



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

N° inv.	20030675
	S/M3 03/23
Loc	

THESE

présentée et soutenue publiquement à



Université
de
Metz

Par

AGGOUNE Wassila

le 18 décembre 2003

Pour l'obtention du grade de :

Docteur de l'Université de Metz

Spécialité : Sciences de l'ingénieur

Option : Mécanique

NOUVEAUX ALGORITHMES ASYMPTOTIQUES NUMERIQUES POUR LA RESOLUTION DES PROBLEMES DE CONTACT UNILATERAL

JURY

H.BEN DHIA	Professeur, Ecole Centrale de Paris	Rapporteur
J.M.BERGHEAU	Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Saint-Etienne	Rapporteur
P.ALART	Professeur, Université Montpellier II	Examineur
G.DUVAUT	Professeur émérite, Université Pierre et Marie Curie	Examineur
M.POTIER-FERRY	Professeur, Université de Metz	Directeur de thèse
H.ZAHROUNI	Maître de Conférences, Université de Metz	Co-directeur de thèse

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7554, Université de Metz,

Ile du Saulcy, 57045 Cedex 0

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



031 520566 0

UNIVERSITÉ DE METZ

MÉMOIRE DE THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Discipline : MÉCANIQUE

présentée et soutenue publiquement

par

AGGOUNE WASSILA

le 18 décembre 2003

**NOUVEAUX ALGORITHMES ASYMPTOTIQUES
NUMÉRIQUES POUR LA RÉOLUTION DES
PROBLÈMES DE CONTACT UNILATÉRAL**

JURY

MM.	H. BEN DHIA	LMSS-MAT, Ecole Centrale de Paris	Rapporteur
	J.M.BERGHEAU	LTDS, ENI Saint Etienne	Rapporteur
	P. ALART	LMGC, Université Montpellier II	Examineur
	G. DUVAUT	LM2S, Université Pierre et Marie Curie	Examineur
	M. POTIER-FERRY	LPMM, Université de Metz	Directeur de thèse
	H. ZAHROUNI	LPMM, Université de Metz	Co-directeur de thèse

*A ma très chère mouman,
constante dans sa douceur, son soutien et son écoute, la maman de trois docteurs.*

A mon père à qui je dois beaucoup.

*A ma soeur Woihida et mes frères Riad et Farid,
ma belle soeur Marielle, mon beau frère Amel Eddine et mon neveu Bilel.
Aux familles Aggoune, Atssa, Bououdnine, Boussaid, Houhou et Mahidine.*

*A tous mes enseignants depuis la maternelle,
je dédie ce travail.*

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein de l'équipe simulation numérique du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (L.P.M.M.) de l'Université de Metz sous la direction du professeur Potier-Ferry Michel et de Hamid Zahrouni.

Je tiens tout d'abord à remercier Michel Potier-Ferry pour m'avoir accueillie au sein de son équipe. J'ai ainsi eu la chance de travailler et apprendre avec un professeur exemplaire.

Je remercie également Hamid Zahrouni, qui a co-encadré ce travail, pour sa disponibilité, sa gentillesse et son soutien.

J'adresse mes plus vifs remerciements à monsieur Georges Duvaut pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de thèse.

Je remercie messieurs Hachmi Ben Dhia et Jean-Michel Bergheau qui ont accepté la lourde charge de rapporteur.

J'exprime ma reconnaissance à monsieur Pierre Alart pour avoir pris le temps d'examiner ce mémoire.

Je les remercie tous pour leur aimable participation au jury de cette thèse. Je suis ravie de l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes travaux.

Je remercie tous les membres du L.P.M.M. : Maîtres de Conférences, Professeurs, Professeurs invités en particulier Nourredine Damil, Secrétaires, Informaticiens et Thésards pour leur sympathie, leur aide et leur soutien. Je remercie vivement les thésards de mon équipe : Rachid, Hala, Nicolas, Hu, Anas, Ali et Laetitia. Je remercie également Dominique Chamoret pour l'aide qu'elle m'a apportée.

Enfin je remercie mes parents qui ont toujours été là pour moi.

SOMMAIRE

Remerciements	vii
Introduction générale	1
Chapitre 1. Formulation d'un problème de contact unilatéral et méthodes numériques classiquement utilisées	5
1.1. Introduction	7
1.2. Formulation du problème élastique sans contact	7
1.2.1. Transformations finies	7
1.2.2. Loi de comportement élastique linéaire	9
1.2.3. Formulations globales du problème d'élasticité non-linéaire	10
1.3. Formulation du problème avec contact unilatéral	12
1.3.1. Conditions de contact	12
1.3.2. Formulation globale du problème de contact sans frottement	14
1.4. Méthodes numériques pour le traitement du contact	16
1.4.1. Technique de résolution itérative ou procédure "d'essai et d'erreur"	16
1.4.2. Minimisation sous contraintes	17
1.4.3. Autres méthodes pour les problèmes de contact	20
1.5. Bilan du chapitre	21
Chapitre 2. Résolution du problème de contact par la MAN couplée à la méthode du lagrangien perturbé	23
2.1. Introduction	25
2.2. Formulation du problème de contact	25
2.2.1. Formulation mixte	25
2.2.2. Régularisations de la loi de contact	27
2.2.3. Traitement de la géométrie du problème	28
2.3. Forme discrète du problème de contact dans le cadre de la MAN	30
2.3.1. La MAN en élasticité non-linéaire	30

2.3.2. Définition des efforts de contact discrétisés	32
2.3.3. La MAN appliquée aux termes de contact	33
2.4. Algorithme de calcul des séries avec la méthode de pénalisation	35
2.4.1. Discrétisation par éléments finis	35
2.4.2. Algorithme MAN avec pénalisation	38
2.5. Algorithme de calcul des séries avec les multiplicateurs de Lagrange	39
2.5.1. Ecriture discrétisée du problème	40
2.5.2. Algorithme MAN avec lagrangien perturbé	43
2.6. Méthode de continuation	44
2.7. Bilan du chapitre	45

Chapitre 3. Premières expérimentations numériques avec les algorithmes MAN 47

3.1. Introduction	49
3.2. Présentation des tests	49
3.2.1. Premier test	49
3.2.2. Second test	49
3.2.3. Gestion du contact dans Abaqus	50
3.3. Calculs de référence	54
3.3.1. Choix de la représentation	54
3.3.2. Choix de l'ordre de troncature	55
3.3.3. Validation des algorithmes MAN	58
3.4. Comment régulariser la loi de contact?	64
3.5. Finesse du maillage et efficacité de l'algorithme	67
3.6. Analyse complémentaire des résultats obtenus par la MAN	69
3.6.1. Compléments sur l'influence du nombre de points de contact	70
3.6.2. Analyse du coût de calcul	70
3.6.3. Pilotage de la longueur de pas et comparaison des deux méthodes MAN	72
3.7. Bilan du chapitre et perspectives	74

Chapitre 4. Résolution du problème de contact par prédiction-correction d'ordre élevé 77

4.1. Introduction	79
4.2. Algorithmes de correction classiques	79
4.2.1. Problème à résoudre	79
4.2.2. Méthode de Newton	80
4.2.3. Méthode de Newton modifié	80

4.2.4. Méthode de quasi-Newton	81
4.3. Algorithmes de correction d'ordre élevé	81
4.3.1. Techniques d'homotopie et de perturbation	81
4.3.2. Choix de l'opérateur	82
4.3.3. Stratégie à longueur d'arc	83
4.4. Algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé	84
4.5. Correcteurs d'ordre élevé pour les problèmes de contact	86
4.5.1. Algorithme de correction d'ordre élevé avec la méthode de pénalisation	90
4.5.2. Algorithme de correction d'ordre élevé avec la méthode du lagrangien perturbé	94
4.6. Bilan du chapitre et perspectives	98
Chapitre 5. Expérimentation numérique des algorithmes de prédiction-correction	99
5.1. Introduction	101
5.2. Prédiction-correction d'ordre élevé pour les problèmes de contact	101
5.2.1. Fonctionnement des algorithmes	101
5.2.2. Analyse du temps de calcul	102
5.3. Pourquoi corriger à ordre élevé?	103
5.4. Comment réduire le nombre de matrices à traiter?	104
5.5. Comparaison entre les algorithmes avec pénalisation et avec multiplicateurs de Lagrange	106
5.6. Influence de la régularisation sur les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé	108
5.7. Bilan du chapitre et perspectives	109
Conclusion générale	111
<hr/>	
BIBLIOGRAPHIE	i
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Annexes	1
Annexe A. Phase de prédiction	1
A.1. Discrétisation en élasticité non-linéaire	2

A.2. Termes du contact dans le cas où la normale varie	4
A.2.1. Contact avec une surface rigide circulaire: méthode de pénalisation	6
A.2.2. Contact avec une surface rigide circulaire: multiplicateurs de Lagrange	9
Annexe B. Phase de correction	13
B.1. Discrétisation en élasticité non-linéaire	14
B.2. Termes du contact dans le cas où la normale varie	16
B.2.1. Contact avec une surface rigide circulaire: méthode de pénalisation	18
B.2.2. Contact avec une surface rigide circulaire: multiplicateurs de Lagrange	21

Introduction générale

Les problèmes de contact occupent une place centrale dans les applications de la mécanique des solides, car le contact est le moyen par lequel un chargement est transmis à un corps déformable. Ainsi le contact a une influence significative sur le comportement des structures : déformation, déplacement, distribution des contraintes. Le contact est un phénomène très présent dans les processus de mise en forme : le matériau se déplace plus ou moins par rapport aux outillages, ce qui génère des efforts de pression et de frottement entre produit et outil. Ces procédés (laminage, emboutissage, forgeage, extrusion...) sont utilisés dans de nombreuses branches de l'industrie comme l'automobile, l'industrie aéronavale ou l'industrie agroalimentaire pour la fabrication des boîtes de conserve.

D'un point de vue numérique, la simulation des procédés de mise en forme est difficile à mettre en œuvre, car plusieurs difficultés apparaissent : la non-linéarité matérielle est couplée aux non-linéarités dues aux grands déplacements et grandes rotations, auxquelles s'ajoutent les non-linéarités dues au contact. A la différence des autres problèmes mécaniques, les problèmes de contact font intervenir des conditions aux limites inconnues. Plus précisément, les surfaces de contact actuelles et les forces de contact sont autant d'inconnues supplémentaires au problème. Des progrès ont été réalisés dans l'étude numérique des problèmes de contact. De nombreuses méthodes existent. La méthode des éléments finis est largement employée et permet de traiter des géométries et des matériaux variés. Mais les difficultés sont multipliées lorsque le nombre de nœuds concernés par le contact devient grand. Il est donc important de développer des outils de résolution numériques adaptés et performants. Les problèmes de contact sont donc délicats à formuler correctement et également difficiles à résoudre. La recherche dans le domaine du contact s'est principalement focalisée sur les formulations les plus adéquates du problème. Les méthodes de prise en compte des conditions unilatérales sont par exemple bien connues (méthode de pénalité, multiplicateurs de Lagrange, lagrangien augmenté). Mais la mise au point d'algorithmes performants pour la résolution des problèmes de contact mérite d'être approfondie. Notre travail s'inscrit dans ce cadre purement numérique avec pour objectif final la mise en œuvre de nouveaux algorithmes performants.

Les systèmes d'équations non-linéaires sont souvent traités par des méthodes incrémentales itératives de type Newton-Raphson. Dans l'approche incrémentale, cette stratégie de résolution itérative pose des difficultés de convergence dues aux problèmes du choix de l'incrément qu'il est délicat de rendre optimal. Les difficultés dues à l'utilisation des processus itératifs ont motivé le développement et l'utilisation de schémas non itératifs dits explicites. C'est ainsi qu'a été développée la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) qui doit son nom à la combinaison de techniques de développements asymptotiques avec la méthode des éléments finis. Elle consiste à chercher la solution d'un problème non-linéaire sous forme de série entière. Ce qui permet de transformer le problème de départ en une succession de problèmes linéaires admettant le même opérateur de rigidité tangente. A chaque ordre les termes non-linéaires sont reportés dans un second membre obtenu de façon optimale. La seconde étape consiste à résoudre les systèmes linéaires de manière récursive à l'aide de la méthode des éléments finis. Etant donné que les séries ont un rayon de convergence limité, on n'obtient qu'une portion de la courbe solution. Pour décrire toute la courbe solution, il convient d'appliquer une méthode de continuation. La robustesse de cette méthode de continuation pour le suivi des courbes et l'adaptation automatique de la longueur des pas font de la MAN une méthode très fiable. Après avoir été appliquée aux problèmes d'élasticité non-linéaires et en mécanique des fluides, la MAN a ensuite été utilisée pour des non-linéarités plus fortes : certains modèles plastiques ou viscoplastiques et le contact unilatéral. C'est dans ce but que Elhage [EH98] a établi une stratégie de résolution des problèmes de contact basée sur la MAN. La MAN ne peut s'appliquer dans le cas d'un contact dur car la réponse n'est pas une fonction analytique du chargement. Elhage a donc remplacé la loi de contact par une relation régulière entre la force de contact et l'écart entre les corps concernés par le contact : la régularisation ainsi introduite pouvant s'interpréter comme une pénalisation. Pour se rapprocher des simulations numériques de la mise en forme, deux applications de la MAN ont été réalisées pour des problèmes de poinçonnement. Brunelot [Bru99] a considéré des matériaux viscoplastiques incompressibles (lois de Norton-Hoff) et un contact avec frottement dans un cadre 2D-axisymétrique. Abichou [Abi01] a considéré des modèles de coques tridimensionnels et une loi non-linéaire de type déformation. Ces deux études ont montré que la MAN pouvait très bien fonctionner en présence de non-linéarités couplées, en particulier avec du contact unilatéral.

Ce travail de thèse a pour but de revisiter l'application de la MAN au contact unilatéral. En effet, depuis les premiers travaux d'Elhage (1994-98), les algorithmes MAN ont beaucoup évolué. En particulier, l'utilisation des approximations de Padé est devenue systématique et la MAN est désormais pensée dans un cadre de prédiction-corrrection. De plus, ces premiers travaux sur le contact n'introduisaient pas de multiplicateurs de Lagrange comme la plupart des auteurs et la technique de régularisation du contact dur soulevait de nombreuses questions. C'est l'ensemble de ces problèmes qui seront abordés dans cette thèse, en particulier en couplant la MAN avec la méthode du lagrangien perturbé pour obtenir des matrices mieux conditionnées.

Contenu de la thèse

Ce mémoire s'organise en cinq chapitres.

Le premier est consacré à la formulation du problème de contact unilatéral et aux méthodes classiquement utilisées pour la résolution de ce type de problème. Après un bref rappel sur le cadre des transformations finies, nous donnons les différentes relations traduisant le contact unilatéral. Puis la formulation variationnelle du problème d'élasticité non-linéaire avec contact est présentée. Sans avoir la prétention d'établir une liste exhaustive des méthodes numériques traitant les problèmes de contact, nous présentons enfin ce qui nous semble être les principales méthodes de résolution.

Le second chapitre traite de la formulation du problème de contact unilatéral, dans le cadre de la MAN. Les conditions de contact unilatéral n'étant pas analytiques, nous les remplaçons par une relation hyperbolique entre les forces et les déplacements. Nous appliquons ensuite la MAN au problème régularisé. Les forces de contact sont considérées comme des efforts extérieurs et cherchées sous forme de séries entières. La discrétisation par éléments finis se fait selon deux schémas différents : nous avons couplé la MAN, dans un premier temps, à la méthode de pénalisation et ensuite à la méthode du lagrangien perturbé. Dans le cadre de la méthode de pénalisation, la réaction de contact est condensée et le champ des déplacements est considéré comme l'inconnue principale. Avec la méthode du lagrangien perturbé, les forces de contact constituent des inconnues supplémentaires du problème discret. Enfin nous décrivons la méthode de continuation utilisée : elle est basée sur une représentation de la solution par des approximants de Padé.

Dans le troisième chapitre, la mise en œuvre des algorithmes décrits précédemment est présentée sur des problèmes bidimensionnels sans frottement. Tout d'abord nous montrons l'intérêt d'utiliser les approximants de Padé. Puis nous définissons un ordre de troncature optimal pour les séries solutions. Les solutions MAN ainsi obtenues sont validées par comparaison avec celles issues du code de calcul industriel Abaqus. Puis nous discutons de l'influence du paramètre de régularisation et du maillage sur l'efficacité des algorithmes MAN. Enfin nous mettons en évidence l'importance du pilotage des calculs pour le fonctionnement des algorithmes.

Pour augmenter la fiabilité des algorithmes MAN, nous définissons dans le chapitre 4 des algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé pour les problèmes de contact. Nous rappelons d'abord les techniques itératives couramment utilisées pour la résolution des problèmes non-linéaires. Puis nous présentons les techniques d'homotopie et de perturbation adoptées pour la définition des correcteurs d'ordre élevé. Nous proposons deux correcteurs, caractérisés par le choix de l'opérateur tangent à inverser. Ensuite nous couplons le prédicteur d'ordre élevé défini dans le chapitre 2 aux correcteurs d'ordre élevé et nous proposons deux stratégies de calcul autour des algorithmes de prédiction-correction ainsi obtenus.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à l'expérimentation numérique des algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé. Nous montrons d'abord les apports de la correction à ordre élevé par rapport aux correcteurs classiques. Puis nous testons les différents algorithmes d'un point de vue de l'efficacité et de la fiabilité.

CHAPITRE 1

Formulation d'un problème de contact unilatéral et méthodes numériques classiquement utilisées

Nous présentons dans ce chapitre, les approches utilisées pour modéliser les problèmes de contact. Nous décrivons ensuite les méthodes numériques classiquement employées pour la résolution de ces problèmes.

PLAN DU CHAPITRE 1

1.1. Introduction	7
1.2. Formulation du problème élastique sans contact	7
1.2.1. Transformations finies	7
1.2.2. Loi de comportement élastique linéaire	9
1.2.3. Formulations globales du problème d'élasticité non-linéaire	10
1.3. Formulation du problème avec contact unilatéral	12
1.3.1. Conditions de contact	12
1.3.2. Formulation globale du problème de contact sans frottement	14
1.4. Méthodes numériques pour le traitement du contact	16
1.4.1. Technique de résolution itérative ou procédure "d'essai et d'erreur"	16
1.4.2. Minimisation sous contraintes	17
1.4.2.a. Pénalisation	17
1.4.2.b. Points selles et multiplicateurs de Lagrange	18
1.4.2.c. Méthode du lagrangien perturbé	20
1.4.3. Autres méthodes pour les problèmes de contact	20
1.5. Bilan du chapitre	21

1.1 Introduction

Le traitement de la mécanique du contact est extrêmement compliqué d'un point de vue numérique. Par rapport à la mécanique classique des solides, la mécanique du contact fait intervenir deux solides (voire plus) au lieu d'un. Les problèmes de contact sont donc caractérisés par la présence de discontinuités matérielles et géométriques à l'interface qui est en directe opposition avec l'hypothèse de continuité de la mécanique des solides. En conséquence, les problèmes de contact sont fortement non-linéaires et non-réguliers. De plus ils induisent des conditions aux limites inconnues a priori, la surface de contact évoluant au cours du chargement. Une conséquence de ces non-linéarités est que les formulations mathématiques utilisées pour modéliser les problèmes de contact sont compliquées. Elles induisent des systèmes d'équations aux dérivées partielles et des inégalités provenant de la loi de contact unilatéral.

Dans ce chapitre, nous rappelons les équations intervenant dans la description du contact : d'une part les équations classiques de la mécanique [Ger62], c'est à dire les équations d'équilibre, les lois de comportement des matériaux et les conditions aux limites et d'autre part les relations fortement non-linéaires et non-régulières spécifiques au contact. Nous présentons ensuite les méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution de cette classe de problèmes.

1.2 Formulation du problème élastique sans contact

1.2.1 Transformations finies

Le but de cette section est de formuler le problème d'élasticité non-linéaire. A cet effet, nous rappelons les concepts généraux et principes de la mécanique des milieux continus avec une attention particulière au cadre des grands déplacements, encore appelé cadre des transformations finies.

Nous commençons par décrire la cinématique des corps déformables [Ger62] [Cia85].

Nous considérons un solide déformable occupant un domaine borné Ω de \mathbb{R}^3 à un temps donné. Ω est appelé la configuration de référence du solide. Sa frontière $\partial\Omega$ est supposée régulière. Un point du système est repéré par le vecteur position $\mathbf{X} \in \Omega$ dans la configuration de référence. Comme le solide se déplace et se déforme, le domaine qu'il occupe dans l'espace \mathbb{R}^3 change continuellement. La région qu'il occupe dans l'espace euclidien à l'instant t noté Ω_t est appelée la configuration actuelle déformée. La configuration initiale Ω_0 est la configuration du corps au temps $t = 0$ ($\Omega_0 = \Omega_{t=0}$) et diffère généralement de la configuration de référence. La position d'un point quelconque sur la configuration déformée s'écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \tag{1.1}$$

où \mathbf{u} désigne le vecteur déplacement.

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, deux systèmes de coordonnées sont utilisés :

- Lagrangien (ou matériel) $(\{X_k\}; k = 1,2,3)$ associé à la configuration de référence Ω
- Eulérien (ou en espace) $(\{x_k\}; k = 1,2,3)$ lié à la configuration actuelle Ω_t

Si toutes les grandeurs, c'est à dire les déplacements, les contraintes et les déformations sont décrites dans la configuration actuelle, la description est dite eulérienne. Ce choix de description peut dans certains cas simplifier les formulations.

Dans notre étude, nous adoptons la description lagrangienne ou description lagrangienne totale : c'est la configuration initiale qui est prise comme configuration de référence ($\Omega_0 = \Omega$).

La déformation d'une fibre matérielle infinitésimale $d\mathbf{X}$ de la configuration initiale à la configuration actuelle s'écrit :

$$d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} d\mathbf{X}$$

où $\bar{\mathbf{F}}$ est appelé le tenseur gradient de la transformation et a pour composantes ($1 \leq i, j \leq 3$) :

$$\bar{F}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

Nous pouvons de manière équivalente utiliser le tenseur gradient des déplacements

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}$$

où \mathbf{I} représente le tenseur identité.

Le déterminant du gradient de la déformation est noté $J = \det \bar{\mathbf{F}}$. Le tenseur gradient de déformation $\bar{\mathbf{F}}$ peut être décomposé de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{R}} \mathbf{U}$$

ou encore :

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{V} \bar{\mathbf{R}}$$

\mathbf{U} et \mathbf{V} désignent respectivement le tenseur des dilatations à droite et à gauche. $\bar{\mathbf{R}}$ est le tenseur des rotations qui vérifie :

$$\bar{\mathbf{R}}^{-1} = \bar{\mathbf{R}}^t \quad \text{et} \quad \det \bar{\mathbf{R}} = 1.$$

Les changements dans la géométrie du corps induits par ses déformations peuvent être décrits par le biais de différentes mesures équivalentes de déformations. Comme $\bar{\mathbf{F}}$ n'est pas objectif (il est défini à un déplacement de corps rigide près), nous introduisons le tenseur symétrique de Cauchy-Green à droite défini par :

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{F}}^t \bar{\mathbf{F}}$$

Sa version normalisée, le tenseur symétrique de Green-Lagrange γ appelé également le tenseur des déformations est donné par :

$$\gamma = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}^t \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t + \nabla \mathbf{u}^t \nabla \mathbf{u})$$

Donc

$$\gamma(\mathbf{u}) = \gamma^l(\mathbf{u}) + \gamma^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange se décompose donc en une partie linéaire γ^l et une partie bilinéaire symétrique γ^{nl} .

Dans le cas des petites déformations ($\nabla \mathbf{u} \ll 1$), γ est réduit au tenseur des déformations d'Euler :

$$\gamma \simeq \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) \quad (1.2)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy noté σ donne en un point de la configuration actuelle le vecteur contrainte \mathbf{t} exercé sur une facette de normale \mathbf{N} . Il est défini par la relation :

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{N}$$

Il existe dans la littérature d'autres tenseurs pour représenter les contraintes dans un milieu continu. Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{P}}$ permet d'obtenir en un point de la configuration de référence le vecteur contrainte \mathbf{t}_0 exercé sur une facette de normale \mathbf{N}_0 . Comme ce tenseur n'est pas objectif, nous introduisons le second tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} défini par :

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}$$

Le tenseur \mathbf{S} est relié au tenseur de Cauchy par la relation suivante :

$$\sigma = J^{-1} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{S} \bar{\mathbf{F}}^t$$

1.2.2 Loi de comportement élastique linéaire

Dans toute l'étude, le matériau considéré est homogène, isotrope, c'est à dire invariant par rapport à toute rotation ou translation de la configuration de référence.

Le matériau a un comportement supposé élastique linéaire. La loi de Kirchoff-St Venant, une version objective de la loi de Hooke standard est la loi élastique isotrope la plus simple et la plus souvent utilisée. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{S}(\gamma) = \bar{\lambda} \operatorname{tr}(\gamma) \mathbf{I} + 2 \mu \gamma \quad (1.3)$$

où tr désigne la trace d'un tenseur. $\bar{\lambda}$ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau liés au module d'Young E et au coefficient de Poisson ν par :

$$\bar{\lambda} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

L'équation (1.3) peut se réécrire :

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} : \gamma$$

où \mathbf{D} désigne le tenseur d'élasticité.

La loi de Kirchoff-St Venant dérive du potentiel élastique quadratique suivant :

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (\text{tr} \boldsymbol{\gamma})^2 + \mu \text{tr}(\boldsymbol{\gamma}^2) \quad (1.4)$$

1.2.3 Formulations globales du problème d'élasticité non-linéaire

Nous nous plaçons dans le cadre quasi-statique, et nous négligeons les termes d'inertie. La frontière $\partial\Omega$ du solide déformable se décompose en trois parties disjointes (voir figure 1.1) :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_c \cup \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f$$

où $\partial\Omega_u$: surface avec déplacements imposés

$\partial\Omega_f$: surface avec forces imposées

$\partial\Omega_c$: surface potentielle de contact.

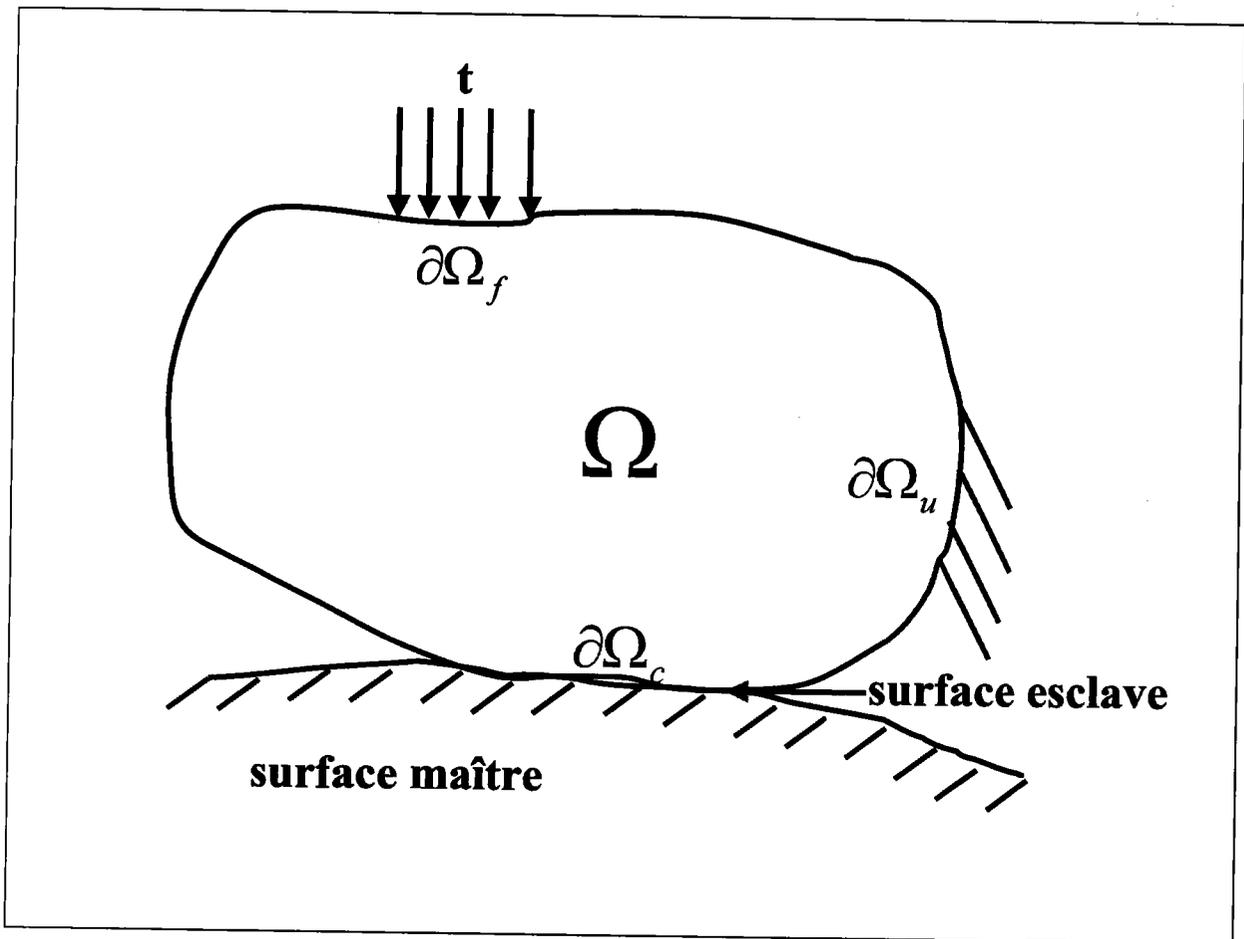


FIGURE 1.1 – Problème du contact

Nous supposons que le corps déformable est soumis à des efforts conservatifs: des forces volumiques \mathbf{b} dans Ω et des forces de surface. Dans un premier temps, nous supposons que les efforts de contact \mathbf{t} sont donnés sur $\partial\Omega_f$ et $\partial\Omega_c$ et rappelons les formulations variationnelles

du problème élastique non-linéaire ainsi obtenu. Nous imposons un déplacement nul sur la partie de la frontière $\partial\Omega_u$. Nous introduisons l'ensemble **C.A** des déplacements cinématiquement admissibles :

$$\mathbf{C.A} = \{\mathbf{u} / \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_u\}$$

Nous écrivons la formulation issue du principe des travaux virtuels en faisant apparaître explicitement la contrainte **S** et en séparant le problème en des équations d'équilibre et de comportement. Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{S}^t : \delta\boldsymbol{\gamma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_f \cup \partial\Omega_c} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathbf{C.A} \\ \mathbf{S} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D} : (\boldsymbol{\gamma}^l(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \\ \mathbf{u} \in \mathbf{C.A} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

avec

$$\delta\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}^l(\delta\mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$$

Remarque 1.2.3

Dans le cas où **t** est donné, l'énergie potentielle totale du système s'écrit :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{W}(\boldsymbol{\gamma}) \, d\Omega - P_e(\mathbf{u})$$

où **W**($\boldsymbol{\gamma}$) a été introduite précédemment (1.4) et désigne la densité d'énergie élastique emmagasinée (ou énergie de déformation), et $P_e(\mathbf{u})$ est le travail des efforts extérieurs avec P_e défini par :

$$P_e(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_f \cup \partial\Omega_c} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (1.6)$$

Notons aussi qu'on peut synthétiser les deux premières équations (1.5) sous une forme variationnelle mixte.

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}^t : \delta\boldsymbol{\gamma} + \delta\mathbf{S}^t : (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{S}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_f \cup \partial\Omega_c} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma \quad (1.7)$$

Pour écrire la formulation du problème avec contact unilatéral, il nous reste à introduire les relations issues des interactions de contact.

1.3 Formulation du problème avec contact unilatéral

1.3.1 Conditions de contact

Nous adoptons le concept maître-esclave pour définir l'interaction de contact [HGB85]. En principe les rôles des surfaces maître et esclave doivent être interchangeables. En pratique la surface maître est choisie comme étant la plus rigide des deux et de ce fait la surface esclave est celle appartenant au corps déformable. Dans notre travail la surface esclave est la partie $\partial\Omega_c$ définie précédemment. A chaque point \mathbf{x}_e candidat au contact, nous associons un point de la surface maître \mathbf{x}_m appelé point le plus proche, solution du problème :

$$\mathbf{x}_m = \frac{1}{2} \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega_m} \|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}'\|^2$$

où $\partial\Omega_m$ désigne la surface maître et $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 . L'unicité de ce problème de minimisation peut dans certains cas poser des problèmes [CHK95]. Une condition nécessaire et suffisante pour obtenir le minimum est de définir \mathbf{x}_m comme la projection orthogonale de \mathbf{x}_e sur la surface maître, voir figure (1.2). Le vecteur liant \mathbf{x}_e à \mathbf{x}_m est appelé vecteur écart normal [Pie97]. Il est défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_m = h\mathbf{n} \\ \tau \cdot (\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_m) = 0 \end{cases}$$

où τ est le vecteur tangent à la surface maître au point \mathbf{x}_m et \mathbf{n} le vecteur normal à cette surface. Le scalaire h est appelé distance normale de contact. Il joue un rôle fondamental dans la mise en évidence de l'interpénétration entre les deux corps. Il traduit le statut géométrique d'un point de contact. Trois statuts de contact sont envisageables, voir figure (1.3) :

$$\begin{cases} \text{non contact} & h > 0 \\ \text{contact parfait} & h = 0 \\ \text{interpénétration} & h < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

En général la réaction \mathbf{R} est une fonction de la distance h (voir figure 1.2). Dans le cas d'un contact sans frottement, elle est portée par le vecteur normal \mathbf{n} à la surface maître.

Loi de contact unilatéral

La loi de contact unilatéral exprime les conditions de non-interpénétration des solides. Elle se traduit par trois relations liées entre elles, appelées conditions de Hertz-Signorini, entre h et la pression normale de contact R^N ($R^N = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$) :

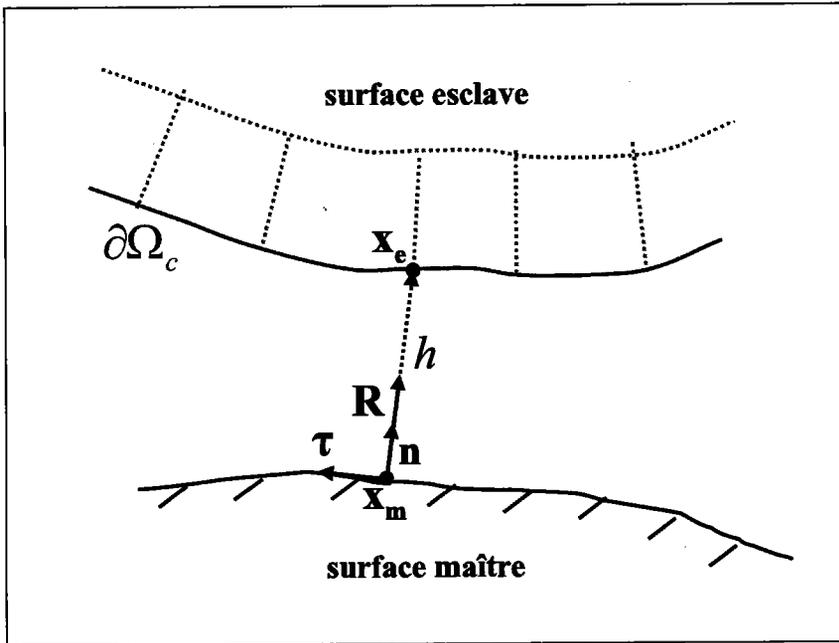


FIGURE 1.2 - Distance de contact

$$\begin{cases} h \geq 0 & \text{non-pénétration} \\ R^N \geq 0 & \text{compression} \\ hR^N = 0 & \text{condition de complémentarité} \end{cases} \quad (1.9)$$

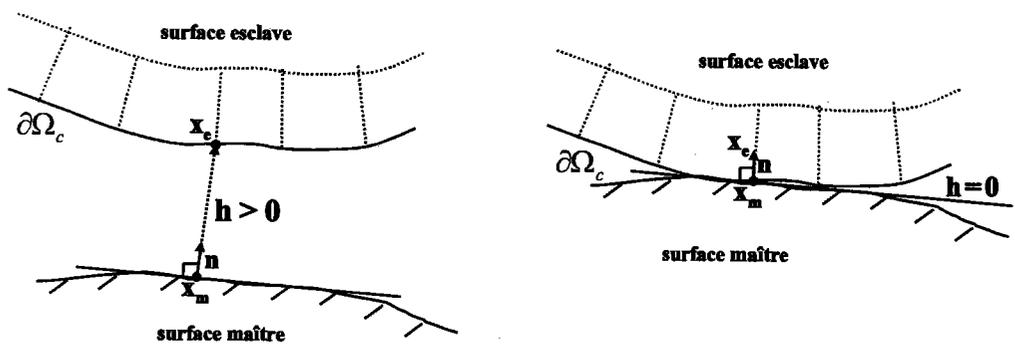
Donc d'après la loi de contact unilatéral, aucune pénétration n'est admise et la pression de contact peut prendre des valeurs positives seulement si les corps sont en contact. Sinon, elle est nulle (figure 1.4).

Lois de frottement

Les lois de frottement permettent de décrire le comportement des différents corps qui entrent en contact lorsque le contact est maintenu. Différents modèles existent, ils sont caractérisés par :

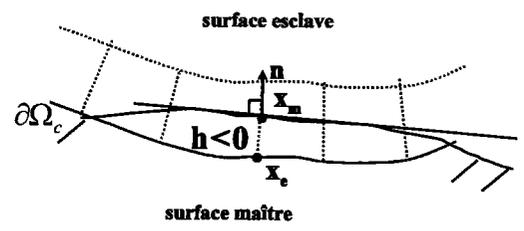
- un critère de frottement qui limite l'intensité de la force de frottement
- une règle de glissement qui définit la direction de la vitesse de glissement en termes de direction de la force de frottement, et
- une condition énergétique de complémentarité.

Avec cette description, il semble normal qu'il existe une analogie entre le frottement et la plasticité, comme cela est démontré dans [Cur84]. La loi de frottement la plus utilisée est la loi de Coulomb qui exprime la contrainte tangentielle en fonction de la contrainte normale par le biais d'un réel appelé coefficient de frottement. La modélisation du frottement par la loi de Tresca est également courante. D'autres modèles couplent frottement et adhérence [RCC99] [Rao99a]. Une



(a) Non contact

(b) Contact parfait



(c) Interpénétration

FIGURE 1.3 – Statuts de contact

discussion détaillée sur les modèles pour le frottement est présentée dans [Mon93] et [Rao99b]. Dans notre étude, nous nous limitons au cas de problèmes de contact sans frottement.

1.3.2 Formulation globale du problème de contact sans frottement

Pour obtenir la formulation globale du problème de contact nous écrivons la formulation variationnelle mixte (1.7) et nous ajoutons les conditions de contact (1.9). Notons que ni \mathbf{u} , ni \mathbf{t}

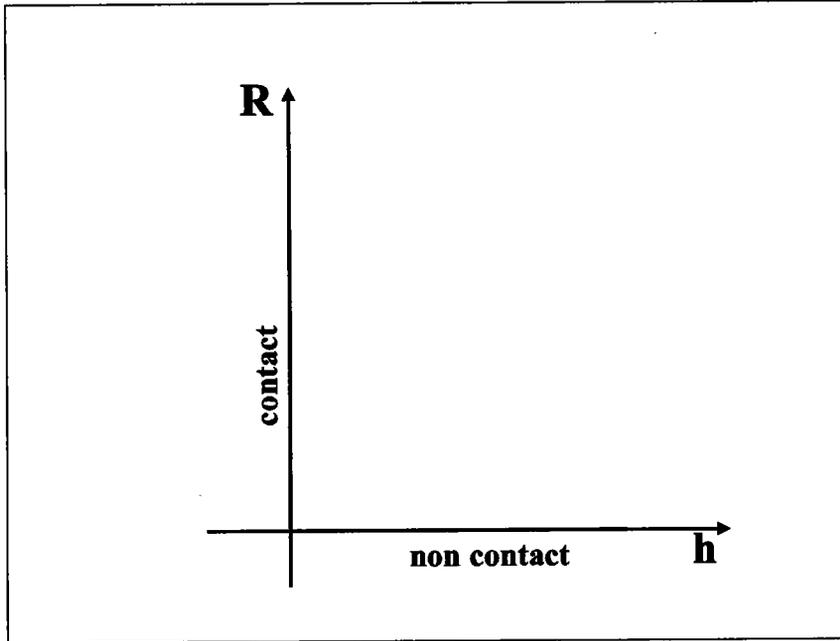


FIGURE 1.4 – Loi de contact unilatéral

ne sont donnés sur $\partial\Omega_c$. Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{CA} \text{ tel que :} \\
 \int_{\Omega} \mathbf{S}^t : \delta\boldsymbol{\gamma} + \delta\mathbf{S}^t : (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{S}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma + \int_{\partial\Omega_c} R^N \delta h d\Gamma \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathbf{C.A} \\
 \mathbf{S} = \mathbf{D} : (\boldsymbol{\gamma}^l(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \\
 \delta h = \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\
 R^N h = 0 \\
 R^N \geq 0 \\
 h \geq 0
 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Notons que l'ensemble d'équations (1.10) n'est pas complet. Il faudra encore préciser les relations géométriques donnant la distance h et la normale \mathbf{n} en fonction du déplacement.

Remarque 1.3.2

Si on adopte l'hypothèse des petites perturbations, ou si la surface maître est plane, la dernière relation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$u^N - d \leq 0$$

où d est l'écart initial entre un point de la surface esclave et la surface maître, et u^N le déplacement normal en ce point. C'est cette relation que nous utilisons dans ce qui suit, pour traduire la non-pénétration d'un point de la surface esclave dans la surface maître.

1.4 Méthodes numériques pour le traitement du contact

Les problèmes de contact sont difficiles à formuler correctement mais encore plus difficiles à résoudre. Les modèles mathématiques associés à ces problèmes possèdent rarement des solutions analytiques, qui lorsqu'elles existent couvrent une part infime des besoins. C'est pour cela que la méthode des éléments finis est largement employée pour le traitement numérique des problèmes de contact. Elle a tout d'abord été associée aux techniques itératives d'essai et d'erreur.

1.4.1 Technique de résolution itérative ou procédure "d'essai et d'erreur"

Cette technique consiste à appliquer le chargement par incréments successifs et à vérifier que la condition de contact unilatéral est bien satisfaite à chaque pas. Le problème qui au départ est fondamentalement non-linéaire est transformé en une succession de problèmes linéaires. A un instant donné une solution du problème est supposée connue. Le nombre de nœuds susceptibles d'entrer en contact est alors également connu. Il reste à déterminer l'ensemble des nœuds qui vont entrer en contact à la prochaine itération. La localisation de ces nœuds de contact est réalisée à l'aide d'algorithmes spécifiques [CT71] [FZ75] [ZN89b] [ZN89a]. A chaque incrément de charge, les conditions de contact doivent être vérifiées en ces points. Si elles ne le sont pas, l'estimation de départ de l'ensemble des nœuds est erronée et l'itération de calcul est annulée. Cette opération d'estimation et de correction doit être répétée tant que les conditions de contact ne sont pas vérifiées.

La technique de résolution itérative n'a pas seulement été mise en oeuvre dans le cadre de la méthode des éléments finis, elle a été également utilisée avec la méthode des éléments de frontière [AFAP80] pour la résolution de problèmes de contact bidimensionnels. Les méthodes itératives encore appelées méthodes d'essai et d'erreur imposent en général l'application du chargement en plusieurs fois, un contrôle systématique de la condition de contact unilatéral en chaque nœud, et un calcul itératif des contraintes et déplacements pour atteindre l'état d'équilibre. Cette méthode est d'une efficacité limitée pour des problèmes avec de grands déplacements où la procédure de détection du contact devient compliquée : des problèmes de convergence peuvent apparaître, les incréments de calcul deviennent très petits et le temps de calcul augmente en conséquence .

1.4.2 Minimisation sous contraintes

Le problème de contact peut être écrit comme un problème de minimisation sous contraintes. La contrainte à prendre en considération est la condition de contact unilatéral (1.9). Dans le cadre de la méthode des éléments finis, les méthodes de minimisation sous contraintes les plus utilisées sont les méthodes de régularisation.

