Université de Metz

UFR MIM | Département de mathématiques

# Observabilité et systèmes discrets



## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4-07-03

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Metz**

**(Spécialité Mathématiques)**

par

Sabeur Ammar

**Composition du jury**

*Rapporteurs :* Andrea BACCIOTTI, Professeur Politecnico de Turin
Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, DR CNRS Supélec
Lionel ROSIER, Professeur à l'ESSTIN Institut Elie Cartan

*Examinateurs :* Gauthier SALLET, Professeur à l'université de metz
Jean-Claude VIVALDA, Responsable du projet CONGE de l'INRIA
Qinghua ZHANG, Directeur de recherche Inria Irisa (projet Sigma2)

**Université de Metz**

**UFR MIM** **Département de mathématiques**

# Observabilité et systèmes discrets

# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4-07-03

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Metz**

**(Spécialité Mathématiques)**

par

Sabeur Ammar

**Composition du jury**

*Rapporteurs :* Andrea BACCIOTTI, Professeur Politecnico de Turin
Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, DR CNRS Supélec
Lionel ROSIER, Professeur à l'ESSTIN Institut Elie Cartan

*Examinateurs :* Gauthier SALLET, Professeur à l'université de metz
Jean-Claude VIVALDA, Responsable du projet CONGE de l'INRIA
Qinghua ZHANG, Directeur de recherche Inria Irisa (projet Sigma2)

**Inria-Lorraine**

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le professeur Gauthier Sallet qui m'a accueilli au sein de son équipe.

Je remercie aussi très vivement Jean-Claude VIVALDA qui m'a dirigé durant toute ma thèse et de m'avoir consacré une partie de son temps chaque fois que l'occasion se présentait.

Je désire exprimer ma profonde gratitude aux professeurs Andrea BACCIOTTI, Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE et Lionel ROSIER pour avoir accepté la charge d'être Rapporteurs de ma thèse.

Je tiens à remercier également le professeur Qinghua ZHANG d'avoir bien voulu être Examinateur de ma thèse.

Mes remerciements vont à toute l'équipe du projet CONGE et tous les membres du département de Mathématiques de l'université de Metz.

Je ne pourrais jamais oublier le soutien des personnes chères de ma merveilleuse famille. Je réserve une reconnaissance particulière à mes parents et à ma femme.

# 1

# Introduction

Pour les systèmes non linéaires, la recherche d'observateurs à convergence exponentielle est encore un domaine ouvert. Sans doute, l'influence des entrées mais aussi par exemple l'inexistence de critères d'observabilité algébriques simples comme le critère du rang pour les systèmes linéaires sont des raisons qui peuvent expliquer cet état de fait.

L'observabilité est une condition nécessaire pour la construction des observateurs. Cette thèse ne porte pas sur la construction des observateurs, mais à l'étude des problèmes d'observation. Plus précisément, nous y étudions les problèmes de conservation de l'observabilité après discrétisation et la généricité de l'observabilité des systèmes non linéaires discrets.

La théorie de l'observabilité est parfaitement établie depuis plusieurs années dans le cadre des systèmes linéaires. Pour les systèmes non linéaires, beaucoup de questions sont encore ouvertes.

Ce travail est organisé comme suit :

Le deuxième chapitre est consacré à des rappels sur différentes notions d'observabilités introduites surtout par R. Hermann, A. J. Krener et R. Kalman dans [30] et [26], J. P. Gauthier et I. A. K. Kupka dans [22] et par Eduardo D. Sontag dans [54] et [53]. Nous rappelons aussi quelques caractérisations de l'observabilité pour certaines classes de systèmes. Nous remarquons que la caractérisation de l'observabilité pour les systèmes non linéaires est très différente de celle des systèmes linéaires, vu que celle ci ne dépend pas des entrées. Nous y trouvons aussi des rappels sur la théorie d'estimation d'état. Cette théorie est parfaitement établie depuis plusieurs années dans le cadre des systèmes linéaires, l'observateur de Luemberg (Luenberger,1966), voir [44] ou le filtre de Kalman (kalman et Bucy,1960),voir [31] sont des solutions standard largement utilisées qui assurent pour les systèmes observables la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro quelle que soit l'erreur d'initialisation.

Ensuite, nous établissons le lien entre l'observabilité et les observateurs. Nous rappelons après la notion d'observabilité infinitésimale introduite par J. P. Gauthier et I. A. K. Kupka dans [22] qui joue un rôle important dans notre travail.

Pour un système observable, pour tout couple $(x_0, \bar{x}_0)$ d'états différents, il existe une entrée admissible qui donne lieu à deux sorties différentes. L'entrée en question peut, naturellement, dépendre du couple d'états que nous avons considéré.

En pratique, nous nous intéressons au cas où l'entrée $u$ ayant été fixée, tout couple d'états différents donne lieu à des sorties différentes. En effet, dans ce cas seulement, nous pouvons connaître l'état initial du système à partir de la connaissance de la sortie. Nous rappelons enfin les conditions d'existence d'une telle entrée (universelle) étudiée par Eduardo D. Sontag dans [54] et Hector J. Sussmann dans [58].

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons au problème de la conservation d'observabilité après discrétisation. Si le problème de la conservation de l'observabilité des systèmes linéaires est résolu depuis longtemps par R. Kalman et K. Narendra dans [26], pour les systèmes non linéaires la question est beaucoup plus complexe. Notons qu'un problème analogue à propos de la contrôlabilité a été étudié par E.D. Sontag dans [55]. Nous donnons des conditions suffisantes pour garantir la préservation de l'observabilité lors du passage du système continu à son discrétisé. Ensuite, nous donnons des contres exemples pour dire que chaque hypothèse est indispensable. Ce travail a fait l'objet d' une publication à Controls and Systems Letters.

Nous donnons après une autre méthode pour montrer l'observabilité locale du système discrétisé. Enfin, en ajoutant l'hypothèse d'analyticité, nous montrons la conservation presque partout de l'observabilité lors du passage du système continue à son discrétisé.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à résoudre le problème de la généricité de l'observabilité des systèmes discrets. Lorsque la dimension de l'espace d'état est supérieure à celle des entrées l'observabilité devient une propriété générique. Autrement dit tout système peut être approché par un autre système observable. Plus précisément, l'observabilité différentielle et l'observabilité différentielle forte sont des propriétés génériques. Dirk Aeyels a montré dans [2] et [3] quelques résultats concernant la généricité de l'observabilité pour les systèmes continus-discrets. J. P. Gauthier et I. A. K. Kupka ont montré dans [22] la généricité de l'observabilité pour les systèmes continus. Nous montrons dans notre travail la généricité de l'observabilité pour une classe de système discrets.

# 2

# Observabilité des systèmes non linéaires

## 2.1 Introduction

Nous considérons des systèmes non linéaires continus de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & h(x(t)) \end{cases} \tag{2.1}$$

- où $x(t) \in M$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}$. $M$ est une variété différentiable $C^\infty$ appelée espace d'état.
- $u \in L^\infty(\mathbb{R}, U)$, l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées à valeurs dans $U$, $L^\infty(\mathbb{R}, U)$ est appelé l'espace des entrées.
- $y \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$, l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ est appelé l'espace des sorties. Nous notons $f_u(x) = f(x, u)$, $f_u$ est un champ de vecteurs $C^\infty$ défini sur $M$ pour tout $u$ dans $U$, que nous supposerons complet. L'application $h$ définie de $M$ dans $\mathbb{R}^p$ est de classe $C^\infty$.

Les systèmes non linéaires discrets considérés sont de la forme :

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & F(x_k, u_k) \\ y_k & = & h(x_k) \end{cases} \tag{2.2}$$

- où $x(k) \in M$, $u(k) \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p, k \in \mathbb{Z}$,
- $F : M \times U \to M$ de $C^\infty$ ; $h : M \to \mathbb{R}^p$ de classe $C^\infty$

Nous supposons que sont connues :
- les entrées du systèmes, qui sont issues de l'algorithme de commande,
- des sorties mesurées par des capteurs.

En général, pour des raisons de réalisabilité technique, de coût, etc ... la dimension du vecteur de sortie $y(t)$ est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu' à un instant donné $t$, l'état $x(t)$ ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie $y(t)$ à cet instant. Par contre sous des conditions d'observabilités, l'état $x(t)$ peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé.

Nous introduisons maintenant la notion de distinguabilité pour les systèmes non linéaires continus.

**Définition 1.** Deux états $x_0$ et $\bar{x}_0$ sont dits distinguables par le système (2.1) s'il existe une entrée admissible $t \mapsto u(t)$ et un temps $t_0 \geq 0$ telle que $h(\varphi(t_0, x_0, u(.)) \neq h(\varphi(t_0, \bar{x}_0, u(.))$. où $\varphi(t, x_0, u(.))$ est la solution de (2.1) obtenue en appliquant le contrôle $t \mapsto u(t)$ et de condition initiale $x_0$.

*Remarque 1.* 1. Deux états $x_0$ et $\bar{x}_0$ sont dits indistinguables par le système (2.1) si pour toute entrée admissible $t \mapsto u(t)$ et pour tout $t \geq 0$ on a $h(\varphi(t, x_0, u(.)) = h(\varphi(t, \bar{x}_0, u(.))$.

2. La définition de distinguabilité pour les systèmes discrets est analogue à la définition précédente.

Il existe dans la littérature plusieurs définitions de la notion d'observabilité introduites surtout par Eduardo D. Sontag dans [54] et [53] et par R. Hermann, A.J. Krener dans [25] et [26], J.P. Gauthier et I.A.K. Kupka dans [22]. Nous donnons ci-dessous la définition classique de l'observabilité :

**Définition 2.** Le système (2.1) est faiblement observable si et seulement si pour chaque couple $(x, \bar{x})$ d'états différents, il existe une entrée admissible $t \mapsto u(t)$ tel que le couple d'états est distinguable par rapport à $t \mapsto u(t)$ . Il est uniformément observable, ou observable pour toute entrée, si et seulement si pour chaque couple $(x, \bar{x})$ d'états différents et pour chaque entrée $t \mapsto u(t)$, le couple d'états est distinguable par rapport à $t \mapsto u(t)$.

Du point de vue pratique, cette définition équivaut à dire que la connaissance de la sortie $t \mapsto y(t)$ pour $t \in [0, T]$ nous permet de connaître l'état initial du système.

*Remarque 2.* 1. Nous adoptons la même définition pour les systèmes discrets.

2. L'observabilité uniforme implique l'observabilité faible.

3. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous remplaçons faiblement observable par observable.

En ce qui concerne les systèmes linéaires du type

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

il est bien connue que l'observabilité du système (2.3) équivaut au fait que le rang de la matrice $\begin{pmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{pmatrix}$ est égal à la dimension $n$ de l'espace d'état. Nous remarquons alors que pour les systèmes linéaires les deux notions d'observabilités (faible et uniforme) coïncident.

Nous pouvons dire que l'observabilité pour les systèmes non linéaires est une propriété complètement différente du cas linéaire. La raison fondamentale est que l'observabilité est une notion qui dépend de l'entrée appliquée au système, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes linéaires. Ceci est illustré par l'exemple élémentaire suivant donné sur $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + bu \\ y(t) &= h(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \end{cases} \tag{2.4}$$

avec $h$ une fonction analytique de dérivée non nulle.

Remarquons que si nous appliquons l'entrée $t \mapsto u(t) = 0$ à (2.4) et si nous prenons deux conditions initiales $x(0)$ et $\bar{x}(0)$ sur un même cercle centré sur l'origine, puisque l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation, les sorties que l'on obtient sont les mêmes. Il est facile de vérifier que pour toute autre entrée, ce n'est pas le cas. Deux conditions initiales différentes produisent deux sorties différentes. Autrement dit, pour une entrée non nulle, connue, il y a assez d'information dans la sortie pour reconstruire l'état initial. Une entrée $u$ étant fixée , $u \neq 0$, l'application :
[ état initial$\rightarrow$ sortie en tant que fonction] est injective.

## 2.2 Caractérisation de l'observabilité

Si la caractérisation de l'observabilité pour les systèmes linéaires est simple, pour les systèmes non linéaires la question est beaucoup plus complexe. Dans le cas où le système (2.1) est analytique, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit observable, pour cela nous allons introduire l'espace d'observation.

**Définition 3.** Nous appelons espace d'observation de (2.1) le plus petit sous-espace vectoriel de fonctions de classe $C^\infty$ sur $M$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui contient $h_1, \dots, h_p$, et qui est fermé pour la dérivation de Lie par rapport à tous les champs de vecteurs du types $f_u(x) = f(x, u); u \in U$, fixé, où $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$.

Rappelons que la dérivée de Lie de $\varphi$ par rapport à $f_u$ est simplement la dérivée directionnelle définie par

$$L_{f_u}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} f_i(x, u)$$

Nous notons $\Theta$ l'espace d'observation de (2.1). $\Theta$ est simplement l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de termes de la forme : $L_{f_{u_r}} \circ \ldots \circ L_{f_{u_1}} h_i$.

Si nous nous plaçons dans le cas où le système (2.1) est analytique, nous avons le théorème suivant, voir [22].

**Théorème 1.** *$\Theta$ sépare les points de l'espace d'état si et seulement si* (2.1) *est observable.(*$\Theta$ *sépare les points de l'espace d'état est équivalent à dire que pour tout couple d'états différents* $(x_0, \bar{x}_0)$*, il existe $g$ élément de $\Theta$ tel que* $g(x_0) \neq g(\bar{x}_0)$).

Dans le cas des systèmes linéaires, l'espace d'observation $\Theta$ est engendré par les fonctions $x \mapsto Cx, x \mapsto CAx, \ldots, x \mapsto CA^{n-1}x$. Cet espace est de dimension fini.

L'espace d'observation est aussi de dimension fini pour les systèmes bilinéaires. Considérons le système bilinéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + u(t)(Bx(t) + b) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{2.5}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}$. les éléments de $\Theta$ sont des fonctions affines sur $\mathbb{R}^n$ : $\varphi(x) = \alpha x + \beta$. La réciproque est vraie en un certain sens, M. Fliess et I. Kupka ont démontré le résultat suivant dans [14].

**Théorème 2.** *Si un système admet un espace d'observation de dimension fini, alors il se plonge dans un système bilinéaire.*

*Remarque 3.* Tout système linéaire observé polynomialement admet un espace d'observation de dimension fini.
La théorie de l'observation des systèmes linéaires observés polynomialement se ramène donc à celle des systèmes bilinéaires.

## 2.3 Différentes notions d'observabilité

Nous avons vu que l'espace d'observation d'un système linéaire $\Theta$ est engendré par les fonctions $x \mapsto Cx, x \mapsto CAx, \ldots, x \mapsto CA^{n-1}x$. Nous considérons $d\Theta$ l'espace des différentielles de chacune de ces fonctions. En chaque point $x$, l'évaluation en $x$ de $d\Theta$ est précisément engendré par les colonnes de la matrice $(C, CA, \ldots, CA^{n-1})$.

Nous pouvons nous demander s'il existe un équivalent de la condition de rang pour les systèmes non linéaires. La notion d'observabilité est globale, chaque point est distinguable de tous les autres, même s'ils sont très éloignés. Au contraire, une condition de rang est de nature locale. Nous ne pouvons alors nous attendre qu'à une équivalence partielle. Nous sommes donc amenés à introduire de nouvelle notion d'observabilité locale pour pouvoir la caractériser.

Nous rappelons tout d'abord la notion d'observabilité locale.

**Définition 4.** Le système (2.1) (ou (2.2)) est dit localement observable en $x_0$ si et seulement s' il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que tout couple $(x, \bar{x})$ de $V$ est distinguable.

L'observabilité locale faible en un point $x \in M$ a été introduite par R. Hermann et A. J. Krener dans [26]. Avant d'en donner la définition, rappelons que, étant donné un sous ensemble $W$ de $M$, les deux états $x_0, \bar{x}_0$ dans $W$ sont dits indistinguables dans $W$ (noté $x_0 I_W \bar{x}_0$) si nous avons la propriété suivante :

Pour chaque $T \geq 0$ fixé, pour tout contrôle $u$ pour lequel $\varphi(t, x_0, u(.)) \in W$ et $\varphi(t, \bar{x}_0, u(.)) \in W$ pour tout $0 \leq t \leq T$ on a $h(\varphi(T, x_0, u(.))) = h(\varphi(T, \bar{x}_0, u(.)))$. Nous notons $I_W(\xi) := \{\xi' / \xi I_W \xi'\}$.

**Définition 5.** (2.1) est $(HK - obs)_x$ s'il existe un voisinage $W$ de $x$ tel que pour tout voisinage $V$ ouvert de $x$ contenu dans $W$, nous avons $I_V(x) = \{x\}$.

Sontag a introduit dans [53] une nouvelle notion d'observabilité locale faible reliée au problème de stabilisation (appelé l'observabilité de Liapunov).

**Définition 6.** (2.1) est $(L - obs)_x$ si pour tout voisinage $W$ de $x$, il existe un voisinage $V$ de $x$ contenu dans $W$ tel que $I_W(x) \bigcap V = \{x\}$.

Nous donnons maintenant quelques notions qui seront utiles pour caractériser l'observabilité locale faible et celle de Liapunov. Nous notons $l$ l'algèbre de lie engendrée par les champs de vecteurs de $\{f_u, u \in U\}$. La condition de rang d'accessibilité en $x \in M$ est donnée par dim $l(x) = n$. Nous la notons $(ARC)_x$.

la condition de rang d'observabilité en $x \in M$ est introduite par R. Hermann et A. J. Krener dans [26]. Elle est vérifiée si l'ensemble des différentielles $d\varphi(x), \varphi \in \Theta$, est de rang maximum en chaque point $x$ de l'espace d'état, nous la notons $(ORC)_x$.

Nous énonçons par la suite quelques théorèmes démontrés dans [53] qui caractérisent l'observabilité locale faible et celle de Liapunov.

**Théorème 3.** *Pour tout $x$,$(ORC)_x \Longrightarrow (HK - obs)_x$.*

**Théorème 4.** *Si* (2.1) *est $(HK - obs)_x$ pour tout $x$ dans $M$ alors la condition $(ORC)_x$ est vérifiée dans un ouvert dense de $M$.*

**Théorème 5.** *Si* (2.1) *est analytique et vérifie la condition $(ARC)$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(ORC)_x$ est vérifiée pour tout état $x$ de $M$.*
2. *$(HK - obs)_x$ est vérifiée pour tout état $x$ de $M$.*

**Théorème 6.** *Si* (2.1) *vérifie la condition $(ARC)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(L - obs)_x$ est vérifiée pour tout état $x$ de $M$.*
2. *$(ORC)_x$ est vérifiée dans un ouvert dense de $M$.*

Pour montrer ce théorème, Sontag a démontré les lemmes suivantes :

**Lemme 1.** *$(HK - obs)_x \Longrightarrow (L - obs)_x$.*

**Lemme 2.** *Si* (2.1) *vérifie la $(ARC)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(L - obs)_x$ est vérifiée pour tout état $x$ de $M$.*
2. *$(L - obs)_x$ est vérifiée dans un sous ensemble dense de $M$.*

**Lemme 3.** *Si $(L-obs)_x$ est vérifiée dans un sous ensemble dense de $M$ alors $(ORC)_x$ est vérifiée dans un ouvert dense de $M$.*

Sontag a montré aussi dans [53] la conservation d'observabilité de Liapunov après discrétisation en supposant que le système continue vérifie la condition de rang d'accessibilité forte.

Nous donnons tout d'abord la définition du discrétisé de (2.1).

**Définition 7.** Soit $\delta > 0$ , si on note $\varphi(t, x_0, u(.))$ la solution de (2.1) en appliquant le contrôle $t \mapsto u(t)$ et de condition initiale $x_0$ alors le discrétisé de (2.1) est le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \varphi(\delta, x_k, \underline{u_k^\delta}(.)) \\ y_k & = & h(x_k) \end{array} \right. \tag{2.6}$$

où $\underline{u_k^\delta}(.)$ est le contrôle constant sur$[0, \delta]$ et égal à $u(k\delta)$ sur cet intervalle.

Nous rappelons par la suite la notion de condition de rang d'accessibilité forte. Soit $l_0$ l'idéal de $l$ engendré par les champs de vecteurs de la forme $f_u - f_v$ avec $u, v$ dans $U$. La condition de rang d'accessibilité forte en $x \in M$ est donnée par dim $l_0(x) = n$. Nous la notons $(SARC)_x$.

Soit $\delta > 0$, nous notons $u^\delta(.)$ le contrôle constant par morceau et égal à $u(k\delta)$ si $t \in [k\delta; (k+1)\delta[$. Soit $W$ un sous ensemble de $M$, les deux états $x_0, \bar{x}_0$ dans $W$ sont dits $\delta$-indistinguables dans $W$ (noté $x_0 I_W^\delta \bar{x}_0$) si nous avons la propriété suivante :

Pour chaque $r \geq 0$ fixé, pour tout contrôle $u^\delta(.)$ pour lequel nous avons $\varphi(t, x_0, u^\delta(.)) \in W$ et $\varphi(t, \bar{x}_0, u^\delta(.)) \in W$ pour tout $0 \leq t \leq r\delta$ alors $h(\varphi(r\delta, x_0, u^\delta(.))) = h(\varphi(r\delta, \bar{x}_0, u^\delta(.)))$. Nous notons $I_W^\delta := \{\xi' / \xi I_W^\delta \xi'\}$.

Nous donnons la définition d'observabilité de Liapunov du discrétisé en un point $x \in M$ introduite par Sontag dans [53].

**Définition 8.** (2.1) est $(L-S-obs)_x$ si pour tout voisinage $W$ de $x$, il existe un réel $\delta_0 > 0$ tel que ; pour tout $0 < \delta < \delta_0$ ; il existe un voisinage $V$ de $x$ contenu dans $W$ tel que $I_W^\delta(x) \bigcap V = \{x\}$.

Sontag a aussi introduit dans [53] la condition de rang d'observabilité du discrétisé en un point $x \in M$. Elle est vérifiée s'il existe des entiers positifs $k, n_1, \dots, n_k$, un réel $\delta_0 > 0$ et des suites $(u^{11}, \dots, u^{1n_1}) \in U^{n_1}, \dots, (u^{k1}, \dots, u^{kn_k}) \in U^{n_k}$ tel que pour tout $0 < \delta < \delta_0$ et pour toute suite de contrôles $(u^{1\delta}(.); \dots; u^{k\delta}(.))$ tel que $u^{j\delta}(t) = u^{ji}$ ; si $t \in [i\delta, (i+1)\delta[$, nous avons :
rang $\begin{pmatrix} dh(\varphi(n_1\delta, x, u^{1\delta}(.))) \\ \vdots \\ dh(\varphi(n_k\delta, x, u^{k\delta}(.))) \end{pmatrix} = n$. Nous la notons $(S.ORC)_x$.

En utilisant ces dernières notions d'observabilités, Sontag a montré dans [53] le théorème suivant :

**Théorème 7.** *Si* (2.1) *vérifie la $(SARC)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(L-obs)_x$ est vérifiée pour tout état $x$ de $M$.*
2. *$(ORC)_x$ est vérifiée dans un ouvert dense de $M$.*
3. *$(L-S-obs)_x$ est vérifiée pour tout état $x$ de $M$.*
4. *$(S.ORC)_x$ est vérifiée dans un ouvert dense de $M$.*

## 2.4 Observateur

La thèse ne porte pas sur les observateurs mais il nous semble intéressant de mentionner un résultat important concernant les observateurs pour les systèmes non linéaires car nous voyons que la notion d'observabilité joue un rôle essentiel.

Nous nous plaçons dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et $U = \mathbb{R}^m$. Nous donnons par la suite la définition d'un observateur asymptotique local pour le système (2.1). Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= g(\hat{x}(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

**Définition 9.** Le système (2.7) est un observateur asymptotique local pour le système (2.1) si pour tout contrôle $u$ :

1. $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 / \|\hat{x}(0) - x(0)\| < \delta \Longrightarrow \|\hat{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$, pour tout $t > 0$.
2. $\exists r > 0 / \|\hat{x}(0) - x(0)\| < r \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x(t)$.

Le système (2.7) est appelé un observateur asymptotique global si $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x(t)$ pour toute condition initiale $\hat{x}(0) - x(0)$. La définition d'un observateur exponentiel local est donnée ci dessous.

**Définition 10.** Le système (2.7) est un observateur exponentiel local pour le système (2.1) si pour tout contrôle $u$ :

1. $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 / \|\hat{x}(0) - x(0)\| < \delta \Longrightarrow \|\hat{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon \exp(-ct)$, pour tout $t > 0$ et pour une certaine constante $c$.

Le système (2.7) est appelé un observateur exponentiel global Si $\forall \varepsilon > 0, \|\hat{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon \exp(-ct)$, pour tout $t > 0$, pour une certaine constante $c$ et pour toute condition initiale $\hat{x}(0) - x(0)$.

Un problème important de l'automatique est celui de la stabilisation par retour d'état du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Plusieurs auteurs ont abordé ce sujet en cherchant un feedback $x \mapsto u(x)$ qui rend le système globalement asymptotiquement stable. Cependant le feedback $u(x)$ ne permet pas de stabiliser le système lorsque nous ne connaîssons pas l'état $x(t)$. Nous sommes donc amenés à construire un observateur qui produit une estimation de l'état basée sur des observations passées à tout instant.

La théorie de l'estimation de l'état est parfaitement établie depuis plusieurs années dans le cadre des systèmes linéaires, l'observateur de Luemberg (Luenberger,1966) dans [44] ou le filtre de Kalman (kalman et Bucy,1960), dans [31] sont des solutions standard largement utilisées qui assurent pour les systèmes observables la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro quelle que soit l'erreur d'initialisation.

Pour les systèmes non linéaires, la recherche d'observateurs à convergence exponentielle est encore un domaine ouvert. Sans doute, l'influence des entrées mais aussi par exemple l'inexistence de critères d'observabilité algébriques simples comme le critère du rang pour les systèmes linéaires sont des raisons qui peuvent expliquer cet état de fait.

Une idée classique en automatique est de ramener le problème non linéaire de départ à une formulation linéaire que nous traiterons plus facilement. Dans cette optique, certains auteurs ont utilisé des techniques consistant à transformer le système non linéaire en un système linéaire ou bilinéaire modulo une injection de sortie et à appliquer ensuite les techniques d'estimation linéaires (Krener et Isidori, 1983 dans [39], Krener et Respondek, 1985 dans [40], Hammouri et Gauthier, 1992 dans [17]). Toutefois, ces méthodes peuvent être difficiles à appliquer du fait de conditions très restrictives qui traduisent la linéarisabilité ou bilinéarisabilité du système.

Une autre méthode importante pour la synthèse d'observateur consiste à transformer le système non linéaire de départ, qui est supposé uniformément observable, en une forme canonique d'observabilité puis à construire un observateur grand gain (Gauthier et al., 1992, Deza et al., 1992).

Nous donnons maintenant une caractérisation de l'observabilité uniforme pour les systèmes mono-entrée /mono-sortie qui sont affines en l'entrée :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) & = & h(x(t)) \end{array} \right. \tag{2.8}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathbb{R}$.

Gauthier et Bernard, 1981, voir [16], Gauthier et al.,1992 ont donné une condition nécessaire pour que (2.8) soit uniformément observable.

**Théorème 8.** *Si le système* (2.8) *est uniformément observable alors il existe un système de coordonnés locales en chaque point d'un ouvert dense de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* (2.8) *est transformé en un système de la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X} & = & AX + \psi(X) + \phi(X)u \\ y & = & X_1 \end{array} \right. \tag{2.9}$$

*où :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} ; \psi(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi^n(X) \end{pmatrix} \text{ et } \phi(X) = \begin{pmatrix} \phi^1(X_1) \\ \phi^2(X_1, X_2) \\ \vdots \\ \phi^n(X) \end{pmatrix}$$

*et le système de coordonnées locales est défini par l'application* $\phi$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *qui à l'état* $X$ *associe* $(h(X), L_f h(X), \ldots, (L_{f^{n-1}})h(X))$.

*Remarque 4.* L'observabilité d'un système analytique entraîne seulement que $\phi$ est un difféomorphisme local presque partout (Gauthier et Bornard, 1981) dans [16]. Dans le cas où $\phi$ est un difféomorphisme global, nous avons alors : (2.8) est uniformément observable si et seulement s'il est difféomorphe par $\phi$ à un système de la forme (2.9) qui est appelée forme canonique d'observabilité uniforme des systèmes non linéaires mono-sortie affine en l'entrée.

Nous allons voir maintenant qu'elle permet de construire effectivement des observateurs à convergence exponentielle : les observateurs de type grand-gain.

