit l'attractivité de K relativement à M^* . Ceci prouve que $M \subset K$, par le principe d'invariance de LaSalle, M est attractif relativement à \bar{G} , donc K également.

Stabilité de K : On va démontrer que $D^+(K) = K$ ce qui implique [3, Théorème 2.6.6] la conclusion recherchée.

On a $D^+(x) = \gamma^+(x) \cup J^+(x)$ où

$D^+(x) = \{y : \exists \{x_n\} \subset \mathcal{U}, x_n \rightarrow x, \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ \mathbf{X}_{t_n}(x_n) \rightarrow y\}$ est la première prolongation positive de x ,

et $J^+(x) = \{y : \exists \{x_n\} \subset \mathcal{U}, x_n \rightarrow x, \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ t_n \rightarrow +\infty \mathbf{X}_{t_n}(x_n) \rightarrow y\}$ est l'ensemble limite prolongé. pour $x \in \bar{G}$, $J^+(x)$ est un ensemble compact invariant

De fait, on a $K \subset D^+(K)$.

Supposons par l'absurde qu'on a $K \subsetneq D^+(K)$; alors $J^+(K) \setminus K \neq \emptyset$; on peut même affirmer que $J^+(\partial K) \setminus K \neq \emptyset$ en effet, K étant positivement invariant, on a $J^+(\overset{\circ}{K}) \subset K$;

soit donc $y \in J^+(\partial K) \setminus K$, il existe donc $\{x_n\} \subset \mathcal{U}, x_n \notin K \forall n, x_n \rightarrow x \in \partial K, \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+ t_n \rightarrow +\infty, \mathbf{X}_{t_n}(x_n) \rightarrow y$

La fonction L étant décroissante sur les trajectoires de (A.1), il vient que

$$L(\mathbf{X}_{t_n}(x_n)) \leq L(x_n)$$

par passage à la limite, on a

$$L(\mathbf{y}) \leq L(\mathbf{x}) = c$$

et puisque L est constante sur la frontière K , il vient que la fonction L est inférieure à c sur $J^+(\partial K) \setminus K$

Maintenant, du fait que K est attractif relativement à \tilde{G} , et donc $\mathbf{X}_t(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{z} \in \partial K$ d'où L est supérieure à la constante c sur la trajectoire négative de $\gamma^-(\mathbf{y})$; cependant du fait que K est positivement invariant, on a $\gamma^-(\mathbf{y}) \subset J^+(\mathbf{x}) \setminus K$, il vient que L est constante sur $\gamma^-(\mathbf{y})$, donc L est de dérivée nulle sur $J^+(\partial K) \setminus K$. Comme par hypothèse $K \subset M^* \subset E$, si la trajectoire issue de \mathbf{y} , $\gamma^+(\mathbf{y})$ « rentre » dans K , alors elle est constante. Donc $\gamma(\mathbf{y}) \subset E$, autrement dit, $\mathbf{y} \in M^*$. Cela prouve aussi que $J^+(\mathbf{x}) \subset M^*$

Il vient que $\Lambda^-(\mathbf{y}) \subset J^+(\mathbf{x}) \subset M^*$ d'où $\Lambda^-(\mathbf{y}) \cap K = \emptyset$, sinon cela contredirait le fait que K est stable dans M^* (on aurait alors une trajectoire négative dans M^* tendant vers K , issue d'un point de $M^* \setminus K$)

Maintenant, soit $\mathbf{z} \in \Lambda^-(\mathbf{y})$; du fait que $\Lambda^-(\mathbf{y})$ est un compact invariant, on a $\Lambda^+(\mathbf{z}) \subset \Lambda^-(\mathbf{y})$, soit $\Lambda^+(\mathbf{z}) \cap K = \emptyset$, ce qui contredit le fait que K est attractif, d'où la contradiction.

Ce qui nous permet de conclure à l'égalité $D^+(K) = K$ et en conséquence, que K est stable pour le système (A.1) relativement à \tilde{G} , et ce qui termine la démonstration. \square

On peut encore « améliorer » ce théorème en remplaçant M^* (le plus grand ensemble positivement invariant contenu dans E) par un ensemble plus petit M , où M est le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble $E = \{\mathbf{x} \in \tilde{G} / \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$ Ce résultat est le suivant :

Theorème A.2 Soit $G \subset \mathcal{U}$ d'intérieur non vide, borné et positivement invariant pour le système (A.1).