Ces méthodes consistent à introduire une régularisation des lois de contact et de frottement. Les forces de contact sont définies comme des fonctions des déplacements. Ces expressions sont ensuite reportées dans l'énergie de contact. Il existe trois principales familles de méthodes de régularisation. La première est basée sur la méthode de pénalisation. La seconde sur l'utilisation de la dualité pour un traitement géométrique des conditions de liaison. Et la troisième, intégrant ces deux approches est qualifiée de mixte. La méthode de pénalisation passe par une régularisation des lois de contact. Elle permet l'interpénétration des corps en contact sur des profondeurs dépendantes de la valeur du coefficient de pénalisation. L'avantage de cette méthode est qu'elle conduit à la résolution d'un système de même taille que celle d'un problème sans contact vu qu'aucun degré de liberté supplémentaire n'est introduit. Elle conduit cependant à des problèmes numériques et nécessite un soin particulier pour la résolution des systèmes matriciels. Les formulations variationnelles pénalisées tendent vers les formulations à multiplicateurs de Lagrange lorsque le paramètre de pénalisation tend vers zéro. Avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les conditions géométriques de non-pénétration sont traitées directement. Les méthodes basées sur cette approche nécessitent l'introduction de nouvelles variables qui sont les multiplicateurs de Lagrange. Elles conduisent donc à des systèmes à résoudre de taille plus importante. L'approche mixte basée sur des méthodes de type lagrangien augmenté ou perturbé met en œuvre les deux méthodes précédentes.

1.4.2.a Pénalisation

Les méthodes de pénalisation permettent d'éliminer les inconnues que sont les forces de contact dans le problème de minimisation sous contraintes : elles sont écrites en fonction des déplacements. Supposons que nous voulons minimiser la fonctionnelle Π sous la contrainte que le minimum \mathbf{u} appartienne à un espace convexe V bien défini. Dans le cas des problèmes de contact cet espace est défini comme suit :

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{C.A} \ / \ v^N - d \leq 0\}$$

où les quantités v^N et d ont été définies dans la remarque (1.3.2). L'idée de la méthode de pénalisation est d'affecter à Π une fonctionnelle de pénalité P qui augmente d'autant plus que la contrainte n'est pas respectée. En d'autres termes, plus la contrainte est violée, et plus la pénalité à payer est grande. Nous introduisons la fonctionnelle de pénalité suivante, dépendante d'un paramètre réel $\varepsilon > 0$:

$$\Pi_\varepsilon(\mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon}P(\mathbf{v}) \quad (1.11)$$

Il existe alors un \mathbf{u}_ε unique tel que [KO88] :

$$\Pi_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) = \inf_{\mathbf{v} \in V} \Pi_\varepsilon(\mathbf{v}) \quad (1.12)$$

La solution cherchée \mathbf{u} vérifie :

$$\mathbf{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}_\varepsilon \quad (1.13)$$

Dans [KS81], l'ensemble des conditions de contact unilatéral (1.9) sont remplacées par la relation suivante :

$$R_\varepsilon^N = \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon^N - d)^+ \quad (1.14)$$

où $a^+ = \max\{a, 0\}$. L'hypothèse émise est que le support rigide peut être remplacé par une répartition de ressorts de raideur $\frac{1}{\varepsilon}$. C'est également la démarche qui sera adoptée lorsqu'il sera question de la méthode de pénalisation dans la suite de notre travail.

La méthode de pénalisation présente des atouts. Elle est simple à mettre en oeuvre car son implémentation dans un code de calcul ne nécessite pas de modification de la structure du code ; c'est pour cela que son utilisation est très répandue, [Kik82] [Ben88] [PO92] [Wri95] [EH98] [CRVB02]. Par ailleurs aucune variable n'est ajoutée dans le problème. Elle présente cependant l'inconvénient d'être très sensible au coefficient de pénalisation [NOW86]. Si ce coefficient est trop petit, les conditions de contact sont satisfaites correctement mais les matrices sont mal conditionnées ce qui engendre des problèmes numériques. Si le paramètre est trop grand, les pénétrations autorisées sont inacceptables au niveau physique et la précision du calcul s'en trouve affectée. Le choix du paramètre de pénalisation est donc d'une importance cruciale.

1.4.2.b Points selles et multiplicateurs de Lagrange

Les problèmes de minimisation sous contraintes peuvent être transformés en des problèmes de recherche de point selle par l'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange [DL74]. Nous considérons le problème de minimisation de l'énergie potentielle Π . Soit λ un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte unilatérale :

$$\lambda \in K = \{\lambda \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c\} \quad (1.15)$$

Nous définissons la fonctionnelle lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) = \Pi(\mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega_c} \lambda (v^N - d) d\Gamma \quad (1.16)$$

Le problème devient alors, trouver le point selle $(\mathbf{u}, R) \in \mathbf{C.A} \times K$ tel que :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, R) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, R) \quad \forall (\mathbf{v}, \lambda) \in \mathbf{C.A} \times K \quad (1.17)$$

La fonctionnelle \mathcal{L} possède alors un point selle (\mathbf{u}, R) si et seulement si \mathbf{u} est solution du problème primal et R est solution du problème dual et :

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{C.A}} \sup_{\lambda \in K} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) = \sup_{\lambda \in K} \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{C.A}} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) \quad (1.18)$$

sachant que le problème primal consiste à trouver :

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{C.A}} \sup_{\lambda \in K} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) \quad (1.19)$$

et le problème dual est de trouver :

$$\sup_{\lambda \in K} \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{C.A}} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) \quad (1.20)$$

Dans les problèmes de contact, le multiplicateur de Lagrange représente la pression normale de contact. La recherche d'un point selle s'opère généralement par l'algorithme d'Uzawa.

Algorithme d'Uzawa

L'algorithme d'Uzawa utilise une méthode de gradient avec projection pour résoudre le problème dual (1.20). On part de λ^0 et on calcule \mathbf{u}^0 puis λ^1 et ainsi de suite de manière itérative. A la $p^{\text{ième}}$ itération, λ^p a déjà été déterminé et on cherche \mathbf{u}^p dans $\mathbf{C.A}$ tel que :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}^p, \lambda^p) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda^p) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{C.A} \quad (1.21)$$

λ^{p+1} est ensuite déterminé de la manière suivante: comme (\mathbf{u}, R) est un point selle, on a :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, R) \quad \forall \lambda \in K \quad (1.22)$$

c'est à dire (1.16) :

$$\Pi(\mathbf{u}) - \int_{\partial\Omega_c} \lambda (u^N - d) d\Gamma \leq \Pi(\mathbf{u}) - \int_{\partial\Omega_c} R (u^N - d) d\Gamma \quad \forall \lambda \in K \quad (1.23)$$

Donc

$$\int_{\partial\Omega_c} (R - \lambda) (u^N - d) d\Gamma \leq 0 \quad \forall \lambda \in K \quad (1.24)$$

Cette inéquation équivaut à [ET74]:

$$R = Proj_K(\lambda - \rho(u^N - d)) \quad (1.25)$$

où $Proj_K$ désigne l'opérateur de projection orthogonale sur K et $\rho > 0$. Nous cherchons donc λ^{p+1} sous la forme :

$$\lambda^{p+1} = Proj_K(\lambda^p - \rho^p(u^{N^p} - d)) \quad (1.26)$$

$\rho^p > 0$, ρ^p désignant le pas de déplacement à la $p^{\text{ième}}$ étape.

Remarque 1.4

ρ^p doit être choisi correctement pour assurer la convergence de l'algorithme [ET74].

L'avantage principal de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est que les conditions de contact sont vérifiées exactement [KS81] [PS98]. Mais cette approche induit des inconnues supplémentaires (les multiplicateurs de Lagrange), ce qui augmente la taille du problème.

1.4.2.c Méthode du lagrangien perturbé

Les méthodes de pénalité présentent un inconvénient majeur dans le traitement numérique du problème discrétisé par éléments finis puisque la précision de la solution approximée dépend fortement du paramètre de pénalité choisi. Pour faire face à ces problèmes, une méthode mixte utilisant la pénalité et les multiplicateurs de Lagrange a été proposée. Le lagrangien classique défini en (1.16) est remplacé par un lagrangien dit perturbé [SWT85] [Tay98] :

$$\Pi_{\eta_c}(\mathbf{v}, \lambda) = \Pi(\mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega_c} \lambda (v^N - d) \, d\Gamma - \frac{1}{2\eta_c} \int_{\partial\Omega_c} \lambda^2 \, d\Gamma \quad (1.27)$$

Le dernier terme dépendant de η_c à la forme d'un terme de pénalité et doit être très grand. Il a pour rôle de régulariser le lagrangien classique. Ce terme permet du point de vue numérique, d'avoir une matrice de rigidité définie positive avec des termes non nuls sur la diagonale. La méthode du lagrangien perturbé a largement été utilisée pour la résolution des problèmes de contact unilatéral [JT88] [KO88] [Zho93] [SWT85]. Lorsque le terme $-\frac{1}{2\eta_c} \int_{\partial\Omega_c} \lambda^2 \, d\Gamma$ est rem-

placé par $\frac{\eta_c}{2} \int_{\partial\Omega_c} (v^N - d)^2 \, d\Gamma$ on parle de lagrangien augmenté [FG92] [Kla92] [HA96] [PC99]

[BVZ00]. La méthode du lagrangien augmenté a été beaucoup utilisée pour la résolution des problèmes de contact avec frottement [SL92] [AC91] [DF98] [BZ02a]. Les algorithmes de type Uzawa utilisés pour la résolution des problèmes formulés par des fonctions lagrangiennes augmentées [DF91] sont stables mais lents. Afin d'obtenir une convergence plus rapide, une méthode de Newton généralisée a été proposée dans [AC88]. Le principe est de distinguer au sein de l'équation non-linéaire à résoudre, une partie différentiable et une partie non-différentiable. Un jacobien généralisé est alors introduit pour le traitement de cette partie non-différentiable [Ala97].

Une autre technique avec régularisation permettent de traiter les problèmes de contact : la méthode de la barrière [KVDVDBH01]. Une autre approche est basée sur une combinaison de la méthode de la barrière et de la méthode de pénalisation [ZWS98] [AGJJ02].

1.4.3 Autres méthodes pour les problèmes de contact

Outre les méthodes de régularisation, les méthodes couramment associées aux problèmes de minimisation sous contraintes sont les méthodes de point fixe, de relaxation avec projection ou méthode S.O.R.P (Successive Over Relaxation Projection) [Gre95] [RCL88], la méthode de Gauss Seidel [Rao99c] ou les méthodes de contraintes actives [Dum95].

Le problème de minimisation de l'énergie potentielle peut être écrit comme un problème de programmation mathématique [Kla92] : il peut être formulé en un problème de programmation quadratique [JQ89] [RM96], ou sous forme de problème linéaire complémentaire [KB88b] [KB88a] [Kla86] [Lee94]. Le problème linéaire complémentaire peut alors être résolu par l'algorithme classique de pivot complémentaire dû à Lemke [CDR98] [RCL88] [Lee94]. Le problème discrétisé

peut encore être traité par la méthode du point intérieur [ABH96] [CKPS98].

D'autres techniques ont été développées dans le cadre des problèmes de contact : des méthodes de décomposition de domaines [ABLTV00] [DGNS00], des méthodes multigrilles [Gre95], des techniques de base réduite [NP98], de continuation par longueur d'arc [BA03]. D'autres travaux sont tournés vers la recherche d'un maillage optimum des zones de contact [Ben98] [BZ02b]. Cette optimalité est mesurée à l'aide d'estimateurs d'erreur a posteriori [WR01].

Cette présentation des méthodes numériques pour le contact n'est pas exhaustive tant les méthodes employées sont nombreuses et peuvent différer en fonction de l'application visée.

1.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formulations associées aux problèmes de contact. Puis nous avons décrit les principales méthodes numériques développées pour la résolution des problèmes de contact unilatéral. Les comparer n'est pas un exercice facile puisqu'elles présentent toutes leurs avantages et leurs inconvénients. Les approches les plus souvent utilisées par les codes par éléments finis restent la méthode de pénalisation et la méthode du lagrangien augmenté. Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à la méthode de pénalisation et à la méthode du lagrangien perturbé. Il ne sera donc question que de ces deux approches dans la suite. Nous avons couplé ces méthodes à la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) en vue de résoudre des problèmes de structures à fortes non-linéarités dues aux conditions de contact. Les conditions classiques de contact unilatéral ne sont pas décrites par des fonctions analytiques, cette propriété est indispensable pour appliquer une technique de perturbation [EH98]. Nous avons donc remplacé ces conditions par une relation force-déplacement. Nous pourrions ensuite appliquer la MAN au problème régularisé. Les forces de contact seront alors considérées comme des efforts extérieurs et déterminées sous forme de séries entières. Nous nous limiterons dans tout ce qui suit à l'étude de problèmes de contact sans frottement. La loi de comportement sera linéaire et nous prendrons en compte les grands déplacements.

CHAPITRE 2

Résolution du problème de contact par la MAN couplée à la méthode du lagrangien perturbé

Dans ce chapitre nous appliquons la Méthode Asymptotique Numérique aux problèmes de contact unilatéral. Dans le travail présenté dans la thèse [EH98], la MAN a été couplée à la méthode de pénalisation. Pour empêcher les problèmes numériques liés au mauvais conditionnement de la matrice de rigidité issue de cette méthode, nous proposons de coupler la MAN à la méthode du lagrangien perturbé.

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1. Introduction	25
2.2. Formulation du problème de contact	25
2.2.1. Formulation mixte	25
2.2.2. Régularisations de la loi de contact	27
2.2.3. Traitement de la géométrie du problème	28
2.3. Forme discrète du problème de contact dans le cadre de la MAN	30
2.3.1. La MAN en élasticité non-linéaire	30
2.3.2. Définition des efforts de contact discrétisés	32
2.3.3. La MAN appliquée aux termes de contact	33
2.4. Algorithme de calcul des séries avec la méthode de pénalisation	35
2.4.1. Discrétisation par éléments finis	35
2.4.2. Algorithme MAN avec pénalisation	38
2.5. Algorithme de calcul des séries avec les multiplicateurs de Lagrange	39
2.5.1. Ecriture discrétisée du problème	40
2.5.2. Algorithme MAN avec lagrangien perturbé	43
2.6. Méthode de continuation	44
2.7. Bilan du chapitre	45

2.1 Introduction

Dans les problèmes de contact unilatéral, des conditions aux limites sont imposées sur les nœuds susceptibles d'entrer en contact. L'inclusion de ces contraintes dans le problème discrétisé par éléments finis peut être réalisée de différentes manières. Une approche commune est la méthode de pénalisation [KO88] [PO92] [KS81] qui dépend du coefficient de pénalité choisi. Une autre approche est l'utilisation de la méthode du lagrangien perturbé [SWT85], [JT88]. Cette méthode est une extension de la méthode de pénalisation qui utilise des valeurs du coefficient de pénalité conduisant à un problème mieux conditionné numériquement [Tay98].

Dans la thèse [EH98], le problème de contact a été traité en couplant la Méthode Asymptotique Numérique à la méthode de pénalisation. La MAN ne peut s'appliquer dans le cas d'un contact 'dur', car la réponse n'est pas une fonction analytique du chargement. Pour pouvoir appliquer la MAN, il est nécessaire de remplacer la loi de contact par une relation régulière entre la force de contact et l'écart entre les deux corps : une régularisation de la loi de contact dur est ainsi introduite pouvant s'interpréter comme une pénalisation. L'atout principal de la méthode de pénalisation est que son utilisation n'influe pas sur la taille de la matrice de rigidité. En outre son implémentation dans un code de calcul ne nécessite pas de modification de la structure de ce code. Pourtant, son efficacité dépend principalement du choix du paramètre de régularisation. Un paramètre trop grand conduit à des pénétrations trop importantes et la précision du calcul s'en trouve alors affectée. Si le paramètre est petit les conditions de contact sont mieux satisfaites mais les matrices sont mal conditionnées.

Pour pallier à ces problèmes numériques, nous proposons dans ce chapitre d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange comme variables additionnelles au problème de contact [Zho93]. Par rapport au travail d'Elhage [EH98], la principale modification est le traitement des forces de contact (ou multiplicateurs de Lagrange), qui ne sont plus éliminées avant le traitement numérique. Pour pouvoir appliquer la Méthode Asymptotique Numérique, nous conserverons une régularisation de la loi de contact, qui peut être exactement la même que dans [EH98]. Ainsi nous aurons des matrices de rigidité un peu plus grandes, mais mieux conditionnées, ce qui favorise la convergence des algorithmes itératifs. Il n'est pas évident que cette approche avec multiplicateurs de Lagrange aura une contribution importante dans un cadre MAN, qui n'implique pas du tout d'aspect itératif.

2.2 Formulation du problème de contact

Dans cette partie, nous formulons le problème de contact en élasticité non-linéaire en vue de le résoudre par la suite avec la Méthode Asymptotique Numérique.

2.2.1 Formulation mixte

Pour écrire l'équation d'équilibre et la loi de comportement (1.10), nous choisissons une formulation mixte en déplacements et en contraintes. Faire apparaître explicitement le champ des

contraintes \mathbf{S} dans la formulation nous permet de traiter une équation quadratique en \mathbf{u} et \mathbf{S} , ce qui est favorable aux développements en séries.

Nous notons $P_c(\mathbf{u})$ le travail des efforts de contact sur $\partial\Omega_c$. Le problème à résoudre est donc le suivant :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{CA}$, \mathbf{S} , \mathbf{R} satisfaisant à :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{S}^t : \delta\boldsymbol{\gamma} + \delta\mathbf{S}^t : \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{S}^t : \mathbf{D}^{-1} : \delta\mathbf{S}) d\Omega - P_c(\delta\mathbf{u}) - \lambda P_e(\delta\mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

où λ est un paramètre de chargement,

$$P_c(\delta\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma, \quad \text{et} \quad P_e(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma.$$

Nous introduisons la variable mixte $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{S})$, qui contient à la fois les déplacements et le champ des contraintes. L'équation (2.1) peut s'écrire alors sous la forme :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F} + \mathbf{R}^c \quad (2.2)$$

où les opérateurs linéaire \mathbf{L} et quadratique \mathbf{Q} , ainsi que le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{F} et de contact \mathbf{R}^c sont caractérisés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{U}) \cdot \delta\mathbf{U} &= \int_{\Omega} (\mathbf{S}^t : \boldsymbol{\gamma}^l(\delta\mathbf{u}) + \delta\mathbf{S}^t : (\boldsymbol{\gamma}^l(\mathbf{u}) - \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{S})) d\Omega \\ \mathbf{Q}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \cdot \delta\mathbf{U} &= \int_{\Omega} (\mathbf{S}_1^t : \boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}_2, \delta\mathbf{u}) + \mathbf{S}_2^t : \boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}_1, \delta\mathbf{u}) + \delta\mathbf{S}^t : \boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)) d\Omega \\ \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{U} &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \\ \mathbf{R}^c \cdot \delta\mathbf{U} &= \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le problème consiste alors à trouver la branche solution $\mathbf{U}(\lambda)$ vérifiant l'équation (2.2).

Remarque 2.2.1

Il ne sera en aucun cas question dans la suite, d'éléments finis mixtes. L'utilisation d'une formulation mixte n'est opérée que dans le but d'obtenir une expression quadratique propice aux développements en série [DPF90]. Cette écriture quadratique est l'un des garants de l'efficacité de la MAN : les seconds membres sont simples à calculer même pour des ordres élevés des séries et peu coûteux.

Mais les développements asymptotiques ne sont possibles que lorsque les équations étudiées sont analytiques. La loi de contact illustrée par la figure (1.4) ne l'est pas. Nous allons donc régulariser cette loi pour pouvoir appliquer la technique de perturbation aux variables du contact.

2.2.2 Régularisations de la loi de contact

Les conditions de contact ne sont pas analytiques. Comme nous l'avons expliqué dans la remarque (2.2.1), il est nécessaire de régulariser au préalable ces conditions afin d'appliquer une procédure MAN. Nous avons choisi de modéliser la loi de contact par la loi hyperbolique suivante :

$$\mathbf{R} = \frac{\eta(\delta - h)}{h} \mathbf{n} \quad (2.4)$$

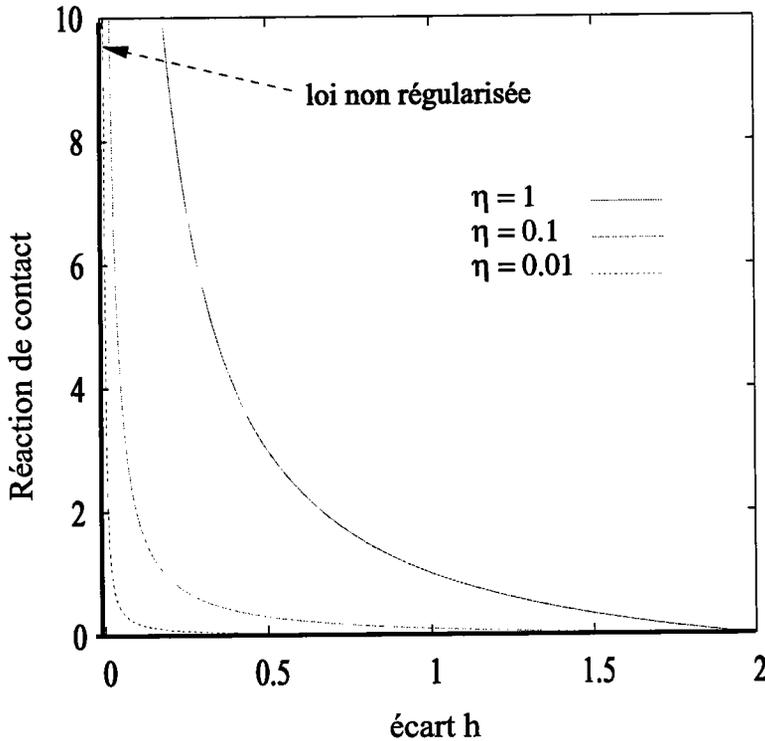


FIGURE 2.1 – Influence du paramètre de régularisation η sur la loi de contact

où δ est l'écart initial entre le nœud de contact et la surface rigide, h l'écart actuel et η est un paramètre positif suffisamment petit. Lorsque ce paramètre η tend vers zéro, le comportement du contact décrit par la loi (2.4) tend vers celui sans régularisation, voir figure (2.1).

Pour obtenir un comportement homogène à l'interface de contact, nous définissons le paramètre de régularisation η en chaque nœud. Nous supposons que pour un écart donné h_u , la norme de la force de contact doit être égale à une valeur donnée R_u voir figure (2.2). Le paramètre de régularisation en chaque point η_{mod} est alors défini par l'expression suivante :

$$\eta_{mod} = \frac{R_u h_u}{\delta_{nod} - h_u} \quad (2.5)$$

Ainsi la régularisation caractérisée par les deux paramètres h_u et R_u est uniforme pour l'ensemble des nœuds de contact. En prenant bien soin de choisir h_u inférieur au plus petit des écarts initiaux, nous limitons les pénétrations éventuelles.

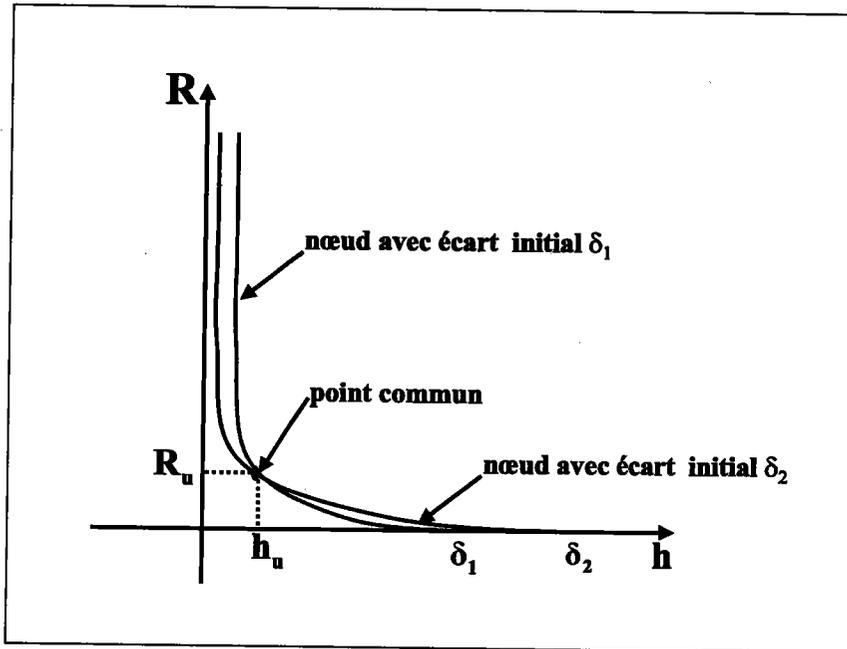


FIGURE 2.2 – Uniformisation de la loi de contact

2.2.3 Traitement de la géométrie du problème

Le problème régularisé est donc formulé par les équations (2.2) et (2.4). Ces dernières doivent être complétées par les définitions des variables supplémentaires dues à la géométrie. Dans notre étude, nous nous limitons au contact entre un solide élastique et une surface rigide plane ou circulaire. Une étude sur le contact avec des géométries plus complexes a été réalisée dans le cadre de la MAN dans [EH98].

Soit \mathbf{X} la position initiale d'un nœud de la surface esclave et $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ son déplacement. Son écart initial à la surface rigide de normale unitaire extérieure \mathbf{n} est appelé δ . Son écart actuel $h(\mathbf{X})$ est défini selon la géométrie de la surface rigide.

Dans le cas d'un contact avec une surface rigide plane (cf figure : 2.3), la normale \mathbf{n} étant constante, $h(\mathbf{X})$ est caractérisé par :

$$h(\mathbf{X}) = \delta + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un contact avec une surface rigide circulaire de centre \mathbf{C} et de rayon r , la normale \mathbf{n} est une variable supplémentaire. L'écart $h(\mathbf{X})$ et la normale $\mathbf{n}(\mathbf{X})$ (cf figure : 2.4) sont définis par :

$$\begin{cases} (h+r)^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{C} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{C} + \mathbf{u}) \\ (h+r)\mathbf{n} = (\mathbf{X} - \mathbf{C} + \mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.7)$$

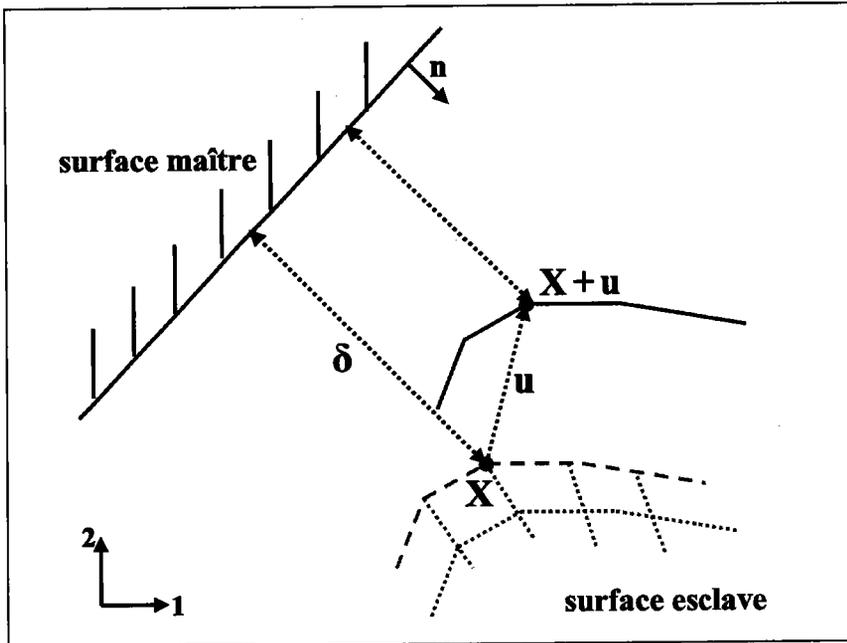


FIGURE 2.3 – Contact avec une surface rigide plane

Finalement le problème de contact est constitué de :

- Une équation variationnelle globale (élasticité non-linéaire)

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \lambda \mathbf{F} - \mathbf{R}^c = 0$$

- Des lois de contact écrites en chaque point de contact

$$\mathbf{R} = \frac{\eta(\delta - h)}{h} \mathbf{n}$$

Soit $h = \delta + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ (obstacle plan)

Soit $(h + r)^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{C} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{C} + \mathbf{u})$ (obstacle circulaire)
 $(h + r)\mathbf{n} = (\mathbf{X} - \mathbf{C} + \mathbf{u})$

Dans la suite, nous résumerons l'ensemble des relations ponctuelles sous la forme générale :

$$\mathbf{R}^c = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) \quad (2.8)$$

où la fonction $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{u})$ tient compte de la régularisation effectuée et de la géométrie de la surface rigide.

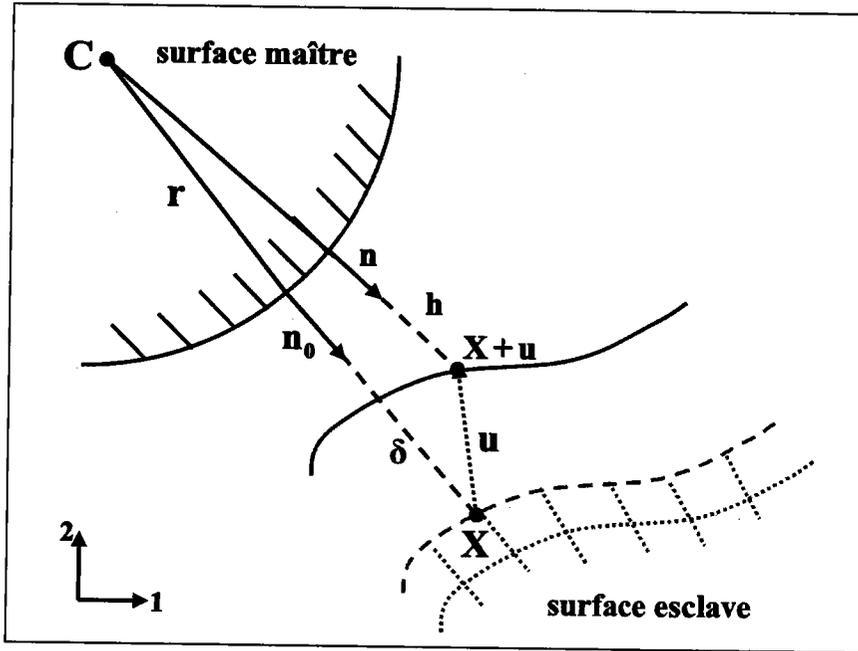


FIGURE 2.4 – Contact avec une surface rigide circulaire

Avec cette notation, le problème de contact peut se réécrire :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \lambda \mathbf{F} - \mathbf{R}^c = 0 \quad (2.8.2)$$

$$\mathbf{R}^c = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) \quad (2.8.3)$$

2.3 Forme discrète du problème de contact dans le cadre de la MAN

2.3.1 La MAN en élasticité non-linéaire

Les premières étapes de la MAN consistent en l'association d'une technique de perturbation et d'une technique de discrétisation par éléments finis. Les variables du problème de contact sont représentées par $\mathbf{V} = (\mathbf{U}, \mathbf{R}^c, h, \mathbf{n})$. Nous supposons qu'une solution initiale $\mathbf{V}_0 = (\mathbf{U}_0, \mathbf{R}_0^c, h_0, \mathbf{n}_0)$ est connue, et que la branche solution est analytique au voisinage de ce point. Nous cherchons \mathbf{V} et le paramètre de chargement λ sous la forme d'une série entière tronquée à un certain ordre N par rapport à un paramètre de contrôle judicieusement choisi 'a' :

$$\mathbf{V}(a) = \mathbf{V}_0 + a\mathbf{V}_1 + a^2\mathbf{V}_2 + \dots + a^N\mathbf{V}_N \quad \lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots + a^N\lambda_N \quad (2.9)$$

Par analogie avec les méthodes de longueur d'arc, nous identifions ce paramètre à la projection de l'incrément de déplacement $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$ et de chargement $(\lambda - \lambda_0)$ sur la direction tangente $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$.

$$a = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u}_1 + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 \quad (2.10)$$

où ' $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ' désigne un produit scalaire sur l'espace des champs de déplacement.

Pour la discussion sur le choix du paramètre de développement ' a ', nous envoyons le lecteur aux références [Coc94b] [Naj97].

Puis nous injectons les développements (2.9) dans le problème non-linéaire (2.8.2) ainsi que dans (2.10). Nous obtenons par identification terme à terme selon les puissances croissantes de ' a ', une succession de problèmes linéaires s'écrivant à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 \mathbf{F} + \mathbf{R}_1^c \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

et à l'ordre n ($2 \leq n \leq N$) :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t(\mathbf{U}_n) = \lambda_n \mathbf{F} + \mathbf{R}_n^c - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{n-i}) \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_n \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

L'opérateur tangent \mathbf{L}_t est le même pour tous ces systèmes linéaires (2.11) (2.12). Il s'écrit :

$$\mathbf{L}_t(\cdot) = \mathbf{L}(\cdot) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{U}_0, \cdot) \quad (2.13)$$

Ainsi après discrétisation par éléments finis, la résolution des problèmes linéaires à chaque ordre nécessitera le traitement d'une seule matrice.

Remarque 2.3.1

Comme le point de départ $(\mathbf{V}_0, \lambda_0)$ est supposé être une solution régulière, l'opérateur L_t est inversible en ce point et donc les problèmes linéaires mixtes à chaque ordre sont bien posés.

Ensuite nous discrétisons les problèmes linéaires continus à chaque ordre par éléments finis. Nous prenons tout d'abord en compte uniquement la partie due à la non-linéarité géométrique du problème (nous n'explicitons pas pour l'instant les termes du contact).

Le problème continu à l'ordre n (2.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\mathbf{S}_n^t : (\gamma^l(\delta \mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u})) + \mathbf{S}_0^t : 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{S}^t : (\gamma^l(\mathbf{u}_n) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_n) - \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{S}_n) \right) d\Omega \\ & = \lambda_n P_e(\delta \mathbf{u}) + \mathbf{R}_n^c \cdot \delta \mathbf{u} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{S}_i : 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_{n-i}, \delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{S} : \gamma^{nl}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{n-i})) d\Omega \end{aligned}$$

Pour utiliser des éléments finis classiques en déplacement, nous reportons la relation de comportement dans les équations d'équilibre. Nous obtenons les équations suivantes exprimant :

l'équilibre

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((\gamma^l(\delta \mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u})) : \mathbf{D} : (\gamma^l(\mathbf{u}_n) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_n)) + \mathbf{S}_0^t : 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_n, \delta \mathbf{u})) d\Omega \\ & = \lambda_n P_e(\delta \mathbf{u}) + \mathbf{R}_n^c \cdot \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$- \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{S}_i^t : 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_{n-i}, \delta \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^{nl}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{n-i}) : \mathbf{D} : (\gamma^l(\delta \mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u})) \right) d\Omega$$

et la loi de comportement

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{D} : \left(\gamma^l(\mathbf{u}_n) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^{nl}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{n-i}) \right) \quad (2.15)$$

Après discrétisation par éléments finis (cf Annexe : A.1), l'équation (2.14) s'écrit :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}] \{\mathbf{q}_n\} = \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\mathbf{R}_n^c\} \quad (2.16)$$

où $[\mathbf{K}_t^{nlg}] = [\mathbf{K}_t^{nlg}(\mathbf{q}_0, \mathbf{S}_0)]$ est la matrice de rigidité tangente classique évaluée au point de départ $(\mathbf{U}_0, \lambda_0)$. Le vecteur $\{\mathbf{q}_n\}$ désigne le vecteur des déplacements à l'ordre n et $\{\mathbf{F}\}$ est le vecteur des efforts extérieurs. Le vecteur des seconds membres $\{\mathbf{F}_n^{nlg}\}$ dus à la non-linéarité géométrique dépend uniquement des termes aux ordres précédents (jusqu'à l'ordre $n - 1$). Le vecteur $\{\mathbf{R}_n^c\}$ représente les efforts de contact discrétisés et est explicité dans ce qui suit.

2.3.2 Définition des efforts de contact discrétisés

Nous nous intéressons maintenant à la discrétisation des efforts de contact. Nous identifions les nœuds candidats au contact de la surface $\partial\Omega_c$ aux nœuds de la surface discrétisée. Le travail virtuel des efforts de contact est égal à :

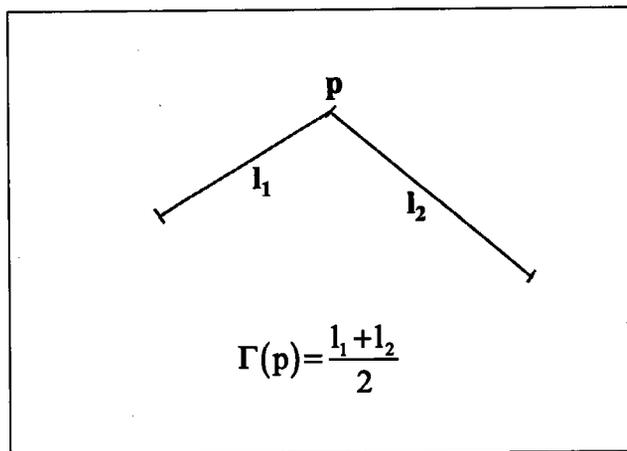
$$\int_{\partial\Omega_c} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = \sum_{p=1}^{Ncont} \delta \mathbf{u}(p)^t \cdot \hat{\mathbf{R}}(p) \quad (2.17)$$

où $Ncont$ est le nombre total des nœuds de la surface esclave susceptibles d'entrer en contact avec la surface rigide.

$\delta \mathbf{u}(p)^t \cdot \hat{\mathbf{R}}(p)$ est le travail virtuel dû à la force de contact concentrée au nœud de contact p . Cette force $\hat{\mathbf{R}}(p)$ est définie par :

$$\hat{\mathbf{R}}(p) = R^c(p) \Gamma(p) \mathbf{n}(p) \quad (2.18)$$

où $\mathbf{n}(p)$ est la normale extérieure à la surface de contact au nœud p , et $\Gamma(p)$ est défini dans la figure (2.5). Cette définition permet de travailler avec une réaction $R^c(p)$ ayant la dimension d'une pression.

FIGURE 2.5 - Définition de $\Gamma(p)$

2.3.3 La MAN appliquée aux termes de contact

Nous traitons à présent par la MAN les termes dus au contact. Nous développons donc en série entière \mathbf{R}^c , h et \mathbf{n} . Puis nous injectons ces développements dans l'équation (2.8.3). Après identification selon les puissances croissantes du paramètre de développement, à l'ordre n nous pouvons écrire :

$$\mathbf{R}_n^c = \hat{\mathbf{R}}_n(\mathbf{u})$$

où $\hat{\mathbf{R}}_n$ est défini en chaque nœud p par :

$$\hat{\mathbf{R}}_n(p) = R_n^c(p) \Gamma(p) \mathbf{n}(p) \quad (2.19)$$

Remarque 2.3.3.1

Cette relation (2.19) n'est valable que si la normale ne varie pas au cours du calcul, c'est le cas pour un contact avec une surface rigide plane. Si elle varie, $\mathbf{n}(p)$ dans l'équation (2.19) est remplacée par $\mathbf{n}_0(p)$, et des termes supplémentaires viennent s'ajouter (cf Annexe : A.2).

Pour connaître la valeur de $R_n^c(p)$ en chaque nœud de contact, nous écrivons les équations issues de la méthode de perturbation appliquée à la loi de contact régularisée (2.4), soit $hR^c = \eta(\delta - h)$.

Nous obtenons :

à l'ordre 1 :

$$h_0 R_1^c = -h_1 (R_0^c + \eta) \quad (2.20)$$

et à l'ordre n :

$$h_0 R_n^c = -h_n (R_0^c + \eta) - \sum_{i=1}^{n-1} h_i R_{n-i}^c \quad (2.21)$$

Nous écrivons également les relations provenant de la géométrie de la surface rigide (voir les équations (2.6) et (2.7)).

Ces relations s'écrivent dans le cas d'une surface rigide plane à l'ordre 1 :

$$h_1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \quad (2.22)$$

et à l'ordre n ($2 \leq n \leq N$) :

$$h_n = \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n} \quad (2.23)$$

Dans le cas d'une surface rigide circulaire, les équations obtenues sont :
à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} h_1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_0 \\ (h_0 + r)\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_1 - h_1 \mathbf{n}_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

et à l'ordre n

$$\begin{cases} h_n = \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n}_0 - \frac{1}{2(h_0 + r)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i h_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_{n-i} \right) \\ (h_0 + r)\mathbf{n}_n = \mathbf{u}_n - h_n \mathbf{n}_0 - \sum_{i=1}^{n-1} h_{n-i} \mathbf{n}_i \end{cases} \quad (2.25)$$

Remarque 2.3.3.2

Toutes les grandeurs utilisées sont définies en chaque nœud de contact p . Nous avons omis volontairement le (p) par souci de lisibilité.

Nous proposons de résumer les relations (2.21), (2.23) et (2.25), par les deux relations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} R_n^c(p) = C(p)h_n(p) + \bar{R}_n^{nl}(p) \\ h_n(p) = \{\mathbf{n}(p)\}^t \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + h_n^{nl}(p) \end{cases} \quad (2.26)$$

où les constantes $C(p)$ et $h_n^{nl}(p)$ dépendent de la géométrie du problème et le terme $\bar{R}_n^{nl}(p)$ est issu de la régularisation adoptée pour la loi de contact. Ainsi avec la loi régularisée (2.4), les nombres $C(p)$ et $\bar{R}_n^{nl}(p)$ s'écrivent sous la forme :

$$C(p) = -\frac{R_0^c(p) + \eta}{h_0}, \quad \bar{R}_n^{nl}(p) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i R_{n-i}^c(p)}{h_0} \quad (2.27)$$

De même, les nombres $h_n^{nl}(p)$ sont nuls dans le cas d'un obstacle plan. Pour un obstacle circulaire, ils sont donnés par :

$$h_n^{nl}(p) = -\frac{1}{2(h_0 + r)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i h_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_{n-i} \right) \quad (2.28)$$

Nous réécrivons les relations (2.26) de la manière suivante :

$$\begin{cases} R_n^c(p) &= \{C(p)\mathbf{n}(p)\}^t \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + R_n^{nl}(p) \\ R_n^{nl}(p) &= \bar{R}_n^{nl}(p) + C(p) h_n^{nl}(p) \end{cases} \quad (2.29)$$

C'est à cette étape du travail que l'on fait la distinction entre une discrétisation en vue d'appliquer la méthode de pénalisation ou d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange. Soit les forces de contact sont condensées : c'est à dire qu'elles sont écrites en fonction des déplacements puis injectées dans le problème discrétisé. La seule inconnue du problème à l'ordre n qui reste est donc $\{\mathbf{q}_n\}$. Et c'est donc la méthode de pénalisation qui est utilisée.

Soit les forces de contact discrétisées sont gardées dans l'écriture du problème et elles deviennent de nouvelles inconnues du problème discrétisé. Le problème consiste alors à trouver $\{\mathbf{q}_n\}$ et les réactions de contact. C'est ce qui correspond à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous couplons ces deux méthodes à la MAN dans ce qui suit.

2.4 Algorithme de calcul des séries avec la méthode de pénalisation

2.4.1 Discrétisation par éléments finis

Nous nous intéressons à la discrétisation des efforts de contact. Reprenons l'équation (2.19). Si l'on injecte dans cette relation la définition de $R_n^c(p)$ (voir système (2.29)), alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{R}}_n(p)\} &= R_n^c(p) \Gamma(p)\mathbf{n}(p) = \begin{Bmatrix} \Gamma(p)R_n^c(p)n_x(p) \\ \Gamma(p)R_n^c(p)n_y(p) \end{Bmatrix} \\ &= [(C\Gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(p)] \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + \Gamma(p) R_n^{nl}(p) \{\mathbf{n}(p)\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{où } [(C\Gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(p)] = C(p)\Gamma(p) \begin{bmatrix} (n_x(p))^2 & n_x(p) n_y(p) \\ n_y(p) n_x(p) & (n_y(p))^2 \end{bmatrix}$$

Nous assemblons à présent les vecteurs des déplacements à l'ordre n , sur tous les nœuds susceptibles d'entrer en contact. Nous obtenons le vecteur suivant pour les déplacements des nœuds

concernés par le contact :

$$\{\mathbf{q}_n^c\} = \begin{Bmatrix} u_{nx}(p_1) \\ u_{ny}(p_1) \\ u_{nx}(p_2) \\ \vdots \\ u_{nx}(p_{Ncont}) \\ u_{ny}(p_{Ncont}) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Le vecteur $\{\mathbf{q}_n\}$ se décompose alors en :

$$\{\mathbf{q}_n\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n^c \\ \mathbf{q}_n^{nc} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

où $\{\mathbf{q}_n^{nc}\}$ représente les déplacements des nœuds non concernés par le contact.

