



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

75 5445 12X

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	20030155
Cote	S/M7 03/05



UNIVERSITE DE METZ

THESE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**

Discipline : Mécanique

Présentée Par :

**Hamidreza ADIB RAMEZANI**

Titre :

**Evaluation de la Durée de Vie en Fatigue  
par la Méthode Volumétrique pour des  
Joints Soudés par Point**

Soutenue publiquement le 23 Septembre 2003 devant la commission d'examen

**H. P. LIEURADE  
M. NAIT-ABDELAZIZ  
G. PLUVINAGE  
Z. AZARI  
J. GILGERT  
J. Y. BARTHELEMY**

*CETIM (Senlis)  
Professeur à l'Université de Lille  
Professeur à l'Université de Metz  
Professeur à l'Université d'Amiens  
M. C. à l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Metz  
Ingénieur de Recherche, Institut de Soudure*

*Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Invité*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 486038 9



**UNIVERSITE DE METZ**

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**

Discipline : Mécanique

Présentée Par :

**Hamidreza ADIB RAMEZANI**

Titre :

**Evaluation de la Durée de Vie en Fatigue  
par la Méthode Volumétrique pour des  
Joints Soudés par Point**

Soutenue publiquement le 23 Septembre 2003 devant la commission d'examen

**H. P. LIEURADE  
M. NAIT-ABDELAZIZ  
G. PLUVINAGE  
Z. AZARI  
J. GILGERT  
J. Y. BARTHELEMY**

*CETIM (Senlis)  
Professeur à l'Université de Lille  
Professeur à l'Université de Metz  
Professeur à l'Université d'Amiens  
M. C. à l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Metz  
Ingénieur de Recherche, Institut de Soudure*

*Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Invité*

# Résumé

Les joints soudés par point, utilisés dans l'industrie automobile et notamment en carrosserie sont généralement soumis à des chargements cycliques. La caractéristique du chargement appliqué sur les joints soudés par point conditionne le choix de l'analyse.

Dans les deux cas de chargement cyclique très élevé (fatigue oligocyclique) et moyen (endurance limitée), l'amorçage de la fissure se situe respectivement dans le métal de base et dans la zone affectée thermiquement.

Les joints soudés par point en cisaillement avec un, trois et cinq points de soudure sont choisis pour obtenir la durée de vie en fatigue basée sur l'approche volumétrique dans les cas de fatigue oligocyclique et fatigue à endurance limitée. La distance effective, la contrainte effective et le facteur de réduction en fatigue sont calculés par l'approche volumétrique en utilisant la méthode des Eléments Finis avec des modèles tridimensionnels.

La technique de sous-modélage est appliquée pour obtenir le champ des contraintes et le gradient des contraintes au voisinage du point soudé. Les résultats obtenus à partir de l'approche volumétrique s'avèrent en très bon accord avec ceux obtenus expérimentalement sur des éprouvettes soudées dans le cas de fatigue à endurance limitée et restent satisfaisant dans le cas de fatigue oligocyclique.

# Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz UFR-MIM sous la direction de Monsieur G. PLUVINAGE, directeur du Laboratoire que je tiens à remercier pour son soutien et pour son implication dans la direction scientifique de mes recherches.

Mes remerciements s'adressent :

Messieurs Z. AZARI de l'Université d'Amiens président du jury et J. GILGERT de l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Metz membre du jury.

Messieurs H-P LIEURADE du Centre Technique des Ingénieurs Mécaniques et M. NAIT-ABDELAZIZ de l'Université de Lille, rapporteurs de cette thèse, pour la pertinence de leurs conseils.

Monsieur Jean-Yves BARTHELEMY d'Institut de Soudure, membre invité du jury.

Mademoiselle Jena JEONG, ma collègue pour ses remarques constructives et sa grande disponibilité.

Je ne saurai oublier Monsieur P. JODIN et tous les membres du Laboratoire de Fiabilité Mécanique pour leur disponibilité et leurs remarques constructives.

**A ma mère**

# TABLE DES MATIERES

	Page
<b>1 Introduction générale : .....</b>	<b>1</b>
1.0 Evaluation de la durée de vie en fatigue des joints soudés par point.....	2
<b>2 Méthode de prédiction de la durée de vie en fatigue en présence de concentration de contraintes.....</b>	<b>5</b>
2.0 Introduction générale.....	6
2.1 Distribution des contraintes en fond d'entaille.....	8
2.2.1 Distribution des contraintes dans le cas élastique.....	14
2.2.2 Distribution des contraintes en fond d'entaille dans le cas élasto-plastique.....	22
2.2.3 Méthode des Elément Finis dans la cas élasto-plastique.....	28
2.3 Concept de facteur de concentration des contraintes.....	45
2.4 Facteur de réduction en fatigue.....	53
2.5 Les méthodes d'estimation de la durée de vie en fatigue.....	62
2.5.1 La méthode de l'Eurocode 3 pour les joints soudés.....	64
2.5.2 Méthode de déformation locale.....	78
2.6 Résumé.....	86
<b>3 Méthode volumétrique pour la prévision de la durée de vie de structures entaillées.....</b>	<b>87</b>
3.0 Introduction générale .....	88
3.1 L'approche volumétrique.....	94
3.2 Procédure de prévision de la durée de vie en fatigue par la méthode volumétrique.....	99
3.3 Résumé.....	105

<b>4</b>	<b>Bibliographie sur la fatigue des joints soudés par point.....</b>	<b>106</b>
4.0	Introduction générale.....	107
4.1	Loi de propagation de fissure en fatigue.....	110
4.2	Structure des joints soudés par point.....	112
4.3	Facteur d'intensité de contraintes pour les joints soudés par point.....	123
4.4	Tenue à l'endurance en fatigue des points soudés.....	132
4.5	Résumé.....	135
<b>5</b>	<b>Etude expérimentale des joints soudés par point.....</b>	<b>137</b>
5.0	Matériau.....	138
5.1	Composition chimique et comportement mécanique du matériau des joints soudés par point.....	140
5.2	Géométrie des joints soudés par point.....	142
5.3	Procédure des opération de soudage par point.....	145
5.4	Présentation des essais fatigues.....	152
5.5	Résultats expérimentaux des joints soudés par point en cisaillement.....	157
5.6	Résumé.....	160
<b>6</b>	<b>Modélisation élastique et elasto-plastique des joints soudés par point.....</b>	<b>162</b>
6.0	Introduction.....	163
6.1	Modélisation des joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points.....	166
6.1.1	Modélisation des joints soudés par point Mono Point.....	168
6.1.2	Modélisation des joints soudés par point Triple Points.....	175
6.1.3	Modélisation des joints soudés par point Multiple Points.....	182
6.2	Prévision de la vie en fatigue des joints soudés par point par l'approche volumétrique.....	188

6.3	Discussion.....	193
7	<b>Conclusion générale.....</b>	<b>197</b>
Référence	.....	200

	Page	
1	Figure 1-1. Type de sollicitation des joints soudés par point a) cisaillement b) tension bi-axiale c) pelage.	3
2	Figure 2-1 Illustration de la concentration de contraintes au bord d'un trou dans une plaque.	8
3	Figure 2-2 Distribution de la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta}(r, \theta = \pi/2)$ autour d'un trou dans une grande tôle a) Chargement vertical en traction b) Chargement vertical en compression.	11
4	Figure 2-3 Distribution de contraintes autour d'un trou circulaire dans une grande tôle par la méthode des Eléments Finis (Figure 2-2a) a) Composante x de contrainte b) Composante y de contrainte.	12
5	Figure 2-4 Distribution de contraintes autour d'un trou elliptique dans une grande tôle obtenue par la méthode des Eléments Finis (Figure 2-2b) a) Composante x de contraintes b) Composante y de contraintes.	11
6	Figure 2-5 Schéma d'une entaille et coordonnées polaires correspondantes.	14
7	Figure 2-6 Schéma d'une entaille émoussée dans une plaque soumise à une traction perpendiculaire au plan d'entaille.	16
8	Figure 2-7 Conditions aux limites, configuration des maillages et distribution des contraintes pour le modèle sélectionné dans la Figure 2-6, y compris $l/\rho = 100$ .	18
9	Figure 2-8 Comparaison avec la méthode des Eléments Finis, des solutions de Neuber, Glinka, Kujawski, Chen et Paris-Creager pour différentes valeurs du rapport $l/\rho$ ( $l = 2a$ ).	19
10	Figure 2-9 Evolution des contraintes élasto-plastiques sur le ligament d'une éprouvette soumise à une flexion selon Wilshaw [23].	23
11	Figure 2-10 Evolution des contraintes élasto-plastiques sur le ligament d'une éprouvette soumise à une flexion selon Bhattacharya [21].	25
12	Figure 2-11 Evolution des contraintes élasto-plastiques le long du ligament d'une éprouvette soumise à une flexion pour le problème d'une zone plastifiée de petite taille selon Bhattacharya [21].	26
13	Figure 2-12 Schéma d'une entaille courte et contrainte en traction globale appliquée $\sigma_g$ .	26
14	Figure 2-13 Composants du tenseur des contraintes.	28
15	Figure 2-14 Différents comportements qui s'appliquent généralement dans les calculs par Eléments Finis a) bilinéaire cinématique b) multilinéaire cinématique c) bilinéaire isotrope d) multilinéaire isotrope e) anisotrope f) Type Drucker.	33
16	Figure 2-15 Présentation du comportement a) cinématique b) anisotrope c) Type Drucker dans les cas bi-dimensionnel et tri-dimensionnel.	34
17	Figure 2-16 Comportement isotrope et cinématique tel qu'il existe dans des matériaux non-linéaires élasto-plastiques.	35
18	Figure 2-17 Algorithme itératif pour les cas non-linéaires et élasto-plastiques	35
19	Figure 2-18 Algorithme itératif pour un comportement non-linéaire élasto-plastique, méthode de substitution a) Convergence b) Divergence.	38

20	Figure 2-19 Algorithme itératif dans la non-linéaire élasto-plastique, la méthode de Newton-Raphson modifié.	40
21	Figure 2-20 Algorithme itératif dans la non-linéaire élasto-plastique, la méthode de Newton-Raphson.	41
22	Figure 2-21 Algorithme itératif, méthode incrémentale ou pas à pas avec une itération de Newton-Raphson.	42
23	Figure 2-22 Algorithme général itératif dans le cas d'un comportement non-linéaire élasto-plastique.	43
24	Figure 2-23 Distribution des contraintes dans le cas d'un trou dans une plaque, y compris le chargement général.	45
25	Figure 2-24 Distribution des contraintes dans le cas d'un trou dans une grande plaque pour un chargement $\sigma_g^h = \sigma_0$ , $\sigma_g^v = 0$ a) Maillages et conditions aux limites b) Composantes de la contrainte dans la direction x c) schéma des contraintes au voisinage du trou.	48
26	Figure 2-25 Comparaison entre la solution analytique et le calcul par Eléments Finis pour le problème d'un petit trou dans une grande plaque avec un chargement horizontal de traction.	46
27	Figure 2-26 Distribution des contraintes dans le cas d'un trou dans une plaque pour les composantes radiales et circonférentielles dans une plaque y compris le chargement a) $\sigma_g^h = \sigma_0$ , $\sigma_g^v = \sigma_0$ b) $\sigma_g^h = \sigma_0$ , $\sigma_g^v = -\sigma_0$ .	49
28	Figure 2-27 Distribution des contraintes dans le cas d'une barre en traction $D=0.04$ m, $d=0.02$ m, $r=0.01$ m, $\sigma_0 = 1$ MPa a) Schéma b) Composant Y des contraintes c) Gradient de contrainte dans la région critique.	50
29	Figure 2-28 Schéma d'une éprouvette entaillée avec définition des paramètres h et A.	57
30	Figure 2-29 Champ des contraintes et gradient des contraintes au fond d'entaille a) Champ des contraintes en traction b) Gradient des contraintes en traction c) Champ des contraintes en flexion d) Gradient des contraintes en flexion.	60
31	Figure 2-30 Schéma du diagramme de Wöhler et relation de Basquin.	62
32	Figure 2-31 Schéma du diagramme de Wöhler pour des éprouvettes lisses et entaillées.	63
33	Figure 2-32 Histoire des contraintes a) Amplitude constante b) Amplitude variable.	65
34	Figure 2-33 a) Distribution du domaine des contraintes b) Variété des contraintes par ordre.	67
35	Figure 2-34 Diagramme de résistance en fatigue de la méthode de l'Eurocode 3 a) Diagramme avec une ligne b) Diagramme avec deux lignes.	68
36	Figure 2-35 Schéma cumulatif des amplitudes des contraintes appliquées a) Spectre des contraintes appliquées b) Schéma des amplitudes des contraintes dans le diagramme de Wöhler.	69
37	Figure 2-36 Diagramme Normal de l'Eurocode 3 avec les limites des domaines de contrainte $\Delta\sigma_D$ correspondant à cinq millions de cycles.	71
38	Figure 2-37 Algorithme du dimensionnement par Eurocode 3, pour un diagramme à une et deux lignes S-N.	75

39	Figure 2-38 Schéma des méthodes de la contrainte dans le cas d'existence d'une contrainte moyenne.	76
40	Figure 2-39 Schéma de la superposition des courbes élastique et plastique pour obtenir la courbe de déformation totale en fatigue.	79
41	Figure 2-40 Illustration de la méthode de déformation locale [84].	80
42	Figure 2-41 Illustration de l'interprétation de la méthode de Neuber.	81
43	Figure 2-42 Algorithme général d'utilisation de la méthode de Neuber.	82
44	Figure 2-43 Illustration de l'interprétation de la méthode de Molski-Glinka.	83
45	Figure 2-44 Comparaison des méthodes Linéaires, Neuber et Molski-Glinka.	84
46	Figure 3-1 Présentation de la distribution schématique en fond d'entaille pour différents types d'éprouvettes.	89
47	Figure 3-2 Schéma de l'intégration au voisinage du fond d'entaille a) Méthode de la contrainte effective b) Méthode de Peterson.	91
48	Figure 3-3 Schéma de la fonction de poids au voisinage du fond d'entaille dans la méthode d'intensité du champ des contraintes.	92
49	Figure 3-4 Schéma de la distribution des contraintes en fond des différentes entailles dans le cas d'un calcul élasto-plastique.	95
50	Figure 3-5 Schéma du diagramme bi-logarithmique de la distribution de la contrainte élasto-plastique et du gradient des contraintes en fond d'entaille.	96
51	Figure 3-6 Distribution des contraintes en fond d'entaille et en fond de fissure dans la zone III.	98
52	Figure 3-7 Algorithme de la méthode volumétrique dans le cas de l'existence de la courbe lisse.	100
53	Figure 3-8 Algorithme de la méthode volumétrique dans le cas sans la courbe lisse.	101
54	Figure 4-1 Schéma des trois modes de rupture.	107
55	Figure 4-2 Schéma d'une fissure et les coordonnées en fond d'une fissure.	108
56	Figure 4-3 Schéma typique de la propagation des fissures dans les métaux.	110
57	Figure 4-4 Schéma typique de la propagation des fissures dans les cas de fissures longues et courtes [84].	111
58	Figure 4-5 Schéma de la procédure du soudage par point.	112
59	Figure 4-6 Schéma du soudage par point avec la zone fondue, la zone affectée thermiquement et l'interface.	113
60	Figure 4-7 Schéma du modèle simple du joint soudé par point assimilé à une poutre.	114
61	Figure 4-8 Schéma du modèle simple du joint soudé par point avec l'utilisation des éléments poutre, plaque et « pin joint ».	116
62	Figure 4-9 Schéma du modèle pour un joint soudé par l'utilisation de la théorie des plaques et coques [94].	117

63	Figure 4-10 Schéma du modèle proposé par Kan [98] a) Schéma général b) Modèle simplifié c) Modèle bi-dimensionnel.	117
64	Figure 4-11 Schéma du modèle pour un joint soudé avec l'utilisation de la théorie des plaques et des coques a) Méthode de la combinaison des éléments coques et solides [85], b) et c) Méthode avec poutres et coques [91, 94].	118
65	Figure 4-12 Schéma de l'équilibre des moments et des forces autour du joint soudé par point [99].	120
66	Figure 4-13 Effet de l'interface entre deux tôles minces dans des joints soudés par point en cisaillement.	120
67	Figure 4-14 Localisation des fissures dans des différents cas a) Fatigue oligocyclique b) Endurance limitée.	121
68	Figure 4-15 Schéma détaillé de la fissure dans l'utilisation de la méthode des Eléments Finis.	124
69	Figure 4-16 Schéma détaillé de la fissure autour du point soudé et l'angle de la fissure à partir de la formule proposée par Cooper-Smith [110].	125
70	Figure 4-17 Contraintes radiales et cisaillements circonférentiels autour du point soudé basé selon l'étude de Radaj-Zhang [111].	126
71	Figure 4-18 Cas général de l'application des actions autour du point soudé selon Swallem-Kurath-Lawrence [112].	127
72	Figure 4-19 Procédure d'évaluation de la valeur de $b_0$ selon la méthode proposée par Swallem-Kurath-Lawrence a) Schéma des résultats expérimentaux dans le diagramme bi-logarithmique $K_i - N_f$ b) Utilisation des résultats obtenus dans le diagramme logarithmique $K_i - (1 - R)$ .	130
73	Figure 4-20 Digramme bi-logarithmique $\Delta S_{\max} - N_f / (1 - R)$ pour évaluer la durée de vie en fatigue par l'approche proposée par Sheppard.	133
74	Figure 5-1 Loi de comportement cyclique (courbe d'amplitude de contrainte-amplitude de déformation).	141
75	Figure 5-2 Géométrie des joints soudés par point en cisaillement y compris Mono Point, Triple Points et Multiple Points.	142
76	Figure 5-3 Aspect microscopique d'une éprouvette soudée par point a) Grandissement du point soudé X50 b) Grandissement du point soudé X500 c) Grandissement du point soudé X50 d) Grandissement du point soudé X500 [119].	143
77	Figure 5-4 Schéma de la géométrie du point soudé pour la taille du point soudé, de l'interface et de l'épaisseur.	144
78	Figure 5-5 Schéma de l'électrode appliquée pour soudure des joints soudés par point.	145
79	Figure 5-6 Schéma des paramètres $L_R$ et $L_p$ dans le cas des joints soudés multi points.	147
80	Figure 5-7 Schéma du soudage par point, type multi points.	148
81	Figure 5-8 Cycle de soudage des joints soudés par point a) sans variation de l'effort de compression b) avec variation de l'effort de compression.	149
82	Figure 5-9 Cycle de soudage des joints soudés par point pour les éprouvettes sélectionnées a)	150

	Mono Point b) Triple Points et Multiple Points [119] (1 Période= 0.02 Sec.).	
83	Figure 5-10 Schéma de l'électrode de soudage hémisphérique appliquée pour des joints soudés par point.	151
84	Figure 5-11 Positionnement de l'éprouvette soudée dans les bridages hydrauliques de la machine « Schenk ».	152
85	Figure 5-12 Schéma du positionnement des joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points.	153
86	Figure 5-13 Schéma du positionnement de fissure des joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points.	153
87	Figure 5-14 Propagation de fissure en fond d'un point soudé avec force maximale 2100 N et nombre de cycles appliqués 800000 a) à 250000 b) à 300000.	154
88	Figure 5-15 Mode d'endommagement des éprouvettes soudées par point en cisaillement a) Mono Point b) Triple Points et Multiple Points.	155
89	Figure 5-16 Présentation de l'endommagement des joints soudés par point en cisaillement a) Schéma de l'endommagement b) Eprouvettes endommagées.	156
90	Figure 5-17 Courbe de Wöhler pour les éprouvettes soudées par points (Mono Points, Triple Points et Multiple Points).	157
91	Figure 5-18 Courbe de Wöhler pour les éprouvettes soudées par points (Mono Points, Triple Points et Multiple Points) avec l'utilisation du facteur $n$ .	158
92	Figure 6-1 Utilisation du logiciel des Eléments Finis par GUI.	164
93	Figure 6-2 Utilisation du logiciel par la méthode de programmation.	165
94	Figure 6-3 Algorithme de la méthode sous modelage pour la méthode des Eléments Finis.	166
95	Figure 6-4 Algorithme général du calcul des joints soudés par point dans les cas linéaires et non-linéaires.	167
96	Figure 6-5 Modélisation globale d'un joint soudé par point Mono Point a) Maillage b) Agrandissement du maillage c) Conditions aux limites et chargement d) Modèle complet e) Agrandissement du maillage.	169
97	Figure 6-6 Sous Modélisation globale d'un joint soudé par point Mono Point.	171
98	Figure 6-7 Schéma du sous modèle d'une éprouvette soudée par point Mono Point.	170
99	Figure 6-8 Présentation du déplacement du modèle général du joint soudé par point en cisaillement Mono Point par calcul élastique.	172
100	Figure 6-9 Champ des contraintes pour le joint soudé par point Mono Point (élasto-plastique) a) Déplacement et champ des contraintes b) Champ des contraintes autour du point soudé (la contrainte maximale dans la direction x et la déformation totale dans ce point).	173
101	Figure 6-10 Evolution du facteur de concentration de contraintes élastiques $k_t$ , du facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques $k_\sigma$ et du facteur de concentration de déformations élasto-plastiques dans la direction longitudinale du joint soudé par point Mono Point $k_\epsilon$ ( $\xi$ est le rapport entre la distance dans la direction x qui commence au centre du point soudé et le	174

	diamètre du point soudé).	
102	Figure 6-11 Modélisation globale d'un joint soudé par point Triple Points a) Maillage b) Agrandissement du maillage c) Conditions aux limites et chargement d) Modèle complet e) Agrandissement du maillage.	176
103	Figure 6-12 Sous Modélisation globale d'un joint soudé par point Triple Points.	177
104	Figure 6-13 Schéma du sous-modèle d'une éprouvette soudée par point Triple Points.	178
105	Figure 6-14 Déplacement du modèle général du joint soudé par point en cisaillement Triple Points par calcul élastique.	179
106	Figure 6-15 Champ des contraintes pour le joint soudé par point Triple Points (élasto-plastique) a) Champs des contraintes b) Champ des contraintes autour du point soudé (la contrainte maximale dans la direction x et la déformation totale dans ce point).	180
107	Figure 6-16 Evolution du facteur de concentration de contraintes élastique $k_t$ , du facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques $k_\sigma$ et du facteur de concentration de déformations élasto-plastiques dans la direction longitudinale du joint soudé par point Mono Point $k_\epsilon$ ( $\xi$ est le rapport entre la distance dans direction x qui commence au centre du point soudé et le diamètre du point soudé).	180
108	Figure 6-17 Modélisation globale d'un joint soudé par point Multiple Points a) Maillage b) Agrandissement du maillage c) Conditions aux limites et chargement d) Modèle complet e) Agrandissement du maillage.	183
109	Figure 6-18 Sous Modélisation globale d'un joint soudé par point Multiple Points.	184
110	Figure 6-19 Déplacement du modèle général du joint soudé par point en cisaillement Multiple Points pour le calcul élastique.	185
111	Figure 6-20 Champ des contraintes pour le joint soudé par point Multiple Points (élasto-plastique) a) Champs des contraintes b) Champ des contraintes autour du point soudé (la contrainte maximale dans la direction x et la déformation totale dans ce point).	186
112	Figure 6-21 Evolution du facteur de concentration de contraintes élastiques $k_t$ , du facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques $k_\sigma$ et du facteur de concentration de déformations élasto-plastiques dans la direction longitudinale du joint soudé par point Mono Point $k_\epsilon$ ( $\xi$ est le rapport entre la distance dans la direction x qui commence au centre du point soudé et le diamètre du point soudé).	186
113	Figure 6-22 Schéma de la direction d'ouverture de la fissure et la contrainte d'ouverture en fatigue.	188
114	Figure 6-23 Schéma de la distribution des contraintes dans l'épaisseur d'un point soudé critique.	189
115	Figure 6-24 Distribution des contraintes dans l'épaisseur d'un point soudé critique pour obtenir les facteurs de réduction en fatigue des joints soudés par point a) Mono Point b) Triple Points c) Multiple Points.	190
116	Figure 6-25 Comparaison entre les résultats obtenus par l'approche volumétrique et les résultats expérimentaux a) Résultats des joints soudés par point Mono Point considérés comme référence b) Résultats des points soudés par point Triple Points considérés comme référence.	192

		Page
1	Tableau 2-1. Résumé des méthodes analytiques donnant la distribution des contraintes pour des entailles aiguës et émoussés en fonction de la distance.	20
2	Tableau 2-2 Différents chargements et facteur de concentration de contraintes pour un petit trou dans une plaque.	46
3	Tableau 2-3 Types du changement des sections et chargement dans les cas de contraintes planes et axisymétriques [28].	51
4	Tableau 2-4 Résumé des relations proposées pour l'estimation du facteur de réduction en fatigue $k_f$ .	56
5	Tableau 2-5 Equations proposées par différents auteurs pour la relation entre $k_t$ , $k_\sigma$ et $k_\epsilon$ .	85
6	Tableau 3-1 Description des zones de distribution des contraintes dans l'approche volumétrique.	99
7	Tableau 3-2 Présentation de la méthode analytique proposée pour l'approche volumétrique.	104
8	Tableau 5-1 Caractéristique technique de la qualité Solphor en acier rephosphoré et à haute limite élastique.	139
9	Tableau 5-2 Composition chimique de l'acier étudié.	140
10	Tableau 5-3 Condition d'essais pour l'acier Solphor 280.	140
11	Tableau 5-4 Propriété de l'acier Solphor 280.	140
12	Tableau 5-5 Coefficients de la loi de Ludwick ou de la loi de comportement cyclique.	141
13	Tableau 5-6 Résumé de la procédure de soudage des points soudés pour les éprouvettes sélectionnées.	150
14	Tableau 5-7 Résultats expérimentaux obtenus pour les joints soudés par point en cisaillement (Mono Point, Triple Points et Multiple Points).	157
15	Tableau 5-8 Résistance absolue et relative pour les joints soudés par point en cisaillement (Mono Point, Triple Points et Multiple Points).	158

# **CHAPITRE 1**

# Chapitre 1

## Introduction générale : Evaluation de la durée de vie en fatigue des joints soudés par points

Le soudage par points est une technique largement utilisée dans les conceptions utilisant des tôles minces telles que les carrosseries d'automobiles, les cabines de camion, les wagons de chemin de fer etc. Il est parfois employé dans des structures métalliques de haute technologie (ex. aviation).

Le soudage par point est largement répandu dans l'industrie automobile. Les tôles minces et feuillards utilisées dans les structures sont assemblées par cette technique de soudage associée à celle de la robotisation. Il est également employé dans d'autres industries telles que l'électroménager.

Il y a 3000 points soudés dans un véhicule normal. Dans les évaluations de contraintes des joints soudés par point, les chargements sont considérés comme un cisaillement (Tensile Shear), une tension bi-axiale (Cross Tension) et un pelage (Coal Peel).

La résistance en fatigue des joints soudés par point est contrôlée par la concentration de contrainte au bord du point de soudure où les criques de fatigue sont amorcées sur le côté intérieur des plats. La concentration de contraintes peut être évaluée sur la base de la valeur maximale des contraintes, (c.-à-d. les contraintes locales déterminées pour un modèle de coque tri-dimensionnel de la structure).

Généralement, les soudures ont une concentration de contrainte élevée à la périphérie du point soudé. Cette concentration de contraintes est élevée en raison de la forme particulière des points et des chargements.

Les contraintes calculées dépendent du chargement, du diamètre et de la nature du point soudé, de la nature du soudage, de la distance entre les points, de l'épaisseur de la géométrie et de l'espace entre deux plats minces soudés.

Comme il a été indiqué précédemment, les joints soudés par point font l'objet de nombreuses applications dans les industries automobiles et aéronautiques. Il en résulte des différents cas de chargement qui correspondent aux types d'application et à leurs fonctionnalités.

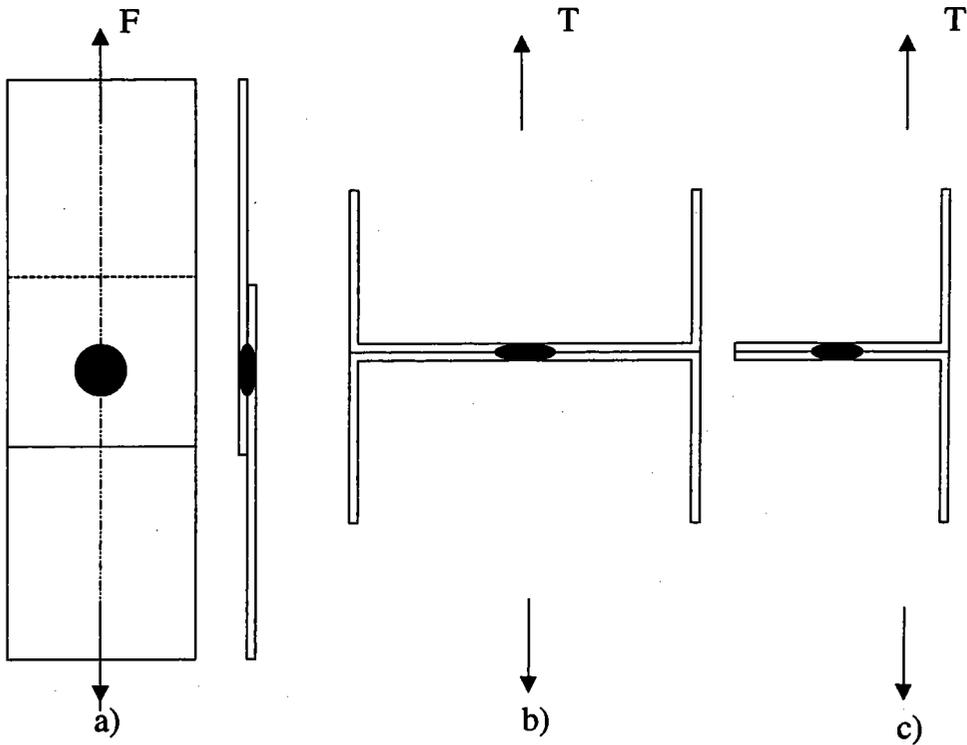


Figure 1-1. Type de sollicitation des joints soudés par point a) cisaillement b) tension bi-axiale c) pelage.

Généralement, les points soudés sont soumis à des chargements variables dans le temps. Ces chargements qui dépendent du temps peuvent être de type impact ou périodique. Dans le cas d'un chargement périodique, il se pose alors le problème de la prévision de la durée de la vie en fatigue.

Il est évident que des chargements périodiques comprenant des forces et des moments conditionnent particulièrement le comportement mécanique des soudures par point. Il convient donc de le vérifier pour des applications pratiques.

Selon le chargement, la nature des joints et les différents types de joints soudés par point ont été classifiés. Les différents types de joints soudés par point sont appelés joints en cisaillement, en tension bi-axiale et de pelage (Figure 1-1).

Généralement, les joints soudés par point de type cisaillement sont les plus étudiés pour l'évaluation de la durée de la vie en fatigue. L'influence de la géométrie des soudures et la position des points soudés sont prises en considération. Les soudages par points en cisaillement ont un comportement mécanique différent selon le nombre de points, la localisation et les conditions du chargement (Traction et Compression).

Par conséquent, la prévision de la durée de vie en fatigue de ce type de joint est très importante pour des applications technologiques présentant différents types de chargement. Le comportement mécanique du point soudé en configuration Mono Point, Triple Points et Multiple Points soumis à un chargement périodique basé sur l'approche volumétrique sera étudié dans la présente étude par l'approche de la fatigue.

Dans cette étude, nous nous intéressons à la prévision de la durée de vie en fatigue des joints soudés par point en cisaillement.

Dans le Chapitre 2, le concept du facteur de concentration de contraintes et du facteur de réduction en fatigue sont étudiés. Les méthodes de la prévision de la durée de vie en fatigue sont présentées. La restriction d'utilisation des différentes méthodes est présentée dans ce chapitre.

Dans le Chapitre 3, la méthode volumétrique est présentée. La présentation graphique et l'utilisation de la courbe bi-logarithmique sont montrées. Une formulation améliorée de l'approche volumétrique est proposée. Dans cette formulation, nous permettons de calculer la contrainte effective, la distance effective et le facteur de réduction en fatigue par les équations proposées dans le Tableau 3-2.

Dans le Chapitre 4, la bibliographie des joints soudés est présentée. Les différentes méthodes utilisées pour l'analyse et la prévision de la durée de vie en fatigue sont décrites.

Le Chapitre 5 présente la partie expérimentale pour les joints soudés par point en cisaillement. Le comportement mécanique du matériau, les conditions d'essais et les résultats sont présentés.

Dans le Chapitre 6, nous avons appliqué l'approche volumétrique pour la prévision de la durée de vie en fatigue. La direction et la contrainte d'ouverture en fatigue sont respectivement utilisées pour obtenir la contrainte effective, la distance effective et le facteur de réduction en fatigue.

La distribution de contraintes au voisinage des points de soudure critiques est aussi présentée dans les cas élastique et élasto-plastique.

La conclusion générale de notre étude est présentée dans le Chapitre 7.

# **CHAPITRE 2**



# Chapitre 2

## 2. Méthode de prédiction de la durée de vie en fatigue en présence de concentration de contraintes

### 2.0 Introduction générale

Les discontinuités géométriques conduisent à des concentrations de contraintes dans les composants de structure. La présence de ces concentrations de contraintes dans les composants mécaniques est un phénomène inévitable et indésirable. On peut observer les concentrations de contraintes indésirables dans tous les composants mécaniques. Toutefois les meilleures réalisations technologiques présentent encore des concentrations de contraintes dues aux changements géométriques et aux modifications de surface dues à l'usinage.

La présence dans la micro structure d'inclusions et de défauts dans les soudures et dans les moulages conduit aussi à des concentrations de contrainte indésirables lors de la réalisation. En outre, l'environnement peut augmenter la dangerosité des concentrations de contraintes.

Un chargement cyclique localisé dans une zone de concentration de contraintes locales en fond d'entaille entraîne l'amorçage d'une fissure de fatigue. L'étude des contraintes en fond d'entaille, pour les chargements mentionnés, est donc d'une importance essentielle pour des applications pratiques.

Le concept de fatigue des matériaux a été proposé avant le 19<sup>ème</sup> siècle, mais la présence de la concentration de contrainte avait été déjà découverte auparavant. Des expressions de la résistance en fatigue avaient été proposées et appliquées pour résoudre ces problèmes. Elles s'appliquent à des chargements périodiques. On a observé le premier problème de fatigue dans les axes de wagons de chemin de fer soumis à un chargement répété.

Rankine [1] a été l'un des premiers à étudier les ruptures par fatigue et à suggérer que les ingénieurs devraient privilégier une relation de continuité dans leurs conceptions et les constructions technologiques. D'autre part, il a proposé d'éviter les concentrations des contraintes sévères dans les composants mécaniques utilisés par l'industrie

ferroviaire. Des accidents sérieux d'avion [2] ont prouvé que plus de 50% des incidents avaient été produits en raison de l'amorçage d'une fissure de fatigue dans des zones de concentration élevée de contraintes, par exemple, les trous de boulons, les écrous et les filets d'attache.

Durant la période 1927-1981, des études statistiques indiquent qu'aucune étude complète n'a été réalisée sur les phénomènes de fatigue dans les composants mécaniques tels que les trous, les filets et les joints soudés.

Les exigences accrues de sécurité dans les avions et dans les véhicules de transport imposent maintenant d'analyser l'amorçage et la propagation des fissures de fatigue (concept de tolérance au dommage).

## 2.1 Distribution des contraintes en fond d'entaille

Dans les études de fatigue, les discontinuités géométriques sont appelés « entailles » et caractérisées par trois paramètres, la longueur  $a$ , le rayon  $\rho$  et l'angle d'entaille  $\psi$ . Cette définition permet de décrire simplement tous les défauts, les imperfections, les variations de géométrie et les joints soudés.

Ces entailles conduisent localement à une élévation de contraintes. Des contraintes excessives sont dues aussi aux excentricités par rapport à l'axe de chargement et proviennent de mauvaises installations et de défauts dans les joints soudés.

Cette définition du concept d'entaille est utilisée couramment dans des études de la fatigue. Par conséquent, l'étude de l'influence des paramètres de l'entaille est nécessaire pour connaître les distributions des contraintes près des zones critiques. L'étude de la distribution des contraintes pour des cas simples avec un comportement élastique du matériau peut être réalisée analytiquement, par exemple le cas d'un petit trou dans une tôle de grande dimension (Figure 2-1). L'étude du problème mentionné ci-dessus fournit une bonne idée de phénomène de concentration de contraintes et de la redistribution des chargements.

Dans la Figure 2-1, la distribution de contraintes autour d'un petit trou dans une tôle de grande dimension est présentée. Pour obtenir la distribution des efforts autour du trou dans une plaque, on se base sur l'approche classique de la résolution des problèmes d'élasticité. Les équations d'équilibre, la relation contrainte-déplacement et l'équation de compatibilité doivent être satisfaites dans le cas de l'élasticité linéaire. En coordonnées polaires, les équations d'équilibre sont écrites ci-dessous:

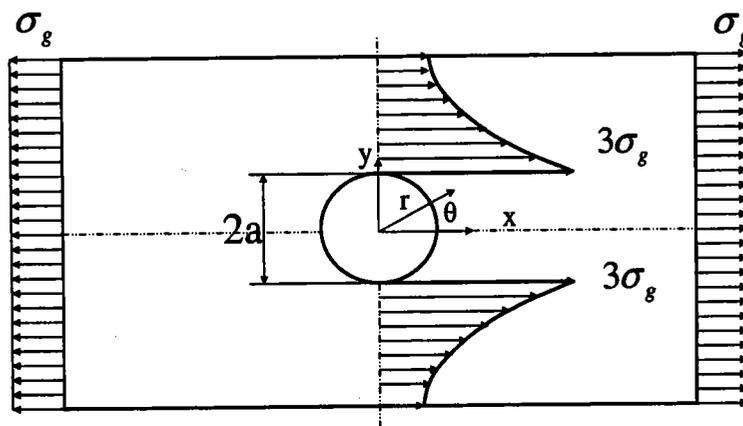


Figure 2-1. Illustration de la concentration de contraintes au bord d'un trou dans une plaque.

Dans la Figure 2-1,  $a$ ,  $r$ ,  $\theta$  et  $\sigma_g$  représentent le rayon du trou, les composantes des coordonnées polaires et la contrainte globale respectivement.

En l'absence de forces gravitationnelles, les équations (2-1) et (2-2) sont satisfaites à partir de la fonction des contraintes, dont dérivent les contraintes radiales, circonférentielles et scissions.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (2-2)$$

En l'absence de forces massiques ( $F_r$  et  $F_\theta$ ), les relations (2-1) et (2-2) devront être satisfaites par la fonction  $\phi(r, \theta)$  exprimée à partir des contraintes radiales, circonférentielles et de scissions. Elles sont présentées ci-dessous :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2-3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (2-4)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (2-5)$$

La relation déplacement-déformation dans le cas mentionné peut être représentée en coordonnées polaires par:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2-6)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \quad (2-7)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \quad (2-8)$$

où,  $u$ ,  $v$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  et  $\gamma_{r\theta}$  sont respectivement les déplacements dans la direction  $x$  et  $y$ , les déformations radiales, circonférentielles et de cisaillement .

Finalement l'équation de compatibilité s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (2-9)$$

En coordonnées polaires, l'équation de compatibilité avec introduction de la fonction de contraintes pour ce problème d'élasticité bi-dimensionnelle classique et axisymétrique sans forces gravitationnelles est représentée par la relation suivante :

$$\nabla(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{d^2(\sigma_r + \sigma_\theta)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(\sigma_r + \sigma_\theta)}{dr} = 0 \quad (2-10^*)$$

En considérant une fonction de contraintes convenable et l'application des conditions aux limites appropriées, la solution analytique exige des conditions de symétrie décrites ci-dessous. Le cas du problème en élasticité bi-dimensionnelle peut être écrit:

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \sigma_g \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2-10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} \sigma_g \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2-11)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2} \sigma_g \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (2-12)$$

La distribution de la contrainte autour d'un petit trou dans une grande tôle soumise à un chargement bi-axial est présentée dans la Figure 2-2. Pour  $r = a$ ,  $\theta = 90^\circ$ , la contrainte circonférentielle maximale  $\sigma_\theta$  atteint la valeur  $3\sigma_g$  pour ensuite diminuer.

La contrainte radiale augmente pour atteindre une valeur maximale et ensuite diminuer jusqu'à zéro.

La distribution des contraintes autour d'un petit trou, dans une grande tôle, peut être modifiée par application de chargements différents. Cela conduit à des résultats analytiques dans le cas axisymétrique et élastique linéaire bi-dimensionnel. Des autres cas sont montrés dans la Figure 2-2. Ces chargements de traction et de compression conduisent à une valeur de la contrainte circonférentielle maximale ( $2\sigma_g$  du lieu  $4\sigma_g$ )

Les phénomènes de concentration de contrainte en fond d'entaille dépendent de la géométrie d'entaille et du type de chargement [3-6]. L'influence de ces paramètres sera analysée pour le dimensionnement. Les concepteurs atténuent cet effet de concentration de contrainte par une modification de la géométrie du composant.

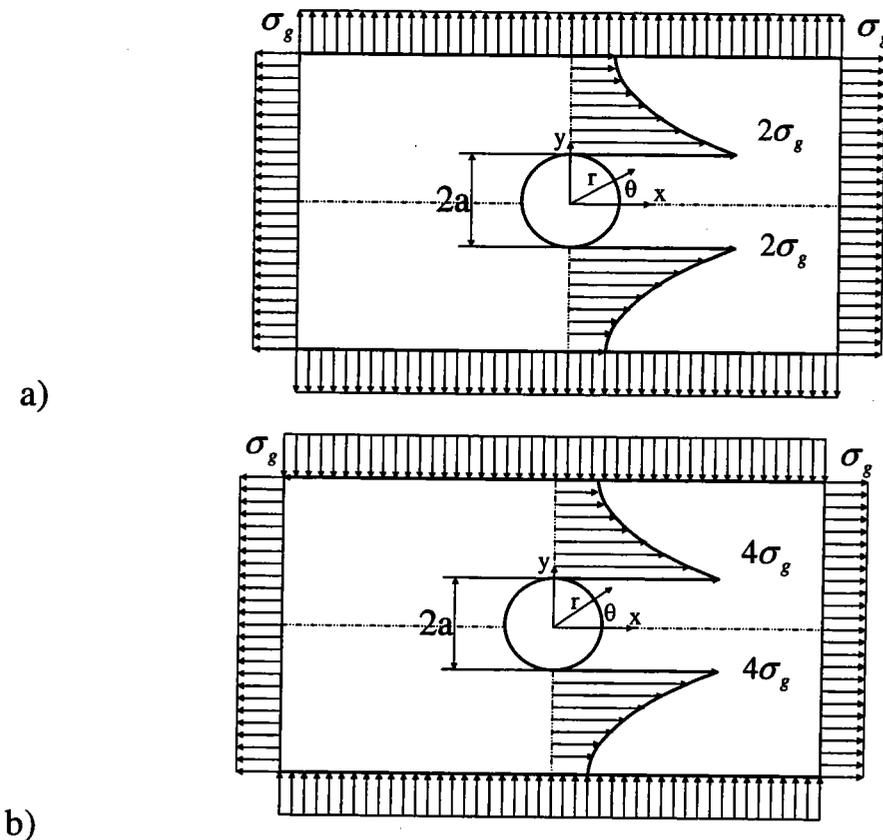


Figure 2-2 Distribution de la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta}(r, \theta = \pi/2)$  autour d'un trou dans une grande tôle a) Chargement vertical en traction b) Chargement vertical en compression.

L'analyse de la distribution des contraintes n'est pas chose une facile pour toutes les géométries. L'utilisation de résultats analytiques pour des distributions des contraintes en fond d'entaille est limitée à quelques modèles classiques.

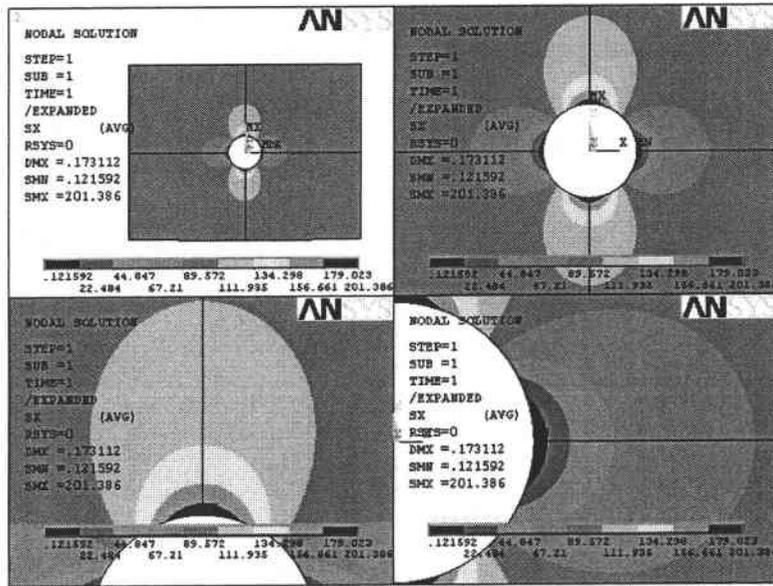
L'utilisation des résultats obtenus par la méthode des Eléments Finis est pratique et efficace pour analyser les distributions des contraintes par superposition pour toutes les géométries complexes.

### • Exemple

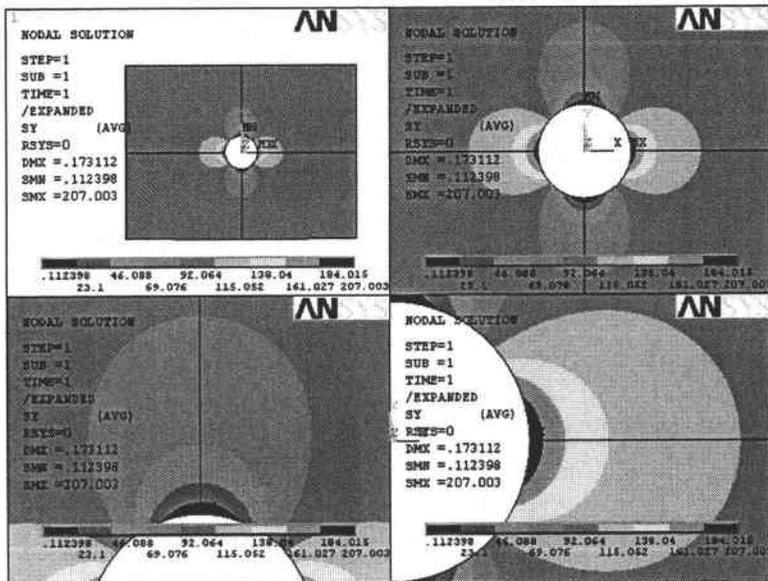
Nous avons pris une géométrie pour un petit trou dans une grande plaque (la solution analytique pour ce cas existe) à partir d'un code du calcul (ANSYS). Les Figures 2-3 à 2-4 représentent la distribution des contraintes autour d'un petit trou dans une grande tôle soumise à différents chargements par la méthode des Eléments Finis.

Les Figures 2-3 et 2-4, présentent les distributions des contraintes suivant les directions x et y pour le cas évoqué ; cette distribution a été calculée par la méthode des Eléments Finis.

Dans les Figure 2-3a et 2-4a, la distribution des contraintes est différente. Elle est obtenue pour une même géométrie mais avec un chargement différent. La comparaison de résultats obtenus montre que la contrainte maximale selon la direction x est respectivement égale à  $2\sigma_g$  et  $4\sigma_g$ .

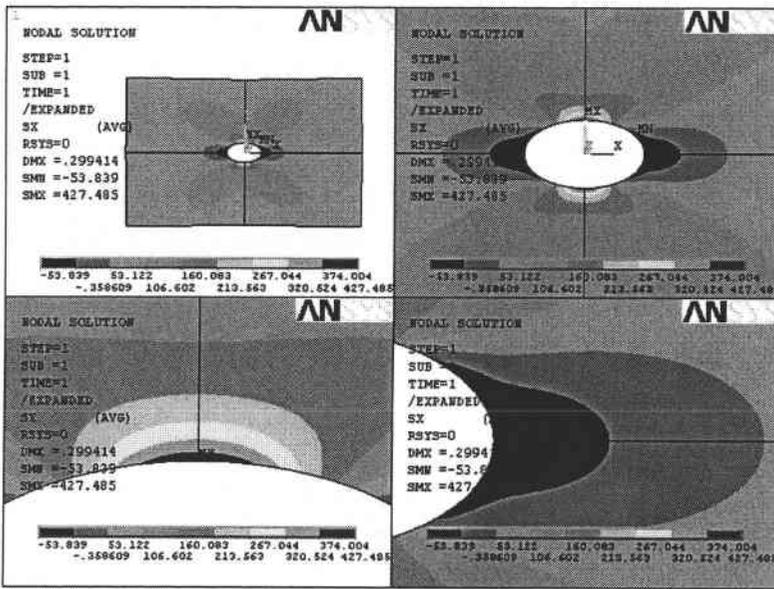


a)

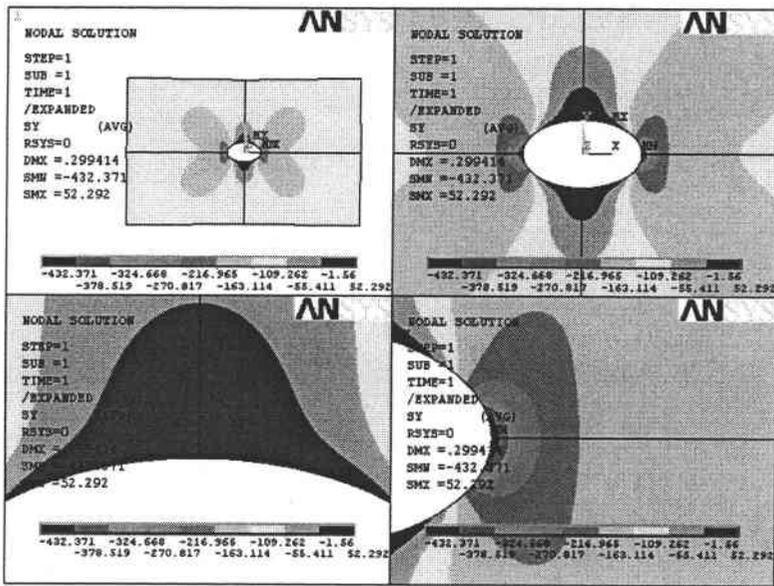


b)

Figure 2-3 Distribution de contraintes autour d'un trou circulaire dans une grande tôle par la méthode des Eléments Finis (Figure 2-2a) a) Composante x de contrainte b) Composante y de contrainte.



a)



b)

Figure 2-4. Distribution de contraintes autour d'un trou elliptique dans une grande tôle obtenue par la méthode des Eléments Finis (Figure 2-2b) a) Composante x de contraintes b) Composante y de contraintes.

## 2.2.1. Distribution des contraintes dans le cas élastique

La connaissance de la distribution des contraintes en fond d'entaille est nécessaire pour déterminer le comportement mécanique des structures. Des méthodes analytiques, pour obtenir cette distribution des contraintes en fond d'entaille, ont été proposées par plusieurs auteurs [7-8, 10-11, 14, 16]. Creager et Paris ont utilisé la solution de la Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR) après l'avoir corrigée [7-8]. En coordonnées polaires, dans la Figure 2-5, ils proposent que la représentation de la contrainte d'ouverture s'écrit comme suit:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{\rho}{2r} \right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2-13)$$

où  $\rho$  est le rayon d'entaille,  $K_I$  est le facteur d'intensité de contraintes en mode de rupture I et  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires à partir d'une origine décalée de la distance  $\rho/2$  à partir du fond d'entaille.

Le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$ , pour une fissure de longueur  $a$ , s'écrit comme:

$$K_I = F_\sigma \sigma_g \sqrt{\pi a} \quad (2-14)$$

où  $F_\sigma$  et  $\sigma_g$  sont respectivement le facteur de correction géométrique non dimensionnel et la contrainte globale. La contrainte d'ouverture maximale en fond d'entaille vaut:

$$\sigma_{yy}^{\max} = \sigma_g + 2F_\sigma \sigma_g \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2-15)$$

En d'autres termes, le facteur de concentration de contrainte s'écrit comme:

$$k_t = 1 + 2F_\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2-16)$$

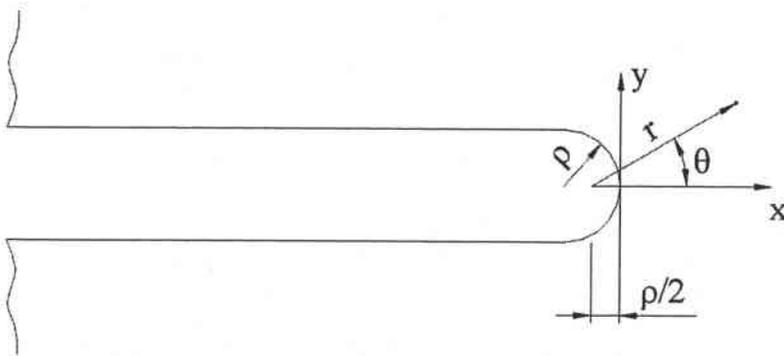


Figure 2-5. Schéma d'une entaille et les coordonnées polaires correspondantes.

La connaissance de la distribution des contraintes à la pointe de l'entaille permet d'évaluer le facteur d'intensité de contraintes d'entaille qui caractérise une partie de la distribution [9-11]. L'équation Paris-Creager donne la distribution des contraintes pour des entailles profondes

uniquement quand l'angle d'entaille est égal à zéro (Figure 2.5). D'autres expressions analytiques ont été également suggérées pour cette distribution. En considérant la solution du champ des contraintes de Neuber pour les entailles [12], la contrainte d'ouverture s'exprime au voisinage du fond d'entaille par [13] :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{\max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}} \quad (2-17)$$

où,  $x$  et  $\sigma_{\max}$  sont respectivement la distance mesurée à partir du fond d'entaille et la valeur maximale de  $\sigma_{yy}$ .

Chen et Pan [17] ont proposé une équation légèrement différente:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{\max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 8x}} \quad (2-18)$$

En comparant la relation (2-18) avec la solution exacte obtenue par Eléments Finis, pour une entaille aigüe, l'équation de Chen-Pan donne une valeur de 5 à 15% moins élevée. La valeur de l'erreur devient plus importante si l'entaille devient plus émoussée.

Glinka et Newport [14] ont conclu que l'équation de Creager-Paris est raisonnablement exacte pour les entailles aigües. Pourtant  $\sigma_{yy}$  présente des valeurs sous estimées pour les entailles émoussées [15]. Glinka et Newport ont suggéré une distribution des contraintes d'entaille différente pour les entailles émoussées et les entailles aigües sous la forme d'une approximation polynomiale. Les deux expressions de la contrainte d'ouverture se présentent ci-dessous:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= k_t \sigma_g \left[ 1 - 2.330 \left( \frac{x}{\rho} \right) + 2.590 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1.5} - 0.907 \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 + 0.037 \left( \frac{x}{\rho} \right)^3 \right] & k_t \leq 4.5 \\ \sigma_{yy} &= k_t \sigma_g \left[ 1 - 0.235 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{0.5} - 1.33 \left( \frac{x}{\rho} \right) + 1.28 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1.5} - 0.337 \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 \right] & k_t > 4.5 \end{aligned} \quad (2-19)$$

où,  $k_t$ ,  $\sigma_g$ ,  $x$  et  $\rho$  sont respectivement le facteur de concentration des contraintes, la contrainte globale, la distance dans la direction  $x$  et le rayon d'entaille.

Les expressions (2-19) sont des relations exactes pour plusieurs configurations d'entaille [14]. Kujawski [11] a montré que l'approximation décrite précédemment n'est pas satisfaisante pour une entaille avec une concentration de contrainte faible  $k_t \leq 3$ . Il a donc proposé une méthode pour améliorer la relation de Creager-Paris par l'application d'un facteur de correction  $f$  :

$$\sigma_{yy} = \frac{fk_t \sigma_g}{2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{x}{\rho} \right)^{-0.5} + \left( 1 + 2 \frac{x}{\rho} \right)^{-1.5} \right] \quad (2-20)$$

$$f = \begin{cases} 1 & \frac{x}{\rho} < 0.2 \\ 1 + \frac{\text{Tan}(\pi/2k_t)}{2.8} \left( \frac{x}{\rho} - 0.2 \right) & \frac{x}{\rho} \geq 0.2 \end{cases} \quad (2-21)$$

Dans des manuels, le facteur de correction géométrique non dimensionnel, pour différent type de fissure, peut être obtenu à partir d'une analyse de la contrainte. Il faut remarquer que le facteur de concentration des contraintes est relatif à la contrainte dans la section moyenne dans ces manuels.

La formule (2-16) a été étudiée pour des géométries d'entailles différentes par la méthode des Eléments Finis.

Les relations analytiques décrites précédemment sont des méthodes approximatives pour connaître la distribution des contraintes au voisinage de l'entaille ou de la fissure. La méthode des Eléments Finis peut être aussi appliquée pour vérifier cette distribution de contrainte. Dans la Figure 2-6, la géométrie étudiée est présentée.

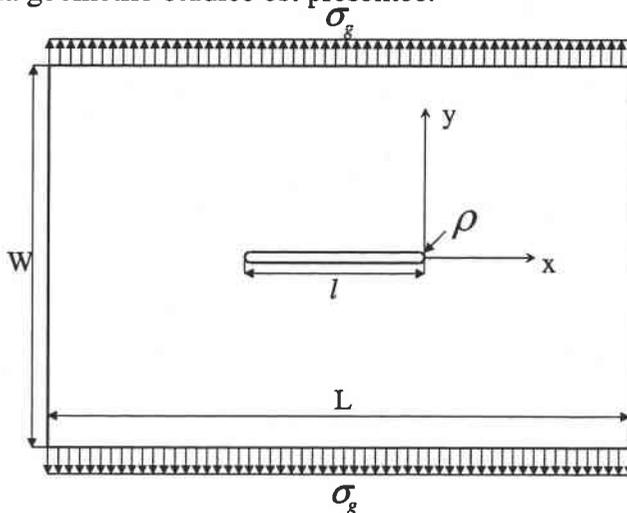


Figure 2-6. Schéma d'une entaille éoussée dans une plaque soumise à une traction perpendiculaire au plan d'entaille.

### • Exemple

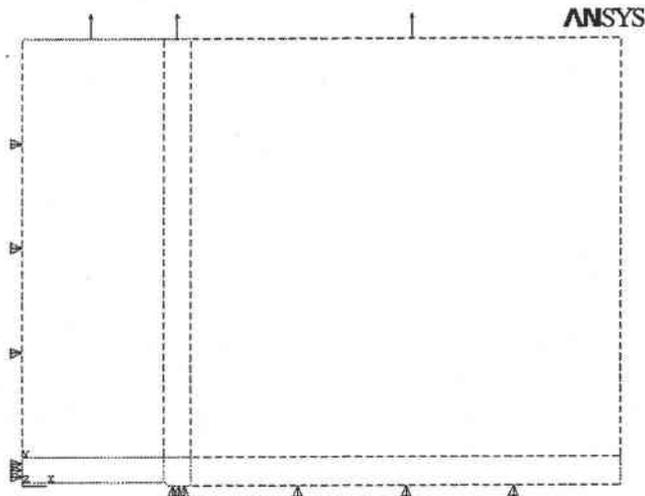
Nous avons pris la géométrie suivante pour une entaille éoussée dans une plaque soumise à une traction perpendiculaire au plan d'entaille par la méthode des Eléments Finis. Les hypothèses pour les modèles d'Eléments Finis sont données ci-dessous:

- Module de Young  $E = 210 \text{ GPa}$
- Coefficient de Poisson  $\nu = 0.30$
- Hypothèse d'un comportement élastique linéaire
- Contrainte globale  $\sigma_g = 1.0 \text{ MPa}$

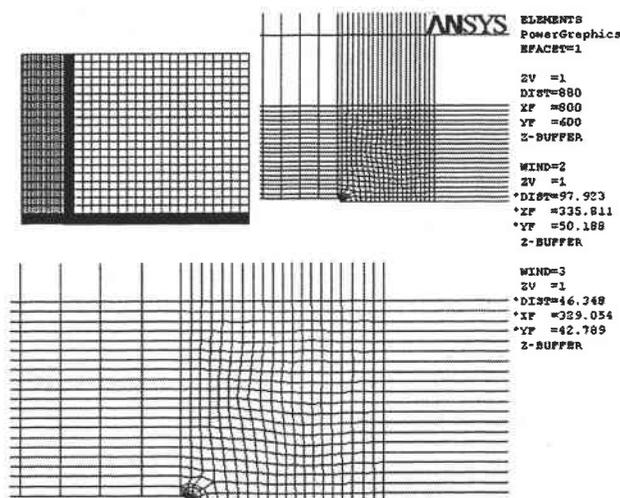
- Hypothèse de contraintes planes
- Symétrie double pour le modèle des Eléments Finis
- Longueur de plaque  $L = 3.20m$
- Largeur de Plaque  $W = 2.40m$
- Épaisseur de la plaque  $B = 0.001m$

Dans la Figure 2-7, nous avons présenté les conditions aux limites, la configuration du maillage et la distribution de contrainte pour le rapport  $l/\rho = 100$ .

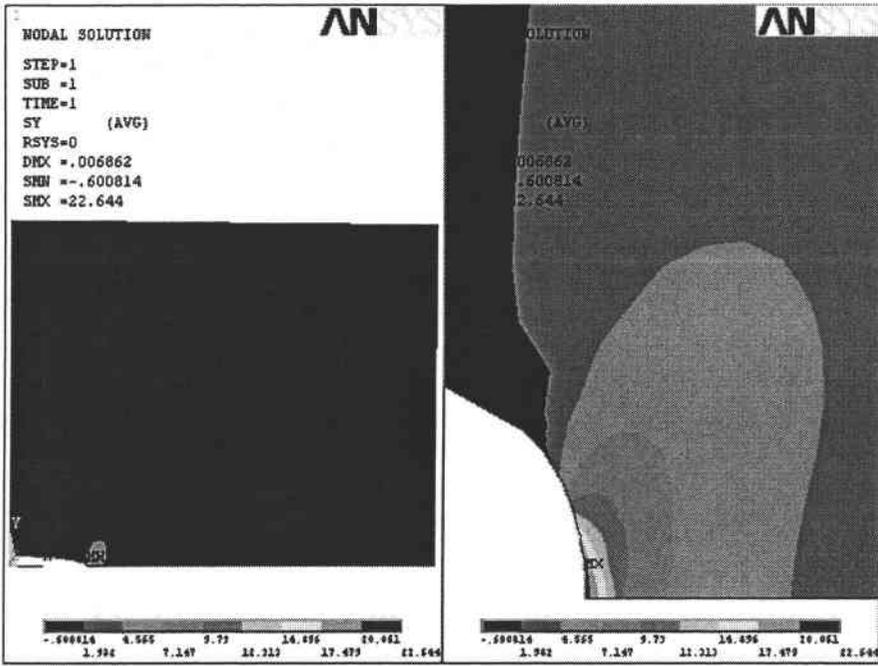
On peut constater dans la Figure 2-8 que les méthodes de Glinka, Kujawski et Chen sont exactes et adaptées pour connaître la concentration de contrainte. La méthode de Cregar-Paris est plus exacte pour des concentrations de contraintes très élevées, ce qui se produit dans des entailles aiguës ou des fissures émoussées. Le choix de la méthode dépend donc des valeurs du facteur de concentration de contraintes.



a)



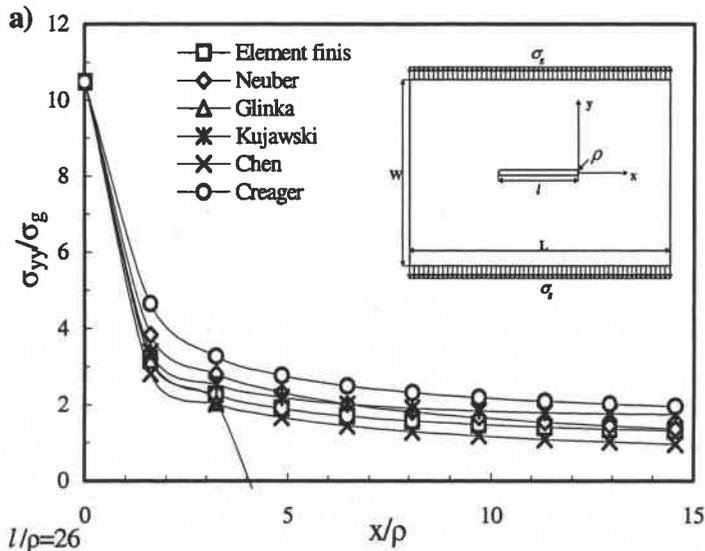
b)



c)

Figure 2-7. Conditions aux limites, configuration des maillages et distribution des contraintes pour le modèle sélectionné dans la Figure 2-6, y compris  $l/\rho = 100$ .

La méthode du Glinka donne des valeurs proches des résultats numériques, mais avec un domaine de validité réduit. Elle est moins exacte quand on s'éloigne du fond d'entaille. Les méthodes de Chen et de Kujawski et Neuber sous-estiment la distribution des contraintes. La méthode la plus convenable pour les entailles aiguës est la méthode de Creager.



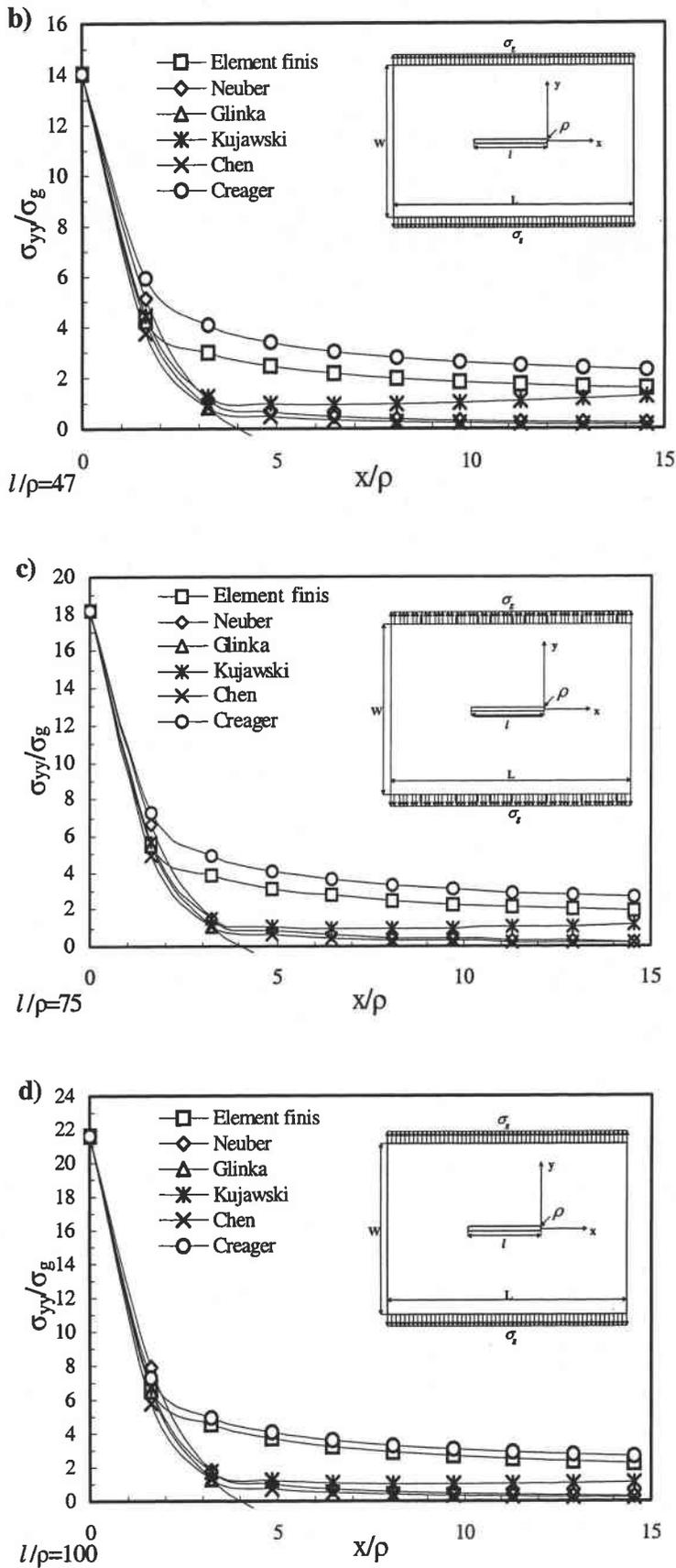


Figure 2-8. Comparaison avec la méthode des Éléments Finis, des solutions de Neuber, Glinka, Kujawski, Chen et Paris-Creager pour différentes valeurs du rapport  $l/\rho$  ( $l = 2a$ ).

Les méthodes présentées pour l'évaluation de la distribution des contraintes sont relatives aux cas élastiques. Il faut remarquer que ce sont des solutions approchées. Dans les cas réels, des effets de la plasticité apparaissent en fond d'entaille. C'est dû au comportement mécanique des matériaux et au fait que la contrainte en fond d'entaille dépasse la limite d'élasticité. Le Tableau 2-1, résume les différentes méthodes décrites et la distribution de la contrainte d'ouverture en fonction de la distance.

Tableau 2-1. Résumé des méthodes analytiques donnant la distribution des contraintes pour des entailles aiguës et émoussés en fonction de la distance.

METHODES	EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES POUR LE COMPOSANT DE LA CONTRAINTE D'OUVERTURE
Timoshenko (1951) [18]	$\sigma_{yy} = \sigma_g \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{2} \right)^{-2} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{x}{3} \right)^{-4} \right]$
Neuber (1961) [19]	$\sigma_{yy} = \sigma_{\max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}}$
Creager-Paris (1967) [15]	$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{\rho}{2r} \right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
Chen-Pan (1978) [17]	$\sigma_{yy} = \sigma_{\max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 8x}}$
Glinka-Newport (1987) [14]	$\sigma_{yy} = k_t \sigma_g \left[ 1 - 2.330 \left( \frac{x}{\rho} \right) + 2.590 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1.5} - 0.907 \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 + 0.037 \left( \frac{x}{\rho} \right)^3 \right] \quad k_t \leq 4.5$ $\sigma_{yy} = k_t \sigma_g \left[ 1 - 0.235 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{0.5} - 1.33 \left( \frac{x}{\rho} \right) + 1.28 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1.5} - 0.337 \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 \right] \quad k_t > 4.5$
Kujawski (1991) [11]	$\sigma_{yy} = \frac{fk_t \sigma_g}{2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{x}{\rho} \right)^{-0.5} + \left( 1 + 2 \frac{x}{\rho} \right)^{-1.5} \right], f = \begin{cases} 1 & \frac{x}{\rho} < 0.2 \\ 1 + \frac{\text{Tan}(\pi/2k_t)}{2.8} \left( \frac{x}{\rho} - 0.2 \right) & \frac{x}{\rho} \geq 0.2 \end{cases}$
Xu Kewein-Jiawen (1992) [20]	$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{1 + \frac{mx}{\rho}}}, \quad m = \text{constante}$
Bhattachar-Kumar (1995) [21]	$\sigma_{yy} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}; \quad I \text{ et II Traction, III Compression}$ $\sigma_I = \sigma_{\max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\rho}{4} (k_t - 1)$ $\sigma_{II} = \frac{M}{I} \left( \frac{(W-a)}{2} - x \right), \quad \frac{(W-a)}{2} \leq x \leq (W-a)$ <p><math>M = \text{Moment} \quad I = \text{Moment Inertie}</math></p>

METHODES	EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES POUR LE COMPOSANT DE LA CONTRAINTE D'OUVERTURE
R. X. Xu (1995) [22]	$\sigma_{yy} = f_w \frac{\sigma_{\max}}{2} \left(1 + \frac{x}{\alpha\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \left(1 + \frac{x}{\alpha\rho}\right)^{-1}\right], \quad \alpha = 0.425 + 0.005k,$ <p><math>f_w =</math> facteur de correction de géométrie pour les éprouvettes soumises à une traction</p>

## 2.2.2. Distribution des contraintes en fond d'entaille dans le cas élasto-plastique

La distribution des contraintes en fond d'entaille change selon la géométrie et le mode de chargement. Si les valeurs des contraintes sont supérieures à la limite d'élasticité, une relaxation plastique intervient en fond d'entaille.

Dans les matériaux métalliques, on observe un comportement de nature élasto-plastique. En conséquence, une zone en plastifiée et des contraintes élasto-plastiques doivent être pris en considération

Dans le cas des matériaux fragiles, tel que l'acier à haute résistance, le verre, la céramique et la fonte la zone plastifiée et les contraintes élasto-plastiques ne seront pas considérées.

L'objectif principal de cette étude est concentré sur les aciers. Ces aciers sont généralement considérés comme ductiles en raison de leur composition chimique.

L'étude de la zone plastifiée dans le cas d'application de chargements périodiques est très importante pour évaluer la durée de vie en fatigue. De multiples travaux ont été effectués pour étudier la distribution des contraintes dans des conditions élasto-plastiques [21, 23, 24].

Les méthodes suivantes sont données à titre d'exemple et montrent l'évolution de la distribution élasto-plastique en fond d'entaille.

Wilshaw [23] a proposé une relation pour cette distribution dans un matériau élastique parfaitement plastique. L'évolution de la distribution élasto-plastique est divisée en quatre zones distinctes.

Les relations proposées et les limites de ces zones distinctives sont exclusivement obtenues pour des entailles sollicitées en flexion.

- Zone I: distribution logarithmique des contraintes :

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_y \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right], \quad 0 \leq x \leq r_y \quad (2-22)$$

où  $\sigma_y$  et  $\rho$  sont respectivement la limite d'élasticité et le rayon d'entaille.

- Zone II: la contrainte d'ouverture reste constante :

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_y \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{r_y}{\rho} \right) \right], \quad r_y \leq x \leq r_\beta \quad (2-23)$$

En raison de la continuité des contraintes pour  $x = r_y$  à l'interface des zones I et II, la taille de la zone plastifiée s'écrit :

$$r_y = \rho \left( e^{\left( \frac{\pi - \psi}{2} \right)} - 1 \right) \quad (2-24)$$

où  $\psi$  et  $\rho$  sont respectivement l'angle et le rayon d'entaille.

- Zone III:

$$\sigma_{yy}(x) = \begin{cases} \sigma_y \left[ 1 + \frac{\pi - \psi}{2} \right] & x = r_\beta \\ k_\sigma \sigma_g \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}} & r_\beta < x \leq r_n \end{cases} \quad (2-25)$$

où  $\sigma_g$ ,  $k_\sigma$  et  $r_n$  sont respectivement la contrainte globale, le facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques et la distance à partir d'un fond d'entaille qui correspond à la fibre neutre où la contrainte s'annule.

