AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 2001060S
Cote S/Mz 01/20
Loc magasin
en prêtable

THESE

Présentée à

UNIVERSITE DE METZ
PAR

Napo BONFOH

Pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ

SPECIALITE : **SCIENCES DE L'INGENIEUR**

OPTION : **MECANIQUE ET MATERIAUX**

MODELISATION MICROMECANIQUE DE L'ECROUISSAGE DES MATERIAUX POLYCRISTALLINS CONTENANT DES HETEROGENEITES INTRA-GRANULAIRES INTRODUCTION A L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE

Soutenue le 12 octobre 2001 à 14H30 (Salle des assemblées - ISGMP) devant le jury composé de:

Pawel LIPINSKI	Université de Metz	*directeur de thèse*
Patrick FRANCIOSI	INSA de Lyon	*rapporteur*
André DRAGON	LMPM, Poitiers	*rapporteur*
Alain CARMASOL	LPMM , Metz	*examinateur*
Alain MOLINARI	LPMM, Metz	*examinateur*
Alain LODINI	Université de Reims	*examinateur*
Sonnou TIEM	ENSI de Lomé	*examinateur*

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7554
Ile du Saulcy – 57045 METZ Cedex 01 tél : (33) 03 87 31 53 60 – FAX (33) 03 87 31 53 66

PPN 060 102926

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à

UNIVERSITE DE METZ

PAR

Napo BONFOH

Pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ

SPECIALITE : **SCIENCES DE L'INGENIEUR**

OPTION : **MECANIQUE ET MATERIAUX**

MODELISATION MICROMECANIQUE DE L'ECROUISSAGE DES MATERIAUX POLYCRISTALLINS CONTENANT DES HETEROGENEITES INTRA-GRANULAIRES INTRODUCTION A L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE

Soutenue le 12 octobre 2001 à 14H30 (Salle des assemblées - ISGMP) devant le jury composé de:

Pawel LIPINSKI	Université de Metz	*directeur de thèse*
Patrick FRANCIOSI	INSA de Lyon	*rapporteur*
André DRAGON	LMPM, Poitiers	*rapporteur*
Alain CARMASOL	LPMM , Metz	*examinateur*
Alain MOLINARI	LPMM, Metz	*examinateur*
Alain LODINI	Université de Reims	*examinateur*
Sonnou TIEM	ENSI de Lomé	*examinateur*

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7554
Ile du Saulcy – 57045 METZ Cedex 01 tél : (33) 03 87 31 53 60 – FAX (33) 03 87 31 53 66

A la mémoire de mon Père !

De ton soutien, je n'ai jamais douté.

A ma Mère,

A M. et Mme AGBA TCHAO Etienne,

Et à tous mes Frères et Sœurs

de la famille BONFOH.

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (L.P.M.M.) de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique (I.S.G.M.P.) de l'Université de Metz. Ce travail n'aurait pu être mené à bout sans le concours de certaines personnes auxquelles je tiens à exprimer toute ma gratitude.

Je tiens plus spécialement à remercier Messieurs Paul LIPINSKI et Alain CARMASOL qui m'ont initié à la recherche depuis le DEA, puis dirigé avec patience et rigueur mes travaux de thèse. Leur disponibilité, leurs conseils et leur amitié dont j'ai pu bénéficier durant ces années de recherches m'ont fortement aidé et inspiré. Je leur exprime toute ma reconnaissance et ma considération.

A Monsieur Sonnou TIEM, pour ses conseils et encouragements depuis ma formation à l'ENSI de Lomé, je tiens à lui dire ma sincère reconnaissance. Cette formation à la recherche n'aurait certainement pu se faire sans sa contribution.

Que Messieurs André DRAGON et Patrick FRANCIOSI trouve ici l'expression de mes remerciements pour avoir accepter de se charger de la lourde tâche de rapporter ce travail, ainsi que Messieurs Alain LODINI, Alain MOLINARI pour leur participation au jury.

Je remercie vivement tous les membres du laboratoire pour l'ambiance agréable dans laquelle se sont déroulées ces recherches. Pour leur amitié et leur humour : Patrick Zattarin, Frédéric Bumbiler, Amadou Ouane, Koffi Holonou et Aimé Broohm.

Je tiens à dédier ce mémoire à tous les membres de ma famille qui m'ont toujours soutenu, conseiller et encourager dépuis ma formation à Lomé. A mes oncles Zakari, Bouraima, Salami, Massahoudou BONFOH et Nasser BAGNAH, mes tantes Mme Djafalo S., Kossiwa et Djébi NAPO ainsi qu'a tous mes frères et sœurs et amis de Togo, qu'ils trouvent à travers ce travail ma modeste réponse à leur confiance leur considération et à leur soutien de tout temps.

Au cours de mon séjour en France, j'ai partagé de grands moments d'amitié avec des compatriotes et amis d'Afrique et qui ont contribué à leur manière à la réussite de cette étude. La liste serait longue, mais de Metz à Poitiers en passant par Paris, ces messieurs aux immenses qualités d'Homme se reconnaîtront.

A tous, merci de m'avoir accompagner dans cette expérience qui valait la peine d'être vécue.

Si timide que l'on soit, il faut bien que l'on interpole; l'expérience ne nous donne qu'un certain nombre de points isolés : il faut les réunir par un trait continu; c'est là une véritable généralisation. Mais on fait plus : la courbe que l'on tracera passera entre les points observés et près de ces points; elle ne passera pas par ces points eux-mêmes. Ainsi, on ne se borne pas à généraliser l'expérience, on la corrige; et le physicien qui voudrait s'abstenir de ces corrections et se contenter vraiment de l'expérience toute nue serait forcé d'énoncer des lois bien extraordinaires.

Henri Poincaré

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS.....V

INTRODUCTION GENERALE.....1

Chapitre I : ENDOMMAGEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX.....6

1 Modélisation continue de l'endommagement 9

1.1 Variables continues de l'endommagement.....10

1.2 Théorie thermodynamique des processus irréversibles 11

1.3 Modèle d'endommagement anisotrope 13

2 Analyse micromécanique de l'endommagement ductile.....16

2.1 Amorçage de l'endommagement ductile.....17

2.2 Croissance de l'endommagement.....31

2.3 Coalescence des cavités.....36

3 Conclusion.....37

4 Bibliographie.....38

Chapitre II : DESCRIPTION DU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DU GRAIN HETEROGENE 41

1 Rappel de la plasticité du monocristal 43
1.1 Déformation plastique du monocristal.....43
1.2 Description rhéologique du comportement plastique 45

2 Comportement du monocristal contenant des hétérogénéités intra-granulaires.....51
2.1 Les bases physiques.....52
2.2 Modélisation de l'écrouissage intragranulaire 54
2.3 Expression du tenseur de polarisation $\tilde{P}$. 62

3 Conclusion.....71

4 Bibliographie.....73

Chapitre III : COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE DU POLYCRISTAL

1 Modélisation du comportement macroscopique du polycristal 78
1.1 Equation intégrale cinématique.....78
1.2 Approximation autocohérente 82

2 Calcul des tenseurs d'interaction 85

3 Calcul des modules tangents effectifs.....86
3.1 Modules élastiques effectifs 86
3.2 Modules tangents instantanés 87

4 Sélection des systèmes actifs.....88

5 Loi de comportement élastoplastique macroscopique.....89

6 Evolution de la structure interne.....90
6.1 Texture cristallographique.....90
6.2 Evolution de la contrainte interne d'ordre trois dans l'hétérogénéité.....91