Nous introduisons l'opérateur de projection $\mathbf{Q}_c : \mathbb{R}^{Nddl} \rightarrow \mathbb{R}^{2Ncont}$ défini par :

$$[\mathbf{Q}_c]\{\mathbf{q}_n\} = \{\mathbf{q}_n^c\} \quad (2.33)$$

où $Nddl$ désigne le nombre de degrés de liberté de la structure.

Si les relations (2.30) sont assemblées pour tous les nœuds de contact, nous obtenons l'équation vectorielle suivante :

$$\begin{aligned} \{\Gamma \mathbf{R}_n^c\} &= \begin{Bmatrix} \Gamma(p_1) \mathbf{R}_n^c(p_1) n_x(p_1) \\ \Gamma(p_1) \mathbf{R}_n^c(p_1) n_y(p_1) \\ \Gamma(p_2) \mathbf{R}_n^c(p_2) n_x(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) \mathbf{R}_n^c(p_{Ncont}) n_x(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) \mathbf{R}_n^c(p_{Ncont}) n_y(p_{Ncont}) \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} [(\mathbf{C}\Gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(p_1)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(\mathbf{C}\Gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(p_2)] & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & [(\mathbf{C}\Gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(p_{Ncont})] \end{bmatrix}}_{[\mathbf{C}\Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}]} \{\mathbf{q}_n^c\} + \{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

où

$$\{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{c} \Gamma(p_1) R_n^{nl}(p_1) n_x(p_1) \\ \Gamma(p_1) R_n^{nl}(p_1) n_y(p_1) \\ \Gamma(p_2) R_n^{nl}(p_2) n_x(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_x(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_y(p_{Ncont}) \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

Finalement

$$\{\Gamma \mathbf{R}_n^c\} = [C \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}] \{\mathbf{q}_n^c\} + \{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} \quad (2.36)$$

Il reste à écrire le travail virtuel des efforts de contact à l'ordre n :

$$\{\delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \mathbf{R}_n^c\} = \{\delta \mathbf{q}^c\}^t [C \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}] \{\mathbf{q}_n^c\} + \{\delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} \quad (2.37)$$

L'exposant ' c ' dans l'écriture du vecteur des déplacements virtuels $\{\delta \mathbf{q}^c\}$ indique que les nœuds concernés sont ceux susceptibles d'entrer en contact. On a alors :

$$\{\delta \mathbf{q}^c\} = [\mathbf{Q}_c] \{\delta \mathbf{q}\} \quad (2.38)$$

L'expression (2.37) se réécrit :

$$\{\delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t [C \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}] [\mathbf{Q}_c]}_{[\mathbf{K}_t^c]} \{\mathbf{q}_n\} + \{\delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t \{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\}}_{\{\mathbf{F}_n^{nlc}\}} \quad (2.39)$$

où la matrice symétrique $[\mathbf{K}_t^c]$ désigne la matrice de rigidité de contact, et $\{\mathbf{F}_n^{nlc}\}$ le vecteur des seconds membres qui ne dépendent que des termes aux ordres précédents.

Remarque 2.4.1.1

Rappelons que les expressions (2.39) de la matrice de contact $[\mathbf{K}_t^c]$ et des seconds membres $\{\mathbf{F}_n^{nlc}\}$ s'appuient sur la formule (2.19) qui suppose une normale fixée. Ces formules ne sont valables que pour le cas d'un obstacle plan. Les formules liées à l'obstacle circulaire sont dans l'annexe (A.2).

Le problème discrétisé à l'ordre n (2.16) devient :

$$[\mathbf{K}_t] \{\mathbf{q}_n\} = \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_n^{nl}\} \quad (2.40)$$

où la matrice de rigidité globale $[\mathbf{K}_t]$ ainsi que les seconds membres $\{\mathbf{F}_n^{nl}\}$ contiennent les contributions dues au contact :

$$[\mathbf{K}_t] = [\mathbf{K}_t^{nlg}] + [\mathbf{K}_t^c]$$

$$\text{et } \{\mathbf{F}_n^{nl}\} = \{\mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\mathbf{F}_n^{nlc}\}$$

La définition du paramètre de chemin 'a' (2.12) conduit à l'ordre n à la relation :

$$\{\mathbf{q}_n\}^t \{\mathbf{q}_1\} + \lambda_n \lambda_1 = 0 \quad (2.41)$$

Finalement, le problème de contact, lorsque la méthode de pénalisation est utilisée, consiste à l'ordre 1, à trouver $\{\mathbf{q}_1\}$ et λ_1 solutions de :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t] \{\mathbf{q}_1\} = \lambda_1 \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{q}_1\}^t \{\mathbf{q}_1\} + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

et à l'ordre n ($2 \leq n \leq N$), à trouver le déplacement $\{\mathbf{q}_n\}$ et λ_n solutions de :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t] \{\mathbf{q}_n\} = \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_n^{nl}\} \\ \{\mathbf{q}_n\}^t \{\mathbf{q}_1\} + \lambda_n \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Remarque 2.4.1.2

Le problème à l'ordre 1 (2.42) correspond au problème tangent qui sert de prédicteur dans l'algorithme de Newton-Raphson. Les problèmes aux ordres supérieurs ($2 \leq n \leq N$) permettent d'obtenir un prédicteur d'ordre élevé. En pratique N est choisi entre 10 et 30. Avec ces ordres élevés, les corrections qui font partie intégrante de l'algorithme de Newton-Raphson ne sont plus indispensables [CDPF94a]. La MAN peut donc être vue comme une méthode de prédiction d'ordre élevé, sans correction.

2.4.2 Algorithme MAN avec pénalisation

Les termes des séries sont obtenus par résolution du système (2.43). La procédure de calcul se résume ainsi :

Algorithme à l'ordre 1	
1. Résoudre	$[\mathbf{K}_t] \{\hat{\mathbf{q}}\} = \{\mathbf{F}\}$
2. Calculer	$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \{\hat{\mathbf{q}}\}^t \{\hat{\mathbf{q}}\}}}$
	$\{\mathbf{q}_1\} = \lambda_1 \{\hat{\mathbf{q}}\}$
	$\{\mathbf{S}_1\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}_0] \{\mathbf{q}_1\}$
	$\{\mathbf{R}_1^c\} = [\mathbf{K}_t^c] \{\mathbf{q}_1\}$

Algorithme à l'ordre n

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. En chaque point de Gauss calculer | $\{\mathbf{S}_n^{nl}\}$ |
| 2. Assembler | $\{\hat{\mathbf{S}}_n\}$ et $\{\mathbf{F}_n^{nlg}\}$ |
| | $\{\mathbf{F}_n^{nl}\} = \{\mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\mathbf{F}_n^{nlc}\}$ |
| 3. Résoudre | $[\mathbf{K}_t]\{\hat{\mathbf{q}}_n\} = \{\mathbf{F}_n^{nl}\}$ |
| 4. En déduire | $\lambda_n = -\lambda_1\{\hat{\mathbf{q}}_n\}^t\{\mathbf{q}_1\}$ |
| | $\{\mathbf{q}_n\} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\{\mathbf{q}_1\} + \{\hat{\mathbf{q}}_n\}$ |
| | $\{\mathbf{S}_n\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}_0]\{\mathbf{q}_n\} + \{\mathbf{S}_n^{nl}\}$ |
| | $\{\mathbf{R}_n^c\} = [\mathbf{K}_t^c]\{\mathbf{q}_n\} + \{\mathbf{F}_n^{nlc}\}$ |

A la fin de chaque pas de calcul, les contraintes sont mises à jour par la relation de comportement. Et les variables de contact \mathbf{R}^c , \mathbf{n} ainsi que h sont calculées à partir des relations géométriques.

Remarque 2.4.2.1

Avec notre implémentation, le calcul des séries jusqu'à l'ordre N nécessite d'une part l'inversion d'une matrice de rigidité tangente globale, et d'autre part l'assemblage et le calcul de N vecteurs second membre $\{\mathbf{F}_n^{nl}\}$. Ainsi, le temps de calcul est similaire à celui d'un pas de la procédure de Newton-Raphson modifiée avec $N + 1$ itérations [ACDPF93], [Coc94a].

Remarque 2.4.2.2

Dans la pratique, l'ordre de troncature N optimal est grand (entre 10 et 30) et augmente avec la taille de la structure étudiée. Généralement, le temps de calcul pour le traitement de la matrice est de même ordre que celui pour le traitement des seconds membres : cela signifie que l'on peut calculer environ 20 termes des séries pour environ deux fois le coût d'une prédiction tangente [ZCPF99] [CCDPF01].

2.5 Algorithme de calcul des séries avec les multiplicateurs de Lagrange

Dans cette partie, nous proposons de coupler la MAN à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La modélisation adoptée s'inspire de ce que Zhong [Zho93] appelle les approches directes

de traitement des contraintes de contact. Elle peut être assimilée à la méthode du lagrangien perturbé. La réaction de contact est une nouvelle inconnue qui est traitée indépendamment des déplacements \mathbf{u} .

2.5.1 Ecriture discrétisée du problème

Nous reprenons l'équation (2.19) que nous réécrivons au nœud de contact p sous la forme :

$$\hat{\mathbf{R}}_n(p) = R_n^c(p) \Gamma(p) \begin{Bmatrix} n_x(p) \\ n_y(p) \end{Bmatrix} = R_n^c(p) \{(\Gamma \mathbf{n})(p)\} \quad (2.44)$$

Après assemblage de ces N_{cont} relations nodales, nous obtenons l'expression suivante du vecteur des efforts de contact :

$$\{\Gamma \mathbf{R}_n^c\} = \bigwedge_{p=1}^{N_{cont}} \hat{\mathbf{R}}_n(p) = \underbrace{\begin{bmatrix} \{(\Gamma \mathbf{n})(p_1)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{(\Gamma \mathbf{n})(p_2)\} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \{(\Gamma \mathbf{n})(p_{N_{cont}})\} \end{bmatrix}}_{[\Gamma \mathbf{N}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_n^c(p_1) \\ R_n^c(p_2) \\ \vdots \\ R_n^c(p_{N_{cont}}) \end{Bmatrix}}_{\{R_n^c\}} \quad (2.45)$$

où \bigwedge est un opérateur d'assemblage.

Le travail virtuel des efforts de contact à l'ordre n est égal à :

$$\{\delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \mathbf{R}_n^c\} = \{\delta \mathbf{q}^c\}^t [\Gamma \mathbf{N}] \{R_n^c\} \quad (2.46)$$

Avec la définition de l'opérateur \mathbf{Q}_c (2.33),

$$\{\delta \mathbf{q}^c\}^t [\Gamma \mathbf{N}] \{R_n^c\} = \{\delta \mathbf{q}\}^t [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma \mathbf{N}] \{R_n^c\} \quad (2.47)$$

Et donc le problème à l'ordre n (2.16) se réécrit :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}] \{\mathbf{q}_n\} - [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma \mathbf{N}] \{R_n^c\} = \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_n^{nlg}\} \quad (2.48)$$

Le multiplicateur de Lagrange $\{R_n^c\}$ constitue dorénavant l'inconnue supplémentaire du problème discrétisé à l'ordre n .

Nous reprenons à présent l'expression de $\{R_n^c\}$ en chaque nœud de contact p (2.29). Nous la réécrivons sous la forme suivante :

$$C(p) \{\mathbf{n}(p)\}^t \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} - R_n^c(p) = -R_n^{nl}(p) \quad (2.49)$$

Ce qui nous donne :

$$C(p)\Gamma(p)\{\mathbf{n}(p)\}^t \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} - \Gamma(p) R_n^c(p) = -\Gamma(p) R_n^{nl}(p) \quad (2.50)$$

Donc :

$$\{\Gamma(p)n_x(p) \quad \Gamma(p)n_y(p)\} \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} - \frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^c(p) = -\frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^{nl}(p) \quad (2.51)$$

Nous réécrivons (2.51) de la manière suivante, en faisant à nouveau apparaître le vecteur $\{(\Gamma\mathbf{n})(p)\}$:

$$\{(\Gamma\mathbf{n})(p)\}^t \{\mathbf{u}_n(p)\} - \frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^c(p) = -\frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^{nl}(p) \quad (2.52)$$

Après assemblage sur les N_{cont} nœuds de contact, nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \{(\Gamma\mathbf{n})(p_1)\}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{(\Gamma\mathbf{n})(p_2)\}^t & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \{(\Gamma\mathbf{n})(p_{N_{cont}})\}^t \end{bmatrix}}_{[\Gamma\mathbf{N}]^t} \{\mathbf{q}_n^c\} - [\mathbf{S}_t]\{\mathbf{R}_n^c\} = -\{\mathbf{H}_n^{nlc}\} \quad (2.53)$$

où $[\mathbf{S}_t]$ est une matrice de souplesse et $\{\mathbf{H}_n^{nlc}\}$ est un vecteur issu des non-linéarités de contact.

Ils sont définis par :

$$[\mathbf{S}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma(p_1)}{C(p_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(p_2)}{C(p_2)} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{C(p_{N_{cont}})} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{H}_n^{nlc}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma(p_1)}{C(p_1)} R_n^{nl}(p_1) \\ \frac{\Gamma(p_2)}{C(p_2)} R_n^{nl}(p_2) \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{C(p_{N_{cont}})} R_n^{nl}(p_{N_{cont}}) \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

Nous réécrivons l'équation (2.53) sous la forme :

$$-[\Gamma\mathbf{N}]^t[\mathbf{Q}_c]\{\mathbf{q}_n\} + [\mathbf{S}_t]\{\mathbf{R}_n^c\} = \{\mathbf{H}_n^{nlc}\} \quad (2.55)$$

Finalement, lorsque l'on regroupe les équations (2.48) et (2.55), le problème discrétisé à l'ordre n apparaît : il s'agit de trouver $\{\mathbf{q}_n\}$ et $\{\mathbf{R}_n^c\}$ solutions du problème :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_t^{nlg}] & -[\mathbf{Q}_c]^t[\Gamma\mathbf{N}] \\ -[\Gamma\mathbf{N}]^t[\mathbf{Q}_c] & [\mathbf{S}_t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{R}_n^c \end{Bmatrix} = \lambda_n \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_n^{nlg} \\ \mathbf{H}_n^{nlc} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Remarque 2.5

Lorsque $C(p)$ tend vers l'infini ce qui revient à dire que η tend vers zéro, le système à résoudre (2.56) est celui que l'on aurait à résoudre si l'on utilisait la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Le problème à l'ordre n (2.56) est réécrit sous la forme plus compacte :

$$[\mathbf{K}_t^{cont}]\{\mathbf{q}_n^{cont}\} = \lambda_n \{\mathbf{F}^{cont}\} + \{\mathbf{H}_n^{cont}\} \quad (2.57)$$

Lors de l'utilisation de la méthode du lagrangien perturbé, nous définissons le paramètre de chemin 'a' en ne considérant pas uniquement les déplacements \mathbf{u} (2.10), mais en prenant aussi en compte les réactions de contact. Cela conduit à l'ordre n , après discrétisation par éléments finis, à la relation :

$$\{\mathbf{q}_n^{cont}\}^t \{\mathbf{q}_1^{cont}\} + \lambda_n \lambda_1 = 0 \quad (2.58)$$

Ainsi, le problème de contact, lorsque la méthode du lagrangien perturbé est utilisée, consiste à l'ordre 1, à résoudre :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t^{cont}]\{\mathbf{q}_1^{cont}\} = \lambda_1 \{\mathbf{F}^{cont}\} \\ \{\mathbf{q}_1^{cont}\}^t \{\mathbf{q}_1^{cont}\} + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \end{cases} \quad (2.59)$$

et à l'ordre n ($2 \leq n \leq N$), à résoudre :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t^{cont}]\{\mathbf{q}_n^{cont}\} = \lambda_n \{\mathbf{F}^{cont}\} + \{\mathbf{H}_n^{cont}\} \\ \{\mathbf{q}_n^{cont}\}^t \{\mathbf{q}_1^{cont}\} + \lambda_n \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

2.5.2 Algorithme MAN avec lagrangien perturbé

L'algorithme issu du couplage de la MAN avec la méthode du lagrangien perturbé est le suivant :

Algorithme à l'ordre 1

- | | |
|---------------|--|
| 1. Résoudre | $[\mathbf{K}_t^{cont}]\{\hat{\mathbf{q}}^{cont}\} = \{\mathbf{F}^{cont}\}$ |
| 2. Calculer | $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \{\hat{\mathbf{q}}^{cont}\}^t \{\hat{\mathbf{q}}^{cont}\}}}$ |
| | $\{\mathbf{q}_1^{cont}\} = \lambda_1 \{\hat{\mathbf{q}}^{cont}\}$ |
| 3. En déduire | $\{\mathbf{q}_1\}$ et $\{R_1^c\}$ |
| 4. Calculer | $\{\mathbf{S}_1\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}_0]\{\mathbf{q}_1\}$ |

Algorithme à l'ordre n

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. En chaque point de Gauss calculer | $\{\mathbf{S}_n^{nl}\}$ |
| 2. Assembler | $\{\hat{\mathbf{S}}_n\}$ et $\{\mathbf{F}_n^{nlg}\}$ |
| | $\{\mathbf{H}_n^{cont}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_n^{nlg} \\ \mathbf{H}_n^{nlc} \end{Bmatrix}$ |
| 3. Résoudre | $[\mathbf{K}_t^{cont}]\{\hat{\mathbf{q}}_n^{cont}\} = \{\mathbf{H}_n^{cont}\}$ |
| 4. Calculer | $\lambda_n = -\lambda_1 \{\hat{\mathbf{q}}_n^{cont}\}^t \{\mathbf{q}_1^{cont}\}$ |
| | $\{\mathbf{q}_n^{cont}\} = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \{\mathbf{q}_1^{cont}\} + \{\hat{\mathbf{q}}_n^{cont}\}$ |
| 5. En déduire | $\{\mathbf{q}_n\}$ et $\{R_n^c\}$ |
| 6. Calculer | $\{\mathbf{S}_n\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}_0]\{\mathbf{q}_n\} + \{\mathbf{S}_n^{nl}\}$ |

Les termes des variables géométriques du contact (h et \mathbf{n}) sont calculés à partir des relations données dans une section précédente. Ils sont réinjectés dans le calcul des ordres suivants. A la fin du calcul, les différentes variables du problème de contact notées \mathbf{V} (voir §2.3.1) sont assemblées en série entière.

2.6 Méthode de continuation

Les algorithmes étudiés dans les parties précédentes permettent de calculer des séries d'ordre relativement élevé, en pratique il varie de 10 à 30 voir [AZPF02] [Bru99] [ZCPF99] [CCDPF01]. La représentation analytique de la solution est ainsi de bonne qualité. Cependant elle n'est valide que dans un voisinage du point de départ limité par le rayon de convergence des séries. Pour des valeurs de 'a' supérieures à ce rayon, la qualité de la solution se détériore rapidement. Il est donc nécessaire, afin d'obtenir toute la branche, d'utiliser une technique de continuation [AG90]. L'évaluation de la représentation à la fin du pas devient le nouveau point de départ pour le pas suivant. Etablir un critère d'arrêt qui fixe de manière optimale la longueur de chaque pas est donc primordial. Cochelin [Coc94b] a défini un tel critère. Il est exigé que la différence normalisée entre deux solutions à deux ordres consécutifs reste inférieure à un petit paramètre réel δ :

$$\frac{\|\mathbf{u}_N(a_m) - \mathbf{u}_{N-1}(a_m)\|}{\|\mathbf{u}_N(a_m) - \mathbf{u}_0\|} = \delta \quad (2.61)$$

où N désigne l'ordre de troncature des séries. Ainsi la longueur de pas a_m est définie a posteriori, à partir de la série qui a été calculée. Contrairement aux méthodes de prédiction-correction classiques, la MAN permet de définir naturellement et simplement une taille de pas adaptative et optimale. C'est l'un des principaux avantages de cette méthode.

Remarque 2.6.1

Il existe également un critère basé sur le résidu d'équilibre [CDPF94a]. Une nouvelle stratégie pour le choix de la longueur du pas a été mise en oeuvre récemment [GS02].

Pour améliorer la convergence de la méthode, nous remplaçons les séries polynomiales

$$\begin{cases} \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_0 + a\mathbf{u}_1 + \dots + a^N\mathbf{u}_N \\ \lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + \dots + a^N\lambda_N \end{cases} \quad (2.62)$$

par des fractions rationnelles appelées approximants de Padé [BGM96] [BVI94]. La première étape de la transformation consiste en une orthonormalisation de Gram-Schmidt des termes des séries. Puis nous remplaçons les séries obtenues par des fractions rationnelles qui leur sont asymptotiquement équivalentes.

Les dénominateurs des fractions rationnelles peuvent comporter des pôles et donc engendrer des singularités. Pour pallier à cette difficulté, nous utilisons des Padés à dénominateur commun [Naj97] :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_n(\mathbf{u}(a)) = \mathbf{u}_0 + a\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}\mathbf{u}_1 + \dots + a^{n-1}\frac{1}{D_{n-1}}\mathbf{u}_{n-1} \\ P_n(\lambda(a)) = \lambda_0 + a\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}\lambda_1 + \dots + a^{n-1}\frac{1}{D_{n-1}}\lambda_{n-1} \end{cases} \quad (2.63)$$

Les termes D_i sont des polynômes à coefficients réels :

$$D_i(a) = 1 + ad_1 + a^2d_2 + \cdots + a^i d_i$$

Le lecteur pourra se référer à [Naj97] [EH98] pour le détail du calcul des coefficients d_i . Récemment, une technique de continuation basée sur les approximants de Padé a été mise en oeuvre [EHDPF00]. Elle repose sur la détermination de la longueur de l'incrément maximum a_{max} par le critère suivant :

$$\frac{\|\mathbf{P}_N(a_{max}) - \mathbf{P}_{N-1}(a_{max})\|}{\|\mathbf{P}_N(a_{max}) - \mathbf{u}_0\|} = \delta_1 \quad (2.64)$$

où δ_1 est un petit paramètre réel.

En pratique nous cherchons les racines du polynôme D_{n-1} par l'algorithme de Bairstow, et en particulier sa première racine réelle r_1 . Puis nous cherchons par dichotomie la valeur a_{mp} qui satisfait au critère (2.64), dans l'intervalle $[a_m, r_1]$, a_m étant déterminée à partir du critère (2.61). Cette précaution permet d'éliminer les pôles de la représentation (2.63) à l'intérieur du domaine de validité $[0, a_{max}]$. La construction des approximants de Padé à partir des séries polynomiales est très peu coûteuse, ce qui représente un avantage considérable d'un point de vue numérique. A l'issue de divers calculs [EHDPF00], il a été montré que l'utilisation de ces approximants de Padé permet de réduire de moitié le temps de calcul [DVK97] [CDPF94b] [ACDPF93]. Dans la suite de notre étude c'est la représentation par approximants de Padé qui sera privilégiée.

Remarque 2.6.2

Il a été établi récemment dans [BZPFB03], qu'en présence de points de bifurcation, la qualité de la solution reste satisfaisante même au delà du pôle r_1 .

2.7 Bilan du chapitre

Ce chapitre a été consacré à la présentation du couplage entre la MAN et la méthode de pénalisation, puis entre la MAN et la méthode du lagrangien perturbé pour la résolution des problèmes de contact unilatéral sans frottement. C'est la performance des deux algorithmes issus de ces couplages qui est discutée dans le prochain chapitre. Les algorithmes de calcul des séries ont été écrits en détail, au moins pour ce qui concerne les termes de contact, ce qui n'avait jamais été présenté jusqu'à présent. En revanche, pour les autres aspects de l'algorithme (perturbation-discrétisation pour l'élasticité non-linéaire, continuation, approximants de Padé, etc...), qui étaient bien connus, nous renvoyons à la littérature sur la MAN.

CHAPITRE 3

Premières expérimentations numériques avec les algorithmes MAN

Ce chapitre a pour but l'expérimentation des algorithmes définis dans le chapitre précédent. Nous les appliquons donc à deux exemples de contact sans frottement en deux dimensions. Les résultats des tests numériques sont comparés à ceux obtenus par le code de calcul industriel Abaqus.

PLAN DU CHAPITRE 3

3.1. Introduction	49
3.2. Présentation des tests	49
3.2.1. Premier test	49
3.2.2. Second test	49
3.2.3. Gestion du contact dans Abaqus	50
3.2.3.a. Lois de contact	50
3.2.3.b. Représentation des surfaces de contact	53
3.2.3.c. Fonctionnement du calcul	53
3.3. Calculs de référence	54
3.3.1. Choix de la représentation	54
3.3.2. Choix de l'ordre de troncature	55
3.3.3. Validation des algorithmes MAN	58
3.4. Comment régulariser la loi de contact?	64
3.5. Finesse du maillage et efficacité de l'algorithme	67
3.6. Analyse complémentaire des résultats obtenus par la MAN	69
3.6.1. Compléments sur l'influence du nombre de points de contact	70
3.6.2. Analyse du coût de calcul	70
3.6.3. Pilotage de la longueur de pas et comparaison des deux méthodes MAN	72
3.7. Bilan du chapitre et perspectives	74

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous mettons en application les algorithmes construits dans le chapitre précédent sur différents tests. Nous comparons l'efficacité de la MAN couplée à la méthode de pénalisation ou à la méthode du lagrangien perturbé avec celle du code industriel Abaqus. Pour mener à bien cette étude, nous choisissons deux exemples de contact unilatéral sans frottement en 2D. L'un sur le contact entre une poutre élastique et une surface rigide plane, et l'autre sur le contact entre la même poutre et une surface rigide circulaire [EHDPF98]. Ils ne représentent certes pas une batterie exhaustive de tests sur le contact mais ils suffisent, à notre avis, à faire une analyse du fonctionnement des algorithmes étudiés. On peut d'ailleurs trouver des applications plus variées de la MAN au contact unilatéral dans [Bru99] [AZPF02]. Ces algorithmes dépendent de divers paramètres. Nous allons étudier d'abord l'influence du type de représentation de la solution (séries polynomiales ou approximants de Padé) puis l'influence de l'ordre de troncature des séries, sur le temps de calcul. Enfin nous étudions l'influence du paramètre de régularisation ainsi que l'influence du maillage utilisé, sur le comportement des différents algorithmes.

3.2 Présentation des tests

3.2.1 Premier test

Nous considérons une poutre élastique de longueur $L = 200$ mm et de largeur $e = 8$ mm. Le matériau qui constitue cette poutre est caractérisé par un module d'Young E égal à 20000 MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. L'étude est faite dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$. La poutre est encastree à l'une de ses extrémités. Elle est chargée en son milieu par une force ponctuelle d'intensité croissante. Plus précisément, le chargement est appliqué au point D . Sous l'effet de ce chargement, elle entre en contact avec une surface rigide plane, de normale extérieure $-\mathbf{X}_2$ et distante de 2 mm, (*cf* figure : 3.1). Tous les points susceptibles d'entrer en contact appartiennent au segment $[AB]$: nous lui donnons donc l'appellation de 'surface esclave'. Nous avons discrétisé la poutre à l'aide de 200 éléments isoparamétriques quadrilatères à quatre nœuds représentant une structure à 510 degrés de liberté.

3.2.2 Second test

Le second exemple est celui du contact entre la poutre élastique précédente et une surface rigide circulaire de centre C et de rayon r (*cf* figure : 3.2). Les propriétés matérielles et géométriques de la poutre sont les mêmes que celles utilisées précédemment. Elle est encastree à l'une de ses extrémités et soumise à son autre extrémité, plus exactement au point T , à un chargement ponctuel d'intensité croissante. Au cours du chargement, la poutre entre en contact avec une surface circulaire de rayon 50 mm. Le centre du cercle C est situé à une distance de 54 mm du point A . Pour discrétiser la poutre, nous avons utilisé le même maillage que pour le premier test.

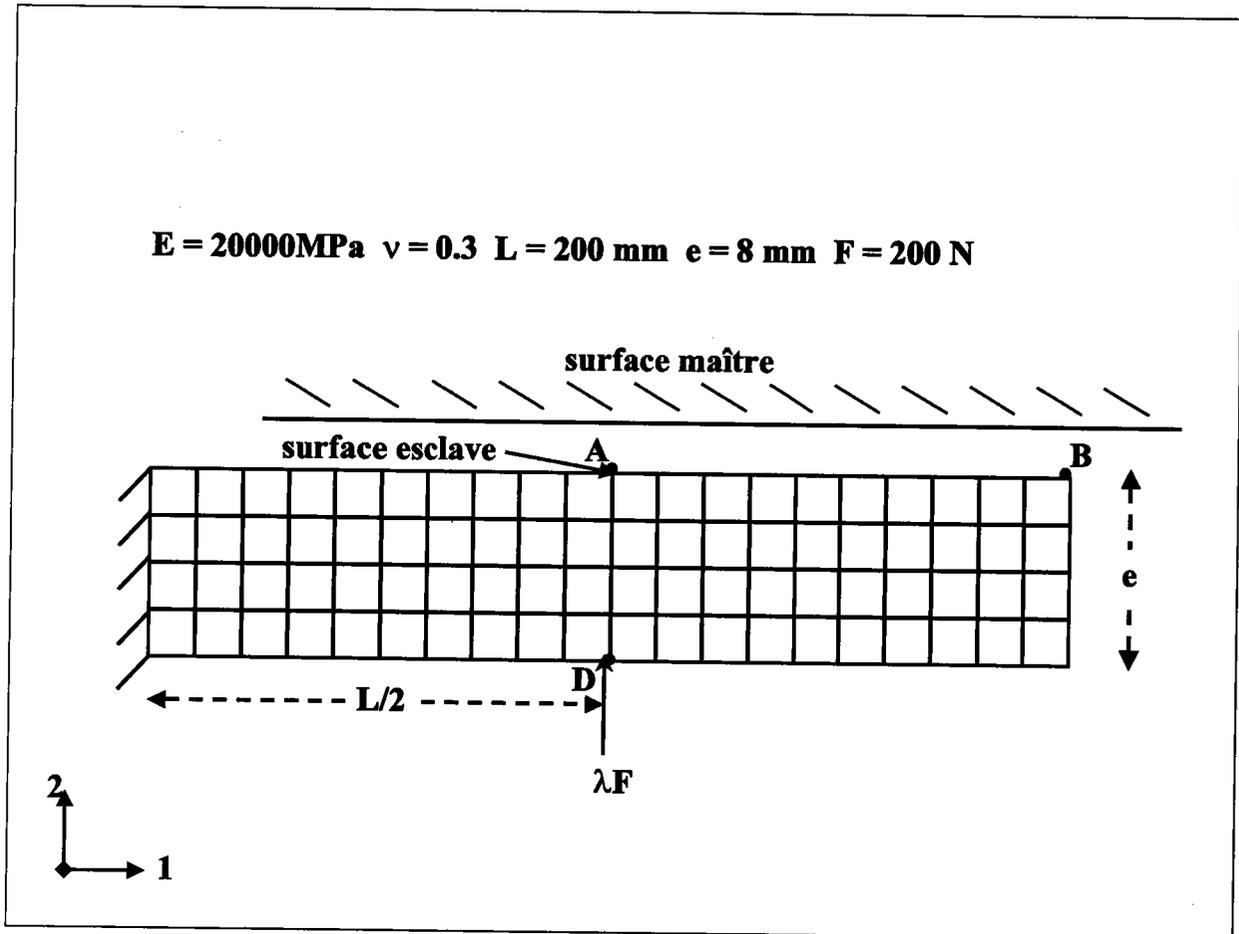


FIGURE 3.1 – Contact entre une poutre élastique et une surface rigide plane

3.2.3 Gestion du contact dans Abaqus

Dans toute notre étude les résultats obtenus avec les algorithmes MAN sont comparés à ceux du code de calcul par éléments finis Abaqus qui constitueront une référence numérique [HKS01].

3.2.3.a Lois de contact

Dans Abaqus, la définition de la pression de contact entre deux surfaces en un point, appelée p , est donnée comme fonction de l'interpénétration h de ces surfaces. Notons que dans la notice Abaqus, h est l'opposé de l'écart que nous avons défini au chapitre 2. Deux principaux modèles pour $p(h)$ sont proposés :

Loi dure

Dans ce cas, deux surfaces sont en contact si la distance qui les sépare h est nulle. Une pression de contact p apparaît alors à l'interface. Lorsque cette pression s'annule, les surfaces se séparent :

$$p \geq 0, \quad h \geq 0, \quad ph = 0 \quad (3.1)$$

La loi dure est celle utilisée par défaut dans tous les problèmes de contact dans Abaqus.

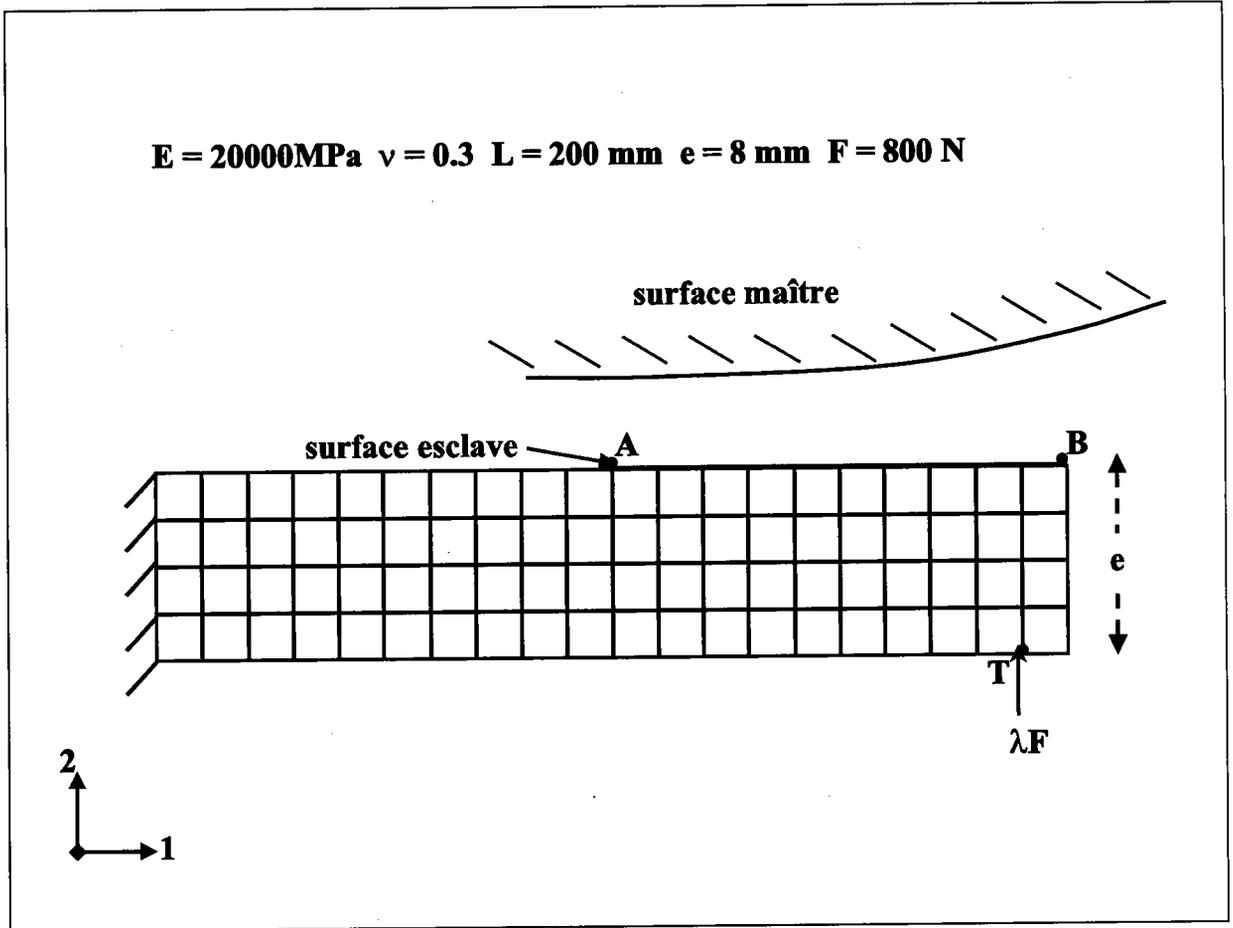


FIGURE 3.2 – Contact entre une poutre élastique et une surface rigide circulaire

Loi régularisée avec une relation exponentielle liant la pression p et l'écart h

Avec ce modèle, la pression est reliée à l'écart h par une relation exponentielle. L'utilisateur doit entrer une distance initiale de contact c , et une pression initiale p^0 correspondant à la pression en $h = 0$. Il y a naissance d'une réaction de contact lorsque $h = -c$ (cf figure : 3.3) :

$$p = 0 \quad \text{pour } h \leq -c,$$

$$p = \frac{p^0}{(e-1)} \left[\left(\frac{h}{c} + 1 \right) \left(e^{\left(\frac{h}{c} + 1 \right)} - 1 \right) \right] \quad \text{pour } -c < h < 6c,$$

$$p = \frac{p^0}{(e-1)} \left[7e^7 - 1 + \left(\frac{h}{c} - 6 \right) (8e^7 - 1) \right] \quad \text{pour } h > 6c$$

Loi régularisée définie à partir d'une table

Il est possible d'utiliser une autre loi de contact régularisée : la relation liant p à h est directement

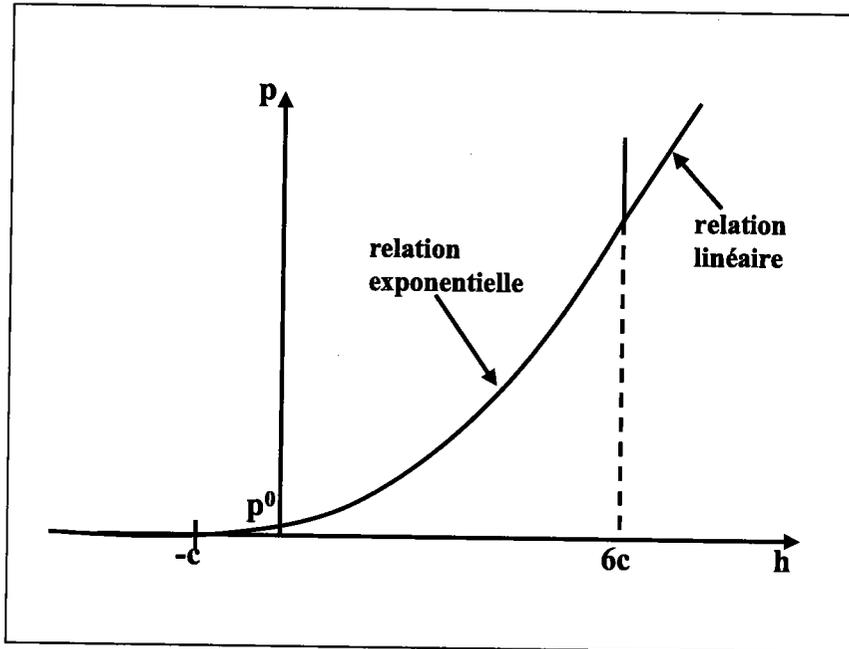


FIGURE 3.3 – Loi régularisée avec exponentielle

définie par l'utilisateur qui entre une table donnant les coordonnées des points représentés dans la figure (3.4).

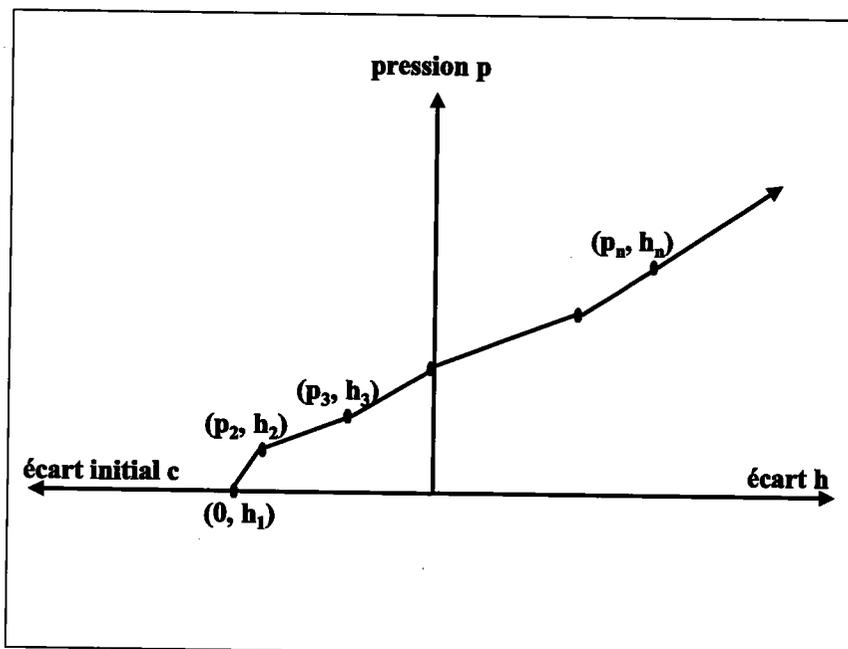


FIGURE 3.4 – Loi régularisée avec table

3.2.3.b Représentation des surfaces de contact

Dans notre étude, nous utilisons l'approche 'Contact Pair'. Avec cette approche, les surfaces susceptibles d'entrer en contact sont associées par paires. Une surface constitue la 'surface maître' et l'autre s'appelle la 'surface esclave'. Les nœuds de la surface esclave ne doivent en aucun cas pénétrer la surface maître. La surface 'maître' est généralement choisie comme celle appartenant au corps constitué du matériau le plus rigide si les matériaux constituant les deux corps sont différents. Sinon, le corps possédant le maillage le plus fin contiendra la surface maître.

Dans Abaqus, deux options permettent de modéliser l'interaction entre deux corps. La première s'appelle 'Small Sliding' et est utilisée pour formuler le contact entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et un corps rigide en deux ou trois dimensions. Avec cette formulation, les surfaces de contact ont relativement de faibles glissements l'une par rapport à l'autre, mais des rotations arbitraires sont permises. Cela implique qu'un nœud esclave donné interagît toujours avec le même ensemble de nœuds de la surface maître. Cet ensemble est défini au départ et sert à la paramétrisation d'un plan avec lequel le nœud esclave peut entrer en contact durant le calcul.

La seconde formulation appelée 'Finite Sliding', est plus générale et est celle qui est utilisée par défaut. Avec cette formulation, de grands glissements, de grandes rotations et de grandes déformations des surfaces sont autorisés. Lorsque l'option Finite-Sliding est utilisée, Abaqus régularise systématiquement la surface maître pour éviter des problèmes de convergence [Far93].

Si les corps susceptibles d'entrer en contact sont déformables, ils doivent être maillés. Dans le cas de corps rigides, il est possible de représenter les surfaces de contact de deux manières. La première consiste à définir des géométries de surfaces simples à l'aide de lignes droites ou courbes. Cela se fait avec l'option 'Rigid Surface'. Avec la seconde, les surfaces des corps rigides sont maillées à l'aide d'éléments rigides et la surface de contact est définie par l'utilisateur à l'aide de l'option 'Surface Definition'.

Après avoir défini le maillage, les grandeurs relatives au contact sont définies en chaque point d'intégration. Et elles sont introduites dans la formulation du problème discrétisé avec la technique des multiplicateurs de Lagrange.

3.2.3.c Fonctionnement du calcul

La résolution des problèmes non-linéaires et en particulier les problèmes de contact dans Abaqus se base sur une procédure de Newton-Raphson. Le passage de l'état initial ($t = 0$) du calcul à l'état final ($t = 1$) constitue un pas. Ce pas est décomposé en incréments Δt avec deux possibilités: soit le choix de la taille des incréments est laissé à l'utilisateur, soit le choix des incréments est laissé à Abaqus, l'utilisateur définit uniquement le premier incrément ainsi que les incréments minimum et maximum autorisés. Abaqus règle seul la taille des incréments avec

l'observation suivante: si la convergence est rapide, la taille de l'incrément est augmentée de 50%. Sinon Abaqus analyse la façon avec laquelle décroît le résidu sur 4 itérations puis une estimation de la convergence est effectuée et la taille du pas initial est raccourcie de 25% en cas de problème. Après plusieurs tentatives, le calcul peut être arrêté si la différence entre la taille d'incrément maximum et minimum utilisée est trop importante. Un message d'erreur est alors généré signalant que le calcul n'a pu être achevé.

Dans l'étude des deux exemples, nous avons utilisé l'approche 'Contact Pair' et une loi de contact de type dur. Pour étudier le premier exemple, nous avons utilisé une formulation 'Small Sliding' prenant en compte les non-linéarités géométriques. Pour le second exemple, c'est la formulation 'Finite Sliding' qui est utilisée.

