



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Spécialité: **MATHEMATIQUES**

présentée et soutenue publiquement

par

Angela GAMMELLA

le 27 Septembre 2001

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	20010355
Cote	S/M3 01/12
Loc	Magasin

DEFORMATIONS SUR LES VARIETES DE POISSON

ET COHOMOLOGIES APPROPRIEES

devant le jury composé de:

Didier ARNAL

Directeur de thèse, Université de Dijon

Boris FEDOSOV

Rapporteur, Max-Planck-Institut-Bonn

Simone GUTT

Examineur, Université de Metz

Jean LUDWIG

Examineur, Université de Metz

Mohsen MASMOUDI

Examineur, Université de Metz

Georges PINCZON

Examineur, Université de Dijon

John RAWNSLEY

Rapporteur, Université de Warwick

Remerciements

“Aucun travail ne s’accomplit dans la solitude.”

Michel BEAUD

J’adresse mes premiers remerciements à Didier ARNAL; je voudrais lui exprimer ma très profonde gratitude pour m’avoir transmis l’envie de faire de la recherche en mathématiques, pour m’avoir appris à en faire et pour m’avoir offert un sujet de thèse captivant et original. Sa très grande compétence scientifique, le temps qu’il m’a généreusement accordé, ses remarquables qualités pédagogiques, son enthousiasme et son expérience ont été absolument cruciaux pour la concrétisation de cette thèse. Je lui suis aussi très reconnaissante pour m’avoir permise de collaborer avec lui sur des questions de recherche difficiles et réellement enrichissantes.

Je remercie vivement Boris FEDOSOV et John RAWNSLEY d’avoir accepté de rédiger un rapport sur cette thèse et de faire partie du jury. J’en suis très honorée.

Simone GUTT s’est intéressée à mon travail et a spontanément accepté de faire partie du jury. Je voudrais la remercier pour cela très sincèrement.

Je suis aussi très honorée de pouvoir compter Georges PINCZON parmi les membres du jury et je l’en remercie.

Jean LUDWIG a été présent à tous mes séminaires de Metz, il me fait aujourd’hui l’honneur de participer à mon jury de thèse. Je voudrais lui témoigner ici de ma reconnaissance.

Je remercie Mohsen MASMOUDI pour l’aide précieuse qu’il m’a apportée au cours de notre collaboration, et pour les nombreuses discussions fructueuses et toujours motivantes que nous avons eues. Je le remercie aussi pour avoir accepté d’être membre du jury.

Je tiens également à remercier tous les membres du laboratoire de Metz, et les équipes d’analyse harmonique, de géométrie différentielle et d’algèbre pour avoir su créer une ambiance de travail chaleureuse et stimulante. J’ai aussi beaucoup appris en participant au groupe de travail sur Kontsevich qui a été organisé à Metz (pendant l’année académique 1999/2000) sous l’initiative de Didier ARNAL, Dominique MANCHON, Mohsen MASMOUDI et André ROUX.

Durant ces trois années de thèse, j’ai assisté à plusieurs colloques et séminaires qui m’ont été très bénéfiques (à Bruxelles, à Han-sur-Lesse, à l’université de Warwick, Dijon,

Metz, Nancy...). Je profite de l'occasion pour remercier les organisateurs, les conférenciers et les participants de toutes ces rencontres. Un grand merci aussi aux organisateurs des Rencontres Mathématiques de Glanon.

Enfin, je remercie toute ma famille et principalement mes parents qui m'ont connue souvent indisponible. Leur compréhension et leur soutien constant m'ont aidée à mener ce travail jusqu'à son terme.

Metz, le 28 Juillet 2001.

Le monde mathématique ressemble beaucoup à une ville, une ville immense, dans laquelle les lois de l'échange ne sont pas toujours bien définies. On s'y insère sans toujours la dominer, et en y vivant, on la fait vivre. Elle est bâtie avant notre arrivée, et on n'apprendra jamais tout ce qu'elle contient, mais chacun de nous sait que beaucoup y oeuvrent dans l'anonymat pour que les circuits de distribution et d'information y soient efficaces, et que certains veillent sur sa mémoire, préservent ses monuments, alors que d'autres la font visiter, et d'autres y bâtissent de nouveaux édifices, souvent dignes d'intérêt, et plus rarement de superbes monuments. Certaines gens réhabilitent de vieux bâtiments et d'autres les regardent faire... Mais comme il est bien connu, il faut de tout pour faire un monde.

Nous avons voulu, en travaillant à cet ouvrage, apporter une contribution bien modeste à la fascinante vie de ce petit monde, et souhaité que les lecteurs qui voudront bien s'y plonger découvrent à leur tour les nombreuses occasions de bonheur que nous avons connues durant son élaboration.

Rached Mneimné,
Préface de "Eléments de géométrie",
Paris, Cassini: 1997.

TABLE DES MATIERES

Introduction	8
--------------------	---

I Généralités sur les variétés de Poisson et leurs déformations

1.1 Géométrie de Poisson	16
1.2 Cohomologie de Poisson et première interprétation	22
1.3 Déformations des structures algébriques	23
a) Déformations associatives et cohomologie de Hochschild	23
b) Déformations des algèbres de Lie et cohomologie de Chevalley	26
1.4 Produits-star sur les variétés de Poisson	28
a) Sur l'existence des produits-star	29
b) Sur la classification des produits-star	30
1.5 Vers l'étude des produits-star tangentiels	31

II Calculs explicites de cohomologie de Poisson tangentielle

II.1 Variétés de Poisson régulières et feuilletages	35
II.2 Plusieurs versions de la cohomologie de Poisson tangentielle	37
a) Cohomologie de de Rham tangentielle	37
b) Cohomologie de Čech	40
II.3 Quelques théorèmes connus	48
II.4 Etude du cas nilpotent	50
II.5 Le cas des variétés de Poisson régulières de dimension 3	58
II.6 Excursion à travers les algèbres de Lie de dimension 3	61
a) L'algèbre de Lie de Heisenberg	62
b) L'algèbre de Lie $\mathfrak{e}(2)$ du groupe euclidien	62
c) L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ du groupe affine	63
d) La book algebra	64
e) Les algèbres de Lie de Grélaud	64

f) Des variantes de la book algebra	65
g) L'exemple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$	67
h) Un exemple intéressant	69
i) Le cas de $\mathfrak{sl}(2)$	71
II.7 Un exemple de bon recouvrement	74

III Produits-star tangentiels algébriques sur les duals des algèbres de Lie nilpotentes

III.1 Préliminaires sur les algèbres de Lie nilpotentes	78
a) Paramétrisation d'une partie du dual	78
b) Opérateurs différentiels, algébriques et tangentiels	80
III.2 Cohomologie de Hochschild bien graduée	81
III.3 Déformations tangentielles et bien graduées de l'algèbre symétrique	86
III.4 Propriétés tangentielles du produit-star de Gutt	90
III.5 Application à $\mathfrak{g}_{5,4}$	93

IV Déformations sur les orbites coadjointes de dimension maximale

IV.1 Un peu de géométrie algébrique	99
a) Ensembles semi-algébriques réels	99
b) Stratification semi-algébrique de Bonnet	100
c) Produits-star gradués sur un ouvert de $\mathfrak{g}^*$	101
IV.2 A propos de la conjecture de M. Duflo et M. Saint-Germain	102
IV.3 Exemples	107
a) Un exemple fondamental	107
b) Pour aller plus loin	108
IV.4 Champs conformes et produit-star tangentiel sur les variétés de Poisson . . .	109
régulières	
IV.5 Produits-star différentiels, tangentiels et gradués sur l'ouvert dense de . . .	114
$\mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale (cas nilpotent)	

V Une approche cohomologique de la formalité de Kontsevich

V.1 Cohomologie de Chevalley graduée	117
V.2 La notion de formalité	122
a) Les algèbres de Lie différentielles graduées T_{poly} et D_{poly}	122
b) L_∞ -algèbres et formalité	122
c) Le lien avec la quantification par déformation	125
V.3 La formalité explicite pour l'espace $\mathbb{R}^d$	126
V.4 L'algèbre de Lie graduée D_{poly} vu comme T_{poly} -module	129

V.5	<i>Interprétation cohomologique de l'équation de formalité</i>	132
 VI De la formalité locale de Kontsevich aux déformations tangentielles sur les variétés de Poisson feuilletées		
VI.1	<i>En guise de motivation</i>	137
VI.2	<i>Géométrie formelle pour les variétés de Poisson feuilletées</i>	138
VI.3	<i>Exploitation de la formalité de Kontsevich</i>	142
a)	<i>Déformation de E_0 et de D_0</i>	142
b)	<i>Relations et premières propriétés</i>	144
VI.4	<i>Adoption de la méthode de Fedosov et tangentialité</i>	148
a)	<i>Connexions tangentielles plates de Fedosov</i>	148
b)	<i>Le résultat: obtention d'un produit-star tangentiel</i>	149
VI.5	<i>Application aux algèbres de Lie</i>	153
 Appendices		
A1.	<i>Algèbres de Lie graduées et cohomologies</i>	158
A2.	<i>Classes d'équivalence et dérivations des produits-star tangentiels</i>	161
 Références		168

Introduction

Alternativement dans le temps, les objets et les structures géométriques produites par les mathématiques sont le substrat des théories physiques et vice versa. Les théories de quantification se prêtent bien à ce propos. Considérablement développées aux cours de ces dernières années, elles ont des applications nombreuses et variées dans plusieurs branches des mathématiques et de la physique théorique.

De manière générale, on entend par quantification la procédure permettant d'associer à chaque système mécanique classique un analogue quantique; en particulier de décrire les observables et les états d'un système quantique à partir de la description des observables et des états du système classique correspondant. Cette correspondance n'est pas unique, et plusieurs théories de quantification ont été envisagées.

La théorie sous-jacente à l'ensemble de ce travail est celle de la *quantification par déformation* fondée par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans [BFFLS]. Elle est basée sur la théorie générale de déformation des structures des algèbres associatives et des algèbres de Lie, développée par M. Gerstenhaber dans [Ger]. La démarche de [BFFLS] consiste à prendre comme modèle de la mécanique classique une variété de Poisson, c'est-à-dire une variété M pour laquelle l'algèbre $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M est munie d'un crochet de Lie $\{ , \}$, vérifiant la règle de Leibniz. Quantifier M , c'est alors construire un produit-star sur M , i.e. une application bilinéaire $\star$ de la forme:

$$\begin{aligned} \star : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]] \\ (u, v) &\longmapsto u \star v = \sum_{n \geq 0} \hbar^n C_n(u, v), \end{aligned}$$

telle que

- (i) $C_0(u, v) = uv$;
- (ii) $C_1(u, v) - C_1(v, u) = 2\{u, v\}$;
- (iii) son extension $\hbar$ -bilinéaire à $C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(M)[[\hbar]]$ définisse une loi associative sur l'algèbre formelle $C^\infty(M)[[\hbar]]$.

On impose très souvent la condition d'annulation sur les constantes:

$$C_n(1, v) = C_n(v, 1) = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

et la condition de parité:

$$C_n(u, v) = (-1)^n C_n(v, u) \quad \forall n.$$

En général, les produits-star que l'on recherche sont différentiels: on demande aux cochaînes C_n ($n \geq 1$) d'être des opérateurs bidifférentiels sur M .

Des théorèmes d'existence des produits-star (différentiels) ont été démontrés par différents auteurs, dans des cadres de plus en plus généraux. Les premiers résultats sont dus à J. Vey [Vey], et à O.M. Neroslavsky et A.T. Vlassov [NV]; ils prouvent l'existence de produits-star dans le cas symplectique sous la condition de la nullité du troisième nombre de Betti. Cette obstruction cohomologique a été levée, d'abord par M. Cahen et S. Gutt dans le cas d'un fibré cotangent [CG1], puis par M. De Wilde et P.B.A. Lecomte dans le cas d'une variété symplectique quelconque [DW-L1]. Des preuves plus simples et plus géométriques ont ensuite été données, toujours dans le cas symplectique, par H. Omori, Y. Maeda et A. Yoshioka [OMY] et B.V. Fedosov [Fe1]. Le cas des variétés de Poisson régulières a été traité par M. Masmoudi dans [Mas1]. Il a fallu attendre plus de vingt ans pour voir apparaître, dans le travail magistral de M. Kontsevich [Kon2], une preuve de l'existence d'un produit-star sur une variété de Poisson quelconque; la construction de [Kon2] fournit aussi une formule explicite de produit-star pour les structures de Poisson sur $\mathbb{R}^d$. Une preuve plus algébrique est donnée dans [Tam], voir aussi [Kon3].

Parallèlement aux théorèmes d'existence, des classifications des produits-star ont été données. Les premières classifications apparaissent dans [DW-L1, DW-L2] en situation symplectique. Des résultats plus précis et plus explicites ont été obtenus par la suite: par Fedosov [Fe2], Nest-Tsygan [NT], Bertelson-Cahen-Gutt [BCG], Deligne [Del], et plus récemment par Gutt-Rawnsley [GR] et Weinstein-Xu [WX] pour le cas symplectique, et par Kontsevich [Kon2] pour le cas général.

A la différence de la quantification géométrique (celle de Kirillov, Kostant et Souriau [Kir, Ko, Sou]) et de la quantification asymptotique (de Karasev et Maslov [KM]), la quantification par déformation a l'avantage d'interpréter la mécanique quantique comme déformation de la mécanique classique, sans faire intervenir d'opérateurs sur des espaces de Hilbert et sans changer la nature des observables.

Les succès de la théorie ont été nombreux et physiquement significatifs: les prédictions correctes s'étendent du spectre complet de l'atome d'hydrogène, à l'oscillateur harmonique et aux niveaux d'énergie qui sont obtenus avec leurs vraies multiplicités. La quantification par déformation a aussi suggéré de nouvelles perspectives dans la théorie quantique des champs et en particulier dans l'électrodynamique quantique [Di1, Le].

De plus, la quantification par déformation s'est très vite révélée utile pour la théorie des représentations des groupes de Lie. On trouve dans [Fr] un programme de construction des représentations unitaires et irréductibles des groupes de Lie à partir de déformations covariantes sur les orbites coadjointes. Cette nouvelle méthode des orbites, appelée *programme déformation*, a été complètement réalisée dans le cas nilpotent [Ar1, AC1, AC2], exponentiel [AC3] et résoluble [ACL], puis dans le cas des groupes compacts [ACG2, CGR1] (voir aussi [ABS, ACMP, Mor, Wil, Za]) et pour les représentations minimales [ABC]. Des exemples très parlants ont été simultanément étudiés comme $SL(2, \mathbb{R})$ [AY] ou encore le groupe euclidien $E(2)$ [AC4].

Par ailleurs, on peut montrer [Kir, Li2, We1, Va2] que toute variété de Poisson admet un *feuilletage* naturel, le feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ engendré par les champs de vecteurs hamiltoniens. C'est en général un feuilletage singulier (les feuilles ne sont pas forcément toutes de même dimension) et chacune des feuilles de $\mathcal{F}$ est munie canoniquement d'une structure de variété symplectique.

Il est dès lors naturel, pour une variété de Poisson M donnée, de chercher à construire des produits-star sur M qui soient compatibles avec le feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ de M , c'est-à-dire des produits-star qui se restreignent sans ambiguïté aux feuilles symplectiques ou au moins aux feuilles symplectiques "génériques". De telles déformations sont communément appelées produits-star *tangentiels*.

Pour les variétés de Poisson régulières, on trouve dans [Li2] une définition précise de la notion de tangentialité, ainsi qu'une version tangentielle des résultats de Vey. De plus, sur de telles variétés, le produit-star que Masmoudi a construit dans [Mas1] par généralisation des idées de De Wilde-Lecomte et Omori-Maeda-Yoshioka a la propriété d'être tangentiel. Dans le cas général, la situation est moins heureuse: on sait que de tels produits-star n'existent pas toujours.

En effet, soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On rappelle que le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est une variété de Poisson dont les feuilles symplectiques ne sont autre chose que les orbites coadjointes de G dans $\mathfrak{g}^*$. On connaît à priori deux produits-star sur $\mathfrak{g}^*$: celui de Gutt [Gu2] obtenu à partir de l'application de symétrisation entre l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ et l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$, et celui de Kontsevich-Duffo [Kon2, ABM] qui préserve la structure d'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}^*$. Ces produits-star ne sont pas tangentiels: ils ne se restreignent pas en général aux orbites coadjointes, même pas à celles qui sont en position générale. Dans [Asi], Asin Lares nous apprend que le produit-star de Gutt n'est que rarement tangentiel: il ne peut se restreindre à une orbite coadjointe O dans $\mathfrak{g}^*$ que si cette orbite est ouverte dans un sous-espace affine de $\mathfrak{g}^*$. Bien plus, on trouve dans [ACG1] et [CGR2] des exemples d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ pour lesquels il n'existe pas de produit-star tangentiel et différentiel défini sur tout le dual $\mathfrak{g}^*$. Ces exemples incluent toutes les algèbres de Lie semi-simples et plusieurs algèbres de Lie nilpotentes. En fait, dans [CGR2], les auteurs montrent qu'une déformation sur $\mathfrak{g}^*$ à la fois tangentielle et différentielle n'est possible que lorsqu'une condition algébrique très forte est satisfaite par les invariants quadratiques de $\mathfrak{g}$. Ce résultat a été formulé en termes géométriques dans [We3].

La situation n'est cependant pas aussi désespérée qu'il y paraît. Pour contourner la difficulté, on peut citer au moins deux alternatives possibles:

- (i) travailler de manière algébrique, c'est-à-dire en permettant au produit-star de n'être pas différentiel;
- (ii) construire des produits-star différentiels, éventuellement non définis partout, et tangentiels seulement sur un ouvert dense de la variété de Poisson considérée.

Pour les algèbres de Lie, ces alternatives ont déjà été relativement exploitées dans la littérature. Soyons un peu plus précis:

- L'idée (i) de considérer des produits-star non-différentiels sur les duals des algèbres de Lie est ancienne, elle a été soulevée par Fronsdal et Flato, et mentionnée dans [Ster1]. Pour le cas des algèbres de Lie semi-simples, nous savons construire depuis [CG2] un produit-star algébrique, tangentiel sur toutes les orbites régulières. Une construction plus générale (mais moins explicite) pour les algèbres de Lie semi-simples et certaines algèbres de Lie nilpotentes est donnée dans [ACG1]. Des résultats plus récents ont été obtenus par Fioresi-Levrero-Lledo dans [FLL] et Fioresi-Lledo dans [FL].

- L'idée (ii) de construire des produits-star différentiels et tangentiels seulement sur une partie du dual $\mathfrak{g}^*$ a été menée à bien dans certains cas spécifiques. Dans [AC1], D. Arnal et J.C. Cortet ont obtenu de tels produits-star sur l'ouvert générique V des algèbres de Lie nilpotentes. Leur construction consiste à définir un produit-star de Moyal sur V au moyen d'une paramétrisation simultanée des orbites contenues dans V . Pour les algèbres de Lie nilpotentes spéciales, il est possible de construire des produits-star différentiels, définis sur tout $\mathfrak{g}^*$ et tangentiels sur les orbites génériques. On trouve une telle construction dans [ACG1] puis dans [BA]. Le produit-star de [ACG1] est obtenu par récurrence à partir d'une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$; il diffère en général du produit-star décrit dans [AC1]. Le produit-star de [BA] est construit à l'aide d'une formule intégrale par modification de la formule de Rieffel du produit-star de Gutt (l'application exponentielle usuelle étant remplacée par un difféomorphisme $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow G$).

Notons que les produits-star tangentiels définis sur une partie au moins du dual d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont des objets importants pour l'analyse harmonique du groupe de Lie G correspondant. Ils peuvent en effet être utilisés dans la description et la construction du dual unitaire $\hat{G}$ de G via le programme déformation mentionné plus haut.

Première problématique:

Peut-on développer une étude unifiée de l'existence des produits-star tangentiels? Comment classifier de tels produits-star, en particulier comment savoir quand il en existe? Et, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ n'admettant pas de produit-star tangentiel et différentiel, est-il toujours possible de construire sur $\mathfrak{g}^$ un produit-star tangentiel algébrique?*

Dans la première partie de cette thèse, nous avons essayé de donner quelques éléments de réponse à ces questions. Nos résultats se répartissent principalement autour de trois axes:

1. L'étude complète de l'existence et de la classification des produits-star tangentiels nécessite le calcul de la cohomologie de Poisson tangentielle. Dans le cas des variétés de Poisson régulières, cette cohomologie a été définie et son rôle précisé dans [Li2]. Assez curieusement, aucun écrit (à ma connaissance) ne traite du calcul des espaces de cette cohomologie qui, à la différence de la cohomologie de Poisson usuelle, ne dépend de la structure de Poisson que par l'intermédiaire du feuilletage et de la cohomologie de de Rham des feuilles. Dans un article [Ga2], j'ai exploré cette question, en calculant explicitement de nombreux exemples issus des algèbres de Lie. Cet article met en évidence des problèmes de géométrie différentielle et de théorie des feuilletages, non triviaux et intéressants en soi. Il est repris au chapitre II de cette thèse.

2. La question de l'existence de produits-star tangentiels algébriques sur les duals des algèbres de Lie est difficile à traiter de manière générale. Il nous a paru utile et naturel d'examiner ici le cas des algèbres de Lie *nilpotentes*: le dual de ces algèbres est *stratifié* (voir [Ver, ACG1, Bon, Puk]) et on a une paramétrisation très précise des orbites contenues dans chaque strate. Dans [Gal], j'ai donné une condition nécessaire et suffisante d'existence de produits-star tangentiels, différentiels ou non, sur les duals des algèbres de Lie nilpotentes. Ce travail est repris au chapitre III de cette thèse.

3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\mathfrak{g}^*$ son dual. On sait que toute orbite coadjointe O dans $\mathfrak{g}^*$ admet une carte de Darboux globale dont les applications coordonnées p_i, q_j sont restriction à l'orbite de fonctions polynomiales f_i, g_j définies sur $\mathfrak{g}^*$. Les fonctions f_i, g_j ne vérifient pas en général les relations de Darboux:

$$\{f_i, g_j\} = \delta_{i,j},$$

en dehors de l'orbite. Cependant, M. Saint-Germain a expliqué dans [SG] comment prolonger les fonctions p_i, q_j sur un ouvert de $\mathfrak{g}^*$ de sorte que les relations de Darboux soient encore vérifiées sur tout l'ouvert. La considération d'exemples l'a mené à conjecturer l'existence de tels prolongements qui seraient algébriques. Que dire de l'aspect algébrique des prolongements de Saint-Germain? Peut-on construire, à partir de ces prolongements, un produit-star différentiel et tangentiel sur l'ouvert Ω de $\mathfrak{g}^*$ formé des orbites de dimension maximale? Et si oui, quelles propriétés supplémentaires peut-on exiger d'un tel produit-star? Ces questions seront élucidées au chapitre IV de la thèse.

L'existence et la classification par Kontsevich des produits-star sur une variété de Poisson quelconque [Kon2] résultent d'un théorème beaucoup plus général: le *théorème de formalité*. Ce théorème stipule l'existence d'une formalité sur toute variété différentiable M , c'est-à-dire d'un $\mathcal{L}_\infty$ -morphisme particulier entre l'algèbre de Lie graduée des multichamps de vecteurs et celle des opérateurs multidifférentiels sur M . Dans [Kon2], Kontsevich a d'abord construit une formalité explicite pour $\mathbb{R}^d$, puis a montré l'existence d'une formalité sur M quelconque par des arguments abstraits de recollement issus de la géométrie formelle de Gelfand-Kazhdan [GK]. La construction de Kontsevich pour $\mathbb{R}^d$ est aujourd'hui bien comprise (voir [AMM] par exemple). Le passage de $\mathbb{R}^d$ à M reste, quant à lui, encore très formel et très algébrique.

Seconde problématique:

La théorie des produits-star est fortement liée à l'étude de cohomologies appropriées. Qu'en est-il pour les formalités? Serait-il possible de recoller les formalités locales de manière moins formelle, en s'inspirant des preuves de recollement des produits-star?

J'ai eu l'opportunité et le privilège de travailler avec Didier Arnal et Mohsen Masmoudi sur ces questions au cours de l'année universitaire 2000/2001. Nous avons d'une part commencé à étudier une cohomologie de Chevalley naturellement associée à l'équation de formalité, d'autre part, nous avons avec Najla Dahmene rédigé un article [ADGM] visant à

construire des produits-star tangentiels en s'inspirant de la construction de [Fe1] et [CFT]. J'ai essayé de faire une synthèse de nos travaux dans la deuxième partie de cette thèse.

Le présent travail est divisé en six chapitres que nous allons maintenant brièvement résumer.

Première partie:

Chapitre I:

Ce premier chapitre présente quelques aspects de la géométrie de Poisson et contient les principaux concepts qui seront utilisés par la suite. On y trouve entre autres les notions de variété de Poisson, de produits-star, et de cohomologies de Poisson, de Hochschild et de Chevalley. En vue d'une étude unifiée de l'existence et de la classification des produits-star tangentiels, on distingue à la fin du chapitre plusieurs notions de tangentialité (tangentialité C^∞ , algébrique, locale et différentielle).

Chapitre II:

Dans le second chapitre, on s'intéresse à la cohomologie de Poisson tangentielle des variétés de Poisson régulières ainsi qu'à ses applications pour l'étude et la classification des produits-star tangentiels pour les algèbres de Lie. On prouve que, pour une variété de Poisson régulière, la cohomologie de Poisson tangentielle s'identifie à la cohomologie de de Rham tangentielle du feuilletage symplectique (théorème II.2.3). La conséquence intéressante de ce résultat est que la cohomologie de Poisson tangentielle, contrairement à la cohomologie de Poisson usuelle, ne dépend que de la géométrie du feuilletage et pas de la structure symplectique des feuilles (remarque II.2.4). Nous démontrons aussi que toute variété feuilletée admet un bon recouvrement (U_α) i.e. tel que toutes les intersections d'un nombre fini d'ouverts sont de cohomologie de de Rham tangentielle triviale en degré supérieur à zéro (proposition II.2.6). Ce résultat nous permettra d'interpréter la cohomologie de de Rham tangentielle (donc la cohomologie de Poisson tangentielle des variétés de Poisson régulières) comme une cohomologie de Čech (propositions II.2.7 et II.2.8). Nous calculons finalement cette cohomologie dans de nombreux exemples issus des algèbres de Lie. En effet, chaque algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ donne lieu à une variété de Poisson régulière naturelle: l'union Ω des orbites de dimension maximale dans $\mathfrak{g}^*$. Le chapitre traite en détail le cas des algèbres de Lie nilpotentes, puis de toutes celles de dimension 3. Ces calculs montrent en particulier que les espaces de la cohomologie de Poisson tangentielle sont généralement très gros, et ceci même lorsque la cohomologie de de Rham des feuilles est triviale (proposition II.4.7).

Chapitre III:

Dans ce chapitre, nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence de produits-star tangentiels et gradués, différentiels ou non, sur le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. A cette fin, nous définissons une cohomologie adaptée aux déformations tangentielles et graduées de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ (cohomologie de Hochschild bien

graduée) et en calculons les premiers espaces (propositions III.2.3 et III.2.4). Nous prouvons à partir de ces calculs qu'un produit-star tangentiel et gradué sur $S(\mathfrak{g})$ existe si et seulement s'il existe un bon second terme C_2 (théorème III.3.3). En fait, un tel produit-star algébrique, lorsqu'il existe, peut être supposé différentiel dès que son C_2 est différentiel. Finalement, nous montrons que toutes ces déformations (différentielles ou non) sont tangentiellement équivalentes (proposition III.3.4 et théorème III.3.5). On étudie ensuite le caractère tangentiel du produit-star de Gutt (propriétés III.4.1 et III.4.2). On clôt le chapitre par une application de nos résultats à $\mathfrak{g}_{5,4}$; un exemple typique d'algèbre de Lie nilpotente pour lequel il n'existe pas de produit-star tangentiel et différentiel défini sur tout le dual [ACG1, CGR2]. En réalité, nous donnons pour cet exemple la construction explicite d'un produit-star tangentiel et algébrique.

Chapitre IV:

Le chapitre IV est consacré à la description de produits-star tangentiels sur la variété Ω des orbites coadjointes de dimension maximale dans le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Après quelques rappels de géométrie algébrique, on étudie le caractère algébrique des prolongements considérés par Saint-Germain dans [SG]. Pour être exact, on prouve l'existence de cartes de Weinstein, semi-algébriques, homogènes, prolongeant les fonctions de M. Vergne (théorème IV.2.1). Nous utilisons ensuite ces cartes adaptées pour construire localement sur Ω des produits-star tangentiels, gradués et différentiels (proposition IV.5.1) et une partition de l'unité homogène (proposition IV.5.2). L'existence de cette partition nous permettra de construire un produit-star tangentiel, gradué, différentiel, globalement défini sur l'ouvert Ω pour $\mathfrak{g}$ nilpotente (théorème IV.5.3). Chemin faisant, nous donnons une preuve cohomologique de l'existence d'un produit-star tangentiel sur une variété de Poisson régulière M à partir d'un bon recouvrement de M et de champs de vecteurs tangentiels conformes locaux (théorème IV.4.1). Cette preuve repose sur les idées et techniques développées dans [DW-L1, DW-L2] en situation symplectique; elle reprend la formulation de [Mas2, Mas3, ALM], où ces techniques ont été utilisées pour la construction de produits-star covariants sur une (seule) orbite coadjointe.

Seconde partie:

Chapitre V:

Dans le chapitre V, nous donnons une version graduée de la cohomologie de Chevalley des algèbres de Lie. Conformément à [Kon2], on considère les algèbres de Lie graduées des multichamps de vecteurs $T_{poly}(M)$ et des opérateurs multidifférentiels $D_{poly}(M)$ sur une variété M différentiable. On munit $D_{poly}(M)$ d'une structure de $T_{poly}(M)$ -module gradué (proposition V.4.1). Puis nous localisons l'obstruction à l'existence d'une formalité dans un espace d'une cohomologie de Chevalley ∂ appropriée (théorème V.5.1). Ce chapitre est la suite directe de [AM].

Chapitre VI:

Le chapitre VI concerne les variétés de Poisson feuilletées, *i.e.* les variétés différentiables munies d'un feuilletage (régulier) et d'un 2-tenseur de Poisson tangent aux feuilles de ce

feuilletage. On démontre que sur de telles variétés la construction de [CFT], elle-même inspirée de [Fe1], permet de construire des produits-star tangentiels (théorème VI.4.5). Ce résultat généralise la preuve de l'existence d'un produit-star tangentiel sur les variétés de Poisson régulières de manière plus conceptuelle et plus géométrique. Le chapitre se termine par des exemples pris dans les duals des algèbres de Lie. Dans certains cas, nous parvenons ainsi à construire des produits-star tangentiels sur des ouverts contenant strictement celui des orbites de dimension maximale (proposition VI.5.1).

La littérature est particulièrement riche en matière de quantification par déformation et la plupart des écrits sont des références incontournables sur le sujet. C'est la raison pour laquelle je me suis permise, à la fin de cette thèse, d'inclure une longue bibliographie.

CHAPITRE I

Généralités sur les variétés de Poisson et leurs déformations

Les variétés de Poisson ont été introduites par Lichnerowicz [Li1, Li2]. Leur importance a été rapidement reconnue par Weinstein qui en a étudié les propriétés locales [We1]. Elles jouent aussi un rôle fondamental en mécanique et en physique, et elles sont systématiquement étudiées depuis plus de vingt ans. Dans ce premier chapitre, on introduit les notions essentielles qui sont attachées à une variété de Poisson M et on rappelle les théories cohomologiques associées au problème des déformations de la structure de Poisson de M , et de l'algèbre associative et de Lie des fonctions lisses sur M . Le lecteur pourra se reporter à [CW, Va2] s'il souhaite plus d'informations sur la géométrie de Poisson et à [Gu4, Ster2] qui offrent une synthèse des résultats accumulés sur la théorie des produits-star depuis l'article fondateur [BFFLS].

I.1 Géométrie de Poisson.

Définition I.1.1

Un crochet de Poisson sur une variété différentiable M est une application bilinéaire $\{, \}$ sur l'algèbre $N = C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M vérifiant

- (i) *L'antisymétrie:*

$$\{u, v\} = -\{v, u\} \quad \forall u, v \in N$$
- (ii) *La règle de Leibniz:*

$$\{u, vw\} = \{u, v\}w + \{u, w\}v \quad \forall u, v, w \in N$$
- (iii) *L'identité de Jacobi:*

$$\{\{u, v\}, w\} + \{\{v, w\}, u\} + \{\{w, u\}, v\} = 0 \quad \forall u, v, w \in N.$$

Une variété munie d'un crochet de Poisson est appelée variété de Poisson.

Soient $(M, \{, \})$ une variété de Poisson et $N = C^\infty(M)$. Le crochet de Poisson fait de N une algèbre de Lie. La règle de Leibniz implique, pour toute fonction lisse f sur M , que l'application linéaire $g \mapsto \{f, g\}$ est une dérivation de N . A chaque fonction f correspond

donc un champ de vecteurs H_f , appelé l'Hamiltonien de f : $H_f(g) = \{f, g\}$. De l'identité de Jacobi, on déduit également que

$$[H_f, H_g] = H_{\{f, g\}},$$

autrement dit l'application $f \mapsto H_f$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $(N, \{, \})$ dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens. Enfin, compte tenu des propriétés (i) et (ii) de la définition I.1.1, il existe un unique 2-tenseur contravariant antisymétrique, noté Λ , tel que

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg).$$

Ce tenseur Λ est appelé tenseur de Poisson de la variété de Poisson M ou encore *bivecteur de Poisson*.

Notons $\mathcal{V}^*(M)$ l'espace des tenseurs contravariants totalement antisymétriques sur M . Afin d'exprimer l'identité de Jacobi en termes du tenseur Λ , on rappelle que le crochet de Schouten $[\cdot, \cdot]_S$ est par définition l'unique extension du commutateur des champs de vecteurs à $\mathcal{V}^*(M)$ telle que

$$1) [P, Q]_S = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, P]_S$$

$$2) [P, [Q, R]_S]_S = [[P, Q]_S, R]_S + (-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, [P, R]_S]_S$$

pour $P \in \mathcal{V}^p(M)$, $Q \in \mathcal{V}^q(M)$, $R \in \mathcal{V}^*(M)$.

Le crochet de Schouten satisfait donc l'identité de Jacobi graduée pour le décalé $\mathcal{V}^*(M)[1]$ (qui est l'espace gradué $\mathcal{V}^*(M)$ dont la graduation est baissée d'une unité: un k -tenseur est de degré k dans $\mathcal{V}^*(M)$ et de degré $k-1$ dans $\mathcal{V}^*(M)[1]$), à savoir:

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[[P, Q]_S, R]_S + (-1)^{(q-1)(p-1)}[[Q, R]_S, P]_S + (-1)^{(r-1)(q-1)}[[R, P]_S, Q]_S = 0,$$

pour $P \in \mathcal{V}^p(M)$, $Q \in \mathcal{V}^q(M)$, $R \in \mathcal{V}^*(M)$.

Le crochet des fonctions $\{, \}$ associé à Λ (comme plus haut) satisfait l'identité de Jacobi si et seulement si Λ vérifie l'égalité:

$$[\Lambda, \Lambda]_S = 0.$$

Pour vérifier ce point, il suffit de se placer dans le domaine U d'une carte de M de coordonnées locales (x_i) . Dans ces coordonnées, le crochet de Poisson s'écrit sous la forme:

$$\{f, g\}|_U = \Lambda^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

ici et dans la suite, on a utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, et les fonctions locales Λ^{ij} sont les coefficients du tenseur de Poisson Λ . L'antisymétrie du crochet se traduit alors sur les coefficients par:

$$\Lambda^{ij} = -\Lambda^{ji}$$

et l'identité de Jacobi équivaut à:

$$\Lambda^{ri} \frac{\partial \Lambda^{jk}}{\partial x_r} + \Lambda^{rj} \frac{\partial \Lambda^{ki}}{\partial x_r} + \Lambda^{rk} \frac{\partial \Lambda^{ij}}{\partial x_r} = 0.$$

Par définition même du crochet de Schouten sur U , le premier membre de cette relation est la composante (ijk) de $-\Lambda, \Lambda]_S$. D'où l'assertion annoncée.

Dans la suite, on désignera notre variété de Poisson par le couple (M, Λ) . Au bivecteur de Poisson Λ , il est classique d'associer le morphisme de fibrés vectoriels

$$\begin{aligned} \# : T^*M &\longrightarrow TM \\ \alpha &\longmapsto \alpha^\# \end{aligned}$$

défini par

$$\beta(\alpha^\#) = \Lambda(\alpha, \beta)$$

pour tout élément α et β d'une même fibre de T^*M . Remarquons au passage que l'on a $\#(df) = H_f$ pour toute fonction f de N .

On appelle *rang de M* au point x , le rang de l'application linéaire $\#_x : T_x^*M \rightarrow T_xM$. En coordonnées locales, c'est le rang de la matrice $\Lambda^{ij}(x)$. Si le rang de M est constant, égal à $2n$, la structure de Poisson est dite régulière et $h = \dim(M) - 2n$ s'appelle la codimension de M . En particulier, si $h = 0$, c'est-à-dire si le rang de M est partout égal à la dimension de M , $\#$ est un isomorphisme et M est une variété symplectique dont la 2-forme symplectique n'est autre que $\omega = \#^{-1}(\Lambda)$.

On appelle *champ caractéristique de M* , ou *distribution caractéristique*, le sous-ensemble

$$C = \bigcup_{x \in M} C_x$$

où C_x est le sous-espace vectoriel de l'espace tangent T_xM engendré par l'image de $\#_x : T_x^*M \rightarrow T_xM$. A. Kirillov a montré que la distribution caractéristique C est complètement intégrable au sens de Stefan [Stef] et Sussmann [Su], et donc définit un feuilletage généralisé¹. Les feuilles de ce feuilletage ne sont pas nécessairement de dimension égale, mais toutes ont une dimension paire et sont des variétés symplectiques. Une façon d'énoncer ce résultat est donnée par la

Proposition I.1.2 [Kir, We1]

On munit M de la relation $\sim$ définie comme suit: $x \sim y$ si et seulement s'il existe une courbe joignant x et y , dont chaque segment est un morceau de courbe intégrale d'un champ de vecteurs hamiltonien sur M . Alors $\sim$ est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence sont des sous-variétés symplectiques, appelées les feuilles de la structure de Poisson.

¹ On reviendra plus précisément sur la notion de feuilletage dans le second chapitre

Exemple I.1.3

L'exemple le plus simple de variété de Poisson non régulière est le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le 2-tenseur Λ sur $\mathfrak{g}^*$ donné par

$$\Lambda_\mu(X, Y) = \langle \mu, [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \mu \in \mathfrak{g}^*,$$

définit une structure de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$, appelée structure de Poisson-Lie. On peut aussi écrire

$$\{f, g\}(\mu) = \langle \mu, [d_\mu f, d_\mu g] \rangle \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

où $d_\mu f \in L(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{g}$ désigne la différentielle de f au point μ .

Si $X_1, \dots, X_m$ est une base de $\mathfrak{g}$ et $x_1, \dots, x_m$ le système de coordonnées global de $\mathfrak{g}^*$ associé à cette base, on a

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^m C_{ij}^k x_k$$

où les C_{ij}^k sont les constantes de structure de $\mathfrak{g}$.

Proposition I.1.4 [Kir, We1]

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ son dual. Les feuilles symplectiques de la structure de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ ne sont autre chose que les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$.

Preuve:

Prenons un groupe de Lie G connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On désigne par Ad (resp. Ad^*) la représentation adjointe (resp. coadjointe) de G dans $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}^*$), et par ad (resp. ad^*) l'action correspondante de $\mathfrak{g}$. On rappelle rapidement ce que sont ces actions. Définissons d'abord

$$\sigma_g(h) = ghg^{-1} \quad \forall g, h \in G.$$

La différentielle en 0 de cette application est la représentation adjointe:

$$Ad(g)(X) = d(\sigma_g)|_0(X) \quad \forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

La représentation coadjointe est la contragrédiente de la précédente:

$$\langle Ad^*(g)(\xi), X \rangle = \langle \xi, Ad(g^{-1})(X) \rangle \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Enfin, les actions ad et ad^* sont les différentielles en 0 de Ad et Ad^* respectivement. Notons (X_i) une base de $\mathfrak{g}$ et (x_i) le système de coordonnées global qui lui est associé. Dans ces notations, la courbe γ_i du champ de vecteurs hamiltonien H_{x_i} relatif à la fonction x_i , passant par un point ξ de $\mathfrak{g}^*$ à l'instant $t = 0$, est donnée par

$$\gamma_i(t) = Ad^*(\exp(-tX_i))(\xi).$$

En effet, pour tout X de $\mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} H_{x_i}(X)(\xi) &= \langle \xi, [X_i, X] \rangle = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle \xi, Ad \exp(tX_i)(X) \rangle = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle Ad^* \exp(-tX_i)(\xi), X \rangle = \\ &= - \langle ad^*(X_i)(\xi), X \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe intégrale de H_{x_i} passant par ξ en $t = 0$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d\gamma_i}{dt}(t) = -ad^*(X_i)(\gamma_i(t))$$

avec la condition initiale

$$\gamma_i(0) = \xi.$$

Par ailleurs, G est engendré en tant que groupe par l'image de l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ (par connexité de G) et tout champ de vecteurs hamiltonien est combinaison linéaire des H_{x_i} . Le résultat s'ensuit. $\square$

On retrouve en particulier le fait que les orbites de la représentation coadjointe sont des variétés symplectiques; un résultat important dû à Kirillov-Kostant-Souriau (voir [Kir] ou [Ab-Ma] par exemple).

Le fait qu'une variété de Poisson M soit toujours feuilletée (feuilletage régulier si la structure de Poisson de M est régulière, feuilletage singulier dans le cas général) suggère la notion importante de fonction sur M constante le long des feuilles de M . Remarquons qu'une fonction f est constante le long des feuilles de M si et seulement si son Hamiltonien H_f est nul. Une telle fonction est appelée *fonction de Casimir*. Signalons aussi que dans le cas où $M = \mathfrak{g}^*$ est le dual d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et si G désigne le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, les fonctions de Casimir coïncident avec les fonctions sur $\mathfrak{g}^*$ qui sont G -invariantes. (On rappelle qu'une fonction f sur $\mathfrak{g}^*$ est G -invariante si pour tout élément g de G , on a :

$$g.f(\xi) := f(Ad^*(g)(\xi)) = f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.)$$

Remarque I.1.5

De manière plus générale, pour une variété de Poisson M et pour toute sous-algèbre S de $N = C^\infty(M)$, stable par le crochet de Poisson, on peut définir les Casimir de S comme étant les éléments de S d'Hamiltonien nul.

Insérons maintenant les notions de morphismes de Poisson, de sous-variétés de Poisson et de variétés de Poisson produit.

Définition I.1.6

Soient (M_1, Λ_1) et (M_2, Λ_2) deux variétés de Poisson. Une application $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ entre M_1 et M_2 est un morphisme de Poisson si Λ_1 et Λ_2 sont reliés par Φ , ou, ce qui est équivalent, si les crochets de Poisson $\{, \}_1$ et $\{, \}_2$ respectifs satisfont

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \Phi \quad \forall f, g \in C^\infty(M_2).$$

Nous dirons qu'une variété de Poisson $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda})$ est une sous-variété de Poisson d'une variété de Poisson (M, Λ) si $\tilde{M}$ est une sous-variété de M et si l'immersion injective de $\tilde{M}$

dans M est un morphisme de Poisson. Notons que si la structure de Poisson $\tilde{\Lambda}$ existe, elle est unique.

Définition I.1.7

Si (M_1, Λ_1) et (M_2, Λ_2) sont deux variétés de Poisson, on appelle variété de Poisson produit de M_1 et M_2 , la variété de Poisson $(M_1 \times M_2, \Lambda)$ où $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$.

Toute variété symplectique peut être recouverte, via le théorème de Darboux, par des cartes canoniques dans lesquelles la structure de Poisson est constante. Cela n'est plus vrai dans le cas d'une variété de Poisson non symplectique. Cependant, on dispose d'un résultat voisin du théorème de Darboux: le théorème fondamental de décomposition de Weinstein. Ce dernier s'énonce comme suit.

Théorème I.1.8 [We1]

Soient (M, Λ) une variété de Poisson de dimension m et x_0 un point de M . On suppose que le rang de Λ en x_0 est $2r$. Alors, il existe une carte (U, φ) de M en x_0 , dite carte de Weinstein, dont les applications coordonnées associées $(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, z_1, \dots, z_{m-2r})$ vérifient les relations de commutation

$$\begin{aligned} \{p_i, q_j\} &= \delta_{i,j} & \{z_a, z_b\}(x_0) &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= \{q_i, q_j\} = 0 \\ \{p_i, z_a\} &= \{q_i, z_a\} = 0, \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kroenecker et $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $a, b \in \{1, \dots, m-2r\}$. Les crochets $\{z_a, z_b\}$ ne sont fonctions que des $z_1, \dots, z_{m-2r}$ et l'expression du crochet de Poisson dans la carte (U, φ) est la suivante

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} \right) + \sum_{1 \leq a, b \leq m-2r} \{z_a, z_b\} \frac{\partial u}{\partial z_a} \frac{\partial v}{\partial z_b}.$$

Corollaire I.1.9 [We1]

On conserve les hypothèses du théorème précédent. Alors, il existe un ouvert U contenant x_0 qui s'identifie par un difféomorphisme φ de Poisson à une variété de Poisson produit $S \times R$ où S est un ouvert de $\mathbb{R}^{2r}$ muni de la structure symplectique canonique et R est un ouvert de $\mathbb{R}^{m-2r}$ muni d'une structure de Poisson dont le rang du tenseur associé est nul en $\varphi(x_0)$. Les facteurs S et R sont uniques à difféomorphisme local de Poisson près.

Remarques I.1.10

i) Si le rang de Λ est constant sur un voisinage U de x_0 , alors pour tout x de U , on a $\{z_a, z_b\}(x) = 0$ (sinon le rang de Λ en x augmenterait); dans ce cas, l'expression du crochet se réduit à

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} \right).$$

ii) Si M est une variété de Poisson régulière, le rang est constant partout et i) s'applique sur tout ouvert de M . Dans ce cas particulier, on retrouve les cartes décrites par Lichnerowicz dans [Li1].

I.2 Cohomologie de Poisson et première interprétation.

Dans ce paragraphe, (M, Λ) désigne encore une variété de Poisson, $N = C^\infty(M)$ est l'algèbre des fonctions lisses sur M , $\mathcal{V}^*(M)$ désigne l'espace gradué des tenseurs contravariants totalement antisymétriques, et on note $\Omega^*(M)$ l'espace gradué des formes sur M . La cohomologie de Poisson de (M, Λ) (encore appelée Λ -cohomologie ou cohomologie de Lichnerowicz-Poisson) est définie comme suit.

Définition I.2.1

Soit $\sigma : \mathcal{V}^*(M) \rightarrow \mathcal{V}^{*+1}(M)$ l'opérateur défini par

$$\sigma = [\Lambda, \cdot]_S.$$

L'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten permet de montrer que σ est un opérateur de cohomologie i.e. $\sigma^2 = 0$. Le complexe $(\mathcal{V}^*(M), \sigma)$ est le complexe de Poisson de M et la cohomologie associée, que l'on notera dorénavant par $H_\Lambda^*(M)$, s'appelle la cohomologie de Poisson de M .

Le lecteur trouvera dans [Hue] une définition algébrique de la cohomologie de Poisson et dans [CW, APP, Mon] des études récentes sur cette cohomologie.

On rappelle que l'on peut définir une structure d'algèbre de Lie (de dimension infinie) sur $\Omega^1(M)$ via le crochet:

$$\{\alpha, \beta\} = L_{\alpha\#}\beta - L_{\beta\#}\alpha - d(\Lambda(\alpha, \beta)) \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M).$$

Ce crochet est l'unique extension du crochet donné par $\{df, dg\} = d\{f, g\}$ satisfaisant à

$$\{\alpha, f\beta\} = f\{\alpha, \beta\} + (\alpha\#f)\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M), \forall f \in N = C^\infty(M).$$

Il fait de $\#$ un morphisme d'algèbres de Lie de $\Omega^1(M)$ dans $\mathcal{V}^1(M)$ et munit le fibré cotangent T^*M de M d'une structure naturelle que l'on appelle de façon un peu pédante structure d'algébroïde de Lie. On peut alors montrer ([Va2] p.44) que l'opérateur σ :

$$\sigma : \mathcal{V}^k(M) \rightarrow \mathcal{V}^{k+1}(M)$$

vérifie

$$\begin{aligned} \sigma Q(\alpha_0, \dots, \alpha_k) &= \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \alpha_i^\# (Q(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k)) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} Q(\{\alpha_i, \alpha_j\}, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k), \end{aligned}$$

ici Q appartient à $\mathcal{V}^k(M)$, les α_i sont des 1-formes sur M et $\hat{}$ désigne l'omission.

Signalons également que le prolongement naturel $\tilde{\#}$ de $\#$ aux puissances extérieures de T^*M et aux sections de ce fibré:

$$\tilde{\#}\lambda(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = (-1)^q \lambda(\alpha_0^\#, \dots, \alpha_{q-1}^\#)$$

entrelace σ et la différentielle extérieure d de de Rham, donc induit un homomorphisme naturel de $H_{DR}^*(M)$ dans $H_\Lambda^*(M)$ [Kos]. Cet homomorphisme est un isomorphisme dans le cas symplectique.

Définition I.2.2 [Kon2, Gu4]

• Une déformation de la structure Λ d'une variété de Poisson (M, Λ) est une série formelle de la forme

$$\Lambda_\nu = \Lambda + \sum_{k \geq 1} \nu^k \alpha_k,$$

ici les α_k sont des 2-tenseurs sur M , telle que l'on ait formellement l'égalité $[\Lambda_\nu, \Lambda_\nu]_S = 0$.

• Deux déformations Λ_ν et Λ'_ν sont dites équivalentes s'il existe un opérateur différentiel formel T de la forme: $T = Id + \sum_j \frac{1}{j!} D^j$ où $D = \sum \nu^p D_p$ est une série de champs de vecteurs D_p et tel que

$$T\{u, v\}_\nu = \{Tu, Tv\}'_\nu,$$

si l'on note $\{u, v\}_\nu = \Lambda_\nu(du, dv)$ et $\{u, v\}'_\nu = \Lambda'_\nu(du, dv)$.

Cela étant dit, on est en mesure d'interpréter les premiers espaces de la cohomologie de Poisson: D'abord, $H_\Lambda^0(M)$ est l'espace $I(M)$ des fonctions de Casimir, *i.e.*

$$H_\Lambda^0(M) = I(M) = \{f \in N = C^\infty(M) : H_f \equiv 0\}.$$

D'autre part,

$$H_\Lambda^1(M) = \frac{\mathcal{V}_\Lambda^1(M)}{\chi_\Lambda(M)}$$

où $\mathcal{V}_\Lambda^1(M)$ est l'espace des automorphismes infinitésimaux de la structure de Poisson (*i.e.* les champs X vérifiant $\sigma X = 0$, parfois appelés champs de Poisson) et $\chi_\Lambda(M)$ est l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens H_f ($f \in N$). Le second espace $H_\Lambda^2(M)$ classe les déformations formelles de la structure de Poisson Λ modulo les déformations triviales. Enfin, $H_\Lambda^3(M)$ contient les obstructions au prolongement d'une déformation de la structure de Poisson Λ à un ordre supérieur (sur tout ceci, voir la présentation générale dans l'appendice A.1).

I.3 Déformations des structures algébriques.

Dans cette section, on rappelle les notions de déformations au sens de [Ger] de l'espace $N = C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur une variété M , considéré soit comme algèbre associative, soit, si M est une variété de Poisson, comme algèbre de Lie. Le lecteur pourra consulter [Ger, Gu1, Li3] pour plus de détails.

a) Déformations associatives et cohomologie de Hochschild.

Définition I.3.1

• Une application bilinéaire de $N \times N$ dans $N[[\nu]]$ définie par la série formelle

$$u * v = uv + \sum_{n \geq 1} \nu^n C_n(u, v)$$

où les C_n sont des applications bilinéaires de $N \times N$ dans N est une déformation formelle de l'algèbre associative N (ou déformation formelle associative de N), si son extension naturelle en une application bilinéaire de $N[[\nu]] \times N[[\nu]]$ dans $N[[\nu]]$ satisfait formellement la condition d'associativité

$$(u * v) * w = u * (v * w)$$

pour des fonctions lisses u, v, w sur M .

• Deux déformations formelles $*$ et $'$ de l'algèbre associative N sont dites équivalentes s'il existe une série formelle

$$T = Id + \sum_{s \geq 1} \nu^s T_s$$

où les T_s sont des endomorphismes de N (T agit alors naturellement sur $N[[\nu]]$) satisfaisant formellement la relation

$$T(u *' v) = Tu * Tv.$$

A) Considérons à présent une déformation associative $*$ et notons

$$(u * v) * w - u * (v * w) = \sum_{n \geq 1} \nu^n D_n(u, v, w)$$

où

$$D_n(u, v, w) = \sum_{r+s=n, r, s \geq 0} C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w)).$$

Si nous posons

$$E_n(u, v, w) = \sum_{r+s=n, r, s \geq 1} C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w)),$$

nous voyons que

$$D_n(u, v, w) = E_n(u, v, w) - \delta C_n(u, v, w),$$

le dernier terme de cette expression étant ce que l'on appelle le cobord de Hochschild de la 2-cochaîne C_n . Revenons rapidement sur cette notion dans le contexte algébrique général.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative et $\mathcal{B}$ un $\mathcal{A}$ -bimodule. Une p -cochaîne de Hochschild est une application multilinéaire de $\mathcal{A}^{\otimes p}$ dans $\mathcal{B}$ (les 0-cochaînes étant les éléments de $\mathcal{B}$). Le cobord d'une p -cochaîne C est la $p+1$ -cochaîne définie par

$$\begin{aligned} \delta C(u_0, \dots, u_p) &= u_0 C(u_1, \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C(u_0, \dots, u_k u_{k+1}, \dots, u_p) + \\ &+ (-1)^{p+1} C(u_0, \dots, u_{p-1}) u_p. \end{aligned}$$

L'opérateur δ est un opérateur de cohomologie: $\delta^2 = 0$. Si on note $C^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ le $\mathcal{A}$ -module gradué des cochaînes de Hochschild, on obtient un complexe $(C^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \delta)$. La cohomologie correspondante $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ s'appelle la *cohomologie de Hochschild* (de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$).

La construction d'une déformation formelle associative de N au sens de la définition I.3.1 peut se faire par récurrence, c'est-à-dire en supposant que l'on ait trouvé des cochaînes $C_1, \dots, C_k$ pour lesquelles $D_i = 0$ pour tout $i \leq k$, et en cherchant C_{k+1} tel que $D_{k+1} = 0$. Dans ce cas, E_{k+1} ne dépend que des C_s pour $s \leq k$. Il a été prouvé dans [Ger] que la condition $D_i = 0$ pour $i \leq k$ implique $\delta E_{k+1} = 0$. Ainsi, E_{k+1} est en fait un cocycle de Hochschild et on peut trouver un bon C_{k+1} si et seulement si ce cocycle est exact.

Autrement dit, les obstructions à l'existence d'une déformation associative résident dans le troisième espace $H^3(N, N)$ de la cohomologie de Hochschild de N : si cet espace est réduit à zéro, l'existence d'une déformation formelle associative de N est assurée.

B) Considérons à présent deux déformations formelles de l'algèbre associative N que l'on note abusivement $*$ et $'$: $*$ est $\sum_{n \geq 0} C_n \nu^n$ et $'$ est $\sum_{n \geq 0} C'_n \nu^n$. Supposons que $*$ et $'$ soient équivalentes jusqu'à l'ordre n ; c'est-à-dire qu'il existe $T = Id + \sum_{s \geq 1} T_s \nu^s$ comme dans la définition I.3.1 tel que la relation

$$T(u *' v) = Tu * Tv$$

soit vérifiée formellement jusqu'à l'ordre n en ν . Notons encore $G_1 = 0$ et

$$\begin{aligned} G_i(u, v) = & \sum_{r+s=i, r, s \geq 1} T_s C'_r(u, v) - \sum_{s+s'=i, s, s' \geq 1} T_s(u) T_{s'}(v) \\ & - \sum_{r+s+s'=i, r, s, s' \geq 1} C_r(T_s(u), T_{s'}(v)) - \sum_{r+s=i, r, s \geq 1} (C_r(T_s(u), v) + C_r(u, T_s(v))). \end{aligned}$$

Cela étant posé, la relation d'équivalence jusqu'à l'ordre n de $*$ et $'$ peut se traduire par l'égalité:

$$C'_k - C_k + G_k = \delta T_k \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

La cochaîne $(C'_{n+1} - C_{n+1} + G_{n+1})$ est alors automatiquement un 2-cocycle de Hochschild dont la classe de cohomologie est l'obstruction au prolongement de l'équivalence au rang $n+1$. Ainsi, le second espace $H^2(N, N)$ de la cohomologie de Hochschild de N contient les classes d'équivalence des déformations formelles associatives de N . Lorsque cet espace est nul, toutes ces déformations sont équivalentes.

Les notions suivantes nous seront utiles pour la suite.

Définitions I.3.2

Soit $N = C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions lisses sur une variété différentiable M . Une application p -linéaire C de $N^{\otimes p}$ dans N est dite locale si $C(u_1, \dots, u_p)|_U = 0$ dès qu'un des arguments u_i vérifie $u_i|_U = 0$, U étant un ouvert de M . Cette application C est dite d -différentielle si elle est définie par un opérateur différentiel d'ordre au maximum d en chaque argument. Elle est dite nulle sur les constantes si $C(u_1, \dots, u_p) = 0$ dès qu'un des u_i est constant. (Ainsi, les applications C qui sont à la fois nulles sur les constantes et 1-différentielles sont des opérateurs différentiels d'ordre exactement 1 en chaque argument.)

Remarquons qu'il existe plusieurs variantes de la cohomologie de Hochschild de l'algèbre N des fonctions lisses sur une variété M . Par exemple, on peut considérer le sous-espace $C_{diff,nc}^*(N, N)$ de $C^*(N, N)$ des cochaînes différentielles qui s'annulent sur les constantes. On obtient ainsi un sous-complexe $(C_{diff,nc}^*(N, N), \delta)$ de $(C^*(N, N), \delta)$. La cohomologie résultante, notée $H_{diff,nc}^*(N, N)$, a été calculée par J. Vey dans [Vey] au moyen de résultats de Gelfand et Fuks. Un calcul plus explicite (sans suites spectrales) est donné dans la thèse de S. Gutt [Gu1]. Le résultat est

Théorème I.3.3 [Vey]

Le p -ième espace $H_{diff,nc}^p(N, N)$ de la cohomologie de Hochschild différentielle et nulle sur les constantes de N est isomorphe à l'espace $\mathcal{V}^p(M)$ des p -tenseurs contravariants antisymétriques sur M .

Remarquons que l'on peut aussi remplacer la condition de différentiabilité des cochaînes par des hypothèses plus faibles de localité ou de continuité, sans changer de manière essentielle la théorie [Gu3, Pin2, Nad].

Maintenant, on suppose que M est munie d'une structure de Poisson Λ et on considère la structure d'algèbre de Lie induite par Λ sur $N = C^\infty(M)$.

b) Déformations des algèbres de Lie et cohomologie de Chevalley.

Définition I.3.4

- Une application bilinéaire de $N \times N$ dans $N[[\nu]]$ définie par la série formelle

$$\{u, v\}_\nu = \{u, v\} + \sum_{r \geq 1} \nu^r C_r(u, v)$$

où les C_r sont des applications bilinéaires alternées de $N \times N$ dans N est une déformation formelle de l'algèbre de Lie $(N, \{, \})$ si son extension naturelle en une application bilinéaire de $N[[\nu]] \times N[[\nu]]$ satisfait formellement l'identité de Jacobi:

$$\{\{u, v\}_\nu, w\}_\nu + \{\{v, w\}_\nu, u\}_\nu + \{\{w, u\}_\nu, v\}_\nu = 0.$$

- Deux déformations formelles $\{, \}_\nu$ et $\{, \}'_\nu$ de l'algèbre de Lie N sont dites équivalentes s'il existe une série formelle

$$T = Id + \sum_{s \geq 1} \nu^s T^s$$

où les T_s sont à nouveau des endomorphismes de N satisfaisant formellement

$$T(\{u, v\}'_\nu) = \{Tu, Tv\}_\nu.$$

L'identité de Jacobi et la cohomologie de Chevalley sont les homologues pour les déformations formelles des algèbres de Lie de la condition d'associativité et de la cohomologie de Hochschild pour les déformations formelles associatives. Pour s'en convaincre, considérons une application bilinéaire alternée de $N \times N$ dans $N[[\nu]]$ de la forme

$$\{u, v\}_\nu = \{u, v\} + \sum_{r \geq 1} \nu^r C_r(u, v).$$

On a pour tout u, v, w dans N , la relation

$$\{\{u, v\}_\nu, w\}_\nu + \{\{v, w\}_\nu, u\}_\nu + \{\{w, u\}_\nu, v\}_\nu = \sum \nu^n D'_n(u, v, w)$$

où

$$D'_n(u, v, w) = \sum_{r+s=n, r, s \geq 0} \oint_{(u, v, w)} C_r(C_s(u, v), w).$$

Ici et dans la suite, $\oint_{(u, v, w)}$ désigne la somme sur les permutations circulaires de u, v, w . Si l'on pose

$$E'_n(u, v, w) = \sum_{r+s=n, r, s \geq 1} \oint_{(u, v, w)} C_r(C_s(u, v), w),$$

on constate que

$$D'_n = E'_n - \partial C_n.$$

La cohomologie ∂ qui apparaît ici est la cohomologie de Chevalley. Revenons rapidement sur sa définition.