7 Conclusion.....92

8 Bibliographie.....94

Chapitre IV: SIMULATIONS NUMERIQUES DE L'ECROUISSAGE PAR PRECIPITATION DU POLYCRISTAL.....95

1 Validation du modèle : influence du nombre de grains 99

2 Comportement élastoplastique macroscopique 102

3 Ecrouissage induit par la présence de précipités.....104

4 Evolution des contraintes internes.....105
4.1 Contraintes internes d'ordre deux.....106
4.2 Contraintes internes d'ordre trois 109
4.3 Influence de la forme et l'orientation des précipités sur les contraintes internes d'ordre trois.....113
4.4 Influence de la fraction volumique des précipités sur les contraintes internes d'ordre trois.....115

5 Chargement cyclique 116
5.1 Effet Bauschinger.....117
5.2 Durcissement cyclique.....117

6 Surfaces d'écoulement plastique.....120

7 Mise en évidence de l'écrouissage cinématique du matériau.....124

8 Conclusion.....127

Chapitre V : APPLICATION A LA MODELISATION DE L' ENDOMMAGEMENT DUCTILE.....129

1 Décohésion de l'interface particule-matrice cristalline 132

1.1 Condition énergétique de l'amorçage de l'endommagement.....132

1.2 Condition de la contrainte critique de l'amorçage de l'endommagement.....133

1.3 Modélisation de la decohésion de l'interface cristal-précipités.....136

2 Modélisation du comportement du grain poreux.....140

3 Croissance de l'endommagement 142

4 Vers la rupture du grain.....148

5 Conclusion.....151

6 Bibliographie.....153

CONCLUSION GENERALE.....154

ANNEXE I : Variation de la porosité.....157

Notations

$\tilde{A}^I$	Tenseur de localisation de déformations dans le grain I
$\tilde{a}$	Tenseur de localisation de déformations
$\tilde{B}^I$	Tenseur de localisation de contraintes dans le grain I
$\tilde{b}$	Tenseur de localisation de contraintes
b	Vecteur de Bürgers
$\tilde{C}$	Tenseur des constantes élastiques
D	Variable d'endommagement isotrope
D_n	Variable d'endommagement dans la direction du vecteur $\vec{n}$
E	Module de Young
E	Tenseur de déformation macroscopique
E_{eq}	Déformation macroscopique équivalente
f	Fraction volumique de vides ou cavités
G_{km}	Tenseur de Green
H^{gh}	Matrice d'écrouissage du monocristal
$\aleph^{gh}$	Matrice d'écrouissage du grain hétérogène
$\tilde{I}$	Tenseur unité d'ordre quatre
$\tilde{L}$	Tenseur des modules tangents instantanés macroscopiques
$\tilde{L}^{eff}$	Modules tangents effectifs du milieu hétérogène
$\tilde{L}^*$	Tenseur de Hill
$\tilde{l}$	Tenseur des modules tangents instantanés
$\tilde{m}$	Tenseur de souplesse instantané
$\vec{m}$	Vecteur unitaire de la direction de glissement cristallographique
$\vec{n}$	Vecteur unitaire normal au plan de glissement
$\vec{n}$	Vecteur normale d'un plan

$\tilde{P}$	Tenseur de polarisation
p	Pression hydrostatique
Q	Partie antisymétrique du tenseur de Schmid
q	Flux de chaleur
R	Rayon d'une inclusion ou d'une particule
R	Partie symétrique du tenseur de Schmid
S	Tenseur de Schmid $S = \vec{m} \otimes \vec{n}$
S	Aire d'une section de l'élément de volume
S_D	Aire totale des traces de défauts d'une section
$\tilde{s}$	Tenseur des complaisances élastiques
s	Entropie spécifique
s	Tenseur déviateur des contraintes $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$
$\tilde{T}^{IJ}$	Tenseur d'interactions entre les inclusions I et J.
T	Température absolue
u	Vecteur déplacement
V	Volume d'un élément
X	Variable d'écrouissage cinématique

Lettres grecques

ε	Tenseur de déformations
ε^e	Tenseur de déformations élastiques
ε^p	Tenseur de déformations plastiques
γ	Glissement plastique du monocristal
γ	Energie superficielle de création de surfaces libres
Γ	Glissement plastique du grain
$\tilde{\Gamma}_0$	Fonction de Green modifiée du milieu de référence infini uniforme
λ	Coefficient de Lamé
μ	Module de cisaillement
ρ	Masse volumique
ρ_m	Densité de dislocations mobiles

σ	Tenseur de contraintes de Cauchy
σ_m	Contrainte moyenne de Cauchy
σ_{eq}	Contrainte équivalente de Cauchy
σ_0	Contrainte équivalente d'écoulement
σ_n^c	Valeur critique de la contrainte normale à l'interface
Σ	Contrainte macroscopique
Σ_{eq}	Contrainte macroscopique équivalente
Σ_m	Contrainte macroscopique moyenne
τ	Cission résolue de glissement cristallographique
τ_{cr}	Cission critique de glissement cristallographique
ψ	Energie libre spécifique d'Helmoltz
ω	Tenseur de rotation
$\dot{\omega}^e$	Tenseur du taux de rotation élastique
$\dot{\omega}^p$	Tenseur du taux de rotation plastique
$< >$	Moyenne volumique
$\tilde{\tilde{X}}$	X est tenseur d'ordre quatre
$\dot{X}$	Taux ou vitesse de la variable X

Les indices

I	Grain
m	Matrice cristalline du grain (monocristal)
3	Hétérogénéités intragranulaires ou précipités
e	Partie élastique
p	Partie plastique

Introduction générale

Les préoccupations actuelles des concepteurs de structures portent essentiellement sur la recherche de plus en plus accrue de performances, de sécurité et d'économie de matière et d'énergie. Les investigations s'orientent ainsi vers l'élaboration d'approches plus déductives du comportement mécanique de matériaux pour une meilleure capacité prédictive et une grande latitude d'optimisation. Il s'agit là de la résultante du développement croissant de la conception, par de judicieuses combinaisons de propriétés, de matériaux destinés à des emplois précis.

Pour améliorer certaines caractéristiques mécaniques de matériaux, on a souvent recourt à l'addition d'éléments étrangers (inclusions) au matériau-matrice. Ces particules étrangères qui contribuent ainsi aux performances recherchées pour la structure peuvent malheureusement dans certaines conditions de chargement, constituer des sites d'amorçage de l'endommagement du matériau, lors de la déformation de ce dernier.

L'examen des surfaces de rupture ductile permet en général d'observer une particule ou un fragment de particule au fond de la moitié de cupules et laissent supposer que ces particules sont présentes au cœur de chaque cavité. Il est donc généralement admis que toute initiation de cavité dans un matériau est localisée au niveau d'une particule (inclusion ou précipité). Cet endommagement ductile induit par la présence de particules dépend essentiellement de leur distribution, de leur forme, de leur loi de comportement par rapport à la matrice et aussi de leur cohérence cristallographique avec la matrice environnante.