On suppose que

1) \rightarrow il existe L une fonction de classe C^1 définie sur \mathcal{U} , qui est une fonction de LaSalle sur \tilde{G} . Soit $E = \{\mathbf{x} \in \tilde{G} / \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$, soit M le plus grand ensemble invariant contenu dans E . Soit K un compact tel que :

2) $\rightarrow K \subset M$ et K soit asymptotiquement stable pour le système (A.1) relativement à M

3) $\rightarrow L$ soit constante sur le bord de K

alors K est asymptotiquement stable pour le système (A.1) relativement à \tilde{G}

La démonstration est une redite de la démonstration du théorème A.1 ci-dessus, qui fonctionne parce que $J^+(\mathbf{x})$ est invariant, contenu dans E , et donc aussi dans M , du moment où M est le plus grand ensemble invariant contenu dans E .

Corollaire A.1 Soit $G \subset \mathcal{U}$ d'intérieur non vide, borné et positivement invariant pour le système (A.1).

On suppose que

1) \rightarrow il existe L une fonction de classe C^1 définie sur \mathcal{U} , qui est une fonction de LaSalle sur \tilde{G} .

Soit $E = \{\mathbf{x} \in \bar{G} / \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\}$, soit M le plus grand ensemble invariant contenu dans E . Soit \mathbf{x}_0 de \bar{G} un point d'équilibre du système (A.1) tel que :

2) $\rightarrow \mathbf{x}_0$ soit asymptotiquement stable pour le système (A.1) relativement à M

alors \mathbf{x}_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (A.1) relativement à \bar{G}

A.2 Adaptation à des modèles compartimentaux

Dans la plupart de modèles biologiques les états évoluent dans de sous-ensembles compacts positivement invariants de \mathbb{R}^n (par exemple [45, 27, 31]) et très souvent ont un état (ou des états) d'équilibre qui est un point frontière du domaine en considération. Nous donnons un résultat qui est plus adapté à l'analyse de ces types de systèmes.

Les résultats suivants sont des adaptations du corollaire A.1 aux cas où le champ de vecteurs \mathbf{X} du système (A.1) est de la forme

$$\mathbf{X} : \mathbf{x} \in \mathcal{U} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\mathbf{A} : \mathbf{x} \in \mathcal{U} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

une application définie sur \mathcal{U} à valeurs matricielles, qu'on suppose continue. On s'intéresse alors à la stabilité de l'origine. En effet, De nombreux systèmes peuvent être mis sous une forme telle que \mathbf{X} soit décrit par l'application (A.2), nommément les systèmes biotechnologiques qui sont les objets de notre intérêt, et qu'on peut écrire suivant des modèles compartimentaux.

Les systèmes dont il est question dans le théorème 3.15 donné en page 105 forment une sous-classe des systèmes considérés dans cette partie. En effet, si la matrice Jacobienne du champ de vecteurs \mathbf{X} en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ est une matrice compartimentale, alors, par un changement de variable adéquat, le système peut se mettre sous une forme où son champ de vecteurs sera de la forme donnée dans l'application (A.2) ci-dessus. L'implication contraire n'est pas vraie.

Nous donnons un résultat inspiré d'un résultat de LaSalle [24] qui est passé inaperçu jusqu'à présent. Ce résultat concerne les système de type

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}$$

Le résultat est le suivant.

Theorème A.3 Soit $G \subset \mathcal{U}$ un ensemble d'intérieur non vide. Soit un système du type donné par le système (A.1), avec \mathbf{X} l'application donnée par (A.2); On suppose que :

i) $\rightarrow \bar{G}$ est positivement invariant pour le système (A.1).

ii) \rightarrow toute trajectoire positive de (A.1) commençant en un point $\mathbf{x} \in G$, $\gamma^+(\mathbf{x})$ est relativement compacte.

iii) \rightarrow il existe un vecteur ligne $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{cA}(\mathbf{x})\mathbf{x} \leq 0$. Soit $E = \{\mathbf{x} \in \bar{G} / \mathbf{cA}(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0\}$; soit M le plus grand ensemble invariant pour le système (A.1) contenu dans E

Si l'état $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ est globalement asymptotiquement stable pour (A.1) dans M , alors \mathbf{x}_0 est le point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du système (A.1) dans \bar{G} .