3.3 Calculs de référence

Pour garantir une bonne précision du calcul effectué avec les algorithmes MAN, nous fixons le paramètre de contrôle de la longueur des pas δ_1 , défini par (2.64), à 10^{-6} . Nous discuterons le choix de ce paramètre par la suite.

3.3.1 Choix de la représentation

Dans cette première étude, nous montrons l'apport des approximants de Padé dans le fonctionnement des algorithmes MAN. Nous avons donc effectué une série de calculs sur le premier test (§ 3.2.1). Les valeurs de R_u et h_u définis dans la partie (2.2.2) du chapitre précédent sont respectivement 10^{-3} et 1. Comme tous les nœuds susceptibles d'entrer en contact sont à égale distance de la surface rigide ($\delta = 2mm$), η est le même pour tous ces nœuds et vaut 10^{-3} . Les calculs sont arrêtés lorsque le paramètre de chargement λ vaut 1. Pour réaliser tous les calculs, nous avons utilisé l'algorithme 'MAN avec lagrangien perturbé'. Nous avons fait varier l'ordre de troncature N des représentations polynomiales et des approximants de Padé.

Ordre N	10	15	20	25
Séries	116	77	61	54
Approximants de Padé	39	32	28	27

TABLEAU 3.1 – Comparaison du nombre de pas nécessaires avec séries polynomiales ou approximants de Padé

Pour différentes valeurs de N , nous avons reporté dans le tableau (3.1) le nombre de pas nécessaires au calcul de la branche solution. Il apparaît clairement que les approximants de Padé réduisent de manière significative le nombre de pas nécessaires au calcul. Par exemple pour N égal à 20, il faut 61 pas pour obtenir la solution avec une représentation polynomiale alors qu'utiliser les approximants de Padé permet d'obtenir toute la courbe solution en seulement 28 pas.

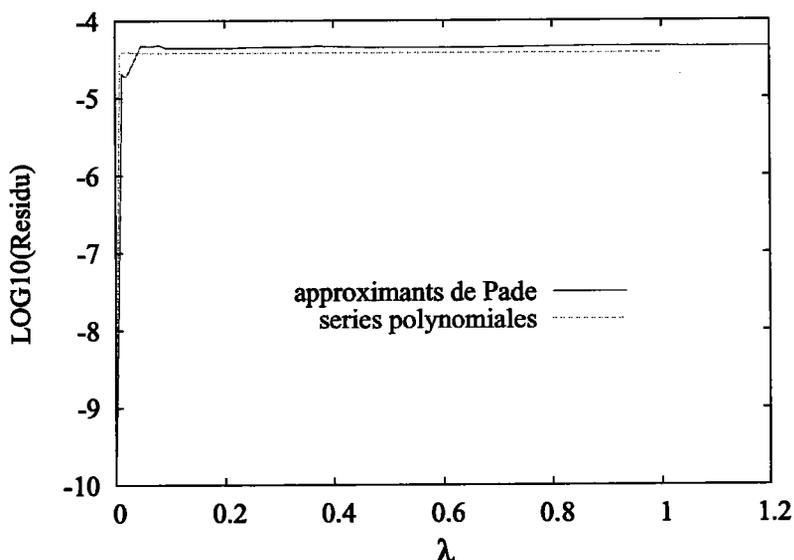


FIGURE 3.5 – Résidu à l'ordre 20 : représentation de la solution par séries polynomiales ou approximants de Padé

Par ailleurs avec les approximants de Padé tout comme avec une représentation par séries polynomiales, nous obtenons une bonne précision du calcul, voir la figure (3.5) dans laquelle nous avons représenté le résidu d'équilibre au cours du chargement pour $N = 20$. L'évolution du résidu est comparable pour les deux représentations. Ce dernier reste inférieur à 10^{-4} tout au long du calcul. Il est donc d'autant plus intéressant d'utiliser ces approximants de Padé, sachant qu'il permettent une accélération du calcul tout en assurant une bonne précision. D'autres études ont été réalisées dans le même but de comparer les performances obtenues en utilisant les approximants de Padé ou une représentation par série classique [EHDPF00] [NCDPF98]. La conclusion est toujours en faveur des approximants de Padé qui permettent de réduire d'environ de moitié le nombre de pas nécessaires au calcul.

Remarque 3.3.1

Il est à noter que le résidu passe d'environ 10^{-10} à 10^{-5} dès que λ atteint 0.02. Car cette valeur du chargement correspond au déclenchement du contact, voir ce qui suit (§ 3.3.3).

Dans toute la suite, la représentation par approximants de Padé sera la seule représentation utilisée.

3.3.2 Choix de l'ordre de troncature

Nous nous focalisons à présent sur l'influence de l'ordre N sur le comportement des algorithmes MAN. Dans un calcul linéaire, c'est l'évaluation et la décomposition de la matrice de

rigidité qui consomme le plus de temps. Dans le cadre de la MAN, en plus de la matrice de rigidité, on calcule des seconds membres F_i^{nl} ($i = 2$ jusqu'à N) qui deviennent assez coûteux lorsque l'ordre de troncature N est grand. Nous chercherons s'il existe un ordre de troncature qui permet d'obtenir des solutions avec de bonnes précisions et avec un temps de calcul optimal. Nous prenons comme référence le temps de l'évaluation et de la décomposition de la matrice de rigidité tangente tK_t . Ce temps correspond à celui de la résolution d'un problème linéaire par une méthode directe : nous utilisons la méthode de décomposition de Choleski. tK_t dépend bien sûr du mode de stockage adopté : ici nous avons utilisé un stockage par ligne de ciel. Nous proposons d'évaluer le temps de calcul d'un pas MAN en fonction de l'ordre de troncature par rapport à tK_t . Nous notons $tF^{nl}(N)$ le temps de calcul des seconds membres à l'ordre N . Le temps de calcul relatif à un pas MAN est :

$$\begin{aligned} \frac{tK_t + tF^{nl}(N)}{tK_t} &= 1 + \frac{tF^{nl}(N)}{tK_t} \\ &= 1 + \alpha(N) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donc le temps de calcul des seconds membres $tF^{nl}(N)$ est évalué par le biais du rapport $\alpha(N) = \frac{tF^{nl}(N)}{tK_t}$.

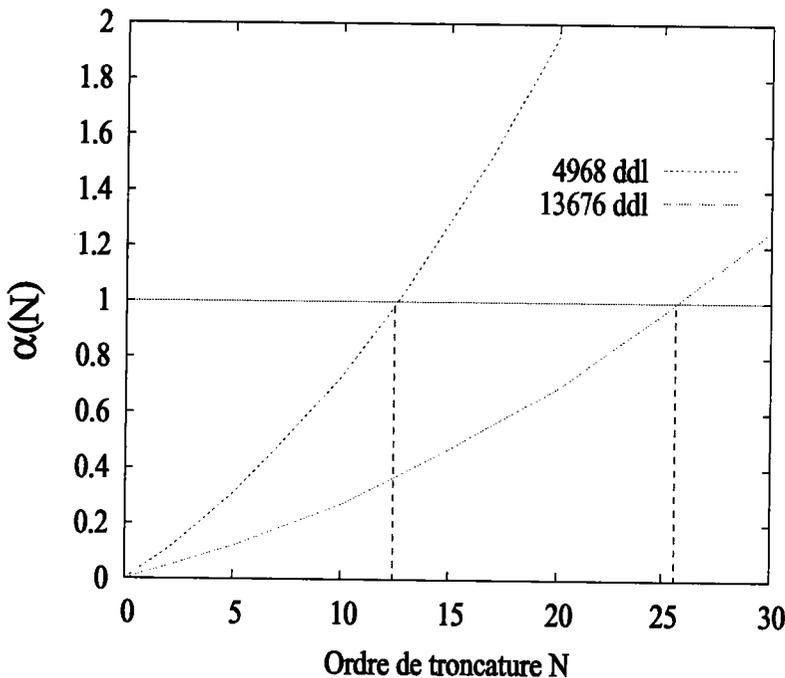


FIGURE 3.6 – Rapport entre le coût de calcul des termes des séries et le coût de calcul d'une matrice en fonction de l'ordre

Nous étudions la variation de ce rapport en fonction de l'ordre N . Les calculs sont effectués avec l'algorithme 'MAN avec lagrangien perturbé' sur le premier test. Nous gardons la même valeur

pour η c'est à dire 10^{-3} et nous faisons varier le paramètre N .

Dans l'exemple utilisé, le nombre de degrés de liberté est trop petit pour que l'analyse des temps de calcul réels soit considérée comme significative. Nous allons donc utiliser deux maillages plus denses que celui défini précédemment : le premier maillage compte 4968 degrés de liberté (ddl) et 251 nœuds de contact, et le second totalise 13676 ddl et 501 nœuds de contact. Nous avons représenté pour ces deux maillages, le rapport $\alpha(N)$ pour différentes valeurs de l'ordre de troncature des séries (cf figure : 3.6). Il apparaît que le temps de calcul des seconds membres augmente à peu près linéairement avec l'ordre N . Pour un maillage à 4968 ddl, le temps de calcul des seconds membres est le même que celui d'une matrice de rigidité lorsque l'ordre N est environ égal à 12. Avec le second maillage il faut un ordre de troncature plus élevé pour obtenir le même rapport $\alpha(N) = 1$ ($N \simeq 25$).

Un ordre de troncature N élevé augmente certes le temps de calcul d'un pas asymptotique mais il permet en même temps d'accroître la longueur du pas. L'ordre optimum doit être celui qui permet d'obtenir toute la branche solution au moindre coût. Pour discuter du temps total de calcul, nous introduisons le Temps Total Relatif (TTR), qui est égal au temps relatif d'un pas MAN multiplié par le nombre de pas nécessaires pour obtenir la branche solution ($NbPas$) :

$$TTR(N) = NbPas (1 + \alpha(N)) \quad (3.3)$$

Ordre de troncature	5	10	15	20	25	30	35
Nb Pas	89	46	37	39	35	33	31
$\alpha(N)$	0.31	0.73	1.29	1.96	2.73	3.6	4.63
TTR(N)	116.6	79.6	84.7	115.4	130.5	151.8	174.5

TABLEAU 3.2 - Influence de l'ordre de troncature sur le temps de calcul, maillage à 4968ddl

Dans le tableau (3.2), nous avons reporté les quantités $NbPas$, $\alpha(N)$ et le temps total $TTR(N)$ correspondant à différents ordres de troncature N pour des calculs effectués avec le maillage à 4968 degrés de liberté. Nous observons que le nombre de pas de calcul diminue avec l'ordre N . Cependant au delà de l'ordre 15, cette diminution du nombre de pas n'est plus significative. Par ailleurs, nous observons la croissance de $\alpha(N)$ avec l'ordre N (cf figure : 3.6). A l'ordre 20, $\alpha(N)$ est égal à 1.96, ce qui signifie que le coût d'un pas de calcul est de $1 + 1.96 = 2.96$ donc environ trois fois celui de l'évaluation et de la décomposition d'une matrice de rigidité. Au delà de cet ordre, le coût d'un pas augmente fortement (un pas à l'ordre 35 vaut 5.63 fois le coût d'une matrice) alors que la diminution du nombre de pas n'est plus marquée. Cela entraîne une croissance du temps total relatif $TTR(N)$. Il faut donc choisir un ordre inférieur ou égal à 15 pour avoir un temps $TTR(N)$ de calcul moins élevé.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la précision des calculs. Nous avons donc représenté le résidu au cours du chargement, pour différentes valeurs de N (cf figure : 3.7). Nous observons

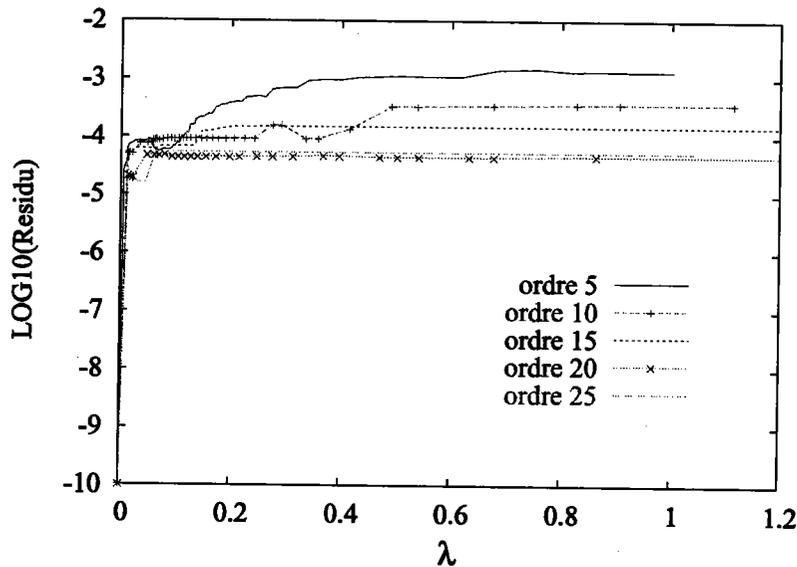


FIGURE 3.7 – Résidu au cours du chargement avec différents ordres

que les résidus sont satisfaisants pour tous les ordres choisis, avec une légère amélioration, si le nombre de termes des séries est supérieur à 10.

Nous préconisons donc d'utiliser un minimum de 10 termes de la série pour effectuer le calcul. Nous observons également qu'au delà de l'ordre 15, le gain en précision est moins prononcé. Donc 15 termes de la série suffisent pour avoir une bonne précision du calcul.

Remarque 3.3.2

D'autres calculs ont été effectués avec des ordres plus grands et le résidu au cours du chargement variait de manière similaire à celle du résidu obtenu avec l'ordre 20. Nous n'avons pas ajouté les courbes obtenues pour ne pas affecter la lisibilité de la figure (3.7).

Dans la suite, tous les calculs seront effectués avec $N = 15$.

3.3.3 Validation des algorithmes MAN

Cette partie est destinée à la comparaison des courbes de réponse obtenues avec les différents algorithmes, c'est à dire l'algorithme 'MAN avec pénalisation', l'algorithme 'MAN avec lagrangien perturbé' et Abaqus. Pour pouvoir comparer dans la suite les algorithmes MAN avec Abaqus d'un point de vue de l'efficacité et de la robustesse, il nous semble nécessaire de montrer qu'avec un paramètre de régularisation bien choisi, les courbes obtenues avec la MAN sont les mêmes que celles d'Abaqus.

Nous nous intéressons d'abord à l'exemple de contact avec la surface rigide plane (cf figure : 3.1). Nous effectuons d'abord les calculs à l'aide de l'algorithme MAN couplé à la méthode de pénalisation. Puis nous utilisons l'algorithme MAN couplé à la méthode du lagrangien perturbé

pour résoudre le problème. Les valeurs de R_u et h_u définis dans la partie (2.2.2) du chapitre précédent sont respectivement 10^{-4} et 1 et donc η vaut 10^{-4} pour tous les nœuds de contact. Nous rappelons que le calcul est arrêté lorsque le paramètre de chargement λ vaut 1.

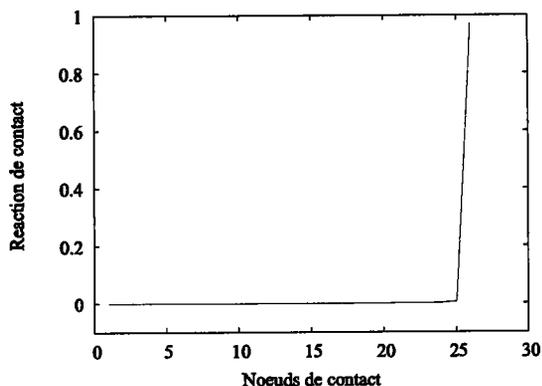
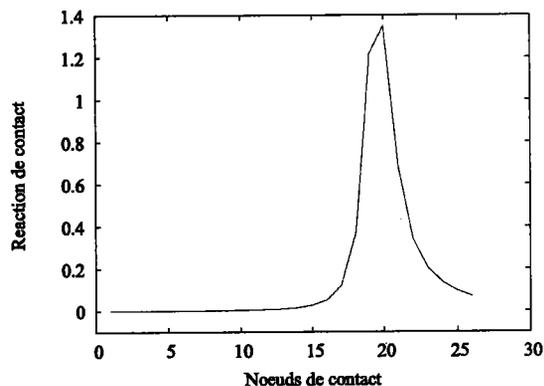
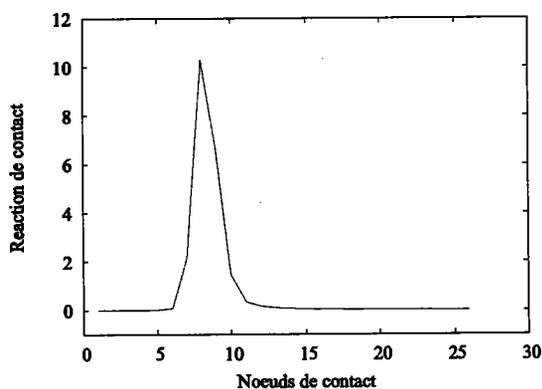
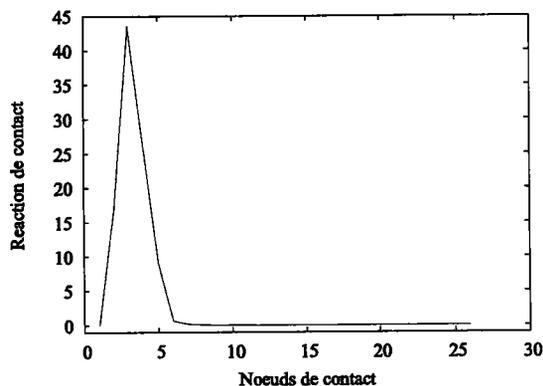
(a) Profil de $\|R\|$ pour $\lambda = 0.02$ (b) Profil de $\|R\|$ pour $\lambda = 0.07$ (c) Profil de $\|R\|$ pour $\lambda = 0.18$ (d) Profil de $\|R\|$ pour $\lambda = 0.58$

FIGURE 3.8 – Evolution de la zone de contact au cours du chargement

Avant de faire l'étude comparative, nous voulons d'abord observer l'évolution de la zone de contact au cours du chargement (*cf* figure : 3.8). Le nœud B vient le premier en contact avec la surface rigide. Puis tous les points du segment [AB] viennent tour à tour au contact de la surface rigide, jusqu'au nœud A.

Nous présentons à présent les courbes de déplacement vertical en fonction du chargement, du nœud A (*cf* figure : 3.9) et du nœud B (*cf* figure : 3.10). Dans ces deux figures, les courbes obtenues par les algorithmes MAN et par Abaqus sont tout a fait comparables, il y a donc une bonne corrélation entre les résultats MAN et ceux d'Abaqus. Nous présentons ensuite dans la figure (3.11) le glissement du nœud B au cours du chargement. Là encore, les trois algorithmes donnent des courbes de réponse similaires. Pour la régularisation choisie, les algorithmes MAN

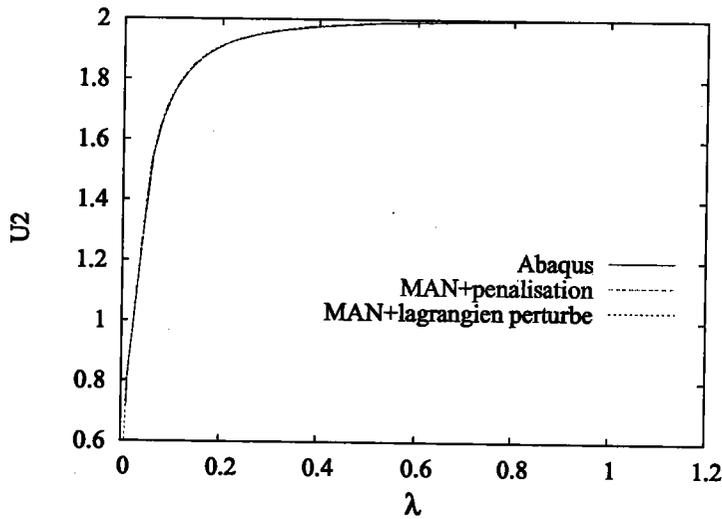


FIGURE 3.9 – Déplacement vertical du nœud A avec les différents algorithmes

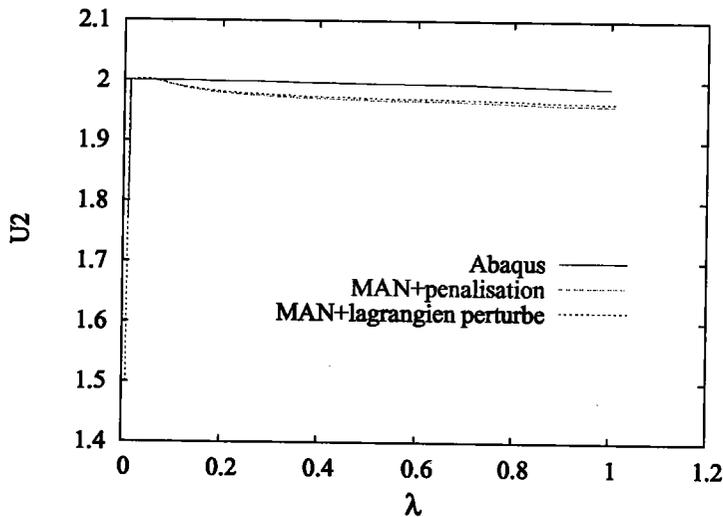


FIGURE 3.10 – Déplacement vertical du nœud B avec les différents algorithmes

prennent bien en compte les glissements.

Dans les figures (3.12) et (3.13), nous avons tracé les normes des réactions au nœud A ainsi qu'en B au cours du chargement avec les algorithmes MAN et Abaqus. Les courbes obtenues avec les algorithmes MAN se superposent à celles d'Abaqus.

Enfin, nous avons voulu présenter les profils de réaction de contact obtenues par les différents algorithmes. Nous avons donc représenté ces profils pour $\lambda = 0.5$ (cf figure : 3.14) et pour $\lambda = 1$ (cf figure : 3.15). Pour ces courbes, les mêmes observations sont faites : les résultats MAN sont en bon accord avec ceux d'Abaqus.

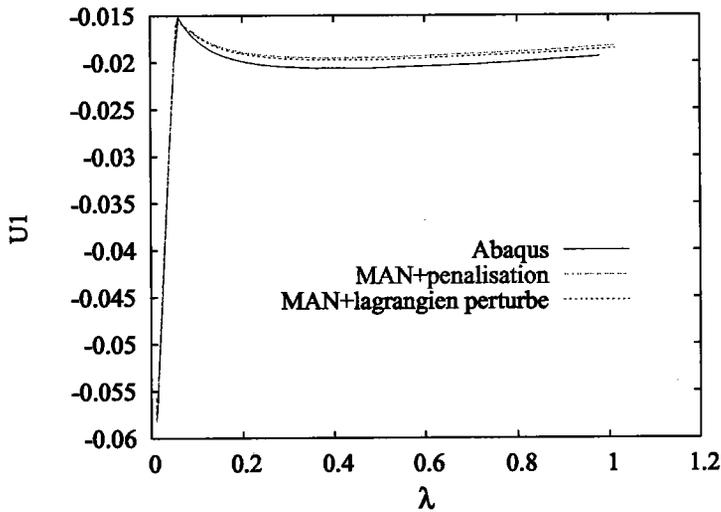
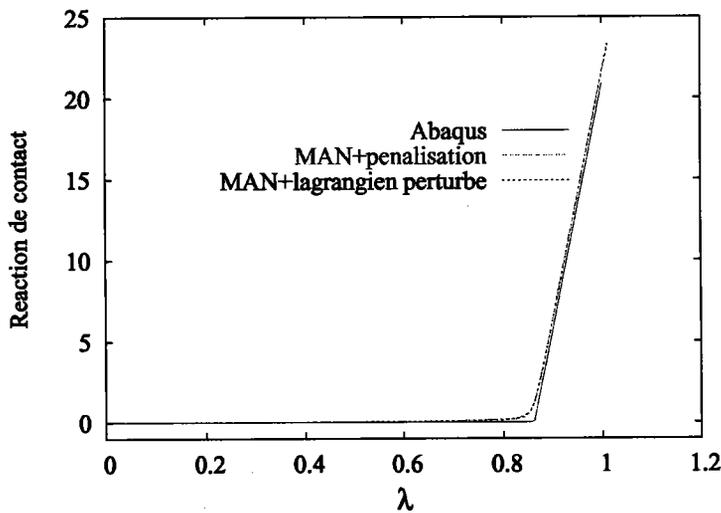


FIGURE 3.11 – Glissement du nœud B avec les différents algorithmes

FIGURE 3.12 – $\|R\|$ au nœud A avec les différents algorithmes

Nous nous intéressons à présent au second exemple (*cf* figure : 3.2). Dans ce cas, les non-linéarités du problème sont non seulement dues au contact mais aussi d'ordre géométrique à cause des grands déplacements. Sous l'effet du chargement, le nœud A entre le premier en contact avec la surface rigide et le nœud B est le dernier point du segment $[AB]$ à entrer en contact avec cette surface. Nous voulons toujours comparer les courbes réponses obtenues par les algorithmes MAN à celles obtenues par Abaqus. Nous avons effectué des calculs avec une régularisation caractérisée par $R_u = 8$ et $h_u = 0.1$.

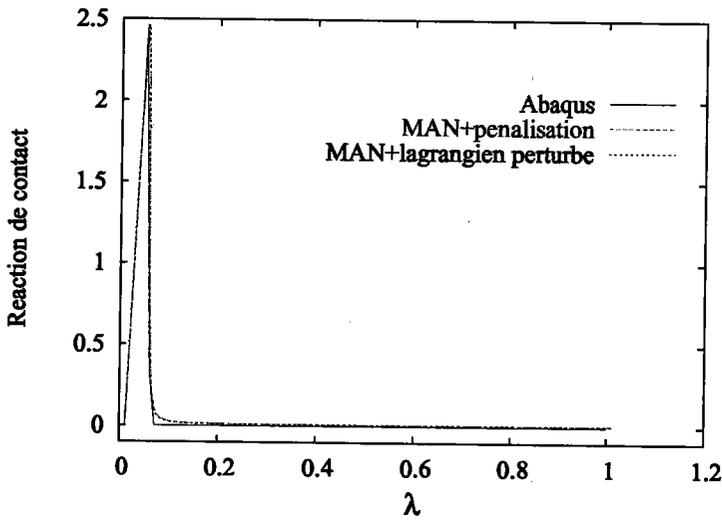


FIGURE 3.13 – $\|R\|$ au nœud B avec les différents algorithmes

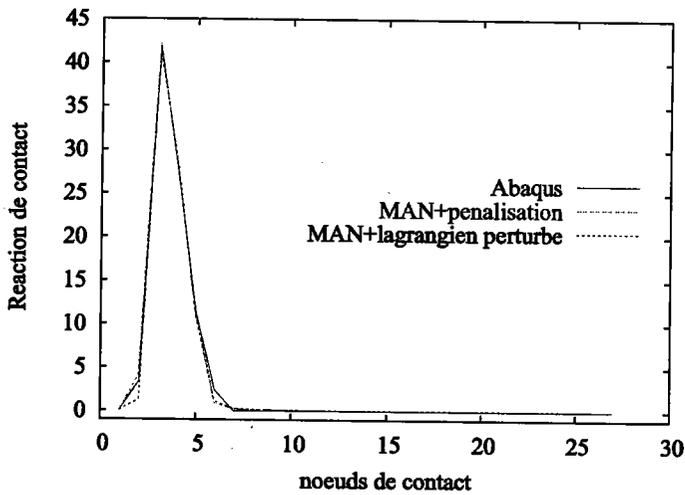


FIGURE 3.14 – Profil de $\|R\|$ avec les différents algorithmes $\lambda = 0.5$

Remarque 3.3.3.1

De nombreux tests ont été effectués pour déterminer les paramètres R_u et h_u qui permettent de décrire au mieux le contact. Ce sont ces valeurs ($R_u = 8$, $h_u = 0.1$) qui ont été choisis.

Nous avons représenté le déplacement vertical du nœud A (cf figure : 3.16) ainsi que celui du nœud B (cf figure : 3.17) au cours du chargement. Que ce soit avec les algorithmes MAN ou Abaqus, les courbes sont comparables.

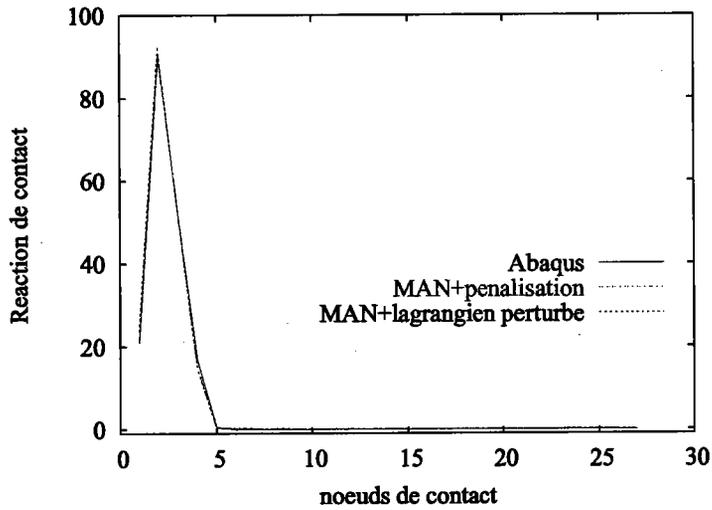


FIGURE 3.15 – Profil de $\|R\|$ avec les différents algorithmes $\lambda = 1$

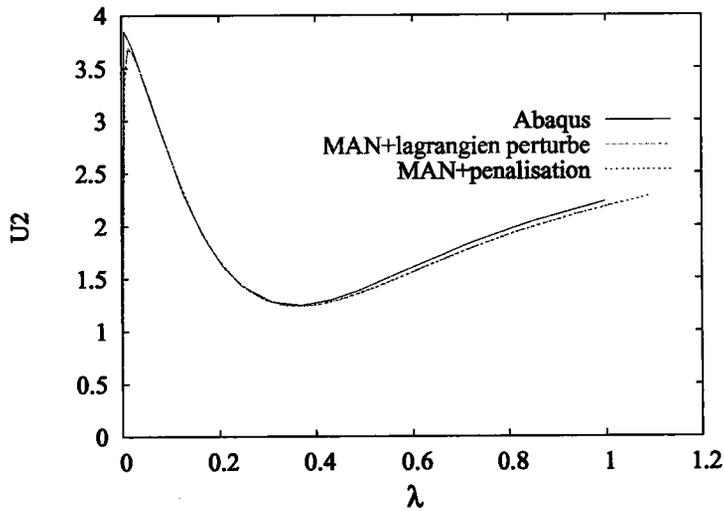


FIGURE 3.16 – Déplacement vertical du nœud A avec les différents algorithmes, surface rigide circulaire

Remarque 3.3.3.2

D'autres calculs ont été réalisés avec les différents algorithmes sur ce test, et les conclusions sont les mêmes que celles faites précédemment.

Nous pouvons donc à présent discuter des algorithmes et les comparer sur le plan de la fiabilité et de la robustesse sans revenir aux courbes de réponse obtenues avec les différentes méthodes.

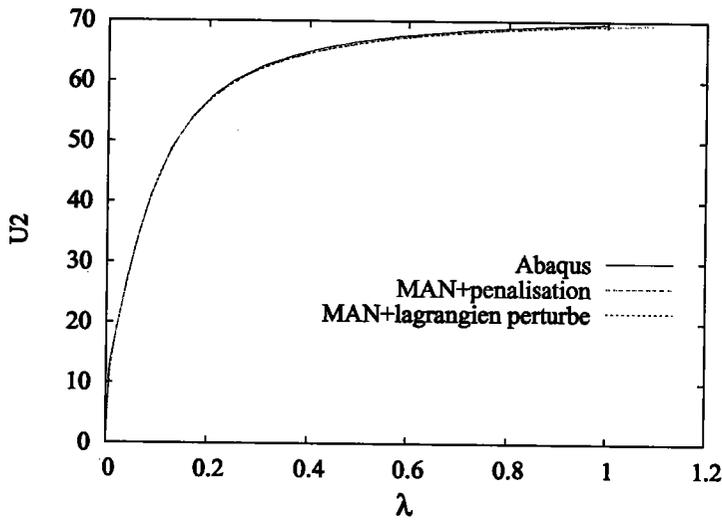


FIGURE 3.17 – Déplacement vertical du nœud B avec les différents algorithmes, surface rigide circulaire

3.4 Comment régulariser la loi de contact ?

Nous étudions dans cette partie l'influence du paramètre de régularisation η sur les calculs effectués avec les algorithmes MAN. Nous proposons donc d'effectuer des tests sur le premier exemple (celui du contact avec une surface rigide plane) pour différentes valeurs du paramètre de régularisation η . Les calculs sont effectués avec l'algorithme 'MAN+lagrangien perturbé'. Nous rappelons que le maillage comporte 255 degrés de liberté et 26 nœuds candidats au contact.

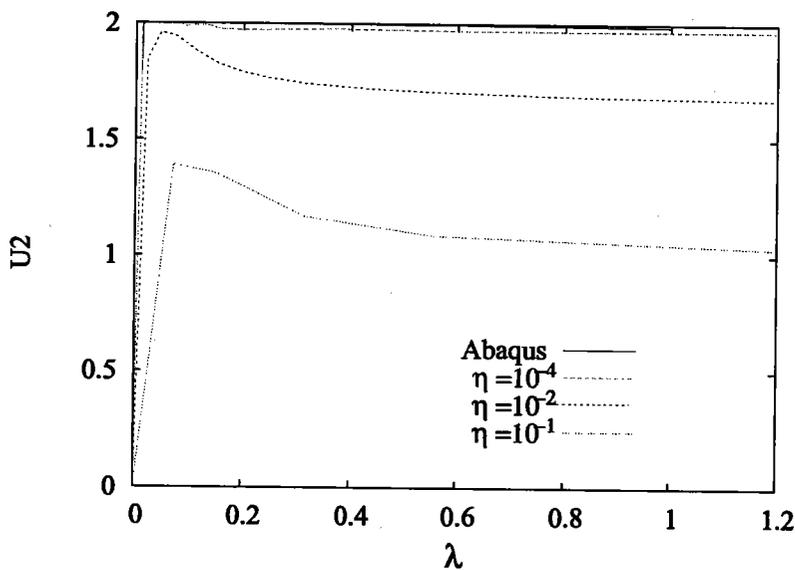


FIGURE 3.18 – Déplacement vertical du nœud B pour différentes valeurs de η

Dans la figure (3.18), nous avons représenté le déplacement vertical du nœud B obtenu pour différentes valeurs du paramètre η . La courbe de réponse obtenue pour $\eta = 10^{-4}$ est comparable à celle obtenue avec Abaqus (cf figure : 3.10). Par contre, pour $\eta = 10^{-2}$ et $\eta = 10^{-1}$, nous observons clairement une surestimation du décollement du nœud au cours du chargement.

Nous avons ensuite représenté la réaction au nœud B pour différentes valeurs du paramètre η . Nous observons qu'une régularisation avec de grandes valeurs de η peut conduire à une sous-estimation des efforts de contact. Le paramètre de régularisation doit donc être suffisamment petit afin de garantir une bonne représentation des conditions de contact. Cependant diminuer la valeur du paramètre η conduit à une augmentation du nombre de pas nécessaires au calcul.

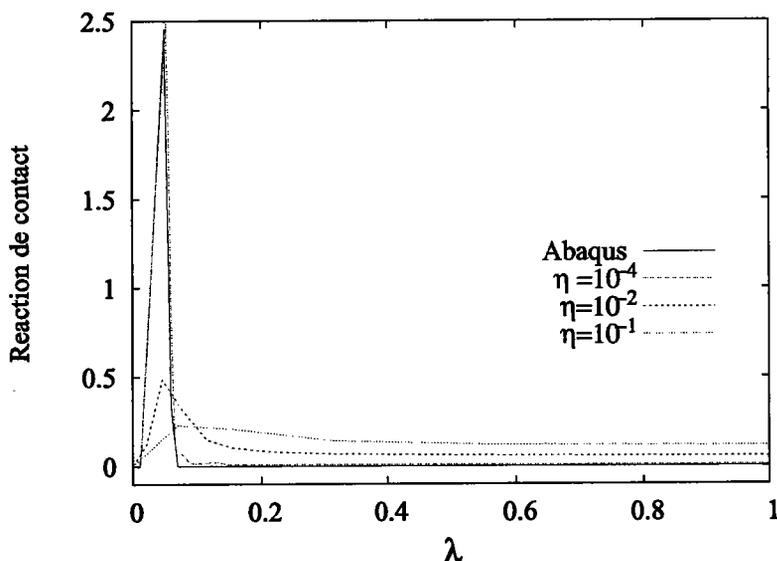
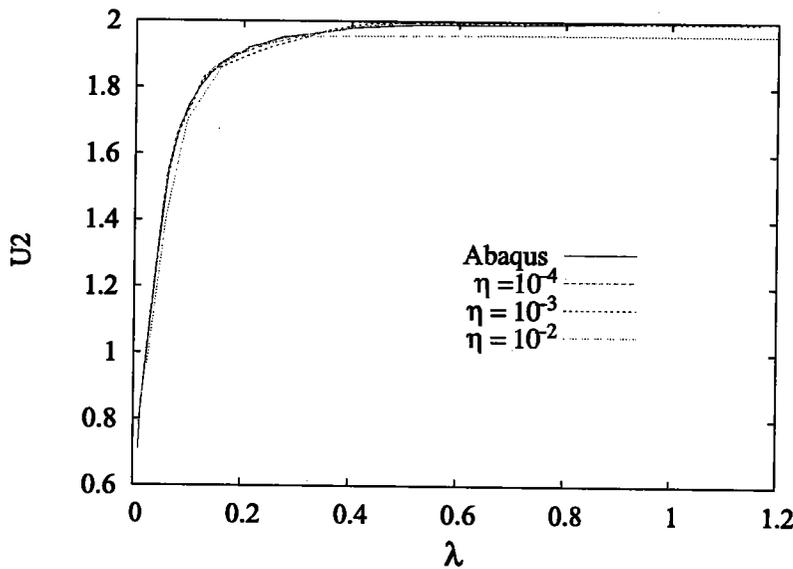


FIGURE 3.19 – Réaction au nœud B pour différentes valeurs de η

η utilisé	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Nb Pas	96	57	32	15	7

TABLEAU 3.3 – Contact entre une poutre encastree et une surface rigide plane, influence du paramètre η , 26 nœuds de contact

Dans le tableau (3.3), nous avons représenté le nombre de pas nécessaires au calcul de la branche solution du problème pour différentes valeurs du paramètre de régularisation η . Il apparaît que plus η est grand et plus le nombre de pas nécessaires au calcul diminue. Nous expliquons ce phénomène par le fait que lorsque η est grand, la non-linéarité est adoucie et par conséquent le nombre de pas nécessaires au calcul diminue. Il faut donc trouver un compromis pour garantir une bonne représentation des conditions de contact à un moindre coût. Nous choisissons dans la suite d'utiliser pour le premier test, un paramètre de régularisation $\eta = 10^{-3}$.

FIGURE 3.20 – Déplacement vertical du nœud A pour différentes valeurs de η

Valeur de R_u	8	2	0.8	0.01	0.001
η au nœud A	0.205	0.051	0.0205	$2.6 * 10^{-4}$	$2.6 * 10^{-5}$
η au nœud B	0.013	0.003	0.0013	$1.7 * 10^{-5}$	$1.7 * 10^{-6}$
Nb Pas	30	44	53	58	92

TABLEAU 3.4 – Influence du paramètre η sur le nombre de pas pour 26 nœuds de contact

Nous avons procédé à une série de tests comparables sur l'exemple du contact entre la poutre élastique et la surface rigide circulaire. Sur cet exemple l'écart initial et donc le paramètre de régularisation η diffère d'un nœud de contact à l'autre. Nous discutons donc de la régularisation par le biais des paramètres R_u et h_u . Pour $h_u = 0.1$, nous avons tracé les lois de contact régularisées obtenues pour différentes valeurs de R_u (cf figure : 3.21) : la loi de contact unilatérale est d'autant mieux décrite que le paramètre R_u est choisi petit. Nous rappelons que $\eta = R_u h_u / (\delta - h_u)$ donc à h_u fixé, si R_u décroît, η décroît aussi. Dans le tableau (3.4), nous avons reporté pour $h_u = 0.1$, la valeur du paramètre de régularisation η correspondant aux nœuds A et B, ainsi que le nombre de pas nécessaires au calcul pour les différentes valeurs de R_u choisies.

Nous observons que plus le paramètre de régularisation est choisi petit et plus le nombre de pas pour obtenir la courbe solution augmente. Par ailleurs un paramètre de régularisation mal choisi risque d'affecter la représentation des conditions de contact. Nous avons représenté les déplacements verticaux des nœuds A et B au cours du chargement (cf figure : 3.22), (cf figure : 3.23). Le déplacement du nœud B est le même quel que soit le choix du paramètre η que nous avons effectué. Par contre nous observons que pour de petites valeurs de η , le déplacement

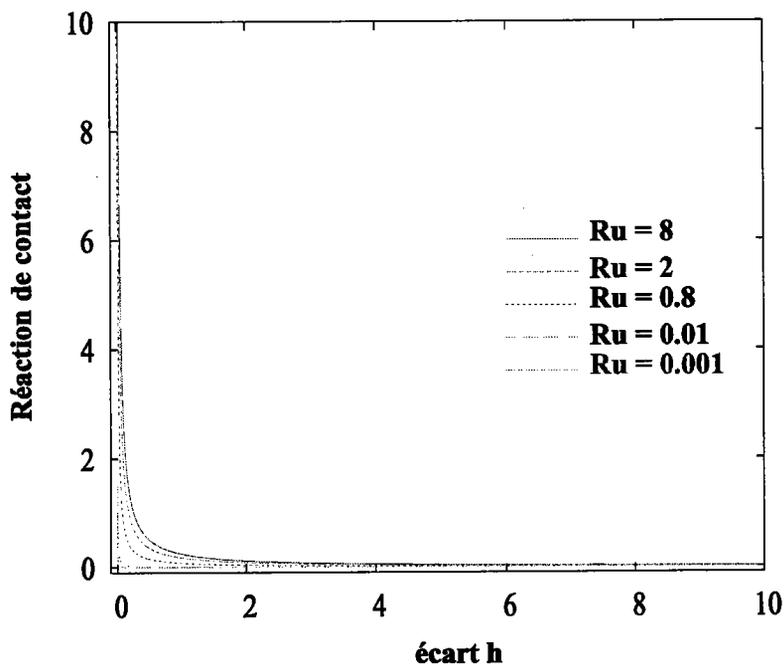


FIGURE 3.21 – Influence du paramètre R_u sur la loi de contact, $h_u = 0.1$

vertical du nœud A est surestimé. Le nœud pénètre même la surface rigide pour $\eta = 2.6 * 10^{-5}$. Nous avons représenté (cf figure : 3.24), le résidu au cours du chargement correspondant aux différentes valeurs de R_u utilisées pour les calculs précédents, voir tableau (3.4). Il s'avère que le résidu devient inacceptable pour de trop petites valeurs de R_u . La valeur de R_u qui conduit aux résidus les plus satisfaisants est $R_u = 8$. Par ailleurs le déplacement vertical du nœud A correspondant à cette valeur de R_u est comparable à celui obtenu avec Abaqus (cf figure : 3.16). Le nombre de pas nécessaires au calcul pour $R_u = 8$ est moins élevé que celui correspondant aux autres R_u considérés. Nous décidons donc d'utiliser dans la suite pour ce test, une régularisation définie par $h_u = 0.1$ et $R_u = 8$.

3.5 Finesse du maillage et efficacité de l'algorithme

Nous étudions dans cette partie, l'influence du maillage utilisé sur la convergence des algorithmes MAN. Le raffinement du maillage permet l'amélioration de la description du contact à l'interface. Il est donc important d'avoir des algorithmes adaptés à des maillages aussi fins que souhaité. Nous rappelons que nous travaillons avec des pressions de contact, contrairement au travail effectué dans [EH98], où les efforts de contact étaient supposés ponctuels. Nous utilisons quatre maillages différents, le premier étant celui défini au départ (§ 3.2). Pour le second maillage, la structure est discrétisée à l'aide de 1260 degrés de liberté (ddl) et 110 nœuds sont candidats au contact. Les maillages appelés Maillage 3 et Maillage 4 correspondent respectivement à un maillage à 4968 (13676) ddl et 251 (respectivement 501) nœuds de contact (cf figure : 3.25).