De manière générale, considérons une algèbre de Lie $(\mathcal{A}, [,])$ et un $\mathcal{A}$ -module d'algèbre de Lie $\mathcal{B}$ c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'une action de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ vérifiant

$$[a_1, a_2].b = a_1.(a_2.b) - a_2.(a_1.b) \quad \forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{B}.$$

Par définition, une cochaîne de Chevalley est une application multilinéaire alternée de $\mathcal{A}^{\otimes p}$ dans $\mathcal{B}$. Le cobord d'une p -cochaîne C est la $p+1$ -cochaîne définie par

$$\begin{aligned} \partial C(a_0, \dots, a_p) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i.C(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} C([a_i, a_j], a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_p). \end{aligned}$$

La cohomologie résultante est la cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{B}$. On la note $H_{Chev}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Deux exemples classiques I.3.5

- Si M est une variété différentiable et $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M . Alors, $H_{Chev}^2(\chi(M), \chi(M))$ est réduit à $\{0\}$ [Li4, Li5].
- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Alors, il résulte du théorème de Whitehead que $H_{Chev}^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \{0\}$.

Finalement, des considérations semblables à celles du paragraphe a) peuvent être faites ici. En effet, lorsqu'on cherche à construire successivement les C_r d'une déformation formelle de l'algèbre de Lie $(N, \{, \})$, on rencontre à chaque cran une obstruction représentée par un élément de $H_{Chev}^3(N, N)$. De même, l'étude de l'équivalence de deux déformations formelles de l'algèbre de Lie $(N, \{, \})$ fait apparaître, à chaque cran, une obstruction dans $H_{Chev}^2(N, N)$.

Comme pour la cohomologie de Hochschild, on obtient des théories consistantes si on restreint l'espace des cochaînes de Chevalley aux applications différentielles (resp. aux applications 1-différentielles) qui s'annulent sur les constantes. Les cohomologies résultantes seront notées $H_{Chev,diff,nc}^*(N, N)$ (resp. $H_{Chev,1-diff,nc}^*(N, N)$). En fait, on a le

Théorème I.3.6

Le p -ième espace $H_{Chev,1-diff,nc}^p(N, N)$ et le p -ième espace $H_\Lambda^p(M)$ de la cohomologie de Poisson de (M, Λ) sont isomorphes.

Ce théorème a été prouvé en premier lieu dans [Lil] pour les variétés de Poisson régulières. Par définition même de la cohomologie de Chevalley et de celle de Poisson, il reste valable dans le cas d'une variété de Poisson arbitraire.

I.4 Produits-star sur les variétés de Poisson.

Définition I.4.1

Soient M une variété de Poisson de crochet de Poisson $\{, \}$ et $N = C^\infty(M)$. Un produit-star sur M est une application bilinéaire $\star$ de $N \times N$ dans les séries formelles $N[[\nu]]$ de la forme

$$u \star v = \sum_{n \geq 0} \nu^n C_n(u, v)$$

telle que:

- (i) $C_0(u, v) = uv$ $C_1(u, v) = \{u, v\} \quad \forall u, v \in N$
- (ii) $C_n(u, v) = (-1)^n C_n(v, u) \quad \forall u, v \in N, \forall n \geq 0$
- (iii) $1 \star u = u \star 1 = u \quad \forall u \in N$
- (iv) $\sum_{r+s=n, r, s \geq 0} C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w)) = 0 \quad \forall u, v, w \in N, \forall n \geq 0$
- (v) Les C_n sont des opérateurs bidifférentiels.

Remarques I.4.2

1) L'antisymétrisation d'un produit-star sur M , à savoir:

$$[u, v]_\star = \frac{1}{2\nu}(u \star v - v \star u),$$

définit une déformation formelle de l'algèbre de Lie $(N = C^\infty(M), \{, \})$.

2) De manière plus générale, on peut remplacer N dans la définition I.4.1 par une sous-algèbre S stable par le crochet de Poisson et ne définir le produit-star que sur S . Par exemple, dans le cas où M est le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie, il est intéressant et naturel de considérer la sous-algèbre de $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ constituée des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$.

3) On peut être amené pour diverses raisons à abandonner certaines hypothèses du produit-star. En particulier, l'hypothèse (v) de bidifférentiabilité est affaiblie dans plusieurs constructions de déformations sur les orbites coadjointes. Nous abandonnerons justement

cette hypothèse au chapitre III de cette thèse lorsque nous construirons des produits-star algébriques sur les duals des algèbres de Lie nilpotentes.

Exemples I.4.3

1) L'exemple le plus simple de produit-star est donné par le produit-star de Moyal-Weyl sur la variété symplectique $\mathbb{R}^{2n}$ munie de sa 2-forme symplectique canonique

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i.$$

La structure de Poisson induite par ω s'écrit:

$$\Lambda(du, dv) = \{u, v\} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i}.$$

L'expression du produit-star de Moyal-Weyl est:

$$u * v = uv + \sum_{r \geq 1} \frac{\nu^r}{r!} P^r(u, v),$$

où $P^r(u, v)$ désigne la r -ième puissance du crochet de Poisson. Dans le système de coordonnées global de Darboux: $(x_1, \dots, x_{2n}) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, cela s'écrit

$$P^r(u, v) = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r} \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_r j_r} \partial_{i_1, \dots, i_r}^r (u) \partial_{j_1, \dots, j_r}^r (v).$$

Ce produit-star a été introduit par Moyal dans [Mo]. Il provient de la composition des opérateurs sur $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ via la transformation de Weyl [Wey].

2) L'exemple précédent se généralise à l'espace plat $\mathbb{R}^d$ muni d'une structure de Poisson constante ou plus généralement encore à une variété de Poisson munie d'une connexion de Poisson plate. (Rappelons qu'une connexion de Poisson sur une variété de Poisson (M, Λ) est une connexion affine Γ sans torsion dont la dérivation covariante ∇ vérifie $\nabla \Lambda = 0$. On montre [Li2, Va2] qu'une variété de Poisson admet une connexion de Poisson si et seulement si elle est régulière. Une connexion de Poisson est dite plate si elle est de courbure nulle.) Pour obtenir un produit-star sur une variété de Poisson munie d'une connexion de Poisson plate, il suffit de remplacer les dérivées partielles de la formule de Moyal par les dérivées covariantes de la connexion.

La théorie des produits-star s'est considérablement développée autour des problèmes d'existence et de classification. Nous aimerions insister maintenant sur le fait que ces problèmes sont d'abord des problèmes de cohomologie.

a) Sur l'existence des produits-star.

Nous venons de voir qu'un produit-star sur une variété de Poisson M est une déformation formelle particulière de l'algèbre associative N des fonctions lisses sur M qui, par antisymétrisation, donne une déformation de la structure d'algèbre de Lie de N . Les problèmes

d'existence des produits-star sont donc liés aux théories cohomologiques de Hochschild et de Chevalley (cf. section 3 du chapitre).

En étudiant ces cohomologies, les auteurs ont montré que l'obstruction à l'existence d'un produit-star sur une variété symplectique peut être localisée dans le troisième espace de la cohomologie de de Rham ([Vey, NV, Gu1]). On retrouve cette obstruction cohomologique quand on recouvre la variété symplectique par des domaines de cartes de Darboux et que l'on essaie de recoller brutalement les produits-star locaux de Moyal. Cette obstruction a finalement été levée d'abord dans des cas particuliers (comme les fibrés cotangents ou les variétés parallélisables), puis sur une variété symplectique quelconque [DW-L1]. L'existence de produits-star dans le cas symplectique a ensuite été redémontrée de manière plus géométrique dans [Fe1, Fe2] et [OMY].

L'idée ingénieuse de Fedosov dans [Fe1] (exposée aussi dans [We2]) a été d'associer à M symplectique un fibré naturel $\mathcal{W}$ en algèbres de Weyl. En fait, la structure symplectique de M fait de chaque espace tangent $T_x M$ un espace symplectique et le fibré $\mathcal{W}$ est défini par:

$$\mathcal{W} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{W}_x,$$

où $\mathcal{W}_x$ désigne l'algèbre de Weyl associée à l'espace symplectique $T_x M$; la structure d'algèbre étant donnée par le produit-star de Moyal-Weyl. La méthode de [Fe1] consiste alors à fixer une connexion symplectique D_0 sur M , à l'étendre naturellement en une connexion D à $\mathcal{W}$, puis par un procédé itératif à déformer D en une connexion plate $\bar{D}$ sur $\mathcal{W}$. Il prouve ensuite que $C^\infty(M)[[\nu]]$ s'identifie à la sous-algèbre de l'algèbre $\Gamma(\mathcal{W})$ des sections de $\mathcal{W}$ formée des sections horizontales de $(\mathcal{W}, \bar{D})$. Ce dernier point lui permet de transférer la structure d'algèbre de $\Gamma(\mathcal{W})$ à $C^\infty(M)[[\nu]]$ et donc d'obtenir un produit-star sur M .

Notons au passage que la méthode de Fedosov a été par la suite maintes fois réutilisée à des fins diverses et dans des situations très différentes (citons [BNW, CFT, Far, Va3] par exemple).

La considération naïve des premiers résultats d'existence des produits-star du cas symplectique (notamment ceux de [NV]) dans le cas général d'une variété de Poisson fait apparaître, au lieu du troisième espace de la cohomologie de de Rham, le troisième espace de la cohomologie de Poisson.

Dans le cas des variétés de Poisson régulières, ce problème cohomologique a été contourné par Masmoudi dans [Mas1, Mas2] en généralisant les méthodes symplectiques de De Wilde et Lecomte. Notons que cette généralisation a été possible car, dans le cas régulier, on dispose encore de cartes dans lesquelles la structure de Poisson est constante (cf. remarques I.1.10) donc de produits-star de Moyal locaux.

Pour les variétés de Poisson quelconques, la structure de Poisson n'étant plus localement constante, il a fallu d'abord montrer l'existence d'un produit-star sur $\mathbb{R}^d$. Elle a été obtenue par Kontsevich pour $\mathbb{R}^d$ puis pour M quelconque en 1997; elle apparaît dans [Kon2] comme conséquence du théorème de formalité.

b) Sur la classification des produits-star.

Les premières classifications de produits-star ont été données dans [DW-L1, DW-L2] par M. De Wilde et P.B.A Lecomte. Ces auteurs ont montré que les classes d'équivalence des produits-star sur une variété symplectique M sont en bijection avec les séries formelles $H_{DR}^2(M)[[\nu]]$ en ν à coefficients dans le deuxième espace de la cohomologie de de Rham de M .

Avec [Fe2, BCG, NT, WX], on apprend notamment que toute classe d'équivalence de produit-star sur M symplectique contient un produit-star construit par la méthode de Fedosov. Dans [Del], P. Deligne compare les classifications données par De Wilde-Lecomte et celles de B.V. Fedosov, en utilisant le langage de la géométrie algébrique. Dans [GR], S. Gutt et J. Rawnsley établissent une comparaison plus directe et plus explicite.

Dans son article [Kon2], M. Kontsevich classe les produits-star sur une variété de Poisson quelconque au moyen de classes d'équivalence de jauge des 2-tenseurs formels contravariants dans $\mathcal{V}^2(M)[[\nu]]$, faisant ainsi apparaître le second espace de la cohomologie de Poisson:

Théorème I.4.4 [Kon2]

Les classes d'équivalence des produits-star sur une variété de Poisson (M, Λ) sont en bijection avec les classes d'équivalence des déformations de Λ de la forme

$$\Lambda_\nu = \Lambda\nu + \alpha_1\nu^2 + \alpha_2\nu^3 + \dots,$$

où les α_i sont des 2-tenseurs contravariants sur M tels que l'on ait formellement l'égalité

$$[\Lambda_\nu, \Lambda_\nu]_S = 0.$$

Ce théorème met un point d'orgue au problème initial de la quantification par déformation, tel qu'il a été énoncé dans [BFFLS]. Il donne aussi une motivation pour le calcul de la cohomologie de Poisson.

I.5 Vers l'étude des produits-star tangentiels.

Nous avons rappelé dans ce chapitre comment les déformations des structures d'algèbre associative et d'algèbre de Lie des fonctions lisses $N = C^\infty(M)$ sur une variété de Poisson M sont reliées aux cohomologies de Hochschild, de Chevalley, et plus spécifiquement de Poisson. De la même manière, on peut être amené à déformer d'autres structures ou à construire d'autres types de déformations. A chaque fois, il y a une théorie cohomologique appropriée: cohomologie cyclique [CFS] pour les produits-star fermés, cohomologie des bigèbres de Lie pour les déformations des groupes de Lie-Poisson, cohomologie des graphes [ABM, AM] pour les produits-star de Kontsevich ...

Dans ce travail, nous nous intéresserons tout particulièrement aux problèmes d'existence et de classification des produits-star tangentiels sur une variété de Poisson M . En réalité, il y a de nombreuses façons de définir la notion de tangentialité. Lorsque rien n'est précisé, on entend, par produit-star tangentiel sur M , un produit-star différentiel qui se restreint

sans ambiguïté à toutes les feuilles symplectiques de M . C'est là le sens le plus fort du terme. Cependant, de tels produits-star n'existant pas en général, des notions plus faibles et plus souples ont dû être considérées. Parmi ces versions affaiblies de tangentialité, nous retiendrons:

Définition I.5.1 (A -tangentialité)

Soient M une variété de Poisson, $N = C^\infty(M)$ et A une sous-algèbre de N , stable par le crochet de Poisson. Un produit-star algébrique $\star$ sur M est dit A -tangential s'il vérifie, pour toute fonction u sur M de Casimir, appartenant à A ,

$$u \star v = uv \quad \forall v \in A.$$

On dira qu'il est C^∞ -tangential si $A = N$.

Dans le cas d'une algèbre de Lie, cette définition se précise et peut être légèrement modifiée:

Définition I.5.2 (tangentialité algébrique)

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ l'algèbre des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{g}^*$. Supposons que S soit une sous-algèbre de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, stable par le crochet de Poisson, et notons S^G l'espace des fonctions G -invariantes de S :

$$S^G = \{u \in S : g.u(\xi) = u(\text{Ad}^*(g)(\xi)) = u(\xi) \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*, g \in G\}.$$

Un produit-star algébrique sur $\mathfrak{g}^*$ est un produit-star tangential algébrique de S s'il vérifie, pour toute fonction u de S^G :

$$u \star v = uv \quad \forall v \in S.$$

Définition I.5.3 (tangentialité locale)

Soit M une variété de Poisson. Un produit-star algébrique $\star$ sur M est dit tangential local s'il est C^∞ -tangential sur tout ouvert de M .

Définition I.5.4 (tangentialité différentielle)

Soit M une variété de Poisson. Un produit-star différentiel et tangential sur M est un produit-star à la fois tangential local et différentiel.

Remarque I.5.5

- Si M est une variété de Poisson régulière, un produit-star différentiel et tangential sur M se restreint à toutes les feuilles symplectiques de M . En fait, dans le cas régulier, la définition I.5.4 équivaut à la notion de tangentialité donnée par Lichnerowicz dans [Li2] en termes d'opérateurs tangentiels définis à partir d'une connexion de Poisson (la notion de tangentialité de [Li2] a été rappelée dans l'appendice A.2).
- Dans le cas où M est une variété de Poisson quelconque, un produit-star différentiel noté $\star = \sum \nu^n C_n$ sur M , tel qu'en tout point x de M l'opérateur C_n est bidifférentiel et tangential à la feuille symplectique passant par x , est tangential (au sens de la définition

I.5.4); de plus la valeur de $u \star v$ au point x ne dépend que des restrictions de u et de v à la feuille passant par x . Nos notions de tangentialité ne garantissent pas cette propriété en général, sauf si le rang du tenseur de Poisson est constant au voisinage de x (par exemple, si ce rang est maximal).

Par souci de clarté, nous repréciserons dans chaque chapitre, s'il en est effectivement question, quel est le type de produit-star tangentiel que l'on considère.

Toutes ces déformations tangentielles (C^∞ , algébriques, locales ou différentielles) font intervenir une version tangentielle des théories cohomologiques de Hochschild, de Chevalley et de Poisson, décrites dans ce chapitre. Dans le cas des variétés de Poisson régulières, on trouve dans [Li2] le calcul des premiers espaces de la cohomologie de Hochschild tangentielle, ainsi que la notion de cohomologie de Poisson tangentielle. La cohomologie de Chevalley tangentielle a été utilisée dans [Mas1] pour montrer l'existence de produits-star tangentiels sur toute variété de Poisson régulière. La classification de tels produits-star passe par le calcul de la cohomologie de Poisson tangentielle. Cette cohomologie est peu traitée (si elle l'est) dans la littérature. Nous proposons de l'étudier dans le second chapitre de cette thèse.

CHAPITRE II

Calculs explicites de cohomologie de Poisson tangentielle

Ce chapitre est une introduction à l'étude de la cohomologie de Poisson tangentielle des variétés de Poisson régulières, une cohomologie importante pour la classification des produits-star tangentiels sur de telles variétés.

Après avoir rappelé la définition d'un feuilletage et fixé les notations du chapitre, on démontre dans la section 2 que la cohomologie de Poisson tangentielle d'une variété de Poisson régulière M s'identifie à la cohomologie de de Rham tangentielle du feuilletage symplectique de M . On prouve ensuite que toute variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ admet un bon recouvrement (U_i) i.e. tel que toute intersection finie d'ouverts ait une cohomologie de de Rham tangentielle nulle en degré supérieur à 0. On utilise ce résultat pour identifier la cohomologie de de Rham tangentielle à une cohomologie de Čech.

Comme toute cohomologie de feuilletage, la cohomologie de Poisson tangentielle est difficile à calculer en toute généralité. Dans la section 3, on rappelle des théorèmes connus de Dazord et Hector [DH] et de Vaisman [Va1, Va2] qui donnent le calcul de cette cohomologie pour des cas très particuliers de variétés de Poisson régulières.

Toute la suite du chapitre est consacrée à des calculs explicites de cette cohomologie pour des exemples caractéristiques pris dans les duals des algèbres de Lie, on notera aussi les implications de ces calculs pour la théorie des produits-star tangentiels. Plus précisément, toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ donne naissance à une variété de Poisson régulière: l'union Ω des orbites coadjointes de dimension maximale. Dans la section 4, on traite du cas nilpotent: Pour une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, on peut stratifier l'ouvert Ω relativement à une base de Jordan-Hölder B de $\mathfrak{g}$. La première de ces strates est un ouvert V_B , l'ouvert générique. Il est facile de remarquer que sa cohomologie de Poisson tangentielle est triviale en degré supérieur à zéro. On montre ici qu'il en est de même pour l'ouvert canonique $\bigcup_B V_B$, union des ouverts génériques relatifs à toutes les bases de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Il peut malheureusement arriver que cet ouvert $\bigcup_B V_B$ soit strictement plus petit que Ω . Bien plus, en analysant en détail le cas de $\mathfrak{g}_{4,1}$, nous verrons que les espaces de la cohomologie de Ω peuvent être non triviaux et même très vastes.

Dans la section 5, on considère une variété de Poisson régulière M de dimension 3 et on se sert des calculs élaborés dans [Va2] pour décrire les espaces de la cohomologie de

Poisson de M . Nous observons alors comment les espaces de la cohomologie de Poisson tangentielle sont imbriqués dans ceux de la cohomologie de Poisson.

Dans la section 6, nous étudions la cohomologie de Poisson tangentielle et non tangentielle de Ω pour chaque algèbre de Lie de dimension 3. Nos calculs font apparaître une division de ces algèbres de Lie en deux classes:

- celles pour lesquelles l'espace des orbites Ω/G est séparé et dont les groupes de cohomologie de Poisson et de Poisson tangentielle de Ω , $H_{\Lambda, \text{tan}}^k(\Omega)$ et $H_{\Lambda}^k(\Omega)$, peuvent être facilement calculés en utilisant les résultats rappelés en section 3;
- les autres pour lesquelles le feuilletage de Ω est plus complexe (l'espace des orbites n'y est plus séparé) et qui font intervenir des espaces de cohomologie énormes semblables à ceux rencontrés dans la section 4 pour $\mathfrak{g}_{4,1}$.

Enfin, on termine ce chapitre en donnant un exemple explicite de bon recouvrement pour l'ouvert Ω des orbites de dimension maximale de $\mathfrak{sl}(2)^*$.

II.1 Variétés de Poisson régulières et feuilletages.

Comme pour la plupart des notions importantes en mathématiques, il y a plusieurs façons de définir un feuilletage. Nous nous contenterons ici de la définition la plus simple et la plus géométrique, et renvoyons le lecteur à [CC], une référence récente sur le sujet.

Définition II.1.1

Un feuilletage $\mathcal{F}$ (régulier) de dimension n sur une variété M de dimension $m = n + l$ est une partition de M en sous-variétés immergées L_{α} de dimension n , les feuilles, telle qu'il existe au voisinage de chaque point de M une carte

$$\varphi = (x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$$

dans laquelle les composantes connexes de $L_{\alpha} \cap U$ sont définies par les équations $y = \text{const.}$ Une telle carte est dite carte adaptée (au feuilletage) ou encore carte distinguée. Les composantes connexes d'une feuille dans une carte adaptée sont les plaques.

Remarque II.1.2

Nous avons rappelé au chapitre I de cette thèse que toute variété de Poisson se décompose en variétés symplectiques, les feuilles symplectiques de la structure de Poisson. Dans le cas d'une variété de Poisson régulière M , les feuilles symplectiques forment un vrai feuilletage (au sens de la définition II.1.1), feuilletage que l'on appellera feuilletage symplectique de M . Pour ce feuilletage, les cartes de Weinstein [We1] ou encore celles décrites par Lichnerowicz dans [Li1] sont des cartes adaptées.

NOTATIONS:

Dans tout ce chapitre, pour une variété différentiable M , on notera $\mathcal{V}^*(M)$ l'espace des tenseurs contravariants totalement antisymétriques sur M et $\Omega^*(M)$ l'espace des formes sur M . Pour une variété de Poisson (M, Λ) , on conservera les notations du chapitre I; en particulier, on notera encore $\#$ le morphisme de fibré entre T^*M et TM et σ l'opérateur de cohomologie de Poisson associé à la structure de Poisson Λ .

Maintenant, soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée et notons $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ (i.e. le sous-fibré de TM défini par les champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}$). Comme dans [DH] ou [Li2], on peut choisir une distribution transversale $\nu\mathcal{F}$ de sorte que l'on ait la décomposition suivante du fibré tangent TM de M :

$$TM = \nu\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}.$$

En passant aux espaces duaux, on obtient une décomposition du fibré cotangent T^*M de M :

$$T^*M = \nu^*\mathcal{F} \oplus T^*\mathcal{F}.$$

Ces décompositions induisent une double graduation sur les tenseurs et sur les formes, à savoir:

$$\mathcal{V}^*(M) = \bigoplus_{p,q} \mathcal{V}_{p,q}(M) \quad \text{et} \quad \Omega^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Omega_{p,q}(M)$$

où $\mathcal{V}_{p,q}(M)$ (resp. $\Omega_{p,q}(M)$) désigne l'espace des sections du fibré $\wedge^p(\nu\mathcal{F}) \otimes \wedge^q(T\mathcal{F})$ (resp. $\wedge^p(\nu^*\mathcal{F}) \otimes \wedge^q(T^*\mathcal{F})$). Les éléments de $\mathcal{V}_{p,q}(M)$ et $\Omega_{p,q}(M)$ seront dits de type (p, q) . Et un opérateur sera dit homogène de type (a, b) s'il envoie les éléments de type (p, q) dans ceux de type $(p+a, q+b)$.

Rappelons ici que la différentielle extérieure d de de Rham se décompose sous la forme

$$d = d' + d'' + d_{2,-1},$$

où d' est de type $(1,0)$, d'' n'est autre que la différentielle tangente et est de type $(0,1)$, et $d_{2,-1}$ est bien entendu de type $(2,-1)$.

Supposons à présent que (M, Λ) soit une variété de Poisson régulière et notons $\mathcal{F}$ le feuilletage symplectique de M . On peut comme ci-dessus choisir une distribution transversale $\nu\mathcal{F}$. I. Vaisman a montré que le cobord de Poisson σ admet une décomposition analogue à celle de d :

Proposition II.1.3 [Va2]

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière et $\mathcal{F}$ son feuilletage symplectique. Si on se donne une distribution transversale $\nu\mathcal{F}$, on peut décomposer σ sous la forme

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

où σ' est de type $(-1, 2)$ et σ'' est de type $(0, 1)$.

Explicitement, on a:

$$\begin{aligned} \sigma' Q(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-2}, \beta_0, \dots, \beta_{q+1}) &= \\ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} Q(\{\beta_i, \beta_j\}, \alpha_0, \dots, \alpha_{p-2}, \beta_0, \dots, \hat{\beta}_i, \dots, \hat{\beta}_j, \dots, \beta_{q+1}) \\ \sigma'' Q(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \dots, \beta_q) &= \\ \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^{p+i} \beta_i^\# Q(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \dots, \hat{\beta}_i, \dots, \beta_q) + \\ \sum_{0 \leq i \leq p-1} \sum_{0 \leq j \leq q} (-1)^{p+i+j} Q(\{\alpha_i, \beta_j\}, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \dots, \hat{\beta}_j, \dots, \beta_q) + \\ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} Q(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \{\beta_i, \beta_j\}, \beta_0, \dots, \hat{\beta}_i, \dots, \hat{\beta}_j, \dots, \beta_q), \end{aligned}$$

pour tout Q dans $\mathcal{V}_{p,q}(M)$, pour tout α_i dans $\mathcal{V}_{1,0}(M)$ et β_i dans $\mathcal{V}_{0,1}(M)$, et où $\{ , \}$ désigne le crochet induit sur $\Omega^1(M)$ par la structure de Poisson Λ de M (cf. chapitre I).

II.2 Plusieurs versions de la cohomologie de Poisson tangentielle.

Dans [Li2], A. Lichnerowicz a défini la cohomologie de Poisson tangentielle d'une variété de Poisson régulière M en restreignant l'espace des cochaînes de la cohomologie de Poisson de M aux multichamps de vecteurs tangentiels. Il nous sera utile de définir cette cohomologie en utilisant les types des tenseurs:

Définition II.2.1

L'espace $\oplus_q \mathcal{V}_{0,q}(M)$ muni de l'opérateur σ'' constitue un complexe de cohomologie dont la cohomologie associée à savoir

$$H_{\Lambda, \tan}^q(M) = \frac{\text{Ker}(\sigma'' : \mathcal{V}_{0,q}(M) \rightarrow \mathcal{V}_{0,q+1}(M))}{\text{Im}(\sigma'' : \mathcal{V}_{0,q-1}(M) \rightarrow \mathcal{V}_{0,q}(M))}$$

est la cohomologie de Poisson tangentielle de M .

On remarque aussitôt que $H_{\Lambda, \tan}^0(M) = H_{\Lambda}^0(M)$. La cohomologie de Poisson tangentielle est importante pour la théorie des produits-star tangentiels, en effet: $H_{\Lambda, \tan}^1(M)$ paramètre les dérivations tangentielles des produits-star tangentiels sur M modulo les dérivations tangentielles intérieures; $H_{\Lambda, \tan}^2(M)$ classe ces produits-star et $H_{\Lambda, \tan}^3(M)$ contient les obstructions à la construction de tels produits-star sur M . (Ce dernier fait pourrait être omis puisque toute variété de Poisson régulière admet un produit-star tangentiel [Mas1]). Le lecteur trouvera les preuves de tous ces points dans l'appendice A.2 de cette thèse.

a) Cohomologie de de Rham tangentielle.

Soient (M, Λ) une variété de Poisson régulière et $\mathcal{F}$ son feuilletage symplectique. L'objet de ce paragraphe est de montrer que la cohomologie de Poisson tangentielle de (M, Λ) s'identifie à la cohomologie de de Rham tangentielle de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ sous-jacente.

Pour cela, on reprend d'abord les notations de Vaisman ([Va2]) associées à une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ arbitraire. Pour tout p , on note $\Phi^p(\mathcal{F})$ le faisceau des p -formes projetables (ce sont celles qui proviennent de formes sur l'espace des feuilles). En particulier, $\Phi^0(\mathcal{F})$ est le faisceau des germes des fonctions qui sont constantes le long des feuilles symplectiques. Le choix d'une distribution transversale $\nu\mathcal{F}$ pour M permet d'introduire la cohomologie du faisceau $\Phi^p(\mathcal{F})$:

$$H^q(M, \Phi^p(\mathcal{F})) = \frac{\text{Ker}(d'' : \Omega_{p,q}(M) \rightarrow \Omega_{p,q+1}(M))}{\text{Im}(d'' : \Omega_{p,q-1}(M) \rightarrow \Omega_{p,q}(M))}.$$

Un changement de distribution transversale $\nu\mathcal{F}$ se traduit par un isomorphisme pour les cohomologies correspondantes. Précisons cela.

On note $N\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ le fibré normal de $\mathcal{F}$ et $\Omega_{[p]}^q(\mathcal{F})$ l'espace des sections du fibré $\wedge^p(N^*\mathcal{F}) \otimes \wedge^q(T^*\mathcal{F})$. Les éléments de $\Omega_{[p]}^0(\mathcal{F})$ sont dits p -formes normales et ceux de

$\Omega_{[p]}^q(\mathcal{F})$ sont appelés q -formes tangentielles à valeurs dans les p -formes normales. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangentiels agit naturellement sur les formes normales par dérivation de Lie et la différentielle tangente $d_{\mathcal{F}}$ agit sur $\Omega_{[p]}^q(\mathcal{F})$ de la manière usuelle:

$$d_{\mathcal{F}}(\omega_x)(X_0, \dots, X_q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i L_{X_i}(\omega_x(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega_x([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_q)$$

où $x \in M$, $\omega \in \Omega_{[p]}^q(\mathcal{F})$ et $X_i \in T_x \mathcal{F}$ pour tout i . Puisque $d_{\mathcal{F}}$ est de carré nul, $(\oplus_q \Omega_{[p]}^q(\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}})$ est un complexe dont on note $H_{[p]}^*(\mathcal{F})$ la cohomologie associée.

Ces notations étant introduites, on peut démontrer le

Lemme II.2.2

Les complexes $(\oplus_q \Omega_{p,q}(M), d'')$ et $(\oplus_q \Omega_{[p]}^q(M), d_{\mathcal{F}})$ sont isomorphes. En particulier, les cohomologies correspondantes $H^*(M, \Phi^p(\mathcal{F}))$ et $H_{[p]}^*(\mathcal{F})$ coïncident, et sont indépendantes du choix de $\nu \mathcal{F}$.

Preuve:

Pour x dans M , notons $\psi_x : N_x \mathcal{F} \rightarrow \nu_x \mathcal{F}$ l'application définie par:

$$\psi_x(\tilde{Y}) = \pi(Y) \quad \text{si} \quad Y \in T_x M.$$

Dans l'expression ci-dessus $\tilde{Y}$ désigne la classe de Y dans $N_x \mathcal{F}$ et $\pi : TM \rightarrow \nu \mathcal{F}$ est la projection de TM parallèlement à $T\mathcal{F}$. Les ψ_x définissent un morphisme naturel de fibrés entre $N\mathcal{F}$ et $\nu \mathcal{F}$.

L'application $f : \Omega_{p,q}(M) \rightarrow \Omega_{[p]}^q(M)$ donnée par

$$f(\omega_x)(X_1, \dots, X_q)(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p) = \omega_x(X_1, \dots, X_q, \psi_x(\tilde{Y}_1), \dots, \psi_x(\tilde{Y}_p)),$$

où ω appartient à $\Omega_{p,q}(M)$, les X_i à $T_x \mathcal{F}$ et les Y_j à $T_x M$, est bijective. De plus,

$$\begin{aligned} & d_{\mathcal{F}} f(\omega_x)(X_0, \dots, X_q)(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i \left(f(\omega_x)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q)(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p) \right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^q \sum_{l=1}^p (-1)^{i+l-1} f(\omega_x)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q)([\widetilde{X_i, Y_l}], \tilde{Y}_1, \dots, \hat{Y}_l, \dots, \tilde{Y}_p) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} f(\omega_x)([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_q)(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i \left(\omega_x(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q, \psi_x(\tilde{Y}_1), \dots, \psi_x(\tilde{Y}_p)) \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^p \sum_{i=0}^q (-1)^{i+l+q} \omega_x(\psi_x([\widetilde{X_i, Y_l}]), X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q, \psi_x(\tilde{Y}_1), \dots, \psi_x(\hat{Y}_l), \dots, \psi_x(\tilde{Y}_p)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \omega_x([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_q, \psi_x(\tilde{Y}_1), \dots, \psi_x(\tilde{Y}_p)) \\
& = d'' \omega_x(X_0, \dots, X_q, \psi_x(\tilde{Y}_1), \dots, \psi_x(\tilde{Y}_p)) \\
& = f(d'' \omega_x)(X_0, \dots, X_q)(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p).
\end{aligned}$$

On a donc $d_{\mathcal{F}} \circ f = f \circ d''$, ce qui achève la preuve. $\square$

Il est important de signaler que $H^q(M, \Phi^0(\mathcal{F}))$ s'identifie à la cohomologie de de Rham le long des feuilles, encore appelée cohomologie de de Rham tangentielle. On peut alors montrer le premier résultat important de ce chapitre:

Théorème II.2.3

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière. Soient $\mathcal{F}$ son feuilletage symplectique et $\nu\mathcal{F}$ une distribution transversale de M . On note $I(M)$ l'anneau des fonctions de Casimir sur M (qui s'identifie, rappelons-le, à l'anneau des fonctions lisses sur M constantes le long des feuilles de $\mathcal{F}$). Alors, $(\bigoplus_q \mathcal{V}_{0,q}(M), \sigma'')$ et $(\bigoplus_q \Omega_{0,q}(M), d'')$ sont des complexes de $I(M)$ -modules isomorphes. En particulier, $H_{\Lambda, \tan}^*(M)$ et $H^*(M, \Phi^0(\mathcal{F}))$ sont des $I(M)$ -modules isomorphes.

Preuve:

• Montrons d'abord que le prolongement $\tilde{\#}$ (cf. chapitre I) de $\#$ aux formes définit un isomorphisme de $I(M)$ -modules de $\Omega_{0,q}(M)$ dans $\mathcal{V}_{0,q}(M)$. Soit λ dans $\Omega_{0,q}(M)$. Dire que $\tilde{\#}(\lambda) = 0$, c'est exactement dire que pour tout système de coordonnées locales (x_i) de M et pour tout ensemble d'indices $i_0, \dots, i_{q-1}$, on a

$$\lambda((dx_{i_0})^{\#}, \dots, (dx_{i_{q-1}})^{\#}) = 0,$$

donc

$$\lambda(H_{x_{i_0}}, \dots, H_{x_{i_{q-1}}}) = 0.$$

Les champs de vecteurs tangents aux feuilles étant engendrés par les champs de vecteurs hamiltoniens, eux-mêmes engendrés par les H_{x_i} , il s'ensuit que $\lambda = 0$. L'application $\tilde{\#}$ est donc bien injective sur $\Omega_{0,q}(M)$.

De plus, si Q appartient à $\mathcal{V}_{0,q}(M)$, on peut définir λ dans $\Omega_{0,q}(M)$ en posant pour tout champs de vecteurs X_i de type $(0, 1)$,

$$\lambda(X_0, \dots, X_{q-1}) = Q(\beta_0, \dots, \beta_{q-1})$$

où les β_i sont des formes de type $(0, 1)$ tels que $\beta_i^{\#} = X_i$. De tels β_i existent et sont uniques et par construction, on a $\tilde{\#}(\lambda) = Q$. D'où la surjectivité de $\tilde{\#}$.

• Montrons maintenant que $\sigma \circ \tilde{\#} = -\tilde{\#} \circ d$. On rappelle que

$$\begin{aligned}
\sigma(\tilde{\#}\lambda)(\alpha_0, \dots, \alpha_q) &= \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \alpha_i^{\#} (\tilde{\#}\lambda(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_q)) \\
&= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \tilde{\#}\lambda(\{\alpha_i, \alpha_j\}, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_q),
\end{aligned}$$

où λ est une q -forme et les α_i des 1-formes.

De $\{\alpha_i, \alpha_j\}^\# = [\alpha_i^\#, \alpha_j^\#]$, on déduit que

$$\begin{aligned}\sigma(\tilde{\#}\lambda)(\alpha_0, \dots, \alpha_q) &= (-1)^q d\lambda(\alpha_0^\#, \dots, \alpha_q^\#) \\ &= (-1)^q (-1)^{q+1} \tilde{\#}(d\lambda)(\alpha_0, \dots, \alpha_q) \\ &= -\tilde{\#}(d\lambda)(\alpha_0, \dots, \alpha_q).\end{aligned}$$

• Il s'agit à présent de vérifier que $\sigma''(\tilde{\#}\lambda) = -\tilde{\#}(d''(\lambda))$ sur $\Omega_{0,q}(M)$. Soit λ une forme de type $(0, q)$. On a alors

$$d\lambda = d'\lambda + d''\lambda + d_{2,-1}(\lambda) = d''\lambda + d_{2,-1}(\lambda).$$

D'autre part, comme $\tilde{\#}(\Omega_{p,q}(M)) = 0$ dès que $p > 0$, on voit que:

$$\tilde{\#}(d(\lambda)) = \tilde{\#}(d''(\lambda)).$$

De plus, $\tilde{\#}\lambda$ appartient à $\mathcal{V}_{0,q}(M)$. Et, puisque σ' est de type $(-1, 2)$, on a:

$$\sigma(\tilde{\#}\lambda) = \sigma''(\tilde{\#}\lambda) + \sigma'(\tilde{\#}\lambda) = \sigma''(\tilde{\#}\lambda).$$

Posons donc:

$$f_q = (-1)^q \tilde{\#}.$$

On définit ainsi une famille (f_q) d'isomorphismes de $I(M)$ -modules

$$f_q : \Omega_{0,q}(M) \rightarrow \mathcal{V}_{0,q}(M)$$

vérifiant:

$$f_{q+1} \circ d'' = \sigma'' \circ f_q$$

pour tout q . Le résultat s'ensuit. $\square$

Remarque II.2.4

Une conséquence immédiate du théorème II.2.3 est que la cohomologie de Poisson tangentielle d'une variété de Poisson régulière M ne dépend que de son feuilletage symplectique et non pas de la structure symplectique sur ses feuilles.

b) Cohomologie de Čech.

L'objet de ce paragraphe est d'identifier la cohomologie de Rham tangentielle d'une variété feuilletée à une cohomologie de Čech.

Soit donc $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. Nous dirons qu'un recouvrement localement fini de $(M, \mathcal{F})$ est un bon recouvrement si pour tout $q > 0$, tout k et tout $i_1, \dots, i_k$,

$$H^q(U_{i_1, \dots, i_k}, \Phi^0(\mathcal{F}|_{U_{i_1, \dots, i_k}})) = \{0\},$$

où $U_{i_1, \dots, i_k} = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ et $\mathcal{F}_{|U_{i_1, \dots, i_k}}$ désigne le feuilletage induit par $\mathcal{F}$ dans $U_{i_1, \dots, i_k}$ (i.e. si on note L_α les feuilles de $\mathcal{F}$, alors les feuilles de $\mathcal{F}_{|U_{i_1, \dots, i_k}}$ sont les composantes connexes des intersections $L_\alpha \cap U_{i_1, \dots, i_k}$).

Supposons momentanément que M soit une variété munie d'une connexion affine Γ (c'est-à-dire d'une connexion sur TM). Une géodésique de M est une courbe γ sur M dont le champ de vecteurs tangents est parallèle le long de γ i.e.

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0.$$

Soit x un point de M . Un ouvert N_x de 0 dans $T_x M$ sera dit *normal* s'il est étoilé en 0 (si $X \in N_x$ et $0 \leq t \leq 1$, alors $tX \in N_x$) et s'il est difféomorphe par l'application exponentielle à un voisinage ouvert de x dans M . De même, un ouvert W_x de x dans M sera dit *normal en x* s'il existe un ouvert normal N_x de 0 dans $T_x M$ tel que $\exp(N_x) = W_x$. On peut démontrer (voir [Hel] par exemple) qu'en tout point x de M , il existe un voisinage normal $W_x = \exp N_x$ de x dans M , qui soit normal en chacun de ses points et qui soit géodésiquement convexe. Notons que les géodésiques de W_x issues de x vérifient

$$\gamma(0) = x \quad \gamma(t) = \exp(tX)$$

où X appartient à N_x , et sont définies au moins pour $0 \leq t \leq 1$.

Définition II.2.5 [Li2]

Soient $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée et Γ une connexion affine sans torsion sur M . La connexion Γ est dite *adaptée à $\mathcal{F}$* si et seulement si dans toute carte adaptée les coefficients de Christoffel vérifient

$$\Gamma_{i,K}^u = 0$$

pour tout indice tangentiel i , pour tout indice transverse u et pour tout K .

Nous nous proposons maintenant de montrer que toute variété feuilletée admet un bon recouvrement. Rappelons d'abord qu'il existe, pour toute variété feuilletée, des connexions affines sans torsion qui sont adaptées au feuilletage [Li2]. Maintenant, on a la

Proposition II.2.6

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. On se donne de plus une connexion affine Γ sur M , sans torsion et adaptée à $\mathcal{F}$. Alors, tout recouvrement (U_i) de M par des domaines de cartes (U_i, φ_i) adaptées admet un sous-recouvrement (V_l) tel que

- (1) chaque V_l est d'adhérence compacte
- (2) (V_l) est localement fini et est un bon recouvrement de M .

Preuve:

Quitte à prendre un sous-recouvrement, on peut supposer que (U_i) est localement fini et que chaque $\overline{U_i}$ est compact; et même qu'il existe un sous-recouvrement (U'_i) de (U_i) (avec le même ensemble d'indices) tel que $\overline{U'_i} \subset U_i$ pour tout i . Notons $\varphi'_i = \varphi_i|_{U'_i}$. Pour tout x de M , prenons un voisinage normal W_x de x . On peut supposer que W_x est suffisamment petit pour satisfaire les propriétés suivantes:

- W_x est géodésiquement convexe;

- pour tout a de W_x , il existe un voisinage normal N_a de 0 dans $T_a M$ tel que $\exp : N_a \rightarrow W_x$ soit un difféomorphisme;
 - W_x est contenu dans un certain U'_i .
- Notons donc $\varphi_x = \varphi'_i|_{W_x}$, et pour tout k , posons

$$B_k = \{(W_x, \varphi_x) : W_x \cap \overline{U'_k} \neq \emptyset\}.$$

Comme $\overline{U'_k}$ est compact, on peut extraire une sous-famille B'_k de B_k recouvrant $\overline{U'_k}$. Les éléments de $\mathcal{B} = \bigcup_k B'_k$ forment alors un atlas de cartes adaptées (V_l, ψ_l) vérifiant (1) et (2).

Montrons-le. Par construction, il est déjà clair que chaque $\overline{V_l}$ est compact et que (V_l) est localement fini. Il s'agit à présent de démontrer que chaque V_l est à plaques géodésiquement convexes. Prenons donc un domaine V_l et un point y de V_l . Notons P_y la plaque de $\mathcal{F}|_{V_l}$ contenant y . Prenons encore deux points a et b de P_y . Par hypothèse, il existe un voisinage normal N_a de 0 dans $T_a M$ tel que $\exp : N_a \rightarrow V_l$ soit un difféomorphisme.

i) Montrons d'abord que $\exp(N_a \cap T_a \mathcal{F}) = P_a$. Soit Y un vecteur de $N_a \cap T_a \mathcal{F}$. Alors, la géodésique τ de V_l , issue de a et de direction Y :

$$\tau(0) = a \quad \text{et} \quad \dot{\tau}(0) = \tau_{*0}\left(\frac{d}{dt}\right) = Y$$

est au moins définie sur $[0, 1]$. On l'écrit dans la carte adaptée (V_l, ψ_l) comme suit

$$x(t) := \psi_l(\tau(t)) = (x^i(t), x^u(t))$$

où $i = 1, \dots, r$ sont les indices tangentiels et $u = 1, \dots, s$ les indices transverses. Comme τ est une géodésique, elle satisfait:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \sum_{1 \leq J, K \leq r+s} \Gamma_{JK}^i(x) \frac{dx^J}{dt} \frac{dx^K}{dt} & \text{pour } i = 1, \dots, r \\ \frac{d^2 x^u}{dt^2} = - \sum_{1 \leq J, K \leq r+s} \Gamma_{JK}^u(x) \frac{dx^J}{dt} \frac{dx^K}{dt} & \text{pour } u = 1, \dots, s. \end{cases}$$

Comme Γ est adaptée à $\mathcal{F}$ et sans torsion, on a:

$$\Gamma_{iA}^u = \Gamma_{Ai}^u = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r, 1 \leq u \leq s, 1 \leq A \leq r+s.$$

On en déduit que:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \sum_{1 \leq J, K \leq r+s} \Gamma_{JK}^i(x) \frac{dx^J}{dt} \frac{dx^K}{dt} & \text{pour } i = 1, \dots, r \\ \frac{d^2 x^u}{dt^2} = - \sum_{1 \leq v, w \leq s} \Gamma_{vw}^u(x) \frac{dx^v}{dt} \frac{dx^w}{dt} & \text{pour } u = 1, \dots, s. \end{cases}$$

Notons maintenant

$$f(t) = (x^i(t))_{1 \leq i \leq r}, \quad g(t) = (x^u(t))_{1 \leq u \leq s}$$

Le système précédent se réduit à deux équations différentielles ordinaires de la forme:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f''(t) = F(f'(t), f(t), g'(t), g(t)) \\ (2) \quad & g''(t) = G(g'(t), g(t), f(t)). \end{aligned}$$

Comme à l'instant initial $\dot{\tau}(0) = Y$ est dans $T_a\mathcal{F}$, on a $g'(0) = 0$. Pour f fixé, l'équation (2) admet une unique solution de condition initiale $(g(0), g'(0)) = (x^u(0), 0)$. La fonction

$$g \equiv g(0) = (x^u(0)) = cst$$

est solution, c'est donc la seule. Maintenant pour $g \equiv g(0)$, l'équation (1) admet une unique solution de condition initiale $(f(0), f'(0))$. On la note

$$f_0(t) = (a^i(t))_{1 \leq i \leq r}.$$

Nous déduisons de tout ceci que $(x^i(t), x^u(t)) = (a^i(t), x^u(0))$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. En particulier, on voit que $\tau(1) = \exp(Y)$ est dans P_a . Nous obtenons ainsi l'inclusion

$$\exp(N_a \cap T_a\mathcal{F}) \subset P_a.$$

Par ailleurs, $N_a \cap T_a\mathcal{F}$ étant un fermé de N_a et $\exp : N_a \rightarrow V_l$ étant un difféomorphisme, $\exp(N_a \cap T_a\mathcal{F})$ est fermé dans V_l , donc fermé dans P_a . Enfin, $\exp(N_a \cap T_a\mathcal{F})$ étant une sous-variété de P_a de dimension ($\dim T_a\mathcal{F}$) égale à celle de P_a , elle est ouverte dans P_a . Par connexité de P_a , nous obtenons l'égalité souhaitée.

ii) Soit γ l'unique géodésique de V_l , joignant a et b . On peut alors écrire que

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow V_l, \quad \gamma(t) = \exp(tX)$$

où $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et X est un vecteur de N_a . Comme a est dans P_y , P_a et P_y désignent la même plaque. Maintenant, comme $\gamma(1) = \exp(X) = b$ appartient à $P_y = P_a$, que $\exp$ réalise un difféomorphisme de N_a dans V_l et que l'on a l'égalité montrée en i), on voit que X appartient en fait à $N_a \cap T_a\mathcal{F}$. Comme cette intersection est étoilée en 0, γ est tout entière dans P_y . On a donc montré que P_y est géodésiquement convexe.

En procédant ainsi pour tout point y de chaque V_l , on montre que tous les V_l sont à plaques géodésiquement convexes (donc contractiles). Il en est alors de même des intersections finies $V_{i_1, \dots, i_k}$. Autrement dit, chaque $\mathcal{F}_{|V_{i_1, \dots, i_k}}$ est un feuilletage produit dont les plaques sont contractiles. Cela implique, nous le verrons plus tard avec un résultat de [DH], le théorème II.3.1, que

$$H^q(V_{i_1, \dots, i_k}, \Phi^0(\mathcal{F})) = \{0\}$$

pour tout $q > 0$. D'où le résultat. $\square$

Pour tout faisceau A sur M , en particulier pour $\Phi^0(\mathcal{F})$, nous noterons l'espace des k -cochaînes de Čech de A relatif à un recouvrement $\mathcal{U}$ de M par $\check{C}^k(\mathcal{U}, A)$, le cobord de Čech par $\check{\delta}$ et la cohomologie associée au complexe $(\check{C}^*(\mathcal{U}, A), \check{\delta})$ par $\check{H}^*(\mathcal{U}, A)$. On peut alors montrer la

Proposition II.2.7

Soient $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée et $\nu\mathcal{F}$ une distribution transversale de M . Pour tout bon recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ de M , les cohomologies $H^*(M, \Phi^0(\mathcal{F}))$ et $\check{H}^*(\mathcal{U}, \Phi^0(\mathcal{F}))$ coïncident.

Preuve:

On considère le double complexe

$$(K^{*,*}, \check{\delta}, d'') = (C^*(\mathcal{U}, \underline{\Omega_{0,*}}(M)), \check{\delta}, d''),$$

où $\underline{\Omega_{0,k}}(M)$ désigne le faisceau sur M qui à tout ouvert U de M associe les formes de type $(0, k)$ sur U . On appelle complexe total de $K^{*,*}$ le complexe (K^*, D) où

$$K^n = \sum_{p+q=n} K^{p,q} \quad \text{et} \quad D = \check{\delta} + (-1)^p d'' \text{ en degré } (p, q).$$

La cohomologie de ce complexe, que l'on note $H^*(K)$, s'appelle l'hypercohomologie de Čech de M . On a deux filtrations naturelles sur $K^{*,*}$:

$$\begin{aligned} F_p &= \oplus_{i \geq p} \oplus_j K^{i,j} \\ F'_p &= \oplus_{j \geq p} \oplus_i K^{i,j}, \end{aligned}$$

et donc deux suites spectrales dont l'aboutissement commun est $H^*(K)$.

i) Etudions d'abord la première suite. Elle est donnée par les formules:

$$E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$$

où

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= \{Q \in F_p \cap K^{p+q} / DQ \in F_{p+r}\} \\ B_r^{p,q} &= \{Q \in F_p \cap K^{p+q} / Q = DP, P \in F_{p-r}\} \subset Z_r^{p,q}. \end{aligned}$$

On définit alors les différentielles

$$d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1},$$

induites par D . La cohomologie

$$\frac{\{Ker d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}\}}{\{Im d_r : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}\}}$$

s'identifie canoniquement avec $E_{r+1}^{p,q}$ et $H^n(E_r) = E_{r+1}^n \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \oplus_{p+q=n} E_{r+1}^{p,q}$. Autrement dit, la cohomologie du complexe E_r^* est égal à E_{r+1} .

On peut maintenant vérifier que

$$\begin{aligned} F_p \cap K^{p+q} &= \bigoplus_{0 \leq s \leq q} K^{p+q-s,s} \\ Z_0^{p,q} &= F_p \cap K^{p+q} \\ Z_{-1}^{p+1,q-1} &= \bigoplus_{0 \leq s \leq q-1} K^{p+q-s,s}. \end{aligned}$$

Donc $E_0^{p,q} = K^{p,q}$ et $d_0 : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$. On voit aussitôt que $d_0 = d''$. Donc que

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= \frac{\{A \in K^{p,q} / d'' A = 0\}}{\{Q \in K^{p,q} : Q = d'' P, P \in K^{p,q-1}\}} \\ &= H_{d''}^q(\check{C}^p(\mathcal{U}, \Omega_{0,*}(M))). \end{aligned}$$

Puis, que

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= \frac{\{Ker d_1 : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}\}}{\{Im d_1 : E_1^{p-1,q} \rightarrow E_1^{p,q}\}} \\ &= H_{\delta}^p H_{d''}^q(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,*}(M))). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{U}$ est un bon recouvrement, on a

$$\begin{aligned} H_{d''}^q(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,*}(M))) &= \{0\} \quad \text{si } q > 0 \\ H_{d''}^0(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,*}(M))) &= \check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,0}(M)). \end{aligned}$$

Ainsi, $E_2^{p,0} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \Phi^0(\mathcal{F}))$ et $E_2^{p,q} = \{0\}$ si $q > 0$.

ii) Les premiers termes de la seconde suite spectrale peuvent être calculés de manière similaire. On obtient:

$$\begin{aligned} E_0'^{p,q} &= K^{q,p} \\ E_1'^{p,q} &= H_{\delta}^q(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,p}(M))) \\ E_2'^{p,q} &= H_{d''}^p H_{\delta}^q(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,*}(M))). \end{aligned}$$

On peut montrer comme dans [BT, p.94] (ou [Bry]) que $H_{\delta}^q(\check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,p}(M))) = \{0\}$ pour $q > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} E_2'^{p,0} &= H^p(M, \Phi^0(\mathcal{F})) \\ E_2'^{p,q} &= \{0\} \quad \forall q > 0. \end{aligned}$$

iii) Nous venons de voir que pour tout $l \neq 0$, $E_2^{n-l,l} = \{0\} = E_2'^{n-l,l}$. Les deux suites spectrales dégénèrent donc au rang 2. Il résulte alors de la théorie générale des suites spectrales ([Bry, p.17] par exemple) que

$$H^n(K) = E_2^{n,0} = E_2'^{n,0} \quad \text{pour tout } n.$$

D'où le résultat. $\square$

Cette proposition est utile pour le calcul de la cohomologie de Poisson tangentielle, nous aurons l'occasion de le voir ultérieurement (section 4 de ce chapitre).

En fait, on peut démontrer le résultat plus explicite suivant:

Proposition II.2.8

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée et $\nu\mathcal{F}$ une distribution transversale de M . Soit $\mathcal{U} = (U_i)$ un bon recouvrement de M . Soit (h_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. On peut associer à tout k -cocycle de Čech $c = (c_{i_0, \dots, i_k})$, la forme d'' -fermée ω_c de type $(0, k)$ définie par

$$\omega_c|_{U_i} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{i_1, \dots, i_k} c_{i_1, \dots, i_k, i} d'' h_{i_1} \wedge \dots \wedge d'' h_{i_k}.$$

L'application ψ , associant à une classe $[c]$ de $\check{H}^k(\mathcal{U}, \Phi^0(\mathcal{F}))$ la classe $[\omega_c]$ de $H^k(M, \Phi^0(\mathcal{F}))$, définit alors un isomorphisme de la cohomologie de Čech dans la cohomologie de de Rham tangentielle.

Preuve:

On trouve dans [Bry] une construction explicite d'un isomorphisme entre la cohomologie de de Rham d'une variété différentiable quelconque M et la cohomologie de Čech de M à coefficients dans le faisceau constant $\mathbb{R}_M$. Pour démontrer notre proposition, nous allons reprendre cette construction en remplaçant $\mathbb{R}_M$ par le faisceau $\Phi^0(\mathcal{F})$ et la différentielle extérieure d de De Rham par la différentielle extérieure tangente d'' .

Comme précédemment, on notera $H^*(K)$ la cohomologie totale du double complexe $(K^{*,*}, \check{\delta}, d'')$ $= (C^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,*}(M)), \check{\delta}, d'')$. Une k -cochaîne de Čech sera vue comme une k -hypercochaîne de Čech à valeurs dans les fonctions lisses sur M , *i.e.* comme un élément de $K^{k,0}$. De même, une forme de type $(0, k)$ sera vue comme une 0-hypercochaîne de Čech à valeurs dans les formes de type $(0, k)$, *i.e.* comme un élément de $K^{0,k}$. Maintenant, soit c un k -cocycle de Čech et ω une forme de type $(0, k)$ d'' -fermée. Dire que les classes $[c]$ et $[\omega]$ sont égales dans $H^k(K)$, c'est dire qu'il existe une suite $(\alpha_q)_{0 \leq q \leq k-1}$ telle que:

- Chaque élément α_q est une $(k-1-q)$ -hypercochaîne de Čech à valeurs dans les formes de types $(0, q)$ et

$$(\check{\delta}\alpha_q)_{i_0, \dots, i_{k-q}} = (-1)^{k-q-1} d''((\alpha_{q-1})_{i_0, \dots, i_{k-q}}) \quad \forall 1 \leq q \leq k-1;$$

- $(d''\alpha_{k-1})_i$ est la restriction de ω à U_i ;

- $\check{\delta}\alpha_0 = -c$.

En effet, dans ces conditions, on voit facilement que:

$$D\left(\sum_{q=0}^{k-1} \alpha_q\right) = -c + \omega$$

(on rappelle que $D = \check{\delta} + (-1)^p d''$ en degré (p, q)).

On introduit maintenant l'application

$$H : \check{C}^*(\mathcal{U}, \Omega_{0,k}(M)) \rightarrow \check{C}^{*-1}(\mathcal{U}, \Omega_{0,k}(M)),$$

définie par:

$$H(\alpha)_{i_1, \dots, i_k} = \sum_i h_i \alpha_{i, i_1, \dots, i_k}.$$

On montre comme dans [Bry] que:

$$\check{\delta}(H(\alpha))_{i_0, \dots, i_p} + H(\check{\delta}(\alpha))_{i_0, \dots, i_p} = \alpha_{i_0, \dots, i_p} \quad \text{pour tout } p \geq 0.$$

En fait, il s'agit d'abord de constater que

$$\check{\delta}(H(\alpha))_{i_0, \dots, i_p} = \sum_{j=0}^p (-1)^j H(\alpha)_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p} = \sum_{j=0}^p \sum_i (-1)^j h_i \alpha_{i, i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p}.$$

Puis, que:

$$\begin{aligned} H(\check{\delta}(\alpha))_{i_0, \dots, i_p} &= \sum_i h_i \check{\delta}(\alpha)_{i, i_0, \dots, i_p} \\ &= \sum_i h_i \alpha_{i_0, \dots, i_p} - \sum_i h_i \sum_{j=0}^p (-1)^j \alpha_{i, i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p} \\ &= \alpha_{i_0, \dots, i_p} - \check{\delta}(H(\alpha))_{i_0, \dots, i_p}. \end{aligned}$$

L'application H vérifie donc bien la relation d'homotopie annoncée.

On est maintenant capable de construire les α_q récursivement. On part de $\alpha_0 = -H(c)$. Comme $\check{\delta}H(c) = c$, on aura bien la condition $\check{\delta}\alpha_0 = -c$. On aura alors,

$$(\alpha_0)_{i_1, \dots, i_k} = - \sum_i h_i c_{i, i_1, \dots, i_k}.$$

Supposons maintenant que l'on ait l'égalité

$$\check{\delta}(\alpha_{q-1}) = (-1)^{k-q-2} d'' \alpha_{q-2}$$

jusqu'à un certain rang q , alors

$$\check{\delta} d'' \alpha_{q-1} = d'' \check{\delta}(\alpha_{q-1}) = 0.$$

En appliquant l'homotopie H à $d'' \alpha_{q-1}$, il s'ensuit que:

$$d'' \alpha_{q-1} = \check{\delta} H(d'' \alpha_{q-1}).$$

Ceci nous conduit à poser:

$$\alpha_q = (-1)^{k-q-1} H(d'' \alpha_{q-1}).$$

Cette relation fournit par récurrence des α_q satisfaisant les conditions requises:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1)_{i_2, \dots, i_k} &= -(-1)^{k-2} \sum_{i_0, i_1} c_{i_0, i_1, \dots, i_k} h_{i_0} d'' h_{i_1} \\
 &\vdots \\
 (\alpha_{k-1})_i &= -(-1)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \sum_{i_1, \dots, i_k} c_{i_1, \dots, i_k, i} h_{i_1} d'' h_{i_2} \wedge \dots \wedge d'' h_{i_k}.
 \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. $\square$

Il est possible, mais plus compliqué, d'écrire explicitement le k -cocycle de Čech correspondant à une forme d'' -fermée de type $(0, k)$, c'est-à-dire de montrer concrètement la surjectivité de ψ . A titre d'exemple, considérons les cas $k = 1$ et $k = 2$.

$k = 1$:

Soit une forme ω de type $(0, 1)$, d'' -fermée. Sur tout ouvert U_i , on a $\omega|_{U_i} = d'' f_i$ pour une certaine fonction f_i . Sur $U_{i,j}$, $d''(f_i - f_j) = 0$ et $f_i - f_j = c_{j,i}$ appartient à $\Phi^0(\mathcal{F})$. On construit ainsi un 1-cocycle de Čech $c = (c_{j,i})$. On veut montrer que $\omega - \omega_c$ est un cobord. Or sur U_i , $\omega - \omega_c = \omega - \sum_j c_{j,i} d'' h_j$. Notons alors

$$\varphi_i = f_i + \sum_j c_{j,i} h_j.$$

On vérifie facilement que $\varphi_i - \varphi_l = 0$ sur $U_{i,l}$, donc φ_i est la restriction à U_i d'une fonction φ définie globalement. De plus, $\omega - \omega_c = d'' \varphi$. D'où le résultat pour $k = 1$.