Démonstration:

Considérons la fonction

$$L : \mathbf{x} \in \mathcal{U} \mapsto L(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}^T, \mathbf{x} \rangle;$$

il s'agit bel et bien d'une fonction de LaSalle, car, elle est de classe C^1 dans \mathcal{U} , et sa dérivée,

$$\begin{aligned} \dot{L}(x) &= \langle \nabla L(\mathbf{x}), \mathbf{X}(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}^T, \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{c}^T, \mathbf{x} \rangle \\ &= \mathbf{cA}(\mathbf{x})\mathbf{x} \end{aligned}$$

est inférieure à 0 par hypothèse, pour tout $\mathbf{x} \in G$;

le reste n'est pas différent de ce qui est présenté dans la démonstration du théorème A.2 □

Remarque A.1 Dans le cas où \mathcal{U} est contenu dans un orthant positif, on se préoccupe de la recherche d'un vecteur ligne $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\mathbf{cA}(\mathbf{x}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \bar{G}$.

Remarque A.2 Si on peut écrire pour tout $\mathbf{x} \in G$ la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ avec \mathbf{J} une matrice appartenant à la classe des matrices décrites dans le théorème 3.10, un potentiel vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^n$ du théorème ci-dessus est apporté par le théorème 3.10 tel que $\mathbf{J}^T\mathbf{c} \leq \mathbf{0}$

Le résultat suivant va dans la même direction que le théorème A.3. Il est cependant différent dans la mesure où on construit à partir de l'application \mathbf{A} une nouvelle application $\hat{\mathbf{A}}$, telle que pour tout \mathbf{x} , $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler. l'application $\hat{\mathbf{A}}$ est définie par :

$$\hat{\mathbf{A}} : \mathbf{x} \in \mathcal{U} \mapsto \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = (\hat{a}_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{A.3}$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$,

- $\hat{a}_{ij}(\mathbf{x}) = |a_{ij}(\mathbf{x})|$ pour tout $i, j, i \neq j$
- $\hat{a}_{ii}(\mathbf{x}) = a_{ii}(\mathbf{x})$ pour tous les i

Le résultat est le suivant, et reprend un résultat de LaSalle [24] :

Theorème A.4 Soit $G \subset \mathcal{U}$ un ensemble d'intérieur non vide. Soit un système du type donné par le système (A.1), avec \mathbf{X} une application du type donnée par (A.2). On suppose que :

i) $\rightarrow \bar{G}$ est positivement invariant pour le système (A.1).

ii) \rightarrow toute trajectoire positives de (A.1) commençant en un point $\mathbf{x} \in G$ $\gamma^+(\mathbf{x})$ est relativement compacte.

Soit $\hat{\mathbf{A}}$ l'application donnée par (A.3) définie sur \mathcal{U} . On suppose que :

iii) \rightarrow il existe un vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{c} \gg \mathbf{0}$ tel que $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\mathbf{c} \ll \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{x} \in G$.

Soit $E = \{\mathbf{x} \in \bar{G} / \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\mathbf{c} \ll \mathbf{0}\}$; soit M le plus grand ensemble invariant par (A.1) contenu dans E

Si $M \cup \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$, alors $\mathbf{0}$ globalement asymptotiquement stable pour (3.12) sur G .

Démonstration:

Considérons l'un des $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^n$ vérifiant la condition iii) dans l'énoncée du théorème, soit la fonction

$$L : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto L(\mathbf{x}) = \max_i \frac{x_i^2}{c_i^2}$$

L est une fonction définie positive, continue et Dini-dérivable sur \mathbb{R}^n . Soit i l'indice du composant de \mathbf{x} tel que $L(\mathbf{x}) = \frac{x_i^2}{c_i^2}$; pour t assez petit, $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ réalise le maximum en $x_i(t)$; il vient donc,

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{c_i^2} \dot{x}_i x_i &= \frac{2}{c_i^2} \sum_j a_{ij}(\mathbf{x}) x_j x_i \\ &\leq \frac{2}{c_i^2} \sum_j a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{c_j}{c_i} x_i^2 &= \frac{2x_i^2}{c_i^3} \left(\sum_{j \neq i} c_j a_{ij}(\mathbf{x}) + c_i a_{ii}(\mathbf{x}) \right) \\ &\leq \frac{2x_i^2}{c_i^3} \left(\sum_{j \neq i} c_j |a_{ij}(\mathbf{x})| + c_i a_{ii}(\mathbf{x}) \right) &= \frac{2x_i^2}{c_i^3} (\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\mathbf{c})_i < 0 \end{aligned}$$