**Théorème 9.** *Sous les hypothèses :*

- $H_0$) $\phi$ *est un difféomorphisme global,* (2.8) *est uniformément observable (et donc d'après la dernière remarque,* (2.8) *s'écrit globalement sous la forme canonique).*
- $H_1$) *Les fonctions* $\phi$ *et* $\psi$ *sont globalement lipschitziennes.*
- $H_2$) *L'entrée* $u$ *est mesurable et bornée.*

*l'observateur grand-gain (de type Luenberger) :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d\hat{X}}{dt} & = & A\hat{X} + \psi(\hat{X}) + \phi(\hat{X})u - (\theta L_1, \theta^2 L_2, \ldots, \theta^n L_n)(C\hat{X} - y) \\ y & = & CX = X_1 \end{array} \right. \tag{2.10}$$

*où* $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$ *est choisie telle que* $A - LC$ *soit stable (ce qui est possible), est un observateur à convergence exponentielle de* (2.8) *pour* $\theta > 0$ *suffisamment grand.*

Précisément en notant l'erreur d'estimation par $e = \hat{X} - X$, nous avons :

$$\exists(k > 0, B > 0, \lambda > 0); \forall t \geq 0; \forall e(0); \forall \theta; \|e(t)\| \leq \theta^{n-1}\sqrt{B}\|e(0)\| exp(-\frac{1}{2}(\lambda\theta - 2BK)t).$$

**Théorème 10.** *(Deza et al.,1992)*
*Sous les hypothèses $H_0, H_1 et H_2$ du théorème précédent, l'observateur grand gain donné par le filtre de Kalman étendu suivant :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{d\hat{X}}{dt} & = & A\hat{X} + \psi(\hat{X}) + \phi(\hat{X})u - PC^T r^{-1}(C\hat{X} - y) \\ \frac{dP}{dt} & = & Q_\theta - PC^T r^{-1} CP + P(A + \psi^*(\hat{X}) + \phi^*(\hat{X})u) + (A + \psi^*(\hat{X}) + \phi^*(\hat{X})u)P \end{array}\right. \tag{2.11}$$

*où $Q_\theta = \theta^2 \Delta_{-1} Q \Delta_{-1}; Q > 0$ et $\Delta = diag(1, \frac{1}{\theta}, \ldots, \frac{1}{\theta^{n-1}})$ est aussi un observateur à convergence exponentielle de (2.8) pour $\theta$ suffisamment grand, c.à.d :*
$\exists T > 0, \exists(k > 0, B > 0, \lambda > 0); \forall t \geq T; \forall p(0) > 0, \forall e(0); \forall \theta; \|e(t)\| \leq \theta^{n-1}\sqrt{B}\|e(T)\|$
$exp(-\frac{1}{2}(\lambda\theta - 2BK)(t - T)$.

(notation : $\phi^*$ est la jacobienne de $\phi$).

*Remarque 5.*
1. La convergence de l'observateur est assuré grâce à la forme triangulaire particulière de $\phi$. Le fait que $(A, C)$ soit observable et $u$ est borné ne suffit pas.
2. Nous pouvons mettre $\phi$ sous cette forme grâce à l'observabilité uniforme du système non linéaire.
3. Nous voyons bien que la notion d'observateur est lié directement à l'observabilité qui présente une condition nécessaire à la synthèse d'un observateur.

## 2.5 Entrées universelles

Nous déduisons immédiatement à partir de ce qui précède que pour un système observable, pour tout couple $(x_0, \bar{x}_0)$ d'états différents, il existe une entrée admissible qui donne lieu à deux sorties différentes. L'entrée en question peut, naturellement, dépendre du couple d'états que nous avons considéré. En pratique, nous nous intéressons au cas où l'entrée $u$ ayant été fixée, tout couple d'états différents donne lieu à des sorties différentes. En effet, dans ce cas seulement, nous pouvons connaître l'état initial du système à partir de la connaissance de la sortie.

Nous donnons par la suite la définition d'une telle entrée.

**Définition 11.** Une entrée $u$ admissible est dite universelle si elle distingue toute paire d'états qui est distinguable par une certaine entrée $v$.

Nous pouvons alors nous demander si une telle entrée existe, éventuellement sous des hypothèses convenables. Eduardo D. Sontag est la première personne qui a étudié ce problème dans [54], puis Héctor J. Sussmann dans [58].

Sontag s'est intéressé aux systèmes discrets polynomiaux suivants

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & p(x_k, u_k) \\ y_k & = & h(x_k) \end{array} \right. . \tag{2.12}$$

- où $u_k, x_k$ et $y_k$ appartiennent respectivement à des sous ensembles algébriques $U$ de $\mathbb{R}^m$, $X$ de $\mathbb{R}^n$ et $Y$ de $\mathbb{R}^p$.
- $U$ est «irréductible».
- $P : X \times U \to X$ et $h : X \to Y$ sont des fonctions polynomiales.

Rappelons qu'un sous ensemble $S$ d'un espace affine $\mathbb{R}^q$, $q \geq 0$ est algébrique s'il est défini par des équations polynomiales $S = \{Q_i(x_1; \ldots; x_q) = 0\}$. Il est dit irréductible s'il n'est pas l'union de deux ensembles algébriques propres. Dans ce contexte, un sous ensemble $R$ d'un ensemble algébrique irréductible $S$ est générique lorsque son complémentaire est contenu dans un sous ensemble algébrique propre de $S$.
Pour montrer l'existence d'une entrée universelle, Sontag a introduit une nouvelle notion d'observabilité.

**Définition 12.** Le système (2.12) est «déterminable à l'état final» si et seulement s'il existe une séquence d'entrée $(u_0, \ldots, u_r)$ telle que pour tout couple d'état distincts $(x, z)$
- ou bien $(h(x), h(p(x, u_1)), h(p(p(x, u_1), u_2)), \ldots, h(p(\ldots p(x, u_1), \ldots, u_r)) \neq$ $(h(z), h(p(z, u_1)), h(p(p(z, u_1), u_2)), \ldots, h(p(\ldots p(z, u_1), \ldots, u_r))$
- ou bien $p(\ldots p(x, u_1), \ldots, u_r) = p(\ldots p(z, u_1), \ldots, u_r)$.

*Remarque 6.* Si (2.12) est «déterminable à l'état final» alors il existe une séquence d'entrée qui permet de déterminer l'état du système obtenu après avoir appliqué cette séquence d'entrée. Autrement dit, si deux états distincts produisent les mêmes sorties après avoir appliqué une séquence d'entrée alors ces deux états coïncident après avoir appliqué cette séquence d'entrée.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant démontré par Sontag dans [54]

**Théorème 11.** *Si* (2.12) *est observable (au sens de la définition 2) alors il existe un entier naturel $r$ et un sous ensemble $R$ dense dans $U^{r+1}$ tel que* (2.12) *est «déterminable à l'état final» pour tout* $(u_0, \ldots, u_r) \in R$.

Hector J. Sussmann s'est intéressé aux systèmes non linéaires continus. Il a montré l'existence d'une entrée universelle analytique pour un système analytique et même que l'ensemble des entrées universelles est dense dans l'espace des entrées admissibles avec une topologie convenable.

Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes :

- $(H_1)$ : $M$ est une variété analytique.
- $(H_2)$ : $U$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^m$ contenu dans la fermeture de l'intérieur de $U$ et l'intérieur de $U$ est connexe.
- $(H_3)$ : $f : M \times U \to TM$ est analytique.
- $(H_4)$ : $h : M \to \mathbb{R}^p$ est analytique.

Considérons aussi l'espace des fonctions de classe $C^\infty$ définies sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, que nous noterons $C^\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, muni de la topologie $C^\infty$ suivante :

Une suite de fonction $\{u_\alpha\}$ converge vers $u$ pour la topologie $C^\infty$ si et seulement si $\dfrac{d^j u_\alpha}{dt^j}$ converge vers $\dfrac{d^j u}{dt^j}$ uniformément sur $[a,b]$ pour tout $j$, (topologie de la convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivés).

Nous noterons ensuite $C^\infty([a,b],\overset{\circ}{U})$ l'espace des fonctions de classes $C^\infty$ définies sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intérieur de $U$. $C^\infty([a,b],\overset{\circ}{U})$ est un ouvert de $C^\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ pour la topologie $C^\infty$.

Nous pouvons alors énoncer les deux résultats suivants démontrés par Hector J. Sussmann dans [58].

**Théorème 12.** *Si* (2.1) *vérifie les hypothèses* $(H_1)$,$(H_2)$,$(H_3)$ *et* $(H_4)$ *alors* (2.1) *admet une entrée universelle analytique, c'est à dire une entrée permettant de distinguer toute paire de points distinguables par une certaine entrée.*

**Théorème 13.** *Si* (2.1) *vérifie les hypothèses* $(H_1)$,$(H_2)$,$(H_3)$ *et* $(H_4)$ *alors l'ensemble des entrées universelles est dense dans* $C^\infty([0,T],\overset{\circ}{U})$ *pour chaque réel* $T$ *positif fixé.*

*Remarque 7.* En particulier si le système (2.1) est observable (au sens de la définition 2) et vérifie les hypothèses $(H_1)$,$(H_2)$,$(H_3)$ et $(H_4)$ alors il existe une entrée permettant de distinguer tout couple d'états distincts. (2.1) est uniformément observable si et seulement si toutes les entrées sont universelles.

Comme nous l'avons vu précédemment, il existe des entrées qui ne distinguent pas deux états distincts. Ces entrées sont appelées «mauvaises» entrées. Nous pourrons penser qu'il convient tout d'abord de reconnaître les «mauvaises» entrées pour ensuite les écarter. Ceci n'est pas un bon point de vue, malgré le fait que les mauvaises entrées d'un système non linéaire sont non nombreuses.

En fait les mauvaises entrées constituent la singularité du problème d'observation, et que, en tant que singularité, elles doivent jouer un rôle déterminant, comme c'est souvent le cas dans l'étude des systèmes dynamiques sur le comportement du système «à côté». Il faudrait donc seulement ne pas les écarter, mais plutôt les utiliser. Ce travail a été fait par J. P. Gauthier.

## 2.6 Observabilité infinitésimale

J.P. Gauthier et I.A.K. Kupka ont introduit dans [22] de nouvelles notions d'observabilités. Comme nous avons vu précédemment, pour avoir la notion d'observabilité, l'application (état initial $\to$ sortie en tant que fonction) doit être injective.

Malheureusement, cette notion d'observabilité est instable pour de petites perturbations du système. Pour cette raison, Gauthier et Kupka ont ajouté la condition d'immersion (injectivité infinitésimale) en plus de l'injectivité.

Pour $u$ fixé, le champ de vecteur $f_u$ peut être considéré comme une application $C^\infty$ de $M$ dans $TM$. Nous pouvons alors considérer l'application tangente $df_u$ de $TM$ dans $T(TM)$, malheureusement $df_u$ n'est pas un champ de vecteur. En effet, si nous notons $\Pi'$ la projection canonique de $T(TM)$ dans $TM$ définie ainsi

$$\begin{array}{rcccc} \Pi' & : & T(TM) & \to & TM \\ & & w & \mapsto & v \text{ tq } w \in T_v(TM) \end{array}$$

$\Pi' \circ df_u$ n'est pas égal à l'identité de $TM$.

Nous donnons par la suite la construction de l'involution canonique $\omega$ de $T(TM)$. Soit $(U, \varphi)$ une carte sur $M$. Notons $\Pi$ la projection canonique de $TM$ dans $M$. Une carte $(V, \psi)$ sur $TM$ est définie ainsi

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & V = \Pi^{-1}(U) & \to & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ & & v & \mapsto & (\varphi(\Pi(v)), v_{(U,\varphi)}) \end{array}$$

avec $v_{(U,\varphi)}$ l'expression locale de $v$ dans la carte $(U, \varphi)$.

On donne maintenant la formule de changement de cartes sur $TM$. Soient $(U_1, \varphi_1)$, $(U_2, \varphi_2)$ deux cartes sur $M$ tel que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et soient $(V_1, \psi_1)$, $(V_2, \psi_2)$ deux cartes sur $TM$. Le changement de carte s'écrit

$$\begin{array}{rcccc} \psi_1 \circ \psi_2^{-1} & : & \psi_2(\Pi^{-1}(U_1 \cap U_2)) & \to & \psi_1(\Pi^{-1}(U_1 \cap U_2)) \\ & & (a_2, v_2) & \mapsto & (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(a_2), d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(a_2).v_2) \end{array}$$

Une carte $(W, \theta)$ sur $T(TM)$ est définie ainsi

$$\begin{array}{rcccc} \theta & : & W = (\Pi')^{-1}(V) & \to & \psi(V) \times \mathbb{R}^{2n} = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} \\ & & w & \mapsto & (\psi \circ \Pi'(w), e_1, e_2) \\ & & & & = (\varphi \circ \Pi \circ \Pi'(w), e, e_1, e_2) \end{array}$$

avec

- $e =$ l'expression locale de $v = \Pi'(w)$ dans la carte $(U, \varphi)$.
- $(e_1, e_2) =$ l'expression locale de $w$ dans la carte $(V, \psi)$.

On donne maintenant la formule de changement de cartes sur $T(TM)$. Soient $(U_1, \varphi_1)$, $(U_2, \varphi_2)$ deux cartes sur $M$ tel que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, soient $(V_1, \psi_1)$, $(V_2, \psi_2)$ deux cartes sur $TM$ et soient $(W_1, \theta_1)$, $(W_2, \theta_2)$ deux cartes sur $TTM$. Le changement de carte s'écrit

$$\begin{array}{rcccc} \theta_1 \circ \theta_2^{-1} & : & \theta_2((W_1 \cap W_2)) & \to & \theta_1((W_1 \cap W_2)) \\ & & (a, e, e_1, e_2) & \mapsto & (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(a), d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(a).e, d(\psi_1 \circ \psi_2^{-1})(a, e).(e_1, e_2)) \end{array}$$

Sur $\theta(W)$ on définit l'application

$$\begin{array}{rcccc} \omega_\theta & : & \theta(W) & \to & \theta(W) \\ & & (a, e, e_1, e_2) & \mapsto & (a, e_1, e, e_2) \end{array}$$

$\omega_\theta$ est clairement une involution qui échange les deuxième et troisième coordonnée. Sur $W$, on définit $\omega$ par $\omega = \theta^{-1} \circ \omega_\theta \circ \theta$. En utilisant les changements de cartes ci dessus, on vérifie que $\omega$ est bien définie, c'est à dire indépendent du choix de la carte $(\theta, W)$.

Ce qui permet de définir l'involution canonique $\omega$ globalement sur $T(TM)$. $\omega$ est un difféomorphisme de classe $C^\infty$ car $\omega \circ \omega$ est égale à l'identité de $T(TM)$. On va vérifier maintenant que $\Pi' \circ \omega = d\Pi$.

Soient $w \in T_v(TM)$, $(V, \psi)$ une carte en $v$, $(U, \varphi)$ une carte en $x = \Pi(v)$. Posons $\varphi(x) = a$ et soit $e =$ l'expression locale de $v = \Pi'(w)$ dans la carte $(U, \varphi)$ et $(e_1, e_2) =$ l'expression locale de $w$ dans la carte $(V, \psi)$.

On commence par donner l'écriture locale de $d\Pi(v)(w)$. On a

$$\begin{array}{rcl} \varphi \circ \Pi \circ \psi^{-1}(a, e) & = & \varphi \circ \Pi(v) = \varphi(x) = a \\ d(\varphi \circ \Pi \circ \psi^{-1})(a, e) & = & (Id\ 0) \end{array}$$

On déduit alors que l'expression locale de $d\Pi(v)(w)$ est $e_1$ dans la carte $(U, \varphi)$. On donne maintenant l'expression locale de $\Pi' \circ \omega(w)$ dans la carte $(U, \varphi)$.

$$\begin{array}{rcl} \omega(w) & = & \theta^{-1} \circ \omega_\theta \circ \theta(w) \\ & = & \theta^{-1} \circ \omega_\theta(a, e, e_1, e_2) \\ & = & \theta^{-1}(a, e_1, e, e_2) \\ \Pi' \circ \omega(w) & = & \Pi' \circ \theta^{-1}(a, e_1, e, e_2) \end{array}$$

$\Pi' \circ \omega(w)$ a pour expression locale $e_1$ dans la carte $(U, \varphi)$. On vérifie ainsi que $\Pi' \circ \omega = d\Pi$, par suite $\Pi' \circ \omega \circ \omega = d\Pi \circ \omega = \Pi'$. En composant avec $\omega$, $\omega \circ df_u$ est un champ de vecteur car $\Pi' \circ \omega \circ df_u = d\Pi \circ df_u = d(\Pi \circ f_u) = d(Id_M) = Id_{TM}$.

Le relevé du système (2.1) sur $TM$ est défini ainsi : Pour $u$ fixé, à l'application $f$ de $M \times U$ dans $TM$, nous associons le champ de vecteur $\omega \circ df_u$ de $TM$ dans $T(TM)$ . De même, la différentielle de l'application $h$ de $M$ dans $\mathbb{R}^p$ est l'application $dh$ définie de $TM$ dans $\mathbb{R}^p$. Le relevé du système (2.1) est alors le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi}(t) & = & \omega \circ df(\xi(t), u(t)) \\ \eta(t) & = & dh(\Pi \circ \psi(t, \xi_0, u(.))).\xi(t) \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Remarquons que les trajectoires de (2.1) et (2.13) sont reliées ainsi :

Notons que si $t \mapsto \psi(t, \xi_0, u(.))$ est une trajectoire associée à ce champ de vecteurs $(\omega \circ df)$ de condition initiale $\xi_0$ avec un contrôle $u$ sur $[0, t]$, alors $t \mapsto \Pi(\psi(t, \xi_0, u(.)))$ est une trajectoire de (2.1) issue de $x_0 = \Pi(\xi_0)$ et avec le même contrôle.

Nous énonçons maintenant la définition d'observabilité infinitésimale.

**Définition 13.** Pour $(u, x) \in L^\infty(U) \times M$ nous considérons l'application $p_{u,x}$ de $T_xM$ dans $L(\mathbb{R}^p)$ qui a tout $\xi_0 \in T_xM$ associe la fonction $t \mapsto dh(\varphi(t, x, u(.))).\xi(t)$ ($\xi(t)$ est la solution de ((2.13)) de condition initiale $\xi_0$). Le système (2.1) est infinitésimalement observable en $(u, x)$ si l'application linéaire $p_{u,x}$ est injective et uniformément infinitésimalement observable s'il est infinitésimalement observable pour tout couple $(u, x) \in L^\infty(U) \times M$.

J.P. Gauthier et I.A.K. Kupka ont donné une caractérisation des systèmes uniformément infinitésimalement observable. Pour des raisons pratiques, ils supposent que $h$ dépend de $u$. Nous considérons alors le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & h(x(t), u(t)) \end{array} \right. \tag{2.14}$$

avec $f : M \times U \to TM$ et $h : M \times U \to \mathbb{R}^p$. Nous notons : $h_u(x(t)) = h(x(t), u(t))$ et $f_u(x(t)) = f(x(t), u(t))$.

Nous supposons dans la suite que (2.1) est analytique, $m \geq p$ et $p = 1$. Le théorème suivant démontré par J.P. Gauthier et I.A.K. Kupka dans [22] fait le lien entre les deux notions d'observabilité et d'observabilité infinitésimale, il est vrai même pour $p > 1$.

**Théorème 14.** *1. Pour tout contrôle $\tilde{u}$, l'ensemble $\theta(\tilde{u})$ des états $x \in M$ tel que* (2.14) *est infinitésimalement observable en $(\tilde{u}, x)$ est un ouvert de $M$.*

*2. Si* (2.14) *est observable pour un contrôle $\tilde{u}$ alors $\theta(\tilde{u})$ est dense dans $M$.*

*3. Si* (2.14) *est infinitésimalement observable en $(\tilde{u}, x)$ alors il existe un voisinage ouvert $V$ de $x$ tel que la restriction de* (2.14) *à $V$ est observable pour le contrôle $(\tilde{u})$.*

Nous considérons la famille de distribution $D(u) = \{D_0(u) \supset D_1(u) \supset \ldots \supset D_{n-1}(u)\}$ sur $M$ indexée par la valeur $u \in U$ du contrôle. $D_0(u) = Ker(d_X h_u(x))$, où $d_X$ est la différentielle par rapport à la variable $x$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, $D_{k+1}(u) = D_k(u) \bigcap Ker(d_X(L_{f_u}^{k+1}(h_u)))$. Cette famille de distribution n'est pas en générale régulière, c'est à dire $D_i(u)$ n'a pas un rang constant égale à $n - i - 1$.

**Définition 14.** $D(u)$ est appelée le drapeau canonique associé au système (2.14). Dans le cas où $D(u)$ est régulière et indépendante de $u$ (notation :$\partial_u D(u) = 0$), elle est appelée uniforme.

J.P. Gauthier et I.A.K Kupka ont montré dans [22] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de (2.14) à un ouvert dense de $M$ soit uniformément infinitésimalement observable est que $\partial_u D(u) = 0$.

Nous donnons tout d'abord le théorème suivant, démontré par J.P. Gauthier et I.A.K. Kupka dans [22], qui généralise celui de Gauthier et Bernard, 1981 dans [16], Gauthier et al., 1992 dans lequel ils donnent une caractérisation de l'observabilité uniforme pour les systèmes affines en contrôle (résultat présenté dans le paragraphe "observateur").

**Théorème 15.** *Le système* (2.14) *admet un drapeau canonique uniforme si et seulement si pour tout $x_0 \in M$, il existe un système de coordonné de $x_0$, $(V_{x_0}, x^0, \ldots, x^{n-1})$ dans lequel* (2.14) *s'écrit :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx^0}{dt} & = & f_0(x^0, x^1, u) \\ & \vdots & \\ \frac{dx^i}{dt} & = & f_i(x^0, x^1, \ldots, x^{i+1}, u) \\ & \vdots & \\ \frac{dx^{n-1}}{dt} & = & f_{n-1}(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}, u) \\ y & = & h(x^0, u) \end{array} \right. \tag{2.15}$$

*tel que* $\forall (x, u) \in V_{x_0} \times U; \frac{\partial h}{\partial x^0}(x^0, u) \neq 0;\ \frac{\partial f_0}{\partial x^1}(x^0, x^1, u) \neq 0; \ldots; \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x^{n-1}}(x^0, \ldots, x^{n-1}, u) \neq 0.$

**Théorème 16.** *Si* (2.14) *admet un drapeau canonique uniforme alors pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert $v_{x_0}$ de $x_0$ tel que la restriction de* (2.14) *à $v_{x_0}$ est uniformément observable et uniformément infinitésimalement observable.*

Autrement dit, la condition de drapeau canonique uniforme, devient une condition suffisante pour l'observabilité infinitésimale uniforme sur un ouvert dense de $M$.

Nous considérons par la suite les hypothèses suivants :

- $(H_1) : U = I^m, I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle compact et le système est analytique.
- $(H_2) : U = \mathbb{R}^m$, $f$ et $h$ sont algébriques par rapport à $u$.

Nous notons $\tilde{X}$ le sous ensemble de $U \times M$ défini par

$$\tilde{X} = \{(u, x)/d_X h_u^0(x) \wedge \ldots \wedge d_X h_u^{n-1}(x) = 0\}$$

et nous notons $X$ la projection de $\tilde{X}$ sur $M$.

**Théorème 17.** *Si* (2.1) *vérifie l'hypothèse* $(H_1)$ *ou* $(H_2)$ *et s'il est uniformément infinitésimalement observable alors :*

1. *$X$ est «subanalytique» (semisubanalylitique dans le cas de $(H_2)$) ensemble de codimension 1. Dans le cas de $H_1$, $M$ est fermé.*
2. *La restriction de* (2.1) *à $M \setminus X$ possède un drapeau canonique uniforme.*

*Remarque 8.* Il est possible d'obtenir des résultats dans le cas non analytique. Cependant, ils seraient faibles dans ce sens : Nous avons vu dans le théorème précédent que l'observabilité infinitésimale uniforme est une condition suffisante pour que la restriction du système à un ouvert dense de $M$ uniformément par rapport à $u$ possède un drapeau canonique. Dans le cas non analytique, nous avons le même résultat, mais seulement sur un ouvert dense de $M \times U$.

# 3

# Préservation de l'observabilité après discrétisation

## 3.1 Introduction

Si le problème de la conservation de l'observabilité des systèmes linéaires après discrétisation est résolu depuis longtemps par R. Kalman et K. Narendra dans [30], pour les systèmes non linéaires la question est beaucoup plus complexe. Notons qu'un problème analogue à propos de la contrôlabilité a été étudié par E.D. Sontag dans [55].

Lorsqu'un système est réglé par commande numérique, le contrôle est appliqué pendant des temps fixés $0, \delta, 2\delta, \ldots$. Pour un système continu, la situation est modélisée par le fait que le contrôle appliqué est constant sur les intervalles $[0, \delta), [\delta, 2\delta), \ldots$. De plus la mesure (partielle) de l'état se fait aux instants $0, \delta, 2\delta, \ldots$.

Dans ce chapitre nous montrons la préservation de l'observabilité après discrétisation. Nous utilisons la notion d'observabilité infinitésimale introduite par J.P. Gauthier et Kupka dans [22]. Nous montrons que si notre système est infinitésimalement observable et uniformément observable, le contrôle prenant ses valeurs dans un espace compact alors le système discrétisé est observable pour tout pas de discrétisation assez petit et pour tout contrôle dont la dérivée est bornée. Ceci fait l'objet de l'article que nous donnons par la suite.

Nous présentons aussi une autre méthode pour montrer l'observabilité locale du système discrétisé.

Enfin, en supposant que le système (2.1) est analytique et observable, nous montrons que l'ensemble des couples d'états distinguables par le système (2.6) est partout dense dans $M \times M$ (à condition que le pas de discrétisation soit assez petit).

Remarquons que Gerhard Kreisselmeir a montré dans [38] la conservation de l'observabilité après discrétisation pour les systèmes linéaires en utilisant des pas de discrétisations non équidistants et périodiques. Pour tout pas de discrétisation de ce genre, le discrétisé est observable.

Comme nous l'avons vu précédemment, Sontag a montré la conservation de l'observabilité de lyapounov après discrétisation en supposant que le système vérifie la condition de rang d'accessibilité forte.

Nous présentons ci-après le texte d'un article que nous avons soumis à *Systems & Control Letters.*

On the preservation of the observability under sampling

**Abstract** In this paper, we investigate the problem of the preservation of observability under sampling.

## 3.2 Introduction

When a system is regulated by a digital computer, control decisions are often restricted to be taken at fixed times $0, \delta, 2\delta, \ldots$ For a continuous time system, the resulting situation can be modelled through the constraint that the inputs applied are constant on intervals $[0, \delta)$, $[\delta, 2\delta), \ldots$. Moreover if the system is given with a measurement map, the state is (partially) measured only at the fixed times $0, \delta, 2\delta, \ldots$.

The goal of this paper is to investigate the problem of the preservation of the observability for such systems; notice that an analogous problem : the preservation of the controllability is studied in [55].

Before stating our main theorem, we will give some notations and definitions. Given a system

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,u) \\ y & = & h(x) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

defined on a differentiable manifold $M$ and a sampling time $\delta > 0$, if we denote by $\varphi(t, x_0, u(\cdot))$ the solution of (3.1) with control $t \mapsto u(t)$ and initial condition $x_0$, the $\delta$-sampled system of (3.1) is :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & \varphi(\delta, x_k, \underline{u}_k^\delta(\cdot)) \\ y_k & = & h(x_k) \end{array} \right. \tag{3.2}$$

where $\underline{u}_k^\delta(\cdot)$ is the control constant on $[0, \delta]$ and equal to $u(k\delta)$.

There exist many notions of observability, we will work with this definition :

**Définition 15.** We say that system (3.1) is observable for all input if for every triple $(u, x_0, \bar{x}_0)$, where $t \mapsto u(t)$ is an admissible input, $(x_0 \neq \bar{x}_0)$ are initial conditions, the set of $t$ such that $h(\varphi(t, x_0, u(\cdot)) \neq h(\varphi(t, \bar{x}_0, u(\cdot))$ has not zero measure.

**Définition 16.** We say that system (3.2) is observable for all input if for every triple $(u, x_0, \bar{x}_0)$, where $u$ is an admissible input, ($x_0$ and $\bar{x}_0$) are initial conditions, the set of indices $k$ such that $h(x_k) \neq h(\bar{x}_k)$ is infinite.

We recall the notion of distinguishability :

**Définition 17.** We will say that the points $x_0$ and $\bar{x}_0$ (or that the pair $(x_0, \bar{x}_0)$) are distinguishable by system (3.1) if there exists a control $u$ such that the set of times $t$ satisfying $h(\varphi(t, x_0, u(\cdot)) \neq h(\varphi(t, \bar{x}_0, u(\cdot))$ has not zero measure.

The definitions are analogous for the discrete-time system (3.2).

Assuming the observability of system (3.1), is it true that system (3.2) is also observable? (at least for sampling times $\delta$ small enough). The answer is yes for linear system (see *e.g.* [56]) but, in general, the assumption of observability is not sufficient to guarantee the preservation of observability as we will see later. We need the notion of infinitesimal observability which was first studied by J.-P. Gauthier and I. Kupka (see [20]) and that we recall below.

Suppose that the set of admissible controls is $L^\infty(\mathrm{U})$, the set of all measurable essentially bounded U-valued functions ($\mathrm{U} \subset \mathbb{R}^m$), the space of our output functions will be $L(\mathbb{R}^p)$, the set of all measurable $\mathbb{R}^p$-valued functions. The "*lift of system* (3.1) *on* $TM$" is defined as follows : the mapping $f : M \times \mathrm{U} \to TM$ induces the tangent mapping $\mathrm{d}f : TM \times \mathrm{U} \to T(TM)$, then if $\omega$ denotes the canonical involution of $T(TM)$, $\omega \circ \mathrm{d}f$ defines a parametrized vector field on $TM$.