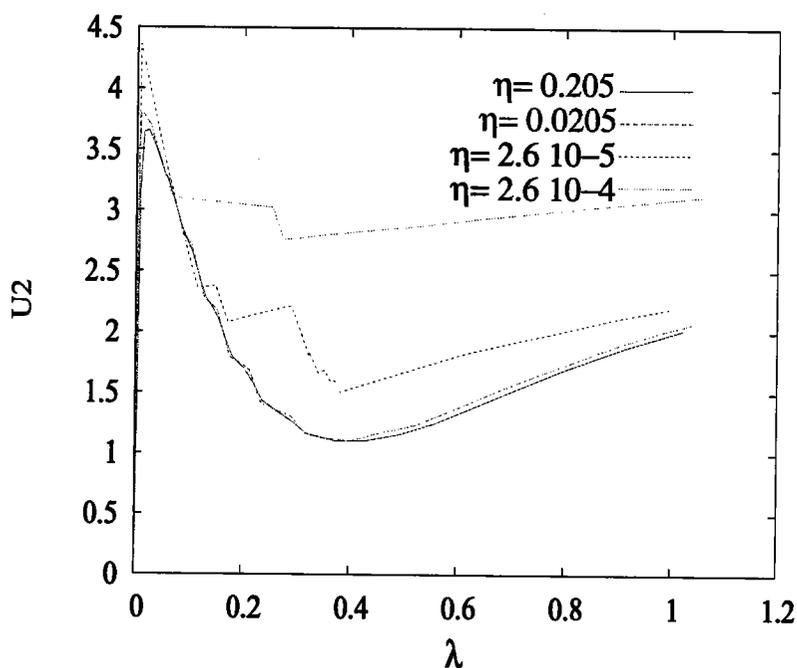


FIGURE 3.22 – Déplacement vertical du nœud A pour différentes valeurs de R_u , surface rigide circulaire

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Nddl	510	1260	4968	13676
Ncont	26	101	251	501
Nb Pas MAN	32	39	37	32
Nb Dec Abaqus	128	193	274	385

TABLEAU 3.5 – Contact entre une poutre encastree et une surface rigide plane, influence du maillage

Dans les tableaux (3.5) et (3.6), nous avons représenté pour chaque maillage étudié, le nombre de pas réalisés à l'aide des algorithmes MAN, ainsi que le nombre de décompositions de matrices nécessaires à Abaqus pour effectuer le calcul.

Nous observons que le raffinement du maillage n'a pas une influence significative sur le nombre de pas nécessaires au calcul MAN, voir tableau (3.5) pour le premier test et le tableau (3.6) pour le second test. Ce nombre reste globalement le même pour les quatre maillages utilisés (même si le temps de calcul d'un pas augmente avec la densité du maillage). Au contraire, avec le code Abaqus, il faut beaucoup plus de décompositions de matrices pour faire le calcul avec des maillages raffinés : pour le cas du contact avec une surface rigide plane, il faut décomposer 385 matrices pour le maillage à 13676 degrés de liberté, alors qu'avec la MAN seuls 32 pas sont

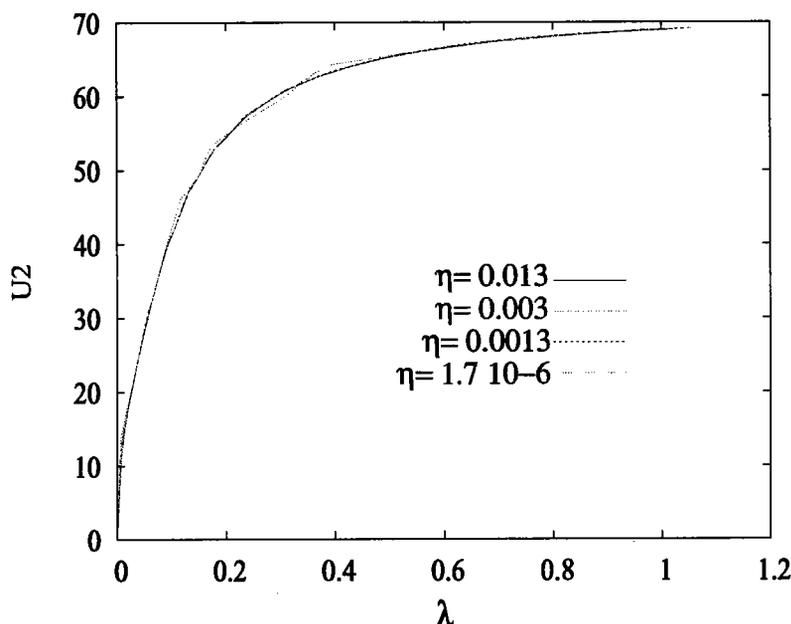


FIGURE 3.23 – Déplacement vertical du nœud B pour différentes valeurs de R_u , surface rigide circulaire

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Nddl	510	1260	4968	13676
Ncont	26	101	251	501
Nb Pas MAN	34	41	42	34
Nb Dec Abaqus	70	124	179	251

TABLEAU 3.6 – Contact entre une poutre encastree et une surface rigide circulaire, influence du maillage avec la MAN

requis (cf tableau 3.5). Pour le contact avec une surface rigide circulaire, la MAN n'a besoin que de 42 pas pour le calcul avec le maillage à 4968 ddl lorsque Abaqus totalise 179 décompositions de matrice (voir tableau 3.6).

Il fallait encore vérifier que ces résultats émanaient d'une estimation correcte des conditions de contact. Nous avons donc représenté le déplacement vertical du nœud B au cours du chargement (cf figure : 3.26) pour le premier test et le déplacement vertical du nœud A pour le second test (cf figure : 3.27). Les courbes obtenues avec les différents maillages sont comparables. Il est donc beaucoup plus avantageux d'utiliser les algorithmes MAN lorsque le maillage devient plus dense.

3.6 Analyse complémentaire des résultats obtenus par la MAN

Les algorithmes MAN définis dans le chapitre précédent sont donc validés. Que ce soit l'algorithme 'MAN+pénalisation' ou 'MAN+lagrangien perturbé', ils permettent d'obtenir les mêmes

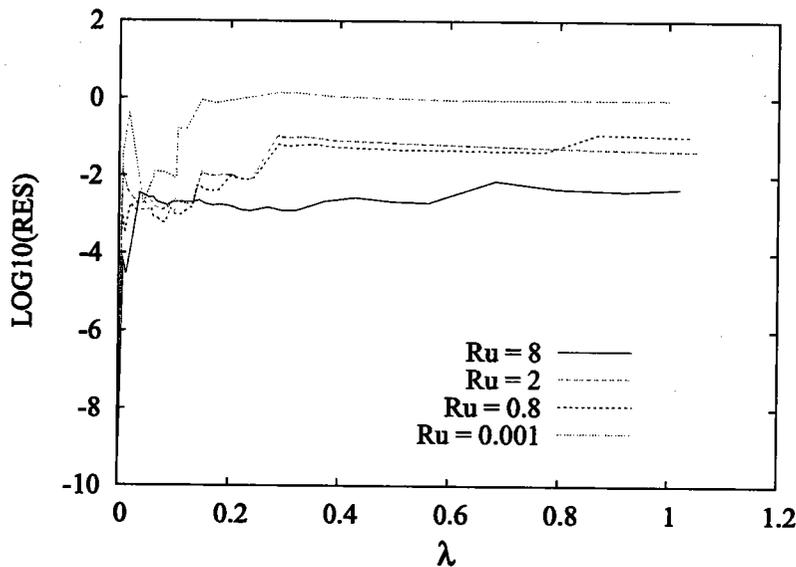


FIGURE 3.24 – Résidu au cours du chargement pour différentes valeurs de R_u , surface rigide circulaire

résultats que le code Abaqus avec une bonne précision et à un coût de calcul moins élevé. Il existe tout de même un ordre de troncature optimum pour les séries : nous utilisons désormais l'ordre 15 pour tous les calculs. Par ailleurs, nous avons constaté que le paramètre de régularisation jouait un rôle fondamental dans le bon comportement des algorithmes MAN. Ce paramètre doit être suffisamment petit pour garantir une bonne représentation des conditions de contact, mais pas trop pour ne pas affecter les temps de calcul.

3.6.1 Compléments sur l'influence du nombre de points de contact

Les algorithmes MAN permettent également d'effectuer des calculs sur des maillages de densité plus grande sans influencer sur le nombre total de pas nécessaires au calcul. Cela n'était pas le cas dans [EH98], où les réactions de contact étaient supposées ponctuelles. Le raffinement de maillage pouvait être alors considéré comme un adoucissement de la régularisation et le nombre de pas nécessaires au calcul diminuait en conséquence. Dorénavant, le raffinement de maillage et donc l'augmentation de nœuds de contact à prendre en considération ne modifie pas le nombre de pas nécessaires au calcul, contrairement aux méthodes itératives classiques et en particulier la méthode de Newton-Raphson utilisée par le code industriel Abaqus.

3.6.2 Analyse du coût de calcul

Nous n'avons pas pour l'instant comparé les deux types d'algorithmes MAN du point de vue du temps de calcul. Tout d'abord, il est évident que le temps t_{Kt} (§ 3.3.2) de l'évaluation et de la décomposition de la matrice de rigidité, est plus grand pour l'algorithme 'MAN+lagrangien

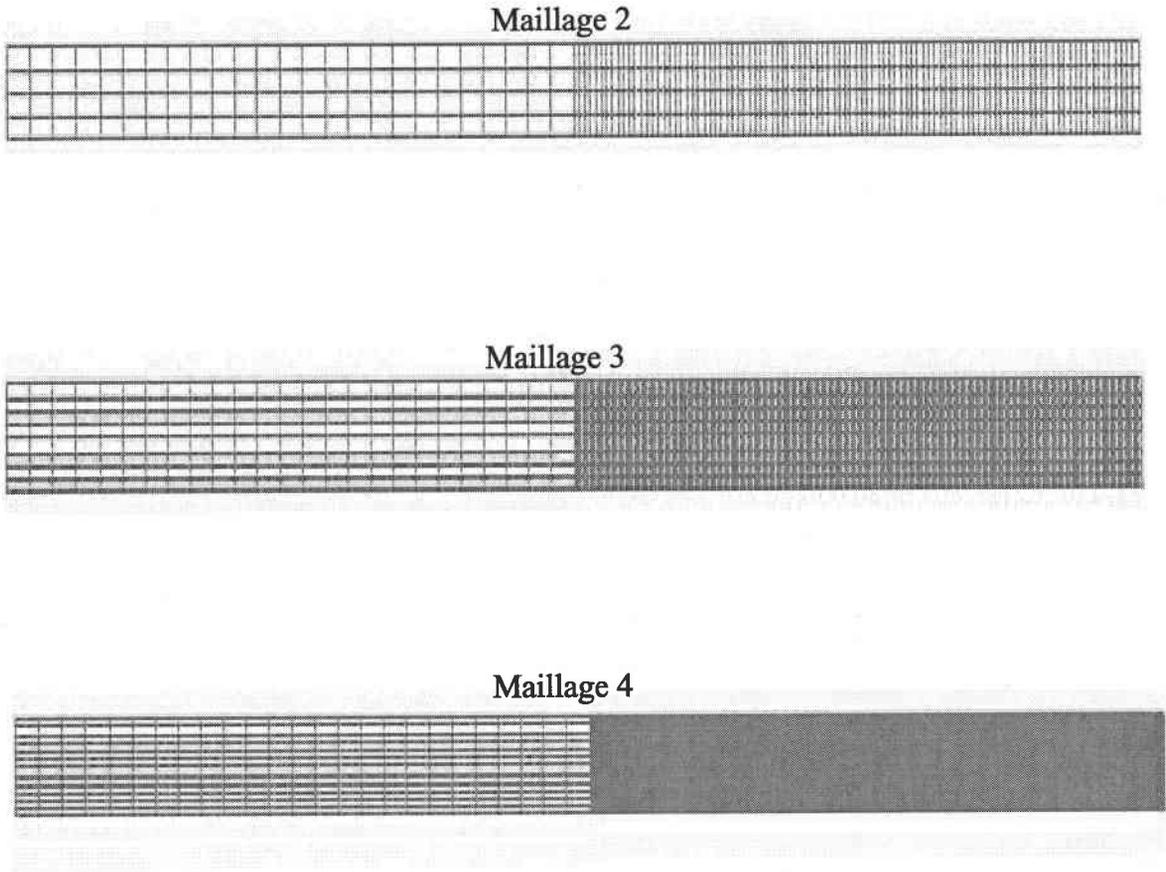


FIGURE 3.25 – Les différents maillages utilisés

perturbé' où la taille de la matrice est $(Nddl + Ncont) \times (Nddl + Ncont)$ comparé à celui de l'algorithme avec pénalisation où la matrice a pour dimension $Nddl \times Nddl$. Nous rappelons que nous effectuons le stockage des matrices par lignes de ciel et que la méthode de décomposition de matrice utilisée est la méthode de Choleski.

Nous avons effectué une comparaison des temps tKt pour les deux algorithmes MAN et avec des maillages différents. Nous considérons le rapport β entre le temps de calcul $tKt1$ pour la matrice dans l'algorithme 'MAN+lagrangien perturbé' et celui correspondant à l'algorithme 'MAN+pénalisation' $tKt2$.

$$\beta = \frac{tKt1}{tKt2} \quad (3.4)$$

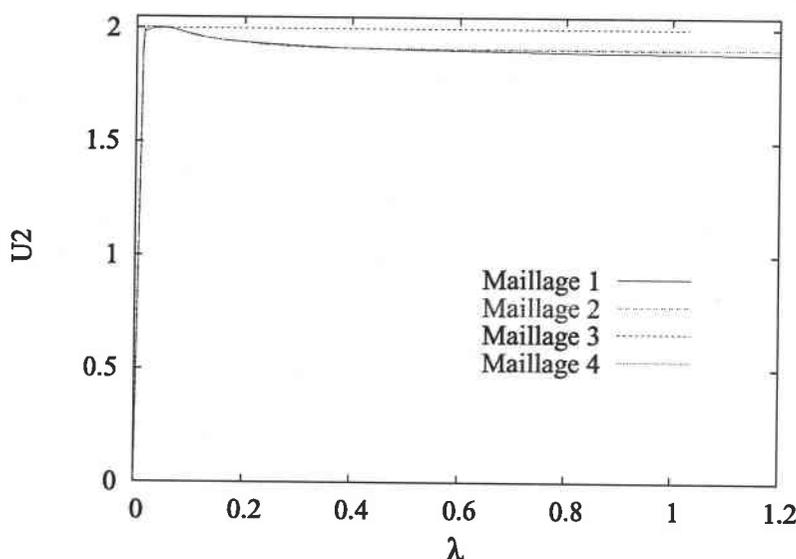


FIGURE 3.26 – Déplacement vertical du nœud B pour différents maillages

Le temps de calcul d'une matrice est environ égal au cube du nombre de degrés de liberté (N_{ddl}) de la structure : $t_{Kt} = N_{ddl}^3$. Donc

$$\beta \simeq \left(\frac{N_{ddl} + N_{cont}}{N_{ddl}} \right)^3 \quad (3.5)$$

Pour le premier maillage, les temps sont sensiblement les mêmes :

$$\beta \simeq \left(\frac{501 + 26}{501} \right)^3 \simeq \left(1 + \frac{26}{501} \right)^3 \simeq \left(1 + \frac{3 * 26}{501} \right) \simeq 1.15 \quad (3.6)$$

Plus le maillage compte de nœuds candidats au contact et plus le calcul et la décomposition de la matrice avec les multiplicateurs de Lagrange va coûter cher. Cependant, pour comparer t_{Kt1} à t_{Kt2} , il faut également considérer comment ce nombre de nœuds de contact évolue par rapport à N_{ddl} . Ainsi, pour le maillage 4 qui compte 501 nœuds de contact et 13676 ddl, β est égal à :

$$\beta \simeq \left(\frac{13676 + 501}{13676} \right)^3 = \left(1 + \frac{501}{13676} \right)^3 \simeq 1 + \frac{3 * 501}{13676} \simeq 1.1 \quad (3.7)$$

Donc avec ce maillage plus fin, une matrice de rigidité pour l'algorithme 'MAN avec lagrangien perturbé' coûte 10% plus cher que pour l'algorithme 'MAN avec pénalisation'. Il n'est donc pas très pénalisant, pour les problèmes considérés, d'utiliser les multiplicateurs de Lagrange dans la formulation du problème quel que soit le maillage utilisé.

3.6.3 Pilotage de la longueur de pas et comparaison des deux méthodes MAN

En fait, si l'on compare uniquement le nombre de pas nécessaires au calcul pour les deux algorithmes, avec un paramètre de contrôle de la longueur des pas δ_1 suffisamment petit pour avoir une bonne précision des calculs, c'est l'algorithme avec pénalisation qui nécessite le moins

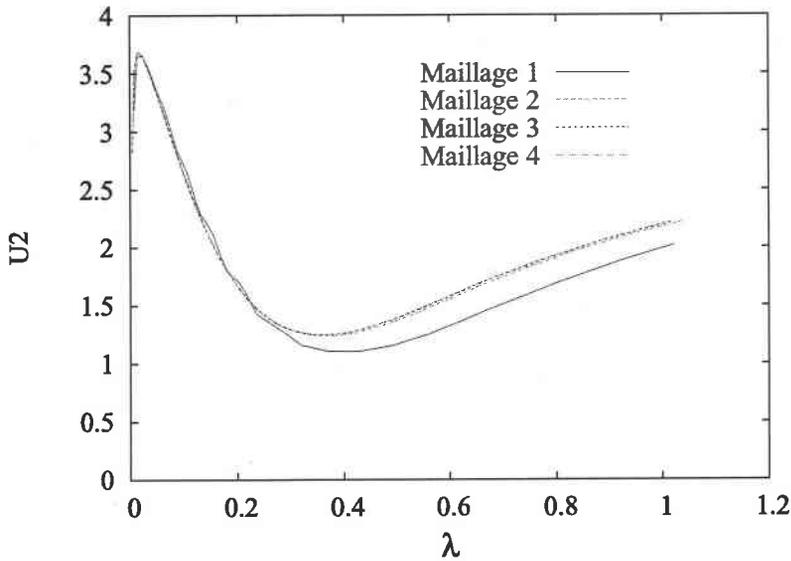


FIGURE 3.27 – Déplacement vertical du nœud A pour différents maillages, surface rigide circulaire

de pas. Par exemple, pour $\delta_1 = 10^{-6}$, il faut 32 pas pour faire le calcul avec l'algorithme 'MAN + lagrangien perturbé' alors que l'autre algorithme MAN n'a besoin que de 30 pas de calcul. Mais ceci n'est valable que si δ_1 est choisi petit. Nous rappelons que nous avons fixé au tout début ce paramètre δ_1 à 10^{-6} pour garantir une bonne précision du calcul. Si nous augmentons à présent la valeur de ce paramètre, alors la précision du calcul se dégrade. L'avantage principal de la méthode avec multiplicateurs de Lagrange est qu'elle permet une bonne précision du calcul, même avec des δ_1 plus grands. Nous avons représenté l'évolution du résidu au cours du chargement (cf figure : 3.28), ainsi que la réaction au nœud B (cf figure : 3.29) pour $\delta_1 = 10^{-4}$ et pour le premier test. Les réactions obtenues pour les deux algorithmes sont tout à fait comparables. Par contre, le résidu d'équilibre varie selon l'algorithme utilisé. Pour l'algorithme 'MAN+lagrangien perturbé', ce résidu reste satisfaisant tout au long du chargement. Par contre pour l'algorithme 'MAN+ pénalisation' le résidu est inacceptable dès l'apparition du contact. Pour ce calcul, l'algorithme 'MAN + lagrangien perturbé' n'a besoin que de 21 pas. Ainsi, si l'on considère qu'il faut faire le calcul avec le δ_1 le plus grand possible (pour faire le minimum de pas) tout en gardant un bon résidu, l'algorithme 'MAN+ lagrangien perturbé' est le plus efficace des algorithmes MAN.

Un problème subsiste cependant. Si l'on augmente encore plus la taille des pas en choisissant δ_1 supérieur à 10^{-4} , les résidus se dégradent et ce pour les deux algorithmes MAN. Par ailleurs, pour un exemple donné, on ne peut pas connaître a priori le paramètre δ_1 qui va permettre de faire le minimum de pas (et donc de minimiser le temps de calcul), tout en garantissant la précision des résultats. Ce qui est sûr, c'est qu'avec un petit paramètre δ_1 , nous obtenons des résultats précis. Mais en contrepartie, nous augmentons le nombre de pas nécessaires au calcul.

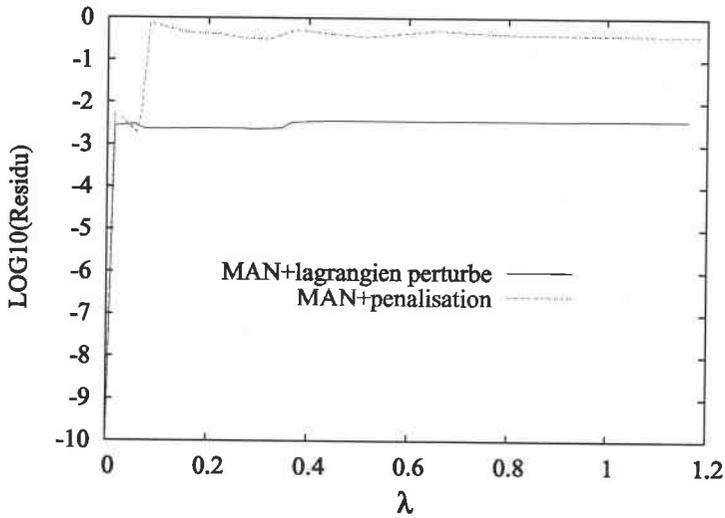


FIGURE 3.28 – Résidu au cours du chargement avec $\delta_1 = 10^{-4}$

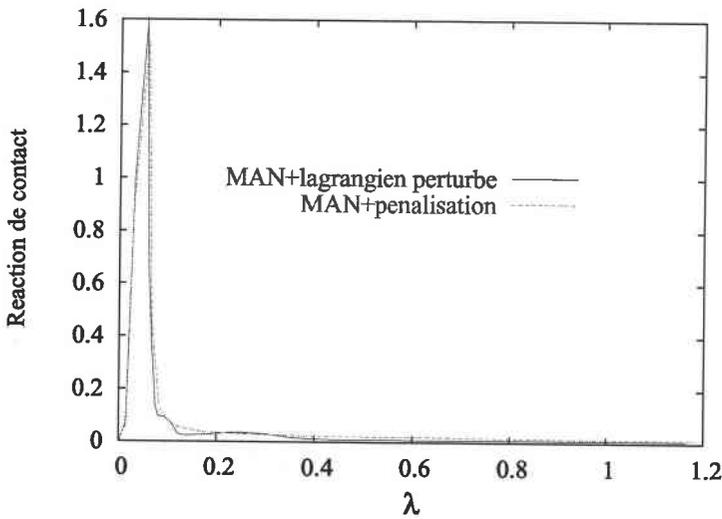


FIGURE 3.29 – Déplacement vertical du nœud B avec $\delta_1 = 10^{-4}$

Il serait donc intéressant de nous délier de notre dépendance envers ce paramètre de contrôle des pas δ_1 . C'est pour cela que nous introduisons des phases de corrections dans les calculs dans la suite de notre travail.

3.7 Bilan du chapitre et perspectives

Les tests effectués dans ce chapitre ont montré l'efficacité des algorithmes MAN dans la résolution des problèmes à forte non-linéarité de contact. Nous avons obtenu des solutions de bonne qualité et un gain en temps de calcul par rapport à la méthode itérative de Newton-

Raphson utilisée dans Abaqus. Avec un choix adéquat du paramètre de régularisation η , la MAN permet de satisfaire les conditions aux limites de contact avec précision. En outre, contrairement à Abaqus, avec la MAN, un raffinement de maillage n'a pas d'influence significative sur le nombre de pas nécessaires au calcul.

Deux formulations pour discrétiser le contact unilatéral ont été testées dans le cadre de la MAN : soit avec une pénalisation et condensation des forces de contact, soit en gardant les multiplicateurs de Lagrange comme variables discrètes. Il semble que la seconde méthode permette de faire des pas plus grands.

Un problème apparaît cependant : tous les calculs sont effectués pour des valeurs précises du paramètre qui fixe la longueur des pas δ_1 . Si ce paramètre est suffisamment petit, la précision du calcul est bien assurée. Cependant, la taille des pas étant réduite, le nombre de pas nécessaires au calcul augmente. Il faudrait avoir la possibilité de faire des calculs sans se préoccuper de ces considérations. Les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé que nous proposons dans la suite, ont justement pour vocation l'amélioration de la fiabilité et de la robustesse des algorithmes MAN.

CHAPITRE 4

Résolution du problème de contact par prédiction-correction d'ordre élevé

Dans ce chapitre nous introduisons des phases de corrections dans le calcul de la branche solution des problèmes de contact lorsque cela est nécessaire. Les correcteurs d'ordre élevé utilisés sont construits à l'aide d'une transformation d'homotopie et des techniques usuellement utilisées dans le cadre de la MAN. Nous définissons ainsi une classe d'algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé pour les problèmes de contact unilatéral.

PLAN DU CHAPITRE 4

4.1. Introduction	79
4.2. Algorithmes de correction classiques	79
4.2.1. Problème à résoudre	79
4.2.2. Méthode de Newton	80
4.2.3. Méthode de Newton modifié	80
4.2.4. Méthode de quasi-Newton	81
4.3. Algorithmes de correction d'ordre élevé	81
4.3.1. Techniques d'homotopie et de perturbation	81
4.3.2. Choix de l'opérateur	82
4.3.3. Stratégie à longueur d'arc	83
4.4. Algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé	84
4.5. Correcteurs d'ordre élevé pour les problèmes de contact	86
4.5.1. Algorithme de correction d'ordre élevé avec la méthode de pénalisation	90
4.5.2. Algorithme de correction d'ordre élevé avec la méthode du lagrangien perturbé	94
4.6. Bilan du chapitre et perspectives	98

4.1 Introduction

Le calcul de la branche solution de problèmes non-linéaires s'opère généralement à l'aide d'algorithmes de prédiction-correction. Les plus utilisés sont ceux du type Newton-Raphson [AG90] [Cri91] [Cri97] [KM89] [Rik84]. Le principe de ces méthodes est de suivre la branche solution pas à pas par le biais d'une succession de linéarisations et d'itérations afin d'atteindre l'équilibre. Des prédicteurs, ainsi que des correcteurs d'ordre deux ont été définis [Cri97] [Wag91].

Mais l'efficacité et la fiabilité des méthodes de prédiction-correction peuvent être nettement améliorées en utilisant des développements d'ordre élevé et des approximants de Padé. C'est le principe des algorithmes asymptotiques numériques qui fonctionnent même sans phase de correction : dans le cas de la MAN classique, la taille des pas est définie a posteriori ; ainsi l'utilisateur peut réduire ou allonger la taille des pas pour garantir une qualité certaine de la représentation de la solution. Cependant dans la technique la plus courante que nous avons adoptée aux chapitres précédents, ce procédé se fait via un paramètre δ_1 , qui doit être choisi assez petit si on veut éviter une croissance forte du résidu.

Pour nous délier de cette dépendance, nous proposons d'introduire des phases de corrections dans le calcul de la branche solution des problèmes de contact unilatéral lorsque cela est nécessaire. Dans des études précédentes, des stratégies de prédiction-correction ont été proposées dans le cadre de la MAN [VCDPF98] [DCPF97], la correction étant faite par la méthode de Newton. Dans notre étude nous couplons des correcteurs d'ordre élevé à des prédicteurs d'ordre élevé [LCZ⁺02]. Ces correcteurs d'ordre élevé sont construits à l'aide d'une transformation d'homotopie, d'une technique de perturbation et d'approximants de Padé [DPFN⁺99] [MLDPF00]. Dans un premier temps, nous allons rappeler les méthodes itératives classiques de traitement des problèmes non-linéaires. Puis nous présentons les correcteurs d'ordre élevé que nous couplons aux prédicteurs d'ordre élevé pour traiter les problèmes de contact unilatéral. Enfin nous définissons les algorithmes de prédiction-corrrection d'ordre élevé que nous utilisons pour résoudre ces problèmes.

4.2 Algorithmes de correction classiques

4.2.1 Problème à résoudre

Nous nous intéressons au calcul de la branche solution $\mathbf{U}(\lambda)$ d'un problème non-linéaire qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = 0 \tag{4.1}$$

où λ est un paramètre de charge, et le vecteur mixte \mathbf{U} peut représenter à la fois les déplacements, les contraintes et dans le cadre de notre travail les variables du contact.

Il existe plusieurs méthodes et techniques de résolution de problèmes non linéaires. Le choix de la technique de résolution peut être guidé par le type de non-linéarité rencontré. La solution recherchée du problème non-linéaire étudié est généralement obtenue par un processus itératif.

A partir d'une estimation de la solution, on calcule une correction qui, additionnée à la solution estimée, doit l'améliorer et ce d'itération en itération :

soit \mathbf{U}^0 une solution approchée du problème (4.1). La solution peut être définie de manière itérative à partir de ce point, en gardant par exemple fixe le paramètre de charge λ au cours des itérations. A l'itération $p + 1$, la correction $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}^{p+1} - \mathbf{U}^p$ doit satisfaire :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}^p + \Delta\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{L}_t^p(\Delta\mathbf{U}) + \mathbf{G}(\Delta\mathbf{U}) + \mathbf{R}^p = 0 \quad (4.2)$$

où $\mathbf{L}_t^p(\cdot)$ et \mathbf{R}^p représentent respectivement l'opérateur tangent et le vecteur résidu, définis au point \mathbf{U}^p et $\mathbf{G}(\cdot)$ représente des termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans le développement de Taylor.

Remarque 4.2.1

Il est à noter que dans le cadre de la MAN, il est souhaitable d'écrire le problème non-linéaire (4.1) dans un cadre quadratique [CDPF94a] [PFDB+97] [CCDPF01].

Naturellement les techniques utilisées pour estimer cette correction doivent être assez robustes pour converger vers la solution désirée en un minimum d'itérations et à moindre coût. On utilise généralement les méthodes de type Newton ou quasi-Newton pour déterminer cette correction.

4.2.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton est la plus répandue et la plus connue des méthodes de résolution. Elle consiste à résoudre une succession de problèmes linéaires. L'algorithme de Newton-Raphson s'écrit :

$$\{\Delta\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}_t^p]^{-1}\{\mathbf{R}^p\} \quad (4.3)$$

où $[\mathbf{K}_t^p]$ désigne la matrice de rigidité tangente à l'itération p . Nous devons donc évaluer cette matrice tangente et son inverse à chaque itération, ce qui représente un coût élevé. Ce coût est très prédominant par rapport aux autres calculs surtout pour des problèmes à grand nombre de degrés de liberté. D'autres algorithmes de résolution plus performants ont donc été développés. La technique la plus naturelle est d'exploiter le fait que la matrice tangente n'a pas besoin d'être calculée et triangularisée à chaque itération pour converger vers la solution.

4.2.3 Méthode de Newton modifié

La méthode de Newton modifié est définie par :

$$\{\Delta\mathbf{U}\} = [\mathbf{K}_t^m]^{-1}\{\mathbf{R}^p\} \quad (4.4)$$

où m est généralement égal à zéro, c'est à dire que la matrice tangente est évaluée à la première itération et gardée fixe tout au long des itérations du pas. Cependant après un certain nombre d'itérations, on peut réactualiser la matrice tangente pour accélérer la convergence (d'où $m < p$). Comme plusieurs itérations sont calculées avec la même matrice, cet algorithme est moins coûteux que le précédent. Cependant cette méthode n'est pas assez robuste dans les zones de forte non-linéarité car la correction est moins bien évaluée que dans le cas de la méthode de Newton.

4.2.4 Méthode de quasi-Newton

Cette méthode est un compromis entre les méthodes de Newton et de Newton modifié. Le compromis se fait au niveau du temps de calcul et de la robustesse de convergence. L'utilisation de cette méthode en calcul non-linéaire des structures a été suggérée par [MS79]. La méthode se base sur l'équation de quasi-Newton suivante :

$$[\mathbf{K}_t^{p-1}]\{\Delta\mathbf{U}^{p-1}\} = \{\Delta\mathbf{R}^{p-1}\} \quad (4.5)$$

$$\text{où } \Delta\mathbf{U}^{p-1} = \mathbf{U}^p - \mathbf{U}^{p-1}$$

$$\Delta\mathbf{R}^{p-1} = -(\mathbf{R}^p - \mathbf{R}^{p-1})$$

Cette équation est qualifiée de quasi-Newton car contrairement à la méthode de Newton, on n'admet pas que le résidu à l'itération p soit nul. Toute matrice $[\mathbf{B}]$ vérifiant (4.5) peut servir d'approximation à la matrice tangente en \mathbf{U}^p . L'équation (4.5) ne détermine pas de façon unique la matrice $[\mathbf{B}]$ et différentes approximations conduisent à la définition de cette matrice.

La méthode de quasi-Newton est donc un processus itératif semblable à la méthode de Newton où la matrice tangente est calculée approximativement à l'aide de l'équation (4.5).

Dans ce qui suit, nous proposons des algorithmes itératifs d'ordre élevé basés sur la MAN.

4.3 Algorithmes de correction d'ordre élevé

4.3.1 Techniques d'homotopie et de perturbation

Afin de calculer la correction par la MAN, une homotopie dépendant du paramètre réel ' ε ' ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) est utilisée. Nous introduisons ainsi le problème artificiel suivant :

$$[(1 - \varepsilon)\mathbf{L}^* + \varepsilon\mathbf{L}_t^p](\Delta\mathbf{U}) + \mathbf{G}(\Delta\mathbf{U}) + \varepsilon\mathbf{R}^p = 0 \quad (4.6)$$

où \mathbf{L}^* est un opérateur inversible arbitraire : le choix de cet opérateur est crucial dans la définition des algorithmes.

Remarque 4.3.1

Il est à noter que $\Delta\mathbf{U}(\varepsilon)$ passe continûment de 0 pour $\varepsilon = 0$ à la solution de l'équation (4.2) pour $\varepsilon = 1$.

Puis $\Delta\mathbf{U}(\varepsilon)$ est cherchée sous forme de série entière par rapport à ε .

$$\Delta\mathbf{U} = \varepsilon\Delta\mathbf{U}_1 + \varepsilon^2\Delta\mathbf{U}_2 + \cdots + \varepsilon^N\Delta\mathbf{U}_N \quad (4.7)$$

Remarque 4.3.2

On peut également remarquer que si la série est tronquée à l'ordre 1, la solution du problème (4.6) est également solution de (4.3). Donc les algorithmes proposés peuvent être considérés comme des extensions d'ordre élevé des algorithmes itératifs classiques. Ces algorithmes MAN permettent de prendre en compte les termes $\mathbf{G}(\Delta\mathbf{U})$ d'ordre supérieur ou égal à 2.

La représentation polynomiale de la solution peut être améliorée à l'aide d'approximants de Padé [EHDPF00] [MLDPF00]. Vu la remarque (4.3.1), la solution est cherchée pour ε égal à 1. Ce qui conduit à cette représentation de la solution :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^p + \Delta\mathbf{U}(1) = \mathbf{U}^p + \sum_{i=1}^{N-1} c_i \Delta\mathbf{U}_i \quad (4.8)$$

où les scalaires c_i sont calculés par la procédure d'approximants de Padé décrite dans [MLDPF00].

Remarque 4.3.3

La technique de résolution par série et approximants de Padé est la même que pour la prédiction. Ce qui change lors de la phase de correction est que la continuation par rapport au paramètre ε n'est pas nécessaire [Cha97], [DPFN⁺99] : si le résidu pour $\varepsilon = 1$ n'est pas satisfaisant, alors nous passons à l'itération suivante sans chercher la solution de (4.6) pas à pas.

4.3.2 Choix de l'opérateur

Comme l'opérateur \mathbf{L}^* est arbitraire, différents algorithmes peuvent être définis. Si \mathbf{L}^* est choisi égal à l'opérateur tangent \mathbf{L}_i^p , une triangulation de matrice tangente au point actuel est nécessaire au calcul des termes $\Delta\mathbf{U}_i$. Cet algorithme est une sorte **d'algorithme de Newton d'ordre élevé**.

Si \mathbf{L}^* est remplacé par l'opérateur tangent à la première itération, une seule matrice est inversée en \mathbf{U}^1 pour toutes les itérations. Cela revient à appliquer un **algorithme de Newton Modifié d'ordre élevé**.

Dans la pratique, ces deux algorithmes ne diffèrent pas beaucoup puisque la convergence est généralement obtenue au bout d'une seule itération. Par ailleurs la convergence est si rapide qu'une seule série avec de petits ordres de troncature (5 à 10) suffisent là où un algorithme de

Newton-Raphson classique a besoin d'itérer 3 à 4 fois [MLDPF00].

Il est également possible de définir des algorithmes de correction sans aucune nouvelle triangulation de matrice. Pour cela il suffit de choisir un opérateur \mathbf{L}^* qui a été inversé dans une phase précédente du calcul. Les tests effectués dans [MLDPF00] ont montré que cet algorithme peut bien fonctionner, certes avec des ordres de troncature ou un nombre d'itérations plus grand qu'avec les algorithmes précédents, mais avec un coût global moindre. La même idée a été testée dans un cadre de prédiction-correction, l'opérateur \mathbf{L}^* étant l'opérateur tangent au début de la prédiction [LCZ⁺02], mais les résultats n'étaient pas très satisfaisants : avec les grands pas effectués avec la MAN, la distance est trop grande entre le début et la fin du pas pour qu'un tel algorithme de correction fonctionne de manière fiable. C'est pourquoi nous nous limiterons ici à l'algorithme de Newton d'ordre élevé et à l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé.

4.3.3 Stratégie à longueur d'arc

La stratégie de pilotage des calculs est très importante à définir. De meilleurs résultats sont obtenus si l'on considère des variations de λ au cours des itérations. Comme dans les algorithmes classiques de longueur d'arc imposée [Wem71] [Rik84] [SC95] [Cri91] [Cri97] [KM89], on demande que la correction $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda = \lambda - \lambda^p)$ soit orthogonale à la tangente (\mathbf{u}', λ') à la courbe de réponse [Rik84]. En supposant pour simplifier que $\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda)$ varie linéairement en λ , cela conduit à définir $(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda)$ comme solution d'un système de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}^p + \Delta \mathbf{U}, \lambda^p + \Delta \lambda) = \mathbf{L}_t^p(\Delta \mathbf{U}) + \mathbf{G}(\Delta \mathbf{U}) + \mathbf{R}^p - \Delta \lambda \mathbf{F} = 0 \\ \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' + \Delta \lambda \lambda' = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

où \mathbf{F} est un vecteur donné, les opérateurs linéaire \mathbf{L}_t^p , non-linéaire \mathbf{G} et le résidu \mathbf{R}^p à l'itération p étant indépendants du paramètre $\Delta \lambda$.

Pour résoudre le problème (4.9) nous utilisons les mêmes techniques d'homotopie et de perturbation que celles décrites précédemment (4.6) (4.7) (4.8). Nous chercherons donc la solution $(\Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda)$ sous la forme suivante :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^p + \sum_{i=1}^{N-1} c_i \Delta \mathbf{U}_i \quad \lambda = \lambda^p + \sum_{i=1}^{N-1} c_i \Delta \lambda_i \quad (4.10)$$

Remarque 4.3.4

Dans notre étude, la tangente (\mathbf{U}', λ') à la courbe de prédiction est connue. Plus précisément, cette pente est définie à la fin du pas de prédiction par :

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}_N^p(a) - \mathbf{u}_N^p(0.95a)}{0.05a} \quad \lambda' = \frac{\lambda_N^p(a) - \lambda_N^p(0.95a)}{0.05a}$$

où \mathbf{u}_N^p désigne la solution Padé à l'ordre N ; le paramètre de développement est a .

4.4 Algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé

Les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé sont issus d'une concaténation de la représentation de la courbe présentée dans le chapitre 2 et d'un algorithme itératif défini dans la section précédente. Comme nous sommes en possession de procédures efficaces de continuation sans correction, nous laissons l'utilisateur libre d'effectuer des corrections seulement lorsque cela devient nécessaire et pas forcément à chaque pas. Dans cet esprit, nous introduisons deux nouveaux paramètres de contrôle supplémentaires. L'un, appelé δ_2 pour décider à partir de quelle valeur du résidu une correction est exigée, et un second δ_3 pour définir la valeur du résidu toléré après une phase de correction.

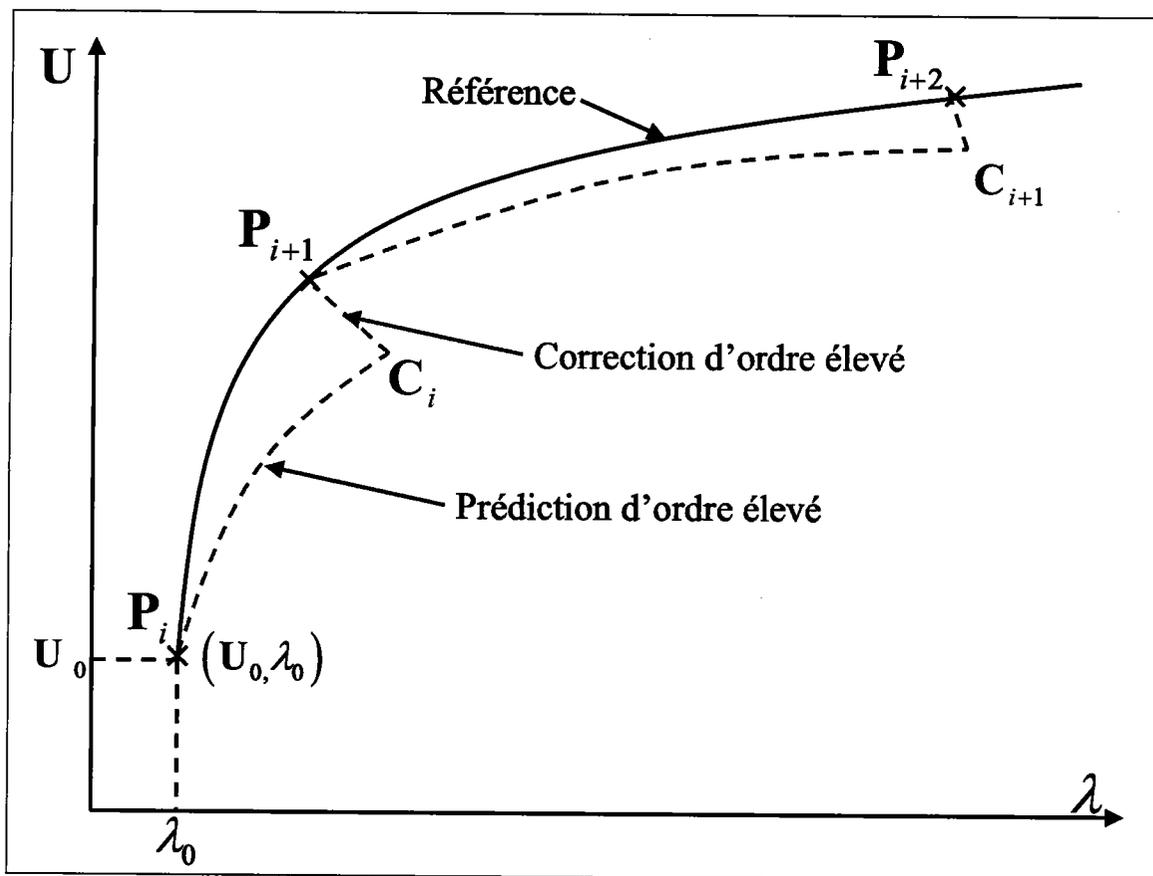


FIGURE 4.1 – Algorithme de prédiction-correction d'ordre élevé

Le schéma des algorithmes est décrit dans la figure (4.1). Le i^{eme} pas consiste en un passage du point P_i , qui représente le début de la courbe de prédiction, au point de prédiction suivant P_{i+1} , par l'intermédiaire d'un point C_i . Ce point C_i , non seulement termine la courbe de prédiction, mais encore représente le point de départ pour les itérations de correction. Un pas se divise en 3 ou 4 étapes définies comme suit :

1. Calcul de la courbe de prédiction (voir chapitre 2)

2. Définition de la fin de la courbe de prédiction C_i . Ce point dépend du paramètre δ_1 (ch2 §2.6)

3. Test de convergence :

$$\text{SI } \|\text{Résidu}(C_i)\| \leq \delta_2,$$

$$\text{ALORS } P_{i+1} = C_i \Rightarrow \text{aller en 1.}$$

$$\text{SINON } \text{Nbiter} \leftarrow \text{Nbiter} + 1 \Rightarrow \text{aller en 4.}$$

4. Calculer la correction, en résolvant le problème (4.9), jusqu'à ce que

$$\|\text{Résidu}(\mathbf{U}^p + \Delta\mathbf{U})\| \leq \delta_3$$

La nouvelle solution approchée est donnée par :

$$\mathbf{U}^{p+1} = \mathbf{U}^p + \Delta\mathbf{U}(\varepsilon = 1)$$

Les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé dépendent des paramètres suivants : les ordres de troncature des séries, les paramètres de contrôle δ_1 , δ_2 et δ_3 , le choix de la transformation d'homotopie et enfin le choix de la matrice à trianguler pour la prédiction et pour la correction. C'est sur ce dernier point que nous nous focalisons à présent. Nous définissons ainsi deux stratégies possibles pour la combinaison du prédicteur avec le correcteur d'ordre élevé :

Méthode de Newton d'ordre élevé : (Stratégie à deux matrices)

Elle consiste à associer une étape de prédiction (triangulation de $\mathbf{L}_t(P_i)$) à un algorithme de correction de Newton ou de Newton modifié d'ordre élevé (triangulation de $\mathbf{L}_t(C_i)$). Cette stratégie nécessite le traitement d'au moins deux matrices par pas en cas de correction.