Par passage à la limite sur \bar{G} , on a $\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0$

et L est une fonction de Lyapunov large pour le système (A.1) sur \bar{G} . Le système (A.1) est donc stable à l'origine de \bar{G}

Il vient de l'investigation ci-dessus que $\{\mathbf{x} \in \bar{G} / \dot{L}(\mathbf{x}) = 0\} \subset \{\mathbf{x} \in \bar{G} / \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\mathbf{c} \ll \mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{0}\}$

L'attractivité de l'origine est donnée par le théorème A.2. \square

Remarque A.3 Le théorème ci-dessus reste valable si on considère à la place de l'application $\hat{\mathbf{A}}$ l'application

$$\tilde{\mathbf{A}} : \mathbf{x} \in \mathcal{U} \mapsto \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = (\tilde{a}_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$,

- $\tilde{a}_{ij}(\mathbf{x}) = \max\{a_{ij}(\mathbf{x}), 0\}$ pour tout $i, j, i \neq j$
- $\tilde{a}_{ii}(\mathbf{x}) = a_{ii}(\mathbf{x})$ pour tous les i

Une extension qui peut être faite de ce résultat est le suivant :

Théorème A.5 Soit $G \subset \mathcal{U}$ un ensemble d'intérieur non vide. Soit un système du type donné par le système (A.1), avec \mathbf{X} une application de type donnée par (A.2). On suppose que :

- i) $\rightarrow \bar{G}$ est positivement invariant pour le système (A.1).
 ii) \rightarrow toute trajectoire positive de (A.1) $\gamma^+(\mathbf{x})$ commençant en un point $\mathbf{x} \in G$ est relativement compacte.

Soit \hat{A} l'application donnée par (A.3) définie sur \mathcal{U} . On suppose que :

- iii) \rightarrow il existe un vecteur $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{c} \gg \mathbf{0}$, et un ensemble I non vide d'indices tel que pour tout $\mathbf{x} \in G$ on ait

- $(\hat{A}(\mathbf{x})\mathbf{c})_i < 0$ pour tout $i \in I$
- $(\hat{A}(\mathbf{x})\mathbf{c})_j = 0$ pour les $j \in [1, \dots, n] \setminus I$

Soit $E = \left(\bigcup_{j \in J} \{\mathbf{x} \in \bar{G} / x_j = 0\} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} \{\mathbf{x} \in \bar{G} / (\hat{A}(\mathbf{x})\mathbf{c})_i = 0\} \right)$. Soit M le plus grand ensemble invariant pour le système (A.1) contenu dans E

Si $M \cup \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$, alors $\mathbf{0}$ est globalement asymptotiquement stable pour le système (A.1) sur \bar{G} .

Démonstration:

La démonstration est exactement la même que celle du théorème A.4, et on obtiendra déjà avec les points $\mathbf{x} \in G$ $\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0$; en effet, il est possible que le i où $L(\mathbf{x})$ réalise les maximum soit élément de J auquel cas l'inégalité reste respectée sur \bar{G} par passage à la limite pour des raisons de continuité. \square

Remarque A.4 Ces résultats ramènent l'étude de la stabilité asymptotique de l'équilibre des systèmes de type en investigation à la détermination du vecteur \mathbf{c} , et de l'ensemble M .

Le résultat suivant est une forme générale du théorème 3.15. En effet, il correspond au cas où le champ de vecteurs \mathbf{X} est donné par l'application (A.2). Un autre résultat relatif à ce théorème est le théorème de Hadamar–Frobenius (théorème 3.9) que nous avons donné en page 98 ; nous avons utilisé dans notre démonstration du théorème 3.9 le théorème A.6 ci-dessous.

Theorème A.6 Soit $G \subset \mathcal{U}$ un ensemble d'intérieur non vide. Soit un système du type donné par le système (A.1), avec \mathbf{X} une application de type donnée par l'application (A.2). On suppose que : G est positivement invariant pour le système (A.1).

- 1) \rightarrow Si pour tout $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice à diagonale dominante colonne alors le système (A.1) est stable en l'origine dans G .