$k = 2$:

Soit à présent une forme ω de type $(0, 2)$, d'' -fermée. Sur tout ouvert U_i , on a $\omega|_{U_i} = d'' \alpha_i$ pour une certaine forme α_i de type $(0, 1)$. Sur $U_{i,j}$, on a $\alpha_i - \alpha_j = d'' f_{j,i}$ pour une certaine fonction $f_{j,i}$. Les fonctions $c_{i,j,k} = f_{i,j} + f_{j,k} + f_{k,i}$ appartiennent alors à $\Phi^0(\mathcal{F})$ et définissent un 2-cocycle de Čech $c = (c_{i,j,k})$. Vérifions que $\omega - \omega_c$ est un cobord. On rappelle que $\omega_c = - \sum_{j,k} c_{j,k,i} d'' h_j \wedge d'' h_k$ sur U_i . Posons

$$\beta_i = \alpha_i - \sum_{j,k} c_{j,k,i} h_j d'' h_k + d'' \left(\sum_k f_{i,k} h_k \right).$$

En utilisant le fait que $\sum_k d'' h_k = 0$, on constate que $\beta_i - \beta_l = 0$ sur $U_{i,l}$ donc que β_i est la restriction à U_i d'une forme β de type $(0, 1)$ définie sur tout M . Par construction, on a aussi $\omega - \omega_c = d'' \beta$. D'où le résultat pour $k = 2$.

II.3 Quelques théorèmes connus.

On rappelle ici deux résultats classiques de la théorie des feuilletages. Ces résultats, que l'on peut trouver dans [DH] et [Va2] respectivement, calculent la cohomologie de Poisson tangentielle dans certains cas particuliers.

Théorème II.3.1 [DH]

Soient $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée et r un entier naturel. On suppose que le feuilletage $\mathcal{F}$ de M est donné par une submersion $\Pi : M \rightarrow B$ pour une certaine variété B (séparée) et que chaque feuille (connexe) L de $\mathcal{F}$ vérifie $H_{DR}^q(L) = \{0\}$ pour $0 < q \leq r$. Alors

$$\begin{cases} H^q(M, \Phi^0(\mathcal{F})) &= C^\infty(B) & \text{si } q = 0 \\ &= \{0\} & \text{si } 0 < q \leq r. \end{cases}$$

Théorème II.3.2 [Va2]

Soient L et R deux variétés différentiables et soit $\mathcal{F}$ le feuilletage de $M = L \times R$ par les feuilles $L \times \{x\}$ où x parcourt R . Alors, si les nombres de Betti de L sont finis, on a

$$H^q(M, \Phi^p(\mathcal{F})) = H_{DR}^q(L) \otimes \Omega^p(R).$$

Preuve:

Soient $\mu_1, \dots, \mu_s$ des q -formes sur L formant une base de $H_{DR}^q(L)$. Alors, toute forme d'' -fermée sur M , de type (p, q) , s'écrit sous la forme

$$\lambda = \alpha_1 \wedge \mu_1 + \dots + \alpha_s \wedge \mu_s + d''\beta$$

où les α_i sont des p -formes sur R et β est une forme sur M de type $(p, q-1)$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Le théorème suivant est un résultat important issu de [Va1, Va2], nous aurons à l'utiliser par la suite.

Théorème II.3.3 [Va1, Va2]

Soit $M = S \times R$ une variété de Poisson régulière de structure de Poisson Λ transversalement constante par rapport à la distribution transversale $\nu\mathcal{F} = TR$ (i.e. le feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ de $M = S \times R$ est défini par une structure symplectique fixe de S). Alors, si les nombres de Betti de S sont finis, on a:

$$H_\Lambda^q(M) \simeq \bigoplus_{0 \leq k \leq q} H_{DR}^k(S) \otimes \Omega^{q-k}(R).$$

Remarque II.3.4

Le théorème précédent peut être utilisé pour montrer que, contrairement à la cohomologie de Poisson tangentielle, la cohomologie de Poisson usuelle dépend non seulement du feuilletage symplectique, mais aussi de la structure symplectique sur les feuilles. En effet,

considérons la variété produit $M = \mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ et notons ω la structure symplectique standard de la sphère $\mathbf{S}^2$. Si on munit M de la structure de Poisson régulière définie par la même structure symplectique ω sur chaque feuille, alors la cohomologie de Poisson de M est donnée par le théorème II.3.3. Cependant, si on regarde M comme $\mathfrak{su}(2)^* \setminus \{0\}$ muni de sa structure de Poisson linéaire issue du crochet de Lie, alors chaque feuille $\mathbf{S}^2 \times \{t\}$ ($t \in \mathbb{R}_+^*$) a une structure symplectique différente, à savoir $t\omega$, et le résultat du théorème n'est plus vrai pour M . (Le calcul détaillé de la cohomologie de Poisson de $\mathfrak{su}(2)^* \setminus \{0\}$ sera fait ultérieurement).

II.4 Etude du cas nilpotent.

On revient rapidement sur quelques propriétés importantes des algèbres de Lie nilpotentes. Le lecteur pourra se reporter à [ACG1, Bon, Puk, Ver] pour plus de détails. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension m et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. Soient encore G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et Ω l'ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$ des orbites de la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$. On note

$$\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$$

un drapeau de $\mathfrak{g}$ ($\dim \mathfrak{g}_i = i$) tel que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$ pour tout i de $\{1, \dots, m\}$. On désigne par $B = (X_1, \dots, X_m)$ une base de Jordan-Hölder adaptée à $(\mathfrak{g}_i)_i$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{g}_i = \mathbb{R}X_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}X_i$$

pour tout i . On peut alors stratifier $\mathfrak{g}^*$ (ou Ω) de la façon suivante.

Pour μ dans $\mathfrak{g}^*$, on définit l'ensemble des indices de saut J_μ par

$$J_\mu = \{j : X_j \notin \mathfrak{g}_{j-1} + \mathfrak{g}_\mu\},$$

où $\mathfrak{g}_\mu = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, \langle \mu, [X, Y] \rangle = 0\}$. Si $J_\mu = \{j_1 < \dots < j_{2r}\}$, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mu \oplus \mathbb{R}X_{j_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}X_{j_{2r}}.$$

Notons $\Delta = \{J_\mu, \mu \in \mathfrak{g}^*\}$ et pour tout élément J de Δ , définissons la strate

$$\mathfrak{G}_B^J = \{\mu \in \mathfrak{g}^* : J_\mu = J\}.$$

Par construction, chaque strate est un sous-ensemble G -invariant de $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}^*$ est la réunion disjointe de ces strates:

$$\mathfrak{g}^* = \bigcup_{J \in \Delta} \mathfrak{G}_B^J.$$

Il est important de noter que toutes les orbites contenues dans une strate donnée ont la même dimension (égale à $\text{card } J$). De même, on a:

$$\Omega = \bigcup_{J \in \Delta_{\max}} \mathfrak{G}_B^J$$

où $\Delta^{\max}$ est l'ensemble des J de Δ de cardinal maximal.

Les orbites contenues dans une même strate peuvent être simultanément paramétrées. Considérons en effet une strate $\mathfrak{G}_B^J$ arbitraire de $\mathfrak{g}^*$ et supposons que les orbites contenues dans $\mathfrak{G}_B^J$ sont de dimension $2r$. Alors, on a :

Théorème II.4.1 [Puk]

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension m , $B = (X_i)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ et (X_i^*) la base duale de B . Avec les notations ci-dessus, soient $J = \{j_1, \dots, j_{2r}\}$ et $\mathfrak{G}_B^J$ la strate correspondant à J . Alors, il existe des fonctions R_j^J ($1 \leq j \leq m$) :

$$\begin{aligned} R_j^J : \mathfrak{G}_B^J \times \mathbb{R}^{2r} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mu, y_{j_1}, \dots, y_{j_{2r}}) &\mapsto R_j^J(\mu, y_{j_1}, \dots, y_{j_{2r}}), \end{aligned}$$

rationnelles, régulières sur $\mathfrak{G}_B^J \times \mathbb{R}^{2r}$ et telles que :

- i) Pour μ fixé, les fonctions R_j^J ne dépendent que des $y_{j_1}, \dots, y_{j_h}$ où $j_h \leq j < j_{h+1}$ et sont polynomiales en ces variables;
- ii) Si $j = j_h$ appartient à J , $R_{j_h}^J(\mu, y_{j_1}, \dots, y_{j_{2r}}) = y_{j_h}$ pour tout μ ;
- iii) Soit $\mu \in \mathfrak{G}_B^J$, alors l'orbite O_μ de μ est :

$$O_\mu = \left\{ \sum_{j=1}^m R_j^J(\mu, y_{j_1}, \dots, y_{j_{2r}}) X_j^* : y_{j_1}, \dots, y_{j_{2r}} \in \mathbb{R}^{2r} \right\},$$

et l'application $v : \mathbb{R}^{2r} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ définie par

$$v(y_{j_1}, \dots, y_{j_{2r}}) = \sum_{j=1}^m R_j^J(\mu, y_{j_1}, \dots, y_{j_{2r}}) X_j^*$$

réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{2r}$ dans O_μ ;

- iv) Pour $y \in \mathbb{R}^{2r}$, fixé, les fonctions $\mu \in \mathfrak{G}_B^J \mapsto R_j^J(\mu, y)$ sont constantes sur les orbites contenues dans $\mathfrak{G}_B^J$.

De manière plus précise, avec la formulation de [ACG1, Ver], il existe sur $\mathfrak{g}^*$:

- (i) $m - 2r$ fonctions polynomiales $z_1, \dots, z_{m-2r}$
- (ii) $2r$ fonctions rationnelles $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ régulières sur $\mathfrak{G}_B^J$ telles que

- les fonctions polynomiales $z_1, \dots, z_{m-2r}$ séparent les orbites contenues dans $\mathfrak{G}_B^J$;

- pour chaque orbite O contenue dans $\mathfrak{G}_B^J$, il existe un symplectomorphisme (une carte de Darboux globale) $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}^{2r}$ défini par les fonctions p_i, q_j .

Ces fonctions p_i, q_j, z_k peuvent être obtenues à partir des applications R_l^J du théorème précédent : pour les p_i, q_j , on étudie l'application v ; et on peut prendre pour $z_k(x)$ les fonctions $R_l^J(x, 0)$ pour tous les l n'appartenant pas à $\{j_1, \dots, j_{2r}\}$ (ce qui donne bien $m - 2r$ fonctions z_k au total).

La première state, notée V_B , a des propriétés supplémentaires: c'est un ouvert de Zariski dense dans $\mathfrak{g}^*$, elle ne contient que des orbites de dimension maximale (disons $2d$), et les fonctions polynomiales $z_1, \dots, z_{m-2d}$ séparant les orbites de V_B sont G -invariantes. (Ce dernier point est propre à la première strate. En fait, pour une strate secondaire $\mathfrak{G}_B^J \neq V_B$, les fonctions z_k ne vérifient pas forcément $H_{z_k} = \{z_k, \cdot\} = 0$ en dehors de $\mathfrak{G}_B^J$.)

De plus, si on identifie l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$ et si on note $S(\mathfrak{g})^G$ le sous-anneau de $S(\mathfrak{g})$ des fonctions polynomiales G -invariantes, alors le corps des fractions de $S(\mathfrak{g})^G$ s'identifie au corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(z_1, \dots, z_{m-2d})$ en les variables z_k [Dix].

Dans la suite, nous dirons que V_B est l'ouvert générique associé à la base B , les orbites contenues dans V_B seront appelées *orbites génériques* et les fonctions polynomiales $z_1, \dots, z_{m-2d}$ qui leur correspondent seront les *invariants génériques*. On peut tout de suite dire que la cohomologie de Poisson tangentielle de V_B est acyclique en degré supérieur à zéro: le feuilletage symplectique de V_B étant un feuilletage produit par des feuilles contractiles (voir le théorème II.3.1). Dans la proposition qui suit, on montre que l'on peut même s'affranchir du choix de la base B .

Proposition II.4.2

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente. Soit $\bigcup_B V_B$ l'union de tous les ensembles génériques associés à toutes les bases de Jordan-Hölder B de $\mathfrak{g}$. Désignons par Λ la structure de Poisson régulière de $\bigcup_B V_B$. Alors,

$$H_{\Lambda, \tan}^0(\bigcup_B V_B) = I(\bigcup_B V_B) \quad \text{et} \quad H_{\Lambda, \tan}^q(\bigcup_B V_B) = \{0\} \quad \forall q > 0.$$

Preuve:

La projection $\Pi : \bigcup_B V_B \rightarrow (\bigcup_B V_B)/G$ étant une fibration localement triviale, donc une submersion et les orbites contenues dans $\bigcup_B V_B$ étant toutes connexes et cohomologiquement triviales, le résultat est une conséquence directe du théorème II.3.1. $\square$

Remarque II.4.3

Nous savons bien que l'ouvert générique V_B est en général inclus strictement dans la variété Ω des orbites de dimension maximale (voir [SG] par exemple). Malheureusement, l'ouvert $\bigcup_B V_B$ peut être lui aussi strictement plus petit que Ω . Cela est notamment le cas pour les algèbres de Lie filiformes (définies dans [CG], voir aussi [BLM, Go-Kh]), pour lesquelles tous les V_B coïncident et sont distincts de Ω .

Nous insérons ici un résultat qui est pratique à utiliser et qui permet de traiter facilement de nombreux exemples.

Proposition II.4.4

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension m , $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons Ω la variété des orbites de dimension maximale (égale à $2d$). Soient enfin $B = (X_i)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$, V_B l'ouvert générique associé à cette base B et $z_1, \dots, z_{m-2d}$ les invariants

génériques séparant les orbites de V_B . Si $\tilde{\Omega}$ désigne un ouvert de Ω tel que les fonctions polynomiales $z_1, \dots, z_{m-2d}$ séparent les orbites contenues dans $\tilde{\Omega}$ et tel que les vecteurs $dz_1(\mu), \dots, dz_{m-2d}(\mu)$ sont linéairement indépendants pour tout point μ dans $\tilde{\Omega}$, alors la cohomologie de Poisson tangentielle de $\tilde{\Omega}$ est acyclique en degré supérieur à zéro i.e.

$$H_{\Lambda, \tan}^0(\tilde{\Omega}) = I(\tilde{\Omega}) \quad \text{et} \quad H_{\Lambda, \tan}^q(\tilde{\Omega}) = \{0\} \quad \forall q > 0.$$

Preuve:

Il s'agit de montrer qu'il existe sur l'espace des orbites $\tilde{\Omega}/G$ une structure de variété pour laquelle la projection canonique $\Pi : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}/G$ soit une submersion. La proposition résultera alors du théorème II.3.1. Nous savons ([Die] ou [Bou]) qu'il suffit pour cela de montrer que le graphe Σ de la relation d'équivalence d'appartenance à une même orbite est une sous-variété fermée de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$. Définissons donc l'application f :

$$f : \tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^{m-2d} \\ (\mu, \eta) \longmapsto (z_1(\mu) - z_1(\eta), \dots, z_{m-2d}(\mu) - z_{m-2d}(\eta)).$$

Il est clair que f est indéfiniment différentiable. De plus, $\Sigma = f^{-1}(0)$ est non vide car $\Delta = \{(\mu, \mu) : \mu \in \tilde{\Omega}\} \subset \Sigma$.

D'autre part, pour tout couple (μ, η) de $f^{-1}(0)$, la différentielle $f_{*(\mu, \eta)}$ de f au point (μ, η) est de rang $m - 2d$ d'après l'hypothèse faite sur les z_k .

Il en résulte que Σ est une sous-variété plongée et fermée de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque II.4.5

Si un certain ouvert $\tilde{\Omega}$ satisfait les conditions de la proposition II.4.4 pour une base de Jordan-Hölder, alors il les satisfait pour toutes les autres bases de Jordan-Hölder. En effet, les invariants génériques $z_1, \dots, z_{m-2d}$ relatifs à une base B donnée générant le corps des fractions de $S(\mathfrak{g})^G$, le fait que les orbites coadjointes contenues dans $\tilde{\Omega}$ soient séparées ou non par les fonctions polynomiales $z_1, \dots, z_{m-2d}$ ne dépend pas du choix de la base B .

Comme on peut le voir en étudiant les exemples de Pedersen [Pe1, Pe2], il existe des algèbres de Lie nilpotentes pour lesquelles les propositions II.4.2 et II.4.4, et plus généralement le théorème II.3.1, ne permettent pas de calculer la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω .

Étudions ici en détail le cas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{4,1}$. Cette algèbre de Lie filiforme a pour crochets:

$$[X_4, X_3] = X_2, \quad [X_4, X_2] = X_1.$$

Dans la suite, on identifiera $\mathfrak{g}^*$ avec $\mathbb{R}^4$ au moyen du système de coordonnées (x_i) de $\mathfrak{g}^*$ associé à la base (X_i) . Les orbites coadjointes de dimension 2 sont de deux types.

Il y a d'une part les orbites des points $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ où μ_1 est non nul; ce sont des cylindres paraboliques de la forme

$$O_\mu = \left\{ (\mu_1, s, \frac{2\mu_1\mu_3 - \mu_2^2 + s^2}{2\mu_1}, \mu_1 t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

D'autre part, il y a les orbites des points $\mu = (0, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ où μ_2 est non nul; ce sont des variétés affines de la forme:

$$O_\mu = \{(0, \mu_2, s, \mu_2 t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Pour cet exemple, la variété des orbites de dimension maximale est donc:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathfrak{g}^* : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}.$$

On voit aussitôt que les polynômes génériques invariants associés à la base (X_i) , à savoir $z_1 = x_1$ et $z_2 = x_2^2 - 2x_3x_1$, ne séparent pas les orbites.

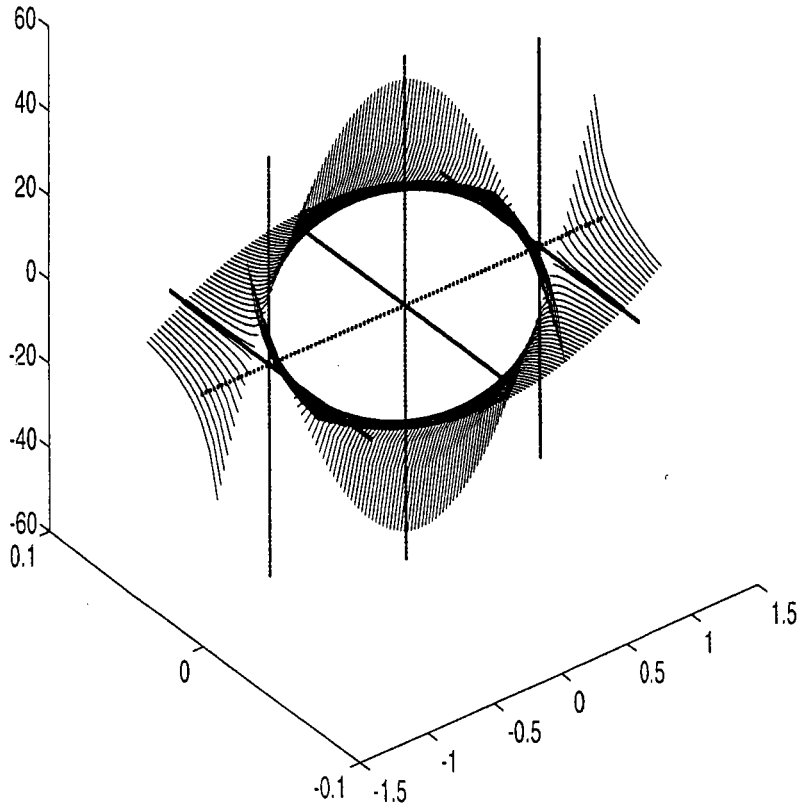


Figure 1: Les orbites des points $(0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 0)$ et $(\alpha, 1, 0, 0)$ pour $0 < |\alpha| < 0, 1$.

En fait, l'espace des orbites Ω/G (si G désigne le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) n'est pas séparé. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les orbites O^+ et O^- des points $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, -1, 0, 0)$. Notons un instant Π la projection $\Pi : \Omega \rightarrow \Omega/G$. Pour tout voisinage ouvert U (resp. V) de O^+ (resp. O^-), $\Pi^{-1}(U)$ (resp. $\Pi^{-1}(V)$) est un ouvert de Ω contenant $(0, 1, 0, 0)$ (resp. $(0, -1, 0, 0)$). Alors, comme l'illustre la figure ci-dessus, $\Pi^{-1}(U) \cap \Pi^{-1}(V)$ rencontre les orbites des points $(\alpha, 1, 0, 0)$ pour α suffisamment petit. Il en résulte que l'intersection $U \cap V = \Pi(\Pi^{-1}(U) \cap \Pi^{-1}(V))$ est non vide, d'où l'assertion.

Quelle est donc la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω ?

Déjà, nous savons que $H_{\Lambda, \text{tan}}^0(\Omega) = I(\Omega)$.

Pour étudier $H_{\Lambda, \text{tan}}^1(\Omega)$, il faut d'abord constater que tout champ de vecteurs tangentiel X est de la forme $X = a\partial_4 + bH_{x_4}$ où a, b appartiennent à $C^\infty(\Omega)$ et que $\sigma(X) = 0$ si et seulement si

$$\spadesuit \quad H_{x_4}(b) + \partial_4(a) = 0.$$

Nous nous proposons maintenant de ramener l'étude de $H_{\Lambda, \text{tan}}^1(\Omega)$ à la résolution de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$H_{x_4}(g) = a$$

où a et g ne dépendent que des variables x_1, x_2, x_3 .

Supposons donc que $X = a\partial_4 + bH_{x_4}$ satisfasse $\sigma(X) = 0$, c'est-à-dire que $\spadesuit$ soit vrai. Il existe $f \in C^\infty(\Omega)$ tel que $X = \sigma f$ si et seulement si

$$X(dx_i) = \sigma f(dx_i) = -\{f, x_i\} \quad \forall i,$$

ou, ce qui est équivalent, si et seulement si

$$b = -\partial_4(f) \quad \text{et} \quad a = H_{x_4}(f).$$

Ainsi, l'existence de f équivaut à l'existence d'une fonction $g(x) = g(x_1, x_2, x_3)$ vérifiant

$$f(x) = \int_0^{x_4} -b(x_1, x_2, x_3, t)dt + g(x_1, x_2, x_3)$$

et

$$H_{x_4}(f)(x) = - \int_0^{x_4} H_{x_4}b(x_1, x_2, x_3, t)dt + H_{x_4}(g)(x) = a(x).$$

Compte tenu de $\spadesuit$, cela signifie

$$\begin{aligned} H_{x_4}(f)(x) &= \int_0^{x_4} \partial_4(a)(x_1, x_2, x_3, t)dt + H_{x_4}(g)(x) \\ &= a(x_1, x_2, x_3, x_4) - a(x_1, x_2, x_3, 0) + H_{x_4}(g)(x) \\ &= a(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}$$

et donc, comme annoncé, que $H_{x_4}(g)(x) = a(x_1, x_2, x_3, 0)$. $\square$

On montre alors

Lemme II.4.6

Soit $a = a(x_1, x_2, x_3)$ une fonction de $C^\infty(\Omega)$. S'il existe une fonction $g = g(x_1, x_2, x_3)$ de $C^\infty(\Omega)$ tel que $H_{x_4}(g) = x_2 \partial_3(g) + x_1 \partial_2(g) = a$, alors

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \int_1^1 a(x_1, s, -\frac{1}{2x_1} + \frac{s^2}{2x_1}) \frac{ds}{x_1}$$

doit exister.

Preuve:

En utilisant le changement de variables

$$u = x_3 - \frac{x_2^2}{2x_1}, v = \frac{x_2}{x_1}, w = x_1,$$

on montre que, sur l'ouvert $U = \{x \in M : x_1 \neq 0\}$, g est nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \int_0^{\frac{x_2}{x_1}} a(x_1, x_1 t, x_3 - \frac{x_2^2}{2x_1} + \frac{t^2 x_1}{2}) dt + c(x_1, x_3 - \frac{x_2^2}{2x_1}) \\ &= \int_0^{x_2} a(x_1, s, x_3 - \frac{x_2^2}{2x_1} + \frac{s^2}{2x_1}) \frac{ds}{x_1} + c(x_1, x_3 - \frac{x_2^2}{2x_1}). \end{aligned}$$

Donc

$$g(x_1, 1, 0) = \int_0^1 a(x_1, s, -\frac{1}{2x_1} + \frac{s^2}{2x_1}) \frac{ds}{x_1} + c(x_1, -\frac{1}{2x_1})$$

et

$$g(x_1, -1, 0) = \int_0^{-1} a(x_1, s, -\frac{1}{2x_1} + \frac{s^2}{2x_1}) \frac{ds}{x_1} + c(x_1, -\frac{1}{2x_1}).$$

$$\text{Ainsi, } g(x_1, 1, 0) - g(x_1, -1, 0) = \int_{-1}^1 a(x_1, s, -\frac{1}{2x_1} + \frac{s^2}{2x_1}) \frac{ds}{x_1}.$$

Le lemme résulte de la continuité de g en les points $(0, 1, 0)$ et $(0, -1, 0)$. $\square$

Tandis que les feuilles de Ω sont cohomologiquement triviales, le premier espace de la cohomologie de Poisson tangentielle, $H_{\Lambda, \text{tan}}^1(\Omega)$, de Ω est énorme. En effet, nous avons

Proposition II.4.7

Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{4,1}$. On note encore Ω la variété des orbites de dimension maximale associée à $\mathfrak{g}$ et Λ sa structure de Poisson régulière. Enfin, on désigne par $S(\mathfrak{g})^G$ (resp. $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^G$) l'anneau des fonctions sur $\mathfrak{g}^*$, polynomiales (resp. analytiques) et G -invariantes. Pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, on introduit les champs de vecteurs $T_\alpha = t_\alpha \partial_4$ et $K_\alpha = k_\alpha \partial_4$ où

$$t_\alpha = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha} \quad \text{et} \quad k_\alpha = \frac{x_1 \exp(\frac{\alpha}{x_1^2 + x_2^2})}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

- (i) Alors, les classes $[T_\alpha]$ génèrent un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension infinie.
(ii) Les classes $[K_\alpha]$ sont linéairement indépendantes non seulement sur $\mathbb{R}$ mais aussi sur $S(\mathfrak{g})^G$ (ou encore sur $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^G$), i.e. $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$ n'est pas de type fini en tant que module sur $S(\mathfrak{g})^G$ (ou $\mathcal{A}(\mathfrak{g})^G$).

Preuve:

Pour tout $0 < x_1 < 1$, nous avons

$$\int_0^1 \frac{ds}{(x_1^2 + s^2)^\alpha x_1} \geq \int_0^{x_1} \frac{ds}{(x_1^2 + s^2)^\alpha x_1} \geq \frac{1}{2^\alpha x_1^{2\alpha}} \quad (\forall \alpha)$$

et

$$\int_0^1 \frac{ds}{(x_1^2 + s^2)^\alpha x_1} \leq \int_0^{x_1} \frac{ds}{(x_1^2 + s^2)^\alpha x_1} + \int_{x_1}^1 \frac{ds}{s^{2\alpha} x_1} \leq c_\alpha \frac{1}{x_1^{2\alpha}} \quad (\forall \alpha > \frac{1}{2})$$

où $c_\alpha = \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$. Supposons maintenant que pour un certain p , $\sum_{i=1}^p \lambda_{\alpha_i} [T_{\alpha_i}] = 0$, les λ_{α_i} appartenant à $\mathbb{R}$. Par le lemme II.4.6,

$$E = \int_0^1 \sum_{i=1}^p \lambda_{\alpha_i} \frac{ds}{(x_1^2 + s^2)^{\alpha_i} x_1}$$

doit avoir une limite lorsque x_1 tend vers zéro. Or, si $0 < x_1 < 1$,

$$\begin{aligned} |E| &\geq \left| \int_0^1 \frac{\lambda_{\alpha_p} ds}{x_1 (x_1^2 + s^2)^{\alpha_p}} \right| - \left| \int_0^1 \frac{\lambda_{\alpha_{p-1}} ds}{x_1 (x_1^2 + s^2)^{\alpha_{p-1}}} \right| \\ &\quad \dots - \left| \int_0^1 \frac{\lambda_{\alpha_1} ds}{x_1 (x_1^2 + s^2)^{\alpha_1}} \right| \\ &\geq \frac{|\lambda_{\alpha_p}|}{2^{\alpha_p} x_1^{2\alpha_p}} - \frac{|\lambda_{\alpha_{p-1}}| c_{\alpha_{p-1}}}{x_1^{2\alpha_{p-1}}} - \dots - \frac{|\lambda_{\alpha_1}| c_{\alpha_1}}{x_1^{2\alpha_1}}. \end{aligned}$$

On voit donc aussitôt que λ_{α_p} doit être nul et, en répétant l'argument, que $\lambda_{\alpha_i} = 0$ pour tout i . Par suite, les classes $[T_\alpha]$ engendrent un $\mathbb{R}$ -espace de dimension infinie et on a montré (i).

Le point (ii) se prouve de manière analogue, il suffit pour cela de constater que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2 \exp(\frac{\alpha}{x_1^2 + s^2})}{(x_1^2 + s^2)^2} ds &\geq \int_0^1 \frac{2s \exp(\frac{\alpha}{x_1^2 + s^2})}{(x_1^2 + s^2)^2} ds \\ &\geq \frac{1}{\alpha} (\exp(\frac{\alpha}{x_1^2}) - \exp(\frac{\alpha}{x_1^2 + 1})). \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 \frac{2 \exp(\frac{\alpha}{x_1^2 + s^2})}{(x_1^2 + s^2)^2} ds \leq \frac{2 \exp(\frac{\alpha}{x_1^2})}{x_1^4}. \quad \square$$

Pour finir l'étude de cet exemple, nous allons montrer que $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega)$ est trivial. Soit A un 2-tenseur tangentiel. Nécessairement,

$$A = \varphi \Lambda = \varphi(x_2 \partial_4 \wedge \partial_3 + x_1 \partial_4 \wedge \partial_2)$$

pour une certaine fonction φ dans $C^\infty(\Omega)$ et $\sigma(A) = 0$. Il nous faut donc trouver un champ de vecteurs tangentiel B tel que $A = \sigma(B)$, ou ce qui est équivalent des fonctions a, b de $C^\infty(\Omega)$ telles que $H_{x_4}(b) + \partial_4(a) = \varphi$. On voit immédiatement que les fonctions

$$a = \int_0^{x_4} \varphi(x_1, x_2, x_3, t) dt \quad \text{et} \quad b = 0$$

conviennent. On a donc bien $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega) = \{0\}$.

Notons que la trivialité de $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega)$ se déduit aussi des propositions II.2.7 et II.2.8 qui identifient la cohomologie de Poisson tangentielle avec une cohomologie de Čech. En effet, on peut facilement trouver un bon recouvrement de Ω sans intersection triple non triviale. Enfin, le rang de Ω étant égal à 2, nous avons aussi $H_{\Lambda, \tan}^k(\Omega) = \{0\}$ pour tout $k > 2$.

Remarque (et convention) II.4.8

- Pour démontrer le point (ii) de la proposition II.4.7, nous avons utilisé implicitement l'intégrité des anneaux $S(\mathfrak{g})^G$ et $A(\mathfrak{g})^G$. Nous conjecturons que $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$ n'est pas non plus de type fini en tant que $I(\Omega)$ -module.
- Dans la suite, chaque fois que nous dirons d'un espace de cohomologie $H_{\Lambda, \tan}^k(\Omega)$ ou $H_{\Lambda}^k(\Omega)$ de l'ouvert Ω (relatif à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ donnée) qu'il est infini, nous sous-entendrons qu'il est de dimension infinie à la fois en tant qu'espace vectoriel et en tant que module sur $S(\mathfrak{g})^G$ ou $A(\mathfrak{g})^G$.

Remarque II.4.9

Les calculs de cette section 4 montrent que tous les produits-star tangentiels sur $\cup_B V_B$ (et sur tout $\tilde{\Omega}$ satisfaisant les conditions de la proposition II.4.4) sont équivalents, en raison de la nullité du second espace de cohomologie de Poisson tangentielle (cf. appendice A.2). Et il en est de même pour l'ouvert dense Ω des orbites de dimension maximale de $\mathfrak{g}_{4,1}^*$.

II.5 Le cas des variétés de Poisson régulières de dimension 3.

Dans cette partie, (M, Λ) désigne une variété de Poisson régulière de dimension 3. On exclut le cas trivial où $\Lambda = 0$, i.e. M est supposé de rang 2. Pour déterminer les espaces de cohomologie $H_{\Lambda}^*(M)$ de M , nous nous inspirerons des calculs faits dans [Va2].

Déjà, $H_{\Lambda}^0(M) = H_{\Lambda, \tan}^0(M) = I(M)$.

De plus,

$$H_{\Lambda}^1(M) = \frac{\{Q \in \mathcal{V}^1(M) : \sigma(Q) = 0\}}{\{\sigma f : f \in C^\infty(M)\}}.$$

Choisissons une distribution transversale $\nu \mathcal{F}$ de M . Tout élément Q de $\mathcal{V}^1(M)$ se décompose alors de manière unique sous la forme

$$Q = Q_{0,1} + Q_{1,0}$$

où $Q_{0,1}$ et $Q_{1,0}$ sont de type $(0,1)$ et $(1,0)$ respectivement. Ainsi, $\sigma(Q) = 0$ si et seulement si $\sigma(Q_{0,1} + Q_{1,0}) = 0$ ou encore si et seulement si

$$\sigma'(Q_{0,1}) + \sigma'(Q_{1,0}) + \sigma''(Q_{0,1}) + \sigma''(Q_{1,0}) = 0,$$

donc, puisque σ' est de degré $(-1,2)$, si et seulement si

$$\sigma'(Q_{1,0}) + \sigma''(Q_{0,1}) + \sigma''(Q_{1,0}) = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\sigma''(Q_{1,0}) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma'(Q_{1,0}) + \sigma''(Q_{0,1}) = 0.$$

Considérons donc l'application linéaire p définie par

$$\begin{aligned} p : H_{\Lambda}^1(M) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{1,0}(M) \\ [A] &\longmapsto A_{1,0} \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\mathcal{V}}_{1,0}(M) = \{A \in \mathcal{V}_{1,0}(M) : \sigma''(A) = 0\}.$$

Par suite,

$$H_{\Lambda}^1(M) \simeq \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p).$$

Or,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(p) &= \{[A] \in H_{\Lambda}^1(M) : A_{1,0} = 0\} \\ &= \frac{\{A \in \mathcal{V}_{0,1}(M) : \sigma(A) = 0\}}{\{\sigma f : f \in C^{\infty}(M)\}} \\ &= \frac{\{A \in \mathcal{V}_{0,1}(M) : \sigma''(A) = 0\}}{\{\sigma'' f : f \in C^{\infty}(M)\}} \\ &= H_{\Lambda, \text{tan}}^1(M). \end{aligned}$$

De plus,

$$\text{Im}(p) = \{A \in \mathcal{V}_{1,0}(M) : \sigma''(A) = 0 \quad \text{et} \quad \exists B \in \mathcal{V}_{0,1}(M) / \sigma'(A) + \sigma''(B) = 0\}.$$

Calculons maintenant le deuxième espace de cette cohomologie:

$$\begin{aligned} H_{\Lambda}^2(M) &= \frac{\{Q \in \mathcal{V}^2(M) : \sigma(Q) = 0\}}{\{\sigma(V) : V \in \mathcal{V}^1(M)\}} \\ &= \frac{\{Q = Q_{0,2} + Q_{1,1} \in \mathcal{V}^2(M) : \sigma''(Q_{1,1}) = 0\}}{\{\sigma(V) : V = V_{0,1} + V_{1,0} \in \mathcal{V}^1(M)\}} \\ &= \frac{\{Q_{0,2} \in \mathcal{V}_{0,2}(M)\}}{\{\sigma''(V_{0,1}) + \sigma'(V_{1,0})\}} \oplus \frac{\{Q_{1,1} \in \mathcal{V}_{1,1}(M) : \sigma''(Q_{1,1}) = 0\}}{\{\sigma''(V_{1,0})\}} \\ &= \frac{\{Q_{0,2}\}}{\{\sigma''(V_{0,1})\}} \oplus \frac{\{Q_{1,1} : \sigma''(Q_{1,1}) = 0\}}{\{\sigma''(V_{1,0})\}} \\ &= \frac{H_{\Lambda, \text{tan}}^2(M)}{\sigma(\mathcal{V}_{1,0}(M))} \oplus \frac{\text{Ker}(\sigma''|_{\mathcal{V}_{1,1}(M)})}{\sigma''(\mathcal{V}_{1,0}(M))}. \end{aligned}$$

Le troisième espace s'obtient de manière similaire:

$$H_{\Lambda}^3(M) = \frac{\{Q_{1,2}\}}{\{\sigma(V_{0,2} + V_{1,1})\}} = \frac{\{Q_{1,2}\}}{\{\sigma''(V_{1,1})\}} = \frac{\mathcal{V}_{1,2}(M)}{\sigma''(\mathcal{V}_{1,1}(M))}.$$

Nous avons déjà vu que $(\oplus_q \Omega_{0,q}(M), d'')$ et $(\oplus_q \mathcal{V}_{0,q}(M), \sigma'')$ sont des complexes de $I(M)$ -modules isomorphes. D'autre part, il est toujours possible, pour tout p, q , de définir un isomorphisme entre $\Omega_{p,q}(M)$ et $\mathcal{V}_{p,q}(M)$. Il suffit pour cela de considérer une métrique euclidienne sur $\nu^*\mathcal{F}$ (cf. [Va 2]). On obtient ainsi un isomorphisme entre $\nu^*\mathcal{F} \oplus T^*\mathcal{F}$ et $\nu\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}$, isomorphisme qui se prolonge naturellement de $\Omega_{p,q}(M)$ dans $\mathcal{V}_{p,q}(M)$. Cependant, cet isomorphisme n'est pas en général un isomorphisme de complexes. Dans la proposition qui suit, nous donnons une situation simple où les complexes de $I(M)$ -modules $(\oplus_q \mathcal{V}_{p,q}(M), \sigma'')$ et $(\oplus_q \Omega_{p,q}(M), d'')$ sont effectivement isomorphes pour tout p . Ceci nous donnera plus de renseignements sur les espaces $H_{\Lambda}^*(M)$.

Proposition II.5.1

Soient M une variété de Poisson régulière et $\mathcal{F}$ son feuilletage symplectique. Soit aussi $\nu\mathcal{F}$ une distribution transversale pour M . On suppose que $\Omega_{1,0}(M)$ et $\mathcal{V}_{1,0}(M)$ sont des $I(M)$ -modules libres de bases respectives (β_i) et (X_i) , et que $d''\beta_i = 0$ et $\sigma''X_i = 0$ pour tout i . Alors $(\oplus_q \mathcal{V}_{p,q}(M), \sigma'')$ et $(\oplus_q \Omega_{p,q}(M), d'')$ sont des complexes de $I(M)$ -modules isomorphes pour tout p . En particulier, $H^q(M, \Phi^p(\mathcal{F}))$ et $H^q(\oplus_k \mathcal{V}_{p,k}(M), \sigma'')$ sont isomorphes en tant que $I(M)$ -modules.

Preuve:

On rappelle d'abord que $\# : T^*M \rightarrow TM$ s'étend en un isomorphisme de $I(M)$ -modules $\tilde{\#} : \Omega_{0,q}(M) \rightarrow \mathcal{V}_{0,q}(M)$ vérifiant $\sigma'' \circ \tilde{\#} = -\tilde{\#} \circ d''$. Considérons alors l'application $\hat{\#} : \Omega_{p,q}(M) \rightarrow \mathcal{V}_{p,q}(M)$ définie par

$$\hat{\#}\left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} \wedge \beta_{i_1} \wedge \dots \wedge \beta_{i_p}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_p} (\tilde{\#}(\alpha_{i_1, \dots, i_p}) \wedge X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_p})$$

où $\alpha_{i_1, \dots, i_p}$ appartient à $\Omega_{0,q}(M)$. Il est facile de vérifier que $\hat{\#}$ est un isomorphisme de $I(M)$ -modules et que $\sigma'' \circ \hat{\#} = -\hat{\#} \circ d''$. Le résultat s'ensuit. $\square$

Revenons maintenant sur quelques notions élémentaires.

Soit $V \rightarrow B$ un fibré vectoriel dont les fibres sont de dimension q . Nous dirons que $V \rightarrow B$ est orientable si le fibré $\Lambda^q V \rightarrow B$ admet une section globale partout non nulle. Si $V \rightarrow B$ est orientable, il en est de même de son dual $V^* \rightarrow B$. Rappelons aussi qu'une variété M est dite orientable si TM (ou T^*M) l'est.

D'autre part, nous dirons d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M , qu'il est *co-orientable* (ou simplement orientable) si son fibré normal $N\mathcal{F}$ est orientable. Dans le cas important d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1, il est équivalent de dire que $\mathcal{F}$ est orientable et de dire qu'il existe une 1-forme β , non nulle en chaque point, et qui s'annule exactement sur les vecteurs tangents au feuilletage. Si tel est le cas, nous dirons que β définit $\mathcal{F}$.

En général, l'orientabilité d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M n'implique pas l'orientabilité de M , ni même celle des feuilles de $\mathcal{F}$. Cependant, si (M, Λ) est une variété de Poisson régulière

(de rang $2n$), et si $\mathcal{F}$ désigne le feuilletage symplectique de M , alors le tenseur Λ^n définit une section globale partout non nulle du fibré $\Lambda^{2n}T\mathcal{F}$, et le fibré tangent $T\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ est orientable. Ainsi, le feuilletage symplectique d'une variété de Poisson régulière M est orientable si et seulement si M est orientable.

Proposition II.5.2

Soit M une variété de Poisson régulière de dimension 3 et de rang 2. Soit $\mathcal{F}$ son feuilletage symplectique. On suppose que M est orientable et que l'on peut choisir une 1-forme β définissant $\mathcal{F}$ telle que $d\beta = 0$. Alors,

(i) les deuxième et troisième espaces de la cohomologie de Poisson de M sont donnés par

$$H_{\Lambda}^2(M) \simeq \frac{H_{\Lambda, \tan}^2(M)}{\sigma(\mathcal{V}_{1,0}(M))} \oplus H^1(M, \Phi^1(\mathcal{F}))$$

$$H_{\Lambda}^3(M) \simeq H^2(M, \Phi^1(\mathcal{F}));$$

(ii) les $I(M)$ -modules $H_{\Lambda, \tan}^q(M)$ et $H^q(M, \Phi^1(\mathcal{F}))$ sont isomorphes pour tout q .

Preuve:

Identifions le fibré normal $N\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ à un sous-fibré $\nu\mathcal{F}$ de TM . Comme M (ou $\mathcal{F}$) est orientable par hypothèse, on peut trouver un champ de vecteurs X sur M , partout non nul, de sorte que, pour tout x , $\nu_x\mathcal{F}$ (resp. $\nu_x^*\mathcal{F}$) soit engendré par X_x (resp. β_x). Par construction, $\sigma''X = 0$ et $d\beta = d''\beta = 0$. De plus, $\Omega_{1,0}(M)$ et $\mathcal{V}_{1,0}(M)$ sont des $I(M)$ -modules libres isomorphes de bases respectives (β) et (X) . Le point (i) est donc une conséquence directe de la proposition II.5.1.

Pour prouver (ii), on introduit l'application $\Phi : H^q(M, \Phi^0(\mathcal{F})) \rightarrow H^q(M, \Phi^1(\mathcal{F}))$ définie par $\Phi([\alpha]) = [\alpha \wedge \beta]$ pour tout $\alpha \in \Omega_{0,q}(M)$ vérifiant $d''\alpha = 0$. L'application est bien définie car si α et α' sont deux formes de type $(0, q)$ de même classe dans $H^q(M, \Phi^0(\mathcal{F}))$ alors il existe une forme γ de type $(0, q-1)$ telle que $\alpha - \alpha' = d''\gamma$. Ainsi,

$$(\alpha - \alpha') \wedge \beta = d''(\gamma) \wedge \beta = d''(\gamma \wedge \beta)$$

donc $\alpha \wedge \beta$ et $\alpha' \wedge \beta$ sont bien de classe identique dans $H^q(M, \Phi^1(\mathcal{F}))$.

De même, on vérifie que $[\alpha \wedge \beta] = 0$ implique $[\alpha] = 0$, d'où l'injectivité de Φ .

Finalement, prenons une classe $[\omega]$ dans $H^q(M, \Phi^1(\mathcal{F}))$. En tant que forme de type $(1, q)$, ω s'écrit de manière unique sous la forme $\omega = \alpha \wedge \beta$ où α est une forme de type $(0, q)$. On en déduit que $[\omega] = \Phi([\alpha])$ donc que Φ est surjective. $\square$

II.6 Excursion à travers les algèbres de Lie de dimension 3.

Toute algèbre de Lie, répétons-le, donne naissance à une variété de Poisson régulière: l'union Ω des orbites coadjointes de dimension maximale. Dans la suite, nous proposons d'étudier la cohomologie de Poisson tangentielle et non tangentielle de Ω pour chaque algèbre de Lie de dimension 3.

On rappelle d'abord [Br] que toute algèbre de Lie de dimension 3 non abélienne est isomorphe à exactement une des algèbres de Lie de la présente liste:

- Une algèbre de Lie nilpotente: celle de Heisenberg définie par $[X_1, X_2] = X_3$;
- Une algèbre de Lie résoluble non exponentielle $\mathfrak{e}(2)$ définie par les crochets:
 $[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2$;
- Plusieurs algèbres de Lie résolubles exponentielles:
 - * l'algèbre de Lie du groupe affine défini par:
 $[X_1, X_2] = X_2$;
 - * la "book algebra":
 $[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = X_3$;
 - * les "algèbres de Lie de Grélaud":
 $[X_1, X_2] = X_2 - \sigma X_3, [X_1, X_3] = X_3 + \sigma X_2 \quad \sigma > 0$;
 - * $[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = \frac{1}{\tau} X_3 \quad \tau > 1$;
 - * $[X_1, X_2] = X_2 + X_3, [X_1, X_3] = X_3$;
 - * $[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = -X_3$;
 - * $[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = \frac{1}{\tau} X_3 \quad \tau < -1$;
- Deux algèbres de Lie simples:
 $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}(2)$.

Commençons par étudier les cas simples.

a) L'algèbre de Lie de Heisenberg.

Cette algèbre de Lie nilpotente est définie par le crochet $[X_1, X_2] = X_3$.

Pour cet exemple, les orbites non réduites à un point sont des plans et la variété de Poisson régulière (Ω, Λ) est

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson Λ . On identifie Ω à la variété produit $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ au moyen de la carte de Weinstein associant à un élément $x = (x_1, x_2, x_3)$ de Ω le point $(p = x_1, q = \frac{x_2}{x_3}, z = x_3)$.

D'après le théorème II.3.1 (ou le théorème II.3.2), la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est acyclique en degré supérieur à zéro.

Par ailleurs, Λ est transversalement constante relativement à la distribution transversale $\nu\mathcal{F} = T\mathbb{R}^*$. Ainsi, par le théorème II.3.3 (ou par calcul direct), nous obtenons:

$$H_{\Lambda}^0(\Omega) = H_{\Lambda, \text{tan}}^0(\Omega) = I(\Omega) = C^\infty(\mathbb{R}^*)$$

$$H_{\Lambda}^1(\Omega) \simeq \{u \, dz : u \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega)$$

$$H_{\Lambda}^k(\Omega) = \{0\} \quad \forall k > 1.$$

b) L'algèbre de Lie $\mathfrak{e}(2)$ du groupe euclidien.

Les crochets de cette algèbre de Lie sont:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_1, X_3] = X_2.$$

Les orbites de dimension 2 sont des cylindres C_r caractérisés par leur rayon $r > 0$. La variété de Poisson régulière (Ω, Λ) est donc

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{e}(2)^* : x_2^2 + x_3^2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson régulière Λ . On identifie Ω à la variété produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^*$ au moyen de la carte de Weinstein qui à un élément x de Ω , associe le point (p, q, r) où

$$p = x_1, \quad e^{iq} = \frac{x_2 + ix_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}, \quad r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}.$$

D'après le théorème II.3.2, la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est la suivante:

$$\begin{aligned} H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) &= I(\Omega) = C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega) &\simeq H_{DR}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \otimes C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ &= \{[\rho(r) dq] : \rho(r) \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \\ H_{\Lambda, \tan}^k(\Omega) &\simeq \{0\} \quad \forall k > 1. \end{aligned}$$

De plus, Λ est là encore transversalement constante relativement à la distribution transversale $\nu\mathcal{F} = T\mathbb{R}_+^*$. Donc, d'après le théorème II.3.3, la cohomologie de Poisson de Ω est donnée par:

$$\begin{aligned} H_\Lambda^0(\Omega) &= I(\Omega) \\ H_\Lambda^1(\Omega) &\simeq H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega) \oplus \{u dr : u \in I(\Omega)\} \\ &\simeq I(\Omega) \oplus I(\Omega) \\ H_\Lambda^2(\Omega) &\simeq H_{DR}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T}) \otimes \Omega^1(\mathbb{R}_+^*) \\ &\simeq \{[\rho(r) dq \wedge dr] : \rho(r) \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \\ H_\Lambda^k(\Omega) &= \{0\} \quad \forall k > 2. \end{aligned}$$

c) L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ du groupe affine.

Le seul crochet non nul est:

$$[X_1, X_2] = X_2.$$

Les orbites non triviales sont des demi-plans (x_3 et $\text{sign}(x_2)$ fixés). La variété de Poisson régulière (Ω, Λ) est:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{a}^* : x_2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson régulière Λ . Dans cet exemple, Ω s'identifie à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par le biais de la carte de Weinstein qui à un élément x de Ω associe l'élément (p, q, z) défini par

$$p = x_2, \quad q = \frac{-x_1}{x_2}, \quad z = x_3.$$

D'après le théorème II.3.1 (ou II.3.2), la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est acyclique en degré supérieur à zéro.

De plus, la structure de Poisson Λ est transversalement constante par rapport à la distribution transversale $\nu\mathcal{F} = T\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème II.3.3, la cohomologie de Poisson

de Ω est la suivante:

$$\begin{aligned}
 H_{\Lambda}^0(\Omega) &= H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) = I(\Omega) \\
 &\simeq C^\infty((\{1\} \times \mathbb{R}) \cup (\{-1\} \times \mathbb{R})) \\
 &\simeq C^\infty(\mathbb{R}) \oplus C^\infty(\mathbb{R}) \\
 H_{\Lambda}^1(\Omega) &\simeq \{u \, dz : u \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \\
 H_{\Lambda}^k(\Omega) &= \{0\} \quad \forall k > 1.
 \end{aligned}$$

d) La book algebra.

Cette algèbre de Lie est donnée par les crochets suivants:

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = X_3.$$

Les orbites non triviales sont caractérisées par un invariant θ et sont de la forme

$$O_\theta = \{(s, e^t \cos(\theta), e^t \sin(\theta)) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

La variété de Poisson régulière (Ω, Λ) est

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2^2 + x_3^2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson régulière Λ . Comme dans les exemples précédents, Ω s'identifie à la variété produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ par la carte de Weinstein qui à l'élément x de Ω associe le point (p, q, θ) défini par

$$p = x_1, \quad q = \frac{1}{2} \ln(x_2^2 + x_3^2), \quad e^{i\theta} = \frac{x_2 + ix_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}.$$

D'après le théorème II.3.1 (ou II.3.2), la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est acyclique en degré supérieur à zéro.

A nouveau, Λ est transversalement constante relativement à la distribution $\nu\mathcal{F} = T\mathbb{T}$. La cohomologie de Poisson de Ω est donc:

$$\begin{aligned}
 H_{\Lambda}^0(\Omega) &= H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) = I(\Omega) = C^\infty(\mathbb{T}) \\
 H_{\Lambda}^1(\Omega) &= \{u d\theta : u \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \\
 H_{\Lambda}^k(\Omega) &= \{0\} \quad \forall k > 1.
 \end{aligned}$$

e) Les algèbres de Lie de Grélaud.

Ces algèbres de Lie, étudiées par Grélaud dans [Gré], ont pour crochets

$$[X_1, X_2] = X_2 - \sigma X_3, \quad [X_1, X_3] = X_3 + \sigma X_2 \quad \sigma > 0.$$

Les orbites coadjointes de dimension 2 peuvent être vues comme une version “spirale” de la book algebra, elles sont paramétrées par un invariant θ et sont de la forme

$$O_\theta = \{(s, e^t \cos(\theta + \sigma t), e^t \sin(\theta + \sigma t)) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

où θ est défini par

$$e^{i\theta} = \frac{x_2 + ix_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} e^{-\frac{i\sigma}{2} \ln(x_2^2 + x_3^2)}.$$

La variété de Poisson régulière associée est:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2^2 + x_3^2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson régulière Λ . Comme pour la book algebra, on identifie Ω à la variété produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ et la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est acyclique en degré supérieur à zéro.

De plus, Λ est transversalement constante par rapport à la distribution $\nu\mathcal{F} = T\mathbb{T}$. La cohomologie de Poisson de Ω est donc:

$$\begin{aligned} H_\Lambda^0(\Omega) &= H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) = I(\Omega) = C^\infty(\mathbb{T}) \\ H_\Lambda^1(\Omega) &= \{ud\theta : u \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \\ H_\Lambda^k(\Omega) &= \{0\} \quad \forall k > 1. \end{aligned}$$

f) Des variantes de la book algebra.

Considérons la famille d'algèbres de Lie définie par les crochets:

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = \frac{X_3}{\tau} \quad \tau > 1.$$

Les orbites de dimension 2 peuvent être paramétrées comme suit:

$$O_\mu = \{(s, e^{-t}\mu_2, e^{-\frac{t}{\tau}}\mu_3) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\},$$

elles sont toutes de cohomologie de de Rham triviale (en degré supérieur à 0) et la variété de Poisson régulière (Ω, Λ) est:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2^2 + x_3^2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson régulière Λ .

Il s'agit maintenant de montrer que le feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ de Ω est induit par une submersion Π de Ω dans le cercle $\mathbf{S}^1$. Pour ce faire, introduisons l'application

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$F(t, x_2, x_3) = e^{-2t}x_2^2 + e^{-\frac{2t}{\tau}}x_3^2 - 1.$$

Le théorème des fonctions implicites affirme l'existence et l'unicité d'une fonction indéfiniment différentiable $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(\varphi(x_2, x_3), x_2, x_3) = 0 \quad \forall (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Ses dérivées partielles de premier ordre sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= \frac{e^{-2\varphi} x_2}{e^{-2\varphi} x_2^2 + e^{\frac{-2\varphi}{\tau} \frac{x_3^2}{\tau}}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= \frac{e^{\frac{-2\varphi}{\tau}} x_3}{e^{-2\varphi} x_2^2 + e^{\frac{-2\varphi}{\tau} \frac{x_3^2}{\tau}}}. \end{aligned}$$

Définissons maintenant l'application $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^1$ par

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \Pi(x_1, x_2, x_3) = (e^{-\varphi(x_2, x_3)} x_2, e^{\frac{-\varphi(x_2, x_3)}{\tau}} x_3).$$

Il est facile de vérifier que Π est une submersion et qu'elle induit le feuilletage de Ω . Ainsi, par le théorème II.3.1, la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est acyclique en degré supérieur à zéro (il en était de même pour la book algebra).

D'autre part, on observe que Ω est orientable et que son feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ est défini par la 1-forme $\beta = d\theta$ où θ est donné par

$$e^{i\theta} = e^{-\varphi} x_2 + ie^{\frac{-\varphi}{\tau}} x_3.$$

On déduit donc de la proposition II.5.2 que, comme pour la book algebra, la cohomologie de Poisson de Ω est donnée par:

$$\begin{aligned} H_\Lambda^0(\Omega) &= H_{\Lambda, \text{tan}}^0(\Omega) = I(\Omega) \\ H_\Lambda^1(\Omega) &\simeq \{u d\theta : u \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \\ H_\Lambda^k(\Omega) &\simeq \{0\} \quad \forall k > 1. \end{aligned}$$

Un exemple tout à fait analogue au précédent: l'algèbre de Lie définie par les crochets

$$[X_1, X_2] = X_2 + X_3, \quad [X_1, X_3] = X_3.$$

Dans ce cas, les orbites de dimension 2 peuvent être paramétrées par:

$$O_\mu = \{(s, e^{-t}(\mu_2 - \mu_3 t), e^{-t}\mu_3) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\},$$

toutes sont cohomologiquement triviales et la variété de Poisson régulière (Ω, Λ) est à nouveau

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2^2 + x_3^2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson Λ .

Introduisons maintenant l'application G définie par

$$G(t, x_2, x_3) = e^{-2t}((x_2 - x_3 t)^2 + x_3^2) - 1.$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction indéfiniment différentiable $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$G(\psi(x_2, x_3), x_2, x_3) = 0 \quad \forall (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Ses dérivées partielles sont:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= \frac{x_2 - \psi x_3}{(x_2 - (\psi - \frac{1}{2})x_3)^2 + \frac{3}{4}x_3^2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_3} &= \frac{x_3 + \psi^2 x_3 - \psi x_2}{(x_2 - (\psi - \frac{1}{2})x_3)^2 + \frac{3}{4}x_3^2}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, le feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ de Ω est induit par une submersion, à savoir l'application $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbf{S}^1$ définie par

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = (e^{-\psi(x_2, x_3)}(x_2 - x_3 \psi(x_2, x_3)), e^{-\psi(x_2, x_3)} x_3).$$

Par suite, d'après le théorème II.3.1, la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est acyclique en degré supérieur à zéro.

Là aussi, $\mathcal{F}$ est orientable et est défini par la 1-forme $\beta = d\theta$ où θ est maintenant donné par

$$e^{i\theta} = e^{-\psi}((x_2 - x_3 \psi) + ix_3).$$

La cohomologie de Poisson de Ω est donc à nouveau:

$$\begin{aligned} H_{\Lambda}^0(\Omega) &= H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) = I(\Omega) \\ H_{\Lambda}^1(\Omega) &\simeq \{u d\theta : u \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \\ H_{\Lambda}^k(\Omega) &\simeq \{0\} \quad \forall k > 1. \end{aligned}$$

g) L'exemple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

Les crochets définissant la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{su}(2)$ sont:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Toutes les orbites coadjointes non triviales sont des sphères de dimension 2 et la variété de Poisson régulière (Ω, Λ) des orbites de dimension maximale n'est autre que $\Omega = \mathfrak{su}(2)^* \setminus \{0\}$ munie de sa structure de Poisson Λ . On identifie naturellement Ω au produit $\mathbf{S}^2 \times \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par le théorème II.3.2, la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est:

$$\begin{aligned} H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) &= I(\Omega) = C^\infty(\mathbb{R}_+^*) \\ H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega) &= \{0\} \\ H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega) &= \{[u\Lambda] : u \in I(\Omega)\} \\ &\simeq \{[u\omega_\Lambda] : u \in I(\Omega)\} \simeq I(\Omega) \end{aligned}$$

où l'on a noté ω_Λ la 2-forme feuilletée associée à Λ i.e.

$$\omega_\Lambda = \frac{x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1}{r^2} \quad (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}).$$

Enfin, pour des raisons évidentes de degré, on voit que

$$H_{\Lambda, \tan}^k(\Omega) = \{0\} \quad \forall k > 2.$$

Il est à noter que, dans cet exemple, Ω s'identifie à un produit du type $S \times R$; cependant, le théorème II.3.3 ne peut pas être utilisé, Λ n'étant pas transversalement constante.

Dans la suite, nous proposons de déterminer par calcul direct la cohomologie de Poisson de (Ω, Λ) . Nous avons bien entendu:

$$H_\Lambda^0(\Omega) = I(\Omega) = C^\infty(\mathbb{R}_+^*).$$

Introduisons maintenant la 1-forme $\beta = dr$ et le champ d'Euler $X = \sum x_i \partial_i$, et considérons la distribution transversale $\nu \mathcal{F}$ dont les espaces $\nu_x^* \mathcal{F}$ (resp. $\nu_x \mathcal{F}$) sont engendrés par β_x (resp. X_x).

On se souvient que $H_\Lambda^1(\Omega)$ s'identifie à

$$\{A \in \mathcal{V}_{1,0}(\Omega) : \sigma''(A) = 0 \text{ et } \exists B \in \mathcal{V}_{0,1}(\Omega) \text{ tel que } \sigma(A) + \sigma''(B) = 0\}.$$

En outre, $\{A \in \mathcal{V}_{1,0}(\Omega) : \sigma''(A) = 0\}$ s'identifie à $\{uX : u \in I(\Omega)\}$. Et, comme

$$\sigma(uX) = u\sigma(X) = u\Lambda$$

pour tout u de $I(\Omega)$ et que la classe $[u\Lambda]$ de $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega)$ n'est nulle que si $u = 0$, nous avons

$$H_\Lambda^1(\Omega) = \{0\}.$$

Nous déduisons du point (i) de la proposition II.5.2 que

$$H_\Lambda^2(\Omega) \simeq \frac{H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega)}{\sigma(\mathcal{V}_{1,0}(\Omega))} \oplus H^1(\Omega, \Phi^1(\mathcal{F})).$$

Nous avons vu que $\mathcal{V}_{1,0}(\Omega) \supset \{uX : u \in I(\Omega)\}$ et que $\sigma(uX) = u\Lambda$ pour tout u de $I(\Omega)$. De plus, par le point (ii) de la proposition II.5.2, $H^1(\Omega, \Phi^1(\mathcal{F}))$ et $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$ sont isomorphes. Il s'ensuit que

$$H_\Lambda^2(\Omega) = \{0\}.$$

Cette même proposition II.5.2 nous indique que

$$H_\Lambda^3(\Omega) \simeq H^2(\Omega, \Phi^1(\mathcal{F})) \quad \text{et} \quad H^2(\Omega, \Phi^1(\mathcal{F})) \simeq H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega).$$

De façon plus explicite, on a

$$\begin{aligned} H_{\Lambda}^3(\Omega) &= \{u[\Lambda \wedge X] : u \in I(\Omega)\} \\ &\simeq \{u[w_{\Lambda} \wedge dr] : u \in I(\Omega)\} \\ &\simeq I(\Omega). \end{aligned}$$

Et bien sûr

$$H_{\Lambda}^k(\Omega) = \{0\} \quad \forall k > 3.$$

Remarques II.6.1

L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ donne un exemple de variété de Poisson régulière, à savoir $\mathfrak{su}(2)^* \setminus \{0\}$, qui est exacte mais qui n'est pas tangentielle exacte. Bien plus, puisque pour $\Omega = \mathfrak{su}(2)^* \setminus \{0\}$, $H_{\Lambda}^2(\Omega) = \{0\}$ et $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega) \neq \{0\}$, le cas de $\mathfrak{su}(2)$ montre qu'il n'y a pas en général de plongement des espaces de la cohomologie de Poisson tangentielle dans ceux de la cohomologie de Poisson usuelle, excepté en degré 1.