Le facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques s'exprime selon la méthode de Wilshaw [23] par :

$$k_\sigma = \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{r_\beta}{\rho} \right) \right] \quad (2-26)$$

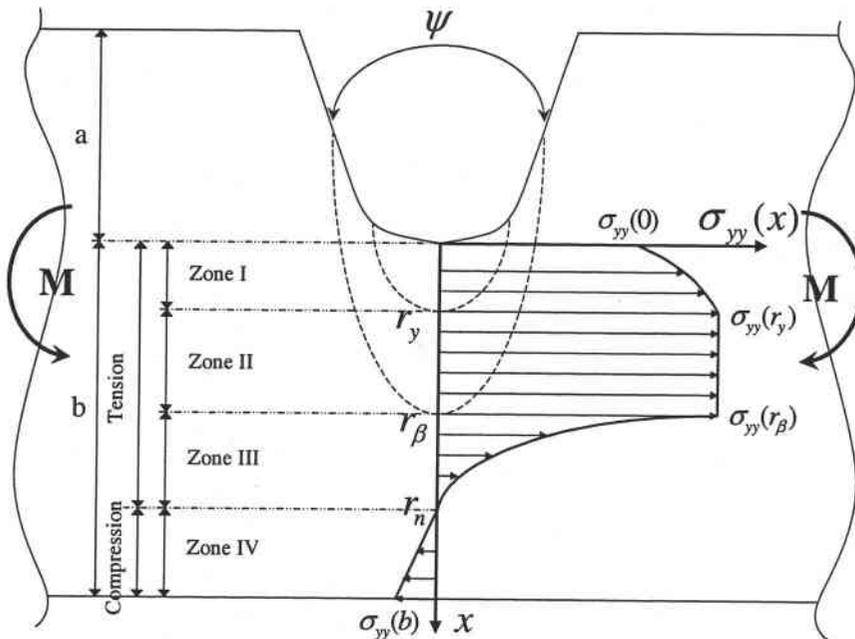


Figure 2-9. Evolution des contraintes élasto-plastiques sur le ligament d'une éprouvette soumise à une flexion selon Wilshaw [23]

- Zone IV: Partie en compression due à la flexion élastique.

Dans la Figure 2-9, la contrainte augmente quand on s'éloigne du fond d'entaille, et atteint la valeur maximale pour  $x = r_y$ . Ensuite, elle demeure constante  $x = r_\beta$  dans l'intervalle  $r_y \leq x \leq r_\beta$ . Après, les contraintes diminuent plastiquement puis élastiquement. L'équation (2-25) est la même que celle de Neuber qui confirme le comportement élastique dans la zone III. En raison du chargement en flexion, on observe une zone en compression.

La distinction des zones en compression et traction est donnée par l'axe neutre ( $x = r_n$ ). La compression devient maximale pour  $x = b$ .

Bhattacharya [21] a proposé une méthode pour évaluer les contraintes élasto-plastiques en fond d'entaille. Cette méthode est utilisée pour une entaille soumise à la flexion. La distribution des contraintes s'exprime par :

$$\sigma_{yy} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} + \sigma_{IV} + \sigma_V \quad (2-27)$$

où  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_{IV}$  sont des contraintes en traction.  $\sigma_V$  est une contrainte en compression.

La formule donnant la distribution de cette contrainte s'écrit (Figure 2-10):

$$\sigma_I = \sigma_Y \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right], \quad 0 \leq x \leq r_y \quad (2-28)$$

$$\sigma_{II} = \sigma_Y \left[ 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right], \quad r_y \leq x \leq r_\beta \quad (2-29)$$

$$\sigma_{III} = k_t \sigma_s \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}}, \quad r_\beta \leq x \leq l \quad (2-30)$$

$$\sigma_{IV} = \frac{M}{I} \left( \frac{w-a}{2} - r \right), \quad 0 \leq x \leq (w-a)/2 \quad (2-31)$$

$$\sigma_V = \frac{M}{I} \left( \frac{w-a}{2} - r \right), \quad (w-a)/2 \leq x \leq (w-a) \quad (2-32)$$

où  $\sigma_Y, \rho, \psi, k_t, \sigma_s, M, I, W, a, r_y$  et  $r_\beta$  sont respectivement la limite d'élasticité, le rayon d'entaille, l'angle d'entaille, le facteur de concentration de contraintes élastiques, la contrainte globale, le moment de flexion, le moment d'inertie, la longueur, la profondeur d'entaille, la distance qui correspond à la zone plastifiée et la distance correspondant à la fin de la zone II.

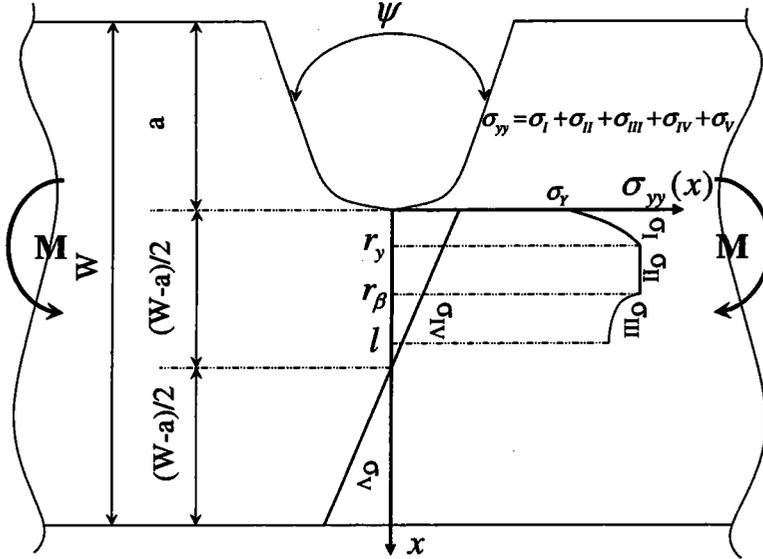


Figure 2-10. Evolution des contraintes elasto-plastiques sur le ligament d'une éprouvette soumise à une flexion selon Bhattacharya [21].

Dans la Figure 2-11, l'évolution des contraintes pour un petit écoulement est présentée. Les équations (2-33) et (2-37) sont la solution générale de la méthode de Bhattacharya.

$$\sigma_{yy} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} + \sigma_{IV} \quad (2-33)$$

où,  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ ,  $\sigma_{III}$  sont respectivement des contraintes en traction.  $\sigma_{IV}$  est une contrainte en compression. Les quatre expressions s'expriment:

$$\sigma_I = \sigma_Y \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right], \quad 0 \leq x \leq r_y \quad (2-34)$$

$$\sigma_{II} = k_t \sigma_g \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}}, \quad r_y \leq x \leq l = \frac{\rho}{4} (k_t^2 - 1) \quad (2-35)$$

$$\sigma_{III} = \frac{M}{I} \left( \frac{w-a}{2} - r \right), \quad 0 \leq x \leq (w-a)/2 \quad (2-36)$$

$$\sigma_{IV} = \frac{M}{I} \left( \frac{w-a}{2} - r \right), \quad (w-a)/2 \leq x \leq (w-a) \quad (2-37)$$

où  $\sigma_Y$ ,  $\rho$ ,  $\psi$ ,  $k_t$ ,  $\sigma_g$ ,  $M$ ,  $I$ ,  $W$ ,  $a$ ,  $r_y$  et  $r_\beta$  sont respectivement la limite d'élasticité, le rayon d'entaille, l'angle d'entaille, le facteur de concentration de contraintes élastiques, la contrainte globale, le moment de flexion, le moment d'inertie, la longueur, la profondeur d'entaille, la distance qui correspond à la zone plastifiée et la distance correspondant à la fin de la zone II.

L'évolution des contraintes globales est illustrée dans la Figure 2-11 y compris les contraintes en traction et en compression.

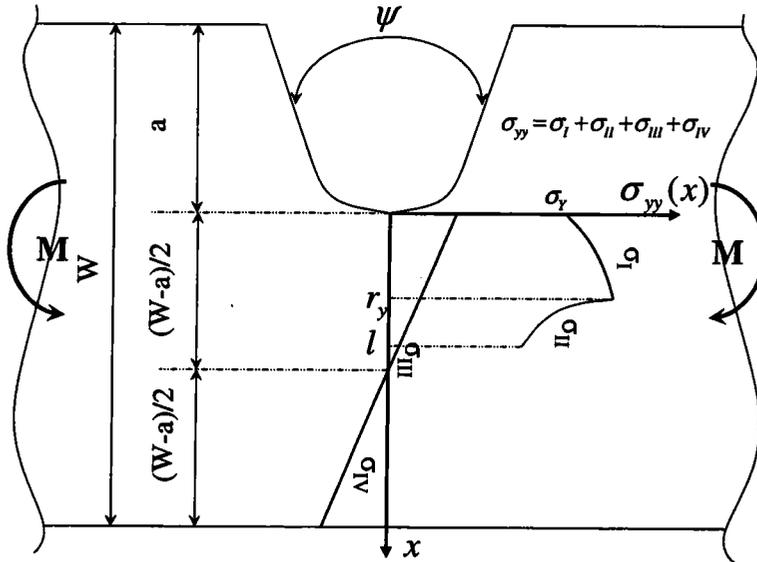


Figure 2-11. Evolution des contraintes élasto-plastiques le long du ligament d'une éprouvette soumise à une flexion pour le problème d'une zone plastifiée de petite taille selon Bhattacharya [21].

Comme il a été dit précédemment, la relation entre la contrainte locale et la déformation en fond entaille est essentielle. Dans l'approche locale, la détermination de la relation entre la contrainte globale et la déformation en fond d'entaille est nécessaire pour la prévision de la durée de vie en fatigue. Pour les entailles courtes, une autre relation est proposée par M. Zheng-E. Niemi et Shi-Puls [24-26]. La géométrie de ces entailles courtes est présentée dans la Figure 2-12.

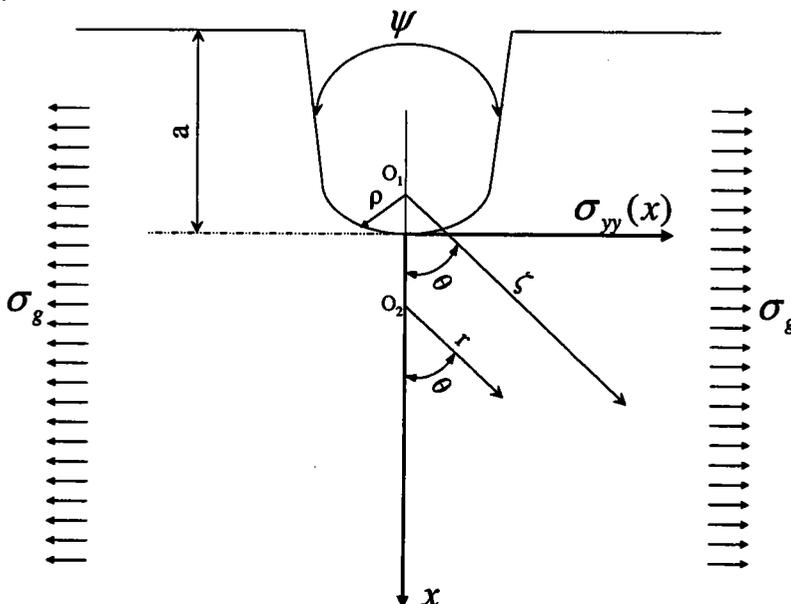


Figure 2-12. Schéma d'une entaille courte et la contrainte en traction globale appliquée,  $\sigma_g$

L'entaille courte a une forme semi-elliptique et soumise à un chargement uniaxial  $\sigma_g$ . Si la profondeur d'entaille  $a$  est petite par rapport à la largeur  $W$ , la contrainte élastique au voisinage du fond d'entaille peut être obtenue directement en utilisant une méthode basée sur la théorie de l'élasticité. Quand la contrainte atteint la limite d'élasticité, la valeur maximale des contraintes en traction  $\sigma_{\max}$  s'exprime par [24]:

$$\sigma_{\max} = \sigma_g \left[ 1 + 2 \left( \frac{a}{\rho} \right)^{0.5} \right] \quad (2-37)$$

où  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_g$ ,  $\rho$  et  $a$  sont respectivement la contrainte maximale, la contrainte globale, le rayon et la profondeur d'entaille.

Dans l'équation (2-37), la deuxième partie peut être considérée comme le facteur de concentration de contrainte élastique.

$$k_t = 1 + 2 \left( \frac{a}{\rho} \right)^{0.5} \quad (2-38)$$

L'équation (2-38) donne le facteur de concentration de contraintes élastiques en général pour toutes les entailles courtes y compris pour la forme semi-elliptique. Dans le cas élastique, la contrainte de traction selon la direction  $y$  dans la région près du fond entaille peut être obtenue approximativement par la solution de Neuber. Cette solution est proche de celle obtenue pour le cas d'une zone plastifiée de petite taille par Bhattacharyha [21].

En conclusion, l'évolution des contraintes élasto-plastiques près du fond d'entaille présente les caractéristiques suivantes :

- La contrainte maximale, dans l'analyse élasto-plastique, n'est pas en fond d'entaille mais à une certaine distance.
- L'évolution des contraintes dans la zone plastifiée peut être représentée par une fonction logarithmique.
- Pour une zone plastifiée de petite taille, la contrainte maximale est plus faible, et est donnée par le facteur de concentration de contraintes élastiques.
- Dans le cas général d'une zone plastifiée importante, la contrainte maximale n'est pas seulement localisée en un point, mais répartie dans une zone où elle est constante.
- Pour les fissures profondes, l'analyse de l'écoulement plastique limité peut être aussi utilisée [25].

Ces méthodes sont considérées comme approximatives et utilisées pour une approche locale.

### 2.2.3. Méthode des Eléments Finis dans le cas élasto-plastique

L'utilisation de la méthode des Eléments Finis n'est pas limitée aux études des matériaux élastiques linéaires. Elle est aussi fréquemment utilisée dans les études élasto-plastiques pour analyser par exemple, la zone plastique au voisinage du fond d'entaille dans des matériaux ductiles. Cela demande d'acquérir préalablement les connaissances théoriques fondamentales utilisées dans la méthode des Eléments Finis [27].

L'expression de la relation entre les contraintes et les déformations s'écrit comme ci-dessous :

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon^{el}\} \quad (2-39)$$

où,  $\{\sigma\}$ ,  $[D]$  et  $\{\epsilon^{el}\}$  sont respectivement les vecteurs des contraintes, la matrice de la rigidité et le vecteur des déformations élastiques.

Les expressions des vecteurs de contraintes et de déformations sont :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}^T \quad (2-40)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{xy} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{xz}\}^T \quad (2-41)$$

Les expressions des contraintes sont présentées par le vecteur ou le tenseur des contraintes de la Figure 2-13. Les tenseurs symétriques des contraintes et déformations sont donnés par l'équation (2-42) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

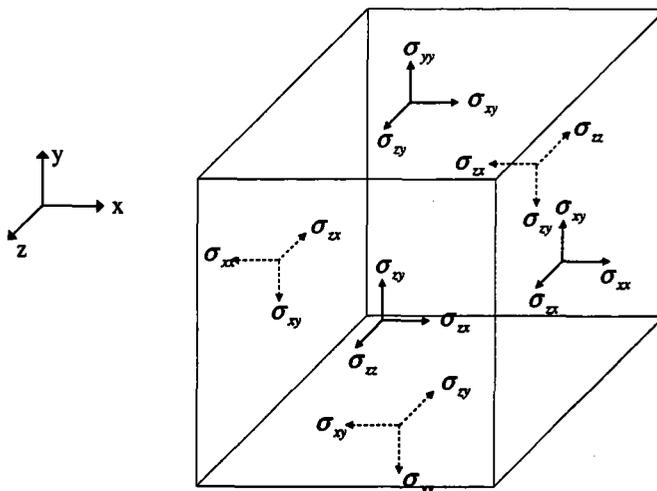


Figure 2-13. Composants du tenseur des contraintes.

En générale, les déformations s'écrivent:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{el}\} + \{\varepsilon^{th}\} \quad (2-43)$$

où,  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{\varepsilon^{el}\}$  et  $\{\varepsilon^{th}\}$  sont respectivement les vecteur des déformations, des déformations élastiques et des déformations thermiques.

Les vecteurs des déformations thermiques sont :

$$\{\varepsilon^{th}\} = \Delta T \{\alpha_{xx} \quad \alpha_{yy} \quad \alpha_{zz} \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (2-44)$$

où  $\Delta T = T_c - T_{Ref}$ ,  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$  et  $\alpha_{zz}$  sont le changement de température, le coefficient de dilatation thermique dans les directions x, y et z respectivement.

L'expression de la relation entre les déformations et les contraintes peut être déduite des équations (2-39) et (2-43):

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{el}\} + \{\varepsilon^{th}\} = [D]^{-1} \{\sigma\} + \{\varepsilon^{th}\} \quad (2-45)$$

La matrice de raideur dans le cas élastique peut être écrite comme ci-dessous :

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{-\nu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{zx}}{E_z} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

où,  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  sont respectivement les modules de Young dans les directions x, y et z.

$G_{xy}$ ,  $G_{yz}$ ,  $G_{xz}$  sont les modules de cisaillement dans les directions, x, y et z.  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yz}$ ,  $\nu_{xz}$  sont les coefficients de Poisson.

Les caractéristiques de symétrie de la matrice des tenseurs de contraintes simplifient la relation (2-46) selon:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}, \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \quad (2-47)$$

L'utilisation de l'équation, (2-47) et l'hypothèse du comportement élastique isotrope conduit à la relation suivante:

$$E_x = E_y = E_z, \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu_{yz} \quad (2-48)$$

Ceci conduit à la loi de Hooke pour un matériau élastique linéaire isotrope, équation (2-49).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \frac{1}{E} & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-49)$$

où,  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$  et  $\alpha$  sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement et le coefficient de dilatation thermique.

L'utilisation du principe des travaux virtuels s'écrit:

$$\delta U = \delta V \quad (2-50)$$

où,  $U$  et  $V$  sont respectivement l'énergie de déformation et les travaux extérieurs. Dans le cas général, on peut écrire :

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 \quad (2-51)$$

$$\delta V = \delta V_1 + \delta V_2 + \delta V_3 \quad (2-52)$$

$$\delta U_1 = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV^T \quad (2-53)$$

L'application des équations (2-39) et (2-43) dans l'équation (2-53) donne :

$$\delta U_1 = \int_V (\{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - \{\delta \varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon^{th}\}) dV \quad (2-54)$$

La relation entre les déformations et déplacements des nœuds s'exprime :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\} \quad (2-55)$$

où,  $\{\varepsilon\}$ ,  $[B]$  et  $\{u\}$  sont respectivement le vecteur des déformations, la matrice de déformation-déplacement basée sur les fonctions d'interpolation et le vecteur des déplacements nodaux. La substitution de l'équation (2-55) dans l'équation (2-54) donne la relation (2-56) :

$$\delta U_1 = \{\delta u\}^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\} - \{\delta u\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (2-57)$$

$\delta U_2$  est l'énergie élastique due à la fondation élastique :

$$\delta U_2 = \int_{A_f} \{\delta w_n\}^T \{\sigma\} dA_f \quad (2-58)$$

où,  $\delta w_n$ ,  $\sigma$  et  $A_f$  sont respectivement le déplacement perpendiculaire à la surface, la contrainte et la surface correspondante. Le déplacement perpendiculaire et la contrainte s'écrivent dans ce cas:

$$\{w_n\} = [N_n] \{u\} \quad (2-58^*)$$

$$\{\sigma\} = k \{w_n\} \quad (2-59)$$

En mettant les équations (2-58\*) et (2-59) dans l'équation (2-58), nous avons la relation suivante :

$$\delta U_2 = \{\delta u\}^T \left( k \int_{A_f} [N_n]^T [N_n] dA_f \right) \{\delta u\} \quad (2-60)$$

où,  $k$  et  $[N_n]$  sont la rigidité de la fondation qui s'exprime par la force sur les surfaces de la fondation et la matrice de fonction d'interpolation pour la fondation.

A présent, nous avons l'expression de l'énergie potentielle:

$$\delta V_1 = -\{\delta u\}^T \left( \rho \int_V [N]^T [N] dV \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (2-61)$$

$$\delta V_2 = \{\delta u\}^T \int_{A_p} [N_n] \{P\} dA_p \quad (2-62)$$

$$\delta V_3 = \{\delta u\}^T \{F_{ex}^{nd}\} \quad (2-63)$$

où,  $\delta V_1$ ,  $\delta V_2$  et  $\delta V_3$  sont respectivement les énergies potentielles basées sur les effets d'inertie, la pression appliquée sur la surface  $A_p$ , les forces nodales extérieures. Les quantités  $\{P\}$ ,  $\rho$  et  $\{F_{ex}^{nd}\}$  correspondent respectivement au vecteur de la pression, à la densité et aux vecteurs des forces extérieures qui s'appliquent aux nœuds.

L'utilisation des équations (2-57), (2-58) et (2-61) à (2-63) donne une relation :

$$\begin{aligned} \{\delta u\}^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{\delta u\} - \{\delta u\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV + \{\delta u\}^T k \left( \int_{A_f} [N_n]^T [N_n] dA_f \right) \{\delta u\} = \\ - \{\delta\}^T \rho \int_V [N]^T [N] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \{\delta\}^T \int_{A_p} [N_n]^T \{P\} dA_p + \{\delta\}^T \{F_{ex}^{nd}\} \end{aligned} \quad (2-64)$$

L'équation (2-64) va être simplifiée par l'élimination du vecteur  $\{\delta\}^T$  :

$$([K_e] + [K_e^f]) \{u\} - \{F_e^{th}\} = [M_e] \{\ddot{u}\} + \{F_e^{pr}\} + \{F_e^{nd}\} \quad (2-65)$$

où,

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (2-66)$$

$$[K_e^f] = k \int_{A_f} [N_n]^T [N] dA_f \quad (2-67)$$

$$[F_e^{th}] = \int_V [B]^T [D] \{\epsilon^{th}\} dV \quad (2-68)$$

$$[M_e] = \rho \int_V [N]^T [N] dV \quad (2-69)$$

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (2-70)$$

$$[F_e^{pr}] = \int_{A_p} [N_n]^T \{P\} dA_p \quad (2-71)$$

Le comportement élastique linéaire isotrope n'existe pas toujours. D'autres comportements pour des matériaux différents sont à envisager (Figure 2-14). Dans la Figure 2-14, 6 différents modèles rhéologique sont présentés. Les Figures 2-14a et 2-14b présentent respectivement les comportements bilinéaires cinématiques et multilinéaires cinématiques. Ces comportements ont été largement utilisés pour les aciers par les logiciels des Eléments Finis. Les Figures 2-14c et 2-14d montrent les comportements bilinéaires isotropes et multilinéaires isotropes. En dernier, les comportements anisotropes et de Drucker sont présentés dans les Figures 2-14e et 2-14f. Le comportement cinématique isotrope de type Drucker est présenté dans la Figure 2-15c.

Généralement, le comportement de type Drucker est souvent utilisé pour les sols et les bétons. Le concept du comportement cinématique et isotrope est présenté dans la Figure 2-16.

Dans les calculs non-linéaires, par la méthode des Eléments Finis, la résolution du système non-linéaire est très importante. Dans un problème non-linéaire apparaissent dans la formulation des problèmes physiques de deux types :

1. Les paramètres physiques sont supposés indépendants de  $\{u\}$  dans un modèle linéaire, tels que le module de Young, les coefficients de conductivité ... etc. Ils deviennent des fonctions de  $\{u\}$  dans le cas de la plasticité et des écoulements non newtoniens.
2. Des termes non-linéaires par rapport aux inconnues du problème apparaissent dans les équations aux dérivées partielles, même lorsque les propriétés physiques sont indépendantes de  $\{u\}$  par exemple en élasticité avec grands déplacements, on a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2-71)$$

où  $\varepsilon_x$ ,  $u$  et  $v$  sont la déformation dans la direction  $x$ , le déplacement dans la direction  $x$  et le déplacement dans la direction  $y$  respectivement.

La méthode des Eléments Finis conduit à une formulation discrétisée des problèmes non-linéaires qui peut s'écrire :

$$\delta \Pi = \delta U + \delta V = \{\delta\}^T ([K(u)]\{u\} - \{F\}) = 0 \quad \text{pour } \{\delta\}^T \neq 0 \quad (2-72)$$

L'équation (2-72) peut s'écrire sous la forme simplifiée (2-73).

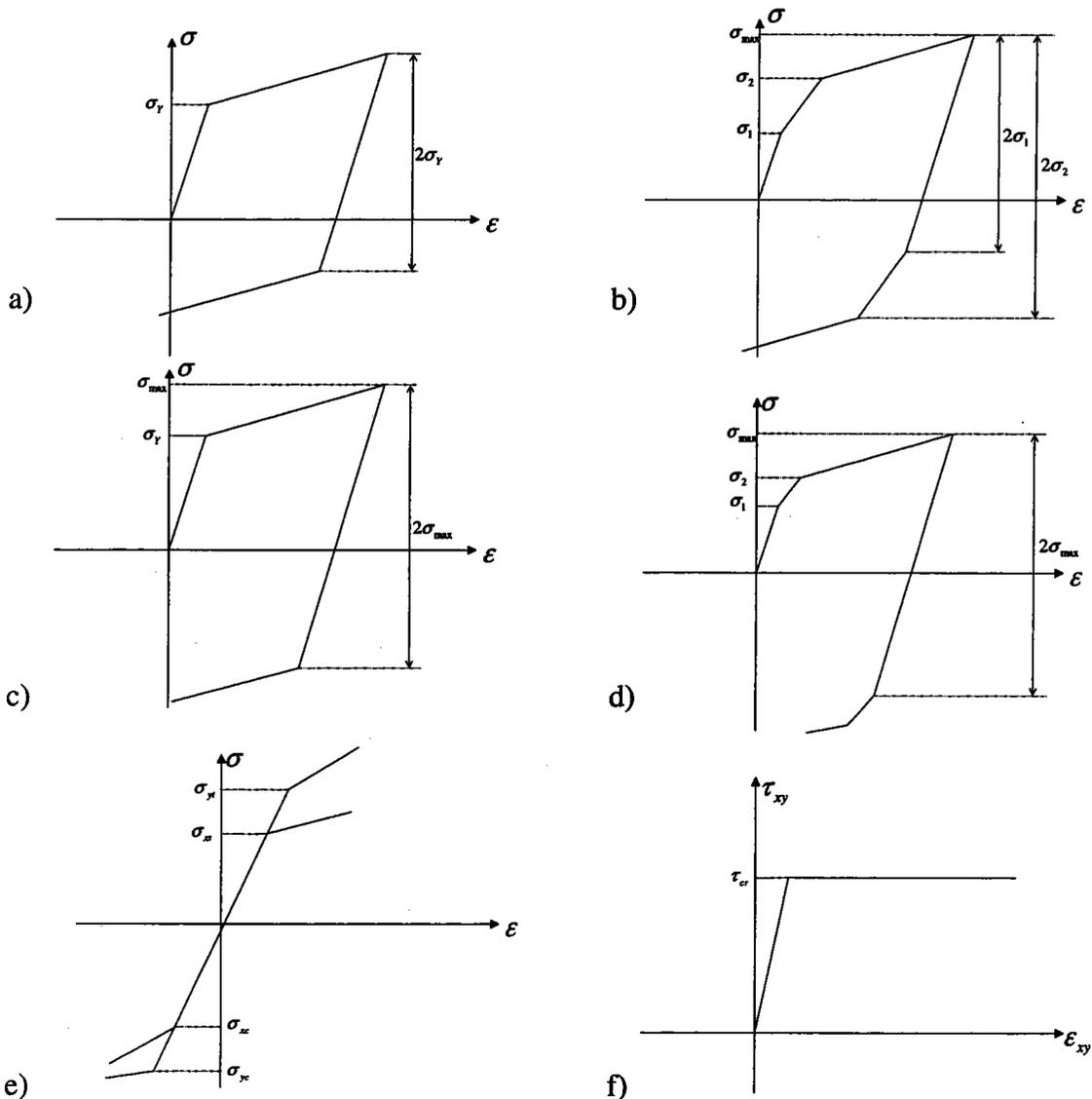


Figure 2-14. Différents comportements qui s'appliquent généralement dans les calculs par Eléments Finis a) bilinéaire cinématique b) multilinéaire cinématique c) bilinéaire isotrope d) multilinéaire isotrope e) anisotrope f) Type Drucker.

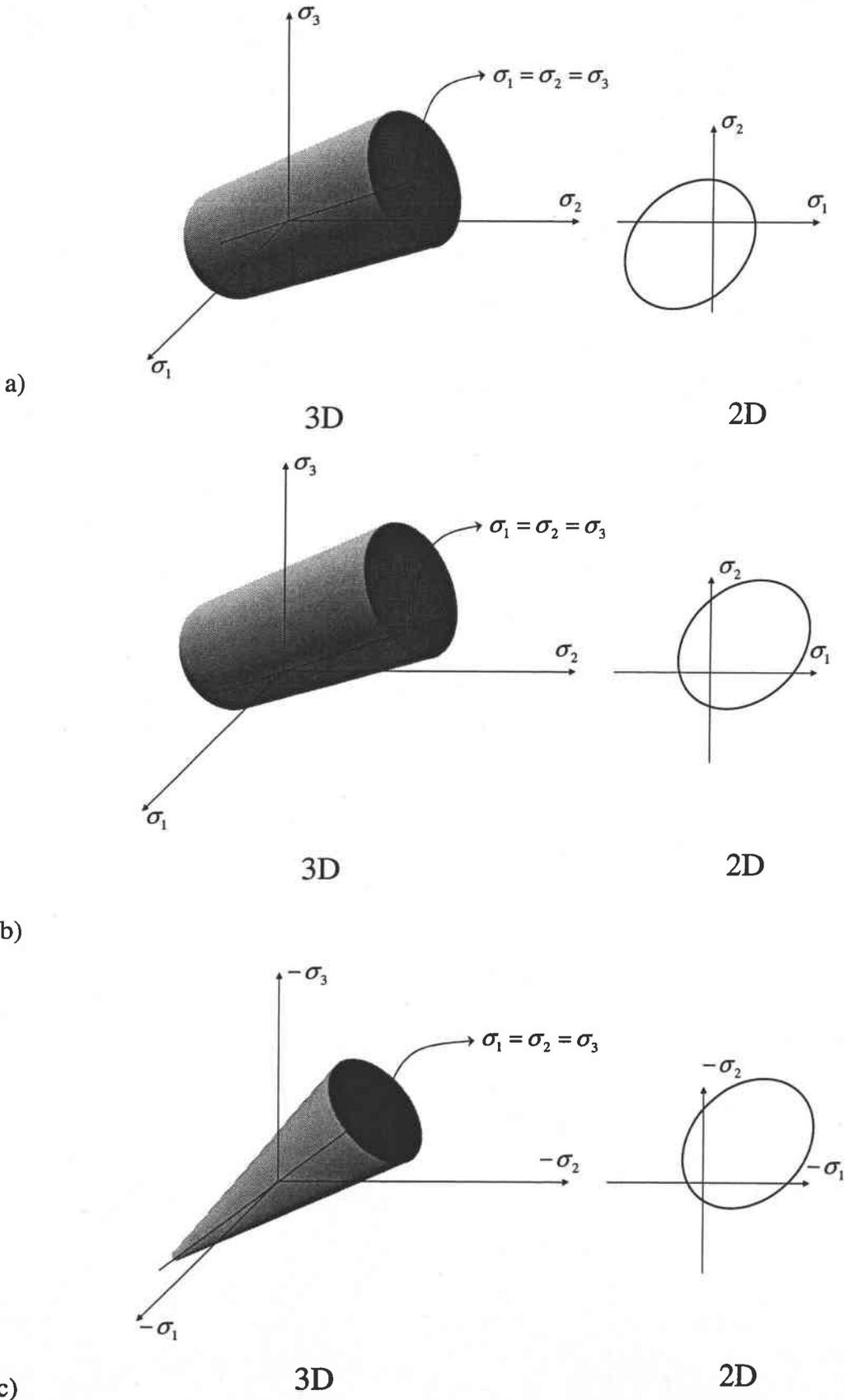


Figure 2-15 Présentation du comportement a) cinématique b) anisotrope c) Type Drucker dans les cas bi-dimensionnels et tri-dimensionnels.

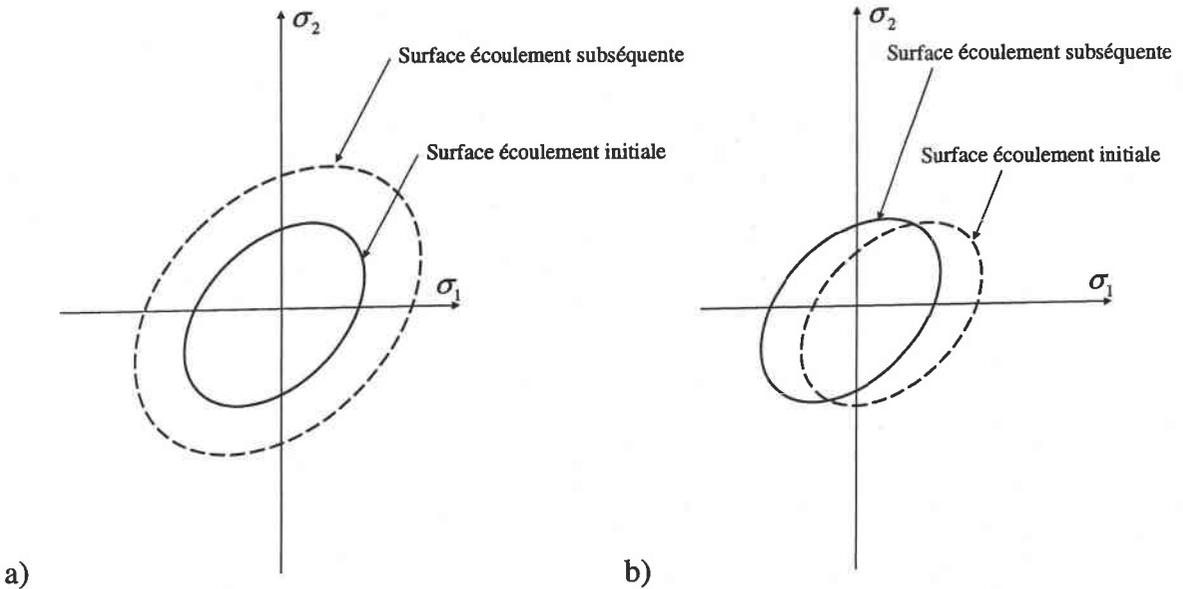


Figure 2-16 Comportement isotrope et cinématique tel qu'il existe dans des matériaux non-linéaires élasto-plastiques.

$$[K(u)]\{u\} = \{F\} \quad \text{ou} \quad \{R(u)\} = \{F\} - [K(u)]\{u\} = 0 \quad (2-73)$$

où  $[K(u)]$ ,  $\{u\}$ ,  $\{F\}$  et  $\{R(u)\}$  sont respectivement la matrice de rigidité, le vecteur de déplacement, le vecteur de la force nodale et le vecteur de résidu.

Dans certains cas en plasticité, la forme de l'équation (2-73) sera incrémentale:

$$[K(u)]\{\Delta u\} = \{\Delta F\} \quad (2-74)$$

Pour résoudre ce système non-linéaire (2-73), il faut chercher un vecteur  $\{u\}$  qui rend le résidu  $\{R(u)\}$  aussi proche que possible de zéro. La solution exacte rend  $\{R(u)\}$  nul.

La recherche de la solution  $\{u\}$  se fait de manière itérative (Figure 2-17).

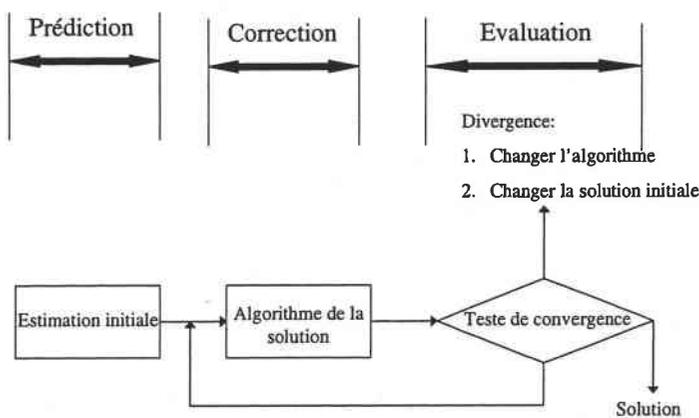


Figure 2-17 Algorithme itératif pour les cas non-linéaires et élasto-plastiques.

La majorité des algorithmes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Le choix d'un algorithme de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs :

1. Le type de non-linéarité : localisée ou non, prépondérante ou non
2. L'existence d'une ou plusieurs solutions
3. La disponibilité d'une méthode de construction d'une solution approchée
4. La précision et la rapidité des convergences désirées
5. Le risque de divergence

En pratique, il n'existe pas de méthode générale valable pour tous les cas ; la stratégie de résolution doit s'adapter par expérience à une classe de problèmes donnée et en faisant appel à une combinaison des trois méthodes de base suivantes :

- Méthode de substitution
- Méthode de Newton-Raphson
- Méthode incrémentale

### Méthode de Substitution

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions  $\{u^0\}$ ,  $\{u^1\}$  ...  $\{u^i\}$  calculées à partir de  $\{u^{i-1}\}$  en résolvant le système linéaire :

$$[K(u^{i-1})]\{u^i\} = \{F\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2-75)$$

Ce qui peut s'écrire sous forme incrémentale en introduisant le résidu  $\{R^i\}$ :

$$\begin{aligned} \{R^i\} &= \{R(u^{i-1})\} = \{F\} - [K(u^{i-1})]\{u^{i-1}\} \\ [K(u^{i-1})]\{\Delta u^{i-1}\} &= \{R^i\} \\ \{u^i\} &= \{u^{i-1}\} + \{\Delta u^i\} \end{aligned} \quad (2-76)$$

Le vecteur  $\{u^{i-1}\}$  étant connu, il est possible de construire les matrices élémentaires  $[k(u^{i-1})]$ , puis de les assembler pour obtenir  $[K(u^{i-1})]$ , et enfin résoudre le système linéaire (2-76) en  $\Delta u^i$  par l'une des méthodes.

L'algorithme correspondant à (2-76) est le suivant :

1. Calculer une solution approchée  $\{u^0\}$ , éventuellement nulle.
2. Construire  $\{F\}$  par assemblage des vecteurs élémentaires  $\{f\}$ .

3.  $i = 1, 2, \dots$  (pour chaque itération)
4. Pour chaque élément :
  - a. Extraire les valeurs des déplacements  $\{u_e^{i-1}\}$  de  $\{u^{i-1}\}$
  - b. Calculer la matrice de rigidité élémentaire,  $[k(u^{i-1})]$
  - c. Calculer le résidu élémentaire  $\{r\} = \{f\} - [k]\{u_e^{i-1}\}$
  - d. Assembler comme dans un problème linéaire :
 
$$[k] \text{ dans } [K] \quad (2-77)$$

$$\{r\} \text{ dans } \{R^i\} \quad (2-78)$$
5. Résoudre comme dans un problème linéaire :  $[K]\{\Delta u^i\} = \{R^i\}$
6. Construire la nouvelle estimation de la solution :  $\{u^i\} = \{u^{i-1}\} + \omega\{\Delta u^i\}$
7. Calculer la norme  $\|n\|$  de  $\{\Delta u^i\}$  ou  $\|m\|$  de  $\{R^i\}$
8. Appliquer un test de convergence utilisant  $\|n\|$  ou  $\|m\|$ .

Le facteur de sur-relaxation  $\omega$  utilisé dans le stade 6 permet souvent d'améliorer la vitesse de convergence. Sa valeur optimale dépend du problème ; elle est déterminée par l'expérience en calcul numérique. Dans les problèmes de plasticité par exemple, elle se situe entre 1.7 et 1.9. La méthode sans sur-relaxation correspond à  $\omega = 1$ .

Pour le test de convergence à l'itération  $i$ , il est nécessaire d'utiliser soit la norme maximale :

$$\|n\| = \text{Max}_j |\Delta u_j|^i \quad \text{ou} \quad \|m\| = \text{Max}_j |\Delta R_j|^i \quad (2-79)$$

soit la norme des moindres carrés :

$$\|n\| = \sqrt{\{\Delta u^i\}^T \{\Delta u^i\}} \quad \text{ou} \quad \|m\| = \sqrt{\{\Delta R^i\}^T \{\Delta R^i\}} \quad (2-80)$$

En pratique, des normes relatives sont fréquemment utilisées :

$$\|n\| = \text{Max}_j \left| \frac{\Delta u_j}{u_j} \right|^i \quad (2-81)$$

Si  $u_j$  est très petit par rapport à la valeur moyenne des termes de  $\{u\}$  ou égale à zéro,  $u_j$  s'écrit:

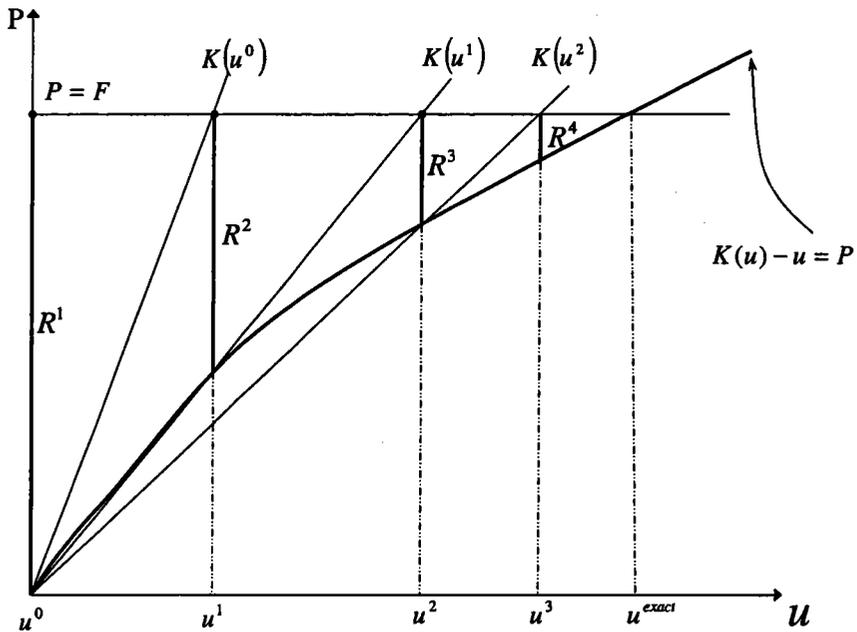
$$\|n\| = \frac{\sqrt{\{\Delta u^i\}^T \{\Delta u^i\}}}{\sqrt{\{u^i\}^T \{u^i\}}} \quad (2-82)$$

Le processus itératif est arrêté lorsque :

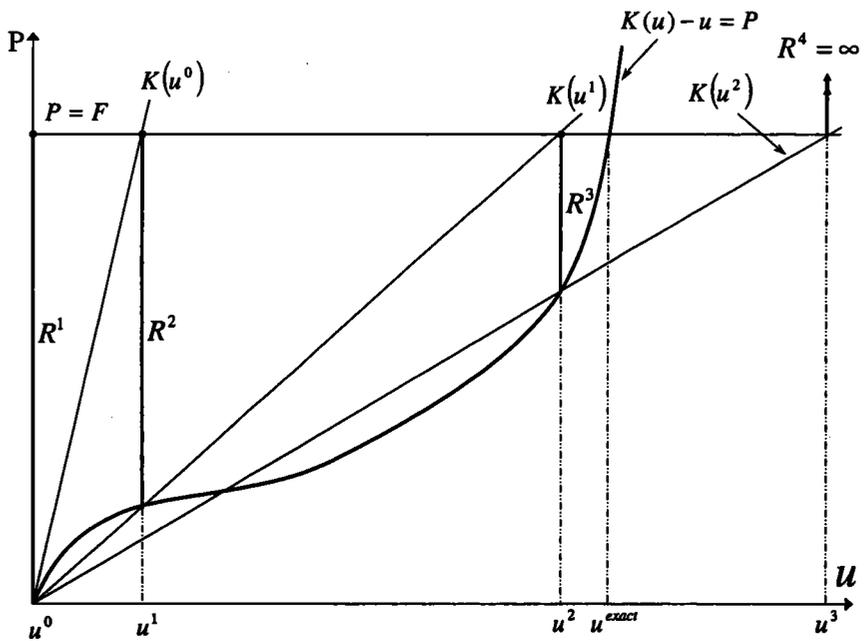
$$\|n\| < \varepsilon \tag{2-83}$$

Par exemple, pour la normale (2-82) :  $\varepsilon = 0.05$

Dans un problème à une variable, l'algorithme de substitution est présenté graphiquement sur la Figure (2-18) de manière à souligner les possibilités de divergence.



a)



b)

Figure 2-18 Algorithme itératif pour un comportement non-linéaire élasto-plastique, méthode de substitution a) Convergence b) Divergence.

Reformulons l'équation (2-76) en décomposant  $[K]$  en la somme d'une matrice  $[K_l]$  constante et d'une matrice  $[K_n]$  fonction de  $u$  :

$$([K_l] + [K_n(u^{i-1})])\{\Delta u^i\} = \{R^i\} \quad (2-84)$$

$[K_l]$ ,  $[K_n]$ ,  $\{\Delta u^i\}$  et  $\{R^i\}$  sont respectivement les matrices construites par assemblage des matrices élémentaires linéaires  $[k_l]$ . Cette matrice est fonction de  $u$  le déplacement, incrémenté pour les déplacements et du résidu pour l'évaluation de l'exactitude des calculs.

Dans l'algorithme de l'équation (2-76), il faut assembler et décomposer  $[K]$  à chaque itération, ce qui est très coûteux. En négligeant  $[K_n]$  dans l'équation (2-84), l'équation suivante s'écrit:

$$[K_l]\{\Delta u^i\} = \{R^i\} \quad (2-85)$$

$$\{u^i\} = \{u^{i-1}\} + \{\Delta u^i\} \quad (2-86)$$

La matrice  $[K_l]$  peut être décomposée une seule fois ; A chaque itération il suffit de calculer  $\{R^i\}$  puis d'évaluer  $\{\Delta u^i\}$  à partir de  $[K_l]$  déjà décomposée.

### Méthode de Newton-Raphson modifiée

1. Calculer une solution approchée  $\{u^0\}$ , éventuellement nulle.
2. Construire  $\{F\}$  par assemblage des vecteurs élémentaires  $\{f\}$ .
3. Construire  $[K_l]$  par assemblage des matrices élémentaires linéaires  $[k_l]$ .
4. Décomposer  $[K_l]$ .
5.  $i = 1, 2, \dots$  (pour chaque itération)
6. Extraire  $\{u_e^{i-1}\}$  de  $\{u^{i-1}\}$  pour chaque élément.
7. Calculer le résidu  $\{R^i\}$  par assemblage des résidus élémentaires :

$$\{r\} = \{f\} - [k]\{u^{i-1}\} \quad (2-87)$$

8. Résoudre  $[K_l]\{\Delta u^i\} = \{R^i\}$  à partir de  $[K_l]$  décomposée.
9. Calculer  $\{u^i\} = \{u^{i-1}\} + \{\Delta u^i\}$  (en supposant  $\omega = 1$ )
10. Calculer  $\|n\|$ .
11. Test de convergence utilisant  $\|n\|$ .

Cet algorithme est présenté graphiquement dans le cas d'une variable sur la Figure 2-19. Dans l'algorithme de la méthode de Newton-Raphson modifié, la matrice  $[K_i]$  est assemblée et décomposée une seule fois, alors que dans l'algorithme de substitution, il faut assembler et décomposer  $[K]$  à chaque itération. L'algorithme de Newton-Raphson modifié est souvent employé dans le cas d'un comportement faiblement non-linéaire. Par contre, pour les problèmes fortement non-linéaires, la méthode de Newton-Raphson est plus souvent utilisée que la méthode de substitution.

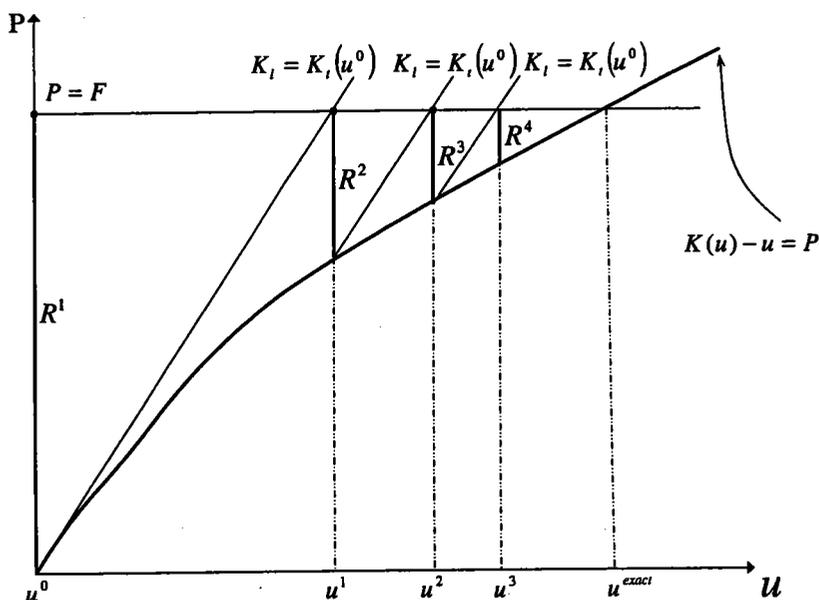


Figure 2-19 Algorithme itératif dans la non-linéaire élasto-plastique, la méthode de Newton-Raphson modifié.

La méthode Newton-Raphson pour les problèmes fortement non-linéaires converge en général plus rapidement.

### La méthode de Newton-Raphson

Supposons qu'à l'itération  $i-1$ , nous avons obtenu une approximation  $u^{i-1}$  de la solution telle que le résidu ne soit pas nul.

$$\{R(u^{i-1})\} = \{F\} - [K(u^{i-1})]\{u^{i-1}\} \neq 0 \tag{2-88}$$

A l'itération  $i$ , une approximation  $u^i$  de la solution peut être proposée ci-dessous :

$$\{R(u^i)\} = \{R(u^{i-1} + \Delta u^i)\} \approx 0 \tag{2-89}$$

L'algorithme est obtenu en développant ce résidu en série de Taylor au voisinage de  $u^{i-1}$  :

$$\{R(u^i + \Delta u^i)\} = \{R(u^{i-1})\} + \left[ \frac{\partial R}{\partial U} \right]_{u=u^{i-1}} \{\Delta u^i\} + \dots = 0 \quad (2-90)$$

D'où, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$-\left[ \frac{\partial R}{\partial u} \right]_{u=u^{i-1}} \{\Delta u^i\} + \dots = \{R(u^{i-1})\} \quad (2-91)$$

ou :

$$\begin{aligned} [K_i(u^{i-1})] \{\Delta u^i\} &= \{R(u^{i-1})\} \\ \{u^i\} &= \{u^{i-1}\} + \{\Delta u^i\} \end{aligned} \quad (2-92)$$

L'expression de la matrice tangente  $[K_i(u^{i-1})]$  s'obtient en dérivant l'expression (2-73) du résidu :

$$[K_i(u)] = -\left[ \frac{\partial R}{\partial u} \right] = -\left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right] + [K(u)] + \left[ \frac{\partial [K(u)]}{\partial u} \right] \{u\} \quad (2-93)$$

Dans le cas où F est indépendant de u :

$$[K_i(u)] = [K(u)] + \left[ \frac{\partial [K(u)]}{\partial u} \right] \{u\} \quad (2-94)$$

L'expression (2-94) s'écrit sous la forme indicelle, ci-dessous :

$$(K_i)_{ij} = K_{ij} + \sum_l \frac{\partial K_{il}}{\partial u_j} u_l \quad (2-95)$$

L'algorithme correspondant à l'équation (2-92) ressemble à l'algorithme de la méthode de substitution, cependant  $[K]$  est remplacé par  $[K_i]$ . Il est présenté graphiquement sur la Figure 2-20, dans le cas d'une seule variable.

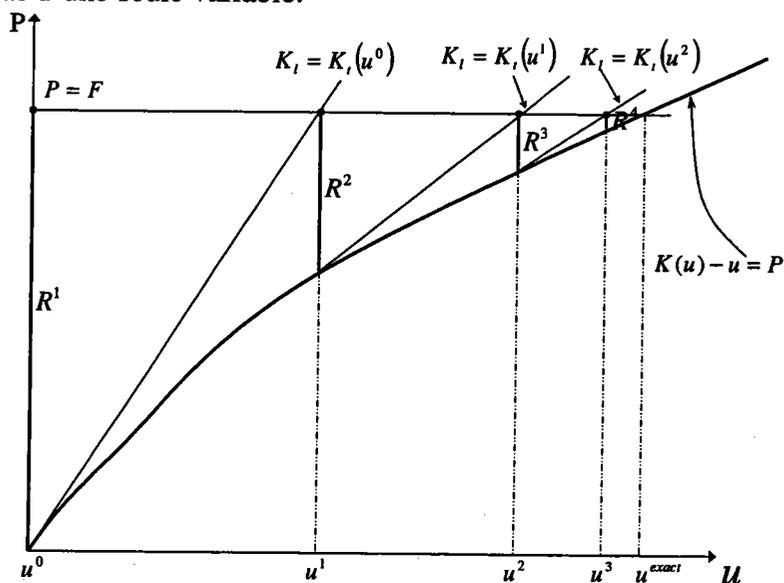


Figure 2-20 Algorithme itératif dans la non-linéaire élasto-plastique, la méthode de Newton-Raphson.

La matrice tangente globale  $[K_i]$  est obtenue en pratique par assemblage des matrices élémentaires tangentes  $[k_i]$ .

### Méthode incrémentale (Pas à Pas)

La solution initiale joue un rôle important dans les méthodes itératives précédentes. Selon le choix de cette solution, les méthodes peuvent diverger ou converger vers une solution non acceptable.

La méthode incrémentale consiste à remplacer la résolution de

$$[K(u)]\{u\} = \lambda_j \{F_0\} = \{F\} \tag{2-96}$$

par la résolution successive de

$$[K(u_j)]\{u_j\} = \lambda_j \{F_0\} \tag{2-97}$$

où  $[K(u_j)]$ ,  $\{u_j\}$  et  $\{F\} = \lambda_j \{F_0\}$  sont la matrice de rigidité au j eme pas, le vecteur déplacement global et le vecteur des forces appliquées. Dans la relation (2-97),  $\lambda_j$  s'exprime comme ci-dessous :

$$\lambda_j = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \tag{2-98}$$

La solution initiale utilisée pour calculer  $u_j$  est la solution  $u_{j-1}$  obtenue à l'étape précédente. Chaque étape constitue un problème non-linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations de la méthode Newton-Raphson ou de la méthode de Newton-Raphson modifiée. La méthode incrémentale utilise une itération de Newton-Raphson à chaque étape et s'écrit pour un niveau donné de sollicitations  $\lambda_j$  :

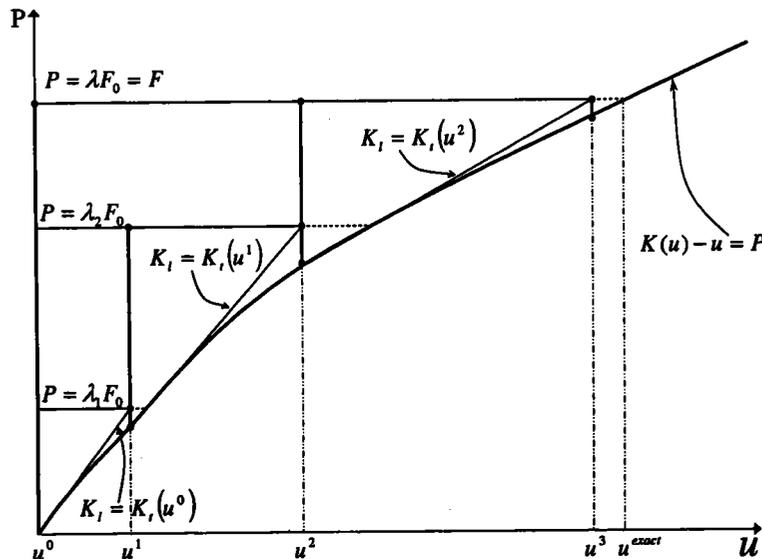


Figure 2-21 Algorithme itératif, méthode incrémentale ou pas à pas avec une itération de Newton-Raphson.

$$\begin{aligned}
 \{R(u_{j-1})\} &= \lambda_{j-1}\{F_0\} - [K(u_{j-1})]\{u_{j-1}\} \\
 [K_t(u_{j-1})]\{\Delta u_j\} &= \{R(u_{j-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1})\{F_0\} \\
 \{u_j\} &= \{u_{j-1}\} + \{\Delta u_j\}
 \end{aligned}
 \tag{2-99}$$

Cet algorithme est présenté graphiquement pour une variable sur la Figure 2-21.

La méthode incrémentale utilisant plusieurs itérations de Newton-Raphson s'écrit pour un niveau donné de sollicitations  $\lambda_j$  :

$$\begin{aligned}
 [K_t(u_j^{i-1})]\{\Delta u_j^i\} &= \{R(u_j^{i-1})\} + (\lambda_j - \lambda_{j-1})\{F_0\} \\
 \{u_j^i\} &= \{u_j^{i-1}\} + \{\Delta u_j^i\}, \quad i = 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{2-100}$$

pour  $i = 1$ , on utilise directement (2-99).

Toutes les méthodes précédentes peuvent se ramener à un seul algorithme qui, à un niveau de sollicitation donné, est schématisé ainsi :

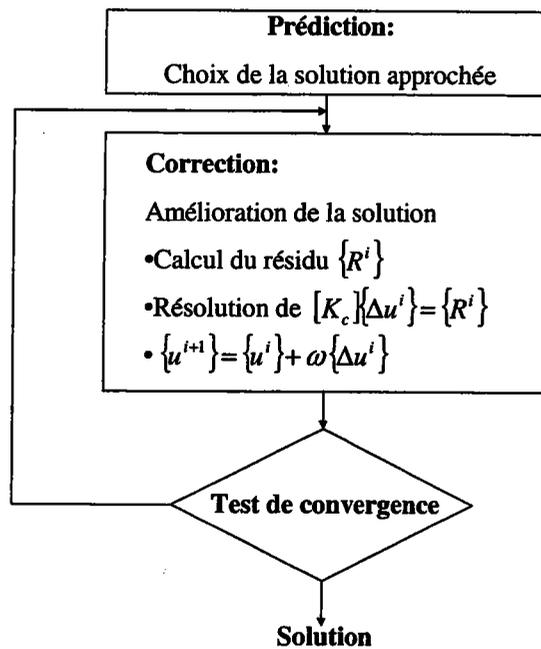


Figure 2-22 Algorithme général itératif dans le cas d'un comportement non-linéaire élasto-plastique.

Quelle que soit la méthode utilisée, l'expression du résidu  $\{R\}$  reste la même car elle est caractéristique de l'équation à résoudre. Par contre l'expression de la matrice  $[K_c]$  varie d'une méthode à l'autre et influence la vitesse de convergence :

$$[K_c] = [K] \quad \text{pour la méthode de substitution}$$

$$[K_c] = [K_t] \quad \text{pour la méthode de Newton-Raphson modifiée}$$

$[K_c] = [K_t]$  pour la méthode de Newton-Raphson

En choisissant, d'autres expressions de  $[K_c]$ , nous pouvons retrouver les méthodes itératives utilisées pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. Le facteur de sur-relaxation  $\omega$  permet souvent d'améliorer la vitesse de convergence. Le facteur de sur-relaxation est généralement très efficace dans les cas de grands problèmes qui sont à résoudre fréquemment. Il peut être trouvé par essai et erreur avec un algorithme interne à la méthode des Eléments Finis.

Le choix d'une des options précédentes dépend du problème traité. Il est parfois nécessaire d'utiliser des pas de sollicitation très petits pour des raisons de convergence ou parce que la formation du problème est de nature incrémentale comme en plasticité. Il peut alors suffire d'un nombre réduit d'itération par pas. Les méthodes pas à pas avec utilisation des méthodes Newton-Raphson et Newton-Raphson modifiée sont souvent appliquées dans le calcul en plasticité par les logiciels d'Eléments Finis.

## 2.3 Concept de facteur de concentration des contraintes

La distribution des contraintes au voisinage d'une entaille joue un rôle très important. Il est notamment nécessaire d'évaluer le maximum de cette distribution en fond d'entaille. Le facteur de concentration des contraintes est proposé pour évaluer ce maximum.

Dan le domaine élastique Peterson [4] définit le facteur de concentration de contraintes de deux façons :

1. Le rapport de la contrainte maximale à fond d'entaille et la contrainte nominale.
2. Le rapport de la contrainte maximale à fond d'entaille et la contrainte globale.

La forme générale du facteur de concentration de contrainte peut s'écrire:

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_g} \quad (2-101)$$

où  $k_t$ ,  $\sigma_{\max}$  et  $\sigma_g$  sont respectivement le facteur de concentration de contraintes, la contrainte élastique maximale à fond d'entaille et la contrainte globale appliquée loin du fond d'entaille.

Il représente le facteur d'amplification de la contrainte globale appliquée. Dans le cas d'un petit trou dans une plaque, la concentration de contrainte dépend aussi du chargement appliqué (Figure 2-23).

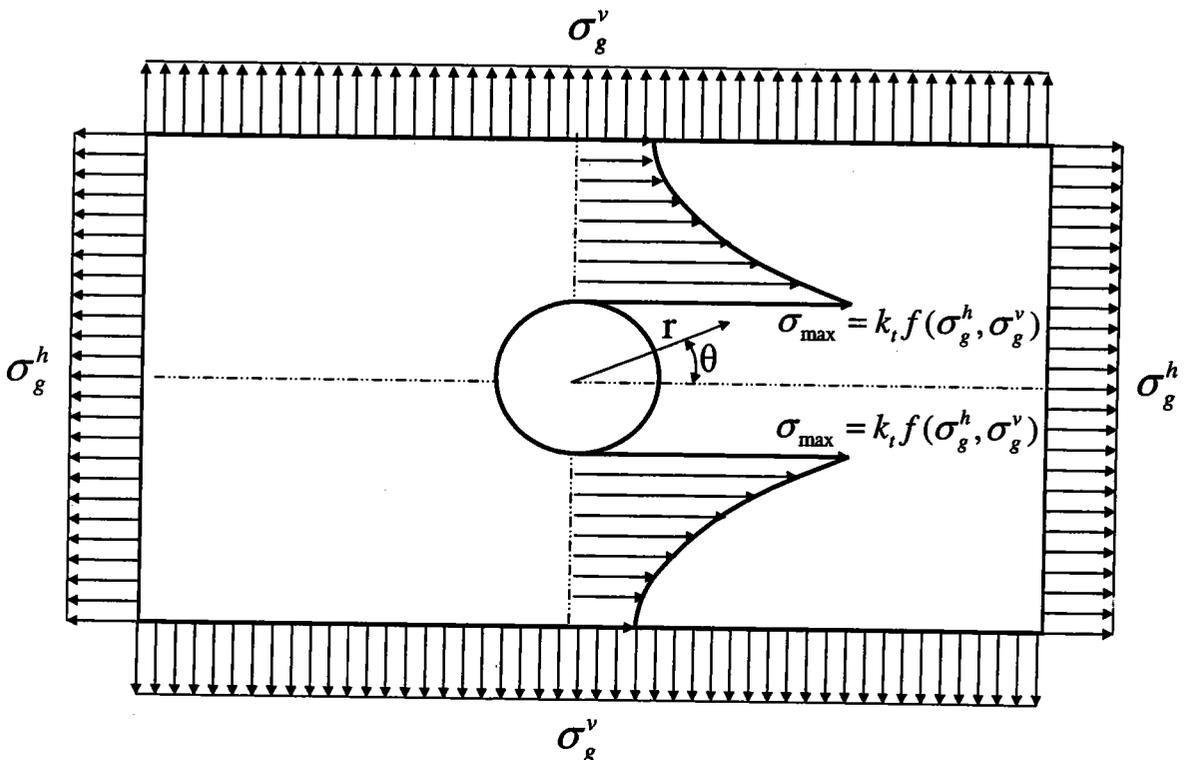


Figure 2-23 Distribution des contraintes dans le cas d'un trou dans une plaque y compris le chargement général.

Dans la Figure 2-23,  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_g^h$ ,  $\sigma_g^v$ ,  $k_t$  et  $f(\sigma_g^h, \sigma_g^v)$  sont respectivement la contrainte maximale, la contrainte globale horizontale, la contrainte globale verticale, le facteur de concentration de contraintes et la fonction du chargement.

Le Tableau 2-2 rassemble les valeurs du facteur de concentration de contraintes pour les différents cas de chargement:

Tableau 2-2 Différents chargements et facteur de concentration de contraintes pour un petit trou dans une plaque.

TYPE DU CHARGEMENT	$\sigma_g^h$	$\sigma_g^v$	$f(\sigma_g^h, \sigma_g^v)$	$k_t$	$\sigma_{\max} = k_t f(\sigma_g^h, \sigma_g^v)$
1	$\sigma_0$	0	$\sigma_0$	3	$\sigma_{\max} = 3\sigma_0$
2	$\sigma_0$	$\sigma_0$	$\sigma_0$	2	$\sigma_{\max} = 2\sigma_0$
3	$\sigma_0$	$-\sigma_0$	$\sigma_0$	4	$\sigma_{\max} = 4\sigma_0$

Les valeurs du facteur de concentration des contraintes sont obtenues par les calculs analytiques. Par exemple, le calcul analytique pour le type de chargement 1 du Tableau 2-2 a été déjà donné par les équations (2-10) à (2-12). Les équations mentionnées sont écrites ci-dessous :

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2-102)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (2-103)$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_0} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (2-104)$$

La contrainte circonférentielle est la plus élevée et le rapport entre les contraintes circonférentielles et globales sera utilisé pour définir le facteur de concentration de contraintes. La contrainte circonférentielle maximale peut s'écrire:

$$\left\{ r = a, \theta = \frac{\pi}{2} \right\} \xrightarrow{(2-103)} \frac{\left( \sigma_\theta \Big|_{r=a, \theta=\frac{\pi}{2}} \right)}{\sigma_0} = 3 \quad \text{ou} \quad k_t = \frac{\left( \sigma_\theta \Big|_{r=a, \theta=\frac{\pi}{2}} \right)}{\sigma_0} = 3 \quad (2-105)$$

Le facteur de concentration de contraintes dépend donc du type du chargement appliqué (Tableau 2-2).

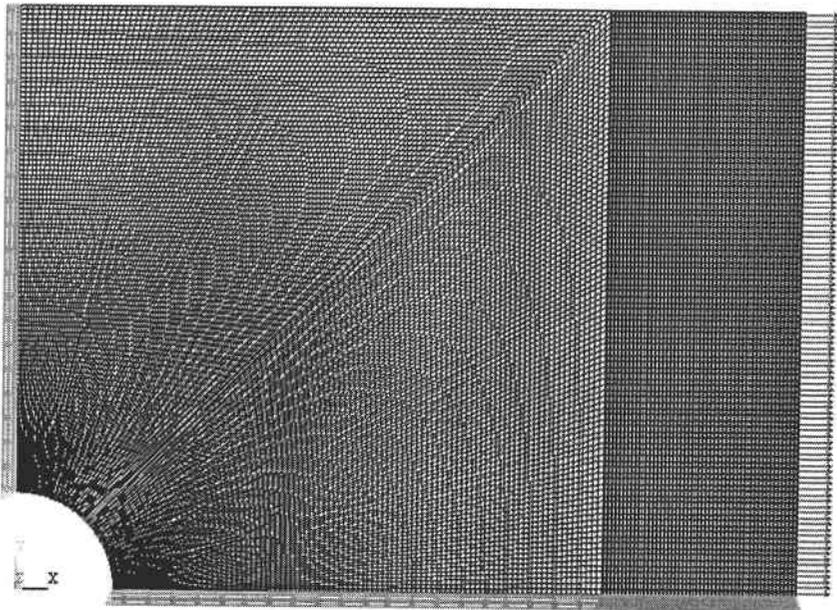
Les facteurs de concentration de contraintes peuvent être obtenus par des calculs analytiques, des travaux expérimentaux ou calcul par Eléments Finis.

### • Exemple

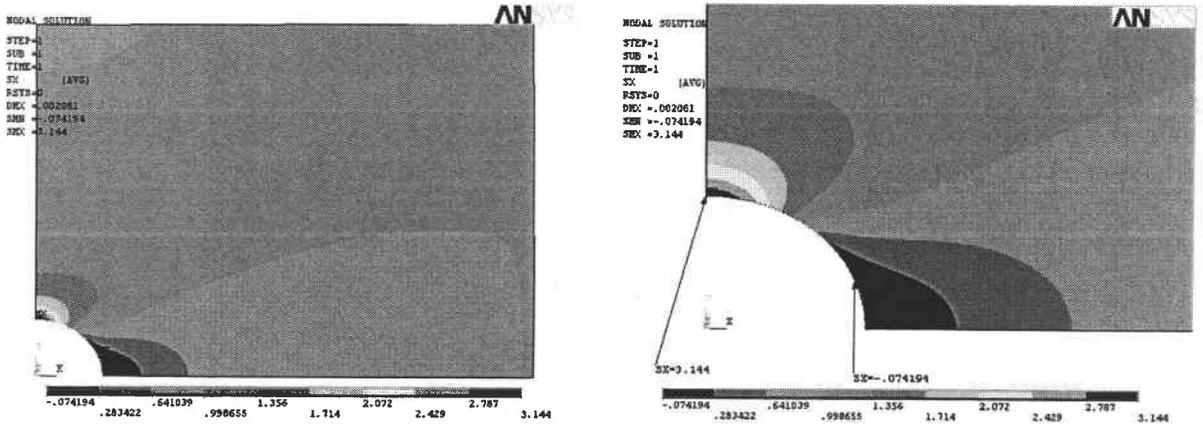
Nous avons pris la géométrie suivante pour calculer le champ de contraintes par le code du calcul Eléments Finis. Dans la Figure 2-24, le calcul par Eléments Finis et la solution analytique sont comparés pour le cas d'un petit trou dans une grande plaque.

Les conditions du calcul par Eléments Finis pour le problème mentionné sont données ci-dessous:

- Module de Young  $E=210$  GPa
- Coefficient de Poisson  $\nu=0.30$
- Hypothèse d'un comportement mécanique élastique linéaire
- Contrainte globale  $\sigma_g^h = 1$  MPa et  $\sigma_g^v = 0$  MPa
- Hypothèse de contraintes planes
- Symétrie double pour le modèle Eléments Finis
- Longueur de plaque  $L=0.800$  m
- Largeur de plaque  $W=0.600$  m
- Rayon du trou  $r=0.050$  m
- Epaisseur de la plaque  $B=0.001$  m



a)



b) c)

Figure 2-24 Distribution des contraintes dans le cas d'un trou dans une grande plaque pour un chargement  $\sigma_g^h = \sigma_0$  ,  $\sigma_g^v = 0$  a) Maillages et conditions aux limites b) Composantes de la contrainte dans la direction x c) schéma des contraintes au voisinage du trou.

Dans la Figure 2-24, la distribution de contrainte  $\sigma_{xx}$  est présentée. L'utilisation de contrainte globale  $\sigma_g^h = 1$  MPa permet de représenter la distribution des facteurs de concentration de contraintes.

La comparaison entre le calcul par Eléments Finis et la solution analytique est montrée dans la Figure 2-25.