A partir de 1956, un grand nombre de découvertes sur le phénomène de l'endommagement des matériaux a été fait à la fois par des physiciens métallurgistes et des mécaniciens.

- Des cavités ou des microfissures apparaissent dans certains matériaux au niveau des inclusions ou des précipités au cours de la déformation plastique.
- L'endommagement ainsi mis en évidence peut s'initier dès les premiers stades de la déformation plastique.
- Ces cavités ou microfissures s'amorcent soit par décohésion de l'interface matrice-inclusion, soit par fragmentation des inclusions ou précipités.
- Ces cavités ainsi créées croissent avec la déformation plastique et leur forme dépend du mode de sollicitation mécanique.
- Leur coalescence entraîne la rupture ductile du matériau, même si la déformation plastique préalable est faible.

L'étude de tels *matériaux composites* requiert l'élaboration d'approches plus déductives du comportement mécanique de matériaux. L'approche classique de la mécanique des solides, fondée sur l'emploi des outils, des concepts et des méthodes de la mécanique des milieux continus, est une approche phénoménologique, de nature inductive. Basée sur l'expérience, elle intègre les résultats de mesures réalisées sur un matériau donné, en réponse à des sollicitations déterminées. La loi de comportement ainsi établie et éventuellement réintégrée dans un cadre thermodynamique, qui en assure la cohérence, ne peut avoir comme domaine de validité que celui à l'intérieur duquel elle a été identifiée en relation avec l'expérience. Une telle démarche est d'une grande efficacité pour la prévision de la réponse des structures mécaniques aux sollicitations de service. Elle est aussi précieuse pour optimiser, selon divers critères (poids, coût, sécurité…), la géométrie de ces structures sous sollicitations.Cependant cette démarche présente des limites qui découlent de sa définition même.

- Le matériau étant choisi et l'optimisation réalisée pour des conditions nominales de service, tout écart à ces conditions posera problème. Par nature dépourvue de pouvoir prédictif, cette démarche ne permet pas d'évaluer les risques de mise hors service de la structure lors d'un fonctionnement en dehors de son domaine d'identification.

- D'autre part, la démarche inductive ne peut être mise en œuvre que sur des matériaux bien définis. Un changement de matériau, une légère modification de sa composition chimique par exemple, impose une complète ré-identification du comportement mécanique sans qu'il puisse être tiré parti des connaissances acquises pour les extrapoler ou les adapter.

Un souci permanent des scientifiques est donc de relier le comportement macroscopique des matériaux à leurs caractéristiques micro-structurales. Cet objectif semble pouvoir être atteint par une combinaison judicieuse de la physique et des phénomènes mécaniques macroscopiques dans la description du matériau. A travers une démarche micromécanique, la mécanique permettra d'élaborer des approches plus déductives du comportement des matériaux débouchant sur une description d'un élément de volume, tandis qu'au travers de la physique on s'attachera au développement de méthodes liées à des ensembles macroscopiques ou d'éléments structuraux en interaction. Il s'agit d'une transition du microscopique au macroscopique, entre les différentes échelles d'appréhension des phénomènes et des propriétés.

Tout matériau, même à l'état non déformé contient des hétérogénéités qui peuvent être des inclusions volontairement introduites pour améliorer certaines performances du matériau, ou plus généralement des particules de seconde phase telles que des précipités. Ces hétérogénéités servent dans la plupart des cas de sites d'amorçage de cavités et initient ainsi le processus de l'endommagement ductile du matériau. Elles peuvent, à l'instar de certaines particules jouer également un rôle non négligeable dans le comportement global du métal dans sa phase antérieure à l'endommagement. Il est donc important de mieux analyser leur impact sur le comportement non endommagé pour espérer cerner avec une plus grande précision leur contribution au processus de ruine du matériau. On peut espérer que ces particules étrangères, suivant leur localisation, inter ou intra-cristalline, influencent l'écrouissage du monocristal dans lequel elles apparaissent.

L'objectif essentiel du présent travail, est de proposer une modélisation micromécanique de l'endommagement ductile de matériaux cristallins par décohésion de l'interface cristal-particules, mais aussi d'analyser le comportement effectif de tels matériaux dans la phase antérieure à l'endommagement.

Elle est basée sur une double transition d'échelle permettant de prendre en compte la présence d'hétérogénéités intragranulaires dans la description du matériau macroscopique.

Le chapitre I est consacré à la description de diverses approches de modélisation de l'endommagement ductile de matériaux. Diverses investigations et modélisations micromécaniques de l'endommagement sont discutées.

Le deuxième chapitre propose une nouvelle description du comportement élastoplastique du grain hétérogène constitué d'un monocristal contenant une fraction volumique d'hétérogénéités. Après un rappel de la formulation classique de la plasticité cristalline des métaux, caractérisée par une déformation plastique par glissements cristallographiques, nous avons déduit une description cohérente du comportement du grain équivalent à cette échelle mésoscopique. Les lois constitutives ainsi que la règle d'écrouissage du grain hétérogène sont une judicieuse retranscription de la description usuelle du monocristal. Cette approche permet ainsi, de décrire le comportement du grain en ne considérant que les paramètres rhéologiques et géométriques de l'hétérogénéité et ceux du grain, sans inclure explicitement la matrice cristalline. Tout se passe comme si le grain s'était substitué au monocristal. Les techniques standards d'homogénéisation-localisation permettent d'effectuer la transition d'échelle micro-méso, pour localiser les contraintes et déformations d'ordre trois dans l'hétérogénéité mais aussi de déduire les propriétés effectives du grain. La modélisation de l'écrouissage du grain hétérogène tient évidemment compte des interactions entre les hétérogénéités et les dislocations lors du mécanisme de déformation plastique par glissements cristallographiques de ces dernières sur des systèmes actifs.

La description du comportement élastoplastique macroscopique du polycristal ainsi que quelques rappels relatifs au calcul des modules tangents, le choix des systèmes actifs du monocristal et d'autres résultats généraux nécessaires à la mise en œuvre de notre modélisation sont présentés au chapitre III. La nouvelle formulation autocohérente permet de proposer une description des contraintes d'ordre trois qui se développent dans le matériau du fait de la présence d'hétérogénéités intragranulaires.

Nous proposons au chapitre IV, les résultats de l'application du modèle d'écrouissage intragranulaire à la description mécanique de matériaux polycristallins cubiques comportant des précipités intracristallins. Une attention particulière a été notamment portée sur l'étude de la modification de la structure interne du matériau. Cette évolution interne est caractérisée par le développement de contraintes internes à l'échelle du grain mais aussi à celle inférieure, des hétérogénéités. Nous avons aussi étudié les effets de la forme, de l'orientation et la fraction de précipités intragranulaires sur l'évolution de la structure interne du matériau. L'étude s'est également attachée à décrire les surfaces d'écoulement plastique du matériau, pour cerner de manière précise l'écrouissage mixte anisotrope et cinématique dont est sujet ce dernier.

Enfin, l'étude de la structure interne permet d'introduire au chapitre V, la modélisation des deux premières étapes du processus d'endommagement ductile. L'analyse des contraintes d'ordre trois, largement abordée dans le chapitre précédent, permet de préciser, l'instant et la localisation de l'amorçage par décohésion de l'interface matrice cristalline-précipités. Pour l'étude de la croissance, le seul paramètre introduit est la porosité ou fraction volumique de cavités. Elle est directement reliée à la fraction de précipités à l'origine de l'amorçage. Sa variation résulte de l'évolution de la déformation plastique de la matrice environnante.