Nous devons ajouter que la cohomologie de Poisson de $\mathfrak{su}(2)^* \setminus \{0\}$ a déjà été calculée dans [Xu], par une méthode différente faisant intervenir les groupoïdes symplectiques. Cette méthode consiste à ramener le calcul de la cohomologie de Poisson à celui de la cohomologie de de Rham de certaines variétés.

Il s'agit à présent d'examiner les algèbres de Lie de dimension 3 restantes. Nous verrons que toutes ces algèbres de Lie sont des cas pathologiques.

h) Un exemple intéressant.

Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ définie par les crochets suivants:

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = -X_3.$$

On notera H le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Pour cette algèbre de Lie, les orbites de dimension 2 sont soit des composantes connexes de cylindres hyperboliques $x_2 x_3 = \text{const}$, soit des demi-plans $x_2 = 0, \text{sign}(x_3)$ fixé ou $x_3 = 0, \text{sign}(x_2)$ fixé. La variété de Poisson régulière (Ω, Λ) correspondante est donc

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{h}^* : x_2^2 + x_3^2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson régulière Λ . Toutes les orbites sont connexes et cohomologiquement triviales, cependant le théorème II.3.1 ne peut être appliqué car l'espace des orbites Ω/H , muni de la topologie quotient, n'est pas séparé.

Qu'en est-il alors de la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω ? On a bien sûr $H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) = I(\Omega)$. Pour décrire $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$, on procède comme pour $\mathfrak{g}_{4,1}$. On constate d'abord que tout champ de vecteurs tangentiel X est de la forme

$$X = a\partial_1 + bH_{x_1}$$

où a, b appartiennent à $C^\infty(\Omega)$. De plus, on montre que $\sigma(X) = 0$ si et seulement si

$$H_{x_1}(b) + \partial_1(a) = 0.$$

Prenons un opérateur tangentiel $X = a\partial_1 + bH_{x_1}$ tel que $\sigma(X) = 0$. L'existence d'une fonction f de $C^\infty(\Omega)$ tel que $X = \sigma(f)$ équivaut à l'existence d'une fonction $g = g(x_2, x_3)$ de $C^\infty(\Omega)$ telle que $H_{x_1}(g) = a(0, x_2, x_3)$.

Considérons le changement de variables $u = x_2x_3$, $v = \frac{x_2^2 - x_3^2}{2}$. Il donne naissance à un difféomorphisme φ de $\{(u, v) : u > 0\}$ dans $\{(x_2, x_3) : x_2 > 0, x_3 > 0\}$ défini par

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \left(\sqrt{v + \sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{u}{\sqrt{v + \sqrt{u^2 + v^2}}} \right) \quad \text{si } v > 0 \\ \varphi(u, v) &= \left(\frac{u}{-v + \sqrt{u^2 + v^2}}, -v + \sqrt{u^2 + v^2} \right) \quad \text{si } v < 0 \\ \varphi(u, 0) &= (\sqrt{u}, \sqrt{u}).\end{aligned}$$

Cette fonction φ se prolonge de manière naturelle à $\{(u, v) : u > 0\} \cup \{(0, v) : v \neq 0\}$. On notera encore φ ce prolongement. On peut alors montrer un lemme analogue au lemme II.4.6, à savoir le

Lemme II.6.2

Soit $a = a(x_2, x_3)$ une fonction dans $C^\infty(\Omega)$. Soit $g = g(x_2, x_3)$ également dans $C^\infty(\Omega)$ telle que $H_{x_1}(g) = a$ et notons $A(u, v) = a(\varphi(x_2, x_3))$, φ désignant le difféomorphisme défini ci-dessus. Alors, la limite suivante

$$\lim_{u \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{A(u, t)}{2\sqrt{u^2 + t^2}} dt,$$

existe.

Preuve:

On a par hypothèse, $x_2\partial_2 - x_3\partial_3(g) = a$. Dans les nouvelles variables, cela s'écrit:

$$2\sqrt{u^2 + v^2}\partial_v(G) = A$$

où $G = g \circ \varphi$. Ainsi, G est de la forme:

$$G(u, v) = \int_{-1}^v \frac{1}{2\sqrt{u^2 + t^2}} dt + \psi(u).$$

Par continuité, de φ en $(0, 1)$ et de g en $\varphi(0, 1) = (\sqrt{2}, 0)$, $G(0, -1)$ doit exister, donc $\lim_{u \rightarrow 0} \psi(u)$ doit avoir un sens. De même, $G(0, 1)$ existe. Le résultat s'ensuit directement. $\square$

Ainsi, en utilisant les champs de vecteurs $\tilde{T}_\alpha = \tilde{t}_\alpha \partial_1$ et $\tilde{K}_\alpha = \tilde{k}_\alpha \partial_1$ où

$$\tilde{t}_\alpha = \frac{1}{(x_2^2 + x_3^2)^\alpha} \quad \text{et} \quad \tilde{k}_\alpha = \frac{\exp(\frac{\alpha}{(x_2^2 + x_3^2)^2})}{(x_2^2 + x_3^2)^3},$$

on peut montrer que $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$ est infini.

Ensuite, on voit soit par calcul direct soit par un argument de Čech que $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega) = \{0\}$.

Et comme Ω est de rang 2, on a même $H_{\Lambda, \tan}^k(\Omega) = \{0\}$ pour tout $k \geq 2$.

La cohomologie de Poisson de Ω est donnée par la proposition II.5.2. En effet, le feuilletage symplectique de Ω est orientable et est défini par la 1-forme $\beta = x_2 dx_3 + x_3 dx_2$ ($d\beta = 0$). Ainsi, si on note $X = \frac{x_2 \partial_3 + x_3 \partial_2}{x_2^2 + x_3^2}$, on a

$$\begin{aligned} H_{\Lambda}^0(\Omega) &= I(\Omega) \\ H_{\Lambda}^1(\Omega) &= H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega) \oplus \{uX : u \in I(\Omega)\} \\ H_{\Lambda}^2(\Omega) &\simeq H^1(\Omega, \Phi^1(\mathcal{F})) \\ &\simeq H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega) \\ H_{\Lambda}^3(\Omega) &\simeq H^2(\Omega, \Phi^1(\mathcal{F})) \\ &\simeq H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega) = \{0\} \\ H_{\Lambda}^k(\Omega) &= \{0\} \quad \forall k > 3. \end{aligned}$$

On voit que les espaces $H_{\Lambda}^1(\Omega)$ et $H_{\Lambda}^2(\Omega)$ font intervenir $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$, donc qu'ils sont infinis.

Remarques II.6.3

Considérons la famille d'algèbres de Lie suivante:

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = \frac{1}{\tau} X_3 \quad \tau < -1.$$

Pour ces exemples, la cohomologie de Poisson tangentielle de Ω est essentiellement la même que celle rencontrée pour $\mathfrak{h}$ (la structure des orbites y est similaire). Par contre, le calcul de la cohomologie de Poisson semble plus difficile à obtenir.

i) Le cas de $\mathfrak{sl}(2)$.

Les relations de commutation de $\mathfrak{sl}(2)$ sont:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_3, X_2] = -X_1.$$

La forme de Killing permettant d'identifier l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ à son dual $\mathfrak{sl}(2)^*$, les orbites coadjointes coïncident avec les orbites du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ opérant par action adjointe sur $\mathfrak{sl}(2)$. Les trois orbites que sont

$$\begin{aligned} W_0 &= \{0\}; \\ W_+ &= \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0, \mu_3 > 0\}; \\ W_- &= \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0, \mu_3 < 0\} \end{aligned}$$

constituent le cône nilpotent.

Les points situés à l'extérieur du cône ont pour orbites des hyperboloïdes à une nappe (asymptotes au cône nilpotent):

$$W_k = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = k^2\} \quad (k > 0).$$

Et les orbites des points situés dans chacune des composantes de l'intérieur du cône sont données par des moitiés d'hyperboloïdes à deux nappes (asymptotes aussi au cône nilpotent):

$$W_h = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = -h^2, \mu_3 h > 0\} \quad (h \neq 0).$$

La variété de Poisson régulière (Ω, Λ) est donc:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{sl}(2)^* : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0\},$$

munie de sa structure de Poisson régulière Λ . Comme dans l'exemple précédent, l'espace des orbites est clairement non séparé. Nous proposons maintenant de décrire la cohomologie de Poisson tangentielle de (Ω, Λ) .

Comme toujours, $H_{\Lambda, \tan}^0(\Omega) = I(\Omega)$. Qu'en est-il de $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$? Prenons un champ de vecteurs tangentiel X de la forme

$$X = aH_{x_3}$$

où a appartient à $C^\infty(\Omega)$. Dire que $X = \sigma f$ pour une fonction f dans $C^\infty(\Omega)$, c'est exactement dire que f vérifie

$$H_{x_1}(f) = x_2 a$$

$$H_{x_2}(f) = -x_1 a$$

$$H_{x_3}(f) = 0.$$

Considérons l'ouvert $U = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0\}$ que l'on peut manifestement paramétrer par:

$$x_1 = -p \sin(q) + z \cos(q)$$

$$x_2 = -p \cos(q) - z \sin(q)$$

$$x_3 = p.$$

Dire que $X = \sigma f$ équivaut sur l'ouvert U à dire que $\partial_p(f) = -a$ et que $\partial_q(f) = 0$. Autrement dit, si $X = \sigma f$, alors $f|_U$ ne peut dépendre que des variables (p, z) et est de la forme

$$f = f(p, z) = - \int_{-1}^p a(s, q, z) ds + \psi(z).$$

En considérant les champs de vecteurs suivants

$$\hat{T}_\alpha = \hat{t}_\alpha H_{x_3} \quad \text{et} \quad \hat{K}_\alpha = \hat{k}_\alpha H_{x_3}$$

où

$$\hat{t}_\alpha = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^\alpha} \quad \text{et} \quad \hat{k}_\alpha = \exp\left(\frac{\alpha}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)$$

et en utilisant des arguments déjà évoqués dans cet exposé, on peut montrer que $H_{\Lambda, \tan}^1(\Omega)$ est infini.

Il en est de même pour $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega)$. Prenons, en effet, un 2-tenseur tangentiel X . Il existe alors un certain φ dans $C^\infty(\Omega)$ tel que

$$X = \varphi \Lambda = \varphi(x_3 \partial_2 \wedge \partial_1 + x_2 \partial_3 \wedge \partial_1 + x_1 \partial_2 \wedge \partial_3)$$

et X vérifie nécessairement $\sigma(X) = 0$. Supposons maintenant qu'il existe un champ de vecteurs tangentiel, notons-le B , tel que $X = \sigma(B)$. Si on écrit B sous la forme

$$B = aH_{x_1} + bH_{x_2} + cH_{x_3}$$

où a, b, c appartiennent à $C^\infty(\Omega)$, alors

$$* \quad H_{x_1}(a) + H_{x_2}(b) + H_{x_3}(c) = \varphi.$$

Sur l'ouvert $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0\}$, $*$ se traduit par:

$$(-x_2\partial_p - \sin(q)\partial_q)(a) + (x_1\partial_p - \cos(q)\partial_q)(b) + \partial_q(c) = \varphi.$$

Par intégration de l'expression ci-dessus en q , entre 0 et 2π , il vient:

$$\begin{aligned} & p\partial_p \left(\int_0^{2\pi} (\cos(q)a - \sin(q)b) dq \right) + z\partial_p \left(\int_0^{2\pi} (\sin(q)a + \cos(q)b) dq \right) \\ & + \int_0^{2\pi} (-\sin(q)\partial_q(a) - \cos(q)\partial_q(b)) dq = \\ & = p\partial_p \left(\int_0^{2\pi} (\cos(q)a - \sin(q)b) dq \right) + z\partial_p \left(\int_0^{2\pi} (\sin(q)a + \cos(q)b) dq \right) \\ & + \int_0^{2\pi} (\cos(q)a - \sin(q)b) dq = \\ & = \int_0^{2\pi} \varphi(p, q, z) dq. \end{aligned}$$

Supposons de plus que φ dépende uniquement des variables p, z , et introduisons les fonctions H et g définies par:

$$H(p, z) = \int_0^{2\pi} (\cos(q)a - \sin(q)b) dq \quad g(p, z) = \int_0^{2\pi} (\sin(q)a + \cos(q)b) dq.$$

Alors,

$$p\partial_p H + H = 2\pi\varphi - z\partial_p(g).$$

Ainsi, sur l'ouvert $U \cap \{p > 0\}$, H s'écrit nécessairement sous la forme

$$H = \frac{1}{p} \left(\int_1^p 2\pi\varphi(s, z) ds - zg(p, z) + zg(1, z) + \psi_1(z) \right).$$

De même, sur l'ouvert $U \cap \{p < 0\}$, H s'écrit nécessairement sous la forme

$$H = \frac{1}{p} \left(\int_{-1}^p 2\pi\varphi(s, z) ds - zg(p, z) + zg(-1, z) + \psi_2(z) \right).$$

La fonction $H(p, z)$ existe en les points $(p, 0)$ avec $p \neq 0$, donc $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$ doivent avoir une limite lorsque $z(> 0)$ tend vers zéro. En outre, $H(p, z)$ existe aussi en les points $(0, z)$ avec $z \neq 0$. Donc, pour tout $z \neq 0$, nous devons avoir

$$\int_1^0 (2\pi\varphi(s, z))ds - zg(0, z) + zg(1, z) + \psi_1(z) = 0$$

ainsi que

$$\int_{-1}^0 (2\pi\varphi(s, z))ds - zg(0, z) + zg(-1, z) + \psi_2(z) = 0$$

Par suite,

$$\int_{-1}^1 (2\pi\varphi(s, z))ds - zg(1, z) + zg(-1, z) - \psi_1(z) + \psi_2(z) = 0.$$

Autrement dit, si $X = \varphi\Lambda$ où $\varphi|_U = \varphi(p, z)$ et s'il existe un champ de vecteurs tangentiel B satisfaisant $X = \sigma(B)$, alors la limite

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \int_{-1}^1 (2\pi\varphi(s, z))ds$$

doit exister. Pour voir que $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega)$ est effectivement infini, il suffit de considérer les

champs de vecteurs $\hat{t}_\alpha\Lambda$ où $\hat{t}_\alpha = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^\alpha}$ et $\hat{k}_\alpha\Lambda$ où $\hat{k}_\alpha = \frac{\exp(\frac{\alpha}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}$.

Finalement,

$$H_{\Lambda, \tan}^k(\Omega) = 0 \quad \forall k > 2.$$

Ajoutons que le feuilletage symplectique de Ω est orientable et qu'il est défini par la 1-forme $\beta = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3$, non nulle sur tout Ω . Ainsi, par la proposition II.5.2, tous les espaces de cohomologie de Poisson $H_\Lambda^k(\Omega)$ ($1 \leq k \leq 3$) sont infinis. On finit cette partie par la

Remarque II.6.4

Les calculs de la section 6 montrent en particulier que $H_{\Lambda, \tan}^2(\Omega) = \{0\}$ pour toutes les algèbres de Lie de dimension 3 non semi-simples (i.e. toutes sauf $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}(2)$). Pour ces algèbres de Lie, il n'existe donc qu'une et une seule classe de produits-star tangentiels sur l'ouvert Ω des orbites de dimension maximale.

II.7 Un exemple de bon recouvrement.

Il est possible de donner une construction explicite d'un bon recouvrement sur Ω pour chaque algèbre de Lie de dimension 3. Cela n'est pas tout à fait immédiat dans le cas de $\mathfrak{sl}(2)$. Nous nous proposons ici de détailler ce cas.

Considérons d'abord l'ouvert $U = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0\}$. Comme plus haut, on paramètre U via l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow U \\ (p, q, z) &\longmapsto (x_1 = -p \sin q + z \cos q, x_2 = -p \cos q - z \sin q, x_3 = p). \end{aligned}$$

Remarquons que $U \simeq \bigcup_{k>0} W_k$ où $W_k = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = k^2\}$ est symplectomorphe à $T^*\mathbb{T} = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ par

$$\begin{aligned} \psi_k : \mathbb{R} \times \mathbb{T} &\longrightarrow W_k \\ (p, q) &\longmapsto \psi(p, q, k). \end{aligned}$$

La cohomologie de Poisson tangentielle de U n'étant pas triviale, nous partageons U en les trois ouverts suivants:

$$\begin{aligned} U_1 &= \psi(\mathbb{R} \times]0, \pi[\times \mathbb{R}_+^*) \\ U_2 &= \psi(\mathbb{R} \times]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[\times \mathbb{R}_+^*) \\ U_3 &= \psi(\mathbb{R} \times]\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}[\times \mathbb{R}_+^*). \end{aligned}$$

On a clairement:

$$H_{\Lambda, \tan}^k(U_j) = \{0\} \quad \forall k > 0, \forall 1 \leq j \leq 3.$$

Considérons de même l'ouvert $V = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}$. Nous partageons alors V en deux ouverts connexes $U_4 = \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in V : x_3 > 0\}$ et $U_5 = \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in V : x_3 < 0\}$. Nous constatons immédiatement que $U_4 \simeq \bigcup_{h>0} W_h$ et que $U_5 \simeq \bigcup_{h<0} W_h$ où $W_h = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = -h^2, \mu_3 h > 0\}$. Ici, W_h est symplectomorphe au disque ouvert $D = \{(\theta, r) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, r < 1\}$, dont la structure symplectique est donnée par la 2-forme

$$\omega = \frac{4\pi r}{(1-r^2)^2} dr \wedge d\theta.$$

Ce symplectomorphisme est défini par

$$\begin{aligned} \psi : D &\longrightarrow W_h \\ (\theta, r) &\longmapsto (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \end{aligned}$$

où

$$\mu_1 = -2h \frac{r \sin(\theta)}{1-r^2} \quad \mu_2 = -2h \frac{r \cos(\theta)}{1-r^2} \quad \mu_3 = h \frac{1+r^2}{1-r^2}.$$

Ainsi, $U_4 \simeq D \times \mathbb{R}_+^*$, $U_5 \simeq D \times \mathbb{R}_+^*$ et on a bien $H_{\Lambda, \tan}^k(U_4) = H_{\Lambda, \tan}^k(U_5) = \{0\}$ dès que $k > 0$. On peut également voir U_4 et U_5 comme des domaines de cartes de Weinstein en posant

$$\begin{aligned} \varphi_4 : U_4 &\longrightarrow \varphi_4(U_4) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (p, q, z) \end{aligned}$$

où

$$x_1 = p \quad x_2 = -sh(q)\sqrt{-z+p^2} \quad x_3 = ch(q)\sqrt{-z+p^2}.$$

Ce qui signifie

$$p = x_1 \quad q = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 + x_2}\right) \quad z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

De même, on définit

$$\begin{aligned} \varphi_5 : U_5 &\longrightarrow \varphi_5(U_5) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^* \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (p, q, z) \end{aligned}$$

où

$$x_1 = -p \quad x_2 = -sh(q)\sqrt{-z + p^2} \quad x_3 = -ch(q)\sqrt{-z + p^2}.$$

Ce qui signifie

$$p = -x_1 \quad q = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2}\right) \quad z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Il s'agit à présent de recouvrir l'ensemble des orbites nilpotentes contenues dans Ω , c'est-à-dire le cône nilpotent $\mathcal{N}$ privé de $\{0\}$:

$$\mathcal{N} \setminus \{0\} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}.$$

Pour cela, on introduit un paramètre λ , $0 < \lambda < 1$, dans les cartes (U_4, φ_4) , (U_5, φ_5) précédentes. Concrètement, on pose:

$$\begin{aligned} U_6 &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_1)^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0, x_3 > 0, x_1 > 0\} \\ U_7 &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_1)^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0, x_3 > 0, x_1 < 0\} \\ U_8 &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_2)^2 + x_1^2 - x_3^2 < 0, x_3 > 0, x_2 > 0\} \\ U_9 &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_2)^2 + x_1^2 - x_3^2 < 0, x_3 > 0, x_2 < 0\} \\ U_{10} &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_1)^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0, x_3 < 0, x_1 > 0\} \\ U_{11} &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_1)^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0, x_3 < 0, x_1 < 0\} \\ U_{12} &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_2)^2 + x_1^2 - x_3^2 < 0, x_3 < 0, x_2 > 0\} \\ U_{13} &= \{\xi = (x_1, x_2, x_3) \in M : (\lambda x_2)^2 + x_1^2 - x_3^2 < 0, x_3 < 0, x_2 < 0\}. \end{aligned}$$

On définit pour $i = 6, 7$:

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (p = \lambda x_1, q = \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 + x_2}\right), z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2). \end{aligned}$$

Pour $i = 8, 9$:

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (p = \lambda x_2, q = \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 + x_1}\right), z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2). \end{aligned}$$

Pour $i = 10, 11$:

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (p = -\lambda x_1, q = \frac{1}{2\lambda} \ln(\frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2}), z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2). \end{aligned}$$

Enfin, pour $i = 12, 13$:

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (p = -\lambda x_2, q = \frac{1}{2\lambda} \ln(\frac{x_3 + x_1}{x_3 - x_1}), z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2). \end{aligned}$$

On obtient ainsi un bon recouvrement de Ω . En effet, la restriction du feuilletage symplectique de Ω à chaque intersection finie d'ouverts U_i est un feuilletage produit (comme dans le théorème II.3.2) dont les feuilles sont contractiles.

CHAPITRE III

Produits-star tangentiels algébriques sur les duals des algèbres de Lie nilpotentes

Dans ce chapitre, on donne une condition nécessaire et suffisante d'existence de produits-star tangentiels définis sur l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente. On introduit d'abord les définitions nécessaires puis on calcule, dans la section 2, la cohomologie associée aux déformations associatives et "bien" graduées de $S(\mathfrak{g})$. Dans la section 3, on utilise cette cohomologie pour démontrer que la construction d'un bon opérateur C_2 suffit à assurer l'existence d'un produit-star sur $\mathfrak{g}^*$, tangentiel, bien gradué, différentiel ou non. On prouve ensuite que tous les produits-star de ce type sont équivalents. Dans la section 4, on met en évidence certaines propriétés tangentielles du produit-star de Gutt. Finalement, on applique les résultats de ce chapitre à $\mathfrak{g}_{5,4}$, un exemple typique d'algèbre de Lie nilpotente pour lequel il n'existe pas de produit-star à la fois tangentiel, différentiel et défini sur tout le dual.

III.1 Préliminaires sur les algèbres de Lie nilpotentes.

a) Paramétrisation d'une partie du dual.

Un des faits caractéristiques du cas nilpotent est que les orbites coadjointes sont difféomorphes à des espaces $\mathbb{R}^{2d}$ et qu'elles se prêtent à une paramétrisation simple. Nous avons déjà rappelé au chapitre II de cette thèse comment le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ pouvait être stratifié et comment paramétrer les orbites contenues dans une même strate. Pour fixer les notations de ce chapitre, nous revenons rapidement sur la paramétrisation de l'ouvert générique V_B , c'est-à-dire de la première strate de la stratification de Pukanszky relative à une base de Jordan-Hölder B de $\mathfrak{g}$.

Supposons donc que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie nilpotente de dimension m , de dual $\mathfrak{g}^*$, et notons G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $B = (X_i)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ et (x_i) le système de coordonnées de $\mathfrak{g}^*$ associé à B . Supposons que la dimension maximale des orbites coadjointes soit égale à $2d$. L'ouvert générique V_B associé à la base B est par construction un ouvert de Zariski, dense dans $\mathfrak{g}^*$, invariant sous l'action coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, et ne contient que des orbites de dimension maximale. On rappelle [ACG1, Ver] que l'on peut trouver:

- (i) $2d$ fonctions $p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d$ rationnelles en les variables x_i et régulières sur V_B
- (ii) $m - 2d$ fonctions polynomiales $z_1, \dots, z_{m-2d}$
- (iii) un ouvert U de Zariski dans $\mathbb{R}^{m-2d}$

tels que:

- l'application $\varphi : V_B \rightarrow U \times \mathbb{R}^{2d}$, qui à un point ξ de V_B associe $(z(\xi), p(\xi), q(\xi))$, soit un difféomorphisme (où l'on a noté $z = (z_1, \dots, z_{m-2d})$, $p = (p_1, \dots, p_d)$ et $q = (q_1, \dots, q_d)$);
- les fonctions p_i, q_j forment une carte de Darboux globale de chaque orbite contenue dans V_B ;
- chaque fonction rationnelle invariante sur $\mathfrak{g}^*$ peut s'écrire de manière unique comme fonction rationnelle en les variables z_k ;
- si X est un élément de $\mathfrak{g}$ et si l'on considère X comme une fonction sur $\mathfrak{g}^*$, alors on peut écrire

$$X|_{V_B} = \sum_{1 \leq j \leq d} a_j(q, z) p_j + a_0(q, z)$$

où chaque coefficient a_l ($0 \leq l \leq d$) est une fonction polynomiale en les variables $q_{l+1}, \dots, q_d$ à coefficients dans le corps $\mathbb{R}(z)$ des fractions rationnelles en z .

Les fonctions p_i, q_j permettent de paramétrer les orbites contenues dans V_B , et les fonctions polynomiales z_k sont celles que nous avons qualifiées d'invariants génériques au chapitre précédent.

Considérons maintenant l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. On identifie naturellement l'algèbre $S(\mathfrak{g})$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$ à valeurs réelles et on la munit du crochet de Poisson induit par le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$:

$$\{f, g\} = \{x_i, x_j\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad f, g \in S(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$$

où $\{x_i, x_j\} = C_{ij}^k x_k$ si les C_{ij}^k désignent les constantes de structure de $\mathfrak{g}$. On peut aussi écrire

$$\{f, g\}(\xi) = \xi([d_\xi(f), d_\xi(g)]) \quad f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m],$$

où $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et $d_\xi(f), d_\xi(g)$ sont les différentielles de f, g en ξ donc des éléments de $\mathfrak{g}^{**} \simeq \mathfrak{g}$.

Dans ce chapitre, nous choisirons (ce sera plus commode) de noter $\mathcal{I}$ la sous-algèbre $S(\mathfrak{g})^G$ de $S(\mathfrak{g})$ des fonctions polynomiales invariantes sous l'action coadjointe de G . En général, l'algèbre $\mathcal{I}$ n'est pas de type fini (voir [Dix] p.160, exercice 4.9.20). Son corps des fractions est par contre finiment engendré puisqu'il s'identifie, d'après ce qui vient d'être dit, au corps $\mathbb{R}(z)$ des fractions rationnelles en z .

Par suite, le corps des fractions $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$ de $S(\mathfrak{g})$ par rapport à $\mathcal{I}$ peut être identifié à l'algèbre $\mathbb{R}(z)[x_1, \dots, x_m]$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$ à coefficients dans $\mathbb{R}(z)$, donc à l'algèbre $\mathbb{R}(z)[p, q]$ des fonctions polynomiales en p, q à coefficients dans $\mathbb{R}(z)$. De plus, pour tout élément X , considéré comme une fonction sur $\mathfrak{g}^*$, la dérivée partielle ∂_X par rapport à X est de la forme

$$\partial_X = \sum_{1 \leq i \leq d} a_i \partial_{p_i} + \sum_{1 \leq j \leq d} b_j \partial_{q_j} + \sum_{1 \leq k \leq m-2d} c_k \partial_{z_k}$$

où les coefficients a_i, b_j, c_k appartiennent à $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}} \simeq \mathbb{R}(z)[x_1, \dots, x_m] \simeq \mathbb{R}(z)[p, q]$.

Dans toute la suite de ce chapitre, sauf mention du contraire, on conservera les notations de a). En particulier, $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie nilpotente, (x_i) désignera un système de coordonnées global sur $\mathfrak{g}^*$ et l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ sera identifiée à l'algèbre $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$. De même, l'algèbre localisée $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$ sera identifiée à l'algèbre $\mathbb{R}(z)[p, q]$.

b) Opérateurs différentiels, algébriques et tangentiels.

Définition III.1.1

Une application multilinéaire $F : S(\mathfrak{g}) \times \dots \times S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$ est différentielle si elle est donnée en chaque argument par des opérateurs différentiels (d'ordre fini). Les applications multilinéaires sur $S(\mathfrak{g})$ qui ne sont pas différentielles seront qualifiées d'algébriques.

Soit D un opérateur différentiel sur $S(\mathfrak{g})$. On peut donc écrire :

$$D(u_1, \dots, u_s) = \sum D_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \partial_{\alpha_1}(u_1) \dots \partial_{\alpha_s}(u_s)$$

où les multi-indices α_l sont relatifs aux variables x_i et les coefficients $D_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ sont des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$. En écrivant les coefficients et les opérateurs ∂_{α_i} dans les variables p, q, z , on voit que D s'étend naturellement à $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$. Nous noterons $\tilde{D}$ cette extension.

Maintenant, soit A un opérateur algébrique sur $S(\mathfrak{g})$. On a la décomposition $A = \sum_N A_N$

où les A_N sont de la forme

$$A_N(u_1, \dots, u_s) = \sum_{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_s| = N} A_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \partial_{\alpha_1}(u_1) \dots \partial_{\alpha_s}(u_s).$$

Les α_l figurant dans cette expression sont à nouveau des multi-indices relatifs aux variables x_i , $|\alpha_l|$ désigne la longueur de α_l : si l'on note $\alpha_l = (\alpha_l^1, \dots, \alpha_l^m)$, alors $|\alpha_l| = \alpha_l^1 + \dots + \alpha_l^m$, et les coefficients $A_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ sont dans $S(\mathfrak{g})$. Notons alors $\tilde{A}_{(t)}$ l'opérateur défini par

$$\tilde{A}_{(t)} = \sum t^N \widetilde{A_N};$$

$\widetilde{A_N}$ désignant l'extension de l'opérateur différentiel A_N à $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$. Il est clair que $\tilde{A}_{(1)}$ s'identifie à A sur $S(\mathfrak{g})$ et que $\tilde{A}_{(t)}$ envoie $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$ dans l'algèbre (formelle) $\mathbb{R}(z)[p, q][[t]]$ des séries formelles en l'indéterminée t à coefficients dans $\mathbb{R}(z)[p, q]$.

Une application $F : S(\mathfrak{g}) \times \dots \times S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$ est tangentielle (au sens fort du terme) sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}^*$ si elle est tangente à toutes les orbites coadjointes contenues dans $\mathcal{O}$. Autrement dit, si pour toute orbite O contenue dans $\mathcal{O}$, $F(u_1, \dots, u_s)$ s'annule sur O dès qu'un des arguments u_i s'annule sur O .

Dans ce chapitre, nous utiliserons la notion plus faible de tangentialité algébrique (pour les opérateurs), introduite déjà à la fin du chapitre I (définition I.5.2) et utilisée dans [CGR2].

Définition III.1.2

Une application $F : S(\mathfrak{g}) \times \dots \times S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$ sera dite algébriquement tangentielle si elle s'annule sur les constantes et si

$$\Delta F(u_1, \dots, u_s) = F(u_1, \dots, \Delta u_l, \dots, u_s),$$

pour tout Δ dans $\mathcal{I}$, tout $u_1, \dots, u_s$ dans $S(\mathfrak{g})$ et tout $1 \leq l \leq s$.

Un opérateur algébriquement tangentiel s'étend de manière unique à $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$ en posant

$$\hat{F}\left(\frac{u_1}{Q_1}, \dots, \frac{u_s}{Q_s}\right) = \frac{1}{Q_1 \dots Q_s} F(u_1, \dots, u_s)$$

où $u_i \in S(\mathfrak{g})$ et $Q_j \in \mathcal{I}$ pour tout i et tout j .

Les variables p, q, z permettent de donner une caractérisation pratique de la tangentialité algébrique. En effet, si F est un opérateur algébriquement tangentiel sur $S(\mathfrak{g})$, son extension $\hat{F}$ à $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$ vérifie

$$\hat{F}(v_1, \dots, z_k v_l, \dots, v_s) = z_k \hat{F}(v_1, \dots, v_s)$$

pour tout invariant générique z_k , pour tout v_i dans $S(\mathfrak{g})$ et tout l . Par suite, $\hat{F}$ est de la forme

$$\hat{F}(v_1, \dots, v_s) = \sum F_{\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_s}(p, q, z) \partial_{\tilde{\alpha}_1}(v_1) \dots \partial_{\tilde{\alpha}_s}(v_s),$$

ici les multi-indices $\tilde{\alpha}_i$ sont relatifs aux variables p, q, z , les $F_{\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_s}$ sont des éléments de $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}} \simeq \mathbb{R}(z)[p, q]$ et les $\partial_{\tilde{\alpha}_i}$ n'incluent pas de dérivées partielles par rapport aux variables z_k .

Réciproquement, si $C = \sum C_N$ est un opérateur algébrique sur $S(\mathfrak{g})$ pour lequel $\tilde{C}_{(1)}$ s'écrit sans faire intervenir de dérivées partielles par rapport aux variables z_k , alors C est algébriquement tangentiel.

Remarque III.1.3

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et B une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Toute application multilinéaire sur $S(\mathfrak{g})$ qui est tangentielle (au sens fort) sur $\mathfrak{g}^*$, est algébriquement tangentielle. Réciproquement, une application algébriquement tangentielle est tangentielle sur l'ouvert générique V_B . Plus exactement, un opérateur algébriquement tangentiel est tangentiel sur l'union $\mathcal{O}$ de toutes les strates de $\mathfrak{g}^*$ paramétrées par des triplets (p, q, z) (avec les notations du chapitre II) tels que les z sont des fonctions invariantes sur $\mathfrak{g}^*$. Cet ouvert $\mathcal{O}$ contient V_B par construction, et coïncide souvent avec l'ouvert Ω des orbites de dimension maximale. Tel est notamment le cas pour l'exemple $\mathfrak{g}_{5,4}$ que nous étudierons au dernier paragraphe de ce chapitre.

III.2 Cohomologie de Hochschild bien graduée.**Définition III.2.1**

Une application s -linéaire $C : S(\mathfrak{g}) \times \dots \times S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$ (différentielle ou non) est dite homogène de degré $-n$ si pour tout polynôme $u_1, \dots, u_s$, homogène de degré $d_1, \dots, d_s$ respectivement, $C(u_1, \dots, u_s)$ est un polynôme de degré $d_1 + \dots + d_s - n$.

Rappelons que tout opérateur différentiel sur $S(\mathfrak{g})$ s'étend de manière naturelle à $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$, et notons, pour tout élément u de $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}} \simeq \mathbb{R}(z)[p, q]$, $\|u\|$ le degré de u en tant que polynôme en p . Dans [Mas2], Masmoudi a défini la notion d'opérateur correct :

Définitions III.2.2

Une application s -différentielle $D : S(\mathfrak{g}) \times \dots \times S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g})$ est dite *correcte de degré $-n$* si pour tout u_i de $S(\mathfrak{g})_I$ tel que $\|u_i\| = d_i$, ($1 \leq i \leq s$), l'extension $\tilde{D}$ de D à $S(\mathfrak{g})_{\mathcal{I}}$ vérifie

$$\|\tilde{D}(u_1, \dots, u_s)\| \leq (d_1 + \dots + d_s) - n.$$

Un opérateur algébrique $C = \sum C_N$ sur $S(\mathfrak{g})$ est dit *correct de degré $-n$* si toutes les applications différentielles C_N le sont.

Dans la suite, nous dirons d'un opérateur algébrique sur $S(\mathfrak{g})$ qu'il est *bien gradué de degré $-n$* s'il est à la fois correct de degré $-n$ et homogène de degré $-n$.

Maintenant, considérons l'espace $\mathcal{C}_n^s = C_{n,bgrad,nc}^s(S(\mathfrak{g}))$ des applications s -linéaires de $S(\mathfrak{g}) \times \dots \times S(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{g})$, nulles sur les constantes et bien graduées de degré $-n$. Dans $\mathcal{C}_n^s$, les applications différentielles forment un sous-espace noté $\mathcal{C}_{n,diff}^s = C_{n,bgrad,nc,diff}^s(S(\mathfrak{g}))$. Il est clair que $\mathcal{C}_n^*$ et $\mathcal{C}_{n,diff}^*$, munis du cobord de Hochschild δ , sont tous deux des complexes de cohomologie. Nous noterons $H_{n,bgrad,nc}^*(S(\mathfrak{g}))$ et $H_{n,bgrad,nc,diff}^*(S(\mathfrak{g}))$ les cohomologies correspondantes. Ces cohomologies seront appelées cohomologies de Hochschild bien graduées.

De façon générale, pour une algèbre commutative et associative $\mathcal{A}$ et un $\mathcal{A}$ -(bi)module $\mathcal{B}$, nous avons noté $C^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (cf. chapitre I) le $\mathcal{A}$ -module gradué des cochaînes de Hochschild, et $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la cohomologie correspondante.

En toute généralité, la cohomologie $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ n'est pas connue. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions lisses sur une variété M et où les cochaînes sont des opérateurs multidifférentiels sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, le k -ième espace de cette cohomologie, $H_{diff}^k(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, coïncide avec l'espace des k -tenseurs contravariants complètement antisymétriques sur M [HKR, Vey].

D'autre part, dans [Pin2], G. Pinczon nous apprend que si $\mathcal{A}$ est l'algèbre $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ des fonctions lisses sur le dual d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors pour un k donné, $H^k(S(\mathfrak{g}), \mathcal{A})$ s'identifie à $H_{diff}^k(S(\mathfrak{g}), \mathcal{A})$ et, par densité de $S(\mathfrak{g})$ dans $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, à $H_{diff}^k(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. Cet argument nous a permis d'obtenir des annulations pour la cohomologie de Hochschild bien graduée.

En effet, montrons la

Proposition III.2.3

Pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$H_{n,bgrad,nc}^2(S(\mathfrak{g})) = H_{n,bgrad,nc,diff}^2(S(\mathfrak{g})) = \{0\}.$$

Preuve:

Soit C un élément de $\mathcal{C}_n^2$ pour lequel $\delta C = 0$.

1) Examinons d'abord le cas où $C(u, v)$ est symétrique en u, v . Dans ce cas, un opérateur T tel que $C = \delta T$ a été construit explicitement dans [Gul]: pour un polynôme u sur $\mathfrak{g}^*$ de la forme $u = x_1^{a_1} \dots x_d^{a_d}$,

$$T(u)(\xi) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{a_i-1} C(x_i, x_1^{a_1} \dots x_{i-1}^{a_{i-1}} x_i^j)_{|\xi} \xi_i^{a_i-j-1} \xi_{i+1}^{a_{i+1}} \dots \xi_d^{a_d} \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

On vérifie que cet opérateur T est nul sur les constantes et bien gradué de degré $-n$.

2) Dans le cas général, d'après le résultat de Vey et l'argument de Pinczon précédemment évoqués, C est de la forme $C = \delta R + A$, où

$$A(u, v) = a_{ij} \partial_i(u) \partial_j(v) \quad (a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j).$$

Comme $2A(u, v) = C(u, v) - C(v, u)$, A est nécessairement homogène de degré $-n$ et les coefficients de A sont des polynômes de degré $2 - n$. Par hypothèse, on a $n \geq 3$, donc ce degré est négatif et la partie antisymétrique A de C est nulle. On est alors ramené à 1). Le cas où C appartient à $\mathcal{C}_{n, diff}^2$ se traite de la même façon. $\square$

Proposition III.2.4

Pour tout n supérieur ou égal à 4, on a:

$$H_{n, bgrad, nc}^3(S(\mathfrak{g})) = H_{n, bgrad, nc, diff}^3(S(\mathfrak{g})) = \{0\}.$$

Preuve:

1) Soit E un élément de $\mathcal{C}_n^3$ tel que $\delta E = 0$. On peut écrire E sous la forme $E = E_1 + E_2$ où E_1 est pair en u, w , E_2 impair en u, w , et $\delta E_1 = \delta E_2 = 0$. D'après l'argument de Pinczon,

$$H^3(S(\mathfrak{g}), \mathcal{A}) = H_{diff}^3(S(\mathfrak{g}), \mathcal{A}) = H_{diff}^3(\mathcal{A}, \mathcal{A}),$$

où $\mathcal{A} = C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. On peut donc trouver deux cochaînes de Hochschild C_1 et C_2 dans $C^2(S(\mathfrak{g}), \mathcal{A})$ telles que

- $E_1 = \delta C_1$ où $C_1(u, v)$ est antisymétrique en u, v
- $E_2 = \delta C_2 + A$ où $C_2(u, v)$ est symétrique en u, v et où

$$A(u, v, w) = \sum a_{ijk} \partial_i(u) \partial_j(v) \partial_k(w),$$

les coefficients a_{ijk} étant complètement antisymétriques.

Comme

$$\oint_{(u, v, w)} E_2(u, v, w) := E_2(u, v, w) + E_2(v, w, u) + E_2(w, u, v) = 3A(u, v, w),$$

A est nécessairement homogène de degré $-n$ et les coefficients a_{ijk} sont polynomiaux de degré $3 - n$. Comme $n \geq 4$, $n - 3 < 0$ et A est réduit à zéro. De plus, par hypothèse, E

s'annule sur les constantes. On peut supposer qu'il en est de même pour C_1 et C_2 quitte à remplacer (comme dans [Pin1]) C_i par $C_i - \delta T_i$ où T_i est défini par

$$T_i(u) = C_i(1, 1)u \quad i = 1, 2.$$

Pour vérifier ce point, il suffit de remarquer que, pour ce choix de T_1 et T_2 ,

$$(C_i - \delta T_i)(1, 1) = 0 \quad i = 1, 2.$$

Du fait que $\delta E_1 = \delta E_2 = 0$, on aura alors, pour tout u ,

$$(C_i - \delta T_i)(u, 1) = (C_i - \delta T_i)(1, u) = 0 \quad i = 1, 2.$$

2) Montrons à présent que C_1 appartient à $\mathcal{C}_n^2$. Pour cela, décomposons E_1 et C_1 en une somme infinie $\sum_{N \geq 0} E_{1,N}$ ($\sum_{N \geq 0} C_{1,N}$ respectivement) d'opérateurs différentiels en les variables x_i de la forme

$$E_{1,N}(u, v, w) = \sum_{a+b+c=N} E_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b, m_1 \dots m_c} \partial_{k_1 \dots k_a}(u) \partial_{l_1 \dots l_b}(v) \partial_{m_1 \dots m_c}(w).$$

Respectivement,

$$\diamond \quad C_{1,N}(u, v) = \sum_{\substack{a+b=N \\ a \geq b}} C_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b} (\partial_{k_1 \dots k_a}(u) \partial_{l_1 \dots l_b}(v) - \partial_{k_1 \dots k_a}(v) \partial_{l_1 \dots l_b}(u))$$

où les coefficients $C_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b}$ sont symétriques en les indices k_i et en les indices l_j , et tels que $C_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b} = -C_{l_1 \dots l_b, k_1 \dots k_a}$ (si $a = b$).

Puisque E_1 s'annule sur les constantes, $E_{1,N} = 0$ si $N < 3$. On peut donc écrire,

$$E_1 = \sum_{N \geq 3} E_{1,N} \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{N \geq 3} (E_1)_N = \sum_{N \geq 3} (\delta C_1)_N,$$

et par définition même du cobord de Hochschild,

$$E_1 = \sum_{N \geq 3} \delta(C_{1,N}).$$

Les termes $C_{1,1}$ et $C_{1,2}$ n'intervenant pas dans l'égalité $E_1 = \delta C_1$, nous supposons que $C_1 = \sum_{N \geq 3} C_{1,N}$.

Le but est donc de montrer que $C_{1,N}$ ($N \geq 3$) envoie $S(\mathfrak{g}) \times S(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{g})$, et est homogène et correct de degré $-n$, ou ce qui est équivalent, de voir que $C_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b}$ est un élément de $S(\mathfrak{g})$ homogène de degré $a + b - n = N - n$ et que

$$\|C_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b}\| \leq \|X_{k_1}\| + \dots + \|X_{k_a}\| + \|X_{l_1}\| + \dots + \|X_{l_b}\| - n.$$

Pour ce faire, nous nous inspirons d'une technique utilisée dans [Li2] p.238-242 ou encore dans la thèse de S. Gutt [Gu1] .

Selon $\diamond$, $C_{1,N}$ est une somme finie de termes de type (a, b) ($a \geq b$). Soient (r, s) le plus grand des types (a, b) pour l'ordre $(a, b) > (a', b')$ si $a > a'$ ou si $a = a'$ et $b > b'$, et $C_{k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_s}$ le plus grand coefficient pour l'ordre lexicographique en les indices. On appelle partie principale de $C_{1,N}$ l'unique terme P de type (r, s) défini par

$$P(u, v) = C_{k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_s} (\partial_{k_1 \dots k_r}(u) \partial_{l_1 \dots l_s}(v) - \partial_{k_1 \dots k_r}(v) \partial_{l_1 \dots l_s}(u)).$$

A la partie principale P de $C_{1,N}$ correspond dans $\delta(C_{1,N})$ les termes

$$\begin{aligned} & -C_{k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_s} (\partial_{k_1 \dots k_r}(uv) \partial_{l_1 \dots l_s}(w) - \partial_{k_1 \dots k_r}(w) \partial_{l_1 \dots l_s}(uv)) \\ & + C_{k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_s} (\partial_{k_1 \dots k_r}(u) \partial_{l_1 \dots l_s}(vw) - \partial_{k_1 \dots k_r}(vw) \partial_{l_1 \dots l_s}(u)) \end{aligned}$$

modulo d'autres termes ne comportant pas de dérivations sur u ou sur w .

Il y a trois cas à envisager.

- si $r \geq s, r \geq 2, s \geq 2$: Il existe dans $\delta(C_{1,N})$ un seul terme de type $(r, s-1, 1)$ qui peut s'écrire, à un coefficient constant près,

$$C_{k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_s} \partial_{k_1 \dots k_r}(u) \partial_{l_1 \dots l_{s-1}}(v) \partial_{l_s}(w).$$

- si $r \geq 3, s = 1$: Là encore, il n'existe dans $\delta(C_{1,N})$ qu'un seul terme de type $(r-1, 1, 1)$ que l'on peut écrire à un coefficient constant près,

$$C_{k_1 \dots k_r, l_1} \partial_{k_1 \dots k_{r-1}}(u) \partial_{k_r}(v) \partial_{l_1}(w).$$

Dans ces deux cas, les coefficients $C_{k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_s}$ sont homogènes et corrects de bon degré.

- si $r = 2, s = 1$: Les termes de type $(1, 1, 1)$ dans $\delta(C_{1,N})$ sont à un coefficient près,

$$(C_{ij,k} + C_{jk,i}) \partial_i(u) \partial_j(v) \partial_k(w).$$

On en déduit que $(C_{ij,k} + C_{jk,i})$ est polynomial de degré $3-n$. Puisque $n \geq 4, n-3 < 0$ et $C_{ij,k} + C_{jk,i} = 0$. Par sommation circulaire, on trouve:

$$2C_{ij,k} = (C_{ij,k} + C_{jk,i}) - (C_{jk,i} + C_{ki,j}) + (C_{ki,j} + C_{ij,k}) = 0$$

Ceci étant vrai pour tout i , tout j et tout k , il n'y a dans $C_{1,N}$ aucun terme de type $(2, 1)$. Par suite, la partie principale P de $C_{1,N}$ est homogène et correcte de degré $-n$. En réitérant la preuve de proche en proche (pour la partie principale P' de $(C_{1,N} - P)$, pour celle de $(C_{1,N} - P - P')$...), on parvient à montrer que tous les $C_{1,N}$ (donc aussi $C_1 = \sum C_{1,N}$) peuvent être choisis dans $\mathcal{C}_n^2$.

3) Le même raisonnement s'applique à C_2 . En effet, on peut décomposer E_2 sous la forme

$$E_2 = \sum_{N \geq 3} E_{2,N} = \sum_{N \geq 3} (\delta C_2)_N = \sum_{N \geq 3} \delta(C_{2,N})$$

et on peut supposer que $C_2 = \sum_{N \geq 3} C_{2,N}$.

D'autre part, la partie principale de $C_{2,N}$ de type (r, s) s'écrit :

$$C_{k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s}(\partial_{k_1, \dots, k_r}(u) \partial_{l_1, \dots, l_s}(v) + \partial_{k_1, \dots, k_r}(v) \partial_{l_1, \dots, l_s}(u)).$$

- Les cas $r \geq s \geq 2$ et $r \geq 3, s = 1$ se traitent comme précédemment.
- Si $r = 2, s = 1$: Les termes $(1, 1, 1)$ dans $\delta(C_{2,N})$ sont à un coefficient constant près,

$$(C_{ij,k} - C_{jk,i}) \partial_i(u) \partial_j(v) \partial_k(w).$$

Comme $n \geq 4$, $(C_{ij,k} - C_{jk,i})$ est un polynôme de degré $n - 3 < 0$ et $C_{ij,k} = C_{jk,i}$. Les coefficients $C_{ij,k}$ n'apparaissant pas dans $\delta(C_{2,N})$, nous pouvons supposer que $C_{2,N}$ ne contient aucun terme de type $(2,1)$. En procédant comme avant par partie principale, on montre finalement que tous les $C_{2,N}$ pour $N \geq 3$ (et donc $C_2 = \sum_{N \geq 3} C_{2,N}$) appartiennent

à $\mathcal{C}_n^2$. Nous avons traité ici le cas non-différentiel, mais il est clair que le cas différentiel s'obtient de manière identique. $\square$

Remarque III.2.5

Les paragraphes 1) et 2) sont encore valables pour un 3-cocycle E_1 dans $\mathcal{C}_3^3$. En effet, on peut encore trouver C_1 dans $\mathcal{C}_3^2$ tel que $E_1 = \delta C_1$. La seule différence est que, dans ce cas, les termes de type $(2,1)$ de C_1 sont à coefficients constants (et non plus nuls).

III.3 Déformations tangentielles et bien graduées de l'algèbre symétrique.

Définition III.3.1

Un produit-star de $S(\mathfrak{g})$ est une application bilinéaire de $S(\mathfrak{g}) \times S(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{g})[[\nu]]$ définie par

$$(u, v) \rightarrow u \star v = uv + \{u, v\} \nu + \sum_{n \geq 2} C_n(u, v) \nu^n$$

où les C_n sont des opérateurs sur $S(\mathfrak{g})$ à valeurs dans $S(\mathfrak{g})$ vérifiant

- (i) $C_n(u, v) = (-1)^n C_n(v, u) \quad \forall u, v \in S(\mathfrak{g})$;
- (ii) $C_n(1, v) = 0 \quad \forall v \in S(\mathfrak{g})$;
- (iii) $\sum_{r+s=k} C_r(C_s(u, v), w) = \sum_{r+s=k} C_r(u, C_s(v, w)) \quad k \geq 0, \forall u, v, w \in S(\mathfrak{g})$.

Un produit-star $\star$ de $S(\mathfrak{g})$ est gradué si les cochaînes C_n le définissant sont homogènes de degré $-n$. Il est dit bien gradué si chaque C_n est à la fois homogène de degré $-n$ et correct de degré $-n$. Finalement, $\star$ est un produit-star tangentiel (algébrique) de $S(\mathfrak{g})$ si les C_n sont des opérateurs algébriquement tangentiels sur $S(\mathfrak{g})$.

Rappelons que notre motivation essentielle dans ce chapitre est liée à la théorie des représentations des groupes de Lie. Comme on l'a déjà mentionné en introduction, dès la

parution de [BFFLS], un programme d'application des produits-star pour la construction des représentations irréductibles et unitaires des groupes de Lie a été proposé. Dans ce programme déformation, ce qui correspond à une représentation unitaire, c'est une déformation covariante sur une orbite ou une famille d'orbites (cf. [ACMP] par exemple). Si on veut décomposer une telle représentation, on doit imposer à cette déformation d'être tangentielle. Il est donc important de construire des produits-star remplissant à la fois la condition de tangentialité et celle de covariance. Cette dernière est définie comme suit:

Définition III.3.2

Un produit-star $\star$ de $S(\mathfrak{g})$ est dit covariant si pour tout X et Y de $\mathfrak{g}$, on a

$$\frac{1}{2\nu}(X \star Y - Y \star X) = [X, Y].$$

On notera que tout produit-star gradué de $S(\mathfrak{g})$ est covariant.

Théorème III.3.3

Supposons qu'il existe un opérateur C_2 sur $S(\mathfrak{g})$, algébriquement tangentiel, homogène et correct de degré -2 , tel que $u \star v = uv + \{u, v\}\nu + C_2(u, v)\nu^2$ vérifie la condition d'associativité jusqu'à l'ordre 3 en ν . Alors, on peut prolonger $\star$ en un produit-star $\star$ sur $S(\mathfrak{g})$, tangentiel et bien gradué. De plus, si C_2 est différentiel, on peut prolonger $\star$ en un produit-star $\star$ à la fois tangentiel, bien gradué et différentiel.

Preuve:

On suppose avoir trouvé des opérateurs $C_2, \dots, C_{n-1}$ ($n \geq 3$) algébriquement tangentiels, homogènes et corrects de bon degré tel que

$$u \star v = uv + \{u, v\}\nu + \sum_{2 \leq k \leq n-1} C_k(u, v)\nu^k$$

soit associatif jusqu'à l'ordre n en ν . On considère alors le cocycle de Hochschild E_n défini par

$$E_n(u, v, w) = \sum_{r \geq 1, s \geq 1, r+s=n} C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w)).$$

On voit aussitôt que E_n est homogène et correct de degré $-n$. Par la proposition III.2.4 et la remarque III.2.5, il existe un opérateur C_n homogène et correct de degré $-n$, et tel que $E_n = \delta C_n$, $C_n(u, v) = (-1)^n C_n(v, u)$ et $C_n(1, v) = 0$ pour tout u, v dans $S(\mathfrak{g})$. Nous allons montrer que C_n est nécessairement algébriquement tangentiel.

Par passage aux coordonnées (p, q, z) , l'égalité $E_n = \delta C_n$ devient

$$\widehat{E}_n = \delta(\widetilde{C}_{n(1)})$$

où les notations $\widehat{}$ et $\widetilde{}$ sont celles du paragraphe III.1. Pour simplifier l'écriture, nous oublierons le n et écrirons $E = E_n$ ainsi que $C = C_n$. Comme dans la proposition III.2.4,

on décompose $\hat{E}$ et $\tilde{C}_{(1)}$ en somme infinie $\sum_{K \geq 0} \hat{E}_K$ ($\sum_{K \geq 0} \tilde{C}_K$ respectivement) d'opérateurs en les variables (p, q, z) de la forme

$$\hat{E}_K(u, v, w) = \sum_{a+b+c=K} E_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b, m_1 \dots m_c} \partial_{k_1 \dots k_a}(u) \partial_{l_1 \dots l_b}(v) \partial_{m_1 \dots m_c}(w).$$

Respectivement,

$$\tilde{C}_K(u, v) = \sum_{\substack{a+b=K \\ a \geq b}} C_{k_1 \dots k_a, l_1 \dots l_b} (\partial_{k_1 \dots k_a} u \partial_{l_1 \dots l_b} v + (-1)^n \partial_{k_1 \dots k_a} v \partial_{l_1 \dots l_b} u).$$

E s'annulant sur les constantes, $\hat{E}_K = 0$ pour $K < 3$. De même, C s'annulant sur les constantes, on a $\tilde{C}_1 = 0$. De plus,

$$\sum_{K \geq 3} \hat{E}_K = \sum_{K \geq 3} \delta(\tilde{C}_K).$$

Si n est impair ($n \geq 3$):

Dans ce cas, E est symétrique en u et w . Ecrivons alors

$$\tilde{C}_{(1)} = \sum_{K \geq 3} \tilde{C}_K + \tilde{C}_2.$$

Comme C est correct de degré $-n$ avec $n \geq 3$, $\tilde{C}_2 = 0$. Afin de montrer que les $\tilde{C}_K$ ($K \geq 3$) n'incluent pas de dérivées par rapport aux variables z_k , nous allons procéder comme dans la proposition III.2.4. Soit donc P la partie principale de $\tilde{C}_K$ de type (r, s) en les variables (p, q, z) . Plusieurs cas sont à considérer. Les cas $r \geq s \geq 2$ et $r \geq 3, s = 1$ se traitent facilement. Maintenant, si $r = 2$ et $s = 1$, les termes de type $(1, 1, 1)$ dans $\delta\tilde{C}_K$ sont à un coefficient près

$$(C_{ij,k} + C_{jk,i}) \partial_i(u) \partial_j(v) \partial_k(w).$$

Si cette expression contenait une dérivée par rapport à une variable z_k , alors $(C_{ij,k} + C_{jk,i})$ serait nécessairement nul et par sommation circulaire (la même que dans la preuve de la proposition III.2.4), on aurait $C_{ij,k} = 0$. Il en résulte que la partie principale P ne fait pas intervenir de dérivées par rapport aux variables z_k . En répétant la preuve par étapes, on montre qu'il en est de même pour tous les $\tilde{C}_K$ (et donc pour $\tilde{C}_{(1)} = \sum_{K \geq 3} \tilde{C}_K$). Par suite,

$C = C_n$ est algébriquement tangentiel si n est impair.

Si n est pair ($n \geq 4$):

Dans ce cas, E est antisymétrique en u et w . On a alors $\tilde{C}_{(1)} = \sum_{K \geq 4} \tilde{C}_K + \tilde{C}_3 + \tilde{C}_2$. Or,

comme C est correct de degré $-n$ et que $n \geq 4$, $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = 0$. Comme précédemment, en utilisant les parties principales, on montre que tous les $\tilde{C}_K$ pour $K \geq 4$ n'incluent pas

de dérivations par rapport aux variables z_k . Par suite, $C = C_n$ est aussi algébriquement tangentiel lorsque n est pair. $\square$

Considérons un instant l'espace $C_{n,tang,bgrad}^s$ (resp. $C_{n,tang,bgrad,diff}^s$) des applications s -linéaires de $S(\mathfrak{g})^{\otimes s}$ dans $S(\mathfrak{g})$, algébriquement tangentiels (donc nulles sur les constantes par définition), bien graduées de degré $-n$ (resp. différentielles). Muni du cobord de Hochschild, $C_{n,tang,bgrad}^*$ (resp. $C_{n,tang,bgrad,diff}^*$) devient un complexe dont la cohomologie est notée $H_{n,tang,bgrad}^*(S(\mathfrak{g}))$ (resp. $H_{n,tang,bgrad,diff}^*(S(\mathfrak{g}))$). Cette cohomologie gouverne l'existence et l'équivalence des déformations tangentiels et bien graduées de $S(\mathfrak{g})$. En fait, les preuves de la proposition III.2.4 et du théorème III.3.3 contiennent déjà le calcul des espaces $H_{n,tang,bgrad}^3(S(\mathfrak{g}))$ et $H_{n,tang,bgrad,diff}^3(S(\mathfrak{g}))$ pour $n \geq 3$. On propose maintenant de calculer les espaces $H_{n,tang,bgrad}^2(S(\mathfrak{g}))$ et $H_{n,tang,bgrad,diff}^2(S(\mathfrak{g}))$ pour $n \geq 2$.

Proposition III.3.4

(i) Si $C(u, v)$ est un 2-cocycle de Hochschild, antisymétrique en u, v , algébriquement tangentiel, bien gradué de degré $-(2k-1)$, $k \geq 2$ (différentiel ou non) alors C est l'opérateur nul.

(ii) Si $C(u, v)$ est un 2-cocycle de Hochschild, symétrique en u, v , algébriquement tangentiel, bien gradué de degré $-2k$, $k \geq 1$ (resp. différentiel) alors on peut supposer que $C = \delta R$ où R est algébriquement tangentiel, bien gradué de degré $-2k$ (resp. différentiel).

Preuve:

Le point (i) est une conséquence immédiate de la proposition III.2.3. Montrons donc (ii). Soit C est un 2-cocycle de Hochschild, symétrique, algébriquement tangentiel, bien gradué de degré $-2k$, $k \geq 1$. Par la proposition III.2.4, C s'écrit sous la forme $C = \delta R$ où R est bien gradué de degré $-2k$. Pour montrer que R est algébriquement tangentiel, on transpose l'égalité $C = \delta R$ en coordonnées p, q, z :

$$\hat{C} = \delta \tilde{R}_{(1)}.$$

Ceci s'écrit aussi comme une somme infinie d'opérateurs différentiels en les variables p, q, z :

$$\sum_{K \geq 2} \hat{C}_K = \sum_{K \geq 1} \delta \tilde{R}_K.$$

Comme R est correct de degré $-2k$ ($k \geq 1$), $\tilde{R}_1 = 0$. Soit donc $K \geq 2$. Comme dans [Li2], on écrit la partie principale P de $\tilde{R}_K$ sous la forme

$$P_{l_1, \dots, l_K} \partial_{l_1, \dots, l_K}(u)$$

où $P_{l_1, \dots, l_K}$ est complètement symétrique en les indices $l_1, \dots, l_K$. Le seul terme de type $(K-1, 1)$ correspondant à P dans $\delta \hat{C}_K$ est à un coefficient constant près

$$P_{l_1, \dots, l_K} \partial_{l_1, \dots, l_{K-1}}(u) \partial_{l_K}(v).$$

En réitérant l'argument pour la partie principale de $\tilde{R}_K - P$ et ainsi de suite, on parvient à montrer que pour tout $K \geq 2$, $\tilde{R}_K$ ne fait pas intervenir de dérivées par rapport aux

variables z_k et donc que R est algébriquement tangentiel. Le cas différentiel s'obtient de la même manière (et même plus facilement). $\square$

Théorème III.3.5

Deux produits-star tangentiels et bien gradués de $S(\mathfrak{g})$ sont toujours tangentielllement équivalents. On peut trouver un opérateur d'équivalence de la forme

$$T = Id + \sum_{k \geq 1} T_{2k} \nu^{2k}$$

où les T_{2k} sont des opérateurs algébriquement tangentiels sur $S(\mathfrak{g})$, bien gradués de degré $-2k$ (différentiels si les produits-star le sont).