Si de plus,

- 2) \rightarrow pour tout $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler,

- 3) \rightarrow pour tout $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice connectée sur fuite,

alors, le système (A.1) est globalement asymptotiquement stable en l'origine dans $G \cap \mathbb{R}_+^n$

Démonstration:

Pour établir la stabilité du système (A.1), on va considérer la fonction candidate de Lyapunov

$$V : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Il s'agit bien d'une fonction continue définie positive sur \mathbb{R}^n et Dini-dérivable sur \mathbb{R}^n ; Pour écrire sa dérivée de manière profitable, écrivons $V(\mathbf{x})$ sous la forme $V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$ avec $\varepsilon_i = \text{sgn}(x_i)$ (sgn est la fonction signe); il vient

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \dot{x}_i &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \sum_{i=1}^n \varepsilon_j \varepsilon_i a_{ij}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n |x_j| \left[\left(\sum_{i=1, i \neq j}^n \varepsilon_j \varepsilon_i a_{ij}(\mathbf{x}) \right) + a_{jj}(\mathbf{x}) \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(\mathbf{x})| + a_{jj}(\mathbf{x}) \right) \leq 0 \end{aligned}$$

d'où la stabilité du système (A.1) en l'origine de \mathbb{R}^n ; et par conséquent, aussi en l'origine de \mathbb{R}_+^n , puisque la restriction du système (A.1) sur \mathbb{R}_+^n est positivement invariant (pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est une matrice de Metzler). (cf théorème 3.3 page 92).

Pour établir l'asymptotique stabilité de l'origine, nous déterminons M , le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n / \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$

Soit donc $\mathbf{x} \in M$, on a $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, c'est à dire

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(\mathbf{x})| + a_{jj}(\mathbf{x}) \right) = 0 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$$

On utilise l'hypothèse 2. du théorème; ce qui s'exprime autrement par le fait qu'il existe j_0 (les indices de fuite), tel que $\sum_{i=1, i \neq j_0}^n a_{ij_0}(\mathbf{x}) + a_{j_0 j_0}(\mathbf{x}) < 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, et donc pour ces indices, on a $x_{j_0} = 0$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{X}_t(\mathbf{x}) \in M$. Pour un t suffisamment petit, on a pour tous les indices de fuites j_0 , $\sum_{i=1, i \neq j_0}^n a_{ij_0}(\mathbf{X}_t(\mathbf{x})) + a_{j_0 j_0}(\mathbf{X}_t(\mathbf{x})) < 0$, par continuité de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ par rapport à \mathbf{x} .

Donc, sur la trajectoire $\mathbf{X}_t(\mathbf{x})$ issue de \mathbf{x} , les $x_{j_0}(t)$ restent nulles.

Les équations correspondant aux indices de fuites j_0 pour les \mathbf{x} états initiaux donnent :

$$\dot{x}_{j_0} = \sum_{i=1, i \neq j_0}^n a_{j_0 i}(\mathbf{x}) x_i = 0.$$

Puisque pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est connectée sur fuite, pour chaque j_0 , il existe un $i_{j_0} \neq j_0$ tel que les $a_{j_0 i_{j_0}}(\mathbf{x}) \neq 0$, et donc pour ces indices, on a $x_{i_{j_0}} = 0$. On applique successivement le même argument. Puisque pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ on est en présence d'une matrice connectée sur fuite, on est sûr que de proche en proche on aura tous les $x_i = 0$, et donc, $M = \{\mathbf{0}\}$, ce qui prouve que l'origine est globalement asymptotiquement stable dans \mathbb{R}_+^n \square