If $\pi : TM \to M$ denotes the canonical projection, let $t \mapsto \psi(t, \xi_0, u(\cdot))$ be a trajectory of this vector field associated with the control $u$ and with initial condition $\xi_0$, then $t \mapsto \pi(\psi(t, \xi_0, u(\cdot)))$ is the trajectory of (3.1) starting from $x_0 = \pi(\xi_0)$. Moreover, the function $h : M \to \mathbb{R}^p$ has a differential $\mathrm{d}h : TM \to \mathbb{R}^p$. The lift of (3.1) is then the system :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & \omega \circ \mathrm{d}f(\xi, u) \\ \eta & = & \mathrm{d}h(\pi \circ \psi(t, \xi_0, u)) \cdot \xi(t) \end{array} \right. \tag{3.3}$$

where $\pi$ denotes the canonical projection from $TM$ into $M$.

We have the following definition for the infinitesimal observability :

**Définition 18.** Given $(u, x) \in L^\infty(\mathrm{U}) \times M$, we consider the application $P_{u,x}$ between $T_xM$ and $L(\mathbb{R}^p)$ which associates to $\xi_0 \in T_xM$ the function $t \mapsto dh(\varphi(t, x, u(\cdot)) \cdot \xi(t)$ ($\xi(t)$ being the solution of (3.3) with initial condition $\xi_0$). System (3.1) is called infinitesimally observable at $(u, x)$ if the linear mapping $P_{u,x}$ is injective and uniformly infinitesimally observable if it is infinitesimally observable at all $(u, x) \in L^\infty(\mathrm{U}) \times M$.

## 3.3 Main result

The systems under consideration are of the form (3.1) where the state $x$ belongs to a compact smooth differentiable manifold $M$ of dimension $d$ and the inputs $u$ take value in a compact subset U of $\mathbb{R}^m$. We suppose that the $u$-parametrized vector fields $f(\cdot, u)$ are smooth ; the space of control functions will be the space $L^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{U})$ of all essentially bounded applications from $\mathbb{R}$ to U.

Given a positive number $\delta$, we denote by $u^\delta$, a piecewise constant control which takes constant value on intervals $[\,k\delta, (k+1)\delta\,[$ and we let $u^\delta(t) = u^\delta_k$ if $t \in [\,k\delta, (k+1)\delta\,[$.

The $\delta$-sampled system of (3.1) (with time sample $\delta$) is the discrete-time system :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & \varphi(\delta, x_k, \underline{u}^\delta_k(\cdot)) \\ y_{k+1} & = & h(x_{k+1}) \end{array}\right. \tag{3.4}$$

where $\underline{u}^\delta_k(\cdot)$ is the application defined on $[0, \delta]$ by $\underline{u}^\delta_k(t) = u^\delta_k$ and $\varphi(\delta, x_k, \underline{u}^\delta_k(\cdot))$ is the solution of (3.1) with initial condition $x_k$, control $\underline{u}^\delta_k(\cdot)$ at time $\delta$.

We will say that $u^\delta(\cdot)$ is $M$ D-bounded if there exists a derivable application $u$ such that $u^\delta(t) = u(k\delta)$ for $t \in [\,k\delta, (k+1)\delta\,[$ and the norm of the derivative of $u$ is bounded by $M$ (so $\| u(t+h) - u(t) \| \leq Mh$ for all $h$).

Our main result is the following :

**Théorème 18.** *Assume that system* (3.1) *is observable for every input $u(\cdot)$ and uniformly infinitesimally observable, then for all $M > 0$, there exists a $\delta_0 > 0$ such that the $\delta$-sampled system of* (3.1) *is observable (in the sense of definition 15)for all $\delta \leq \delta_0$ and all $M$ D-bounded input $u^\delta$.*

Before proving this result, we want to discuss the assumptions of this theorem in order to show that they are all essential.

First, we consider the following system (without control) in $\mathbb{R}^2$ :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x_1}(t) & = & -\| x(t) \|^2 x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) & = & \| x(t) \|^2 x_1(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array}\right. \tag{3.5}$$

where $x$ denotes the point of components $(x_1, x_2)$ and $\| \ \|$ the euclidean norm. The trajectories of this system are circles centered at the origin ; to be more precise, the solutions are given by :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & x_1(0)\cos(\| x(0) \|^2 t) - x_2(0)\sin(\| x(0) \|^2 t) \\ x_2(t) & = & x_1(0)\sin(\| x(0) \|^2 t) + x_2(0)\cos(\| x(0) \|^2 t) \end{array}\right.$$

this system is obviously observable. Given $\delta > 0$, consider now its $\delta$-sampled :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1((k+1)\delta) & = & x_1(k\delta)\cos(\| x(k\delta) \|^2 \delta) - x_2(k\delta)\sin(\| x(k\delta) \|^2 \delta) \\ x_2((k+1)\delta) & = & x_1(k\delta)\sin(\| x(k\delta) \|^2 \delta) + x_2(k\delta)\cos(\| x(k\delta) \|^2 \delta) \\ y(k\delta) & = & x_1(k\delta) \end{array}\right. \tag{3.6}$$

and the initial conditions $x^0 = (0, R)$ and $\bar{x}^0 = (0, -R)$. If we choose $R = \sqrt{\frac{2\pi}{\delta}}$, we have obviously $h(x^0) = h(\bar{x}^0)$ and $x(k\delta) = x^0$, $\bar{x}(k\delta) = \bar{x}^0$ for all $k \geq 0$ ; this proves that it is not possible to find $\delta$ such that system (3.6) is observable.

The same, slightly modified, idea provides the same result : consider the following system given on $S^1$, the circle of radius 1 and center $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -\dfrac{1}{1-u}x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \dfrac{1}{1-u}x_1 \\ h(x) & = & x_1 \end{array}\right. \tag{3.7}$$

where the space U is equal to $[0,1[$. We can give explicitly the solutions of this system :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & x_1(0)\cos U(t) - x_2(0)\sin U(t) \\ x_2(t) & = & x_2(0)\cos U(t) + x_1(0)\sin U(t) \end{array}\right.$$

with $U(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{1-u(s)}$ ; so the $\delta$-sampled of system (3.7) is

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1((k+1)\delta) & = & x_1(k\delta)\cos\dfrac{\delta}{1-u_k^\delta} - x_2(k\delta)\sin\dfrac{\delta}{1-u_k^\delta} \\ x_2((k+1)\delta) & = & x_2(k\delta)\cos\dfrac{\delta}{1-u_k^\delta} + x_1(k\delta)\sin\dfrac{\delta}{1-u_k^\delta} \\ y(k\delta) & = & x_1(k\delta) \end{array}\right. \tag{3.8}$$

take now $u_k^\delta = \dfrac{\pi-\delta}{\pi}$ for all $k$ ; all pairs of points $(x_1^0, x_2^0)$ and $(x_1^0, -x_2^0)$ are indistinguishable (notice also that $u^\delta$ is $M$ D-bounded for all $M$).

These two examples show that it seems reasonable to work in the frame of compact manifold with a compact set U. We want now to show that it is not possible to relax the hypothesis of infinitesimal observability. Consider the following system given on the sphere $S^2$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -(x_3+1)x_2 \\ \dot{x}_2 & = & (x_3+1)x_1 \\ \dot{x}_3 & = & 0 \\ y_1 & = & h_1(x) \\ y_2 & = & h_2(x) \end{array}\right. \tag{3.9}$$

where the observation function $h_1$ is equal to $x_3$ and $h_2$ is defined by :

$$h_2(x) = \left\{\begin{array}{ll} \exp\left(-\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}\right)\psi_1\left(\dfrac{x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)\psi_2(x_1) & \text{if } (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x_1,x_2)=(0,0) \end{array}\right.$$

with $\psi_1$ a smooth function with compact support $[-1,1]$, positive on $]-1,1[$ and $\psi_2$ a smooth function null on $]-\infty,0]$, positive on $]0,+\infty[$. If we use spherical coordinates :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \cos\theta\cos\varphi \\ x_2 & = & \cos\theta\sin\varphi \\ x_3 & = & \sin\theta \end{array}\right.$$

we can easily see that, on the circle of altitude $x_3 = \sin\theta_0$ ($\theta_0 \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), the function $h_2$ is zero excepted when $-\arcsin(\cos^3\theta_0) \leq \varphi \leq \arcsin(\cos^3\theta_0)$. It is not difficult to prove that system (3.9) is observable : the solution of this system is easily expressed as :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & x_1(0)\cos(x_3(0)+1)t - x_2(0)\sin(x_3(0)+1)t \\ x_2(t) & = & x_2(0)\cos(x_3(0)+1)t + x_1(0)\sin(x_3(0)+1)t \\ x_3(t) & = & x_3(0) \end{array}\right.$$

so if we take two trajectories $x(t)$ and $\bar{x}(t)$, issued from initial conditions $x(0)$ and $\bar{x}(0)$, such that $h(x(t)) = h(\bar{x}(t))$, we see that $x_3(0) = \bar{x}_3(0)$, then if we had $(x_1(0), x_2(0)) \neq (\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0))$, it would be possible to find a time $t_0 > 0$ such that $h_2(x(t_0)) = 0$ while $h_2(\bar{x}(t_0)) \neq 0$.

Let us show that the system (3.9) is not infinitesimally observable. More precisely, we will check that it is not infinitesimally observable at the South Pole.

Let $(V, \Psi)$ a chart on $S^2$ where $V = S^2 \backslash \{(0,0,1)\}$ defined by

$$\begin{array}{lccc} \Psi & : & V = S^2\backslash\{(0,0,1)\} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}) \end{array}$$

The reciprocal application of $\Psi$ is written

$$\begin{array}{lccc} \Psi^{-1} & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & S^2 \\ & & (y_1, y_2) & \mapsto & (\frac{2y_1}{1+\|y\|^2)}, \frac{2y_2}{1+\|y\|^2)}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}) \end{array}$$

While following the notations of the second method ( page ... ), in the chart $(V, \Psi)$ the system (3.9) is written

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{\alpha}(t) & = & \tilde{f}(\alpha(t)) \\ y_1(t) & = & (h_1 \circ \Psi^{-1})(\alpha(t)) \\ y_2(t) & = & (h_2 \circ \Psi^{-1})(\alpha(t)) \end{array}\right. \tag{3.10}$$

One notices that $(0,0,-1)$ are solution of (3.9), consequently $\Psi(0,0,-1) = (0,0)$ is solution of the system (3.10). A simple calculation gives us

$$(h_1 \circ \Psi^{-1})(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \frac{\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 - 1}{1 + \alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2}$$

however we can write

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1(t) & = & \frac{x_1(t)}{1-x_3(t)} \\ & = & \frac{x_1(0)cos((1+x_3(0))t) - x_2(0)sin((1+x_3(0))t)}{1-x_3(0)} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
x_1(0) &= \frac{2\alpha_1(0)}{1+\|\alpha(0)\|^2}\\
x_2(0) &= \frac{2\alpha_2(0)}{1+\|\alpha(0)\|^2}\\
x_3(0) &= \frac{\|\alpha(0)\|^2-1}{1+\|\alpha(0)\|^2}\\
1-x_3(0) &= \frac{2}{1+\|\alpha(0)\|^2}\\
1+x_3(0) &= \frac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}\\
\alpha_1(t) &= \alpha_1(0)cos(\tfrac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t) - \alpha_2(0)sin(\tfrac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t)\\
\alpha_2(t) &= \alpha_2(0)cos(\tfrac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t) + \alpha_1(0)sin(\tfrac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t)
\end{aligned}
$$

what gives us

$$
\begin{aligned}
(h_1\circ\Psi^{-1})(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) &= \frac{2((\alpha_1(0))^2+(\alpha_2(0))^2)-1}{1+2((\alpha_1(0))^2+(\alpha_2(0))^2)}\\
(h_2\circ\Psi^{-1})(\alpha_1(t),\alpha_2(t)) &= \exp -\frac{(1+\|\alpha(t)\|^2)^2}{(4\alpha_1^2(t)+4\alpha_2^2)^2(t)}\Psi_1(\frac{2\alpha_2(t)(1+\|\alpha_1(t)\|^2)^3)}{(4\alpha_1^2+4\alpha_2^2)^2})\\
&\quad \Psi_2(\frac{2\alpha_1(t)}{1+\|\alpha(t)\|^2})\\
&= \exp -\frac{(1+\alpha_1(0)^2+\alpha_2(0)^2)^2}{4\alpha_1(0)^2+4\alpha_2(0)^2}\\
&\quad \Psi_1(\frac{(2\alpha_2(0)cos(\frac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t)+\alpha_1(0)sin(\frac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t))(1+\alpha_1(0)^2+\alpha_2(0)^2)^3}{(4\alpha_1(0)^2+4\alpha_2(0)^2)^2})\\
&\quad \Psi_2(\frac{2\alpha_1(0)cos(\frac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t)-\alpha_2(0)sin(\frac{2\|\alpha(0)\|^2}{1+\|\alpha(0)\|^2}t)}{(1+\alpha_1(0)^2+(\alpha_2(0)^2})
\end{aligned}
$$

Let us note that the system (3.10) is infinitesimally observable if the following imput output application is an immersion

$$
\begin{array}{cccc}
P: & \mathbb{R}^2 & \to & L(R,\mathbb{R}^2)\\
 & (\alpha_1(0),\alpha_2(0)) & \mapsto & P(\alpha_1(0),\alpha_2(0))
\end{array}
$$

such as

$$P(\alpha_1(0),\alpha_2(0))(t) = (h_1\circ\psi^{-1}(\varphi(t,\alpha_1(0),\alpha_2(0)), h_2\circ\psi^{-1}((\varphi(t,\alpha_1(0),\alpha_2(0))))$$

$$\mathbf{dP}(\alpha_1(\mathbf{0}),\alpha_2(\mathbf{0}))\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \frac{8\alpha_1(0)}{1+2\alpha_1(0)^2+2\alpha_2(0)^2} & \frac{8\alpha_2(0)}{1+2\alpha_1(0)^2+2\alpha_2(0)^2}\\ \frac{\partial(h_2\circ\Psi^{-1})(\varphi(t,\alpha_1(0),\alpha_2(0))}{\partial\alpha_1(0)} & \frac{\partial(h_2\circ\Psi^{-1})(\varphi(t,\alpha_1(0),\alpha_2(0))}{\partial\alpha_2(0)}\end{pmatrix}$$

what gives us

$$\mathbf{dP}(\mathbf{0},\mathbf{0})\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

We have just shown that $dP$ is not injective, it results from it that the system (3.9) is not infinitesimally observable.

We will see now that the $\delta$-sampled of (3.9) is not observable. A sampling time $\delta > 0$ being given, the $\delta$-sampled of system (3.9) is given by :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1((k+1)\delta) & = & x_1(k\delta)\cos(x_3(k\delta)+1)\delta - x_2(k\delta)\sin(x_3(k\delta)+1)\delta \\ x_2((k+1)\delta) & = & x_2(k\delta)\cos(x_3(k\delta)+1)\delta + x_1(k\delta)\sin(x_3(k\delta)+1)\delta \\ x_3((k+1)\delta) & = & x_3(k\delta) \\ y_1((k+1)\delta) & = & h_1(x((k+1)\delta)) \\ y_2((k+1)\delta) & = & h_2(x((k+1)\delta)) \end{array}\right. \tag{3.11}$$

We will prove that there exist two distinct initial conditions $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ and $(\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, x_3^0)$ with same altitude $x_3^0$ such that $h_2(x(k\delta)) = h_2(\bar{x}(k\delta)) = 0$ for all $k \geq 0$.

From number theory, we know that there exists a rational number $r = \dfrac{a}{b}$ such that $0 < \dfrac{1}{r} - \dfrac{\pi}{\delta} < \dfrac{1}{a^2}$ ; moreover, the numerator of $r$ can be chosen arbitrarily large. Take such a number $r$ and let $x_3^0$ such that $(x_3^0 + 1)\delta = 2\pi r$, with this choice of $x_3^0$, the trajectory issued from a point $x^0$ with altitude $x_3^0$ is constituted by points on the circle of altitude $x_3 = x_3^0$ on $S^2$. The maximum of the angular distance between two consecutive points on this trajectory is at least equal to $\dfrac{2\pi}{b}$, so if we can find $a$ and $b$ such that $\dfrac{2\pi}{b} > 2\arcsin(\cos^3\theta_0)$ (where $\theta_0 \in ]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$) we will be able to find a point $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ such that $h_2(x(k)) = 0$ for all $k \geq 0$ (indeed, it will be possible to choose this point such that none of the points $x^0(k)$ comes in the angular sector $-\arcsin(\cos^3\theta_0) \leq \theta \leq \arcsin(\cos^3\theta_0)$) and if we take $\bar{x}_1^0 = x_1(\delta)$, $\bar{x}_2^0 = x_2(\delta)$ and $\bar{x}_3^0 = x_3^0$, we will also have $h_2(\bar{x}(k)) = 0$ for all $k$.

Notice that we have the following equivalences :

$$\begin{array}{rcl} \arcsin(\cos^3\theta) & \underset{\theta=\pi/2}{\sim} & \cos^3\theta \\ & \underset{\theta=\pi/2}{\sim} & (\frac{\pi}{2} - \theta)^3 \\ & = & (\frac{\pi}{2} - \arcsin x_3)^3 \\ & \underset{x_3=1}{\sim} & (1 - x_3^2)^{3/2} \\ & \underset{x_3=1}{\sim} & 2^{3/2}(1 - x_3)^{3/2}. \end{array}$$



So, if $a$ is chosen large enough, we will have $\arcsin(\cos^3\theta_0) \leq 2 \cdot 2^{3/2}(1 - x_3^0)^{3/2}$, now

$$\begin{array}{rcl} 1 - x_3^0 & = & 2 - 2\dfrac{\pi r}{\delta} \\ & = & 2r(\dfrac{1}{r} - \dfrac{\pi}{\delta}) \\ & \leq & \dfrac{2r}{a^2} \\ & = & \dfrac{2}{ab} \end{array}$$

therefore

$$b\arcsin(\cos^3\theta_0) \leq \frac{2^4}{a^{3/2}b^{1/2}}$$

which proves that $2\arcsin(\cos^3\theta_0)$ can be made less than $\dfrac{2\pi}{b}$ if $a$ is large enough.

Now we will prove that we cannot relax the hypothesis on the D-boundedness of the control.
Consider the following system given in $S^2$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -ux_2(2+x_3) \\ \dot{x}_2 & = & ux_1(2+x_3) \\ \dot{x}_3 & = & 0 \\ h_1(x) & = & x_1 \end{array}\right. \tag{3.12}$$

the space U being equal to $\{-1, 1\}$.

As far as we are concerned by the observability property, we can see that all pairs of points are distinguishable, excepted the pair constituted by the points $(0,0,1)$ and $(0,0,-1)$. So, if we add the (smooth) observation function $h_2$ defined by :

$$h_2(x) = \begin{cases} x_3 & \text{if } x_3 < -1/4 \\ 0 & \text{if } x_3 \geq 0, \end{cases}$$

system (3.12) becomes observable.

Besides, let us denote by $L_f h_1$ the Lie derivative of function $h_1$ with respect to vector field $f$ defined above and $t \mapsto \varphi(t, x, u(\cdot))$ the solution of (3.12) starting from $x$ with control $t \mapsto u(t)$. An easy computation shows us that the differential of the mapping

$$x \mapsto (h_1(\varphi(t, x, u(\cdot))), (L_f h_1)(\varphi(t, x, u(\cdot))))$$

between $S^2$ and $\mathbb{R}^2$ is one-to-one (excepted, perhaps, for a finite number of $t$), so system (3.12) is uniformly infinitesimally observable.

We will show now that if the sampling time $\delta$ is small enough, the sampled system is not observable (in fact it would be possible to show that the sampled system is unobservable whatever the sampling time).

Assume that $0 < \delta < \pi/4$ and consider the function

$$f : x_3 \longmapsto \frac{1 - x_3^2}{1 + \cot^2(x_3 + 2)\delta}$$

an easy computation shows that $f'(0) > 0$ and $f'(1) < 0$ which proves the existence of two numbers, $x_3$ and $\bar{x}_3$, such that $0 < x_3 < \bar{x}_3 < 1$ and $f(x_3) = f(\bar{x}_3)$. Consider now the two points $A$ and $\bar{A}$ of coordinates $(x_1, x_2, x_3)$ and $(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ respectively with

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \sqrt{f(x_3)} \quad (= \sqrt{f(\bar{x}_3)}) \\ x_2 & = & x_1 \cot(2 + x_3)\delta \\ \bar{x}_2 & = & x_1 \cot(2 + \bar{x}_3)\delta \end{array}$$

clearly these two points belong to $S^2$ and we have $h(A) = h(\bar{A})$. Take the control $u \equiv 1$, we have $x_1^1 = \bar{x}_1^1 = 0$ and so $h(A) = h(\bar{A}) = (0,0)$ ; now on the interval $]\,\delta, 2\delta\,]$, we take the control $u \equiv -1$ and we return to our starting points $A$ and $\bar{A}$, by switching from control $u \equiv 1$ to $u \equiv -1$, we see that we will have $h(A_k) = h(\bar{A}_k)$ for all $k \geq 0$, so the pair $(A, \bar{A})$ is indistinguishable.

## 3.4 Proof of the theorem

Our strategy to prove theorem (18) is quite simple : first we will prove that if $x_0$ and $\bar{x}_0$ are two different points in $X$, there exist two neighborhoods $V_{x_0}$ and $V_{\bar{x}_0}$ of $x_0$ and $\bar{x}_0$ respectively and a positive number $\delta_0$ such that every point of $V_{x_0}$ is distinguishable from every point of $V_{\bar{x}_0}$ for all $\delta$-sampled system (with $\delta < \delta_0$) and all $M$ D-bounded control. Then we will prove that, for all $x_0$, there exists a neighborhood $W_{x_0}$ of $x_0$ and $\delta_0 > 0$ such that for all $\delta < \delta_0$ and all $M$ D-bounded control, every pair of (different) points of $W_{x_0}$ is distinguishable for the $\delta$-sampled system. We will conclude by using an argument of compactness.

The space $\prod_{t \in \mathbb{R}_+} \mathrm{U}$ endowed with the product topology is compact and so every sequence $(f_n)_{n\geq 0}$ on this space admits (at least) one limit point but, generally, we cannot extract a subsequence which converges to this limit point; nevertheless this is true if the $f_n$'s are $M$ D-bounded.

**Lemme 4.** *Let $(u^{\delta_n})_{n\geq 0}$ be a sequence of $M$ D-bounded piecewise constant applications defined on $\mathbb{R}_+$ with range in a compact subset* U *of $\mathbb{R}^m$. Assume that $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, then there exists a subsequence $(u^{\delta_{n_k}})_{k\geq 0}$ of $(u^{\delta_n})_{n\geq 0}$ which converges to a continuous function $u$.*

*Démonstration.* Let $u$ be a limit point of the sequence $(u^{\delta_n}(\cdot))_{n\geq 0}$ in the compact space $\prod_{t\in\mathbb{R}_+} \mathrm{U}$. For every $n$, recall that there exists a derivable application $f_n$ with derivative bounded by $M$ such that $u^{\delta_n}(t) = f_n(\left[\frac{t}{\delta_n}\right]\delta_n)$ ; by investigating the possible values for the difference $\left[\frac{t+h}{\delta_n}\right] - \left[\frac{t}{\delta_n}\right]$ ($[x]$ denotes the integer part of $x$) and using the uniform boundedness of the derivatives of $f_n$, we see easily that $\| u^{\delta_n}(t+h) - u^{\delta_n}(t) \| \leq 2M \max(|h|, \delta_n)$. Set $t$ and $h$ and let $\varepsilon > 0$, there exists $n$ such that $\delta_n < |h|$, $\| u^{\delta_n}(t+h) - u(t+h) \| < \varepsilon/2$ and $\| u^{\delta_n}(t) - u(t) \| < \varepsilon/2$, so we have :

$$\begin{aligned} \| u(t+h) - u(t) \| &\leq \| u(t+h) - u^{\delta_n}(t+h) \| + \| u^{\delta_n}(t+h) - u^{\delta_n}(t) \| + \| u^{\delta_n}(t) - u(t) \| \\ &\leq \varepsilon/2 + 2M \max(\delta_n, |h|) + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon + 2M\,|h|\,. \end{aligned}$$

This inequality being true for all $\varepsilon \geq 0$, we have $\| u(t+h) - u(t) \| \leq 2M\,|h|$ for all $t$, $h$ which proves that $u$ is continuous. Take now a sequence of positive number $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ converging to 0 ; let $\alpha_1 > 0$ be such that $2M\alpha_1 < \varepsilon_1/3$ and $p = \left[\frac{1}{\alpha_1}\right]$. Consider the numbers $0, \alpha_1, 2\alpha_1, \ldots, p\alpha_1$, the inequalities

$$| u^{\delta_n}(k\alpha_1) - u(k\alpha_1) | < \varepsilon_1/3 \quad k = 0, \ldots, p \tag{3.13}$$

are true for an infinity of integers $n$ ; choose $n_1$ such that the inequalities (3.13) are satisfied and such that $2M\delta_{n_1} < \varepsilon_1/3$. Now if $x \in [0,1]$, we can write $x = k\alpha_1 + h$ with $0 \leq h < \alpha_1$ and $0 \leq k \leq p$ and we have :

$$\begin{aligned} \| u^{\delta_{n_1}}(x) - u(x) \| &\leq \| u^{\delta_{n_1}}(k\alpha_1 + h) - u^{\delta_{n_1}}(k\alpha_1) \| + \| u^{\delta_{n_1}}(k\alpha_1) - u(k\alpha_1) \| \\ &\quad + \| u(k\alpha_1) - u(k\alpha_1 + h) \| \\ &\leq 2M \max(\delta_{n_1}, h) + \varepsilon_1/3 + 2Mh \\ &\leq \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Suppose inductively that we have $p$ integers $n_1 < \cdots < n_p$ such that for all $x \in [0,1]$ $(1 \leq k \leq p)$ $\| u^{\delta_{n_k}}(x) - u(x) \| < \varepsilon_k$, then, by reasoning as above, we can find $n_{p+1} > n_p$ such that $\| u^{\delta_{n_{p+1}}}(x) - u(x) \| < \varepsilon_{p+1}$ for all $x \in [0,1]$.

Obviously, the subsequence $(u^{\delta_{n_k}})_{k\geq 1}$ converges to $u$. □

**Lemme 5.** *We assume that system* (3.1) *is observable for all input $u$. Let $M > 0$ and $(x_0, \bar{x}_0)$ a pair of distinct points in $X$, then there exist $\delta_0 > 0$ and two neighborhoods $V_{x_0}$ and $V_{\bar{x}_0}$ of $x_0$ and $\bar{x}_0$ respectively such that for all $\delta < \delta_0$, every pair of points in $V_{x_0} \times V_{\bar{x}_0}$ is distinguishable by the $\delta$-sampled system of* (3.1) *for all $M$ D-bounded input.*

*Démonstration.* The proof is by contradiction, assume that there exist a sequence of positive numbers $(\delta_n)_{n\geq 1}$ converging to 0, two sequences $(x_n)_{n\geq 1}$ and $(\bar{x}_n)_{n\geq 1}$ of points converging respectively to $x_0$ and $\bar{x}_0$ and a sequence of $M$ D-bounded controls $(u^{\delta_n})_{n\geq 1}$ such that for all $k \geq 0$ :

$$h \circ \varphi(k\delta_n, x_n, u^{\delta_n}(\cdot)) \;=\; h \circ \varphi(k\delta_n, \bar{x}_n, u^{\delta_n}(\cdot)) \quad \text{for all } n \geq 1$$

The sequence $(u^{\delta_n})_{n\geq 1}$ being $M$ D-bounded, we can suppose that it converges to a continuous control $u$ even if we have to consider a subsequence of this sequence. For this control $u$, there exists a $t_0$ such that

$$h \circ \varphi(t_0, x_0, u(\cdot)) \;\neq\; h \circ \varphi(t_0, \bar{x}_0, u(\cdot));$$

this inequality remains true if we replace $t_0$ by $t \in ]\, t_0-\alpha, t_0+\alpha\, [$ with $\alpha > 0$ small enough. Now the approximation lemma (see [56]) tells us that $\varphi(t, x_n, u^{\delta_n}(\cdot))$ tends to $\varphi(t, x_0, u(\cdot))$ uniformly on an interval $[0, T]$ provided that the sequence of controls $(u^{\delta_n})_{n\geq 1}$ is equibounded and convergent (which is the case of $(u^{\delta_n})_{n\geq 0}$ ; this lemma leads us to the contradiction. □

We want to point out now a relation between infinitesimal observability and local observability.

**Lemme 6.** *Suppose that system* (3.1) *is uniformly infinitesimally observable at $(u_0, x_0)$, then system* (3.1) *is locally observable for all input closed enough to $u_0$. To be more precise, there exist a neighborhoods $V$ of $x_0$, open intervals $J_1, \ldots, J_d$ such that :*

$$\forall x, \bar{x} \in V,\ \exists k \in \{1, \ldots, d\} \ \mid\ \forall t \in J_k,\ h(\varphi(t, x, u(\cdot))) \neq h(\varphi(t, \bar{x}, u(\cdot)))$$

*for all control $u$ closed enough to $u_0$ (when restricted to an interval $[0, T]$ containing the $J_k$'s).*

This lemma is not very original, it is mentioned in [55] and in [56] a slightly weaker result is proved ; to prove our lemma, we will follow the reasoning of [56].