Chapitre I

Endommagement mécanique des matériaux

1. Modélisation continue de l'endommagement
   - 1.1 Variables continues de l'endommagement
   - 1.2 Théorie thermodynamique des processus irréversibles
   - 1.3 Modèles d'endommagement anisotrope
     - 1.3.1 Modèle de Murakami et *al.*
     - 1.3.2 Modèle de Dragon et *al.*
     - 1.3.3 Modèle anisotrope avec introduction d'une condition unilatérale

2. Analyse micromécanique de l'endommagement ductile
   - 2.1 . Amorçage de l'endommagement ductile
     - 2.1.1 Localisation d'amorçage
       - a. L'instant d'amorçage
       - b. Les sites de l'amorçage de l'endommagement
     - 2.1.2 Mécanismes élémentaires de l'amorçage
       - a. Initiation de fissures dans l'inclusion
       - b. Fissuration de la matrice entourant l'inclusion
       - c. Décohésion de l'interface inclusion - matrice
     - 2.1.3 Modélisation de l'amorçage
       - a. Critères de la mécanique des milieux continus
       - b. Critères de la métallurgie physique
   - 2.2 . Croissance de l'endommagement
     - 2.2.1 Modèles d'endommagement non couplés en plasticité
     - 2.2.2 Modèles d'endommagement couplés en plasticité
     - 2.2.3 Croissance des cavités
   - 2.3 Coalescence des cavités

3. Conclusion

4. Bibliographie

Chapitre I

Endommagement mécanique des matériaux.

L'endommagement caractérise l'ensemble des phénomènes irréversibles liés à la création de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein d'un matériau, et leur évolution sous une sollicitation. On distingue plusieurs mécanismes d'endommagement mécanique des matériaux :

- L'endommagement plastique ductile associé aux grandes déformations plastiques des matériaux aux températures normales ;
- L'endommagement viscoplastique fragile ou de fluage, qui concerne les métaux aux températures moyennes et élevées ;
- L'endommagement de fatigue ou de micro-plasticité pour des métaux soumis à des cycles de chargement ;
- L'endommagement macrofragile provoqué par des chargements monotones sans déformations irréversibles notables (cas du béton).
- L'endommagement par oxydation, par corrosion et par irradiation est aussi envisageable.

L'objectif de la modélisation de tels phénomènes est de proposer des lois d'évolution de l'endommagement. Il s'agit alors, à partir de l'histoire des contraintes et déformations d'une structure, d'intégrer ces lois pour décrire l'évolution de l'endommagement de l'amorçage jusqu'à l'apparition d'un défaut macroscopique. L'endommagement du matériau est représenté par une variable interne décrivant la détérioration de la matière. Plusieurs voies d'investigations plus ou moins adaptées ont été proposées :

- Les mesures physiques globales de densité ou de résistivité exigent la définition d'un modèle global pour leur conversion en caractéristiques de résistance de matériau.

- L'évaluation de la durée de vie résiduelle ne permet pas de déduire les lois de comportement du matériau endommagé.
- Les mesures mécaniques globales à travers les modifications des caractéristiques mécaniques conduisent à d'assez bonnes interprétations en terme de variable d'endommagement.
- Les mesures microscopiques conduisent à des modèles microscopiques et on peut alors déduire les propriétés effectives de l'élément de volume macroscopique par homogénéisation. C'est cette approche que nous suivrons en nous consacrant plus spécialement à l'endommagement plastique ductile des matériaux.

La phase finale du processus de l'endommagement ductile des matériaux est généralement caractérisée par la rupture macroscopique par coalescence des micro-cavités, au cours de la déformation plastique. Ces cavités naissent au niveau des particules de seconde phase (précipités) soit par décohésion de l'interface particule-matrice, soit par rupture de la particule. Par la suite, ces cavités croissent en fonction de la déformation plastique de la matrice.

L'observation du faciès de rupture des matériaux permet d'envisager dans le processus d'endommagement ductile trois étapes schématisées par la *Figure I.1*.

1. L'amorçage de cavités par fissuration interne des précipités ou inclusions ou par décohésion interfaciale, lorsqu'il n'existe pas initialement de vides.
2. La croissance des cavités sous l'effet de la déformation plastique et de la triaxialité des contraintes,
3. La coalescence des cavités voisines qui se rejoignent pour donner la surface de rupture finale.

L'étude de l'endommagement peut se faire essentiellement selon deux voies : une approche globale dans laquelle on adopte une variable continue d'endommagement introduite par Kachanov (1958) et une approche micromécanique par transitions d'échelles et homogénéisation.