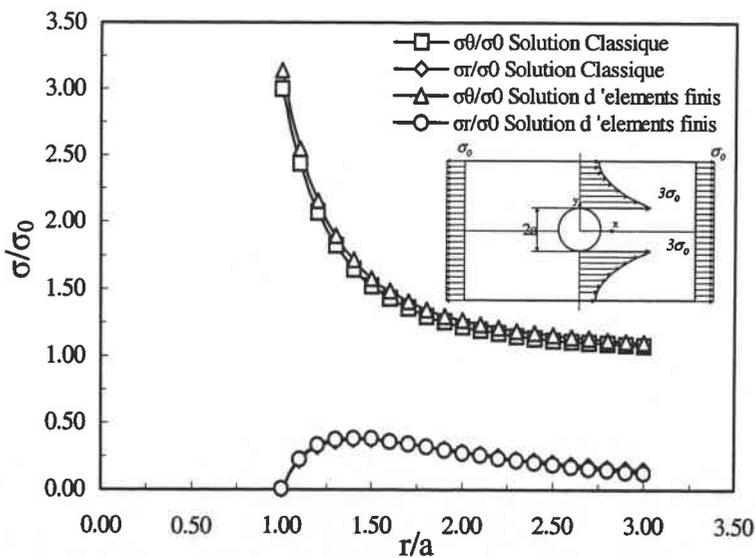
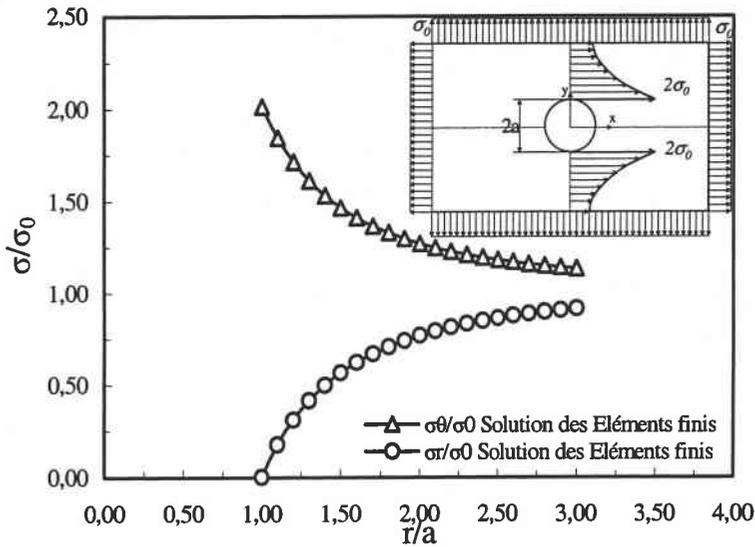
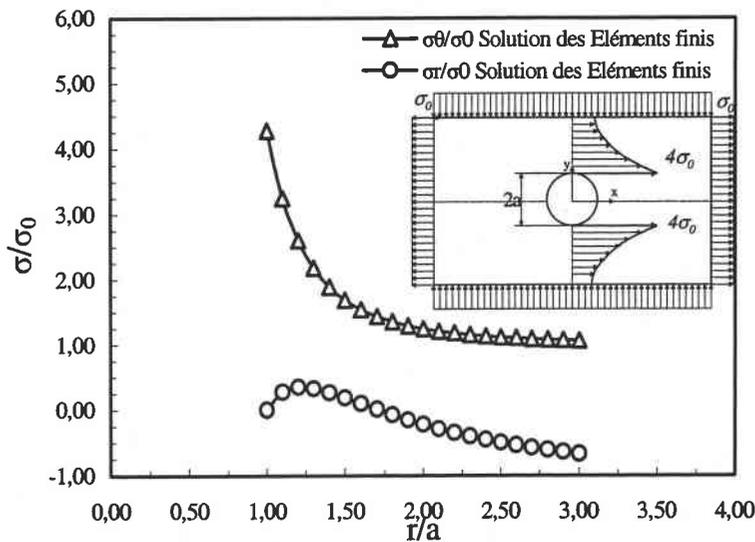


Figure 2-25 Comparaison entre la solution analytique et le calcul par Eléments Finis pour le problème d'un petit trou dans une grande plaque avec un chargement horizontal de traction [28].

où  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_0$  sont respectivement la contrainte radiale, la contrainte circonférentielle et la contrainte globale.



a)



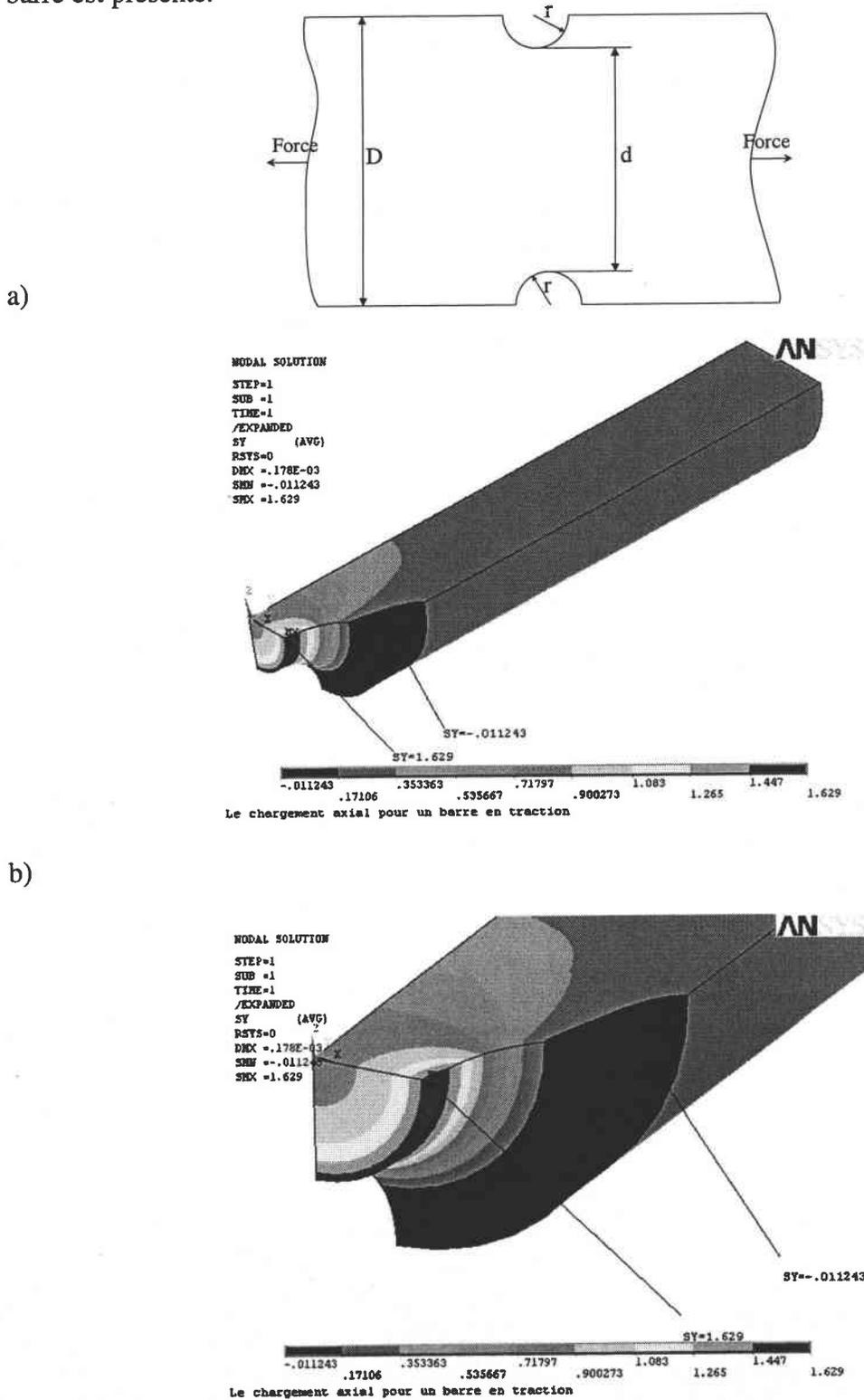
b)

Figure 2-26 Distribution des contraintes dans le cas d'un trou dans une plaque pour les composantes radiales et circonférentielles dans une plaque y compris le chargement a)  $\sigma_g^h = \sigma_0$  ,  $\sigma_g^v = \sigma_0$  b)

$$\sigma_g^h = \sigma_0, \sigma_g^v = -\sigma_0.$$

Le facteur de concentration de contraintes dépend aussi de la géométrie des éprouvettes.

Dans la Figure 2-27, une barre en traction est considérée et un huitième de la géométrie de la barre est présenté.

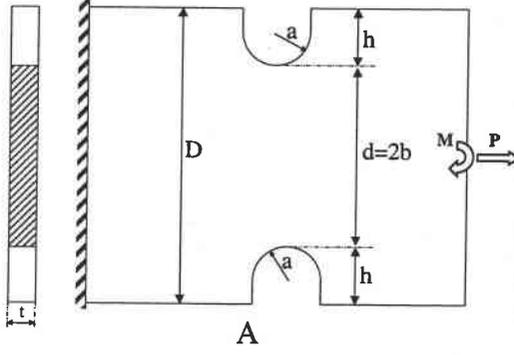
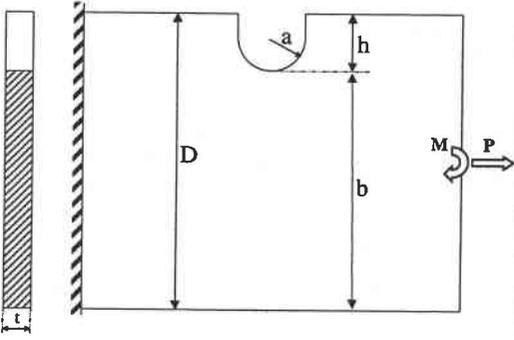
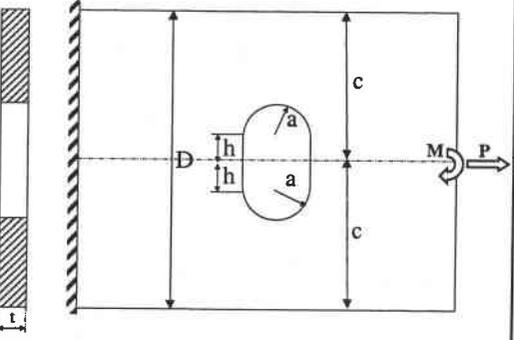


c) Figure 2-27 Distribution des contraintes dans le cas d'une barre en traction  $D=0.04$  m,  $d=0.02$  m,  $r=0.01$  m,  $\sigma_0 = 1$  MPa a) Schéma b) Composantes y des contraintes c) Gradient de contrainte dans la région critique.

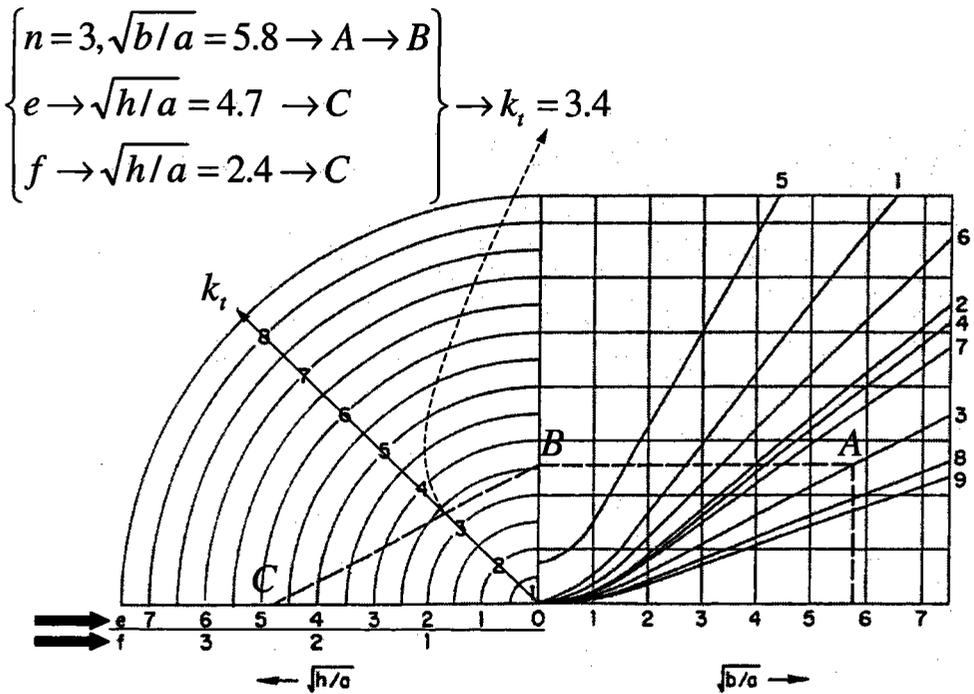
Le facteur de concentration des contraintes change avec la variation des rapports D/d et r/d. L'évolution du facteur de concentration de contraintes en fonction de la géométrie est généralement présentée dans des formulaires.

Dans le Tableau 2-3, les types de changement de section sont présentés. Ces changements de géométrie provoquent des modifications du facteur de concentration de contrainte.

Tableau 2-3 Types de changement des sections et chargement dans les cas de contraintes planes et axisymétriques [28].

TYPE DU CHANGEMENT DES SECTIONS	CHARGEMENT	Contrainte nominale	Eshelle $\sqrt{h/a}$	Cas n
 <p style="text-align: center;">A</p>	Traction	$\frac{P}{2bt}$	f	1
	Flexion	$\frac{3M}{2b^2t}$	f	2
 <p style="text-align: center;">B</p>	Traction	$\frac{P}{bt}$	f	3
	Flexion	$\frac{6M}{b^2t}$	f	4
 <p style="text-align: center;">C</p>	Tension	$\frac{P}{2bt}$	f	5
	Flexion	$\frac{3Mh}{2t(c^3 - h^3)}$	e	5

	Tension	$\frac{P}{\pi b^2}$	f	6
	Flexion	$\frac{4M}{\pi b^3}$	f	7
	Cisaillement	$\frac{1.23V}{\pi b^2}$	e	8
	Torsion	$\frac{2M_t}{\pi b^3}$	e	9



Abaque de Neuber pour calculer le facteur de concentration de contraintes.

Les cas présentés dans le Tableau 2-3 sont utilisés dans le diagramme de Neuber pour calculer les facteurs de concentrations de contraintes [28]. Il est nécessaire de calculer les paramètres  $\sqrt{b/a}$  et  $\sqrt{h/a}$  dans le Tableau 2-3. Le paramètre  $\sqrt{b/a}$  et la valeur dans la 5<sup>ème</sup> colonne (la valeur de «n» dépend du type de chargement présenté dans le Tableau 2-3) donnent le point «A». Une horizontale passant par «A» coupe l'axe vertical en «B». Le Point «B» et le paramètre calculé  $\sqrt{h/a}$  donnent le facteur de concentration des contraintes avec l'utilisation de la 4<sup>ème</sup> colonne. Par exemple, pour  $n=3$  et  $\sqrt{b/a}=5.8$  avec  $\sqrt{h/a}=4.7$  pour «e» et  $\sqrt{h/a}=2.4$  pour «f», la valeur du facteur de concentration de contraintes est égale à 3.4.

## 2.4 Facteur de réduction en fatigue

La limite de résistance en fatigue  $\sigma_{D,N}$  pour les éprouvettes entaillées est moindre que celle d'une éprouvette lisse  $\sigma_{D,S}$ . Le rapport de la limite de résistance en fatigue pour les éprouvettes lisses et entaillées avec la même section critique définit le facteur de réduction en fatigue  $k_f$ .

$$k_f = \frac{\sigma_{D,S}}{\sigma_{D,N}} \quad (2-106)$$

où  $\sigma_{D,S}$  et  $\sigma_{D,N}$  sont respectivement les résistances en fatigue d'une éprouvette lisse et entaillée.

Le facteur de réduction en fatigue est moindre que le facteur de concentration de contraintes élastique ( $1 \leq k_f < k_t$ ). La différence entre  $k_f$  et  $k_t$  sera plus grande dans le cas des entailles aiguës. La sensibilité à l'entaille est généralement mesurée par l'indice de sensibilité à l'entaille ( $q$ ). Il est défini comme la valeur du rapport du facteur de réduction en fatigue  $k_f$  diminué d'une unité sur le facteur théorique de concentration de contraintes,  $k_t$ , également diminué d'une unité :

$$q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1} \quad (2-107)$$

La connaissance de cet indice  $q$  qui dépend des caractéristiques mécaniques du matériau et en particulier de la charge à la rupture, doit permettre en principe d'estimer  $k_f$  ; ce qui conduit à la connaissance de la limite d'endurance sous entaille sans avoir à réaliser des essais. La définition dans l'équation (2-106) est précisément utilisée dans le cas d'une contrainte normale (traction et flexion). Comme le facteur de concentration de contraintes, la définition générale s'écrit:

$$k_f = \frac{\sigma_{D,S}}{\sigma_{D,N}}, \quad k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_g} \quad (2-108)$$

$$k_f = \frac{\tau_{D,S}}{\tau_{D,N}}, \quad k_t = \frac{\tau_{\max}}{\tau_g} \quad (2-109)$$

où  $\sigma_{\max}$  et  $\sigma_g$  sont la contrainte normale maximale et la contrainte globale normale.

$\tau_{D,S}$ ,  $\tau_{D,N}$ ,  $\tau_{\max}$  et  $\tau_g$  sont respectivement les limites d'endurance d'éprouvette lisse et entaillée dans le cas du cisaillement, du cisaillement maximal et du cisaillement global.

Une autre définition du facteur de réduction en fatigue est le rapport de l'amplitude de contrainte d'une éprouvette lisse et celle de la contrainte d'une éprouvette entaillée.

$$k_f = \frac{\sigma_S(N_R)}{\sigma_N(N_R)} \quad (2-110)$$

$$k_f = \frac{\tau_S(N_R)}{\tau_N(N_R)} \quad (2-111)$$

où  $\sigma_S(N_R)$ ,  $\sigma_N(N_R)$  sont respectivement les amplitudes de contrainte d'une éprouvette lisse et entaillée conduisant au même nombre de cycles à rupture.  $\tau_S(N_R)$  et  $\tau_N(N_R)$  sont les amplitudes de scission d'une éprouvette lisse et entaillée conduisant au même nombre de cycles à rupture .

Le facteur de réduction en fatigue est un paramètre expérimental obtenu à partir d'essais de fatigue. Ce facteur prend une valeur comprise entre l'unité et le facteur de concentration de contraintes élastique  $k_t$ ; il dépend du nombre de cycles à rupture.

$$1 \leq k_f < k_t \quad (2-112)$$

Des relations ont été proposées par les différents auteurs pour relier  $k_f$  et  $k_t$ ; on cite:

- Peterson [29]

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a_p}{\rho}}, \quad a_p = a_p(\sigma_U) \quad (2-113)$$

$a_p$  est un coefficient qui dépend de la contrainte ultime, et  $\rho$  le rayon d'entaille.

$$a_p = \left( \frac{270}{\sigma_U} \right)^{1.8} \quad (2-114)$$

$\sigma_U$  est la contrainte ultime en MPa et  $a_p$  en mm.

- Neuber [30]

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a_N}{\rho}}}, \quad a_N = a_N(\sigma_U) \quad (2-115)$$

$a_N$  un coefficient qui dépend de la contrainte ultime.

- Heywood [31-32]

$$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{\left[1 + 2\sqrt{\frac{a_H}{\rho}}\right]}, \quad a_H = a_H(\sigma_U, A_n, A_g) \quad (2-116)$$

où  $a_H$ ,  $A_n$  et  $A_g$  sont respectivement un coefficient qui dépend de la contrainte ultime, la section nominale et la section globale.

- Stieler-Siebel [33]

$$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{1 + \sqrt{S_q \chi}}, \quad S_q = S(\sigma_{0.2}) \quad (2-117)$$

où  $S_q$  et  $\chi$  sont respectivement un coefficient qui dépend de la limite d'élasticité à

0.2% et le gradient des contraintes au fond d'entaille  $\chi = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_{\max}} \frac{d\sigma}{dx}$ .

- Kuhn-Hardraht [34]

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{a_K}{\rho}}}, \quad a_K = a_K(\sigma_U) \quad (2-118)$$

où  $a_K$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  et  $\sigma_U$  sont respectivement un coefficient qui dépend de la contrainte ultime, le rayon d'entaille, l'angle d'ouverture de l'entaille et la contrainte ultime.

- Buch- Switech [35-36]

$$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{A} \left[ 1 - \frac{2.1h}{\rho + \rho_0} \right], \quad \rho_0 = \rho_0(A, h) \quad (2-119)$$

où  $A$  et  $h$  sont des coefficients qui dépendent du matériau et du type de l'éprouvette respectivement. Le paramètre  $\rho_0$  est une constante qui dépend de  $A$  et de  $h$  simultanément.

- Topper-El Haddad [37]

$$k_f = \frac{1}{F_\sigma} \left( 1 + \sqrt{\frac{a_0}{I_0}} \right) \quad (2-120)$$

où  $a_0$ ,  $F_\sigma$  et  $I_0$  sont respectivement la profondeur de l'entaille, le facteur de géométrie et une constante qui dépend du matériau.

Selon Topper-El Haddad, le facteur de sensibilité à l'entaille peut être défini par la relation suivante :

$$q = \begin{cases} \frac{1}{F_\sigma} \sqrt{\frac{\rho}{4I_0}} & \text{Pour } \rho \leq 4I_0 \\ 1 & \text{Pour } \rho > 4I_0 \end{cases} \quad (2-120)$$

Les équations proposées par Topper-El Haddad trouvent leur fondement dans une approche de type mécanique linéaire de la rupture.

Le Tableau 2-4 présente un résumé des différentes équations proposées par ces auteurs. Ces relations donnent une estimation du facteur de réduction en fatigue  $k_f$ .

Tableau 2-4 Résumé des relations proposées pour l'estimation du facteur de réduction en fatigue  $k_f$

AUTEURS	EQUATIONS	PARAMETRE DU MATERIAU
Peterson [29]	$q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1} = \frac{1}{1 + \frac{a_p}{\rho}}$	$a_p = a_p(\sigma_U)$
Neuber [30]	$q = \frac{k_f - 1}{k_t - 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a_N}{\rho}}}$	$a_N = a_N(\sigma_U)$
Heywood [31-32]	$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{1 + 2\sqrt{\frac{a_H}{\rho}}}$	$a_H = a_H(\sigma_U, A_n, A_g)$
Stieler-Siebel [33]	$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{1 + \sqrt{S_q \chi}}$	$S_q = S(\sigma_{0.2})$
Kuhn-Hardraht [34]	$q = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \omega} \sqrt{\frac{a_K}{\rho}}}$	$a_K = a_K(\sigma_U)$
Buch- Switech [35-36]	$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{A} \left[ 1 - \frac{2.1h}{\rho + \rho_0} \right]$	$\rho_0 = \rho_0(A, h)$
Topper-El Haddad [37]	$k_f = \frac{1}{F_\sigma} \left( 1 + \sqrt{\frac{a_0}{I_0}} \right)$	$I_0 = I_0(\sigma_Y, \sigma_U)$

Les équations proposées par Peterson, Neuber, Heywood, Stieler et Topper comportent un seul paramètre « matériau ». Ce paramètre matériau a été supposé constant pour tout type d'éprouvettes et de chargement.

Selon cette hypothèse le facteur de réduction en fatigue et le facteur de concentration de contraintes sont égaux pour une entaille émoussée. Cette hypothèse n'est pas toujours correcte. L'équation proposée par Buch-Switech utilise deux paramètres. Le rapport entre le facteur de réduction en fatigue et le facteur de concentration de contraintes représente une autre définition du facteur de sensibilité à l'entaille  $q$ . Ce rapport s'écrit comme suit :

$$\frac{k_f}{k_t} = f(\rho, A, h) \quad (2-121)$$

où  $\rho$ ,  $A$  et  $h$  sont respectivement le rayon d'entaille et les constantes des matériaux. Les constantes  $A$  et  $h$  ne dépendent pas du rayon d'entaille ni de la taille des éprouvettes, mais dépendent du type du matériau et du chargement. Dans la méthode de Buch-Switech, la contrainte  $\sigma_Y = A\sigma_d$  correspond à l'amorçage des fissures en fatigue. Dans la Figure 2-28, un schéma de la méthode est donné :

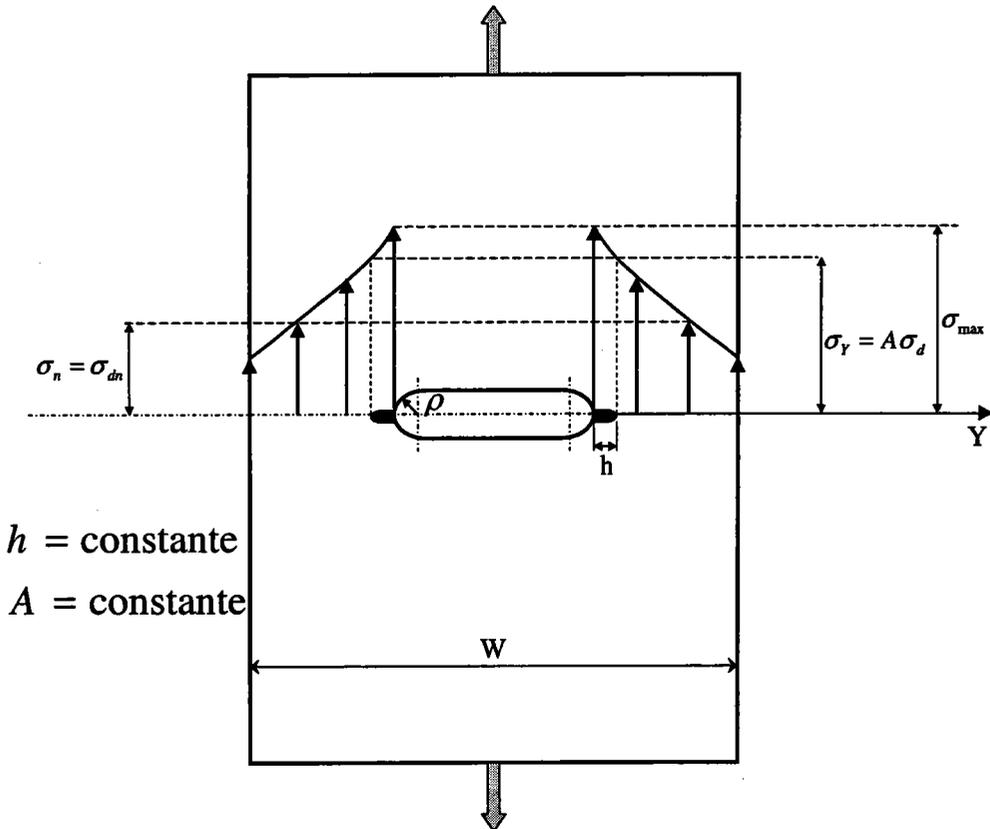


Figure 2-28 Schéma d'une éprouvette entaillée avec définition des paramètres  $h$  et  $A$ .

Dans la Figure 2-28,  $W$ ,  $\rho$ ,  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{nd}$  et  $\sigma_d$  sont respectivement la largeur de la plaque, le rayon d'entaille, la contrainte maximale, la contrainte nominale, l'endurance en fatigue pour une éprouvette entaillée et l'endurance en fatigue pour une éprouvette lisse.

On considère que  $A$  et  $h$  sont des constantes et  $\sigma_Y$  la limite d'élasticité. Le gradient des contraintes dans ce cas peut être défini par l'équation suivante :

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_Y}{h} \quad (2-122)$$

Selon la distribution théorique des contraintes, le gradient des contraintes s'écrit:

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{C\sigma_{\max}}{\rho} \quad (2-123)$$

où,  $\rho$ ,  $\sigma_{\max}$  et  $C$  sont respectivement le rayon de l'entaille, la contrainte maximale et le coefficient de proportionnalité obtenu par la solution élastique dans différents cas de chargement.

La considération des équations (2-122) et (2-123) conduit à l'équation (2-124) :

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_Y}{h} = \frac{C\sigma_{\max}}{\rho} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{\sigma_Y}{\left(1 - \frac{Ch}{\rho}\right)} \quad (2-124)$$

La substitution de  $\sigma_Y = A\sigma_d$  dans l'équation (2-124) donne la relation suivante :

$$\sigma_{\max} = \frac{A\sigma_d}{\left(1 - \frac{Ch}{\rho}\right)} \quad (2-125)$$

L'équation (2-125) peut être divisée par la contrainte nominale  $\sigma_n$ . En raison de l'égalité de la contrainte nominale  $\sigma_n$  avec la limite d'endurance en fatigue pour les éprouvettes entaillées  $\sigma_{nd}$ , la relation (2-126) est réécrite sous la forme:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = \frac{A\sigma_d}{\sigma_{dn} \left(1 - \frac{Ch}{\rho}\right)} \quad (2-126)$$

Selon les définitions du facteur de concentration de contraintes et du facteur de réduction en fatigue, la relation (2-126) est réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = \frac{A\sigma_d}{\sigma_{dn} \left(1 - \frac{Ch}{\rho}\right)} \xrightarrow{k_i = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, k_f = \frac{\sigma_d}{\sigma_{dn}}} k_i = k_f \frac{A}{\left(1 - \frac{Ch}{\rho}\right)} \quad (2-127)$$

ou,

$$\frac{k_f}{k_i} = \frac{1}{A} \left(1 - \frac{Ch}{\rho}\right) = f(\rho, A, h) \quad (2-128)$$

Afin d'éviter des valeurs infinies pour le gradient des contraintes (2-123), on introduit une petite longueur  $\rho_0$  qui dépend du rayon d'entaille et du type du chargement.

$$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{A} \left( 1 - \frac{Ch}{\rho + \rho_0} \right) \quad (2-129)$$

Dans le cas de l'utilisation d'un chargement axial et d'une entaille au centre d'une plaque (Figure 2-28), l'équation (2-129) s'écrit de nouveau:

$$\frac{k_f}{k_t} = \frac{1}{A} \left( 1 - \frac{2.1h}{\rho + \rho_0} \right), \quad \rho_0 = \rho_0(h, A) = \frac{6.3h}{(3-A)} \quad (2-130)$$

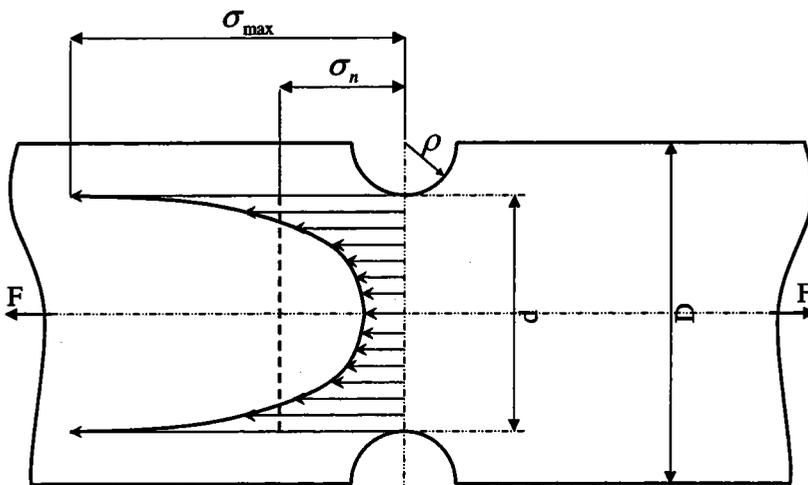
La relation proposée par Buch-Switech contient deux paramètres  $h$  et  $A$ . Le paramètre  $h$  dépend du gradient des contraintes au voisinage de l'entaille. Le paramètre  $A$  dépend du coefficient d'érouissage cyclique. Dans l'équation (2-130), le gradient des contraintes et le coefficient du matériau sont considérés simultanément.

Le gradient des contraintes  $\chi$  est la valeur de la pente de la tangente de la distribution des contraintes en fond d'entaille rapportée à la valeur de la contrainte maximale [38].

$$\chi = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_{\max}} \frac{d\sigma(x)}{dx} \quad (2-131)$$

$\chi$  s'exprime en  $\text{mm}^{-1}$ .

Dans la Figure 2-29, l'évolution du champ des contraintes et du gradient des contraintes pour une contrainte nominale  $\sigma_n$  et le facteur de concentration de contraintes sont présentés. Le champ des contraintes dans les cas de traction et de flexion est aussi présenté. Le gradient des contraintes est exclusivement montré en fond d'entaille.



a)

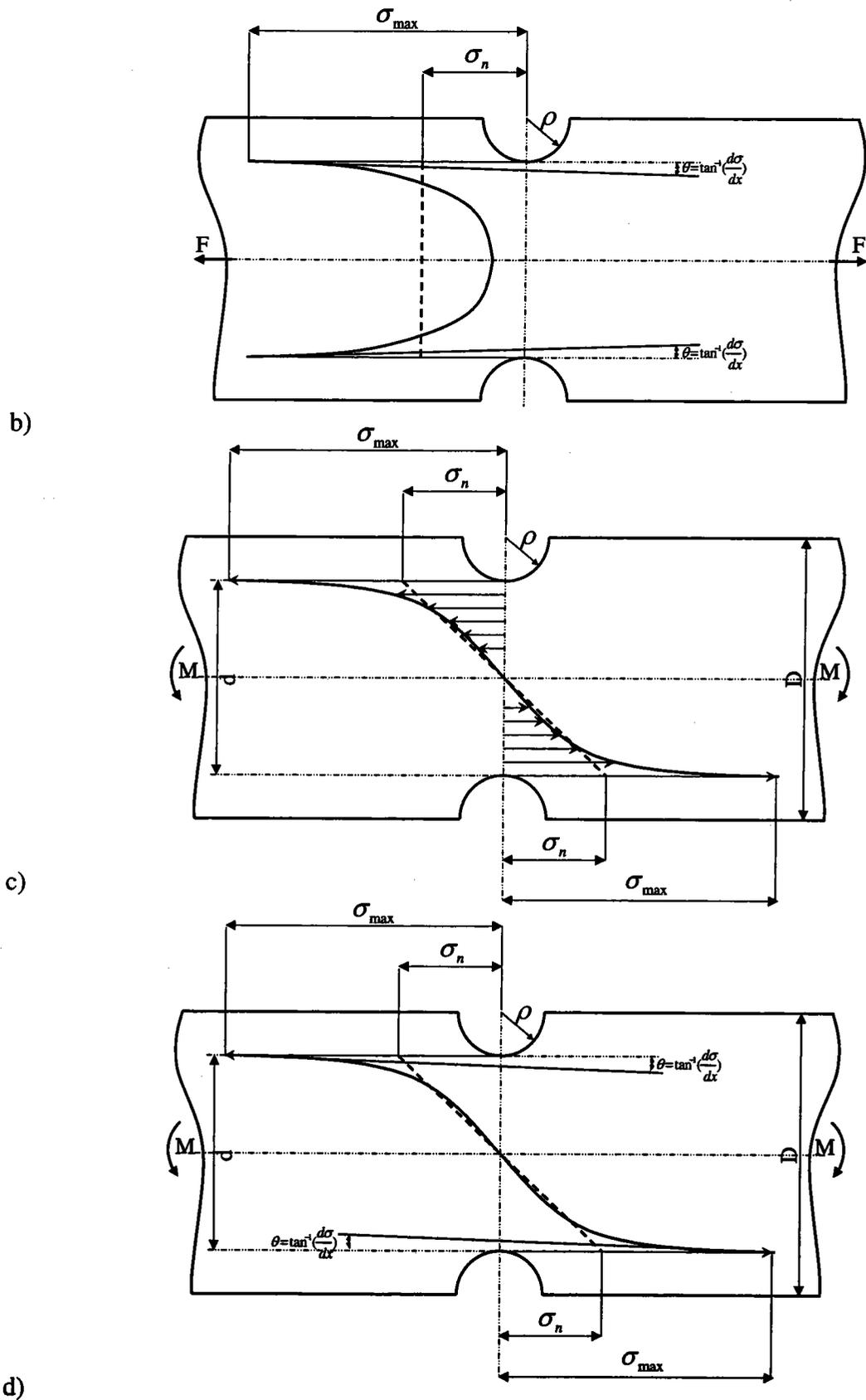


Figure 2-29 Champ des contraintes et gradient des contraintes au fond d'entaille a) Champ des contraintes en traction b) Gradient des contraintes en traction c) Champ des contraintes en flexion d) Gradient des contraintes en flexion.

Il est nécessaire de calculer le gradient des contraintes au voisinage des entailles en se basant sur la procédure présentée dans la Figure 2-29.

Dans la Figure 2-28,  $d$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $M$ ,  $\sigma_n$  et  $\sigma_{\max}$  sont respectivement le petit diamètre de l'arbre, le grand diamètre de l'arbre, la force, le moment, la contrainte nominale et la contrainte maximale.

Les contraintes maximales et nominales s'expriment par les relations suivantes :

$$\sigma_{\max} = k_t \sigma_n = \frac{k_t F}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad (2-132)$$

$$\sigma_n = \frac{F}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad (2-133)$$

Le facteur de concentration de contraintes dans l'équation (2-132) s'écrit dans le cas de la traction (Figure 2-29a et 2-29b):

$$k_t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1.197k_p}\right)^2 + \left(\frac{1}{1.871k_q}\right)^2}} + 1; \quad k_p = \left( \sqrt{\frac{a\left(\frac{d}{D}\right)}{\rho\left(1-\frac{d}{D}\right)} + 1} \right) - 1, \quad k_q = \frac{a}{\sqrt{\frac{\rho}{a}}} \quad (2-134)$$

où  $a$  et  $\rho$  sont respectivement la profondeur d'entaille et le rayon d'entaille dans la Figure 2-28.

L'utilisation du concept de gradient des contraintes ne se fait pas exclusivement pour les calculs élastiques. Dans le cas élasto-plastique, le gradient des contraintes sera utilisé pour trouver le volume d'élaboration du processus de fatigue.

## 2.5 Les méthodes d'estimation de la durée de vie en fatigue

La résistance en fatigue des matériaux est traditionnellement présentée par le diagramme de Wöhler. Ce diagramme s'appelle généralement diagramme S-N. Le diagramme de Wöhler, est décrit par deux paramètres. Le premier est l'amplitude des contraintes appliquées ( $\sigma_a$ ) et le deuxième est le nombre de cycles à rupture ( $N_R$ ). Le diagramme de Wöhler est présenté sous forme semi-logarithmique ou bi-logarithmique. La relation de Basquin donnant l'allure de ce diagramme est donnée par :

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_R)^b \quad (2-135)$$

où  $\sigma_a$ ,  $\sigma'_f$ ,  $N_R$  et  $b$  sont respectivement l'amplitude de la contrainte, le coefficient de Basquin, le nombre de cycles et l'exposant de la relation de Basquin.

Dans le diagramme de Wöhler, trois zones sont traditionnellement distinguées:

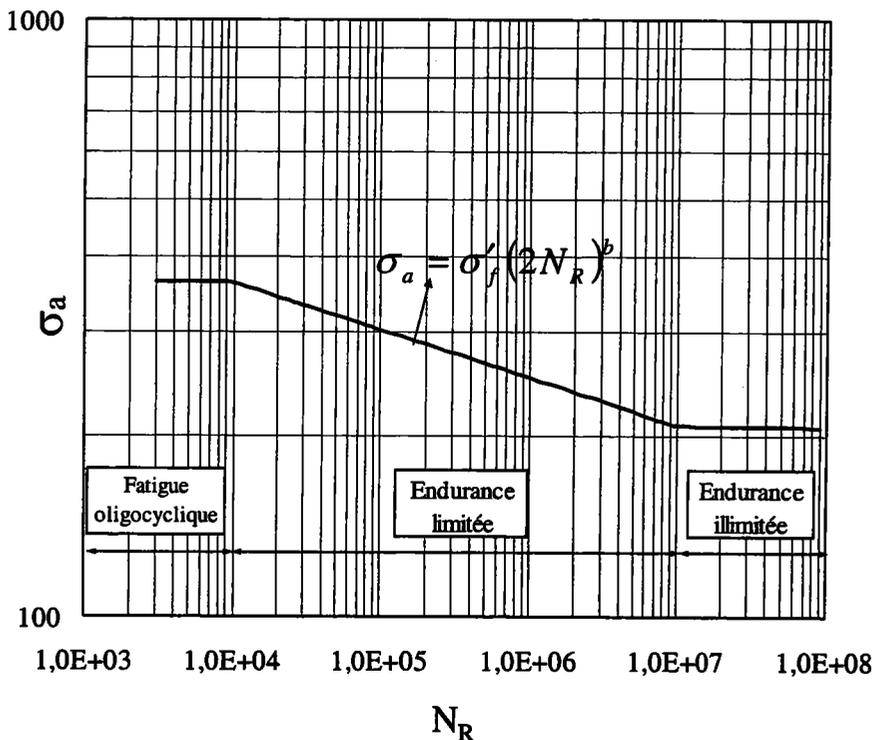


Figure 2-30 Schéma du diagramme de Wöhler et la relation de Basquin.

La Figure 2-30 montre le schéma d'un diagramme de Wöhler classique. Les zones présentées dans la Figure 2-30 sont habituellement déterminées dans le diagramme S-N pour  $10^4$  et  $10^6$  cycles.

En raison de l'étendue du nombre de cycles étudié, le diagramme de Wöhler est présenté sous la forme logarithmique.

La prévision de la durée de vie en fatigue est faite à partir du diagramme de Wöhler. Le facteur de réduction en fatigue est défini à partir de ce diagramme. Les courbes de Wöhler d'éprouvettes lisses et entaillées sont nécessaires dans le problème de la prévision de la durée de vie en fatigue. Dans la Figure 2-31, un schéma simple des résultats en fatigue pour des éprouvettes entaillées et lisses est présenté.

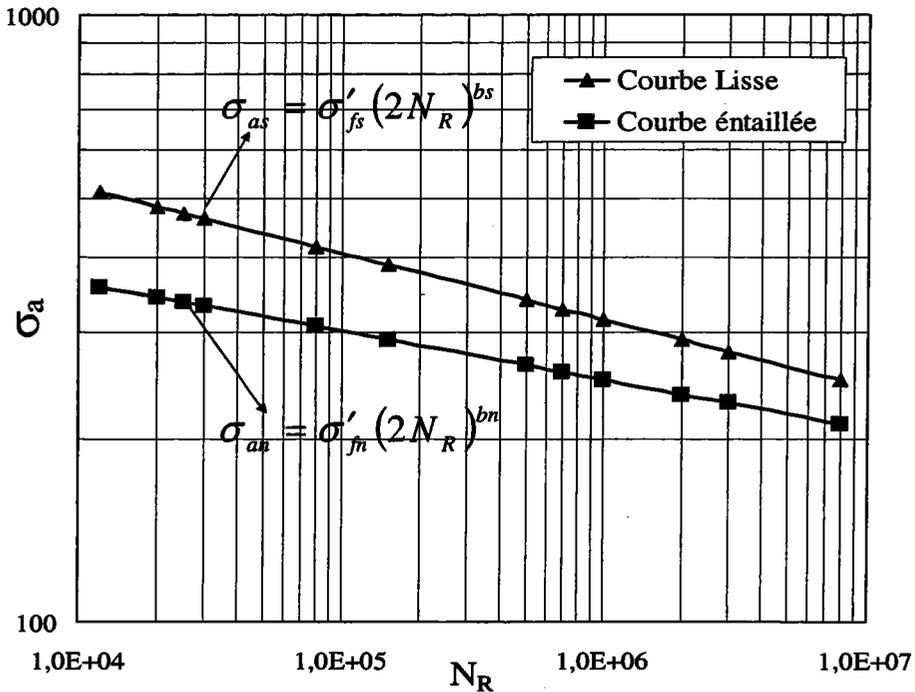


Figure 2-31 Schéma du diagramme de Wöhler pour des éprouvettes lisses et entaillées.

Dans la figure 2-31,  $\sigma_{as}$ ,  $\sigma_{an}$ ,  $\sigma'_{fs}$ ,  $\sigma'_{fn}$ ,  $bs$  et  $bn$  sont respectivement l'amplitude des contraintes appliquées dans le cas d'une éprouvette lisse, l'amplitude des contraintes appliquées dans le cas d'une éprouvette entaillée, les coefficients de Basquin dans les cas d'une éprouvette lisse et entaillée et les exposants de la relation de Basquin dans les cas d'une éprouvette lisse et entaillée.

Le facteur de réduction en fatigue se définit par:

$$k_f = \frac{\sigma_{as}}{\sigma_{an}} \quad (2-136)$$

La méthode d'évaluation de la durée de vie en fatigue à partir du diagramme de Wöhler est généralement utilisée dans les codes de construction. Par exemple, l'Eurocode3 utilise l'étendue des contraintes pour estimer la durée de vie en fatigue [39].

## 2.5.1 La méthode de l'Eurocode3 pour les joints soudés

Le chapitre 9 de l'Eurocode3 présente une méthode générale de calcul de fatigue des structures soudées en acier soumis à des variations répétées de contraintes. Cette procédure présentée dans le chapitre 3 de l'Eurocode3 n'est valable que pour les aciers de construction.

Dans la méthode proposée par l'Eurocode3, les paramètres suivants sont utilisés :

1. L'étendue des contraintes.
2. Les contraintes moyennes.
3. Les contraintes résiduelles.
4. Les contraintes nominales.
5. Les concentrations des contraintes locales.
6. Les effets de tailles.

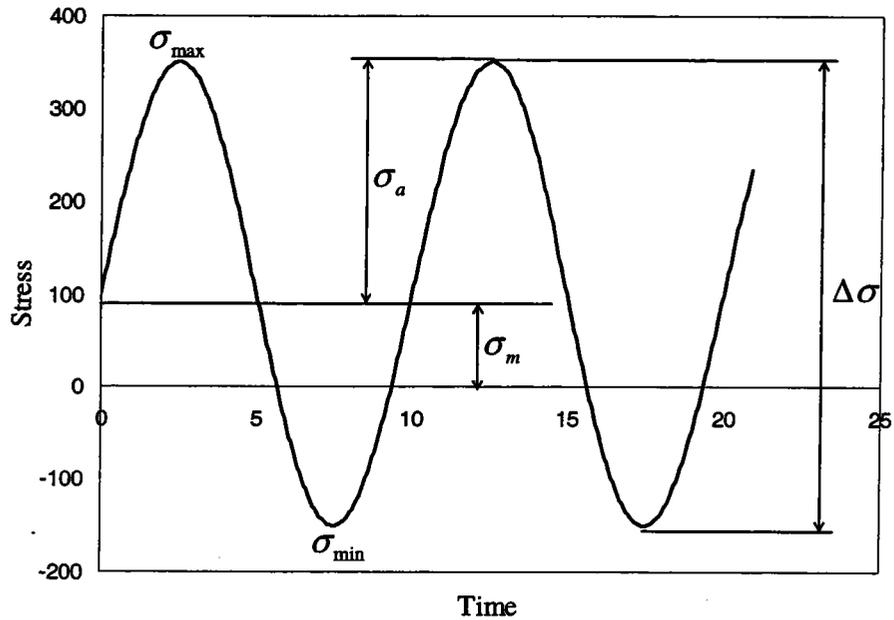
Certains paramètres ne sont pas pris en compte par l'Eurocode3 pour la prévision de la fatigue des joints soudés :

1. La fréquence ( $f \leq 40 \text{ Hz}$ ).
2. Les défauts de soudage.
3. Le comportement des matériaux.
4. La composition chimique de l'acier.
5. L'homogénéité métallurgique.
6. Le procès de soudage.
7. Le traitement thermique après soudage.
8. Le traitement de la surface après soudage.
9. L'humidité et l'irradiation.

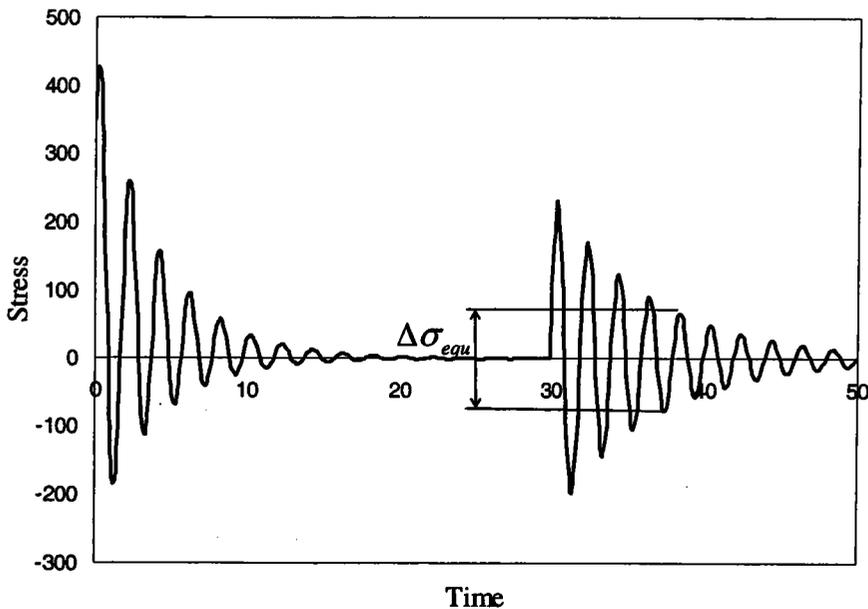
La méthode de l'Eurocode3 prend en compte les effets de la géométrie et de la fabrication par l'utilisation des facteurs de sécurité.

Généralement, le phénomène de fatigue tire son origine de l'application d'un chargement variable. L'histoire des contraintes est normalement considérée soit à amplitude constante soit à amplitude variable. L'histoire des contraintes avec amplitude constante ou variable est montrée dans la Figure 2-32, où  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$  et  $\Delta\sigma$  sont respectivement la contrainte

maximale, la contrainte minimale, la contrainte moyenne, l'amplitude de contrainte et la différence entre la contrainte maximale et la contrainte minimale.



a)



b)

Figure 2-32 Histoire des contraintes a) Amplitude constante b) Amplitude variable.

Dans le cas d'un chargement cyclique avec amplitude constante, la contrainte moyenne est l'amplitude équivalente. Mais dans le cas de l'histoire des contraintes avec amplitude variable, il est nécessaire de trouver une définition à partir de l'histoire des contraintes.

L'Eurocode3 utilise généralement la méthode du « réservoir » qui ressemble à la méthode « Rainflow » [40]. Ces deux méthodes ne donnent pas exactement le même résultat, mais leur définition de l'endommagement en fatigue est la même.

Les méthodes de « Rainflow » et de « Réservoir » donnent cependant le même résultat en fatigue dans le cas d'une histoire des contraintes très longues.

La méthode la plus commune pour présenter une histoire des contraintes variables est d'utiliser l'histogramme des contraintes. Dans cet histogramme, les contraintes sont sélectionnées séquentiellement (Figure 2-33).

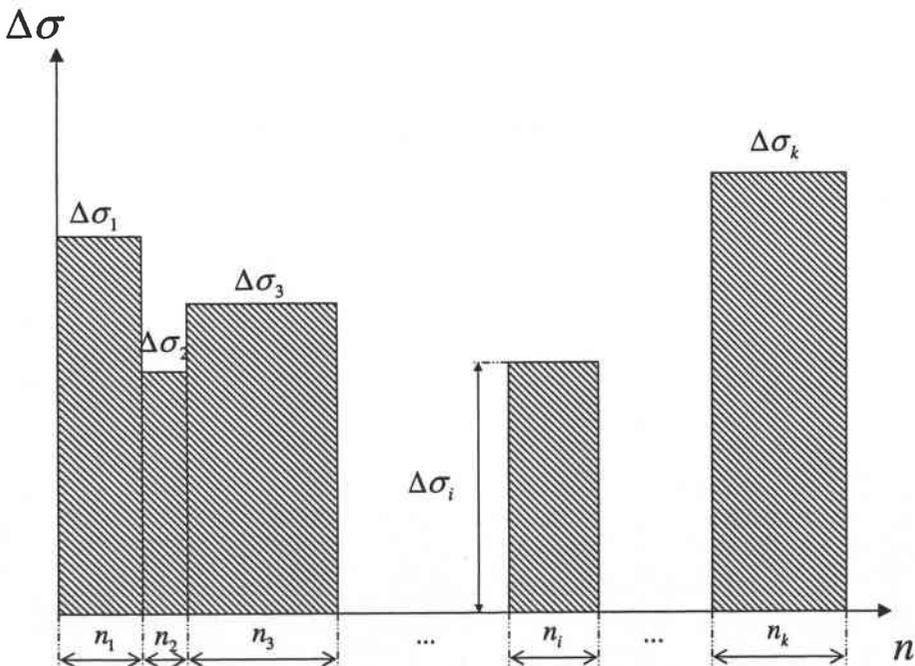
Ce concept est à l'origine de la méthode Palmgren-Miner [41-42] que l'Eurocode3 utilise dans le cas des amplitudes de contraintes variables.

L'histogramme des contraintes classées par entendue peut être approchée par la distribution de Weibull [43] à deux paramètres.

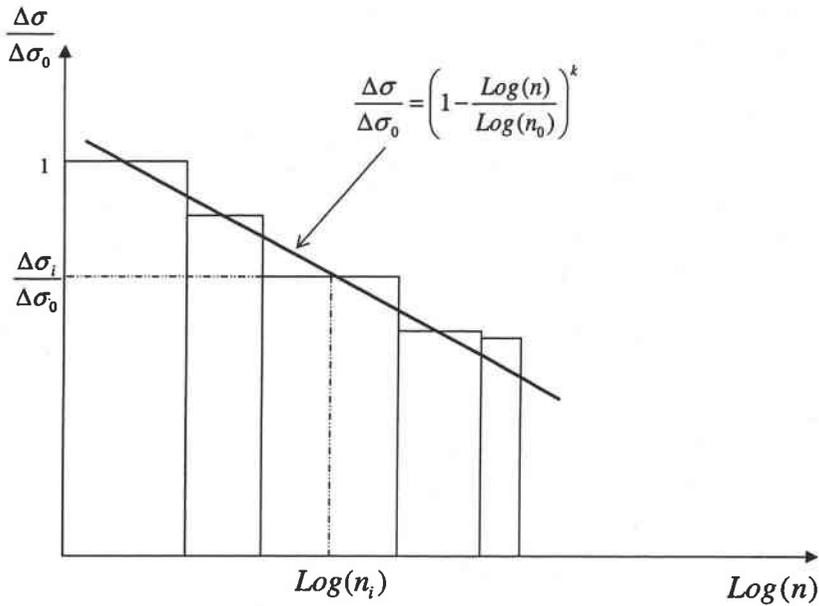
Dans la Figure 2-33,  $n_i$ ,  $\Delta\sigma_i$ ,  $n_0$  et  $k$  sont respectivement le nombre de cycles à rupture pour une étendue de contrainte  $\Delta\sigma_i$ , l'étendue de contrainte, le premier paramètre de la distribution de Weibull et le deuxième paramètre de la distribution de Weibull.

La distribution de Weibull s'exprime:

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0} = \left(1 - \frac{\text{Log}(n)}{\text{Log}(n_0)}\right)^k \tag{2-137}$$



a)



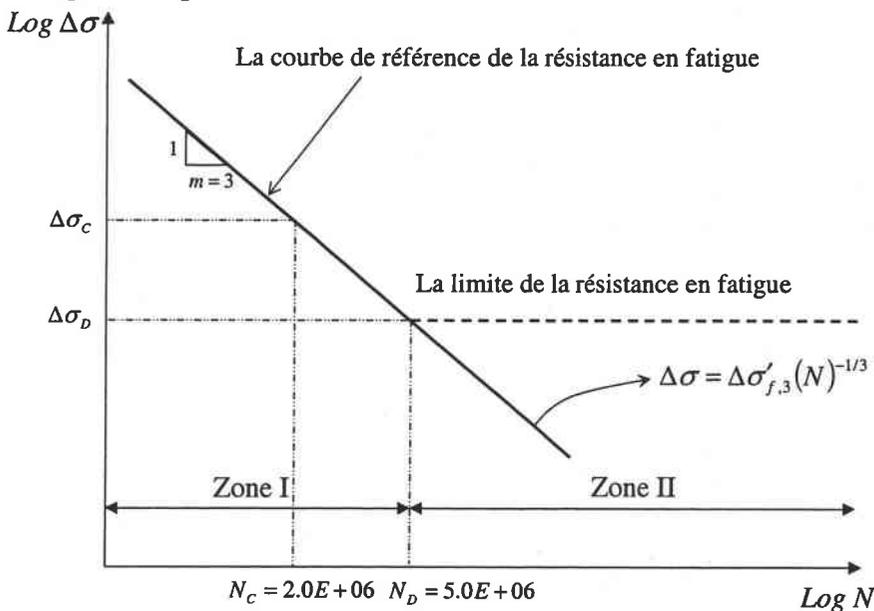
b)

Figure 2-33 a) Distribution du domaine des contraintes b) Variété des contraintes par ordre.

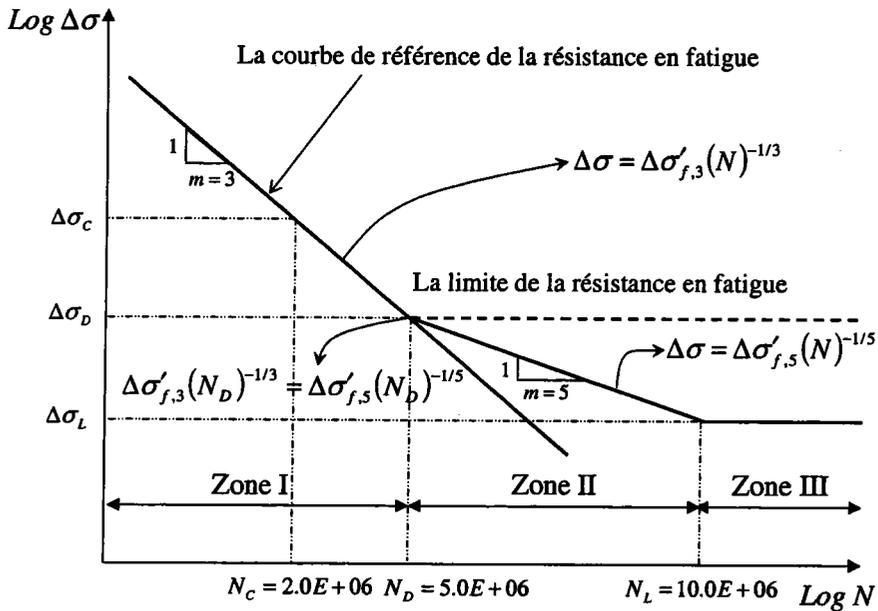
où  $\Delta\sigma_0$ ,  $n_0$ ,  $k$  sont respectivement l'amplitude maximale de contrainte et les coefficients de la méthode Weibull.

L'Eurocode3 est une méthode essentiellement basée sur des contraintes. Il utilise généralement le diagramme Wöhler comme la recommandation ECCS (European Convention for Construction Steelwork Fatigue Recommendation).

La courbe de référence normale de la méthode d'Eurocode3 est montrée dans la Figure 2-34. Cette courbe peut être considérée comme constituée d'une ligne ou deux lignes dans un diagramme bi-logarithmique.



a)



b)

Figure 2-34 Diagramme de résistance en fatigue de la méthode de l'Eurocode 3 a) Diagramme avec une ligne b) Diagramme avec deux lignes.

L'utilisation d'une ou de deux lignes dans l'Eurocode3 est de la responsabilité de l'utilisateur. Dans la Figure 2-34a, deux zones différentes existent. Dans la zone I, la valeur de pente est égale à 3. Normalement, cette zone est généralement utilisée dans la méthode de l'Eurocode3. La zone II est la zone de résistance en fatigue.

Dans la Figure 2-34b, trois zones spécifiques peut être distinguées. Ce type de diagramme de l'Eurocode3 est plus compliqué que celui présenté dans la Figure 2-34a. Le domaine de résistance en fatigue est divisé en zone I et zone II.

Dans la zone I, la pente a la même valeur que dans la zone I de la Figure 2-34a. Dans la zone II, Figure 2-34b, la pente est modifiée pour trouver un dimensionnement plus économique. Le problème de fatigue dans la zone III n'est pas le plus important.

L'Eurocode3 propose une seule relation utilisable dans tous les cas (Dans les diagrammes avec une ligne et deux lignes) :

$$\gamma_f \Delta \sigma_{equ} \leq \frac{\Delta \sigma_{Rd}}{\gamma_M} \quad (2-138)$$

où,  $\gamma_f$ ,  $\gamma_M$ ,  $\Delta \sigma_{equ}$  et  $\Delta \sigma_{Rd}$  sont respectivement le coefficient de sécurité dans le domaine équivalent des contraintes, le coefficient de sécurité sur la résistance en fatigue, l'étendue des contraintes équivalentes et l'étendue des résistances en fatigue.

Le coefficient de sécurité  $\gamma_f$  augmente la valeur de l'amplitude équivalente des contraintes pour des raisons de sécurité dans les joints soudés. Le coefficient de sécurité  $\gamma_M$  fait diminuer la résistance en fatigue tel qu'il est prévu par l'Eurocode3.

Les valeurs des coefficients de sécurité sont différentes dans l'Eurocode3 pour chaque type de soudage et d'aciers utilisés.

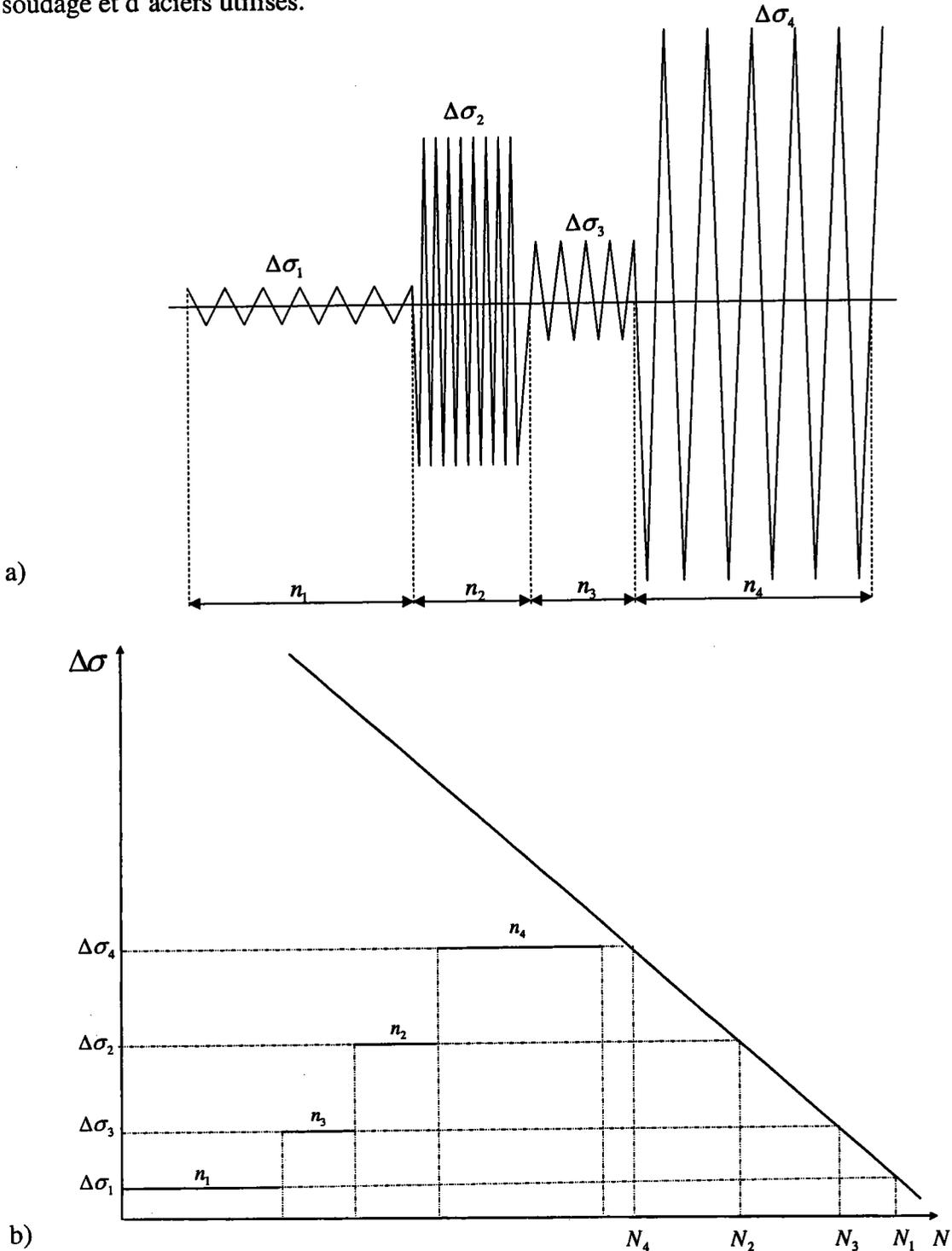


Figure 2-35 Schéma cumulatif des amplitudes des contraintes appliquées a) Spectre des contraintes appliquées b) Schéma des amplitudes des contraintes dans le diagramme de Wöhler.

Dans les cas réels, l'amplitude des contraintes appliquée aux joints soudés n'est pas constante. La méthode de Palmgren-Miner, proposée pour ce type de problèmes, est basée sur l'endommagement cumulatif. Cette loi est obtenue par l'hypothèse de la sommation linéaire des endommagements pour chaque domaine de contrainte.

L'expression mathématique de la méthode de Palmgren-Miner s'exprime par:

$$D = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} + \dots + \frac{n_k}{N_k} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (2-139)$$

où  $n_i$  et  $N_i$  sont respectivement le nombre de cycles avec amplitude constante des contraintes  $\Delta\sigma_i$  et le nombre totale de cycles d'endommagement sous amplitude constante des contraintes  $\Delta\sigma_i$ .

Un dimensionnement acceptable avec la méthode de Palmgren-Miner conduit à la condition :

$$D \leq 1 \quad (2-140)$$

Le concept du domaine des contraintes équivalentes  $\Delta\sigma_{equ}$  est utilisé généralement dans le ECCS. C'est une méthode de référence dans l'Eurocode3 pour les joints soudés. Ce concept est plus simple que la méthode proposée par Palmgren-Miner. La définition du domaine des contraintes équivalentes dans un diagramme de Wöhler avec une seule ligne s'écrit comme suit :

$$\Delta\sigma_{equ} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^k n_i \Delta\sigma_i^m}{\sum_{i=1}^k n_i} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (2-141)$$

où,  $\Delta\sigma_{equ}$ ,  $n_i$ ,  $\Delta\sigma_i$ ,  $k$  et  $m$  sont respectivement le domaine des contraintes équivalentes appliquées, le nombre de cycles avec amplitude constante des contraintes  $\Delta\sigma_i$ , les domaines correspondants à  $n_i$ , le nombre de cycles avec amplitude constante et la pente du diagramme de Wöhler correspondante à l'Eurocode 3 ( $m = 3$  ou  $m = 5$ ).

L'expression du domaine équivalent des contraintes dans un diagramme de Wöhler à deux lignes dans l'Eurocode 3 est plus complexe. L'Eurocode 3 propose une relation générale dans tous les cas (équation (2-141)). Selon le diagramme de l'Eurocode 3, l'amplitude de contrainte correspondante à cinq millions de cycles est représentée dans la Figure 2-36 par  $\Delta\sigma_D$  qui est une limite pour les domaines de contrainte du diagramme. Des valeurs supérieures ou inférieures à  $\Delta\sigma_D$  sont présentées et appelées respectivement  $\Delta\sigma_i$  et  $\Delta\sigma_j$ .

$$\Delta\sigma = \begin{cases} \Delta\sigma_i & \text{pour } N \leq N_D \\ \Delta\sigma_j & \text{pour } N > N_D \end{cases} \quad (2-142)$$

La définition de l'endommagement basée sur la méthode Palmgren-Miner est la sommation des rapports entre  $n_i$  et  $N_i$ . Dans le cas d'utilisation du diagramme normal de l'Eurocode3, l'équation (2 - 142) s'écrit ci-dessous :

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} + \sum_{j=1}^l \frac{n_j}{N_j} \quad (2-143)$$

Les équations de Basquin [44] correspondantes au diagramme normal sont présentées dans la Figure 2-36.

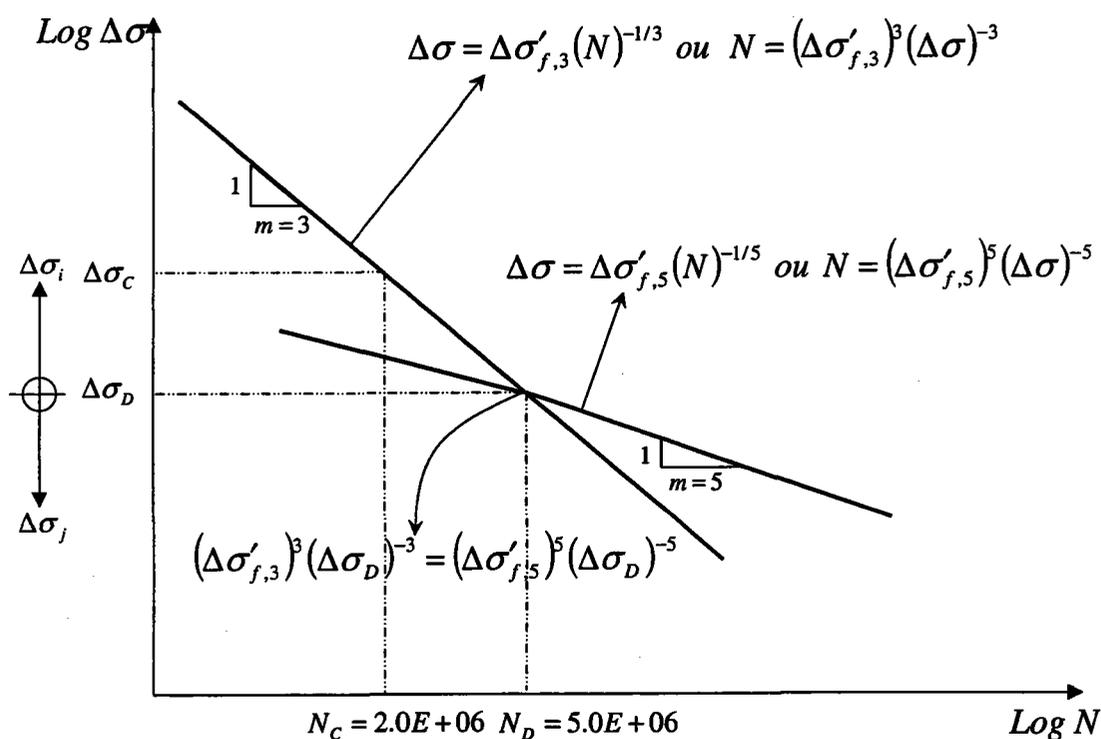


Figure 2-36 Diagramme Normal de l'Eurocode3 avec les limites des domaines de contrainte  $\Delta\sigma_D$  correspondant à cinq millions de cycles.

La substitution des équations présentées dans la Figure 2-36 dans l'équation (2-143), donne l'équation (2-144) :

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} + \sum_{j=1}^l \frac{n_j}{N_j} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{a\Delta\sigma_i^{-3}} + \sum_{j=1}^l \frac{n_j}{b\Delta\sigma_j^{-5}}, \quad \text{où } a = (\Delta\sigma'_{f,3})^3, b = (\Delta\sigma'_{f,5})^5 \quad (2-144)$$

L'équation (2-144) s'écrit :

$$D = \frac{1}{b} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{n_i \Delta \sigma_i^3}{\frac{a}{b}} + \sum_{j=1}^l n_j \Delta \sigma_j^5 \right] \quad (2-145)$$

Dans la Figure 2-36, le point d'intersection des lignes donne la relation ci-dessous :

$$N_D = a \Delta \sigma_D^{-3} = b \Delta \sigma_D^{-5} \quad (2-146)$$

et encore :

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\Delta \sigma_D^2} \quad (2-147)$$

L'utilisation des équations (2-147) et (2-146) dans l'équation (2-145) conduit à la relation:

$$D = \frac{Q}{N_D \Delta \sigma_D^3}, \quad \text{où} \quad Q = \sum_{i=1}^k n_i \Delta \sigma_i^3 + \sum_{j=1}^l n_j \Delta \sigma_j^3 \left( \frac{\Delta \sigma_j}{\Delta \sigma_D} \right)^2 \quad (2-148)$$

Le calcul par la méthode de l'Eurocode3 peut être réalisé arbitrairement à partir de l'équation (2-143) ou (2-148).

Les équations (2-143) et (2-148) donnent le calcul de l'endommagement. Il est nécessaire de calculer les paramètres  $\Delta \sigma_{equ}$  et  $\Delta \sigma_{Rd}$  dans le cas de l'application de la méthode de l'Eurocode 3 par l'équation (2-138).

Le domaine équivalent des contraintes est donc défini comme :

$$D = \frac{N}{N_{equ}} \leq 1 \quad (2-149)$$

où  $N$  et  $N_{equ}$  sont respectivement le nombre totale de cycles ( $N = \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j$ ) et le nombre

équivalent aux cycles d'endommagement en fatigue.

Le nombre de cycles d'endommagement en fatigue  $N_{equ}$  pour  $m = 3$  s'écrit:

$$D = \frac{N}{a \Delta \sigma_{equ}^{-3}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j}{a \Delta \sigma_{equ}^{-3}} \quad (2-150)$$

L'utilisation des équations (2-144) et (2-150) donne :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j}{a \Delta \sigma_{equ}^{-3}} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{a \Delta \sigma_i^{-3}} + \sum_{j=1}^l \frac{n_j}{b \Delta \sigma_j^{-5}}, \quad \text{où} \quad a = (\Delta \sigma'_{f,3})^3, \quad b = (\Delta \sigma'_{f,5})^5 \quad (2-151)$$

Le domaine équivalent à des contraintes  $\Delta\sigma_{equ}$  sera changé en raison de l'utilisation de  $m = 3$ :

$$\Delta\sigma_{equ} \rightarrow \Delta\sigma_{equ,3} \quad (2-152)$$

La relation (2-153) est donc écrite par l'utilisation des équations (2-146), (2-148) et (2-152) dans l'équation (2-151).

$$\Delta\sigma_{equ,3}^3 = \left[ \frac{\sum_{i=1}^k n_i \Delta\sigma_i^3 + \sum_{j=1}^l n_j \Delta\sigma_j^3 \left( \frac{\Delta\sigma_j}{\Delta\sigma_D} \right)^2}{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j} \right] \quad (2-153)$$

La relation (2-153) peut être simplifiée comme :

$$\Delta\sigma_{equ,3} = \left[ \frac{Q}{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j} \right]^{\frac{1}{3}} \quad \text{où} \quad Q = \sum_{i=1}^k n_i \Delta\sigma_i^3 + \sum_{j=1}^l n_j \Delta\sigma_j^3 \left( \frac{\Delta\sigma_j}{\Delta\sigma_D} \right)^2 \quad (2-154)$$

Un autre paramètre nécessaire pour le calcul est  $\Delta\sigma_{Rd}$ . Il lui correspond la résistance en fatigue  $\Delta\sigma_{equ}$ .

Dans le cas de  $m = 3$ , les paramètres  $\Delta\sigma_{equ}$  et  $\Delta\sigma_{Rd}$  sont représentés par  $\Delta\sigma_{equ,3}$  et  $\Delta\sigma_{Rd,3}$  respectivement.  $\Delta\sigma_{Rd,3}$  s'exprime par :

$$\Delta\sigma_{Rd,3} (N)^{\frac{1}{3}} = \Delta\sigma_D (N_D)^{\frac{1}{3}} = \Delta\sigma'_{f,3} \xrightarrow{\Delta\sigma'_{f,3} = \text{const.}} \Delta\sigma_{Rd,3} = \Delta\sigma_D \left( \frac{N_D}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2-155)$$

Le rapport entre l'équation (2-154) et (2-155) s'écrit :

$$\frac{\Delta\sigma_{equ,3}}{\Delta\sigma_{Rd,3}} = \frac{\left[ \frac{Q}{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j} \right]^{\frac{1}{3}}}{\Delta\sigma_D \left( \frac{N_D}{N} \right)^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow{N = \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j} \left( \frac{\Delta\sigma_{equ,3}}{\Delta\sigma_{Rd,3}} \right)^3 = \frac{Q}{\Delta\sigma_D^3 \frac{N_D}{N}} = \frac{Q}{\Delta\sigma_D^3 N_D} \quad (2-156)$$

L'utilisation des équations (2-140), (2-148) et (2-156) donne l'expression de l'endommagement dans le cas d'un diagramme à deux lignes de l'Eurocode 3.

$$D = \left( \frac{\Delta\sigma_{equ,3}}{\Delta\sigma_{Rd,3}} \right)^3 = \frac{Q}{\Delta\sigma_D^3 N_D} \leq 1 \quad (2-157)$$

Cette procédure peut être utilisée pour  $m = 5$ . Dans ce cas, l'équation (2-150) s'écrit:

$$D = \frac{N}{a\Delta\sigma_{equ}^{-5}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j}{a\Delta\sigma_{equ}^{-5}} \quad (2-158)$$

L'expression du concept de domaine équivalent des contraintes donne les équations suivantes :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j}{b\Delta\sigma_{equ}^{-5}} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{a\Delta\sigma_i^{-3}} + \sum_{j=1}^l \frac{n_j}{b\Delta\sigma_j^{-5}} = \frac{Q}{N_D \Delta\sigma_D^3}, \text{ où } a = (\Delta\sigma'_{f,3})^3, b = (\Delta\sigma'_{f,5})^5 \quad (2-159)$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j}{b\Delta\sigma_{equ}^{-5}} = \frac{Q}{N_D \Delta\sigma_D^3} \xrightarrow{\frac{b}{a} = \Delta\sigma_D^2} D = \frac{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j}{b\Delta\sigma_{equ}^{-5}} = \frac{Q}{b\Delta\sigma_D^{-2}} \rightarrow \Delta\sigma_{equ}^5 = \frac{Q\Delta\sigma_D^2}{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j} \quad (2-160)$$

En simplifiant :

$$\Delta\sigma_{equ,5} = \left( \frac{Q\Delta\sigma_D^2}{\sum_{i=1}^k n_i + \sum_{j=1}^l n_j} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (2-161)$$

$\Delta\sigma_{Rd,5}$  peut s'écrire comme l'équation (2-155) :

$$\Delta\sigma_{Rd,5} (N)^{\frac{1}{5}} = \Delta\sigma_D (N_D)^{\frac{1}{5}} = \Delta\sigma'_{f,5} \xrightarrow{\Delta\sigma'_{f,5} = \text{const.}} \Delta\sigma_{Rd,5} = \Delta\sigma_D \left( \frac{N_D}{N} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (2-162)$$

L'utilisation des équations (2-161) et (2-162) donne l'équation (2-163) :

$$D = \left( \frac{\Delta\sigma_{equ,5}}{\Delta\sigma_{Rd,5}} \right)^5 = \frac{Q}{\Delta\sigma_D^3 N_D} \leq 1 \quad (2-163)$$

Le paramètre  $D$  dans le cas général s'exprime par :

$$D = \begin{cases} \left( \frac{\Delta\sigma_{equ,3}}{\Delta\sigma_{Rd,3}} \right)^3 \leq 1, & N \leq N_D \\ \left( \frac{\Delta\sigma_{equ,5}}{\Delta\sigma_{Rd,5}} \right)^5 \leq 1, & N > N_D \end{cases} \quad (2-164)$$

Dans la Figure 2-37, l'algorithme général du dimensionnement par l'Eurocode3 est présenté. Les facteurs de sécurité sont issus de l'Eurocode3.