*Démonstration.* We denote by $dh^i$, $i = 1, \ldots, p$ the components of $dh$, by $\varphi_i$ (resp. $\psi_i$) the point $\varphi(t_i, x_0, u_0(\cdot)) \in M$ (resp. $\psi(t_i, \xi_0, u_0(\cdot)) \in TM$) and we prove by induction the existence of indices $i_1, \ldots, i_d$ and times $t_{i_1}, \ldots, t_{i_d}$ such that the mapping $\alpha$ which to $\xi_0 \in T_{x_0}M$ associates $(dh^{i_1}(\varphi_{i_1}) \cdot \psi_{i_1}, \ldots, dh^{i_d}(\varphi_{i_d}) \cdot \psi_{i_d}) \in \mathbb{R}^d$ is one-to-one. Assume inductively that we have constructed subspaces $K_0 \supset \cdots \supset K_r$ of $T_{x_0}M$, indices $i_1, \ldots, i_r$ and times $t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}$ such that $K_0 = T_{x_0}M$, and for $1 \leq j \leq r$,

$$K_j \;=\; \{\, \xi_0 \in T_{x_0}M \mid dh^{i_1}(\varphi_{i_1}) \cdot \psi_{i_1} = \cdots = dh^{i_j}(\varphi_{i_j}) \cdot \psi_{i_j} = 0 \,\}$$

and so that $\dim K_j = d - j$. Take a nonzero $\xi_0$ in $K_r$, due to the injectivity of the mapping $P_{u_0, x_0}$, there exist $i_{r+1}$ and $t_{i_{r+1}}$ such that $dh^{i_{r+1}}(\varphi_{i_{r+1}}) \cdot \psi_{i_{r+1}} \neq 0$, this provides the induction step and the existence of the one-to-one application between $T_{x_0}M$ and $\mathbb{R}^d$ follows from the existence of $K_n$.

Consider now the mapping $\Theta$ between a neighborhood of $x_0$ and $\mathbb{R}^d$ defined by :

$$\Theta(x) = (h^{i_1}(\varphi_{i_1}(t_{i_1}, x, u_0(\cdot))), \ldots, h^{i_d}(\varphi_{i_d}(t_{i_d}, x, u_0(\cdot))))$$

its differential at $x = x_0$ is the linear application $\alpha$ which is one-to-one. Thus by the inverse function theorem, the mapping $\Theta$ is one-to-one in a neighborhood of $x_0$. Moreover, we can notice that, in the inverse function theorem, the size of this neighborhood depends on the norm of the differential. So, if the times $t_{i_k}$ vary on small intervals $J_1, \ldots, J_d$ and if $u$ is a control closed enough to $u_0$ on an interval $[0, T] \supset \cup J_k$, the determinant of $\alpha$ remains far from 0 and so we can conclude to the existence of a neighborhood $V$ as in in the statement of the lemma. □

**Lemme 7.** *We assume that system* (3.1) *is infinitesimal observable for all input $u$. Let $M > 0$ and $x_0$ a point in $X$, then there exist $\delta_0 > 0$ and a neighborhood $W_{x_0}$ of $x_0$ such that for all $\delta < \delta_0$, every pair of distinct points in $W_{x_0} \times W_{x_0}$ is distinguishable by the $\delta$-sampled system of* (3.1) *for all $M$ D-bounded input.*

*Démonstration.* The proof is by contradiction, assume that there exist a sequence of positive numbers $(\delta_n)_{n\geq 1}$ converging to 0, two sequences $(x_n)_{n\geq 1}$ and $(\bar{x}_n)_{n\geq 1}$ of distinct points converging to $x_0$ and a sequence of $M$ D-bounded controls $(u^{\delta_n})_{n\geq 1}$ such that for all $k \geq 0$ :

$$h \circ \varphi(k\delta_n, x_n, u^{\delta_n}(\cdot)) = h \circ \varphi(k\delta_n, \bar{x}_n, u^{\delta_n}(\cdot)) \quad \text{for all } n \geq 1$$

The sequence $(u^{\delta_n})_{n\geq 1}$ being $M$ D-bounded, we can suppose that it converges to a continuous control $u_0$ even if we have to consider a subsequence of it. For this control $u_0$, take a neighborhood $V$ of $x_0$ as in the preceding lemma. If $n$ is large enough, the points $x_n$ and $\bar{x}_n$ belong to $V$, and for every $k \in \{1, \ldots, d\}$, there exists an integer $l_k$ such that $l_k\delta_n \in J_k$, moreover, the piecewise constant control $u^{\delta_n}$ is closed to $u_0$. By application of the preceding lemma, we get

$$h \circ \varphi(l_k\delta_n, x_n, u^{\delta_n}(\cdot)) \neq h \circ \varphi(l_k\delta_n, \bar{x}_n, u^{\delta_n}(\cdot))$$

which is a contradiction. □

*Proof of the main result.* From lemmas (5) and (7), we know that for every pair $(x_0, \bar{x}_0)$ of $M \times M$, there exist a neighborhood $V_{x_0,\bar{x}_0}$ of $(x_0, \bar{x}_0)$ and a $\delta_{x_0,\bar{x}_0} > 0$ such that every pair of points in this neighborhood is distinguishable by every $\delta$-sampled system of (3.1) and for all inputs if $\delta < \delta_{x_0,\bar{x}_0}$. The neighborhoods $V_{x_0,\bar{x}_0}$ constitute a covering of $M \times M$, since this set is compact, we can find a finite subcovering $V_{x_0^1,\bar{x}_0^1}, \ldots, V_{x_0^r,\bar{x}_0^r}$of $M \times M$ and it is clear that, if we let $\delta_0 = \min\{\delta_{x_0^i,\bar{x}_0^i} \mid i = 1, \ldots, r\}$, every $\delta$-sampled system of (3.1) is observable for all inputs if $\delta < \delta_0$. □

## 3.5 Autre méthode pour montrer l'observabilité locale du système discrétisé

Nous donnons dans ce paragraphe une deuxième méthode pour montrer l'observabilité locale du système discrétisé. Plus précisement, le résultat que nous énonçons par la suite nous permet de montrer par l'absurde le lemme (7) de l'article. Nous supposons dans la suite que le contrôle $u$ est continu.

**Lemme 8.** *Si le système* (3.1) *est infinitésimalement observable en* $(\bar{u}, x_0)$ *alors il existe* $\delta_0 > 0$ *tel que pour tout* $\delta < \delta_0$*, le système* (3.2) *est localement observable en* $x_0$ *pour tout contrôle assez proche de* $\bar{u}^\delta$ *(* $\bar{u}^\delta$ *est restreint à* $[0, T]$*, proche c'est au sens de la topologie de convergence uniforme)*

*Démonstration.* Pour montrer notre lemme nous allons adopter la stratégie suivante. À partir du système continu (3.1), nous allons considérer quatre systèmes : le linéarisé du continu le long d'une trajectoire $\Gamma_1$ (*l.c*) ainsi que le discrétisé de ce dernier système (*d.l.c*), nous considérons aussi le discrétisé du système continu (*d.c*) puis le linéarisé de ce discrétisé le long d'une trajectoire $\Gamma_2$ (*l.d.c*). Nous supposons que le système (3.1) est infinitésimalement observable et nous montrons les implications suivantes :

(3.1) est infinitésimalement observable $\Longrightarrow$ (c) est infinitésimalement observable $\Longrightarrow$ (*l.c*) est observable $\Longrightarrow$ (*d.l.c*) est observable $\Longrightarrow$ (*l.d.c*) est observable $\Longrightarrow$ (*d.c*) est localement observable $\Longrightarrow$ (3.2) est localement observable.

Soit $x_0$ un état dans $M$ et $(V, \psi)$ une carte en $x_0$. Soit $(\psi f)_u$ le champ de vecteurs défini sur $\psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ par

$$(\psi f)_u(x) = d\psi(\psi^{-1}(x))(f_u(\psi^{-1}(x)), \forall x \in \psi(V).$$

Pour tout $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ nous posons : $\alpha(t) = \psi(x(t)), \alpha(0) = \alpha_0 = \psi(x_0)$ où $x(t)$ est la solution de (3.1) en appliquant le contrôle $t \mapsto u(t)$ et de condition initiale $x_0$. Nous posons aussi $\tilde{f} = (\psi f)$ et $\tilde{h} = h \circ \psi^{-1}$.

Avec ces notations, dans la carte $(V, \psi)$ le système (3.1) s'écrit donc

**Système (c)**

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) &= (\tilde{f})(\alpha(t), u(t)) \\ y(t) &= \tilde{h}(\alpha(t)) \end{cases} \tag{3.14}$$

Soit $t \mapsto \bar{\alpha}(t)$ une trajectoire du système (3.14) issue de $\bar{\alpha}_0$ en appliquant le contrôle $t \mapsto \bar{u}(t)$. Le linéarisé du système (3.14) le long de cette trajectoire s'écrit :

**Système (l.c)**

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) &= A(t)\alpha(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)\alpha(t) \end{cases} \tag{3.15}$$

tel que

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial(\tilde{f})}{\partial \alpha}(\bar{\alpha}(t), \bar{u}(t)) \\ B(t) &= \frac{\partial(\tilde{f})}{\partial u}(\bar{\alpha}(t), \bar{u}(t)) \\ C(t) &= \frac{\partial(\tilde{h})}{\partial \alpha}(\bar{\alpha}(t), \bar{u}(.))) \end{aligned}$$

Nous savons que le système (3.1) est infinitésimalement observable en $(u_0, x_0)$, cela entraîne que le système (c) est infinitésimalement observable en $(u_0, \alpha_0)$. Le relevé le long du trajectoire $\bar{\alpha}$ du système (c) coïncide avec le système (l.c). Il s'ensuit d'après la définition de l'observabilité infinitésimale que le système linéaire (l.c) est observable.

Nous notons $\phi$ la matrice fondamentale associée à $A(t)$ ($\phi$ vérifie $\frac{d}{dt}(\phi(t,s)) = A(t)\phi(t,s)$ et $\phi(s,s) = Id$).

Soit $\delta > 0$, le discrétisé du linéarisé de (3.14) est le système suivant :

**Système (d.l.c)**

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_{k+1} & = & A_1(k)\alpha_k + B_1(k)u_k \\ y_k & = & C_1(k)\alpha_k \end{array} \right. \tag{3.16}$$

avec

$$\begin{array}{lcl} A_1(k) & = & \phi((k+1)\delta, k\delta) \\ B_1(k) & = & \displaystyle\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \phi((k+1)\delta, \tau)B(\tau)\, d\tau \\ C_1(k) & = & C(k\delta) \end{array}$$

La solution de (3.16) issue de $\alpha_0$ et en appliquant le contrôle $u(.)$ s'écrit :

$$\alpha_k = \eta(k,0)\alpha(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \eta(k, j+1)B_1(j)u_j$$

avec

$$\eta(k,j) = \left\{ \begin{array}{lll} Id & \text{si} & k \leq j \\ A_1(k-1)A_1(k-2)\ldots A_1(j) & \text{si} & k > j \end{array} \right.$$

Nous allons montrer maintenant que le système (d.l.c) est observable pour $\delta$ assez petit. Une condition nécessaire et suffisante pour que (l.c) soit observable sur l'intervalle $[0, t_1]$ est que la matrice $\int_0^{t_1} \phi(t,0)^*C(t)^*C(t)\phi(t,0)\, dt$ soit définie positive où $(*)$ désigne la transposée d'une matrice, voir [42].

Une condition nécessaire et suffisante pour que (d.l.c) soit observable est que la matrice $\sum_{i=0}^{k} \eta(i,i)^*C(i\delta)^*C(i\delta)\eta(i,i)$ soit définie positive pour un certain $k$ ce qui est équivaut à

$$\sum_{i=0}^{k}(\phi(i\delta,(i-1)\delta)\ldots\phi(\delta,o))^*C(i\delta)^*C(i\delta)(\phi(i\delta,(i-1)\delta)\ldots\phi(\delta,o)) \text{ est définie positive}$$

ce qui est équivaut aussi à

$$\sum_{i=0}^{k} \phi(i\delta,0)^*C(i\delta)^*C(i\delta)\phi(i\delta,0) \text{ est définie positive}$$

Nous posons $g(t) = \phi(t,0)^*C(t)^*C(t)\phi(t,0)$ et nous approximons $\int_0^{t_1} g(t)\, dt$ par une somme de Riemann du type $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_1}{n} g(i\frac{t_1}{n})$. La matrice

$\int_0^{t_1} g(t)\, dt$ est symétrique et définie positive, soit $\lambda_{min}$ sa plus petite valeur propre, $\lambda_{min} > 0$. Soit maintenant $\varepsilon = \frac{\lambda_{min}}{2}$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ :

$$\| \int_0^{t_1} g(t)\, dt - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_1}{n} g(i\frac{t_1}{n}) \| < \varepsilon$$

Posons $S = \int_0^{t_1} g(t)\,dt$ et $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_1}{n} g(i\frac{t_1}{n})$, soit $x$ un vecteur non nul, nous pouvons écrire

$$x^*Qx = x^*(Q-S)x + x^*Sx$$

Nous pouvons aussi écrire les inégalités suivantes

$$-x^*(Q-S)x \leq |x^*(Q-S)x| \leq \|Q-S\|\|x\|^2 \leq \varepsilon\|x\|^2$$

ce qui nous donne

$$\begin{array}{rcl} x^*Qx & \geq & x^*Sx - \varepsilon\|x\|^2 \\ & \geq & (\lambda_{min} - \varepsilon)\|x\|^2 \\ & \geq & (\frac{\lambda_{min}}{2})\|x\|^2 \\ & > & 0 \end{array}$$

Nous venons de montrer que pour $\delta$ assez petit

$$\sum_{i=0}^{k} \phi(i\delta,0)^*C(i\delta)^*C(i\delta)\phi(i\delta,0)$$

est définie positive, ce qui prouve que le système (d.l.c) est observable pour tout pas de discrétisation assez petit.

Soit $\delta > 0$, si nous notons $\varphi(t,\alpha_0,u(.))$ la solution de (3.14) issue de $\alpha_0$ et en appliquant le contrôle $t \mapsto u(t)$ alors le discrétisé du système (c) est définie ainsi

**Système (d.c)**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_{k+1} & = & \varphi(\delta,\alpha_k,\underline{u_k^\delta}(.)) \\ y_k & = & \tilde{h}(\alpha_k) \end{array} \right. \tag{3.17}$$

où $\underline{u_k^\delta}(.)$ est le contrôle constant sur $[0,\delta]$ et égal à $u(k\delta)$.

Une trajectoire, pour un système discret, est une suite de points $(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots)$ avec $\alpha_k$ défini par la relation de récurrence ci-dessus. Soit $(\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_k,\ldots)$, une trajectoire de (d.c) issue de $\alpha_0$ et en appliquant le contrôle constant par morceau $t \mapsto \bar{u}^\delta(t)$ définie par $t \mapsto \bar{u}^\delta(t) = \bar{u}(k\delta)$ si $t \in [k\delta,(k+1)\delta[$. Le linéarisé de (d.c) le long de cette trajectoire est le système défini ainsi

**système (l.d.c)**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_{k+1} & = & A_2(k)\alpha_k + B_2(k)u_k \\ y_k & = & C_2\alpha_k \end{array} \right. \tag{3.18}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} A_2(k) & = & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\delta,\bar{\alpha}_k,\underline{\bar{u}_k^\delta}(.)) \\ B_2(k) & = & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(\delta,\bar{\alpha}_k,\underline{\bar{u}_k^\delta}(.)) \\ C_2(k) & = & \dfrac{\partial\tilde{h}}{\partial x}(\bar{\alpha}_k) \end{array}$$

Nous allons montrer maintenant le fait que (d.l.c) est observable pour $\delta$ assez petit entraîne que (l.d.c) est observable pour $\delta$ assez petit.

Rappelons que $\phi$ désigne la matrice fondamentale associée à $A(t)$. Nous avons aussi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.))$$

est la matrice fondamentale associée à $A^d(t) = \dfrac{\partial(\tilde{f})}{\partial\alpha}((\varphi(t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.)),\bar{u}^\delta(t))$. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.))) &= \frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{d\varphi}{dt}(t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.)))\\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}(\tilde{f}((\varphi(t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.)),\bar{u}^\delta(.)))\\
&= \frac{\partial(\tilde{f})}{\partial\alpha}(\varphi(t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.)),\bar{u}^\delta(t))(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.)))
\end{aligned}$$

Nous posons dans la suite $\bar{\alpha}^\delta(t) = \varphi(t,\alpha_0,\bar{u}^\delta(.))$. Nous voulons montrer que $t \mapsto \bar{\alpha}(t)$ et $t \mapsto \bar{\alpha}^\delta(t)$ sont très proches sur $[0,T_1]$ pour $\delta$ assez petit. Plus précisément montrons que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_0 > 0/\forall\delta \le \delta_0, \forall t \in [0,T_1], \|\bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}^\delta(t)\| < \varepsilon$$

Nous avons :

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}^\delta(t) = \int_0^t \tilde{f}(\bar{\alpha}(s),\bar{u}(s)) - \tilde{f}(\bar{\alpha}^\delta(s),\bar{u}^\delta(s))\,ds$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\|\bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}^\delta(t)\| &\le \int_0^{T_1} \|\tilde{f}(\bar{\alpha}(s),\bar{u}(s)) - \tilde{f}(\bar{\alpha}^\delta(s),\bar{u}^\delta(s))\|\,ds\\
&\le K_1\int_0^{T_1}\|\bar{\alpha}(s) - \bar{\alpha}^\delta(s)\|\,ds + K_2\int_0^{T_1}\|\bar{u}(s) - \bar{u}^\delta(s)\|\,ds\\
&\le K_1\int_0^{T_1}\|\bar{\alpha}(s) - \bar{\alpha}^\delta(s)\|\,ds + K_2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\delta}^{(k+1)\delta}\|\bar{u}(s) - \bar{u}(k\delta)\| +\\
&\quad K_2\int_{n\delta}^{T_1}\|\bar{u}(s) - \bar{u}(k\delta)\|\,ds
\end{aligned}$$

Puisque $\bar{u}$ est uniformément continue sur $[0,T_1]$ nous avons

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0/\forall s,t \in [0,T_1]/\mid s-t\mid \le \eta \Rightarrow \|\bar{u}(s) - \bar{u}(t)\| < \varepsilon$$

Ce qui nous donne

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_0 = \eta > 0/\forall\delta \le \delta_0, \forall s \in [k\delta,(k+1)\delta],, \mid s - k\delta\mid \le \delta \Rightarrow \|\bar{u}(s) - \bar{u}(k\delta)\| < \varepsilon$$

Nous avons par suite

$$\|\bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}^\delta(t)\| \le K_1\int_0^t \|\bar{\alpha}(s) - \bar{\alpha}^\delta(s)|\,ds + K_2T_1\varepsilon$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous avons

$$\|\bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}^\delta(t)\| \le K_2T_1\varepsilon exp(tK_1) \le K\varepsilon.$$

Nous venons de montrer que $A(t)$ et $A^\delta(t)$ sont très proches pour $\delta$ assez petit. Plus précisément, nous avons montré que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_0 > 0/\forall\delta \leq \delta_0, \forall t \in [0, T_1], \|A(t) - A^\delta(t)\| < \varepsilon$$

Comme conséquence, leurs matrices fondamentales sont très proches . En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \leq \delta_0$ et pour tout $t \in [0, T_1]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|\phi(t,0) - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((t, \alpha_0, \bar{u}^\delta(.))\| &\leq \int_0^{T_1} \|A(s)\|\|\phi(s,0) - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((s, \alpha_0, \bar{u}^\delta(.))\| \, ds \\
&\quad + \int_0^{T_1} \|A(s) - A^\delta(s)\|\|\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((s, \alpha_0, \bar{u}^\delta(.))\| \, ds \\
&\leq L_1 \int_0^{T_1} \|\phi(s,0) - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((s, \alpha_0, \bar{u}^\delta(.))\| \, ds + \varepsilon L_2 T_1.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous avons

$$\|\phi(t,0) - \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}((t, \alpha_0, \bar{u}^\delta(.))\| \leq \varepsilon K_2 T exp(tK_1) \leq L\varepsilon$$

Nous concluons alors que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_0 > 0/\forall\delta \leq \delta_0, \|A_1(k) - A_2(k)\| < \varepsilon$$

Nous montrons aussi que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0/\forall\delta \leq \delta_1, \|C_1(k) - C_2(k)\| < \varepsilon.$$

Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (d.l.c) soit observable est que pour un certain entier $K_1$ nous avons :

$$\sum_{i=0}^{K_1}(A_1(i-1)A_1(i-2)\ldots A_1(1)A_1(0))^*(C_1(i))^*(C_1(i))(A_1(i-1)A_1(i-2)\ldots A_1(1)A_1(0))$$

est définie positive. Une condition nécessaire et suffisante pour que (l.d.c) soit observable est que pour un certain entier $K_2$ nous avons

$$\sum_{i=0}^{K_2}(A_2(i-1)A_2(i-2)\ldots A_2(1)A_2(0))^*(C_2(i))^*(C_2(i))(A_2(i-1)A_2(i-2)\ldots A_2(1)A_2(0))$$

et définie positive. Nous avons vu que si une matrice $A$ est définie positive alors toute matrice aussi proche est aussi définie positive. Puisque pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $\delta \leq \delta_i$, nous avons $\|A_1(i) - A_2(i)\| < \varepsilon$ et il existe $\delta'_i > 0$ tel que pour tout $\delta \leq \delta'_i$, nous avons $\|C_1(i) - C_2(i)\| < \varepsilon$ pour $i = 0, \ldots, K_1$, en plus pour un certain $K_1 > 0$ nous avons

$$\sum_{i=0}^{K_1}(A_1(i-1)A_1(i-2)\ldots A_1(1)A_1(0))^*(C_1(i))^*(C_1(i))(A_1(i-1)A_1(i-2)\ldots A_1(1)A_1(0))$$

est définie positive.

Cela implique que pour $\delta$ assez petit nous avons

$$\sum_{i=0}^{K_1}(A_2(i-1)A_2(i-2)\dots A_2(1)A_2(0))^*(C_2(i))^*(C_2(i))(A_2(i-1)A_2(i-2)\dots A_2(1)A_2(0))$$

est définie positive.

Nous venons de montrer que si (d.l.c) est observable pour $\delta$ assez petit entraîne que (l.d.c) est observable pour $\delta$ assez petit. Par suite, en utilisant un résultat démontrer par Sontag dans [56], nous avons (d.c) est localement observable en $\alpha_0$ pour tout contrôle aussi proche de $\bar{u}^\delta$ et pour tout $\delta$ assez petit ( $\bar{u}^\delta$ est restreint à $[0, T]$).

Nous déduisons alors que (3.2) est localement observable en $x_0$ pour tout contrôle assez proche de $\bar{u}^\delta$ et pour tout $\delta$ assez petit. En effet, puisque (d.c) est localement observable en $\alpha_0$, il existe $W$ un voisinage de $\alpha_0$ inclut dans $\psi(V)$ tel que pour tout $\psi(p)$ et $\psi(q)$ dans $W$

$$\tilde{h}(\psi(\varphi(\delta, p_k, \underline{\bar{u}_k^\delta}(.)))) \neq \tilde{h}(\psi(\varphi(\delta, q_k, \underline{\bar{u}_k^\delta}(.))))$$

Ce qui implique que :

$$h(\varphi(\delta, p_k, \underline{\bar{u}_k^\delta}(.))) \neq h(\varphi(\delta, q_k, \underline{\bar{u}_k^\delta}(.)))$$

pour tout $p, q$ dans $\psi^{-1}(W)$, ce qui prouve notre résultat.

□

## 3.6 conservation presque partout de l'observabilité après discrétisation

En éliminant l'hypothèse de l'observabilité infinitésimale et en supposant que notre système continu est analytique et observable nous allons montrer la conservation presque partout de l'observabilité après discrétisation .
Nous énonçons par la suite le théorème suivant :

**Théorème 19.** *Si nous supposons que le système* (3.1) *est observable et analytique alors il existe* $\delta_0$ *tel que pour tout* $\delta$ *inférieure ou égale à* $\delta_0$ *l'ensemble* $A$ *des couples* $(x_0, \bar{x}_0)$ *dans* $M \times M \backslash \Delta M$ *tel que pour tout* $u \in L^{\mathbb{R},\infty}(U)$, *il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $h(\varphi(\delta, x_k, \underline{u_k^\delta}(.)) \neq h(\varphi(\delta, \bar{x}_k, \underline{u_k^\delta}(.))$ *est dense dans* $M \times M$.

*Démonstration.* Nous voulons montrer qu' il existe $\delta_0$ tel que pour tout $\delta$ inférieur ou égal à $\delta_0$, pour $(x_0, \bar{x}_0)$ dans $M \times M$ et pour tout $V_{x_0} \times V_{\bar{x}_0}$ voisinage de $(x_0, \bar{x}_0)$, nous avons $V_{x_0} \times V_{\bar{x}_0} \cap A \neq \emptyset$.

Pour montrer ce résultat nous allons raisonner par l'absurde. Supposons alors que pour tout $\delta_0$, il existe $\delta$ inférieur ou égal à $\delta_0$, il existe $(x_0, \bar{x}_0)$ dans $M \times M \backslash \Delta M$, il existe $V_{x_0} \times V_{\bar{x}_0}$ voisinage de $(x_0, \bar{x}_0)$ tel que pour tout $(x, \bar{x})$ dans $V_{x_0} \times V_{\bar{x}_0}$, il existe $u$ dans $L^\infty(U)$ tel que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $h(\varphi(\delta, x_k, \underline{u_k^\delta}(.)) = h(\varphi(\delta, \bar{x}_k, \underline{u_k^\delta}(.))$.

Nous pouvons alors affirmer que

- Il existe $V_{x_0} \times V_{\bar{x}_0}$ tel que pour tout $(x, \bar{x}) \in V_{x_0} \times V_{\bar{x}_0}$ nous avons $h(x) = h(\bar{x})$.
- Il existe $u \in L^\infty(U)$, il existe un temps $T_1 > 0$ tel que $\varphi(t, x, u(.)) \in V_{x_0}$ pour tout $t \in [0, T_1]$ et il existe un temps $T_2 > 0$ tel que $\varphi(t, \bar{x}, u(.)) \in V_{\bar{x}_0}$ pour tout $t$ dans $[0, T_2]$.

Soit $T$ le réel défini par $T = min(T_1, T_2)$, par suite nous avons : pour tout $t$ dans $[0, T]$

$$h(\varphi(t, x, u(.))) = h(\varphi(t, \bar{x}, u(.)))$$

Il en résulte que l'application qui à $t$ associe $h(\varphi(t, x, u(.))) - h(\varphi(t, \bar{x}, u(.)))$ est nulle partout car elle est analytique, ce qui est absurde car (3.1) est observable. $\square$

# 4

# Généricité de l'observabilité

## 4.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre le problème de la généricité de l'observabilité. Plusieurs résultats ont été montrés dans le cas continu-discret par Dirk Aeyels dans [2] et [3] et dans le cas continu par J.P. Gauthier et I.A. Kupka dans [22]. Nous commençons par les rappeler au début de ce chapitre, ensuite nous présentons notre travail dans lequel nous nous intéressons à l'étude de la généricité de l'observabilité pour les systèmes discrets avec contrôles.

Lorsque la dimension de l'espace de sortie ($p$) est strictement supérieure à celle de l'espace d'entrée ($m$), l'observabilité devient une propriété générique. Autrement dit tout système peut être approché par un autre système observable. Plus précisément, l'observabilité différentielle et l'observabilité différentielle forte qu'on définira plus loin sont des propriétés génériques.

## 4.2 Topologie de Whitney

Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentiables de classe $C^\infty$. Nous notons $C^\infty(X,Y)$ l'ensemble des applications $C^\infty$ de $X$ dans $Y$. Soient $f$ et $g$ deux applications de classe $C^\infty$ telles que $f(p) = g(p) = q$. Nous dirons que :

1. $f$ a un contact du premier ordre avec $g$ en $p$ si $df(p) = dg(p)$.

2. $f$ a un contact du $k^e$ ordre avec $g$ en $p$ si $df : TX \to TY$ a un contact du $(k-1)^e$ ordre avec $dg$ en tout point de $T_pX$.

Nous définissons ainsi une relation d'équivalence $\sim_k$ en $p$. Autrement dit $f \sim_k g$ en $p$ si $f(p) = g(p) = q$ et si $(U, \varphi)$ étant une carte en $p$ et $(V, \psi)$ une carte en $q$, les applications $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ ont les mêmes dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k$ inclus en $\varphi(p)$. Nous notons alors $J^k_{p,q}(X,Y)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim_k$ en $p$ de toutes les applications $f$ telles que $f(p) = q$ et nous notons aussi $J^k(X,Y) = \cup_{(p,q)\in X\times Y} J^k_{p,q}(X,Y)$. $J^0(X,Y)$ est tout simplement égal à $X \times Y$.