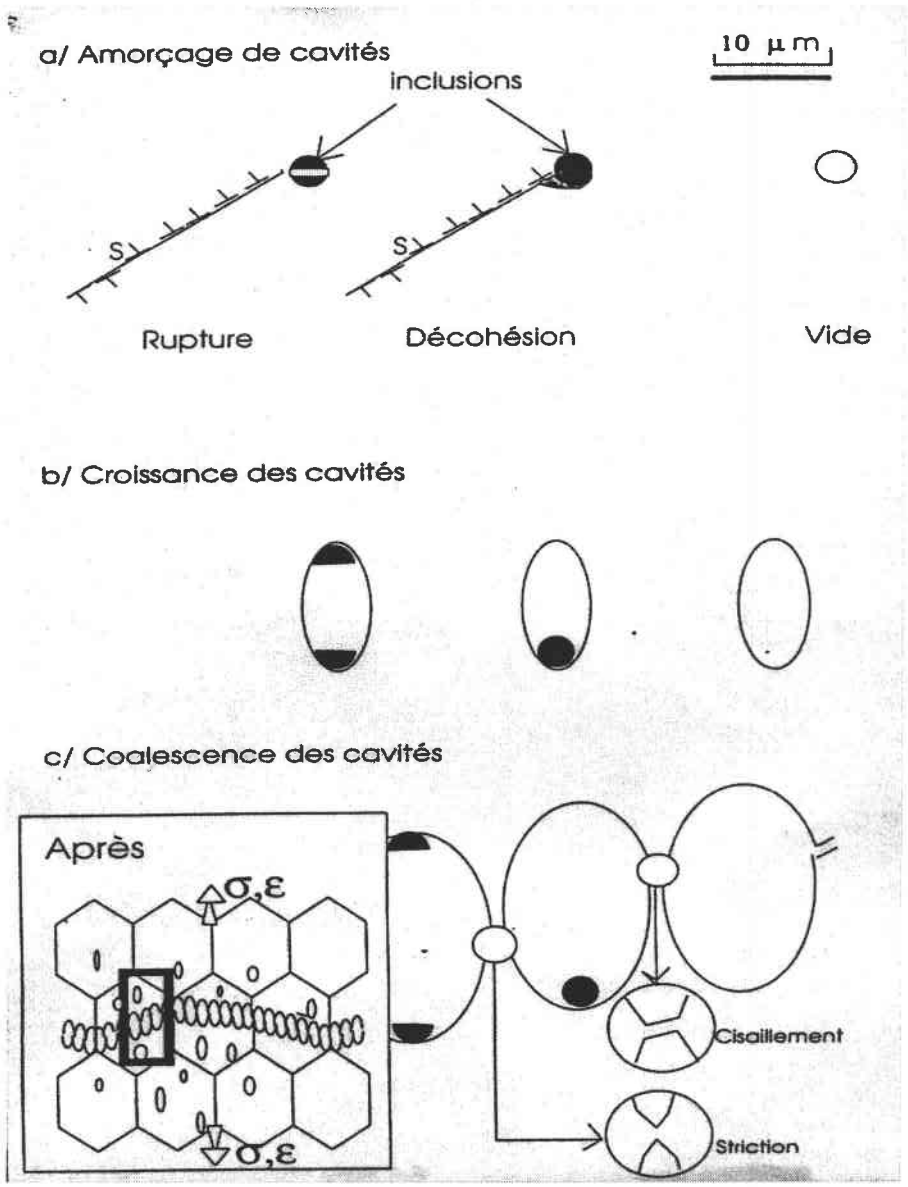


***Figure I. 1**: Modèle microscopique de rupture ductile (D. Miannay)*

1 Modélisation continue de l'endommagement

Le phénomène d'endommagement est un processus rhéologique bien différent de la déformation même si ces deux phénomènes sont liés aux mouvements et à l'accumulation des dislocations ou aux micro-décohésions. En outre, l'endommagement présente un caractère d'irréversibilité beaucoup plus prononcé.

Des variables mécaniques pour la description de l'endommagement ont été introduites depuis les travaux de Léonard de Vinci. Cependant, ce n'est qu'en 1958 que Kachanov introduit une variable continue d'endommagement pour modéliser la détérioration progressive par fluage des matériaux sous sollicitation unidimensionnelle. Cette nouvelle approche a été par la suite reprise et adaptée à la rupture ductile et par fatigue à partir de 1970 (Lemaitre, Chaboche, Hult, Leckie et Murakami). L'association de la thermodynamique des processus irréversibles a permis la généralisation au modèle tridimensionnel.

Lemaitre et Chaboche [32] ont appliqué cette démarche pour l'étude de problèmes variés du comportement élastique-fragile à l'élasto-plastique-ductile, en passant par le fluage et la fatigue des matériaux. Des théories thermodynamiques pour l'endommagement anisotrope ont été établies, Krajcinovic [31], notamment en introduisant une variable d'endommagement sous forme d'un vecteur. Chow et *al.* [13], proposent également un modèle élasto-plastique pour décrire les différences de comportement de matériaux sous compression et sous traction en recourrant à un tenseur d'endommagement. Plus tard, Murakami et Kamiya [37], ont développé une description de l'endommagement anisotrope de matériaux élastique-fragiles sous sollicitation multiaxiale en utilisant un tenseur d'endommagement symétrique d'ordre deux, dans la formulation de la thermodynamique irréversible.

Dragon et *al.* [17], ont introduit une condition unilatérale dans un modèle d'endommagement anisotrope pour décrire la restauration des modules élastiques lors du phénomène d'activation-désactivation de l'endommagement au cours d'un trajet de chargement.

1.1 Variables continues de l'endommagement

Dans un matériau endommagé, on peut définir une mesure mécanique de l'endommagement local dans une direction $\vec{n}$ par :

$$D_n = \frac{S_D}{S} \tag{I.1}$$

S_D représente l'aire totale de l'ensemble des traces des défauts corrigée des effets de concentrations de contraintes et d'interactions, S l'aire d'une section de l'élément de volume de normale $\vec{n}$. $D_n = 0$ correspond à l'état non endommagé du matériau, $D_n = 1$ à l'élément de

volume rompu en deux alors que le domaine $0<D_n<1$ caractérise l'état d'endommagement. L'endommagement isotrope est constitué de fissures et cavités uniformément orientées dans toutes les directions. La variable D_n, dans ce cas, ne dépend pas de l'orientation $\vec{n}$ et l'état de l'endommagement du matériau est complètement défini par le scalaire D.

$$D_n = D \quad \forall \vec{n} \tag{I.2}$$

Dans le cadre d'un milieu endommagé anisotrope, les cavités sont d'orientations privilégiées et la variable scalaire D_n dépend de l'orientation de la normale $\vec{n}$. Les micro-fissures se propagent généralement dans des directions perpendiculaires aux directions des contraintes principales. Une variable scalaire s'avère donc très pauvre pour décrire l'endommagement actuel d'un matériau. Ainsi, diverses modélisations de l'endommagement anisotrope introduisent des variables allant du vecteur au tenseur.

Les tenseurs d'ordre deux sont adoptés dans la majorité des études à cause d'abord de leur simplicité mathématique par rapport aux tenseurs d'ordre plus élevé et aussi parce qu'ils se prêtent bien à une description satisfaisante des phénomènes d'endommagement anisotrope.

D'après une idée de Murakami et Kamiya [37], et de Dragon et *al.* [17-18], pour rendre compte de l'orientation et de la distribution des défauts, l'endommagement peut être décrit par une variable tensorielle d'ordre deux.

$$D=\sum_{i=1}^{3} D_i \; n^i \, n^i \tag{I.3}$$

D_i et n^i représentent les valeurs principales et les vecteurs unitaires des directions principales du tenseur D.

1.2 Théorie thermodynamique des processus irréversibles

La théorie des processus irréversibles fournit une approche pour une formulation unifiée des équations constitutives et d'évolution de l'endommagement d'un matériau. Dans l'hypothèse des petites déformations, l'inégalité de Clausius-Duhem peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{q}{T} \cdot grad\, T \geq 0 \tag{I.4}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ désignent les tenseurs de contrainte et de déformation, ρ, ψ, s, T et q sont respectivement, la masse volumique, l'énergie libre spécifique d'Helmholtz, l'entropie

spécifique, la température absolue et le flux de chaleur. On suppose également la partition additive de la déformation totale ε en partie élastique ε^e et en partie inélastique ε^p :

$$\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^p \tag{I.5}$$

On introduit des variables internes tensorielles V_k pour décrire l'évolution de la structure interne du matériau induite par la modification de la densité, de la configuration des dislocations, et le développement des cavités microscopiques au cours du processus d'endommagement.

$$\{V_k \ ; \ k=1,2,\ldots\} \tag{I.6}$$

En tenant compte de la décomposition **I.5** l'énergie libre d'Helmholtz se met sous la forme :

$$\psi=\psi(\varepsilon^e, V_k, T) \tag{I.7}$$

L'introduction des relations **I.5** et **I.7** dans **I.4** fournit les relations constitutives suivantes ainsi que l'équation du taux de production de l'entropie spécifique :

$$\sigma=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon^e}, \qquad s=-\frac{\partial\psi}{\partial T} \tag{I.8}$$

$$\rho\Phi=\sigma:\dot{\varepsilon}^p+A_k\cdot\dot{V}_k+\frac{g}{T}\cdot q\geq 0 \tag{I.9}$$

Les A_k sont les forces thermodynamiques conjuguées associées aux variables internes V_k et g le gradient de température :

$$A_k\equiv-\rho\frac{\partial\psi}{\partial V_k} \ (k=1,2,\cdots), \qquad g\equiv-grad\,T \tag{I.10}$$