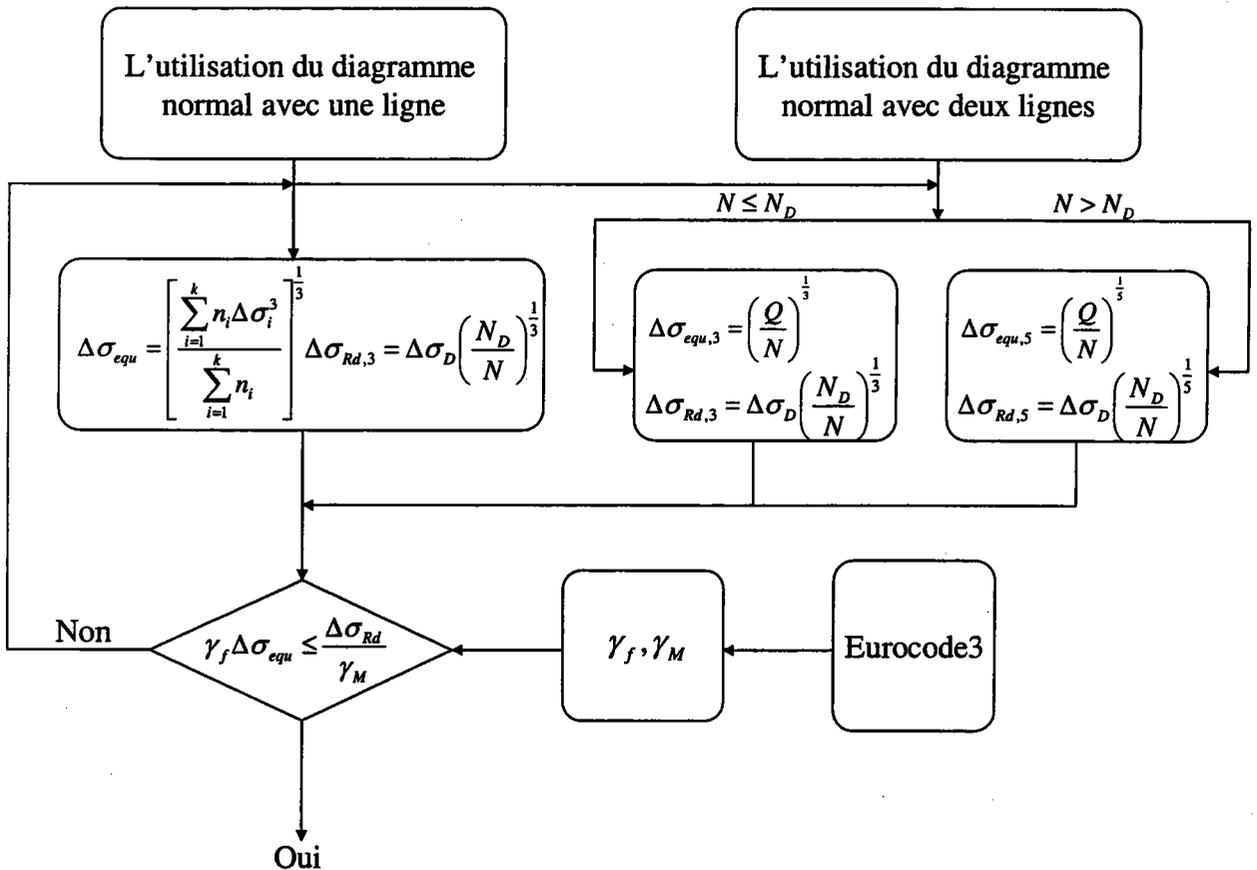


Figure 2-37 Algorithme du dimensionnement par Eurocode3 pour un diagramme à une et deux lignes S-N.

Les paramètres  $\Delta\sigma_{equ,m}$  et  $\Delta\sigma_{Rd,m}$  peuvent être calculés à partir de l'utilisation du diagramme normal avec une et deux lignes et à partir des équations (2-154), (2-155), (2-161) et (2-162). La méthode de l'Eurocode3 est une méthode de prévision de la durée de vie en fatigue basée sur les méthodes de contraintes. Cette méthode considère l'effet des contraintes moyennes par  $\Delta\sigma_{equ,m}$ . Il existe des différentes méthodes dans le cas de la présence de contraintes moyennes.

Dans la Figure 2-38, les méthodes de Goodman, Gerber et Soderberg sont présentées dans le diagramme  $\sigma_a - \sigma_m$  [49]. Les équations de Goodman, Gerber et Soderberg s'écrivent:

$$\sigma_a = \sigma_{fat} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{ts}} \right) \quad (2-165)$$

$$\sigma_a = \sigma_{fat} \left( 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{ts}} \right)^2 \right) \quad (2-166)$$

$$\sigma_a = \sigma_{fat} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_{ys}} \right) \quad (2-167)$$

Les équations (2-165), (2-166) et (2-167) sont respectivement les relations de Goodman, Gerber et Soderberg.

$\sigma_a$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_{fat}$ ,  $\sigma_{ts}$  et  $\sigma_{ys}$  sont respectivement l'amplitude des contraintes, la contrainte moyenne, la résistance en fatigue correspondant à l'amplitude des contraintes dans le cas  $\sigma_m = 0$ , la résistance en traction et la limite d'élasticité.

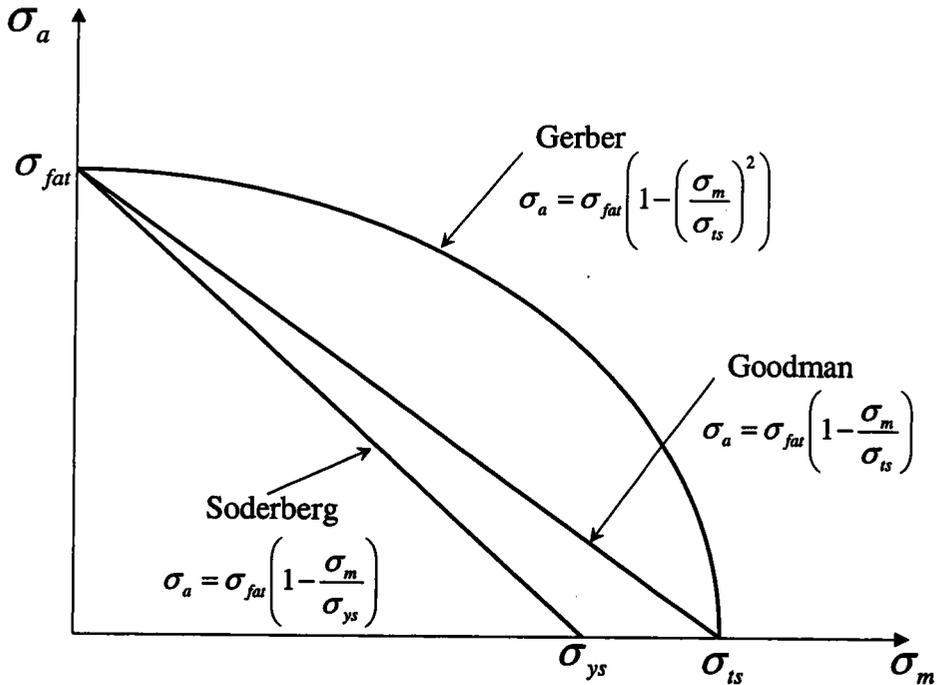


Figure 2-38 Schéma des méthodes de la contrainte dans le cas d'existence d'une contrainte moyenne.

La comparaison entre les méthodes de Goodman, Gerber et Soderberg montre que la méthode Soderberg est la plus conservatrice. Ces méthodes considèrent la contrainte moyenne dans

l'utilisation d'une approche en contrainte. Des méthodes de déformation locale peuvent aussi être utilisées.

## 2.5.2 Méthodes de déformation locale

Les méthodes de déformation locale utilisent généralement les déformations qui existent au voisinage des entailles. Ces méthodes généralement sont proposées dans le cas de la fatigue oligocyclique. Les méthodes de déformation locale peuvent être aussi appliquées au cas de la fatigue à grand nombre de cycles.

La déformation totale est la somme des déformations élastiques et plastiques. La composante élastique s'exprime à partir de la contrainte élastique et en fonction du nombre de cycles :

$$\frac{\Delta \varepsilon_e E}{2} = \sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (2-168)$$

où  $\frac{\Delta \varepsilon_e}{2}$ ,  $E$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma'_f$ ,  $N_f$  et  $b$  sont respectivement l'amplitude de la déformation élastique, le module de Young, l'amplitude de la contrainte, le coefficient de résistance en fatigue, le nombre de cycles à rupture et l'exposant de la résistance en fatigue.

La composante plastique de la déformation s'exprime par la relation de Coffin [45-48] :

$$\frac{\Delta \varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (2-169)$$

où  $\frac{\Delta \varepsilon_p}{2}$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $N_f$  et  $c$  sont respectivement l'amplitude de la déformation plastique, le coefficient de la ductilité en fatigue, le nombre de cycles à rupture et l'exposant de la ductilité en fatigue .

L'exposant de la ductilité en fatigue  $c$  prend généralement des valeurs comprises entre -0.50 et -0.70 [49].

Dans la Figure 2-39, un schéma simple des courbes élastiques et plastiques est montré. La superposition de la courbe élastique et de la courbe plastique dans un diagramme bi-logarithmique donne la courbe totale. Cette sommation s'exprime sous forme de loi de Manson-Coffin:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{a,e} + \varepsilon_{a,p} \xrightarrow{(2-168) \text{ et } (2-169)} \varepsilon_a = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (2-170)$$

Pour les matériaux ductiles, les approximations suivantes sont généralement utilisées [49] :

$$\sigma'_f \approx \sigma_f, \varepsilon'_f \approx \varepsilon_f \quad (2-171)$$

Les coefficients  $b$  et  $c$  sont définis par les équations proposées par Morrow [50] :

$$c \approx \frac{-1}{1+5n'} \quad (2-172)$$

$$b \approx n'c \approx \frac{-n'}{1+5n'} \quad (2-173)$$

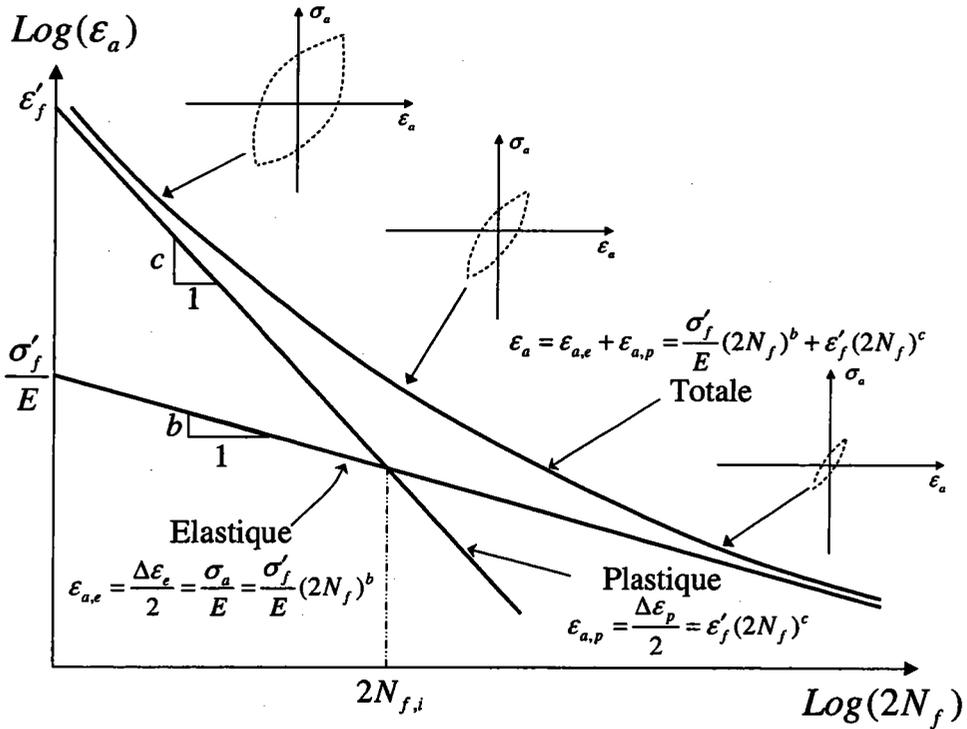


Figure 2-39 Schéma de la superposition des courbes élastique et plastique pour obtenir la courbe de déformation totale en fatigue.

où  $\sigma_f$ ,  $\varepsilon_f$  et  $n'$  sont respectivement la contrainte de rupture, la déformation à rupture et l'exposant d'écrouissage en déformation cyclique.

L'utilisation de l'équation de Manson-Coffin est la méthode locale la plus générale. L'utilisation de l'équation de Manson-Coffin entraîne l'utilisation d'une autre hypothèse dans la méthode de déformation locale. Cette hypothèse est l'égalité de la durée de vie en fatigue d'une éprouvette lisse et d'une éprouvette entaillée soumise à la même amplitude de déformation avec le même matériau. Dans la Figure 2-40, un schéma de cette hypothèse est présenté.

La méthode des Eléments Finis permet le calcul des contraintes et des déformations au voisinage de l'entaille et est basée sur le comportement des matériaux. Les méthodes de

déformation locale proposent des relations basées sur le comportement des matériaux en fond d'entaille sont très rapides de mise en œuvre, ce qui en fait leur intérêt.

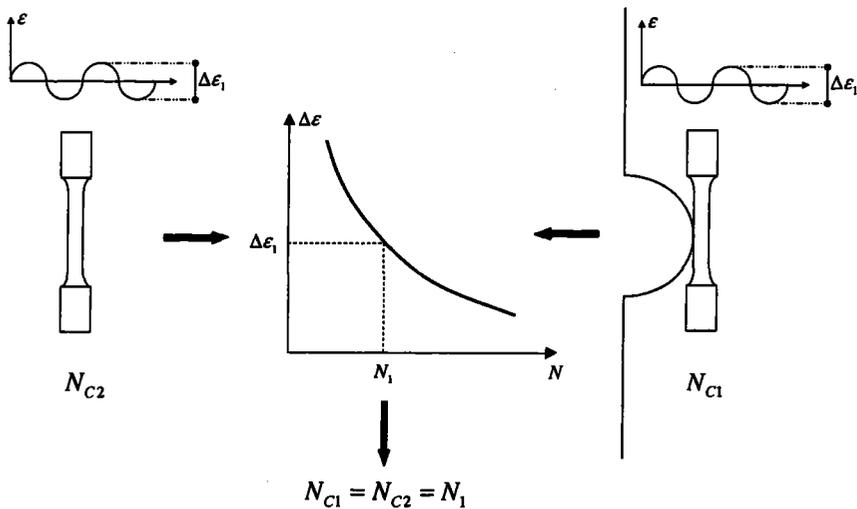


Figure 2-40 Illustration de la méthode de déformation locale [84].

- **La méthode de linéarisation**

La méthode de linéarisation est basée sur l'égalité du facteur de concentration de contraintes et du facteur de concentration de déformations. La relation proposée dans la méthode de linéarisation s'exprime par :

$$k_t = k_\epsilon \quad (2-174)$$

où  $k_t$  et  $k_\epsilon$  sont respectivement le facteur de concentration de contraintes et le facteur de concentration de déformations.

L'équation (2-174) s'exprime :

$$k_t = k_\epsilon \xrightarrow{k_\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_g}} \epsilon_a = k_t \epsilon_g \quad (2-175)$$

où  $\epsilon_a$  et  $\epsilon_g$  sont respectivement l'amplitude de déformation et la déformation globale.

Les résultats obtenus par la méthode de linéarisation sont corrects dans le cas de la déformation plane.

- **La méthode de Neuber [19]**

La méthode de Neuber comme d'autres méthodes de déformation locale propose une relation approximative au voisinage des entailles qui s'écrit :

$$k_\sigma k_\epsilon = k_t^2 \quad (2-176)$$

où  $k_t$ ,  $k_\epsilon$  et  $k_\sigma$  sont respectivement le facteur de concentration de contraintes élastiques, le facteur de concentration de déformations élasto-plastiques et le facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques. Le facteur de concentration de contrainte élasto-plastiques est donc défini:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_g} \tag{2-177}$$

où  $\sigma_a$  et  $\sigma_g$  sont respectivement l'amplitude de contrainte élasto-plastique en fond d'entaille et la contrainte globale.

L'utilisation des relations proposées pour le facteur de concentration de déformations élasto-plastiques et le facteur de concentration de contraintes en fatigue dans la relation (2-176) donne l'équation (2-177) :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_g} \frac{\epsilon_a}{\epsilon_g} = k_t^2 \text{ ou } \sigma_a \epsilon_a = k_t^2 \sigma_g \epsilon_g \tag{2-178}$$

L'équation (2-178) contient deux variables inconnues. Pour la résoudre, il est nécessaire d'utiliser une autre relation qui est la relation entre l'amplitude des contraintes et celle des déformations:

$$\epsilon_a = \epsilon_{a,e} + \epsilon_{a,p} = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \tag{2-179}$$

où  $\epsilon_a$ ,  $\sigma_a$ ,  $E$ ,  $K'$ ,  $n'$  sont respectivement l'amplitude des déformations, l'amplitude des contraintes, le module de Young, le coefficient d'érouissage cyclique et l'exposant d'érouissage cyclique.

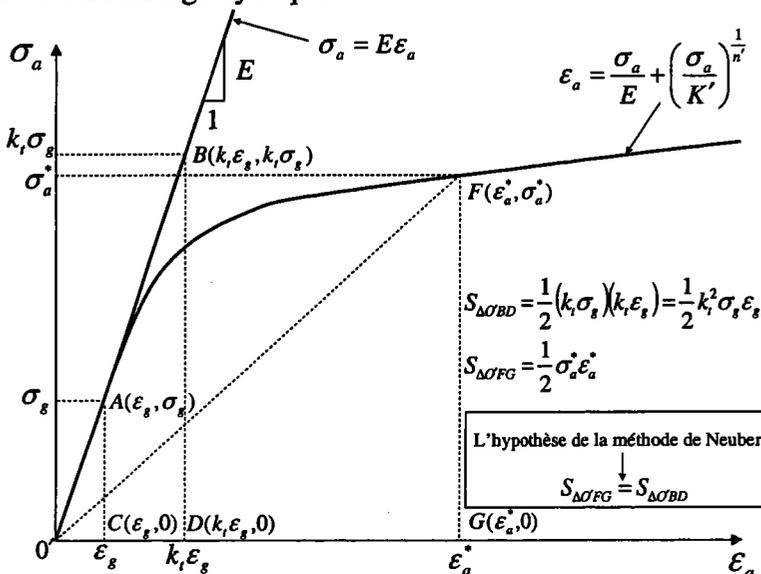


Figure 2-41 Illustration de l'interprétation de la méthode de Neuber.

Dans la Figure 2-41, l'interprétation de la méthode de Neuber est présentée. L'égalité des surfaces  $S_{\Delta O'BD}$  et  $S_{\Delta O'FG}$  donne la relation de Neuber.

Neuber considère que l'énergie élastique dans le cas élastique est égale à l'énergie dans le cas réel, pour les mêmes valeurs des amplitudes de contraintes et déformations.

L'algorithme de la méthode de Neuber dans le cas général est présenté dans la Figure 2-42.

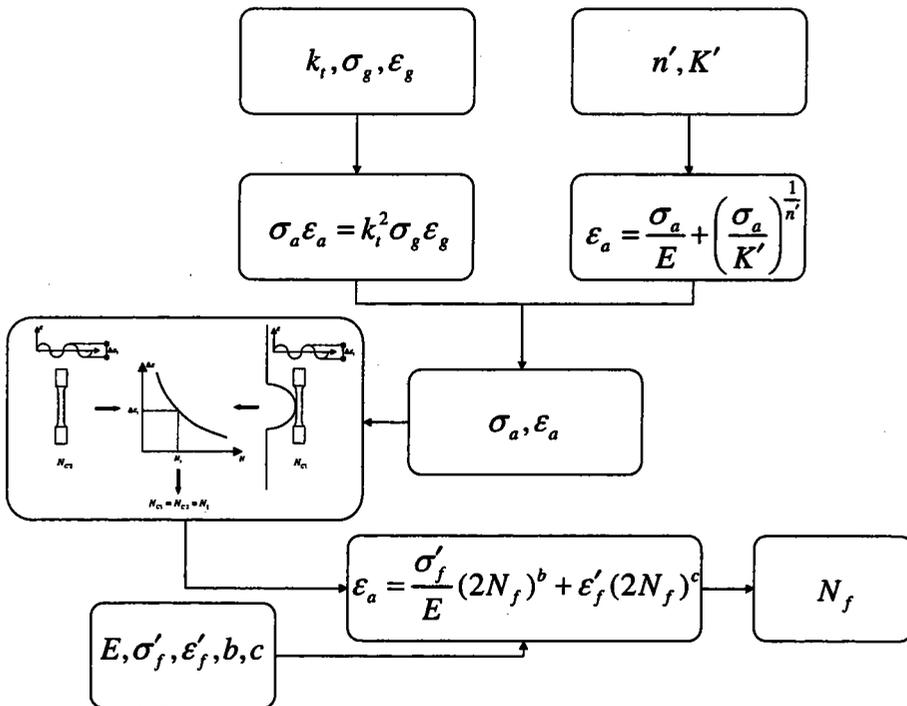


Figure 2-42 Algorithme général d'utilisation de la méthode de Neuber.

Les résultats obtenus par la méthode de Neuber sont généralement bons dans le cas de contraintes planes.

- **La méthode de Molski-Glinka [51-52]**

La méthode Molski-Glinka comme d'autres méthodes de déformation locale propose une approximation au voisinage des entailles et s'écrit comme suit :

$$\frac{(k_t \sigma_g)}{2E} = \frac{\sigma_a^2}{2E} + \frac{\sigma_a}{1+n'} \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2-180)$$

où  $k_t$ ,  $\sigma_g$ ,  $E$ ,  $\sigma_a$ ,  $n'$  et  $K'$  sont respectivement le facteur de concentration de contraintes, la contrainte globale, le module de Young, l'amplitude des contraintes, l'exposant d'érouissage cyclique et le coefficient d'érouissage cyclique.

L'équation (2-180) contient deux variables inconnues. Pour la résoudre il faut aussi faire appelle à la relation entre l'amplitude des contraintes et des déformations (2-179).

Dans la Figure 2-43, l'interprétation de la méthode de Molski-Glinka est présentée.

L'égalité des surfaces  $S_{\Delta O'BD}$  et  $S_{O'AFG}$  donne la relation de Molski-Glinka.

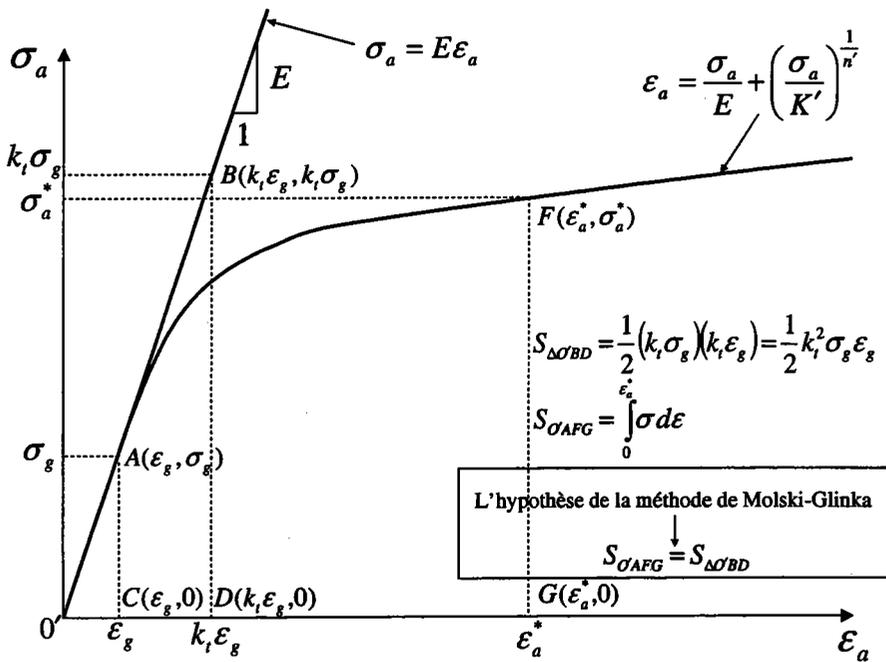


Figure 2-43 Illustration de l'interprétation de la méthode de Molski-Glinka.

Dans la Figure 2-43, les surface  $S_{\Delta O'BD}$  et  $S_{O'AFG}$  peut s'écrire:

$$S_{\Delta O'BD} = \frac{1}{2} k_t^2 \sigma_g \varepsilon_g \quad (2-181)$$

$$S_{O'AFG} = \int_0^{\varepsilon_a^*} \sigma_a d\varepsilon_a \xrightarrow{\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}} S_{O'AFG} = \int_0^{\sigma_a^*} \sigma_a \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{n'} \left( \frac{1}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} (\sigma_a)^{\frac{1}{n'}-1} \right) d\sigma_a \rightarrow$$

$$S_{O'AFG} = \int_0^{\sigma_a^*} \left( \frac{\sigma_a}{E} + \frac{1}{n'} \left( \frac{1}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} (\sigma_a)^{\frac{1}{n'}} \right) d\sigma_a = \frac{\sigma_a^{*2}}{2E} + \frac{1}{1+n'} \left( \frac{1}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} (\sigma_a^*)^{\frac{1+n'}{n'}} = \frac{\sigma_a^{*2}}{2E} + \frac{\sigma_a^*}{1+n'} \left( \frac{\sigma_a^*}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (2-182)$$

Les équations (2-181), (2-182) et  $\epsilon_g = \frac{\sigma_g}{E}$  conduisent à l'équation suivante :

$$\frac{\sigma_a^{*2}}{2E} + \frac{\sigma_a^*}{1+n'} \left( \frac{\sigma_a^*}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} = \frac{(k_t \sigma_g)^2}{2E} \tag{2-183}$$

L'équation (2-183) est l'équation de la méthode de Molski-Glinka. Dans l'équation (2-183),  $\sigma_a^*$  est une amplitude de contrainte arbitraire.

L'algorithme de la méthode de Molski-Glinka est donné dans la Figure 2-42 dans laquelle on remplace l'équation de Neuber par celle de Molski-Glinka.

Les résultats obtenus par la méthode de Molski-Glinka donne une estimation située entre les méthodes de linéarisation et de Neuber. Généralement, les méthodes de linéarisation et de Neuber conduisent à des valeurs limites. Dans la Figure 2-44, les méthodes et leurs équations sont présentées. Les calculs décroissent à partir du point B de la courbe élastique  $(k_t \epsilon_g, k_t \sigma_g)$ .

Les courbes des méthodes de linéarisation, Neuber et Molski-Glinka coupent la courbe représentative du comportement des matériaux respectivement aux points  $I(k_t \epsilon_g, \sigma_a^{*L})$ ,  $H(\epsilon_a^{*G}, \sigma_a^{*G})$  et  $F(\epsilon_a^{*N}, \sigma_a^{*N})$ . La méthode de Molski-Glinka donne généralement des estimations plus exactes que les méthodes de linéarisation et Neuber.

Dans le Tableau 2-5, les relations proposées par différents auteurs sont présentées. Les méthodes de Linéarisation, Neuber et Molski-Glinka sont utilisées en l'absence d'effet de contrainte moyenne.

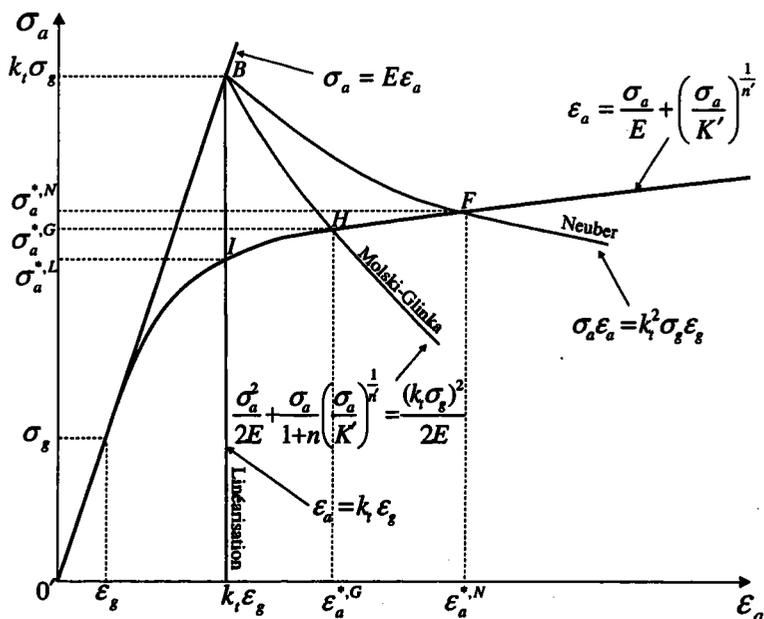


Figure 2-44 Comparaison des méthodes linéaires, Neuber et Molski-Glinka.

La prise en compte des effets de contrainte moyenne dans la méthode de déformation locale est très discutable et difficile.

Tableau 2-5 Equations proposées par différents auteurs pour la relation entre  $k_t$ ,  $k_\sigma$  et  $k_\epsilon$ .

AUTEUR	RELATION PROPOSEE
Neuber [19]	$k_t^2 = k_\sigma k_\epsilon$
Makhutov [53]	$k_t^2 = k_\sigma k_\epsilon \left( \frac{k_t \sigma_g}{\sigma_Y} \right)^{\frac{1+n'}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_g}{k_t \sigma_Y} \right) \right]$
Molski-Glinka [51-52]	$k_t^2 = \frac{k_\sigma k_\epsilon \left[ \frac{\sigma_g^2}{E} + \sigma_g \left( \frac{\sigma_g}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right] \left[ \frac{\sigma_a^2}{2E} + \frac{\sigma_a}{1+n'} \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right]}{\left[ \frac{\sigma_a^2}{E} + \sigma_a \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right] \left[ \frac{\sigma_g^2}{2E} + \frac{\sigma_g}{1+n'} \left( \frac{\sigma_g}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right]}$
Morozov-Pluvinage [54]	$k_t^2 = \frac{2k_\sigma k_\epsilon}{1+n'}$

Dans ce cas, l'effet d'une des déformations moyennes peut être pris en compte pour estimer la durée de vie. Les relations suivantes sont proposées par différents auteurs :

- La méthode de Morrow [55] :

$$\epsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N_f)^b + \epsilon'_f (2N_f)^c \quad (2-184)$$

- La méthode de Smith-Watson-Topper (SWT) [56] :

$$\epsilon_a \sigma_{\max} E = (\sigma'_f)^2 (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \epsilon'_f E (2N_f)^{b+c}, \quad \sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a \quad (2-185)$$

où  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_m$  sont respectivement la contrainte globale maximale, la contrainte globale minimale et la contrainte moyenne.

Les méthodes présentées dans les équations (2-184) et (2-185) sont normalement utilisées dans le cas de la fatigue oligocyclique.

## 2.6 Résumé

Dans ce chapitre, le facteur de concentration de contraintes et le facteur de réduction en fatigue proposés par différents auteurs sont présentés. Le champ de contraintes autour d'un trou dans une grande plaque est vérifié par l'approche analytique et la simulation numérique. Le calcul par Eléments Finis est réalisé avec le logiciel ANSYS. On a trouvé le champ de contraintes pour différents cas de chargement présenté dans la Figure 2-2.

Les Figures 2-3 et 2-4 représentent respectivement la distribution des contraintes dans les directions x et y.

Nous avons comparé le champ des contraintes obtenus par l'approche analytique et la méthode des Eléments Finis dans les Figures 2-24, 2-25 et 2-26. Le champ des contraintes par la méthode des Eléments Finis pour une barre est montré dans la Figure 2-27. Cette figure présente la concentration de contraintes pour différentes géométries. Nous avons calculé le facteur de concentration de contraintes pour cette éprouvette.

La distribution des contraintes dans le cas élastique et élasto-plastique est considérée dans le chapitre 2. On a comparé les différentes formulations proposées et notre résultat obtenu par la méthode des Eléments Finis dans la Figure 2-7 et 2-8.

La distribution des contraintes en fond d'entaille dans le cas élasto-plastique est étudiée par les approches analytiques et numériques. Dans le cas numérique, les techniques de calcul par Eléments Finis sont présentées.

Le facteur de réduction en fatigue présenté par différents auteurs est considéré dans la section 2.4. La méthode Eurocode 3 et les méthodes de déformation locale sont présentées dans les sections suivantes.

Les méthodes Peterson, Neuber, Stieler-Siebel, Kuhn Hardraht et Topper-El Haddad précisent la connaissance du rayon d'entaille. Dans le cas des joints soudés par point, la définition claire pour rayon d'entaille et la courbe lisse n'existent pas. Il est donc évident que l'utilisation des méthodes mentionnées n'est pas envisageable.

La méthode Eurocode 3 est limitée aux joints soudés communs dans les structures en acier. Les coefficients de sécurité ne sont pas définis dans le cas de joints soudés par point.

# CHAPITRE 3

# Chapitre 3

## 3. Méthode volumétrique pour la prévision de la durée de vie de structures entaillées

### 3.0 Introduction générale

La méthode volumétrique est une approche semi locale qui utilise le concept de l'intensité du champ des contraintes (stress field intensity approach, SFI) pour prévoir la durée de vie de structure entaillée [57-58]. Dans l'approche de l'intensité du champ des contraintes, la rupture par fatigue est réalisée par l'accumulation de l'endommagement dans la zone plastique. L'endommagement dans la zone plastifiée au voisinage du fond d'entaille dépend de la distribution des contraintes élasto-plastiques et du gradient de contraintes simultanément. Sa valeur critique pour la rupture par fatigue dans la zone plastifiée est donc caractéristique. La contrainte effective du champ des contraintes est calculée par l'intensité du champ des contraintes.

$$\sigma_{SFI}^N = \frac{1}{V} \int_{\Omega} f(\sigma_{ij}) \phi(\bar{r}) dv \quad (3-1)$$

où  $\sigma_{SFI}^N$ ,  $V$ ,  $f(\sigma_{ij})$ ,  $\phi(\bar{r})$  et  $\Omega$  sont respectivement la contrainte proposée par la méthode d'intensité du champ des contraintes, le volume de la zone plastique, la fonction des contraintes, la fonction poids et le volume d'intégration.

La contrainte critique dépend du matériau et de son comportement dans le cas d'une grande concentration de contrainte. Dans la Figure 3-1, un schéma simple de la méthode d'intensité du champ des contraintes est présenté dans des cas généraux de géométrie et de chargement. La méthode d'intensité du champ des contraintes est donc une méthode semi locale. Cette méthode nécessite de connaître le champ des contraintes au voisinage du fond d'entaille. Ensuite, le volume de la zone plastifiée est considéré pour calculer l'intégrale de l'équation (3-1).

Cette méthode nécessite de définir deux fonctions, la fonction des contraintes et la fonction poids.

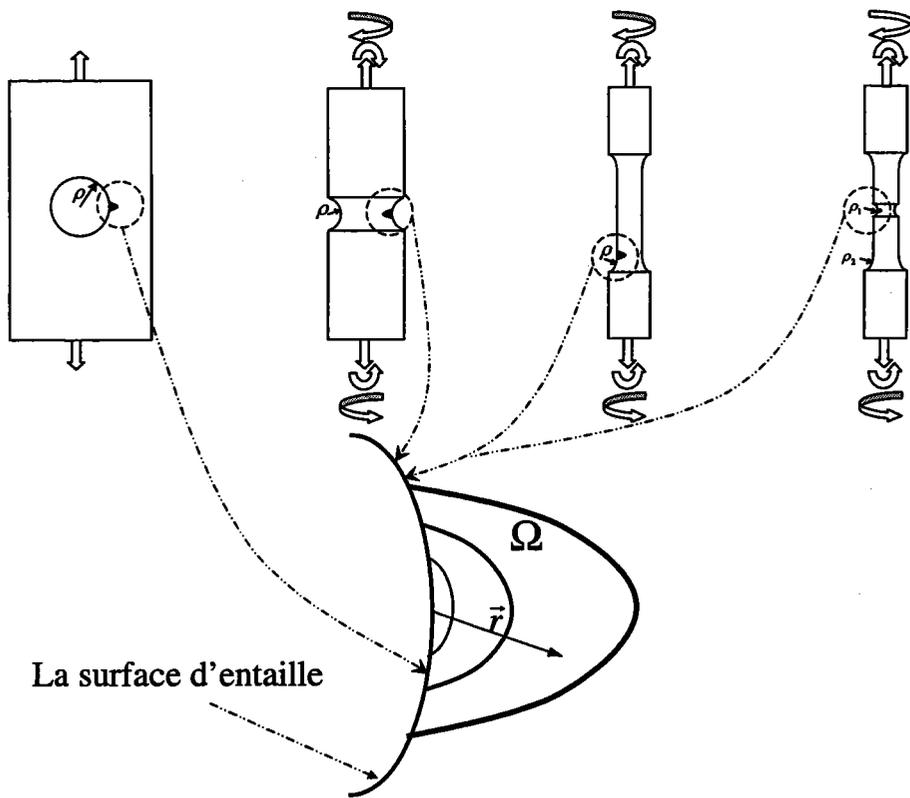


Figure 3-1 Présentation de la distribution schématique des contraintes en fond d'entaille pour différents types d'éprouvettes.

Le facteur de réduction en fatigue par la méthode d'intensité du champ des contraintes est présenté:

$$k_f = \frac{1}{V} \int_{\Omega} f(\hat{\sigma}_{ij}) \phi(\vec{r}) dv \quad (3-2)$$

où  $k_f$  et  $f(\hat{\sigma}_{ij})$  sont respectivement le facteur de réduction en fatigue et la fonction des contraintes normalisées par la contrainte globale.

Le volume d'élaboration du processus de fatigue au voisinage du fond d'entaille change avec la géométrie et le type du chargement. Dans le cas de contraintes planes et de déformations planes, le volume représente la zone plastifiée dans le cas bi-dimensionnel. Dans d'autres cas, une valeur précise du volume de la zone plastifiée en fond d'entaille ne peut pas être obtenue. Dans la Figure 3-1, les volumes de quelques éprouvettes en fond d'entaille avec différentes géométries sont montrés. Selon les difficultés liées à la configuration des volumes, il est nécessaire de simplifier l'intégrale de la méthode d'intensité du champ des contraintes. Les équations (3-3) et (3-4) représentent respectivement le cas bi-dimensionnel et uni-dimensionnel:

$$k_f = \frac{1}{A_D} \int f(\hat{\sigma}_{ij}) \phi(\vec{r}) da \quad (3-3)$$

$$k_f = \frac{1}{l_L} \int f(\hat{\sigma}_{ij}) \phi(x) dx \quad (3-4)$$

où  $A, D, l, L, \phi(\vec{r})$  et  $\phi(x)$  sont respectivement la valeur de la surface de la zone plastique, la surface d'intégration, la longueur de la zone plastique, la longueur d'intégration, la fonction poids dans le cas bi-dimensionnel et la fonction poids dans le cas uni-dimensionnel.

Dans le cas uni dimensionnel à partir de la définition  $f(\hat{\sigma}_{ij}) = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_g}$  et  $\phi(x) = 1$ , la relation (3-

4) s'écrit comme ci dessous :

$$k_f = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_g} = \frac{\frac{1}{l} \int_0^l \sigma_{yy}(x) dx}{\sigma_g}, \quad \text{où} \quad \sigma_{eff} = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_{yy}(x) dx \quad (3-5)$$

où  $k_f, \sigma_g, \sigma_{yy}(x)$  et  $\sigma_{eff}$  sont respectivement le facteur de réduction en fatigue, la contrainte globale, la contrainte d'ouverture en fatigue et la contrainte effective en fatigue.

L'équation (3-5) représente la relation du facteur de réduction en fatigue basée sur l'hypothèse de la méthode de la contrainte effective [34, 19, 59-62].

La contrainte moyenne effective dans l'équation (3-5) peut s'exprimer par la méthode Peterson [61]:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_{yy}(x) \delta(x-x^*) dx = \sigma_{yy}(x^*) \quad \text{où} \quad \delta(x-x^*) = \begin{cases} 1 & x = x^* \\ 0 & x \neq x^* \end{cases} \quad (3-6)$$

Ainsi, selon la méthode de Peterson, le facteur de réduction en fatigue s'exprime par :

$$k_f = \frac{\sigma_{yy}(x^*)}{\sigma_g} \quad (3-7)$$

où  $x^*$  et  $\sigma_{yy}(x^*)$  sont respectivement la distance du fond d'entaille et la contrainte correspondante à la distance  $x^*$ .

Dans la Figure (3-2), le schéma des méthodes de la contrainte effective et de la méthode de Peterson est présenté. Dans la méthode d'intensité du champ des contraintes, la fonction des contraintes  $f(\sigma_{ij})$  dépend du tenseur de contraintes [63]. La définition de la fonction des contraintes dans la méthode d'intensité du champ des contraintes s'écrit [64-65] :

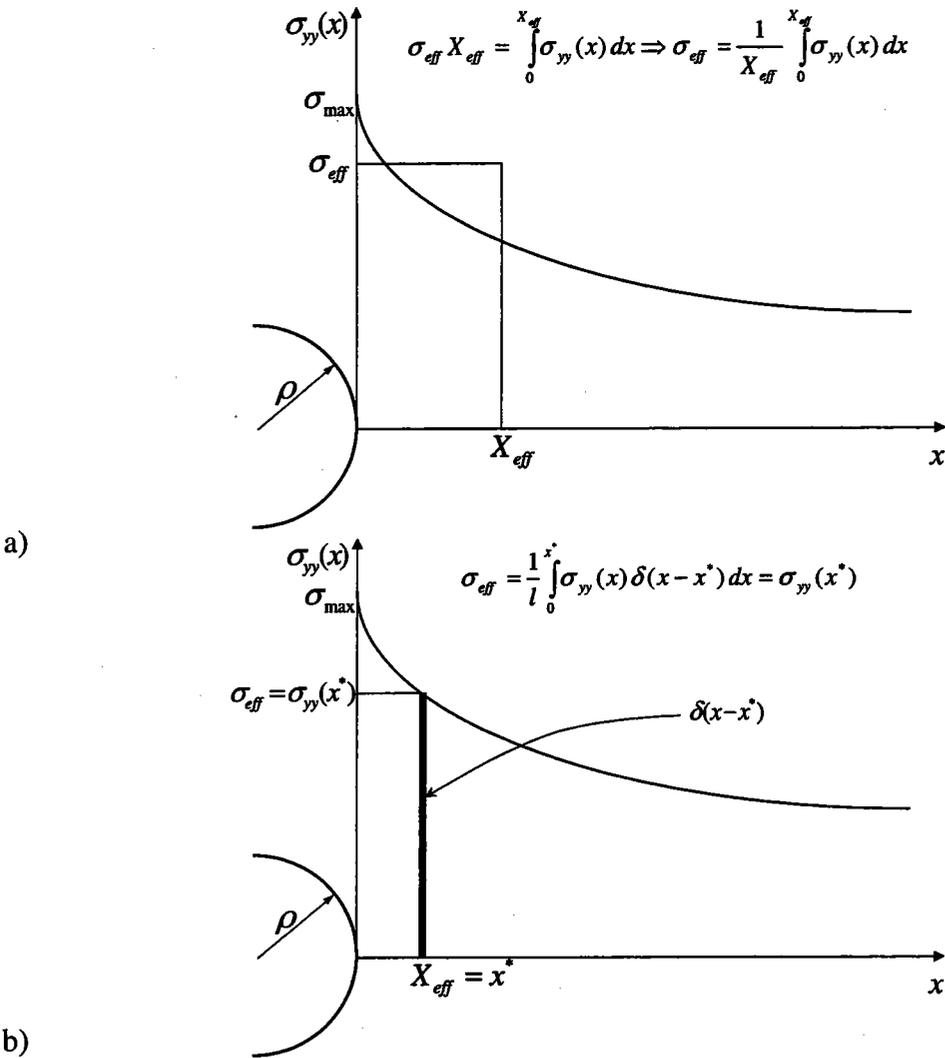


Figure 3-2 Schéma de l'intégration au voisinage du fond d'entaille a) Méthode de la contrainte effective b) Méthode de Peterson.

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_{eq}^i \quad (3-8)$$

La fonction poids dans la méthode d'intensité du champ des contraintes est généralement définie comme ci-dessous :

$$\phi(\vec{r}) = 1 - cr(1 + \sin(\theta)) \quad (3-9)$$

où  $\phi(\vec{r})$ ,  $c$ ,  $r$ , et  $\theta$  sont respectivement la fonction poids, la constante de la fonction poids et les composantes polaires.

La fonction poids ne dépend ni du chargement appliqué ni de la géométrie. Cette fonction dépend du comportement des matériaux. La fonction poids permet une discrimination des points les plus importants dans le calcul de l'intégral. Cette fonction est soumise à des conditions particulières :

$$1. \quad 0 \leq \phi(\vec{r}) \leq 1 \quad (3-10)$$

$$2. \quad \text{Si } \vec{G} = \vec{\nabla} \sigma(0) = 0 \Rightarrow \phi(0) \equiv 1 \quad (3-11)$$

$$3. \quad \text{Si } \vec{G} = \vec{\nabla} \sigma(r) = 0 \Rightarrow \phi(\vec{r}) \equiv 1 \quad (3-12)$$

Selon la définition de la méthode d'intensité du champ des contraintes, la relation (3-9) s'exprime :

$$\phi(r, \theta) = 1 - \left[ 1 - \frac{\sigma^i_{Eqv}}{\sigma_{Peak}} \right] r(1 + \sin \theta) \quad (3-13)$$

où  $\sigma^i_{Eqv}$ ,  $\sigma_{Peak}$ ,  $r$ , et  $\theta$  sont respectivement la contrainte équivalente dans l'élément « i », la contrainte maximale et les composantes polaires.

Dans la Figure 3-3, le diagramme schématique de la fonction poids dans le i ème élément est présenté. Les maillages correspondent à un grand trou dans une plaque pour le cas d'une hypothèse de contraintes planes.

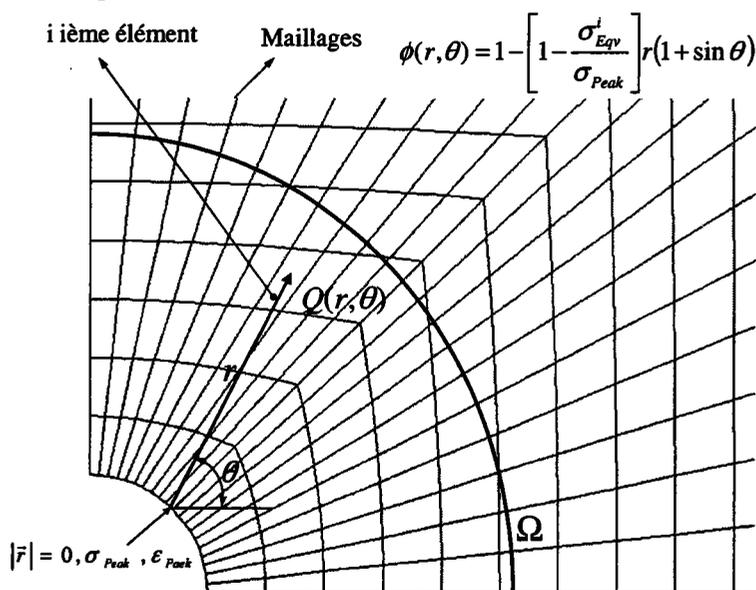


Figure 3-3 Schéma de la fonction de poids au voisinage du fond d'entaille dans la méthode d'intensité du champ des contraintes.

Dans la Figure 3-3, la contrainte maximale et la déformation maximale se trouvent en fond d'entaille. La fonction poids dépend donc de la valeur moyenne dans chaque élément. Il est donc nécessaire d'intégrer la contrainte utilisée dans le concept d'intensité des contraintes sous forme discrète :

$$\sigma_{FI} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \sigma^i_{Eqv} \phi(r_i) \Delta S_i \quad (3-14)$$

où  $\sigma_{FI}$ ,  $S$ ,  $\sigma_{Eqv}^i$ ,  $\phi(r_i)$ ,  $\Delta S_i$  et  $n$  sont respectivement la contrainte de la méthode d'intensité du champ des contraintes, la surface de l'intégration, la contrainte équivalente dans l'élément « i », la fonction poids dans l'élément « i », la surface dans l'élément « i » et le nombre des maillages.

La procédure mentionnée peut s'écrire dans la méthode d'intensité du champ des déformations [63]. Les équations (3-8), (3-13) et (3-14) sont transformées sous la forme suivante :

$$f(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{1+\nu} \sqrt{\left[ \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)^2 - 3\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2 \right]} = \varepsilon_{eq}^i \quad (3-15)$$

$$\phi(r, \theta) = 1 - \left[ 1 - \frac{\varepsilon_{Eqv}^i}{\varepsilon_{Peak}} \right] r (1 + \sin \theta) \quad (3-16)$$

$$\varepsilon_{FI} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{Eqv}^i \phi(r_i) \Delta S_i \quad (3-17)$$

La méthode volumétrique utilise le concept de la méthode d'intensité du champ des contraintes avec différentes fonctions poids dans le cas des calculs élasto-plastiques. La méthode volumétrique et la méthode d'intensité du champ des contraintes sont des méthodes semi locales. La moyenne des contraintes dans le volume d'élaboration est la contrainte effective. Le volume d'élaboration est défini soit par la zone plastifiée (M.I.F), soit par le minimum du gradient des contraintes (méthode volumétrique).

### 3.1 L'approche volumétrique

Dans le cas de l'existence d'une zone plastifiée au voisinage du fond d'entaille, la distribution des contraintes présente un caractère élasto-plastique. Dans les cas simples, cette distribution est donnée par une solution analytique; dans les cas plus compliqués, il est nécessaire d'obtenir le champ des contraintes élasto-plastiques en fond d'entaille par l'utilisation de la méthode des Eléments Finis. Les résultats obtenus par les calculs aux Eléments Finis et les approches analytiques montrent que la contrainte élasto-plastique maximale n'est pas en fond d'entaille mais à une certaine distance de celui-ci [24-26]. Au delà de ce maximum, la distribution est souvent de type puissance et gouvernée par le facteur d'intensité de contraintes d'entaille et la distance  $X_{eff}$  est définie de façon particulière.

La méthode volumétrique calcule la contrainte effective et le facteur de réduction en fatigue par les équations suivantes [66-67]:

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{X_{eff}} \int_0^{X_{eff}} \sigma_{yy}(x)(1-x\chi) dx, \quad \text{où} \quad \chi = \frac{1}{\sigma_{yy}(x)} \frac{d\sigma_{yy}(x)}{dx} \quad (3-18)$$

$$k_f = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_n} = \frac{1}{\sigma_n X_{eff}} \int_0^{X_{eff}} \sigma_{yy}(x)(1-x\chi) dx \quad (3-19)$$

où  $\sigma_{eff}$ ,  $\sigma_n$ ,  $X_{eff}$ ,  $\sigma_{yy}(x)$  et  $\chi$  sont respectivement la contrainte effective, la contrainte nominale, la distance effective (selon cette méthode), la contrainte d'ouverture en fatigue, le gradient de contraintes.

La comparaison entre l'équation (3-4) et (3-19) proposées par la méthode d'intensité du champ des contraintes et l'approche volumétrique montre la différence entre les définitions de la fonction des contraintes et la fonction poids [68-70] :

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{yy}(x)}{\sigma_n} \quad (3-20)$$

$$\phi(x) = 1 - x\chi, \quad \text{où} \quad \chi = \frac{1}{\sigma_{yy}(x)} \frac{d\sigma_{yy}(x)}{dx} \quad (3-21)$$

Dans le cas de l'existence des contraintes de cisaillements, la relation (3-19) s'exprime sous la forme suivante :

$$k_f = \frac{\tau_{eff}}{\tau_n} = \frac{1}{\tau_n X_{eff}} \int_0^{X_{eff}} \tau_{yy}(x)(1-x\chi) dx \quad (3-22)$$

$$\chi = \frac{1}{\tau_{yy}(x)} \frac{d\tau_{yy}(x)}{dx} \quad (3-23)$$

où  $\tau_{eff}$ ,  $\tau_n$ ,  $X_{eff}$ ,  $\tau_{yy}(x)$  et  $\chi$  sont respectivement le cisaillement effectif, le cisaillement nominal, la distance effective, le cisaillement en fatigue et le gradient des cisaillements.

En générale, la contrainte d'ouverture en fatigue est une contrainte principale. Cette contrainte est perpendiculaire à la direction de la propagation des fissures. Le concept de la contrainte d'ouverture en fatigue et la direction d'intégration sont les paramètres les plus importants dans le calcul de la durée de vie en fatigue par la méthode volumétrique. Dans la Figure 3-4, la contrainte d'ouverture en fatigue et la direction d'intégration pour différentes éprouvettes sont schématiquement présentées. L'évaluation des contraintes au voisinage du fond d'entaille présente toujours un maximum défini près du fond d'entaille. La taille de la zone plastifiée dépend du type de chargement et de la géométrie des éprouvettes et des entailles.

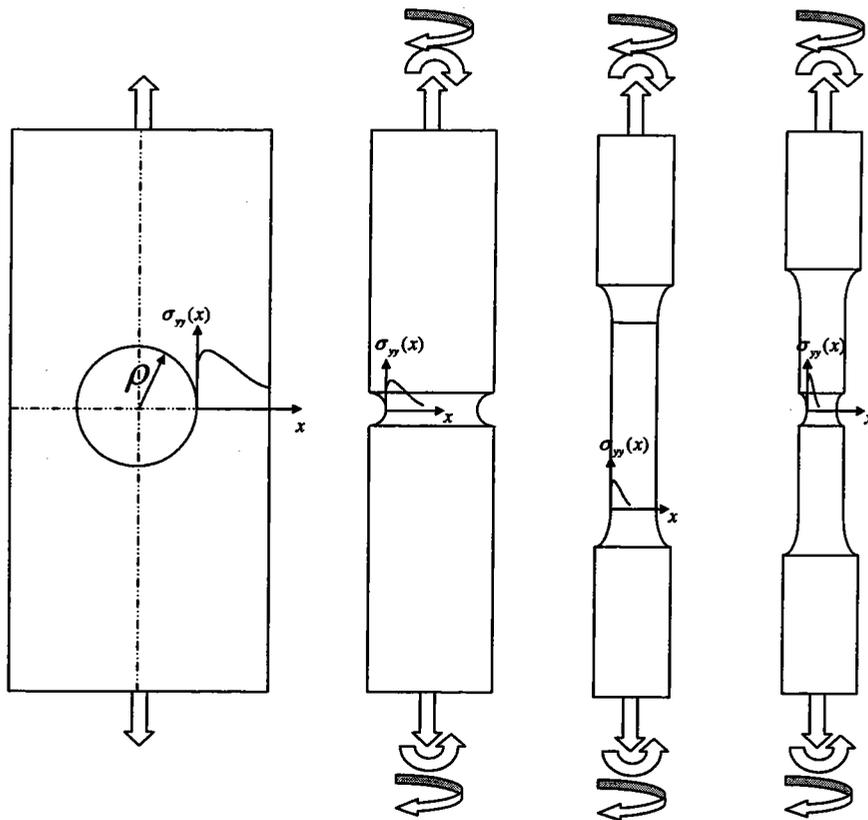


Figure 3-4 Schéma de la distribution des contraintes en fond des différentes entailles dans le cas d'un calcul élasto-plastique.

Le rayon d'entaille change la morphologie de la zone plastifiée au voisinage du fond d'entaille. Plus le rayon augmente, plus la zone plastifiée augmente et vice-versa. Le calcul de la distribution des contraintes en fond d'entaille dépend du type d'éprouvettes et de la valeur du rayon d'entaille.

La fonction poids dépend du gradient des contraintes et de la distance en fond d'entaille. La fonction poids contient les deux premières parties de l'expansion de Taylor. Elle est soumise aux conditions suivantes:

1.  $0 \leq \phi(x) \leq 1$
2.  $\phi(0) \equiv 1$
3. Si  $\chi = 0 \Rightarrow \phi(x) \equiv 1$

Le calcul de la distance effective est un élément essentiel de la méthode volumétrique et consiste à déterminer la position du minimum du gradient des contraintes dans un diagramme bi-logarithmique.

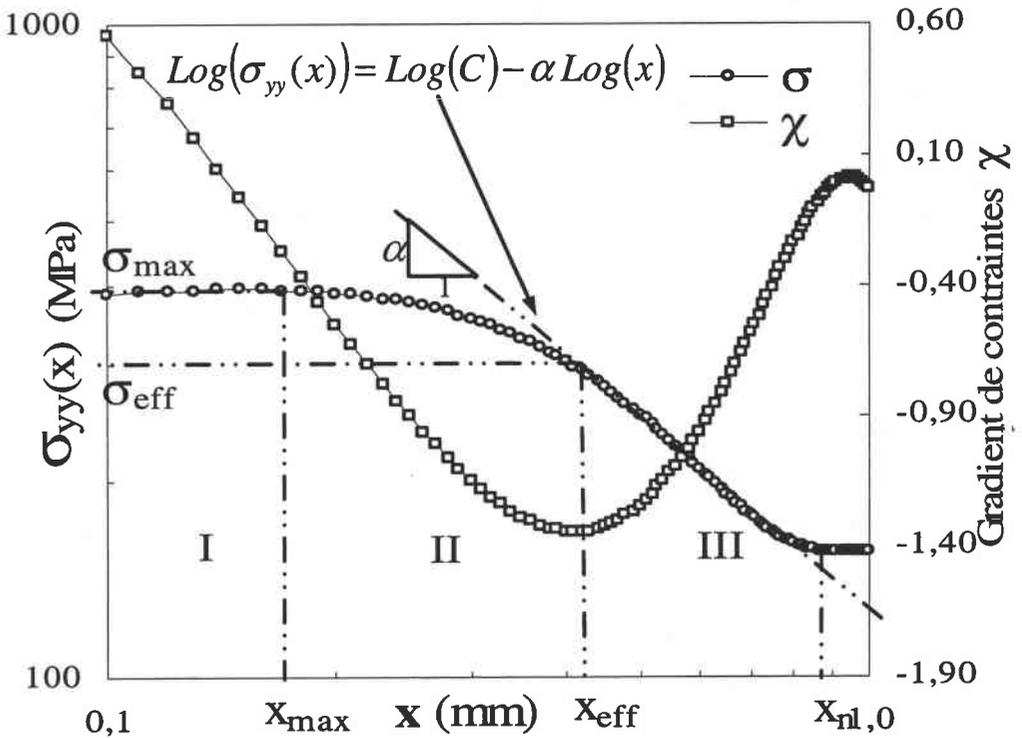


Figure 3-5 Schéma du diagramme bi-logarithmique de la distribution de la contrainte élasto-plastique et du gradient des contraintes en fond d'entaille.

Dans la Figure 3-5, la contrainte élasto-plastique et le gradient de contraintes sont présentés dans le diagramme bi-logarithmique de la méthode volumétrique. Trois zones particulières peuvent être distinguées :

- **Zone I :** La contrainte élasto-plastique en fond d'entaille augmente jusqu'à la contrainte maximale  $\sigma_{\text{max}}$ .

- Zone II : La contrainte élasto-plastique diminue jusqu'à la distance effective  $X_{eff}$ .
- Zone III : L'évolution de la contrainte élasto-plastique a un comportement linéaire dans le diagramme logarithmique. Ce comportement s'exprime par une loi en puissance [68]:

$$\text{Log}(\sigma_{yy}(x)) = \text{Log}(C) - \alpha \text{Log}(x) \quad (3-24)$$

La relation (3-24) s'écrit :

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{C}{x^\alpha} \quad (3-25)$$

où  $\sigma_{yy}(x)$ ,  $C$  et  $\alpha$  sont respectivement la contrainte d'ouverture en fatigue, un coefficient du matériau et l'exposant de la pseudo singularité des contraintes.

Soit (3-25),

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{K_\rho}{(2\pi x)^\alpha}, \quad \text{où } K_\rho = C(2\pi)^\alpha \quad (3-26)$$

$K_\rho$  est le facteur d'intensité d'entaille [66, 68,71-74].

Les coefficients  $C$  et  $\alpha$  dépendent du comportement du matériau, de la géométrie de l'entaille et du type du chargement :

$$C = C(E, \nu, \sigma_Y, n', K', \rho, W, a, R) \quad (3-27)$$

$$\alpha = \alpha(E, \nu, \sigma_Y, n', K', \rho, W, a, R) \quad (3-28)$$

où  $E$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_Y$ ,  $n'$ ,  $K'$ ,  $\rho$ ,  $W$ ,  $a$  et  $R$  sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, la limite d'élasticité, l'exposant d'écrouissage cyclique, le coefficient d'écrouissage cyclique, le rayon d'entaille, la taille du ligament, la profondeur d'entaille et le rapport de contrainte ( $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ ).

Les paramètres mentionnés sont utilisés dans la méthode des Eléments Finis. Les paramètres  $E$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_Y$ ,  $n'$  et  $K'$  sont intégrés dans la loi de comportement du matériau. D'autres paramètres ( $\rho$ ,  $W$ ,  $a$ ,  $R$ ) caractérisent la géométrie et le type du chargement respectivement. Les coefficients  $C$  et  $\alpha$  sont exclusivement obtenus par calcul par la méthode des Eléments Finis.

Dans la Figure 3-6, le schéma de la zone III est comparé à la relation conventionnelle de la mécanique linéaire de la rupture.

La distribution des contraintes élasto-plastiques est présentée dans l'intervalle entre la distance effective  $X_{eff}$  et la distance de la fin de la zone III,  $x_n$ .

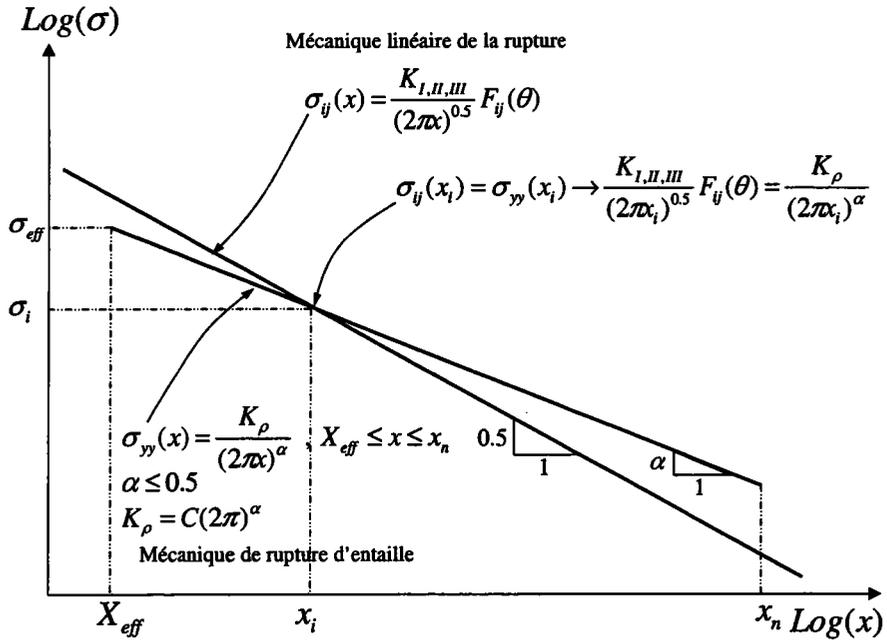


Figure 3-6 Distribution des contraintes en fond d'entaille et en fond de fissure dans la zone III.

La distance  $x_n$  de situe à la fin de la zone linéaire. Le point  $(x_i, \sigma_i)$  est l'intersection des courbes de la mécanique linéaire de la rupture et la mécanique de rupture d'entaille.

La procédure mentionnée peut être utilisée en remplaçant la contrainte par la densité d'énergie de déformations ( $W = \int \sigma d\epsilon$ ) [75-76]. La relation (3-25) s'exprime par:

$$\Delta W = \frac{C_w}{x^{\alpha_w}} \tag{3-29}$$

où  $\Delta W$ ,  $C_w$  et  $\alpha_w$  sont la densité d'énergie de déformations et les coefficients de la distribution linéaire dans le diagramme bi-logarithmique ( $\Delta W - x$ ).

Les coefficients  $C_w$  et  $\alpha_w$  dépendent des matériaux et du type du chargement :

$$C_w = C_w(E, \nu, \sigma_Y, n', K', \rho, W, a, R) \tag{3-30}$$

$$\alpha_w = \alpha_w(E, \nu, \sigma_Y, n', K', \rho, W, a, R) \tag{3-31}$$

où  $E$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_Y$ ,  $n'$ ,  $K'$ ,  $\rho$ ,  $W$ ,  $a$  et  $R$  sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, la limite d'élasticité, l'exposant d'écrouissage cyclique, le coefficient d'écrouissage cyclique, le rayon de l'entaille, le ligament, la profondeur d'entaille et le rapport de contraintes.

### 3.2 Procédure de prévision de la durée de vie en fatigue par la méthode volumétrique

La méthode volumétrique nécessite la connaissance de la contrainte effective et la distance effective et permet le calcul du facteur de réduction en fatigue. Le facteur de réduction en fatigue est utilisé dans la procédure de prévision de la durée de la durée de vie en fatigue par la méthode volumétrique. La procédure traditionnelle de prévision de vie en fatigue par l'approche volumétrique est l'utilisation de la méthode graphique. La présentation graphique de la méthode volumétrique est montrée dans la Figure (3-5).

L'évolution des contraintes en fond d'entaille est divisée en trois zones. Au Tableau 3-1, ces zones sont individuellement présentées et la zone III peut être présentée avec une relation analytique.

Tableau 3-1 Description des zones de distribution des contraintes dans l'approche volumétrique.

N°	DESCRIPTION	EQUATION
I	La contrainte augmente et la valeur maximale est déterminée, $0 \leq x \leq x_{\max}$	-
II	La contrainte diminue et la valeur effective est déterminée, $x_{\max} \leq x \leq X_{\text{eff}}$	-
III	La contrainte a un comportement linéaire, $X_{\text{eff}} \leq x \leq x_n$	$\text{Log}(\sigma_{yy}(x)) = \text{Log}(C) - \alpha \text{Log}(x)$

La méthode graphique de l'approche volumétrique donne la distance effective correspondant au gradient de la zone linéaire respectivement. L'utilisation de la distance effective et de la relation (3-19) conduit au facteur de réduction en fatigue.

Le facteur de réduction en fatigue calculé par la méthode volumétrique s'applique à la courbe de résistance en fatigue d'une éprouvette lisse dans le diagramme de Wöhler et permet de retrouver la courbe de résistance en fatigue d'une éprouvette entaillée.

Dans la Figure (3-7), l'algorithme d'évaluation de la durée de vie en fatigue est présenté. La géométrie, le chargement et le comportement des matériaux sont introduits dans le calcul élasto-plastique par la méthode des Eléments Finis. Le comportement des matériaux en présence de chargements cycliques est représenté par la relation de Ramberg-Osgood :

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (3-32)$$

où  $E$ ,  $K'$  et  $n'$  sont respectivement le module de Young, le coefficient d'érouissage cyclique et l'exposant d'érouissage cyclique.

L'équation (3-32) représente le comportement réel des matériaux dans le cas de chargement cyclique.

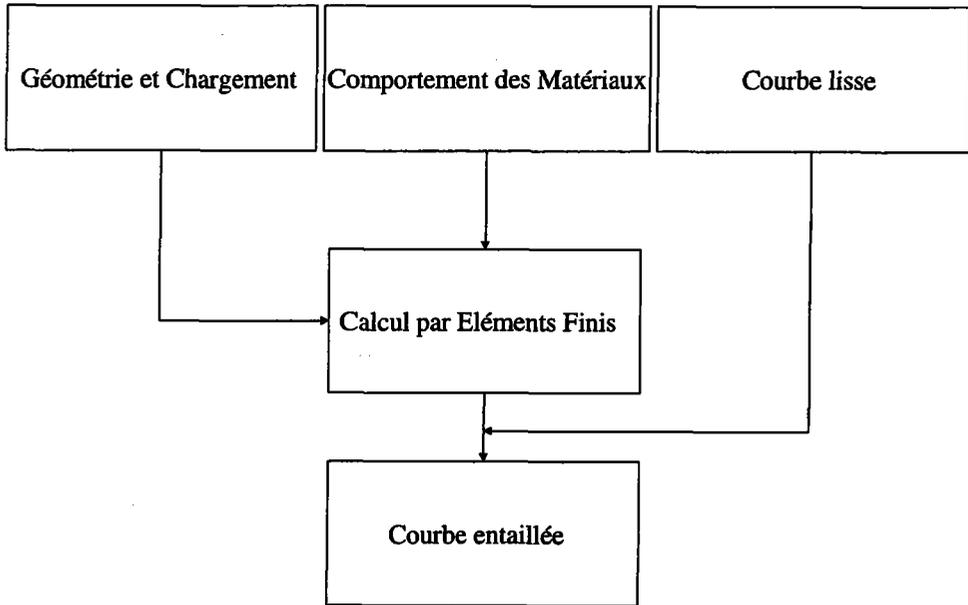


Figure 3-7 Algorithme de la méthode volumétrique dans le cas de l'existence de la courbe lisse.

Le facteur de réduction en fatigue, relation (3-33), permet à partir de la courbe de Wöhler d'une éprouvette lisse de retrouver celle d'une éprouvette entaillée.

$$k_f = \frac{\sigma_s}{\sigma_N} \quad (3-33)$$

où  $k_f$ ,  $\sigma_s$  et  $\sigma_N$  sont respectivement le facteur de réduction en fatigue, la résistance en fatigue d'une éprouvette lisse et la résistance en fatigue d'une éprouvette entaillée.

L'algorithme mentionné dans la Figure 3-7 ne peut être utilisé que si la courbe de Wöhler d'une éprouvette lisse est disponible. Par exemple, pour les joints soudés par point l'obtention de cette courbe n'est pas possible. La méthode volumétrique propose alors un autre algorithme pour la durée de vie en fatigue.

Dans la Figure 3-8, l'algorithme de la méthode volumétrique est présenté. La courbe lisse est obtenue par l'utilisation des résultats expérimentaux d'éprouvettes entaillées avec les mêmes caractéristiques géométriques. La courbe lisse obtenue par l'utilisation de l'algorithme de la Figure 3-8, peut être utilisée dans la Figure 3-7 pour des éprouvettes entaillées de même géométrie mais avec différents rayons d'entaille.

La méthode volumétrique est une approche semi-locale, car cette méthode utilise la contrainte effective calculée comme une moyenne sur la distance effective.

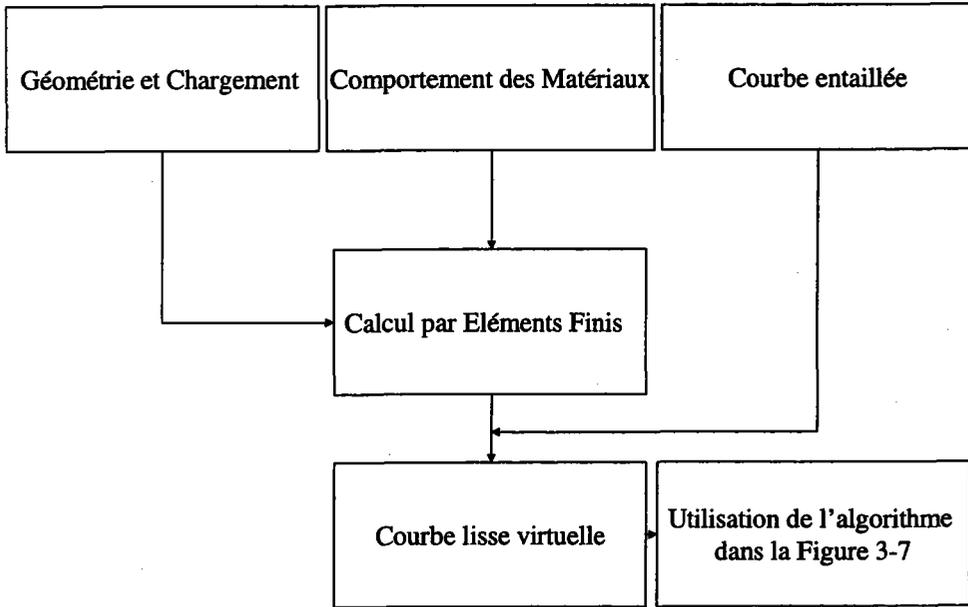


Figure 3-8 Algorithme de la méthode volumétrique dans le cas sans la courbe lisse.

Les résultats obtenus par la courbe entaillée et les résultats expérimentaux seront comparés pour examiner l'exactitude et la fiabilité de cette approche.