Preuve:

Le résultat repose sur la proposition précédente. En effet, considérons deux produits-star $\star, \star'$, tangentiels et bien gradués de $S(\mathfrak{g})$. On suppose avoir trouvé $T_0, T_2, \dots, T_{2(k-1)}$, pour $k \geq 1$, tels que:

- $T_0 = Id$;
- chaque T_{2j} ($j \geq 1$) soit algébriquement tangentiel, homogène de degré $-2j$ et correct de degré $-2j$;
- le produit-star $\star''$ donné par

$$u \star'' v = H^{-1}(H(u) \star' H(v)),$$

où

$$H = Id + T_2 \nu^2 + \dots + T_{2k-2} \nu^{2k-2},$$

satisfasse $C_j''(u, v) = C_j(u, v)$ pour tout $j \leq 2k - 2$.

De l'associativité de $\star''$, on déduit alors que

$$\delta(C_{2k-1}'' - C_{2k-1}) = 0.$$

Maintenant, soit $k = 1$ et $C_1''(u, v) = C_1(u, v) = \{u, v\}$, soit $k \geq 2$ et par le point (i) de la proposition III.3.4, $C_{2k-1}'' = C_{2k-1}$. Puis, compte tenu de l'associativité,

$$\delta(C_{2k}'' - C_{2k}) = 0.$$

Par la proposition III.3.4 (ii), on obtient un opérateur T_{2k} algébriquement tangentiel, bien gradué de degré $-2k$, et tel que $C_{2k}'' = C_{2k} + \delta T_{2k}$. $\square$

III.4 Les propriétés tangentielles du produit-star de Gutt.

Dans [Gu2], S. Gutt a construit un produit-star explicite sur le dual d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ quelconque. Nous aimerions rappeler ici cette construction.

Notons $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et soit $\sigma : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ la bijection canonique définie par symétrisation:

$$\sigma(X_1 \dots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \Sigma_n} X_{\tau(1)} \dots X_{\tau(n)}$$

où Σ_n désigne le groupe de permutations à n éléments. Si u est un élément de $U(\mathfrak{g})$, on notera $[u]_n$ la n -ième composante de u dans la décomposition canonique [Dix]:

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus \sigma(S^n(\mathfrak{g})),$$

$S^n(\mathfrak{g})$ désignant l'ensemble des éléments homogènes de degré n de $S(\mathfrak{g})$. On définit alors, pour tout P dans $S^p(\mathfrak{g})$ et tout Q dans $S^q(\mathfrak{g})$,

$$P \star_{Gu} Q = \sum_{r \geq 0} C_{r,Gu}(P, Q) \nu^r = \sum_{r \geq 0} \sigma^{-1}([\sigma(P) \cdot \sigma(Q)]_{(p+q-r)}) (2\nu)^r.$$

En étendant cette expression par linéarité à tout $S(\mathfrak{g})$, on obtient un produit-star sur $\mathfrak{g}^*$, appelé produit-star de Gutt, ou parfois produit-star issu de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Ce produit-star est en réalité la partie verticale d'un produit-star construit dans [Gu2] sur le fibré cotangent T^*G d'un groupe de Lie G arbitraire. Il est totalement déterminé par l'expression de $X \star_{Gu} Q$ où X appartient à $\mathfrak{g}$, à savoir par la formule

$$\blacklozenge \quad X \star_{Gu} Q = \sum_{r \geq 0} \frac{(-2\nu)^r}{r!} B_r X_{m_r} C_{jj_1}^{m_1} C_{m_1 j_2}^{m_2} \dots C_{m_{r-1} j_r}^{m_r} \partial_j(X) \partial_{j_1, \dots, j_r}(Q)$$

où B_r désigne le r -ième nombre de Bernoulli et les C_{ij}^k sont les constantes de structure de $\mathfrak{g}$. En fait, on a la formule de récurrence suivante:

$$C_{r,Gu}(P, Q) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \sum_{s=0}^r C_{r-s,Gu}(X_{j_l}, C_{s,Gu}(X_{j_1} \dots \widehat{X_{j_l}} \dots X_{j_k}, Q)),$$

si $P = X_{j_1} \dots X_{j_k}$.

Ce produit-star est gradué et différentiel. Il n'est pas (algébriquement) tangentiel en général, mais il possède certaines propriétés tangentielles intéressantes. Plus précisément, on a:

Propriété III.4.1

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si $\star_{Gu} = \sum_{r \geq 0} C_{r,Gu} \nu^r$ désigne le produit-star de Gutt sur $\mathfrak{g}^*$, alors

$$C_{2k+1,Gu}(\Delta, \cdot) = 0$$

pour tout $k \geq 0$ et pour tout polynôme G -invariant Δ .

Preuve:

Tout polynôme invariant se décomposant en une somme de polynômes invariants homogènes, on peut supposer que Δ est un polynôme homogène de degré p . Pour tout Q de $S^q(\mathfrak{g})$, on a

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k \geq 0} \nu^{2k+1} C_{2k+1,Gu}(\Delta, Q) &= \Delta \star_{Gu} Q - Q \star_{Gu} \Delta \\ &= \sum_{r \geq 0} \sigma^{-1}([\sigma(\Delta) \cdot \sigma(Q) - \sigma(Q) \cdot \sigma(\Delta)]_{(p+q-r)}) (2\nu)^r. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que l'application σ envoie les polynômes invariants (donc Δ) dans le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$, pour avoir le résultat. $\square$

Propriété III.4.2

Supposons que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie nilpotente de pas n pour laquelle le produit-star $\star_{Gu}$ est tangentiel jusqu'à l'ordre $n - 1$. Alors, $\star_{Gu}$ est tangentiel.

Preuve:

1) Montrons d'abord que si $C_{r,Gu}(X, \cdot) = 0$ pour tout X de $\mathfrak{g}$ et si $\delta C_{r,Gu}$ est algébriquement tangentiel, alors $C_{r,Gu}$ est algébriquement tangentiel: Pour tout k et pour tout Δ de l'algèbre $\mathcal{I}$ des fonctions polynomiales invariantes, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \delta C_{r,Gu}(X_{i_l}, X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_l} \dots X_{i_k}, \Delta) \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{X_{i_l}}{k} C_{r,Gu}(X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_l} \dots X_{i_k}, \Delta) - C_{r,Gu}(X_{i_1} \dots X_{i_k}, \Delta) + \\ &+ \sum_{l=1}^k C_{r,Gu}(X_{i_l}, X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_l} \dots X_{i_k}, \Delta) - \sum_{l=1}^k C_{r,Gu}(X_{i_l}, X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_l} \dots X_{i_k}) \Delta. \end{aligned}$$

Par suite,

$$C_{r,Gu}(X_{i_1} \dots X_{i_k}, \Delta) = \sum_{l=1}^k \frac{X_{i_l}}{k} C_{r,Gu}(X_{i_1} \dots \hat{X}_{i_l} \dots X_{i_k}, \Delta).$$

On déduit de cette formule et du fait que $C_{r,Gu}(X, \cdot) = 0$ pour tout X de $\mathfrak{g}$ que

$$C_{r,Gu}(P, \Delta) = 0 \quad \forall P \in S(\mathfrak{g}).$$

Enfin, comme

$$\delta C_{r,Gu}(\Delta, u, v) = \Delta C_{r,Gu}(u, v) - C_{r,Gu}(\Delta u, v) + C_{r,Gu}(\Delta, uv) - C_{r,Gu}(\Delta, u)v = 0$$

pour tout u, v de $S(\mathfrak{g})$ et tout Δ de $\mathcal{I}$, on a

$$\Delta C_{r,Gu}(u, v) = C_{r,Gu}(\Delta u, v).$$

De même, comme $\delta C_{r,Gu}(u, \Delta, v) = 0$, on a

$$C_{r,Gu}(u, \Delta v) = C_{r,Gu}(\Delta u, v).$$

Ainsi, $C_{r,Gu}$ est bien algébriquement tangentiel.

2) Comme $\mathfrak{g}$ est nilpotente de pas n , on déduit directement de la formule $\blacklozenge$ que

$$C_{r,Gu}(X, u) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall u \in S(\mathfrak{g}), \forall r \geq n.$$

Puis comme $\delta C_{n,Gu}$ est algébriquement tangentiel, nous obtenons par 1) que $C_{n,Gu}$ est tangentiel. De l'associativité de $\star_{Gu}$, il résulte que $\delta C_{n+1,Gu}$ est algébriquement tangentiel,

et en utilisant à nouveau 1) que $C_{n+1,Gu}$ est algébriquement tangentiel. En répétant l'argument, on voit ainsi que tous les $C_{r,Gu}$ sont algébriquement tangentiels. $\square$

Cette dernière propriété montre en particulier que $\star_{Gu}$ est algébriquement tangentiel pour toutes les algèbres de Lie nilpotentes de pas 2. D'autres propriétés sont données dans [Asi]. Soulignons aussi que le produit-star $\star_{Gu}$ coïncide avec le produit-star de Kontsevich dans le cas nilpotent [Ar2].

III.5 Application à $\mathfrak{g}_{5,4}$.

Dans cette partie, nous proposons d'étudier en détail le cas de $\mathfrak{g}_{5,4}$. Cette algèbre de Lie est donnée par les crochets:

$$[X_5, X_4] = X_3, \quad [X_5, X_3] = X_2, \quad [X_4, X_3] = X_1.$$

Le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{I}$ des fonctions polynomiales invariantes sur $\mathfrak{g}_{5,4}^*$ est généré par deux éléments du centre de $\mathfrak{g}_{5,4}$, à savoir X_1 et X_2 , et par

$$\Delta = \frac{X_3^2}{2} + X_1 X_5 - X_2 X_4.$$

Un calcul simple montre que le terme d'ordre 2 du produit-star de Gutt, $C_{2,Gu}$, vérifie

$$C_{2,Gu}(\Delta, \cdot) = \frac{x_1^2}{6} \partial_{44} + \frac{x_1 x_2}{3} \partial_{45} + \frac{x_2^2}{6} \partial_{55}.$$

Ce terme étant non nul, le produit-star $\star_{Gu}$ de Gutt n'est pas tangentiel pour cet exemple. D'ailleurs, les résultats de [ACG1, CGR2] permettent d'affirmer qu'il n'existe aucun produit-star sur $\mathfrak{g}_{5,4}^*$ à la fois tangentiel et différentiel.

En réalité, ce fait est démontré de manière explicite dans [ACG1] (pour l'exemple $\mathfrak{g}_{5,4}$ précisément). Plus tard, les auteurs de [CGR2] ont montré le résultat général suivant:

Théorème III.5.1 [CGR2]

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. Notons (X_i) une base de $\mathfrak{g}$ et (x_i) le système de coordonnées global de $\mathfrak{g}^*$ associé. A tout invariant quadratique $\Delta = \sum a_{ij} X_i X_j$ de $\mathfrak{g}$, on peut associer une forme quadratique β sur $\mathfrak{g}^*$ en posant $\beta(x_i, x_j) = a_{ij}$ pour tout i et tout j , ainsi qu'une application linéaire $\hat{\beta} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ définie par

$$\langle \eta, \hat{\beta}(\xi) \rangle = \beta(\eta, \xi) \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*.$$

L'image $\hat{\beta}(\mathfrak{g}^*)$ d'une telle application $\hat{\beta}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, qui coïncide avec $\mathfrak{g}$ lui-même lorsque la forme β est non dégénérée. De plus, s'il existe un produit-star $\star$ sur $\mathfrak{g}^*$, tangentiel et différentiel sur $\mathfrak{g}^*$, alors pour tout invariant quadratique Δ de $\mathfrak{g}$, l'idéal $\hat{\beta}(\mathfrak{g}^*)$ associé doit être nilpotent de pas 2.

Puisque l'invariant quadratique $\Delta = \frac{X_3^2}{2} + X_1 X_5 - X_2 X_4$ de $\mathfrak{g}_{5,4}$ est non dégénéré et que $\mathfrak{g}_{5,4}$ est nilpotente de pas 3 (et non de pas 2), on déduit aussitôt du théorème ci-dessus que l'on ne peut espérer pouvoir construire de produit-star tangentiel et différentiel sur $\mathfrak{g}_{5,4}^*$.

Un des moyens de savoir si l'on peut contourner la difficulté en construisant une déformation algébrique, tangentielle et bien graduée de $S(\mathfrak{g}_{5,4})$, est de chercher à corriger $C_{2,Gu}$ par un opérateur T sur $S(\mathfrak{g}_{5,4})$ tel que

$$\spadesuit \quad C_{2,Gu}(\Delta, v) + \delta T(\Delta, v) = 0 \quad \forall v \in S(\mathfrak{g}_{5,4}).$$

En effet, l'existence d'un produit-star algébrique, tangentiel et bien gradué équivaut à celle d'un bon T . (S'il existe un tel produit-star, alors il existe un bon C_2 , et puisque tous les produits-star gradués sont équivalents et que le produit-star de Gutt est gradué, il existe un bon T . Réciproquement, s'il existe un bon T , alors il existe un bon terme de second ordre, terme à partir duquel on peut construire, d'après le théorème III.3.3, un produit-star algébrique, tangentiel et bien gradué.) En essayant de résoudre $\spadesuit$ par récurrence, nous avons vu qu'il était possible de construire T de la forme:

$$T = \sum_{n \geq 4} \left(A_{33\dots 355}^{(n)} \partial_3^{n-2} \partial_{55} + A_{33\dots 344}^{(n)} \partial_3^{n-2} \partial_{44} + A_{33\dots 345}^{(n)} \partial_3^{n-2} \partial_{45} \right).$$

Partons pour $n = 4$ des coefficients suivants:

$$\begin{aligned} A_{3355}^{(4)} &= \frac{x_2^2}{6} \\ A_{3344}^{(4)} &= \frac{x_1^2}{6} \\ A_{3345}^{(4)} &= \frac{x_1 x_2}{3}. \end{aligned}$$

On obtient alors les relations de récurrence:

$$\begin{aligned} A_{33\dots 355}^{(n)} &= -\frac{2}{n-2} A_{33\dots 355}^{(n-1)} x_3 \\ A_{33\dots 344}^{(n)} &= -\frac{2}{n-2} A_{33\dots 344}^{(n-1)} x_3 \\ A_{33\dots 345}^{(n)} &= -\frac{2}{n-2} A_{33\dots 355}^{(n-1)} x_3. \end{aligned}$$

En procédant ainsi, on aboutit à la solution suivante:

$$T = \sum_{n \geq 4} (-1)^{n-2} \frac{2^{n-3}}{6(n-2)!} x_3^{n-4} \left(x_2^2 \partial_3^{n-2} \partial_{55} + x_1^2 \partial_3^{n-2} \partial_{44} + 2x_1 x_2 \partial_3^{n-2} \partial_{45} \right).$$

Cet opérateur T n'est évidemment pas différentiel. Cependant, si l'on introduit la symétrie orthogonale

$$\begin{aligned} \sigma_3 : \mathfrak{g}_{5,4}^* &\rightarrow \mathfrak{g}_{5,4}^* \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\mapsto (x_1, x_2, -x_3, x_4, x_5) \end{aligned}$$

que l'on peut voir comme un opérateur algébrique:

$$\sigma_3 = \sum_{n \geq 0} \frac{(-2x_3)^n}{n!} \partial_3^n,$$

on peut exprimer T (sur l'ouvert $x_3 \neq 0$) sous une forme plus sympathique:

$$T = A_{55} \partial_{55} + A_{45} \partial_{45} + A_{44} \partial_{44}$$

où

$$\begin{aligned} A_{55} &= \frac{x_2^2}{12x_3^2} (\sigma_3 - Id) + \frac{x_2^2}{6x_3} \partial_3 \\ A_{45} &= \frac{x_1 x_2}{6x_3^2} (\sigma_3 - Id) + \frac{x_1 x_2}{3x_3} \partial_3 \\ A_{44} &= \frac{x_1^2}{12x_3^2} (\sigma_3 - Id) + \frac{x_1^2}{6x_3} \partial_3. \end{aligned}$$

Rappelons que:

$$\sigma_3 - Id + 2x_3 \partial_3 = x_3^2 S_3,$$

où S_3 est un opérateur algébrique défini sur $\mathfrak{g}_{5,4}^*$. On a donc en fait:

$$T = \frac{x_3^2}{12} S_3 \partial_{55} + \frac{x_1 x_2}{6} S_3 \partial_{45} + \frac{x_1^2}{12} S_3 \partial_{44}.$$

L'opérateur S_3 peut d'ailleurs être étendu à toutes les fonctions lisses f sur $\mathfrak{g}_{5,4}^*$ en posant:

$$\begin{aligned} S_3(f) &= \frac{1}{x_3^2} [f(\sigma_3(x)) - f(x) + 2x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)] = \\ &= -\frac{1}{x_3^2} \int_{-x_3}^{x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, t, x_4, x_5) - \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \right) dt \end{aligned}$$

et

$$S_3(f)|_{x_3=0} = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, 0, x_4, x_5).$$

Par construction, $C_2 = C_{2,G_u} + \delta T$ est tangentiel. Il est clairement homogène de degré -2 . Il reste donc à vérifier qu'il est aussi correct de degré -2 . Pour cela, on introduit le système de coordonnées (p, q, z) de la première strate de $\mathfrak{g}_{5,4}^*$, à savoir:

$$(p = x_4, q = \frac{x_3}{x_1}, z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = (\frac{x_3^2}{2} + x_1 x_5 - x_2 x_4)).$$

Dans ces variables et avec les notations du début de ce chapitre, on a:

$$\begin{aligned} \widetilde{C_{2,G_u}}(u, v) &= \partial_{pp}(u) \partial_{qq}(v) - 2 \partial_{pq}(u) \partial_{pq}(v) + \partial_{qq}(u) \partial_{pp}(v) \\ &\quad + \frac{1}{3} z_1^2 (\partial_{z_3 p}(u) \partial_p(v) + \partial_{z_3 p}(v) \partial_p(u)) \\ &\quad - \frac{1}{3} z_1^2 (\partial_{pp}(u) \partial_{z_3}(v) + \partial_{pp}(v) \partial_{z_3}(u)) \\ \tilde{T}_{(1)}(u) &= \sum_{n \geq 4} (-1)^n \frac{2^{n-3}}{6(n-2)!} q^{n-4} (q z_1^2 \partial_{z_3} + \partial_q)^{n-2} \partial_{pp}(u). \end{aligned}$$

Comme $\widetilde{C}_{2(1)} = \widetilde{C_{2,Gu}} + \delta\widetilde{T}_{(1)}$ et C_2 coïncident sur $S(\mathfrak{g})$, on déduit des formules précédentes que C_2 est correct de degré -2 . Ceci suffit pour montrer l'existence d'un produit-star (algébrique) de $S(\mathfrak{g}_{5,4})$, tangentiel et bien gradué, selon notre théorème III.3.3.

Dans cet exemple, l'ouvert Ω des orbites de dimension maximale est l'union des trois premières strates. La première strate ($x_1 \neq 0$) a déjà été paramétrée ci-dessus. Les deux autres strates peuvent être paramétrées comme suit:

$$x_1 = 0, x_2 \neq 0 : \quad p' = x_5, q' = \frac{x_4}{x_2}, z'_1 = 0, z'_2 = x_2, z'_3 = \frac{x_3^2}{2} - x_2 x_4$$

et

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 \neq 0 : \quad p'' = x_5, q'' = \frac{x_4}{x_3}, z''_1 = z''_2 = 0, z''_3 = x_3.$$

Comme z'_3 est la restriction de l'invariant générique z_3 à la seconde strate et z''_3 la restriction de $\pm\sqrt{z_3}$ à la troisième strate, le produit-star algébrique que nous venons de construire sur $\mathfrak{g}_{5,4}^*$ est tangentiel non seulement aux orbites de la première strate, mais à toutes celles de dimension maximale (cf. remarque III.1.3).

Signalons que si l'on se restreint à la variété de Poisson régulière Ω , il est possible [Mas1, Mas2] de construire un produit-star à la fois tangentiel et différentiel sur Ω qui, bien entendu, ne s'étend pas à tout $\mathfrak{g}_{5,4}^*$. Pour finir ce chapitre, nous proposons de construire explicitement un opérateur C'_2 , à coefficients homogènes dans $C^\infty(\Omega)$, à la fois tangentiel et différentiel de la forme:

$$C'_2 = C_{2,Gu} + \delta T',$$

où

$$T' = A_{453}\partial_{453} + A_{355}\partial_{355} + A_{455}\partial_{455} + A_{344}\partial_{344} + A_{445}\partial_{445} + A_{555}\partial_{555} + A_{444}\partial_{444},$$

les A_{ijk} ci-dessus étant complètement symétriques en les indices i, j, k . La condition $C'_2(\Delta, \cdot) = 0$ impose aux coefficients de T de vérifier le système suivant:

$$\begin{aligned} A_{344}\partial_3(\Delta) + 3A_{444}\partial_4(\Delta) + A_{544}\partial_5(\Delta) &= \frac{x_1^2}{6} \\ A_{355}\partial_3(\Delta) + A_{455}\partial_4(\Delta) + 3A_{555}\partial_5(\Delta) &= \frac{x_2^2}{6} \\ A_{345}\partial_3(\Delta) + 2A_{445}\partial_4(\Delta) + 2A_{545}\partial_5(\Delta) &= \frac{x_1 x_2}{3} \\ 2A_{434}\partial_4(\Delta) + A_{543}\partial_5(\Delta) &= 0 \\ A_{435}\partial_4(\Delta) + 2A_{535}\partial_5(\Delta) &= 0. \end{aligned}$$

Voici une solution:

$$A_{453} = \frac{x_1 x_2 x_3}{3r}$$

$$A_{355} = \frac{x_3 x_2^2}{6r}$$

$$A_{455} = \frac{-x_2^3 + 2x_1^2 x_2}{6r}$$

$$A_{344} = \frac{x_1^2 x_3}{6r}$$

$$A_{445} = \frac{x_1^3 - 2x_1 x_2^2}{6r}$$

$$A_{555} = \frac{x_1 x_2^2}{6r}$$

$$A_{444} = \frac{-x_1^2 x_2}{6r},$$

où l'on a noté $r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

CHAPITRE IV

Déformations sur les orbites coadjointes
de dimension maximale

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$ sont munies canoniquement d'une structure de variété symplectique. Du théorème de Darboux, il résulte donc que, sur chaque orbite O , il existe des coordonnées locales $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ ($2r = \dim O$) telles que la 2-forme symplectique canonique ω sur O s'écrive dans ces coordonnées sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^r dp_i \wedge dq_i.$$

Dans le cas nilpotent, on a bien plus: les auteurs de [Ver, AC1, ACG1, Bon, Puk] ont montré qu'il existe, pour toute orbite coadjointe, une carte de Darboux globale dont les applications coordonnées p_i, q_j sont restriction à l'orbite de fonctions polynomiales f_i, g_j définies sur $\mathfrak{g}^*$. Il n'y a aucune raison pour que ces fonctions f_i, g_j vérifient les relations de Darboux:

$$\{f_i, g_j\} = \delta_{i,j},$$

en dehors de l'orbite. Cependant, M. Saint-Germain a montré dans [SG] l'existence de prolongements $\hat{p}_i, \hat{q}_j$ des p_i, q_j , définis dans un voisinage "formel" de l'orbite et satisfaisant les relations de Darboux sur tout ce voisinage. La considération de plusieurs exemples l'a mené à conjecturer l'existence de prolongements qui seraient algébriques et qui satisferaient les relations de Darboux sur tout un ouvert de $\mathfrak{g}^*$.

Nous consacrons la section 1 de ce chapitre à quelques rappels de géométrie algébrique. Puis, dans la section 2, nous considérons une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, et donnons une description plus précise des prolongements considérés par Saint-Germain (l'aspect algébrique sera également spécifié). Ceci nous permettra de recouvrir l'ouvert Ω de $\mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale par des cartes de Weinstein homogènes et semi-algébriques. Comme le témoignera l'exemple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ dans la section 3, la construction d'un tel recouvrement n'est pas toujours possible lorsque $\mathfrak{g}$ n'est plus nilpotente. Dans la section 4, nous donnons une preuve cohomologique de l'existence d'un produit-star tangentiel sur une variété de Poisson régulière M en utilisant un bon recouvrement de M et les champs de vecteurs locaux conformes et tangentiels. Cette preuve s'inspire des

techniques de De Wilde et Lecomte données dans le cadre d'une variété symplectique [DW, DW-L1, DW-L2], et reprend la formulation de [Mas2, Mas3, ALM] où ces mêmes techniques avaient été utilisées pour la construction de produits-star covariants sur une (seule) orbite coadjointe. Finalement, nous utilisons cette section 4 et les prolongements décrits en section 2 pour montrer l'existence d'un produit-star tangentiel, différentiel et gradué sur l'ouvert $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale pour toute algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$.

IV.1 Un peu de géométrie algébrique.

a) Ensembles semi-algébriques réels.

Définition IV.1.1

Un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^m$ est semi-algébrique s'il peut s'écrire sous la forme:

$$V = \bigcup_{1 \leq i \leq s} \bigcap_{1 \leq j \leq r_i} \{x \in \mathbb{R}^m : P_{ij}(x) \text{ } s_{ij} \text{ } 0\},$$

où, pour tout $i = 1, \dots, s$ et $j = 1, \dots, r_i$, $s_{ij} \in \{>, =, <\}$ et où les P_{ij} sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^m$.

Définition IV.1.2

Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles semi-algébriques. Une application f de A dans B est dite semi-algébrique si son graphe est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{m+n}$.

Un résultat important de Tarski-Seidenberg ([BR] p.60) nous apprend que si $f : A \rightarrow B$ est semi-algébrique, alors l'image $f(A) \subset B$ est un ensemble semi-algébrique. A partir de ce résultat, il est facile de montrer la

Proposition IV.1.3 [BR]

1. La composition de deux applications semi-algébriques est semi-algébrique.
2. Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles semi-algébriques. Alors, l'application $h = (h_1, \dots, h_n) : A \rightarrow B$ est semi-algébrique si et seulement si toutes les fonctions h_i le sont.
3. Soit U un sous-ensemble semi-algébrique ouvert de $\mathbb{R}^m$. L'ensemble $S(U)$ des fonctions semi-algébriques sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ possède une structure naturelle d'anneau. De plus, si f est un élément de $S(U) \cap C^\infty(U)$ alors, pour tout $k = 1, \dots, m$, la dérivée partielle $\partial_{x_k}(f)$ est encore dans $S(U) \cap C^\infty(U)$.

Enfin, on appelle ensemble algébrique de $\mathbb{R}^m$ une partie F de $\mathbb{R}^m$ qui est l'ensemble des zéros communs d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ de polynômes sur $\mathbb{R}^m$. Notons que les ensembles algébriques de $\mathbb{R}^m$ sont les fermés d'une topologie dite topologie de Zariski de $\mathbb{R}^m$. Enfin, rappelons qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, est dite algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m, Y]$ tel que

$$P(x, f(x)) = P(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) = 0 \quad \forall x = (x_1, \dots, x_m) \in U.$$

Il est clair que toute fonction algébrique est semi-algébrique. Cependant, l'image $f(A)$ d'un ensemble algébrique A par une fonction algébrique f n'est pas en général un ensemble

algébrique. En fait, les ensembles algébriques ne sont pas stables par projection. En effet, considérons par exemple le disque unité :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

C'est évidemment un ensemble algébrique de $\mathbb{R}^2$, mais sa projection $\pi(D) = \{|x| \leq 1\}$ par l'application $\pi : (x, y) \mapsto x$ est un ensemble semi-algébrique, non algébrique. La preuve de la proposition IV.1.3 ne s'étend donc pas aux fonctions algébriques. C'est la raison principale qui nous a conduits à utiliser ici la notion de semi-algèbricité, beaucoup plus naturelle.

Dans la suite, le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (de dimension m) sera identifié à $\mathbb{R}^m$, ce qui nous permettra d'utiliser les notions de fonctions semi-algébriques et algébriques pour $\mathfrak{g}^*$.

b) Stratification semi-algébrique de Bonnet.

Au chapitre II de cette thèse, nous avons déjà eu l'occasion de rappeler la stratification due à Pukanszky du dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Les couches de cette stratification sont définies à partir d'une base B de Jordan-Hölder fixée. Elles sont indexées, rappelons-le, par des ensembles d'indices de saut $J = \{j_1 < \dots < j_l\}$ et sont de la forme :

$$\mathfrak{G}_B^J = \{\mu \in \mathfrak{g}^* : J_\mu = J\}.$$

Dans [Bon], Bonnet construit une stratification plus fine que celle de Pukanszky. Pour cela, il décompose chaque ensemble d'indices de saut J_μ en deux sous-ensembles I_μ et I'_μ , et définit une involution de J_μ dans lui-même échangeant I_μ et I'_μ . Ces ensembles d'indices, qui nous serviront ultérieurement pour la description des prolongements de Saint-Germain, ont été construits de manière récurrente par J. Ludwig et H. Zahir dans [LZ] (voir aussi la construction analogue de B. Curey [Cur] pour le cas plus général des algèbres de Lie exponentielles). Nous rappelons ici brièvement cette construction. Soient donc B une base de Jordan-Hölder d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente et μ un point de $\mathfrak{g}^*$. Soient

$$\begin{aligned} i'_1 &= \min\{j : \langle \mu, [X, X_j] \rangle \neq 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\} \\ i_1 &= \min\{i : \langle \mu, [X_i, X_{i'_1}] \rangle \neq 0\} \\ \mathfrak{h}_1(\mu) &= \{X \in \mathfrak{g} : \langle \mu, [X, X_{i'_1}] \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Alors, $\mathfrak{h}_1(\mu)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de codimension 1. C'est donc un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour $i = 1, \dots, m, i \neq i_1$, posons

$$X_i^1 = X_i - \frac{\langle \mu, [X_i, X_{i'_1}] \rangle}{\langle \mu, [X_{i_1}, X_{i'_1}] \rangle} X_{i_1}.$$

La suite (X_i^1) ainsi définie constitue une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{h}_1(\mu)$.

On peut maintenant continuer la construction par récurrence en posant

$$\begin{aligned} i'_p &= \min\{j : \langle \mu, [X, X_j^{p-1}] \rangle \neq 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\} \\ i_p &= \min\{i : \langle \mu, [X_i^{p-1}, X_{i'_p}^{p-1}] \rangle \neq 0\} \\ \mathfrak{h}_p(\mu) &= \{X \in \mathfrak{g} : \langle \mu, [X, X_{i'_p}^{p-1}] \rangle = 0\}. \end{aligned}$$

Alors, $\mathfrak{h}_p(\mu)$ est un idéal de $\mathfrak{h}_{p-1}(\mu)$ et une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ dont une base de Jordan-Hölder est donnée par (X_i^p) où

$$X_i^p = X_i^{p-1} - \frac{\langle \mu, [X_i^{p-1}, X_{i'_p}^{p-1}] \rangle}{\langle \mu, [X_{i_p}^{p-1}, X_{i'_p}^{p-1}] \rangle} X_{i_p}^{p-1}, \quad \forall i \notin i_1, \dots, i_p.$$

Le processus s'arrête lorsque $p = d = \frac{1}{2} \dim(O_\mu)$. On note ensuite:

$$I_\mu = \{i_1 > \dots > i_d\} \quad I_\mu^* = I'_\mu = \{i'_1, \dots, i'_d\} = \{i_1^*, \dots, i_d^*\}.$$

On stratifie finalement $\mathfrak{g}^*$ de la manière suivante. A tout ensemble ordonné décroissant $I = (i_1, \dots, i_k)$, on associe $I^* = (i_1^*, \dots, i_k^*)$. Puis on pose

$$\mathfrak{G}_B^{I, I^*} = \{\mu \in \mathfrak{g}^* : I_\mu = I \text{ et } I_\mu^* = I^*\}.$$

On peut montrer que ces ensembles sont invariants sous l'action coadjointe. On peut aussi munir l'ensemble des couples (I, I^*) d'un ordre total et numéroté ces couples dans l'ordre croissant. Il est dès lors possible de construire une suite (P_i) de polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ telle que le $K^{\text{ième}}$ ensemble $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$ soit celui des points où s'annulent $P_0, \dots, P_{K-1}$ mais pas P_K . Ainsi, les $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$ forment une partition de $\mathfrak{g}^*$ en sous-ensembles semi-algébriques.

Comme pour la stratification de [Puk], la première des strates de Bonnet est un ouvert de $\mathfrak{g}^*$ et chaque strate $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$ peut être paramétrée au moyen de triplets (z, p, q) de fonctions rationnelles, régulières sur la strate tels que:

- à chaque z correspond une et une seule orbite O^z dans $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$;
- pour z fixé, les fonctions p, q constituent une carte de Darboux globale de l'orbite O^z .

c) Produits-star gradués sur un ouvert de $\mathfrak{g}^*$.

Les produits-star gradués ont été définis au chapitre III. Nous avons besoin de transcrire cette notion dans une situation locale:

Définitions IV.1.4

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et U un ouvert de $\mathfrak{g}^*$. Une fonction lisse f sur U est dite homogène de degré d si:

$$f(s\xi) = s^d f(\xi),$$

pour tout $s > 0$ et tout ξ de U pour lesquels $s\xi$ appartient à U . De plus, une application k -linéaire $C : C^\infty(U) \times \dots \times C^\infty(U)$ sera dite homogène de degré $-n$ si pour tout $u_1, \dots, u_k$

homogènes de degré $d_1, \dots, d_k$ respectivement, la fonction $C(u_1, \dots, u_k)$ est homogène de degré $d_1 + \dots + d_k - n$. Enfin, un produit-star $\star = \sum_{n \geq 0} C_n \nu^n$ sur U sera dit gradué si chaque C_n est un opérateur sur U homogène de degré $-n$.

Les produits-star tangentiels que nous considérerons dans ce chapitre sont des produits-star différentiels sur des variétés de Poisson régulières; c'est donc la notion de tangentialité différentielle qui sera utilisée ici (cf. appendice A.2 et la définition I.5.4 du chapitre I).

IV.2 A propos de la conjecture de M. Duflo et M. Saint-Germain.

Dans ce paragraphe, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie nilpotente. Soient μ un point du dual $\mathfrak{g}^*$ et O_μ l'orbite coadjointe de μ . Notons pour un instant

$$\phi : O_\mu \rightarrow \mathbb{R}^{2r} \quad \xi \mapsto (p_i^{O_\mu}(\xi), q_j^{O_\mu}(\xi))$$

une carte de Darboux globale de O_μ du type de celles construites par M. Vergne [Ver] dans le cas générique et par D. Arnal, J.C. Cortet, M. Cahen, S. Gutt, P. Bonnet [AC1, ACG1, Bon] dans le cas général. En reprenant, dans ce contexte, la preuve du théorème de décomposition d'A. Weinstein [We1], il est possible de construire des prolongements p_i, q_j des fonctions $p_i^{O_\mu}, q_j^{O_\mu}$, définis sur un voisinage ouvert de μ dans $\mathfrak{g}^*$ (pour la topologie usuelle), à la fois semi-algébriques et homogènes. Montrons ce résultat:

Théorème IV.2.1

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension m , $\mathfrak{g}^*$ son dual et μ un point de $\mathfrak{g}^*$. On suppose que le tenseur de Poisson est de rang $2r$ en μ . Alors, il existe une carte de Weinstein de $\mathfrak{g}^*$ en μ , notée $(U, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, z_1, \dots, z_{m-2r})$, telle que U soit un ensemble semi-algébrique de $\mathfrak{g}^*$, ouvert pour la topologie habituelle et telle que les p_i (resp. q_j) soient des fonctions semi-algébriques sur U , homogènes de degré 1 (resp. 0).

Preuve:

On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

- Le cas où $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 est évident.
- On suppose que le résultat est vrai pour toute algèbre de Lie nilpotente de dimension $m-1$ et on le montre pour $\mathfrak{g}$ de dimension m . Considérons une base de Jordan-Hölder (X_i) de $\mathfrak{g}$ et notons $\mathfrak{a}$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ engendré par $(X_1, \dots, X_{m-1})$. Soit $\Pi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{a}^*$ la projection de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{a}^*$ qui à $\xi \in \mathfrak{g}^*$ associe $\xi|_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}^*$. Notons encore $I_\mu = (i_1, \dots, i_r)$ et $I_\mu^* = (i_1^*, \dots, i_r^*)$ les indices de saut au point μ de $\mathfrak{g}^*$. Distinguons deux cas.

Si $m \notin I_\mu$:

Dans ce cas, O_μ et $O_{\Pi(\mu)}$ sont de même dimension (égale à $2r$). On note alors $(U', p'_1, \dots, p'_r, q'_1, \dots, q'_r, z'_1, \dots, z'_{m-1-2r})$ la carte de Weinstein de $\mathfrak{a}^*$ en $\Pi(\mu)$ obtenue par induction. Posons:

$$p_i = p'_i \circ \Pi, \quad q_j = q'_j \circ \Pi.$$

Par hypothèse de récurrence, les p_i (resp. les q_j) sont semi-algébriques sur

$$U = \Pi^{-1}(U') \cap \{\xi \in \mathfrak{g}^* : m \notin I_\xi\},$$

homogènes de degré 1 (resp. de degré 0). Ils vérifient clairement les relations de commutation souhaitées, à savoir:

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j},$$

et les champs de vecteurs hamiltoniens H_{p_i}, H_{q_j} qui leur sont associés satisfont:

$$[H_{p_i}, H_{q_j}] = H_{\{p_i, q_j\}} = [H_{p_i}, H_{p_j}] = [H_{q_i}, H_{q_j}] = 0.$$

Il est maintenant possible de compléter les p_i, q_j par des fonctions z_k pour lesquelles le jacobien du système (p_i, q_j, z_k) soit non nul et d'obtenir la carte de Weinstein souhaitée.

Si $m \in I_\mu$:

Dans ce cas, O_μ est de dimension égale à $(\dim O_{\Pi(\mu)}) + 2$. On trouve, par hypothèse de récurrence, une carte de Weinstein $(U', p'_1, \dots, p'_{r-1}, q'_1, \dots, q'_{r-1}, z'_1, \dots, z'_{m-2r+1})$ de $\mathfrak{a}^*$ en $\Pi(\mu)$. Posons $p = X_m$. Considérée comme fonction sur $\mathfrak{g}^*$, p est clairement semi-algébrique et homogène de degré 1. Pour simplifier l'écriture, on note s l'indice m^* associé à m . Soit X_s l'élément de $\mathfrak{g}$ correspondant, que l'on considère comme fonction sur $\mathfrak{g}^*$. On constate aussitôt que:

$$\{p, X_s\}(\mu) \neq 0.$$

Ainsi, le champ de vecteurs hamiltonien H_p associé à la fonction p est tel que:

$$H_p(\mu) \neq 0.$$

On peut donc redresser ce champ sur un voisinage $\tilde{U}$ de μ . Identifions dorénavant $\mathfrak{g}^*$ à $\mathbb{R}^m$. On peut supposer que $\tilde{U} \simeq \tilde{U}' \times \mathbb{R}^{2r}$ pour un certain ouvert $\tilde{U}'$ de $\mathbb{R}^{m-2r}$ et que $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{s-1}, 0, \mu_{s+1}, \dots, \mu_m)$. Notons φ la coulée locale de H_p :

$$\varphi(t, \mu) = \varphi_t(\mu) = \text{Ad}^* \exp(-tX_m)(\mu),$$

et introduisons la fonction F définie sur un certain ouvert W de $\mathfrak{g}^*$ par:

$$\begin{aligned} F: W \subset \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^m \\ (y_1, \dots, y_m) &\mapsto \varphi_{y_s}(y_1, \dots, y_{s-1}, 0, y_{s+1}, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire:

$$F(y_1, \dots, y_m) = (F_1(y_1, \dots, y_m), \dots, F_m(y_1, \dots, y_m)) = (x_1, \dots, x_m).$$

Comme $\mathfrak{g}$ est nilpotente, les fonctions F_i sont polynomiales en les variables (y_j) . De plus, l'application F est par construction un difféomorphisme local. Elle nous permet de définir un système de coordonnées $(y_1, \dots, y_m)$ tel que $H_p = \partial_{y_s}$. Il s'agit maintenant de montrer que la fonction $q = y_s$ est semi-algébrique et homogène de degré 0. Or, on a

$$(m) \quad F_m(y_1, \dots, y_m) = y_m = x_m$$

$$(m-1) \quad F_{m-1}(y_1, \dots, y_m) = y_{m-1} + \sum_{l \geq 1} \sum_{j=1}^{m-2} \frac{(y_s)^l}{l!} y_j f_{jl}^{(m-1)} = x_{m-1}$$

$$\begin{aligned}
(m-2) \quad & F_{m-2}(y_1, \dots, y_m) = y_{m-2} + \sum_{l \geq 1} \sum_{j=1}^{m-3} \frac{(y_s)^l}{l!} y_j f_{jl}^{(m-2)} = x_{m-2} \\
& \dots\dots\dots \\
(s) \quad & F_s(y_1, \dots, y_m) = \sum_{l \geq 1} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(y_s)^l}{l!} y_j f_{jl}^{(s)} = x_s \\
(s-1) \quad & F_{s-1}(y_1, \dots, y_m) = y_{s-1} = x_{s-1} \\
& \dots\dots\dots \\
(1) \quad & F_1(y_1, \dots, y_m) = y_1 = x_1.
\end{aligned}$$

pour certains réels $f_{lp}^{(k)}$.

Les équations (i) pour $i \neq s$ nous permettent de donner une expression de y_i de la forme $y_i = x_i - \widetilde{F}_i(y_1, \dots, y_{i-1}, y_s)$. Dans (s), on remplace successivement y_m par x_m , y_{m-1} par $x_{m-1} - \widetilde{F}_{m-1}(y_1, \dots, y_{m-2}, y_s)$, y_{m-2} par $x_{m-2} - \widetilde{F}_{m-2}(y_1, \dots, y_{m-3}, y_s)$, ..., y_1 par x_1 . Finalement, on obtient à la ligne (s) une équation polynomiale de la forme

$$P(x_1, \dots, x_m, y_s) = \sum_{0 \leq l \leq N} y_s^l \sum_{j=1}^m a_{lj} x_j = 0 \quad a_{lj} \in \mathbb{R}.$$

Cette équation en y_s a une unique solution qui est la valeur de la fonction q au point $x_1, \dots, x_m$.

Les fonctions p, q que nous venons ainsi de construire sont définies sur un ouvert U (que l'on peut supposer semi-algébrique), elles sont semi-algébriques sur cet ouvert et vérifient

$$\{p, q\}(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in U.$$

Quitte à remplacer U par un ouvert plus petit, on peut prétendre qu'il existe un indice k pour lequel la fonction coordonnée x_k ne s'annule jamais sur U . Par suite,

$$\sum_{0 \leq l \leq N} y_s^l \sum_{j=1}^m a_{lj} \frac{x_j}{x_k} = 0.$$

On en déduit que $q = y_s$ est une fonction des variables $(\frac{x_1}{x_k}, \dots, \frac{x_m}{x_k})$, et donc que q est homogène de degré 0.

Posons enfin

$$\begin{aligned}
p_i &= \exp(-qH_p)(p'_i \circ \Pi) \quad 1 \leq i \leq r-1 \\
q_j &= \exp(-qH_p)(q'_j \circ \Pi) \quad 1 \leq j \leq r-1 \\
\tilde{z}_k &= \exp(-qH_p)(z'_k \circ \Pi) \quad 1 \leq k \leq m-2r+1.
\end{aligned}$$

Vérifions que les relations de commutation requises sont bien satisfaites:

Par construction, $\{p, q\} = 1$, $H_q = \partial_p$ et donc $\{q, p_i\} = \{q, q_j\} = 0$. Maintenant, soient f' et g' deux éléments de $C^\infty(U')$ (on rappelle que U' est le domaine de la carte (p'_i, q'_j, z'_k) , carte de $\mathfrak{a}^*$ que l'on avait obtenue par induction). Notons encore

$$D = \exp(-qH_p), \quad f = \Pi^*(f') \text{ et } g = \Pi^*(g').$$

Alors, on a:

$$\begin{aligned}
 D(\{f, g\}) &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} q^k (H_p)^k(\{f, g\}) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} q^k \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} \{(H_p)^i(f), (H_p)^j(g)\} \\
 &= \sum_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} q^{i+j} \{(H_p)^i(f), (H_p)^j(g)\}.
 \end{aligned}$$

Comme $H_q = \partial_p$ et que f', g' appartiennent à $C^\infty(U')$, on a bien

$$D(\{f, g\}) = \sum_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!} \{q^i (H_p)^i(f), q^j (H_p)^j(g)\} = \{D(f), D(g)\}.$$

Ceci montre que:

$$\begin{aligned}
 \{p_i, q_j\} &= \delta_{ij} \\
 \{p_i, p_j\} &= \{q_i, q_j\} = 0 \\
 \{p_i, \tilde{z}_k\} &= \{q_j, \tilde{z}_k\} = \{\tilde{z}_k, \tilde{z}_l\} = 0.
 \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
 \{p, D(f)\} &= \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} H_p(q^k (H_p)^k(f)) \\
 &= \sum_k \frac{(-1)^k}{(k-1)!} q^{k-1} (H_p)^k(f) \\
 &\quad + \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} q^k (H_p)^{k+1}(f) = 0.
 \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{p, p_i\} = \{p, q_j\} = \{p, \tilde{z}_k\} = 0$.

Par construction, toute fonction lisse s'écrit au voisinage de μ comme fonction des p_i, q_j et des $\tilde{z}_k$. Maintenant, soit A la matrice jacobienne des fonctions $\tilde{z}_k$ ($1 \leq k \leq m - 2r + 1$). Le rang du tenseur de Poisson étant $2r$ en μ , il existe un mineur d'ordre $m - 2r$ dans A . En se restreignant au besoin à un ouvert semi-algébrique où ce mineur est non nul, on peut choisir $m - 2r$ fonctions $z_k = \tilde{z}_{j_k}$ de sorte que (p_i, q_j, p, q, z_k) soit une carte de Weinstein.

Finalement, par le point 3 de la proposition IV.1.3, les p_i, q_j sont des fonctions semi-algébriques. Pour finir, on constate que p étant homogène de degré 1, H_p est un opérateur homogène de degré 0. De plus, q est homogène de degré 0 et les p'_i (resp. q'_j) sont homogènes de degré 1 (resp. 0) par hypothèse de récurrence. Les p_i, q_j sont donc bien homogènes de bon degré. $\square$

Remarque IV.2.2

Dans [SG], Saint-Germain a conjecturé l'existence, en chaque point μ de $\mathfrak{g}^*$ ($\mathfrak{g}$ nilpotente), de cartes de Weinstein (p_i, q_j, z_k) dont les applications coordonnées p_i, q_j seraient algébriques. Notre théorème IV.2.1 répond affirmativement à cette conjecture pour tout μ dont l'orbite O_μ est de dimension 2.

Vu l'aspect polynomial de l'application exponentielle dans le cas nilpotent, on aurait pu s'attendre à obtenir, en tout point μ de $\mathfrak{g}^*$, des cartes de Weinstein dont les applications coordonnées p_i, q_j, z_k seraient rationnelles en les variables (x_i) . Si cela est vrai pour les points génériques, les exemples les plus simples montrent qu'il n'en est rien en général. (Ce phénomène déjà observé par Saint-Germain dans [SG] sera illustré dans la section 3 de ce chapitre avec l'exemple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{5,4}$.) On peut néanmoins améliorer le résultat du théorème précédent si on se restreint aux cartes de Weinstein qui recouvrent la variété Ω des orbites de dimension maximale. Montrons d'abord le

Lemme IV.2.3

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et (x_i) un système de coordonnées de $\mathfrak{g}^*$. On note encore Ω l'ouvert de $\mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale. Alors, le champ d'Euler $X = \sum x_i \partial_i$ est transverse à toute orbite contenue dans Ω .

Preuve:

Soit O une orbite de dimension maximale. Compte tenu de la structure même des orbites coadjointes des algèbres de Lie nilpotentes [ACG1, Ver, Puk], il existe nécessairement un polynôme invariant homogène z tel que $z|_O \neq 0$. Donc, pour tout x de O , $X_x(z) = kz$ si z est de degré k et $X_x(z) \neq 0$ sur O . Par suite,

$$X_x \notin T_x O \quad \forall x \in O. \square$$

Maintenant, nous avons:

Proposition IV.2.4

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension m . On note (x_i) un système de coordonnées de $\mathfrak{g}^*$. Soient Ω la variété des orbites de dimension maximale ($2d$) et μ un point de Ω . Il existe une carte de Weinstein (U, p_i, q_j, z_k) , $1 \leq i, j \leq d$, $1 \leq k \leq m - 2d$, U étant un ouvert de $\mathfrak{g}^*$ contenant μ , semi-algébrique, les fonctions p_i, q_j étant semi-algébriques et homogènes de degré 1 et 0 respectivement, et les z_k des fonctions invariantes homogènes.

Preuve:

Prenons donc un point μ de Ω . D'après le théorème IV.2.1, il existe une carte de Weinstein, notée $(U, p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_d, z_1, \dots, z_{m-2d})$, telle que les p_i, q_j soient semi-algébriques sur U et homogènes de degré 1 et 0 respectivement. Le rang du tenseur de Poisson étant constant et maximal sur tout Ω , les fonctions z_k sont invariantes. Dans cette carte (U, p, q, z) , le champ d'Euler $X = \sum x_i \partial_i$ s'écrit:

$$X = \sum_{i=1}^d a_i(p, q, z) \partial_{p_i} + \sum_{j=1}^d b_j(p, q, z) \partial_{q_j} + \sum_{k=1}^{m-2d} c_k(p, q, z) \partial_{z_k}.$$

En fait, les c_k ne sont fonctions que des variables z . En effet, comme

$$L_X \Lambda(f, g) = \{f, g\} = X(\{f, g\}) - \{Xf, g\} - \{f, Xg\} \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

la fonction $L_X f (= Xf)$ est invariante dès que f l'est. On peut donc considérer la projection $\eta = \pi_*(X)$ de X relativement à l'application

$$\pi : x \in U \mapsto z(x) \in \mathbb{R}^{m-2d}.$$

Par transversalité de X , $\eta(\mu) \neq 0$. En redressant ce champ η en un voisinage U' (que l'on peut choisir semi-algébrique) de μ , on obtient de nouvelles variables $z'_1, \dots, z'_{m-2d}$ telles que

$$\eta = \frac{\partial}{\partial z'_1}, \quad L_X(z'_1) = 1$$

$$L_X(z'_j) = 0 \quad \forall 2 \leq j \leq m-2d.$$

Ceci équivaut à dire que z'_1 (resp. z'_j pour $j \neq 1$) est homogène de degré 1 (resp. 0). La carte de Weinstein (U', p, q, z') possède donc les propriétés exigées. $\square$

IV.3 Exemples.

a) Un exemple fondamental.

Nous avons démontré avec le théorème IV.2.1 que les prolongements de Saint-Germain sont semi-algébriques (et mêmes algébriques pour les orbites de dimension 2). En général, ces prolongements ne sont pas rationnels.

Considérons par exemple l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}$ de base de Jordan-Hölder $B = (X_1, \dots, X_5)$ et de crochets:

$$[X_5, X_4] = X_3, \quad [X_5, X_3] = X_2, \quad [X_4, X_3] = X_1.$$

Considérons ici la troisième strate $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$ de la stratification de Bonnet, il s'agit de la strate correspondant aux ensembles d'indices $I = \{5\}$ et $I^* = \{4\}$:

$$\mathfrak{G}_B^{I, I^*} = \{x = (x_1, \dots, x_5) \in \mathfrak{g}^* : x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 \neq 0\}.$$

Cette strate $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$ est bien un ensemble semi-algébrique (non ouvert) de $\mathfrak{g}^*$; elle peut être paramétrée par les fonctions suivantes:

$$p = -x_4, q = \frac{x_5}{x_3}, z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = \frac{x_3^2}{2} - x_2x_4 + x_1x_5.$$

Les fonctions p, q ci-dessus constituent une carte de Darboux globale des orbites coadjointes contenues dans $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$. Mais $\{p, q\}$ n'est plus égal à 1 en dehors de $\mathfrak{G}_B^{I, I^*}$. Lorsqu'on cherche à prolonger ces p, q en des fonctions $\tilde{p}, \tilde{q}$ vérifiant la relation de Darboux sur tout un ouvert en utilisant le redressement du champ H_p comme dans la preuve du théorème IV.2.1, on obtient:

$$\tilde{p} = -x_4, \quad \tilde{q} = \frac{2x_5}{x_3 + \sqrt{\frac{x_3^2}{2} - x_2x_4 + x_5x_1}}.$$

Ces fonctions $\tilde{p}, \tilde{q}$ sont homogènes respectivement de degré 1 et 0, et par construction elles se restreignent en des fonctions polynomiales sur les orbites contenues dans la strate envisagée. Elles sont bien algébriques, mais elles ne sont pas rationnelles.

b) Pour aller plus loin.

Dans le cas nilpotent, toute orbite coadjointe O admet, nous l'avons déjà dit, une carte de Darboux globale constituée de fonctions p_i, q_j polynomiales sur O ($\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$). Ces p_i, q_j peuvent toujours être prolongés en des fonctions $\tilde{p}_i, \tilde{q}_j$ vérifiant les relations de Darboux sur tout un ouvert de $\mathfrak{g}^*$, et homogènes de degré 1 et 0 respectivement. Les choses sont loin de se passer aussi bien lorsque l'algèbre de Lie n'est plus nilpotente.

Considérons à titre d'exemple le cas de $\mathfrak{sl}(2)$. On rappelle que la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(2)$ est donnée par les crochets:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_3, X_2] = X_2, \quad [X_3, X_1] = -X_1.$$

Dans cet exemple, l'anneau des fonctions polynomiales invariantes est engendré par

$$z = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Si ce polynôme invariant ne sépare évidemment pas les orbites coadjointes de $\mathfrak{sl}^*(2)$, il permet de répartir celles-ci en familles finies. On rappelle que le cône nilpotent (i.e. la famille des orbites coadjointes nilpotentes) de $\mathfrak{sl}^*(2)$ est la réunion des trois orbites suivantes:

- l'orbite triviale W_0 réduite au point $\{0\}$,
- $W_1 = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0, \mu_3 > 0\}$
- $W_2 = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0, \mu_3 < 0\}$.

Ainsi, on compte parmi les orbites de dimension maximale deux orbites nilpotentes W_1 et W_2 . Ce sont précisément ces orbites qui posent problème: D'une part, il est clair que le champ d'Euler $X = \sum x_i \partial_i$ n'est pas transverse à ces orbites, d'autre part, on a le

Lemme IV.3.1

Si Ω désigne la variété des orbites de dimension maximale dans le cas de $\mathfrak{sl}(2)$, alors toutes les fonctions q homogènes de degré 0, définies sur un voisinage d'une orbite nilpotente W de Ω et qui se restreignent en des polynômes sur W sont constantes sur W .

Preuve:

Soit ξ un point de W . Pour tout réel t strictement positif, $t\xi$ appartient encore à W . Soit maintenant q une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Alors

$$q(t\xi) = q(\xi), \quad \forall \xi \in W.$$

Comme $q|_W$ est supposé polynomial, on a:

$$q|_W = \sum_{k=0}^N q_k,$$

où les q_k sont des polynômes homogènes de degré k . Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^N t^k q_k(\xi) = \sum_{k=0}^N q_k(\xi), \quad \forall \xi \in W, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$$

soit encore

$$q|_W = q_0 = \text{cst.} \square$$

Du lemme, on déduit immédiatement:

Corollaire IV.3.2

Soit W une orbite de $\mathfrak{sl}^*(2)$ nilpotente et de dimension maximale. Alors, il n'existe pas de fonctions p, q homogènes de degrés respectifs 1 et 0 sur un voisinage de W , qui soient régulières sur W et qui vérifient

$$\{p|_W, q|_W\} = \{p, q\}|_W = 1.$$

IV.4 Champs conformes et produit-star tangentiel sur les variétés de Poisson régulières.

L'existence d'un produit-star tangentiel sur toute variété de Poisson régulière est connue depuis [Mas1, Mas2]. On donne ici une preuve cohomologique de ce résultat en utilisant l'existence d'un bon recouvrement et de champs de vecteurs tangentiels conformes locaux. Cette preuve s'inspire des techniques de De Wilde-Lecomte développées dans [DW-L1, DW-L2] en situation symplectique, et reprend la formulation de [Mas2, Mas3, ALM] où ces techniques ont servi à construire des produits-star covariants sur toute orbite coadjointe admettant une polarisation réelle ou complexe.

Théorème IV.4.1

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière, alors M admet un produit-star tangentiel.

Preuve:

On se donne un bon recouvrement (U_α) de M où chaque U_α est le domaine d'une carte de Weinstein. Pour tout entier r non nul, on pose $U_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_r}$, si cette intersection est non vide. Il est clair que Λ est un cocycle pour la cohomologie de Poisson tangentielle, il est donc tangentiellement exact dans chaque ouvert U_α du recouvrement. Pour chaque α , l'ensemble des champs tangentiels conformes sur U_α :

$$\mathcal{C}_\alpha = \{\xi_\alpha \text{ tangentiel} : L_{\xi_\alpha} \Lambda = -\Lambda \text{ sur } U_\alpha\}$$

est donc non vide. C'est en réalité un espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est le quotient de l'espace $C^\infty(U_\alpha)$ des fonctions lisses sur U_α par celui des fonctions invariantes sur U_α . En effet, si ξ_α et ξ'_α sont deux champs tangentiels conformes sur U_α , leur différence $\xi_\alpha - \xi'_\alpha$ est un cocycle de Poisson tangentiellement exact sur U_α . Il existe donc une fonction f sur U_α , déterminée à une fonction invariante sur U_α près, telle que

$$\xi_\alpha - \xi'_\alpha = H_f.$$

Donnons-nous maintenant, sur chaque U_α , un produit-star $\star_\alpha$ tangentiel (par exemple celui de Moyal), un champ tangentiel conforme ξ_α dans $\mathcal{C}_\alpha$ et une application affine D_α de $\mathcal{C}_\alpha$

dans l'ensemble des dérivations tangentielles de $\star_\alpha$ de la forme:

1. $D_\alpha(\xi_\alpha) = \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + L_{\xi_\alpha} + \sum_{r \geq 1} D_\alpha^{2r}(\xi_\alpha) \nu^{2r}$
2. $D_\alpha(\xi_\alpha + H_f) = D_\alpha(\xi_\alpha) + \Phi_\alpha(f),$

où $\Phi_\alpha(f) = [f, \cdot]_{\star_\alpha}$. La donnée d'une telle application est légitime (voir l'appendice A.2).

La preuve qui suit consiste à construire récursivement un produit-star $\star$ global sur M par recollement des $\star_\alpha$, et une dérivation D_α de sa restriction à U_α . Soit k un entier non nul. Supposons que l'on soit parvenu à modifier les $\star_\alpha$ en des séries formelles encore notées $\star_\alpha$ telles que si l'on pose

$$\star_\alpha = \sum_{r \geq 0} C_{r,\alpha} \nu^r,$$

alors pour tout $r < 2k$ et pour tout α, β ,

$$C_{r,\alpha} = C_{r,\beta} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta}.$$

Supposons également que D_α soit une dérivation tangentielle de $\star_\alpha$ à l'ordre $2k$ près. Il s'agit alors d'étendre la construction jusqu'à l'ordre $2k + 2$.