Bibliographie

- [1] R. M. Anderson and R. M. May. *Infectious Diseases of Humans Dynamics and Control*. Oxford University Press, 1991.
- [2] A. Berman and R. J. Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. SIAM Philadelphia, 1994.
- [3] N. P. Bhatia and G. P. Szegö. Dynamical systems : Stability theory and applications. *Lecture Notes in Mathematics*, 35 :807–808, 1967.
- [4] J. Carr. *Application of Center Manifold Theory*. Springer Verlag–New York, 1981.
- [5] C. Castillo-Chavez and Z. Feng. To treat or not to treat : The case of tuberculosis. *J. Math. Biol.*, 35 :629–659, 1997.
- [6] C. Castillo-Chavez, Z. Feng, and W. Huang. On the computation of ∇_0 and its role on global stability. In P. van den Driessche D. Kirshner & A.-Z. Yakubu C. Castillo-Chavez S. Blower, editor, *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases An Introduction*, volume 125 of *The IMA volumes In Mathematics and its Applications*. Springer, 2001.
- [7] B. R. Cherry, M. J. Reeves, and G Smith. Evaluation of bovine diarrhea virus control using a mathematical model of infection dynamics. *Prev. Vet. Med.*, 33 :91–108, 1998.
- [8] O. Diekmann and J. A. Heesterbeek. *Mathematical Epidemiology of infectious diseases :model building, Analysis and Interpretation*. Wiley, New York, 2000.
- [9] O. Diekmann, J. A. Heesterbeek, and J. A. J. Metz. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio ∇_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *J. of Math. Biol.*, 28 :365–382, 1990.
- [10] Z. Feng, C. Castillo-Chavez, and A. F. Capurro. A model for tuberculosis with exogenous reinfection. *TPB*, 57 :235–247, 2000.
- [11] G. Frobenius. Über matrizen aus nicht negativen elementen. *S.B. Press. Akad. Wiss.*, 64 :274–277, 1912.
- [12] S. Gershgorin. Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix. *Izv. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, 40 :749–754, 1931.
- [13] D. Greenhalgh. Hopf bifurcation in epidemic models with latent period and nonpermanent immunity. *Mathematical Computing Modelling*, 25(2) :85–107, 1997.

- [14] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley, New York, 1964.
- [15] J. Z. Hearon. The kinetics of linear systems with special reference to periodic reaction. *Bull. Math. Bio-phys.*, 15 :121–141, 1953.
- [16] J. Z. Hearon. Theorems on linear systems. *Ann. New York Ac. Sci.*, 108 :36–68, 1963.
- [17] H. W. Hethcote and H. R. Thieme. Stability of the endemic equilibrium in epidemic models with subpopulations. *Mathematical Biosciences*, 75 :205–227, 1985.
- [18] M. W. Hirsch. Systems of differential equations which are competitive or cooperative i. limit sets. *SIAM J. Math. Anal.*, 13 :121–141, 1982.
- [19] Arrow J. Kenneth and L. Hurwicz. On the stability of the competitive equilibrium, ii. *Econometrica*, 27 :82–109, 1959.
- [20] J. A. Jacquez and C. P. Simon. Qualitative theory of compartmental systems. *Siam Review*, 35(1) :43–79, 1993.
- [21] J. Kenneth, Arrow, and L. Hurwicz. On the stability of the competitive equilibrium, i. *Econometrica*, 26 :522–552, 1958.
- [22] T. Kojima. On a theorem of hadamar and its application. *Tohoku Math. J.*, 5 :54–60, 1914.
- [23] A. Lajmanovich and J.A. Yorke. A deterministic model for gonorrhoea in a nonhomogeneous population. *Mathematical Biosciences*, 28 :221–236, 1976.
- [24] J. P. LaSalle. Stability theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 4 :57–65, 1968.
- [25] J. P. LaSalle. *The stability of dynamical systems*. SIAM Philadelphia, 1976.
- [26] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Lyapunov's direct method with applications*. Academic Press New York, 1961.
- [27] M. Y. Li, J. R. Graef, L. Wang, and J. Karsai. Global dynamics of a seir model with varying total population size. *Mathematical Biosciences*, 160 :191–213, 1999.
- [28] M.Y. Li, M.Fan, and K. Wang. Global stability of an seis model with recruitment and varying totlpopulation. *Mathematical Biosciences*, 170 :199–208, 2001.
- [29] M.Y. Li and J.S. Muldowney. Global stability for the seir model in epidemiology. *Mathematical Biosciences*, 125 :155–164, 1995.
- [30] M.Y. Li, H.L. Smith, and L. Wang. Global dynamic of an seir epidemic model with vertical transmission. *SIAM J. Appl. Math.*, 62 :58–69, 2001.
- [31] W.M. Liu, H.W. Hethcote, and S.A. Levin. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. *J. Math. Biol*, 25 :359–380, 1987.
- [32] D. G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems*. John Wiley, New York, 1979.
- [33] G. Macdonald. *The epidemiology and control of malaria*. Oxford University Press, 1957.