Méthode de Newton modifié d'ordre élevé : (Stratégie basée sur la matrice de correction)

Mis à part le premier pas, la courbe de prédiction est obtenue en remplaçant l'opérateur tangent $\mathbf{L}_t(P_i)$ par celui de la correction précédente. La correction s'effectue par l'algorithme de Newton modifié (triangulation de $\mathbf{L}_t(C_i)$).

La méthode de Newton d'ordre élevé est la plus fiable, mais la plus coûteuse en temps de calcul de la même manière qu'un algorithme de Newton-Raphson : au moins deux triangulations de matrices sont nécessaires par pas de calcul. La méthode de Newton modifiée d'ordre élevé demande une seule triangulation de matrice par pas, mais une triangulation de matrice supplémentaire est ajoutée à la fin du calcul s'il termine par une correction. En outre d'autres triangulations

peuvent être nécessaires pour certains pas pour lesquels plusieurs itérations seraient effectuées.

Technique complémentaire pour ajuster la longueur de pas

Afin d'améliorer la convergence des algorithmes, nous procédons à une réduction systématique de la taille du pas en cas de trop grand résidu : on réduit alors la taille du pas jusqu'à ce que ce résidu devienne inférieur à 10^{-1} et la phase de correction est alors amorcée. Nous réduisons également la taille du pas en cas de pénétration.

Nous définissons dans ce qui suit les correcteurs d'ordre élevé utilisés pour résoudre les problèmes de contact.

4.5 Correcteurs d'ordre élevé pour les problèmes de contact

Nous rappelons qu'en élasticité non-linéaire, le problème de contact peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F} + \mathbf{R}^c \\ \mathbf{R}^c = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (4.11)$$

où $\mathbf{L}(\cdot)$ est un opérateur linéaire, $\mathbf{Q}(\cdot, \cdot)$ un opérateur quadratique, \mathbf{F} est le vecteur des forces extérieures, λ un paramètre de charge et \mathbf{R}^c représente la réaction de contact. Le vecteur inconnu \mathbf{U} est un vecteur mixte qui représente à la fois les déplacements \mathbf{u} et le champ des contraintes \mathbf{S} . Nous rappelons que la fonction $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{u})$ prend en compte la régularisation opérée (voir équation 2.4), ainsi que la géométrie de l'obstacle rigide.

Soit $(\mathbf{U}^0, \lambda^0, \mathbf{R}^{c(0)}, \mathbf{n}_0, h_0)$ une solution approchée du problème (4.11). La solution approchée (à l'itération p) $(\mathbf{U}^p, \lambda^p, \mathbf{R}^{c(p)}, \mathbf{n}_p, h_p)$ est obtenue de manière itérative à partir de ce point. Nous utilisons la technique de longueur d'arc décrite précédemment pour résoudre le problème à l'itération $(p + 1)$. La correction se définit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U} &= \mathbf{U}^{p+1} - \mathbf{U}^p, & \Delta \lambda &= \lambda^{p+1} - \lambda^p, \\ \Delta \mathbf{R}^c &= \mathbf{R}^{c(p+1)} - \mathbf{R}^{c(p)}, & \Delta h &= h^{p+1} - h^p, & \Delta \mathbf{n} &= \mathbf{n}^{p+1} - \mathbf{n}^p \end{aligned} \quad (4.12)$$

Cette correction doit satisfaire le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}^p + \Delta \mathbf{U}, \Delta \lambda) = \mathbf{L}_t^p(\Delta \mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\Delta \mathbf{U}, \Delta \mathbf{U}) + \mathbf{R}^p - \Delta \lambda \mathbf{F} - \Delta \mathbf{R}^c = 0 \\ \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' + \Delta \lambda \lambda' = 0 \\ \Delta \mathbf{R}^c = \Delta \hat{\mathbf{R}}(\Delta \mathbf{u}) \end{cases} \quad (4.13)$$

où $\mathbf{L}_t^p(\cdot) = \mathbf{L}(\cdot) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{U}^p, \cdot)$ et $\mathbf{R}^p = \mathbf{R}(\mathbf{U}^p, \lambda^p)$ représentent respectivement l'opérateur tangent et le vecteur résidu, définis au point $(\mathbf{U}^p, \lambda^p)$.

La technique d'homotopie décrite dans la section (4.3.1) est utilisée pour calculer la correction. Nous introduisons également un opérateur inversible arbitraire \mathbf{L}^* . Cela conduit à l'introduction du problème artificiel suivant dépendant du paramètre réel ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$):

$$\left\{ \begin{array}{l} [(1 - \varepsilon)\mathbf{L}^* + \varepsilon\mathbf{L}_t^p](\Delta\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{U}, \Delta\mathbf{U}) + \varepsilon\mathbf{R}^p - \Delta\lambda\mathbf{F} - \Delta\mathbf{R}^c = 0 \\ \Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' + \Delta\lambda\lambda' = 0 \\ \Delta\mathbf{R}^c = \Delta\hat{\mathbf{R}}(\Delta\mathbf{u}) \end{array} \right. \quad (4.14)$$

De cette manière la correction passe continûment de 0 pour $\varepsilon = 0$ à la solution du problème (4.13) pour $\varepsilon = 1$.

Comme lors de la phase de prédiction, nous utilisons une technique de perturbation pour résoudre le problème (4.14). Cela consiste à développer les inconnues du problème de contact en séries entières par rapport à ε .

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \Delta\mathbf{u}_i & \Delta\mathbf{S} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \Delta\mathbf{S}_i & \Delta\lambda &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \Delta\lambda_i \\ \Delta\mathbf{R}^c &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \Delta\mathbf{R}_i^c & \Delta\mathbf{n} &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \Delta\mathbf{n}_i & \Delta h &= \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \Delta h_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dans un premier temps, nous introduisons ces développements dans les deux premières équations du système (4.14). Par identification selon les puissances croissantes de ε , nous obtenons la série de problèmes linéaires s'écrivant à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}^*(\Delta\mathbf{U}_1) = -\mathbf{R}^p + \Delta\lambda_1\mathbf{F} + \Delta\mathbf{R}_1^c \\ \Delta\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}' + \Delta\lambda_1\lambda' = 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

et à l'ordre n ($2 \leq n \leq N$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}^*(\Delta\mathbf{U}_n) = \Delta\lambda_n\mathbf{F} + \Delta\mathbf{R}_n^c - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{U}_i, \Delta\mathbf{U}_{n-i}) - (\mathbf{L}_t^p - \mathbf{L}^*)(\Delta\mathbf{U}_{n-1}) \\ \Delta\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}' + \Delta\lambda_n\lambda' = 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Nous rappelons que l'opérateur tangent reste le même pour tous les systèmes linéaires (4.16) et (4.17). Et donc après discrétisation par éléments finis, la résolution des problèmes linéaires à

chaque ordre nécessite le traitement d'une unique matrice.

Comme l'opérateur \mathbf{L}^* est arbitraire, différents algorithmes peuvent être définis.

Si L^* est choisi égal à l'opérateur tangent \mathbf{L}_t^p , la première équation du problème à l'ordre n (4.17) s'écrit :

$$\mathbf{L}_t^p(\Delta \mathbf{U}_n) = \Delta \lambda_n \mathbf{F} + \Delta \mathbf{R}_n^c - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Q}(\Delta \mathbf{U}_i, \Delta \mathbf{U}_{n-i}) \quad (4.18)$$

Si L^* est remplacé par l'opérateur tangent \mathbf{L}_t^1 à la première itération, l'équation devient :

$$\mathbf{L}_t^1(\Delta \mathbf{U}_n) = \Delta \lambda_n \mathbf{F} + \Delta \mathbf{R}_n^c - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Q}(\Delta \mathbf{U}_i, \Delta \mathbf{U}_{n-i}) - 2\mathbf{Q}(\mathbf{U}^p - \mathbf{U}^1, \Delta \mathbf{U}_{n-1}) \quad (4.19)$$

Remarque 4.5.1

En pratique, les algorithmes issus de ces deux choix de \mathbf{L}^* ne diffèrent pas beaucoup puisque avec ces correcteurs d'ordre élevé, la convergence est généralement atteinte au bout d'une seule itération.

Après discrétisation par éléments finis (cf Annexe : B.1), l'équation (4.17) s'écrit :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}] \{\Delta \mathbf{q}_n\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\Delta \mathbf{R}_n^c\} \quad (4.20)$$

où la matrice de rigidité tangente classique $[\mathbf{K}_t^{nlg}]$ et le vecteur des seconds membres $\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\}$ dus à la non-linéarité géométrique dépendent de l'algorithme utilisé (cf Annexe : B.1). Le vecteur $\{\Delta \mathbf{q}_n\}$ désigne l'incrément des déplacements à l'ordre n et $\{\mathbf{F}\}$ est le vecteur des efforts extérieurs. Le vecteur $\{\Delta \mathbf{R}_n^c\}$ représente l'incrément des efforts de contact discrétisés et est explicité dans ce qui suit.

Nous traitons à présent par la MAN les termes dus au contact. Nous injectons donc dans la dernière équation du système (4.14) les développements en série entière (4.15). Après identification selon les puissances croissantes du paramètre de développement ε , à l'ordre n nous pouvons écrire :

$$\Delta \mathbf{R}_n^c = \Delta \hat{\mathbf{R}}_n(\Delta \mathbf{u})$$

où $\Delta \hat{\mathbf{R}}_n$ est défini en chaque nœud p par :

$$\Delta \hat{\mathbf{R}}_n(p) = \Delta R_n(p) \Gamma(p) \mathbf{n}(p) \quad (4.21)$$

Remarque 4.5.2

Cette relation (4.21) n'est valable que si la normale ne varie pas au cours du calcul. Si elle varie, $\mathbf{n}(p)$ dans l'équation (4.21) est remplacée par $\mathbf{n}^p(p)$ (c'est à dire la normale à l'itération

p), et des termes supplémentaires viennent s'ajouter (cf Annexe : B.2).

Pour calculer $\Delta R_n(p)$ en chaque nœud de contact, nous écrivons les équations issues de la méthode de perturbation appliquée à la loi de contact régularisée (2.4), soit $hR^c = \eta(\delta - h)$ et ce à l'itération $p + 1$. Nous obtenons :

à l'ordre 1 :

$$h^p \Delta R_1 = -\Delta h_1(R^{c(p)} + \eta) \quad (4.22)$$

et à l'ordre n :

$$h^p \Delta R_n = -\Delta h_n(R^{c(p)} + \eta) - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta h_i \Delta R_{n-i} \quad (4.23)$$

Nous écrivons également les relations provenant de la géométrie du problème (voir les équations (2.6) et (2.7)). Ces relations s'écrivent dans le cas d'un contact avec une surface rigide plane à l'itération $p + 1$ et à l'ordre 1 :

$$\Delta h_1 = \Delta \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \quad (4.24)$$

et à l'ordre n ($2 \leq n \leq N$) :

$$\Delta h_n = \Delta \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n} \quad (4.25)$$

Dans le cas d'un contact avec une surface rigide circulaire, les équations obtenues sont :

à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \Delta h_1 = \Delta \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}^p \\ (h^p + r)\Delta \mathbf{n}_1 = \Delta \mathbf{u}_1 - \Delta h_1 \mathbf{n}^p \end{cases} \quad (4.26)$$

et à l'ordre n :

$$\begin{cases} \Delta h_n = \Delta \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{n}^p - \frac{1}{2(h^p + r)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta h_i \Delta h_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \mathbf{u}_i \cdot \Delta \mathbf{u}_{n-i} \right) \\ (h^p + r)\Delta \mathbf{n}_n = \Delta \mathbf{u}_n - \Delta h_n \mathbf{n}^p - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta h_{n-i} \Delta \mathbf{n}_i \end{cases} \quad (4.27)$$

Nous proposons de résumer les relations (4.23), (4.25) et (4.27), par les deux relations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \Delta R_n(p) = \hat{C}(p)\Delta h_n(p) + \Delta \bar{R}_n^{nl}(p) \\ \Delta h_n(p) = \{\mathbf{n}(p)\}^t \{\Delta \mathbf{u}_n(p)\} + \Delta h_n^{nl}(p) \end{cases} \quad (4.28)$$

où les constantes $\hat{C}(p)$ et $\Delta h_n^{nl}(p)$ dépendent de la géométrie du problème et le terme $\Delta \bar{R}_n^{nl}(p)$ est issu de la régularisation adoptée pour la loi de contact. Ainsi avec la loi régularisée (2.4), les scalaires $\hat{C}(p)$ et $\Delta \bar{R}_n^{nl}(p)$ s'écrivent sous la forme :

$$\hat{C}(p) = -\frac{R^c(p) + \eta}{h^p}, \quad \Delta \bar{R}_n^{nl}(p) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta h_i \Delta R_{n-i}(p)}{h^p} \quad (4.29)$$

De même, les scalaires $\Delta h_n^{nl}(p)$ sont nuls dans le cas d'un obstacle plan. Lorsque l'obstacle est circulaire, ils sont donnés par :

$$\Delta h_n^{nl}(p) = -\frac{1}{2(h^p + r)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta h_i \Delta h_{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \mathbf{u}_i \cdot \Delta \mathbf{u}_{n-i} \right) \quad (4.30)$$

Nous réécrivons les relations (4.28) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta R_n(p) &= \{\hat{C}(p) \mathbf{n}(p)\}^t \begin{Bmatrix} \Delta u_{nx}(p) \\ \Delta u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + \Delta R_n^{nl}(p) \\ \Delta R_n^{nl}(p) &= \Delta \bar{R}_n^{nl}(p) + \hat{C}(p) \Delta h_n^{nl}(p) \end{cases} \quad (4.31)$$

Nous distinguons à partir de maintenant deux écritures du problème (4.17) : l'une avec une pénalisation et l'autre correspondant à une formulation avec multiplicateurs de Lagrange.

4.5.1 Algorithme de correction d'ordre élevé avec la méthode de pénalisation

Nous considérons l'équation (4.21) et nous y injectons la définition de $\Delta R_n(p)$ (4.31). Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \{\Delta \hat{R}_n(p)\} &= \Delta R_n(p) \Gamma(p) \mathbf{n}(p) = \begin{Bmatrix} \Gamma(p) \Delta R_n(p) n_x(p) \\ \Gamma(p) \Delta R_n(p) n_y(p) \end{Bmatrix} \\ &= [(\hat{C} \Gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(p)] \begin{Bmatrix} \Delta u_{nx}(p) \\ \Delta u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + \Gamma(p) \Delta R_n^{nl}(p) \mathbf{n}(p) \end{aligned} \quad (4.32)$$

où la matrice $[(\hat{C} \Gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(p)]$ est définie dans le chapitre 2, voir équation (2.30). Nous assemblons ensuite les incréments de déplacement à l'ordre n , sur tous les nœuds susceptibles d'entrer en contact. Nous obtenons le vecteur suivant pour les déplacements des nœuds concernés par le contact :

$$\{\Delta \mathbf{q}_n^c\} = \begin{Bmatrix} \Delta u_{nx}(p_1) \\ \Delta u_{ny}(p_1) \\ \Delta u_{nx}(p_2) \\ \vdots \\ \Delta u_{nx}(p_{Ncont}) \\ \Delta u_{ny}(p_{Ncont}) \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Le vecteur des incréments de déplacement $\{\Delta \mathbf{q}_n\}$ se décompose alors en :

$$\{\Delta \mathbf{q}_n\} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}_n^c \\ \Delta \mathbf{q}_n^{nc} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

où $\{\Delta \mathbf{q}_n^{nc}\}$ représente les déplacements des nœuds non concernés par le contact.

D'après la définition de $[\mathbf{Q}_c]$ (2.33), nous avons :

$$[\mathbf{Q}_c]\{\Delta \mathbf{q}_n\} = \{\Delta \mathbf{q}_n^c\} \quad (4.35)$$

Si les relations (4.32) sont assemblées pour tous les nœuds de contact, nous obtenons l'équation vectorielle suivante :

$$\{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^c\} = \begin{Bmatrix} \Gamma(p_1) \Delta R_n(p_1) n_x(p_1) \\ \Gamma(p_1) \Delta R_n(p_1) n_y(p_1) \\ \Gamma(p_2) \Delta R_n(p_2) n_x(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) \Delta R_n(p_{Ncont}) n_x(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) \Delta R_n(p_{Ncont}) n_y(p_{Ncont}) \end{Bmatrix} = [\hat{C} \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}]\{\Delta \mathbf{q}_n^c\} + \{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^{nl}\} \quad (4.36)$$

où $[\hat{C} \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}]$ est définie de la même manière que $[C \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}]$ dans le chapitre 2 et

$$\{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^{nl}\} = \begin{Bmatrix} \Gamma(p_1) \Delta R_n^{nl}(p_1) n_x(p_1) \\ \Gamma(p_1) \Delta R_n^{nl}(p_1) n_y(p_1) \\ \Gamma(p_2) \Delta R_n^{nl}(p_2) n_x(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) \Delta R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_x(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) \Delta R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_y(p_{Ncont}) \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Finalement, il reste à écrire l'apport des termes de contact dans l'équation d'équilibre à l'ordre n :

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^c\} = \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t [C \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}]\{\Delta \mathbf{q}_n^c\} + \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^{nl}\} \quad (4.38)$$

L'exposant 'c' dans l'écriture du vecteur $\{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}$ indique que les nœuds concernés sont ceux susceptibles d'entrer en contact. On a alors :

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}^c\} = [\mathbf{Q}_c]\{\Delta \delta \mathbf{q}\} \quad (4.39)$$

L'expression (4.38) se réécrit :

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t [\hat{C} \Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}] [\mathbf{Q}_c]}_{[\mathbf{K}_c^c]} \{\Delta \mathbf{q}_n\} + \{\Delta \delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t \{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^{nl}\}}_{\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlc}\}} \quad (4.40)$$

La matrice symétrique $[\mathbf{K}_t^c]$ désigne la matrice de rigidité de contact, et $\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlc}\}$ le vecteur des seconds membres qui ne dépendent que des termes aux ordres précédents.

Remarque 4.5.1.1

Rappelons que les expressions (4.40) de la matrice de contact $[\mathbf{K}_t^c]$ et des seconds membres $\{\mathbf{F}_n^{nlc}\}$ s'appuient sur la formule (4.21) qui suppose une normale fixée. Ces formules ne sont valables que pour le cas d'un obstacle plan. Les formules liées à l'obstacle circulaire sont dans l'annexe (B.2).

Le problème discrétisé à l'ordre n (4.20) devient :

$$[\mathbf{K}_t]\{\Delta \mathbf{q}_n\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{F}_n^{nl}\} \tag{4.41}$$

où la matrice de rigidité globale $[\mathbf{K}_t]$ ainsi que les seconds membres $\{\Delta \mathbf{F}_n^{nl}\}$ contiennent les contributions dues au contact :

$$[\mathbf{K}_t] = [\mathbf{K}_t^{nlg}] + [\mathbf{K}_t^c]$$

et $\{\Delta \mathbf{F}_n^{nl}\} = \{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\Delta \mathbf{F}_n^{nlc}\}$

Remarque 4.5.1.2

La matrice de rigidité globale $[\mathbf{K}_t]$ est exactement celle de l'itération actuelle lorsque l'on utilise l'algorithme de Newton d'ordre élevé. Si c'est l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé qui est utilisé, $[\mathbf{K}_t]$ est la matrice de la première itération.

La condition d'orthogonalité à l'ordre n (4.17) s'écrit après discrétisation sous la forme :

$$\{\Delta \mathbf{q}_n\}^t \{\mathbf{q}'\} + \Delta \lambda_n \Delta \lambda' = 0 \tag{4.42}$$

Finalement, lorsque l'on utilise la méthode de pénalisation, cela nous donne le problème à résoudre suivant :

à l'ordre 1

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t]\{\Delta \mathbf{q}_1\} = \Delta \lambda_1 \{\mathbf{F}\} - \{\mathbf{R}^p\} \\ \{\Delta \mathbf{q}_1\}^t \{\mathbf{q}'\} + \Delta \lambda_1 \lambda' = 0 \end{cases} \tag{4.43}$$

et à l'ordre n , ($2 \leq n \leq N$) :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t]\{\Delta \mathbf{q}_n\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{F}_n^{nl}\} \\ \{\Delta \mathbf{q}_n\}^t \{\mathbf{q}'\} + \Delta \lambda_n \lambda' = 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

Les termes des séries (4.15) sont obtenus par résolution des systèmes (4.43) et (4.44). La procédure de calcul se résume ainsi :

Algorithme à l'ordre 1

1. Résoudre $[\mathbf{K}_t]\{\mathbf{q}_R\} = \{-\mathbf{R}^p\}$

$$[\mathbf{K}_t]\{\mathbf{q}_F\} = \{\mathbf{F}\}$$

2. Calculer
$$\Delta\lambda_1 = \frac{-\{\mathbf{q}_R\}^t\{\mathbf{q}'\}}{\{\mathbf{q}_F\}^t\{\mathbf{q}'\} + \lambda'}$$

$$\{\Delta\mathbf{q}_1\} = \{\mathbf{q}_R\} + \Delta\lambda_1\{\mathbf{q}_F\}$$

$$\{\Delta\mathbf{S}_1\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}^p]\{\Delta\mathbf{q}_1\}$$

$$\{\Delta\mathbf{R}_1\} = [\mathbf{K}_t^c]\{\Delta\mathbf{q}_1\}$$

Algorithme à l'ordre n

1. En chaque point de Gauss calculer $\{\Delta\mathbf{S}_n^{nl}\}$

2. Assembler $\{\hat{\Delta}\mathbf{S}_n\}$ et $\{\Delta\mathbf{F}_n^{nlg}\}$

$$\{\Delta\mathbf{F}_n^{nl}\} = \{\Delta\mathbf{F}_n^{nlg}\} + [\mathbf{Q}_c]^t\{\Delta\mathbf{f}_n^{nlc}\}$$

3. Résoudre $[\mathbf{K}_t]\{\Delta\hat{\mathbf{q}}_n\} = \{\Delta\mathbf{F}_n^{nl}\}$

4. Calculer
$$\Delta\lambda_n = \frac{-\{\Delta\hat{\mathbf{q}}_n\}^t\{\mathbf{q}'\}}{\{\mathbf{q}_F\}^t\{\mathbf{q}'\} + \lambda'}$$

$$\{\Delta\mathbf{q}_n\} = \Delta\lambda_n\{\mathbf{q}_F\} + \{\Delta\hat{\mathbf{q}}_n\}$$

$$\{\Delta\mathbf{S}_n\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}^p]\{\Delta\mathbf{q}_n\} + \{\Delta\mathbf{S}_n^{nl}\}$$

$$\{\Delta\mathbf{R}_n\} = [\mathbf{K}_t^c]\{\Delta\mathbf{q}_n\} + \{\Delta\mathbf{F}_n^{nlc}\}$$

4.5.2 Algorithme de correction d'ordre élevé avec la méthode du lagrangien perturbé

Dans cette partie, nous construisons le correcteur d'ordre élevé avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous reprenons l'équation (4.21) que nous réécrivons au nœud de contact p sous la forme :

$$\Delta \hat{\mathbf{R}}_n(p) = \Delta R_n(p) \Gamma(p) \begin{Bmatrix} n_x(p) \\ n_y(p) \end{Bmatrix} = \Delta R_n(p) \{(\Gamma \mathbf{n})(p)\} \quad (4.45)$$

Après assemblage de ces N_{cont} relations nodales, nous obtenons l'expression suivante du vecteur incrément des efforts de contact :

$$\{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^c\} = \bigwedge_{p=1}^{N_{cont}} \Delta \hat{\mathbf{R}}_n(p) = [\Gamma \mathbf{N}] \underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta R_n(p_1) \\ \Delta R_n(p_2) \\ \vdots \\ \Delta R_n(p_{N_{cont}}) \end{Bmatrix}}_{\{\Delta R_n\}} \quad (4.46)$$

où \bigwedge est un opérateur d'assemblage et la matrice $[\Gamma \mathbf{N}]$ a été définie précédemment (voir chapitre 2 §2.5).

Nous écrivons le travail virtuel des efforts de contact à l'ordre n , à l'itération $p+1$ sous la forme suivante :

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^c\} = \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t [\Gamma \mathbf{N}] \{\Delta R_n\} \quad (4.47)$$

Avec la définition de l'opérateur \mathbf{Q}_c (4.39),

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t [\Gamma \mathbf{N}] \{\Delta R_n\} = \{\Delta \delta \mathbf{q}\}^t [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma \mathbf{N}] \{\Delta R_n\} \quad (4.48)$$

Et donc le problème à l'ordre n (4.20) se réécrit :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}] \{\Delta \mathbf{q}_n\} - [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma \mathbf{N}] \{\Delta R_n\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\} \quad (4.49)$$

Le multiplicateur de Lagrange $\{\Delta R_n\}$ constitue une inconnue supplémentaire du problème discrétisé à l'ordre n .

Nous reprenons à présent l'expression de $\{\Delta R_n\}$ en chaque nœud de contact p (4.31). Nous la réécrivons sous la forme suivante :

$$\hat{C}(p) \{\mathbf{n}(p)\}^t \{\Delta \mathbf{u}_n\} - \Delta R_n(p) = -\Delta R_n^{nl}(p) \quad (4.50)$$

Ce qui nous donne en multipliant par la longueur $\Gamma(p)$:

$$\hat{C}(p) \Gamma(p) \{\mathbf{n}(p)\}^t \begin{Bmatrix} \Delta u_{nx}(p) \\ \Delta u_{ny}(p) \end{Bmatrix} - \Gamma(p) \Delta R_n(p) = -\Gamma(p) \Delta R_n^{nl}(p) \quad (4.51)$$

Donc :

$$\{\Gamma(\mathbf{p})n_x(\mathbf{p}) \quad \Gamma(\mathbf{p})n_y(\mathbf{p})\} \left\{ \begin{array}{c} \Delta u_{nx}(\mathbf{p}) \\ \Delta u_{ny}(\mathbf{p}) \end{array} \right\} - \frac{1}{\hat{C}(\mathbf{p})}\Gamma(\mathbf{p})\Delta R_n(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\hat{C}(\mathbf{p})}\Gamma(\mathbf{p})R_n^{nl}(\mathbf{p}) \quad (4.52)$$

Nous réécrivons (4.52) de la manière suivante, en faisant à nouveau apparaître le vecteur $\{(\Gamma\mathbf{n})(\mathbf{p})\}$:

$$\{(\Gamma\mathbf{n})(\mathbf{p})\}^t \{\Delta \mathbf{u}_n(\mathbf{p})\} - \frac{1}{\hat{C}(\mathbf{p})}\Gamma(\mathbf{p})\Delta R_n(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\hat{C}(\mathbf{p})}\Gamma(\mathbf{p})\Delta R_n^{nl}(\mathbf{p}) \quad (4.53)$$

Après assemblage sur les N_{cont} nœuds de contact, nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$[\Gamma\mathbf{N}]^t \{\Delta \mathbf{q}_n^c\} - [\hat{\mathbf{S}}_t] \{\Delta R_n\} = -\{\Delta H_n^{nlc}\} \quad (4.54)$$

où $[\hat{\mathbf{S}}_t]$ est une matrice de souplesse et $\{\Delta H_n^{nlc}\}$ est un vecteur issu des non-linéarités de contact. Ils sont définis par :

$$[\hat{\mathbf{S}}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma(p_1)}{\hat{C}(p_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(p_2)}{\hat{C}(p_2)} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{\hat{C}(p_{N_{cont}})} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\Delta H_n^{nlc}\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Gamma(p_1)}{\hat{C}(p_1)} \Delta R_n^{nl}(p_1) \\ \frac{\Gamma(p_2)}{\hat{C}(p_2)} \Delta R_n^{nl}(p_2) \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{\hat{C}(p_{N_{cont}})} \Delta R_n^{nl}(p_{N_{cont}}) \end{array} \right\} \quad (4.55)$$

Nous réécrivons l'équation (4.54) sous la forme :

$$-[\Gamma\mathbf{N}]^t [\mathbf{Q}_c] \{\Delta \mathbf{q}_n\} + [\hat{\mathbf{S}}_t] \{\Delta R_n\} = \{\Delta H_n^{nlc}\} \quad (4.56)$$

Finalement, lorsque l'on regroupe les équations (4.49) et (4.56), le problème discrétisé à l'ordre n apparaît : il s'agit de trouver $\{\mathbf{q}_n\}$ et $\{\Delta R_n\}$ solutions du problème :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_t^{nlg}] & -[\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma\mathbf{N}] \\ -[\Gamma\mathbf{N}]^t [\mathbf{Q}_c] & [\hat{\mathbf{S}}_t] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{q}_n \\ \Delta R_n \end{array} \right\} = \Delta \lambda_n \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{F}_n^{nlg} \\ \Delta H_n^{nlc} \end{array} \right\} \quad (4.57)$$

Le problème à l'ordre n (4.57) est réécrit sous la forme plus compacte :

$$[\mathbf{K}_t^{cont}] \{\Delta \mathbf{q}_n^{cont}\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}^{cont}\} + \{\Delta \mathbf{H}_n^{cont}\} \quad (4.58)$$

Remarque 4.5.2.1

La matrice de rigidité globale $[\mathbf{K}_t^{cont}]$ est exactement celle de l'itération actuelle en cas d'utilisation de l'algorithme de Newton d'ordre élevé. Si l'algorithme de Newton modifié est utilisé, $[\mathbf{K}_t^{cont}]$ est la matrice de rigidité globale calculée à la première itération.

Lors de l'utilisation de la méthode du lagrangien perturbé, nous écrivons la condition d'orthogonalité issue de la technique de longueur d'arc (4.17) en prenant en compte les réactions de contact en plus des déplacements. Cela conduit à l'ordre n , après discrétisation par éléments finis, à la relation :

$$\{\Delta \mathbf{q}_n^{cont}\}^t \{\mathbf{q}'^{cont}\} + \Delta \lambda_n \lambda' = 0 \quad (4.59)$$

Ainsi, le problème de contact, lorsque la méthode du lagrangien perturbé est utilisée, consiste à l'ordre 1, à résoudre :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t^{cont}] \{\Delta \mathbf{q}_1^{cont}\} = \Delta \lambda_1 \{\mathbf{F}^{cont}\} \\ \{\Delta \mathbf{q}_1^{cont}\}^t \{\mathbf{q}'^{cont}\} + \Delta \lambda_1 \lambda' = 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

et à l'ordre n ($2 \leq n \leq N$), à résoudre :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t^{cont}] \{\Delta \mathbf{q}_n^{cont}\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}^{cont}\} + \{\Delta \mathbf{H}_n^{cont}\} \\ \{\Delta \mathbf{q}_n^{cont}\}^t \{\mathbf{q}'^{cont}\} + \Delta \lambda_n \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

Nous rappelons que la matrice de rigidité et $\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\}$ dépendent du choix du correcteur d'ordre élevé utilisé.

L'algorithme issu du couplage de la MAN avec la méthode du lagrangien perturbé est le suivant :

Algorithme à l'ordre 1

1. Résoudre $[\mathbf{K}_t^{cont}]\{\mathbf{q}_R^{cont}\} = \{-\mathbf{R}^{pcont}\}$
 $[\mathbf{K}_t^{cont}]\{\mathbf{q}_F^{cont}\} = \{\mathbf{F}^{cont}\}$
2. Calculer $\Delta\lambda_1 = \frac{-\{\mathbf{q}_R^{cont}\}^t\{\mathbf{q}'^{cont}\}}{\{\mathbf{q}_F^{cont}\}^t\{\mathbf{q}'^{cont}\} + \lambda'}$
 $\{\Delta\mathbf{q}_1^{cont}\} = \{\mathbf{q}_R^{cont}\} + \Delta\lambda_1\{\mathbf{q}_F^{cont}\}$
3. En déduire $\{\Delta\mathbf{q}_1\}$ et $\{\Delta R_1\}$
4. Calculer $\{\Delta\mathbf{S}_1\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}^p]\{\Delta\mathbf{q}_1\}$

Algorithme à l'ordre n

1. En chaque point de Gauss calculer $\{\Delta\mathbf{S}_n^{nl}\}$
2. Assembler $\{\Delta\hat{\mathbf{S}}_n\}$ et $\{\Delta\mathbf{F}_n^{nlg}\}$
 $\{\Delta\mathbf{H}_n^{cont}\} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{F}_n^{nlg} \\ \Delta H_n^{nlc} \end{Bmatrix}$
3. Résoudre $[\mathbf{K}_t^{cont}]\{\Delta\hat{\mathbf{q}}_n^{cont}\} = \{\Delta\mathbf{H}_n^{cont}\}$
4. Calculer $\Delta\lambda_n = \frac{-\{\Delta\hat{\mathbf{q}}_n^{cont}\}^t\{\mathbf{q}'^{cont}\}}{\{\mathbf{q}_F^{cont}\}^t\{\mathbf{q}'^{cont}\} + \lambda'}$
 $\{\Delta\mathbf{q}_n^{cont}\} = \Delta\lambda_n\{\mathbf{q}_F^{cont}\} + \{\Delta\hat{\mathbf{q}}_n^{cont}\}$
5. En déduire $\{\Delta\mathbf{q}_n\}$ et $\{\Delta R_n\}$
6. Calculer $\{\Delta\mathbf{S}_n\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}^p]\{\Delta\mathbf{q}_n\} + \{\Delta\mathbf{S}_n^{nl}\}$

Remarque 4.5.2.2

Si l'algorithme de Newton modifié est utilisé, la matrice de rigidité tangente a déjà été calculée à la première itération. Le coût de calcul pour déterminer les séries (4.15) est donc celui de

l'assemblage de quelques seconds membres et de la résolution de quelques systèmes triangulaires.

Les correcteurs d'ordre élevé présentés dans cette partie sont combinés au prédicteur d'ordre élevé défini dans le chapitre 2. Nous obtenons ainsi des algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé qui fonctionnent selon le schéma présenté dans la partie (4.4).

4.6 Bilan du chapitre et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté des algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé pour la résolution des problèmes de contact. Plusieurs tests numériques seront présentés dans ce qui suit, pour comparer l'efficacité et la fiabilité des deux stratégies de calcul choisies. Le paramètre de contrôle δ_1 est important pour la définition de ces stratégies. Pour de petites valeurs de ce paramètre, la longueur des pas est raccourcie, mais la précision de calcul est grande : cela nous permet de limiter le nombre de phases de correction. Pour de très petites valeurs de δ_1 , il n'y a donc pas besoin de corrections et on retrouve la MAN classique. Pour de grandes valeurs de δ_1 , une réduction du nombre de pas est espérée, mais en contrepartie, il faudra corriger comme lors de l'utilisation des méthodes classiques itératives d'ordre un. Le choix de l'ordre de troncature N_{corr} est également important. Il sera discuté dans la suite du travail. Il s'agira en outre de comparer le comportement des algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé lorsqu'ils sont couplés à la méthode de pénalisation ou la méthode du lagrangien perturbé.

CHAPITRE 5

Expérimentation numérique des algorithmes de prédiction-correction

Dans ce chapitre, nous mettons en œuvre sur différents tests, les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé pour les problèmes de contact, définis dans le chapitre précédent.

PLAN DU CHAPITRE 5

5.1. Introduction	101
5.2. Prédiction-correction d'ordre élevé pour les problèmes de contact	101
5.2.1. Fonctionnement des algorithmes	101
5.2.2. Analyse du temps de calcul	102
5.3. Pourquoi corriger à ordre élevé?	103
5.4. Comment réduire le nombre de matrices à traiter?	104
5.5. Comparaison entre les algorithmes avec pénalisation et avec multiplicateurs de Lagrange	106
5.6. Influence de la régularisation sur les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé	108
5.7. Bilan du chapitre et perspectives	109

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de divers tests choisis dans le but d'évaluer, d'optimiser et de comparer les algorithmes présentés dans le chapitre précédent. Les exemples choisis sont ceux du chapitre 3 (*cf* figure : 3.1) et (*cf* figure : 3.2). Nous rappelons dans un premier temps le fonctionnement des algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé. Puis nous montrons les améliorations apportées par ces algorithmes par rapport aux algorithmes itératifs classiques. Ensuite nous testons les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé lorsqu'ils sont couplés à la méthode de pénalisation et à la méthode du lagrangien perturbé. Les critères d'évaluation de ces algorithmes sont la fiabilité et l'efficacité. Enfin nous étudions l'influence du paramètre de régularisation sur le comportement des algorithmes avec pénalisation et avec multiplicateurs de Lagrange.

5.2 Prédiction-correction d'ordre élevé pour les problèmes de contact

5.2.1 Fonctionnement des algorithmes

Nous rappelons que nous utilisons deux algorithmes qui correspondent à des stratégies de prédiction-correction distinctes. Le premier est appelé algorithme de Newton d'ordre élevé : il nécessite le traitement et la décomposition de deux matrices de rigidité tangente au moins par pas : une lors de la phase de prédiction et une pour chaque itération de correction.

Le second ne nécessite le traitement que d'une seule matrice par pas : une seule matrice est traitée pour toutes les itérations et c'est cette même matrice qui est utilisée pour la prédiction du pas suivant. Cet algorithme est appelé par la suite algorithme de Newton modifié d'ordre élevé. Ces algorithmes sont couplés à une formulation du problème de contact soit par la méthode de pénalisation, soit par la méthode du lagrangien perturbé.

Lors d'un pas asymptotique, on procède d'abord au calcul de la branche de prédiction avec une représentation par approximants de Padé à l'ordre $N = N_{pred}$. La fin de la courbe de prédiction est définie à l'aide du paramètre δ_1 . Les procédures de prédiction MAN sont relativement efficaces, il n'est donc pas nécessaire de corriger à chaque pas. Une correction n'est jugée nécessaire que lorsque le résidu devient supérieur à une valeur δ_2 que nous fixons à 10^{-2} . Les corrections sont alors calculées itérativement à l'ordre $N = N_{corr}$ et elles sont arrêtées dès que le résidu devient inférieur à $\delta_3 = 10^{-4}$. Ensuite on passe au pas suivant.

Nous prenons des précautions pour tous les calculs : lorsque le résidu est supérieur à 10^{-1} la longueur du pas est réduite de 10%. Nous réduisons de la même manière la longueur des pas en cas de pénétration.

Nous dirons qu'un algorithme diverge lorsque le nombre d'itérations lors d'un pas est supérieur à 5.

5.2.2 Analyse du temps de calcul

Nous avons vu dans la partie (3.3.2), que le temps d'une itération de calcul est celui de l'évaluation et de la décomposition d'une matrice de rigidité tKt additionné à celui du calcul des seconds membres. Ce dernier est proportionnel à l'ordre de troncature choisi pour les séries (cf figure : 3.6) (§ 3.3.2). Nous avons également vu que le coût de calcul d'environ 12 seconds membres est égal à tKt , lorsqu'on utilise le maillage 3. En prenant pour référence le coût d'un calcul linéaire par une méthode directe, nous comptons 1 unité pour chaque matrice à traiter, et nous approximons le temps pour calculer N_{sm} termes de la série par cette formule :

$$t(N_{sm}) = \frac{N_{sm}}{12} \tag{5.1}$$

Et donc le coût d'une prédiction à l'ordre 15 sera égal environ à :

$$1 + \frac{15}{12} = 2.25 \tag{5.2}$$

Algorithme de Newton d'ordre élevé	Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé
$2.25 + (1 + \frac{N_{corr}}{12}) * N_{iter}$	$2.25 + \frac{(N_{iter} * N_{corr})}{12}$

TABLEAU 5.1 – Temps de calcul d'un pas avec les deux algorithmes. *Niter* : nombre total d'itérations

Il convient de distinguer les deux algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé pour définir le coût d'un pas de prédiction-correction. Nous présentons ce coût dans le tableau (5.1). Pour l'algorithme de Newton d'ordre élevé, il faut compter le temps de la phase de prédiction (5.2) plus, à chaque itération, une unité pour la matrice de rigidité et le temps de calcul des seconds membres. Dans l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé on ne compte qu'une seule unité pour la matrice de rigidité pour la prédiction et la correction. Il faut ensuite rajouter le temps de calcul des seconds membres pour la prédiction, $\frac{15}{12}$, et le temps de calcul des seconds membres pour chaque itération, donc en tout $\frac{(N_{iter} * N_{corr})}{12}$, où *Niter* désigne le nombre total d'itérations et *Ncorr* l'ordre de correction.

Notons que, en utilisant le nombre $\alpha(N)$ présenté au paragraphe § (3.3.2), les deux temps de calcul s'écrivent de façon plus générale en fonction des deux ordres de troncature *Npred* et *Ncorr* et du nombre d'itérations *Niter* :

$1 + \alpha(N_{pred}) + (1 + \alpha(N_{corr})) * N_{iter}$ pour l'algorithme de Newton d'ordre élevé, et

$1 + \alpha(N_{pred}) + \alpha(N_{corr}) * N_{iter}$ pour l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé.

Nous nous servons de ces considérations pour évaluer dans ce qui suit, l'efficacité des différents algorithmes utilisés.

5.3 Pourquoi corriger à ordre élevé?

Dans un premier temps, nous montrons l'intérêt de corriger à ordre élevé. L'exemple utilisé pour les calculs est le test 1 (cf figure : 3.1) (poutre élastique en contact avec une surface rigide plane). La formulation du contact se fait avec la méthode de pénalisation. Les calculs sont arrêtés lorsque le paramètre de charge λ est égal à 1. Nous utilisons pour les calculs l'algorithme de Newton d'ordre élevé. Nous choisissons dans un premier temps d'utiliser un ordre $N_{corr} = 1$ pour les corrections, ce qui correspond à une prédiction MAN classique avec une correction de Newton. Nous noterons 'Correcteur de Newton' cet algorithme. Puis nous effectuons les mêmes calculs avec un ordre $N_{corr} = 5$ et nous appelons cet algorithme 'Correcteur de Newton d'ordre élevé'. Pour différentes valeurs du paramètre de contrôle de longueur des pas δ_1 , nous reportons

δ_1	Correcteur de Newton ($N_{corr} = 1$)			Correcteur de Newton d'ordre élevé ($N_{corr} = 5$)		
	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>
10^{-7}	34	0	34	34	0	34
10^{-6}	28	7	35	28	2	30
10^{-5}	23	18	41	24	10	34
10^{-4}	21	27	48	22	13	35
10^{-3}	20	43	63	20	15	35
10^{-2}	20	52	72	20	18	38
10^{-1}	19	47	66	19	18	37

TABLEAU 5.2 – Correcteur de Newton : influence de l'ordre de correction pour différents δ_1 sur *NbPas* : nombre de pas, *Niter* : nombre total de corrections et *Nbmat* : nombre total de matrices à traiter.

dans le tableau (5.2), le nombre de pas, le nombre d'itérations nécessaires ainsi que le nombre total de matrices à traiter pour effectuer le calcul avec les deux algorithmes de Newton.