Les hypothèses faites impliquent d'emblée que sur $U_{\alpha\beta}$, $C_{2k,\alpha} - C_{2k,\beta}$ est un cocycle de Hochschild symétrique, tangentiel et différentiel. Il existe donc un opérateur $A_{\alpha\beta}$, tangentiel et différentiel vérifiant sur $U_{\alpha\beta}$,

$$C_{2k,\alpha} - C_{2k,\beta} = \delta A_{\alpha\beta}.$$

Posons $B_{\alpha\beta} = C_{2k+1,\alpha} - C_{2k+1,\beta} - \partial A_{\alpha\beta}$. Alors

$$\delta B_{\alpha\beta} = \partial B_{\alpha\beta} = 0,$$

ici ∂ désigne le cobord de Chevalley. Par suite, $B_{\alpha\beta}$ est un 2-cocycle de Chevalley tangentiel, 1-différentiel et nul sur les constantes. Comme la cohomologie de Chevalley restreinte à de tels opérateurs s'identifie à la cohomologie de Poisson tangentielle et que $H_\Lambda^2(U_{\alpha\beta}) = \{0\}$, on peut trouver un opérateur $R_{\alpha\beta}$, tangentiel, 1-différentiel et nul sur les constantes tel que:

$$B_{\alpha\beta} = \partial R_{\alpha\beta}.$$

A présent, posons:

$$T_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta}.$$

Alors,

$$\delta T_{\alpha\beta} = C_{2k,\alpha} - C_{2k,\beta} \quad \text{et} \quad \partial T_{\alpha\beta} = C_{2k+1,\alpha} - C_{2k+1,\beta}.$$

Choisissons $T_{\alpha\beta}$ tel que $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$ pour tout α, β et posons

$$T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha}.$$

Il est clair que:

$$\delta T_{\alpha\beta\gamma} = \partial T_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Comme $H_\Lambda^1(U_{\alpha\beta\gamma}) = \{0\}$, il existe une fonction $t_{\alpha\beta\gamma}$ définie sur $U_{\alpha\beta\gamma}$ telle que

$$T_{\alpha\beta\gamma}(u) = \partial t_{\alpha\beta\gamma}(u).$$

Maintenant, si $\xi_{\alpha\beta}$ est un champ tangentiel conforme sur $U_{\alpha\beta}$, alors

$$D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r>0} \nu^{2r} (D_\beta^{2r}(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha^{2r}(\xi_{\alpha\beta}))$$

est à l'ordre $2k$ près une dérivation tangentielle de $\star_\alpha$ ou $\star_\beta$. La structure des dérivations tangentielles rappelée dans l'appendice A.2 permet d'affirmer que cette différence $D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha(\xi_{\alpha\beta})$ est de la forme

$$D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) + \nu^{2k} D_{\alpha\beta}^{2k} + \dots,$$

où les fonctions $f_{\alpha\beta}^{2r}$ ne dépendent pas du champ conforme $\xi_{\alpha\beta}$. Par ailleurs, si l'on note

$$T = \exp(-\nu^{2k} T_{\alpha\beta})$$

où $T_{\alpha\beta}$ est l'opérateur introduit plus haut, alors pour tout u et tout v , et à l'ordre $2k+2$ près, on a l'égalité suivante:

$$u \star_\beta v = T^{-1}(T(u) \star_\alpha T(v)).$$

Ainsi,

$$D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) - T^{-1} \circ D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) \circ T$$

est une dérivation à l'ordre $2k+2$ près de $\star_\alpha$. Il existe donc une fonction $g_{\alpha\beta}^{2k}$ sur $U_{\alpha\beta}$ telle que

$$D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - D_\beta^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - (L_{\xi_{\alpha\beta}} T_{\alpha\beta} + 2k T_{\alpha\beta}) + \left[\sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) \right]_{2k} = \partial g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta})$$

si $\left[\sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r}) \right]_{2k}$ désigne la partie d'ordre $2k$ en ν de $\sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r} \phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r})$. Contrairement aux $f_{\alpha\beta}^{2r}$, la fonction $g_{\alpha\beta}^{2k}$ peut dépendre de $\xi_{\alpha\beta}$. Précisons cela. Si $\xi'_{\alpha\beta}$ est un autre champ conforme sur $U_{\alpha\beta}$, alors il existe une fonction f définie sur $U_{\alpha\beta}$ telle que $\xi'_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta} + H_f$. De plus, par définition,

$$D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) = D_\alpha^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) + C_{2k+1,\alpha}(f, \cdot)$$

et

$$D_{\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) = D_{\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) + C_{2k+1,\beta}(f, \cdot).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \partial g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) &= \partial g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta}) - (\partial T_{\alpha\beta})(f, \cdot) + \{f, T_{\alpha\beta}\} - T_{\alpha\beta}(\{f, \cdot\}) \\ &= \partial(g_{\alpha\beta}^{2k} + T_{\alpha\beta}(f)). \end{aligned}$$

On pourra donc choisir un champ tangentiel conforme $\xi_{\alpha\beta}$ sur $U_{\alpha\beta}$ et poser:

$$\bullet \quad g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) = g_{\alpha\beta}^{2k} + T_{\alpha\beta}(f) \quad \forall f \in C^{\infty}(U_{\alpha\beta}).$$

Maintenant, pour tout champ conforme $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ sur $U_{\alpha\beta\gamma}$, on a

$$(D_{\beta} - D_{\alpha})(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + (D_{\gamma} - D_{\beta})(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + (D_{\alpha} - D_{\gamma})(\xi_{\alpha\beta\gamma}) = 0.$$

Ainsi, pour $1 \leq i < k$, la fonction

$$f_{\alpha\beta}^{2i} + f_{\beta\gamma}^{2i} + f_{\gamma\alpha}^{2i}$$

est invariante sur $U_{\alpha\beta}$ et donc

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} T_{\alpha\beta\gamma} + 2k T_{\alpha\beta\gamma}) = \partial g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}),$$

où l'on a posé

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{2k} = g_{\alpha\beta}^{2k} + g_{\beta\gamma}^{2k} + g_{\gamma\alpha}^{2k}.$$

Mais on a vu précédemment que $T_{\alpha\beta\gamma} = \partial t_{\alpha\beta\gamma}$ et on a

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} \partial t_{\alpha\beta\gamma} + 2k \partial t_{\alpha\beta\gamma}) = -\partial(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} t_{\alpha\beta\gamma} + (2k - 1)t_{\alpha\beta\gamma}).$$

Considérons l'équation:

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} \varphi + (2k - 1)\varphi) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}).$$

Les équations de ce type admettent une unique solution, qui est invariante si le second membre l'est. Ainsi, si $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ est l'unique solution C^{∞} de l'équation

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} \varphi + (2k - 1)\varphi) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}),$$

on aura

$$\partial(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - t_{\alpha\beta\gamma}) + (2k - 1)(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - t_{\alpha\beta\gamma})) = 0,$$

soit encore

$$L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - t_{\alpha\beta\gamma}) + (2k - 1)(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - t_{\alpha\beta\gamma}) = c_{\alpha\beta\gamma},$$

où $c_{\alpha\beta\gamma}$ est invariante. La fonction $t_{\alpha\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\beta\gamma}$ est donc solution de l'équation en φ suivante

$$L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}(\varphi) + (2k-1)(\varphi) = c_{\alpha\beta\gamma}.$$

C'est donc la seule solution et elle est invariante. Il en résulte que:

$$\partial(t_{\alpha\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\beta\gamma}) = 0.$$

C'est-à-dire:

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}.$$

On vérifie en utilisant l'égalité * que $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ ne dépend pas du choix de $\xi_{\alpha\beta\gamma}$. D'autre part, par construction, on voit que la fonction $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ définie par:

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\beta\delta} + \varphi_{\alpha\gamma\delta} - \varphi_{\beta\gamma\delta}$$

est solution de l'équation:

$$L_{\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}}\varphi + (2k-1)\varphi = 0,$$

où $\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est un champ tangentiel conforme sur $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$. L'unique solution de cette équation étant la solution nulle, $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Mais alors, prenons une partition de l'unité $(\psi_\alpha)_\alpha$ de M subordonnée au recouvrement (U_α) , et posons:

$$s_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \psi_{\gamma} \varphi_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta}.$$

Par construction,

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} = s_{\alpha\beta} + s_{\beta\gamma} + s_{\gamma\alpha} \quad \text{sur } U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Donc, si on remplace $T_{\alpha\beta}$ par:

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \partial s_{\alpha\beta},$$

on obtient non seulement les relations:

$$\delta G_{\alpha\beta} = \delta T_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \partial G_{\alpha\beta} = \partial T_{\alpha\beta},$$

mais aussi

$$G_{\alpha\beta} + G_{\beta\gamma} + G_{\gamma\alpha} = 0.$$

Ceci nous suggère de définir, sur chaque U_α , l'opérateur

$$K_\alpha = \sum_{\gamma} G_{\alpha\gamma} \psi_{\gamma}.$$

On vérifie alors que $G_{\alpha\beta} = K_\alpha - K_\beta$ sur $U_{\alpha\beta}$. Par conséquent,

$$C_{2k,\alpha} - \delta K_\alpha = C_{2k,\beta} - \delta K_\beta,$$

$$C_{2k+1,\alpha} - \partial K_\alpha = C_{2k+1,\beta} - \partial K_\beta.$$

Si on note pour chaque U_α :

$$T'_\alpha = \exp(-\nu^{2k} K_\alpha)$$

et aussi

$$u \star'_\alpha v = T'^{-1}_\alpha (T'_\alpha(u) \star_\alpha T'_\alpha(v)) = \sum_{r \geq 0} C'_{r,\alpha}(u, v) \nu^r,$$

alors, pour tout α et β ,

$$C'_{r,\alpha} = C'_{r,\beta} \quad \forall r < 2k + 2.$$

Enfin, on obtient une dérivation tangentielle de $\star'_\alpha$ à l'ordre $2k+2$ près en posant:

$$D'_\alpha(\xi_\alpha) = T' \circ D_\alpha(\xi_\alpha) \circ T'^{-1}. \square$$

IV.5 Produits-star différentiels, tangentiels et gradués sur l'ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale (cas nilpotent).

Proposition IV.5.1

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$ et Ω l'ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale. Alors, il existe des produits-star locaux, tangentiels, gradués et différentiels sur Ω .

Preuve:

Soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement de Ω par des cartes de Weinstein $(U_\alpha, p_i^\alpha, q_j^\alpha, z_k^\alpha)$ homogènes comme celles construites dans la proposition IV.2.4. Dans chaque ouvert U_α , le produit-star de Moyal en les variables p_i^α, q_j^α est tangentiel et différentiel. Il est gradué par homogénéité des cartes. $\square$

Proposition IV.5.2

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension m et Ω l'ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale. Soit encore (U_α) un recouvrement de Ω par des cartes de Weinstein (homogènes). Il existe alors une partition de l'unité $(\psi_\alpha)_\alpha$ de Ω subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$ telle que chaque ψ_α soit homogène de degré 0.

Preuve:

Pour tout point $a = (a_i)$ de $\mathbb{R}^m$, nous noterons $\|a\|^2 = \sum a_i^2$. Nous noterons aussi

$$S^{m-1} = \{a = (a_i) \in \mathbb{R}^m : \|a\|^2 = 1\}.$$

Soit maintenant (x_i) un système de coordonnées de $\mathfrak{g}^*$. Dans ce système, tout point μ de Ω s'écrit $\mu = (\mu_i)$ et Ω s'identifie à un ouvert de $\mathbb{R}^m - \{0\}$ sur lequel $\mathbb{R}_+^*$ agit par dilatation. De plus, pour tout point μ de Ω , la fonction $t \rightarrow \|t \cdot \mu\|^2$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe donc un unique t_μ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $t_\mu \cdot \mu$ soit dans $\Omega \cap S^{m-1}$. On vérifie alors que pour tout réel $s > 0$, $t_{s\mu} = \frac{t_\mu}{s}$. Introduisons à présent une partition de l'unité $(\varphi_\alpha)_\alpha$ de $\Omega \cap S^{m-1}$ subordonnée au recouvrement $(U_\alpha \cap S^{m-1})_\alpha$. Posons alors

$$\psi_\alpha(\mu) = \varphi_\alpha(t_\mu \mu) \quad \forall \mu \in U_\alpha.$$

On obtient ainsi une partition de l'unité de Ω subordonnée à (U_α) . De plus, les ψ_α sont bien homogènes de degré 0 puisque pour tout réel $s > 0$ et pour tout point μ de Ω ,

$$\psi_\alpha(s\mu) = \varphi_\alpha(t_{s\mu}.s\mu) = \varphi_\alpha(t_\mu\mu) = \psi_\alpha(\mu). \square$$

La partition de l'unité construite ci-dessus va maintenant nous permettre de prouver l'existence d'un produit-star tangentiel et gradué sur Ω par recollement des produits-star locaux de la proposition IV.5.1. Malheureusement (mais ce n'est pas tellement surprenant), le caractère semi-algébrique des prolongements de Saint-Germain (étudié au début de ce chapitre) ne pourra pas être conservé après recollement.

Théorème IV.5.3

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et Ω la variété des orbites de dimension maximale dans le dual $\mathfrak{g}^$. Il existe alors un produit-star tangentiel, gradué et différentiel sur Ω .*

Preuve:

Il suffit de reprendre la preuve du théorème IV.4.1 pour la variété de Poisson régulière Ω et de faire les modifications suivantes:

- i) Prendre un recouvrement de Ω par des cartes de Weinstein homogènes du type de celles construites dans la proposition IV.2.4.
- ii) Choisir $A_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ homogènes de bon degré (*i.e.* de degré $-2k$).
- iii) Remarquer que par homogénéité de $T_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ est invariante. Donc que

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \partial\varphi_{\alpha\beta\gamma} = 0 = T_{\alpha\beta} + T_{\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha}.$$

- iv) Choisir une partition de l'unité (ψ_α) homogène, ce qui est possible d'après la proposition IV.5.2. Puis, prendre pour K_α l'opérateur suivant:

$$K_\alpha = \sum_{\gamma} T_{\alpha\gamma} \psi_\gamma.$$

Avec ces choix, l'opérateur K_α sera homogène de bon degré et il en sera de même pour les produits-star modifiés $\star'_\alpha$. $\square$

CHAPITRE V

Une approche cohomologique de la formalité de Kontsevich

En 1997, M. Kontsevich conjecture dans [Kon1] l'existence d'une formalité pour toute variété différentiable M , c'est-à-dire d'un $\mathcal{L}_\infty$ -morphisme particulier entre deux algèbres de Lie différentielles graduées naturellement attachées à M (celle des multichamps de vecteurs $T_{poly}(M)$ et celle des opérateurs différentiels $D_{poly}(M)$ sur M). Peu de temps après, il démontre sa conjecture dans [Kon2]. En conséquence de ce résultat, désormais connu sous le nom de théorème de formalité, il déduit l'existence d'un produit-star sur toute variété de Poisson répondant ainsi à une question qui a arrêté de nombreux auteurs pendant longtemps.

Plus précisément, Kontsevich construit d'abord dans [Kon2] une formalité explicite pour $\mathbb{R}^d$ à partir de graphes admissibles. Cette construction est aujourd'hui bien comprise (voir par exemple [AMM] pour une explication détaillée). Puis, il parvient à globaliser sa construction pour une variété quelconque en utilisant des arguments subtils de géométrie formelle.

Il serait intéressant de pouvoir donner une preuve moins abstraite et plus géométrique du recollement des formalités. Ce n'est bien sûr pas si simple. Une façon d'aborder cette question est de mettre en évidence et d'étudier les cohomologies les plus appropriées au problème d'existence (voire de classification) des formalités. Rappelons que la cohomologie de Hochschild des graphes de Kontsevich a été introduite pour la première fois dans [ABM] pour le cas des bons graphes liés aux structures de Poisson linéaires. Dans cet article, les auteurs calculent les premiers espaces de cette cohomologie. Ces calculs leur permettent d'obtenir une preuve très jolie du fait que, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ donnée, tous les produits-star de Kontsevich (*i.e.* tous ceux construits au moyen d'opérateurs "universels" obtenus à partir de graphes admissibles) sur $\mathfrak{g}^*$ sont équivalents (ce fait est aussi prouvé dans [Di2] d'une toute autre manière). Le calcul complet de la cohomologie de Hochschild pour tous les graphes et en toute dimension a été ensuite obtenu dans [AM]. Dans ce dernier article, les auteurs montrent comment cette cohomologie permet de réinterpréter l'équation de formalité pour $\mathbb{R}^d$.

En prolongement direct de [AM], D. Arnal, M. Masmoudi et moi-même avons défini et commencé à étudier une cohomologie de type Chevalley, naturellement associée à la formalité; une cohomologie qui nous a permis de localiser (un peu comme pour les produits-star) l'obstruction à l'existence des formalités. Dans ce chapitre, je propose de donner la preuve détaillée de cette localisation dans le cadre général d'une variété M quelconque.

Le plan du chapitre est le suivant. Dans la section 1, on définit la cohomologie de Chevalley des algèbres de Lie graduées. C'est la version graduée de la cohomologie classique des algèbres de Lie. Dans les sections 2 et 3, on revient rapidement sur la notion de formalité et sur la construction explicite de Kontsevich pour l'espace $\mathbb{R}^d$. Dans la section 4, on munit l'algèbre de Lie graduée $D_{poly}(M)$ d'une structure de $T_{poly}(M)$ -module gradué. Ceci sera utilisé dans la dernière section pour localiser l'existence des formalités.

V.1 Cohomologie de Chevalley graduée.

Pour tout espace gradué V et tout élément v de V , on notera $|v|$ le degré de v dans V et $\tilde{v}$ le degré de v dans le décalé $V[1]$ (i.e. $\tilde{v} = |v| - 1$). On notera aussi $V[n] = V[1]^n$, $S(V)$ l'algèbre symétrique graduée de V et $\Lambda(V)$ l'algèbre extérieure graduée de V . Ce qui signifie:

$$S(V) = T(V) / \langle x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x \rangle$$

$$\Lambda(V) = T(V) / \langle x \otimes y + (-1)^{|x||y|} y \otimes x \rangle,$$

si l'on note $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V . On rappelle que l'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $S^n(V[1])$ et $\Lambda^n(V)[n]$ [Kon2, AMM].

Par définition, une algèbre de Lie graduée est un espace vectoriel gradué $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$, muni d'une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ telle que:

- i) $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$
- ii) $[X, Y] = (-1)^{|X||Y|+1} [Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$
- iii) $(-1)^{|X||Z|} [[X, Y], Z] + (-1)^{|Y||X|} [[Y, Z], X] + (-1)^{|Z||Y|} [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie graduée et $\mathcal{M}$ un espace gradué. La graduation de $\mathcal{M}$ induit une graduation sur l'algèbre $End(\mathcal{M})$ des endomorphismes de $\mathcal{M}$. On a une structure naturelle d'algèbre de Lie graduée sur $End(\mathcal{M})$ donnée par le crochet

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f \quad \forall f, g \in End(\mathcal{M}).$$

On dira que $\mathcal{M}$ est un $\mathfrak{g}$ -module gradué s'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées w de $\mathfrak{g}$ dans $End(\mathcal{M})$ (on notera $w(\alpha)(m) = \alpha.m$, $\alpha \in \mathfrak{g}, m \in \mathcal{M}$), c'est-à-dire un homomorphisme de degré 0 de $\mathfrak{g}$ dans $End(\mathcal{M})$ tel que

$$[\alpha, \beta].m = \alpha.(\beta.m) - (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta.(\alpha.m) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}, \forall m \in \mathcal{M}.$$

Pour des raisons d'homogénéité, on préfère travailler dans le décalé $\mathfrak{g}[1]$. Au crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ de $\mathfrak{g}$, on associe donc l'application bilinéaire

$$[\cdot, \cdot]' : \mathfrak{g}[1] \times \mathfrak{g}[1] \rightarrow \mathfrak{g}[1],$$

de degré 1, définie par

$$[\alpha, \beta]' = (-1)^{|\alpha|(|\beta|-1)} [\alpha, \beta] = (-1)^{(\tilde{\alpha}+1)\tilde{\beta}} [\alpha, \beta] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}.$$

De même, on associe à un $\mathfrak{g}$ -module gradué $\mathcal{M}$ l'application bilinéaire

$$[,]_{\mathcal{M}} : \mathfrak{g}[1] \times \mathcal{M}[1] \rightarrow \mathcal{M}[1],$$

de degré 1, définie par

$$[\alpha, m]_{\mathcal{M}} = (-1)^{|\alpha|(|m|-1)} \alpha.m = (-1)^{(\tilde{\alpha}+1)\tilde{m}} \alpha.m \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}, \forall m \in \mathcal{M}.$$

La structure d'algèbre de Lie graduée pour $\mathfrak{g}$ et celle de module pour $\mathcal{M}$ se traduisent en termes de $[], ']$ et de $[],]_{\mathcal{M}}$ par les formules:

- $[\alpha, \beta]' = (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} [\beta, \alpha]' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}$
- (identité de Jacobi graduée)
- $(-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} [[\alpha, \beta]', \gamma]' + (-1)^{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}} [[\beta, \gamma]', \alpha]' + (-1)^{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} [[\gamma, \alpha]', \beta]' = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{g}$
- (propriété de module)
- $[[\alpha, \beta]', m]_{\mathcal{M}} + (-1)^{\tilde{\alpha}} [\alpha, [\beta, m]_{\mathcal{M}}]_{\mathcal{M}} +$
 $+ (-1)^{\tilde{\beta}(1+\tilde{\alpha})} [\beta, [\alpha, m]_{\mathcal{M}}]_{\mathcal{M}} = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}, \forall m \in \mathcal{M}.$

Finalement, on définit la cohomologie de Chevalley graduée de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans un $\mathfrak{g}$ -module gradué $\mathcal{M}$ de la façon suivante:

Les cochaînes sont les applications multilinéaires symétriques, c'est-à-dire les applications de $S^*(\mathfrak{g}[1])$ dans $\mathcal{M}[1]$. Le cobord d'une $(n-1)$ -cochaîne C est la n -cochaîne donnée par:

$$\begin{aligned} \partial C(\alpha_1 \dots \alpha_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tilde{C}\tilde{\alpha}_i} \epsilon_{\alpha}(i, 1 \dots \hat{i} \dots n) [\alpha_i, C(\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_n)]_{\mathcal{M}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (-1)^{\tilde{C}} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n) C([\alpha_i, \alpha_j]' . \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \dots \alpha_n), \end{aligned}$$

les α_i étant dans $\mathfrak{g}$ et $\tilde{C}$ désignant le degré de C . Ici et dans la suite, pour toute partition (I, J) de $\{1, \dots, n\}$, on désigne par $\epsilon_{\alpha}(I, J)$ la signature de la permutation-battement (I, J) sachant que l'on a

$$\alpha_1 . \alpha_2 = (-1)^{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2} \alpha_2 . \alpha_1$$

pour tout élément α_1 (resp. α_2) de $\mathfrak{g}$ de degré $\tilde{\alpha}_1$ (resp. $\tilde{\alpha}_2$) dans $\mathfrak{g}[1]$. Par exemple,

$$\epsilon_{\alpha}(i, 1 \dots \hat{i} \dots n) = (-1)^{\tilde{\alpha}_i(\tilde{\alpha}_{i-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1)}.$$

Notons que le cobord ∂C de C est de degré $\tilde{\partial C} = \tilde{C} + 1$. Vérifions maintenant que ∂ est bien un opérateur de cohomologie:

Lemme V.1.1

On a $\partial^2 = \partial \circ \partial = 0$.

Preuve:

$$\begin{aligned} \partial^2 C(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{\tilde{C} \tilde{\alpha}_i} \epsilon_{\alpha}(i, 1 \dots \hat{i} \dots n+1) [\alpha_i, \partial C(\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\ &\quad - \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) (-1)^{\tilde{C}} \partial C([\alpha_i, \alpha_j]' \cdot \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

Ecrivons cette expression sous la forme d'une somme de deux termes

$$\partial^2 C = (I) - (II).$$

Détaillons le premier terme:

$$\begin{aligned} (I) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(\tilde{C}+1)\tilde{\alpha}_i} \epsilon_{\alpha}(i, 1 \dots \hat{i} \dots n+1) \sum_{i \neq j} (-1)^{\tilde{C} \tilde{\alpha}_j} \epsilon_{\alpha'}(j, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) \\ &\quad [\alpha_i, [\alpha_j, C(\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}}]_{\mathcal{M}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(\tilde{C}+1)\tilde{\alpha}_i} \epsilon_{\alpha}(i, 1 \dots \hat{i} \dots n+1) \sum_{\substack{k < l \\ k \neq i, l \neq i}} \epsilon_{\alpha'}(kl, 1 \dots \hat{i} \hat{k} \hat{l} \dots n+1) (-1)^{\tilde{C}} \\ &\quad [\alpha_i, C([\alpha_k, \alpha_l]' \cdot \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_l \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\ &= (I_1) - (I_2), \end{aligned}$$

où l'on a noté pour simplifier $\epsilon_{\alpha'}$ à la place de $\epsilon_{\alpha \setminus \{\alpha_i\}}$.

Quant au second terme, on a:

$$\begin{aligned} (II) &= \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) (-1)^{\tilde{C}+1} \sum_{\substack{0 \leq l \leq n+1 \\ l \neq i, j}} (-1)^{\tilde{C} \tilde{\alpha}_l} \epsilon_{\alpha''}(l, 01 \dots \hat{i} \hat{j} \hat{l} \dots n+1) \\ &\quad [\alpha_l, C(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_l \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) \sum_{\substack{0 \leq u < v \\ u, v \neq 0, i, j}} \epsilon_{\alpha''}(uv, 01 \dots \hat{u} \hat{v} \hat{i} \hat{j} \dots n+1) \\ &\quad C([\alpha_u, \alpha_v]' \cdot \alpha_0 \dots \hat{\alpha}_u \hat{\alpha}_v \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

Ici, on a noté $\alpha_0 = [\alpha_i, \alpha_j]'$ et $\epsilon_{\alpha''}$ signifie $\epsilon_{(\alpha \cup \{\alpha_0\}) \setminus \{\alpha_i, \alpha_j\}}$.

En conservant les notations ci-dessus et en précisant la place de α_0 , on trouve

$$\begin{aligned} (II) &= \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{C}+1)+\tilde{C}(\tilde{\alpha}_i+\tilde{\alpha}_j+1)} \\ &\quad [[\alpha_i, \alpha_j]', C(\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{C}+1)+\tilde{\alpha}_l \tilde{C}} \sum_{l \neq 0, i, j} \epsilon_{\alpha''}(l, 01 \dots \hat{i} \hat{j} \hat{l} \dots n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\alpha_l, C([\alpha_i, \alpha_j]' \dots \alpha_i \widehat{\alpha_j} \alpha_l \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\
& + \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) \sum_{v \neq i, j} \epsilon_{\alpha''}(0, v, 1 \dots \widehat{v} \widehat{ij} \dots n+1) \\
& \quad C([\alpha_i, \alpha_j]', \alpha_v)' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_j} \alpha_v \dots \alpha_{n+1}) \\
& + \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) \sum_{\substack{u < v \\ u, v \neq 0, i, j}} \epsilon_{\alpha''}(u, v, 0, 1 \dots \widehat{uv} \widehat{ij} \dots n+1) \\
& \quad C([\alpha_u, \alpha_v]' \cdot [\alpha_i, \alpha_j]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_u \widehat{\alpha_v} \alpha_i \alpha_j \dots \alpha_{n+1}) \\
& = (II_1) + (II_2) + (II_3) + (II_4).
\end{aligned}$$

Montrons que $(I_1) - (II_1) = 0$:

$$\begin{aligned}
& (I_1) - (II_1) = \\
& = \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) (-1)^{\tilde{C}(\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j) + \tilde{\alpha}_i} [\alpha_i, [\alpha_j, C(\alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}}]_{\mathcal{M}} \\
& + \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ji, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) (-1)^{\tilde{C}(\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j) + \tilde{\alpha}_j} [\alpha_j, [\alpha_i, C(\alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}}]_{\mathcal{M}} \\
& + \sum_{i < j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) (-1)^{\tilde{C}(\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j)} [[\alpha_i, \alpha_j]', C(\alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Cette somme est nulle d'après la propriété de module de $\mathcal{M}$.

Montrons que $(I_2) + (II_2) = 0$:

$$\begin{aligned}
(II_2) & = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{k < l \\ k, l \neq i}} (-1)^{(\tilde{C}+1) + \tilde{\alpha}_i \tilde{C}} \epsilon_{\alpha}(kl, 1 \dots \widehat{kl} \dots n+1) \epsilon_{\alpha''}(i, 0, 1 \dots \widehat{kli} \dots n+1) \\
& \quad [\alpha_i, C([\alpha_k, \alpha_l]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_k} \alpha_l \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{k < l \\ k, l \neq i}} (-1)^{(\tilde{C}+1) + \tilde{\alpha}_i \tilde{C}} \epsilon_{\alpha}(kl, 1 \dots \widehat{kl} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{\alpha}_k + \tilde{\alpha}_l + 1) \tilde{\alpha}_i} \\
& \quad \epsilon_{\alpha''}(0, i, 1 \dots \widehat{kli} \dots n+1) [\alpha_i, C([\alpha_k, \alpha_l]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_k} \alpha_l \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\
& = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{k < l \\ k, l \neq i}} (-1)^{(\tilde{C}+1) + \tilde{\alpha}_i \tilde{C} + \tilde{\alpha}_i} \epsilon_{\alpha}(kli, 1 \dots \widehat{ikl} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{\alpha}_k + \tilde{\alpha}_l) \tilde{\alpha}_i} \\
& \quad [\alpha_i, C([\alpha_k, \alpha_l]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_k} \alpha_l \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\
& = - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{k < l \\ k, l \neq i}} (-1)^{(\tilde{C}+1) \tilde{\alpha}_i + \tilde{C}} \epsilon_{\alpha}(ikl, 1 \dots \widehat{ikl} \dots n+1) \\
& \quad [\alpha_i, C([\alpha_k, \alpha_l]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_k} \alpha_l \dots \alpha_{n+1})]_{\mathcal{M}} \\
& = - (I_2).
\end{aligned}$$

Considérons à présent le terme (II_3) . Fixons trois indices distincts r, s, t (on suppose que $r < s < t$). Les termes qui leur correspondent dans (II_3) ont pour somme

$$\begin{aligned} S = & \epsilon_\alpha(rs, 1 \dots \widehat{rs} \dots n+1) \epsilon_{\alpha''}(0, t1 \dots \widehat{rst} \dots n+1) \\ & C([\alpha_r, \alpha_s]', \alpha_t]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_r \widehat{\alpha_s} \alpha_t \dots \alpha_{n+1}) + \\ & + \epsilon_\alpha(rt, 1 \dots \widehat{rt} \dots n+1) \epsilon_{\alpha''}(0, s1 \dots \widehat{rst} \dots n+1) \\ & C([\alpha_r, \alpha_t]', \alpha_s]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_r \widehat{\alpha_s} \alpha_t \dots \alpha_{n+1}) + \\ & + \epsilon_\alpha(st, 1 \dots \widehat{st} \dots n+1) \epsilon_{\alpha''}(0, r1 \dots \widehat{rst} \dots n+1) \\ & C([\alpha_s, \alpha_t]', \alpha_r]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_r \widehat{\alpha_s} \alpha_t \dots \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

Comme $S = 0$ par l'identité de Jacobi graduée de $[\cdot, \cdot]'$, ces termes ont une contribution nulle dans (II_3) . Cela étant vrai pour tout triplet d'indices (r, s, t) , on a prouvé que $(II_3) = 0$.

Il reste à montrer que $(II_4) = 0$:

$$\begin{aligned} (II_4) = & \sum_{i < j} \epsilon_\alpha(ij, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) \sum_{\substack{u < v \\ u, v \neq 0, i, j}} \epsilon_{\alpha''}(u, v, 0, 1 \dots \widehat{uvij} \dots n+1) \\ & C([\alpha_u, \alpha_v]' \cdot [\alpha_i, \alpha_j]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_u \widehat{\alpha_v} \alpha_i \alpha_j \dots \alpha_{n+1}) \\ = & \sum_{\substack{i < j \\ u < v}} \epsilon_\alpha(ij uv, 1 \dots \widehat{ij uv} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j + 1)(\tilde{\alpha}_u + \tilde{\alpha}_v)} \\ & C([\alpha_u, \alpha_v]' \cdot [\alpha_i, \alpha_j]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_u \widehat{\alpha_v} \alpha_i \alpha_j \dots \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

En permutant $[\alpha_u, \alpha_v]'$ et $[\alpha_i, \alpha_j]'$, on obtient:

$$\begin{aligned} (II_4) = & \sum_{\substack{i < j \\ u < v}} \epsilon_\alpha(ij uv, 1 \dots \widehat{ij uv} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j + 1)} \\ & C([\alpha_i, \alpha_j]' \cdot [\alpha_u, \alpha_v]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_j} \alpha_u \alpha_v \dots \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

Puis en passant de la permutation $(ij uv, 1 \dots \widehat{ij uv} \dots n+1)$ à $(uvij, 1 \dots \widehat{uvij} \dots n+1)$,

$$\begin{aligned} (II_4) = & - \sum_{\substack{i < j \\ u < v}} \epsilon_\alpha(uvij, 1 \dots \widehat{uvij} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{\alpha}_u + \tilde{\alpha}_v + 1)(\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j)} \\ & C([\alpha_i, \alpha_j]' \cdot [\alpha_u, \alpha_v]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_i \widehat{\alpha_j} \alpha_u \alpha_v \dots \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

Enfin, en échangeant les noms des indices i, j et u, v ,

$$\begin{aligned} (II_4) = & - \sum_{\substack{i < j \\ u < v}} \epsilon_\alpha(ij uv, 1 \dots \widehat{ij uv} \dots n+1) (-1)^{(\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j + 1)(\tilde{\alpha}_u + \tilde{\alpha}_v)} \\ & C([\alpha_u, \alpha_v]' \cdot [\alpha_i, \alpha_j]' \cdot \alpha_1 \dots \alpha_u \widehat{\alpha_v} \alpha_i \alpha_j \dots \alpha_{n+1}) = \\ = & - (II_4). \end{aligned}$$

Par suite, $(II_4) = 0$ et finalement $\partial^2 C = 0$. $\square$

V.2 La notion de formalité.

a) Les algèbres de Lie différentielles graduées T_{poly} et D_{poly} .

Une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g}$ est dite différentielle si elle est munie d'une différentielle d ($d^2 = 0$) de degré 1 qui est une dérivation de degré 1 de $\mathfrak{g}$:

$$d[a, b] = [da, b] + (-1)^{1 \cdot |a|} [a, db] \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

Soit M une variété différentiable. On associe à M deux algèbres de Lie différentielles graduées: l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = T_{poly}(M)$ des multichamps de vecteurs et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2 = D_{poly}(M)$ des opérateurs multidifférentiels sur M . Décrivons-les rapidement.

Dans $\mathfrak{g}_1$, un k -tenseur α est de degré $|\alpha| = k - 1$, il est de degré $\tilde{\alpha} = k - 2$ dans le décalé $\mathfrak{g}_1[1]$. La structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_1$ est donnée par le crochet de Schouten. La différentielle considérée sur $\mathfrak{g}_1$ est la différentielle nulle.

Dans $\mathfrak{g}_2$, un opérateur m -différentiel D est de degré $|D| = m - 1$, il est de degré $\tilde{D} = m - 2$ dans le décalé $\mathfrak{g}_2[1]$. La structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_2$ est donnée par le crochet de Gerstenhaber $[\cdot, \cdot]_G$. On rappelle que si D_1 est un opérateur m_1 -différentiel et D_2 un opérateur m_2 -différentiel,

$$[D_1, D_2]_G = D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1$$

où

$$\begin{aligned} D_1 \circ D_2(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) = \\ \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} D_1(f_1, \dots, f_{j-1}, D_2(f_j, \dots, f_{j+m_2-1}), f_{j+m_2}, \dots, f_{m_1+m_2-1}). \end{aligned}$$

Enfin, la différentielle d que l'on met sur $\mathfrak{g}_2$ est définie par

$$dA = -[\mu, A]_G = (-1)^{|A|} \delta A \quad \forall A \in \mathfrak{g}_2,$$

où μ désigne la multiplication usuelle des fonctions et δ le cobord de Hochschild.

b) L_∞ -algèbres et formalité.

Soit V un espace gradué. Suivant [Kon2], on associe à V la cogèbre colibre cocommutative sans co-unité générée par V :

$$\mathcal{C}(V) = S^+(V[1]) = \bigoplus_{n \geq 1} S^n(V[1]).$$

On appelle L_∞ -algèbre un couple (V, Q) où V est un espace gradué et Q une codérivation de la cogèbre $\mathcal{C}(V)$ (si on note Δ la comultiplication de $\mathcal{C}(V)$, cela signifie:

$$\Delta Q = (Q \otimes Id) \Delta + (Id \otimes Q) \Delta \quad)$$

de degré 1 et de carré nul:

$$[Q, Q] = 0 = 2Q^2.$$

Un L_∞ -morphisme entre deux L_∞ -algèbres (V_1, Q) et (V_2, Q') est un morphisme de cogèbres

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(V_1) \rightarrow \mathcal{C}(V_2)$$

tel que

$$\mathcal{F}Q = Q'\mathcal{F}.$$

Par propriété universelle des cogèbres cocommutatives colibres, une codérivation

$$Q : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$$

est entièrement déterminée par sa composition avec la projection sur $V[1]$; c'est-à-dire par une suite d'applications $Q_n : S^n(V[1]) \rightarrow V[1]$, que l'on appelle les *coefficients de Taylor* de Q .

Notons que la condition $Q^2 = 0$ se traduit par une infinité de relations quadratiques en les Q_i . La première de ces relations dit que $Q_1^2 = 0$ donc que (V, Q_1) est un complexe de cohomologie. La seconde exprime le fait que Q_2 est une forme bilinéaire sur V compatible avec Q_1 relativement à la règle de Leibniz. La troisième signifie que Q_2 satisfait l'identité de Jacobi à un terme homotopique près donné par Q_3 ...

De même, un morphisme de cogèbres

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(V_1) \rightarrow \mathcal{C}(V_2)$$

est entièrement déterminé par sa composition avec la projection sur $V_2[1]$; c'est-à-dire par une suite d'applications $\mathcal{F}_n : S^n(V_1[1]) \rightarrow V_2[1]$, appelées les coefficients de Taylor de $\mathcal{F}$.

Le fait qu'une application $\mathcal{F}$ soit un L_∞ -morphisme entre deux L_∞ -algèbres (V, Q) et (V, Q') se traduit par une infinité de relations entre les coefficients de Taylor de Q , Q' et $\mathcal{F}$. La première de ces relations affirme que $\mathcal{F}_1$ est un morphisme de complexes entre (V, Q_1) et (V, Q'_1) .

Il est important de remarquer que toute algèbre de Lie différentielle graduée est une L_∞ -algèbre dont les coefficients de Taylor Q_i de la codérivation Q sont nuls pour $i \geq 3$. De plus, on a la

Proposition V.2.1 [Kon2, AMM]

Soient $(V, [,], d)$ et $(V', [,], d')$ deux algèbres de Lie différentielles graduées. Notons (V, Q) et (V', Q') les L_∞ -algèbres correspondantes. Soit maintenant $\mathcal{F}$ un morphisme de cogèbres de $\mathcal{C}(V)$ dans $\mathcal{C}(V')$. Alors, $\mathcal{F}$ est un L_∞ -morphisme si et seulement si les coefficients de Taylor $\mathcal{F}_n$ ($n \geq 1$) vérifient l'équation de L_∞ -morphisme:

$$\begin{aligned} Q'_1 \mathcal{F}_n(\alpha_1 \dots \alpha_n) + \frac{1}{2} \sum_{I \cup J = \{1, \dots, n\}, |I| \neq 0, |J| \neq 0} \epsilon_\alpha(I, J) Q'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) = \\ = \sum_{k=1}^n \epsilon_\alpha(k, 1, \dots, \hat{k}, \dots, n) \mathcal{F}_n(Q_1(\alpha_k) \cdot \dots \cdot \hat{\alpha}_k \cdot \dots \cdot \alpha_n) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \epsilon_\alpha(kl, 1, \dots, \hat{k}l, \dots, n) \mathcal{F}_{n-1}(Q_2(\alpha_k \cdot \alpha_l) \cdot \dots \cdot \hat{\alpha}_k \alpha_l \cdot \dots \cdot \alpha_n), \end{aligned}$$

où $|I|$ désigne le nombre d'éléments de I et $\epsilon_\alpha(I, J)$ désigne le signe associé à la permutation-battement correspondant à la partition (I, J) de $\{1, \dots, n\}$ (comme au paragraphe V.1).

Enfin, on appelle L_∞ -quasi-isomorphisme entre deux L_∞ -algèbres (V_1, Q) et (V_2, Q') un L_∞ -morphisme qui est un quasi-isomorphisme de complexes (i.e. un morphisme de complexes induisant un isomorphisme en cohomologie) entre les complexes (V_1, Q_1) et (V_2, Q'_1) .

Les structures de L_∞ -algèbres sur $\mathfrak{g}_1 = T_{poly}(M)$ et $\mathfrak{g}_2 = D_{poly}(M)$ ont été décrites dans [Kon2] (voir aussi [AMM]). On les rappelle ici. Si α_1 est un k_1 -tenseur et α_2 un k_2 -tenseur alors :

$$Q_1(\alpha_1) = 0 \quad \text{et} \quad Q_2(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = (-1)^{(k_1-1)k_2} [\alpha_1, \alpha_2]_S,$$

le dernier crochet étant le crochet de Schouten. Et, si A_1 est un opérateur m_1 -différentiel et A_2 un opérateur m_2 -différentiel, alors

$$Q'_1(A_1) = -\delta(A_1), \quad \text{et} \quad Q'_2(A_1 \cdot A_2) = (-1)^{(m_1-1)m_2} [A_1, A_2]_G.$$

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme V.2.2 [HKR, Vey]

Soit M une variété différentiable. On note encore $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2$) l'algèbre de Lie différentielle graduée des multichamps de vecteurs (resp. des opérateurs multidifférentiels) sur M . Alors, l'application $\mathcal{F}_1^{(0)} : \mathfrak{g}_1([1]) \rightarrow \mathfrak{g}_2([1])$ définie par

$$\mathcal{F}_1^{(0)}(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n)(f_1, \dots, f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \xi_{\sigma(i)}(f_i),$$

où Σ_n désigne le groupe de permutations de $\{1, \dots, n\}$, les ξ_k sont des champs de vecteurs et les f_i des fonctions sur M , est un quasi-isomorphisme entre les complexes $(\mathfrak{g}_1, d = 0)$ et $(\mathfrak{g}_2, d = \delta)$.

Remarque V.2.3

L'application $\mathcal{F}_1^{(0)}$ du lemme précédent permet d'identifier la cohomologie $H(\mathfrak{g}_2)$ du complexe $(\mathfrak{g}_2, \delta)$ à $\mathfrak{g}_1$. Plus précisément, si D est un m -cocycle de Hochschild, on peut écrire

$$D = aD + \delta R$$

où R est une $m - 1$ -cochaîne de Hochschild et aD désigne l'antisymétrisé de D :

$$aD(f_1, \dots, f_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \epsilon(\sigma) D(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(m)}).$$

Comme aD est un opérateur différentiel d'ordre 1 en chaque argument, il peut être identifié à l'unique élément α de $\mathfrak{g}_1$ tel que

$$\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha) = aD.$$

On se servira de cette identification dans la suite.

Le théorème de formalité* de Kontsevich affirme que $\mathfrak{g}_2$ est quasi-isomorphe à sa cohomologie $H(\mathfrak{g}_2)$ identifiée à $\mathfrak{g}_1$. Ce théorème s'énonce comme suit:

Théorème V.2.4 [Kon2]

Il existe un L_∞ -quasi-isomorphisme $\mathcal{F}$ (appelé formalité) entre $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$, ayant pour premier terme $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{(0)}$.

Pour une formalité, i.e. pour un L_∞ -quasi-isomorphisme entre $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$, l'équation de L_∞ -morphisme régissant la condition de L_∞ -morphisme (au sens de la proposition V.2.1) s'appelle équation de formalité.

Remarque V.2.5

Nous avons choisi ici de présenter la notion de formalité en termes algébriques. Dans le langage géométrique, elle se traduit comme suit. Intuitivement, la cogèbre $\mathcal{C}(V)$ associée à un espace gradué V peut-être vue comme une variété formelle avec un point base. Une codérivation Q de $\mathcal{C}(V)$ correspond alors à un champ de vecteurs sur cette variété formelle. Dans ce contexte, une L_∞ -algèbre est appelée Q -variété, un L_∞ -morphisme $\mathcal{F}$ entre deux L_∞ -algèbres correspond à une application entre deux variétés; et $\mathcal{F}Q = Q'\mathcal{F}$ se traduit par le fait que les champs de vecteurs Q et Q' sont $\mathcal{F}$ -reliés.

c) Le lien avec la quantification par déformation.

Une formalité $\mathcal{F}$ entre $\mathfrak{g}_1 = T_{poly}(M)$ et $\mathfrak{g}_2 = D_{poly}(M)$ comme ci-dessus donne pour toute solution Λ dans $T_{poly}(M)$ de l'équation de Maurer Cartan:

$$2d\Lambda + [\Lambda, \Lambda]_S = [\Lambda, \Lambda]_S = 0,$$

une solution $C = \sum_{n \geq 1} \frac{\nu^n}{n!} \mathcal{F}_n(\Lambda \dots \Lambda)$ dans $D_{poly}(M)$ de l'équation de Maurer Cartan:

$$2\delta C + [C, C]_G = 0.$$

Ainsi, la donnée d'une formalité $\mathcal{F}$ permet d'associer à tout tenseur de Poisson Λ de M , un produit-star $\star$ (appelé produit-star de Kontsevich) défini par $\star = \mu + C$ si μ désigne la multiplication usuelle de $C^\infty(M)$. Dans la suite, on ajoutera à toute formalité $\mathcal{F}$ le coefficient $\mathcal{F}_0 = \mu$, et par abus de notation on posera $\mathcal{F} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$.

Remarque V.2.6

Dans le cas où M est l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de la structure de Poisson Λ constante, le produit-star de Kontsevich coïncide avec le produit-star de Moyal. Et, si $M = \mathbb{R}^d$ est muni d'une

* Le terme de formalité est emprunté au langage homotopique, un langage qui qualifie de formelle une algèbre de Lie différentielle graduée quasi-isomorphe à sa cohomologie munie de la différentielle nulle.

structure de Poisson linéaire (*i.e.* si M correspond au dual d'une algèbre de Lie), alors le produit-star de Kontsevich diffère généralement du produit-star de Gutt.

V.3 La formalité explicite pour l'espace $\mathbb{R}^d$.

Dans [Kon2], Kontsevich construit une formalité explicite pour $\mathbb{R}^d$ à partir de graphes admissibles. Rappelons rapidement cette construction.

Pour définir un graphe Γ , on se donne des sommets et des arêtes. Les sommets sont de deux types: les sommets aériens sont des points $p_1, \dots, p_n$ du demi-plan de Poincaré:

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\};$$

les sommets terrestres sont des points $q_1, \dots, q_m$ de la droite réelle. Les arêtes sont des flèches $\overrightarrow{ab}$ partant d'un sommet aérien (la source) et arrivant sur un sommet aérien ou terrestre (le but). Un tel graphe est admissible s'il n'a ni flèches multiples ni boucles (*i.e.* la source et le but d'une flèche doivent être différents). Il est dit orienté si l'on a mis un ordre total sur les flèches. On note dorénavant $G_{n,m}$ l'ensemble des graphes admissibles orientés à n sommets aériens et m sommets terrestres.

Voici un exemple de graphe à trois sommets aériens et deux sommets terrestres:

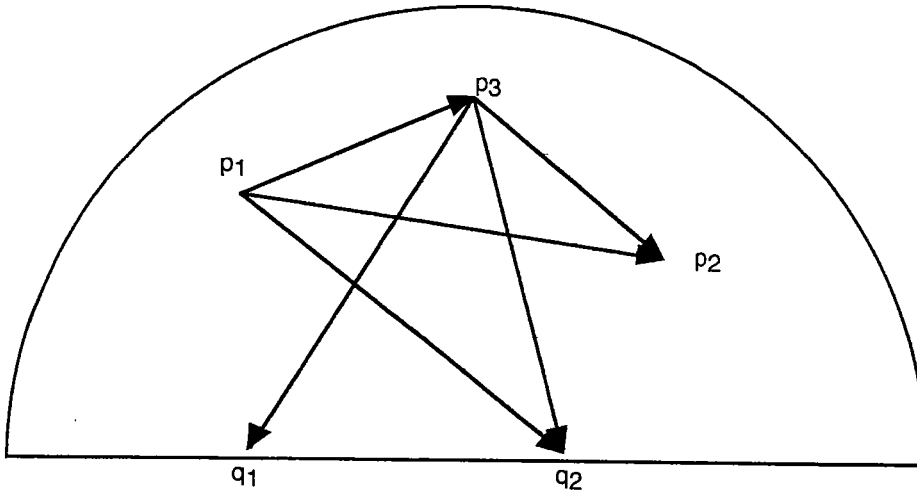


Figure 2: un graphe admissible.

Pour reproduire ici la formule explicite de la formalité pour $\mathbb{R}^d$, on choisit d'employer les notations de [AM, AMM, MT]. Pour un graphe Γ de $G_{n,m}$, on note $p_1, \dots, p_n$ ses sommets aériens et $q_1, \dots, q_m$ ses sommets terrestres. On suppose que les sommets et les flèches de Γ soient énumérés de façon compatible avec l'orientation de Γ : les flèches partant d'un sommet aérien p_j ont les numéros $k_1 + \dots + k_{j-1} + 1, \dots, k_1 + \dots + k_j$. L'ensemble de ces flèches est noté $Deb(p_j)$, il est de cardinal k_j . On note aussi $Fin(b)$ l'ensemble des flèches arrivant sur un sommet b (aérien ou terrestre) et g_b son cardinal. Soit maintenant $K = \sum_{i=1}^n k_i$ le nombre total des flèches du graphe Γ . Alors, Γ permet de définir une application

$$B_\Gamma : S^n(T_{poly}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow D_{poly}(\mathbb{R}^d)$$

qui à tout n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de tenseurs contravariants totalement antisymétriques associe l'opérateur m -différentiel défini comme suit:

$$B_\Gamma(\alpha_1 \dots \alpha_n)(f_1, \dots, f_m) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_K \leq d} \prod_{j=1}^n \partial_{Fin(p_j)} \alpha_j^{Deb(p_j)} \partial_{Fin(q_1)}(f_1) \dots \partial_{Fin(q_m)}(f_m),$$

les f_i étant des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^d$, si les α_i sont des k_i -tenseurs, et l'opérateur nul sinon. Dans l'expression ci-dessus, on a posé:

$$\begin{aligned} \alpha_j^{Deb(p_j)} &= \alpha_j^{i_{k_1+\dots+k_{j-1}+1} \dots i_{k_1+\dots+k_j}} \\ \partial_{Fin(b)} &= \partial_{i_{s_1} \dots i_{s_{g_b}}} \quad \text{si} \quad Fin(b) = \{s_1, \dots, s_{g_b}\}. \end{aligned}$$

Par exemple, si l'on munit le graphe Γ de la figure 2 de l'ordre suivant:

$$\overrightarrow{p_1 p_2} < \overrightarrow{p_1 p_3} < \overrightarrow{p_1 q_2} < \overrightarrow{p_3 p_2} < \overrightarrow{p_3 q_1} < \overrightarrow{p_3 q_2},$$

alors

$$B_\Gamma(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3)(f_1, f_2) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_6 \leq d} \alpha_1^{i_1 i_2 i_3} \partial_{i_1 i_4} \alpha_2 \partial_{i_2} \alpha_3^{i_4 i_5 i_6} \partial_{i_5}(f_1) \partial_{i_3 i_6}(f_2),$$

pour tout tenseur α_1, α_2 et α_3 d'ordre 3, 0, 3 respectivement et pour toute fonction f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}^d$.

Maintenant, la formalité explicite $\mathcal{U}$ de Kontsevich est uniquement déterminée par ses coefficients de Taylor:

$$\mathcal{U}_n : S^n(T_{poly}(\mathbb{R}^d)[1]) \rightarrow D_{poly}(\mathbb{R}^d)[1].$$

Par définition, les $\mathcal{U}_n$ sont homogènes de degré 0: si les α_i sont des k_i -tenseurs, alors

$$\mathcal{U}_n(\widetilde{\alpha_1 \dots \alpha_n}) = \tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n = \sum_{i=1}^n (k_i - 2).$$

Autrement dit, $\mathcal{U}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un opérateur m -différentiel avec

$$m - 2 = \sum_{i=1}^n k_i - 2n.$$

Les coefficients de Taylor de la formalité sont définis comme suit:

$$\mathcal{U}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} W_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

où le coefficient W_Γ associé à un graphe Γ de $G_{n,m}$ est un nombre réel nul sauf si le nombre de flèches de Γ est exactement égal à $2n + m - 2$. Il s'obtient en intégrant une forme fermée ω_Γ de degré $2n + m - 2$ sur une composante connexe de la compactification de Fulton-MacPherson [FM] d'un espace de configuration qui est précisément de dimension $2n + m - 2$. Pour être complet, notons, pour $2n + m - 2 \geq 0$, $Conf_{n,m}$ l'espace

$$Conf_{n,m} = \{(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_m) \in \mathcal{H}^n \times \mathbb{R}^m : p_i \neq p_j, \text{ si } i \neq j; q_k \neq q_l, \text{ si } k \neq l\}.$$

Le groupe des transformations affines:

$$G^{(1)} = \{z \mapsto az + b : a \in \mathbb{R}_{>0}, b \in \mathbb{R}\}$$

agit sur $Conf_{n,m}$ librement. L'espace quotient

$$C_{n,m} = Conf_{n,m} / G^{(1)}$$

est donc une variété de dimension $2n + m - 2$. Cette variété est non connexe, on note $C_{n,m}^+$ la composante connexe relative au cas où les points terrestres sont rangés dans l'ordre croissant (*i.e.* $q_1 < \dots < q_m$).

On note $\overline{C_{n,m}^+}$ la compactification de Fulton-MacPherson de $C_{n,m}^+$, telle qu'elle est décrite dans [Kon2] ou [AMM].

On note encore

$$Deb(p_j) = \{\overrightarrow{p_j a_1}, \dots, \overrightarrow{p_j a_{k_j}}\} \quad \overrightarrow{v}_{k_1 + \dots + k_{j-1} + i} = \overrightarrow{p_j a_i}.$$

Alors, par définition, W_Γ est:

$$W_\Gamma = \int_{\overline{C_{n,m}^+}} \omega_\Gamma$$

où

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{2\pi \sum k_i k_1! \dots k_n!} d\Phi_{\overrightarrow{v}_1} \wedge \dots \wedge \Phi_{\overrightarrow{v}_{k_1 + \dots + k_n}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\overrightarrow{p_j a}} = Arg\left(\frac{a - p_j}{a - \overline{p_j}}\right).$$

Comme B_Γ , W_Γ dépend de l'ordre des flèches de Γ ; mais le produit $W_\Gamma B_\Gamma$ n'en dépend plus.

La preuve du fait que les $\mathcal{U}_n$ vérifient bien l'équation de formalité s'obtient par application du théorème de Stokes pour les formes fermées ω_Λ et pour les variétés à coins $\overline{C_{n,m}^+}$.

V.4 L'algèbre de Lie graduée D_{poly} vue comme T_{poly} -module.

Dans ce paragraphe, M désigne une variété différentiable. On note encore $\mathfrak{g}_1 = T_{poly}(M)$ l'algèbre de Lie différentielle graduée des multichamps de vecteurs et $\mathfrak{g}_2$ celle des opérateurs multidifférentiels sur M . Nous proposons maintenant de montrer que l'existence d'une formalité entre $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ est bien décrite par la cohomologie de Chevalley graduée de $\mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $\mathfrak{g}_1$, vu comme module sur lui-même. On écrira le cobord d'une application $\varphi : S^{n-1}(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \mathfrak{g}_1[1]$ en faisant apparaître la codérivation Q comme suit :

$$\begin{aligned} \partial\varphi(\alpha_1 \dots \alpha_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tilde{\varphi}\tilde{\alpha}_i} \epsilon_\alpha(i, 1 \dots \widehat{i} \dots n) Q_2(\alpha_i \cdot \varphi(\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_n)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \epsilon_\alpha(ij, 1 \dots \widehat{i} \widehat{j} \dots n) (-1)^{\tilde{\varphi}} \varphi(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_1 \dots \widehat{\alpha_i} \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_n), \end{aligned}$$

les α_i étant des multichamps de vecteurs sur la variété M .

Par ailleurs, on peut définir une action de $\mathfrak{g}_1$ sur $\mathfrak{g}_2$ en posant :

$$\alpha \cdot D = a[\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha), D]_G \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}_1, \forall D \in \mathfrak{g}_2,$$

où $a[\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha), D]_G$ désigne l'antisymétrisation de l'opérateur $[\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha), D]_G$. Cette action définit une structure de $\mathfrak{g}_1$ -module gradué sur $\mathfrak{g}_2$, comme le prouve la

Proposition V.4.1

On note encore $[\cdot]_S$ le crochet de Schouten et $[\cdot]_G$ celui de Gerstenhaber. On désigne encore par a l'antisymétrisation des opérateurs et par $\mathcal{F}_1^{(0)}$ l'injection de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$ définie plus haut. Alors, on a les égalités :

$$\begin{aligned} (i) \quad & a[D_1, D_2]_G = a[D_1, aD_2]_G \quad \forall D_1, D_2 \in \mathfrak{g}_2; \\ (ii) \quad & \mathcal{F}_1^{(0)}([\alpha, \beta]_S) = a[\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha), \mathcal{F}_1^{(0)}(\beta)]_G \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}_1; \\ (iii) \quad & a[\mathcal{F}_1^{(0)}([\alpha, \beta]_S), D]_G = \\ & a[\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha), a[\mathcal{F}_1^{(0)}(\beta), D]_G]_G - (-1)^{|\alpha||\beta|} a[\mathcal{F}_1^{(0)}(\beta), a[\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha), D]_G]_G \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}_1, D \in \mathfrak{g}_2. \end{aligned}$$

Preuve:

Soient D_1 un opérateur m_1 -différentiel et D_2 un opérateur m_2 -différentiel sur M . On a

d'une part

$$\begin{aligned}
& a[D_1, D_2]_G(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) = \\
& = a(D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1)(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) \\
& = \frac{1}{(m_1 + m_2 - 1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m_1+m_2-1}} \epsilon(\sigma) \left[\sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} \right. \\
& \quad D_1(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(j-1)}, D_2(f_{\sigma(j)}, \dots, f_{\sigma(j+m_2-1)}), f_{\sigma(j+m_2)}, \dots, f_{\sigma(m_1+m_2-1)}) \\
& \quad - \sum_{l=1}^{m_2} (-1)^{(m_1-1)(m_2-1)+(m_1-1)(l-1)} \\
& \quad \left. D_2(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(l-1)}, D_1(f_{\sigma(l)}, \dots, f_{\sigma(l+m_1-1)}), f_{\sigma(l+m_1)}, \dots, f_{\sigma(m_1+m_2-1)}) \right].
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& [D_1, aD_2]_G(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) = \\
& = \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} \frac{1}{m_2!} \sum_{\tau_j \in \Sigma_{m_2}} \epsilon(\tau_j) \\
& \quad D_1(f_1, \dots, f_{j-1}, D_2(f_{\tau_j(j)}, \dots, f_{\tau_j(j+m_2-1)}), f_{j+m_2}, \dots, f_{m_1+m_2-1}) \\
& \quad - \sum_{l=1}^{m_2} (-1)^{(m_1-1)(m_2-1)+(m_1-1)(l-1)} \frac{1}{m_2!} \sum_{\substack{s_l \in \Sigma_{m_2} \\ s_l(p)=l}} \epsilon(s_l) \\
& \quad D_2(f_{s_l(1)}, \dots, f_{s_l(p-1)}, D_1(f_{s_l(p)}, \dots, f_{l+m_1-1}), f_{s_l(l+m_1)}, \dots, f_{s_l(m_1+m_2-1)}).
\end{aligned}$$

Dans la première somme, la permutation τ_j dépend de j au sens où elle appartient au groupe de permutations des m_2 indices $j, \dots, j + m_2 - 1$. Pour j fixé, on étend τ_j en la permutation $\tilde{\tau}_j$ du groupe de permutations à $m_1 + m_2 - 1$ éléments laissant les indices $1, \dots, j-1, j+m_2, \dots, m_1+m_2-1$ fixes. On a clairement $\epsilon(\tilde{\tau}_j) = \epsilon(\tau_j)$.

De même, dans la deuxième somme, la permutation s_l est une permutation des m_2 indices $1, \dots, l, l+m_1, \dots, m_1+m_2-1$. On étend cette permutation en une permutation du groupe de permutations à $m_1 + m_2 - 1$ éléments laissant les indices $l+1, \dots, l+m_1-1$ fixes. Là encore $\epsilon(\tilde{s}_l) = \epsilon(s_l)$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
& [D_1, aD_2]_G(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) = \\
& = \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} \frac{1}{m_2!} \sum_{\tau_j \in \Sigma_{m_2}} \epsilon(\tau_j) \\
& \quad D_1(f_{\tilde{\tau}_j(1)}, \dots, f_{\tilde{\tau}_j(j-1)}, D_2(f_{\tilde{\tau}_j(j)}, \dots, f_{\tilde{\tau}_j(j+m_2-1)}), f_{\tilde{\tau}_j(j+m_2)}, \dots, f_{\tilde{\tau}_j(m_1+m_2-1)}) \\
& \quad - \sum_{l=1}^{m_2} (-1)^{(m_1-1)(m_2-1)+(m_1-1)(l-1)} \frac{1}{m_2!} \sum_{\substack{s_l \in \Sigma_{m_2} \\ s_l(p)=l}} \epsilon(s_l) \\
& \quad D_2(f_{\tilde{s}_l(1)}, \dots, f_{\tilde{s}_l(p-1)}, D_1(f_{\tilde{s}_l(p)}, \dots, f_{\tilde{s}_l(l+m_1-1)}), f_{\tilde{s}_l(l+m_1)}, \dots, f_{\tilde{s}_l(m_1+m_2-1)}).
\end{aligned}$$

Par antisymétrisation, on trouve

$$\begin{aligned}
& a[D_1, aD_2]_G(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) = \\
& = \frac{1}{(m_1 + m_2 - 1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{m_1+m_2-1}} \epsilon(\sigma) \left[\sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} \frac{1}{m_2!} \sum_{\tau_j \in \Sigma_{m_2}} \epsilon(\tau_j) \right. \\
& \quad D_1(f_{\sigma(\tau_j(1))}, \dots, f_{\sigma(\tau_j(j_1))}, D_2(f_{\sigma(\tau_j(j))}, \dots, f_{\sigma(\tau_j(j+m_2-1))}), \\
& \quad f_{\sigma(\tau_j(j+m_2))}, \dots, f_{\sigma(\tau_j(m_1+m_2-1))}) \\
& \quad \left. - \sum_{l=1}^{m-2} (-1)^{(m_1-1)(m_2-1)+(m_1-1)(l-1)} \frac{1}{m_2!} \sum_{\substack{s_l \in \Sigma_{m_2} \\ s_l(p)=l}} \epsilon(s_l) \right. \\
& \quad D_2(f_{\sigma(\tilde{s}_l(1))}, \dots, f_{\sigma(\tilde{s}_l(l-1))}, D_1(f_{\sigma(\tilde{s}_l(l))}, \dots, f_{\sigma(\tilde{s}_l(l+m_1-1))}), \\
& \quad \left. f_{\sigma(\tilde{s}_l(l+m_1))}, \dots, f_{\sigma(\tilde{s}_l(m_1+m_2-1))}) \right].
\end{aligned}$$

D'où le point (i):

$$\begin{aligned}
& a[D_1, aD_2]_G(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) = \\
& \frac{1}{(m_1 + m_2 - 1)!} \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} \sum_{\sigma' \in \Sigma_{m_1+m_2-1}} \epsilon(\sigma') \frac{1}{m_2!} \\
& D_1(f_{\sigma'(1)}, \dots, f_{\sigma'(j_1)}, m_2! D_2(f_{\sigma'(j)}, \dots, f_{\sigma'(j+m_2-1)}), f_{\sigma'(j+m_2)}, \dots, f_{\sigma'(m_1+m_2-1)}) \\
& - \sum_{l=1}^{m-2} (-1)^{(m_1-1)(m_2-1)+(m_1-1)(l-1)} \sum_{\sigma' \in \Sigma_{m_1+m_2-1}} \epsilon(\sigma') \frac{1}{m_2!} \\
& m_2! D_2(f_{\sigma'(1)}, \dots, f_{\sigma'(l-1)}, D_1(f_{\sigma'(l)}, \dots, f_{\sigma'(l+m_1-1)}), f_{\sigma'(l+m_1)}, \dots, f_{\sigma'(m-1+m_2-1)}) \\
& = a[D_1, D_2]_G(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}).
\end{aligned}$$

Le point (ii) se vérifie facilement. Le point (iii) résulte directement de (i) et (ii) et de l'identité de Jacobi graduée vérifiée par le crochet $[\cdot, \cdot]_G$. $\square$

Nous noterons ∂' le cobord de la cohomologie de Chevalley graduée de $\mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $\mathfrak{g}_2$, muni de la structure de $\mathfrak{g}_1$ -module définie plus haut:

Pour $\Phi : S^{n-1}(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \mathfrak{g}_2[1]$ et pour tout $\alpha_i \in \mathfrak{g}_1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\partial' \Phi(\alpha_1 \dots \alpha_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\tilde{\Phi} \tilde{\alpha}_i} \epsilon_\alpha(i, 1 \dots \widehat{i} \dots n) aQ'_2(\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha_i) \cdot \Phi(\alpha_1 \dots \widehat{\alpha_i} \dots \alpha_n)) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \epsilon_\alpha(ij, 1 \dots \widehat{i} \widehat{j} \dots n) (-1)^{\tilde{\Phi}} \Phi(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_1 \dots \widehat{\alpha_i} \widehat{\alpha_j} \dots \alpha_n).
\end{aligned}$$

Dans la suite, on simplifiera l'expression des cobords $\partial' \Phi$ que nous aurons à considérer en écrivant α_i au lieu de $\mathcal{F}_1^{(0)}(\alpha_i)$.