Étant donnée une application $f$ dans $C^\infty(X,Y)$, nous définissons l'application $j^kf$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccc} j^kf & : & X & \to & J^k(X,Y) \\ & & x & \mapsto & \text{classe d'équivalence de } f \text{ dans } J^k_{x,f(x)}(X,Y) \end{array}$$

$j^0f$ est simplement l'application :

$$\begin{array}{rcccc} j^0f & : & X & \to & X \times Y \\ & & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

Si $\sigma$ est un élément de $J^k(X,Y)$ alors $\sigma$ appartient à $J^k_{p,q}(X,Y)$ pour un certain $(p,q) \in X \times Y$. L'application source est définie par

$$\begin{array}{rcccc} \alpha & : & J^k(X,Y) & \to & X \\ & & \sigma & \mapsto & p \end{array}$$

L'application «but» est définie par

$$\begin{array}{rcccc} \beta & : & J^k(X,Y) & \to & X \\ & & \sigma & \mapsto & q \end{array}$$

Il est possible de munir $J^k(X,Y)$ d'une structure de variété, de la façon suivante. Étant donné $(U,\varphi)$ une carte sur $X$, $(V,\psi)$ une carte sur $Y$, on définit une carte $(J^k(U,V), T_{U,V})$ sur $J^k(X,Y)$ de la façon suivante

$$\begin{array}{rccl} T_{U,V} & : J^k(U,V) & \rightarrow & \varphi(U)\times\varphi(V)\times B^k_{n,m} \\ & f & \mapsto & (x_0, f(x_0), T_k(\psi\circ f_1\circ\varphi^{-1})(x_0),\dots,T_k(\psi\circ f_m\circ\varphi^{-1})(x_0)) \end{array}$$

où

- $x_0 = \alpha(f)$.
- $\dim X = n$, $\dim Y = m$.
- $B^k_{n,m}$ est la somme directe de $i = 1,\dots,m$ de $A^k_n$, où $A^k_n$ est l'espace vectoriel des polynômes à $n$ variables de degré $\leq k$, tel que le terme constant est nul.
- $T_k(\psi\circ f_i\circ\varphi^{-1})(x_0)$ est le polynôme en $x$ de degré $k$ donné par les premiers termes de la série de Taylor $\psi\circ f_i\circ\varphi^{-1}$ en $x_0$ après le terme constant.

Soit $k$ un entier positif et soit $U$ un sous ensemble de $J^k(X,Y)$. Nous notons : $M(U) = \{f \in C^\infty(X,Y)/j^k f(X) \subset U\}$. Nous remarquons que $M(U)\cap M(V) = M(U\cap V)$. Il est facile de voir que la famille d'ensemble $\{M(U)\}$ où $U$ est un ouvert de $J^k(X,Y)$ est une base de topologie sur $C^\infty(X,Y)$. Cette topologie est appelée la topologie $C^k$ de Whitney.

Si nous notons $W_k$ l'ensemble des ouverts de $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie $C^k$ de Whitney alors la topologie $C^\infty$ de Whitney est la topologie de base $W = \cup_{k=0}^\infty W_k$. Ceci est bien défini car $W_k \subset W_l$ lorsque $k \leq l$. En effet, si nous considérons l'application $\Pi^l_k : J^l(X,Y) \rightarrow J^k(X,Y)$ qui a tout $\sigma$ dans $J^l(X,Y)$ associe la classe d'équivalence de $f$ dans $J^k(X,Y)$ où $f$ est un représentant de $\sigma$. Nous aurons par la suite $M(U) = M((\Pi^l_k)^{-1}(U))$ pour tout ouvert $U$ de $J^k(X,Y)$.

Nous donnons maintenant une description d'un voisinage de $f$ dans $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie $C^k$ de Whitney. Puisque $J^k(X,Y)$ est une variété différentiable de $C^\infty$ alors elle est métrisable. Soit alors $d$ une métrique sur $J^k(X,Y)$ compatible avec cette topologie. Nous définissons

$$B_\delta(f) = \{g \in C^\infty(X,Y)/\forall x \in X; d(j^k f(x), j^k g(x)) < \delta(x)\}$$

où $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application continue, $B_\delta(f)$ est un ouvert pour tout $\delta$. En effet ; si nous notons $\alpha$ l'application source de $J^k(X,Y)$ dans $X$ et en considérant l'application continue $\Delta : J^k(X,Y) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\sigma \mapsto \delta(\alpha(\sigma)) - d(j^k f(\alpha(\sigma),\sigma)$ et en posant $U = \Delta^{-1}(0,\infty)$, alors $U$ serait un ouvert de $J^k(X,Y)$ et $B_\delta(f) = M(U)$.

Il est possible de montrer aussi que la collection $\{B_\delta(f)\}$ forme un système fondamental de voisinage de $f$ pour la topologie $C^k$ de Whitney. Dans le cas où $X$ est compact, la collection $\{B_n(f)\}$ forme un système fondamental dénombrable de voisinage de $f$ où $B_n(f) = B_{\delta_n}(f)$ et $\delta_n(x) = \frac{1}{n}$ pour tout $x$ dans $X$. En effet, puisque $\delta$ est continue et $X$ est compact alors $\delta$ est borné par $\frac{1}{n}$ pour $n$ assez grand. Il est facile de voir dans ce cas qu'une suite de fonction $f_n$ dans $C^\infty(X,Y)$ converge vers $f$ (pour la topologie $C^k$ de Whitney) si et seulement si $j^k f_n$ converge uniformément vers $j^k f$.

Rappelons aussi que $C^\infty(X,Y)$ est un espace de Baire pour la topologie $C^\infty$ de Whitney.

## 4.3 Transversalité

Nous rappelons dans la suite quelques théorèmes qui jouent un rôle important pour montrer les résultas de densité et d'ouverture.

Nous commençons par rappeler la notion de transversalité. Soient $f : X \rightarrow Y$ une application $C^\infty$, $W$ une sous variété de $Y$ et $x$ un point de $X$. Nous dirons que $f$ est transverse à $W$ en $x$ ($f \pitchfork W$) si

1. $f(x) \notin W$
2. ou $f(x) \in W$ et $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + df(x)(T_xX)$

Nous énonçons par la suite le théorème de transversalité de Thom démontré dans [23].

**Théorème 20.** *Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentiables $C^\infty$ et $W$ une sous variété de $J^k(X,Y)$. Soit $T_W = \{f \in C^\infty(X,Y)/j^kf \pitchfork W\}$, $T_W$ est résiduel dans $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie $C^\infty$ de Whitney. En plus si $W$ est fermé alors $T_W$ est ouvert.*

Nous utilisons souvent la version multijets de ce théorème. Avant de l'énoncer, nous rappelons quelques notations.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, nous notons $X^{(s)} = \{(x_1, \dots, x_s) \in X^s/x_i \neq x_j \text{ pour } 1 \leq i < j \leq s\}$. Considérons l'application suivante

$$\begin{array}{cccc} \alpha^s & : & (J^k(X,Y))^s & \to & X^s \\ & & (\sigma_1, \dots, \sigma_s) & \mapsto & (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) \end{array}$$

Nous posons $J^k_s(X,Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$. Il est clair que $J^k_s(X,Y)$ est une sous variété ouverte de $J^k(X,Y)$. Si $f : X \to Y$ est une application de classe $C^\infty$, alors nous pouvons définir

$$\begin{array}{cccc} j^k_sf & : & X^{(s)} & \to & J^k_s(X,Y) \\ & & (x_1, \dots, x_s) & \mapsto & (j^kf(x_1), \dots, j^kf(x_s)) \end{array}$$

Nous énonçons si dessous le théorème de transversalité multijets démontré dans [23].

**Théorème 21.** *Soient $X$ et $Y$ deux variétés $C^\infty$ et $W$ une sous variété de $J^k_s(X,Y)$. Soit $T_W = \{f \in C^\infty(X,Y)/j^k_sf \pitchfork W\}$, $T_W$ est résiduel dans $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie $C^\infty$ de Whitney. De plus si $W$ est compact alors $T_W$ est ouvert.*

*Remarque 9.* Si $W$ est une sous variété de $J^k_s(X,Y)$ tel que $\alpha^s(W)$ est un compact de $X^{(s)}$ alors $T_W$ est un ouvert de $C^\infty(X,Y)$.

Avant d'énoncer le théorème d'Abraham qui joue aussi un rôle important pour montrer les propriétés de densité et d'ouverture, nous rappelons quelques notations.

Soient $A$, $X$ et $Y$ des variétés $C^\infty$, $\rho : A \to C^\infty(X,Y)$ une application.

Pour $(a \in A)$, nous notons $\rho_a$ l'application de classe $C^\infty$

$$\begin{array}{cccc} \rho_a & : & X & \to & Y \\ & & x & \mapsto & \rho(a)(x) \end{array}$$

$\rho$ est une représentation $C^\infty$ si et seulement si l'application évaluation suivante

$$\begin{array}{cccc} ev_\rho & : & A \times X & \to & Y \\ & & (a,x) & \mapsto & \rho(a)(x) \end{array}$$

est de classe $C^\infty$.

**Théorème 22.** *Soient $A$, $X$ et $Y$ des variétés $C^\infty$, $\rho : A \to C^\infty(X,Y)$ une $C^\infty$ représentation. Soit $W$ une sous variété de $Y$, nous notons $A_W$ la partie de $A$ définie par $A_W = \{a \in A/\rho_a \pitchfork W\}$. Si nous supposons que*

*1. $X$ est de dimension finie $n$ et la codimension de $W$ dans $Y$ est finie.*

*2. $A$ et $X$ satisfont le deuxième axiome de dénombrabilité.*

*3. $ev_\rho \pitchfork W$.*

*alors $A_W$ est résiduel dans $A$ pour la topologie $C^\infty$ de Whitney.*

Abraham a montré dans [1] le théorème d'ouverture pour l'intersection transverse.

**Théorème 23.** *Soient $A$, $X$ et $Y$ des variétés $C^\infty$. $W$ une sous variété fermée de $Y$, $K$ un compact de $X$. Soit $\rho : A \to C^\infty(X,Y)$ une $C^\infty$ représentation et soit $A_{KW} = \{a \in A / \rho_a \pitchfork_x W$ pour $x \in K\}$. $A_{KW}$ est un ouvert.*

Nous rappelons le théorème de plongement de Whitney, voir [23].

**Théorème 24.** *Soient $X$ et $Y$ deux variétés $C^\infty$ tel que $\dim Y \geq 2 \dim X + 1$ et $X$ est compact. L'ensemble des applications $f \in C^\infty(X,Y)$ tel que $f$ est un plongement est un ouvert dense de $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie $C^\infty$ de Whitney.*

## 4.4 Généricité de l'observabilité des systèmes continus-discrets et des systèmes continus

Nous rappelons dans ce paragraphe les travaux de Dirk Aeyels, voir [2] et [3], dans lesquels il s'intéresse à la généricité de l'observabilité pour les systèmes discrets. Nous rappelons aussi les travaux de J.P. Gauthier et I.A. Kupka, (voir [22]), dans lequel ils prouvent la généricité de l'observabilité pour les systèmes continus et d'autres résultats plus généraux.

Dirk Aeyels s'est intéressé au systèmes continus sans contrôles définis ainsi

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}(t) & = & f(x(t)) \\ y(t) & = & h(x(t))\end{array}\right. \tag{4.1}$$

avec $f : M \to TM$ un champ de vecteurs de classe $C^\infty$ et $h : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ où $M$ est une variété compacte $C^\infty$.

Il considère ensuite le discrétisé du système (4.1), défini au chapitre 2. Les observations sont faites en temps discrets $t_1, t_{2,\ldots}$. Soit $P$ un programme d'échantionnage c'est à dire un ensemble fini de points $t_1, \ldots, t_i \in [0, T]$ , où $T$ est un réel fixé. Dirk Aeyels a travaillé avec la définition d'observabilité suivante :

**Définition 19.** Le système (4.1) est $P$-observable si et seulement si pour tout couple de points distincts $(x, y) \in M \times M$, il existe $t_i \in P$ tel que $h(\varphi(t_i, x)) \neq h(\varphi(t_i, y))$, où $\varphi(t_i, x)$ est la solution de (4.1) de condition initiale $x$.

*Remarque 10.* 1. Il est clair que si le système (4.1) est $P$-observable alors il est observable.

2. Pour les systèmes linéaires la définition précédente est équivalentes à la définition classique de l'observabilité.

Dans son premier théorème, Dirk Aeyels a montré que pour un champ de vecteurs fixé $f$, toute fonction de sortie $h$ peut être approchée par une autre fonction $\tilde{h}$ tel que $(f, \tilde{h})$ est $P$-observable. Avant de présenter le théorème, nous donnons les deux lemmes suivantes.

**Lemme 9.** *Soient $T$ un réel fixé et $\mathcal{A}$ le sous ensemble des champs de vecteurs possédant un nombre fini de points d'équilibres et dont le nombre d'orbites périodiques avec période inférieure ou égale à $T$ est fini. $\mathcal{A}$ est un ouvert dense de $C^\infty(M, TM)$.*

**Lemme 10.** *Soit $f \in \mathcal{A}$ un champ de vecteurs de points d'équilibres $x_1, \ldots x_i$. Le sous ensemble $\mathcal{B}$ de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ des fonctions $h$ tel que $h(x_i) \neq h(x_j)$, $i \neq j$, est un ouvert dense de $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

**Théorème 25.** *Soient $f \in \mathcal{A}$ et $T$ un réel fixé, l'ensemble des applications $h$ dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ tel que (4.1) est $P$-observable est un ouvert dense de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ pour presque tout programme d'échantillonnage $P$ constitué par $(2n + 1)$ points $t_i$, $0 \leq t_i \leq T$.*

Dans son deuxième théorème, Dirk Aeyels a montré que pour une fonction de sortie fixé $h$, tout champ de vecteurs $f$ peut être approché par un autre $\tilde{f}$ tel que $(\tilde{f}, h)$ est P-observable. Avant de présenter le théorème, nous donnons les deux lemmes suivantes.

**Lemme 11.** *Soit $\mathcal{D}$ le sous ensemble de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ des applications $h$ avec un nombre fini de points critiques non dégénérés $x_i$ et $h(x_i) \neq h(x_j)$ pour $i \neq j$. $\mathcal{D}$ est un ouvert dense de $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

**Lemme 12.** *Soit $h$ fixé dans $\mathcal{D}$, considérons le sous ensemble $\mathcal{E}$ intersection des ensembles $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$ et $\mathcal{E}^3$ définis respectivement par :*

1. *Deux points d'équilibres n'appartiennent pas à la même surface de niveau de $h$.*
2. *Deux points d'équilibres ne coïncident pas avec des points critiques de $h$.*

*3. Aucune courbe intégrale ne contient deux (ou plus) points critiques de $h$.*

*L'ensemble $\mathcal{E}$ est un ouvert dense de $C^\infty(M, TM)$.*

**Théorème 26.** *Soient $T$ un réel fixé et $h$ une fonction fixée dans $\mathcal{D}$. l'ensemble des champs de vecteurs $f$ dans $C^\infty(M, TM)$ tel que (4.1) est P-observable est un ouvert dense de $C^\infty(M, TM)$ pour presque tout programme d'échantillonnage $P$ constitué par $(2n+1)$ points $t_i$, $0 \le t_i \le T$.*

Dirk Aeyels a construit dans [3] un exemple de système dynamique non observable pour tout programme d'échantionnage constitué seulement de $2n$ points. Des petites perturbations de ce système ne modifient pas la non observabilité du système.

*Remarque 11.*
1. Les résultats précédents peuvent être prolongés dans le cas où $M$ est non compacte. Dans ce cas, on remplace ouvert dense par un ensemble résiduelle.
2. En ce qui concerne P-observabilité , Dirk Aeyels a appelé un système $(f, h)$ $P$-observable sur $[0, T]$ si et seulement si l'application $x \mapsto (h \circ \varphi(t_1, x), \dots, h \circ \varphi(t_{2n+1}, x))$ est un plongement de $M$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Cette définition tient compte également des remarques proposés pas Kalman et Sontag dans [52]. Les deux théorèmes précédents sont aussi vrai avec cette définition d'observabilité forte.

Pour des raisons pratiques, il est plus facile de manipuler les systèmes où la fonction de sortie $h$ dépend de $u$. Les systèmes que nous considérons sont de la forme (2.14). La topologie avec laquelle nous allons travailler est celle de Whitney, voir [23].

L'observabilité différentielle et l'observabilité différentielle forte pour les systèmes continus ont été introduites par Jean-Paul Gauthier et Ivan Kupka dans [22]. Avant d'exposer ces notions, nous introduisons quelques notations.

Nous notons $\underline{u_N} = (u^{(0)}, \dots, u^{(N-1)})$. Nous supposons dans la suite que le contrôle $u$ est régulier. Nous considérons le champ de vecteur $f^N$ sur $M \times U \times \mathbb{R}^{(N-1)m}$ définie par

$$f^N(x, u^{(0)}, \dots, u^{(n-1)}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x, u^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=1}^{m} u_j^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(i)}}.$$

avec $u^{(j+1)} = \frac{du^{(j)}}{dt}(t)/_{t=0}$; $0 \le j \le N-1$. Nous introduisons l'application suivante :

$$\begin{array}{rcccl} S\phi_N^{(f,h)} & : & M \times U \times \mathbb{R}^{(N-1)m} & \to & \mathbb{R}^{Np} \times U \times \mathbb{R}^{(N-1)m} \\ & & (x, \underline{u_N}) & \mapsto & (h(x, u^{(0)}), L_{f^N} h(x, \underline{u_2}, 0), \dots, (L_{f^N})^{N-1} h(x, \underline{u_N}), \underline{u_N}) \end{array}$$

**Définition 20.** (2.14) est différentiellement observable d'ordre $N$ si $S\phi_N^{(f,h)}$ est injective. Il est fortement différentiellement observable si $S\phi_N^{(f,h)}$ est une immersion injective.

*Remarque 12.* La raison pour la quelle nous avons introduit cette définition est que lorsque $p > m$, L'observabilité différentielle et l'observabilité différentielle forte est une propriété générique.

Nous supposons dans la suite que $M$ et $U$ sont des variétés compactes et $p > m$. Nous énonçons maintenant les résultats démontrés par Jean-Paul Gauthier et Ivan Kupka dans [22].

**Théorème 27.** *$\{(f, h) \in C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p) / S\phi_N^{(f,h)}$ est une immersion $\}$ contient un ouvert dense de $C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \ge 2n$.*

**Théorème 28.** *$\{(f, h) \in C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p) / S\phi_N^{(f,h)}$ est injective $\}$ contient un ensemble résiduel dans $C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \ge 2n+1$.*

**Théorème 29.** *$\{(f,h) \in C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)/S\phi_N^{(f,h)}$ est un plongement $\}$ contient un ensemble résiduel dans $C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n+1$.*

Soit $B$ un réel positif, on note $I_B = [-B, B]$.

**Théorème 30.** *$\{(f,h) \in C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)/$la restruction de$S\phi_N^{(f,h)}$à$M \times U \times I_B^{(N-1)m}$ est un plongement $\}$ est un ouvert dense de $C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n+1$.*

Si $M$ est en plus analytique, on aurait le théorème suivant.

**Théorème 31.** *$\{(f,h) \in C^\omega(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)/S\phi_N^{(f,h)}$est un plongement $\}$ est dense dans $C^\infty(M \times U, TM \times \mathbb{R}^p)$ pour $N \geq 2n+1$.*

*Remarque 13.* 1. tous les résultats de densités sont aussi vrai si $M$ et $U$ sont non compactes.

2. tous les résultas sont aussi vrai pour $U$ variétés compacte à bord.

## 4.5 Généricité de l'observabilité d'une classe de systèmes discrets

## 4.6 Introduction

Nous étudions dans ce travail le problème de la généricité de l'observabilité pour une classe de systèmes discrets. Lorsque la dimension de l'espace de sortie est strictement supérieure à celle de l'espace d'entrée, l'observabilité devient une propriété générique. Autrement dit tout système peut être approché par un autre système observable.

Notons que Dirk Aeyels a montré dans [2] et [3] quelques résultats concernant la généricité de l'observabilité pour les systèmes continus-discrets et que J.P. Gauthier et I.A. Kupka ont montré dans [22] la généricité de l'observabilité pour les systèmes continus. Plus précisément, ils ont montré que l'observabilité différentielle et l'observabilité différentielle forte sont des propriétés génériques.

Avant d'énoncer notre théorème, nous donnons quelques notations et définitions. Pour des raisons mathématiques, nous supposons que $h$ dépend de $u$. Considérons le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k) \\ y_k & = & h(x_k, u_k) \end{array}\right. \tag{4.2}$$

- $f$ et $h$ sont deux applications respectivement de $M \times U$ dans $M$ et de $M \times U$ dans $\mathbb{R}^p$ de classe $C^\infty$.
- $M$ et $U$ sont deux variétés $C^\infty$ de dimension respectivement $n$ et $m$.

Il existe beaucoup de notions d'observabilité, voir [26], nous travaillons avec cette définition :

**Définition 21.** Le système (4.2) est observable pour toute entrée si et seulement si pour tout couple d'états $(x_0, \bar{x}_0)$ et pour toute entrée admissible $(u_0, \ldots, u_k, \ldots)$, il existe un indice $k$ tel que $h(x_k, u_k) \neq h(\bar{x}_k, u_k)$.

Rappelons maintenant la notion de transversalité.

**Définition 22.** Soient $f : X \to Y$ une application $C^\infty$, $W$ une sous variété de $Y$ et $x$ un point de $X$. Nous dirons que $f$ est transverse à $W$ en $x$ ($f \pitchfork W$) si $f(x) \notin W$ ou $f(x) \in W$ et $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + df(x)(T_xX)$.

La topologie utilisée sur l'espace $C^\infty(X, Y)$ est la topologie de Whitney, voir [23]. Nous énonçons ci-dessous quelques théorèmes qui jouent un rôle important dans la démonstration de nos résultats. Nous commençons par énoncer le théorème de transversalité de Thom démontré dans [23].

**Théorème 32.** *Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentiables de classe $C^\infty$ et $W$ une sous variété de $J^k(X, Y)$. Soit $T_W = \{f \in C^\infty(X, Y)/j^k f \pitchfork W\}$, $T_W$ est résiduel dans $C^\infty(X, Y)$ pour la topologie $C^\infty$ de Whitney. De plus si $W$ est fermé alors $T_W$ est ouvert.*

Nous utilisons souvent la version multijets de ce théorème. Avant de l'énoncer, nous rappelons quelques notations. Si $\sigma$ est un élément de $J^k(X, Y)$ alors $\sigma$ appartient à $J^k_{p,q}(X, Y)$ pour un certain $(p, q) \in X \times Y$. Nous définissons l'application source par

$$\begin{array}{rccl} \alpha & : & J^k(X, Y) & \to & X \\ & & \sigma & \mapsto & p \end{array}$$

Nous définissons aussi l'application «but» par

$$\begin{array}{rccl} \beta & : & J^k(X, Y) & \to & X \\ & & \sigma & \mapsto & q \end{array}$$

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, nous notons $X^{(s)} = \{(x_1, \ldots, x_s) \in X^s / x_i \neq x_j \text{ pour } 1 \leq i < j \leq s\}$. Considérons l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} \alpha^s & : & (J^k(X,Y))^s & \rightarrow & X^s \\ & & (\sigma_1, \ldots, \sigma_s) & \mapsto & (\alpha(\sigma_1), \ldots, \alpha(\sigma_s)) \end{array}$$

Nous posons $J^k_s(X,Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$. Il est clair que $J^k_s(X,Y)$ est une sous variété ouverte de $J^k(X,Y)$. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application $C^\infty$ alors nous pouvons définir

$$\begin{array}{rccc} j^k_s f & : & X^{(s)} & \rightarrow & J^k_s(X,Y) \\ & & (x_1, \ldots, x_s) & \mapsto & (j^k f(x_1), \ldots, j^k f(x_s)) \end{array}$$

Nous énonçons par la suite le théorème de transversalité multijets démontré dans [23].

**Théorème 33.** *Soient $X$ et $Y$ deux variétés $C^\infty$ et $W$ une sous variété de $J^k_s(X,Y)$. Soit $T_W = \{f \in C^\infty(X,Y)/ j^k_s f \pitchfork W\}$, $T_W$ est résiduel dans $C^\infty(X,Y)$ pour la topologie $C^\infty$ de Whitney. En plus si $W$ est compact alors $T_W$ est ouvert.*

*Remarque 14.* Si $W$ est une sous variété de $J^k_s(X,Y)$ tel que $\alpha^s(W)$ est un compact de $X^{(s)}$ alors $T_W$ est un ouvert de $C^\infty(X,Y)$.

Avant d'énoncer le théorème d'Abraham qui joue aussi un rôle important pour montrer les propriétés de densité et d'ouverture, nous rappelons quelques notations. Soient $A$, $X$ et $Y$ des variétés $C^\infty$, $\rho : A \rightarrow C^\infty(X,Y)$ une application.

Pour $(a \in A)$, nous notons $\rho_a$ l'application de classe $C^\infty$

$$\begin{array}{rccc} \rho_a & : & X & \rightarrow & Y \\ & & x & \mapsto & \rho(a)(x) \end{array}$$

$\rho$ est une représentation $C^\infty$ si et seulement si l'application évaluation suivante

$$\begin{array}{rccc} ev_\rho & : & A \times X & \rightarrow & Y \\ & & (a,x) & \mapsto & \rho(a)(x) \end{array}$$

est de classe $C^\infty$.

**Théorème 34.** *Soient $A$, $X$ et $Y$ des variétés $C^\infty$, $\rho : A \rightarrow C^\infty(X,Y)$ une représentation $C^\infty$. Soit $W$ une sous variété de $Y$, nous notons $A_W$ la partie de $A$ définie par $A_W = \{a \in A/\rho_a \pitchfork W\}$. Si nous supposons que*

1. *$X$ est de dimension finie et la codimension de $W$ dans $Y$ est finie.*
2. *$A$ et $X$ satisfont le deuxième axiome de dénombrabilité.*
3. *$ev_\rho \pitchfork W$.*

*alors $A_W$ est résiduel dans $A$ pour la topologie $C^\infty$ de Whitney.*

Abraham a montré dans [1] le théorème de l'intersection ouvert.

**Théorème 35.** *Soient $A$, $X$ et $Y$ des variétés $C^\infty$. $W$ une sous variété fermée de $Y$, $K$ un compact de $X$. Soit $\rho : A \rightarrow C^\infty(X,Y)$ une représentation $C^\infty$ et soit $A_{KW} = \{a \in A/\rho_a \pitchfork_x W \text{ pour } x \in K\}$, $A_{KW}$ est un ouvert.*

## 4.7 Résultat principal

Les systèmes considérés sont de la forme (4.2) où
- $M$ et $U$ sont deux variétés compactes, connexes.
- l'espace des entrées est l'espace des suites $(u_0, u_1, \dots, u_k, \dots)$ à valeurs dans $U$.
- $p > m$.
- $f(., u)$ est un difféomorphisme pour tout $u$. En effet, l'ensemble des difféomorphismes paramétrés est un ouvert.

Avant d'énoncer notre théorème, nous introduisons quelques notations et définitions. Nous notons

$$\begin{array}{rcl} \underline{u_N} & = & (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \\ f(x, \underline{u_1}) & = & f(x, u_0) \\ f^2(x, \underline{u_2}) & = & f(f(x, u_0), u_1) \\ & \vdots & \\ f^{2n}(x, \underline{u_{2n}}) & = & f(\dots, f(f(x, u_0), u_1), \dots, u_{2n-1}) \end{array}$$

Nous notons aussi

$$\mathcal{D} = \{f \in C^\infty(M \times U, M)/f(., u) \text{ est un difféomorphisme pour } u \in U\}$$

Nous munissons $\mathcal{D}$ de la topologie induite $C^\infty$ de Whitney. nous savons que l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(M, M)$ telle que $f$ est un difféomorphisme est un ouvert de $C^\infty(M, M)$. Nous montrons aussi de la même manière que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $C^\infty(M \times U, M)$, voir [27]. En effet, il est possible de montrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection de deux ouverts $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $C^\infty(M \times U, M)$ définis ainsi :

$$\mathcal{D}_1 = \{f \in C^\infty(M \times U, M)/f(., u) \text{ est un plongement pour } u \in U\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{f \in C^\infty(M \times U, M)/f(., u) \text{ est une submersion pour } u \in U\}$$

Notons que $f(., u)$ est une submersion si et seulement si sa différentielle est surjective. $f(., u)$ est un plongement si et seulement si $f(., u)$ est un homéomorphisme de $M$ dans $f(., u)(M)$ et $f(., u)$ est une immersion. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcccl} S\phi_{2n+1}^{(f,h)} & : & M \times (U)^{2n+1} & \to & \mathbb{R}^{(2n+1)p} \times (U)^{2n+1} \\ & & (x, \underline{u_{2n+1}}) & \mapsto & (h(x, u_0), h(f(x, \underline{u_1}), u_1), \dots, h(f^{2n}(x, \underline{u_{2n}}), u_{2n}), \underline{u_{2n+1}})) \end{array}$$

Par analogie avec le cas continu, nous introduisons la définition de l'observabilité forte.

**Définition 23.** Le système (4.2) est dit fortement observable si et seulement si $S\phi_{2n+1}^{(f,h)}$ est injective.

*Remarque 15.* Si (4.2) est fortement observable alors il est uniformément observable.