La méthode volumétrique utilise une représentation bi-logarithmique. Cette façon de procéder n'est pas facile en pratique. Il est nécessaire d'utiliser une formulation plus simple. Pour surmonter ces difficultés, le lissage de la courbe est utilisé. La distribution des contraintes en fond d'entaille est donc définie par l'équation (3-34) :

$$\sigma_{yy}(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (3-34)$$

Le gradient des contraintes  $s$  s'exprime par :

$$\chi(x) = \frac{1}{\sigma_{yy}(x)} \frac{d\sigma_{yy}(x)}{dx} = \frac{\sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^n a_i x^i} \quad (3-35)$$

et la fonction poids s'écrit :

$$\phi(x) = 1 - \frac{x \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^n a_i x^i} \quad (3-36)$$

La distance effective peut être obtenue par l'expansion de Taylor au voisinage du fond d'entaille. Elle correspond au point minimum d'évolution du gradient de contraintes :

$$\frac{d\chi(x)}{dx} = 0 \quad (3-37)$$

L'utilisation de la relation (3-35) dans la relation (3-37) donne :

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{\sum_{i=0}^n (a_i i^2 x^{i-2} - a_i i x^{i-2})}{\sum_{i=0}^n a_i x^i} - \frac{\left( \sum_{i=0}^n a_i i x^{i-1} \right)}{\left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right)^2} = 0 \quad (3-38)$$

L'utilisation de l'expansion de Taylor avec quatre termes et la relation (3-37) donnent la distance effective. Par exemple, pour  $n = 3$ , les relations de (3-34) à (3-38) s'écrivent:

$$\sigma_{yy}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (3-39)$$

$$\chi(x) = \frac{a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} \quad (3-40)$$

$$\frac{d\chi(x)}{dx} = \frac{2a_2 + 6a_3 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} - \frac{(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2)^2}{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^2} \quad (3-41)$$

L'expansion de Taylor avec quatre parties au voisinage du fond d'entaille s'exprime:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi(x)}{dx} = & \frac{a_1}{a_0} + \frac{(2a_2 - \frac{a_1^2}{a_0})}{a_0} x + \frac{3a_3 - \frac{a_1 a_2}{a_0} - \frac{(2a_2 a_0 - a_1^2) a_1}{a_0^2}}{a_0} x^2 + \\ & \frac{-a_1 a_3}{a_0} + \frac{(-2a_2 a_0 + a_1^2) a_2}{a_0^2} - \frac{(3a_3 a_0^2 - 3a_1 a_2 a_0 + a_1^3) a_1}{a_0^3} x^3 + O(x^4) \end{aligned} \quad (3-42)$$

L'utilisation de l'équation (3-37) et l'expression (3-42) donne la distance effective à partir de l'expansion de Taylor en fond d'entaille :

$$X_{eff} \approx \frac{-a_1}{2a_2} - \frac{3a_3 a_1^2}{8a_2^3} - \frac{9a_3^2 a_1^3}{16a_2^5} \quad (3-43)$$

Le facteur de réduction en fatigue par la méthode volumétrique s'écrit:

$$k_f \approx \frac{\left[ a_0 - \frac{a_2}{3} X_{eff}^2 - \frac{a_3}{2} X_{eff}^3 \right]}{\sigma_n} \quad (3-44)$$

La relation (3-44) est une approximation du facteur de réduction en fatigue basée sur l'approche volumétrique. Dans les équations de (3-39) à (3-44), les coefficients  $a_i$ ,  $i = 1..n$

dépendent de la distribution des contraintes en fond d'entaille. Cette formulation de la méthode volumétrique conduit aux avantages suivants :

1. Il est difficile d'obtenir la distribution des contraintes et le gradient de contraintes à partir du diagramme bi-logarithmique, dans l'application de la méthode graphique de l'approche volumétrique.
2. La formulation analytique est plus pratique et efficace.
3. La formulation analytique n'est pas restreinte à la distribution des contraintes. La procédure mentionnée peut être utilisée pour la distribution des densités d'énergie de déformations et la distribution des déformations au voisinage du fond d'entaille.

$$\sigma_{yy}(x) \rightarrow \Delta W(x) \quad (3-45)$$

$$\sigma_{yy}(x) \rightarrow \varepsilon_{yy}(x) \quad (3-46)$$

L'expression présentée dans l'équation (3-44) est exacte pour la distribution des contraintes avec  $n = 3$ . Le Tableau 3-2 représente respectivement la distribution, la distance effective et le facteur de réduction en fatigue.

Il est nécessaire de faire le lissage le plus exact possible. L'ordre du développement obtenu dépend de la géométrie, du type du chargement et du comportement des matériaux utilisés. Au Tableau 3-2, les valeurs obtenues pour les paramètres  $X_{eff}$  et  $k_f$  l'ont été pour l'ordre quatre. Par exemple la distance effective et le facteur de réduction en fatigue dans le cas  $n = 2$  peuvent être écrits:

$$X_{eff} = \frac{-a_1}{2a_2} + O(4) \quad (3-47)$$

$$k_f = \frac{\left[ a_0 - \frac{a_2}{3} X_{eff}^2 \right]}{\sigma_n} + O(4) \quad (3-48)$$

A partir de l'ordre cinq dans le Tableau 3-2, la distance effective reste constante quel que soit l'ordre polynomial.

La procédure présentée ne peut pas être utilisée dans le cas de l'existence d'un maximum dans la distribution. La distribution des contraintes élasto-plastiques présente toujours ce maximum. Il est évident que dans d'autres cas, la formulation présentée ne devrait pas être utilisée.

L'expression mathématique de cette restriction s'exprime :

$$\sigma_{\max} = \begin{cases} \sigma(x_{\max}) & , x_{\max} \neq 0 \Rightarrow X_{\text{eff}} > 0 \\ \sigma(x_{\max}) & , x_{\max} = 0 \Rightarrow X_{\text{eff}} \leq 0 \end{cases} \quad (3-49)$$

Tableau 3-2. Présentation de la méthode analytique proposée pour l'approche volumétrique.

EQUATION	$\chi(x)$	$X_{\text{eff}}$	$k_f$
$\sigma_{yy}(x) = \sum_{i=0}^2 a_i x^i$	$\chi(x) = \frac{\sum_{i=0}^2 i a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^2 a_i x^i}$	$X_{\text{eff}} = \frac{-a_1}{2a_2}$	$k_f = \frac{\left[ a_0 - \frac{a_2}{3} X_{\text{eff}}^2 \right]}{\sigma_n}$
$\sigma_{yy}(x) = \sum_{i=0}^3 a_i x^i$	$\chi(x) = \frac{\sum_{i=0}^3 i a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^3 a_i x^i}$	$X_{\text{eff}} = \frac{-a_1}{2a_2} - \frac{3a_3 a_1^2}{8a_2^3} - \frac{9a_3^2 a_1^3}{16a_2^5}$	$k_f = \frac{\left[ a_0 - \frac{a_2}{3} X_{\text{eff}}^2 - \frac{a_3}{2} X_{\text{eff}}^3 \right]}{\sigma_n}$
$\sigma_{yy}(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i$	$\chi(x) = \frac{\sum_{i=0}^4 i a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^4 a_i x^i}$	$X_{\text{eff}} = \frac{-a_1}{2a_2} - \frac{3a_3 a_1^2}{8a_2^3} + \frac{-9a_3^2 a_1^3 + 4a_4 a_2 a_1^3}{16a_2^5}$	$k_f = \frac{\left[ a_0 - \frac{a_2}{3} X_{\text{eff}}^2 - \frac{a_3}{2} X_{\text{eff}}^3 - \frac{3a_4}{5} X_{\text{eff}}^4 \right]}{\sigma_n}$
$\sigma_{yy}(x) = \sum_{i=0}^5 a_i x^i$	$\chi(x) = \frac{\sum_{i=0}^5 i a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^5 a_i x^i}$	$X_{\text{eff}} = \frac{-a_1}{2a_2} - \frac{3a_3 a_1^2}{8a_2^3} + \frac{-9a_3^2 a_1^3 + 4a_4 a_2 a_1^3}{16a_2^5}$	$k_f = \frac{\left[ a_0 - \frac{a_2}{3} X_{\text{eff}}^2 - \frac{a_3}{2} X_{\text{eff}}^3 - \frac{3a_4}{5} X_{\text{eff}}^4 - \frac{2a_5}{3} X_{\text{eff}}^5 \right]}{\sigma_n}$
$\sigma_{yy}(x) = \sum_{i=0}^6 a_i x^i$	$\chi(x) = \frac{\sum_{i=0}^6 i a_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^6 a_i x^i}$	$X_{\text{eff}} = \frac{-a_1}{2a_2} - \frac{3a_3 a_1^2}{8a_2^3} + \frac{-9a_3^2 a_1^3 + 4a_4 a_2 a_1^3}{16a_2^5}$	$k_f = \frac{\left[ a_0 - \frac{a_2}{3} X_{\text{eff}}^2 - \frac{a_3}{2} X_{\text{eff}}^3 - \frac{3a_4}{5} X_{\text{eff}}^4 - \frac{2a_5}{3} X_{\text{eff}}^5 - \frac{5}{7} a_6 X_{\text{eff}}^6 \right]}{\sigma_n}$

La même procédure peut être utilisée en remplaçant l'évolution des contraintes élasto-plastiques par l'évolution des déformations élasto-plastiques.

### 3.3 Résumé

La méthode volumétrique pour la prévision de la durée de vie en fatigue est étudiée dans ce chapitre. L'approche volumétrique est une méthode semi-locale. Le facteur de réduction en fatigue est calculé à partir de la valeur moyenne ou effective de contraintes dans une zone définie par la distance effective. Cette méthode nécessite la connaissance de la distance effective, la fonction poids et la distribution des contraintes élasto-plastiques au voisinage du fond d'entaille et est généralement plus performante pour la prévision de la durée de vie en fatigue [70].

La méthode volumétrique calcule généralement la contrainte effective en fond d'entaille en moyennant dans un volume, mais des études réalisées montrent que les valeurs calculées pour le facteur de réduction en fatigue à partir d'un volume, d'une surface ou d'une ligne sont approximativement les mêmes [67].

La méthode volumétrique est présentée généralement sur un logarithmique. Dans cette présentation, nous avons proposé une nouvelle formulation analytique pour cette approche qui nous permet de calculer la distance effective, la contrainte effective et le facteur de réduction en fatigue à partir du lissage des résultats obtenus par Eléments Finis.

La distribution des contraintes élasto-plastiques en fond d'entaille dépend du module de Young, du coefficient de Poisson, de la limite d'élasticité, de l'exposant d'écrouissage cyclique, du coefficient d'écrouissage cyclique, du rayon d'entaille, de la géométrie de l'éprouvette et du rapport de contrainte. L'obtention d'une formulation générale analytique est donc difficile par calcul. La méthode des Eléments Finis nous permet d'obtenir cette distribution. La courbe après lissage de cette évolution des contraintes élasto-plastiques conduit à une expression analytique. Cette expression est utilisée dans la nouvelle formulation proposée pour l'approche volumétrique.

La formulation analytique de la méthode volumétrique est obtenue par l'expansion de Taylor au voisinage des entailles. La valeur de la distance effective est toujours très petite et l'utilisation de l'expansion de Taylor est donc valide.

# **CHAPITRE 4**

# Chapitre 4

## 4. Bibliographie sur la fatigue des joints soudés par point

### 4.0 Introduction générale

Les joints soudés par point sont souvent utilisés dans l'industrie automobile. Le comportement des joints soudés par point est généralement étudié par la mécanique linéaire de la rupture associée à la propagation en fatigue. L'étude des joints soudés par point par la méthode de la mécanique linéaire élastique de la rupture demande la connaissance du concept de facteurs d'intensité de contraintes.

Les facteurs d'intensité de contraintes sont définis pour l'étude des fissures. Dans l'analyse de la distribution des contraintes autour d'un défaut, trois modes de rupture peuvent être distingués : les modes I, II et III.

Le Mode I correspond à un écartement relatif des deux surfaces de la fissure qui se traduit par une ouverture angulaire. Le Mode II correspond à un déplacement dans le même plan des deux surfaces de la fissure, en sens opposé, dans une direction perpendiculaire au front de la fissure. Le Mode III correspond à un déplacement dans le même plan des deux surfaces de la fissure, en sens opposé, mais cette fois dans une direction parallèle au front de la fissure. Dans la Figure 4-1, les trois modes de rupture sont présentés.

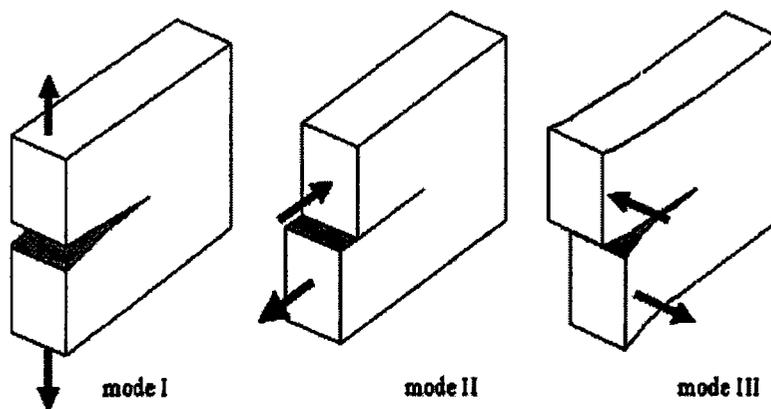


Figure 4-1 Schéma des trois modes de rupture.

Griffith a utilisé une approche globale pour déterminer les conditions de rupture. En revanche, Irwin [77] a développé une approche locale à partir du champ des contraintes en fond d'une fissure. Dans ce critère, la rupture se produit lorsque le facteur d'intensité de contraintes atteint une valeur critique. Irwin propose de décrire la distribution des contraintes au voisinage du fond d'une fissure par la relation :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}(\theta) \quad (4-1)$$

Le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  représente l'amplitude de la distribution des contraintes en mode de rupture I. Les paramètres  $r$  et  $\theta$  définis dans la Figure 4-2 correspondent aux coordonnées polaires de la zone étudiée en fond de fissure.

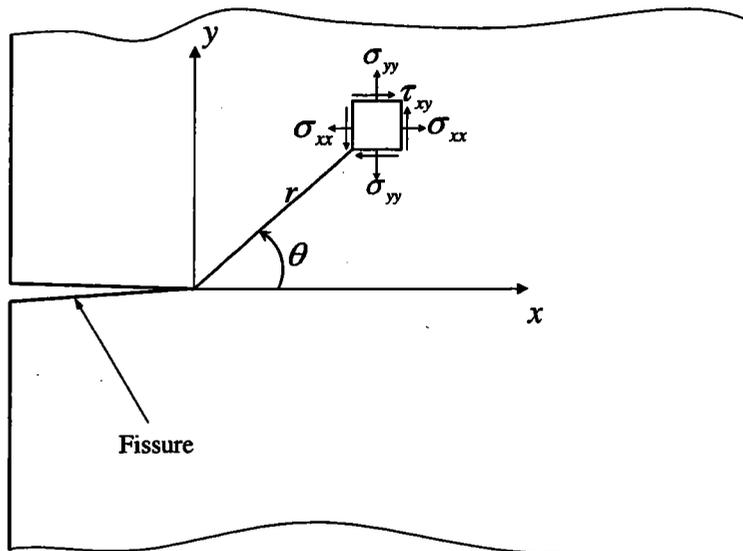


Figure 4-2 Schéma d'une fissure et les coordonnées en fond d'une fissure.

Irwin montre que les contraintes deviennent infinies à la pointe de la fissure pour  $r \rightarrow 0$ . Ceci constitue une singularité mathématique due aux hypothèses d'un matériau continu et d'une fissure infiniment mince. Le coefficient angulaire  $F_{ij}(\theta)$  et le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  déterminent l'intensité du champ local des contraintes. L'expansion du facteur d'intensité de contraintes s'écrit:

$$K_I = F_\sigma \left( \frac{a}{W} \right) \sigma_g \sqrt{\pi a} \quad (4-2)$$

où  $K_I$ ,  $F_\sigma \left( \frac{a}{W} \right)$ ,  $\sigma_g$  et  $a$  sont respectivement le facteur d'intensité de contraintes, le facteur de correction géométrique, la contrainte globale et la longueur de la fissure.

L'équation (4-2) est une expression générale du facteur d'intensité de contraintes pour une plaque ayant une largeur  $W$ , qui contient une fissure  $a$  soumise à une tension  $\sigma_g$  avec la correction de géométrie  $F_\sigma\left(\frac{a}{W}\right)$ .

La mécanique élastique linéaire de la rupture peut être utilisée pour la propagation des fissures dans le cas d'application de chargements périodiques. L'étude de la propagation des fissures par l'application des chargements cycliques est réalisée à partir de lois de propagation.

## 4.1 Loi de propagation de fissure en fatigue

La propagation des fissures sous un chargement de fatigue est d'une importance essentielle dans l'étude de la fatigue. Différentes méthodes sont proposées par les auteurs [78-81]. En pratique, la propagation des fissures est définie par une relation entre la vitesse de propagation et le chargement. Dans la Figure 4-3, un schéma général de propagation des fissures est montré.

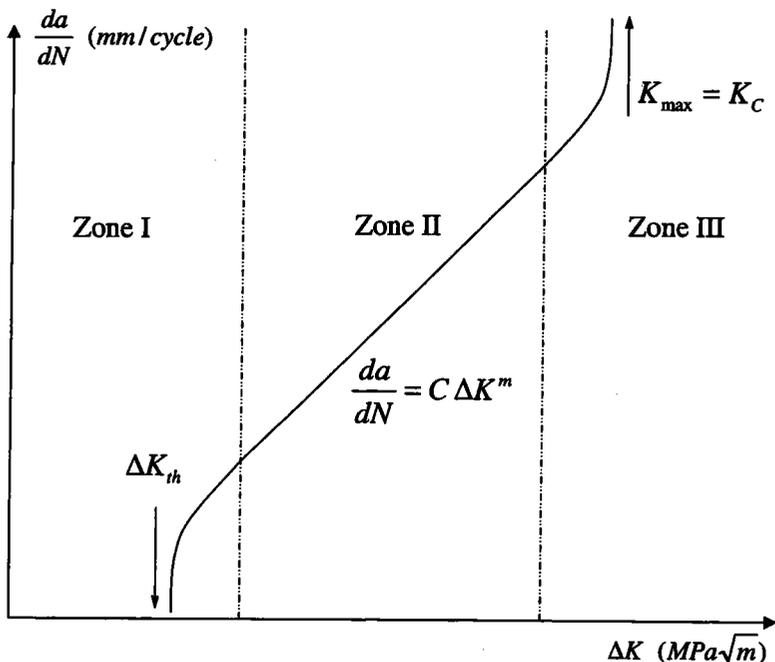


Figure 4-3 Schéma typique de la propagation des fissures pour des métaux.

Dans la Figure 4-3, trois zones peuvent être distinguées :

- Zone I est très proche de la région d'une région seuil.
- Zone II est la zone intermédiaire. La vitesse de fissuration bi-logarithmique  $\frac{da}{dN}$  est linéaire dans un diagramme  $(\frac{da}{dN} - \Delta K)$ .
- Zone III, la vitesse de fissuration augmente rapidement jusqu'à la rupture.

L'expression mathématique de ces zones s'exprime par :

$$\frac{da}{dN} = \begin{cases} 0 & \Delta K \leq \Delta K_{th} \\ C (\Delta K)^m & \Delta K_{th} < \Delta K \leq K_c \\ \infty & \Delta K > K_c \end{cases} \quad (4-3)$$

Paris [78] a proposé une relation pour la zone II. Cette relation s'écrit:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad (4-4)$$

où  $a$ ,  $N$ ,  $C$ ,  $\Delta K$  et  $m$  sont respectivement la profondeur de la fissure, le nombre de cycles, une constante, l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes et une constante.

La relation de Paris est uniquement valable dans la zone II. Cette relation est modifiée, pour prendre en considération la zone III [82], par la relation de Forman qui s'écrit:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C (\Delta K)^m}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (4-5)$$

L'expression de fissuration (4-5) est utilisée généralement dans les zones II et III. Cette expression ne donne pas une bonne évaluation de la vitesse. Selon une hypothèse du déplacement d'ouverture résiduelle au voisinage de la fissure, Donahue [83] propose l'expression suivante :

$$\frac{da}{dN} = \frac{A}{E\sigma_Y} (\Delta K^2 - \Delta K_{th}^2) \quad (4-6)$$

où  $E$ ,  $\sigma_Y$  et  $A$  sont respectivement le module de Young, la limite d'élasticité et une constante qui dépend de la courbe.

La propagation des fissures courtes n'obéit pas à la mécanique de la rupture [84]. Dans la Figure 4-4, les types de fissures longues et courtes sont présentés.

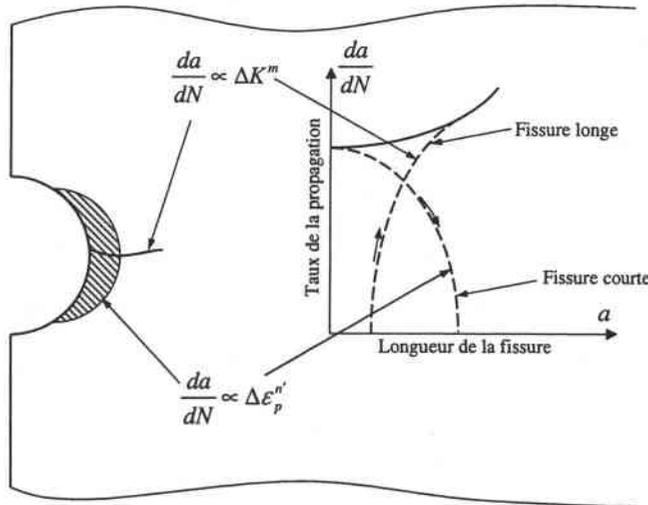


Figure 4-4 Schéma typique de la propagation des fissures dans le cas des fissures longues et courtes [84].

où  $a$ ,  $N$ ,  $\Delta K$ ,  $m$ ,  $\Delta \epsilon_p$  et  $n'$  sont respectivement la longueur de la fissure, le nombre des cycles, le facteur d'intensité de contraintes, l'exposant qui dépend du matériau, la déformation plastique et l'exposant d'écrouissage cyclique.

## 4.2 Structure des joints soudés par point

Les joints soudés par point sont généralement utilisés pour assembler des tôles minces. La méthode du soudage des joints soudés est différente par rapport à d'autres types de soudages communs. Dans le cas d'application du soudage par point, l'électrode n'est pas consommable. Par passage d'un courant électrique entre deux électrodes, le soudage par point est réalisé selon trois procédures différentes :

1. Accostage
2. Soudage
3. Forgeage

Dans le premier stade, les électrodes sont rapprochées l'une de l'autre. Les deux tôles minces sont situées entre les électrodes. Le soudage par point est réalisé par un appareil manuel ou par machines automatiques. Dans l'industrie de fabrication des automobiles, les robots qui équipent les appareils de soudages par point réduisent le travail. Le soudage est fait après la première phase. Pendant le passage du courant, une force est appliquée pour garder les tôles minces dans les conditions prévues et obtenir une bonne qualité du soudage. Au cours du forgeage, le courant est arrêté et la pression sur les électrodes diminue. Ce cas améliore la qualité du soudage. Dans la Figure 4-5, les différents stades de soudage par point sont présentés.

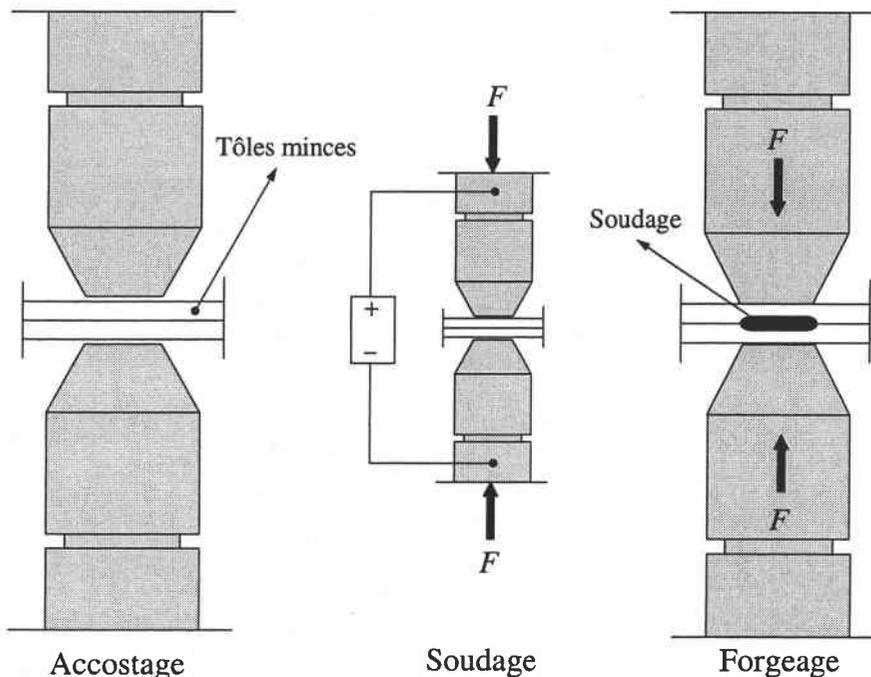


Figure 4-5 Schéma de la procédure du soudage par point.

La procédure du soudage est très importante pour une résistance optimale des joints soudés par point. Dans la Figure 4-6, un schéma du point soudé et de sa zone fondue est présenté.

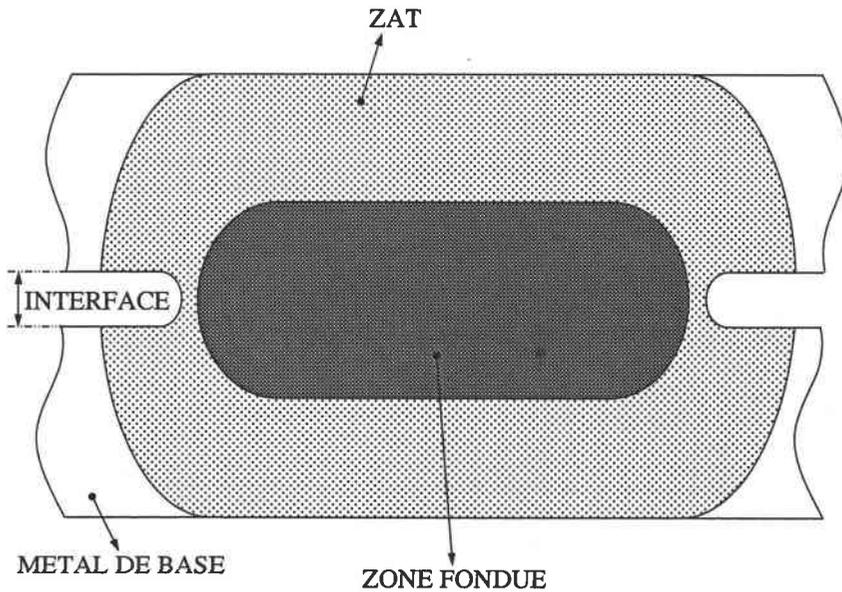


Figure 4-6 Schéma du soudage par point avec la zone fondue, la zone affectée thermiquement et l'interface.

La zone fondue, la zone affectée thermiquement et le métal de base sont représentés respectivement. L'utilisation du soudage par point donne des zones fondues résistantes qui sont généralement deux fois plus résistantes que le métal de base. Dans la modélisation des joints soudés par point, la soudure est considérée comme une partie rigide. Cette hypothèse simplifie l'analyse structurelle des joints soudés par point. Les joints soudés en cisaillement (Tensile Shear) seront considérés dans cette étude. Ce type de joints soudés est fréquemment utilisé pour attacher des tôles minces soumises à un chargement axial. L'évaluation de comportement des joints soudés en cisaillement est considérée selon différentes hypothèses.

La plus simple est l'utilisation du concept de bande [85]. Dans cette méthode, les effets de cisaillement des bords de la bande sélectionnée sont négligés. Le joint soudé par point est considéré comme une poutre (Figure 4-7).

Selon la théorie des poutres en flexion, l'application de la force axiale ( $F$ ) conduit au déplacement dans le modèle proposé:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} \mp k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (4-7)$$

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}} = \sqrt{\frac{12F}{Et^3}} \quad (4-8)$$

$F$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $k$ ,  $w$  et  $t$  sont respectivement la force axiale, le module de Young, le moment

d'inertie ( $I = t^3/12$  unité de largeur), le paramètre caractéristique, le déplacement du joint soudé et l'épaisseur de la tôle mince.

Les conditions aux limites s'expriment par:

$$x = 0 : w = 0, \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_0}{EI} \quad \text{où} \quad M_0 = M|_{x=0} \quad (4-9)$$

$$x = l : w = 0, \frac{dw}{dx} = 0 \quad (4-10)$$

Les expressions (4-9) et (4-10) représentent les conditions aux limites pour le modèle du soudage par point en cisaillement. La solution des équations (4-7), (4-9) et (4-10) donne la rotation ( $x = 0$ ) qui s'écrit:

$$\theta_0 = \frac{kl}{2} \frac{2 \cosh(kl) - kl \sinh(kl) - 2}{\sinh(kl) - kl \cosh(kl)} \quad (4-11)$$

$$\theta_0 = -\frac{kl}{2} \frac{2 \cosh(kl) - kl \sinh(kl) - 2}{\sinh(kl) - kl \cosh(kl)} \quad (4-12)$$

La contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  est localisée au voisinage du point soudé. Cette contrainte est responsable de la fissuration des joints soudés par point. La contrainte maximale peut être obtenue par la relation suivante :

$$\sigma_{\max}^I = \frac{F}{t} \left( 4 - \frac{9d}{4l} \right) \quad (4-13)$$

$\sigma_{\max}^I$ ,  $F$ ,  $t$ ,  $d$  et  $l$  sont respectivement la contrainte maximale, la force, l'épaisseur de la tôle mince, le diamètre du soudage par point et demi-longueur du joint soudé par point en cisaillement.

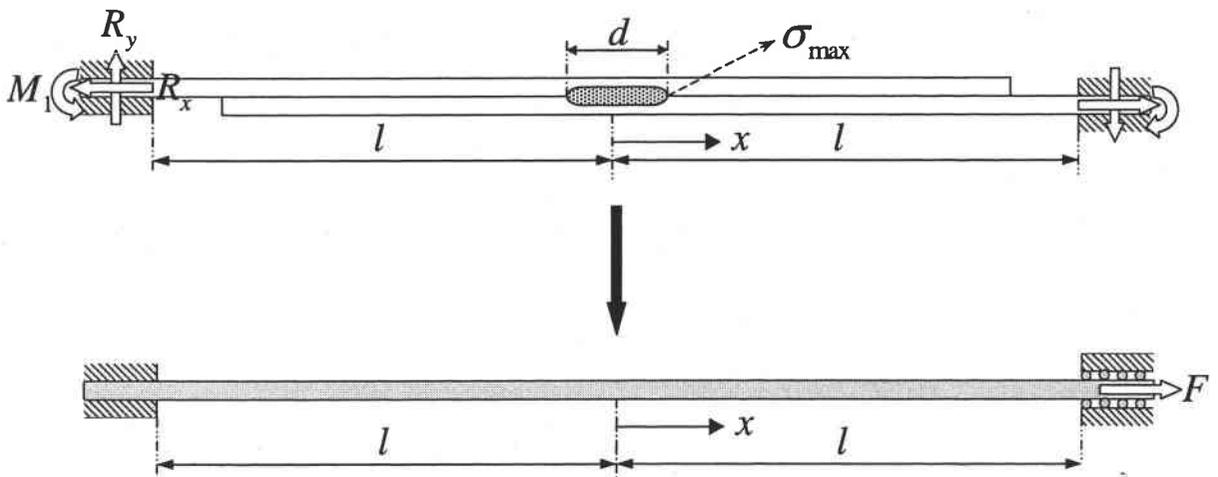


Figure 4-7 Schéma du modèle simple de joint soudé par point assimilé à une poutre.

Dans la Figure 4-7, la localisation de la contrainte maximale est donnée pour  $x = d/2$ .

L'expression (4-13) montre que la contrainte maximale est un peu moins que quatre fois la contrainte globale appliquée ( $\sigma_g = \frac{F}{bt} \xrightarrow{b=1} \sigma_g = \frac{F}{t}$ ). Il est nécessaire de mentionner que dans la méthode de bande, une bande de largeur unité est sélectionnée. Le facteur de correction  $f_c$  s'écrit:

$$\sigma_{\max}^I = \frac{4F}{t} \left(1 - \frac{9d}{16l}\right) = 4\sigma_g \left(1 - \frac{9d}{16l}\right) \xrightarrow{f_c = \left(1 - \frac{9d}{16l}\right)} \sigma_{\max}^I = f_c (4\sigma_g) \quad (4-14)$$

$$f_c = 1 - \frac{9d}{16l} \quad (4-15)$$

La contrainte maximale du joint soudé par point est approximativement égale à  $4\sigma_g$ . Le facteur  $f_c$  est voisin de l'unité.

La contrainte maximale du joint soudé par point en cisaillement peut être obtenu selon Radaj [85] :

$$R_y = \frac{(M_0 + M_1)}{l} \quad (4-16)$$

$$\sigma_{\max}^{II} = \frac{F \cos\left(\theta \Big|_{x=\frac{d}{2}}\right) - R_y \sin\left(\theta \Big|_{x=\frac{d}{2}}\right)}{t} + \frac{6M \Big|_{x=\frac{d}{2}}}{t^2} \quad (4-17)$$

$R_y$ ,  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $l$ ,  $F$ ,  $t$  et  $M$  sont respectivement la force verticale, le moment à droite, le moment à  $x = 0$ , la demi longueur de poutre, la force axiale, l'épaisseur de la tôle mince et le moment de flexion pour la localisation de contrainte maximale.

La valeur de la contrainte maximale est donc définie par les équations (4-14) et (4-17). La valeur maximale est largement utilisée pour le dimensionnement [85-86].

$$\sigma_{\max} = \max \left\{ \begin{array}{l} f_c (4\sigma_g) \\ \frac{F \cos\left(\theta \Big|_{x=\frac{d}{2}}\right) - R_y \sin\left(\theta \Big|_{x=\frac{d}{2}}\right)}{t} + \frac{6M \Big|_{x=\frac{d}{2}}}{t^2} \end{array} \right. \quad (4-18)$$

La méthode de la bande est donc basée sur un simple modèle d'évaluation du comportement mécanique des joints soudés par point. D'autres modèles plus exacts ont aussi été proposés par différents auteurs [87-93]. Par exemple, dans la Figure 4-8, le modèle de combinaison d'éléments solides et d'éléments rigides est montré. Selon l'existence d'une grande rotation

dans le point soudé, des rotules et des poutres rigides sont utilisées dans le modèle.

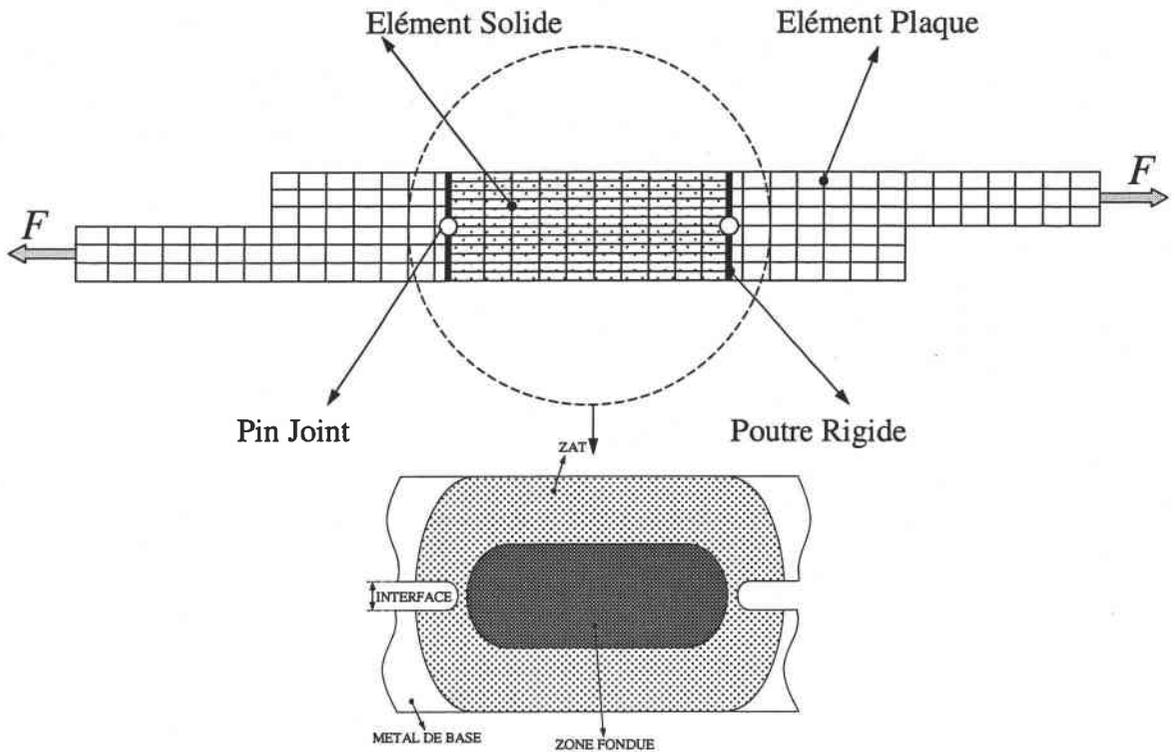


Figure 4-8 Schéma du modèle simple du joint soudé par point avec l'utilisation d'éléments poutre de plaque et de « pin joint ».

Les modèles présentés sont tous des modèles bi-dimensionnels. L'évaluation de la distribution des contraintes au voisinage du joint soudé a besoin de modèles plus détaillés. L'utilisation des éléments coques ou d'éléments solides est nécessaire pour obtenir une distribution des contraintes la plus exacte possible.

Dans la Figure 4-9, le modèle théorique proposé par Salvini et al. est présenté [94-97]. Dans ce modèle, le point soudé est considéré comme rigide. La théorie des plaques et coques est appliquée pour obtenir la distribution des contraintes autour du point soudé. Une solution analytique est proposée qui donne la fonction de contrainte comme ci-dessous :

$$\phi(r, \theta) = f_0(r) + A_0\theta + \left[ f_1(r) + \frac{A_1}{2}r\theta \right] \sin \theta + \left[ f'_1(r) + \frac{A'_1}{2}r\theta \right] \cos \theta + \sum_{m=2}^{\infty} f_m(r) \sin(m\theta) + \sum_{m=2}^{\infty} f'_m(r) \cos(m\theta) \quad (4-19)$$

L'utilisation des conditions aux limites de ce problème simplifie l'équation (4-19):

$$\phi(r, \theta) = \frac{A_1}{2}r\theta \sin \theta + (B_1r^3 + C_1r^{-1} + D_1r \log r) \cos \theta \quad (4-20)$$

$A_1, B_1, C_1, D_1$  sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites du joint soudé par point.

L'utilisation de l'équation (4-20) dans les équations (2-3) à (2-5) donne l'équation (4-21) :

$$\sigma_r = [(A_1 + D_1)r^{-1} + 2B_1r - 2C_1r^{-3}] \cos \theta \tag{4-21}$$

$$\sigma_\theta = [6B_1r + 2C_1r^{-3} + D_1r^{-1}] \cos \theta \tag{4-22}$$

$$\tau_{r\theta} = [2B_1r - 2C_1r^{-3} + D_1r^{-1}] \sin \theta \tag{4-23}$$

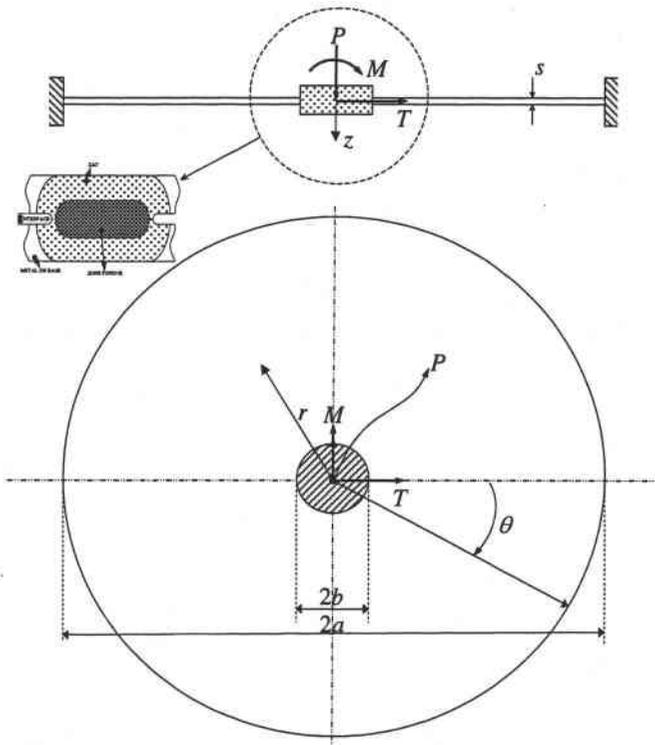


Figure 4-9 Schéma du modèle pour un joint soudé par l'utilisation de la théorie des plaques et coques [94].

Les déformations et les déplacements peuvent être calculés à partir des relations obtenues de la loi de Hooke.

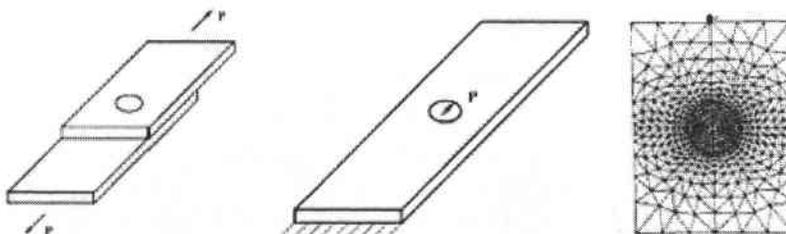


Figure 4-10 Schéma du modèle proposé par Kan [98] a) Schéma général b) Modèle simplifié c) Modèle bi-dimensionnel.

Le modèle, montré dans la Figure 4-9, est un modèle tri-dimensionnel. Dans la Figure 4-11, les modèles tri-dimensionnels sont proposés par l'utilisation des éléments coques. Les méthodes présentées donnent le comportement global mécanique des joints soudés. Il est fortement nécessaire d'utiliser les méthodes tri-dimensionnelles avec des éléments complètement solides. Cette utilisation permet d'obtenir une distribution des contraintes plus exacte autour du point soudé.

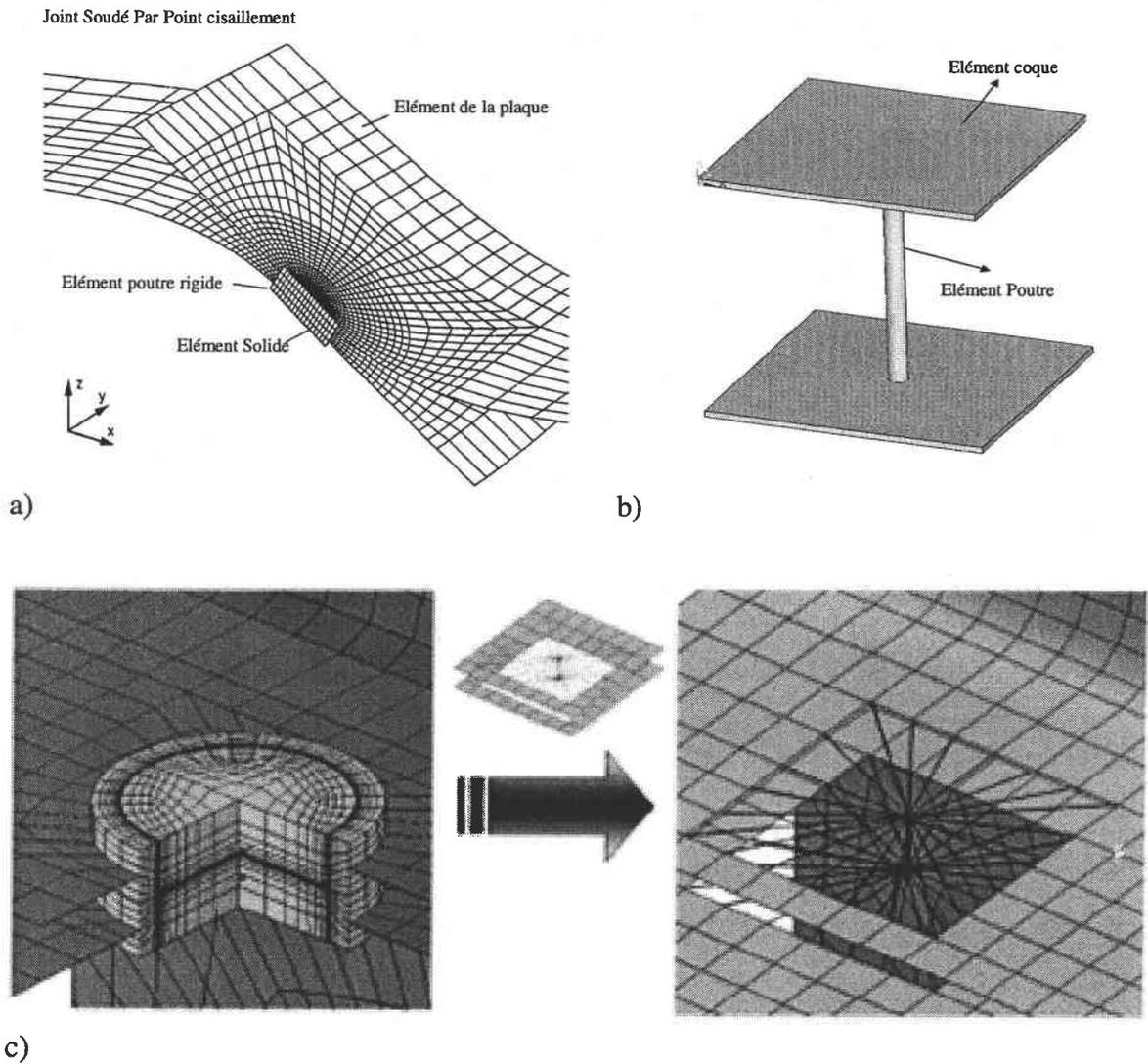


Figure 4-11 Schéma du modèle pour un joint soudé avec l'utilisation de la théorie des plaques et des coques a) Méthode de la combinaison des éléments coques et solides [85], b) et c) Méthode avec poutres et coques [91,94].

A partir de l'équilibre statique, des relations approximatives sont proposées [99]. Dans toutes les expressions obtenues pour les joints soudés par point en cisaillement, la contrainte en traction et la contrainte en flexion sont importantes. La contrainte radiale s'exprime par :

$$\sigma_r = \sigma_{F_x} \cos(\varphi) + \sigma_{F_y} \sin(\varphi) - \sigma_{F_z} - \sigma_{M_x} \sin(\varphi) + \sigma_{M_y} \cos(\varphi) \quad (4-24)$$

avec :

$$\sigma_{F_x} = \frac{F_x}{\pi d t} \quad (4-25)$$

$$\sigma_{F_y} = \frac{F_y}{\pi d t} \quad (4-26)$$

$$\sigma_{F_z} = \begin{cases} \frac{1.05 F_z}{t^{\frac{3}{2}}} & F_z < 0 \\ 0 & F_z \geq 0 \end{cases} \quad (4-27)$$

$$\sigma_{M_x} = \frac{1.12 M_x}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (4-28)$$

$$\sigma_{M_y} = \frac{1.12 M_y}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (4-29)$$

$F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $t$ ,  $\sigma_{F_x}$ ,  $\sigma_{F_y}$ ,  $\sigma_{F_z}$ ,  $\sigma_{M_x}$ ,  $\sigma_{M_y}$  et  $\varphi$  sont respectivement les composantes de la force, les composantes du moment, l'épaisseur des tôles minces, les composantes du tenseur des contraintes basées sur l'application des forces et des moments correspondant et la coordonnée angulaire du point soudé.

La contrainte en traction et la contrainte en flexion sont combinées autour du point soudé. Les forces, les moments et les différentes contraintes et cisaillement ont été étudiés par Radaj [99]. Dans la Figure 4-12, le diagramme des moments et forces est montré et les analyses des forces et des moments sont basées sur l'équilibre statique et la compatibilité des déformations n'est pas considérée. Les relations proposées par Radaj [99] sont relativement exactes et donnent des résultats conservatifs.

Les modèles proposés pour les joints soudés sont divisés en trois catégories :

1. Les modèles analytiques approximatifs ;
2. Les modèles numériques bi-dimensionnels ;
3. Les modèles numériques tri-dimensionnels [89-90, 100-107].

Les modèles analytiques approximatifs comme les modèles bi-dimensionnels ne considèrent que le comportement général des joints par point en cisaillement. Les modèles tri-dimensionnels considèrent le comportement global et local des joints soudés par point. Ils ne sont pas limités à l'analyse globale des joints soudés.

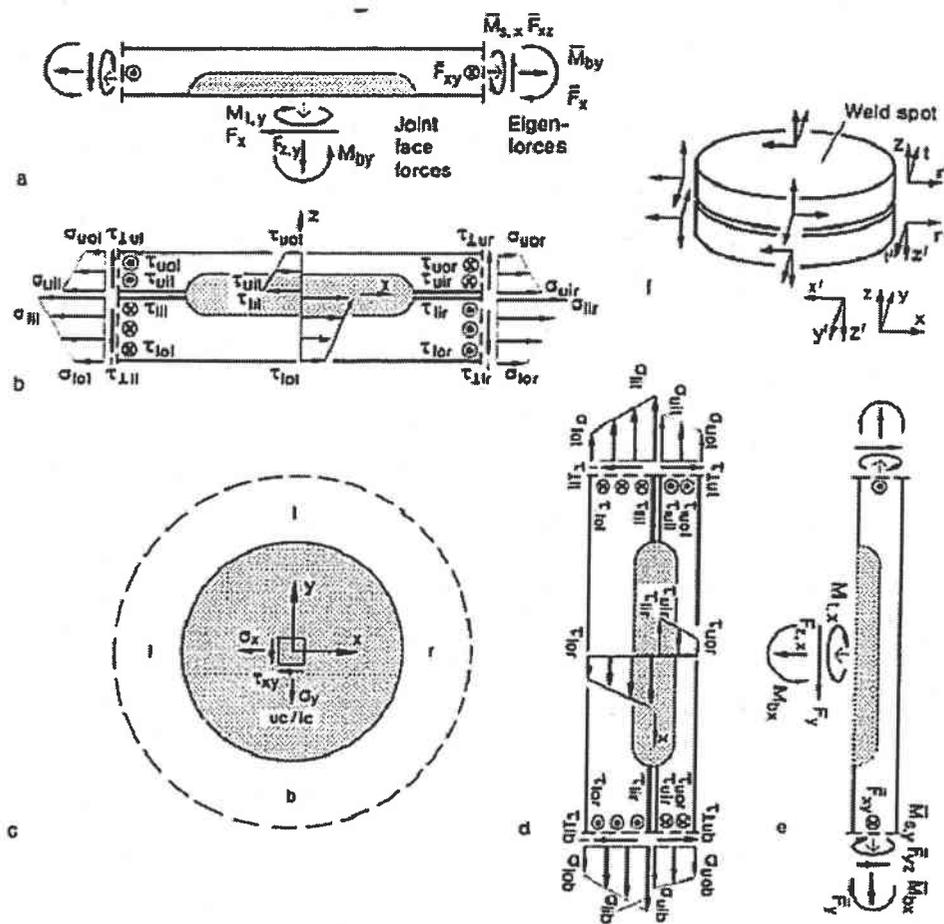


Figure 4-12 Schéma de l'équilibre des moments et des forces autour du joint soudé par point [99].

Il est nécessaire d'envisager l'effet de l'interface entre deux tôles minces dans l'analyse des joints soudés par point en cisaillement. La Figure 4-13 représente l'interface des joints soudés par points en cisaillement.

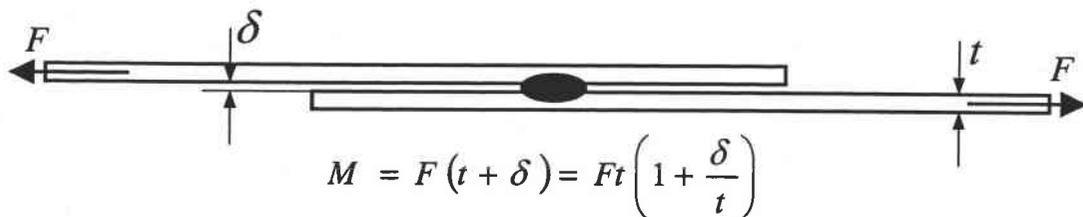


Figure 4-13 Effet de l'interface entre deux tôles minces dans des joints soudés par point en cisaillement.

Dans la Figure 4-13,  $\delta$  est l'interface entre deux tôles minces. L'épaisseur des tôles pour ce type de joints soudés est très petite. Le rapport entre la valeur de l'interface et l'épaisseur n'est lui généralement pas petit. L'excentricité des joints soudés liée à l'existence de l'interface provoque un moment supplémentaire. La valeur de ce moment ne peut être négligée dans les cas des joints soudés par point en cisaillement et Mono Point.

Le comportement mécanique des joints soudés par point dépend du type de chargement appliqué et de la valeur de la force appliquée [90].

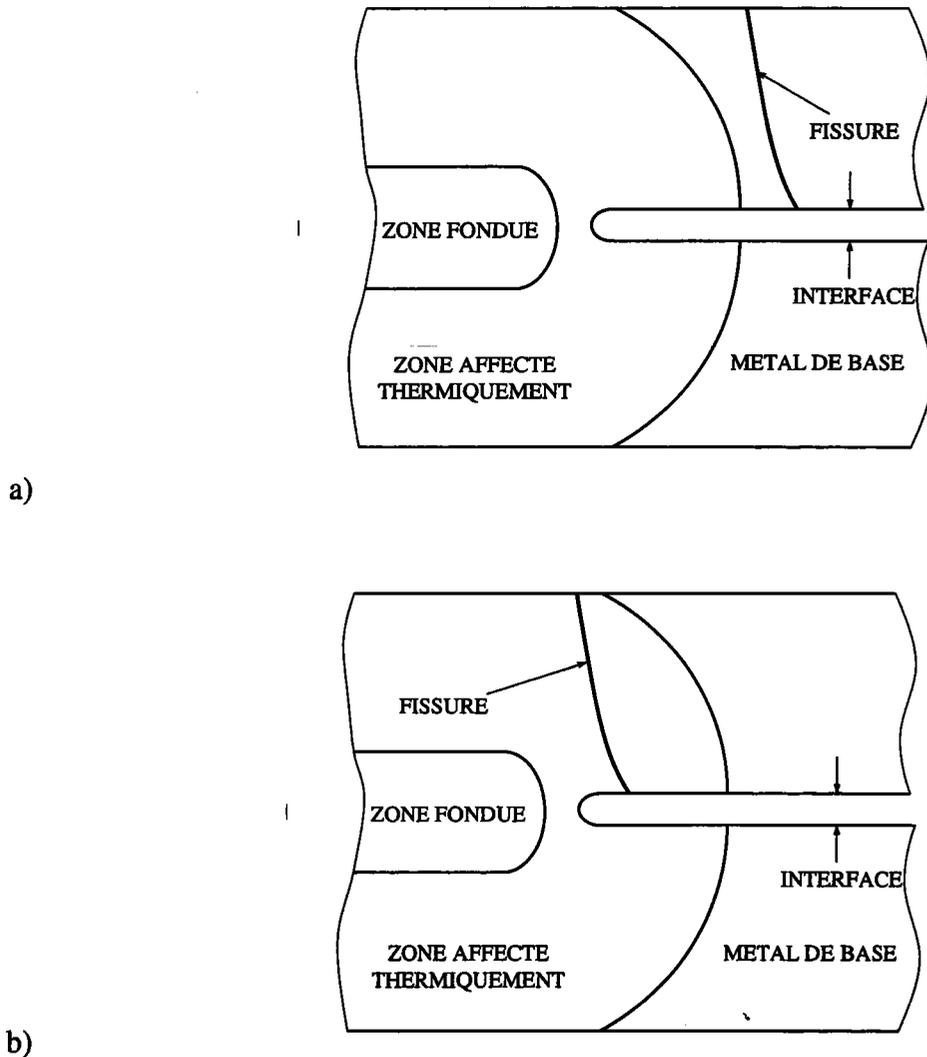


Figure 4-14 Localisation des fissures dans des différents cas a) Fatigue oligocyclique b) Endurance limitée

Dans la Figure 4-14, la localisation de la fissure au voisinage du point soudé est présentée. La fissure est respectivement localisée dans le métal de base et en Zone Affectée Thermiquement (ZAT) dans le cas de la fatigue oligocyclique et dans le cas de l'endurance limitée. Le phénomène de la fatigue oligocyclique peut être rencontré dans le cas d'application des forces ou contraintes globales élevées. Dans ce cas, la fissure au voisinage du point soudé critique s'est formée dans le métal de base. En endurance limitée, la force appliquée est plus faible. La fissure au voisinage du point soudé se forme dans la ZAT. Des travaux expérimentaux

montrent que la zone fondue présente une haute limite d'élasticité. La valeur obtenue dans la zone fondue est généralement deux fois plus élevée que la limite d'élasticité dans le métal de base [100-102, 105].

Selon la procédure du soudage par point (forgeage) montrée dans la Figure 4-5, une limite d'élasticité plus ou moins importante est obtenue en zone fondue. La zone fondue dans le cas du forgeage est compressée par les électrodes. Selon le changement de phase dans le procédé du soudage, cela conduit à une zone fondue homogène et résistante. Le point soudé est considéré comme rigide en raison de cette résistance élevée autour de la zone fondue. Cette hypothèse diminue le temps de calcul numérique. Elle représente assez bien le comportement mécanique des joints soudés par point. En raison de cette résistance élevée, une zone plastique ne se forme pas dans la zone fondue. Selon la localisation de la formation des fissures autour du point soudé, l'analyse est différente et divisée en deux approches : propagation avec la mécanique de la rupture et amorçage en fatigue avec une méthode appropriée.

### 4.3 Facteur d'intensité de contraintes pour les joints soudés par point

La méthode de la mécanique linéaire de la rupture est appliquée dans le cas des fissures se propageant dans le métal de base. Les facteurs d'intensité de contraintes des joints soudés par point en cisaillement ont été étudiés par différents auteurs [108-113]. Les solutions proposées par ces auteurs ont été obtenues soit par l'approche analytique soit par l'approche numérique :

- Chang-Muki [108] :

$$K_I = \tau \sqrt{\frac{\pi d}{2}} \left[ 0.605 \left( \frac{d}{t} \right)^{0.397} \right] \quad (4-30)$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\frac{\pi d}{2}} \left[ 0.5 + 0.287 \left( \frac{d}{t} \right)^{0.71} \right] \quad (4-31)$$

$K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $\tau$ ,  $d$  et  $t$  sont respectivement le facteur d'intensité de contraintes en mode I et II, le cisaillement nominal, le diamètre du point soudé et l'épaisseur de la tôle mince.

- L. P. Pook [109] :

$$K_I = \frac{F}{d\sqrt{d}} \left[ 0.964 \left( \frac{d}{t} \right)^{0.397} \right] \quad (4-32)$$

$$K_{II} = \frac{F}{d\sqrt{d}} \left[ 0.798 + 0.485 \left( \frac{d}{t} \right)^{0.71} \right] \quad (4-33)$$

$K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $F$ ,  $d$  et  $t$  sont respectivement le facteur d'intensité de contraintes en mode I et II, la force axiale, le diamètre du point soudé et l'épaisseur de la tôle mince.

- J. F. Cooper-R. A. Smith [110]

$$K_I = \frac{v'}{2 \left( \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\delta_r}{2\pi}} \right) (1-\nu)} \quad (4-34)$$

$$K_{II} = \frac{u'}{2 \left( \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\delta_r}{2\pi}} \right) (1-\nu)} \quad (4-35)$$

$$K_{III} = \frac{w'}{2 \left( \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\delta_r}{2\pi}} \right)} \quad (4-36)$$

$K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ,  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  sont respectivement le facteur d'intensité de contraintes en mode I, II et III, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement et les déplacements dans les directions x, y et z.

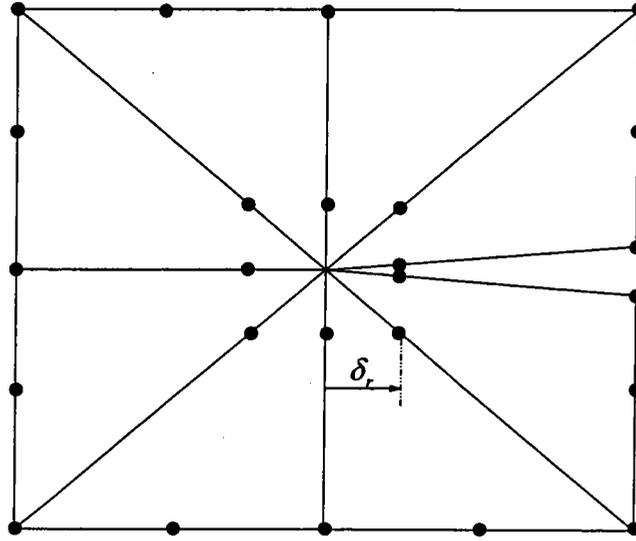


Figure 4-15 Schéma détaillé de la fissure dans l'utilisation de la méthode des Eléments Finis.

Les déplacements  $u'$ ,  $v'$  et  $w'$  sont calculés à partir des déplacement nodaux. Les relations suivantes expriment ces déplacements :

$$u' = - \frac{[(u_i - u_j) \cos \varphi - (w_i - w_j) \sin \varphi]}{2} \quad (4-37)$$

$$v' = \frac{(v_i - v_j)}{2} \quad (4-38)$$

$$w' = - \frac{[(u_i - u_j) \sin \varphi - (w_i - w_j) \cos \varphi]}{2} \quad (4-39)$$

$u_i$ ,  $u_j$ ,  $v_i$ ,  $v_j$ ,  $w_i$ ,  $w_j$  et  $\varphi$  sont respectivement les déplacements nodaux dans les directions x, y, z, et l'angle autour du point soudé.

Dans la Figure 4-16, le schéma détaillé des fissures autour du point soudé est présenté.

Selon l'étude de Cooper-Smith, l'angle de bifurcation de la fissure s'exprime par:

$$\phi_t = 2 \operatorname{Tan}^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \right] \quad (4-40)$$

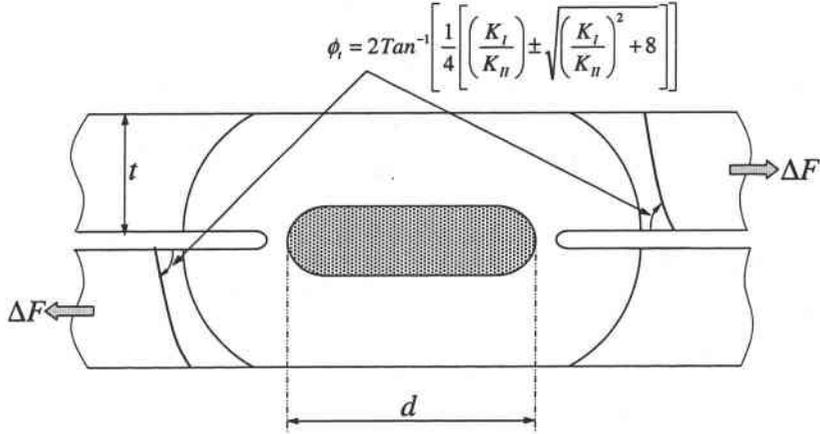


Figure 4-16 Schéma détaillé de la fissure autour du point soudé et l'angle de la fissure à partir de la formule proposée par Cooper-Smith [110].

Les calculs obtenus par la méthode des Eléments Finis sont présentés sous forme non

dimensionnelle  $\left( \frac{|\Delta K| \left( \frac{d}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\Delta F} - \frac{t}{d} \right)$ .

Cooper et Smith ont utilisé des méthodes numériques pour obtenir les facteurs d'intensité de contraintes.

- Zhang-Radaj [111]

$$K_I = \frac{\sqrt{3}}{12} (\sigma_{ui} - \sigma_{uo} + \sigma_{li} - \sigma_{lo}) \sqrt{t} \quad (4-41)$$

$$K_{II} = \frac{1}{4} (\sigma_{ui} - \sigma_{li}) \sqrt{t} \quad (4-42)$$

$$K_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\tau_{ui} - \tau_{li}) \sqrt{t} \quad (4-43)$$

$\sigma_{ui}$ ,  $\sigma_{li}$ ,  $\sigma_{uo}$ ,  $\sigma_{lo}$ ,  $\tau_{ui}$ ,  $\tau_{li}$  et  $t$  sont respectivement la contrainte à l'intérieur de la tôle supérieure, la contrainte à l'intérieur de la tôle inférieure, la contrainte à l'extérieur de la tôle supérieure, la contrainte à l'extérieur de la tôle inférieure, le cisaillement à l'intérieure de la tôle supérieure, le cisaillement à l'intérieure de la tôle inférieure et l'épaisseur de la tôle mince.

Zhang propose comme solution:

$$J = \frac{(1-\nu^2)t}{48E} \left[ 4(\sigma_{ui}^2 + \sigma_{li}^2 - \sigma_{ui}\sigma_{li}) + (\sigma_{uo} + \sigma_{lo})^2 - 2(\sigma_{ui}\sigma_{uo} + \sigma_{ui}\sigma_{lo} + \sigma_{uo}\sigma_{li} + \sigma_{li}\sigma_{lo}) \right] \quad (4-44)$$

$J$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $t$  sont respectivement l'intégrale  $J$ , le module de Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de la tôle mince.

Dans la Figure 4-17, le schéma utilisé pour obtenir les équations (4-41), (4-42), (4-43) et (4-44) est montré.

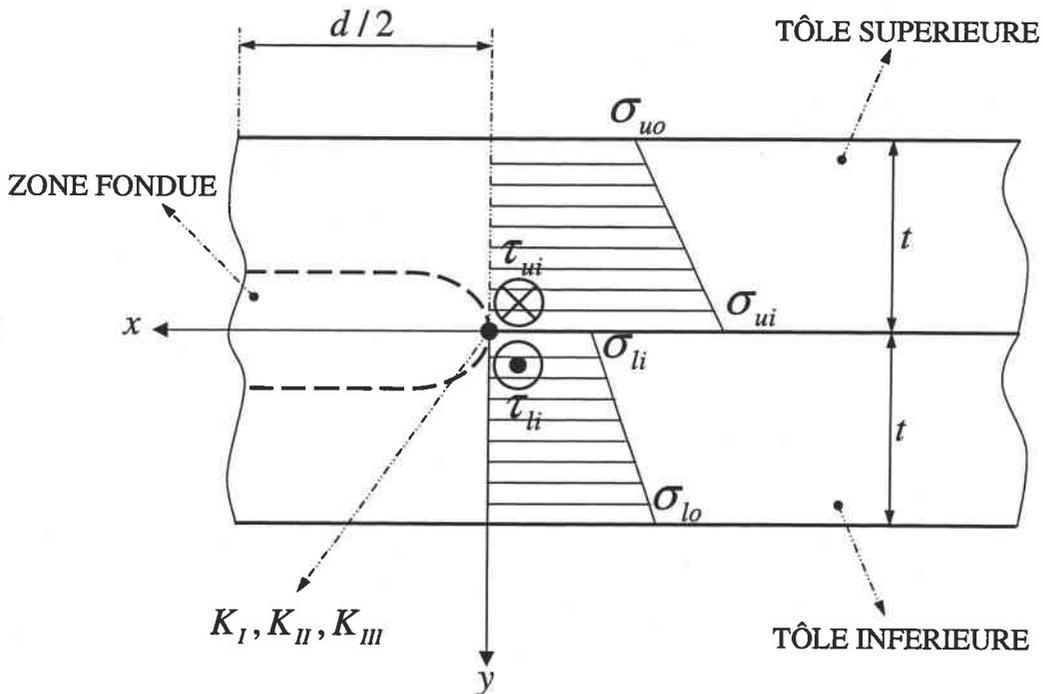


Figure 4-17 Contraintes radiales et cisaillements circonférentiels autour du point soudé basé selon l'étude de Zhang- Radaj [111].

Les équations de (4-41) à (4-44) sont obtenues par approche analytique. Zhang et Radaj ont négligé l'effet de l'interface et de la zone affecté thermiquement. Les relations mentionnées sont restreintes aux joints soudés par point en cisaillement.

- Zheng [111]

$$K_I = \frac{\sqrt{3}F}{2\pi d\sqrt{t}} \quad (4-45)$$

$$K_{II} = \frac{2F}{\pi d\sqrt{t}} \quad (4-46)$$

$$K_{III} = \frac{\sqrt{2}F}{\pi d \sqrt{t}} \quad (4-47)$$

$$J = \frac{19(1-\nu^2)F^2}{4E\pi^2 d^2 t} \quad (4-48)$$

$F$ ,  $d$ ,  $t$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $J$  sont respectivement la force axiale, le diamètre du point soudé, l'épaisseur de la tôle mince, le module de Young, le coefficient de Poisson et la valeur de l'intégrale  $J$ .

- Swellam-Kurath-Lawrence [112-114, 116]

Swellam, Kurath et Lawrence ont proposé un paramètre de dimensionnement  $K_I$ .

Lawrence [115] a étudié le facteur de concentration de contraintes et propose la relation:

$$k_t = 1 + \alpha \sqrt{\frac{t}{\rho}} \quad (4-49)$$

$k_t$ ,  $\alpha$ ,  $t$ , et  $\rho$  sont respectivement le facteur de concentration de contraintes, une constante qui dépend du type de joints soudés, l'épaisseur de la tôle mince et le rayon d'entaille au voisinage du point soudé. La constante  $\alpha$  est égale à 0.43 pour les joints soudés par point en cisaillement.

La relation (4-49) est difficile à utiliser, car en pratique le rayon d'entaille en fond du point soudé n'est pas précisément défini. L'utilisation de l'expression présentée dans l'équation (4-49) est en pratique impossible.

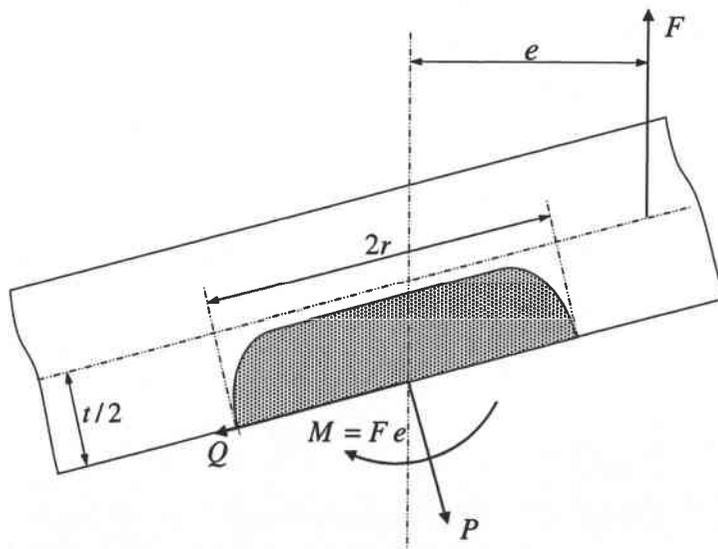


Figure 4-18 Cas général de l'application des actions autour du point soudé selon Swallam-Kurath-Lawrence [112].

Dans la Figure 4-18, le schéma général des forces et moments autour du point soudé est présenté. Le paramètre  $K_i$  est calculé selon la mécanique linéaire de la rupture et la combinaison des modes I et II. Les trois facteurs d'intensité de contraintes sont donc définis:

$$K_{axial} = \frac{P}{2\pi\sqrt{\pi r}} \quad (4-50)$$

$$K_{moment} = \frac{3M}{2r^2\sqrt{\pi r}} \quad (4-51)$$

$$K_{shear} = \frac{Q}{2r\sqrt{\pi r}} \quad (4-52)$$

$P$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $r$ ,  $K_{axial}$ ,  $K_{moment}$  et  $K_{shear}$  sont respectivement la composante verticale de la réaction du point soudé, la composante horizontale de la réaction du point soudé, le moment du point soudé, le rayon du point soudé, le facteur d'intensité de contraintes basé sur l'effet axial, le facteur d'intensité de contraintes basé sur l'effet de moment dans le point soudé et le facteur d'intensité de contraintes basé sur l'effet du cisaillement dans le point soudé.

Selon la formulation de Swallem-Kurath-Lawrence [112], les facteurs d'intensité de contraintes s'expriment par:

$$K_I = K_{axial} + K_{moment} \xrightarrow{(4-50) \text{ et } (4-51)} K_I = \frac{P}{2\pi\sqrt{\pi r}} + \frac{3M}{2r^2\sqrt{\pi r}} \quad (4-53)$$

$$K_{II} = K_{shear} \xrightarrow{(4-52)} K_{II} = \frac{Q}{2r\sqrt{\pi r}} \quad (4-54)$$

Le facteur d'intensité de contraintes équivalent est défini par cette méthode comme ci-dessous :

$$K_{eq} = \sqrt{K_I^2 + \beta_L K_{II}^2} \quad (4-55)$$

$K_{eq}$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $\beta_L$  sont respectivement le facteur d'intensité de contraintes équivalent, le facteur d'intensité de contraintes en mode I, le facteur d'intensité de contraintes en mode II et une constante qui dépend du matériau.

Le facteur d'intensité de contraintes équivalent (4-55) ne contient pas les effets de la géométrie et le rapport de contrainte ( $R = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$ ). Le facteur de correction géométrique

doit donc être défini. Ce facteur de correction géométrique considère les effets mentionnés par:

$$G = \sqrt{\frac{9Wt^4}{4r^5} + \frac{Wt^2}{r^3}} \quad (4-56)$$

$W$ ,  $t$  et  $r$  sont respectivement la largeur du joint soudé, l'épaisseur de la tôle mince et le rayon du point soudé.

Selon de Swallem-Kurath-Lawrence, le paramètre  $K_i$  maximum s'écrit :

$$K_i^{\max} = \frac{\sqrt{(K_I^{\max})^2 + \beta_L (K_{II}^{\max})^2}}{G} \quad (4-57)$$

Le paramètre  $K_i$  est défini par :

$$K_i = K_i^{\max} (1-R)^{b_0} \xrightarrow{(4-57)} K_i = \left( \frac{\sqrt{(K_I^{\max})^2 + \beta_L (K_{II}^{\max})^2}}{G} \right) (1-R)^{b_0} \quad (4-58)$$

$K_i$ ,  $K_i^{\max}$ ,  $K_I^{\max}$ ,  $K_{II}^{\max}$ ,  $G$ ,  $\beta_L$ ,  $R$ ,  $b_0$  sont respectivement le paramètre de Swallem-Kurath-Lawrence, la valeur maximale du paramètre de Swallem-Kurath-Lawrence, le facteur d'intensité de contraintes maximal en mode I, le facteur d'intensité de contraintes maximal en mode II, le facteur de correction géométrique, une constante qui dépend du matériau, le rapport de contrainte entre la contrainte maximale et la contrainte minimale appliquée et un coefficient qui peut être obtenu par essai et erreur dans le diagramme  $K_i - N_f$ .