Remarquons que pour toute application $\varphi : S^{n-1}(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \mathfrak{g}_1[1]$, on a d'après la proposition V.4.1 (ii):

$$\partial' \mathcal{F}_1^{(0)} \varphi = \mathcal{F}_1^{(0)} \partial \varphi,$$

où $\mathcal{F}_1^{(0)} \varphi$ est défini par:

$$\mathcal{F}_1^{(0)} \varphi(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}) := \mathcal{F}_1^{(0)}(\varphi(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})) \quad \forall \alpha_i \in \mathfrak{g}_1.$$

V.5 Interprétation cohomologique de l'équation de formalité.

Pour une application $\Phi : S^p(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \mathfrak{g}_2[1]$, on convient de définir le cobord de Hochschild de Φ par:

$$\delta(\Phi)(\alpha_1 \dots \alpha_p) := \delta(\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_p)) \quad \forall \alpha_i \in \mathfrak{g}_1.$$

De même, on définira l'antisymétrisé $a\Phi$ de Φ par:

$$a\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_p) := a(\Phi(\alpha_1 \dots \alpha_p)) \quad \forall \alpha_i \in \mathfrak{g}_1.$$

On est maintenant en mesure d'interpréter l'existence des formalités de manière cohomologique: On cherche à construire les $\mathcal{F}_p$ d'un L_∞ -quasi-isomorphisme entre $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ de proche en proche en résolvant l'équation de formalité:

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{F}_p)(\alpha_1 \dots \alpha_p) = & -\frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \epsilon_\alpha(kl, 1 \dots \widehat{k} \widehat{l} \dots p) \mathcal{F}_{p-1}(Q_2(\alpha_k, \alpha_l) \cdot \alpha_1 \dots \widehat{\alpha_k} \widehat{\alpha_l} \dots \alpha_p) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, p\} \\ |I| \neq 0, |J| \neq 0}} \epsilon_\alpha(I, J) Q'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)). \end{aligned}$$

On part de $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{(0)}$. On impose en outre aux $\mathcal{F}_p$ d'être homogènes de degré 0. On a alors le

Théorème V.5.1

Supposons que l'on ait trouvé des $\mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{n-1}$, homogènes de degré 0, vérifiant l'équation de formalité jusqu'au rang $n-1$. Notons E_n le second membre de l'équation de formalité à l'ordre n . Alors E_n est un cocycle de Hochschild et son antisymétrisé aE_n vu comme une application de $S^n(\mathfrak{g}_1[1])$ dans $\mathfrak{g}_1[1]$ (remarque V.2.3) est un cocycle pour la cohomologie de Chevalley graduée ∂ de $\mathfrak{g}_1$ à valeurs dans $\mathfrak{g}_1$. Si ce cocycle est exact, on peut trouver $\mathcal{F}'_{n-1}$ et $\mathcal{F}'_n$, homogènes de degré 0, pour que $\mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{n-2}, \mathcal{F}'_{n-1}, \mathcal{F}'_n$ vérifient l'équation de formalité jusqu'au rang n .

Preuve:

Le fait que E_n soit un cocycle pour la cohomologie de Hochschild a été démontré dans [AM]. De plus, en utilisant la proposition V.4.1 (i), on constate que

$$aE_n(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \partial' a\mathcal{F}_{n-1}(\alpha_1 \dots \alpha_n) + aR_n(\alpha_1 \dots \alpha_n),$$

où l'on a posé

$$R_n(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_\alpha(I, J) Q'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)).$$

Notons que comme Q'_2 est de degré 1 comme application de $S^2(\mathfrak{g}_2[1])$ dans $\mathfrak{g}_2[1]$, R_n et son antisymétrisé aR_n sont de degré $\tilde{R}_n = a\tilde{R}_n = 1$.

1) Montrons maintenant que $\partial' aR_n = 0$:

$$\begin{aligned} \partial' aR_n(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{\tilde{\alpha}_i} \epsilon_\alpha(i, 1 \dots \hat{i} \dots n+1) aQ'_2(\alpha_i \cdot aR_n(\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{n+1})) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \epsilon_\alpha(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) aR_n(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{\tilde{\alpha}_i} \epsilon_\alpha(i, 1 \dots \hat{i} \dots n+1) \sum_{\substack{I \cup J = \{1 \dots \hat{i} \dots n+1\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha'}(I, J) \\ &\quad aQ'_2(\alpha_i \cdot aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J))) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \epsilon_\alpha(ij, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1) \sum_{\substack{I \cup J = \{0, 1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots n+1\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha''}(I, J) \\ &\quad aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \\ &= \frac{1}{2}(I) + \frac{1}{4}(II), \end{aligned}$$

où $\epsilon_{\alpha'}$ et $\epsilon_{\alpha''}$ ont la même signification que dans le paragraphe V.1.

Le premier terme s'écrit:

$$(I) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{I \cup J = \{1 \dots \hat{i} \dots n+1\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} (-1)^{(\tilde{\alpha}_I + \tilde{\alpha}_J) \tilde{\alpha}_i} \epsilon_\alpha(i, I, J) aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \cdot \alpha_i).$$

L'identité de Jacobi graduée étant vérifiée par aQ'_2 d'après la proposition V.4.1 (iii), on en déduit que

$$\begin{aligned} (I) &= - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{I \cup J = \{1 \dots \hat{i} \dots n+1\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} (-1)^{\tilde{\alpha}_J(\tilde{\alpha}_I + \tilde{\alpha}_i)} \epsilon_\alpha(i, I, J) aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J) \cdot \alpha_i) \cdot \mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I)) \\ &\quad - \sum_{\substack{I \cup J = \{1 \dots \hat{i} \dots n+1\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_\alpha(i, I, J) aQ'_2(aQ'_2(\alpha_i \cdot \mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I)) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \\ &= -2 \sum_{\substack{I \cup J = \{1 \dots \hat{i} \dots n+1\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_\alpha(i, I, J) aQ'_2(aQ'_2(\alpha_i \cdot \mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I)) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)). \end{aligned}$$

De même, on peut arranger le second terme:

$$\begin{aligned}
 (II) &= \sum_{i \neq j} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) \sum_{\substack{I \cup J = \{0, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1\} \\ |I| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha''}(I, J) aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \\
 &= \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{I = I_1 \cup \{0\} \\ I_1 \cup J = \{1 \dots \widehat{ij} \dots n+1\}}} \epsilon_{\alpha}(ij, I_1, J) aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_{I_1}) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \\
 &\quad + \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{J = J_1 \cup \{0\} \\ I \cup J_1 = \{1 \dots \widehat{ij} \dots n+1\}}} \epsilon_{\alpha}(ij, 1 \dots \widehat{ij} \dots n+1) \epsilon_{\alpha''}(I, \{0\}, J_1) \\
 &\quad aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_{J_1})).
 \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore:

$$\begin{aligned}
 (II) &= \sum_{i \neq j} \left[\sum_{\substack{I = I_1 \cup \{0\} \\ I_1 \cup J = \{1 \dots \widehat{ij} \dots n+1\}}} \epsilon_{\alpha}(ij, I_1, J) aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_{I_1}) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{J = J_1 \cup \{0\} \\ I \cup J_1 = \{1 \dots \widehat{ij} \dots n+1\}}} \epsilon_{\alpha}(ij, I, J_1) (-1)^{(\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_j + 1)\bar{\alpha}_J} aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_{J_1})) \right] \\
 &= 2 \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{I = I_1 \cup \{0\} \\ I_1 \cup J = \{1 \dots \widehat{ij} \dots n+1\}}} \epsilon_{\alpha}(ij, I_1, J) aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_{I_1}) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)).
 \end{aligned}$$

En sommant les deux termes obtenus et en arrangeant les signes, on peut faire apparaître le cobord des $a\mathcal{F}_{|K|}$ ($|K| \leq 2$). En effet, on a

$$\begin{aligned}
 \partial'(aR_n)(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}) &= \frac{1}{2}(I) + \frac{1}{4}(II) \\
 &= \sum_{\substack{I' \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |J| \geq 2, |I'| \geq 3}} \epsilon_{\alpha}(I', J) \left[- \sum_{\substack{i \in I' \\ (I' = I \cup \{i\})}} \epsilon_{\alpha_{\{i\} \cup I}}(i, I) aQ'_2(aQ'_2(\alpha_i \cdot \mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I)) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \in I' \\ I' = I_1 \cup \{ij\}, I = I_1 \cup \{0\}}} \epsilon_{\alpha_{\{ij\} \cup I_1}}(ij, I_1) aQ'_2(\mathcal{F}_{|I|}(Q_2(\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot \alpha_{I_1}) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \right].
 \end{aligned}$$

En utilisant la proposition V.4.1 (i) et la définition de ∂' , on obtient:

$$\odot \partial'(aR_n)(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}) = - \sum_{\substack{I' \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |J| \geq 2, |I'| \geq 3}} \epsilon_{\alpha}(I, J) aQ'_2(\partial' a\mathcal{F}_{|I'|-1}(\alpha_{I'}) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)).$$

L'équation de formalité étant vérifiée jusqu'au rang $n-1$, on a

$$\partial' a\mathcal{F}_{p-1} + aR_p = a(E_p) = a(\delta(\mathcal{F}_p)) = 0 \quad \forall p \leq n-1.$$

Puisque $|I'| \leq n-1$ pour tous les I' de l'expression ci-dessus, on a

$$-\partial' a\mathcal{F}_{|I'|-1}(\alpha_{I'}) = aR_{|I'|}(\alpha_{I'}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \cup T = I' \\ |S| \geq 2, |T| \geq 2}} \epsilon_{\alpha_{S \cup T}}(S, T) aQ'_2(\mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S) \cdot \mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T)).$$

Par suite, l'équation $\clubsuit$ devient:

$$\begin{aligned} & \partial'(aR_n)(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \cup T \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |S| \geq 2, |T| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha}(S \cup T, J) \epsilon_{\alpha_{S \cup T}}(S, T) aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S) \cdot \mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T)) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{S \cup T \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |S| \geq 2, |T| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha}(S, T, J) aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S) \cdot \mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T)) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) := S'. \end{aligned}$$

Cette somme S' est nulle d'après l'identité de Jacobi graduée. Elle est en effet égale à

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{6} \sum_{\substack{S \cup T \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |S| \geq 2, |T| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha}(S, T, J) aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S) \cdot \mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T)) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{\substack{S \cup T \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |S| \geq 2, |T| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha}(T, J, S) aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \cdot \mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S)) + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{\substack{S \cup T \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |S| \geq 2, |T| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha}(J, S, T) aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J) \cdot \mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S)) \cdot \mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T)) + \\ &= \frac{1}{6} \sum_{\substack{S \cup T \cup J = \{1 \dots n+1\} \\ |S| \geq 2, |T| \geq 2, |J| \geq 2}} \epsilon_{\alpha}(S, T, J) [aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S) \cdot \mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T)) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) + \\ &+ (-1)^{\tilde{\alpha}_S(\tilde{\alpha}_J + \tilde{\alpha}_T)} aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) \cdot \mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S)) + \\ &+ (-1)^{\tilde{\alpha}_J(\tilde{\alpha}_S + \tilde{\alpha}_T)} aQ'_2(aQ'_2(\mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J) \cdot \mathcal{F}_{|S|}(\alpha_S)) \cdot \mathcal{F}_{|T|}(\alpha_T))] = 0. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que $\partial'(aR_n) = 0$ et donc que $\partial'(aE_n) = 0$.

2) Montrons maintenant que aE_n s'identifie à un cocycle pour ∂ : Puisque E_n est un cocycle de Hochschild, les $aE_n(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ ($\alpha_i \in \mathfrak{g}_1$) sont des opérateurs multidifférentiels d'ordre 1 en chaque argument. L'espace de ces opérateurs étant en bijection avec $\mathfrak{g}_1([1])$ par l'application $\mathcal{F}_1^{(0)}$ (d'après la remarque V.2.3), il existe une unique application

$$\phi_n : S^n(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \mathfrak{g}_1[1]$$

telle que $aE_n = \mathcal{F}_1^{(0)} \phi_n$. Il s'ensuit que

$$\partial' aE_n = \mathcal{F}_1^{(0)} \partial \phi_n = 0$$

donc que aEn s'identifie au ∂ -cocycle ϕ_n .

3) Supposons que $\phi_n = \partial\varphi_{n-1}$ où

$$\varphi_{n-1} : S^{n-1}(\mathfrak{g}_1[1]) \rightarrow \mathfrak{g}_2[1].$$

Bien entendu,

$$\delta(\mathcal{F}_1^{(0)}\varphi_{n-1}) = 0.$$

Les applications $\mathcal{F}'_2 = \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}'_{n-2} = \mathcal{F}_{n-2}, \mathcal{F}'_{n-1} = \mathcal{F}_{n-1} - \mathcal{F}_1^{(0)}\varphi_{n-1}$ vérifient donc l'équation de formalité jusqu'au rang $n-1$. De plus, le second membre E'_n de l'équation de formalité à l'ordre n pour ces $\mathcal{F}'_p$ est un cocycle de Hochschild d'antisymétrisé nul puisque

$$aE'_n = aE_n - \partial'\mathcal{F}_1^{(0)}\varphi_{n-1} = aE_n - \mathcal{F}_1^{(0)}(\partial\varphi_{n-1}) = 0.$$

Il existe donc $\mathcal{F}'_n$ tel que

$$E'_n = \delta\mathcal{F}'_n,$$

d'où le résultat. $\square$

Commentaires V.5.2

La connaissance de la cohomologie de Chevalley ∂ considérée dans ce chapitre apporterait des renseignements précieux pour l'étude des formalités (quant à la nature arithmétique des coefficients, à une notion possible de classes d'équivalence des formalités, à l'estimation du nombre de ces classes...). Nous pensons aussi qu'elle serait utile pour la question du recollement des formalités. Les espaces de cette cohomologie s'annoncent difficiles à calculer dans leur totalité. Il devrait être possible cependant de traduire la cohomologie ∂ en termes de graphes et de calculer explicitement sur les graphes les premiers espaces de cette cohomologie, en reprenant la démarche adoptée dans [AM] pour la cohomologie de Hochschild.

CHAPITRE VI

De la formalité locale de Kontsevich aux déformations tangentielles sur les variétés de Poisson feuilletées

Dans un article récent [CFT], Cattaneo, Felder et Tomassini ont montré comment la notion de formalité permet de construire des connexions plates de Fedosov sur certains fibrés vectoriels au-dessus d'une variété de Poisson M et donc un produit-star sur M par la méthode de Fedosov [Fe1, Fe2]. Dans [ADGM], D. Arnal, N. Dahmene, M. Masmoudi et moi-même avons étudié le cas où M est une variété de Poisson munie d'un feuilletage $\mathcal{L}$ (éventuellement différent du feuilletage symplectique de M) tel que le tenseur de Poisson Λ de M soit tangent aux feuilles; dans la suite, une telle variété $(M, \mathcal{L}, \Lambda)$ sera appelée variété de Poisson feuilletée. Nous avons montré que, pour une telle variété, la construction de Cattaneo-Felder-Tomassini fournit naturellement des produits-star tangentiels. Dans ce dernier chapitre, je propose d'expliquer ce résultat.

La section 1 du chapitre est consacrée à une brève description de nos objectifs et de nos motivations pour ce travail. La section 2 reprend les concepts de base de la géométrie formelle en les adaptant au contexte des variétés de Poisson feuilletées. Dans la section 3, sont mises en lumière certaines propriétés de la formalité de Kontsevich. Ces propriétés nous permettront d'adopter la méthode de Fedosov, puis d'établir notre résultat dans la section 4. Enfin, dans la dernière section, on applique notre résultat à l'étude des produits-star tangentiels sur le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans certains cas, nous parvenons ainsi à construire des produits-star tangentiels et différentiels sur des ouverts de $\mathfrak{g}^*$ strictement plus gros que l'ouvert Ω des orbites de dimension maximale.

VI.1 En guise de motivation.

La notion de formalité a été introduite par Kontsevich [Kon1] et utilisée dans son remarquable article [Kon2] afin de montrer l'existence d'un produit-star dans le cas d'une variété de Poisson quelconque. Dans ce dernier article, il démontre l'existence de formalités pour toute variété différentiable. Nous savons, pour l'avoir déjà dit, que la donnée d'une formalité $\mathcal{F}$ sur une variété M permet d'associer à toute structure de Poisson Λ de M un produit-star $\star$ sur (M, Λ) :

$$\star = \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{F}_k(\Lambda, \dots, \Lambda).$$

En réalité, le théorème de formalité de Kontsevich a d'autres conséquences utiles; il est en effet possible d'introduire les séries formelles suivantes:

$$\begin{aligned} A(\xi, \Lambda) &= \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{F}_{k+1}(\xi \cdot \Lambda \dots \Lambda) \\ F(\xi, \eta, \Lambda) &= \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{F}_{k+2}(\xi \cdot \eta \cdot \Lambda \dots \Lambda) \\ R(f, \Lambda) &= \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{F}_{k+1}(f \cdot \Lambda \dots \Lambda) \end{aligned}$$

où ξ, η sont des champs de vecteurs et f une fonction C^∞ sur M , et l'équation de formalité donne de nombreuses relations entre ces objets. C'est en partant uniquement de la formalité "canonique" pour $\mathbb{R}^d$ et de ces opérateurs A, F, R que les auteurs de [CFT] ont pu donner une construction explicite d'un produit-star sur une variété de Poisson (M, Λ) générale, par recollement des produits-star locaux de Kontsevich. Pour y parvenir, ils ont d'abord associé à M un fibré formel E en algèbres associatives, le produit sur les fibres étant donné par la formule explicite du produit-star local de Kontsevich. Leur fibré E admet une connexion naturelle $D = d + A_x(\cdot, \Lambda_x)$ de courbure non nulle F et qui donne une dérivation de l'algèbre des sections $\Gamma(E)$ de E . Reprenant la démarche de Fedosov [Fe1, Fe2], ils ont alors modifié D en une connexion plate $\overline{D}$, et construit une bijection ρ entre l'algèbre $C^\infty(M)[[\nu]]$ des séries formelles en ν à coefficients dans les fonctions lisses sur M et l'algèbre $H^0(E, \overline{D})$ des sections $\overline{D}$ -horizontales de E . D'où un produit-star sur M :

$$f \star_M g = \rho^{-1}(\rho(f) \star \rho(g)) \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

L'objectif de la suite est de montrer comment cette construction permet, dans le cas d'une variété de Poisson feuilletée, d'obtenir des produits-star tangentiels.

Notre première motivation pour ce travail était de comprendre parfaitement la construction de [CFT] afin de pouvoir construire des formalités "tangentielles" sur les variétés de Poisson régulières, puis plus ambitieusement encore de donner une preuve géométrique "à la Fedosov" du recollement des formalités. Nous sommes bien sûr encore loin de cet objectif, cependant ce chapitre donne déjà des idées de recollement.

En rapport plus direct avec les ambitions de cette thèse, ce travail permet de généraliser aux variétés de Poisson feuilletées la preuve de l'existence d'un produit-star tangentiel sur les variétés de Poisson régulières [Mas1]. Comme nous le constaterons à la fin du chapitre, cette généralisation peut s'avérer fructueuse pour l'étude des produits-star tangentiels sur les duals des algèbres de Lie.

VI.2 Géométrie formelle pour les variétés de Poisson feuilletées.

Définition VI.2.1

Une variété de Poisson feuilletée $(M, \mathcal{L}, \Lambda)$ est la donnée d'une variété M , d'un feuilletage $\mathcal{L}$ et d'une structure de Poisson Λ sur M tels que Λ soit tangent aux feuilles de $\mathcal{L}$.

Exemples VI.2.2

1) Soient (M, Λ) une variété de Poisson régulière et $\mathcal{L}$ le feuilletage symplectique de M . Alors, $(M, \mathcal{L}, \Lambda)$ est une variété de Poisson feuilletée de manière naturelle [Li2].

2) Soit $\mathfrak{h}_k = \text{Vect}\{X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k, Z\}$ l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension $2k + 1$ et de centre $\mathbb{R}Z$. Les orbites coadjointes dans $\mathfrak{h}_k^*$ sont soit de dimension $2k$, elles sont alors de la forme:

$$O_\lambda = \{\xi \in \mathfrak{h}_k^* : \langle \xi, Z \rangle = \lambda \neq 0\},$$

soit de dimension nulle, ce sont alors les points de $W = \{\xi \in \mathfrak{h}_k^* : \langle \xi, Z \rangle = 0\}$. La réunion des O_λ et de W formant un feuilletage (régulier), noté $\mathcal{L}$, sur $\mathfrak{h}_k^*$ et le tenseur de Poisson Λ issu du crochet de Lie étant évidemment tangentiel à $\mathcal{L}$, $(\mathfrak{h}_k^*, \mathcal{L}, \Lambda)$ est une variété de Poisson feuilletée.

Des exemples moins élémentaires seront étudiés dans le dernier paragraphe du chapitre.

Dans toute la suite, on supposera que $(M, \mathcal{L}, \Lambda)$ est une variété de Poisson feuilletée de dimension m . La géométrie formelle (à la Gelfand-Kazhdan [GK]) associe usuellement à une variété M la "variété" M^{coor} (de dimension infinie) des jets de systèmes de coordonnées sur M . L'idée principale de ce travail est de substituer à M^{coor} une autre variété (aussi de dimension infinie), M^{adapt} , obtenue en ne conservant que les cartes locales $\varphi : U \rightarrow M$ de domaine un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ de 0 qui sont adaptées (au feuilletage $\mathcal{L}$). Ainsi, pour toute feuille L de $\mathcal{L}$, chaque composante connexe C de l'intersection $L \cap \varphi(U)$ s'écrit sous la forme

$$C = \{\varphi(y) : y^{n+1} = a_{n+1}, \dots, y^m = a_m\}_{y=(y^1, \dots, y^m) \in U},$$

si n désigne la dimension de $\mathcal{L}$. Plus exactement,

Définition VI.2.3

M^{adapt} est l'ensemble des jets infinis $[\varphi]$ en 0 de cartes locales adaptées $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$.

En fait, M^{adapt} peut être considérée comme une limite projective de vraies variétés:

$$M^{\text{adapt}} = \varprojlim_k M_k^{\text{adapt}},$$

les M_k^{adapt} étant les variétés des k -jets des cartes locales adaptées régulières en 0. L'algèbre A des fonctions lisses sur M^{adapt} devient alors limite inductive des fonctions lisses sur M_k^{adapt} :

$$A = \varinjlim_k C^\infty(M_k^{\text{adapt}}).$$

Chaque variété M_k^{adapt} est un fibré principal sur M de groupe structural le groupe $G_{0,t}^k$ des k -jets des transformations tangentielles g laissant 0 stable:

$$g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, g(0) = 0, g(y^1, \dots, y^n, a_{n+1}, \dots, a_m) = (z^1, \dots, z^n, b_{n+1}, \dots, b_m).$$

On peut donc considérer $M^{\text{adapt}} \rightarrow M : [\varphi] \mapsto \varphi(0)$ comme un fibré principal sur M de groupe structural le groupe $G_{0,t}$ des jets infinis de transformations g de la forme ci-dessus. L'algèbre de Lie de $G_{0,t}$ s'identifie à l'algèbre de Lie

$$\mathcal{W}_{0,t} = \left\{ \sum_{j=1}^n u_j(y^1, \dots, y^m) \frac{\partial}{\partial y^j} + \sum_{j=n+1}^m u_j(y^{n+1}, \dots, y^m) \frac{\partial}{\partial y^j}, u_j(y) \in \mathbb{R}[[y]], u_j(0) = 0 \right\},$$

qui est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathcal{W}$ des champs de vecteurs formels sur $\mathbb{R}^m$. L'espace tangent $T_{[\varphi]}M^{\text{adapt}}$ en un point $[\varphi]$ s'identifie donc naturellement à l'algèbre de Lie

$$\mathcal{W}_t = \left\{ \sum_{j=1}^n u_j(y^1, \dots, y^m) \frac{\partial}{\partial y^j} + \sum_{j=n+1}^m u_j(y^{n+1}, \dots, y^m) \frac{\partial}{\partial y^j}, u_j(y) \in \mathbb{R}[[y]] \right\}.$$

Comme dans [GK] et [CFT], on peut définir une forme de Maurer-Cartan ω_{MC} dans $\Omega^1(M^{\text{adapt}}, \mathcal{W}_t)$ (ce qui revient à dire que l'on a une action de toute l'algèbre de Lie $\mathcal{W}_t$ sur M^{adapt}). L'expression explicite de cette forme ω_{MC} est obtenue comme suit. Soit φ une carte locale adaptée de M et ξ un élément de $\mathcal{W}_t$. Il existe alors un vrai champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ sur M dont le jet infini en $x = \varphi(0)$ est $[\tilde{\xi}] = \xi$. Soit f_t le flot du champ $\tilde{\xi}$ sur M . Comme ξ est dans $T_{[\varphi]}M^{\text{adapt}}$, $f_t \circ \varphi$ est une carte locale adaptée. Enfin, ω_{MC} est donnée par:

$$\omega_{MC}([\varphi])(\xi) = \text{Développement de Taylor en 0 de } -d\varphi(y)^{-1} \frac{d}{dt}(f_t \circ \varphi)|_{t=0}.$$

Et $\omega_{MC}([\varphi])$ définit un isomorphisme de $T_{[\varphi]}M^{\text{adapt}}$ dans $\mathcal{W}_t$. Bien entendu, ω_{MC} vérifie la relation de Maurer-Cartan:

$$d\omega_{MC} + \frac{1}{2}[\omega_{MC}, \omega_{MC}] = 0,$$

ce qui signifie

$$d\omega_{MC}([\varphi])(X_1, X_2) = -[\omega_{MC}([\varphi])(X_1), \omega_{MC}([\varphi])(X_2)] \quad \forall X_1, X_2 \in T_{[\varphi]}M^{\text{adapt}}.$$

S'il existait un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{W}_t$, l'existence de ω_{MC} équivalerait [KN] à la trivialité du fibré M^{adapt} et donc à l'existence de sections globales. Ce groupe n'étant pas défini, l'existence de sections globales n'est pas assurée. Introduisons donc le sous-groupe $H \subset GL(m, \mathbb{R})$ des matrices h de la forme:

$$h = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Naturellement, H agit (à droite) sur M^{adapt} . Considérons le nouveau fibré suivant:

$$M_{\text{aff}}^{\text{adapt}} = M^{\text{adapt}}/H.$$

Ce fibré admet des sections globales puisqu'il est à fibres contractiles, $G_{0,t}/H$ étant isomorphe à un espace vectoriel. Notons que M^{adapt} (resp. $M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$) est un sous-fibré du fibré M^{coor} (resp. M^{aff}) utilisé dans [Kon2] et [CFT].

A présent, choisissons une section $s : M \rightarrow M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$ de $M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$. Comme dans [CFT], on construit un fibré vectoriel

$$\tilde{E}_0 = M^{\text{adapt}} \times_H \mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]]$$

au-dessus de $M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$ et en prenant son pull-back par la section s , on obtient un fibré vectoriel E_0 sur M :

$$\begin{array}{ccc} E_0 = s\tilde{E}_0 & \longrightarrow & \tilde{E}_0 \\ \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{s} & M_{\text{aff}}^{\text{adapt}} \end{array}$$

i.e.

$$E_0 = \{(x, \tilde{e}_0) \in M \times \tilde{E}_0 : s(x) = p(\tilde{e}_0)\}.$$

En fait, on a une injection naturelle $j : M^{\text{adapt}} \rightarrow M^{\text{coor}}$. Elle induit une injection i de $M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$ dans M^{aff} et par composition de s avec i , on trouve une section $i \circ s$ du fibré $M^{\text{aff}} \rightarrow M$. On voit alors que notre fibré E_0 s'identifie au fibré E_0 de [CFT] qui est le pull-back par $i \circ s$ d'un fibré $\tilde{E}_0^{\text{CFT}}$ sur M^{aff} :

$$\begin{array}{ccccc} E_0 & \longrightarrow & \tilde{E}_0 & \longrightarrow & \tilde{E}_0^{\text{CFT}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{s} & M_{\text{aff}}^{\text{adapt}} & \xrightarrow{i} & M^{\text{aff}}. \end{array}$$

Sur le fibré trivial $M^{\text{adapt}} \times \mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]] \rightarrow M^{\text{adapt}}$, on a la connexion plate naturelle $d + \omega_{MC}$. Les sections horizontales de cette connexion sont exactement les applications

$$[\varphi] \mapsto \text{Développement de Taylor en 0 de } f \circ \varphi$$

où f est une fonction lisse sur M . Par H -équivariance, on obtient une connexion, encore notée $d + \omega_{MC}$, sur $\tilde{E}_0 \rightarrow M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$. Par pull-back de cette connexion, on obtient finalement une connexion plate D_0 sur $E_0 \rightarrow M$.

VI.3 Exploitation de la formalité de Kontsevich.

a) Déformation de E_0 et de D_0 .

Nous venons de construire un premier fibré vectoriel $E_0 \rightarrow M$ et une connexion plate D_0 sur E_0 telle que $\text{Ker}(D_0)$ soit en bijection avec les fonctions lisses sur M . Il s'agit maintenant d'introduire le paramètre ν dans nos constructions. Pour cela, on définit d'abord le fibré :

$$\tilde{E} = M^{\text{adapt}} \times_H \mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]][[\nu]]$$

sur $M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$. Puis, on construit le pull-back E de $\tilde{E}$ par la section $s : M \rightarrow M_{\text{aff}}^{\text{adapt}}$:

$$E = s^* \tilde{E}.$$

Pour les calculs, on se donne un recouvrement de M par des cartes $\varphi_x : U \rightarrow M$, centrées en x et de domaine U contractile. Pour chaque ouvert U du recouvrement, on choisit une section $s_U : \varphi_x(U) \rightarrow \varphi_x(U)^{\text{adapt}}$ comme représentant de la classe (modulo H) de la section s . On a donc

$$s(x) = s_U(x) \circ h_x$$

pour un élément h_x de H . Intuitivement, on peut dire que E se comporte localement comme le fibré trivial $M \times \mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]] \rightarrow M$. Une section f de E pourra donc être vue comme une fonction $x \mapsto f_x \in \mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]][[\nu]]$.

Tous les objets que nous aurons à construire sur E vont désormais être présentés par leur expression locale. Toutes nos constructions étant invariantes par H , ils auront un sens global.

Considérons d'abord la formalité $\mathcal{U} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{U}_k$ de Kontsevich pour $\mathbb{R}^m$ et notons Λ_x la structure de Poisson induite par Λ sur la fibre $(E_0)_x$ de E_0 passant par x :

$$\Lambda_x = (\varphi_x^{-1})_*(\Lambda).$$

La formule explicite du produit-star local de Kontsevich exprimée en les variables y permet de définir un produit associatif $\star$ sur les fibres de $E = E_0[[\nu]]$. En effet, pour tout f_x et tout g_x dans la fibre E_x de E passant par x , on pose

$$f_x \star g_x = P_x^M(f_x \otimes g_x),$$

où

$$P_x^M = P(\Lambda_x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{U}_k(\Lambda_x \dots \Lambda_x).$$

Par construction, $\star$ est tangentiel au sens où chaque $\mathcal{U}_k(\Lambda_x \dots \Lambda_x)$ est un opérateur bi-différentiel dont l'expression dans nos coordonnées ne fait intervenir que des dérivées partielles relatives aux variables $y^1, \dots, y^n$.

On décrit maintenant une déformation D de la connexion D_0 . On la définit d'abord localement en posant pour toute section f de E :

$$(Df)_x = d_x f + A_x^M f_x = (D_0 f)_x + o(\nu),$$

où si $\xi \in T_x M$, $A_x^M(\xi)$ est

$$A_x^M(\xi) = A(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi), \Lambda_x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{U}_{k+1}(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi) \cdot \Lambda_x \cdot \dots \cdot \Lambda_x).$$

On peut vérifier ([CFT], lemme 4.1) que cette expression locale de D ne dépend pas des représentants choisis s_U et donc qu'elle induit une connexion D globalement définie sur E .

D'autre part, pour tout champ de vecteurs ξ tangent à la feuille de M passant par x , $s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi)$ appartient par construction à

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{R}[[y^1 \dots y^m]][[\nu]] \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Il en résulte que tous nos opérateurs différentiels $\mathcal{U}_{k+1}(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi) \cdot \Lambda_x \cdot \dots \cdot \Lambda_x)$ (et de ce fait $A_x^M(\xi)$) sont tangentiels.

Le produit $\star$ que l'on a défini sur les fibres confère une structure d'algèbre à l'espace $\Gamma(E)$ des sections de E par la multiplication point par point. On l'étend naturellement à l'espace $\Omega^*(M, E) = \Omega^*(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(E)$ des formes sur M à valeurs dans les fibres de E en posant localement:

$$\begin{aligned} \omega \star \omega' &= (a_{i_1, \dots, i_k}(y) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \star (b_{j_1, \dots, j_l}(y) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ &= (a_{i_1, \dots, i_k} \star b_{j_1, \dots, j_l})(y) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}. \end{aligned}$$

On a donc une structure d'algèbre graduée (par le degré des formes) et d'algèbre de Lie graduée sur $\Omega^*(M, E)$ par le crochet

$$[\omega, \omega']_\star = \omega \star \omega' - (-1)^{kl} \omega' \star \omega \quad \forall \omega \in \Omega^k(M, E), \omega' \in \Omega^l(M, E).$$

Enfin, on étend D (et D_0) à $\Omega^*(M, E)$ par la règle de Leibniz

$$D(a \wedge b) = (d_x a) \wedge b + (-1)^p a \wedge D b \quad \forall a \in \Omega^p(M), \forall b \in \Omega^*(M, E),$$

ou, ce qui revient au même, en utilisant la formule plus explicite suivante:

$$\begin{aligned} D\omega(X_0, \dots, X_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i D_{X_i}(\omega(X_0, \dots, X_p)) + \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p), \end{aligned}$$

si $\omega \in \Omega^*(M, E)$ et les X_i sont des vecteurs tangents à M .

Cela a maintenant un sens de parler de D_0^2 et de D^2 . Notons que la platitude de D_0 se traduit par $D_0^2 = 0$, tandis que $D^2 \neq 0$.

b) Relations et premières propriétés.

Considérons un instant l'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^m)$ des multichamps de vecteurs et l'espace $D_{poly}(\mathbb{R}^m)$ des opérateurs multidifférentiels sur $\mathbb{R}^m$. Par analogie avec [AMM] et [AM], nous appellerons opérateur de Kontsevich toute série formelle $U = \sum_p U_p$ où les U_p sont des applications de $S^p(T_{poly}(\mathbb{R}^m))$ dans $D_{poly}(\mathbb{R}^m)$ telles que pour toute famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ de tenseurs contravariants totalement antisymétriques,

$$U_p(\alpha_1 \dots \alpha_p) = \bigoplus_{r \geq 0} \bigoplus_{s^1, \dots, s^r} U_{s^1, \dots, s^r}(\partial_{s^1} \otimes \dots \otimes \partial_{s^r}),$$

où les $s^l = (s_l^1, \dots, s_l^m)$ sont des multi-indices et où les coefficients $U_{s^1, \dots, s^r}$ des $U_p(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ en un point y de $\mathbb{R}^m$ sont des polynômes à coefficients constants en les composantes $\alpha_i^{r_1, \dots, r_p}(y)$ des α_i et en leurs dérivées partielles par rapport aux y^j .

Remarquons (ce sera nécessaire pour la suite) que l'action des opérateurs de Kontsevich s'étend naturellement à des multichamps de vecteurs α_i formels (c'est-à-dire à des tenseurs sur $\mathbb{R}^m$ à coefficients non plus dans $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mais dans $\mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]]$).

Nous noterons désormais $\mathfrak{U}$ l'espace des opérateurs de Kontsevich. L'algèbre de Lie $\mathcal{W}$ des champs de vecteurs formels sur $\mathbb{R}^m$ agit naturellement sur $\mathfrak{U}$: Si $U = \sum_p U_p$ est un opérateur de Kontsevich et ξ un champ de vecteurs formel sur $\mathbb{R}^m$, on note pour tout p :

$$\xi.U_p(\alpha_1 \dots \alpha_p) := - \sum_{l=1}^p U_p(\alpha_1 \dots L_\xi(\alpha_l) \dots \alpha_p),$$

où les α_i sont des multichamps de vecteurs (éventuellement formels) sur $\mathbb{R}^m$. On pose alors:

$$\xi.U := \sum_p \xi.U_p.$$

L'action définie ci-dessus fait de $\mathfrak{U}$ un $\mathcal{W}$ -module. Introduisons maintenant la cohomologie de Chevalley de $\mathcal{W}$ à valeurs dans $\mathfrak{U}$. Une p -cochaîne S est un élément de $Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^p \mathcal{W}, \mathfrak{U})$:

$$S : \mathcal{W} \times \dots \times \mathcal{W} \rightarrow \mathfrak{U} : \xi_1, \dots, \xi_p \mapsto S(\xi_1, \dots, \xi_p, \cdot).$$

Le cobord d'une p -cochaîne est la $p+1$ -cochaîne suivante:

$$\begin{aligned} \partial S(\xi_0, \dots, \xi_p, \cdot) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \xi_i.S(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_p, \cdot) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} S([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_p, \cdot). \end{aligned}$$

Nous appellerons cochaîne formelle toute série formelle $S = \sum_p S_p$ de p -cochaînes S_p . Bien entendu, les séries formelles P , A et F associées à la formalité canonique $\mathcal{U} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{U}_k$ de

$\mathbb{R}^m$ (cf. [CFT] et introduction de ce chapitre) sont des exemples de cochaînes formelles. De plus, on a la

Proposition VI.3.1 [CFT]

Soit α un 2-tenseur de Poisson (éventuellement formel) sur $\mathbb{R}^m$. Alors, pour tout ξ, η, ζ de $\mathcal{W}$, on a les relations:

$$\begin{aligned} (i) & P(\alpha) \circ (A(\xi, \alpha) \otimes Id + Id \otimes A(\xi, \alpha)) - A(\xi, \alpha) \circ P(\alpha) - \partial P(\xi, \alpha) = 0 \\ (ii) & P(\alpha) \circ (F(\xi, \eta, \alpha) \otimes Id - Id \otimes F(\xi, \eta, \alpha)) - A(\xi, \alpha) \circ A(\eta, \alpha) + \\ & + A(\eta, \alpha) \circ A(\xi, \alpha) - \partial A(\xi, \eta, \alpha) = 0 \\ (iii) & A(\xi, \alpha) \circ F(\eta, \zeta, \alpha) + A(\eta, \alpha) \circ F(\zeta, \xi, \alpha) + A(\zeta, \alpha) \circ F(\xi, \eta, \alpha) + \\ & + \partial F(\xi, \eta, \zeta, \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Preuve:

Ces relations s'obtiennent directement à partir de l'équation de formalité pour les coefficients de Taylor de $\mathcal{U}$. Rappelons que cette dernière s'écrit avec les notations du chapitre V,

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{U}_p(\alpha_1 \dots \alpha_p)) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, p\} \\ |I| \neq 0, |J| \neq 0}} \epsilon_\alpha(I, J) Q'_2(\mathcal{U}_{|I|}(\alpha_I) \mathcal{U}_{|J|}(\alpha_J)) = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \epsilon_\alpha(kl, 1 \dots \widehat{k} \widehat{l} \dots p) \mathcal{U}_{p-1}(Q_2(\alpha_k \alpha_l) \cdot \alpha_1 \dots \widehat{\alpha_k} \widehat{\alpha_l} \dots \alpha_p). \end{aligned}$$

En effet, on constate d'abord que pour toutes fonctions f, g ,

$$\begin{aligned} [P(\alpha) \circ (A(\xi, \alpha) \otimes Id + Id \otimes A(\xi, \alpha)) - A(\xi, \alpha) \circ P(\alpha)](f, g) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} \mathcal{U}_r(\alpha \dots \alpha) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\nu^s}{s!} (\mathcal{U}_{s+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) f) \otimes g \right) + \\ + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} \mathcal{U}_r(\alpha \dots \alpha) \left(f \otimes \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\nu^s}{s!} (\mathcal{U}_{s+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) g) \right) - \\ - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\nu^s}{s!} \mathcal{U}_{s+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} \mathcal{U}_r(\alpha \dots \alpha) (f \otimes g) \right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \mathcal{U}_k(\alpha \dots \alpha) ((\mathcal{U}_{n-k+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) f) \otimes g) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \mathcal{U}_k(\alpha \dots \alpha) (f \otimes (\mathcal{U}_{n-k+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) g)) - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^{k+1} \mathcal{U}_{k+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) (\mathcal{U}_{n-k}(\alpha \dots \alpha) (f \otimes g)) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} ((\mathcal{U}_{n+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) f) g + f (\mathcal{U}_{n+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) g) - \mathcal{U}_{n+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) (fg)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{k=1}^n C_n^k \mathcal{U}_k(\alpha \dots \alpha) (\mathcal{U}_{n-k+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) f) \otimes g) + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{k=1}^n C_n^k \mathcal{U}_k(\alpha \dots \alpha) (f \otimes (\mathcal{U}_{n-k+1}(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) g)) - \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{k=1}^n C_n^k \mathcal{U}_k(\xi \cdot \alpha \dots \alpha) (\mathcal{U}_{n-k+1}(\alpha \dots \alpha) (f \otimes g)).
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'équation de formalité, l'égalité $[\alpha, \alpha]_S = 0$ et le fait que pour tout tenseur contravariant antisymétrique η , $\eta \cdot \alpha = \alpha \cdot \eta$ puisque α est un 2-tenseur, on voit aussitôt que:

$$\begin{aligned}
& P(\alpha) \circ (A(\xi, \alpha) \otimes Id + Id \otimes A(\xi, \alpha)) - A(\xi, \alpha) \circ P(\alpha) = \\
& = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} n \mathcal{U}_n([\xi, \alpha]_S \cdot \alpha \dots \alpha) = \partial P(\xi, \alpha).
\end{aligned}$$

On a donc (i). Les points (ii) et (iii) s'obtiennent de manière tout à fait analogue. $\square$

Revenons dorénavant à notre variété de Poisson (M, Λ) . Pour tout élément S de $Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^p \mathcal{W}, \mathcal{U})$, on construit la p -forme S^M sur M à valeurs dans les opérateurs sur $\mathbb{R}^m$ définie par:

$$S_x^M(\xi_1, \dots, \xi_p) = S(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi_1), \dots, s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi_p), \Lambda_x).$$

En particulier, on notera:

$$\begin{aligned}
P_x^M &= P(\Lambda_x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{U}_k(\Lambda_x \dots \Lambda_x) \\
A_x^M(\xi) &= A(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi), \Lambda_x) \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{U}_{k+1}(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi) \cdot \Lambda_x \dots \Lambda_x) \\
F_x^M(\xi, \eta) &= F(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi), s_U^*(\omega_{MC})_x(\eta), \Lambda_x) \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{U}_{k+2}(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi) \cdot s_U^*(\omega_{MC})_x(\eta) \cdot \Lambda_x \dots \Lambda_x),
\end{aligned}$$

où ξ, η sont maintenant des champs de vecteurs sur M .

De la proposition précédente, on déduit immédiatement le

Corollaire VI.3.2 [CFT]

Pour tout champ de vecteurs ξ, η, ζ sur M ,

$$(i) P_x^M \circ (A_x^M(\xi) \otimes Id + Id \otimes A_x^M(\xi)) - A_x^M(\xi) \circ P_x^M - (\partial P)_x^M(\xi) = 0$$

$$\begin{aligned}
(ii) & P_x^M \circ (F_x^M(\xi, \eta) \otimes Id - Id \otimes F_x^M(\xi, \eta)) - A_x^M(\xi) \circ A_x^M(\eta) + \\
& + A_x^M(\eta) \circ A_x^M(\xi) - (\partial A)_x^M(\xi, \eta) = 0 \\
(iii) & A_x^M(\xi) \circ F_x^M(\eta, \zeta) + A_x^M(\eta) \circ F_x^M(\zeta, \xi) + A_x^M(\zeta) \circ F_x^M(\xi, \eta) + \\
& + (\partial F)_x^M(\xi, \eta, \zeta) = 0.
\end{aligned}$$

Proposition VI.3.3 [CFT]

L'application $S \mapsto S^M$ qui à tout élément S de $Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^p \mathcal{W}, \mathfrak{U})$ associe la p -forme S^M sur M à valeurs dans les opérateurs sur $\mathbb{R}^m$, où

$$S_x^M(\xi_1, \dots, \xi_p) = S(s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi_1), \dots, s_U^*(\omega_{MC})_x(\xi_p), \Lambda_x),$$

définit un morphisme de complexes du complexe de Chevalley $(Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^* \mathcal{W}, \mathfrak{U}), \partial)$ dans celui de de Rham $(\Omega^*(M, D_{poly}(\mathbb{R}^m)), d)$.

Il est maintenant facile de montrer le

Théorème VI.3.4 [CFT]

Si D désigne encore la connexion naturelle $D = d + A^M$ sur E et $\star$ le produit associatif sur les fibres de E , alors, pour toute fonction f, g de $\Gamma(E)$, on a:

$$\begin{aligned}
(1) & D(f \star g) = (Df) \star g + f \star (Dg) \\
(2) & D^2(f) = F^M \star f - f \star F^M \\
(3) & DF^M = 0 \quad (\text{identité de Bianchi}).
\end{aligned}$$

Preuve:

Compte-tenu de la proposition VI.3.3, $(\partial P)_x^M = d(P_x^M)$. De cette égalité et du corollaire VI.3.2 (i), on déduit (1). A présent, soient f une section de E et ξ, η deux champs de vecteurs sur M . Alors,

$$\begin{aligned}
D^2 f(\xi, \eta) &= D_\xi(D_\eta f) - D_\eta(D_\xi f) - D_{[\xi, \eta]} f = \\
&= A_x^M(\xi) \circ A_x^M(\eta)(f) - A_x^M(\eta) \circ A_x^M(\xi)(f) + (\partial A)_x^M(\xi, \eta)(f).
\end{aligned}$$

Ainsi, par le corollaire VI.3.2 (ii),

$$D^2 f(\xi, \eta) = P_x^M \circ (F_x^M(\xi, \eta) \otimes f - f \otimes F_x^M(\xi, \eta)).$$

D'où le point (2). Le point (3) résulte directement du point (iii) de ce même corollaire. $\square$

On définit la notion de connexion de Fedosov tangentielle comme suit:

Définition VI.3.5

Une connexion D sur E est une connexion de Fedosov de courbure de Weyl F dans $\Omega^2(M, E)$ si pour toute forme ω, ω' de $\Omega^*(M, E)$,

$$D(\omega \star \omega') = (D\omega) \star \omega' + (-1)^{\deg(\omega)} \omega \star (D\omega'), \quad D^2 \omega = F \star \omega - \omega \star F, \quad \text{et } DF = 0.$$

Une connexion de Fedosov $D = d + \Theta$ sur E est tangentielle si pour tout x de M , et pour tout vecteur ξ tangent à la feuille L de $\mathcal{L}$ passant par x , $\Theta_x(\xi)$ est un opérateur tangentiel formel sur $\mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]]$.

On déduit du théorème VI.3.4 et de la définition VI.3.5 que notre connexion naturelle D sur $\Omega^*(M, E)$ est une connexion de Fedosov tangentielle de courbure de Weyl F^M .

VI.4 Adoption de la méthode de Fedosov et tangentialité.

a) Connexions tangentielles plates de Fedosov.

Suivant le procédé de Fedosov [Fe1, Fe2], on peut maintenant modifier D en une connexion de Fedosov plate $\bar{D}$. On annonce d'abord un résultat cohomologique connu (voir par exemple [Fe2] ou [CFT] pour la preuve).

Proposition VI.4.1 [Fe2, CFT]

Les groupes de cohomologie de $D_0 : \Omega^*(M, E_0) \rightarrow \Omega^{*+1}(M, E_0)$ sont les suivants:

$$H^p(E_0, D_0) = \begin{cases} C^\infty(M) & \text{si } p = 0 \\ \{0\} & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

Proposition VI.4.2 [CFT]

Si D est une connexion de Fedosov tangentielle de courbure de Weyl F , alors pour toute 1-forme γ sur M à valeurs dans E , $D' = D + [\gamma, \cdot]_\star$ est une connexion de Fedosov tangentielle de courbure de Weyl

$$F' = F + D\gamma + \gamma \star \gamma.$$

Preuve:

La seule chose à vérifier ici est que D' est tangentielle, si D l'est. Le reste de la preuve est donné dans [CFT]. Or, pour tout champ de vecteurs ξ , $\gamma(\xi)$ est une section de E et l'on a:

$$[\gamma, \cdot]_\star(\xi) = \gamma(\xi) \star \cdot - \cdot \star \gamma(\xi).$$

Ainsi, par tangentialité de $\star$ en les variables y^l , $[\gamma, \cdot]_\star(\xi)$ est bien un opérateur formel tangentiel sur $\mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]]$. $\square$

Proposition VI.4.3 [CFT]

Il existe sur E une connexion de Fedosov tangentielle de courbure de Weyl nulle.

Preuve:

On cherche une connexion plate de la forme $\bar{D} = D + [\gamma, \cdot]_\star$ où γ appartient à $\nu\Omega^1(M, E)$. D'après la proposition précédente et comme $F^M = \nu F_1^M + \nu^2 F_2^M + \dots$, nous devons résoudre l'équation

$$F^M + D\gamma + \gamma \star \gamma = 0 \quad \text{pour } \gamma \in \nu\Omega^1(M, E).$$

On suppose avoir trouvé $\gamma^{(k)} = \nu\gamma_1 + \dots + \nu^k\gamma_k$ tel que

$$\overline{FM}^{(k)} := F^M + D\gamma^{(k)} + \gamma^{(k)} \star \gamma^{(k)} = 0 \mod \nu^{k+1},$$

et on cherche γ_{k+1} tel que

$$\begin{aligned} \overline{FM}^{(k+1)} &= F + D\gamma^{(k+1)} + \gamma^{(k+1)} \star \gamma^{(k+1)} = 0 \mod \nu^{k+2} \\ &= \overline{FM}^{(k)} + \nu^{k+1}D_0\gamma_{k+1} \mod \nu^{k+2}. \end{aligned}$$

Or

$$D\overline{FM}^{(k)} + [\gamma^{(k)}, \overline{FM}^{(k)}]_\star = 0$$

(c'est l'identité de Bianchi pour $\overline{D}$). Comme $\nu\overline{FM}^{(k)} = 0$ modulo ν^{k+2} , cette dernière expression se réduit modulo ν^{k+2} à:

$$D_0\overline{FM}^{(k)} = 0 \mod \nu^{k+2}.$$

Enfin, comme $H^2(E_0, D_0) = \{0\}$, on peut trouver γ_{k+1} tel que

$$D_0\gamma_{k+1} = -\nu^{-k-1}\overline{FM}^{(k)}|_{\nu=0}.$$

D'où la proposition par récurrence. $\square$

b) Le résultat: obtention d'un produit-star tangentiel.

Soit γ une 1-forme dans $\nu\Omega^1(M, E)$ tel que $\overline{D} = D + [\gamma, \cdot]_\star$ soit plate. Considérons la projection $\pi : H^0(E, \overline{D}) \rightarrow C^\infty(M)$ qui associe à chaque section $\overline{D}$ -horizontale f sur E la fonction $C^\infty : x \mapsto f_x(0)$. Il s'agit maintenant de construire une section de π de la forme:

$$\rho = id + \nu\rho_1 + \dots : H^0(E_0, D_0) \simeq C^\infty(M) \rightarrow H^0(E, \overline{D}).$$

On peut montrer [CFT] l'existence de ρ de manière cohomologique. Pour cela, on doit introduire l'espace B_k des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$, s'annulant sur les constantes. Pour tout T de B_k , on pose:

$$D_0(T) = D_0 \circ T - T \circ D_0.$$

On obtient alors un nouveau complexe $(\cup_k B_k, D_0)$ et, comme pour (E_0, D_0) , la cohomologie résultante est acyclique en degré supérieur à zéro (voir [CFT]):

$$H^p(\cup_k B_k, D_0) = 0 \quad \forall p > 0.$$

L'annulation du premier espace permet de résoudre par récurrence l'équation

$$D \circ \rho - \rho \circ D_0 = 0.$$

Enfin, $\overline{D}$ étant une dérivation de l'algèbre des sections $\Gamma(E)$ de E , l'espace des sections $\overline{D}$ -horizontales $H^0(E, \overline{D})$ est une algèbre. La formule suivante

$$f \star_M g = \pi(\rho(f) \star \rho(g)) \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

a donc un sens et définit un produit-star sur M .

On trouve dans [CFT] une seconde construction plus explicite de l'application ρ . Décrivons-la rapidement. A tout f de $C^\infty(M)$, on associe la section $R^M(f)$ de E définie par

$$R_x^M(f) = R(f_x, \Lambda_x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\nu^k}{k!} \mathcal{U}_{k+1}(f_x \cdot \Lambda_x \dots \cdot \Lambda_x) \in \mathbb{R}[[y^1, \dots, y^m]][[\nu]],$$

où l'on a à nouveau noté

$$\Lambda_x = (\varphi_x^{-1})_*(\Lambda)$$

et où $f_x(y)$ désigne le développement de Taylor de $(f \circ \varphi_x)$ en $y = 0$.

Pour tout champ de vecteurs hamiltonien η sur M de développement de Taylor $\overline{\eta}$, on pose

$$H(\overline{\eta}) = F(\overline{\eta}, s_U^*(\omega_{MC})(\cdot), \Lambda_x) - A(\overline{\eta}, \Lambda_x)\gamma \in \Omega^1(M, E).$$

De la trivialité de $H^1(M, E_0)$, on déduit l'existence d'une unique section $\beta(\eta)$ de E vérifiant

$$\begin{cases} \overline{D}\beta(\eta) &= -H(\overline{\eta}) \\ \beta(\eta)(y=0) &= 0. \end{cases}$$

Par construction, $\eta \rightarrow \beta(\eta)$ est linéaire et l'application ρ attendue est:

$$\rho(f) = R^M(f) + \nu\beta([\Lambda, f]_S).$$

Pour les variétés de Poisson feuilletées, la notion la plus naturelle de produit-star tangentiel est donnée par la

Définition VI.4.4

Un produit-star $\star$ (différentiel) sur $(M, \mathcal{L}, \Lambda)$ est dit tangentiel si pour tout domaine V de carte adaptée et pour toute fonction locale f , constante sur les plaques de V , on a:

$$f \star g|_V = fg|_V \quad \forall g \in C^\infty(M).$$

Il s'agit-là tout simplement de l'adaptation de la notion de tangentialité différentielle (définition I.5.4 du chapitre I). On avait déjà remarqué que les produits-star différentiels et tangentiels sur les variétés de Poisson régulières sont tangentiels à toutes les feuilles symplectiques. De même, un produit-star tangentiel sur $(M, \mathcal{L}, \Lambda)$ au sens de la définition VI.4.4 est tangentiel à toutes les feuilles de $\mathcal{L}$.

On arrive alors au résultat principal du chapitre.

Théorème VI.4.5

L'application $\rho : C^\infty(M) \rightarrow H^0(E, \overline{D})$ décrite ci-dessus induit un produit-star $\star_M$ tangentiel sur M .

Preuve:

Soit V un domaine de carte adaptée et f une fonction locale, constante sur les plaques de V . Montrons que

$$\rho(f)(x) = R_x^M(f) + \nu\beta([\Lambda, f]_S)(x) = f_x \quad \forall x \in V.$$

Pour cela, on vérifie d'abord que l'on a

$$\mathcal{U}_{k+1}(f_x \cdot \Lambda_x \dots \Lambda_x) = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Par définition de la formalité de Kontsevich pour $\mathbb{R}^m$, cette fonction est:

$$\mathcal{U}_{k+1}(f_x \cdot \Lambda_x \dots \Lambda_x) = \sum_{\Gamma \in G_{k+1,0}} W_\Gamma B_\Gamma(f_x \cdot \Lambda_x \dots \Lambda_x),$$

où $G_{k+1,0}$ désigne l'ensemble des graphes admissibles Γ à $k+1$ sommets aériens (notés $p_0, \dots, p_k$) dans le demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

et $2k$ flèches: deux flèches partant de chaque sommet p_i ($i \geq 1$) et aboutissant sur un autre sommet p_j (il n'y a ni boucles ni flèches parallèles).

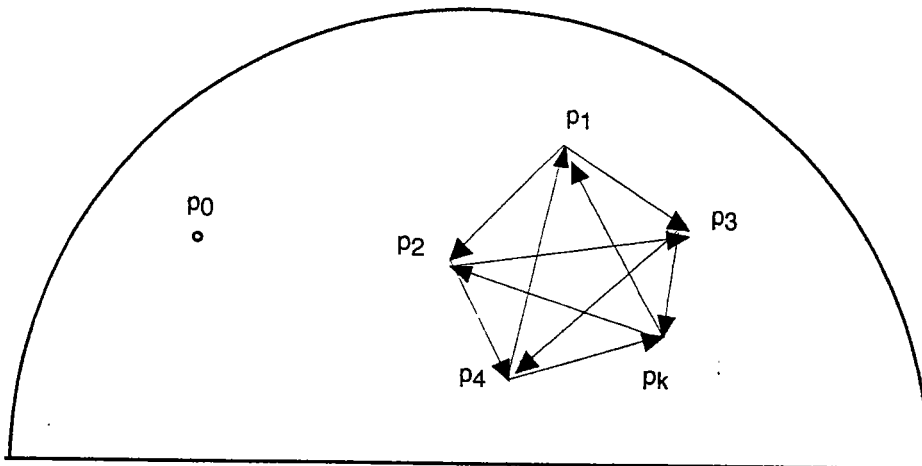


Figure 3: un graphe dans $G_{k+1,0}$.