**Théorème 36.** *L'ensemble des applications $(f, h) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que le système* (4.2) *est fortement observable est dense dans $\mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$.*

Nous savons que le Théorème d'Abraham fonctionne avec des ouverts d'espaces de Banach, or l'ensemble des couples $(f_u, h_u)$ ne constitue pas un espace de Banach contrairement à l'ensemble des couples $(X_u, h_u)$ où $X_u$ est un champ de vecteur (conformément au travail de Gauthier-Kupka).

De plus, nous pouvons avoir des égalités de types : $(f^k(x, \underline{u_k}), u_k) = (f^{k'}(x, \underline{u_{k'}}), u_{k'})$, $(f^k(x, \underline{u_k}), u_k)$ $(f^{k'}(\bar{x}, \underline{\bar{u}_{k'}}), \bar{u}_{k'})$ et $(f^k(x, \underline{u_k}), u_k) \neq (f^k(\bar{x}, \underline{\bar{u}_{k'}}), \bar{u}_{k'})$ avec $k, k' \in \{0, \dots, 2n\}$ et $k \neq k'$. Pour ces raisons nous introduisons les définitions suivantes.

**Définition 24.** Soit $f \in \mathcal{D}$, nous posons $S_f = \{(x, \underline{u_{2n+1}}) \in M \times U^{2n+1} / \exists k \in \{0, \dots, 2n\}, \exists k' \in \{0, \dots, 2n\} / k \neq k', f^k(x, \underline{u_k}) = f^{k'}(x, \underline{u_k})\}$

**Définition 25.** 1. Soit $f \in \mathcal{D}$, nous posons $S_f^c = M \times U^{2n+1} \backslash S_f = \{(x, \underline{\bar{u}_{2n+1}}) \in M \times U^{2n+1} / \forall k \in \{0, ..., 2n\}, \forall k' \in \{0, ..., 2n-1\} / k \neq k', f^k(x, \underline{u_k}) \neq f^{k'}(x, \underline{u_k})\}$

2. $(S_f^c \tilde{\times} M) = \{(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0) \in S_f^c \times M / x_0 \neq \bar{x}_0\}$

Nous allons partager $S_f^c \tilde{\times} M$ en deux parties.

**Définition 26.** Soit $f \in \mathcal{D}$, nous posons $F_f = \{(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0) \in (S_f^c \tilde{\times} M) /$

$\exists i_1, \dots, i_r$ et $j_1, \dots, j_r \in \{0, \dots, 2n\}$ tels que $i_1, \dots, i_{p'}$ sont distincts deux à deux et $\{j_1, \dots, j_r\} = \sigma\{i_1, \dots, i_r\}$ où $\sigma$ est une permutation de $r$ éléments, $2 \leq r \leq 2n$ et

$$((f^{i_1}(x_0, \underline{u_{i_1}}), u_{i_1}), \dots, (f^{i_r}(x_0, \underline{u_{i_r}}), u_{i_r})) = ((f^{j_1}(\bar{x}_0, \underline{u_{j_1}}), u_{j_1}), \dots, (f^{j_r}(\bar{x}_0, \underline{u_{j_r}}), u_{j_r}))\}$$

**Définition 27.** Soit $f \in \mathcal{D}$, nous posons $\mathcal{D}_f = S_f^c \tilde{\times} M \backslash F_f = \{(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0) \in (S_f^c \tilde{\times} M) /$

$\forall i_1, \dots, i_r$ et $j_1, \dots, j_r \in \{0, \dots, 2n\}$ tels que $i_1, \dots, i_r$ sont distincts deux à deux et $\{j_1, \dots, j_r\} = \sigma\{i_1, \dots, i_r\}$ où $\sigma$ est une permutation de $r$ éléments, on a

$$((f^{i_1}(x_0, \underline{u_{i_1}}), u_{i_1}), \dots, (f^{i_r}(x_0, \underline{u_{i_r}}), u_{i_r})) \neq ((f^{j_1}(\bar{x}_0, \underline{u_{j_1}}), u_{j_1}), \dots, (f^{j_r}(\bar{x}_0, \underline{u_{j_r}}), u_{j_r}))\}$$

## 4.8 Preuve du résultat principal

La démonstration se fait en plusieurs lemmes.

**Lemme 13.** *Soit $A_1$ l'ensemble des applications $(f,h) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ vérifiant :*
$S\phi_{2n+1}^{(f,h)}(x_0, \underline{u_{2n+1}}) \neq S\phi_{2n+1}^{(f,h)}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n+1}})$, *pour* $x_0 \neq \bar{x}_0$, $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ *et* $(\bar{x}_0, \underline{u_{2n+1}})$ *dans* $S_f$.
*$A_1$ contient un ouvert dense $O_1$ de $\mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$.*

**Lemme 14.** *Soit $A_2$ l'ensemble des applications $(f,h) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ vérifiant :*
$S\phi_{2n+1}^{(f,h)}(x_0, \underline{u_{2n+1}}) \neq S\phi_{2n+1}^{(f,h)}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n+1}})$, *pour* $(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0)$ *dans* $F_f$.
*$A_2$ contient un ouvert dense $O_2$ de $\mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$.*

Nous considérons $p$ la projection définie par

$$\begin{array}{rcccc} p & : & \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p) & \to & \mathcal{D} \\ & & (f,h) & \mapsto & f \end{array}$$

**Lemme 15.** *Pour $f$ fixé dans $p(O_1 \bigcap O_2)$, nous définissons $A_3$ comme étant l'ensemble des applications $h \in C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ vérifiant :*
$S\phi_{2n+1}^{(f,h)}(x_0, \underline{u_{2n+1}}) \neq S\phi_{2n+1}^{(f,h)}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n+1}})$, *pour* $(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0)$ *dans* $\mathcal{D}_f$.
*$A_3$ est dense dans $C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$.*

## 4.9 Preuve du théorème

Nous avons vu que $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite $C^\infty$ de Whitney est un ouvert de $C^\infty(M \times U, M)$. D'après les lemmes 13 et 14 l'intersection de $O_1$ avec $O_2$ est alors un ouvert dense de $\mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$.

Soit alors $(f_0, h_0) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ et $V_1 \times V_2$ un voisinage ouvert de $(f_0, h_0)$. Il existe $(\tilde{f}, \tilde{h}) \in (V_1 \times V_2) \cap (O_1 \cap O_2)$, par suite il existe $U_1 \times U_2$ un voisinage ouvert de $(\tilde{f}, \tilde{h})$ tel que $U_1 \times U_2 \subseteq (V_1 \times V_2) \cap (O_1 \cap O_2)$.

Soit maintenant $f \in U_1$ et $h \in U_2$, d'après le lemme 15, il existe $h_1 \in U_2$ tel que $h_1 \in A_3$. Nous déduisons alors qu'il existe $(f, h_1)$ appartenant à $A_1 \cap A_2$ et $h_1 \in A_3$ pour $f \in U_1$. Il en résulte qu'il existe $(f, h_1) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que $S\phi_{2n+1}^{(f,h_1)}(x_0, \underline{u_{2n+1}}) \neq S\phi_{2n+1}^{(f,h_1)}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n+1}})$ pour $x_0 \neq \bar{x}_0$.

## 4.10 Preuve du lemme 13

La démonstration de ce lemme est très technique, elle est basée sur l'utilisation du théorème de Thom multijets. Pour pouvoir utiliser ce théorème, nous allons décomposer l'ensemble $S_f$. Pour cela, introduisons l'ensemble $S_f^s$ des éléments $(x, \underline{u_{2n+1}})$ dans $M \times U^{2n+1}$ vérifiant :

1. $\exists s' \in \{0, ..., s-1\} / f^s(x, \underline{u_s}) = f^{s'}(x, \underline{u_{s'}})$
2. $f^i(x, \underline{u_i}) \neq f^j(x, \underline{u_j}), \forall i, j \in \{0, \ldots, s-1\}$.

Il est facile de voir que $S_f = \bigcup_{s=1}^{2n} S_f^s$. En effet, il est évident que $\bigcup_{s=1}^{2n} S_f^s \subset S_f$. D'autre part, soit $(x, \underline{u_{2n+1}}) \in S_f$, nous considérons l'ensemble $\Gamma$ défini ainsi

$$\Gamma = \{(k, k')/0 \leq k < k' \leq 2n \text{ et } f^{k'}(x, \underline{u_{k'}}) = f^k(x, \underline{u_k})\}$$

Nous posons $s = \min_{(k,k') \in \Gamma} k'$, il existe alors $k$ tel $0 \leq k < s$ et $f^s(x, \underline{u_s}) = f^k(x, \underline{u_k})$. Il est clair que si $i, j \in \{0, \ldots, s-1\}$ alors $f^i(x, \underline{u_i}) \neq f^j(x, \underline{u_j})$, ce qui prouve que $S_f \subset \bigcup_{s=1}^{2n} S_f^s$.

Nous allons donc prouver le lemme 13 pour tous les couples $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ et $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ avec $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ dans $S_f^{s_1}$ et $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $S_f^{s_2}$.

Soient alors $(x_0, \underline{u_{2n+1}}) \in S_f^{s_1}$ et $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}}) \in S_f^{s_2}$ tels que $x_0 \neq \bar{x}_0$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $s_1 \geq s_2$. Il existe $s_1' \in \{0, \ldots, s_1 - 1\}$ et $s_2' \in \{0, \ldots, s_2 - 1\}$ tels que

- $f^{s_1}(x_0, \underline{u_{s_1}}) = f^{s_1'}(x_0, \underline{u_{s_1'}})$ et $f^{s_2}(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{s_2}}) = f^{s_2'}(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{s_2'}})$.
- d'autre part $f^i(x_0, \underline{u_i}) \neq f^j(x_0, \underline{u_j})$ $\forall i, j \in \{0, \ldots, s_1 - 1\}$ et $f^i(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_i}) \neq f^j(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_j})$, $\forall i, j \in \{0, \ldots, s_2 - 1\}$.

Nous notons

$$x_i = f^i(x_0, \underline{u_i}), z_i = f(x_i, u_i), y_i = h(x_i, u_i)$$
$$\bar{x}_i = f^i(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_i}), \bar{z}_i = f(\bar{x}_i, \bar{u}_i), \bar{y}_i = h(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$$

Pour pouvoir utiliser le théorème de Thom multijets, nous allons étudier les relations entre les $(x_i, u_i)$ et $(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$. Considérons les deux listes suivantes

$$L_1 : (x_0, u_0, z_0, y_0), \ldots, (x_{s_1-1}, u_{s_1-1}, z_{s_1-1}, y_{s_1-1})$$
$$L_2 : (\bar{x}_0, \bar{u}_0, \bar{z}_0, \bar{y}_0), \ldots, (\bar{x}_{s_1-1}, \bar{u}_{s_1-1}, \bar{z}_{s_1-1}, \bar{y}_{s_1-1})$$

Tous les éléments de la liste $L_1$ sont distincts deux à deux, mais ce n'est pas forcément le cas pour les éléments de la liste $L_2$. Il peut se faire aussi que certains éléments de la première liste soient égaux à des éléments de la deuxième liste. Remarquons que deux éléments $(x_i, u_i, z_i, y_i)$ et $(\bar{x}_j, \bar{u}_j, \bar{z}_j, \bar{y}_j)$, respectivement $(\bar{x}_i, \bar{u}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_i)$ et $(\bar{x}_j, \bar{u}_j, \bar{z}_j, \bar{y}_j)$ sont égaux si et seulement si $(x_i, u_i)$ est égale à $(\bar{x}_j, \bar{u}_j)$ respectivement $(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$ est égal à $(\bar{x}_j, \bar{u}_j)$.

Pour chaque indice $k$ tel que $0 \leq k \leq s_1 - 1$, considérons l'ensemble d'indices

$$I_k = \{i/0 \leq i \leq s_1 - 1 \text{ et } (x_k, u_k) = (\bar{x}_i, \bar{u}_i)\}$$

Nous remarquons que les $I_k$ sont disjoints deux à deux (éventuellement vides) et que sous l'hypothèse $\underline{u_{2n+1}} = \underline{\bar{u}_{2n+1}}$ et $x_0 \neq \bar{x}_0$, nous avons $k \notin I_k$ car sinon $f^k(x_0, \underline{u_k}) = f^k(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_k})$, ce qui entraîne que $x_0 = \bar{x}_0$ car $f(., u)$ est un difféomorphisme.

Nous appelons partage de $\{0, 1, \ldots, s_1 - 1\}$ la donnée de $s_1$ parties $I_0, \ldots, I_{s_1-1}$ (éventuellement vides) disjointes deux à deux et telles que $k \notin I_k$ (pour $0 \leq k \leq s_1 - 1$). Étant donné un partage $(I_0, \ldots, I_{s_1-1})$, nous dirons que les points $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ et $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $S_f^{s_1}$ et $S_f^{s_2}$ $(s_1 \geq s_2)$ respectivement, sont dans la configuration $(I_0, \ldots, I_{s_1-1})$ si pour tout $k$ tel que $0 \leq k \leq 2n$ nous avons $u_k = \bar{u}_k$ et si pour tout $k$ tel que $0 \leq k \leq s_1 - 1$ nous avons l'ensemble des indices $i$ tel que $0 \leq i \leq s_1 - 1$ et $(x_k, u_k) = (\bar{x}_i, \bar{u}_i)$ est égal à $I_k$.

Soit maintenant $\mathcal{P} = (I_0, \ldots, I_{s_1-1})$ un partage de $\{0, 1, \ldots, s_1 - 1\}$, soient $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ et $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $S_f^{s_1}$ et $S_f^{s_2}$ $(s_1 \geq s_2)$ respectivement, dans la configuration $(I_0, \ldots, I_{s_1-1})$. En écrivant toutes les égalités entre les éléments de la liste $L_1$ et les éléments de la liste $L_2$, nous aurons des égalités entre les $u_i$ et les $\bar{u}_j$. Sous l'hypothèse $\underline{u_{2n+1}} = \underline{\bar{u}_{2n+1}}$, ces égalités peuvent être liées. Nous allons examiner la possibilité d'avoir une égalité liée.

Nous appellerons chaîne toute sous suite $I_{i_1}, \ldots, I_{i_r}$ de $\{0, 1, \ldots, s_1 - 1\}$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} i_1 & \in & I_{i_2} \\ i_2 & \in & I_{i_3} \\ & \vdots & \\ i_{r-1} & \in & I_{i_r} \\ i_r & \in & I_{i_1} \end{array}$$

Remarquons qu'une chaîne est définie à une permutation circulaire prés. Nous allons montrer que deux chaînes sont disjointes ou identiques. Soit $I_{i_1}, \ldots, I_{i_r}$ et $I_{j_1}, \ldots, I_{j_a}$ deux chaînes avec $r \leq a$. Si ces deux chaînes ne sont pas disjointes, nous pouvons supposer que $I_{i_1} = I_{j_1}$ donc $i_1 = j_1$ et par conséquent $i_1 \in I_{i_2} \cap I_{j_2}$ ce qui entraîne que $i_2 = j_2$ car les ensembles sont deux à deux disjoints. En raisonnant par récurrence, nous montrons les égalités

$$\begin{array}{ccc} i_1 & = & j_1 \\ i_2 & = & j_2 \\ & \vdots & \\ i_r & = & j_r \end{array}$$

Maintenant, nous ne pouvons pas avoir $r < a$ car sinon $i_r \in I_{i_1} \cap I_{j_{r+1}}$ ce qui implique $i_1 = j_{r+1} = j_1$, ce qui est absurde.

Soit $I_{i_1}, \ldots, I_{i_r}$ une chaîne, par définition nous pouvons écrire les égalités

$$\begin{array}{ccc} u_{i_2} & = & \bar{u}_{i_1} \\ u_{i_3} & = & \bar{u}_{i_2} \\ & \vdots & \\ u_{i_r} & = & \bar{u}_{i_{r-1}} \\ u_{i_1} & = & \bar{u}_{i_r} \end{array}$$

Sous l'hypothèse $\underline{u_{2n+1}} = \underline{\bar{u}_{2n+1}}$, nous en déduisons que

$$\begin{array}{ccc} u_{i_2} & = & u_{i_1} \\ u_{i_3} & = & u_{i_2} \\ & \vdots & \\ u_{i_r} & = & u_{i_{r-1}} \\ u_{i_1} & = & u_{i_r} \end{array}$$

mais il est clair que l'égalité $u_{i_1} = u_{i_r}$ peut se déduire des $r-1$ égalités.

Réciproquement, considérons deux suites d'indices $(i_1, \ldots, i_r)$ et $(j_1, \ldots, j_r)$ de $0, \ldots, s_1 - 1$ telles que :

- les $j_k$ sont distincts deux à deux $(k = 1, \ldots, r)$.
- $j_k \in I(i_k)$ pour $k = 1, \ldots, r$.

Nous en déduisons les égalités

$$\begin{array}{ccc} u_{i_1} & = & \bar{u}_{j_1} \\ & \vdots & \\ u_{i_r} & = & \bar{u}_{j_r} \end{array}$$

d'où en supposant que $\underline{u_{2n+1}} = \underline{\bar{u}_{2n+1}}$

$$\begin{array}{ccc} u_{i_1} & = & u_{j_1} \\ & \vdots & \\ u_{i_r} & = & u_{j_r} \end{array}$$

Supposons que l'une de ces égalités soit redondante, par exemple supposons que l'égalité $u_{i_r} = u_{j_r}$ puisse se déduire des $r-1$ égalités précédentes. Il existe alors $k_1$ tel que $i_{k_1} = j_r$ et nous avons alors $u_{i_{k_1}} = u_{j_{k_1}}$.

Si $j_{k_1} = i_r$ alors nous avons

$$\begin{array}{ccc} j_{k_1} = i_r & \in & I_{i_{k_1}} = I_{j_r} \\ j_r & \in & I_{i_r} \end{array}$$

d'où la chaîne $I_{j_r}, I_{i_r}$.

S'il n'est pas possible de trouver $k_2$ tel que $j_{k_1} = i_{k_2}$, la dernière égalité ne peut pas se déduire des $(r-1)$ premières.

Plus généralement, la dernière égalité pourra se déduire des $(r-1)$ premières si nous pouvons trouver des indices $i_{k_1}, \ldots, i_{k_{\alpha+1}}, j_{k_1}, \ldots, j_{k_\alpha}$ tels que

$$\begin{array}{ccc} j_r & = & i_{k_1} \\ j_{k_1} & = & i_{k_2} \\ & \vdots & \\ j_{k_\alpha} & = & i_{k_{\alpha+1}} \end{array}$$

avec $j_{k_\alpha} = i_r$, mais nous pouvons alors écrire

$$\begin{array}{ccccc} j_{k_1} & \in & I_{i_{k_1}} & = & I_{j_r} \\ j_{k_2} & \in & I_{i_{k_2}} & = & I_{j_{k_1}} \\ & \vdots & & \vdots & \\ i_r = j_{k_\alpha} & \in & I_{i_{k_\alpha}} & = & I_{j_{k_{\alpha-1}}} \\ j_r & \in & I_{i_r} & = & I_{j_{k_\alpha}} \end{array}$$

d'où la chaîne $I_{j_{k_\alpha}}, I_{j_{k_{\alpha-1}}}, \ldots, I_{j_r}$.

Pour chaque partage $\mathcal{P} = (I_0, \ldots, I_{s_1-1})$, nous pouvons avoir $\ell$ chaînes avec $0 \leq \ell < s_1 - 1$. Nous allons montrer que pour chaque partage $\mathcal{P}$ et pour chaque valeur de $l$ l'existence d'un ouvert partout dense $O^\ell_{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbf{R}^p)$ tel que si $(f,h)$ dans $O^\ell_{\mathcal{P}}$ et si $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ et $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $S_f^{s_1}$ et $S_f^{s_2}$ $(s_1 \geq s_2)$ respectivement, sont dans la configuration $(I_0, \ldots, I_{s_1-1})$

alors $h(x_i, u_i) \neq h(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$ pour un certain $i$ entre 0 et $s_1 - 1$. L'existence de cet ouvert $O^{\ell}_{\mathcal{P}}$ se démontre par l'utilisation du théorème de Thom multijets.

Soit $(I_0, \ldots, I_{s_1-1})$ un partage de $\{0, 1, \ldots, s_1 - 1\}$, soient $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ et $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $S^{s_1}_f$ et $S^{s_2}_f$ $(s_1 \geq s_2)$ respectivement, dans la configuration $(I_0, \ldots, I_{s_1-1})$. Posons $q = s_1 - \sum_{k=0}^{s_1-1} \operatorname{card} I_k$, nous allons appliquer le théorème de Thom multijets à des ensembles différents suivant les valeurs de $q$ et les valeurs de $\ell$. Il est évident que $0 \leq q \leq s_1$. Nous distinguerons dans la suite deux cas.

**Premier cas $\ell = 0$ :** Nous commençons par montrer que si $\ell = 0$ alors $q > 0$. En effet, si $q = 0$ alors nous avons dans ce cas $s_1$ égalités entre les éléments de la liste $L_1$ et les éléments de la liste $L_2$. Soit $i_1$ tel que $I_{i_1} \neq \emptyset$, comme $i_1 \notin I_{i_1}$ il existe $i_2 \neq i_1$ tel que $i_1 \in I_{i_2}$, de même il existe $i_3$ tel que $i_2 \in I_{i_3}$. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{array}{ccc} i_1 & \in & I_{i_2} \\ i_2 & \in & I_{i_3} \\ & \vdots & \\ i_k & \in & I_{i_{k+1}} \\ & \vdots & \end{array}$$

mais cette suite est finie, elle comporte au moins deux termes égaux, il existe alors $k < l$ tel que $i_k = i_l$. Remarquons que $l \neq k + 1$, nous pouvons alors écrire

$$\begin{array}{ccc} i_k & \in & I_{i_{k+1}} \\ i_{k+1} & \in & I_{i_{k+2}} \\ & \vdots & \\ i_{l-1} & \in & I_{i_k} \end{array}$$

ce qui nous donne la chaîne $I_k, \ldots, I_{l-1}$. Nous venons de montrer que si $\ell = 0$ alors $0 < q \leq s_1$.

Nous considérons dans ce cas la liste $L_1$ et la liste $L'_2$ extraite de $L_2$ en supprimant tous les termes dont les indices appartiennent à la réunion des $I_k$.

$$L'_2 : (\bar{x}_{r_1}, \bar{u}_{r_1}, \bar{z}_{r_1}, \bar{y}_{r_1}); \ldots; (\bar{x}_{r_q}, \bar{u}_{r_q}, \bar{z}_{r_q}, \bar{y}_{r_q})$$

avec $r_1 < r_2 < \ldots < r_q$. Dans la liste $L'_2$, il peut exister des égalités entre certains termes. Nous ne conservons alors qu'un seul élément de chaque classe d'égalité, plus précisément, nous conservons celui d'indice le plus élevé. Nous obtenons alors la liste $L''_2$.

$$L''_2 : (\bar{x}_{t_1}, \bar{u}_{t_1}, \bar{z}_{t_1}, \bar{y}_{t_1}); \ldots; (\bar{x}_{t_{q'}}, \bar{u}_{t_{q'}}, \bar{z}_{t_{q'}}, \bar{y}_{t_{q'}})$$

Il est facile de trouver $s_1$ égalités dans $L_1$ entre les termes $x_j$ et $z_j$. En effet, nous pouvons écrire les égalités

$$\begin{array}{ccc} z_0 & = & x_1 \\ z_1 & = & x_2 \\ & \vdots & \\ z_{s_1-2} & = & x_{s_1-1} \\ z_{s_1-1} & = & x_{s'_1} \end{array}$$

Nous allons établir qu'il y a au moins $q'$ égalités dans $L''_2$ entre les termes $\bar{x}_j$ et entre les termes $x_j$ et $\bar{x}_j$. Examinons deux termes consécutifs dans $L''_2$ : $(\bar{x}_{t_i}, \bar{u}_{t_i}, \bar{z}_{t_i}, \bar{y}_{t_i})$ ; $(\bar{x}_{t_{i+1}}, \bar{u}_{t_{i+1}}, \bar{z}_{t_{i+1}}, \bar{y}_{t_{i+1}})$ avec $i \in \{1; \ldots; q' - 1\}$.

- Supposons que $t_{i+1} = t_i + 1$, nous avons dans ce cas $\bar{z}_{t_i} = \bar{x}_{t_{i+1}}$.
- sinon, $t_{i+1} > t_i + 1$. Dans ce cas, le terme $(\bar{x}_{t_i+1}, \bar{u}_{t_i+1}, \bar{z}_{t_i+1}, \bar{y}_{t_i+1})$ a été supprimé parce que
  - ou bien il est égal à un terme de $L_1$ et par suite il existe $j \in \{0, \ldots, s_1 - 1\}$ avec $j \neq t_i + 1$ tel que $\bar{x}_{t_i+1} = x_j$, d'où $\bar{z}_{t_i} = x_j$.
  - ou bien il est égal à un terme de la liste $L_2''$ et par suite il existe $j \in \{t_{i+1}; \ldots; t_{q'}\}$ tel que $\bar{x}_{t_i+1} = \bar{x}_j$ et par suite $\bar{z}_{t_i} = \bar{x}_j$.

Nous constatons alors que les $(q'-1)$ premiers termes de la liste $L_2''$ nous donnent $(q'-1)$ égalités portant sur les $\bar{z}_j$. Nous distinguons par la suite deux situations . Nous commençons par supposer que $t_{q'} < s_1 - 1$. Dans ce cas, le terme $(\bar{x}_{t_{q'}+1}, \bar{u}_{t_{q'}+1}, \bar{x}_{t_{q'}+2}, \bar{y}_{t_{q'}+1})$ a été supprimé parce qu'il est égal à un terme de $L_1$. Il existe alors $j \in \{1, \ldots, s_1 - 1\}$ avec $j \neq t_{q'} + 1$ tel que $\bar{x}_{t_{q'}+1} = x_j$, d'où $\bar{z}_{t_{q'}} = x_j$, ce qui nous donne une égalité de plus.

La deuxième situation se produit lorsque $t_{q'} = s_1 - 1$. Nous posons $r = \max\{j / j < s_1 - 1$ et $(\bar{x}_j, \bar{u}_j, \bar{z}_j, \bar{y}_j) \notin L_2''\}$.

Si $r$ n'est pas défini alors $L_2''$ comporte $s_1$ termes et nous avons l'égalité supplémentaire $\bar{x}_{s_2} = \bar{x}_{s_2'}$. Si $r$ est défini alors le terme $(\bar{x}_r, \bar{u}_r, \bar{z}_r, \bar{y}_r)$ a été barré

- parce qu' il existe $j \in \{0, ..., s_1 - 1\}$ avec $j \neq r$ et $(\bar{x}_r, \bar{u}_r, \bar{z}_r, \bar{y}_r) = (x_j, u_j, z_j, y_j)$. Nous avons par la suite $f(\bar{x}_r, \bar{u}_r) = f(x_j, u_j)$, c'est à dire $\bar{z}_r = z_j$, d'où $\bar{x}_{r+1} = z_j$ qui est une égalité supplémentaire que nous n'avons pas comptée.
- ou bien il existe $t_i$ tel que $r < t_i \leq s_1 - 1$ et $(\bar{x}_r, \bar{u}_r) = (\bar{x}_{t_i}, \bar{u}_{t_i})$. Par suite, nous avons $\bar{z}_r = \bar{z}_{t_i}$, d'où $\bar{x}_{r+1} = \bar{z}_{t_i}$ qui est une égalité supplémentaire que nous n'avons pas comptée.

Nous venons de montrer l'existence d'au moins $q'$ égalités entre les termes $\bar{x}_j$ de $L_2''$ et entre les termes $\bar{x}_j$ et $\bar{x}_j$.

Nous examinons maintenant les relations entre $(u_0, ..., u_{s_1-1})$ et $(\bar{u}_{t_1}, ..., \bar{u}_{t_{q'}})$. Pour un $k$ fixé tel que $I_k \neq \varnothing$ nous posons $I_k = \{l_1, ..., l_\beta\}$. Nous pouvons écrire les égalités

$$\begin{aligned} u_k &= \bar{u}_{l_1} \\ &\vdots \\ u_k &= \bar{u}_{l_\beta} \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\underline{u_{2n+1}} = \underline{\bar{u}_{2n+1}}$, nous en déduisons

$$\begin{aligned} u_k &= u_{l_1} \\ &\vdots \\ u_k &= u_{l_\beta} \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\beta$ égalités entre les $u_j$. Nous déduisons alors que nous avons au total

$$\sum_{k=0}^{s_1-1} \text{card } I_k = s_1 - q$$

égalités entre les $u_i$ (puisque le nombre de chaîne est nul, il ne peut y avoir d'égalités redondantes).

Examinons maintenant la liste $L_2'$. Nous avons vu que nous pouvons avoir des classes d'égalités entre ses termes. Nous avons gardé dans la liste $L_2''$ le terme d'indice le plus élevé dans chaque classe d'égalité. Notons $C_1, ..., C_{q'}$ les classes d'égalités. La classe $C_k$ nous donne card $(C_k) - 1$ égalités, $k \in \{1, ..., q'\}$ du type $\bar{u}_i = \bar{u}_j$. Nous avons au total $\sum_{k=1}^{q'}(\text{ card } (C_k) - 1) = q - q'$ égalités.