Le coefficient  $b_0$  est obtenu par lissage de la courbe représentant le paramètre  $K_i$  en fonction du nombre de cycle  $N_f$ . Cette courbe est obtenue expérimentalement. Dans un diagramme bi-logarithmique, on obtient la relation :

$$K_i = A(N_f)^h \quad (4-59)$$

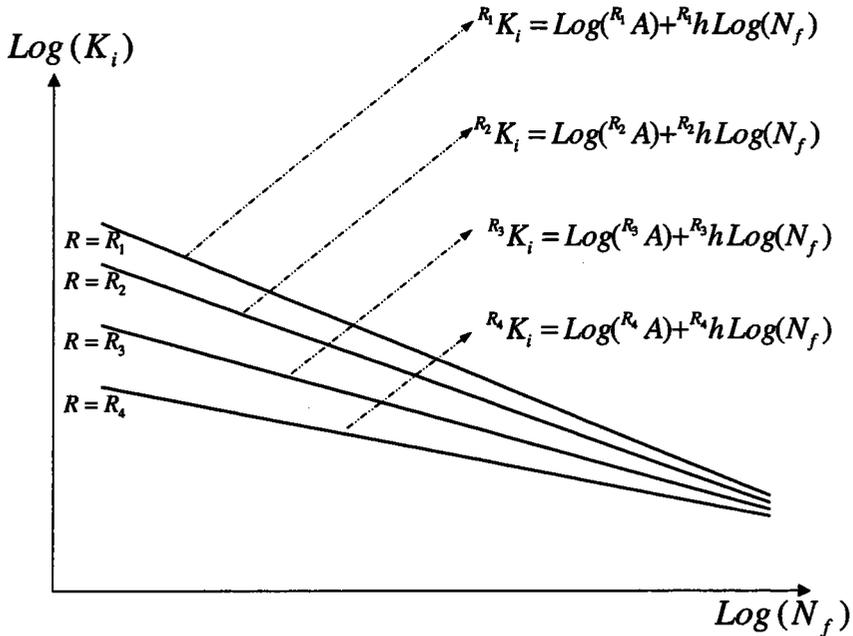
$A$ ,  $h$  sont des coefficients qui peuvent être calculés par lissage de la courbe dans le diagramme bi logarithmique  $K_i - N_f$ .

Dans la Figure 4-19, la procédure d'évaluation du coefficient  $b_0$  est présentée. Il est nécessaire d'obtenir le diagramme bi-logarithmique  $K_i - N_f$  pour différentes valeurs

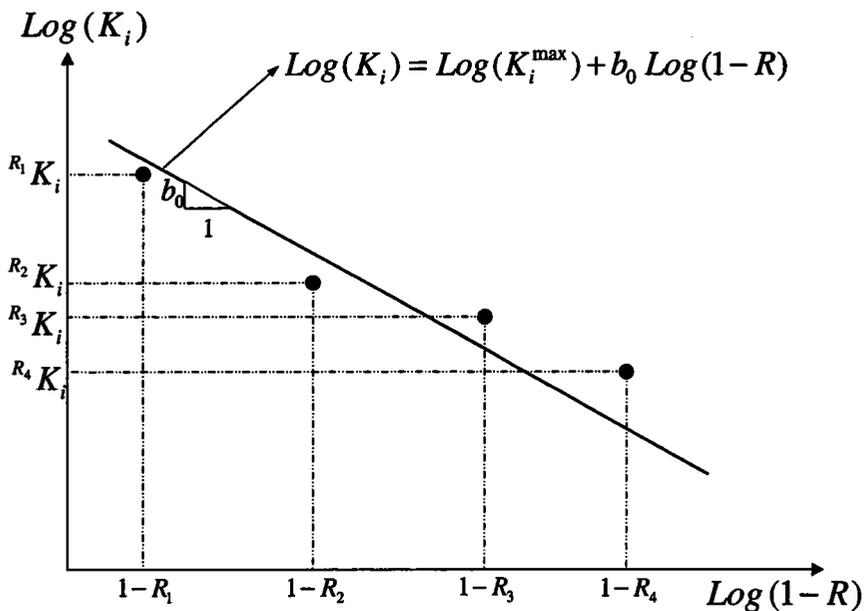
du rapport de contrainte ( $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ ). Les valeurs obtenues à partir de résultats expérimentaux peuvent être représentées dans le diagramme bi-

logarithmique  $K_i - (1-R)$ . Le lissage de la courbe donne la valeur  $b_0$ . L'expression du diagramme  $K_i - (1-R)$  est donnée :

$$\text{Log}(K_i) = \text{Log}(K_i^{\max}) + b_0 \text{Log}(1-R) \quad \text{où} \quad b_0 < 0 \quad (4-60)$$



a)



b)

Figure 4-19 Procédure d'évaluation de la valeur de  $b_0$  selon la méthode proposée de Swallem-Kurath-Lawrence a) Schéma des résultats expérimentaux dans le diagramme bi-logarithmique  $K_i - N_f$  b) Utilisation des résultats obtenus dans le diagramme logarithmique  $K_i - (1-R)$ .

La formulation proposée par Swallem-Kurath-Lawrence dépend donc des résultats expérimentaux et des valeurs des facteurs d'intensité de contraintes. Une approche analytique est utilisée pour obtenir la formulation de cette méthode.

- Ning Pan-Sherry Sheppard [106]

$$K_I = \sigma_m \sqrt{a} \left[ 0.00334 + 0.1341 \frac{\sigma_b}{\sigma_m} - 0.0032 \left( \frac{a}{t} \right) - 0.1335 \frac{\sigma_b}{\sigma_m} \left( \frac{a}{t} \right) - 0.0443 \frac{\sigma_b}{\sigma_m} \left( \frac{a}{t} \right)^2 + 0.0008 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] \quad (4-61)$$

$$K_{II} = \sigma_m \sqrt{a} \left[ 0.0156 + 0.0169 \frac{\sigma_b}{\sigma_m} - 0.0592 \left( \frac{a}{t} \right) - 0.0028 \frac{\sigma_b}{\sigma_m} \left( \frac{a}{t} \right) - 0.0088 \frac{\sigma_b}{\sigma_m} \left( \frac{a}{t} \right)^2 + 0.0523 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] \quad (4-62)$$

$K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_b$ ,  $a$  et  $t$  sont respectivement le facteur d'intensité de contraintes en mode de rupture I, le facteur d'intensité de contraintes en mode de rupture II, la contrainte de membrane, la contrainte de flexion, la profondeur de la fissure et l'épaisseur de la tôle mince.

La contrainte de membrane et la contrainte de flexion s'expriment par :

$$\sigma_m = \frac{F}{dt} \quad (4-63)$$

$$\sigma_b = \frac{6M}{\beta_s t^2} \quad (4-64)$$

$F$ ,  $M$  et  $\beta_s$  sont respectivement la force axiale, le moment du point soudé et le coefficient de géométrie du joint soudé.

Les relations de Ning-Pan et Sherry Sheppard sont obtenues par des calculs numériques.

## 4.4 Tenue à l'endurance en fatigue des points soudés

L'étude de la propagation en fatigue des points soudés a été restreinte à la mécanique linéaire de la rupture. La formulation de l'analyse en terme de mécanique linéaire de la rupture est plus avancée que l'analyse en tenue d'endurance en fatigue. L'analyse de la mécanique linéaire de la rupture des joints soudés par point n'est plus valide dans les cas de l'existence du phénomène d'endurance limité. Selon la valeur du chargement, le lieu d'amorçage de la fissure autour du point soudé et le mécanisme de l'endommagement sont différents. L'amorçage des fissures est localisé dans la zone affectée thermiquement (ZAT).

- Sheppard [117-118] a proposé que le domaine de la contrainte structurelle au voisinage du point soudé dépend de la vie en fatigue des joints soudés par point. C'est-à-dire que les fissures qui se propagent autour des points soudés dans la direction de l'épaisseur sont négligeables. La contrainte structurelle est calculée en condition élastique. La contrainte structurelle élastique est la combinaison des contraintes de flexion, contrainte de membrane et contraintes affectées par la force axiale. La contrainte structurelle mentionnée s'écrit ci-dessous :

$$\Delta S = \overbrace{\frac{\Delta Q}{t\omega}}^{\text{contrainte membrane}} + \overbrace{\frac{6\Delta M^*}{t^2W}}^{\text{contrainte en flexion}} + \overbrace{\frac{\Delta P}{t^2}}^{\text{contrainte par la force axiale}} \quad (4-65)$$

$\Delta P$ ,  $\Delta Q$ ,  $t$ ,  $\omega$ ,  $\Delta M^*$  et  $W$  sont respectivement la composante verticale de la réaction (Figure 4-18), la composante horizontale de la réaction, l'épaisseur de la tôle mince, la largeur effective  $\omega = \frac{\pi dt}{3}$ , le moment du point soudé et la largeur du joint soudé.

Les valeurs des forces et des moments sont obtenues par le calcul des Eléments Finis avec des éléments poutres et des éléments plaques (plate elements). La valeur de la contrainte structurelle proposée par Sheppard dépend de l'épaisseur de la tôle mince. Dans cette approche, la durée de vie de la propagation des fissures est égale à la durée de vie totale en fatigue des joints soudés par point. Une relation est obtenue par lissage

de la courbe dans un diagramme bi-logarithmique ( $\Delta S_{\max} - \frac{N_f}{1-R}$ ) :

$$\frac{N_f}{1-R} = C(\Delta S_{\max})^{-b} \quad (4-66)$$

$N_f$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $\Delta S_{\max}$  et  $b$  sont respectivement la durée de vie totale y compris la propagation des fissures, le rapport de contraintes, le coefficient qui dépend de la courbe de lissage, la contrainte structurale maximale et un autre coefficient qui dépend aussi de la courbe de lissage dans le diagramme bi-logarithmique

$$\Delta S_{\max} = \frac{N_f}{1-R}$$

Dans la Figure 4-20, un schéma du diagramme bi-logarithmique est présenté. Les coefficients  $C$  et  $b$  sont définis à partir de cette courbe.

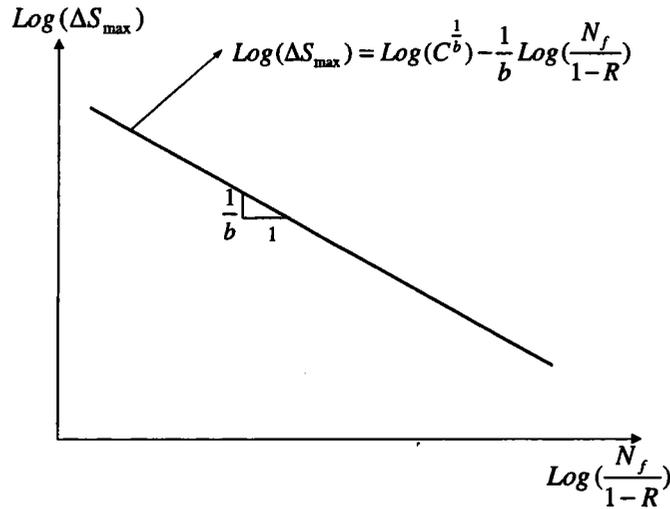


Figure 4-20 Diagramme bi-logarithmique  $\Delta S_{\max} = \frac{N_f}{1-R}$  pour évaluer la durée de vie en fatigue par l'approche proposée par Sheppard.

- Nin Pan- Sheppard [105] a utilisé l'approche de l'endurance en fatigue pour les joints soudés par l'application du domaine de la déformation maximale de l'équation de Morrow [50] et de la relation de Ramberg-Osgood:

$$\varepsilon_a = \frac{(\sigma'_f - \sigma_m)}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c \quad (4-67)$$

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (4-68)$$

$\varepsilon_a$ ,  $\sigma'_f$ ,  $\sigma_m$ ,  $N$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\sigma_a$ ,  $E$ ,  $K'$  et  $n'$  sont respectivement l'amplitude de déformation, le coefficient de la résistance en fatigue, la contrainte moyenne, le nombre de cycle à la rupture, le coefficient de la ductilité en fatigue, l'exposant de la résistance en fatigue, l'exposant de la ductilité en fatigue, l'amplitude de contrainte, le

module de Young, le coefficient d'écrouissage cyclique et l'exposant d'écrouissage cyclique.

Le domaine de la déformation est obtenu par calcul aux Eléments Finis. La déformation équivalente est utilisée dans cette évaluation. L'application de l'endurance en fatigue dans cette étude montre que ce concept peut être aussi utilisé dans les conditions de fatigue oligocyclique et d'endurance limitée.

- Henrenson [100-102] a étudié les joints soudés par point avec les approches de la fatigue. Dans cette étude la méthode SWT est appliquée pour évaluer la durée de vie en fatigue des joints soudés. La zone affectée thermiquement est considérée dans les études numériques. Selon les résultats obtenus par comparaison des travaux expérimentaux et numériques, l'effet des contraintes résiduelles est éliminé dans les premiers cycles d'application de la force. La mesure des contraintes résiduelles par les méthodes expérimentales montre l'élimination des contraintes résiduelles introduits par l'opération du soudage.

## 4.5 Résumé

Une bibliographie succincte sur la fatigue et la mécanique de la rupture est présentée dans ce chapitre. Les différents modèles pour l'analyse des joints soudés par point en cisaillement sont présentés. La méthode la plus simple est la méthode d'utilisation du concept de poutre. Dans cette approche, on considère les joints soudés par point en cisaillement comme une poutre. Le déplacement et la contrainte peuvent être calculés à partir de cette hypothèse.

D'autres méthodes utilisent différentes hypothèses permettant de simplifier le problème d'analyse des joints soudés par point en cisaillement, par exemple, l'utilisation des éléments de type poutre et coque.

La méthode de Kan [98] utilise un modèle bi-dimensionnel dans lequel l'effet de concentration des contraintes dans l'épaisseur des tôles inférieure et supérieure et l'interface entre les deux tôles minces sont négligées. L'amorçage des fissures dans l'épaisseur des tôles minces n'est pas considéré dans la méthode de Salvini [94-97].

Les formulations proposées par Radaj [99] sont basées sur l'équilibre statique. Cette méthode ne considère pas la compatibilité des déplacements. C'est-à-dire que cette méthode donne uniquement les résultats de la résolution des équations statiques. Les conditions imposées par les conditions aux limites ne sont pas appliquées dans cette étude.

La modélisation numérique tri-dimensionnelle est la méthode la plus exacte et la plus convenable pour considérer les effets des contraintes autour du point de soudure et la distribution des contraintes dans la direction de l'épaisseur.

Dans les sections 4-3 et 4-4, l'étude des joints soudés par point basée sur la mécanique linéaire de la rupture et la fatigue est présentée.

Selon la localisation de la fissure au voisinage du point soudé, l'étude des joints soudés par point en cisaillement est traitée par la mécanique linéaire de la rupture ou par l'endurance en fatigue.

Dans la Figure 4-14, la localisation de l'amorçage de la fissure est présentée. Dans les cas de la fatigue oligocyclique et de l'endurance limitée, la fissure apparaît respectivement dans le métal de base et la zone affectée thermiquement (ZAT). La localisation de cette fissure est très importante dans l'étude des joints soudés par point. Si la fissure est localisée dans le métal de base (la force appliquée est importante), l'amorçage est négligeable par rapport à la propagation des fissures. Dans ce cas, la mécanique linéaire de la rupture peut être utilisée. Si la fissure est localisée dans la zone affectée thermiquement (la force appliquée est faible), la

durée de vie en amorçage est beaucoup plus importante que celle en propagation. Dans ce cas, la prévision de la durée de vie en fatigue à partir de la courbe de Wöhler peut être appliquée.

Dans la section 4.4, les approches basées sur la fatigue sont montrées. Shappard [117-118] a considéré que la propagation des fissures est négligeable. Elle a proposé que l'amplitude de contrainte maximale définie dans l'équation (4-65) est celle représentée dans le diagramme de Wöhler  $\Delta S_{\max}$ . Nin Pan [105] et Henrenson [100-102] ont utilisé l'approche de déformation locale à partir des méthodes de Morrow [50-55] et SWT [56]. L'utilisation de ces méthodes est restreinte. Les coefficients de réduction en fatigue au voisinage du fond d'entaille sont nécessaires pour obtenir la durée de vie en fatigue. L'étude des joints soudés par point en cisaillement n'est actuellement pas assez établie pour une estimation exacte de leur durée de vie en fatigue.

# CHAPITRE 5

# Chapitre 5

## 5. Etude expérimentale des joints soudés par point

### 5.0 Matériau

Le matériau utilisé est l'acier Solphor 280. Cet acier est classé dans la catégorie des aciers galvanisés par double face. Leur capacité à protéger l'acier de la corrosion fait des tôles galvanisées un matériau de choix pour tous les secteurs de l'industrie. Les tôles galvanisées sont utilisées dans de nombreuses applications industrielles touchant des domaines aussi variés que l'automobile, le bâtiment, les travaux publics, l'électroménager... etc. Les tôles d'acier galvanisé sont obtenues par un procédé qui combine en une seule étape, le recuit continu de recristallisation de la bande d'acier laminée à froid et son immersion dans un bain de zinc ou d'alliage de zinc fondu. La bande d'acier défile sans arrêt dans les différentes zones de traitement et à la sortie du bain, un système d'essorage à lames d'air ou d'azote permet de régler la quantité de revêtement déposée sur les deux faces. Les revêtements à base de zinc protègent l'acier contre la corrosion. Ils jouent non seulement le rôle de barrière physique en isolant l'acier de l'environnement, mais ils secrètent aussi des oxydes qui recouvrent et protègent les zones où l'acier a été mis à nu (tranches cisillées, rayures, etc.). Bien que cela paraisse paradoxal, il est nécessaire de protéger les tôles galvanisées par un traitement supplémentaire. En effet, lorsqu'il est dans une atmosphère confinée, le zinc ne forme plus d'oxyde protecteur mais développe au contraire un composé pulvérulent appelé "rouille blanche". L'espace entre deux spires d'une bobine où entre deux tôles d'un paquet sont autant d'endroits où la "rouille blanche" peut se développer si les conditions de stockage ne sont pas adaptées.

Les tôles galvanisées sont donc livrées chromatées et/ou huilées afin de limiter temporairement les risques de "rouille blanche". Un revêtement organique mince peut également être appliqué en surface, garantissant une excellente protection temporaire contre la corrosion. Les tôles galvanisées, demandées expressément sans aucun traitement de surface, sont livrées sous la seule responsabilité du demandeur.

Le Solphor 280 est un acier rephosphoré avec une haute limite élasticité. Cet acier peut être utilisé pour l'opération du soudage. Pour éviter le phénomène de rouille blanche, il est

nécessaire de prendre toutes les précautions pour éliminer les risques d'humidité et condensation pendant le stockage des tôles galvanisées. Le Tableau 5-1 représente les caractéristiques générales techniques de l'acier Solphor 220, Solphor 260 et Solphor 280.

En soudage par résistance électrique, il est nécessaire d'adapter et de recalibrer régulièrement l'intensité du courant. La durée de vie des électrodes peut être améliorée par ragréage et en utilisant une qualité appropriée (alliage Cu-Cr-Zr par exemple). En soudage à l'arc, il est nécessaire de réduire la vitesse et/ou d'utiliser des métaux d'apport appropriés afin d'éviter la formation de porosités dues aux vapeurs de zinc.

Tableau 5-1 Caractéristique technique de la qualité Solphor en acier rephosphoré et à haute limite élastique.

Qualités Solphor	Essai de traction (1)					Possibilité de revêtement (2)			
	R <sub>e</sub> (MPa)	R <sub>m</sub> (MPa)	A% (1) mini	r (2) mini	n mini	Standard	Galflex	Galfan	Galvalia
<b>220</b>	220/260	340/400	32	1,7	0,19	O	O	C	O
<b>260</b>	260/310	380/440	30	1,5	0,18	O	O	C	O
<b>280</b>	280/340	380/440	30	1,5	0,18	O	O	C	C

(1) Essai sens travers sur éprouvette ISO 20 x 80. (2) - 0,2 % en Galvalia

(2) O = faisable, N = Non faisable, C = nous consulter.

(2) - 2 % en Galvalia

Le Solphor 280 a aussi une bonne capacité pour supporter des opérations de formage et d'assemblage comme d'autres aciers utilisés dans l'industrie automobile, le bâtiment, les travaux publics, l'électroménager. Les techniques de formage et d'assemblage habituellement utilisées pour les tôles d'acier non revêtu, restent adaptées pour la tôle galvanisée. Toutefois, plus le revêtement est épais, plus l'aptitude à la déformation et au soudage diminue. Il est donc nécessaire que la quantité de revêtement demandée soit compatible non seulement avec le niveau de protection contre la corrosion mais aussi avec les exigences de formage et de soudage.

## 5.1 Composition chimique et comportement mécanique du matériau des joints soudés par point

La composition chimique du Solphor 280 utilisé pour les joints soudés par point est donnée par le Tableau 5-2.

Tableau 5-2 Composition chimique de l'acier étudié.

C%	Mn %	P%	N%	Si%	Cr%	Ni%	Al%
0.070	0.774	0.088	0.005	0.008	0.024	0.031	0.048

Les propriétés mécaniques du matériau sont déterminées par des essais de traction réalisée sur une machine du type INSTRON. Les conditions d'essais sont présentées dans le Tableau 5-3.

Tableau 5-3 Condition d'essais pour l'acier Solphor 280.

TYPE DE LA MACHINE	INSTRON
Fréquence (Hz)	30
Température (°C)	Ambiante

Selon les essais mécaniques, les caractéristiques mécaniques sont présentées au Tableau 5-4.

Tableau 5-4 Propriété de l'acier Solphor 280.

$\sigma_Y$ (MPa)	$\sigma_U$ (MPa)	A%
Limite d'élasticité	Résistance ultime	Allongement
299	431	32.2

Les valeurs de la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  et de la résistance ultime  $\sigma_U$  sont obtenues à partir des essais de traction simple.

Les résultats des essais cycliques ou de la loi de comportement cyclique sont aussi importants (courbe d'érouissage cyclique). Le tracé de la courbe cyclique permet de déterminer les caractéristiques cycliques stables du matériau. La loi de comportement cyclique du matériau et les coefficients de la loi de Ludwick ( $\sigma_a = K' \varepsilon_{a,p}^{n'}$ ) sont présentés simultanément dans le Tableau 5-5 et la Figure 5-1.

Tableau 5-5 Coefficients de la loi de Ludwick ou de la loi de comportement cyclique.

$n'$	$K'$ (MPa)
0.1001	576

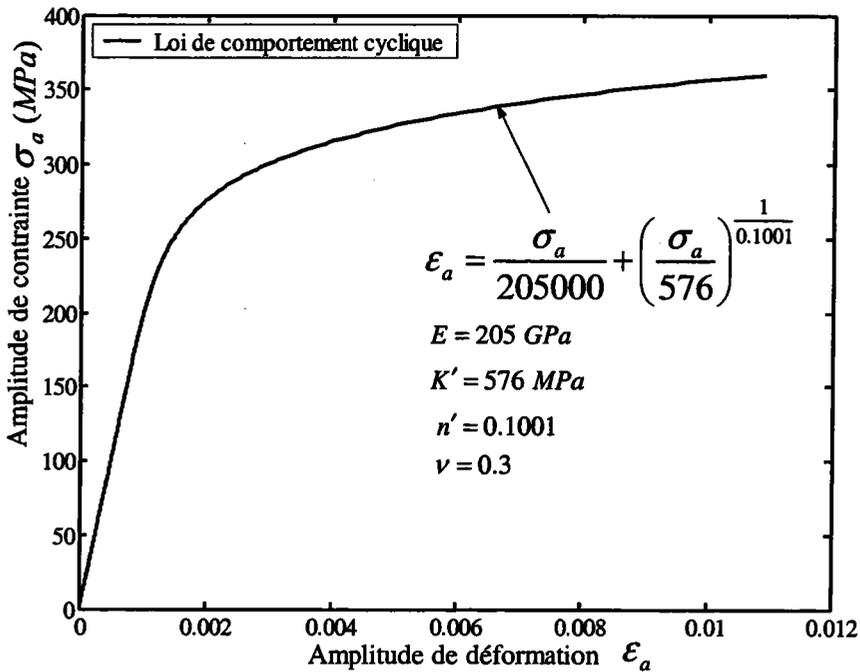


Figure 5-1 Loi de comportement cyclique (courbe de amplitude de contrainte - amplitude de déformation).

La courbe de comportement cyclique est obtenue avec une éprouvette qui a la même épaisseur que les éprouvettes des joints soudés par point réalisés avec des tôles très minces. Il est donc nécessaire d'utiliser la même condition de géométrie avec le même matériau. Pour éviter le problème du flambage de tôle mince, deux renforts ont été appliqués. Les valeurs de l'exposant d'érouissage cyclique et du coefficient d'érouissage cyclique sont obtenues à partir de la loi de comportement cyclique (Tableau 5-5).

## 5.2 Géométrie des joints soudés par point

Pour la prévision de la durée de vie en fatigue, des éprouvettes de joints soudés par point avec différentes géométries sont utilisées. Les joints soudés par point sont classifiés comme suit :

1. Joints soudé par point en cisaillement Mono Point
2. Joints soudé par point en cisaillement Triple Points
3. Joints soudé par point en cisaillement Multiple Points

Selon l'utilisation des joints soudés dans l'industrie automobile et l'assemblage des pièces de carrosserie des véhicules, des tôles minces avec différentes épaisseurs peuvent être utilisées. En pratique, l'épaisseur est généralement égale. L'analyse des joints soudés par point avec différentes épaisseurs et différents comportements mécaniques est plus compliquée. Généralement, les tôles minces avec les mêmes épaisseurs sont utilisées pour fabriquer les assemblages.

Dans la Figure 5-2, la géométrie des joints soudés par point en cisaillement y compris Mono Point, Triple Points et Multiple Points est présentée [107].

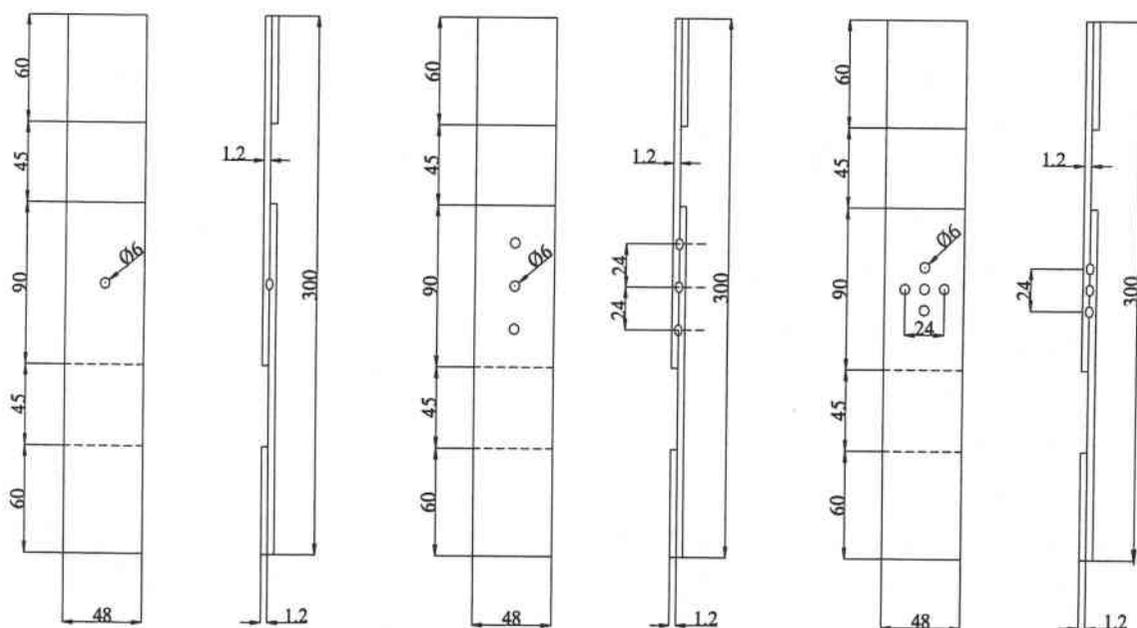


Figure 5-2 Géométrie des joints soudés par point en cisaillement y compris Mono Point, Triple Points et Multiple Points.

Les études des joints soudés par point en cisaillements pour la prévision de la vie en fatigue sont restreintes aux joints soudés par point en cisaillement Mono Point. L'étude de

l'influence du nombre de points soudés pour la durée de vie en fatigue est importante. Pour cette raison, des joints soudés Mono Point, Triple Point et Multiple Points sont utilisés pour évaluer la durée de vie en fatigue avec différents géométries et nombres de points soudés.

L'aspect microscopique des éprouvettes sélectionnées est présenté dans la Figure 5-3.

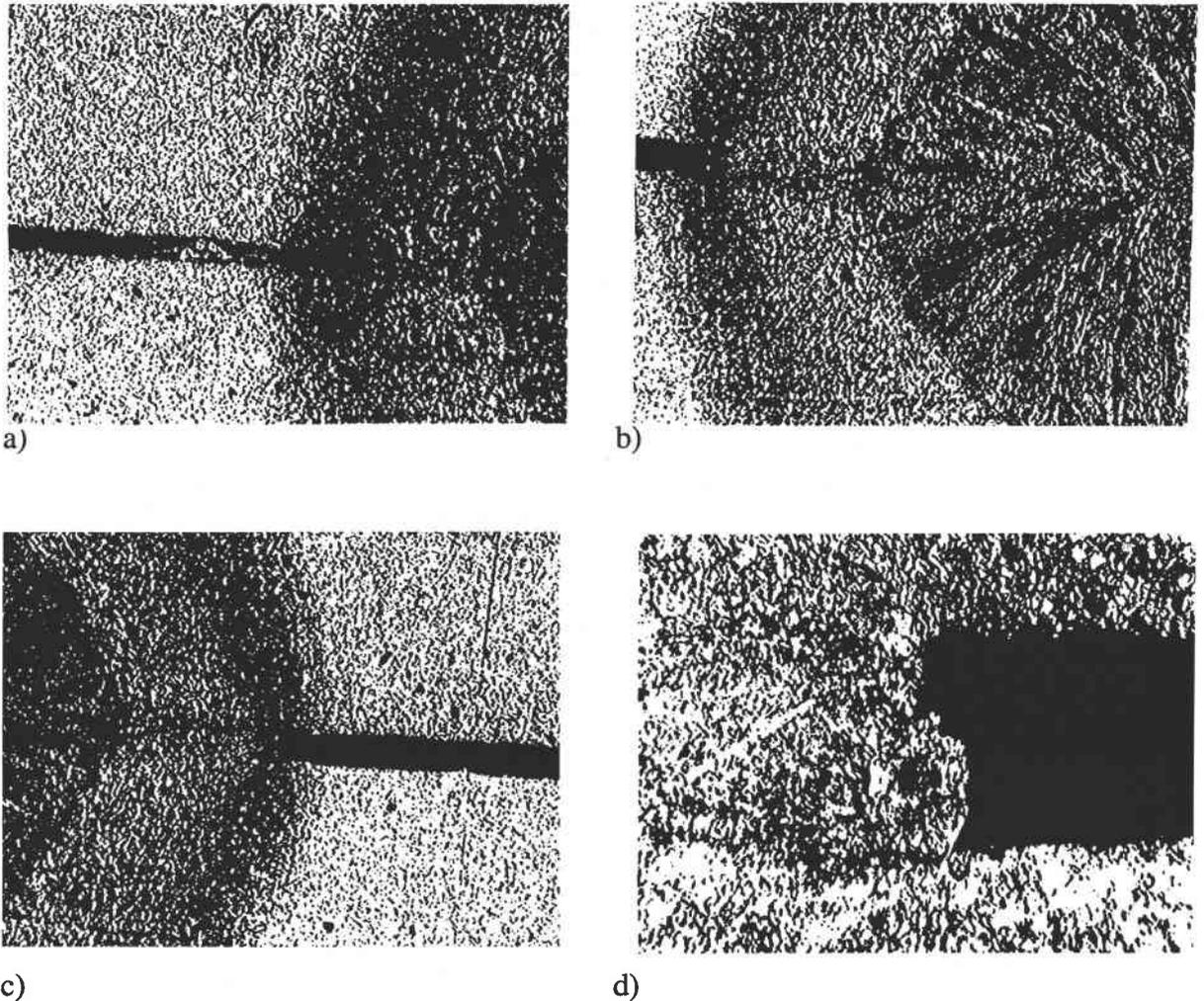


Figure 5-3 Aspect microscopique d'une éprouvette soudée par point a) Grandissement du point soudé X50 b) Grandissement du point soudé X500 c) Grandissement du point soudé X50 d) Grandissement du point soudé X500 [119].

Dans la Figure 5-3, un grossissement du point soudé pour les côtés gauche et droit est présenté. La zone fondue, la zone affectée thermiquement et le métal de base sont respectivement localisés. Le centre est la zone fondue et la ZAT et le métal de base peuvent être distingués autour de la zone fondue. L'interface entre les tôles minces est visible. Une observation macroscopique donne la valeur moyenne de la dimension de l'interface. Cette

valeur sera considérée dans le calcul par la méthode des Eléments Finis. Il est nécessaire de savoir que la valeur de l'interface change les valeurs de la contrainte maximale. Cette prise en compte de l'interface conduit à une prévision de la durée de vie en fatigue moindre qu'en son absence. Dans la Figure 5-4, les dimensions du point soudé mesurées et utilisées sont indiquées.

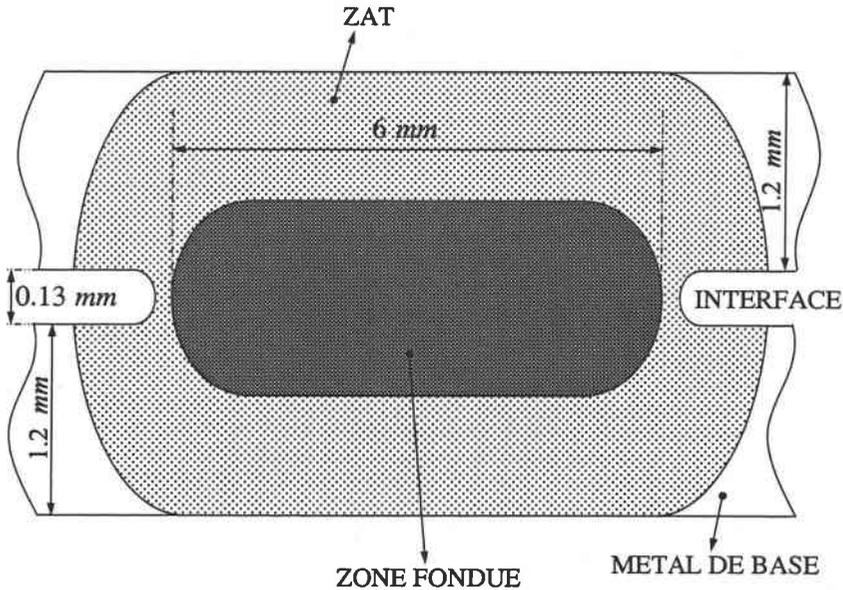


Figure 5-4 Schéma de la géométrie du point soudé pour la taille du point soudé, de l'interface et de l'épaisseur.

Dans la Figure 5-4, la dimension de l'interface mesurée à partir d'un examen microscopique est obtenue. Selon l'utilisation des éprouvettes soudées, deux plaques avec la même épaisseur de tôle sont utilisées pour appliquer la force. Les tôles mentionnées sont montrées dans la Figure 5-2.

### 5.3 Procédure des opérations de soudage par point

Les joints soudés par point sont utilisés selon une procédure spécifique de soudage. L'électrode utilisée dans l'opération de soudage est généralement consommable. Cette électrode possède une composition chimique particulière. Cette composition particulière permet d'avoir des joints soudés avec un haut comportement mécanique. L'électrode utilisée pour les joints soudés par point est en cuivre. Dans la Figure 5-5, le schéma de l'électrode des joints soudés par point est présenté.

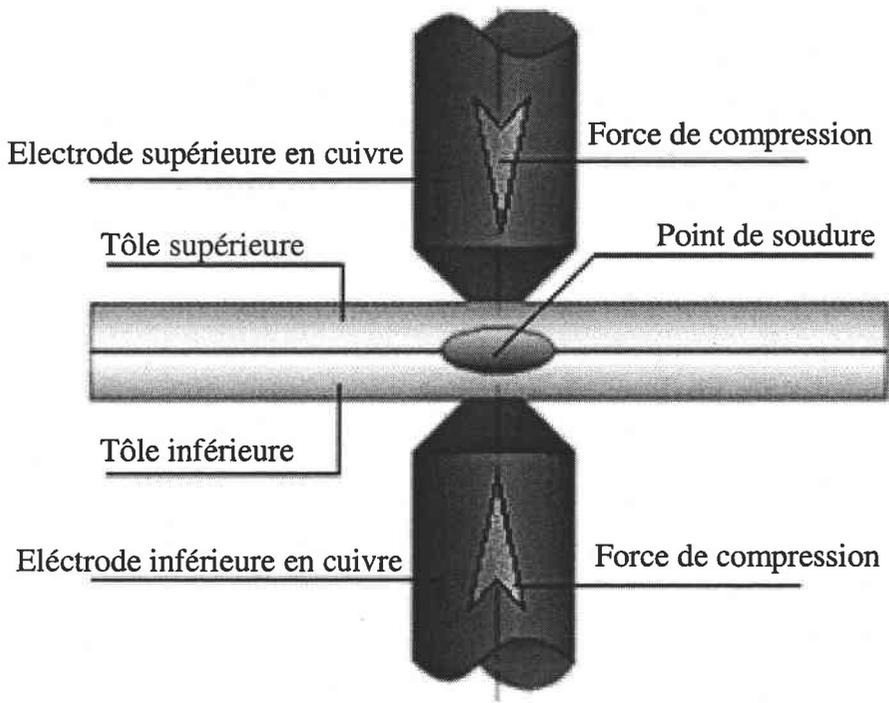


Figure 5-5 Schéma de l'électrode appliquée pour soudure des joints soudés par point.

Dans la Figure 5-5, les pièces à souder sont serrées localement entre deux électrodes en alliage de cuivre. L'ensemble pièces / électrodes est traversé par un courant de soudage qui provoque une élévation de température par effet Joule et la fusion localisée des deux pièces dans la zone de positionnement des deux électrodes.

Lorsqu'un courant électrique parcourt un conducteur, la quantité de chaleur dégagée est proportionnelle au carré de l'intensité du courant et au temps. L'expression mathématique de ces paramètres s'exprime par :

$$W^J = R_w \times I_w^2 \times t_w \quad (5-1)$$

$W^J$ ,  $R_w$ ,  $I_w$  et  $t_w$  sont respectivement l'énergie de soudage, la résistance électrique du conducteur, l'intensité du courant électrique et le temps de soudage.

La résistance d'un conducteur, à température ambiante est:

1. proportionnelle à sa longueur
2. inversement proportionnelle à sa section
3. fonction du matériau constitutif de l'âme du conducteur

L'expression de la résistance électrique d'un conducteur s'écrit donc:

$$R_w = \frac{P_w \times L_w}{A_w} \quad (5-2)$$

$R_w$ ,  $P_w$ ,  $L_w$  et  $A_w$  sont respectivement la résistance électrique du conducteur, la fonction du matériau constitutif de l'âme, la longueur et la section.

Il est nécessaire de mentionner que différents types de mise en pression des électrodes existent. Ils peuvent être classifiés :

1. Commande manuelle
2. Commande pneumatique
3. Commande hydraulique
4. Commande mécanique

Chaque commande a exclusivement son utilisation particulière. La commande hydraulique peut être faite par pression d'eau ou d'huile.

Dans l'utilisation des joints soudés par point, le diamètre du point est un paramètre important.

Il est fonction des paramètres suivants :

1. de l'intensité du courant
2. du temps de passage du courant
3. de la section de contact des électrodes
4. de l'effort appliqué aux électrodes

Le diamètre de contact de l'électrode doit être environ deux fois l'épaisseur de la pièce à souder plus 3 mm. L'expression de cette restriction s'écrit:

$$d_c = 2t + 3 \quad (5-3)$$

$d_c$  et  $t$  sont respectivement le diamètre de contact entre l'électrode et les tôles (en mm) et l'épaisseur de la tôle appliquée (en mm).

La distance entre les points de soudure et le bord de la pièce est donc définie par une norme. La distance entre la rive de la pièce et le point de soudure doit être environ deux fois

l'épaisseur du point de soudure plus 4 mm pour éviter un étalement du point de soudure sous l'effort de la pression hydraulique du noyau en fusion. L'expression de cette règle s'exprime par :

$$L_R = 2t + 4 \quad (5-4)$$

$L_R$  et  $t$  sont respectivement la distance entre la rive de la pièce et le point de soudure (en mm) et l'épaisseur de la tôle mince (en mm).

La distance minimale entre deux points de soudure est donc définie par une restriction particulière. La distance entre deux points soudés doit être environ trois fois le diamètre du point de soudure pour éviter un shuntage du courant de soudage. Si la distance entre les points est inférieure à trois fois le diamètre du point, il est nécessaire d'augmenter l'intensité pour compenser cet effet de shuntage.

$$L_p \geq 3d \quad (5-5)$$

$L_p$  et  $d$  sont respectivement la distance entre les deux points de soudure et le diamètre de point de soudure.

Dans la Figure 5-6, la distance minimale entre deux points de soudure et la distance minimale entre la rive de la pièce et le point soudé par point est aussi présentée.

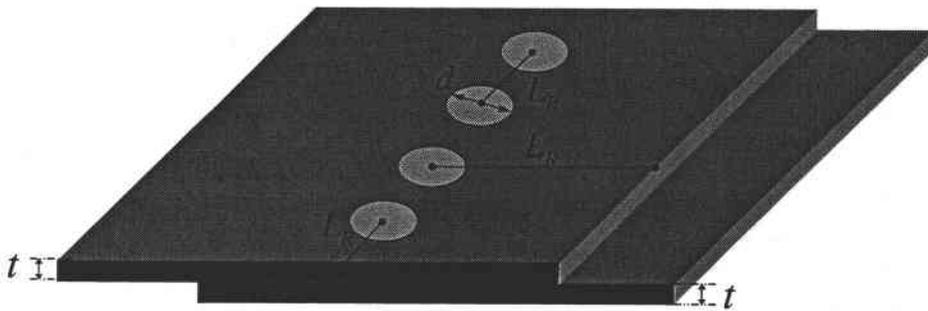


Figure 5-6 Schéma des paramètres  $L_R$  et  $L_p$  dans le cas des joints soudés multi points.

Dans le cas du soudage multi points, l'exécution simultanée de plusieurs points sans déplacement des pièces permet d'améliorer la productivité surtout lorsque le nombre de points à réaliser est important. Le courant parcourt successivement chaque couple d'électrodes.

Dans la Figure 5-7, le schéma du soudage par point, le type du multi points est présenté. Ce type de soudage est fréquemment utilisé pour souder les tôles minces dans l'industrie automobile pour les carrosseries des véhicules.

La procédure du soudage par point est divisée en deux méthodes :

1. Soudage sans variation de l'effort de compression
2. Soudage avec variation de l'effort de compression

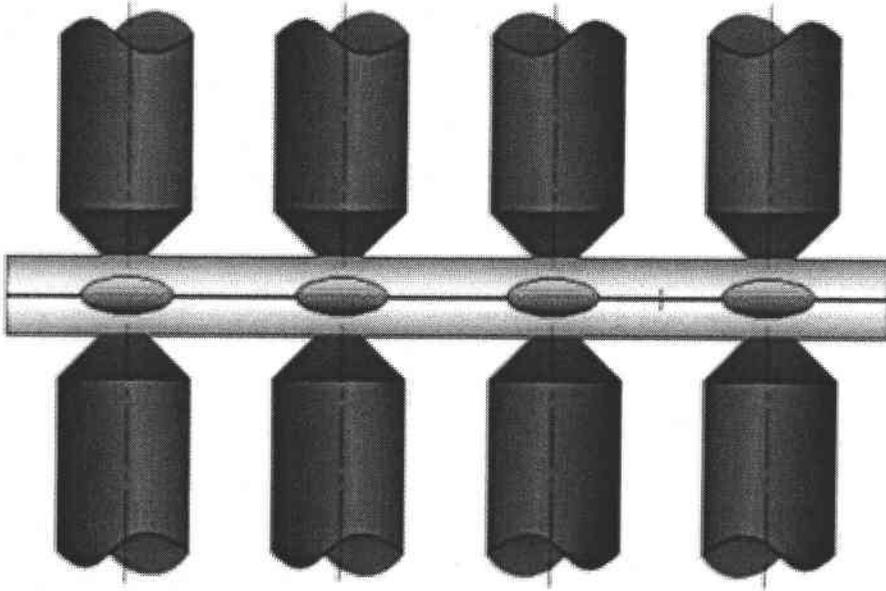
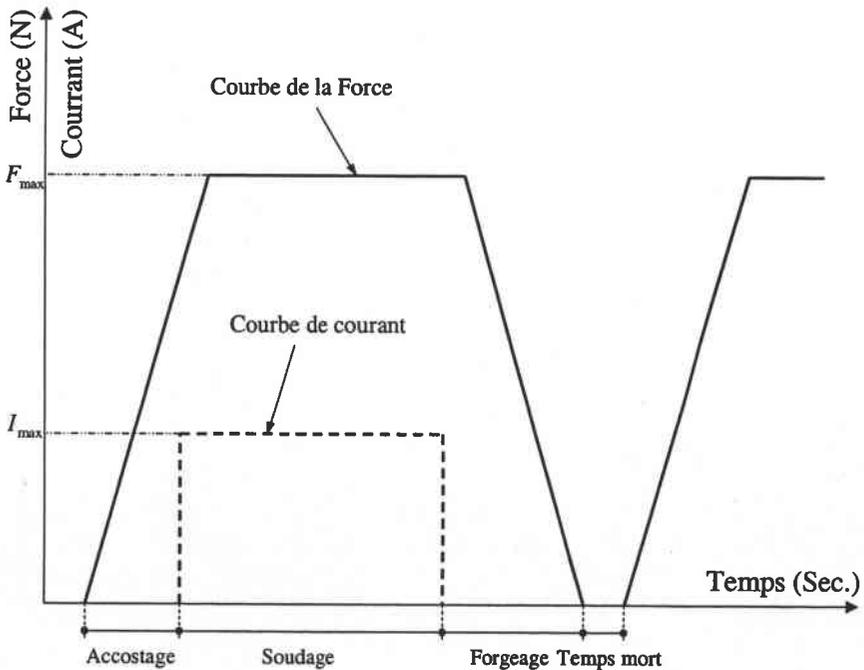
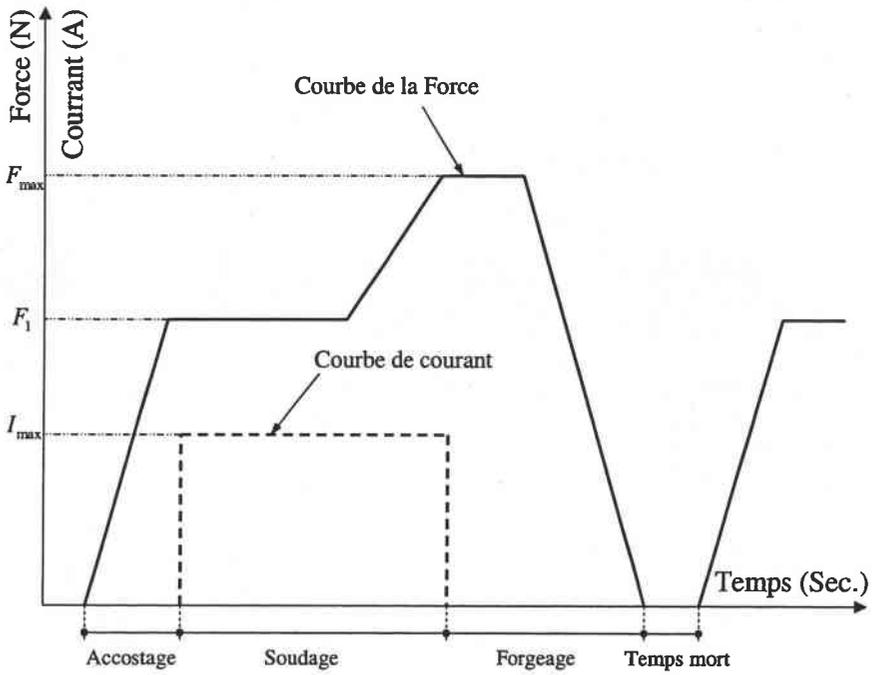


Figure 5-7 Schéma du soudage par point, type multi points.

Le soudage sans variation de l'effort est le plus fréquemment utilisé. Le soudage avec variation de l'effort est utilisé dans des applications particulières. Dans la Figure 5-8, les cycles de soudage pour les deux cas sont présentés.



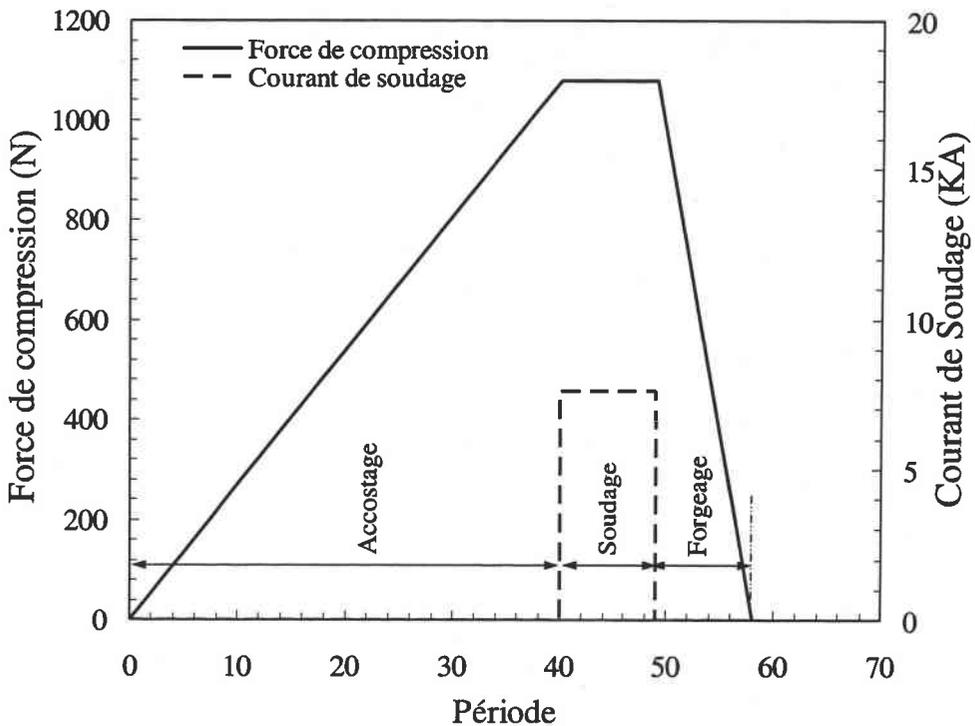
a)



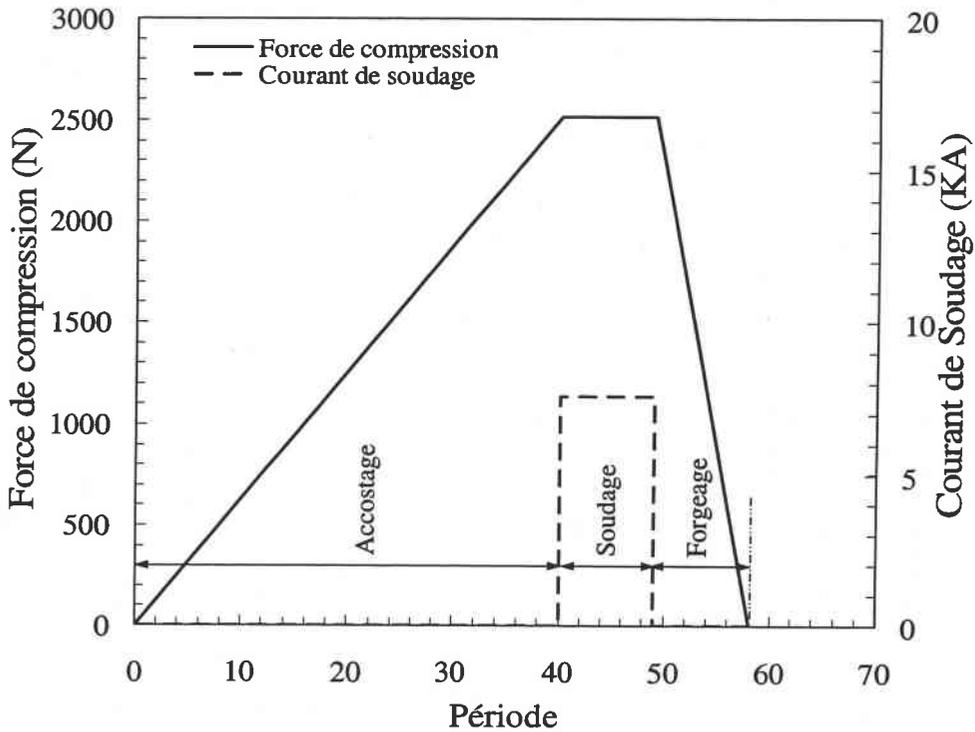
b)

Figure 5-8 Cycle de soudage des joints soudés par point a) sans variation de l'effort de compression b) avec variation de l'effort de compression.

Dans la Figure 5-9, les procédures de soudage des joints soudés Mono Point, Triple Point et Multiple Point sont respectivement présentés.



a)



b)

Figure 5-9 Cycle de soudage des joints soudés par point pour les éprouvettes sélectionnées a) Mono Point b) Triple Points et Multiple Points [119] (1 Période= 0.02 Sec.).

Le cycle de soudage sans variation de l'effort de compression est utilisé pour toutes les éprouvettes soudées par point en cisaillement y compris Mono Point, Triple Points et Multiples Points. La procédure de soudage est considérée de trois étapes :

1. Accostage
2. Soudage
3. Forgeage

Dans la Figure 5-9a, la procédure pour les joints soudés par point Mono Point est montrée. La procédure pour les joints soudés par points Triples Points et Multiple Points est identique. Cette procédure est présentée dans la Figure 5-9b.

Tableau 5-6 Résumé de la procédure de soudage des points soudés pour les éprouvettes sélectionnées.

TYPE	ACCOSTAGE (Période)	SOUDAGE (Période)	FORGEAGE (Période)	COURANT (KA)	FORCE (KN)	ELECTRODE
Mono Point	40	9	9	7.6	1.08	Hémisphérique $\phi 6$
Multiple Points	40	9	9	7.6	2.52	Hémisphérique $\phi 6$
Triple Points	40	9	9	7.6	2.52	Hémisphérique $\phi 6$

Le Tableau 5-6 représente brièvement la procédure de soudage des points de soudure dans les cas Mono Point, Triple Points et Multiple Points. L'électrode utilisée dans l'opération de soudage des joints soudés par point est une électrode hémisphérique [119]. Le diamètre de cette électrode est de 6 mm. Dans la Figure 5-10, l'électrode de soudage hémisphérique et son diamètre sont schématiquement présentés.

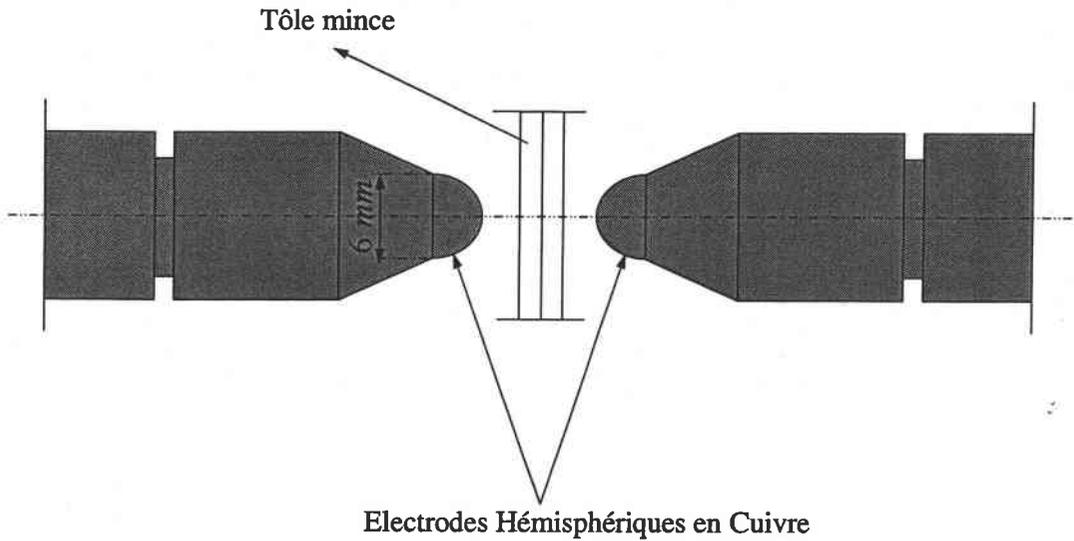


Figure 5-10 Schéma de l'électrode de soudage hémisphérique appliquée pour des joints soudés par point.

## 5.4 Présentation des essais de fatigues

Le principe de l'essai consiste à appliquer une force axiale sur une éprouvette soudée par point. Le type de chargement obtenu est sinusoïdal à amplitude constante. La machine utilisée est montrée dans la Figure 5-11.

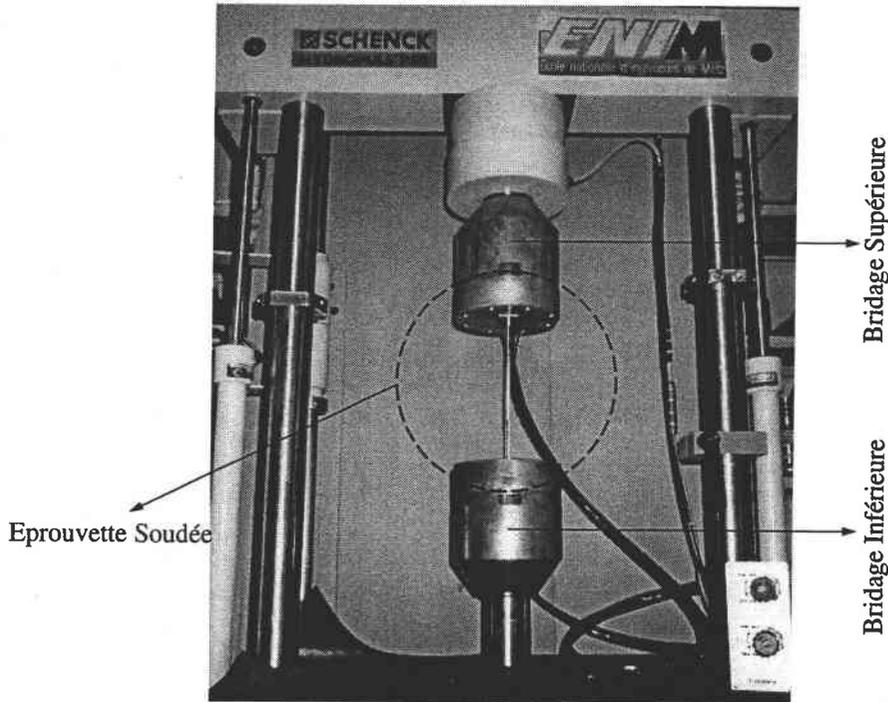


Figure 5-11 Positionnement de l'éprouvette soudée dans les bridages hydrauliques de la machine « Schenk ».

Les essais sont effectués sur machine « Schenk » du Laboratoire de Fiabilité Mécanique. Dans la Figure 5-11, les vérins hydrauliques de la machine « Schenk » appliquent le chargement. Le mors inférieur est fixe et le mors supérieur est libre. Le schéma des éprouvettes soudées par points est présenté dans la Figure 5-12. Dans cette figure, le positionnement des éprouvettes et la condition d'application de la force axiale sont schématiquement présentés.

Le phénomène de fatigue se divise en deux parties:

1. Amorçage des fissures
2. Propagation des fissures

De petites fissures qui peuvent être provoquées par le procédé de soudage s'amorcent dans la première partie. Les petites fissures peuvent se trouver généralement autour du point soudé

car une grande concentration des contraintes est observée au voisinage du point soudé inférieur.

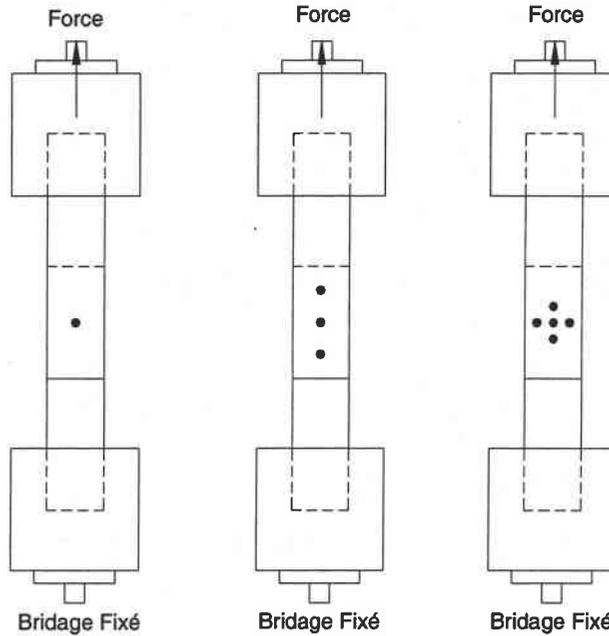


Figure 5-12 Schéma du positionnement des joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points.

Dans la Figure 5-13, la propagation des fissures est présentée. Le nombre de joints soudés est un facteur très important sur le mode de fissuration.

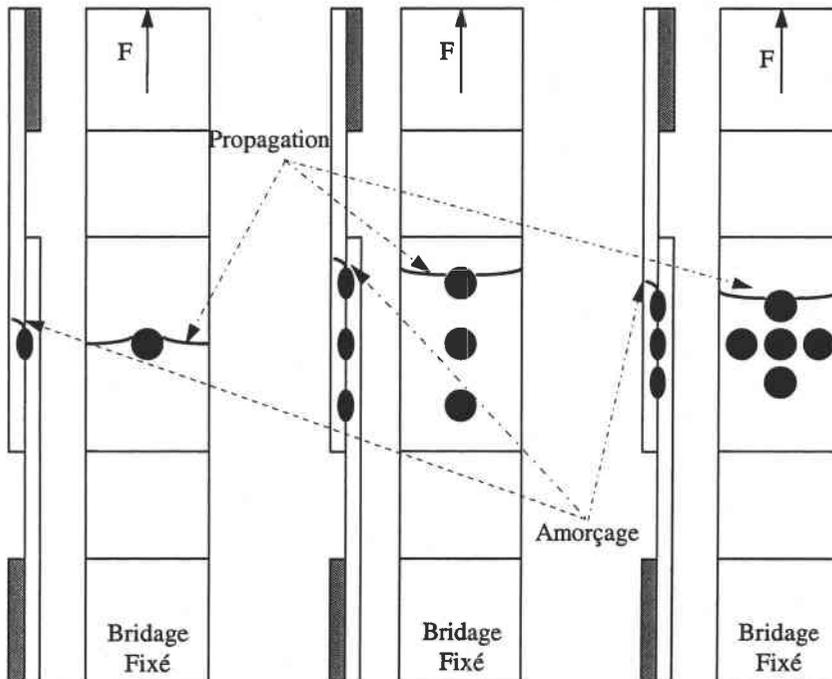


Figure 5-13 Schéma du positionnement de fissure des joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points.

Les fissures sont fréquemment perpendiculaires à la direction d'application de la force. Des fissure d'amorçage peuvent être trouvées sur le côté de l'application de la force. Le type de fissures rencontrées est montré dans la Figure 5-14 ainsi que la micrographie correspondante.

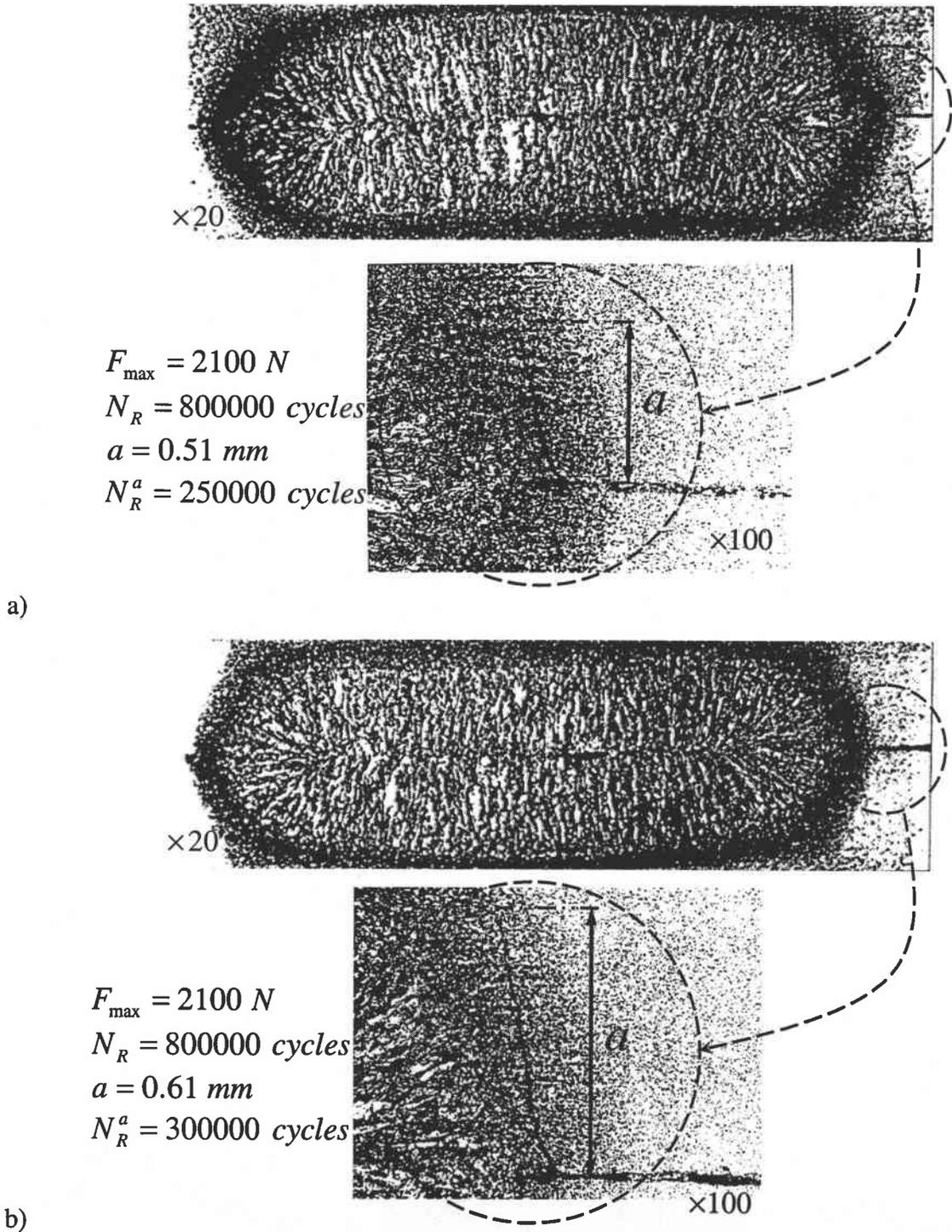
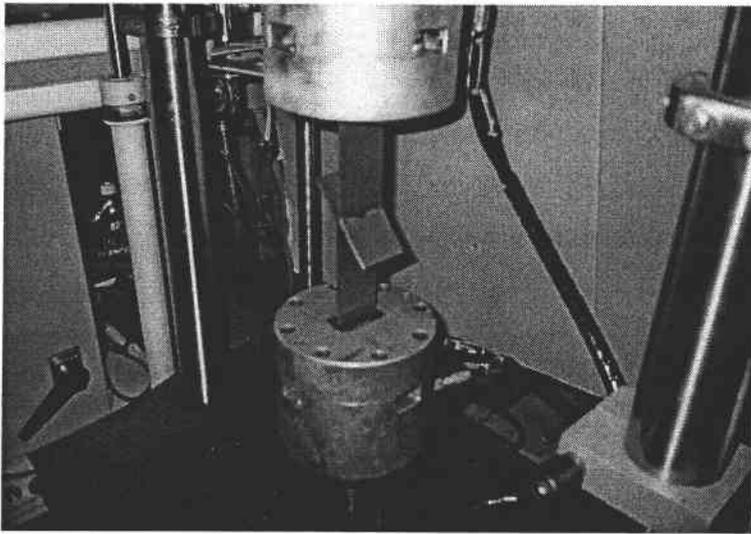
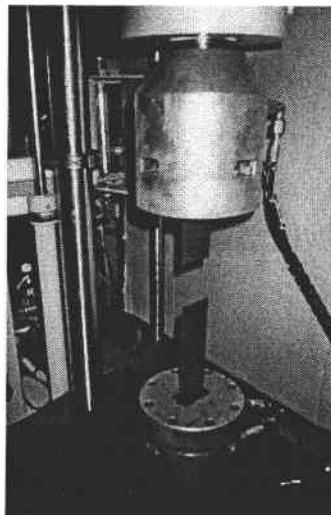


Figure 5-14 Propagation de fissure dans un point soudé avec force maximale 2100 N et nombre de cycles appliqués 800000 a) à 250000 b) à 300000.

Pour cette force, un nombre de cycles à la rupture égal à 800000 a pu être estimé. La longueur de la fissure après arrêt à 250000 et à 300000 cycles est respectivement de 0.51 mm et 0.61 mm. La fissure présentée dans la Figure 5-14 se propage vers la surface supérieure de la tôle. L'influence du nombre de points soudés est importante pour la prévision de la durée de vie en fatigue. Toutefois, le mode d'endommagement change le comportement général de la fissuration des éprouvettes soudées. Le mode de la fissuration des joints soudés par point Triple Points et Multiple Points reste le même. Le mode de fissuration des joints soudés mono points est quant à lui différent. Dans la Figure 5-15, les modes de fissuration des joints soudés par point sélectionnés sont présentés.

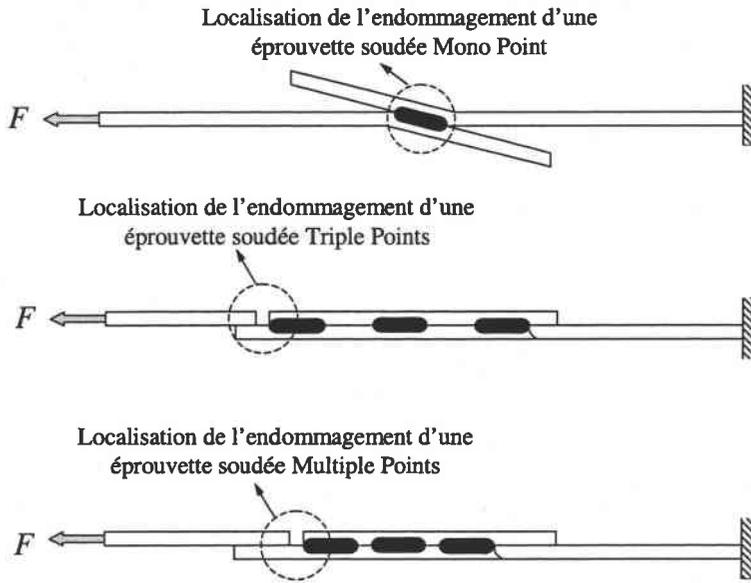


a)

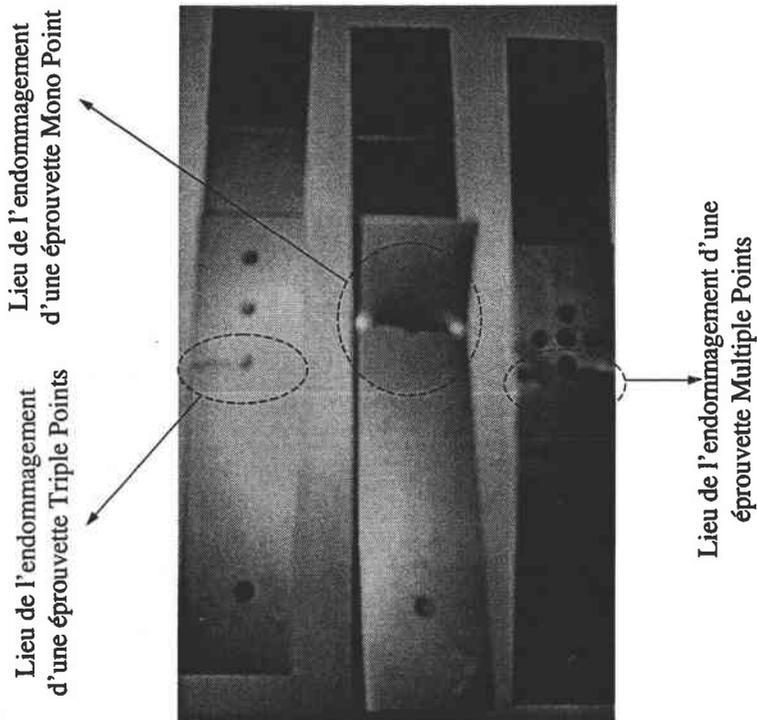


b)

Figure 5-15 Mode d'endommagement des éprouvettes soudées par point en cisaillement a) Mono Point b) Triple Points et Multiple Points.



a)



b)

Figure 5-16 Présentation de l'endommagement des joints soudés par point a) Schéma de l'endommagement b) Eprouvettes endommagées.

La fréquence de la force sinusoïdale et le rapport de contraintes sont  $f = 30 \text{ Hz}$  et

$R = \frac{F_{\min}}{F_{\max}} = 0.10$  respectivement. Cette condition est conservée pour toutes les éprouvettes

soudées par point sélectionnées (Mono Points, Triple Points et Multiples Points).

## 5.5 Résultat expérimentaux des joints soudés par point en cisaillement

Les joints soudés par point sont utilisés avec les conditions d'essais mentionnées dans la section 5-3. Dans la Figure 5-17, les résultats des joints soudés par point sont présentés dans un diagramme  $\text{Log}(F_{\max}) - \text{Log}(N_R)$ .

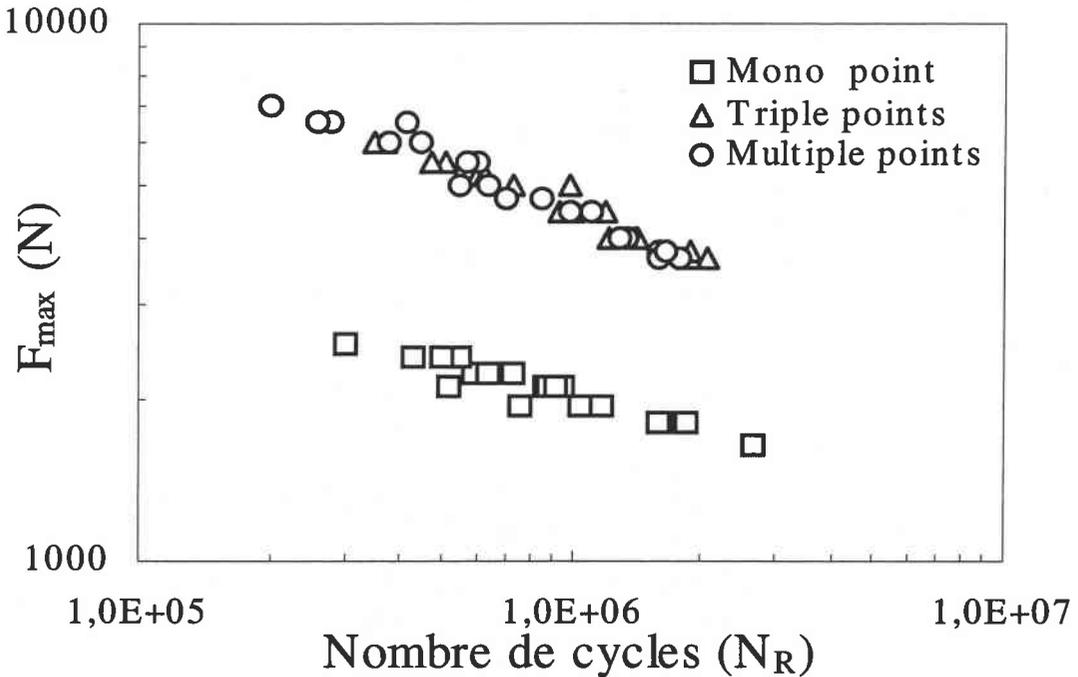


Figure 5-17 Courbe Wöhler pour les éprouvettes des joints soudés par points (Mono Points, Triple Points et Multiple Points).