Nous observons d'abord que pour toutes les valeurs de δ_1 , les algorithmes convergent. Plus δ_1 est grand et plus le nombre de pas pour faire le calcul diminue. En contrepartie, il faut faire des corrections. Il n'est pas nécessaire de faire des corrections lorsque δ_1 est inférieur à 10^{-6} , on retrouve alors le schéma MAN classique. Pour de plus grandes valeurs de δ_1 , il faut corriger la solution. Comme les procédures MAN sont efficaces, il n'est pas nécessaire de corriger à chaque pas. Avec les corrections de Newton d'ordre élevé, une seule itération suffit à l'obtention d'un bon résidu. Par contre avec des corrections de Newton, il faut corriger plusieurs fois pour atteindre un résidu acceptable : par exemple pour $\delta_1 = 10^{-3}$, le nombre d'itérations ($Niter = 43$) est deux fois plus grand que le nombre de pas nécessaires au calcul $NbPas = 20$. Pour $\delta_1 = 10^{-6}$, il faut faire 28 pas pour les deux algorithmes et il faut corriger au 17^{ème} et au 22^{ème} pas. Nous présentons dans le tableau (5.3), les résidus après correction avec les deux correcteurs de Newton. Le correcteur de Newton d'ordre élevé corrige pour les deux pas une seule fois et permet d'obtenir de très bons résidus : $0.32 \cdot 10^{-6}$ au pas n°17 et $0.26 \cdot 10^{-5}$ au 22^{ème} pas. Le correcteur de Newton

N° Pas	Itération	Résidu après correction	
		Correcteur de Newton ($N_{corr} = 1$)	Correcteur de Newton d'ordre élevé ($N_{corr} = 5$)
17	1	$0.92 * 10^{-2}$	$0.32 * 10^{-6}$
	2	$0.35 * 10^{-3}$	
	3	$0.52 * 10^{-6}$	
22	1	$0.49 * 10^{-1}$	$0.26 * 10^{-5}$
	2	$0.87 * 10^{-2}$	
	3	$0.37 * 10^{-3}$	
	4	$0.71 * 10^{-6}$	

TABLEAU 5.3 – Résidu après correction avec correction de Newton et correction de Newton d'ordre élevé pour $\delta_1 = 10^{-6}$

permet une convergence moins rapide puisqu'il faut au moins 3 itérations pour obtenir des résidus comparables.

Corriger à ordre élevé permet donc de réduire de manière significative le nombre d'itérations de correction et donc le nombre de matrices à traiter. Le meilleur calcul est celui correspondant à $\delta_1 = 10^{-6}$, pour ce calcul 30 matrices doivent être traitées. D'après le paragraphe précédent (5.2.2), le temps total est celui des 28 pas à l'ordre 15 auquel s'ajoute celui des 2 itérations à l'ordre 5. D'après la règle qui a été établie, le temps est d'environ 66 unités. A titre de comparaison, le meilleur calcul obtenu avec la MAN classique coûte 34 unités pour les matrices plus 34 fois le coût des seconds membres à l'ordre 15. Donc ce calcul requiert 76.5 unités. En utilisant l'algorithme de Newton d'ordre élevé, nous gagnons donc en plus de la fiabilité, une diminution du temps de calcul. En comparaison avec Abaqus, l'algorithme MAN est plus rapide : le meilleur calcul se fait avec 128 unités. Nous rappelons que le résidu requis lors d'un calcul par Abaqus est $5 * 10^{-3}$. Donc l'algorithme de Newton d'ordre élevé est plus efficace.

Mais nous voudrions optimiser au maximum le temps de calcul. Il est donc nécessaire de traiter le moins de matrices possible. Nous utilisons dans ce qui suit l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé qui permet de traiter une seule matrice de rigidité par pas.

5.4 Comment réduire le nombre de matrices à traiter ?

Nous avons voulu en premier lieu tester l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec un ordre de correction égal à 1 : il diverge sur cet exemple. Nous rappelons qu'au delà de 5 itérations, nous interrompons le calcul. Nous avons donc appliqué uniquement l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé pour des ordres de correction supérieurs ou égal à 5 dans ce qui suit. Nous expérimentons cet algorithme (avec pénalisation) toujours sur le test 1. Dans le tableau (5.4), nous avons représenté pour différentes valeurs du paramètre δ_1 , le nombre de pas, le nombre total de corrections ainsi que le nombre total de matrices à traiter. Nous rappelons qu'à $\delta_1 = 10^{-7}$,

δ_1	<i>Ncorr</i>	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>
10^{-6}	5	28	2	28
10^{-5}		24	22	24
10^{-4}		24	28	24
10^{-3}	10	20	17	21
10^{-2}	15	22	19	23
10^{-1}		20	19	21

TABLEAU 5.4 – Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé : influence de δ_1 sur *NbPas* : nombre de pas, *Niter* : nombre total de corrections et *Nbmat* : nombre total de matrices à traiter. *Ncorr* : ordre de correction.

il n'est pas nécessaire de corriger, voir tableau (5.2). Nous rappelons que l'intérêt majeur de cet algorithme est de ne traiter qu'une seule matrice de rigidité par pas. Le nombre total de matrices à traiter *Nbmat* est donc égal à *NbPas*, et on ajoute 1 si le calcul se termine par une correction. Ainsi pour le calcul correspondant à $\delta_1 = 10^{-5}$, il faut corriger 22 fois, cela revient à calculer 22 seconds membres supplémentaires à l'ordre 5 et on ne traite que 24 matrices. Pour $\delta_1 = 10^{-4}$, certains pas ont été corrigés en deux itérations, mais comme la matrice de la première itération est réutilisée pour les itérations suivantes, il n'y a pas de matrice supplémentaire à traiter. Pour des δ_1 supérieurs à 10^{-4} , l'algorithme ne converge plus pour un ordre de correction *Ncorr* = 5. On augmente en conséquence l'ordre de correction à 10, puis à 15 pour $\delta_1 \geq 10^{-2}$.

L'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé fonctionne pour toutes les valeurs de δ_1 , avec nécessité de corriger presque à tous les pas pour $\delta_1 \geq 10^{-5}$, et d'augmenter l'ordre de correction *Ncorr* pour pouvoir faire de grands pas. Le meilleur calcul est celui correspondant à $\delta_1 = 10^{-3}$. Il faut traiter seulement 21 matrices. Pour avoir le temps de calcul, il faut rajouter le temps des seconds membres à l'ordre 15 pour la prédiction et à l'ordre 10 pour la correction. Le calcul compte donc en tout un peu plus de 53 unités. Nous avons donc réduit le temps de calcul par rapport à l'algorithme de Newton d'ordre élevé et par rapport à Abaqus.

Nous avons appliqué l'algorithme de Newton d'ordre élevé et l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé sur le second test (cf figure : 3.2). Pour différentes valeurs de δ_1 , nous avons reporté dans le tableau (5.5), le nombre de pas, d'itérations et de matrices à traiter pour faire le calcul avec un ordre de correction *Ncorr* = 5.

Pour toutes les valeurs de δ_1 , les deux algorithmes de prédiction-corrrection d'ordre élevé convergent. Pour $\delta_1 \leq 10^{-6}$, il n'est pas nécessaire de corriger ce qui correspond à la MAN classique. Puis pour de plus grandes valeurs de δ_1 , le nombre de pas diminue et le nombre de corrections augmente. Les algorithmes fonctionnent même pour de grandes valeurs de δ_1 (10^{-2} et 10^{-1}) avec des corrections à chaque pas, mais le nombre total des itérations reste faible : une seule itération suffit par pas. La MAN sans correction requiert 30 traitements de matrice ce qui correspond à 67.5 unités. L'introduction de corrections permet de réduire le nombre de pas pour de grandes

δ_1	Algorithme de Newton d'ordre élevé			Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé		
	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>
10^{-7}	37	0	37	37	0	37
10^{-6}	30	0	30	30	0	30
10^{-5}	25	11	36	27	23	28
10^{-4}	21	16	37	25	24	26
10^{-3}	19	17	36	26	26	27
10^{-2}	20	18	38	25	25	26
10^{-1}	19	18	37	23	22	24

TABLEAU 5.5 – Cas de l'obstacle circulaire : influence du paramètre δ_1 , avec $N_{pred} = 15$ et $N_{corr} = 5$. *NbPas* : nombre de pas, *Niter* : nombre total de corrections, *Nbmat* : nombre total de matrices à traiter

valeurs de δ_1 . De meilleurs résultats sont obtenus avec l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé : il faut traiter moins de 30 matrices. L'algorithme de Newton d'ordre élevé donne également des résultats satisfaisants. Comparé à l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé, la prédiction est opérée de manière exacte ce qui conduit à des longueurs de pas plus grandes et également à une réduction du nombre d'itérations. Mais le nombre de matrices à traiter n'est jamais en deçà de 30. A titre de comparaison, pour cet exemple, le calcul Abaqus coûte 71 unités, donc les algorithmes MAN sont aussi performants.

5.5 Comparaison entre les algorithmes avec pénalisation et avec multiplicateurs de Lagrange

Nous voulons comparer les algorithmes de prédiction-corrrection d'ordre élevé lorsqu'ils sont couplés à la méthode de pénalisation et la méthode du lagrangien perturbé. Nous avons donc procédé à une série de calculs sur le premier test avec l'algorithme de Newton d'ordre élevé et l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé couplés à la méthode du lagrangien perturbé. Pour différentes valeurs de δ_1 , nous donnons dans le tableau (5.6) le nombre de pas, d'itérations et de matrices à traiter. L'ordre de correction N_{corr} est le même pour les deux algorithmes et est égal à 5.

Les deux algorithmes sont robustes puisqu'ils convergent pour toutes les valeurs de δ_1 . Par rapport à l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec pénalisation où il n'y avait plus convergence avec cet ordre $N_{corr} = 5$ pour des δ_1 supérieurs à 10^{-4} , voir tableau (5.4), l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec multiplicateurs de Lagrange converge toujours avec $N_{corr} = 5$. Jusqu'à $\delta_1 = 10^{-4}$, il n'est pas nécessaire de corriger. En comparaison, avec les algorithmes avec pénalisation, il fallait corriger dès que δ_1 était égal à 10^{-6} , voir tableau (5.2). Pour de plus grandes longueurs de pas, il faut corriger mais le nombre total des itérations est

δ_1	Algorithme de Newton d'ordre élevé			Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé		
	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>
10^{-7}	37	0	37	37	0	37
10^{-6}	32	0	32	32	0	32
10^{-5}	25	0	25	25	0	25
10^{-4}	21	0	21	21	0	21
10^{-3}	20	9	29	21	9	22
10^{-2}	22	5	27	21	7	22
10^{-1}	24	11	35	24	8	25

TABLEAU 5.6 – Multiplicateurs de Lagrange, influence du paramètre δ_1 sur *NbPas*: nombre de pas, *Niter*: nombre total de corrections et *Nbmat*: nombre total de matrices à traiter ($N_{corr} = 5$).

faible comparé aux algorithmes avec pénalisation: même pour de grandes valeurs de δ_1 , on ne corrige pas à chaque pas. Pour l'algorithme de Newton d'ordre élevé, ce nombre d'itérations varie entre 5 et 11 alors que pour le même algorithme avec pénalisation, ce nombre varie entre 10 pour $\delta_1 = 10^{-5}$ et 18 pour de plus grands pas.

La différence est plus prononcée pour l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé: il faut une vingtaine d'itérations dès que $\delta_1 = 10^{-5}$ avec l'algorithme avec pénalisation alors que celui avec multiplicateurs de Lagrange compte toujours moins de 10 itérations. Ceci conduit à une réduction du nombre de matrices de rigidité à traiter et donc du temps de calcul. Le meilleur calcul correspond à celui sans correction qui coûte 47.25 unités. Rappelons que le calcul avec Abaqus exige 128 unités. L'introduction de corrections nous permettent essentiellement de fiabiliser l'algorithme 'MAN avec lagrangien perturbé': nous avons représenté dans le tableau (5.7), le

N° Pas	Résidu avant correction	Résidu après correction
1	0.0343	$2.41 \cdot 10^{-11}$
2	0.0855	$3.81 \cdot 10^{-11}$
6	0.036	$4.1 \cdot 10^{-11}$
14	0.0512	$3.47 \cdot 10^{-11}$
16	0.0166	$3.59 \cdot 10^{-11}$
18	0.0402	$3.59 \cdot 10^{-11}$
21	0.0594	$3.11 \cdot 10^{-11}$

TABLEAU 5.7 – Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé: résidu avant et après correction pour $\delta_1 = 10^{-2}$, $N_{corr} = 5$.

résidu avant et après correction lors du calcul avec l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé (avec multiplicateurs de Lagrange) correspondant à $\delta_1 = 10^{-2}$. Il est clair qu'avec un ordre de

correction relativement petit, une seule itération suffit à obtenir des résidus bien plus petits que ce qui est demandé : tous les résidus après corrections sont inférieurs à $5 * 10^{-11}$. Nous rappelons que pour ces valeurs de δ_1 et de $Ncorr$, le même algorithme avec pénalisation diverge.

5.6 Influence de la régularisation sur les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé

Le but d'introduire les multiplicateurs de Lagrange dans la formulation discrétisée du problème de contact est d'obtenir des matrices de rigidité mieux conditionnées que celles que l'on obtient par la méthode de pénalisation pour de très petites valeurs du paramètre de régularisation η . Nous voulons donc comparer le comportement des algorithmes avec pénalisation et avec multiplicateurs de Lagrange. Comme nous voulons toujours optimiser le temps de calcul, nous nous limitons à l'étude de l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé. Nous choisissons pour le test 1 de plus petites valeurs de η que celle qui était utilisée jusqu'à présent : nous rappelons que nous avons choisi $\eta = 10^{-3}$.

Tout d'abord, nous fixons η à 10^{-4} et nous faisons varier le paramètre de contrôle de la longueur des pas δ_1 . Nous avons choisi des valeurs de δ_1 entre 10^{-6} (ce qui correspond au calcul avec des corrections pour les algorithmes avec pénalisation) et 10^{-3} : nous estimons qu'il ne faut pas choisir des δ_1 plus grands que 10^{-3} car au-delà il y a, au cours du calcul, beaucoup de réductions de la longueur du pas conformément aux précautions adoptées, voir la partie (5.2.1).

δ_1	Pénalisation ($Ncorr = 10$)			Lagrangien perturbé		
	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>
10^{-6}	45	26	46	57	0	57
10^{-5}		divergence		55	0	55
10^{-4}		divergence		54	0	54
10^{-3}		divergence		49	2	50

TABLEAU 5.8 – Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec $\eta = 10^{-4}$ pour différents δ_1 . *NbPas* : nombre de pas, *Niter* : nombre total de corrections et *Nbmat* : nombre total de matrices à traiter.

Nous donnons dans le tableau (5.8), le nombre de pas, d'itérations et de matrices à traiter lorsqu'on utilise l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec la méthode de pénalisation et avec la méthode du lagrangien perturbé, lorsque η est égal à 10^{-4} . De la même manière que lorsque $\eta = 10^{-3}$, il n'est pas nécessaire de corriger quand δ_1 est inférieur ou égal à 10^{-4} avec l'algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec multiplicateurs de Lagrange. Pour l'algorithme avec pénalisation, la convergence n'est plus assurée lorsque δ_1 est supérieur ou égal à 10^{-5} . Pour faire converger l'algorithme à $\delta_1 = 10^{-6}$, il a fallu augmenter l'ordre de correction : nous avons utilisé un ordre $Ncorr = 10$. Avec les multiplicateurs de Lagrange, l'algorithme de Newton

modifié d'ordre élevé converge toujours avec $N_{corr} = 5$, et peu d'itérations : environ 4% des pas doivent être corrigés lorsque $\delta_1 = 10^{-3}$.

δ_1	Pénalisation			Lagrangien perturbé		
	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>	<i>NbPas</i>	<i>Niter</i>	<i>Nbmat</i>
10^{-6}	divergence			96	0	96
10^{-4}	divergence			90	3	91
10^{-3}	divergence			90	4	91

TABLEAU 5.9 – Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec $\eta = 10^{-5}$ pour différents δ_1 . *NbPas*: nombre de pas, *Niter*: nombre total de corrections et *Nbmat*: nombre total de matrices à traiter, $N_{corr} = 5$.

Nous avons ensuite diminué la valeur de η . Nous avons effectué le même type de tests que précédemment, mais pour $\eta = 10^{-5}$, voir le tableau (5.9).

Pour cette valeur de η , il est nécessaire de corriger dès que $\delta_1 = 10^{-4}$ avec l'algorithme avec multiplicateurs de Lagrange. Mais le nombre d'itérations est très faible : il faut corriger à moins de 5% des pas. Quant à l'algorithme avec pénalisation, il diverge même pour un ordre de correction $N_{corr} = 15$. L'algorithme avec multiplicateurs de Lagrange converge avec un ordre de correction égal à 5 et avec peu d'itérations.

Notons que choisir η égal à 10^{-4} ou 10^{-5} , constitue une régularisation très sévère (cf figure : 2.1). Il n'est donc pas étonnant que l'algorithme avec pénalisation rencontre des difficultés de convergence. Pour faire converger cet algorithme, il faut choisir des valeurs de δ_1 beaucoup plus petites, de l'ordre de 10^{-8} , ce qui revient à réduire la longueur des pas et appliquer la MAN classique sans correction.

5.7 Bilan du chapitre et perspectives

Nous avons montré dans ce chapitre que coupler un prédicteur d'ordre élevé à un correcteur d'ordre élevé permet une amélioration significative de l'efficacité et de la fiabilité de la Méthode Asymptotique Numérique classique. En comparaison avec la MAN classique, les algorithmes de prédiction-corrrection présentés sont plus robustes parce qu'ils fonctionnent pour une large plage de valeurs du paramètre de contrôle de la longueur des pas. Ils sont efficaces puisqu'ils convergent avec peu d'itérations. En comparaison avec Abaqus, le nombre d'inversions de matrice est réduit. Enfin, les algorithmes avec multiplicateurs de Lagrange sont plus fiables et plus efficaces que ceux avec pénalisation, et plus encore lorsque le paramètre de régularisation est choisi petit.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons défini de nouveaux algorithmes asymptotiques numériques pour la résolution des problèmes de contact unilatéral. Ces algorithmes sont basés sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) qui associe une méthode de perturbation à la méthode des éléments finis. Les conditions classiques de contact qui ne sont pas analytiques sont remplacées par une relation hyperbolique entre les forces et les déplacements. Le problème régularisé est alors résolu par la MAN. Les forces de contact sont considérées comme des efforts extérieurs et sont déterminées sous forme de séries entières. Pour discrétiser le problème de contact unilatéral, deux formulations ont été testées : une avec la méthode de pénalisation et condensation des forces de contact et l'autre avec une méthode mixte basée sur les multiplicateurs de Lagrange considérant les forces de contact comme des variables discrètes supplémentaires. Puis une technique de continuation basée sur une représentation de la solution par approximants de Padé est utilisée.

Les résultats des algorithmes proposés ont été comparés avec ceux du code de calcul par éléments finis Abaqus qui utilise la méthode de Newton-Raphson pour résoudre les problèmes non-linéaires et des multiplicateurs de Lagrange pour modéliser les conditions de contact. Rappelons que contrairement aux méthodes itératives classiques pour lesquelles les branches de solution ne sont obtenues que de manière discrète (point par point), les calculs asymptotiques donnent des représentations continues à chaque pas de calcul. Avec un choix judicieux du paramètre de régularisation, les algorithmes MAN donnent des courbes de réponse comparables à celles obtenues avec Abaqus. En outre, les algorithmes proposés conservent leur efficacité lorsque la taille des problèmes augmente : le raffinement du maillage n'entraîne pas d'augmentation du nombre de pas nécessaires au calcul, ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme itératif de Newton-Raphson. Ce résultat est important en vue de la simulation des procédés de mise en forme où les problèmes sont de grande taille et le raffinement de maillage est souvent nécessaire pour assurer une qualité satisfaisante de la solution.

La procédure de continuation est contrôlée par un paramètre qui fixe la longueur des pas. Pour fiabiliser les algorithmes MAN, et ne pas sous-estimer la taille des pas, nous avons dans un second temps proposé de corriger si nécessaire à ordre élevé. Nous avons donc présenté deux stratégies de prédiction-corrrection : l'une nécessitant le traitement d'au moins deux matrices par pas asymptotique, et l'autre permettant de ne traiter qu'une seule matrice de rigidité par pas.

Les correcteurs d'ordre élevé sont beaucoup plus efficaces que les correcteurs classiques de Newton (d'ordre un) puisque très peu d'itérations sont nécessaires pour l'obtention d'un bon résidu. Les algorithmes de prédiction-correction d'ordre élevé proposés permettent une amélioration significative de la fiabilité de la MAN classique. L'efficacité est aussi améliorée puisque le nombre de matrices à traiter est réduit.

Par rapport aux travaux précédents sur le contact unilatéral par la MAN [EH98] [Bru99] [Abi01], les apports spécifiques de ce mémoire sont :

- Le traitement des efforts de contact comme des efforts de pression.
- La définition et la mise en œuvre de l'algorithme MAN avec multiplicateurs de Lagrange.
- La définition et la mise en œuvre des algorithmes de prédiction-correction MAN avec pénalisation.
- La définition et la mise en œuvre des algorithmes de prédiction-correction MAN avec multiplicateurs de Lagrange.

A court terme, il serait intéressant d'introduire dans nos développements la paramétrisation de surfaces de formes arbitraires.

Les algorithmes proposés dans ce travail peuvent être étendus aux applications de mise en forme des matériaux où plusieurs non-linéarités sont combinées. Ceci à condition de maîtriser la prise en compte de la plasticité dans la MAN.

Nous ne considérons pas comme définitive la technique de régularisation proposée. D'autres travaux seraient nécessaires pour définir des algorithmes de calcul moins dépendants du choix du paramètre de régularisation.

BIBLIOGRAPHIE

- [ABH96] S. Auatt, L.M.S.A. Borges, and J. Herskovits. An Interior Point Optimization Algorithm for Contact Problems in Linear Elasticity. *Numerical Methods in Engineering*, pages 855–860, 1996.
- [Abi01] H. Abichou. Simulation de l'emboutissage à froid par une Méthode Asymptotique Numérique. Thèse de l'université de Metz, 2001.
- [ABLTV00] P. Alart, M. Barbotou, P. Le Tallec, and M. Vidrascu. Méthode de Schwarz additive pour les problèmes non symétriques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 331(1) :399–404, 2000.
- [AC88] P. Alart and A. Curnier. A generalized Newton method for contact problems with friction. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 7(1) :65–82, 1988.
- [AC91] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92 :353–375, 1991.
- [ACDPF93] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An Asymptotic Numerical Method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :1251–1277, 1993.
- [AFAP80] T. Andersson, B. Fredriksson, and B.G. Allan Persson. *The Boundary Element Method applied to two dimensional contact problems, dans New Developpements in Boundary Element Methods*, pages 247–263. C.A. Brebbia, CML Publications, 1980.
- [AG90] E.L. Allgower and K. Georg. *Numerical Continuation Method. An introduction*. Springer Berlin, Springer Series in Computational Mechanics 13, 1990.
- [AGJJ02] P. Armand, J.C Gilbert, and S. Jan-Jeguo. A BFGS-IP algorithm for solving strongly convex optimization problems with feasibility enforced by an exact penalty approach. *Math. Program.*, 92 :393–424, 2002.
- [Ala97] P. Alart. Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 76 :83–108, 1997.
- [AZPF02] H. Abichou, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical method for problems coupling several nonlinearities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :5795–5810, 2002.

- [BA03] M. Barboteu and P. Alart. Une méthode de continuation par longueur d'arc pour la résolution des problèmes de contact frottant en grandes déformations. Nice, 1-5 Septembre, 2003. Proceedings of 16^{ème} Congrès Français de Mécanique.
- [Ben88] H. Bendhia. *Modeling and solution by a penalty duality method of unilateral contact problems*, volume 2, pages 1–18. Pluralis, 1988.
- [Ben98] H. Bendhia. Problèmes mécaniques multi-échelles: la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 326(Serie II.b):899–904, 1998.
- [BGM96] G. A. Baker and P. Graves Morris. *Padé Approximants*, volume 59. Cambridge University Press, 2nd edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1996.
- [Bru99] J. Brunelot. Simulation de la mise en forme à chaud par la Méthode Asymptotique Numérique. Thèse de l'université de Metz, 1999.
- [BVI94] C. Brezinski and J. Van Iseghem. *Padé Approximants*, volume 3. Handbook of Numerical Analysis, Ciarlet P.G., Lions J.L., North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [BVZ00] H. Bendhia, I. Vautier, and M. Zarroug. Problèmes de contact frottant en grandes transformations: du continu au discret. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 9(1-2-3):243–261, 2000.
- [BZ02a] H. Bendhia and M. Zarroug. Hybrid frictional contact particles-in elements. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11(2-3-4):417–430, 2002.
- [BZ02b] H. Bendhia and M. Zarroug. Contact in the Arlequin framework. In *Calcul intensif en mécanique du contact*, LMGC, Montpellier, 8 mars 2002. Journée thématique du groupe Contact du CSMA.
- [BZPFB03] E.H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, and M. Boudi. Bifurcation Points and Bifurcated branches by an Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2003.
- [CCDPF01] J.M. Cadou, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. ANM for stationary Navier-Stokes equations and with Petrov-Galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:825–845, 2001.
- [CDPF94a] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. The asymptotic-numerical method: an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 3(2):281–297, 1994.
- [CDPF94b] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Asymptotic numerical methods and Padé approximants for non linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1187–1213, 1994.
- [CDR98] P. Chabrand, F. Dubois, and M. Raous. Various Numerical Methods for Solving Unilateral Contact Problems with Friction. *Mathematical Computer and Modelling*, 28(4-8):97–108, 1998.

- [Cha97] R. Chari. Analyse non linéaire des structures en treillis par la M.E.F. et influence de la procédure d'orthogonalisation et du produit scalaire sur les approximations de Padé. Thèse de 3^{ème} cycle, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, 1997.
- [CHK95] A. Curnier, Q.C. He, and A. Klarbring. Continuum mechanics modeling of large deformation contact with friction. *Contact Mechanics*, M.Raous, M. Jean and J.J. Moreau editors, pages 145–158, 1995.
- [Cia85] P. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, 1985.
- [CKPS98] P.W. Christensen, A. Klarbring, J.S. Pang, and N. Strömberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:145–173, 1998.
- [Coc94a] B. Cochelin. Méthode asymptotique-numérique pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques. Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, 1994.
- [Coc94b] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers and Structures*, 53(5):1181–1192, 1994.
- [Cri91] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. John Wiley and Sons, Chichester, 1991.
- [Cri97] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 2. John Wiley and Sons, Chichester, 1997.
- [CRVB02] D. Chamoret, A. Rassinoux, P. Villon, and J.M. Bergheau. Régularisation d'une surface de contact par approximation diffuse. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11:431–445, 2002.
- [CT71] S.K. Chan and I.S. Tuba. A finite element method for contact problems of solid bodies- Part I theory and validation. *International Journal of Engineering Sciences*, 13:615–625, 1971.
- [Cur84] A. Curnier. A theory of friction. *Int. J. Solids and Structures*, 20(7):637–647, 1984.
- [DCPF97] J. Descamps, H.L. Cao, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to solve large strain viscoplastic problems. *Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, 1:393–400, 1997.
- [DF91] G. DeSaxcé and Z.Q. Feng. New inequation and functional for contact with friction: the implicit standard material approach. *Mech. Struct. and Mach.*, 19(3):301–325, 1991.
- [DF98] G. DeSaxcé and Z.Q. Feng. The Bipotentiel Method: A Constructive Approach to Design the Complete contact Law with Friction and Improved Numerical Algorithms. *International Journal of Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8):225–245, 1998.
- [DGNS00] Z. Dostál, F.A.M. Gomes Neto, and S.A. Santos. Solution of contact problems

- by FETI domain decomposition with natural coarse space projections. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:1611–1627, 2000.
- [DL74] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations variationnelles en mécanique et en physique*. Springer Berlin, Springer Series in Computational Mechanics 13, 1974.
- [DPF90] N. Damil and M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Sciences*, 28(9):943–957, 1990.
- [DPFN+99] N. Damil, M. Potier-Ferry, A. Najah, R. Chari, and H. Lahmam. An iterative method based upon Padé approximants. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15:701–708, 1999.
- [Dum95] G. Dumont. Algorithmes de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 4(1):55–73, 1995.
- [DVK97] H. DeBoer and F. Van Keulen. Padé approximant applied to a nonlinear finite element solution strategy. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13:593–602, 1997.
- [EH98] A. Elhage-Hussein. Modélisation du contact sans frottement par une méthode asymptotique numérique. Thèse de l'Université de Metz, 1998.
- [EHDPF98] A. Elhage-Hussein, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical algorithm for frictionless contact problems. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 7:119–130, 1998.
- [EHDPF00] A. Elhage-Hussein, N. Damil, and M. Potier-Ferry. A numerical continuation method based on Padé approximants. *Int. J. Solids and Structures*, 37:6981–7001, 2000.
- [ET74] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [Far93] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, Boston, third edition, 1993.
- [FG92] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solutions of Boundary Value-Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [FZ75] A. Francavilla and O. C. Zienkiewicz. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:913–924, 1975.
- [Ger62] P. Germain. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1962.
- [Gre95] L. Grego. Méthodes multiniveaux pour des problèmes de contact unilatéral avec frottement. Thèse de l'Université de Provence, 1995.
- [GS02] J.J. Gervais and H. Sadiky. A New Steplength Control for Continuation with the Asymptotic Numerical Method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22(2):207–229, 2002.

- [HA96] A. Heege and P. Alart. A frictional contact element for strongly curved contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(1):165–184, 1996.
- [HGB85] J.O. Hallquist, G.L. Goudreau, and D.J. Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:107–137, 1985.
- [HKS01] Hibbitt, Karlsson, and Sorensen. *ABAQUS/CAE Theory Manual*. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc, 6.2 edition, 2001.
- [JQ89] A.R. Johnson and C.J. Quigley. Frictionless geometrically non-linear contact using quadratic programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:127–144, 1989.
- [JT88] J.W. Ju and R.L. Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of nonlinear frictional contact problems. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 7(1):1–14, 1988.
- [KB88a] A. Klarbring and G. Björkman. A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface. *Computers and Structures*, 50(3):1185–1198, 1988.
- [KB88b] A. Klarbring and G. Björkman. The treatment of problems in contact mechanics by mathematical programming. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, special issue*, 7(1):83–96, 1988.
- [Kik82] N. Kikuchi. A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:343–350, 1982.
- [Kla86] A. Klarbring. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:175–200, 1986.
- [Kla92] A. Klarbring. Mathematical programming and augmented lagrangian methods for frictional contact problems. pages 409–422, EPFL, Lausanne, Switzerland, 1992. A. Curnier, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [KM89] R. Kouhia and M. Mikkola. Tracing the equilibrium path beyond simple critical points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:2923–2941, 1989.
- [KO88] N. Kikuchi and J. T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, volume 1. SIAM Studies In Applied Mathematics, 1988.
- [KS81] N. Kikuchi and Y.J. Song. Penalty finite element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity. *Quarterly of Appl. Math.*, 39(1):1–22, 1981.

- [KVDVDBH01] G. Kloosterman, R.M. J Van Damme, A.H. Van Den Boogard, and J. Huétink. A geometrical-based contact algorithm using a barrier method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:865–882, 2001.
- [LCZ⁺02] H. Lahmam, J.M Cadou, H. Zahrouni, N. Damil, and M. Potier-Ferry. High order predictor-corrector algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55:685–704, 2002.
- [Lee94] S.S Lee. A computational method for frictional contact problem using finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:217–228, 1994.
- [MLDPF00] E. Mallil, H. Lahmam, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An iterative process based on homotopy and perturbation techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:1845–1858, 2000.
- [Mon93] P. Montmitonnet. Loi de frottement et déformation plastique. *Matériaux et Techniques*, (1-2-3):8–21, 1993.
- [MS79] H. Matthies and G. Strang. The solution of nonlinear finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14:1613–1626, 1979.
- [Naj97] A. Najah. Calcul non-linéaire des structures par des méthodes asymptotiques numériques et accélération de la convergence. Thèse de l'Université Hassan II, Faculté des sciences Ben M'sik Casablanca, Maroc, 1997.
- [NCDPF98] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. A Critical Review of Asymptotic Numerical Methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5(1):31–50, 1998.
- [NOW86] B. Noor-Omid and P. Wriggers. A note on the optimum choice for penalty parameters. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3:581–585, 1986.
- [NP98] A.K. Noor and J.M. Peters. Reduction technique for tire contact problems. *Computers and Structures*, 4(2):223–233, 1998.
- [PC99] G. Pietrzak and A. Curnier. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangian treatment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177:351–381, 1999.
- [PFDB⁺97] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Brunelot, J. M. Cadou, H.L. Cao, and A. Elhage-Hussein. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 324:171–177, 1997.
- [Pie97] G. Pietrzak. Continuum Mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems. Thèse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997.
- [PO92] D. Peric and D. R. J. Owen. Computational model for 3-D contact problems with friction based on the penalty method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:1289–1309, 1992.

-
- [PS98] P. Papadopoulos and J.M. Solberg. A Lagrange Multiplier Method for the Finite Element Solution of Frictionless Contact Problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8):373–384, 1998.
- [Rao99a] M. Raous. *Application, comparaison de méthodes et extension à un modèle adhésif/frottant*. Ecoles CEA-EDF-INRIA, Problèmes non-linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement, INRIA Rocquencourt (France), 1999.
- [Rao99b] M. Raous. *Modèles constitutifs pour le contact et le frottement*. Ecoles CEA-EDF-INRIA, Problèmes non-linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement, INRIA Rocquencourt (France), 1999.
- [Rao99c] M. Raous. *Méthodes de résolution numérique*. Ecoles CEA-EDF-INRIA, Problèmes non-linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et frottement, INRIA Rocquencourt (France), 1999.
- [RCC99] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177:383–399, 1999.
- [RCL88] M. Raous, P. Chabrand, and F. Lebon. Numerical methods for frictional contact problems and applications. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 7(1):111–128, 1988.
- [Rik84] E. Riks. Some Computational aspects of stability of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47:219–259, 1984.
- [RM96] M.H. Refaat and S.A. Meguid. A novel finite element approach to frictional contact problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 39:3889–3902, 1996.
- [SC95] J. Shi and M.A. Crisfield. Combining arc-length control and line searches in path following. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11:793–803, 1995.
- [SL92] J.C. Simo and T.A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 42(1):97–116, 1992.
- [SWT85] J.C. Simo, P. Wriggers, and R.L Taylor. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:163–180, 1985.
- [Tay98] R.L. Taylor. *FEAP A Finite Element Analysis Program*, chapter 11. University of California Berkeley, 1998.
- [VCDPF98] P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 41:1365–1389, 1998.

- [Wag91] W. Wagner. A path-following algorithm with quadratic predictor. *Computers & Structures*, 39(3-4):339–348, 1991.
- [Wem71] G.A. Wempner. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *Int. J. Solids and Structures*, 7:1581–1599, 1971.
- [WR01] P. Wriggers and A. Rieger. Adaptive Methods for frictionless Contact Problems. *Computers and Structures*, 79:2197–2208, 2001.
- [Wri95] P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of computational Methods in Engineering*, 2(4):1–49, 1995.
- [ZCPF99] H. Zahrouni, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175:71–85, 1999.
- [Zho93] Z. H. Zhong. *Finite element procedure for Contact-Impact problems*. Oxford Science publications, 1993.
- [ZN89a] Z.H. Zhong and L. Nilson. A contact searching algorithm for general 3-D contact-impact problems. *Computers and Structures*, (34):327–355, 1989.
- [ZN89b] Z.H. Zhong and L. Nilson. A contact searching algorithm for general contact problems. *Computers and Structures*, 1(33):197–209, 1989.
- [ZT91] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill Book Company, fourth edition, 1991.
- [ZWS98] G. Zavarise, P. Wriggers, and B.A. Schrefler. A method for solving contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(3):473–498, 1998.

TABLE DES FIGURES

1.1	Problème du contact	10
1.2	Distance de contact	13
1.3	Statuts de contact	14
1.4	Loi de contact unilatéral	15
2.1	Influence du paramètre de régularisation η sur la loi de contact	27
2.2	Uniformisation de la loi de contact	28
2.3	Contact avec une surface rigide plane	29
2.4	Contact avec une surface rigide circulaire	30
2.5	Définition de $\Gamma(p)$	33
3.1	Contact entre une poutre élastique et une surface rigide plane	50
3.2	Contact entre une poutre élastique et une surface rigide circulaire	51
3.3	Loi régularisée avec exponentielle	52
3.4	Loi régularisée avec table	52
3.5	Résidu à l'ordre 20: représentation de la solution par séries polynomiales ou approximants de Padé	55
3.6	Rapport entre le coût de calcul des termes des séries et le coût de calcul d'une matrice en fonction de l'ordre	56
3.7	Résidu au cours du chargement avec différents ordres	58
3.8	Evolution de la zone de contact au cours du chargement	59
3.9	Déplacement vertical du nœud A avec les différents algorithmes	60
3.10	Déplacement vertical du nœud B avec les différents algorithmes	60
3.11	Glissement du nœud B avec les différents algorithmes	61
3.12	$\ R\ $ au nœud A avec les différents algorithmes	61
3.13	$\ R\ $ au nœud B avec les différents algorithmes	62
3.14	Profil de $\ R\ $ avec les différents algorithmes $\lambda = 0.5$	62
3.15	Profil de $\ R\ $ avec les différents algorithmes $\lambda = 1$	63
3.16	Déplacement vertical du nœud A avec les différents algorithmes, surface rigide circulaire	63

3.17	Déplacement vertical du nœud B avec les différents algorithmes, surface rigide circulaire	64
3.18	Déplacement vertical du nœud B pour différentes valeurs de η	64
3.19	Réaction au nœud B pour différentes valeurs de η	65
3.20	Déplacement vertical du nœud A pour différentes valeurs de η	66
3.21	Influence du paramètre R_u sur la loi de contact, $h_u = 0.1$	67
3.22	Déplacement vertical du nœud A pour différentes valeurs de R_u , surface rigide circulaire	68
3.23	Déplacement vertical du nœud B pour différentes valeurs de R_u , surface rigide circulaire	69
3.24	Résidu au cours du chargement pour différentes valeurs de R_u , surface rigide circulaire	70
3.25	Les différents maillages utilisés	71
3.26	Déplacement vertical du nœud B pour différents maillages	72
3.27	Déplacement vertical du nœud A pour différents maillages, surface rigide circulaire	73
3.28	Résidu au cours du chargement avec $\delta_1 = 10^{-4}$	74
3.29	Déplacement vertical du nœud B avec $\delta_1 = 10^{-4}$	74
4.1	Algorithme de prédiction-correction d'ordre élevé	84

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Comparaison du nombre de pas nécessaires avec séries polynomiales ou approximants de Padé	54
3.2	Influence de l'ordre de troncature sur le temps de calcul, maillage à 4968ddl	57
3.3	Contact entre une poutre encastree et une surface rigide plane, influence du paramètre η , 26 noeuds de contact	65
3.4	Influence du paramètre η sur le nombre de pas pour 26 noeuds de contact	66
3.5	Contact entre une poutre encastree et une surface rigide plane, influence du maillage	68
3.6	Contact entre une poutre encastree et une surface rigide circulaire, influence du maillage avec la MAN	69
5.1	Temps de calcul d'un pas avec les deux algorithmes. Niter: nombre total d'iterations	102
5.2	Correcteur de Newton: influence de l'ordre de correction pour differents δ_1 sur NbPas: nombre de pas, Niter: nombre total de corrections et Nmat: nombre total de matrices à traiter.	103
5.3	Résidu après correction avec correction de Newton et correction de Newton d'ordre élevé pour $\delta_1 = 10^{-6}$	104
5.4	Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé: influence de δ_1 sur NbPas: nombre de pas, Niter: nombre total de corrections et Nmat: nombre total de matrices à traiter. Ncorr: ordre de correction.	105
5.5	Cas de l'obstacle circulaire: influence du paramètre δ_1 , avec Npred = 15 et Ncorr = 5. NbPas: nombre de pas, Niter: nombre total de corrections, Nmat: nombre total de matrices à traiter	106
5.6	Multiplicateurs de Lagrange, influence du paramètre δ_1 sur NbPas: nombre de pas, Niter: nombre total de corrections et Nmat: nombre total de matrices à traiter ($N_{corr} = 5$).	107
5.7	Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé: résidu avant et après correction pour $\delta_1 = 10^{-2}$, $N_{corr} = 5$	107

-
- 5.8 Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec $\eta = 10^{-4}$ pour différents δ_1 . *NbPas*: nombre de pas, *Niter*: nombre total de corrections et *Nbmat*: nombre total de matrices à traiter. 108
- 5.9 Algorithme de Newton modifié d'ordre élevé avec $\eta = 10^{-5}$ pour différents δ_1 . *NbPas*: nombre de pas, *Niter*: nombre total de corrections et *Nbmat*: nombre total de matrices à traiter, *Ncorr* = 5. 109

ANNEXE A

Phase de prédiction

A.1 Discrétisation en élasticité non-linéaire

La présentation de la discrétisation par éléments finis que nous adoptons se base sur celle de [ZT91]. Nous avons utilisé des éléments quadrilatéraux isoparamétriques à 4 nœuds. Le déplacement \mathbf{u} et sa contrepartie virtuelle $\delta\mathbf{u}$ sont donnés par :

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{q}\} \quad \{\delta\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\delta\mathbf{q}\} \quad (\text{A.1})$$

où $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions de forme qui interpolent les déplacements nodaux $\{\mathbf{q}\}$ et $\{\delta\mathbf{q}\}$ d'un élément.

La déformation γ s'écrit sous forme discrétisée de la manière suivante :

$$\{\gamma\} = \{\gamma^l\} + \{\gamma^{nl}\} \quad (\text{A.2})$$

où les parties linéaire $\{\gamma^l\}$ et non linéaire $\{\gamma^{nl}\}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \{\gamma^l\} &= [\mathbf{B}_l]\{\mathbf{q}\} \\ \{\gamma^{nl}\} &= \frac{1}{2}[\mathbf{A}][\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{A}]\{\theta\} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_{nl}]\{\mathbf{q}\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où $[\mathbf{A}(\mathbf{q})]$ est la matrice du gradient de déplacement, et $[\mathbf{G}]$ la matrice du gradient des fonctions de forme. $[\mathbf{B}_l]$ est la matrice classique des déformations. La partie non-linéaire $\{\gamma^{nl}\}$ peut s'écrire comme le produit de la matrice $[\mathbf{A}(\mathbf{q})]$ et du vecteur gradient de déplacement $\{\theta(\mathbf{q})\}$, ou encore comme le produit du vecteur $\{\mathbf{q}\}$ et de la matrice $[\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{q})]$ qui est linéaire en $\{\mathbf{q}\}$.

La déformation virtuelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\delta\gamma\} &= \{\delta\gamma^l\} + \{\delta\gamma^{nl}\} = [\mathbf{B}]\{\delta\mathbf{q}\} \\ &= ([\mathbf{B}_l] + [\mathbf{B}_{nl}])\{\delta\mathbf{q}\} = ([\mathbf{B}_l] + [\mathbf{A}(\mathbf{q})][\mathbf{G}])\{\delta\mathbf{q}\} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Avec ces notations (A.1), (A.2), (A.3) et (A.4), nous écrivons la contrainte à l'ordre n (2.15), sous la forme discrétisée $\{\mathbf{S}_n\}$ suivante :

$$\{\mathbf{S}_n\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}(\mathbf{q}_0)]\{\mathbf{q}_n\} + \{\mathbf{S}_n^{nl}\} \quad (\text{A.5})$$

où $[\mathbf{D}]$ est la matrice d'élasticité linéaire et $\{\mathbf{q}_n\}$ représente les déplacements à l'ordre n . $\{\mathbf{S}_n^{nl}\}$ est donné par :

$$\{\mathbf{S}_n^{nl}\} = [\mathbf{D}] \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\mathbf{q}_{n-i})] \{\theta(\mathbf{q}_i)\} \quad (\text{A.6})$$

L'équation d'équilibre (2.14) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}]\{\mathbf{q}_n\} = \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\mathbf{R}_n^c\} \quad (\text{A.7})$$

où $\{\mathbf{R}_n^c\}$ désigne la forme discrétisée des efforts de contact qui est explicitée dans le chapitre 2. $[\mathbf{K}_t^{nlg}]$ est la matrice de rigidité tangente classique évaluée au point $(\mathbf{U}_0, \lambda_0)$.

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}] = \bigwedge_{e=1}^{Nele} \int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}_0]^t [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_0] + [\mathbf{G}]^t [\hat{\mathbf{S}}_0] [\mathbf{G}]) d\Omega \quad (\text{A.8})$$

Dans l'équation (A.8), \bigwedge désigne l'opérateur d'assemblage de tous les éléments et $Nele$ le nombre total d'éléments utilisés pour la discrétisation. $[\hat{\mathbf{S}}_0]$ est une matrice symétrique qui contient les contraintes initiales \mathbf{S}_0 , et $[\mathbf{B}_0] = [\mathbf{B}(\mathbf{q}_0)]$.