De plus les égalités suivantes sont vraies

$$\begin{array}{rcl} u_{t_1} & = & \bar{u}_{t_1} \\ & \vdots & \\ u_{t_{q'}} & = & \bar{u}_{t_{q'}} \end{array}$$

au total nous avons donc $s_1 - q + q - q' + q' = s_1$ égalités entre les $u_i$ et les $\bar{u}_j$.

Nous allons maintenant appliquer la version multijets du théorème de Thom. Considérons l'application $j^0_{s_1+q'}(f,h)$ définie ainsi

$$\begin{array}{rcccl} j^0_{s_1+q'}(f,h) & : & (M \times U)^{(s_1+q')} & \to & J^0_{s_1+q'}(M \times U, M \times \mathbb{R}^p) \\ & & ((x_0,u_0),...,(x_{s_1-1},u_{s_1-1}), & \mapsto & ((x_0,u_0,f(x_0,u_0),h(x_0,u_0)),..., \\ & & (\bar{x}_{t_1},\bar{u}_{t_1}),...,(\bar{x}_{t_{q'}},\bar{u}_{t_{q'}})) & & (\bar{x}_{t_{q'}},\bar{u}_{t_{q'}},f(\bar{x}_{t_{q'}},\bar{u}_{t_{q'}}),h(\bar{x}_{t_{q'}},\bar{u}_{t_{q'}}))) \end{array}$$

Considérons maintenant l'ensemble $W$ des éléments $((x_0,u_0,z_0,y_0),...,(x_{s_1-1},u_{s_1-1},z_{s_1-1},$ $y_{s_1-1}),(\bar{x}_{t_1},\bar{u}_{t_1},\bar{z}_{t_1},\bar{y}_{t_1}),...,(\bar{x}_{t_{q'}},\bar{u}_{t_{q'}},\bar{z}_{t_{q'}},\bar{y}_{t_{q'}}))$ de $J^0_{s_1+q'}(M \times U, M \times \mathbb{R}^p)$ qui vérifient

1.
$$\begin{array}{rcl} z_0 & = & x_1 \\ z_1 & = & x_2 \\ & \vdots & \\ z_{s_1-2} & = & x_{s_1-1} \\ x_{s'_1} & = & z_{s_1-1} \end{array}$$

2. il y a $q'$ égalités entre les termes $\bar{x}_j$ et entre les termes $x_j$, $\bar{z}_j$ et $\bar{x}_j$.

3.
$$\begin{array}{rclcrcl} u_{t_1} & = & \bar{u}_{t_1} & & y_{t_1} & = & \bar{y}_{t_1} \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ u_{t_{q'}} & = & \bar{u}_{t_{q'}} & & y_{t_{q'}} & = & \bar{y}_{t_{q'}} \end{array}$$

4. nous avons $(s_1 - q')$ égalités entre $(u_0,...,u_{s_1-1})$, comme plus haut.

Il est facile de voir que $W$ est une sous variété de $J^0_{s_1+q'}(M \times U, M \times \mathbb{R}^p)$ de codimension égale à $(s_1+q')n + s_1 m + q'p$, or $p > m$, donc supérieur à $(s_1+q')(n+m)$. Il s'ensuit que dire que $j^0_{s_1+q'}(f,h)$ est transverse à $W$ en un point $a$ signifie que $j^0_{s_1+q'}(f,h)(a) \notin W$.

L'ensemble des applications $(f,h) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ telles que $j^0_{s_1+q'}(f,h) \pitchfork_a W$ pour tout $a$ dans $(M \times U)^{(s_1+q')}$ forme un ouvert partout dense par application du théorème de Thom multijets et la remarque (14).

En faisant varier les différents paramètres : les valeurs de $s_1, s_2, s'_1, s'_2$, les égalités entre les termes $x_j, \bar{x}_j, z_j$ et $\bar{z}_j$. Nous obtenons un ensemble fini d'ouverts partout denses dont l'intersection est évidemment un ouvert partout dense. Nous pouvons donc conclure que l'ensemble des couples d'applications $(f,h)$ vérifiant l'inégalité du lemme 13 pour des points $x_0 \neq \bar{x}_0$ vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent (c'est à dire $\ell = 0$) contient un ouvert partout dense.

**Deuxième cas $1 \leq \ell < s_1$ :** Il existe dans ce cas $\ell$ chaînes

$$\begin{array}{rcl} CH_1 & : & I_{i^1_1},\ldots,I_{i^1_{n_1}} \\ & \vdots & \\ CH_\ell & : & I_{i^\ell_1},\ldots,I_{i^\ell_{n_\ell}} \end{array}$$

avec $i_1^1 < \ldots < i_{n_1}^1, \ldots, i_1^\ell < \ldots < i_{n_\ell}^\ell$. Nous considérons la liste $L_1'$ extraite de $L_1$ en supprimant les éléments d'indices $i_1^1, \ldots, i_1^\ell$, sauf si l'un des $i_1^j$ est nul, auquel cas nous barrons $i_2^j$. Nous considérons aussi la liste $L_2'''$ extraite de $L_2$ en prenant les termes de la liste $L_2''$ (éventuellement vide) qui est obtenue à partir de $L_2$ comme expliqué au cas $\ell = 0$ et en y ajoutant les termes d'indices $i_{n_1}^1, \ldots, i_{n_\ell}^\ell$. Nous posons dans la suite $\{i_1, \ldots, i_{s_1-\ell}\} = \{0, \ldots, s_1 - 1\} \backslash \{i_1^1, \ldots, i_1^\ell\}$ et $\{i_{n_1}^1, \ldots, i_{n_\ell}^\ell, t_1, \ldots, t_{q'}\} = \{j_1, \ldots, j_{\ell+q'}\}$ avec $j_1 < \ldots < j_{\ell+q'}$.

$$\begin{aligned} L_1' &: (x_{i_1}, u_{i_1}, z_{i_1}, y_{i_1}), \ldots, (x_{i_{s_1-\ell}}, u_{i_{s_1-\ell}}, z_{i_{s_1-\ell}}, y_{i_{s_1-\ell}}) \\ L_2''' &: (\bar{x}_{j_1}, \bar{u}_{j_1}, \bar{z}_{j_1}, \bar{y}_{j_1}), \ldots, (\bar{x}_{j_{\ell+q'}}, \bar{u}_{j_{\ell+q'}}, \bar{z}_{j_{\ell+q'}}, \bar{y}_{j_{\ell+q'}}) \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les termes de $L_1' \cup L_2'''$ sont distincts deux à deux. Nous commençons par montrer que nous avons au moins $s_1 + q'$ égalités entre les termes $x_{i_k}$, les termes $\bar{x}_{j_r}$ et entre les termes $x_{i_k}$ et $\bar{x}_{j_r}$. Examinons d'abord deux termes consécutifs de $L_1'$ : $(x_{i_r}, u_{i_r}, z_{i_r}, y_{i_r})$ et $(x_{i_{r+1}}, u_{i_{r+1}}, z_{i_{r+1}}, y_{i_{r+1}})$ avec $r \in \{1, \ldots, s_1 - \ell - 1\}$.

- Si $i_{r+1} = i_r + 1$ alors nous pouvons écrire l'égalité

$$z_{i_r} = x_{i_{r+1}}$$

- Si $i_{r+1} = i_r + 2$ alors le terme $(x_{i_r+1}, u_{i_r+1}, z_{i_r+1}, y_{i_r+1})$ a été supprimé parce qu'il est égal au terme $(\bar{x}_{i_{n_k}^k}, \bar{u}_{i_{n_k}^k}, \bar{z}_{i_{n_k}^k}, \bar{y}_{i_{n_k}^k})$ avec $k \in \{1, \ldots, \ell\}$. Nous allons perdre dans ce cas les deux égalités

$$\begin{aligned} z_{i_r} &= x_{i_r+1} \\ z_{i_r+1} &= x_{i_r+2} \end{aligned}$$

Par contre nous pouvons écrire l'égalité

$$\bar{x}_{i_{n_k}^k} = z_{i_r}$$

De plus, si $(\bar{x}_{i_{n_k}^k+1}, \bar{u}_{i_{n_k}^k+1}, \bar{z}_{i_{n_k}^k+1}, \bar{y}_{i_{n_k}^k+1})$ figure dans la liste $L_2''$ alors nous pouvons écrire l'égalité

$$\bar{z}_{i_{n_k}^k} = \bar{x}_{i_{n_k}^k+1}$$

Dans le cas contraire, le terme $(\bar{x}_{i_{n_k}^k+1}, \bar{u}_{i_{n_k}^k+1}, \bar{z}_{i_{n_k}^k+1}, \bar{y}_{i_{n_k}^k+1})$ a été supprimé parce qu'il est égal à

- un terme de $L_1'$ et par suite il existe $a \in \{i_1, \ldots, i_{s_1-\ell}\}$ avec $a \neq i_{n_k}^k + 1$ tel que $\bar{z}_{i_{n_k}^k} = x_a$.
- ou bien il est égal à un terme de $L_1 \backslash L_1'$ et par suite il existe $i_1^b \in \{i_1^1, \ldots, i_1^\ell\}$ tel que $\bar{x}_{i_{n_k}^k+1} = x_{i_1^b}$, or $x_{i_1^b} = \bar{x}_{i_{n_b}^b}$, ce qui nous permet d'écrire l'égalité

$$\bar{x}_{i_{n_b}^b} = \bar{z}_{i_{n_k}^k}$$

- Ou bien il est égal à un terme de la liste $l_2''$ et par suite il existe $c \in \{t_1, \ldots, t_{q'}\}$ tel que

$$\bar{x}_c = \bar{z}_{i_{n_k}^k}$$

Nous venons de voir que nous avons pu récupérer les deux égalités que nous avons perdues.

- Si $i_{r+1} = i_r + d$, avec $3 \leq d < \ell$, alors les termes

$$(x_{i_r+1}, u_{i_r+1}, z_{i_r+1}, y_{i_r+1}), \ldots, (x_{i_r+d-1}, u_{i_r+d-1}, z_{i_r+d-1}, y_{i_r+d-1})$$

ont été supprimés parce qu'ils sont égaux aux termes

$$(\bar{x}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{u}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{z}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{y}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}), \ldots, (\bar{x}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}}, \bar{u}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}}, \bar{z}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}}, \bar{y}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}})$$

avec $k_1, \ldots, k_{d-1} \in \{1, \ldots, \ell\}$. Nous perdons dans ce cas les $d$ égalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} z_{i_r} & = & x_{i_r+1} \\ z_{i_r+1} & = & x_{i_r+2} \\ & \vdots & \\ z_{i_r+d-1} & = & x_{i_r+d} \end{array}$$

Par contre nous pouvons écrire l'égalité

$$\bar{x}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1} = z_{i_r}$$

De plus, comme nous venons de le voir, les termes

$$(\bar{x}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{u}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{z}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{y}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}), \ldots, (\bar{x}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}}, \bar{u}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}}, \bar{z}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}}, \bar{y}_{i_{n_{k_{d-1}}}}^{k_{d-1}})$$

nous permettent d'écrire $(d-1)$ égalités et de récupérer les $d$ égalités que nous avons perdues.

Nous distinguons par la suite deux situations.

- Nous commençons par supposer que $i_{s_1-\ell} = s_1 - 1$. Nous pouvons écrire alors l'égalité $z_{s_1-1} = x_{s'_1}$ si $s'_1 \notin \{i_1^1, \ldots, i_1^\ell\}$ et s'il existe $a \in \{1, \ldots, \ell\}$ tel que $s'_1 = i_1^a$ alors nous pouvons écrire l'égalité $z_{s_1-1} = \bar{x}_{i_{n_a}^a}$.
- La deuxième situation se produit lorsque $i_{s_1-\ell} \neq s_1 - 1$. Nous posons $i_{s_1-\ell} + 1 = \alpha$, Les termes

$$(x_\alpha, u_\alpha, z_\alpha, y_\alpha), \ldots, (x_{s_1-1}, u_{s_1-1}, z_{s_1-1}, y_{s_1-1})$$

ont été supprimés puisqu'ils sont égaux aux termes

$$(\bar{x}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{u}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{z}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{y}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}), \ldots, (\bar{x}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}}, \bar{u}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}}, \bar{z}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}}, \bar{y}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}})$$

avec $k_1, \ldots, k_{s_1-\alpha} \in \{1, \ldots, \ell\}$. Nous allons perdre dans ce cas les $s_1 - i_{s_1-\ell}$ égalités suivantes

$$\begin{array}{rcl} z_{i_{s_1-\ell}} & = & x_{i_{s_1-\ell}+1} \\ z_{i_{s_1-\ell}+1} & = & x_{i_{s_1-\ell}+2} \\ & \vdots & \\ z_{s_1-2} & = & x_{s_1-1} \\ z_{s_1-1} & = & x_{s'_1} \text{ si } s'_1 \notin \{i_1^1, \ldots, i_1^\ell\} \\ z_{s_1-1} & = & \bar{x}_{i_{n_b}^b} \text{ si } s'_1 = i_1^b \text{ avec } b \in \{1, \ldots, \ell\} \end{array}$$

Par contre nous pouvons écrire l'égalité

$$\bar{x}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1} = z_{i_{s_1-\ell}}$$

De plus, comme nous avons vu précédemment, les termes

$$(\bar{x}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{u}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{z}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}, \bar{y}_{i_{n_{k_1}}}^{k_1}), \ldots, (\bar{x}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}}, \bar{u}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}}, \bar{z}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}}, \bar{y}_{i_{n_{k_{s_1-\alpha}}}}^{k_{s_1-\alpha}})$$

nous donnent $s_1 - i_{s_1-\ell} - 1$ égalités, ce qui nous permet de récupérer les $s_1 - i_{s_1-\ell}$ égalités. En raisonnant comme dans le premier cas, les $q'$ termes de la liste $L_2''$ nous donnent $q'$ égalités. Nous déduisons alors que nous avons au total $s_1 + q'$ égalités entre les termes $x_{i_k}$, les termes $\bar{x}_{j_r}$ et entre les termes $x_{i_k}$ et $\bar{x}_{j_r}$.

Nous allons maintenant prouver que nous pouvons écrire $s_1 - \ell$ égalités entre les termes $u_i$ et entre les $u_i$ et $\bar{u}_j$. Considérons la chaîne $CH_1$ et posons

$$\begin{array}{rcl} I_{i_1^1} & = & \{i_{n_1}^1, i_{1,2}^1, \ldots, i_{1,m_1}^1\} \\ I_{i_2^1} & = & \{i_1^1, i_{2,2}^1, \ldots, i_{2,m_2}^1\} \\ & \vdots & \\ I_{i_{n_1}^1} & = & \{i_{n_1-1}^1, i_{n_1,2}^1, \ldots, i_{n_1,m_{n_1}}^1\} \end{array}$$

Nous pouvons alors écrire les égalités suivantes

$$\begin{array}{rclrclcrcl} u_{i_1^1} & = & \bar{u}_{i_{n_1}^1} & u_{i_2^1} & = & \bar{u}_{i_1^1} & \ldots & u_{i_{n_1}^1} & = & \bar{u}_{i_{n_1-1}^1} \\ u_{i_1^1} & = & \bar{u}_{i_{1,2}^1} & u_{i_2^1} & = & \bar{u}_{i_{2,2}^1} & \ldots & u_{i_{n_1}^1} & = & \bar{u}_{i_{n_1,2}^1} \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ u_{i_1^1} & = & \bar{u}_{i_{1,m_1}^1} & u_{i_2^1} & = & \bar{u}_{i_{2,m_2}^1} & \ldots & u_{i_{n_1}^1} & = & \bar{u}_{i_{n_1,m_{n_1}}^1} \end{array}$$

Remarquons que puisque le terme $(x_{i_1^1}, u_{i_1^1}, z_{i_1^1}, y_{i_1^1})$ ne figure pas dans la liste $L_1'$, nous perdons alors les $m_1 + 1$ égalités

$$\begin{array}{rcl} u_{i_1^1} & = & \bar{u}_{i_{n_1}^1} \\ u_{i_1^1} & = & \bar{u}_{i_{1,2}^1} \\ & \vdots & \\ u_{i_1^1} & = & \bar{u}_{i_{1,m_1}^1} \\ u_{i_2^1} & = & \bar{u}_{i_1^1} \end{array}$$

Puisque le terme $(\bar{x}_{i_{n_1}^1}, \bar{u}_{i_{n_1}^1}, \bar{z}_{i_{n_1}^1}, \bar{y}_{i_{n_1}^1})$ figure dans la liste $L_2'''$, nous pouvons écrire les $m_1$ égalités

$$\begin{array}{rcl} \bar{u}_{i_{n_1}^1} & = & \bar{u}_{i_{1,2}^1} \\ & \vdots & \\ \bar{u}_{i_{n_1}^1} & = & \bar{u}_{i_{1,m_1}^1} \\ u_{i_2^1} & = & \bar{u}_{i_{n_1}^1} \end{array}$$

Nous constatons alors que puisque les termes $(x_{i_1^1}, u_{i_1^1}, z_{i_1^1}, y_{i_1^1}), \ldots, (x_{i_1^\ell}, u_{i_1^\ell}, z_{i_1^\ell}, y_{i_1^\ell})$ ont été supprimés de la liste $L_1$ et puisque les termes $(\bar{x}_{i_{n_1}^1}, \bar{u}_{i_{n_1}^1}, \bar{z}_{i_{n_1}^1}, \bar{y}_{i_{n_1}^1}), \ldots, (\bar{x}_{i_{n_1}^\ell}, \bar{u}_{i_{n_1}^\ell}, \bar{z}_{i_{n_1}^\ell}, \bar{y}_{i_{n_1}^\ell})$ figurent dans la liste $L_2'''$, nous perdons $\ell$ égalités.

En raisonnant comme dans le premier cas nous déduisons que nous avons $s_1 - q'$ égalités entre $(u_0, \ldots, u_{s_1-1})$, auxquelles il faut enlever $\ell$ égalités, ce qui nous donne $s_1 - q' - \ell$ égalités.

Nous pouvons aussi écrire les $q'$ égalités

$$\begin{array}{rcl} \bar{u}_{t_1} & = & u_{t_1} \\ & \vdots & \\ \bar{u}_{t_{q'}} & = & u_{t_{q'}} \end{array}$$

au total nous avons $s_1 - \ell$ égalités entre $(u_0, \ldots, u_{s_1-1})$.

Nous allons maintenant appliquer la version multijets du théorème de Thom. Considérons l'application $j^0_{s_1+q'}(f,h)$ définie ainsi

$$\begin{array}{cccc} j^0_{s_1+q'}(f,h) & : & (M\times U)^{(s_1+q')} & \rightarrow & J^0_{s_1+q'}(M\times U, M\times \mathbb{R}^p) \\ & & ((x_{i_1},u_{i_1}),\ldots,(x_{i_{s_1-\ell}},u_{i_{s_1-\ell}}), & \mapsto & ((x_{i_1},u_{i_1},z_{i_1},y_{i_1}),\ldots, \\ & & (\bar{x}_{j_1},\bar{u}_{j_1}),\ldots,(\bar{x}_{j_{\ell+q'}},\bar{u}_{j_{\ell+q'}})) & \mapsto & (\bar{x}_{j_{\ell+q'}},\bar{u}_{j_{\ell+q'}},\bar{z}_{j_{\ell+q'}},\bar{y}_{j_{\ell+q'}})) \end{array}$$

Nous mettons en évidence comme dans le paragraphe précédent une sous variété $W$ de $J^0_{s_1+q'}(M\times U, M\times \mathbb{R}^p)$ de codimension égale à $(s_1+q')n+(s_1-\ell)m+(q'+\ell)p$, or $p>m$, donc supérieur à $(s_1+q')(n+m)$. Il s'ensuit que dire que $j^0_{s_1+q'}(f,h)$ est transverse à $W$ en un point $a$ signifie que $j^0_{s_1+q'}(f,h)(a)\notin W$.

L'ensemble des applications $(f,h)\in\mathcal{D}\times C^\infty(M\times U,\mathbb{R}^p)$ telles que $j^0_{s_1+q'}(f,h)\pitchfork_a W$ pour tout $a$ dans $(M\times U)^{(s_1+q')}$ forme un ouvert partout dense par application du théorème de Thom multijets et la remarque (14).

En faisant varier les différents paramètres : les valeurs de $s_1,s_2,s_1',s_2'$, les égalités entre les termes $x_j,\bar{x}_j,z_j$ et $\bar{z}_j$. Nous obtenons un ensemble fini d'ouverts partout denses dont l'intersection est évidemment un ouvert partout dense. Nous pouvons donc conclure que l'ensemble des couples d'applications $(f,h)$ vérifiant l'inégalité du lemme 13 pour des points $x_0\neq\bar{x}_0$ vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent (c'est à dire $1\le\ell<s_1$) contient un ouvert partout dense.

## 4.11 Preuve du lemme 14

La démonstration de ce lemme est analogue à celui du lemme 13 car elle est basée aussi sur l'utilisation du théorème de Thom multijets.

Soient $(x_0,\underline{u_{2n+1}})$ dans $S_f^c$ et $(\bar{x}_0,\underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $M\times U^{2n+1}$ tel que $(x_0,\underline{u_{2n+1}},\bar{x}_0)$ **soit** dans $F_f$. Il existe $i_1<\ldots<i_r$ et $j_1,\ldots,j_r\in\{0,\ldots,2n\}$ distincts deux à deux tel que $\{j_1,\ldots,j_r\}=\sigma\{i_1,\ldots,i_r\}$ où $\sigma$ est une permutation de $r$ éléments, $2\le r\le 2n$, et tel que

$$((f^{i_1}(x_0,\underline{u_{i_1}}),u_{i_1}),\ldots,(f^{i_r}(x_0,\underline{u_{i_r}}),u_{i_r}))=((f^{j_1}(\bar{x}_0,\underline{u_{j_1}}),u_{j_1}),\ldots,(f^{j_r}(\bar{x}_0,\underline{u_{j_r}}),u_{j_r}))$$

Considérons les deux listes suivantes constituées des termes d'indices $i_1,i_1+1,\ldots,i_{r-1}-1,i_{r-1}$

$$L_1:(x_{i_1},u_{i_1},z_{i_1},y_{i_1}),\ldots,(x_{i_r-1},u_{i_r-1},z_{i_r-1},y_{i_r-1})$$
$$L_2:(\bar{x}_{i_1},\bar{u}_{i_1},\bar{z}_{i_1},\bar{y}_{i_1}),\ldots,(\bar{x}_{i_r-1},\bar{u}_{i_r-1},\bar{z}_{i_r-1},\bar{y}_{i_r-1})$$

Nous remarquons que tous les éléments de la liste $L_1$ sont distincts deux à deux, mais ce n'est pas forcément le cas pour les éléments de la liste $L_2$. Il peut se faire aussi que certains éléments de la première liste soient égaux à des éléments de la deuxième liste.

Comme dans la démonstration du lemme 13, pour chaque indice $k$ tel que $i_1\le k\le i_r-1$, nous considérons les ensembles

$$I_k=\{i/i_1\le i\le i_r-1 \text{ et } (f^k(x_0,\underline{u_k}),u_k)=(f^i(\bar{x}_0,\underline{\bar{u}_i}),\bar{u}_i)\}$$

Nous remarquons que les $I_k$ sont disjoints deux à deux (éventuellement vides) et que sous l'hypothèse $\underline{u_{2n}}=\underline{\bar{u}_{2n}}$ et $x_0\neq\bar{x}_0$, nous avons $k\notin I_k$. Nous introduisons aussi les notions de partage et de chaînes comme dans la démonstration du lemme 13.

Pour chaque partage $\mathcal{P}=(I_{i_1},\ldots,I_{i_r-1})$, nous pouvons avoir $\ell$ chaînes avec $0\le\ell<i_r-1$. Nous allons montrer que pour chaque partage $\mathcal{P}$ et pour chaque valeur de $\ell$ l'existence d'un ouvert partout dense $O^\ell_{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{D}\times C^\infty(M\times U,\mathbb{R}^p)$ tel que si $(f,h)\in O^\ell_{\mathcal{P}}$ et si $(x_0,\underline{u_{2n+1}})$ dans

$S_f^c$, $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $M \times U^{2n+1}$ tel que $(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0)$ soit dans $F_f$, sont dans la configuration $(I_{i_1}, \ldots, I_{i_r-1})$ alors $h(x_i, u_i) \neq h(\bar{x}_i, \bar{u}_i)$ pour un certain $i$ entre $i_1$ et $i_r - 1$. L'existence de cet ouvert $O_{\mathcal{P}}^{\ell}$ se démontre par l'utilisation du théorème de Thom multijets.

Soit $(I_{i_1}, \ldots, I_{i_r-1})$ un partage de $\{i_1, \ldots, i_r - 1\}$, soient $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ dans $S_f^c$, $(\bar{x}_0, \underline{\bar{u}_{2n+1}})$ dans $M \times U^{2n+1}$ tel que $(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0)$ soit dans $F_f$, sont dans la configuration $(I_{i_1}, \ldots, I_{i_r-1})$. Posons $q = i_r - i_1 - \sum_{k=i_1}^{i_r-1} \text{card } I_k$. Remarquons que $j_r \in \{i_1, \ldots, i_{r-1}\}$ car $j_r \neq i_r$, car sinon l'égalité $x_{i_r} = \bar{x}_{j_r}$ entraînerait $x_0 = \bar{x}_0$, de plus $(\bar{x}_{j_r}, \bar{u}_{j_r}, \bar{z}_{j_r}, \bar{y}_{j_r})$ est différent de tous les termes de la liste $L_1$ car sinon, il existerait $r'$ dans $\{i_1, \ldots, i_{r-1}\}$ tel que $\bar{x}_{j_r} = x_{i_{r'}}$, or $\bar{x}_{j_r} = x_{i_r}$, d'où $x_{i_r} = x_{i_{r'}}$, ce qui est absurde car $(x_0, \underline{u_{2n+1}})$ dans $S_f^c$. Il en résulte que $1 \leq q \leq i_r - i_1$.

Considérons la liste $L_2'$ extraite de $L_2$ en supprimant tous les termes dont les indices appartiennent à la réunion des $I_k$.

$$L_2' : (\bar{x}_{\alpha_1}, \bar{u}_{\alpha_1}, \bar{z}_{\alpha_1}, \bar{y}_{\alpha_1}), \ldots, (\bar{x}_{\alpha_q}, \bar{u}_{\alpha_q}, \bar{z}_{\alpha_q}, \bar{y}_{\alpha_q})$$

avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_q$. Dans la liste $L_2'$, il peut exister des égalités entre certains termes. Nous n'allons conserver alors qu'un seul élément de chaque classe d'égalité, plus précisément, nous conservons celui d'indice le plus élevé, sauf pour la classe d'égalité qui contient le terme $(\bar{x}_{j_r}, \bar{u}_{j_r}, \bar{z}_{j_r}, \bar{y}_{j_r})$, nous conservons ce dernier. Nous obtenons alors la liste $L_2''$.

$$L_2'' : (\bar{x}_{t_1}, \bar{u}_{t_1}, \bar{z}_{t_1}, \bar{y}_{t_1}), \ldots, (\bar{x}_{t_{q'}}, \bar{u}_{t_{q'}}, \bar{z}_{t_{q'}}, \bar{y}_{t_{q'}})$$

Nous allons appliquer le théorème de Thom multijets à des ensembles différents suivant les valeurs de $q$ et les valeurs de $\ell$. Nous distinguerons dans la suite deux cas.

**Premier cas $l = 0$ :** Nous obtenons alors les deux listes $L_1$ et $L_2''$.

$$L_1 : (x_{i_1}, u_{i_1}, z_{i_1}, y_{i_1}), \ldots, (x_{i_r-1}, u_{i_r-1}, z_{i_r-1}, y_{i_r-1})$$

$$L_2'' : (\bar{x}_{t_1}, \bar{u}_{t_1}, \bar{z}_{t_1}, \bar{y}_{t_1}), \ldots, (\bar{x}_{t_{q'}}, \bar{u}_{t_{q'}}, \bar{z}_{t_{q'}}, \bar{y}_{t_{q'}})$$

Il est facile de trouver $i_r - i_1 - 1$ égalités dans $L_1$ entre les termes $x_j$. Nous allons établir qu'il y a au moins $q' + 1$ égalités dans $L_2''$ entre les termes $\bar{x}_j$ et entre les termes $x_j$ et $\bar{x}_j$. Examinons deux termes consécutifs dans $L_2''$ : $(\bar{x}_{t_i}, \bar{u}_{t_i}, \bar{z}_{t_i}, \bar{y}_{t_i})$, $(\bar{x}_{t_{i+1}}, \bar{u}_{t_{i+1}}, \bar{z}_{t_{i+1}}, \bar{y}_{t_{i+1}})$ avec $i \in \{1, \ldots, q' - 1\}$.

- supposons que $t_{i+1} = t_i + 1$, nous avons dans ce cas $\bar{x}_{t_{i+1}} = \bar{z}_{t_i}$.
- sinon, $t_{i+1} > t_i + 1$. Dans ce cas, le terme $(\bar{x}_{t_i+1}, \bar{u}_{t_i+1}, \bar{z}_{t_i+1}, \bar{y}_{t_i+1})$ a été supprimé parce que
  - ou bien il est soit égal à un terme de $L_1$ et par suite il existe $j \in \{i_1, \ldots, i_r - 1\}$ avec $j \neq t_i + 1$ tel que $\bar{x}_{t_i+1} = x_j$, d'où $\bar{z}_{t_i} = x_j$.
  - ou bien il est égal à un terme de la liste $L_2''$ et par suite il existe $j \in \{t_{i+1}, \ldots, t_{q'}\}$ tel que $\bar{x}_{t_i+1} = \bar{x}_j$ et par suite $\bar{z}_{t_i} = \bar{x}_j$.