Les coefficients de la loi de Basquin  $F_{\max} = F'_f(N_R)^b$  pour la force axiale sont donnés dans le Tableau 5-7 sous forme de résistance en fatigue avec le facteur de corrélation correspondant  $R^2$  aux joints soudés par point en cisaillement, Mono Point, Triple Points et Multiple Points.

Tableau 5-7 Résultats expérimentaux obtenus pour les joints soudés par point en cisaillement (Mono Point, Triple Points et Multiple Points).

Type	Résistance absolue (KN)	Corrélation
Mono Point , m=1	$F_{\max}=34.190(N_R)^{-0.2049}$	$R^2=0.8998$
Triple Points , m=3	$F_{\max}=300.424(N_R)^{-0.3042}$	$R^2=0.9641$
Multiple Points, m=5	$F_{\max}=333.394(N_R)^{-0.3131}$	$R^2=0.9696$

La résistance présentée dans la Figure 5-17 est la résistance globale ou la résistance absolue des joints soudés par point en cisaillement. Dans la Figure 5-18, la résistance de la fatigue des joints soudés par point pour Mono Point, Triple Points et Multiple Points est respectivement divisée par 1 et 3. Mais, les joints soudés par point Multiple Points sont plus faibles que les joints soudés Triple Points en valeur relative.

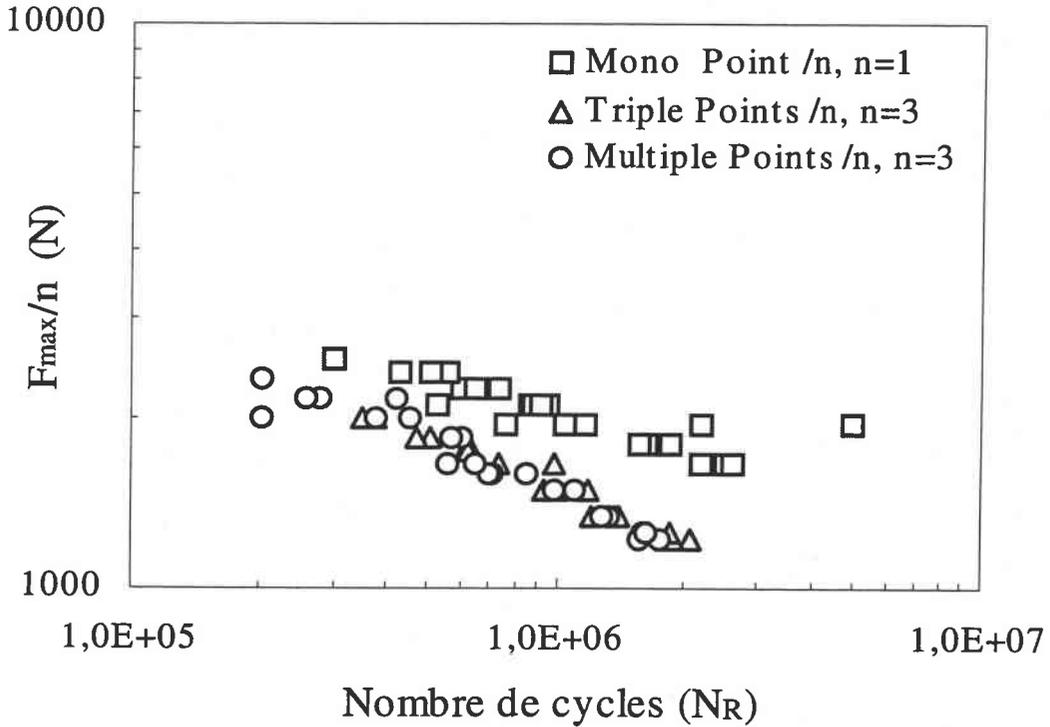


Figure 5-18 Courbe de Wöhler pour les éprouvettes des joints soudés par point (Mono Points, Triple Points et Multiple Points) avec l'utilisation du facteur  $n$ .

Tableau 5-8 Résistance absolue et relative pour les joints soudés par point en cisaillement (Mono Point, Triple Points et Multiple Points).

Type	Résistance absolue (KN)	Résistance relative (KN)	Corrélation
Mono Point , m=1	$F_{\max}=34.190(N_R)^{-0.2049}$	$F_{\max}=34.190(N_R)^{-0.2049}$	$R^2=0.8998$
Triple Points , m=3	$F_{\max}=300.424(N_R)^{-0.3042}$	$F_{\max}=100.141(N_R)^{-0.3042}$	$R^2=0.9641$
Multiple Points, m=5	$F_{\max}=333.394(N_R)^{-0.3131}$	$F_{\max}=66.678(N_R)^{-0.3131}$	$R^2=0.9696$

Le Tableau 5-8 présente respectivement la résistance absolue, relative et le facteur de la corrélation. La résistance absolue est le résultat obtenu par les essais de fatigue, et la résistance relative est le rapport de la résistance absolue et le nombre de points soudés appliqués dans les joints soudés par point en cisaillement. L'expression mathématique de la résistance relative est donc définie par:

$${}^R F_{\max} = \frac{{}^A F_{\max}}{m} \xrightarrow{\text{Mono Point}} {}^R F_{\max} = \frac{34.19(N_R)^{-0.2049}}{1} = 34.19(N_R)^{-0.2049} \text{ KN} \quad (5-6)$$

et pour les joints soudés par point Triple Points et Multiple Points, les expressions suivantes s'écrivent:

$${}^R F_{\max} = \frac{{}^A F_{\max}}{m} \xrightarrow{\text{Triple Points}} {}^R F_{\max} = \frac{300.424(N_R)^{-0.3042}}{3} = 100.141(N_R)^{-0.3042} \text{ KN} \quad (5-7)$$

$${}^R F_{\max} = \frac{{}^A F_{\max}}{m} \xrightarrow{\text{Multiple Points}} {}^R F_{\max} = \frac{333.394(N_R)^{-0.3131}}{5} = 66.678(N_R)^{-0.3131} \text{ KN} \quad (5-8)$$

${}^R F_{\max}$ ,  ${}^A F_{\max}$ ,  $m$  et  $N_R$  sont respectivement la résistance relative, la résistance absolue, le nombre de points soudés et le nombre de cycles.

La comparaison des résistances relatives montre que les joints soudés par point Triple Points ont une résistance relative similaire aux joints soudés par point Multiple Points. Malgré, le fait que les joints soudés par point Multiple Points ont deux points soudés en plus, leur résistance relative est moins que la résistance relative des joints soudés par point Triple Points. Il est donc évident que deux points soudés en plus dans les joints soudés par point Multiple Points ne conduisent pas à une résistance supplémentaire. Dans la Figure 5-17, la comparaison des résultats montre que les joints soudés par point Triple Points et Multiple Points ont la même résistance en fatigue. Dans la Figure 5-18, la comparaison indique que la résistance des joints soudés par point Triple Points et Multiple Points est un peu moins de trois fois plus grande que les joints soudés par point Mono Points. Par exemple, pour le nombre de cycle,  $N_R = 1E+06$ , la résistance absolue est égale respectivement à  ${}^A F_{\max} = 2.016 \text{ KN}$ ,  ${}^A F_{\max} = 4.492 \text{ KN}$  et  ${}^A F_{\max} = 4.409 \text{ KN}$  pour Mono Point, Triple Points et Multiple Points [120]. Le seul avantage des joints soudés par point Multiple points est une meilleure résistance en fatigue oligocyclique.

## 5.6 Résumé

L'étude expérimentale des joints soudés par point en cisaillement est présentée dans ce chapitre. Le matériau utilisé pour les joints soudés par point en cisaillement est l'acier Solphor 280. Ce type d'acier est classé dans la catégorie des aciers à haute limite d'élasticité. Il est galvanisé sur double face. La composition chimique et le comportement mécanique de cet acier sont présentés dans les Tableaux 5-2, 5-3, 5-4 et 5-5 et la Figure 5-1.

La géométrie des joints soudés par point en cisaillement est montrée dans la Figure 5-2. Les joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points sont respectivement présentés. Dans le cas des joints soudés par point Triple Points, la distance entre les points soudés est égale à 24 mm. Dans le cas des joints soudés par point Multiple Points, cette distance est réduite à 12 mm. La distance entre les points soudés est très importante dans la prévision de la durée de vie en fatigue. Les résultats obtenus par les travaux expérimentaux montrent que les joints soudés par point Triple Points et Multiple Points ont des durées de vie en fatigue similaires. Ce résultat montre que la distance entre des points de soudure change la résistance à la fatigue. La distance entre les points de soudures est normalisée, par exemple les distances  $L_R$  et  $L_p$  sont utilisées dans les équations 5-4 et 5-5.

Dans la Section 5.3, la procédure des opérations de soudage par point est présentée. L'électrode utilisée dans l'opération de soudage par point n'est pas consommable. La procédure de soudage est composée de trois stades: 1) Accostage 2) Soudage 3) Forgeage.

Dans le Tableau 5-6, la procédure de soudage des points soudés par point, Mono Point, Triple Points et Multiple Points est résumée.

Dans la section 5.4, les essais de fatigue sont présentés. Les joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points sont sollicités sur une machine de type « Schenk ».

L'influence du nombre de points soudés est observée par la comparaison des modes d'endommagement des joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points. Selon les observations expérimentales, les joints soudés par point Triple Points et Multiple Points ont les mêmes modes d'endommagement. Les joints soudés par point Mono Point ont un mode d'endommagement différent (Figure 5-15 et Figure 5-16). Dans le cas de l'endommagement des joints soudés Mono Point, il y a une grande rotation pour les tôles minces supérieure et inférieure. Pour les joints soudés Triple Points et Multiple Points, il y a une légère rotation et les joints soudés sont coupés en deux morceaux. Dans la section 5.5, les résultats expérimentaux des joints soudés par point en cisaillement sont présentés. Selon les

résultats expérimentaux, les joints soudés par point Triple Points et Multiple Points montrent les mêmes résistances absolues (Tableau 5-7). Il est évident que la résistance des joints soudés multi-points (Triple Points et Multiple Points) est plus grande en fatigue grâce au nombre de points de soudure. Dans le Tableau 5-8, la résistance relative des joints soudés par point en cisaillement est présentée. Les joints soudés par point Triple Points sont les plus résistants. Selon le mode d'endommagement dans le cas des joints soudés Mono Point, la résistance relative est faible par rapport à celle des joints soudés par point Triple Points et Multiple Points. De plus la résistance relative des joints soudés par point Multiple Points est plus faible que les joints soudés par point Triple Points. La résistance relative de ce type de joints soudés par point en cisaillement dépend donc de la distance entre les points de soudure et le nombre de points soudés.

En pratique, les joints soudés par point Triple Points et Multiple Points représentent les mêmes comportements mécaniques. En d'autres termes, deux points soudés supplémentaires n'engendrent pas un accroissement de la résistance en fatigue. En revanche, l'effet du nombre de points soudés conduit à une résistance absolue légèrement plus grande que celle des joints soudés par point Triple Points dans le cas de la fatigue oligocyclique. Dans le cas d'endurance limitée, les joints soudés par point Multiple Points montrent une durée de vie en fatigue sensiblement moins élevée.

# CHAPITRE 6

# Chapitre 6

## 6. Modélisation élastique et élasto-plastique des joints soudés par points

### 6.0 Introduction

Pour déterminer les distributions des contraintes, le logiciel ANSYS a été utilisé. ANSYS est un code général de calcul basé sur la méthode des Eléments Finis conçu pour l'analyse des structures.

Il permet de traiter des problèmes d'élasticité linéaire, des problèmes non linéaires (élasto-visco-plastique), des problèmes dynamiques transitoires et stationnaires, des problèmes thermiques transitoires et stationnaires, des problèmes mécaniques du fluide (CFD) et des problèmes acoustiques.

Pour effectuer un calcul, ce logiciel passe par les trois stades suivants :

- **Stade I : définition de la géométrie du modèle :**
  1. Introduction des éléments convenables pour le type d'analyse considéré
  2. Définition des données caractérisant le modèle :
    - Les coefficients des matériaux utilisés pour le modèle ;
    - Construction de la géométrie dans les cas bi-dimensionnel et tri-dimensionnel (Les surfaces, les volumes et la combinaison des surfaces et volumes) ;
    - Les maillages du modèle considéré ;
    - Vérification des tailles de maillages obtenues.
- **Stade II : solution du problème défini**
  1. Application des conditions aux limites ;
  2. Application des chargements ;
  3. Arrangement des types d'analyse ;
  4. Vérification complète du modèle avant la solution ;
  5. Solution du problème
    - Assemblage des matrices de rigidité et de masse de la structure complète

- Application des conditions limites
  - Application des chargements externes
  - Résolution du système d'équation linéaire d'équilibre ou des systèmes non linéaires.
- **Stade III** : analyse et post-traitement des résultats qui peuvent être, soit des quantités locales comme les déplacements, les contraintes, les déformations. Soit des quantités globales, telles que l'énergie de déformation.

L'analyse des joints soudés par point a été réalisée par ce programme. Il permet de faire un paramétrage pour les différents calculs par Eléments Finis. L'analyse des Eléments Finis par ANSYS peut être réalisée par trois méthodes [121-122]:

1. Interactive (Graphical User Interface)
2. Programmation par le fichier d'analyse
3. Mixage des deux méthodes mentionnées

Dans la méthode interactive ou GUI, les données peuvent être entrées par les fenêtres préparées par ce logiciel Eléments Finis. Ces fenêtres sont plus simples pour les petits calculs, mais elles ne sont pas adaptées pour les calculs compliqués et répétitifs. A titre d'exemple, une fenêtre est présentée dans la Figure 6-1.

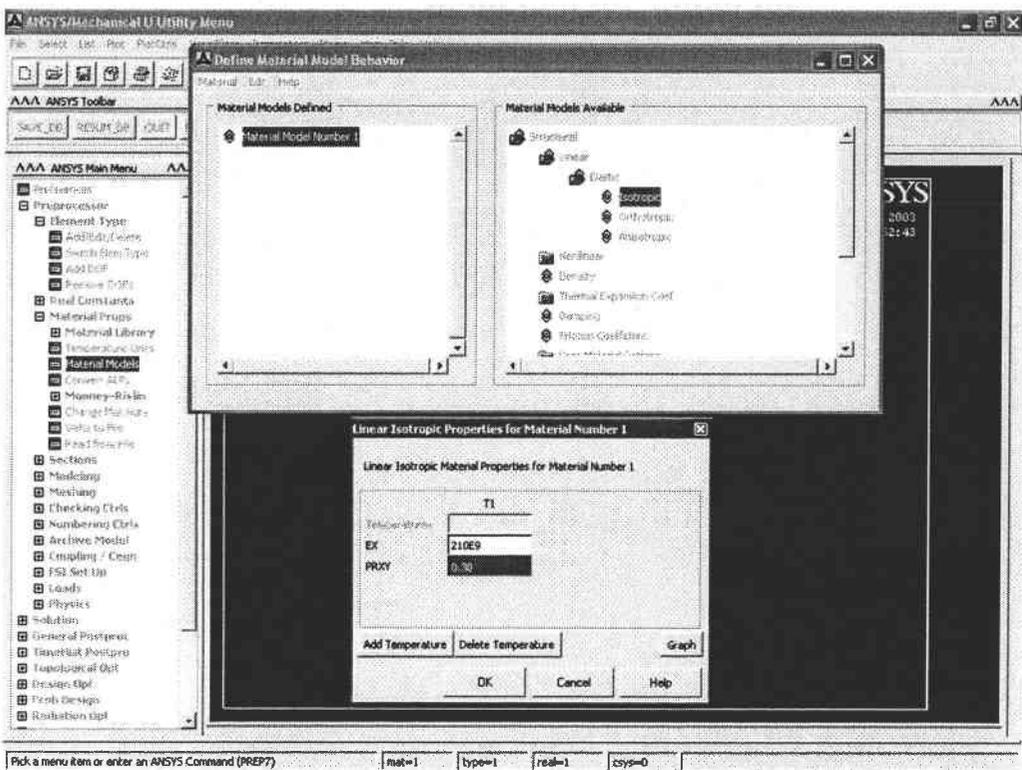


Figure 6-1 Utilisation du logiciel d'Eléments Finis par GUI.

Dans la méthode de la programmation pour le fichier d'entrée, les paramètres du comportement des matériaux, la géométrie et la résolution sont facilement contrôlés par la méthode de programmation. Un autre avantage de cette application est la mise en évidence dans les calculs compliqués qui se font en plusieurs pas, en utilisant par exemple, la technique « sub-modeling », « super élément » et le calcul de la mécanique linéaire de la rupture.

Le Mixage des deux méthodes mentionnées (GUI et Programmation) est généralement plus efficace dans les calculs par Eléments Finis. Dans la Figure 6-2 qui présente une utilisation générale de la programmation, le fichier TEXT est fréquemment utilisée.

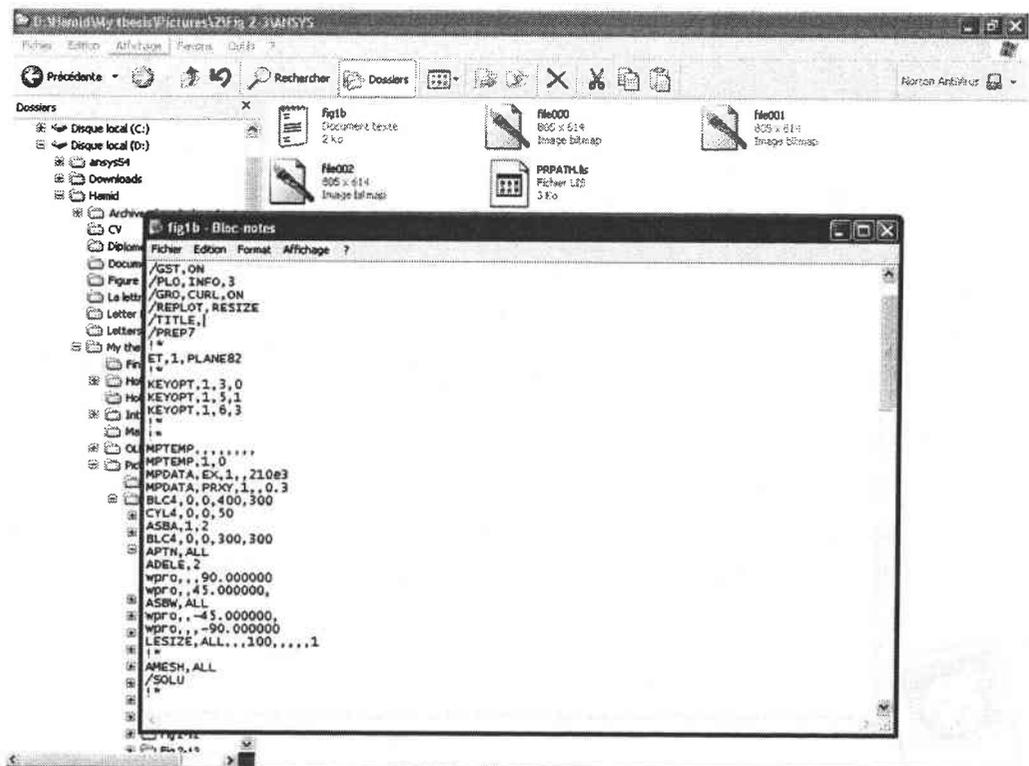


Figure 6-2 Utilisation du logiciel par la méthode de programmation.

Dans la modélisation des joints soudés, la méthode mixage est utilisée. Selon les caractéristiques particulières des joints soudés par point dans le cas de l'analyse tridimensionnelle, la méthode des sous modelages « sub-modeling » est donc utilisée [123]. La longueur et la largeur des joints soudés sont très grandes par rapport à leurs épaisseurs. Il est évident qu'il est alors très difficile d'obtenir de bons maillages dans l'épaisseur des joints soudés. Il est nécessaire d'avoir des maillages raffinés dans l'épaisseur des tôles minces. Pour obtenir cette exigence, le technique du sous modelage est donc choisie pour les calculs des joints soudés par point. En plus cette méthode diminue le temps du calcul.

## 6.1 Modélisation des joints soudés par point Mono Point, Triple Points et Multiple Points

Le mixage de la programmation et GUI est utilisé pour le calcul des Eléments Finis. Le paramétrage de la géométrie, du chargement et les critères de la solution sont appliqués. En raison de la présence d'épaisseur très mince dans les joints soudés par point, un sous modelage est donc réalisé. L'algorithme de cette analyse est présenté dans la Figure 6-3.

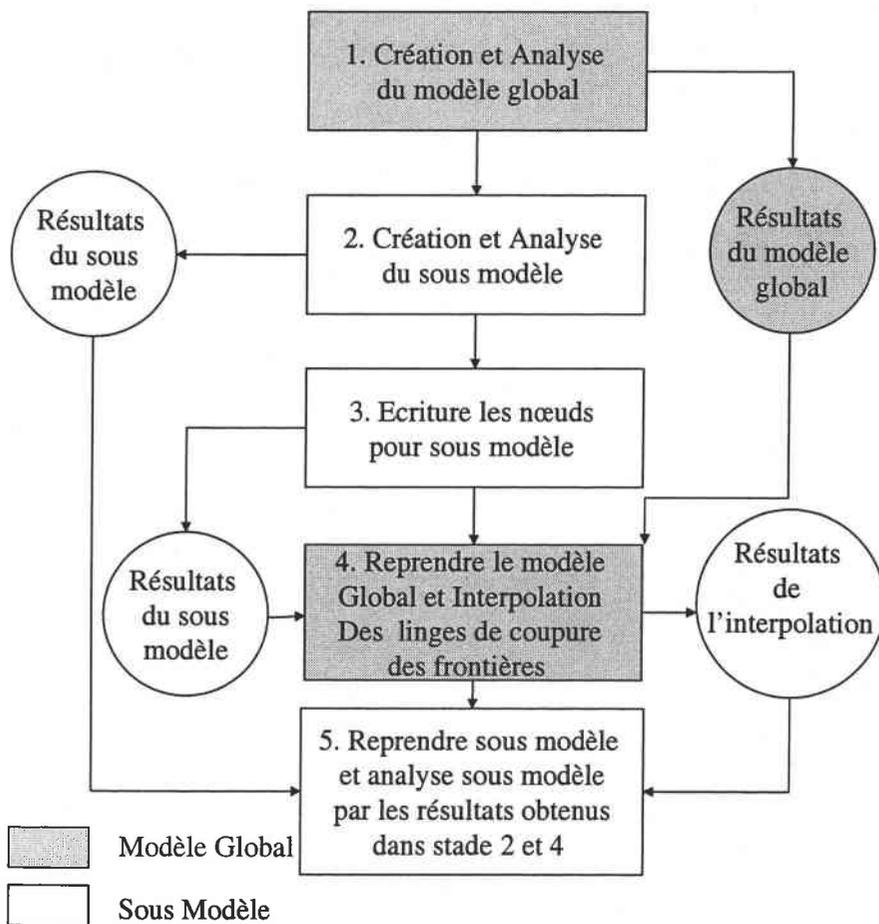


Figure 6-3 Algorithme de la méthode sous modelage pour la méthode des Eléments Finis.

Les calculs par la méthode des Eléments Finis pour les joints soudés par point sont donc réalisés à partir du mixage des deux méthodes mentionnées, et l'algorithme de cette analyse pour tous les joints soudés est présenté dans la Figure 6-4. Dans cette figure, les paramètres des matériaux et des géométries sont donnés. Selon le type de calcul utilisé (élastique ou élasto-plastique), la solution du problème avec les paramètres du contrôle de la procédure est

donc réalisée. Dans la préparation du calcul, ces paramètres sont arrangés. Ce pas est très important dans le cas des calculs non linéaires. La méthode de calcul non-linéaire a déjà été mentionnée dans la section 2.2.3.

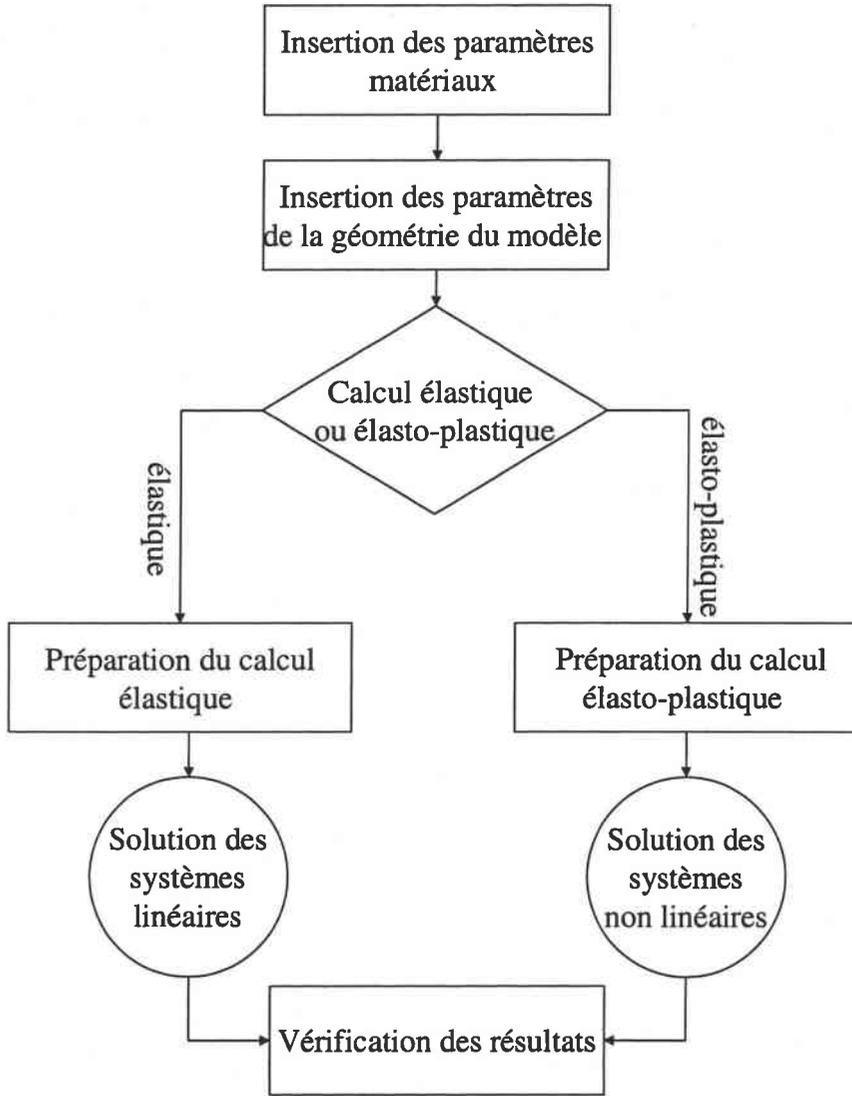
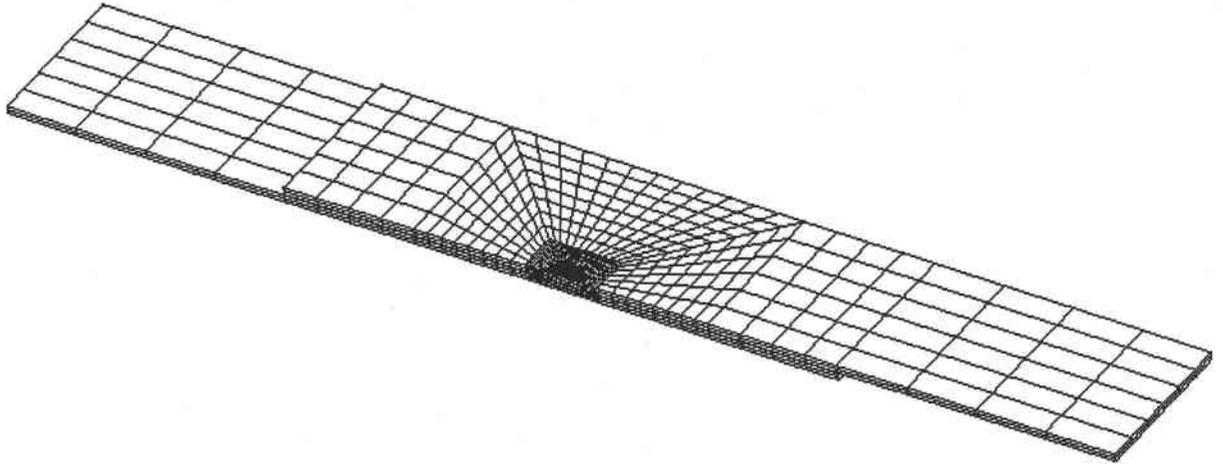


Figure 6-4 Algorithme général du calcul des joints soudés par point dans les cas linéaires et non-linéaires.

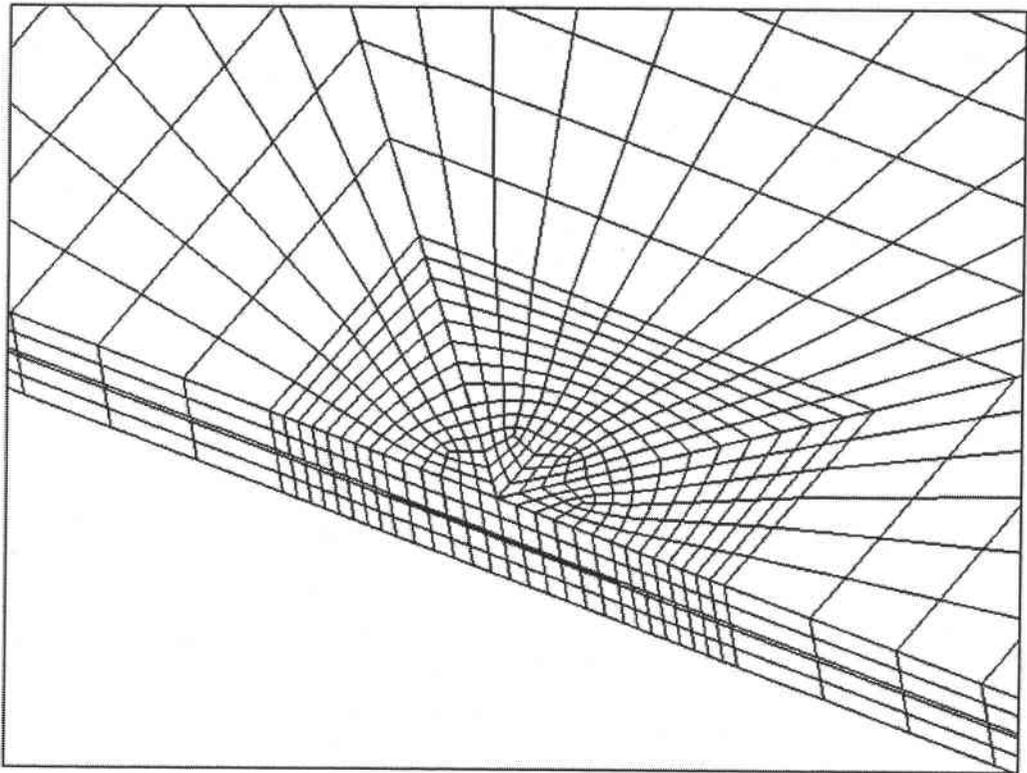
Dans la modélisation des joints soudés par point mentionnée dans la Figure 6-4, la solution des systèmes linéaires et non-linéaires utilise le sous modelage (Figure 6-3).

### 6.1.1 Modélisation des joints soudés par point Mono Point

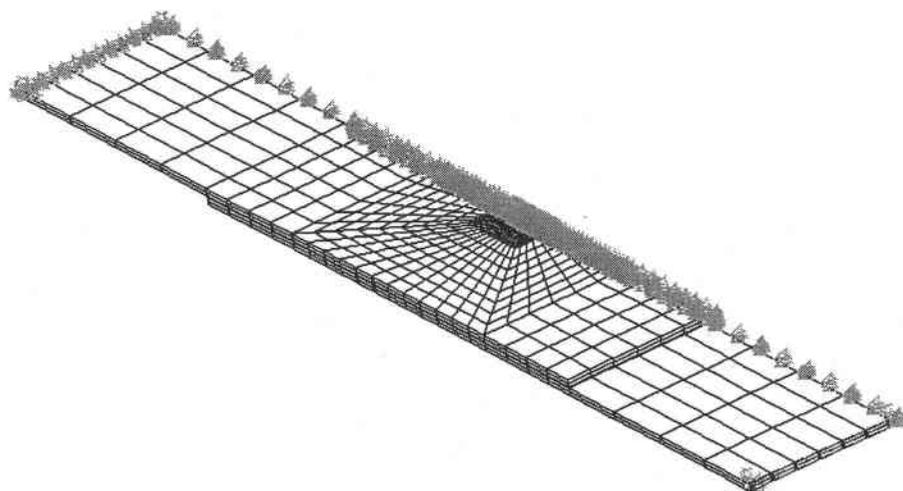
La modélisation des joints soudés par point Mono Point est réalisée dans deux cas, élastique et élasto-plastique. Dans la Figure 6-5, des maillages, l'agrandissement du maillage et les conditions aux limites sont présentés.



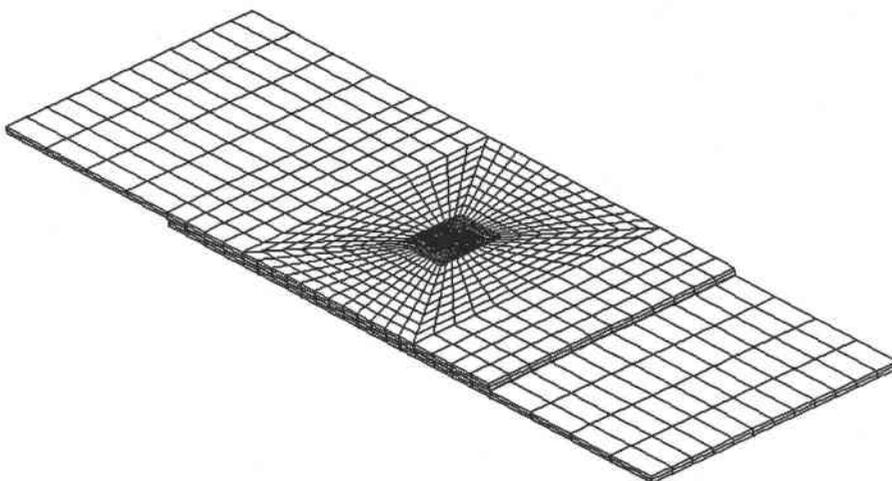
a)



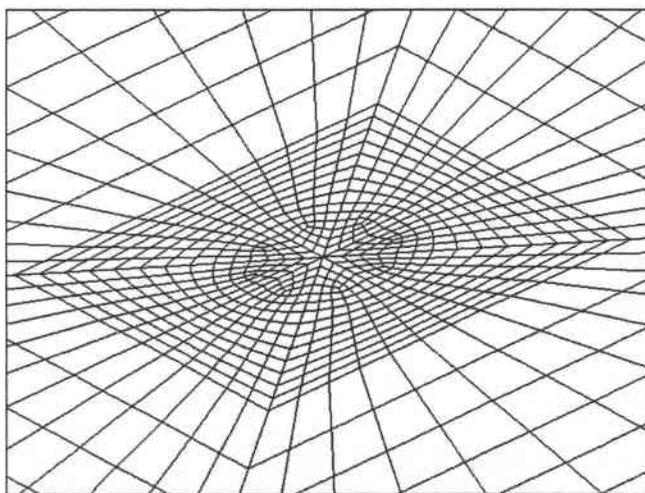
b)



c)



d)



e)

Figure 6-5 Modélisation globale d'un joint soudé par point Mono Point a) Maillage b) Agrandissement du maillage c) Conditions aux limites et chargement d) Modèle complet e) Agrandissement du maillage.

Dans la Figure 6-5, la modélisation globale d'un joint soudé par point Mono Point est présentée. La Figure 6-5c représente les conditions aux limites et le chargement. La symétrie est appliquée pour diminuer le temps de calcul par Éléments Finis. La force est appliquée du côté droit du modèle et le côté gauche est fixé par bridage (Figure 5-12). Dans la Figure 6-6, le sous-modèle est présenté.

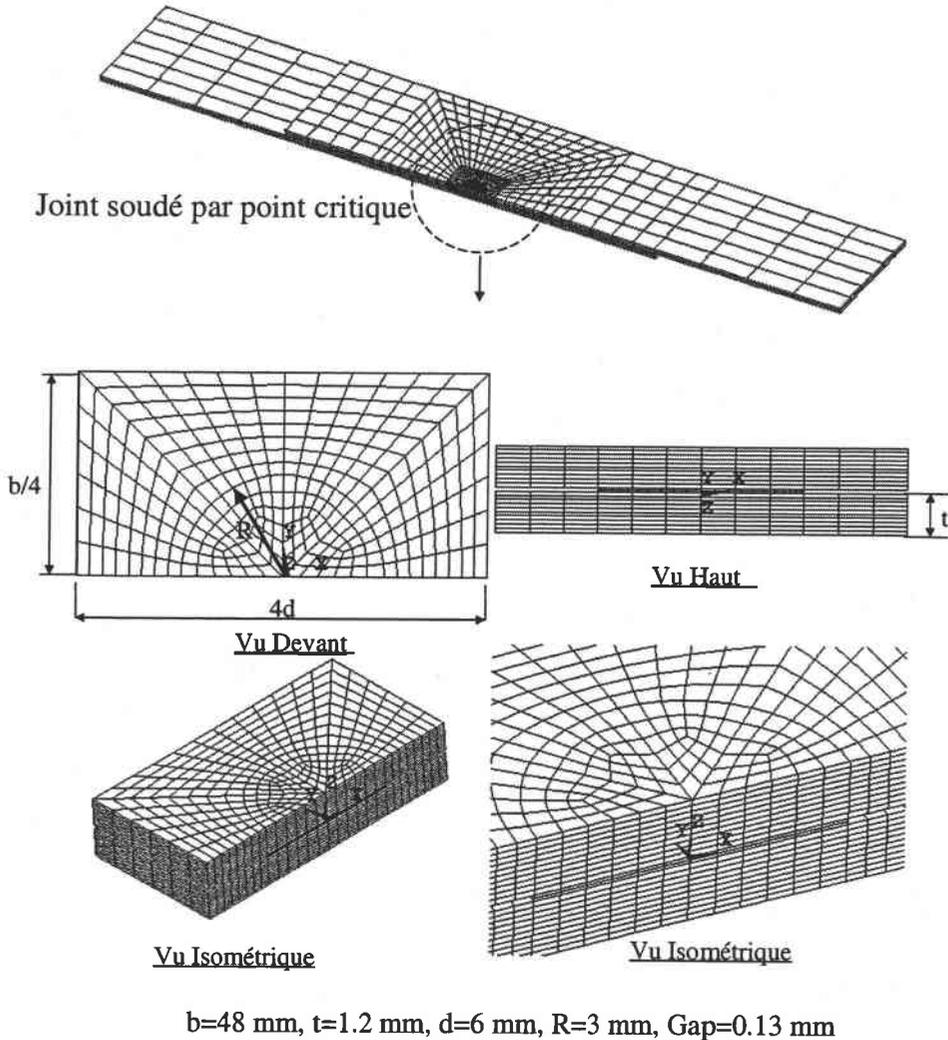


Figure 6-6 Sous Modélisation globale d'un joint soudé par point Mono Point.

Dans la Figure 6-6, le sous-modèle pour une éprouvette soudée par point avec la géométrie mentionnée dans la Figure 5-2, est présenté. Dans la Figure 6-6,  $b$ ,  $t$ ,  $d$ ,  $R$  et  $Gap$  sont respectivement la largeur du joint soudé par point, l'épaisseur de la tôle mince, le diamètre du point soudé, le rayon du point soudé et l'interface entre les tôles supérieure et inférieure.

Les joints soudés par point sont analysés par calcul élastique et calcul élasto-plastique pour évaluer le champ des contraintes et la distribution des contraintes autour des joints soudés par

point. L'utilisation de la technique sous-modélage doit être vérifiée le modèle global et le sous-modèle dans les lignes de coupure des frontières (cut boundary lines) [124]. Dans la Figure 6-7, le sous modèle est schématiquement présenté.

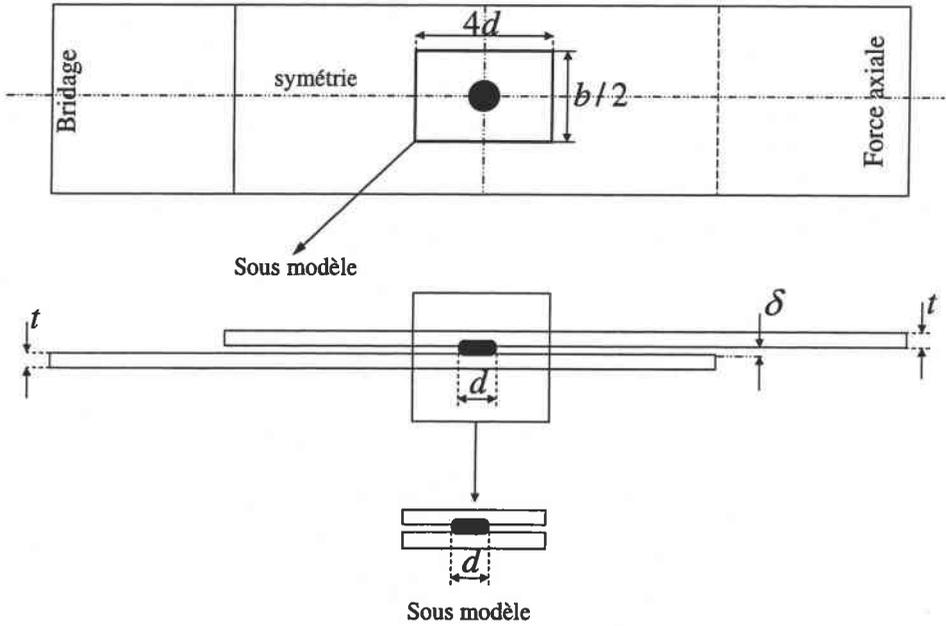


Figure 6-7 Schéma du sous modèle d'une éprouvette soudée par point Mono Point.

La distribution critique des contraintes autour du point soudé est donc considérée pour évaluer les joints soudés par point. Dans le cas de l'existence d'un seul point soudé, ce point est le point critique. La distribution des contraintes pour les joints soudés est généralement représentée par l'évolution des contraintes dans la direction longitudinale des joints soudés. Les résultats permettent de définir les facteurs de concentration de contrainte et de déformation. Ces facteurs sont définis par:

$$k_t = \frac{\sigma_{xx}^e}{\sigma_g} \quad (6-1)$$

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{xx}^{e-p}}{\sigma_g} \quad (6-2)$$

$$k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{xx}^{e-p}}{\varepsilon_g} \quad (6-3)$$

$k_t$ ,  $k_\sigma$ ,  $k_\varepsilon$ ,  $\sigma_{xx}^e$ ,  $\sigma_{xx}^{e-p}$ ,  $\sigma_g$  et  $\varepsilon_g$  sont respectivement le facteur de concentration de contraintes, le facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques, le facteur de déformations élasto-plastiques, la contrainte élastique dans la direction x ou la direction

longitudinale du joints soudé, la contrainte élasto-plastique dans la direction x, la contrainte globale et la déformation globale.

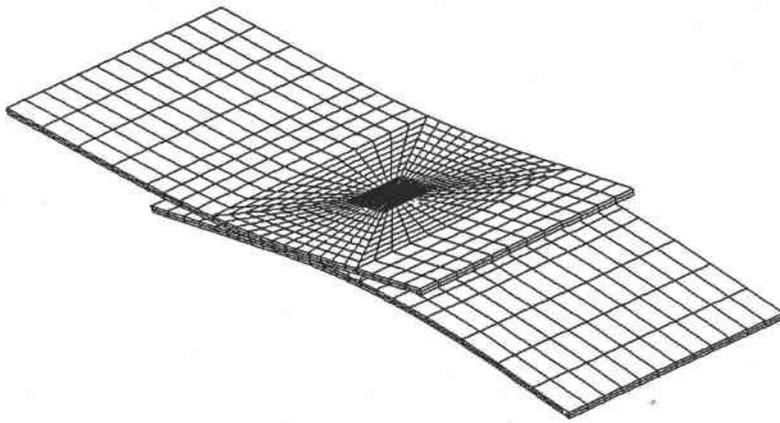
La contrainte globale et la déformation globale sont donc définies par les relations suivantes :

$$\sigma_g = \frac{F_a}{b \times t} \quad (6-4)$$

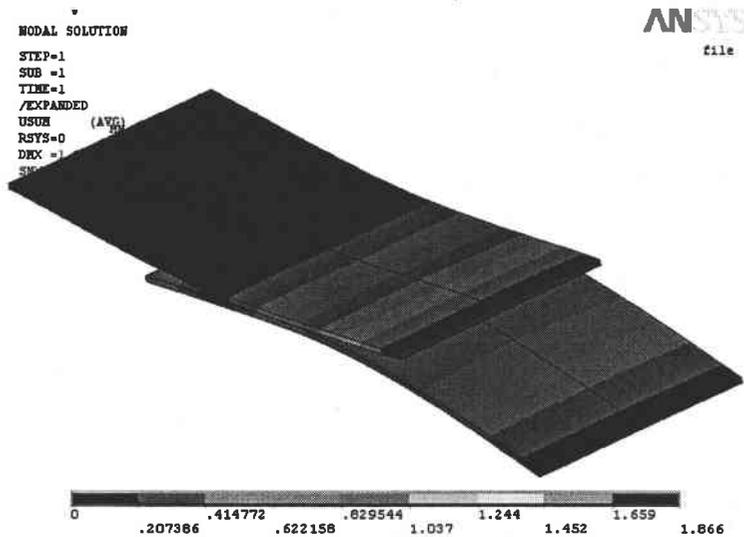
$$\varepsilon_g = \frac{\sigma_g}{E} \quad (6-5)$$

$F_a$ ,  $b$ ,  $t$  et  $E$  sont respectivement l'amplitude de la force appliquée, la largeur du joint soudé, l'épaisseur de la tôle mince et le module de Young.

Dans la Figure 6-8, le déplacement et les valeurs des déplacements sont respectivement présentés.

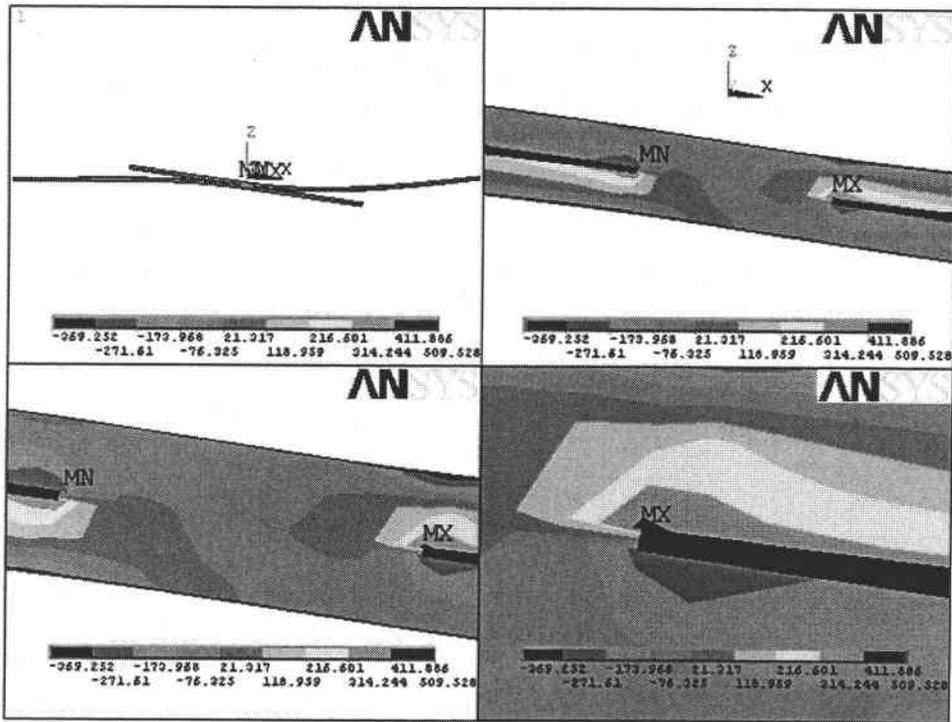


a)

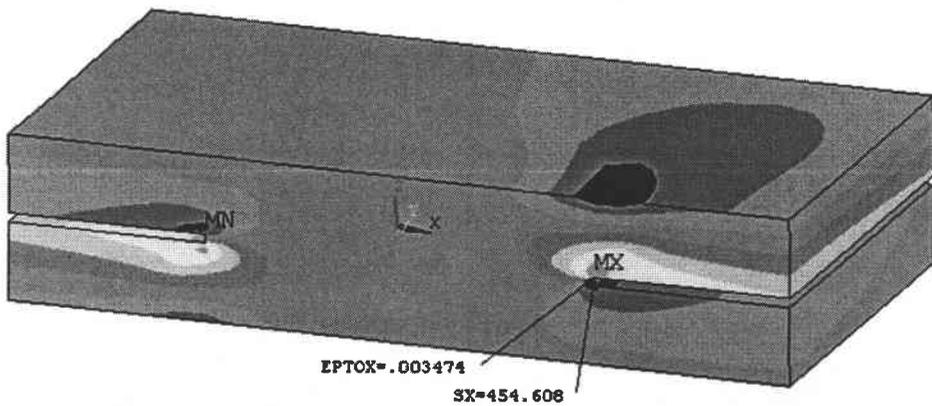


b)

Figure 6-8 Présentation du déplacement du modèle général du joint soudé par point en cisaillement Mono Point par calcul élastique.



a)



b)

Figure 6-9 Champ des contraintes pour le joint soudé par point Mono Point (élasto-plastique) a) Champ des contraintes b) Champ des contraintes autour du point soudé (la contrainte maximale dans la direction x et la déformation totale en ce point).

L'évolution des contraintes en fonction de la distance est fréquemment utilisée dans ces courbes [107]. Cette présentation des résultats considère tous les cas d'analyse d'Eléments Finis (élastique et élasto-plastique). L'évolution des contraintes mentionnées a un comportement antisymétrique par rapport au centre du point soudé. Mais, dans les conditions

réelles ces évolutions ne sont pas parfaitement antisymétriques. Selon différentes conditions aux limites des deux côtés du joint soudé, ce phénomène n'est pas parfait.

Dans la Figure 6-10, l'évolution des facteurs mentionnés réalisée par des calculs élastiques et élasto-plastiques est présentée.

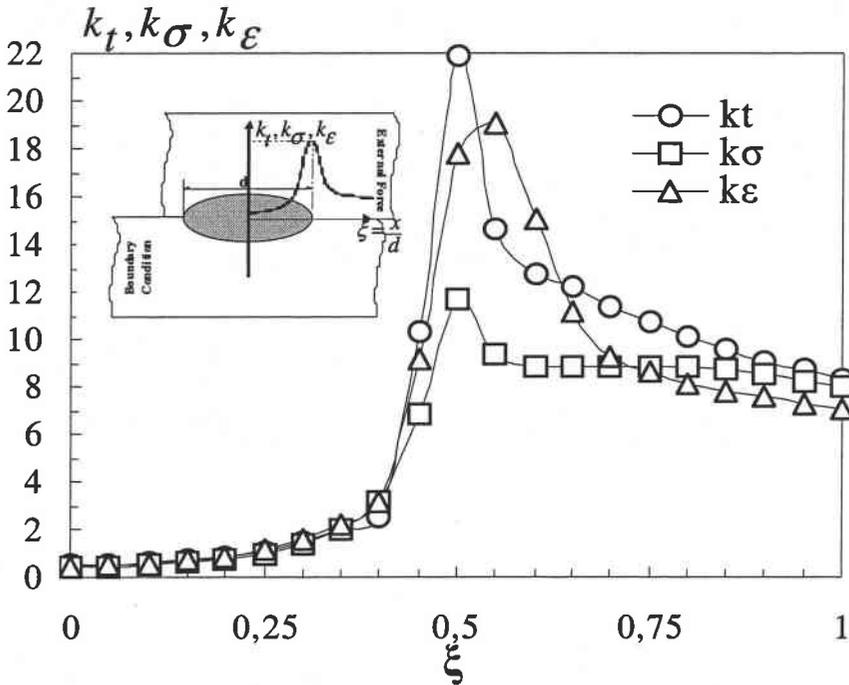


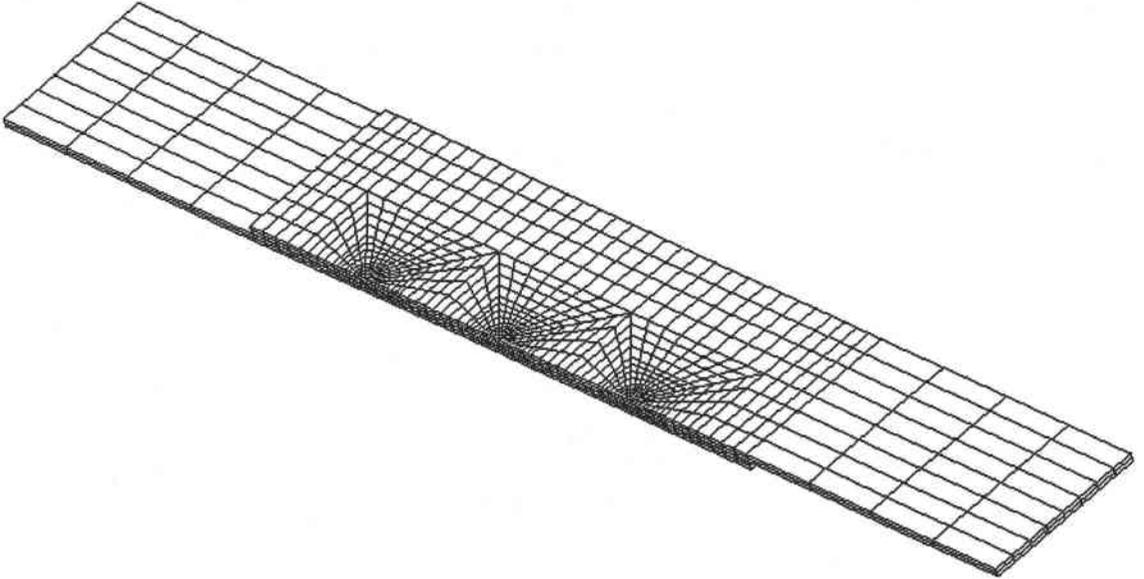
Figure 6-10 Evolution du facteur de concentration de contraintes élastiques  $k_t$ , du facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques  $k_\sigma$  et du facteur de concentration de déformations élasto-plastiques dans la direction longitudinale du joint soudé par point Mono Point  $k_\epsilon$  ( $\xi$  est le rapport entre la distance dans la direction x qui commence au centre du point soudé et le diamètre du point soudé).

Dans la Figure 6-10, on remarque que les contraintes élastiques, élasto-plastiques et les déformations augmentent au voisinage du fond d'entaille. Elles diminuent avec la distance dans la direction longitudinale du joint soudé par point. Ce modèle d'évolution est fréquemment obtenu.

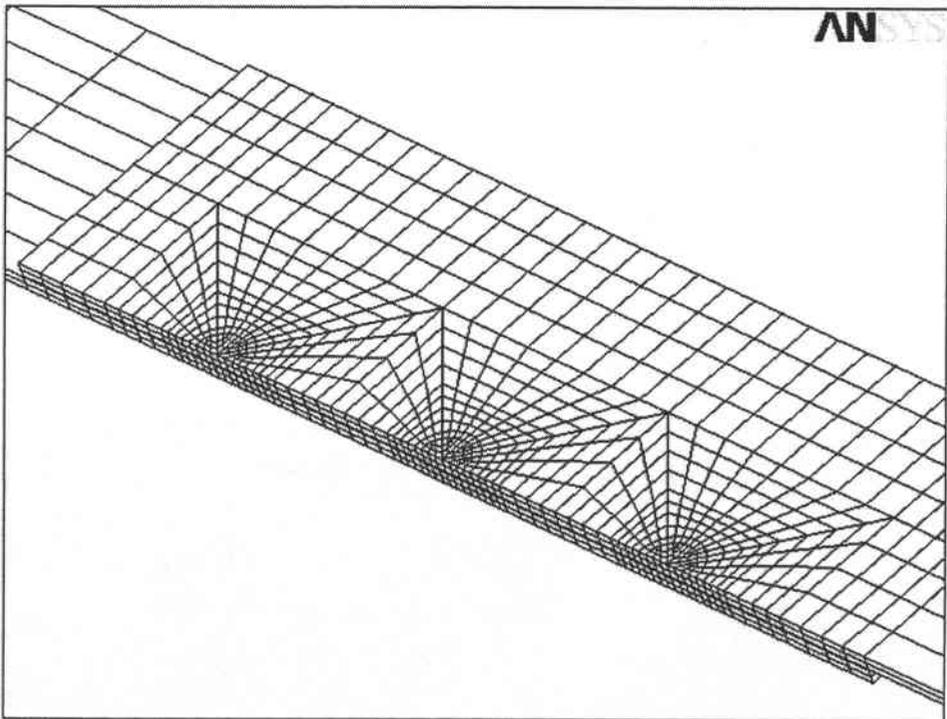
Les valeurs des facteurs de concentration des contraintes montrent l'existence des contraintes très élevées autour du point de soudure. En pratique, l'amorçage et la propagation des fissures commencent à cet endroit. Dans l'approche volumétrique, on trace le diagramme bi-logarithmique de l'évolution de la contrainte d'ouverture en fatigue en fonction de la distance. Pour tracer cette courbe, il est nécessaire de déterminer la direction d'ouverture et la contrainte d'ouverture en fatigue correspondante.

## 6.1.2 Modélisation des joints soudés par point Triple Points

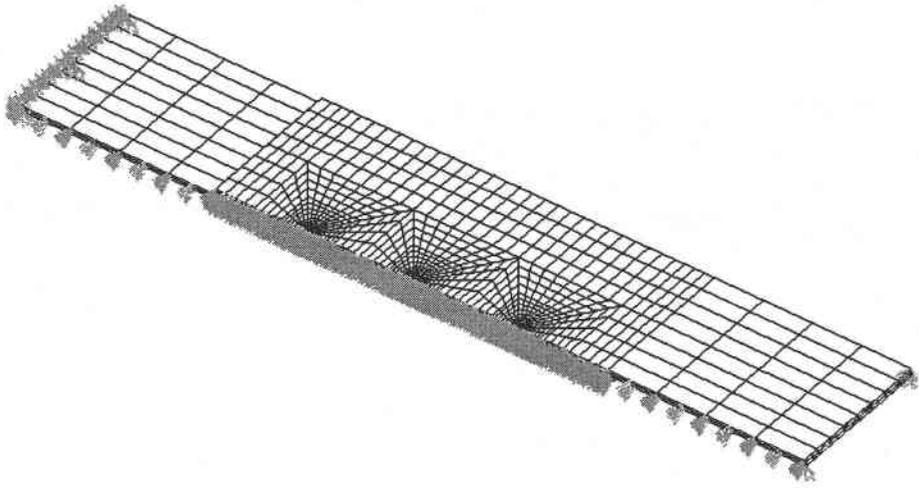
La modélisation des joints soudés par point Triple Points est réalisée dans deux cas, élastique et élasto-plastique. Dans la Figure 6-11, les maillages, l'agrandissement du maillage et des conditions aux limites sont présentés.



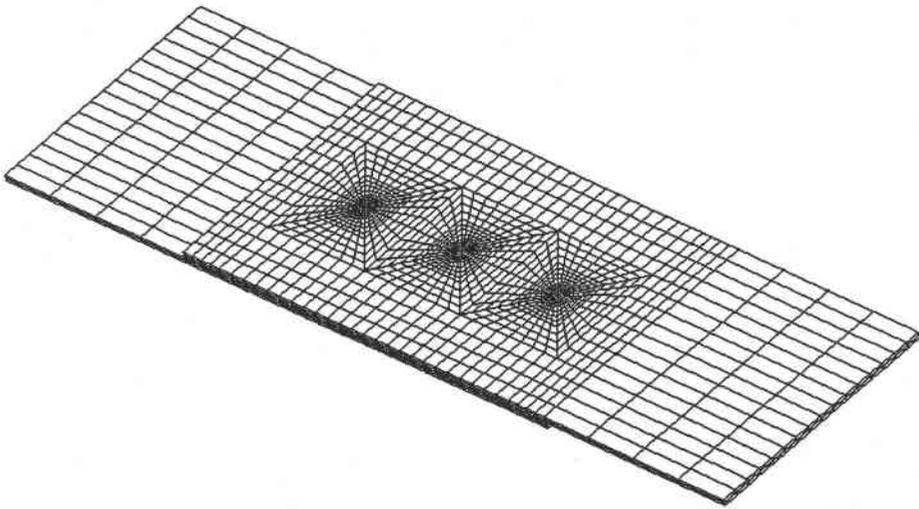
a)



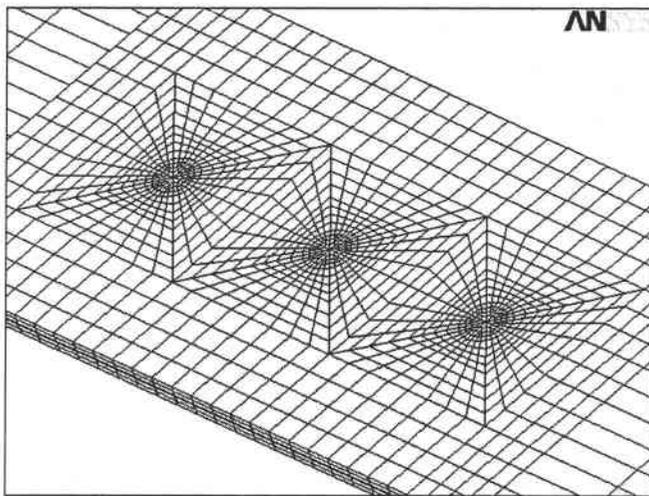
b)



c)



d)



e)

Figure 6-11 Modélisation globale d'un joint soudé par point Triple Points a) Maillage b) Agrandissement du maillage c) Conditions aux limites et chargement d) Modèle complet e) Agrandissement de maillage.

Dans la Figure 6-11, la modélisation globale d'un joint soudé par point Triple Points est présentée. La Figure 6-11c représente des conditions aux limites et le chargement. La symétrie est appliquée pour diminuer le temps de calcul par Eléments Finis. La force est appliquée du côté droit du modèle et le côté gauche est fixé par bridage (Figure 5-12). Dans la Figure 6-12, le sous-modèle est présenté pour le point soudé critique.

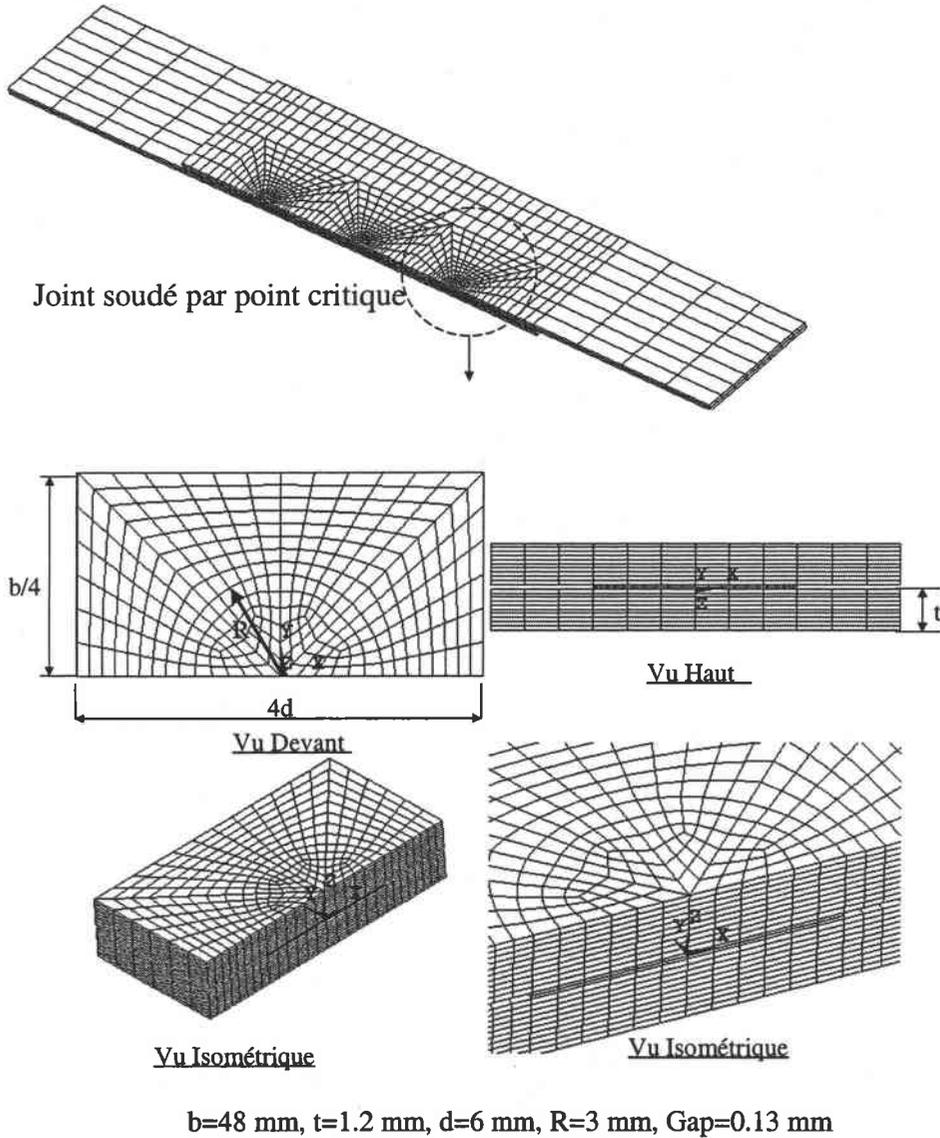


Figure 6-12 Sous Modélisation globale d'un joint soudé par point Triple Points.

Dans la Figure 6-12, le sous-modèle pour une éprouvette soudée par point avec la géométrie mentionnée dans la Figure 5-2 est présenté. Dans Figure 6-12,  $b$ ,  $t$ ,  $d$ ,  $R$  et  $\text{Gap}$  sont respectivement la largeur du joint soudé par point, l'épaisseur de la tôle mince, le diamètre du point soudé, le rayon du point soudé et l'interface entre les tôles supérieures et inférieures.

L'utilisation de la technique sous-modèle doit être vérifiée pour le modèle global et le sous modèle ainsi que les lignes de coupure des frontières (cut boundary lines). Dans la Figure 6-13, le sous- modèle est schématiquement présenté.

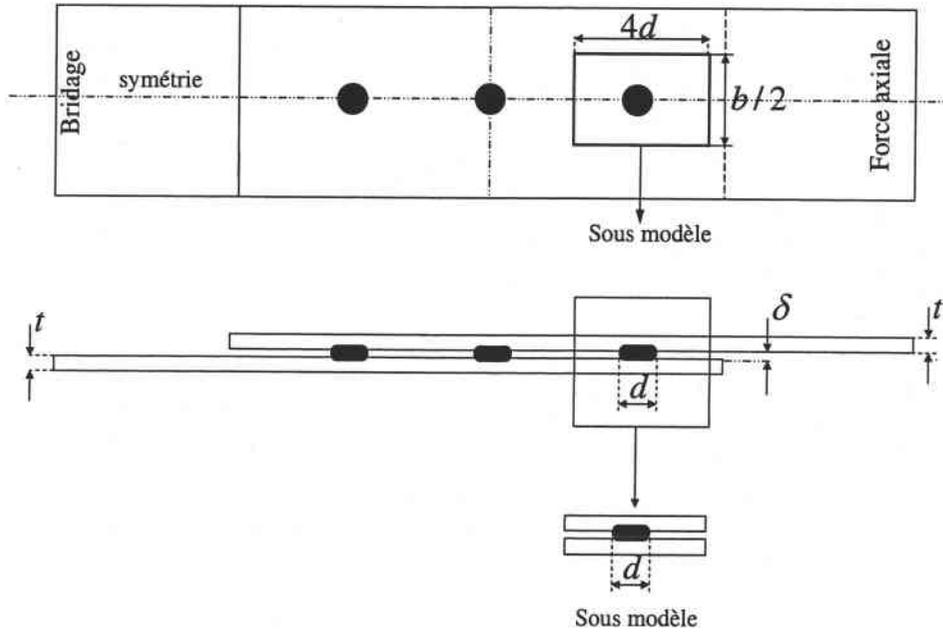
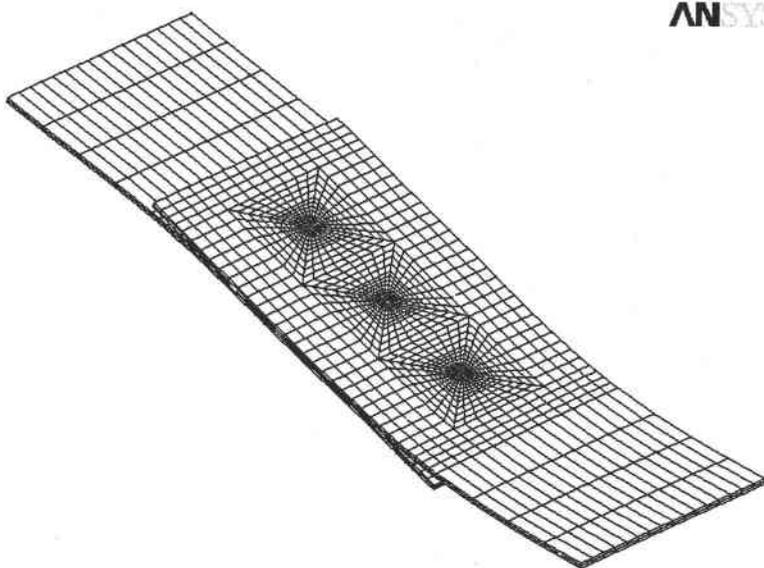


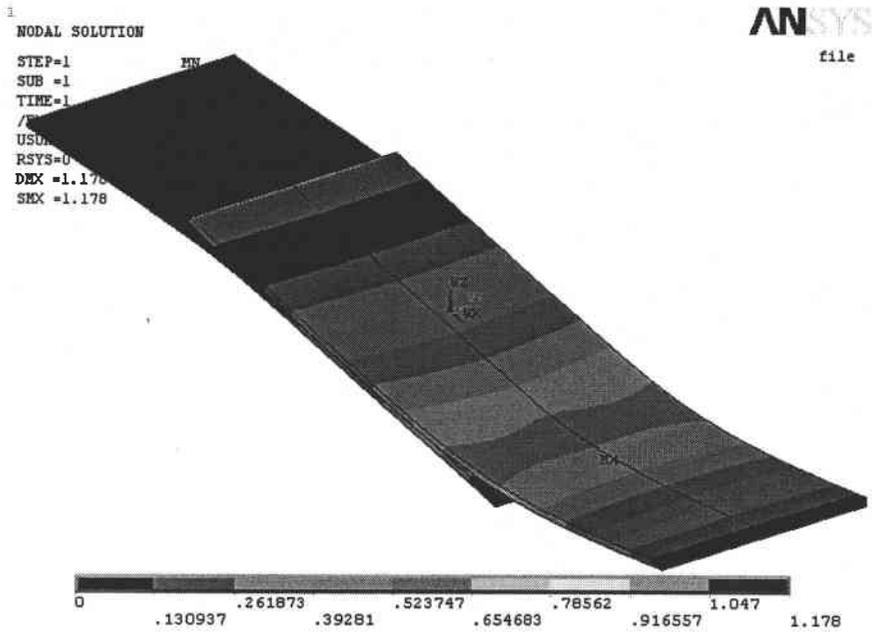
Figure 6-13 Schéma du sous-modèle d'une éprouvette soudée par point Triple Points.

La distribution des contraintes autour du point soudé pour le point critique est donc considérée pour évaluer les joints soudés par point.

Dans la Figure 6-14, le déplacement et les valeurs des déplacements sont respectivement présentés.

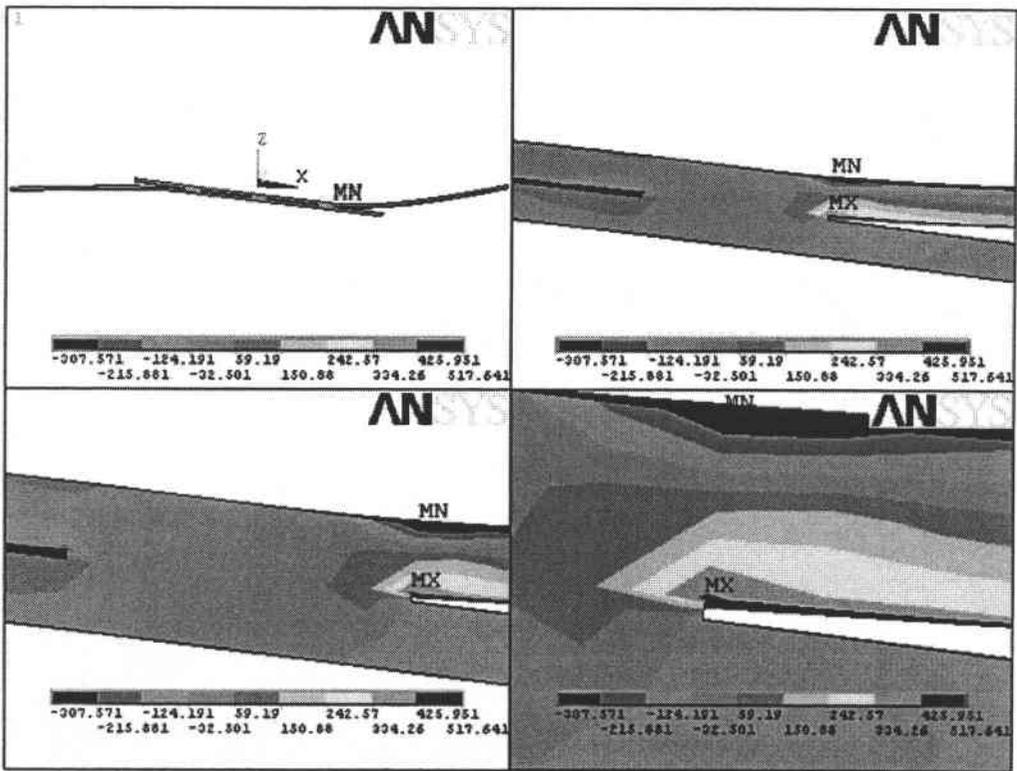


a)

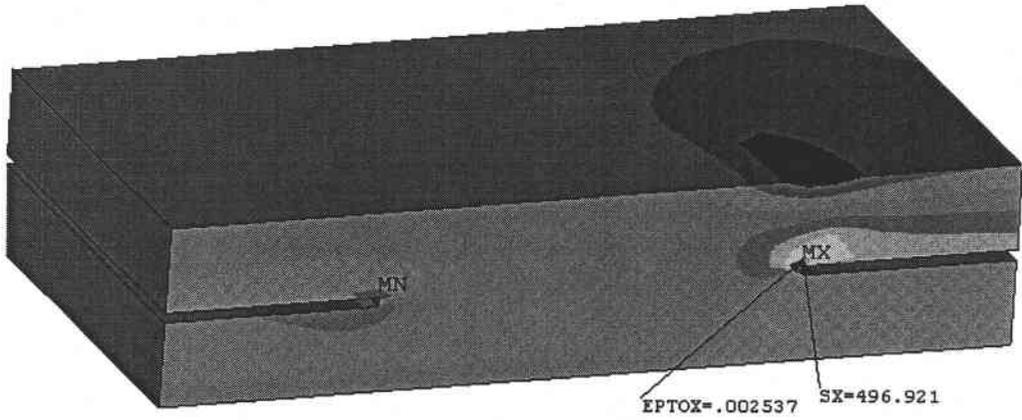


b)

Figure 6-14 Déplacement du modèle général du joint soudé par point en cisaillement Triple Points par calcul élastique.



a)



b)

Figure 6-15 Champ des contraintes pour le joint soudé par point Triple Points (élasto-plastique) a) Champs des contraintes b) Champ des contraintes autour du point soudé (la contrainte maximale dans la direction x et la déformation totale en ce point).