Introduisons le vecteur de flux mécanique J et le vecteur de leurs forces thermodynamiques X définis par :

$$J=\rho\{\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, q\}^T \tag{I.11}$$

$$X=\left\{\sigma, A_k, \frac{g}{T}\right\} \tag{I.12}$$

L'équation **I.9** de production d'entropie devient alors :

$$\rho\Phi=X\cdot J\geq 0 \tag{I.13}$$

Rice et *al.* [38], supposent que le réarrangement de la structure est déterminé par les forces associées à ce réarrangement. Dans ce cas, chaque composante J_k du vecteur flux mécanique est une fonction des composantes correspondantes du vecteur force thermodynamique X et de la configuration actuelle.

$$J_k = \tilde{J}_k(X_k, T, J) \tag{I.14}$$

Il peut exister un ou plusieurs potentiels de dissipation $F(X)$, homogènes, fonctions convexe des forces conjuguées et défini par :

$$J_k = \frac{\partial F}{\partial X_k} \tag{I.15}$$

En exploitant les équations I.11, I.12 et I.15, chaque composante du vecteur J s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad , \quad \dot{V}_k = \frac{\partial F}{\partial A_k} \quad , \quad q = \frac{\partial F}{\partial (g/T)} \tag{I.16}$$

L'avantage de cette approche réside dans le fait qu'en construisant un seul potentiel on peut établir à la fois les relations constitutives et l'évolution de l'endommagement du matériau. La théorie de l'endommagement ainsi établie est semblable à celle de la plasticité.

1.3 Modèles d'endommagement anisotrope

La théorie thermodynamique discutée dans la section précédente a été appliquée à l'étude de l'endommagement de matériaux élastiques fragiles : Murakami et *al.*[37], Dragon et *al.* [18].

1.3.1 Modèle de Murakami et Kamiya [37]

Pour décrire l'état de l'endommagement anisotrope, ces auteurs choisissent un tenseur d'endommagement d'ordre deux D et une autre variable scalaire d'endommagement β correspondant à la variable d'écrouissage isotrope de la théorie de la plasticité. La variable β permet de caractériser l'évolution de l'état de l'endommagement.

$$V_k = \{D, \beta\} \tag{I.17}$$

$$A_k = \{Y, -B\} \tag{I.18}$$

Les forces thermodynamiques sont reliées à leur variable interne correspondante par :

$$Y \equiv -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} , \qquad -B \equiv -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \tag{I.19}$$

L'énergie libre de Helmholtz se décompose en une partie correspondant à l'énergie de déformation élastique et une autre partie représentant la contribution de l'endommagement.

$$\rho\psi(\varepsilon^e, D, \beta) = \rho\psi^e(\varepsilon^e, D) + \rho\psi^d(\beta) \tag{I.20}$$

La partie élastique est une combinaison des invariants des tenseurs D et ε^e.

$$\begin{aligned} \rho\psi^e(\varepsilon^e, D) = \frac{1}{2}\lambda(tr\varepsilon^e)^2 + \mu tr(\varepsilon^e)^2 + \eta_1 trD(tr\varepsilon^e)^2 + \eta_2 trD\,tr(\varepsilon^e)^2 \\ + \eta_3 tr\varepsilon^e tr(\varepsilon^e \cdot D) + \eta_4 tr\left[(\overline{\varepsilon}^e \cdot)^2 D\right] \end{aligned} \tag{I.21}$$

et :

$$\rho\psi^d(\beta) = \frac{1}{2} K_d \beta^2 \tag{I.22}$$

λ et μ sont les constantes de Lamé et η_1 à η_4, K_d des constantes du matériau. Les équations constitutives du modèle se déduisent dès lors des relations I.8 et I.10. Pour décrire l'évolution de l'endommagement, on postule l'existence d'une surface d'endommagement définie par :

$$F(Y, B) = Y_{eq} - (B_0 + B) \tag{I.23}$$

où :

$$Y_{eq} = \sqrt{\tfrac{1}{2} Y : \tilde{L} : Y} \tag{I.24}$$

B_0 est une constante du matériau et représente le seuil initial de l'endommagement et :

$$L_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{I.25}$$

Les équations d'évolution de l'endommagement sont déduites du potentiel de dissipation défini par I.23 :

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial F}{\partial Y} \tag{I.26}$$

et :

$$\dot{\beta}=\dot{\lambda}_d \frac{\partial F}{\partial(-B)}=-\dot{\lambda}_d \tag{I.27}$$

Comme dans la théorie de la plasticité, la constante $\dot{\lambda}_d$ est un multiplicateur fourni par la condition de consistance sur la surface d'endommagement.

1.3.2 Modèle de Dragon et Halm .[17]

Dans ce modèle, un terme linéaire en ε est introduit dans l'expression de l'énergie libre de Helmholtz pour décrire les phénomènes résiduels liés à l'endommagement seul.

$$\psi(\varepsilon,D)=\frac{1}{2}\lambda(tr\varepsilon)^2+\mu tr(\varepsilon)^2+g(tr\varepsilon\cdot D)+\alpha\, tr\varepsilon\, tr(\varepsilon\cdot D)+2\beta\, tr(\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot D) \tag{I.28}$$

α, β et g sont des coefficients liés à la modification de l'énergie due à l'endommagement.

Les équations d'état dérivent du modèle :

$$\sigma=\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\ ,\quad F^D=-\frac{\partial\psi}{\partial D} \tag{I.29}$$

et :

$$\varepsilon=\varepsilon^+ +\varepsilon^-,\ \ \varepsilon^+=P^+:\varepsilon,\ \ F^{D1}=g\varepsilon=F^{D1+}+F^{D1-}=-g\varepsilon^+-g\varepsilon^-,\ \ F^{D2}=F^D-F^{D1} \tag{I.30}$$

P^+ est un tenseur d'ordre quatre de projection positive.

Critère d'endommagement et lois d'évolution :

$$\begin{aligned} f(F^D-F^{D1}-F^{D2},D)=&\sqrt{\tfrac{1}{2}tr\left[(F^D-F^{D1}-F^{D2})\cdot(F^D-F^{D1}-F^{D2})\right]}\\ &+B\,tr\left[(F^D-F^{D1}-F^{D2})\cdot D\right]-(C_0+C_1\,trD)\le 0 \end{aligned} \tag{I.31}$$

$$\dot{D}=\Lambda\frac{\partial f}{\partial F^D}\ ,\quad \Lambda\ge 0 \tag{I.32}$$

1.3.3 Modèle anisotrope avec introduction d'une condition unilatérale [18]

Ce modèle permet de prendre en compte les phénomènes d'ouverture et fermeture des micro-fissures lors d'un trajet de chargement. Une description du phénomène d'activation–désactivation de l'endommagement par mésofissuration est donc associée au comportement anisotrope, tout en préservant la continuité de la réponse contrainte-déformation.

Par rapport au modèle précédent, on introduit un terme de contrôle d'ouverture-fermeture des défauts, lorsque l'endommagement est activé. La condition de continuité de potentiel ψ et de la réponse contrainte-déformation lors de la transition d'état ouvert des défauts vers un état de défauts fermés conduit à un critère de fermeture-ouverture sous la forme :

$$n\cdot\varepsilon\cdot n=0 \tag{I.33}$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale au plan des fissures.