Nous constatons alors que les $(q' - 1)$ premiers termes de la liste $L_2''$ nous donnent $(q' - 1)$ égalités. Nous ajoutons aussi l'égalité $\bar{x}_{j_r} = z_{i_r} - 1$. Nous distinguons dans la suite deux situations, nous commençons par supposer que $t_{q'} < i_r - 1$. Dans ce cas, le terme $(\bar{x}_{t_{q'}+1}, \bar{u}_{t_{q'}+1}, \bar{x}_{t_{q'}+2}, \bar{y}_{t_{q'}+1})$ a été supprimé, il existe alors $j \in \{i_1, \ldots, i_r - 1\}$ avec $j \neq t_{q'} + 1$ tel que $\bar{x}_{t_{q'}+1} = x_j$, d'où $\bar{z}_{t_{q'}} = x_j$, ce qui nous donne une égalité de plus.

La deuxième situation se produit lorsque $t_{q'} = i_r - 1$. Dans ce cas, nous avons $\bar{x}_{i_r} = x_r$ avec $r \in \{i_1, \ldots i_r\}$, d'où l'égalité supplémentaire $\bar{z}_{i_r-1} = x_r$. Nous venons de montrer qu'il existe au moins $q' + 1$ égalités entre les termes $\bar{x}_j$ de $L_2''$ et entre les termes $\bar{x}_j$ et $x_j$.

Nous avons dans ce cas $\sum_{k=i_1}^{i_r-1} \text{card } I_k = i_r - i_1 - q$ égalités entre les $(u_{i_1}, ..., u_{i_r-1})$. Nous avons vu aussi que nous pouvons écrire $q - q'$ égalités entre $(u_{r_1}, \ldots, u_{r_q})$. Nous avons en plus les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \bar{u}_{t_1} &= u_{t_1} \\ &\vdots \\ \bar{u}_{t_{q'}} &= u_{t_{q'}} \end{aligned}$$

au total nous avons $i_r - i_1$ égalités entre les $u_i$ et les $\bar{u}_j$.

Considérons l'application $j^0_{i_r-i_1+q'}(f,h)$ définie ainsi

$$\begin{array}{lclcl} j^0_{i_r-i_1+q'}(f,h) & : & (M \times U)^{(i_r-i_1+q')} & \to & J^0_{i_r-i_1+q'}(M \times U, M \times \mathbb{R}^p) \\ & & ((x_{i_1}, u_{i_1}), ..., (x_{i_r-1}, u_{i_r-1}), & \mapsto & ((x_{i_1}, u_{i_1}, f(x_{i_1}, u_{i_1}), h(x_{i_1}, u_{i_1})), ..., \\ & & (\bar{x}_{t_1}, \bar{u}_{t_1}), ..., (\bar{x}_{t_{q'}}, \bar{u}_{t_{q'}})) & & (\bar{x}_{t_{q'}}, \bar{u}_{t_{q'}}, f(\bar{x}_{t_{q'}}, \bar{u}_{t_{q'}}), h(\bar{x}_{t_{q'}}, \bar{u}_{t_{q'}}))) \end{array}$$

Nous mettons en évidence comme précédemment une sous variété $W$ de $J^0_{i_r-i_1+q'}(M \times U, M \times \mathbb{R}^p)$ de codimension égale à $(i_r - i_1 + q')n + (i_r - i_1)m + q'p$, or $p > m$, donc supérieur à $(i_r - i_1 + q')(n + m)$. Il s'ensuit que dire que $j^0_{i_r-i_1+q'}(f,h)$ est transverse à $W$ en un point $a$ signifie que $j^0_{i_r-i_1+q'}(f,h)(a) \notin W$.

L'ensemble des applications $(f,h) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ telles que $j^0_{i_r-i_1+q'}(f,h) \pitchfork_a W$ pour tout $a$ dans $(M \times U)^{(i_r-i_1+q')}$ forme un ouvert partout dense par application du théorème de Thom multijets et la remarque (14).

En faisant varier les différents paramètres : les valeurs de $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r$, les égalités entre les termes $x_j, \bar{x}_j, z_j, \bar{z}_j, u_j, \bar{u}_j$. Nous obtenons un ensemble fini d'ouverts partout denses dont l'intersection est évidemment un ouvert partout dense. Nous pouvons donc conclure que l'ensemble des couples d'applications $(f,h)$ vérifiant l'inégalité du lemme 14 pour des points $x_0 \neq \bar{x}_0$ vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent (c'est à dire $\ell = 0$) contient un ouvert partout dense.

**Deuxième cas $1 \leq \ell < i_r - i_1$ :** Il existe dans ce cas $\ell$ chaînes

$$\begin{aligned} CH_1 &: I_{e^1_1}, \ldots, I_{e^1_{n_1}} \\ &\vdots \\ CH_l &: I_{e^\ell_1}, \ldots, I_{e^\ell_{n_\ell}} \end{aligned}$$

avec $e^1_1 < \ldots < e^1_{n_1}, \ldots, e^\ell_1 < \ldots < e^\ell_{n_\ell}$. Nous considérons la liste $L'_1$ extraite de $L_1$ en supprimant les éléments d'indices $e^1_1, \ldots, e^\ell_1$, sauf si l'un des $e^j_1$ est nul, auquel cas nous supprimons $e^j_2$. Nous considérons aussi la liste $L'''_2$ extraite de $L_2$ en prenant les termes de la liste $L''_2$ qui est obtenue à partir de $L_2$ comme expliqué au cas $\ell = 0$ et en y ajoutant les termes d'indices $e^1_{n_1}, \ldots, e^\ell_{n_l}$. Nous posons dans la suite $\{e_1, \ldots, e_{i_r-i_1-\ell}\} = \{i_1, \ldots, i_r - 1\} \backslash \{e^1_1, \ldots, e^\ell_1\}$ et $\{e^1_{n_1}, \ldots, e^\ell_{n_\ell}, t_1, \ldots, t_{q'}\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell+q'}\}$ avec $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{\ell+q'}$.

$$\begin{aligned} L'_1 &: (x_{e_1}, u_{e_1}, z_{e_1}, y_{e_1}), \ldots, (x_{e_{i_r-i_1-\ell}}, u_{e_{i_r-i_1-\ell}}, z_{e_{i_r-i_1-\ell}}, y_{e_{i_r-i_1-\ell}}) \\ L'''_2 &: (\bar{x}_{\lambda_1}, \bar{u}_{\lambda_1}, \bar{z}_{\lambda_1}, \bar{y}_{\lambda_1}), \ldots, (\bar{x}_{\lambda_{\ell+q'}}, \bar{u}_{\lambda_{\ell+q'}}, \bar{z}_{\lambda_{\ell+q'}}, \bar{y}_{\lambda_{\ell+q'}}) \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue au deuxième cas du lemme 13 nous permet d'écrire $i_r - i_1 + q'$ égalités entre les $x_j$ et les $\bar{x}_j$. Nous avons aussi $i_r - i_1 - q' - \ell$ égalités entre $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_r} - 1)$.

Nous pouvons aussi écrire les $q'$ égalités

$$\begin{aligned}\bar{u}_{t_1} &= u_{t_1}\\ &\vdots\\ \bar{u}_{t_{q'}} &= u_{t_{q'}}\end{aligned}$$

au total nous avons $i_r - i_1 - \ell$ égalités entre $(u_{i_1}, \dots, u_{i_r} - 1)$.

Considérons l'application $j^0_{i_r - i_1 + q'}(f, h)$ définie ainsi

$$\begin{array}{rcccl} j^0_{i_r-i_1+q'}(f,h) & : & (M \times U)^{(i_r-i_1+q')} & \to & J^0_{i_r-i_1+q'}(M \times U, M \times \mathbb{R}^p) \\ & & ((x_{e_1}, u_{e_1}), \dots, (x_{e_{i_r-i_1-\ell}}, & \mapsto & ((x_{e_1}, u_{e_1}, f(x_{e_1}, u_{e_1}), h(x_{e_1}, u_{e_1})), \\ & & u_{e_{i_r-i_1-\ell}}), (\bar{x}_{\lambda_1}, \bar{u}_{\lambda_1}), \dots, & & \dots, (\bar{x}_{\lambda_{\ell+q'}}, \bar{u}_{\lambda_{\ell+q'}}, f(\bar{x}_{\lambda_{\ell+q'}}, \\ & & (\bar{x}_{\lambda_{\ell+q'}}, \bar{u}_{\lambda_{\ell+q'}})) & & \bar{u}_{\lambda_{\ell+q'}}), h(\bar{x}_{\lambda_{\ell+q'}}, \bar{u}_{\lambda_{\ell+q'}}))) \end{array}$$

Nous mettons en évidence comme dans le paragraphe précédent une sous variété $W$ de $J^0_{i_r-i_1+q'}(M \times U, M \times \mathbb{R}^p)$ de codimension égale à $(i_r - i_1 + q')n + (i_r - i_1 - \ell)m + (q' + \ell)p$, or $p > m$, donc supérieur à $(i_r - i_1 + q')(n+m)$. Il s'ensuit que dire que $j^0_{i_r-i_1+q'}(f, h)$ est transverse à $W$ en un point $a$ signifie que $j^0_{i_r-i_1+q'}(f, h)(a) \notin W$.

L'ensemble des applications $(f, h) \in \mathcal{D} \times C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ telles que $j^0_{i_r-i_1+q'}(f, h) \pitchfork_a W$ pour tout $a$ dans $(M \times U)^{(i_r-i_1+q')}$ forme un ouvert partout dense par application du théorème de Thom multijets et la remarque (14).

En faisant varier les différents paramètres : les valeurs de $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r$, les égalités entre les termes $x_j, \bar{x}_j, z_j, \bar{z}_j, u_j, \bar{u}_j$. Nous obtenons un ensemble fini d'ouverts partout denses dont l'intersection est évidemment un ouvert partout dense. Nous pouvons donc conclure que l'ensemble des couples d'applications $(f, h)$ vérifiant l'inégalité du lemme 14 pour des points $x_0 \neq \bar{x}_0$ vérifiant les hypothèses du paragraphe précédent (c'est à dire $1 \leq \ell < i_r - i_1$) contient un ouvert partout dense.

## 4.12 Preuve du lemme 15

Soit $f$ fixé dans $p(O_1 \bigcap O_2)$. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est évidemment un ouvert de $M \times U^{2n+1} \times M$. Soit $(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0) \in \mathcal{D}_f$ et soit

$$\rho \ : \ C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p) \ \to \ C^\infty(\mathcal{D}_f, \mathbb{R}^{p(2n+1)})$$

la représentation $C^\infty$ définie par l'application évaluation

$$\begin{array}{rcccl} ev_\rho & : & C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p) \times \mathcal{D}_f & \to & \mathbb{R}^{p(2n+1)} \\ & & (h, x_0, u_0, \dots, u_{2n}, \bar{x}_0) & \mapsto & (h(x_0, u_0) - h(\bar{x}_0, u_0)), \dots, h(f^{2n}(x_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n}) - \\ & & & & h(f^{2n}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n}) \end{array}$$

Nous allons voir que $ev_\rho$ est une submersion en tout point $(h, x_0, u_0, \dots, u_{2n}, \bar{x}_0) \in C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p) \times \mathcal{D}_f$. Nous écrivons d'abord l'expression de $dev_\rho$

$$dev_\rho(h_0, x_0, u_0, \dots, u_{2n}, \bar{x}_0)(h, \xi_0, \eta_0, \dots, \eta_{2n}, \bar{\xi}_0) = (\psi_0, \dots, \psi_{2n})$$

avec

$$\begin{aligned}\psi_i \ = \ & h(f^i(x_0, \underline{u_i}), u_i) - h(f^i(\bar{x}_0, \underline{u_i}), u_i) + d_1 h_0(f^i(x_0, \underline{u_i}), u_i).\xi_0 - d_2 h_0(f^i(\bar{x}_0, \underline{u_i}), u_i).\bar{\xi}_0 \\ & + d_3^i h_0(f^i(x_0, \underline{u_i}), u_i).(\eta_0, \dots, \eta_i) - d_3^i h_0(f^i(\bar{x}_0, \underline{u_i}), u_i).(\eta_0, \dots, \eta_i)\end{aligned}$$

pour $i = 0, ..., 2n$, les notations $d_1$, $d_2$ et $d_3^i$ désignent les dérivés partielles respectivement par rapport à $x_0$, $\bar{x}_0$ et $u_0, \ldots, u_i$. La relation de $dev_\rho$ pour $\xi_0 = 0, \bar{\xi}_0 = 0$ et $\eta_i = 0$, $i = 0, \ldots, 2n$ s'écrit

$$\begin{aligned} dev_\rho(h_0, x_0, u_0, \ldots, u_{2n}, \bar{x}_0)(h, 0..., 0) &= (h(x_0, u_0) - h(\bar{x}_0, u_0), ..., h(f^{2n}(x_1, \underline{u_{2n}}), u_{2n}) - \\ &\quad h(f^{2n}(\bar{x}_2, \underline{u_{2n}}), u_{2n})) \end{aligned}$$

Pour montrer que $dev_\rho(h_0, x_0, u_0, \ldots, u_{2n}, \bar{x}_0)$ est surjective, il suffit de montrer qu'il existe $h \in C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que

$$dev_\rho(h_0, x_0, u_0, \ldots, u_{2n}, x_2)(h, 0, ..., 0) = (W_0, ..., W_{2n})$$

pour tout $(W_0, ..., W_{2n}) \in \mathbb{R}^{(2n+1)p}$. Il suffit donc de trouver $h \in C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h(x_0, u_0) - h(\bar{x}_0, \bar{u}_0) &=& W_0 \\ &\vdots& \\ h(f^{2n}(x_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n}) - h(f^{2n}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n}) &=& W_{2n} \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Considérons les deux listes suivantes

$$L_1 : (x_0, u_0), ..., (f^{2n}(x_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n})$$

$$L_2 : (\bar{x}_0, u_0), ..., (f^{2n}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n})$$

Les éléments de la liste $L_1$ sont distincts deux à deux, mais il peut y avoir des égalités entre les termes de la liste $L_2$ et des égalités entre les termes de $L_1$ et $L_2$. Quitte à réordonner les termes de la liste $L_2$, nous pouvons écrire que $L_2$ est constituée des termes $(a_1, \ldots, a_{n'}, b_1, \ldots, b_{n''})$ avec $n' + n'' = 2n + 1$, $a_1, \ldots, a_{n'} \in L_1$ et $b_1, \ldots, b_{n''} \notin L_1$. Nous allons montrer l'existence d'une fonction $h$ prenant des valeurs données en les $(x_i, u_i)$ et telle que $h(b_1) = \ldots = h(b_{n''}) = 0$.

Considérons le système suivant donné dans $\mathbb{R}^{p(2n+1)}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_0 - \sum_{j=0}^{2n} \varepsilon_j^0 \alpha_j &=& W_0 \\ &\vdots& \\ \alpha_{2n} - \sum_{j=0}^{2n} \varepsilon_j^{2n} \alpha_j &=& W_{2n} \end{array} \right. \tag{4.4}$$

avec $\varepsilon_i^i = 0$, pour $i = 0, \ldots, 2n$ et $\varepsilon_i^j = 0$ ou $1$ si $i \neq j$, de plus dans la liste $(\varepsilon_0^j, \ldots, \varepsilon_{2n}^j)$, il y a au plus une fois le nombre 1. Nous supposons aussi que pour tout ensemble d'indices $i_1, \ldots, i_{p'}$ et $j_1, \ldots, j_{p'} \in \{0, \ldots, 2n\}$ tel que $i_1, \ldots, i_{p'}$ sont distincts deux à deux et $\{j_1, \ldots, j_{p'}\} = \sigma\{i_1, \ldots, i_{p'}\}$où $\sigma$ est une permutation de $p'$ éléments, nous avons $(\varepsilon_{j_1}^{i_1}, \ldots, \varepsilon_{j_{p'}}^{i_{p'}}) \neq (1, \ldots, 1)$.

Nous allons considérer la matrice $A$ associée au système linéaire (4.4)

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_1^0 & -\varepsilon_2^0 & \ldots & -\varepsilon_{2n}^0 \\ -\varepsilon_0^1 & 1 & -\varepsilon_2^1 & \ldots & -\varepsilon_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\varepsilon_0^{2n} & 1 & -\varepsilon_1^{2n} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons montrer que $\det A = 1$. Nous pouvons écrire

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_{2n+1}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)+1} a^0_{\sigma(0)} \ldots a^{2n}_{\sigma(2n)}$$

avec les $a^j_i$ sont les coefficients de $A$.

Remarquons que si $\sigma = Id$ alors nous avons

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma)+1} a^0_{\sigma(0)} \ldots a^{2n}_{\sigma(2n)} = 1$$

Dans le cas où $\sigma \neq Id$, nous posons $\{k_1, \ldots, k_{p''}\} = \{0, \ldots, 2n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_{p'}\}$ tel que $\sigma(i) = i$ si $i$ dans $\{k_1, \ldots, k_{p''}\}$. Nous avons alors $\sigma\{i_1, \ldots, i_{p'}\} = \{i_1, \ldots, i_{p'}\}$. Nous pouvons écrire

$$(-1)^{\varepsilon(\sigma)+1} a^0_{\sigma(0)} \ldots a^{2n}_{\sigma(2n)} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)+1} (-1)^{p''} \varepsilon^{i_1}_{\sigma(i_1)} \ldots \varepsilon^{i_{p'}}_{\sigma(i_{p'})}$$

or $(\varepsilon^{i_1}_{\sigma(i_1)}, \ldots, \varepsilon^{i_{p'}}_{\sigma(i_{p'})}) \neq (1, \ldots, 1)$, il existe alors $j \in \{i_1, \ldots, i_p\}$ tel que $\varepsilon^j_{\sigma(j)} = 0$. Nous déduisons alors que $\det A = 1$.

Nous venons de démontrer l'existence d'un $(2n+1)$-uplets $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2n})$ satisfaisant les équations du système (4.4). Posons alors

$$\varepsilon^j_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (\bar{x}_j, \bar{u}_j) = (x_i, u_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $0 \leq i \leq 2n$ et $0 \leq j \leq 2n$.

Il est claire que les $\varepsilon^j_i$ satisfont les propriétés énoncés ci-desus vérifient le système (4.4) du fait que $(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0) \in \mathcal{D}_f$. Il est maintenant possible, pour ces valeurs des $\varepsilon^j_i$ de trouver une fonction $h$ tel que $h(x_i, u_i) = \alpha_i$ et $h(b_i) = 0$, cette fonction $h$ satisfait évidement le système (4.3). Nous venons de prouver que l'évaluation $ev_\rho$ est une submersion en tout point $(h, x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0) \in C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p) \times \mathcal{D}_f$. Il en résulte que $ev_\rho$ est transverse à la sous variété $\{0\}$ de $\mathbb{R}^{(2n+1)p}$. D'après le théorème d'Abraham, nous avons l'ensemble des $h$ dans $C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$ tel que $\rho_h \pitchfork \{0\}$ est résiduel dans $C^\infty(M \times U, \mathbb{R}^p)$. Puisque $\mathcal{D}_f$ est une sous variété ouverte de $M \times U^{2n+1} \times M$ de dimension $2n + (2n+1)m$ et la dimension de $\mathbb{R}^{(2n+1)p}$ est égale à $(2n+1)p$, nous aurons $(2n+1)p - (2n+1) - (2n+1)m \geq 0$, car $p > m$. Donc dire que $\rho_h$ est transverse à $\{0\}$ en $(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0)$ implique que $ev_{\rho_h}(x_0, \underline{u_{2n+1}}, \bar{x}_0) \neq 0$, c'est-à-dire

$$(h(x_0, u_0), \ldots, h(f^{2n}(x_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n})) \neq (h(\bar{x}_0, u_0), \ldots, h(f^{2n}(\bar{x}_0, \underline{u_{2n}}), u_{2n})$$

ce qui achève la démonstration du lemme 15.

# Bibliographie


[1] Ralph Abraham and Joel Robbin. *Transversal Mappings And Flows.* Amsterdam, 1967.

[2] D. Aeyels. Generic observability of differentiable systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 19(5) :595–603, 1981.

[3] D. Aeyels. On the number of samples necessary to achieve observability. *Systems and control Letters*, 1(2), 1981.

[4] Francesca Albertini and Domenico D'Alessandro. Remarks on the observability of nonlinear discrete time systems. *In System modelling and optimization (Prague, 1995), Chapman and Hall, London*, pages 155–162, 1996.

[5] S. Ammar and J.-C Vivalda. On the preservation of the observability under sampling to appear in. *Systems and control Letters.*

[6] S. Ammar and J.-C Vivalda. On the preservation of the observability under sampling. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control Orlando, Florida USA*, pages 3350–3351, 2001.

[7] M. Balde and P. Jouan. Observability of control affine systems. *ESAIM-COCV*, 3 :345–359, 1998.

[8] Z. Bartosiewicz. Local observability of nonlinear systems. *Systems and control Letters*, 25 :295–298, 1995.

[9] G. Bornard, F. Celle, G. Daufin-Tanguy, G. Gilles, J. Lottin, L. Pronzato, S. Scavarda, D. Thomasset, and E. Walter. *Systèmes non linéaires. 1. modélisation-estimation.*

[10] N. Bourbaki. *Eléments de Mathématiques, Topologie générale, livre III, Actualités Scientifiques et industrielles.* 1142, Hermann, Paris, 1961.

[11] V. N. Brandin, Yu.-M.-L. Kostyukovskii, and G.-N. Razorenov. observability conditions for nonlinear dynamic systems. *Automat. Remote Control*, 36(10) :1585–1591, 1975.

[12] Deza, F. Busvelle, E. Gauthier, J.-P., and D. Rakotopara. High-gain estimation for nonlinear systems. *Systems and control Letters*, 18 :295–299, 1992.

[13] Lance Drager and Clyde Martin. Global observability of a class of nonlinear discrete time systems. *Systems and control Letters*, 6(1) :65–68, 1985.

[14] M. Fliess and I. Kupka. A fitness criterion for nonlinear imput-output differential systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 21 :721–728, 1983.

[15] Michel Fliess. A remark on nonlinear observability. *IEEE trans. Aut. control*, 27(2) :489–490, 1982.

[16] J.-P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of bilinear systems. *IEEE trans. Aut. control*, 26 :922–926, 1981.

[17] J.-P. Gauthier, H.-Hammouri, and S.-Othmann. A simple observer for nonlinear systems. *IEEE trans. Aut. control*, 37 :875–880, 1992.

[18] J.-P. Gauthier, H. Hammouri, and I. Kupka. Observers for nonlinear systems. *IEEE CDC Conference Brighton England*, pages 1483–1489, 1991.

[19] J.-P. Gauthier and D. Kazakos. Observabilité et observateurs de systèmes non linéaires. *RAIRO Automat.-Prod. Inform. Ind.*, 22(2) :201–212.

[20] J.-P. Gauthier and I. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32(4) :975–994, 1994.

[21] J.-P. Gauthier and I. Kupka. Observability for systems with more outputs than imputs. *Mathematische Zeitschrift*, 223 :47–78, 1996.

[22] J.-P. Gauthier and I. Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications.* Cambridge University press, 2001.

[23] M. Golubitsky and V. Guillemin. *Graduate texts in matehematics. Stable mappings and their singularities.*

[24] E.-W. Griffith and K.-S.-P. Kumar. On the observability of nonlinear systems. *I. J. Math. Appl.*, 35 :135–147, 1971.

[25] R. Hermann and all. Nonlinear controllability and observability. *IEEE trans. Aut. control*, 22 :728–740, 1977.

[26] R. Hermann and A.-J. Krener. Nonlinear controllobility and observability. *IEEE trans. Aut. control*, 22 :728–740, 1977.

[27] M.W. Hirsch. *Differential topology, Graduate texts in math.* Springer-Verlag, 1976.

[28] M. Hwang and J.-H. Seinfeld. Observability of nonlinear systems. *I. J. Math. Appl.*, 10(2) :67–77, 1972.

[29] Yujiro Inouye. On the observability of autonomous nonlinear systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 60(1) :236–247, 1977.

[30] R. Kalman, B.-L.-ho, and K. Narendra. Controllability of linear dynamical systems. *In contribution to differentiel equations, new York : Interscience*, 1, 1963.

[31] R.-E. Kalman and J. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering, 82D*, pages 35–45, 1960.

[32] D.-J. Kazakos. Canonical form observability for discrete-time affine non-linear systems. *INT.J Systems SCI.*, 24(4) :769–776, 1993.

[33] Yu. M.-L. Kostyukovskii. Observability of nonlinear controlled systems. *Automat. Remote Control*, (9) :1384–1396, 1968.

[34] Yu.-M.-L. Kostyukovskii. Simple conditions of observability of nonlinear controlled systems. *Automat. Remote Control*, (10) :1575–1584, 1968.

[35] Yu.-R. Kotta. A group-theoretic approch to the observability of nonlinear dynamical systems with discrete time. *Kibernet. I Vychisl. Tekhn.*, 101(73) :26–30, 1987.

[36] S.-R. Kou, D.-L. Elliot, and T.-J. Tarn. Exponential observers for nonlinear dynamic systems. *INT.J Systems SCI.*, 29 :204–216, 1975.

[37] A.-A. Krasovskii. Observability conditions for nonlinear processes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 242(6) :1265–1268, 1978.

[38] Gerhard Kreissemeier. On sampling without loss of observability/controllability. *IEEE trans. Aut. control*, 44(5), May 1999.

[39] A.-J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and control Letters*, 3 :47–52, 1983.

[40] A.-J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linear error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23 :197–216, 1985.

[41] K.-S.-P. Kumar and E.-W. Griffith. Observability of nonlinear systems. problems control inform. *Theory-Problemy Upravlen. Teor. Inform.*, 9(1) :57–65, 1980.

[42] William S. Levine. *The control Handbook.*

[43] Wei Lin, Christopher, and I. Byrnes. Zero-state observability and stability of discrete-time nonlinear systems. *Automatica J. IFAC*, 31(2) :269–271, 1995.

[44] D.-G. Luemberger. Observers of multivariable systems. *IEEE trans. Aut. control*, pages 190–197, 1966.

[45] C. Martin and J. Miller. Discrete observability of nonlinear systems using continuation techniques. *Mathematics Department Texas Teach University Lubbock, Texas 79409-1042.*

[46] S. Monaco and D. Normand Cyrot. On the sampling of a linear analytic control system. *Proceedings of 24th conference on decision and control Ft. Lauderdale, FL*, 1985.

[47] P.-E. Moraal and J.-W. GWRIZZLE. Observer desing for nonlinear systems with discrete-time measurements. *IEEE trans. Aut. control*, 40(3), 1999.

[48] H. Nijmeijer. Observability of a class of nonlinear systems : a geometric approach. *Systems and control Letters*, 1982.

[49] V.-A. Oleinikov and A.-S. Sidorov. Observability of a class of nonlinear dynamic plants. *Voprosy Teor. Sistem Automat. Upravleniya*, 37(4) :3–7, 1978.

[50] Ye.-A. Gal perin. On the observability of nonlinear systems. *Engrg. Cybernetics*, 10(2) :338–345, 1972.

[51] Ye.-Ya. Roitenberg. Observability of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 8 :338–345, 1970.

[52] E.-D. Sontag. Polynomial response maps. *Springer-Verlag, New York*, 1979.

[53] E.-D. Sontag. A concept of local observability. *Systems and control Letters*, 5 :41–47, 1984.

[54] E.D. Sontag. On the observability of polynomial systems, i : Finite-time problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17, 1979.

[55] E.D. Sontag. On the preservation of certain controllability properties under sampling. *In I.D. Landau, editor, Outils et modèles Mathématiques pour l'automatique, l'analyse de Systèmes et le traitement du signal*, 3 :623–627, 1983.

[56] E.D. Sontag. *Mathematical control theory. Number 6 in Texts in Applied Mathematics.* Springer-Verlag, 1990.

[57] K.-E. Starkov. New conditions for the observability of nonlinear systems for cases of continuous and discrete observations. *Dokl. Akad. Nauk*, 343(1) :33–35, 1995.

[58] H.J. Sussmann. Single input observability of continuous time systems. *Math. Systems Theory*, 12 :371–393, 1979.

[59] F.-E. Thau. observing the state of nonlinear systems using state detection. *INT.J Systems SCI.*, 18 :471–479, 1973.

[60] J. van der Schaft. Observability and controllability for smooth nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20(3) :338–354, 1982.

[61] D. Williamson. Observability of bilinear systems, with application to biological control. *Automatica J. IFAC*, 13, 1977.

[62] W. Xia and W. Gao. On exponential observers for nonlinear systems. *Systems and control Letters*, 1 :319–325, 1988.

[63] Y. Yamamoto and I. Sugiura. Some sufficient conditions for the observability of nonlinear systems. *J. Optimization Theory Appl.*, 13 :660–669, 1974.

[64] N. Zhirabok. An algebraic criterion for the observability of nonlinear discrete systems. *Kibernet. I Vychisl. Tekhn.*, 95 :6–12, 1992.

# Table des matières