- [34] H. Maeda, S. Kodama, and Y. Otha. Asymptotic behavior of nonlinear compartmental systems. *IEEE Trans. Circuit and Systems*, 25 :372–378, 1978.
- [35] L. Markus and H. Yamabe. Global stability criteria for differential systems. *Osaka J. Math.*, 12 :305–317, 1960.
- [36] J. Mena-Lorca and H. W. Hethcote. Dynamic models of infectious diseases as regulators of population sizes. *J. Math. Biol.*, 30 :693–716, 1992.
- [37] J.S. Muldowney M.Y. Li and P. Van Den Driessche. Global stability of the seirs models in epidemiology. *Canadian Appl. Math. Quart.*, 7 :155–164, 1999.
- [38] G. A. Ngwa and W. S. Shu. A mathematical model for endemic malaria with variable human and mosquito populations. *Math. & Comp. Modelling*, 32 :747–763, 2000.
- [39] A. Nold. Heterogeneity in disease-transmission modeling. *Math. Biosci.*, 52 :227–240, 1980.
- [40] A. Ostrowski. Sur la détermination des bornes inférieurs pour une classe des déterminants. *Bull. Sci. Math.*, 61 :1–14, 1937.
- [41] M. Parodi. Application d'un théorème de m. hadamard à l'étude de la stabilité des systèmes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 :807–808, 1949.
- [42] M. Parodi. Complément à un travail sur la stabilité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 :1198–1200, 1949.
- [43] M. Parodi. Remarque sur la stabilité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 :51–52, 1949.
- [44] M. Parodi. Sur la détermination d'une limite supérieure de la partie réelle des racines de l'équation aux fréquences propres d'un réseau électrique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 :1400–1402, 1949.
- [45] A. S. Perelson, D. E. Kirschner, and R. De Boer. Dynamics of hiv infection of CD4⁺ t cells. *Mathematical Biosciences*, 114 :81–125, 1993.
- [46] O. Perron. Zur theorie der Über matrizen. *Math. Ann.*, 64 :248–263, 1907.
- [47] H. Rohrbach. Bemerkungen zu einem determinantensatz von minkowski. *Jahresbericht d. D. M. V.*, 40 :49–53, 1931.
- [48] H.H. Rosenbrock. A lyapunov function with applications to some nonlinear physical systems. *Automatica*, 1 :31–53, 1963.
- [49] I. W. Sandberg. On the mathematical foundations of compartmental analysis in biology, medicine and ecology. *IEEE Trans. Circuit and Systems*, 25 :273–279, 1978.
- [50] H. L. Smith. *Monotone dynamics systems. An introduction to the Theory of competitive and cooperative systems.* AMS, 1995.
- [51] H.L. Smith and P. Waltman. *The theory of the chemostat : dynamic of microbial competition.* Cambridge University Press Cambridge, 1995.
- [52] O. Taussky. Bounds for characteristic roots of matrices. *Duke Math. J.*, 15 :1043–1044, 1948.

- [53] H. R. Thieme. Convergence results and a poincare–bendixson trichotomy for asymptotical autonomous differential equations. *J. Math. Biol.*, 30 :755–763, 1992.
- [54] H. R. Thieme. Asymptotical autonomous differential equations in the plane. *Rocky Mountain J. Math.*, 24 :351–380, 1994.
- [55] O. Taussky (Todd). A method for obtaining bounds for characteristic roots of matrices with applications to flutter calculations. Technical report, Aeronautical Research Council of Great Britain, 1947.
- [56] R. S. Varga. Factorization and normalized iterative methods in boundary problems in differential equations. *R. E. Langer ed. Univ. of Press*, pages 121–142, 1960.
- [57] R. S. Varga. *Matrix Iterative*. Prentice Hall series in Automatics computation, 1962.
- [58] H. Wittmeyer. Einfluss der Änderung einer matrix auf die lösung des zugehörigen gleichungsystems. *Zeitschr. f. ang. Math. und Mech.*, 16 :287–300, 1936.

CONTRIBUTION À LA STABILISATION DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ DES MODÈLES ÉPIDÉMIOLOGIQUES

Résumé – Cette thèse est constituée de deux parties correspondant aux deux titres ci-dessus.

L'objectif de la première partie est d'étudier les propriétés d'un contrôle-système en dimension infinie (stabilisabilité par rétro-action statique et dynamique d'état), en se servant des propriétés obtenues sur une suite de contrôle-systèmes en dimension finie que l'on a obtenu suite à la discrétisation du contrôle-système en dimension infinie.