Le second membre de l'équation (A.7) est la somme des forces nodales $\lambda_n \{\mathbf{F}\}$, des efforts de contact et du vecteur :

$$\{\mathbf{F}_n^{nlg}\} = - \bigwedge_{e=1}^{Nele} \int_{\Omega_e} ([\mathbf{G}]^t \{\hat{\mathbf{S}}_n\} + [\mathbf{B}_0]^t \{\mathbf{S}_n^{nl}\}) d\Omega \quad (\text{A.9})$$

$$\text{avec} \quad \{\hat{\mathbf{S}}_n\} = \sum_{i=1}^{n-1} [\mathbf{A}(\mathbf{q}_{n-i})]^t \{\mathbf{S}_i\}$$

A.2 Termes du contact dans le cas où la normale varie

Nous rappelons qu'après application de la méthode de perturbation à l'équation (2.8.3) nous obtenons :

$$\mathbf{R}_n^c = \hat{\mathbf{R}}_n(\mathbf{u})$$

Dans le cas où la normale en un point de contact p n'est pas constante au cours du chargement $\hat{\mathbf{R}}_n$ s'écrit :

$$\hat{\mathbf{R}}_n(p) = R_n^c(p)\Gamma(p)\mathbf{n}_0(p) + R_0^c(p)\Gamma(p)\mathbf{n}_n(p) + \Gamma(p) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p)\mathbf{n}_i(p) \quad (\text{A.10})$$

Nous réécrivons les équations donnant la géométrie de la surface rigide et la régularisation à l'ordre n sous la forme suivante :

$$\begin{cases} R_n^c(p) = C(p)h_n(p) + \bar{R}_n^{nl}(p) \\ h_n(p) = \mathbf{u}_n(p) \cdot \mathbf{n}_0(p) + h_n^{nl}(p) \\ \mathbf{n}_n(p) = K_n^{nl}(p)\mathbf{n}_0(p) + \mathbf{n}_n^{nl}(p) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

où $C(p)$ et $h_n^{nl}(p)$ dépendent de la géométrie de la surface rigide et le terme $\bar{R}_n^{nl}(p)$ est issu de la régularisation de la loi de contact utilisée. Ces quantités sont définies par les équations (2.27) et (2.28), voir §(2.3.3).

Par ailleurs nous avons d'après (2.25) :

$$K_n^{nl}(p) = \frac{1}{2(h_0 + r)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_{n-i}(p)h_i(p) - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{u}_{n-i}(p)\mathbf{u}_i(p) \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\text{et } \mathbf{n}_n^{nl}(p) = \frac{-1}{(h_0 + r)} \sum_{i=1}^{n-1} h_{n-i}(p)\mathbf{n}_i(p)$$

Nous réécrivons les relations (A.11) de la manière suivante :

$$\begin{cases} R_n^c(p) = \{C(p)\mathbf{n}_0(p)\}^t \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + \bar{R}_n^{nl}(p) \\ R_n^{nl}(p) = \bar{R}_n^{nl}(p) + C(p)h_n^{nl}(p) \\ \mathbf{n}_n(p) = K_n^{nl}(p)\mathbf{n}_0(p) + \mathbf{n}_n^{nl}(p) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

La relation (A.10) se réécrit donc :

$$\hat{\mathbf{R}}_n(p) = R_n^c(p)\Gamma(p) \mathbf{n}_0(p) + R_0^c(p)\Gamma(p) K_n^{nl}(p)\mathbf{n}_0(p) + R_0^c(p)\Gamma(p) \mathbf{n}_n^{nl}(p) + \Gamma(p) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p)\mathbf{n}_i(p) \quad (\text{A.14})$$

A.2.1 Contact avec une surface rigide circulaire : méthode de pénalisation

Nous rappelons à présent que (voir équation 2.30) :

$$R_n^c(p) \Gamma(p) \{\mathbf{n}_0(p)\} = [(C\Gamma \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)(p)] \begin{Bmatrix} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + \Gamma(p) R_n^{nl}(p) \mathbf{n}_0(p) \quad (\text{A.15})$$

$$\text{où } [(C\Gamma \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)(p)] = C(p)\Gamma(p) \begin{bmatrix} (n_{0x}(p))^2 & n_{0x}(p) n_{0y}(p) \\ n_{0y}(p) n_{0x}(p) & (n_{0y}(p))^2 \end{bmatrix}$$

Donc l'équation (A.14) se réécrit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_n(p) &= [(C\Gamma \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)(p)] \mathbf{u}_n(p) + \Gamma(p) R_n^{nl}(p) \mathbf{n}_0(p) \\ &+ R_0^c(p) \Gamma(p) K_n^{nl}(p) \mathbf{n}_0(p) + R_0^c(p) \Gamma(p) \mathbf{n}_n^{nl}(p) + \Gamma(p) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p) \mathbf{n}_i(p) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Nous assemblons sur tous les points de contact, les relations (A.16). Nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\{\hat{\mathbf{R}}_n\} = [C\Gamma \mathbf{N}_0 \otimes \mathbf{N}_0] \{\mathbf{q}_n^c\} + \{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} + \{\Gamma R_0^c \mathbf{K}_n^{nl}\} + \{\Gamma R_0^c \mathbf{N}^{nl}\} + \{\Gamma \mathbf{R} \mathbf{N}^{nl}\} \quad (\text{A.17})$$

où

$$[C\Gamma \mathbf{N}_0 \otimes \mathbf{N}_0] = \begin{bmatrix} [(C\Gamma \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)(p_1)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(C\Gamma \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)(p_2)] & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & [(C\Gamma \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0)(p_{Ncont})] \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(p_1) R_n^{nl}(p_1) n_{0x}(p_1) \\ \Gamma(p_1) R_n^{nl}(p_1) n_{0y}(p_1) \\ \Gamma(p_2) R_n^{nl}(p_2) n_{0x}(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_{0x}(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_{0y}(p_{Ncont}) \end{array} \right\} \quad (\text{A.19})$$

$$\{\Gamma R_0^c K_n^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{c} R_0^c(p_1)\Gamma(p_1)K_n^{nl}(p_1)n_{0x}(p_1) \\ R_0^c(p_1)\Gamma(p_1)K_n^{nl}(p_1)n_{0y}(p_1) \\ R_0^c(p_2)\Gamma(p_2)K_n^{nl}(p_2)n_{0x}(p_2) \\ \vdots \\ R_0^c(p_{Ncont})\Gamma(p_{Ncont})K_n^{nl}(p_{Ncont})n_{0x}(p_{Ncont}) \\ R_0^c(p_{Ncont})\Gamma(p_{Ncont})K_n^{nl}(p_{Ncont})n_{0y}(p_{Ncont}) \end{array} \right\} \quad (A.20)$$

$$\{\Gamma R_0^c N^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{c} R_0^c(p_1)\Gamma(p_1)n_{nx}^{nl}(p_1) \\ R_0^c(p_1)\Gamma(p_1)n_{ny}^{nl}(p_1) \\ R_0^c(p_2)\Gamma(p_2)n_{nx}^{nl}(p_2) \\ \vdots \\ R_0^c(p_{Ncont})\Gamma(p_{Ncont})n_{nx}^{nl}(p_{Ncont}) \\ R_0^c(p_{Ncont})\Gamma(p_{Ncont})n_{ny}^{nl}(p_{Ncont}) \end{array} \right\} \quad (A.21)$$

et

$$\{\Gamma R N^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{c} \Gamma(p_1) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p_1)n_{ix}(p_1) \\ \Gamma(p_1) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p_1)n_{iy}(p_1) \\ \Gamma(p_2) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p_2)n_{ix}(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p_{Ncont})n_{ix}(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p_{Ncont})n_{iy}(p_{Ncont}) \end{array} \right\} \quad (A.22)$$

Nous rappelons que d'après (A.12) dans (A.21) le terme $n_{nx}^{nl}(p_1)$ s'écrit

$$n_{nx}^{nl}(p_1) = \frac{-1}{(h_0 + r)} \sum_{i=1}^{n-1} h_{n-i}(p_1)n_{ix}(p_1) \quad (A.23)$$

Le travail virtuel des efforts de contact à l'ordre n s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{q}^c\}^t \{\hat{\mathbf{R}}_n\} &= \{\delta \mathbf{q}^c\}^t [C\Gamma \mathbf{N}_0 \otimes \mathbf{N}_0] \{\mathbf{q}_n^c\} + \{\delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} \\ &+ \{\delta \mathbf{q}^c\}^t (\{\Gamma R_0^c K_n^{nl}\} + \{\Gamma R_0^c N^{nl}\} + \{\Gamma R N^{nl}\}) \end{aligned} \quad (A.24)$$

Soit $\{\Gamma \mathbf{N}L\}$ le vecteur défini par :

$$\{\Gamma \mathbf{N}L\} = \{\Gamma R_0^c K_n^{nl}\} + \{\Gamma R_0^c N^{nl}\} + \{\Gamma R N^{nl}\} \quad (A.25)$$

Nous utilisons la matrice $[\mathbf{Q}_c]$ définie dans la partie (2.4) pour réécrire l'expression (A.24) sous la forme suivante :

$$\{\delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t [\mathbf{C} \Gamma \mathbf{N}_0 \otimes \mathbf{N}_0] [\mathbf{Q}_c]}_{[\mathbf{K}_t^c]} \{\mathbf{q}_n\} + \{\delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t (\{\Gamma \mathbf{R}_n^{nl}\} + \{\Gamma \mathbf{N} \mathbf{L}\})}_{\{\mathbf{F}_n^{nlc}\}} \quad (\text{A.26})$$

Le problème discrétisé à l'ordre n (2.16) lorsque l'on utilise la méthode de pénalisation et quand la normale n'est pas constante au cours du chargement est :

$$[\mathbf{K}_t] \{\mathbf{q}_n\} = \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_n^{nl}\} \quad (\text{A.27})$$

où la matrice de rigidité globale $[\mathbf{K}_t]$ ainsi que les seconds membres $\{\mathbf{F}_n^{nl}\}$ contiennent les contributions dues au contact :

$$[\mathbf{K}_t] = [\mathbf{K}_t^{nlg}] + [\mathbf{K}_t^c]$$

$$\text{et} \quad \{\mathbf{F}_n^{nl}\} = \{\mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\mathbf{F}_n^{nlc}\}$$

A.2.2 Contact avec une surface rigide circulaire : multiplicateurs de Lagrange

Nous reprenons l'expression de $\hat{\mathbf{R}}_n(p)$ en un point de contact p (voir équation A.14) :

$$\hat{\mathbf{R}}_n(p) = R_n^c(p)\Gamma(p) \mathbf{n}_0(p) + R_0^c(p)\Gamma(p) K_n^{nl}(p)\mathbf{n}_0(p) + R_0^c(p)\Gamma(p) \mathbf{n}_n^{nl}(p) + \Gamma(p) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p)\mathbf{n}_i(p)$$

Nous la réécrivons de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{R}}_n(p) = R_n^c(p)\{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p)\} + R_0^c(p)\Gamma(p) K_n^{nl}(p)\mathbf{n}_0(p) + R_0^c(p)\Gamma(p) \mathbf{n}_n^{nl}(p) + \Gamma(p) \sum_{i=1}^{n-1} R_{n-i}^c(p)\mathbf{n}_i(p) \quad (\text{A.28})$$

Puis nous assemblons sur tous les points de contact les relations (A.28). Avec (A.17), nous obtenons :

$$\{\hat{\mathbf{R}}_n\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p_1)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p_2)\} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p_{Ncont})\} \end{bmatrix}}_{[\Gamma\mathbf{N}_0]} \underbrace{\begin{Bmatrix} R_n^c(p_1) \\ R_n^c(p_2) \\ \vdots \\ R_n^c(p_{Ncont}) \end{Bmatrix}}_{\{R_n^c\}} \quad (\text{A.29})$$

$$+ \{\Gamma R_0^c K_n^{nl}\} + \{\Gamma R_0^c \mathbf{N}^{nl}\} + \{\Gamma \mathbf{R} \mathbf{N}^{nl}\}$$

Ce que nous réécrivons :

$$\{\hat{\mathbf{R}}_n\} = [\Gamma\mathbf{N}_0]\{R_n^c\} + \{\Gamma\mathbf{N}\mathbf{L}\} \quad (\text{A.30})$$

où le vecteur $\{\Gamma\mathbf{N}\mathbf{L}\}$ a été défini par l'équation (A.25).

Le travail virtuel des efforts de contact s'écrit à l'ordre n de la manière suivante :

$$\{\delta\mathbf{q}^c\}^t \{\hat{\mathbf{R}}_n\} = \{\delta\mathbf{q}^c\}^t [\Gamma\mathbf{N}_0] \{R_n^c\} + \{\delta\mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma\mathbf{N}\mathbf{L}\} \quad (\text{A.31})$$

Avec l'introduction de l'opérateur \mathbf{Q}_c (2.33),

$$\{\delta\mathbf{q}^c\}^t \{\hat{\mathbf{R}}_n\} = \{\delta\mathbf{q}\}^t [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma\mathbf{N}_0] \{R_n^c\} + \{\delta\mathbf{q}\}^t [\mathbf{Q}_c]^t \{\Gamma\mathbf{N}\mathbf{L}\} \quad (\text{A.32})$$

Et donc le problème à l'ordre n (2.16) se réécrit :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}]\{\mathbf{q}_n\} - [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma\mathbf{N}_0] \{R_n^c\} = \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_n^{nlg}\} + \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t \{\Gamma\mathbf{N}\mathbf{L}\}}_{\{\mathbf{F}_n^{nlc'}\}} \quad (\text{A.33})$$

Nous reprenons à présent l'expression de $\{R_n^c\}$ en chaque nœud de contact p (A.13). Nous la réécrivons sous la forme suivante :

$$C(p)\{\mathbf{n}_0(p)\}^t\{\mathbf{u}_n(p)\} - R_n^c(p) = -R_n^{nl}(p) \quad (\text{A.34})$$

Ce qui nous donne:

$$C(p)\Gamma(p)\{\mathbf{n}_0(p)\}^t \left\{ \begin{array}{c} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{array} \right\} - \Gamma(p) R_n^c(p) = -\Gamma(p) R_n^{nl}(p) \quad (\text{A.35})$$

Donc:

$$\{\Gamma(p)n_{0x}(p) \quad \Gamma(p)n_{0y}(p)\} \left\{ \begin{array}{c} u_{nx}(p) \\ u_{ny}(p) \end{array} \right\} - \frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^c(p) = -\frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^{nl}(p) \quad (\text{A.36})$$

Nous réécrivons (A.36) de la manière suivante, en faisant à nouveau apparaître le vecteur $\{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p)\}$:

$$\{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p)\}^t\{\mathbf{u}_n(p)\} - \frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^c(p) = -\frac{1}{C(p)}\Gamma(p) R_n^{nl}(p) \quad (\text{A.37})$$

Après assemblage sur les N_{cont} nœuds de contact, nous obtenons la relation matricielle suivante:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p_1)\}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p_2)\}^t & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \{(\Gamma\mathbf{n}_0)(p_{N_{cont}})\}^t \end{bmatrix}}_{[\Gamma\mathbf{N}_0]^t} \{\mathbf{q}_n^c\} - [\mathbf{S}_t]\{R_n^c\} = -\{H_n^{nlc}\} \quad (\text{A.38})$$

où $[\mathbf{S}_t]$ est une matrice de souplesse et $\{H_n^{nlc}\}$ est issu des non-linéarités de contact. Ils sont définis par:

$$[\mathbf{S}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma(p_1)}{C(p_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(p_2)}{C(p_2)} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{C(p_{N_{cont}})} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{H_n^{nlc}\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Gamma(p_1)}{C(p_1)} R_n^{nl}(p_1) \\ \frac{\Gamma(p_2)}{C(p_2)} R_n^{nl}(p_2) \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{C(p_{N_{cont}})} R_n^{nl}(p_{N_{cont}}) \end{array} \right\} \quad (\text{A.39})$$

Nous réécrivons l'équation (A.38) sous la forme :

$$-[\Gamma\mathbf{N}_0]^t[\mathbf{Q}_c]\{\mathbf{q}_n\} + [\mathbf{S}_t]\{\mathbf{R}_n^c\} = \{\mathbf{H}_n^{nlc}\} \quad (\text{A.40})$$

Finalement, lorsque l'on regroupe les équations (A.33) et (A.38), le problème discrétisé à l'ordre n apparaît : il s'agit de trouver $\{\mathbf{q}_n\}$ et $\{\mathbf{R}_n^c\}$ solutions du problème :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_t^{nlg}] & -[\mathbf{Q}_c]^t[\Gamma\mathbf{N}_0] \\ -[\Gamma\mathbf{N}_0]^t[\mathbf{Q}_c] & [\mathbf{S}_t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{R}_n^c \end{Bmatrix} = \lambda_n \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_n^{nlg} + \mathbf{F}_n^{nlc'} \\ \mathbf{H}_n^{nlc} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

ANNEXE B

Phase de correction

B.1 Discrétisation en élasticité non-linéaire

Dans cette partie, nous nous intéressons à la discrétisation du problème (4.17).

À l'itération $p+1$, nous pouvons écrire l'incrément de déplacement $\Delta \mathbf{u}$ et de déplacement virtuel $\Delta \delta \mathbf{u}$ sous la forme discrétisée suivante :

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\Delta \mathbf{q}\} \quad \{\Delta \delta \mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\Delta \delta \mathbf{q}\} \quad (\text{B.1})$$

où $[\mathbf{N}]$ est la matrice des fonctions de forme définie dans l'annexe (A.1).

L'incrément de déformation $\Delta \gamma$ s'écrit sous la forme discrétisée suivante :

$$\{\Delta \gamma\} = \{\Delta \gamma^l\} + \{\Delta \gamma^{nl}\} \quad (\text{B.2})$$

où les parties linéaire $\{\Delta \gamma^l\}$ et non linéaire $\{\Delta \gamma^{nl}\}$ sont données par :

$$\{\Delta \gamma^l\} = [\mathbf{B}_l]\{\Delta \mathbf{q}\} \quad (\text{B.3})$$

$$\{\Delta \gamma^{nl}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{A}][\mathbf{G}]\{\Delta \mathbf{q}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}_{nl}]\{\Delta \mathbf{q}\}$$

Les matrices $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{G}]$, $[\mathbf{B}_l]$ et $[\mathbf{B}_{nl}]$ ont été définies précédemment (cf Annexe : A.1).

L'incrément de déformation virtuelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\Delta \delta \gamma\} &= \{\Delta \delta \gamma^l\} + \{\Delta \delta \gamma^{nl}\} = [\mathbf{B}]\{\Delta \delta \mathbf{q}\} \\ &= ([\mathbf{B}_l] + [\mathbf{B}_{nl}])\{\Delta \delta \mathbf{q}\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Avec les notations (B.1), (B.2), (B.3) et (B.4), nous écrivons l'équation d'équilibre (4.17) sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}]\{\Delta \mathbf{q}_n\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\Delta \mathbf{R}_n^c\} \quad (\text{B.5})$$

où $\{\Delta \mathbf{R}_n^c\}$ désigne la forme discrétisée de l'incrément des efforts de contact qui est explicitée dans le chapitre (4) et $\{\Delta \mathbf{q}_n\}$ est l'incrément des déplacements à l'ordre n .

Si on utilise l'algorithme de Newton-Raphson d'ordre élevé (4.18), $[\mathbf{K}_t^{nlg}]$ est la matrice de rigidité tangente classique définie à l'itération actuelle c'est à dire évaluée au point $(\mathbf{U}^p, \lambda^p)$:

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}] = \bigwedge_{e=1}^{Nele} \int_{\Omega_e} ([\mathbf{B}^p]^t [\mathbf{D}] [\mathbf{B}^p] + [\mathbf{G}]^t [\hat{\mathbf{S}}^p] [\mathbf{G}]) d\Omega \quad (\text{B.6})$$

Dans l'équation (B.6), \bigwedge désigne l'opérateur d'assemblage de tous les éléments et $Nele$ le nombre total d'éléments utilisés pour la discrétisation. $[\mathbf{D}]$ est la matrice d'élasticité linéaire, $[\hat{\mathbf{S}}^p]$ est une matrice symétrique qui contient les contraintes à l'itération p \mathbf{S}^p , et $[\mathbf{B}^p] = [\mathbf{B}(\mathbf{q}^p)]$.

Le second membre de l'équation (B.5) est la somme des forces nodales $\Delta \lambda_n \{\mathbf{F}\}$, des efforts de

contact et du vecteur $\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\}$ qui est donné par :

$$\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\} = - \bigwedge_{e=1}^{Nele} \int_{\Omega_e} \left([\mathbf{G}]^t \{\Delta \hat{\mathbf{S}}_n\} + [\mathbf{B}^p]^t \{\Delta \mathbf{S}_n^{nl}\} \right) d\Omega \quad (\text{B.7})$$

$$\text{avec} \quad \{\Delta \mathbf{S}_n^{nl}\} = [\mathbf{D}] \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} [\mathbf{A}(\Delta \mathbf{q}_{n-i})] \{\theta(\Delta \mathbf{q}_i)\}$$

$$\text{et} \quad \{\Delta \hat{\mathbf{S}}_n\} = \sum_{i=1}^{n-1} [\mathbf{A}(\Delta \mathbf{q}_{n-i})]^t \{\Delta \mathbf{S}_i\}$$

L'incrément de contraintes à l'ordre n $\Delta \mathbf{S}_n$ s'écrit sous la forme discrétisée suivante :

$$\{\Delta \mathbf{S}_n\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}(\mathbf{q}^p)] \{\Delta \mathbf{q}_n\} + \{\Delta \mathbf{S}_n^{nl}\} \quad (\text{B.8})$$

Si c'est l'algorithme de Newton-Raphson Modifié d'ordre élevé qui est utilisé, alors $[\mathbf{K}_t^{nlg}]$ désigne la matrice de rigidité tangente calculée à la première itération et $\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\}$ s'écrit :

$$\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\} = - \bigwedge_{e=1}^{Nele} \int_{\Omega_e} \left([\mathbf{G}]^t (\{\Delta \hat{\mathbf{S}}_n\} + \{\Delta \hat{\mathbf{S}}_n^{(2)}\}) + [\mathbf{B}^p]^t (\{\Delta \mathbf{S}_n^{nl}\} + \{\Delta \mathbf{S}_n^{nl(2)}\}) \right) d\Omega$$

où $\{\Delta \hat{\mathbf{S}}_n^{(2)}\}$ et $\{\Delta \mathbf{S}_n^{nl(2)}\}$ sont des termes supplémentaires dus à l'utilisation de l'algorithme de Newton modifié.

B.2 Termes du contact dans le cas où la normale varie

Nous rappelons qu'après application de la méthode de perturbation à l'équation (4.14) nous obtenons :

$$\Delta \mathbf{R}_n^c = \Delta \hat{\mathbf{R}}_n(\mathbf{u})$$

Dans le cas où la normale en un point de contact \mathbf{p} n'est pas constante au cours du chargement $\Delta \hat{\mathbf{R}}_n$ s'écrit :

$$\Delta \hat{\mathbf{R}}_n(\mathbf{p}) = \Gamma(\mathbf{p})[\Delta R_n(\mathbf{p})\mathbf{n}^p(\mathbf{p}) + R_n^c(\mathbf{p})\Delta \mathbf{n}_n(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(\mathbf{p})\Delta \mathbf{n}_i(\mathbf{p})] \quad (\text{B.9})$$

Nous réécrivons les équations donnant la géométrie de la surface rigide et la régularisation à l'ordre n sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta R_n(\mathbf{p}) &= \hat{C}(\mathbf{p})\Delta h_n(\mathbf{p}) + \Delta \bar{R}_n^{nl}(\mathbf{p}) \\ \Delta h_n(\mathbf{p}) &= \Delta \mathbf{u}_n(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}^p(\mathbf{p}) + \Delta h_n^{nl}(\mathbf{p}) \\ \Delta \mathbf{n}_n(\mathbf{p}) &= \hat{K}_n^{nl}(\mathbf{p})\mathbf{n}^p(\mathbf{p}) + \Delta \mathbf{n}_n^{nl}(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

où $\hat{C}(\mathbf{p})$ et $\Delta h_n^{nl}(\mathbf{p})$ dépendent de la géométrie de la surface rigide et le terme $\Delta \bar{R}_n^{nl}(\mathbf{p})$ est issu de la régularisation de la loi de contact utilisée. Ces quantités sont définies par les équations (4.29) et (4.30), voir §(4.5).

Par ailleurs nous avons d'après (4.27) :

$$\hat{K}_n^{nl}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2(h^p + r)^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta h_{n-i}(\mathbf{p})\Delta h_i(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \mathbf{u}_{n-i}(\mathbf{p})\Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{p}) \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\text{et} \quad \Delta \mathbf{n}_n^{nl}(\mathbf{p}) = \frac{-1}{(h^p + r)} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta h_{n-i}(\mathbf{p})\Delta \mathbf{n}_i(\mathbf{p})$$

Nous réécrivons les relations (B.10) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta R_n(\mathbf{p}) &= \{\hat{C}(\mathbf{p})\mathbf{n}^p(\mathbf{p})\}^t \begin{Bmatrix} \Delta u_{nx}(\mathbf{p}) \\ \Delta u_{ny}(\mathbf{p}) \end{Bmatrix} + \Delta \bar{R}_n^{nl}(\mathbf{p}) \\ \Delta R_n^{nl}(\mathbf{p}) &= \Delta \bar{R}_n^{nl}(\mathbf{p}) + \hat{C}(\mathbf{p})\Delta h_n^{nl}(\mathbf{p}) \\ \Delta \mathbf{n}_n(\mathbf{p}) &= \hat{K}_n^{nl}(\mathbf{p})\mathbf{n}^p(\mathbf{p}) + \Delta \mathbf{n}_n^{nl}(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

La relation (B.9) se réécrit donc :

$$\Delta \hat{\mathbf{R}}_n(p) = \Gamma(p) [\Delta R_n(p) \mathbf{n}^p(p) + R^{c(p)}(p) \hat{K}_n^{nl}(p) \mathbf{n}^p(p) + R^{c(p)}(p) \Delta \mathbf{n}_n^{nl}(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p) \Delta \mathbf{n}_i(p)] \quad (\text{B.13})$$

B.2.1 Contact avec une surface rigide circulaire : méthode de pénalisation

Nous rappelons à présent que (voir équation 4.32) :

$$\Delta R_n(p) \Gamma(p) \{\mathbf{n}^p(p)\} = [(\hat{C}\Gamma \mathbf{n}^p \otimes \mathbf{n}^p)(p)] \begin{Bmatrix} \Delta u_{nx}(p) \\ \Delta u_{ny}(p) \end{Bmatrix} + \Gamma(p) \Delta R_n^{nl}(p) \mathbf{n}^p(p) \quad (\text{B.14})$$

$$\text{où } [(\hat{C}\Gamma \mathbf{n}^p \otimes \mathbf{n}^p)(p)] = \hat{C}(p)\Gamma(p) \begin{bmatrix} (n_x^p(p))^2 & n_x^p(p) n_y^p(p) \\ n_y^p(p) n_x^p(p) & (n_y^p(p))^2 \end{bmatrix}$$

Donc l'équation (B.13) se réécrit :

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{R}}_n(p) &= [(\hat{C}\Gamma \mathbf{n}^p \otimes \mathbf{n}^p)(p)] \Delta \mathbf{u}_n(p) + \Gamma(p) \Delta R_n^{nl}(p) \mathbf{n}^p(p) \\ &+ R^{c(p)}(p) \Gamma(p) \hat{K}_n^{nl}(p) \mathbf{n}^p(p) + R^{c(p)}(p) \Gamma(p) \Delta \mathbf{n}_n^{nl}(p) + \Gamma(p) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p) \Delta \mathbf{n}_i(p) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Nous assemblons sur tous les points de contact, les relations (B.15). Nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\{\Delta \hat{\mathbf{R}}_n\} = [\hat{C}\Gamma \mathbf{N}^p \otimes \mathbf{N}^p] \{\Delta \mathbf{q}_n^c\} + \{\Gamma \Delta R_n^{nl}\} + \{\Gamma R^{c(p)} \hat{K}_n^{nl}\} + \{\Gamma R^{c(p)} \Delta \mathbf{N}^{nl}\} + \{\Gamma \Delta R \mathbf{N}^{nl}\} \quad (\text{B.16})$$

où

$$[\hat{C}\Gamma \mathbf{N}^p \otimes \mathbf{N}^p] = \begin{bmatrix} [(\hat{C}\Gamma \mathbf{n}^p \otimes \mathbf{n}^p)(p_1)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(\hat{C}\Gamma \mathbf{n}^p \otimes \mathbf{n}^p)(p_2)] & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & [(\hat{C}\Gamma \mathbf{n}^p \otimes \mathbf{n}^p)(p_{Ncont})] \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\{\Gamma \Delta R_n^{nl}\} = \begin{Bmatrix} \Gamma(p_1) \Delta R_n^{nl}(p_1) n_x^p(p_1) \\ \Gamma(p_1) \Delta R_n^{nl}(p_1) n_y^p(p_1) \\ \Gamma(p_2) \Delta R_n^{nl}(p_2) n_x^p(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) \Delta R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_x^p(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) \Delta R_n^{nl}(p_{Ncont}) n_y^p(p_{Ncont}) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$\{\Gamma R^{c(p)} \hat{K}_n^{nl}\} = \begin{Bmatrix} R^{c(p)}(p_1) \Gamma(p_1) \hat{K}_n^{nl}(p_1) n_x^p(p_1) \\ R^{c(p)}(p_1) \Gamma(p_1) \hat{K}_n^{nl}(p_1) n_y^p(p_1) \\ R^{c(p)}(p_2) \Gamma(p_2) \hat{K}_n^{nl}(p_2) n_x^p(p_2) \\ \vdots \\ R^{c(p)}(p_{Ncont}) \Gamma(p_{Ncont}) \hat{K}_n^{nl}(p_{Ncont}) n_x^p(p_{Ncont}) \\ R^{c(p)}(p_{Ncont}) \Gamma(p_{Ncont}) \hat{K}_n^{nl}(p_{Ncont}) n_y^p(p_{Ncont}) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\{\Gamma R^{c(p)} \Delta N^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{c} R^{c(p)}(p_1) \Gamma(p_1) \Delta n_{n_x}^{nl}(p_1) \\ R^{c(p)}(p_1) \Gamma(p_1) \Delta n_{n_y}^{nl}(p_1) \\ R^{c(p)}(p_2) \Gamma(p_2) \Delta n_{n_x}^{nl}(p_2) \\ \vdots \\ R^{c(p)}(p_{Ncont}) \Gamma(p_{Ncont}) \Delta n_{n_x}^{nl}(p_{Ncont}) \\ R^{c(p)}(p_{Ncont}) \Gamma(p_{Ncont}) \Delta n_{n_y}^{nl}(p_{Ncont}) \end{array} \right\} \quad (B.20)$$

et

$$\{\Gamma \Delta R N^{nl}\} = \left\{ \begin{array}{c} \Gamma(p_1) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p_1) \Delta n_{i_x}(p_1) \\ \Gamma(p_1) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p_1) \Delta n_{i_y}(p_1) \\ \Gamma(p_2) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p_2) \Delta n_{i_x}(p_2) \\ \vdots \\ \Gamma(p_{Ncont}) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p_{Ncont}) \Delta n_{i_x}(p_{Ncont}) \\ \Gamma(p_{Ncont}) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p_{Ncont}) \Delta n_{i_y}(p_{Ncont}) \end{array} \right\} \quad (B.21)$$

Nous rappelons que d'après (B.11) dans (B.20) le terme $\Delta n_{n_x}^{nl}(p_1)$ s'écrit

$$\Delta n_{n_x}^{nl}(p_1) = \frac{-1}{(h^p + r)} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta h_{n-i}(p_1) \Delta n_{i_x}(p_1) \quad (B.22)$$

Le travail virtuel des efforts de contact à l'ordre n s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Delta \hat{\mathbf{R}}_n\} &= \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t [\hat{\mathbf{C}} \Gamma \mathbf{N}^p \otimes \mathbf{N}^p] \{\Delta \mathbf{q}_n^c\} + \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^{nl}\} \\ &+ \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t (\{\Gamma R^{c(p)} \hat{\mathbf{K}}_n^{nl}\} + \{\Gamma R^{c(p)} \Delta N^{nl}\} + \{\Gamma \Delta R N^{nl}\}) \end{aligned} \quad (B.23)$$

Soit $\{\Delta \Gamma N L\}$ le vecteur défini par :

$$\{\Delta \Gamma N L\} = \{\Gamma R^{c(p)} \hat{\mathbf{K}}_n^{nl}\} + \{\Gamma R^{c(p)} \Delta N^{nl}\} + \{\Gamma \Delta R N^{nl}\} \quad (B.24)$$

Nous utilisons la matrice $[\mathbf{Q}_c]$ définie dans la partie (2.4) pour réécrire l'expression (B.23) sous la forme suivante :

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t [\hat{\mathbf{C}} \Gamma \mathbf{N}^p \otimes \mathbf{N}^p] [\mathbf{Q}_c]}_{[\mathbf{K}_c^t]} \{\Delta \mathbf{q}_n\} + \{\Delta \delta \mathbf{q}\}^t \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t (\{\Gamma \Delta \mathbf{R}_n^{nl}\} + \{\Delta \Gamma N L\})}_{\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlc}\}} \quad (B.25)$$

Le problème discrétisé à l'ordre n (4.20) lorsque l'on utilise la méthode de pénalisation et quand la normale n'est pas constante au cours du chargement est :

$$[\mathbf{K}_t]\{\mathbf{q}_n\} = \Delta\lambda_n\{\mathbf{F}\} + \{\Delta\mathbf{F}_n^{nl}\} \quad (\text{B.26})$$

où la matrice de rigidité globale $[\mathbf{K}_t]$ ainsi que les seconds membres $\{\Delta\mathbf{F}_n^{nl}\}$ contiennent les contributions dues au contact :

$$[\mathbf{K}_t] = [\mathbf{K}_t^{nlg}] + [\mathbf{K}_t^c]$$

$$\text{et} \quad \{\Delta\mathbf{F}_n^{nl}\} = \{\Delta\mathbf{F}_n^{nlg}\} + \{\Delta\mathbf{F}_n^{nlc}\}$$

B.2.2 Contact avec une surface rigide circulaire : multiplicateurs de Lagrange

Nous reprenons l'expression de $\Delta\hat{\mathbf{R}}_n(p)$ en un point de contact p (voir équation B.13) :

$$\Delta\hat{\mathbf{R}}_n(p) = \Gamma(p)[\Delta R_n(p) \mathbf{n}^p(p) + R^{c(p)}(p) \hat{K}_n^{nl}(p) \mathbf{n}^p(p) + R^{c(p)}(p) \Delta \mathbf{n}_n^{nl}(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p) \Delta \mathbf{n}_i(p)]$$

Nous la réécrivons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\mathbf{R}}_n(p) &= \Delta R_n(p) \{\Gamma \mathbf{n}^p(p)\} + R^{c(p)}(p) \Gamma(p) \hat{K}_n^{nl}(p) \mathbf{n}^p(p) + R^{c(p)}(p) \Gamma(p) \Delta \mathbf{n}_n^{nl}(p) \\ &+ \Gamma(p) \sum_{i=1}^{n-1} \Delta R_{n-i}(p) \Delta \mathbf{n}_i(p) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Puis nous assemblons sur tous les points de contact les relations (B.27). Avec (B.16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \{\Delta\hat{\mathbf{R}}_n\} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p_1)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p_2)\} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p_{Ncont})\} \end{bmatrix}}_{[\Gamma \mathbf{N}^p]} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \Delta R_n(p_1) \\ \Delta R_n(p_2) \\ \vdots \\ \Delta R_n(p_{Ncont}) \end{array} \right\}}_{\{\Delta R_n\}} \\ &+ \{\Gamma R^{c(p)} \hat{K}_n^{nl}\} + \{\Gamma R^{c(p)} \Delta \mathbf{N}^{nl}\} + \{\Gamma \Delta \mathbf{R} \mathbf{N}^{nl}\} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Ce que nous réécrivons :

$$\{\Delta\hat{\mathbf{R}}_n\} = [\Gamma \mathbf{N}^p] \{\Delta R_n\} + \{\Delta \Gamma \mathbf{N} \mathbf{L}\} \quad (\text{B.29})$$

où le vecteur $\{\Delta \Gamma \mathbf{N} \mathbf{L}\}$ a été défini par l'équation (B.24).

Le travail virtuel des efforts de contact s'écrit à l'ordre n de la manière suivante :

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Delta\hat{\mathbf{R}}_n\} = \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t [\Gamma \mathbf{N}^p] \{\Delta R_n\} + \{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Delta \Gamma \mathbf{N} \mathbf{L}\} \quad (\text{B.30})$$

Avec la définition de l'opérateur \mathbf{Q}_c (2.33),

$$\{\Delta \delta \mathbf{q}^c\}^t \{\Delta\hat{\mathbf{R}}_n\} = \{\Delta \delta \mathbf{q}\}^t [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma \mathbf{N}^p] \{\Delta R_n\} + \{\Delta \delta \mathbf{q}\}^t [\mathbf{Q}_c]^t \{\Delta \Gamma \mathbf{N} \mathbf{L}\} \quad (\text{B.31})$$

Et donc le problème à l'ordre n (4.20) se réécrit :

$$[\mathbf{K}_t^{nlg}] \{\Delta \mathbf{q}_n\} - [\mathbf{Q}_c]^t [\Gamma \mathbf{N}^p] \{\Delta R_n\} = \Delta \lambda_n \{\mathbf{F}\} + \{\Delta \mathbf{F}_n^{nlg}\} + \underbrace{[\mathbf{Q}_c]^t \{\Delta \Gamma \mathbf{N} \mathbf{L}\}}_{\{\Delta \mathbf{F}_n^{nlc'}\}} \quad (\text{B.32})$$

Nous reprenons à présent l'expression de $\{\Delta R_n\}$ en chaque nœud de contact p (B.12). Nous la réécrivons sous la forme suivante :

$$\hat{C}(p)\{\mathbf{n}^p(p)\}^t\{\Delta \mathbf{u}_n(p)\} - \Delta R_n(p) = -\Delta R_n^{nl}(p) \quad (\text{B.33})$$

Ce qui nous donne :

$$\hat{C}(p)\Gamma(p)\{\mathbf{n}^p(p)\}^t \left\{ \begin{array}{c} \Delta u_{nx}(p) \\ \Delta u_{ny}(p) \end{array} \right\} - \Gamma(p) \Delta R_n(p) = -\Gamma(p) \Delta R_n^{nl}(p) \quad (\text{B.34})$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{cc} \Gamma(p)n_x^p(p) & \Gamma(p)n_y^p(p) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \Delta u_{nx}(p) \\ \Delta u_{ny}(p) \end{array} \right\} - \frac{1}{\hat{C}(p)}\Gamma(p) \Delta R_n(p) = -\frac{1}{\hat{C}(p)}\Gamma(p) \Delta R_n^{nl}(p) \quad (\text{B.35})$$

Nous réécrivons (B.35) de la manière suivante, en faisant à nouveau apparaître le vecteur $\{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p)\}$:

$$\{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p)\}^t\{\Delta \mathbf{u}_n(p)\} - \frac{1}{\hat{C}(p)}\Gamma(p) \Delta R_n(p) = -\frac{1}{\hat{C}(p)}\Gamma(p) \Delta R_n^{nl}(p) \quad (\text{B.36})$$

Après assemblage sur les N_{cont} nœuds de contact, nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc} \{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p_1)\}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p_2)\}^t & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \{(\Gamma \mathbf{n}^p)(p_{N_{cont}})\}^t \end{array} \right]}_{[\Gamma \mathbf{N}^p]^t} \{\Delta \mathbf{q}_n^c\} - [\mathbf{S}_t]\{\Delta R_n\} = -\{\Delta H_n^{nlc}\} \quad (\text{B.37})$$

où $[\mathbf{S}_t]$ est une matrice de souplesse et $\{\Delta H_n^{nlc}\}$ est issu des non-linéarités de contact. Ils sont définis par :

$$[\mathbf{S}_t] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\Gamma(p_1)}{\hat{C}(p_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(p_2)}{\hat{C}(p_2)} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{\hat{C}(p_{N_{cont}})} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \{\Delta H_n^{nlc}\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Gamma(p_1)}{\hat{C}(p_1)} \Delta R_n^{nl}(p_1) \\ \frac{\Gamma(p_2)}{\hat{C}(p_2)} \Delta R_n^{nl}(p_2) \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(p_{N_{cont}})}{\hat{C}(p_{N_{cont}})} \Delta R_n^{nl}(p_{N_{cont}}) \end{array} \right\} \quad (\text{B.38})$$

Nous réécrivons l'équation (B.37) sous la forme :

$$-[\Gamma\mathbf{N}^p]^t[\mathbf{Q}_c]\{\Delta\mathbf{q}_n\} + [\mathbf{S}_t]\{\Delta R_n\} = \{\Delta H_n^{nlc}\} \quad (\text{B.39})$$

Finalement, lorsque l'on regroupe les équations (B.32) et (B.37), le problème discrétisé à l'ordre n apparaît : il s'agit de trouver $\{\Delta\mathbf{q}_n\}$ et $\{\Delta R_n\}$ solutions du problème :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_t^{nlg}] & -[\mathbf{Q}_c]^t[\Gamma\mathbf{N}^p] \\ -[\Gamma\mathbf{N}^p]^t[\mathbf{Q}_c] & [\mathbf{S}_t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q}_n \\ \Delta R_n^c \end{Bmatrix} = \Delta\lambda_n \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{F}_n^{nlg} + \Delta\mathbf{F}_n^{nlc'} \\ \Delta H_n^{nlc} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

Nouveaux algorithmes asymptotiques numériques pour la résolution des problèmes de contact unilatéral

Résumé : Ce travail est une contribution au développement de méthodes numériques performantes pour les problèmes de contact unilatéral. Nous proposons de nouveaux algorithmes basés sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) pour la résolution de ce type de problèmes. La loi de contact n'étant pas analytique et non adaptée aux développements en série, nous utilisons une relation hyperbolique liant les déplacements et les forces. Les réactions de contact sont considérées comme des efforts extérieurs et sont déterminées sous forme de séries entières. Pour discrétiser le problème de contact unilatéral, deux formulations sont testées : une avec la méthode de pénalisation et l'autre avec une méthode mixte basée sur les multiplicateurs de Lagrange. Puis une technique de continuation basée sur une représentation de la solution par approximants de Padé est utilisée. Pour fiabiliser les algorithmes MAN, de nouveaux algorithmes de prédiction-corrrection d'ordre élevé sont proposés. Un prédicteur d'ordre élevé est couplé à un correcteur d'ordre élevé construit à l'aide d'une technique associant développements en série, technique d'homotopie et approximants de Padé. Ces algorithmes de prédiction-corrrection d'ordre élevé améliorent de manière significative la fiabilité et l'efficacité de la MAN classique.

Mots-clés : Contact unilatéral, développements asymptotiques, continuation, approximants de Padé, homotopie, correcteurs d'ordre élevé, prédiction-corrrection d'ordre élevé, Méthode Asymptotique Numérique, éléments finis.

New Asymptotic Numerical algorithms to solve unilateral contact problems

Abstract : This thesis is a contribution to the development of efficient numerical methods for unilateral contact problems. We propose new algorithms based upon the Asymptotic Numerical Method (ANM) to solve this kind of problems. Since the contact law is not analytic and not adapted to asymptotic expansions, we use a hyperbolic relation between forces and displacements. The contact forces are considered as external ones and determined in the form of series. So as to discretise the unilateral contact problem, we have chosen two formulations : we have first coupled the ANM with the penalty method and then we have combined the ANM with a mixed method involving Lagrange multipliers. To describe the whole solution curve, we use a path following technique which is based upon rational fractions called Padé approximants. In order to improve the reliability of the ANM algorithms, we propose to correct the solution at high order when it becomes necessary. We propose new high order prediction-correction algorithms for contact problems : a high order predictor is combined with a high order corrector which is built up using a technique which associates series expansions, a homotopy technique and Padé approximants. These new high order prediction-correction algorithms improve significantly the reliability and the efficiency of the classical ANM.

Keywords : Unilateral Contact, asymptotic expansions, path following technique, Padé approximants, homotopy, high order correctors, high order prediction-correction, Asymptotic Numerical Method, finite elements.