On rappelle (cf. chapitre V) que la fonction $B_\Gamma(f_x \cdot \Lambda_x \cdot \dots \cdot \Lambda_x)$ est définie à partir de Γ , des dérivées partielles de f_x et des coefficients Λ_x^{ij} de Λ . Comme f est constante sur les plaques et que Λ est tangent aux feuilles de $\mathcal{L}$, les seuls graphes Γ pour lesquels $B_\Gamma(f_x \cdot \Lambda_x \cdot \dots \cdot \Lambda_x)$ n'est pas identiquement nul sont ceux dont aucune flèche n'aboutit sur p_0 . Ces graphes sont de la forme de la figure 3 ci-dessus. De tels graphes Γ étant non connexes, ils ont un poids W_Γ nul. Précisons cela. On rappelle que W_Γ est par définition l'intégrale d'une $2k$ -forme ω_Γ sur un espace de configuration $C_{k+1,0}^+$. Cet espace de configuration peut être paramétré par :

$$p_1 = i, p_0 = z_0, p_2 = z_1, \dots, p_k = z_{k-1}.$$

L'application

$$(i, z_0, z_1, \dots, z_{k-1}) \mapsto ((i, z_1, \dots, z_{k-1}), z_0)$$

permet alors d'identifier $C_{k+1,0}^+$ à un ouvert dense de $C_{k,0}^+ \times \mathcal{H}$. Chacune des $2k$ -formes ω_Γ ne dépendant pas de z_0 , elles appartiennent à $\Lambda^{2k}(C_{k,0}^+)$. Or, $C_{k,0}^+$ est de dimension $2k-2$, donc $\Lambda^{2k}(C_{k,0}^+) = \{0\}$ et l'on a bien $\omega_\Gamma = 0$. D'autre part, puisque $[\Lambda, f]_S = 0$ d'après les hypothèses faites sur f et Λ , et par linéarité de β , on constate que

$$\beta([\Lambda, f]_S) = 0.$$

Ainsi,

$$\rho(f)(x) = \mathcal{U}_1(f_x) = f_x \quad \forall x \in V.$$

Par tangentialité de $\star$ en les variables y^l , on a en outre :

$$f_x \star \rho(g)(x) = f_x \rho(g)(x) \quad \forall g \in C^\infty(M), \forall x \in V.$$

Par ailleurs,

$$\rho(fg)(x) = R_x^M(fg) + \nu \beta([\Lambda, fg]_S)(x) = f_x R_x^M(g) + \nu \beta(f[\Lambda, g]_S)(x) \quad \forall x \in V.$$

Et, pour tout champ de vecteurs hamiltonien $\eta' = f\eta$, $f\beta(\eta)$ et $\beta(\eta')$ sont deux solutions de l'équation

$$\clubsuit \quad \overline{D}\beta(\eta) = -F(\overline{\eta'}, s_U^*(\omega_{MC}(.)), \Lambda_x) + A(\overline{\eta'}, \Lambda_x)\gamma$$

remplissant la condition de normalisation

$$f\beta(\eta) = \beta(\eta') = 0|_{y=0}.$$

Ceci provient de la linéarité en f_x du membre de droite de l'équation $\clubsuit$ ci-dessus. Par unicité de la solution, on obtient finalement : $\beta(f\eta) = f\beta(\eta)$ et pour toute fonction g sur M ,

$$\rho(fg)(x) = f_x \rho(g)(x) \quad \forall x \in V.$$

Par suite, pour tout x de V ,

$$\begin{aligned}\rho(f) \star \rho(g)(x) &= \rho(f)(x) \star \rho(g)(x) \\ &= f_x \star \rho(g)(x) \\ &= f_x \rho(g)(x) \\ &= \rho(fg)(x).\end{aligned}$$

Enfin,

$$f \star_M g|_V = \pi(\rho(f) \star \rho(g))|_V = \pi(\rho(fg))|_V = fg|_V.$$

Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

VI.5 Application aux algèbres de Lie.

Nous venons de démontrer l'existence d'un produit-star différentiel et tangentiel sur toute variété de Poisson feuilletée. Nous proposons maintenant de montrer en quoi ce résultat peut être utile pour la théorie des produits-star tangentiels sur les duals des algèbres de Lie.

Nous savons que le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une variété de Poisson qui n'est jamais symplectique, ni même régulière. Comme toute variété de Poisson, elle est cependant feuilletée (feuilletage généralisé) par des feuilles symplectiques. Ces feuilles, nous l'avons vu au chapitre I (proposition I.1.4), sont en fait les orbites de la représentation coadjointe.

Notons maintenant Ω l'ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$ des orbites de dimension maximale et $\mathcal{L}$ le feuilletage symplectique de Ω . C'est un vrai feuilletage et Ω est une variété de Poisson régulière. Il existe donc un produit-star différentiel et tangentiel sur Ω .

Nous savons qu'un tel produit-star ne peut pas être étendu en général à tout $\mathfrak{g}^*$ (c'est le résultat de [ACG1, CGR2], rappelé au chapitre III).

Une question alors se pose: peut-on munir $\mathfrak{g}^*$ (ou au moins une partie de $\mathfrak{g}^*$ contenant strictement Ω) d'une structure de variété de Poisson feuilletée en complétant les orbites de dimension maximale par d'autres variétés (non symplectiques) de cette même dimension? Autrement dit, peut-on étendre le feuilletage (régulier) $\mathcal{L}$ à un ouvert Ω' strictement plus grand que Ω ? En cherchant la réponse à cette question, nous avons obtenu la

Proposition VI.5.1

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension m , Ω l'ouvert des orbites de dimension maximale de $\mathfrak{g}^$ et $\mathcal{L}$ le feuilletage symplectique de Ω . Soient encore $n = 2d$ la dimension maximale des orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$, et $l = m - n$. Enfin, supposons qu'il existe un ouvert Ω_1 de $\mathfrak{g}^*$ et l fonctions invariantes $z_1, \dots, z_l$, définies sur Ω_1 et telles que les vecteurs $dz_1, \dots, dz_l$ soient linéairement indépendants en tout point de Ω_1 . Alors, on peut étendre $\mathcal{L}$ en un feuilletage $\mathcal{L}'$ sur $\Omega' = \Omega_1 \cup \Omega$, et il existe sur cet ouvert Ω' un produit-star différentiel, tangentiel à toutes les orbites de dimension maximale.*

Preuve:

Notons v l'application définie par

$$v : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^l : \xi \mapsto (z_1(\xi), \dots, z_l(\xi)).$$

Avec nos hypothèses, v est une submersion puisque, pour tout point ξ de Ω_1 , la différentielle $v_{*\xi}$ de v en ξ est de rang l . On a donc un feuilletage naturel sur Ω_1 , noté $\mathcal{L}_1$, les feuilles étant les composantes connexes des $v^{-1}(x)$, où x parcourt $\mathbb{R}^l$.

Montrons à présent que le feuilletage $\mathcal{L}_1|_{\Omega \cap \Omega_1}$ induit par $\mathcal{L}_1$ sur $\Omega \cap \Omega_1$ coïncide avec la restriction $\mathcal{L}|_{\Omega \cap \Omega_1}$ de $\mathcal{L}$ à $\Omega \cap \Omega_1$. Pour tout ξ de $\Omega \cap \Omega_1$, on sait déjà que la feuille de $\mathcal{L}$ passant par ξ est l'orbite coadjointe (connexe) O_ξ de ξ , de dimension $n = 2d$. De plus, la feuille $L_1(\xi)$ de $\mathcal{L}_1$ contenant ξ est, par construction, une sous-variété connexe de $\mathfrak{g}^*$ aussi de dimension $n = 2d$ et contenant O_ξ .

Considérons maintenant une carte (U_1, φ) de $\Omega \cap \Omega_1$ en ξ adaptée à $\mathcal{L}_1$ et notons Q_ξ la plaque de $\mathcal{L}_1|_{U_1}$ passant par ξ . Il est clair que pour toute feuille L de $\mathcal{L}$, $Q_\xi \cap L$ est ouvert dans Q_ξ . (En effet, pour tout point μ de $Q_\xi \cap L$, on peut trouver un domaine U de carte adaptée pour $\mathcal{L}$ contenant μ et considérer la plaque P_μ de $\mathcal{L}|_U$ passant par μ . Alors, $Q_\xi \cap P_\mu$ est un ouvert de Q_ξ contenu dans $Q_\xi \cap L$.)

Par conséquent, Q_ξ est une réunion disjointe d'ouverts, chaque ouvert étant l'intersection de Q_ξ avec une feuille L de $\mathcal{L}$. Par connexité de Q_ξ , on déduit que

$$Q_\xi = Q_\xi \cap O_\xi,$$

ce qui équivaut à

$$Q_\xi \subset O_\xi.$$

Les feuilletages $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}$ coïncident donc bien sur l'intersection $\Omega \cap \Omega_1$, et on peut définir un feuilletage $\mathcal{L}'$ sur $\Omega' = \Omega \cup \Omega_1$ en posant:

$$\begin{cases} L'(\xi) = L_1(\xi) & \text{si } \xi \in \Omega_1 \\ L'(\xi) = O_\xi & \text{si } \xi \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Ce feuilletage fait de $(\Omega', \mathcal{L}', \Lambda|_{\Omega'})$ une variété de Poisson feuilletée. Du théorème VI.4.5, on déduit qu'il existe sur Ω' un produit-star différentiel, tangentiel à toutes les feuilles de $\mathcal{L}'$ et donc à toutes les orbites coadjointes de dimension maximale. $\square$

Remarques VI.5.2

Nous avons déjà eu l'occasion de voir au cours de cette thèse que les hypothèses du théorème précédent sont remplies pour les algèbres de Lie nilpotentes. Plus généralement, il existe un ouvert Ω_1 et des invariants rationnels z_j avec les conditions de la proposition VI.5.1 pour l'algèbre de Lie de tout groupe algébrique (voir [Ki] p.257 par exemple).

Donnons maintenant des exemples concrets d'algèbres de Lie nilpotentes pour lesquelles notre résultat s'applique.

Revenons d'abord sur $\mathfrak{g}_{5,4}$ dont les crochets sont, rappelons-le:

$$[X_5, X_4] = X_3, \quad [X_5, X_3] = X_2, \quad [X_4, X_3] = X_1.$$

Comme on l'avait déjà constaté au chapitre III de cette thèse, $\mathfrak{g}_{5,4}$ possède un invariant quadratique

$$\Delta = \frac{X_3^2}{2} + X_5 X_1 - X_2 X_4,$$

dont l'idéal $\hat{\beta}(\mathfrak{g}_{5,4}^*)$ associé coïncide avec $\mathfrak{g}_{5,4}$. Cet idéal n'étant pas de pas 2, il n'existe pas d'après [CGR2] de produit-star sur $\mathfrak{g}_{5,4}^*$ à la fois différentiel et tangentiel aux orbites de dimension maximale (d'ailleurs même pas aux orbites génériques). En fait, pour cet exemple, on peut voir directement que le feuilletage symplectique $\mathcal{L}$ ne peut être étendu à aucun point ξ' extérieur à Ω . Pour cela, on peut montrer par exemple qu'il n'existe pas de carte adaptée au voisinage d'un point ξ' de $\mathfrak{g}_{5,4}$ tel que $\xi'_1 = \xi'_2 = \xi'_3 = 0$. Une autre façon de procéder, probablement plus astucieuse, est de considérer les espaces tangents aux orbites de Ω . En effet, supposons que l'on puisse étendre le feuilletage régulier $\mathcal{L}$ à un ouvert Ω' strictement plus grand que Ω . Il existerait alors une distribution D de classe C^∞ telle que pour tout point ξ' de Ω' ,

$$i_*(TO_{\xi'}) = D|_{i(O_{\xi'})},$$

si i désigne l'immersion injective de l'orbite $O_{\xi'}$ de ξ' dans $\mathfrak{g}_{5,4}^*$. Or, l'espace tangent de l'orbite Ω_ξ d'un point ξ générique (*i.e.* tel que $\xi_1 \neq 0$) est de la forme:

$$T_\xi O_\xi = \{a\partial_3 + b\partial_4 + c\partial_5 : \xi_3 a - \xi_2 b + \xi_1 c = 0\},$$

d'où une contradiction.

En revanche, si l'on considère le produit-semi direct $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R} \times \mathfrak{g}_{5,4}$ de $\mathfrak{g}_{5,4}$ par $\mathbb{R}$, de base $B = (X_1, \dots, X_6)$ et de crochets non nuls:

$$[X_6, X_5] = X_1, \quad [X_5, X_4] = X_3, \quad [X_5, X_3] = X_2, \quad [X_4, X_3] = X_1.$$

Alors, l'ouvert générique V_B coïncide avec l'ouvert Ω des orbites de dimension maximale:

$$V_B = \Omega = \{\xi = \sum \xi_i X_i^* : \xi_1 \neq 0\}$$

et pour tout ξ de Ω , on peut écrire avec les notations usuelles:

$$O_\xi = \{(\xi_1, \xi_2, q_1, \xi_1 p_1, \xi_2 p_1 - \frac{q_1^2}{2\xi_1} + q_2, \xi_1 p_2) : p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{R}\}.$$

D'après la proposition VI.5.1, le feuilletage symplectique $\mathcal{L}$ de Ω s'étend naturellement en un feuilletage $\mathcal{L}'$ sur tout $\mathfrak{g}_1^*$. Explicitement, on a:

$$\mathcal{L}' = (\bigoplus_{\xi_1 \neq 0} O_\xi) \bigcup (\bigoplus_{\xi_2} \{(0, \xi_2, x, y, z, t) : x, y, z, t \in \mathbb{R}\}).$$

On munit ainsi l'ensemble du dual $\mathfrak{g}_1^*$ d'une structure de variété de Poisson feuilletée. De notre théorème VI.4.5, on déduit que $\mathfrak{g}_1^*$ admet un produit-star différentiel et tangentiel à toutes les orbites de dimension maximale. Notez que dans cet exemple le produit-star de Gutt coïncide avec celui de Kontsevich-Duflo [Ar2], et est déjà tangentiel.

Prenons maintenant l'exemple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{6,12}$. Les crochets définissant la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{6,12}$ sont les suivants:

$$[X_6, X_5] = X_4, \quad [X_6, X_4] = X_3, \quad [X_6, X_3] = X_2, \quad [X_5, X_2] = -X_1, \quad [X_4, X_3] = X_1.$$

Les orbites génériques O_ξ (ici $\Omega = \{\xi = \xi_i X_i^* : \xi_1 \neq 0\}$) peuvent être paramétrées comme suit:

$$O_\xi = \left\{ \left(\xi_1, q_1, q_2, \xi_1 p_2, -\xi_1 p_1, z + q_1 p_2 - \frac{q_2^2}{2\xi_1} \right) : p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

L'ensemble des orbites de dimension 2 est:

$$\{\xi : \xi_1 = 0, \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 \neq 0\}.$$

Comme pour $\mathfrak{g}_{5,4}$, cette algèbre de Lie possède un invariant quadratique à savoir

$$\Delta' = \frac{X_3^2}{2} + X_6 X_1 - X_2 X_4.$$

Bien que dégénérée, la forme quadratique β correspondant à Δ' est telle que l'idéal $\hat{\beta}(\mathfrak{g}_{6,12}^*)$ est nilpotent de pas 3 et non 2:

$$\hat{\beta}(\mathfrak{g}_{6,12}^*) = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 \rangle.$$

Là encore, l'argument de [CGR2] nous permet d'affirmer qu'il n'existe pas de produit-star tangentiel et différentiel sur $\mathfrak{g}_{6,12}^*$. Cependant, les hypothèses de la proposition VI.5.1 sont satisfaites pour l'ouvert

$$\Omega_1 = \{\xi = \xi_i X_i^* : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 \neq 0\},$$

et pour les invariants $z_1 = X_1$ et $z_2 = \Delta'$ (vus bien sûr comme des fonctions sur $\mathfrak{g}_{6,12}^*$). En effet, l'application $v : \xi \mapsto (z_1(\xi), z_2(\xi))$ a pour jacobienne la matrice:

$$Jac(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_6 & -\xi_4 & \xi_3 & -\xi_2 & 0 & \xi_1 \end{pmatrix},$$

qui est de rang 2 sur Ω_1 . Ainsi, $\Omega' = \Omega \cup \Omega_1 = \Omega_1$ est une variété de Poisson feuilletée (elle correspond à la réunion de toutes les orbites de dimension non nulle). Par le théorème VI.4.5 et la proposition VI.5.1, il existe donc un produit-star différentiel et tangentiel sur Ω' . C'est d'une certaine façon ce que l'on pouvait faire de mieux pour $\mathfrak{g}_{6,12}^*$, puisque si l'on calcule les espaces tangents aux orbites contenues dans Ω' , on peut montrer comme pour $\mathfrak{g}_{5,4}$ que l'on ne peut espérer pouvoir étendre le feuilletage $\mathcal{L}'$ au-delà de Ω' .

Commentaires VI.5.3

• *L'extension du feuilletage $\mathcal{L}$ de Ω est loin d'être la seule façon de construire un produit-star tangentiel sur le dual d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: le fait que $\mathfrak{g}^*$ ne puisse pas être muni d'une structure de variété de Poisson feuilletée ne signifie pas qu'il n'existe pas de produit-star différentiel et tangentiel sur $\mathfrak{g}^*$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas de $\mathfrak{g}_{4,1}$. On rappelle que cette algèbre de Lie nilpotente a pour crochets:*

$$[X_4, X_3] = X_2, \quad [X_4, X_2] = X_1,$$

et que l'ouvert des orbites de dimension maximale est:

$$\Omega = \{x \in \mathfrak{g}_{4,1}^* : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}.$$

Pour cet exemple, le feuilletage $\mathcal{L}$ de Ω ne peut être étendu à aucun point ξ extérieur à Ω . Pour le vérifier, il suffit de constater que l'espace tangent à l'orbite O_ξ d'un point ξ de Ω est de la forme:

$$T_\xi O_\xi = \{a\partial_2 + b\partial_3 + c\partial_4 : \xi_2 b - \xi_1 a = 0\}.$$

Pourtant, $\mathfrak{g}_{4,1}$ étant une algèbre de Lie filiforme, elle est spéciale; la construction de [ACG1] (ou [BA]) fournit donc un produit-star différentiel, défini sur tout $\mathfrak{g}_{4,1}^*$ et tangentiel à toutes les orbites de dimension maximale.

- Ce travail soulève un problème géométrique intéressant, plus général que celui traité dans notre proposition VI.5.1, celui de caractériser les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ pour lesquelles le feuilletage $\mathcal{L}$ peut effectivement être étendu en dehors de Ω .

A.1 Algèbres de Lie graduées et cohomologies

Le formalisme des algèbres de Lie graduées développé dans [DW-L1, DW-L2, NR] est particulièrement bien adapté aux théories de déformation. Nous rappelons ici comment ce formalisme permet de donner une présentation unifiée des cohomologies qui entrent en jeu dans la théorie des produits-star (voir aussi [Ro]).

On rappelle qu'une algèbre de Lie graduée sur un corps k de caractéristique nulle est un k -espace vectoriel gradué $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i$, muni d'un crochet $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ vérifiant les propriétés:

- i) $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$
- ii) $[X, Y] = (-1)^{|X||Y|+1}[Y, X] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$
- iii) $(-1)^{|X||Z|}[[X, Y], Z] + (-1)^{|Y||X|}[[Y, Z], X] + (-1)^{|Z||Y|}[[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

où l'on a noté $|X|$ le degré d'un élément X de $\mathfrak{g}$.

Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie graduée (par exemple sur $\mathbb{R}$). On appelle *structure* associée à $\mathfrak{g}$ un élément P de $\mathfrak{g}^1$ tel que $[P, P] = 0$. A chaque structure P , on peut associer un opérateur

$$\partial_P : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

de degré 1, défini par

$$\partial_P(X) = [P, X] \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

L'identité de Jacobi graduée de $\mathfrak{g}$ permet de montrer que $\partial_P^2 = 0$. On note $H_P^*(\mathfrak{g})$ la cohomologie associée à cet opérateur de cohomologie. Il résulte encore de l'identité de Jacobi graduée que le crochet $[\cdot, \cdot]$ passe au quotient et livre une structure d'algèbre de Lie graduée à l'espace $H_P^*(\mathfrak{g})$.

Si P est une structure de $\mathfrak{g}$, une déformation de P est une série formelle P_ν dans $\mathfrak{g}^1[[\nu]]$:

$$P_\nu = P + \nu P_1 + \nu^2 P_2 + \dots$$

telle que l'on ait formellement l'égalité

$$[P_\nu, P_\nu] = 0.$$

En degré 1, cela signifie que $[P, P_1] = 0$, donc que P_1 est un cocycle pour ∂_P . Une déformation P_ν de P est dite *triviale* s'il existe un élément Q_ν dans $\mathfrak{g}^0[[\nu]]$ tel que l'on ait formellement $P_\nu = [P, Q_\nu]$. A l'ordre 1, on obtient $P_1 = [P, Q_1] = \partial_P Q_1$; pour qu'une déformation P_ν soit triviale, il faut donc que le cocycle P_1 soit un cobord. Finalement, le premier espace, $H_P^1(\mathfrak{g})$, classe les déformations de P , tandis que le second, $H_P^2(\mathfrak{g})$,

contient les obstructions au prolongement des déformations de P d'un ordre donné à un ordre supérieur.

L'algèbre $M(E)$

Soit E un espace vectoriel et $M^m(E)$ l'espace des applications $m+1$ -linéaires de E dans E . On définit un crochet de Lie gradué sur $M^*(E)$ de la manière suivante. Soient A et B deux applications dans $M^{m_1-1}(E)$ et $M^{m_2-1}(E)$ respectivement. On pose:

$$\begin{aligned} A \circ B(x_1, \dots, x_{m_1+m_2-1}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} A(x_1, \dots, x_{j-1}, B(x_j, \dots, x_{j+m_2-1}), x_{j+m_2}, \dots, x_{m_1+m_2-1}), \end{aligned}$$

puis

$$[A, B] = A \circ B + (-1)^{(m_1-1)(m_2-1)+1} B \circ A.$$

Un élément P de $M^1(E)$ vérifie $[P, P] = 0$ si et seulement s'il détermine une structure associative sur E . Soit P une telle structure et notons $\mathcal{A} = (E, P)$ l'algèbre associative obtenue. Alors, la cohomologie associée à ∂_P s'identifie à la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ avec le décalage suivant:

$$H_P^k(M^*(E)) = H^{k+1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}).$$

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur une variété M , munie de la multiplication usuelle des fonctions, le crochet $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Gerstenhaber $[\cdot, \cdot]_G$ utilisé dans [Ger].

L'algèbre de Richardson-Nijenhuis $A(E)$

Soit encore E un espace vectoriel. On note $A^k(E)$ l'espace des applications $k+1$ -linéaires alternées sur E à valeurs dans E . Par antisymétrisation du crochet $[\cdot, \cdot]$ de $M(E)$ vu plus haut, on obtient sur $A^*(E)$ un crochet gradué, dit crochet de Richardson-Nijenhuis $[\cdot, \cdot]_{RN}$:

$$[A, B]_{RN} = a([A, B]);$$

l'antisymétrisation d'un élément C de $A^k(E)$ étant défini par:

$$aC(u_1, \dots, u_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+1}} \epsilon(\sigma) C(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k+1)}),$$

si l'on note Σ_{k+1} le groupe des permutations de $\{1, \dots, k+1\}$. Un élément P de $A^1(E)$ vérifie $[P, P]_{RN} = 0$ si et seulement si P désigne une structure d'algèbre de Lie sur E . La cohomologie associée à un tel P n'est autre que la cohomologie de Chevalley de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (E, P)$ qu'il définit, avec le décalage:

$$H_P^k(A^*(E)) = H_{Chev}^{k+1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

L'algèbre de Schouten

Soient M une variété différentiable et $A^*(C^\infty(M))$ l'espace des applications multilinéaires alternées sur $C^\infty(M)$. L'espace $\mathcal{V}^*(M)$ des tenseurs contravariants totalement antisymétriques sur M s'identifie de manière naturelle au sous-espace $A^*(C^\infty(M))_{1-diff,nc}$ de $A^*(C^\infty(M))$ des applications 1-différentielles qui s'annulent sur les constantes. Le crochet de Richardson-Nijenhuis induit par restriction un crochet $[,]$ sur $\mathcal{V}^*(M)$ qui n'est autre que le crochet de Schouten. Un élément Λ tel que $[\Lambda, \Lambda] = 0$ pour ce crochet est donc une structure de Poisson sur M . Enfin, la cohomologie associée à une telle structure Λ est la cohomologie de Poisson de la variété de Poisson (M, Λ) avec le décalage:

$$H_\Lambda^k(A^*(C^\infty(M))_{1-diff,nc}) = H_\Lambda^{k+1}(M).$$

A.2 Classes d'équivalence et dérivations des produits-star tangentiels

En confrontant les théories cohomologiques de Hochschild et de Chevalley, les auteurs de [BCG] (voir aussi [DW-L1, DW-L2]) sont parvenus à localiser les obstructions à l'existence, les classes d'équivalence et les dérivations des produits-star sur une variété symplectique M dans les trois premiers espaces de la cohomologie de de Rham de M .

Leurs résultats se généralisent directement au cas des produits-star tangentiels sur les variétés de Poisson régulières, à condition bien sûr de substituer la cohomologie de Poisson tangentielle à la cohomologie de de Rham. Pour être complet, nous proposons ici de donner les preuves de cette généralisation.

Soient (M, Λ) une variété de Poisson régulière, $N = C^\infty(M)$ et Γ une connexion affine sur M , adaptée au feuilletage symplectique $\mathcal{F}$ de M (cf. chapitre II). Si on note ∇ la dérivation covariante associée à Γ , une application k -différentielle T de N dans N peut s'exprimer [Li2] de manière unique en termes de dérivées covariantes symétrisées des arguments et de tenseurs partiellement symétriques:

$$T(u_1, \dots, u_k) = \sum_{r_1, \dots, r_k} T_{r_1, \dots, r_k} \nabla^{r_1}(u_1) \dots \nabla^{r_k}(u_k).$$

L'application T est dite tangentielle si les différents tenseurs définissant T relativement à Γ sont tangentiels, *i.e.* sont des sections convenables de puissances tensorielles du fibré $T\mathcal{F}$ tangent au feuilletage $\mathcal{F}$. Cette définition est indépendante du choix de la connexion adaptée [Li2]. En fait, il est équivalent de dire que T est tangentielle et de dire que dans tout domaine U de carte d'un atlas adapté de M l'écriture de T dans U ne fait intervenir que des dérivées partielles tangentielles.

Dans la suite, nous ne considérerons que des applications différentielles nulles sur les constantes. Soit δ le cobord de Hochschild. On vérifie aussitôt que si une application différentielle T sur N est tangentielle et nulle sur les constantes, son cobord δT est également différentiel, tangentiel et nul sur les constantes. On peut donc définir une cohomologie de Hochschild tangentielle: Un k -cocycle de Hochschild T différentiel, tangentiel et nul sur les constantes est tangentielllement exact s'il est le cobord $T = \delta A$ d'une application $(k-1)$ -différentielle A , tangentielle et nulle sur les constantes. Le k -ième espace de cohomologie de Hochschild tangentielle, noté $H_{diff, tan, nc}^k(N)$, s'obtient alors en quotientant l'espace des k -cocycles différentiels, tangentiels et nuls sur les constantes par celui des k -cocycles tangentielllement exacts. A. Lichnerowicz a obtenu dans [Li2] une version tangentielle des résultats de Vey en degré 2 et 3:

Proposition A.2.1

Pour tout 2-cocycle C (resp. tout 3-cocycle E) de Hochschild, différentiel, tangentiel et nul sur les constantes, il existe une 1-cochaîne C' (resp. une 2-cochaîne E') de Hochschild,

différentiel, tangentiel et nul sur les constantes ainsi qu'un 2-tenseur A (resp. un 3-tenseur B) contravariant, tangentiel, totalement antisymétrique tel que l'on ait

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \delta C'(u, v) + A(du, dv) \\ E(u, v, w) &= \delta E'(u, v, w) + B(du, dv, dw). \end{aligned}$$

De même, on peut définir une version tangentielle de la cohomologie de Poisson de (M, Λ) . Si R est un k -tenseur contravariant antisymétrique et tangentiel, son cobord $\sigma R = [\Lambda, R]_S$ ($[\ , \]_S$ désignant le crochet de Schouten) est encore tangentiel. Un k -cocycle tangentiel est dit tangentielllement exact pour σ s'il est le cobord d'un $(k-1)$ -tenseur tangentiel. On appelle cohomologie de Poisson tangentielle de (M, Λ) la cohomologie $H_{\Lambda, \tan}^*(M)$ obtenue en quotientant l'espace des cocycles de Poisson tangentiels par celui des cobords tangentielllement exacts (pour σ).

On rappelle qu'un produit-star tangentiel sur (M, Λ) est une application bilinéaire $\star : N \times N \rightarrow N[[\nu]]$ de la forme

$$u \star v = uv + \{u, v\}\nu + \sum_{n \geq 2} C_n(u, v)\nu^n$$

dont l'extension bilinéaire naturelle à $N[[\nu]]$ définit une loi associative sur $N[[\nu]]$ et telle que les C_n sont des opérateurs différentiels, tangentiels, nuls sur les constantes et vérifiant la condition de parité $C_n(u, v) = (-1)^n C_n(v, u)$.

Deux produits-star tangentiels $\star$ et $\star'$ sur (M, Λ) sont dits tangentielllement équivalents s'il existe une série formelle $T = Id + \sum_k T_k \nu^k$ où les T_k sont des opérateurs différentiels, tangentiels, nuls sur les constantes et satisfaisant formellement l'égalité:

$$u \star' v = T^{-1}(Tu \star Tv) \quad \forall u, v \in N.$$

Les propositions suivantes montrent l'intérêt de la cohomologie de Poisson tangentielle $H_{\Lambda, \tan}^*(M)$ pour l'étude des produits-star tangentiels sur (M, Λ) .

Proposition A.2.2

Si (M, Λ) est une variété de Poisson régulière telle que $H_{\Lambda, \tan}^3(M)$ soit réduit à zéro, alors il existe des produits-star tangentiels sur M .

Preuve:

Supposons que la somme

$$u \star v = \sum_{k=0}^{2n} C_k(u, v)\nu^k = uv + \{u, v\}\nu + \sum_{k=2}^{2n} C_k(u, v)\nu^k$$

définisse un produit-star tangentiel sur M à l'ordre $2n$. Alors

$$E_{2n+1}(u, v, w) = \sum_{r+s=2n+1, r \geq 1, s \geq 1} C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w))$$

est un cocycle de Hochschild différentiel, tangentiel et nul sur les constantes. Sa partie totalement antisymétrique étant nulle en raison de la condition de parité imposée aux C_k et compte tenu de la proposition A.2.1, on peut trouver une cochaîne C_{2n+1} , différentielle, tangentielle, nulle sur les constantes, telle que $E_{2n+1} = \delta C_{2n+1}$. Quitte à remplacer C_{2n+1} par son antisymétrisé aC_{2n+1} (à savoir $aC_{2n+1}(u, v) = \frac{1}{2}[C_{2n+1}(u, v) - C_{2n+1}(v, u)]$), on peut supposer que $C_{2n+1}(u, v)$ est antisymétrique en (u, v) . Considérons donc le prolongement de $\star$, encore noté $\star$, en un produit-star $u \star v = \sum_{k=0}^{2n+1} C_k(u, v) \nu^k$ à l'ordre $2n+1$, tangentiel sur M . Alors,

$$E_{2n+2}(u, v, w) = \sum_{r+s=2n+2, r \geq 1, s \geq 1} C_r(C_s(u, v), w) - C_r(u, C_s(v, w))$$

est un cocycle de Hochschild différentiel, tangentiel, nul sur les constantes, qui s'écrit en vertu de la proposition A.2.1 sous la forme

$$E_{2n+2}(u, v, w) = \delta C_{2n+2}(u, v, w) + A(du, dv, dw)$$

où A est un 3-tenseur contravariant tangentiel et complètement antisymétrique et où $C_{2n+2}(u, v)$ peut être supposé symétrique en (u, v) . Puisque par antisymétrisation de $\star$, on obtient une déformation $[\cdot, \cdot]_\star$ à l'ordre n de la structure d'algèbre de Lie de N , l'antisymétrisé $aE_{2n+2} = A$ de E_{2n+2} est un 3-cocycle pour la cohomologie de Poisson tangentielle. Comme $H_{\Lambda, \text{tan}}^3(M) = \{0\}$, il existe un 2-tenseur B , tangentiel, antisymétrique et tel que $A = \sigma B$. Notons B' l'application sur $N \times N$ définie par $B'(u, v) = B(du, dv)$. Remplaçons maintenant C_{2n+1} par

$$C'_{2n+1} = C_{2n+1} + \frac{3}{2}B'.$$

Le cocycle E'_{2n+2} associé à $\star' = \sum_{k=0}^{2n} C_k \nu^k + C'_{2n+1} \nu^{2n+1}$ a une partie antisymétrique nulle. Ainsi, en utilisant une fois encore la proposition A.2.1, on parvient à pousser la construction de $\star$ jusqu'à l'ordre $2n+2$. D'où le résultat par récurrence. $\square$

Proposition A.2.3

Soient $\star$ et $\star'$ deux produits-star tangentiels sur (M, Λ) qui coïncident jusqu'à l'ordre k . Alors, leur différence à l'ordre $k+1$ est un cocycle de Hochschild tangentiel dont la partie antisymétrique correspond à un 2-tenseur A contravariant antisymétrique et tangentiel qui est un cocycle pour la cohomologie de Poisson tangentielle (i.e. $\sigma A = 0$). Si ce cocycle est tangentiellement exact (pour σ), il existe un produit-star tangentiel $\star''$, tangentiellement équivalent à $\star'$, qui coïncide avec $\star$ jusqu'à l'ordre $k+1$.

Preuve:

Notons $\star = \sum_{r \geq 0} C_r \nu^r$ et $\star' = \sum_{r \geq 0} C'_r \nu^r$. Par hypothèse, on a déjà $C_r = C'_r$ pour tout $r \leq k$. De l'associativité de $\star$ et $\star'$, on déduit alors que $C'_{k+1} - C_{k+1}$ est un cocycle de Hochschild, qui est par construction différentiel, tangentiel et nul sur les constantes. D'après la proposition A.2.1, ce cocycle peut s'écrire:

$$(C'_{k+1} - C_{k+1})(u, v) = \delta R(u, v) + A(du, dv),$$

pour une 1-cochaîne R , différentielle, tangentielle et nulle sur les constantes et pour un 2-tenseur A contravariant, antisymétrique et tangentiel. En écrivant l'identité de Jacobi pour les crochets déformés $[\cdot, \cdot]_\star$ et $[\cdot, \cdot]_{\star'}$ obtenus par antisymétrisation de $\star$ et $\star'$, on constate que $\sigma A = 0$.

Supposons que A s'écrive $A = \sigma B$ pour un champ de vecteurs tangentiel B et introduisons l'application B' définie par $B'(u) = B(du)$. Finalement, posons

$$T = I - \nu^k B' - \nu^{k+1} R$$

et considérons le produit-star tangentiel $\star''$, équivalent à $\star'$ via T :

$$u \star'' v = T^{-1}(Tu \star' Tv) = \sum_{k \geq 0} C_r''(u, v) \nu^k.$$

Ce produit-star est par construction tel que

$$C_r'' = C_r' = C_r \quad \forall 0 \leq r \leq k-1.$$

Par ailleurs, on a

$$C_k''(u, v) = C_k'(u, v) - \delta B'(u, v) = C_k'(u, v) = C_k(u, v),$$

car B' vérifie $\delta B' = 0$. Puis,

$$\begin{aligned} C_{k+1}''(u, v) &= C_{k+1}'(u, v) - \delta R(u, v) - \sigma B(du, dv) = \\ &= C_{k+1}(u, v) + A(du, dv) - \sigma B(du, dv) = \\ &= C_{k+1}(u, v). \square \end{aligned}$$

Simultanément à la proposition précédente, nous avons montré le

Corollaire A.2.4

Si (M, Λ) est une variété de Poisson régulière telle que $H_{\Lambda, \tan}^2(M)$ soit réduit à zéro, alors tous les produits-star tangentiels sur M sont tangentiellement équivalents.

Enfin, réciproquement à la proposition A.2.3, nous avons la

Proposition A.2.5

Si $\star = \sum C_r \nu^r$ et $\star' = \sum C_r' \nu^r$ sont deux produits-star tangentiels tangentiellement équivalents et tels que $C_r = C_r'$ pour tout $r \leq k$, alors la partie antisymétrique de leur différence à l'ordre $k+1$ est un cobord pour la cohomologie de Poisson tangentielle.

Preuve:

On rappelle (cf. chapitre II, proposition II.2.6) que toute variété de Poisson régulière admet un bon recouvrement (U_α) i.e. tel que toutes les intersections finies et non vides des ouverts U_α soient de cohomologie de Poisson tangentielle triviale en degré > 0 . En utilisant ce fait, on peut montrer exactement comme dans [BCG] que l'on peut construire entre deux

produits-star tangentiels $\star$ et $\star'$, que l'on sait égaux jusqu'à l'ordre k et tangentiellement équivalents, un opérateur T d'équivalence de la forme

$$T = Id + \nu^k T_k + \nu^{k+1} T_{k+1} + \dots$$

où les T_i sont des opérateurs différentiels, tangentiels et nuls sur les constantes. Considérons à présent un tel opérateur d'équivalence entre nos deux produits-star $\star = \sum C_r \nu^r$ et $\star' = \sum C'_r \nu^r$. De l'égalité

$$C_r = C'_r \quad \forall r \leq k,$$

on déduit que T_k est un cocycle pour la cohomologie de Hochschild tangentiel. C'est donc une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$ (pour la multiplication usuelle des fonctions). Il correspond de ce fait à un champ de vecteurs tangentiel X sur M . D'autre part, la relation d'équivalence entre $\star$ et $\star'$ à l'ordre $k+1$ se traduit par:

$$C'_{k+1}(u, v) - C_{k+1}(u, v) - \delta T_{k+1}(u, v) = \sigma X(du, dv).$$

La partie antisymétrique de $C'_{k+1} - C_{k+1}$ s'identifie donc à σX . $\square$

En conséquence des propositions A.2.3 et A.2.5, notons que les classes d'équivalence des produits-star tangentiels sur (M, Λ) sont paramétrées par des 2-tenseurs contravariants, qui sont totalement antisymétriques, tangentiels, et des cocycles pour σ .

Définitions A.2.6

Soit $\star$ un produit-star tangentiel sur une variété de Poisson régulière (M, Λ) . Notons encore $N = C^\infty(M)$.

- Une dérivation de $\star$ est une application $D : N \mapsto N[[\nu]]$ dont l'extension naturelle à $N[[\nu]]$ vérifie formellement

$$D(u \star v) = Du \star v + u \star Dv.$$

- Une dérivation D de $\star$ est dite dérivation tangentielle (formelle) si elle s'écrit sous la forme

$$D = \sum_{s \geq 0} D_s \nu^s$$

où les D_s sont des opérateurs différentiels et tangentiels de N dans N .

- Une dérivation tangentielle D de $\star$ est dite intérieure s'il existe f dans N tel que

$$D = [f, \cdot]_\star = \frac{1}{2\nu}(f \star \cdot - \cdot \star f).$$

- Enfin, par analogie au cas symplectique $[DW, GR]$, une dérivation D de $\star$ est dite ν -Euler tangentielle si elle est de la forme

$$D = \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + L_\xi + D'$$

où ξ est un champ de vecteurs conforme ($L_\xi(\Lambda) = -\Lambda$) et tangentiel, et

$$D' = \sum_{s \geq 1} D'_s \nu^s$$

où les D'_s sont des opérateurs différentiels et tangentiels de N dans N .

Proposition A.2.7

Soit $\star = \sum C_r \nu^r$ un produit-star tangentiel sur (M, Λ) . Si $D = \sum_{s \geq 0} D_s \nu^s$ est une dérivation tangentielle formelle de $\star$, alors chaque D_s correspond à un champ de vecteurs X_s tangentiel, vérifiant $\sigma X_s = 0$, et est donné sur un domaine U d'un bon recouvrement de M par

$$D_{s|U} = [f_s^U, \cdot]_\star$$

où f_s^U est une fonction sur U vérifiant

$$X_{s|U} = H_{f_s^U|U} = \{f_s^U, \cdot\}_{|U}.$$

Preuve:

Soit p le premier indice s tel que $D_s \neq 0$. La propriété de dérivation se traduit à l'ordre p par:

$$(1) \quad D_p(uv) = D_p(u)v + uD_p(v).$$

Et, à l'ordre $p+1$, par:

$$(2) \quad D_p(\{u, v\}) + D_{p+1}(uv) - \{D_p(u), v\} - \{u, D_p(v)\} - D_{p+1}(u)v - uD_{p+1}(v) = 0.$$

Par (1), on voit que l'opérateur D_p est une dérivation de l'algèbre associative $N = C^\infty(M)$; il correspond donc à un champ de vecteur X_p sur M qui est tangentiel puisque D_p est supposé tangentiel. En antisymétrisant (2), on s'aperçoit que X_p vérifie $\sigma X_p = 0$. Sur un domaine U tel que $H_{\Lambda, \tan}^1(U) = \{0\}$, on peut écrire

$$X_p(u)|_U = \{f_p^U, u\}_{|U} \quad f^U \in C^\infty(U), \forall u.$$

Puisque les C_r s'annulent sur les constantes, l'application

$$D' : N \rightarrow N[[\nu]] \quad u \mapsto [f_p^U, u]_\star$$

a un sens global et définit une dérivation tangentielle de $\star$. En répétant l'argument pour $D - \nu^p D'$ et ainsi de suite, on obtient le résultat annoncé. $\square$

Autrement dit, les dérivations tangentielles d'un produit-star tangentiel sur (M, Λ) sont en bijection avec les suites de champs de vecteurs tangentiels qui sont des cocycles pour σ . De plus, le quotient de l'espace des dérivations tangentielles par celui des dérivations tangentielles qui sont intérieures peut être identifié à l'espace des suites d'éléments de $H_{\Lambda, \tan}^1(M)$.

Proposition A.2.8 [DW]

Soient U un ouvert de M pour lequel $H_{\Lambda, \tan}^2(U) = \{0\}$ et ξ un champ de vecteurs conforme et tangentiel sur U . (L'existence d'un tel champ ξ est assurée si $H_{\Lambda, \tan}^1(U) = \{0\}$ par exemple.) Supposons encore que $\star$ soit un produit-star tangentiel sur M . Alors $\star$ admet dans U une dérivation ν -Euler tangentielle de la forme

$$\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + L_\xi + \nu D_1 + \nu^2 D_2 + \dots$$

Preuve:

On vérifie sans difficulté que $\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + L_\xi$ est une dérivation tangentielle à l'ordre 1 de $\star$. Supposons maintenant que l'on ait construit $D_1, \dots, D_{k-1}$ pour que

$$D = \sum_{s \geq 0} \tilde{D}_s \nu^s = \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + L_\xi + \nu D_1 + \dots + \nu^{k-1} D_{k-1} + \dots$$

soit une dérivation ν -Euler tangentielle à l'ordre $k-1$ de $\star$. Notons encore, pour tout entier r ,

$$K_r(u, v) = \sum_{p+q=r, p, q \geq 0} \tilde{D}_p(C_q(u, v)) - C_p(\tilde{D}_q(u), v) - C_p(u, \tilde{D}_q(v)).$$

Puisque D est une dérivation à l'ordre $k-1$, on a déjà $K_r = 0$ pour $r \leq k-1$. De plus, il résulte de l'associativité de $\star$ que K_k est un cocycle de Hochschild tangentiel dont l'antisymétrisé $A = aK_k$ vu comme un 2-tenseur tangentiel est un cocycle pour la cohomologie de Poisson tangentielle. Puisque $H_{\Lambda, \tan}^2(U) = \{0\}$, il existe un 2-tenseur B tangentiel tel que $A = \sigma B$ et on peut écrire

$$K_k(u, v) = \delta T_k(u, v) + \sigma B(du, dv)$$

où T_k est un opérateur différentiel, tangentiel et nul sur les constantes. Considérons aussi

$$D' = D - \nu^{k-1} B' + \nu^k T_k = \sum_{s \geq 0} \tilde{D}'_s \nu^s,$$

où l'on a noté $B'(u, v) = B(du, dv)$. Pour tout r , posons donc:

$$K'_r(u, v) = \sum_{p+q=r, p, q \geq 0} \tilde{D}'_p(C_q(u, v)) - C_p(\tilde{D}'_q(u), v) - C_p(u, \tilde{D}'_q(v)).$$

Alors, par construction même, les K'_r sont nuls jusqu'à l'ordre k et D' est une dérivation de $\star$ jusqu'à l'ordre k . $\square$

Puisque toute variété de Poisson régulière admet un bon recouvrement, on a montré le

Corollaire A.2.9

Soit $\star$ un produit-star tangentiel sur une variété de Poisson régulière (M, Λ) . Alors $\star$ admet localement des dérivations ν -Euler tangentielles D :

$$D = \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + L_\xi + \nu D_1 + \nu^2 D_2 + \dots$$

où ξ est un champ de vecteurs local, conforme et tangentiel.

Références

- [Ab-Ma] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd. ed. Benjamin Cummings, Reading, Massachussetts, 1978.
- [Ar1] D. Arnal, **-products and representations of nilpotent groups*, Pacific J. Math., **114** (1984), 285-308.
- [Ar2] D. Arnal, *Le produit star de Kontsevich sur le dual d'une algèbre de Lie nilpotente*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **327** (1998), 823-826.
- [ABC] D. Arnal, H. Benamor and B. Cahen, *Algebraic deformation program on minimal nilpotent orbit*, Lett. Math. Phys., **30** (1994), 241-250.
- [ABM] D. Arnal, N. Ben Amar and M. Masmoudi, *Cohomology of good graphs and Kontsevich linear star products*, Lett. Math. Phys., **48** (1999), 291-306.
- [ABS] D. Arnal, M. Ben Ammar and M. Selmi, *Le problème de la réduction à un sous-groupe dans la quantification par déformation*, Ann. Fac. sci. Toulouse, **XII**, **1** (1991).
- [ACG1] D. Arnal, M. Cahen and S. Gutt, *Deformations on coadjoint orbits*, J. Geom. Phys., **vol.3**, **3** (1986), 327-351.
- [ACG2] D. Arnal, M. Cahen and S. Gutt, *Representation of compact Lie groups and quantization by deformation*, Bulletin de la classe des sciences, Académie royale de Belgique, série 5, **4-5** (1988), 121-141.
- [AC1] D. Arnal and J.C. Cortet, **-products in the method of orbits for nilpotent groups*, J. Geom. Phys., **2** (1985), 83-116.
- [AC2] D. Arnal and J.C. Cortet, *Nilpotent Fourier transform and applications*, Lett. Math. Phys., **9** (1985), 25-34.
- [AC3] D. Arnal and J.C. Cortet, *Représentations $\star$ des groupes exponentiels*, J. Funct. Anal., **Vol.92**, **1** (1990), 103-135.
- [AC4] D. Arnal and J.C. Cortet, *Star representations of $E(2)$* , Lett. Math. Phys., **20** (1990), 141-149.
- [ACL] D. Arnal, J.C. Cortet and J. Ludwig, *Moyal product and representation of solvable Lie groups*, J. Func. Anal., **2** (1995), 402-424.
- [ACMP] D. Arnal, J.C. Cortet, P. Molin and G. Pinczon, *Covariance and geometrical invariance in star-quantization*, J. Math. Phys., **24** (1983), 276-283.

- [ADGM] D. Arnal, N. Dahmene, A. Gammella and M. Masmoudi, *Tangential deformations on foliated Poisson manifolds*, submitted in Journal of Diff. Geom.
- [ALM] D. Arnal, J. Ludwig and M. Masmoudi, *Déformations covariantes sur les orbites polarisées d'un groupe de Lie*, J. Geom. Phys., **14** (1994), 309-331.
- [AMM] D. Arnal, D. Manchon et M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, preprint QA/0003003.
- [AM] D. Arnal and M. Masmoudi, *Cohomologie de Hochschild des graphes de Kontsevich*, à paraître dans Bull. Soc. Math. de France.
- [AY] D. Arnal and M. Yahyai, *Star-products for $\mathfrak{sl}(2)$* , Lett. Math. Phys., **36** (1996), 17-26.
- [Asi] S. Asin Lares, *On tangential properties of the Gutt star-product*, J. Geom. and Phys., **24** (1998), 164-172. Ph. D. Thesis, Warwick University (1998).
- [APP] J.A. de Azcarraga, A.M. Perelomov and J.C. Perez Bueno, *The Schouten-Nijenhuis bracket, cohomology and generalized Poisson structures*, J. Phys. A.: Math. Gen., **29** (1996), 7993-8009.
- [BFFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, *Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics*, Lett. Math. Phys., **1** (1977), 521-530. *Deformation theory and quantization*, I and II, Annals of Physics, **3** (1978), 61-110 and 111-152.
- [BA] N. Ben Amar, *Tangential deformations on the dual of nilpotent special Lie algebras*, Pacific J. Math., **170**, 2 (1995), 297-318.
- [BR] R. Benedetti and J.J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités mathématiques, Hermann, Paris, 1990.
- [BCG] M. Bertelson, M. Cahen and S. Gutt, *Equivalence of star products*, Classical Quantum Gravity, **14** (1997), A93-A107.
- [BLM] J. Boidol, J. Ludwig and D. Müller, *On infinitely small orbits*, Studia Mathematica, T. LXXXVIII (1988).
- [Bon] P. Bonnet, *Paramétrisation du dual d'une algèbre de Lie nilpotente*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **38**, 3 (1988), 169-197.
- [BNW] M. Bordemann, N. Neumaier and S. Waldmann, *Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles*. I, Comm. Math. Phys., **198** (1998), 363-369. II, J. Geom. Phys., **29** (1999), 199-234.
- [BT] R. Bott and L.V. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, 82, Springer-Verlag, New-York-Berlin, 1982.
- [Bou] N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques*, Hermann, Paris, 1983.
- [Br] R. Bryant, *An introduction to Lie groups and symplectic geometry*, Freed, Daniel S. (ed.) et al., Geometry and quantum field theory. Lecture notes from the graduate summer

- school program, June 22-July 20, 1991, Park City, UT, USA. Providence, RI: American Mathematical Society. IAS/Park City Math. Ser.1 (1995), 5-181.
- [Bry] J.L. Brylinski, *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Progress in Mathematics, vol.107, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [CG1] M. Cahen and S. Gutt, *Regular star-representations of Lie algebras*, Lett. Math. Phys., **6** (1982), 395-404.
- [CG2] M. Cahen and S. Gutt, *An algebraic construction of $\ast$ -product on the regular orbits of semi-simple Lie groups*, Gravitation and Geometry, 71-82, Monographs Textbooks Phys. Sci., **4**, Bibliopolis, Naples, 1987. Mr 89e:22023.
- [CGR1] M. Cahen, S. Gutt and J. Rawnsley, *Quantization of Kähler manifolds. I*, J. Geom. Phys., **7** (1990), 45-52. II, Trans. Amer. Math. Soc., **337** (1993), 73-98.
- [CGR2] M. Cahen, S. Gutt and J. Rawnsley, *On tangential star products for the coadjoint Poisson structure*, Comm. Math. Phys., **180** (1996), 99-108.
- [CC] A. Candel and L. Conlon, *Foliations I*. Graduate Studies in Mathematics, **23**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [CW] A. Cannas Da Silva and A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley mathematics lecture notes, vol.10, American Mathematical Society (1999).
- [CFT] A.S. Cattaneo, G. Felder and L. Tomassini, *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*, preprint QA/0012228 (2000).
- [CFS] A. Connes, M. Flato and D. Sternheimer, *Closed star products and cyclic cohomology*, Lett. Math. Phys., **24** (1992), 1-12.
- [CG] L. Corwin and F.P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications. Part 1: Basic theory and examples*. Cambridge studies in advanced mathematics, 1990.
- [Cur] B. Curey, *The structure of the space of coadjoint orbits on an exponential solvable Lie group*, Tran. Am. Math. Soc., **332**, **1** (1992), 241-269.
- [DH] P. Dazord et G. Hector, *Intégration Symplectique des variétés de Poisson totalement asphériques*. In: Symplectic Geometry, Groupoids and Integrable Systems, Séminaire Sud Rhodanien de Géométrie à Berkeley (1989) (P. Dazord and A. Weinstein, eds.). MSRI Publ.20, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1991), 37-72.
- [Del] P. Deligne, *Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique: comparaison entre Fedosov et De Wilde*, Lecomte, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 667-697.
- [DW] M. De Wilde, *Deformations of the algebra of functions of a symplectic manifold: a simple cohomological approach*, preprint de l'Université de Liège.
- [DW-L1] M. De Wilde and P.B.A. Lecomte, *Existence of star-products and formal deformations in Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold*, Lett. Math. Phys., **7** (1983), 487-496.

- [DW-L2] M. De Wilde and P.B.A Lecomte, *Existence et classification des star-produits sur les variétés symplectiques*, cours donné dans le cadre de l'Ecole d'été: "Quantification et quantification par déformations" organisée par le CIMPA à Nice (1996).
- [Die] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, Cahiers scientifiques, fascicule XXXIII, tome 3, Gauthier-Villars, 1974.
- [Di1] G. Dito, *Star-product approach to quantum field theory: the free scalar field*, Lett. Math. Phys., **20** (1990), 125-134.
- [Di2] G. Dito, *Kontsevich star product on the dual of a Lie algebra*, Lett. Math. Phys., **4**, 48 (1999), 307-322.
- [Dix] J. Dixmier, *Les algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1972.
- [Far] D. R. Farkas, *A Ring-Theorist's Description of Fedosov Quantization*, Lett. Math. Phys., **51** (2000), 161-177.
- [Fe1] B.V. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Diff. Geom., **40** (1994), 213-238.
- [Fe2] B.V. Fedosov, *Deformation quantization and index theory*, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [FLL] R. Fiorese, A. Levrero and M.A. Lledo, *Algebraic and differential star products on regular orbits of compact Lie groups*, preprint math/0011175. To appear in Pacific J. of Math.
- [FL] R. Fiorese and M.A. Lledo, *On the deformation quantization of coadjoint orbits of semi-simple groups*, preprint math/9906104. To appear in Pacific J. Math.
- [Fr] C. Fronsdal, *Some ideas about quantization*, Rep. Math. Phys., **15** (1978), 111-145.
- [FM] W. Fulton and R. Macpherson, *Compactification of configuration spaces*, Ann. Math., **139** (1994), 183-225.
- [Ga1] A. Gammella, *Tangential star-products*, Lett. Math. Phys., **51** (2000), 1-15.
- [Ga2] A. Gammella, *An approach to the tangential Poisson cohomology based on examples in duals of Lie algebras*, to appear in Pacific J. Math.
- [GK] I.M. Gelfand and D.A. Kazhdan, *Some problems of differential geometry and the calculation of cohomologies of Lie algebras of vector fields*, Soviet Math. Dokl., **12**, 5 (1971), 1367-1370.
- [Ger] M. Gerstenhaber, *On the deformations of rings and algebras*, Ann. of Math., **79** (1964), 59-103.
- [Go-Kh] M. Goze and Y. Khakimdjano, *Nilpotent Lie algebras*, Mathematics and its Applications, **361**, Kluwer Academic Publishers Group, 1996.
- [Gré] G. Grélaud, *Sur les représentations des groupes de Lie résolubles*, Thèse, Université de Poitiers (1984).

- [Gu1] S. Gutt, *Déformations formelles de l'algèbre des fonctions différentiables sur une variété symplectique*, Thèse Bruxelles (1980).
- [Gu2] S. Gutt, *An explicit $\ast$ -product on the cotangent bundle of a Lie group*, Lett. Math. Phys., **7** (1983), 249-258.
- [Gu3] S. Gutt, *On some second Hochschild cohomology spaces for algebras of functions on a manifold*, Lett. Math. Phys., **39** (1997), 157-162.
- [Gu4] S. Gutt, *Variations on deformation quantization*, 217-253, Conférence Moshé Flato 1999, Quantization, Deformations, and Symmetries, Vol I, Edited by G.Dito and D. Sternheimer.
- [GR] S. Gutt and J. Rawnsley, *Equivalence of star products on a symplectic manifold*, J. Geom. Phys., **29** (1999), 347-392.
- [Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New-York, 1978.
- [HKR] G. Hochschild, B. Kostant and A. Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Tran. Amer. Math. Soc., **102** (1962), 383-408.
- [Hue] J. Huebschmann, *Poisson cohomology and quantization*, J. für Reine und Angew. Math., **408** (1990), 57-113.
- [KM] M.V. Karasev and V.P. Maslov, *Nonlinear Poisson brackets: Geometry and quantization*, American Mathematical Society, Providence, **119**, 1993.
- [Kir] A.A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 220, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1976.
- [KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New-York and London, 1963.
- [Kon1] M. Kontsevich, *Formality conjecture*, D. Sternheimer et al. (eds.), Deformation theory and symplectic geometry, Kluwer, 139-156, 1997.
- [Kon2] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, I preprint QA/9709070 (1997).
- [Kon3] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys., **48** (1999), 115-127.
- [Ko] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lect. Notes Math., **170** Springer (1970).
- [Kos] J.L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui, Astérisque hors série, Société Mathématique de France (1985), 257-271.
- [Le] M. Lesimple, *Homogeneous propagators for massless half-integer spin fields in $3+2$ De Sitter space*, Lett. Math. Phys., **18**, 4 (1989), 315-323.

- [Li1] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geom., **12** (1977), 253-300.
- [Li2] A. Lichnerowicz, *Variétés de Poisson et feuilletages*, Ann. Fac. Toulouse (1982), 195-262.
- [Li3] A. Lichnerowicz, *Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les $\ast_\nu$ -produits)*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **32** (1982), 157-509.
- [Li4] A. Lichnerowicz, *Dérivations et déformations de certaines algèbres de Lie infinies classiques*, Publications du département de Mathématiques Lyon (1976).
- [Li5] A. Lichnerowicz, *Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs*, Comment. Math. Helvetici, **39**, **51** (1976), 343-368.
- [LZ] J. Ludwig and H. Zahir, *A new parametrization of coadjoint orbits in the nilpotent case and the surjectivity of the adapted Fourier transform*, prépublication de l'Université de Metz.
- [MT] D. Manchon et C. Torossian, *Cohomologie tangente et cup-produit pour la quantification de Kontsevich*, preprint 2001.
- [Mas1] M. Masmoudi, *Tangential formal deformations of the Poisson bracket and tangential star products on a regular Poisson manifold*, J. Geom. Phys., **9** (1992), 155-171.
- [Mas2] M. Masmoudi, *Star-produits sur les variétés de Poisson*, Thèse, Université de Metz (1992).
- [Mas3] M. Masmoudi, *Covariant star products*, Ann. Fac. Toulouse IV, **1** (1995), 77-85.
- [Mon] P. Monnier, *Poisson cohomology in dimension 2*, preprint math. DG/0005261.
- [Mor] C. Moreno, *Invariant star products and representations of compact semi-simple Lie groups*, Lett. Math. Phys., **12** (1986), 217-229.
- [Moy] J.E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **45**, 1949.
- [Nad] F. Nadaud, *On continuous and differential Hochschild cohomology*, Lett. Math. Phys., **47** (1999), 85-95.
- [NT] R. Nest and B. Tsygan, *Algebraic index theorem for families*, Adv. Math., **113** (1995), 151-205.
- [NV] O.M. Neroslavsky and A.T. Vlassov, *Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **292** (1981), 71-73.
- [NR] A. Nijenhuis and R. Richardson, *Deformation of Lie algebra structures*, J. of Math. and Mechanics, **17** (1967), 89-105.
- [OMY] H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka, *Weyl manifolds and deformation quantization*, Adv. Math., **85** (1991), 224-255.

- [Pe1] N.V. Pedersen, *Geometric quantization and the universal enveloping algebra of a nilpotent Lie group*, Transactions of the American Mathematical Society, **315**, **2** (1989), 511-563.
- [Pe2] N.V. Pedersen, *Geometric quantization and nilpotent Lie groups*, A collection of examples, University of Copenhagen Denmark (1988), 1-180.
- [Pin1] G. Pinczon, *Rigidity of the Weyl algebra*, preprint, Université de Bourgogne (1995).
- [Pin2] G. Pinczon, *On the equivalence between continuous and differential deformation theories*, Lett. Math. Phys., **39** (1997), 143-156.
- [Puk] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
- [Ro] C. Roger, *Algèbres de Lie graduées et quantification*, in Symplectic Geometry and Mathematical Physics, P. Donato et al., eds., Progress in Math., **99**, Birkhäuser, 1991.
- [SG] M. Saint-Germain, *Poisson algebras and transverse structures*, J. Geom. Phys., **31** (1999), 153-194. Thèse, Université Paris VII (1997).
- [Sou] J.M. Souriau, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
- [Stef] P. Stefan, *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London Math. Soc., **29** (1974), 699-713.
- [Ster1] D. Sternheimer, *Phase-space representations*, in Applications of Group Theory in Mathematical Physics, M. Flato, P. Sally, G. Zuckerman eds., Lect. Appl. Math., **21**, Amer. Math. Soc., Providence, 1985, 255-267.
- [Ster2] D. Sternheimer, *Deformation quantization 20 years after AIP* Press in Proceedings of the 1998 Lodz conference "Particles, Fiels and Graviation", New-York, 1998, 107-145.
- [Su] H.J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Tran. Amer. Math. Soc., **180** (1973), 171-188.
- [Tam] D. Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich formality theorem*, preprint math/9803025.
- [Va1] I. Vaisman, *Remarks on the Lichnerowicz-Poisson cohomology*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **40** (1990), 951-963.
- [Va2] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics, **vol.118**, Birkhäuser, Basel, 1994.
- [Va3] I. Vaisman, *Fedosov Quantization on Symplectic Ringed Spaces*, preprint math.SG/0106070.
- [Ver] M. Vergne, *La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente*, Bull. Soc. Math. de France, **100** (1972), 301-335.
- [Vey] J. Vey, *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique*, Comment. Math. Helv., **50** (1975), 421-454.

- [We1] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 523-557.
- [We2] A. Weinstein, *Deformation quantization*, Séminaire Bourbaki 1993-94, exposé 789, Astérisque **227** (1995), 389-409.
- [We3] A. Weinstein, *Tangential deformation quantization and polarized symplectic groupoids*, Deformation Theory and Symplectic Geometry, D. Sternheimer et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1997, 301-314.
- [WX] A. Weinstein and P. Xu, *Hochschild cohomology and characteristic classes for star-products*, In: A. Khovanskij, A. Varchenko and V. Vassiliev (eds), Geometry of Differential Equations, Amer. Math. Soc., Providence, 1998, 177-194.
- [Wey] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, New-York, 1932.
- [Wil] N. Wildberger, *On the Fourier transform of compact semi-simple Lie group*, J. Aust. Math. Soc., **56** (1994), 64-116.
- [Xu] P. Xu, *Poisson cohomology of regular Poisson manifolds*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **42** (1992), 967-988.
- [Za] H. Zahir, *Produits-star et représentations des groupes de Lie*, Thèse, Université de Metz (1991).