Après avoir fait des rappels des outils fondamentaux sur la stabilité et l'observabilité des systèmes dynamiques, puis passé en revue les principales techniques d'observations, nous nous sommes intéressés à un système nominal, le classique «*Body Beam System*» dans le contexte que nous avons énoncé. Nous considérons le système sans frottement avec un contrôle sur le couple de rotation du disque. Le modèle d'état de ce système est un contrôle-système en dimension infinie. Nous construisons une suite de formes discrètes de ce système qui sont alors des contrôle-systèmes en dimension finie. Nous établissons les propriétés de C^∞ -stabilisabilité de ces derniers par des retour d'états statiques et dynamiques. Notre travail est encore en cours sur les ajustements nécessaires pour l'extension de ces propriétés au contrôle-système en dimension infinie.

L'objectif de la deuxième partie est de fournir un outils permettant l'analyse systématique de la stabilité du point d'équilibre non endémique (DFE) des modèles épidémiologiques.

Après avoir fait quelques rappels terminologiques de l'épidémiologie, rassemblé les notions et terminologies éparses dans la littérature dans des domaines divers contribuant tous aux fins de la modélisation épidémiologique, nous avons proposé et démontré un résultat duquel on obtiendrait systématiquement des conditions nécessaires de stabilité du DFE des modèles épidémiologiques. nous avons également proposé un algorithme de calcul de \mathcal{R}_0 , lorsque la méthode classique basée sur la condition de Routh Hurwitz devient inexploitable. Nous avons ensuite présenté une liste non exhaustive d'exemples que nous avons pris dans la littérature pour établir l'efficacité de notre résultat. L'application de nos résultats nous permet d'obtenir les résultats des auteurs des modèles considérés, le cas échéant, de proposer des conditions nécessaires de stabilité meilleur. Dans plusieurs cas, nous établissons que $\mathcal{R}_0 = 1$ est point de bifurcation. C'est ainsi qu'à l'aide de nos résultats, nous avons prouvé une conjecture de Perelson, Kirshner et De Boer posée dans [45].

Mots clés – Système mécanique, stabilisabilité, observabilité, observateurs, principe de séparation, modélisation et modèles épidémiologiques, système compartimental, stabilité en des points frontières, principe de réduction.

CONTRIBUTION TO THE STABILIZATION OF MECHANICAL SYSTEMS

CONTRIBUTION TO THE STUDY OF THE STABILITY OF EPIDEMIOLOGICAL MODELS

Abstract – This thesis is constituted in two parts as presented by the two titles above.

The aim of the first part is to design infinite dimensional control-systems stabilizability (static and dynamic state feedback stabilization) properties as consequence of the stabilizability properties of a sequence of finite dimensional control-systems. The finite dimensional systems are the discretised form of the infinite dimension system. After some recalls regarding fundamental tools on stability and observability, and statement of leading state estimation technics, we carry our interest on a particular case of the problem stated above, the classic “*Body Beam system*”, that we consider without damping, and with only the torque control.

The state space model of the nominal system is an infinite dimensional system. We design a sequence of discretised form of this system which are finite dimensional control-systems. We establish C^∞ -stabilizability properties of these systems by means of static and dynamic state feedback. We are still working on how to manage the extension of those properties to the infinite dimensional control-system.

The aim of the second part is to provide tools with which the analysis of the stability of the disease free equilibrium (DFE) of epidemiological models will be systematic.

After stating some useful terminological notations regarding the epidemiology, and collecting tools that are already in the literature regarding other domains, that are useful for the epidemiological issue, we propose and prove a result with which the necessary conditions of the stability of the DFE in epidemiological models are obtained systematically. We also propose an algorithm for the computation of \mathcal{R}_0 , which can be very useful when the Routh Hurwitz condition becomes unemployable. To show the effectiveness of our tools, we present a non exhaustive list of examples coming from the existing literature. The application of our results enable us to obtain results of the authors, when they are not better. In few cases, we establish that \mathcal{R}_0 is a bifurcation point. We have also proved with the help of our result the conjecture of Perelson, Kirshner and De Boers stated in [45]

Key words – Mechanical system, stabilizability, observability, state estimation, separation principle, epidemiological models and modelling, compartmental system, stability of boundary states point, reduction principle epidemiology