Dans la Figure 6-16, l'évolution des facteurs mentionnés est donc réalisée par calculs élastiques et élasto-plastiques.

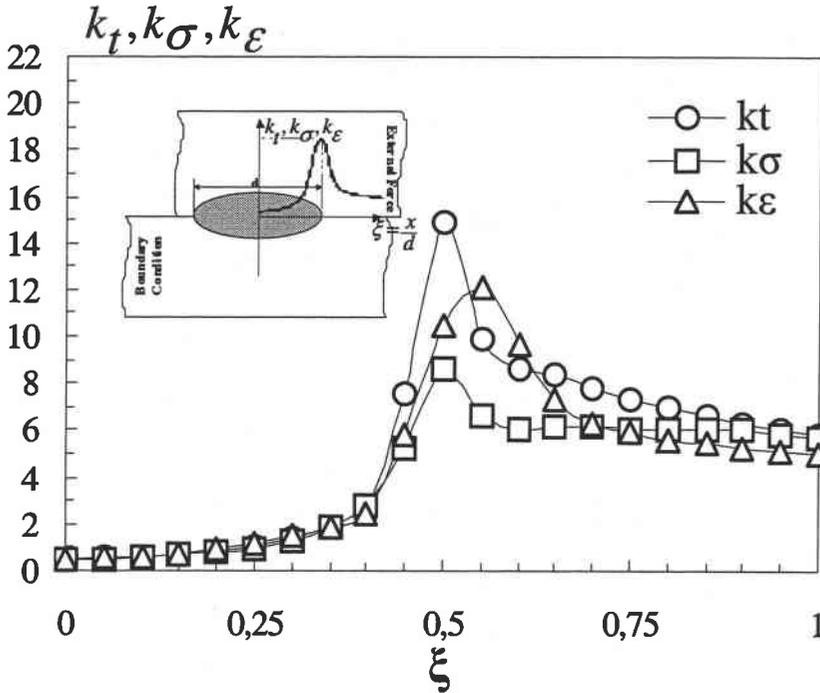
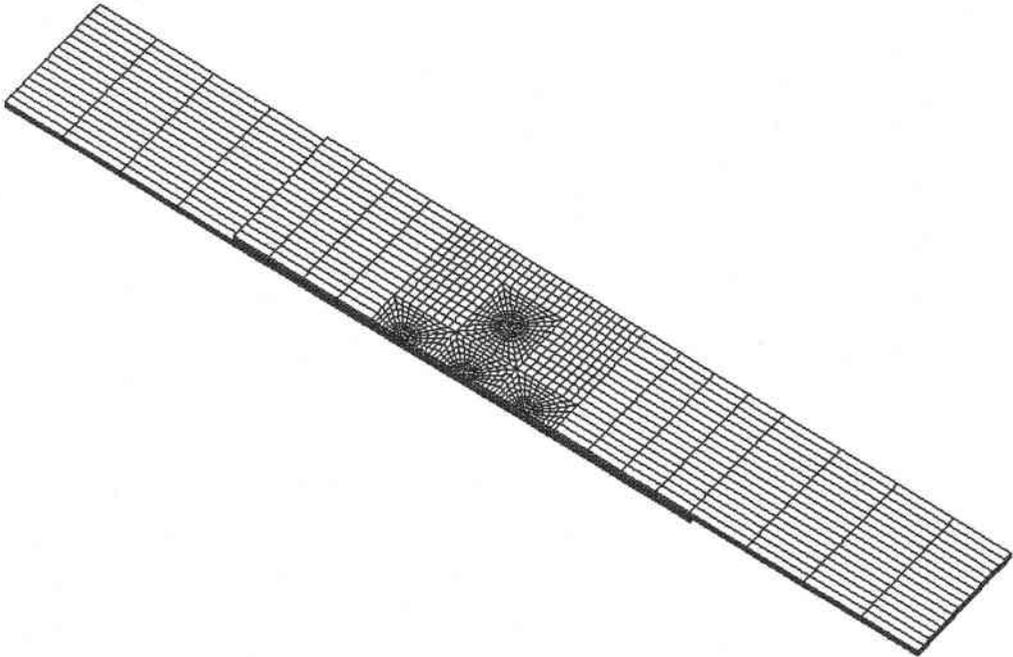


Figure 6-16 Evolution du facteur de concentration de contraintes élastiques  $k_t$ , du facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques  $k_\sigma$  et du facteur de concentration de déformations élasto-plastiques dans la direction longitudinale du joint soudé par point Mono Point  $k_\epsilon$  ( $\xi$  est le rapport entre la distance dans la direction x qui commence au centre du point soudé et le diamètre du point soudé).

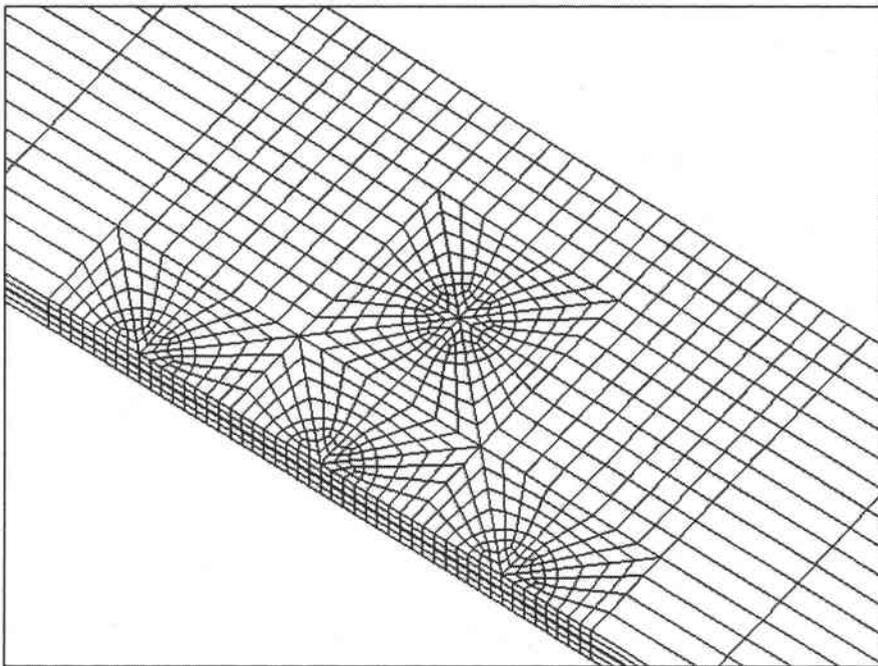
La Figure 6-16 montre que les contraintes élastiques, élasto-plastiques et les déformations augmentent au voisinage du fond d'entaille. Elles diminuent avec la distance dans la direction longitudinale du joint soudé par point.

### 6.1.3 Modélisation des joints soudés par point Multiple Points

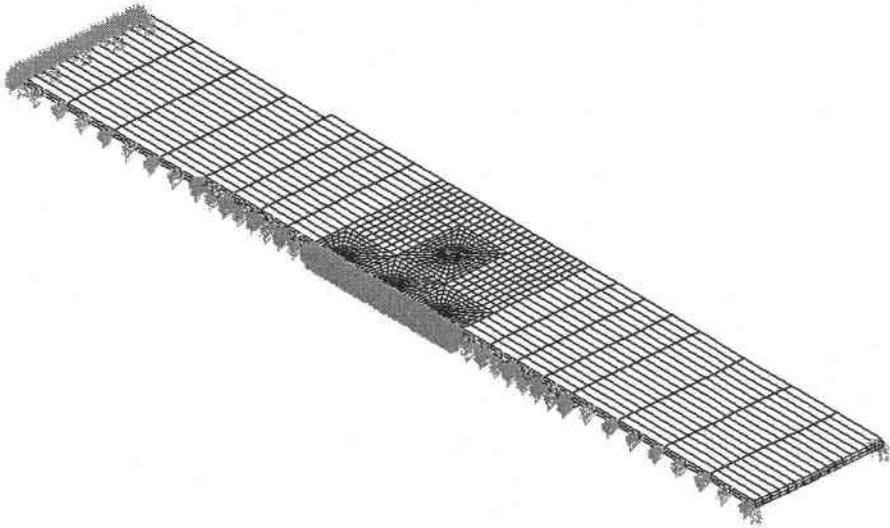
La modélisation des joints soudés par point Multiple Points est réalisée dans deux cas, élastique et élasto-plastique. Dans la Figure 6-17, les maillages, l'agrandissement du maillage et des conditions aux limites sont présentés.



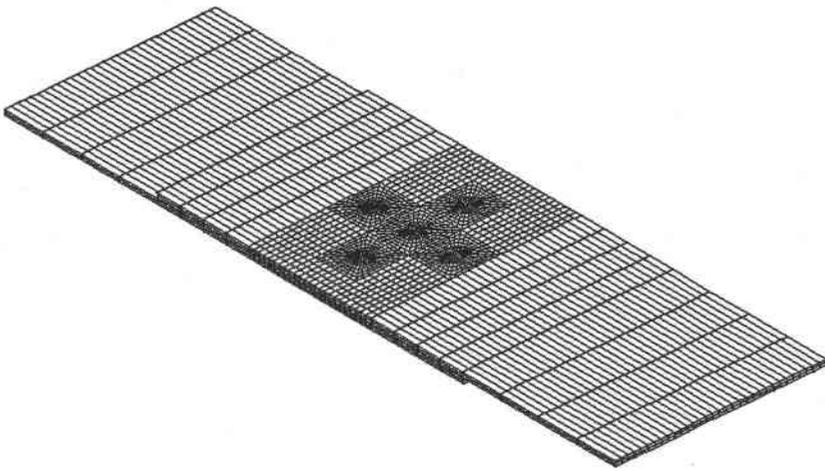
a)



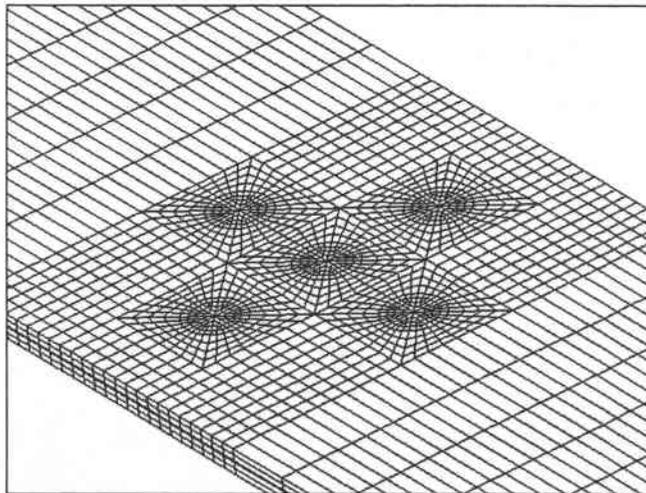
b)



c)



d)



e)

Figure 6-17 Modélisation globale d'un joint soudé par point Multiple Points a) Maillage b) Agrandissement du maillage c) Conditions aux limites et chargement d) Modèle complet e) Agrandissement du maillage.

Dans la Figure 6-17, la modélisation globale d'un joint soudé par point Multiple Points est présentée. La Figure 6-17c représente les conditions aux limites et le chargement. La symétrie est appliquée pour diminuer le temps de calcul par Eléments Finis. La force est appliquée du côté droit du modèle et le côté gauche est fixé par bridage (Figure 5-12). Dans la Figure 6-18, le sous-modèle est présenté pour le point soudé critique.

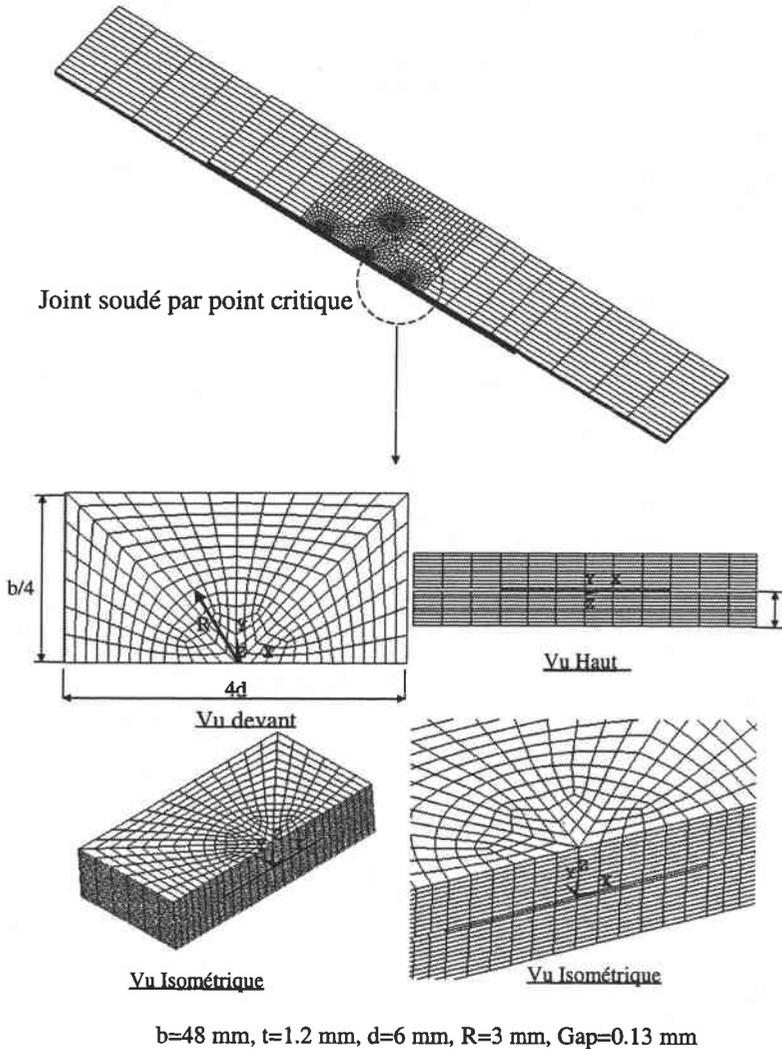


Figure 6-18 Sous Modélisation globale d'un joint soudé par point Multiple Points.

Dans la Figure 6-18, le sous-modèle pour une éprouvette soudée par point avec la géométrie mentionnée dans la Figure 5-2 est présenté.

La distribution des contraintes autour du point soudé par point critique est donc considérée pour évaluer les joints soudés par point.

Dans la Figure 6-19, le déplacement et les valeurs des déplacements sont respectivement présentés.

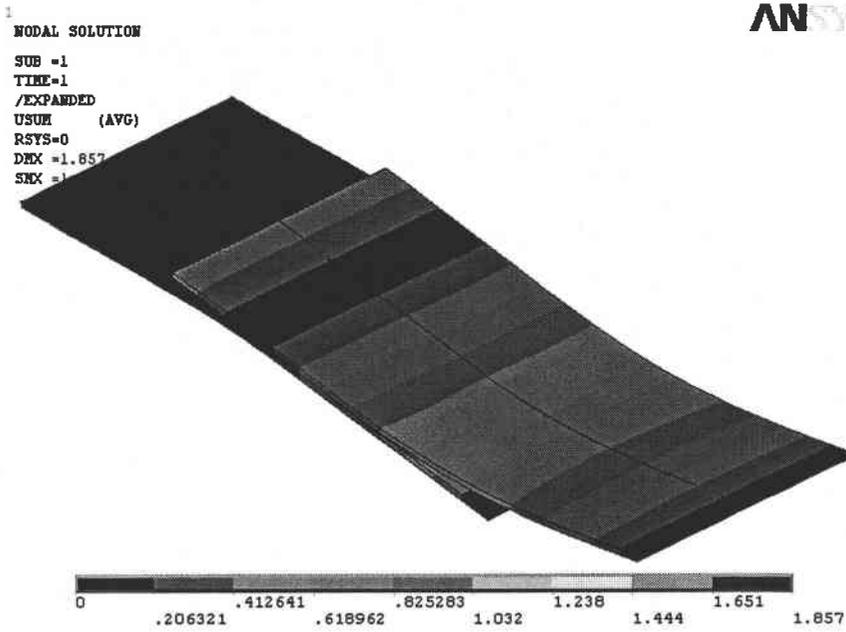
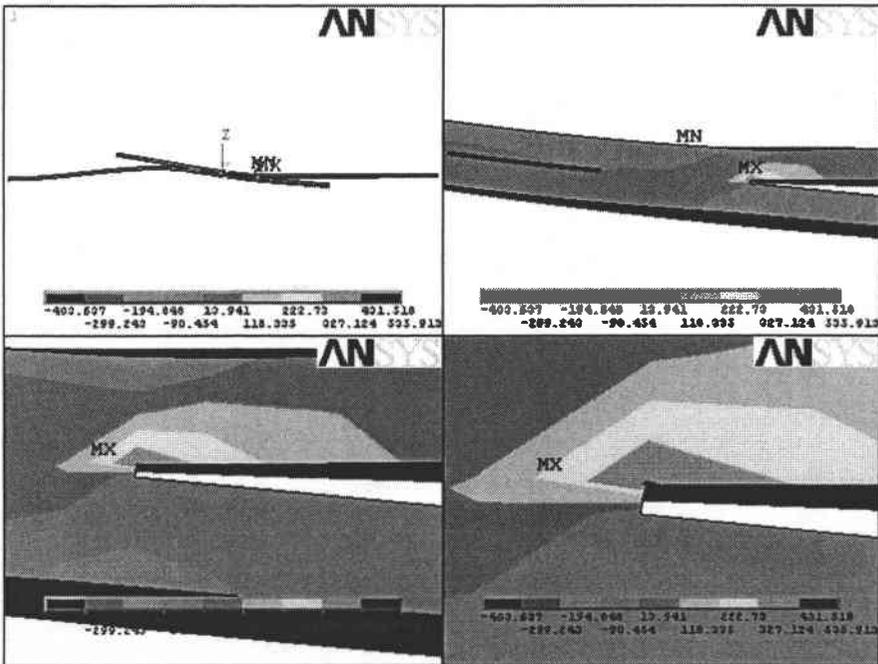
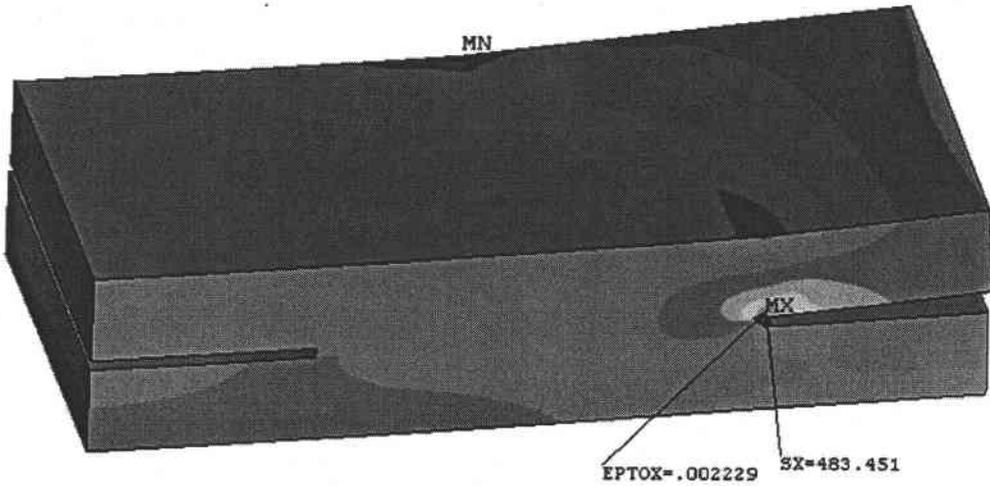


Figure 6-19 Déplacement du modèle général du joint soudé par point en cisaillement Multiple Points pour le calcul élastique.

Dans la Figure 6-20, la distribution des contraintes autour du point de soudure critique mentionné dans la Figure 6-18 est présentée.



a)



b)

Figure 6-20 Champ de contraintes pour le joint soudé par point Multiple Points (élasto-plastique) a) Champ des contraintes b) Champ des contraintes autour du point soudé (la contrainte maximale dans la direction x et la déformation totale en ce point).

Dans la Figure 6-21, l'évolution des facteurs mentionnés est donc réalisée pour les calculs élastiques et élasto-plastiques.

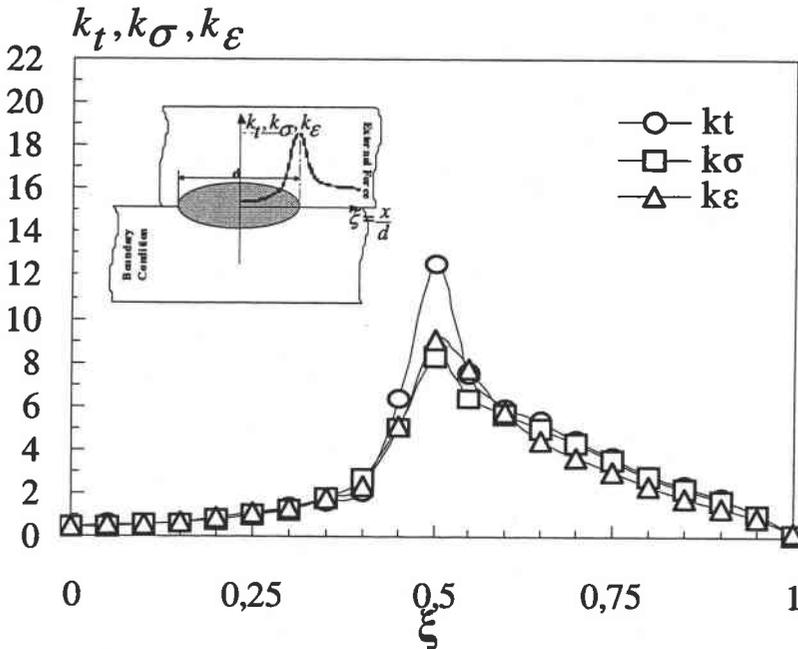


Figure 6-21 Evolution du facteur de concentration de contraintes élastiques  $k_t$ , du facteur de concentration de contraintes élasto-plastiques  $k_\sigma$  et du facteur de concentration de déformations élasto-plastiques dans la direction longitudinale du joint soudé par point Mono Point  $k_\epsilon$  ( $\xi$  est le rapport entre la distance dans la direction x qui commence au centre du point soudé et le diamètre du point soudé).

Dans la Figure 6-21, on remarque que les contraintes élastiques, élasto-plastiques et les déformations augmentent au voisinage du fond d'entaille. Elles diminuent avec la distance dans la direction longitudinale du joint soudé par point.

Il est donc évident que tous les types de joints soudés par point en cisaillement (Mono Point, Triple Points, Multiple Points) ont le même comportement autour du point de soudure critique. La contrainte maximale se trouve en fond du point soudé.

## 6.2 Prédiction de la vie en fatigue des joints soudés par point par l'approche volumétrique

Dans l'approche volumétrique, la prédiction de la durée de vie en fatigue dépend de la distribution des contraintes élasto-plastiques dans la direction d'ouverture. Dans les joints soudés par point, ces paramètres doivent être bien distingués. Des observations expérimentales montrent que la fissure s'amorce en fond du point soudé dans la direction de l'épaisseur. A partir de ces observations, la contrainte d'ouverture et sa direction sont définies et présentées dans la Figure 6-22.

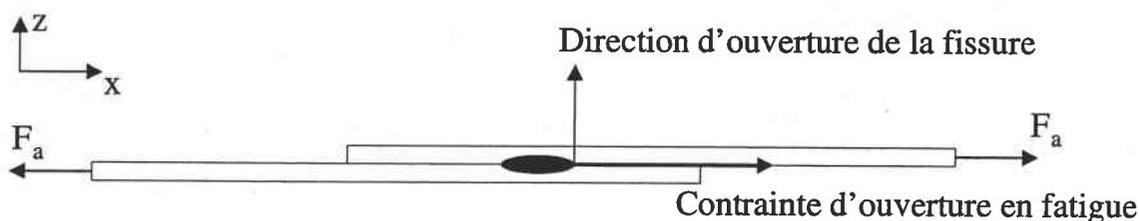


Figure 6-22 Schéma de la direction d'ouverture de la fissure et la contrainte d'ouverture en fatigue.

La comparaison entre la Figure 6-22 et les Figures 6-6, 6-12 et 6-18 montre comment la formulation de l'approche volumétrique peut être adaptée sous la forme:

$$k_f = \frac{1}{Z_{eff} \sigma_g} \int_0^{Z_{eff}} \sigma_{xx}(z) (1 - z \chi) dz \quad (6-4)$$

$$\chi(z) = \frac{1}{\sigma_{xx}(z)} \frac{d\sigma_{xx}(z)}{dz} \quad (6-5)$$

$k_f$ ,  $\sigma_g$ ,  $\sigma_{xx}(z)$ ,  $Z_{eff}$  et  $\chi$  sont respectivement le facteur de réduction en fatigue, la contrainte globale, la contrainte d'ouverture  $x$  dans la direction d'ouverture de la fissure, la distance effective et le gradient de contrainte relatif.

La distribution des contraintes d'ouverture pour la direction d'ouverture est présentée dans la Figure 6-23.

L'évolution des contraintes élasto-plastiques d'un point de soudure critique dans les joints soudés par point est présentée. Au début de cette évolution, la contrainte élasto-plastique a la valeur  $\sigma_i$ . Cette contrainte augmente jusqu'à la contrainte maximale. Après ce maximum, la contrainte diminue comme le montre la Figure 6-23.

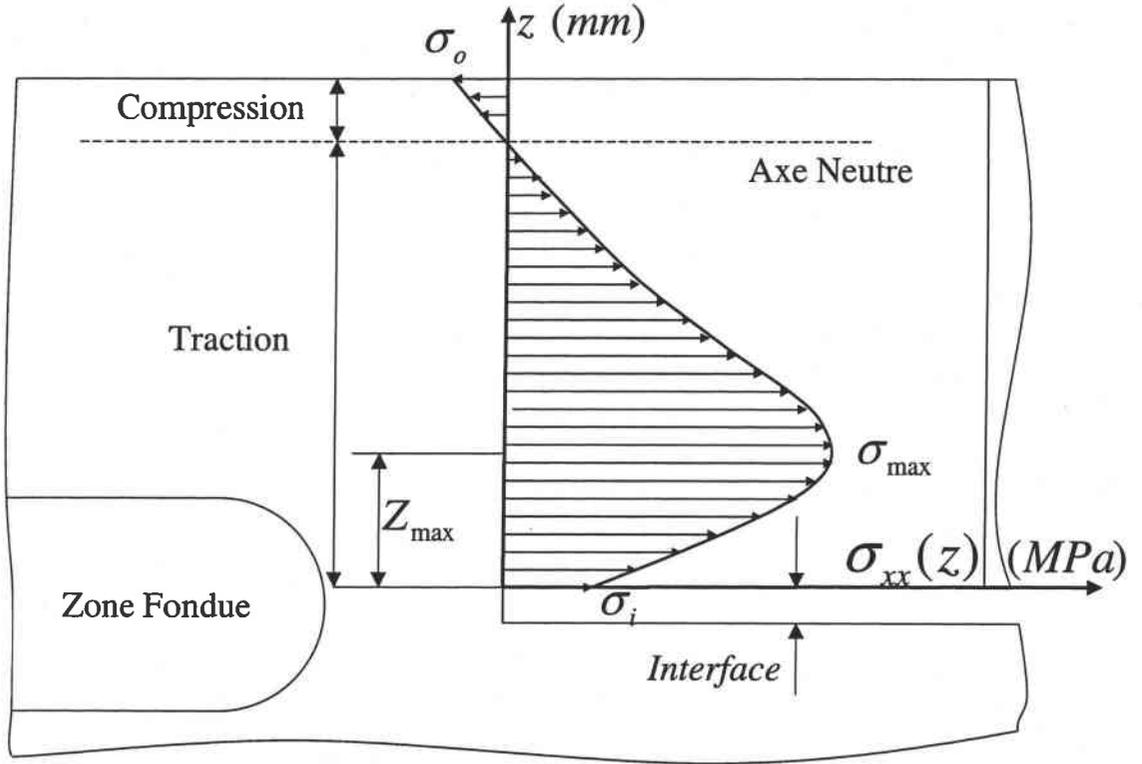
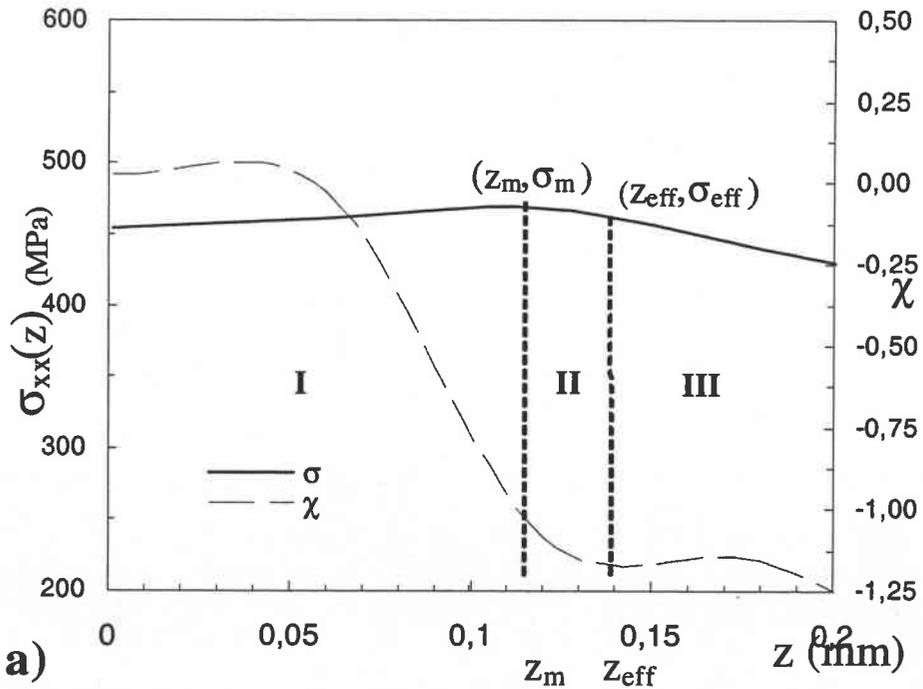


Figure 6-23 Schéma de la distribution des contraintes dans l'épaisseur d'un point soudé critique.

Les courbes utilisées pour l'approche volumétrique sont présentées dans la Figure 6-24 [107].



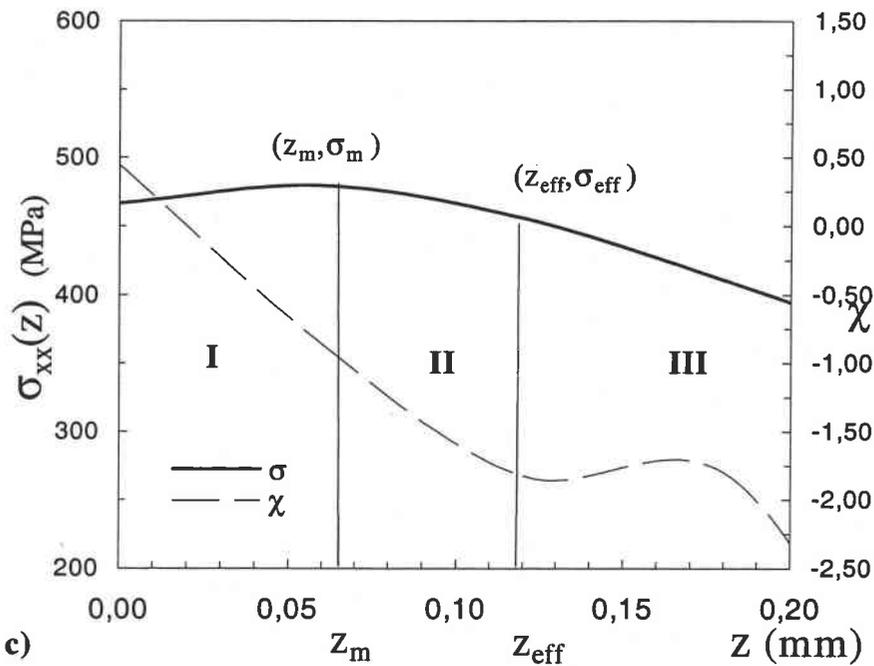
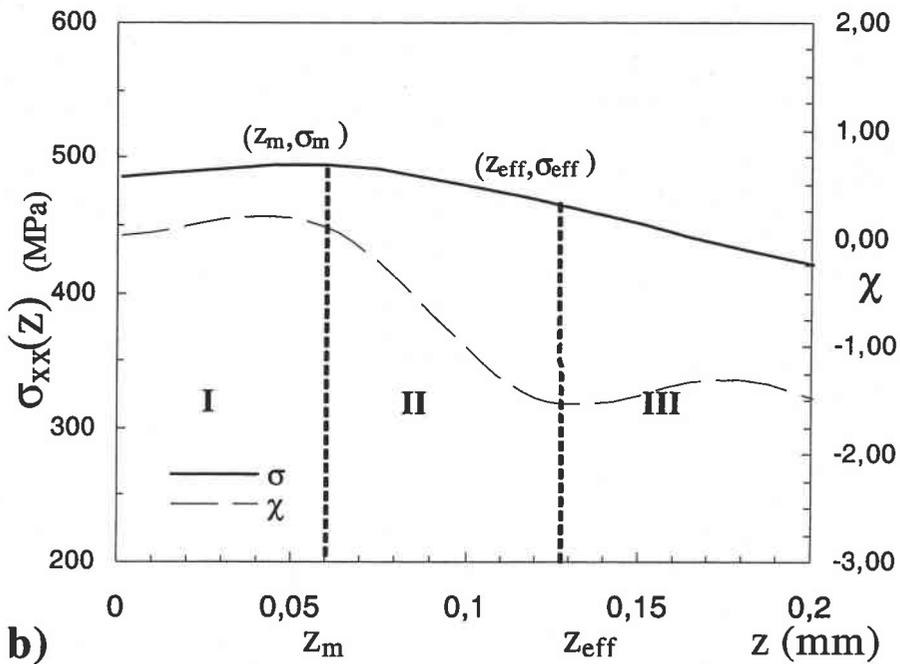


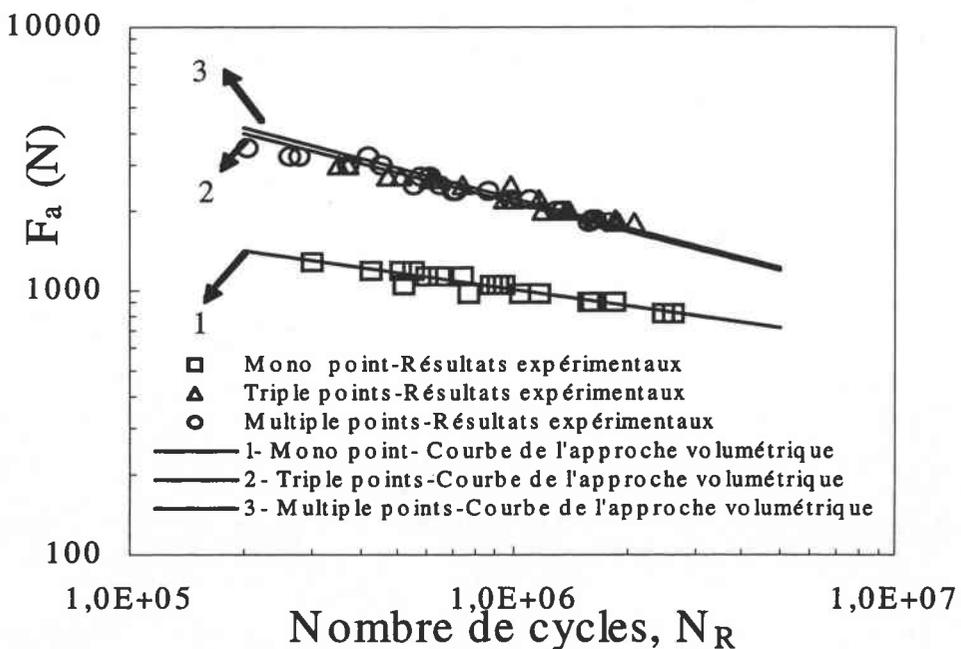
Figure 6-24 Distribution des contraintes dans l'épaisseur d'un point soudé critique pour obtenir les facteurs de réduction en fatigue des joints soudés par point a) Mono Point b) Triple Points c) Multiple Points.

Selon les évolutions présentées dans la Figure 6-24, les valeurs de la contrainte maximale, de la contrainte effective et de la distance effective peuvent être définies. La méthode volumétrique utilise généralement le facteur de réduction en fatigue ainsi que la courbe de

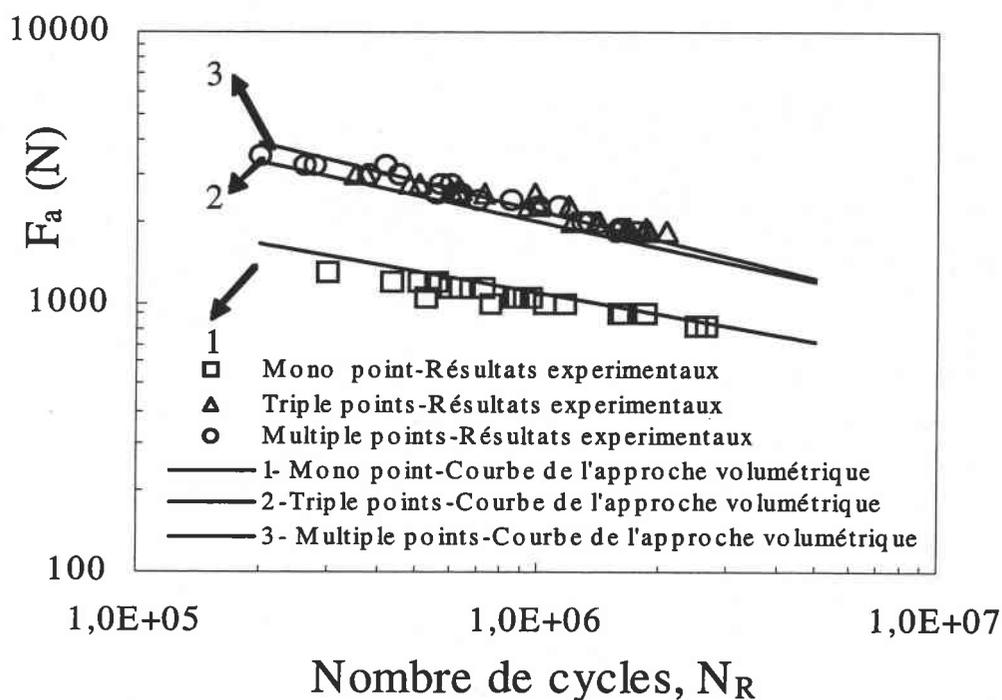
résistance en fatigue sur des éprouvettes lisses pour obtenir la courbe de résistance en fatigue d'une éprouvette entaillée. La procédure de la prévision de la durée de vie en fatigue a déjà été mentionnée dans les Figures (3-7) et (3-8). Cette courbe peut être utilisée pour obtenir les courbes entaillées pour le même type d'éprouvettes, mais avec des caractéristiques géométriques d'entailles différentes.

Cette procédure n'est pas conseillée dans le cas de l'existence des courbes lisses. Pourtant, la réalisation d'éprouvettes lisses pour tous les types d'éprouvettes n'est pas facile ou pas faisable. Dans le cas de l'utilisation des joints soudés par points, la définition d'une courbe de référence en fatigue n'est pas possible. La procédure présentée dans la Figure (3-8) est appliquée pour obtenir la prévision de la durée de vie des joints soudés par point en cisaillement. La prévision obtenue par la méthode volumétrique est présentée dans la Figure 6-25.

Dans la Figure 6-25, les résultats de l'approche volumétrique et les résultats expérimentaux sont comparés. Dans la Figure 6-25a, la courbe pour les Mono Points est utilisée pour obtenir la courbe lisse virtuelle. Les résultats obtenus pour les joints soudés Triple Points et Multiple Points présentent un bon accord avec les résultats expérimentaux. Pour les joints soudés par point Mono Points, les résultats obtenus par l'approche volumétrique et les résultats expérimentaux sont identiques. Avec cette méthode, dans la Figure 6-25b, les résultats obtenus par les essais, pour des joints soudés par point Triple Points, sont considérés comme référence.



a)



b)

Figure 6-25 Comparaison entre les résultats obtenus par l'approche volumétrique et les résultats expérimentaux  
 a) Résultats des joints soudés par point Mono Points considérés comme référence b) Résultats des joints soudés par point Triple Points considérés comme référence.

Dans ce cas, les résultats expérimentaux et ceux de l'approche volumétrique sont identiques. Les résultats obtenus dans la Figure 6-25 montrent que les prévisions par la méthode volumétrique donne de bons résultats pour les joints soudés par point en cisaillement.

### 6.3 Discussions

Dans l'étude des joints soudés par point, deux stades peuvent être distingués l'amorçage et la propagation. Dans la Figure 5-13, ces stades sont indiqués. L'expression du nombre de cycles à la rupture peut s'écrire comme suit:

$$N_R = N_i + N_p \quad (6-6)$$

$N_R$ ,  $N_i$  et  $N_p$  sont respectivement les cycles à la rupture, les cycles pour l'amorçage et les cycles pour la propagation des fissures. La localisation de l'amorçage des fissures change en position avec la valeur du chargement pour les joints soudés par point en acier [90]. Autrement dit, plus la valeur du chargement augmente, plus la fissure se déplace de la zone affectée thermiquement (ZAT) au métal de base. Dans le cas d'existence d'un chargement très élevé en fatigue oligocyclique, le nombre de cycle d'amorçage est négligeable. Dans le cas de l'endurance limitée, le nombre de cycles de propagation est petit vis-à-vis de celui de l'amorçage. Ces conditions sont présentées sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fatigue oligocyclique} \Rightarrow \left( \frac{N_i}{N_p} \rightarrow 0 \Rightarrow N_R \approx N_p \right) \\ \text{Endurance limitée} \Rightarrow \left( \frac{N_p}{N_i} \rightarrow 0 \Rightarrow N_R \approx N_i \right) \end{array} \right. \quad (6-7)$$

Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode convenable pour chaque cas. En pratique, les joints soudés par point travaillent dans le cas de l'endurance limitée ( $10^5 - 10^7$  cycles). Comme par exemple, dans le cas des tôles minces pour les carrosseries d'automobiles. Cette hypothèse a été appliquée par Sherry Sheppard [117-118], Nin Pan [105] et H-F. Henrenson [100-102]. Il est donc évident que l'étude des joints soudés par point en cisaillement conduit à s'intéresser à l'amorçage des fissures au voisinage du point soudé car en général, les joints soudés sont utilisés pour assembler deux tôles minces et donc la force appliquée n'est pas grande.

L'analyse des joints soudés par point avec une approche de la fatigue peut être faite par différentes méthodes. L'approche volumétrique et les méthodes « Point Chaud » peuvent potentiellement être utilisées pour l'estimation de la durée de vie en fatigue. Les méthodes « Point Chaud » utilisent généralement la contrainte maximale au voisinage du fond d'entaille constitué par le point soudé. Le comportement en fatigue ne dépend pas uniquement de la valeur maximale de la contrainte en fond d'entaille. Il est donc nécessaire de considérer la

taille de la zone plastifiée et le gradient des contraintes [66-67]. La méthode volumétrique calcule la valeur de la contrainte effective et de la distance effective correspondante au point minimal du gradient de contrainte d'ouverture. L'intégration peut être faite dans un volume en fond d'entaille. Mais, l'étude de N. Kadi [67] montre que le calcul de la contrainte effective et du facteur de réduction en fatigue dans un volume, sur une surface et sur une ligne conduisent sensiblement à la même valeur. Il est donc suffisant d'utiliser la formulation basée sur l'intégration sur une ligne (équations (3-18) et (3-19)). L'approche volumétrique et les méthodes Neuber et Molski-Glinka ont déjà été comparées dans des différents cas de durée de vie en fatigue [70]. La comparaison avec les résultats expérimentaux montre que l'approche volumétrique conduit à une estimation convenable de la durée de vie en fatigue.

Il est nécessaire d'avoir une courbe de référence en fatigue pour l'approche volumétrique (Figure 3-7). Dans l'étude des joints soudés par point en cisaillement, la courbe de référence en fatigue est pratiquement impossible à obtenir. Par conséquent, une autre procédure présentée dans la Figure 3-8 est utilisée pour estimer la durée de vie en fatigue. La courbe de référence en fatigue est obtenue à partir des résultats expérimentaux et du facteur de réduction en fatigue des joints soudés mono point. Cette courbe est utilisée pour pouvoir appliquer l'approche volumétrique dans les cas de joints soudés triple points et multiple points (Figure 6-25a). Dans la Figure 6-25b, la courbe de référence en fatigue est obtenue à partir des résultats expérimentaux et du facteur de réduction en fatigue à partir des joints soudés Triple Points. La comparaison entre les résultats expérimentaux pour les trois types de joints soudés par point en cisaillement et ceux obtenus par l'approche volumétrique donne donc une bonne estimation de la durée de vie en fatigue.

Les valeurs des facteurs de réductions en fatigue sont obtenues au moyen de calculs aux Eléments Finis. Le facteur de réduction en fatigue est calculé à partir de la contrainte d'ouverture de fatigue dans la direction d'ouverture des fissures. Les Figures 6-22 et 6-23 représentent l'évolution de la contrainte élasto-plastique d'ouverture de la fissure dans la direction de l'intégration. En raison de l'épaisseur très mince des tôles utilisées dans les joints soudés par point en cisaillement, la technique du sous-modelage est utilisée.

L'approche volumétrique calcule la contrainte effective dans le volume déterminé par le point du gradient de la contrainte relative minimum. Cette approche est réalisée à partir d'une intégration numérique. Par conséquent, le nombre de mailles dans la direction de l'intégration doit être suffisant pour obtenir une bonne évaluation des contraintes élasto-plastiques.

L'utilisation d'un modèle complet tri-dimensionnel prenant en compte l'interface entre les tôles inférieure et supérieure donne des résultats plus exacts. L'influence de l'interface est très importante pour les joints soudés par point mono point [124]. L'interface n'est pas considérée dans les études précédentes [90-97, 100-104] à celle-ci :

Dans le calcul tri-dimensionnel, la symétrie est utilisée pour tous les types de joints soudés par point en cisaillement. Des conditions aux limites similaires à la situation réelle sont appliquées. Selon les études expérimentales sur les joints soudés par points, le comportement particulier de la zone affectée thermiquement (ZAT) disparaît dès le début du chargement cyclique [100-101, 105-106]. La durée de vie en fatigue estimée par cette simplification est un peu moindre que la durée de vie réelle. L'étude expérimentale de ZAT est généralement faite par la méthode «ABI» (Automated Ball Indentation) [125-126]. Selon des études précédentes [100-101, 105-106], la modélisation des joints soudés par la méthode des Eléments Finis a été réalisée sans considération des effets de ZAT. Cette approche simplifie le problème d'un calcul élasto-plastique compliqué des joints soudés par point en cisaillement. L'exactitude des résultats obtenus par la méthode volumétrique et par les résultats expérimentaux montre que l'effet de ZAT est négligeable dans le cas d'endurance limitée.

Dans l'étude des joints soudés, le mode de déplacement est différent par rapport aux joints soudés par point. Selon le nombre de points soudés dans les joints soudés par point en cisaillement, le mode d'endommagement change.

La comparaison entre les résultats obtenus pour les joints soudés par point Mono Point et par point Triple Points montre que les joints soudés multi points ont une résistance en fatigue plus élevée que celle des joints soudés mono point. L'étude des joints soudés multi points montre que la géométrie, la localisation, et le diamètre du point soudé sont des paramètres importants pour la durée de vie en fatigue. Selon les résultats expérimentaux obtenus, les résistances en fatigue des joints soudés Triple Points et Multiple Points sont approximativement égales.

Ce résultat vient de l'effet de la géométrie des joints soudés. C'est-à-dire que la distance entre les points soudés est aussi importante que la disposition dans la résistance en fatigue. Dans le cas des essais de fatigue sur des éprouvettes soudées par point Triple Points, la distance entre les points soudés est plus grande que dans les joints soudés Multi Points. L'influence de la distance change en fonction de la sollicitation mécanique des joints soudés en tension ou en compression [124]. Le comportement des joints soudés par point Triple points en compression est meilleur à celui des joints soudés Multiple Points [124]. Les études expérimentales montrent que le métal fondu a une limite d'élasticité et une contrainte ultime

plus élevée que celle du métal de base [100-101]. Selon le comportement des joints soudés par point, différentes méthodes sont proposées pour l'analyse des joints soudés par point en cisaillement, par exemple la méthode de Bande et la méthode de Taylor [85, 91].

L'étude expérimentale des joints soudés Multi Points montre que ce joint soudé est plus résistant dans le cas de la fatigue oligocyclique et moins résistant dans le cas de l'endurance limitée par rapport aux joints soudés par point Triple Points. Ce phénomène est attribué aux deux points soudés supplémentaires. Le nombre de points soudés, pour les joints soudés Multi Points influence donc légèrement la résistance à la fatigue.

# CHAPITRE 7

# Chapitre 7

## 7. Conclusion générale

### 7.0 Conclusion générale

Des joints soudés par point, utilisés dans l'industrie automobile et notamment en carrosserie sont généralement soumis à des chargements cycliques. La caractéristique du chargement appliqué sur les joints soudés par point conditionne le choix de l'analyse.

Dans le cas d'un chargement cyclique très élevé (fatigue oligocyclique) et dans le cas d'un chargement cyclique moyen (endurance limitée), l'amorçage de la fissure se situe respectivement dans le métal de base et dans la zone affectée thermiquement (ZAT).

Selon que nous sommes en présence de fatigue oligocyclique ou d'endurance limitée, la propagation et l'amorçage des fissures peuvent respectivement être observées. L'analyse des joints soudés par point est donc divisée selon une approche de type mécanique linéaire de la rupture ou de fatigue.

En pratique, les joints soudés par point travaillent dans le domaine de l'endurance limitée ( $10^5 - 10^7$  cycles).

Différentes méthodes, pour l'étude des joints soudés, ont été proposées par différents auteurs. Les méthodes proposées introduisent des hypothèses simplificatrices.

L'analyse tri-dimensionnelle est l'approche la plus convenable pour les joints soudés par point. Dans ce cas, les conditions aux limites et la géométrie des joints soudés et du point soudé sont prises en compte dans le calcul.

L'effet de l'interface est important dans le cas des joints soudés par point en cisaillement mono point. Ce paramètre augmente l'excentricité de l'application de la force et donc, la valeur de la contrainte maximale près du point soudé. Les joints soudés par point Mono Point sont donc plus sensibles à la géométrie de l'interface.

Pour rendre compte de l'amorçage des fissures dans l'épaisseur des tôles minces, la contrainte effective, la distance effective et le facteur de réduction en fatigue sont calculés dans cette région.

L'effet de la zone affectée thermiquement (ZAT), pour les joints soudés par point en cisaillement dans le cas de l'endurance limitée, disparaît au début du chargement cyclique.

Dans le cas de l'endurance limitée, le nombre de cycles pour la disparition des contraintes résiduelles, est négligeable par rapport au nombre de cycles à la rupture.

L'obtention d'une courbe de référence en fatigue pour les joints soudés par point est pratiquement impossible. Les courbes de référence pour l'approche volumétrique sont donc obtenues à partir des résultats expérimentaux pour les joints soudés mono point et triple points. La comparaison avec les résultats expérimentaux et l'approche de fatigue confirme la validité de l'approche volumétrique pour l'estimation de la durée de vie en fatigue.

# REFERENCES

- [ 1 ] W. J. M. Rankine, Minutes of the Proceeding of the Institute of Civil Engineers, London, 2, 105, (1843).
- [ 2 ] G. S. Campbell, R. Lahey, International Journal of Fatigue, 6, No. 1, 25, (1985).
- [ 3 ] H. Neuber, Kerbspannungslehre, Springer Verlag, FRG, (1958).
- [ 4 ] R. E. Peterson, Stress concentration factors, John Wiley & Sons, Inc. (1974).
- [ 5 ] G. N. Savin, V. I Tulchii, Handbook on the stress concentration, High School Publisher House, (1976).
- [ 6 ] S. J. Hardy, N. H. Malik, International Journal of Fatigue, 14, No; 3, 147, (1992).
- [ 7 ] H. Tada, P. C. Paris, G. Irwin, *The stress analysis of cracks handbook*, (Del Research Corporation, 1973, second edition, Paris Productions, Inc., St. Louis, (1985).
- [ 8 ] M. Creager, P. C. Paris, International Journal of Fracture Mechanics, 3, No. 4, 247, (1967).
- [ 9 ] D. P. Rooke, F. I. Baratta, D. J Cartwright, Engineering Fracture Mechanics, 14, 397, (1981).
- [ 10 ] C. S. Shin, R. A. Smith, Proceeding of International Symposium Microstructure and mechanical behavior of Materials, Xian, China, (1985).
- [ 11 ] D. Kujawski, *Estimation of stress intensity factor for small cracks at notches, Fatigue and Fracture of Engineering Materials*, 14, No. 10, 953-965, (1991).
- [ 12 ] H. Neuber, Kerbspannungslehre, Springer Verlag, FRG, (1958).
- [ 13 ] V. Weiss, ASME Paper No. 62-WA-270, American Society of Mechanical Engineers, (1962).
- [ 14 ] G. Glinka, A. Newport, *Universal features of elastic notch tip stress field*, International Journal of Fatigue, 9, No. 3, 143-150, (1987).
- [ 15 ] M. Creager, P.C. Paris, *Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking*, International Journal of Fracture Mechanics, No. 3, 247-255, (1967).
- [ 16 ] S. Usami, *Current Research on Fatigue Cracks*, The Society of Material Sciences, Ed. T. Tanaka, M. Jono, K. Koami, Kyoto, (1985).
- [ 17 ] C. Chen, H. Pan, *Collection of papers on Fracture of Metals*, (Ed. C. Chen), Metallurgy Industry Press, Beijing, 197, (1978).
- [ 18 ] S. Thimonshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, MacGraw-Hill, New York, (1951).
- [ 19 ] H. Neuber, *Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law*, Journal of Applied Mechanics, 28, pp. 254, (1961).
- [ 20 ] Xu Kewein, He Jiawen, *Prediction on notched fatigue limits for crack initiation and propagation*, Engineering Fracture Mechanics, 41(3), pp 504-510, (1992).
- [ 21 ] S. Bhattacharya, A. N. Kumar, *Rotational factor using bending moment approach under elastic-plastic; Situation I: Notch 3PB Geometry*, Engineering Fracture Mechanics, 50(4), pp 495-505, (1995).
- [ 22 ] R.X. Xu, J. C. Thompson, T. H. Topper, *Practical stress expressions for stress concentration regions*, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 18(718), pp 885-895, (1995).
- [ 23 ] T. R. Wilshaw, C. A. Rau, A. S. Tetelman, *A general model to predict the elastic-plastic stress distribution and fracture strength of notched bars in plane strain bending*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 1, 191-211, (1968).
- [ 24 ] M. Zheng, E. Niemi, *Analysis of the stress concentration factor for a shallow notch by the slip-line field method*, International Journal of fatigue, 19(3), pp. 191-194, (1997).
- [ 25 ] S. Q. Shi, M. P. Puls, *A simple method of estimating the maximum normal stress and plastic zone size at a shallow notch*, International Journal of pressure vessel and piping, 64(1), pp. 67-71, (1995).

- [ 26 ] S. Q. Shi, M. P. Puls, S. Sagat, *Journal of Nuclear Materials*, 208, pp. 243, (1994).
- [ 27 ] ANSYS Inc. Theory Reference manual.
- [ 28 ] A. C. Ugural, S. K. Fenster, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, American Elsevier Publishing Inc., (1975).
- [ 29 ] R. E. Peterson, *Stress concentration factors*, John Wiley and Sons, New York, (1974).
- [ 30 ] H. Neuber, *Theory of Notch stresses*, JW. Edwards Co., Ann Arbor, Michigan, (1946).
- [ 31 ] R. B. Heywood, *Designing by photo-elasticity*, London, Chapman and Hall, (1952).
- [ 32 ] R. B. Heywood, *Designing against fatigue*, London, Chapman and Hall, (1962).
- [ 33 ] E. Siebel, M. Steiler, *Non uniform stress distribution during fatigue loading*, VDI-Z, 97, (1955).
- [ 34 ] P. Khun, H. F. Hardraht, *An Engineering method for estimating notch size effect in fatigue tests on steel*, NACA, Technical Note, No. 2805, (1952).
- [ 35 ] A. Buch, *Analytical approach to size and notch size effects in fatigue of aircraft material specimens*, Material Science and Engineering, Vol. 15, (1974), pp. 75-85.
- [ 36 ] A. Buch, *Fatigue strength calculation*, USA, Material Science Surveys, No. 6, (1988), pp. 465.
- [ 37 ] T. H. Topper, M. H. El Haddad, *Fatigue strength prediction of notches based on fracture thresholds*, First International Conference , Stockholm, Vol. 2, EMAS, Warley, (1981), pp 777-797.
- [ 38 ] A. Brand, R. Suleitin, *Calcul des pieces à la fatigue, méthode de gradient*, Publication Senlis-France CETIM, 1980.
- [ 39 ] Eurocode 3, Design of Steel Structures; ENV1993-1-1: Part 1.1, *General rules and rules for building*, CEN, (1993).
- [ 40 ] *European Convention for Construction Steelworks: Recommendations for the Fatigue Design of Steel Structures*. ECCS Publication 43, (1985).
- [ 41 ] A. Palmgreem, *Bertchrift des Vereines Ingenieure*, 58, (1924), p. 339.
- [ 42 ] M. A. Miner, *Journal of Applied Mechanics*, 12, (1954), p. A-159.
- [ 43 ] W. Weibull, *A statistical distribution function of wide applicability*, *Journal of Applied Mechanics*, (1951), pp. 437-452.
- [ 44 ] O. H Basquin, *Proc., ASTM*, 10, Part II, (1910), P. 625
- [ 45 ] R. W. Smith, M. H. Hirschberg, S. S. Manson, NASA TN D-1574, NASA, April (1963).
- [ 46 ] S. S. Manson, M. H. Hirschberg, *Fatigue: An interdisciplinary Approach*, Syracuse University Press, Syracuse, N. Y., (1964), p. 133.
- [ 47 ] L. H. Coffin, Jr., *Trans., ASME*, 76, (1954), p. 931.
- [ 48 ] J. F. Tavernelli, L. F. Coffin, Jr., *Trans., ASM*, 51, (1959), p. 438.
- [ 49 ] R. W. Hertzberg, *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, John Willey and Sons, USA (1976).
- [ 50 ] Jo Dean Morrow, *Internal friction, Damping and Cyclic Plasticity*, ASTM STP 378, (1965), p. 45.
- [ 51 ] G. Molski, G. Glinka, *A method of elastic-plastic stress strain calculation at the notch roots*, *Material Science Engineering* (1981); 50: 93-100.
- [ 52 ] G. Glinka, *Energy density approach to calculation of inelastic stress strain near notches and cracks*, *Engineering Fracture Mechanics*, (1985); 22:485-508.

- [ 53 ] N. A. Makhutov, *The deformation fracture criteria and the strength calculation of the machine part*, Maschinostroyeine, (1981), pp. 272.
- [ 54 ] E. Morozov, G. Pluinage, *Study of stress and strain concentration coefficient by path independent Integral*, Problems of Strength, Special Issue (1996): 53-64.
- [ 55 ] C.E. Feltner, J.D Morrow, *Micro-plastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue Fracture*, Trans. A.S.M.E., 60-MET-2 (1961).
- [ 56 ] K. N. Smith, P. Watson, and T. H. Topper, *A stress-strain function for the fatigue of metals*, Journal of Materials, Vol. 5, No. 4, (1970), pp. 767-778.
- [ 57 ] W. Yao, Composite Science Technology (1992); 45: 105.
- [ 58 ] W. Yao, *Stress intensity approach for predicting fatigue life*, International Journal of Fatigue, (1993); 15: 243.
- [ 59 ] H. Nie, F. Wu, Acta Aeronaut. Astronaut. Sin. (1988), 9, A424.
- [ 60 ] M. Hoffmann, T. Seeger, Proceeding International Conference on Fatigue of Engineering Materials and Structures, London, Vol. 1, (1986), pp. 293-306.
- [ 61 ] R. E. Peterson, Metal Fatigue (Ed. G. Sines), McGraw-Hill, (1959), pp. 293-306.
- [ 62 ] N. E. Frost, K. J. Marsh, L. P. Pook, Metal Fatigue, Oxford University Press, (1974).
- [ 63 ] Yao Weixing, Xia Kiaquan, Gu Hi, *On the fatigue notch factor,  $k_f$* , International Journal of Fatigue, Vol. 17, No. 4, pp. 245-251, (1995).
- [ 64 ] De-Guang Shang, Da-Kang Wang, Ming Li, Wei-Xing Yao, *Local stress-strain field intensity approach to fatigue life prediction under random cyclic loading*, International Journal of fatigue, 23(10), (2001), pp. 903-910.
- [ 65 ] Weixing Yao, Bin Ye, Lichun Zheng, *A verification of the assumption of anti-fatigue design*, International Journal of Fatigue, 23(3), (2001), pp. 271-277.
- [ 66 ] G. Qylafku, Thèse de Doctorat, Université de Metz, France, (2000).
- [ 67 ] N. Kadi, Thèse de Doctorat, Université de Metz, France, (2001).
- [ 68 ] G. Qylafku, Z. Azari, N. Kadi, M. Gjonaj, G. Pluinage, *Application of new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats*, International Journal of Fatigue, (1999);21:753-760.
- [ 69 ] G. Qylafku, N. Kadi, J Dobranski, Z. Azari, M. Gjonaj, G. Pluinage, *Fatigue of specimens subjected to combined loading role of hydrostatics pressure*, International Journal of Fatigue, (2001);23(8):689-701.
- [ 70 ] H. Adib, G. Pluinage, *Theoretical and numerical aspects of the volumetric approach for fatigue life estimation in notched components*, International Journal of Fatigue, (2003); 25(1): 67-76.
- [ 71 ] T. Boukharouba, T. Tamine, L. Niu, C. Chehimi, G. Pluinage, *The use of the notch stress intensity factor as a fatigue crack initiation parameter*, Engineering Fracture Mechanics, (1995); 152(3): 503-512.
- [ 72 ] G. Pluinage, *Application of notch effect in high cycle fatigue*, Proceeding of the 9<sup>th</sup> International Conference of on Fracture, ICF9, Advances in Fracture Research, Vol. 3, Fatigue of metallic and non-metallic materials and structures. Pergamon (1997). p. 1239-1250.
- [ 73 ] G. Pluinage, *Application of notch Fracture Mechanics to fracture emanating from stress concentrators*, Advances in Computational Engineering Congress of Computational Engineering Sciences, (1997), p. 213-218.

- [ 74 ] H. Adib, A. Gowhari-Anaraki, *Fatigue life estimation based on notch fracture mechanics*, 5<sup>th</sup> International and 9<sup>th</sup> Annual Mechanical Engineering Conference. Iranian Society of Mechanical Engineering, ISME-2001; 4: 163-169, (2001).
- [ 75 ] S. Bentachfine, G. Pluvinage, G. Gilgert, Z. Azari, D. Bouami, *Notch effect in low cycle fatigue*, International Journal of Fatigue, (1999); 21(1): 421-430.
- [ 76 ] H. Adib, *Application of strain energy based volumetric approach for fatigue life prediction*, Internal Report of Iran University of Science and Technology, (1999) (In Persian).
- [ 77 ] G. R. Irwin, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, (1957), pp. 361-364.
- [ 78 ] P. Paris, F. Erdogan, *Critical analysis of crack propagation laws*, Trans. ASME, J. Basic Eng., 85, pp. 528-534, (1963).
- [ 79 ] Xiulin Zhang, M. A. Hirt, *Fatigue crack propagation in steels*, Engineering Fracture Mechanics, 18, (1983), pp. 965-973.
- [ 80 ] C. Bathias, J. P. Bailon (eds.), *La fatigue des matériaux et des structures*, Les presses de l'université de Montréal, Montréal, Canada, (1981).
- [ 81 ] M. G. Yan, *The fatigue crack propagation mechanism of aeronautical structural materials and their engineering application in Progress in Material Science (Edited by C. X. Chi)*, pp. 113-158, Scientific Publishing House, Beijing, China, (1986).
- [ 82 ] R. G. Forman, V. E. Kearney, R. M. Engle, *Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures*, Trans. ASME, J. Basic Eng., 89, (1967), pp. 459-464.
- [ 83 ] R. J. Donahue, H. M. Clark, P. Atanmo, R. Kumble, A. J. McEvily, *Crack opening displacement and the rate of fatigue crack growth*, International Journal of Fracture Mechanics, 8, pp. 209-215, (1972).
- [ 84 ] C. S. Shin, *Fatigue crack growth from stress concentration and fatigue life prediction in notched components*, Handbook of fatigue crack propagation in metallic structures, Ed. A. Carpinteri, (1994) Elsevier Science B. V., pp. 613-652.
- [ 85 ] D. Radaj, Z. Zheng, *Geometrically nonlinear behavior of spot welded joints in tensile and compressive shear loading*, Engineering Fracture Mechanics, 51(2), (1995), pp. 281-294.
- [ 86 ] D. Radaj, S. Zhang, W. Mohrmann, *load stress parameters at the spot welds of various specimens*, Engineering Fracture Mechanics, 37(5), (1990), pp. 933-951.
- [ 87 ] D. Radaj, *Design and analysis of fatigue resistant welded structures*, Abington Publishing, Cambridge (1990).
- [ 88 ] H. S. Reemsnyder, *Modeling of the fatigue resistance of single spot-welded steel sheet*, IIW-Doc. III-995-92 and XIII-1469-92, (1992).
- [ 89 ] M. Fujimoto, N. Mori, S. Sakuma, IIW Doc. III-721-82, (1982).
- [ 90 ] T. Satoh, H. Abe, K. Nishikawa, M. Morita, *A study of three dimensional elastic-plastic stress analysis of spot welded joint*, Proceeding of the 4<sup>th</sup> International Conference on fatigue and fatigue threshold, 15-20 July, (1990) in Honolulu Hawaii.
- [ 91 ] Y. Zhang, D. Taylor, *Fatigue life prediction of spot welded components*, Proceeding of the 7<sup>th</sup> international fatigue congress, Vol. 2, Fatigue 99, 1275-1280, (1999).

- [ 92 ] Pingsh Dong, Xin Sun, Innmiao Zhang, F. Lu, *A generalized spot weld model for finite element analysis of auto-body structures*, SAE Technical Papers, Doc. No. 1999-01-3191, (1999).
- [ 93 ] Y. Nakahara, Masao Fujimoto, M. Takahashi, A. Kawamoto, Nobon Tomioka, *Method of fatigue life estimation for spot-welded structures*, SAE Technical Papers, Doc. No. 2000-01-0779, (2000).
- [ 94 ] Pietro Salvini, Francesco Vivio, Vincenzo Vullo, *A spot weld finite element for structural modeling*, International Journal of Fatigue, 22(8), (2000); 645-656.
- [ 95 ] P. Salvini, F. Vivo, V. Vullo, *Use of an appropriate spot weld element for fatigue life prevention of complex joints*, European Automotive Congress 99, Barcelona (Spain), (1999).
- [ 96 ] P. Salvini, F. Vivio, V. Vullo, *La resistenza a fatica di structure in acciaio inossidabile saldate a punti : sintesi delle analisi teoriche, numeriche e sperimentali*, Parts I, II, III. ATA (1998); 51(6-7): 338-346; 15(8-9); 438-449; 15(10):530-43.
- [ 97 ] P. Salvini, E. Scardeccia, G. Demofonti, *A procedure for fatigue life prediction of spot welded joints*, Fatigue and Fracture of Engineering Material Structures, (1997); 20(8):1117-1128.
- [ 98 ] Y. Kan, *Fatigue resistance of spot welds- an analytical study*, Met. Eng. Quart (1976); 16(4): 26-36.
- [ 99 ] D. Radaj, *Theory of forces and stresses in spot welded overlap joints*, Archive of Applied Mechanics 67 (1996) 1/2, 22-34.
- [ 100 ] H-F. Henryson, F. Abdulwahab, B. L. Josefson, M. Fermér, *Residual stresses in resistance spot welds: Finite element simulations, X-Ray measurements and influence on fatigue behavior*, VTT-SYMP-182, Espoo-Finland, (1998), PP. 179-190.
- [ 101 ] H-F Henryson, F. Abdulwahab, BL Josefson, M. Feremer, *Residual stresses in resistance spot welds: finite element simulation, X-Ray measurements and influence on Fatigue behaviour*, Welding in the World (1999); 43(1):55-63.
- [ 102 ] H-F Henryson, B. L. Josefson, *Fatigue crack initiation at spot welds, Fracture Mechanics or Strain life approach*, Proceeding of the 7<sup>th</sup> international fatigue congress, Fatigue 99, (1999);2:1251-1256
- [ 103 ] X. Deng, W. Chen, G. Shi, *Three dimensional finite element analysis of the mechanical behaviour of spot welds*, Finite Element Analysis and Design, (2000);35:17-39.
- [ 104 ] W. Chen, W. Deng, *Performance of shell elements in modelling spot welded joints*, Finite Element Analysis and Design, (2000);35:41-57.
- [ 105 ] N. Pan S. Sheppard, *Spot welds life prediction with cyclic strain range*, International Journal of Fatigue, (2002); 24(5):519-528.
- [ 106 ] N. Pan, S. Sheppard, *Stress intensity factors in the spot welds*, Engineering Fracture Mechanics, (2003);70(5):671-684.
- [ 107 ] H. Adib, J. Gilgert, G. Pluinage, *Fatigue life prediction duration for spot welds by volumetric approach*, International Journal of Fatigue, (2004);26(1):81-94.
- [ 108 ] D. J. Chang, R. Muki, *Stress distribution in a lap joint under tension shear*, International Journal of Solid Structures, (1974);10(5):503-517.
- [ 109 ] L. P. Pook, *Approximate stress intensity factors for spot and similar welds*, National Engineering Laboratory UK, (1975); NEL report 588.
- [ 110 ] J.F Cooper, R. A. Smith, *Initial fatigue crack growth at spot welds*, proceeding of international conference on fatigue of engineering materials and structures, Vol. 2, (1986), pp. 283-288.

- [ 111 ] S. Zhang, *Stress intensities at the spots*, International Journal of Fracture, (1997); 88:167-185.
- [ 112 ] MH. Swallam, P. Kurath, FV. Lawrence, *Electric-Potential-drop studies of fatigue crack development in tensile shear spot welds*, ASTM STP (1991); 1122: 383-401.
- [ 113 ] MH. Swallam, FV. Lawrence, *A fatigue design parameter for spot welds*, Fracture Control Program Report No. 157, University of Illinois at Urbana-Champaign, (1991).
- [ 114 ] MH. Swallam, PhD Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, (1991)
- [ 115 ] F. V. Lawrence, P. C. Wang, H. T. Corten, *An empirical method for estimating the fatigue resistance of tensile shear spot welds*, SAE paper 830035, (1983).
- [ 116 ] H. Kang, M. E. Barkey, Y. Lee, *Evaluation of multiaxial spot weld fatigue parameters for proportional loading*, International Journal of Fatigue, 22(8); (2000): 691-702.
- [ 117 ] SD. Sheppard, *Estimation of fatigue propagation life in resistance spot welds*, *Advances in fatigue predictive techniques*, 2<sup>nd</sup> Vol., ASTM STP 1211, Philadelphia, (1993):169-185.
- [ 118 ] SD. Sheppard, *Further refinement of a methodology for fatigue life estimation in resistance spot weld connections*, *Advances in fatigue predictive techniques*, 3<sup>rd</sup> Vol., ASTM STP 1292, Philadelphia (1996):265-282.
- [ 119 ] H. Adib, *Effect of the geometry in tensile shear spot welds for fatigue life prediction*, Internal report of Laboratoire de Fiabilité Mécanique, (28 July 2000).
- [ 120 ] H. Adib, J. Gilgert, G. Pluinage, *Tensile-Shear hot spot welded joints fatigue life estimation based on volumetric approach*, New Trends in Fatigue and Fracture II- NT2F2 Congress, Hamammet-Tunesia, 12-13 May, (2003).
- [ 121 ] ANSYS Inc. Getting Started manual.
- [ 122 ] ANSYS Inc. Basic Analysis Procedure Guide manual.
- [ 123 ] ANSYS Inc. Advance Analysis Technical Guide manual.
- [ 124 ] H. Adib, J. Jeong, G. Pluinage, *Three dimensional finite element analysis of hot spot welded joints in tensile and compressive loadings*, Journal of "Strength of Material", Accepted for Publication, (August 2003).
- [ 125 ] F. M. Haggag, G. E. C. Bell, *Measurement of Yield strength and flow properties in spot welds and their HAZs at various strain Rates*, Presented at the ASM, 3th International Conference on the Trends in Welding Research, 1-5 June, 1992 Gatlinburg, Tennessee, USA, (1992).
- [ 126 ] F. M. Haggag, *In situ Measurements of Yield Strength and flow-properties Using a Novel ABI system*, Presented at the ASTM Symposium on small specimen test techniques and their applications to the nuclear reactor vessel Thermal annealing and plant life extension, New Orleans, Louisiana, January 1992, Published at ASTM STP, (1992).