Les équations de ce modèle s'obtiennent à partir de l'expression suivante du potentiel :

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon,D)=&\frac{1}{2}\lambda(tr\varepsilon)^2+\mu tr(\varepsilon)^2+g(tr\varepsilon\cdot D)+\alpha\, tr\varepsilon\, tr(\varepsilon\cdot D)+2\beta\, tr(\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot D)\\ &-(\alpha+2\beta)\varepsilon:\left[\sum_{k=1}^{3}H(-\mathbf{v}^k\cdot\varepsilon\cdot\mathbf{v}^k)D_k\,\mathbf{v}^k\otimes\mathbf{v}^k\otimes\mathbf{v}^k\otimes\mathbf{v}^k\right]:\varepsilon\end{aligned} \tag{I.34}$$

H désigne la fonction de Heaviside, D_k $(k=1,3)$ représentent respectivement les trois valeurs propres distinctes du tenseur symétrique défini positif D et $\boldsymbol{v}^k$ les vecteurs propres correspondantes. La restitution des modules élastiques initiaux par ce modèle est vérifiée. De plus son couplage éventuel avec des phénomènes de frottement reste possible.

2 Analyse micromécanique de l'endommagement ductile

Dans un matériau ductile, les micro-cavités se forment généralement au niveau des particules de seconde phase par décohésion de l'interface inclusion-matrice, ou par rupture de la particule. Par la suite, la cavité initiée va croître sous l'effet de la déformation plastique du matériau.

Les premières études micromécaniques de l'endommagement ductile ont porté sur la croissance d'une cavité isolée dans un solide élasto-plastique infini (McClintock, [35]; Rice et Tracey, [38]). Leurs résultats ont permis d'estimer la déformation critique pour la

coalescence. La prise en compte des interactions entre cavités voisines et la modélisation micro-mécanique des autres étapes de l'endommagement ductile a constitué la préoccupation des travaux ultérieurs.

Les travaux initiaux de modélisation du comportement d'un matériau ductile poreux sont l'œuvre de Gurson [24]. D'autres lois d'écoulement de matériaux poreux ont été proposées par plusieurs auteurs, notamment Shima et Oyane [40]. La plupart de ces modèles, à l'instar de celui de Gurson font l'hypothèse d'une cavité sphérique ou cylindrique. Une telle approximation, même si elle est raisonnable dans certains cas à cause de la forme de la particule autour de laquelle naît la cavité, peut se révéler inappropriée pour la description du stade final de l'endommagement à cause de la croissance et de la coalescence des cavités.

Cette section sera consacrée à la description des phénomènes liés aux trois étapes de l'endommagement ductile ainsi qu'à une analyse des diverses approches de modélisation mécanique.

2.1. Amorçage de l'endommagement ductile

Les matériaux, même purs, comportent une certaine population d'inclusions ou de particules. C'est par exemple le cas de particules d'oxyde dans le cuivre, ou des inclusions de sulfures de manganèse dans certains aciers.

La fraction volumique, la distribution spatiale et géométrique, la forme et la dureté relative de ces particules par rapport à la matrice environnante influencent considérablement la ductilité du matériau global. La naissance des cavités dépend en partie de la cohésion entre les particules et la matrice. Si cette cohésion est faible (cas de sulfures de manganèse dans l'acier), les cavités peuvent apparaître pour des déformations plastiques relativement faibles. La présence de ce type de particules induit une localisation de contraintes internes à cause des incompatibilités de comportement thermo-mécanique entre la matrice et la particule. Par contre, lorsque la force de cohésion entre la particule et la matrice est grande, des contraintes localisées très élevées sont nécessaires pour initier une cavité.

Le champ de contraintes généré par la présence d'une particule dans une matrice sous sollicitation élastique a été traité par Goodier (1933). Si la particule est moins dure que la matrice, les contraintes élevées sont localisées à l'équateur, comme pour un trou.

Par contre, pour des particules dures, les concentrations de contraintes apparaissent aux pôles des particules. Les résultats de Goodier donnent une idée sur les zones dangereuses autour de la particule.

Dans un matériau déformé plastiquement, les cavités peuvent apparaître aussi bien par décohésion de l'interface paricule-matrice, que par rupture de la particule. Ainsi, plus la fraction volumique des inclusions ou des particules de seconde phase est importante, plus faible sera la ductilité du matériau. Cette ductilité dépend aussi de la forme et de la localisation des particules dans le matériau.

2.1.1. Localisation de l'amorçage de l'endommagement

L'amorçage, première étape du processus d'endommagement est caractérisé par l'apparition dans la matière de cavités microscopiques tridimensionnelles (trous) ou quasi-planes (fissures). Si l'apparition locale d'une discontinuité dans la matière peut être considérée comme instantanée, l'amorçage dans le matériau macroscopique peut occuper une fraction importante de l'histoire de sa déformation. Il est vraisemblable que l'amorçage de l'endommagement de nombreux matériaux commence dans leur domaine élastique et que des sites d'amorçage peuvent encore apparaître au moment où certaines cavités coalescent.
La description des mécanismes de l'amorçage suppose la connaissance des causes microscopiques de l'endommagement. L'étude de cette première étape doit permettre de comprendre l'apparition de micro-cavités à un moment donné dans un matériau pour envisager retarder au maximum l'activation du processus d'endommagement.

a - L'instant de l'amorçage

La théorie de l'endommagement permet de décrire tout le processus de détérioration du matériau, de l'apparition des micro-fissures ou micro-cavités jusqu'à la rupture macroscopique. Les phénomènes d'endommagement s'inscrivent ainsi entre deux instants de la vie d'une structure : un état initial de référence, et un stade final caractérisé par la rupture macroscopique du matériau. La mise en œuvre de cette théorie de l'endommagement nécessite donc la précision de ces deux stades extrêmes du processus. Il est difficile de définir objectivement un matériau vierge de tout phénomène endommageant, car la présence de micro-défauts est inhérente à son mode de fabrication.

L'état initial, microscopiquement non endommagé, étant dès lors difficilement accessible, la détermination de l'instant où s'initie l'endommagement se réfère, dans la pratique, à un état d'endommagement initial du matériau.

Le stade final du processus correspond également au début du domaine de la fissuration. Il est caractérisé par la présence d'une fissure macroscopique dont la taille est de l'ordre de l'élément de volume représentatif : de *0,1* à *1 mm* pour les métaux.

Cette difficulté de la caractérisation d'un état absolu de référence, a pour conséquence dans la pratique, le recours à des mesures relatives pour quantifier l'endommagement. Seule l'observation directe peut fournir une mesure absolue de l'endommagement mécanique d'un matériau. Expérimentalement, la détermination de la déformation macroscopique correspondant à l'instant de l'amorçage se fait à travers des méthodes de contrôle non destructif telles que l'émission acoustique ou la mesure de densité.

L'étude des modes d'amorçage nécessite quant à elle, des méthodes d'observations directes telles que la microscopie optique ou la microscopie électronique à balayage. La détermination théorique de l'état de contrainte et de déformation tant microscopique que macroscopique associé à l'amorçage sera exposée dans la section consacrée à sa modélisation.

b - Les sites d'amorçage de l'endommagement

L'amorçage de l'endommagement résulte, généralement, d'une localisation microscopique des champs de contraintes ou de déformation dans certaines zones de la matière, présentant des hétérogénéités structurales. L'apparition d'une cavité dans un métal a été pendant longtemps supposée se produire essentiellement au niveau d'une inclusion. Cette idée s'appuyait sur l'analyse des surfaces de rupture ductile qui révèle souvent l'existence d'une inclusion ou un fragment d'inclusion au fond des cupules (Voir *Figure I.2*)

Cependant, des travaux ont mis en évidence la possibilité de l'amorçage de l'endommagement dans un matériau initialement dépourvu d'inclusion. On peut donc envisager deux mécanismes de création de cavités dans un matériau :

- Un mécanisme homogène basé sur les interactions entre les dislocations et la migrations des lacunes,

- Un mécanisme hétérogène lié à la présence des inclusions, des particules de seconde phase ou toute autre discontinuité de structure.

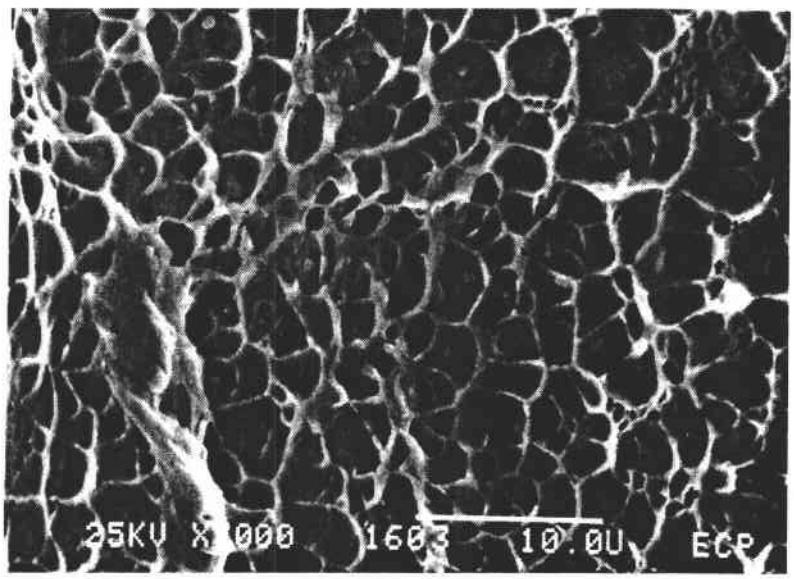


Figure I. 2 : *Fractographie d'un acier inoxydable austénitique Z 02 CND 17 13 révélant la présence des particules au fond des cupules (D. François et al., 1993.)*

➢ *Création de cavités dans un matériau homogène par interactions entre dislocations.*

La formation des micro-cavités dans un matériau homogène peut résulter d'une condensation de lacunes. Cependant, excepté sous des températures élevées où la diffusion de lacunes est appréciable, la création de vides par un tel processus est très rare.

Un mécanisme alternatif d'initiation de cavités consiste en une coalescence ou en une interaction des dislocations. Les preuves expérimentales de l'amorçage de l'endommagement dans un matériau initialement homogène sont peu nombreuses (Bauer et Wilsdorf, 1973, Gardner et Wilsdorf, 1980; Imura, 1980). La formation des cavités est toujours observée dans les zones à forte densité de dislocations. Bauer et Wilsdorf (1973), à partir d'observations de cupules dépourvues d'inclusion, suggèrent, dans le cas d'un acier inoxydable 304, que les cavités puissent résulter de la coalescence de lacunes produites par les intersections de dislocations en mouvement. Cependant les travaux de Goods et Brown [22], rendent peu probable ce type d'amorçage en l'absence de sites de germination.

Dans les métaux cubiques à faces centrées, à faible énergie de défaut d'empilement, le glissement multiple peut conduire à la formation de dislocations de Lomer-Cottrel par des réactions entre les dislocations partielles. Comme l'illustre la *Figure I.3*, l'empilement ainsi produit peut induire une micro-fissure par coalescence des dislocations de tête.

Pour les métaux cubiques centrés, un mécanisme analogue peut être également imaginé. La formation de micro-fissures résulterait de l'intersection des bandes de cisaillement.

La formation de micro-fissures par les mécanismes décrits ci-dessus exige des contraintes très élevées. De plus, il n'existe pas de preuve expérimentale décisive de leur validité. L'amorçage de l'endommagement dans un matériau *homogène* reste donc à prouver.

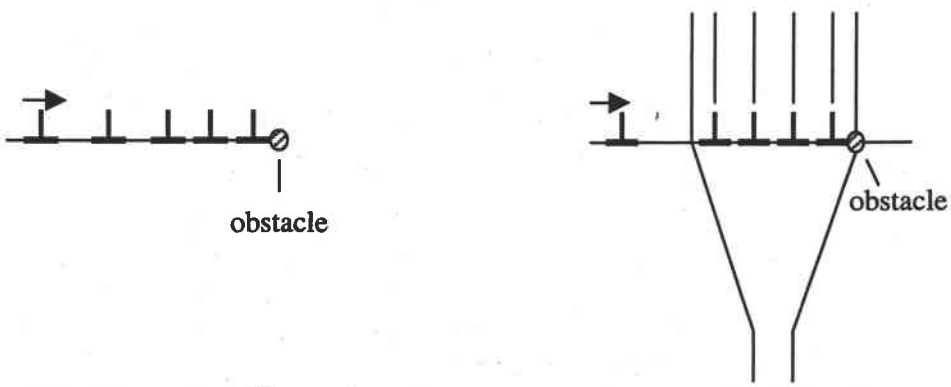


Figure I 3 *: Formation d'une micro-fissure par coalescence de dislocations en tête d'empilement* (Montheillet et *al.*, 1986)

Dans un matériau homogène, d'autres mécanismes d'amorçage faisant intervenir les dislocations non plus individuellement mais sous forme de parois ou de sous-joints peuvent être envisagés. De façon générale, tout matériau, même à l'état non déformé, présente des hétérogénéités qui peuvent constituer des sites privilégiés d'amorçage de son endommagement.

➢ *Amorçage de l'endommagement dans un matériau présentant des hétérogénéités de structure*

Les matériaux métalliques comportent toujours une certaine teneur d'éléments étrangers ou d'impuretés soit en solution solide dans le métal de base, soit sous forme de précipités ou d'inclusions. Par rapport au précipité, l'inclusion est en général un défaut structural de taille supérieure au micron et ne présente aucune relation cristallographique avec le métal environnant.

Les précipités cohérents peuvent être cisaillés par les dislocations et également interagir avec ces dernières. Par contre, les dislocations ne peuvent pas cisailler les précipités incohérents et doivent alors les contourner.

Un certain nombre de modèles de dislocations pour la formation de cavité au niveau des précipités a été proposé. Ainsi, Ashby [2], suppose que des boucles prismatiques de dislocations pourraient se former au niveau de l'interface précipité-matrice, siège d'importantes concentrations de contraintes. Ces boucles de lacunes s'éloignent de l'interface par glissement et de nouvelles boucles se forment. Pour les alliages d'aluminium, ce modèle a été modifié par Broek (1971) pour tenir compte des glissements déviés. Ce glissement est suivi par un glissement primaire de dislocations-vis qui conduit à leur éventuelle annihilation avec naissance de deux boucles prismatiques (*Figure I.4*).

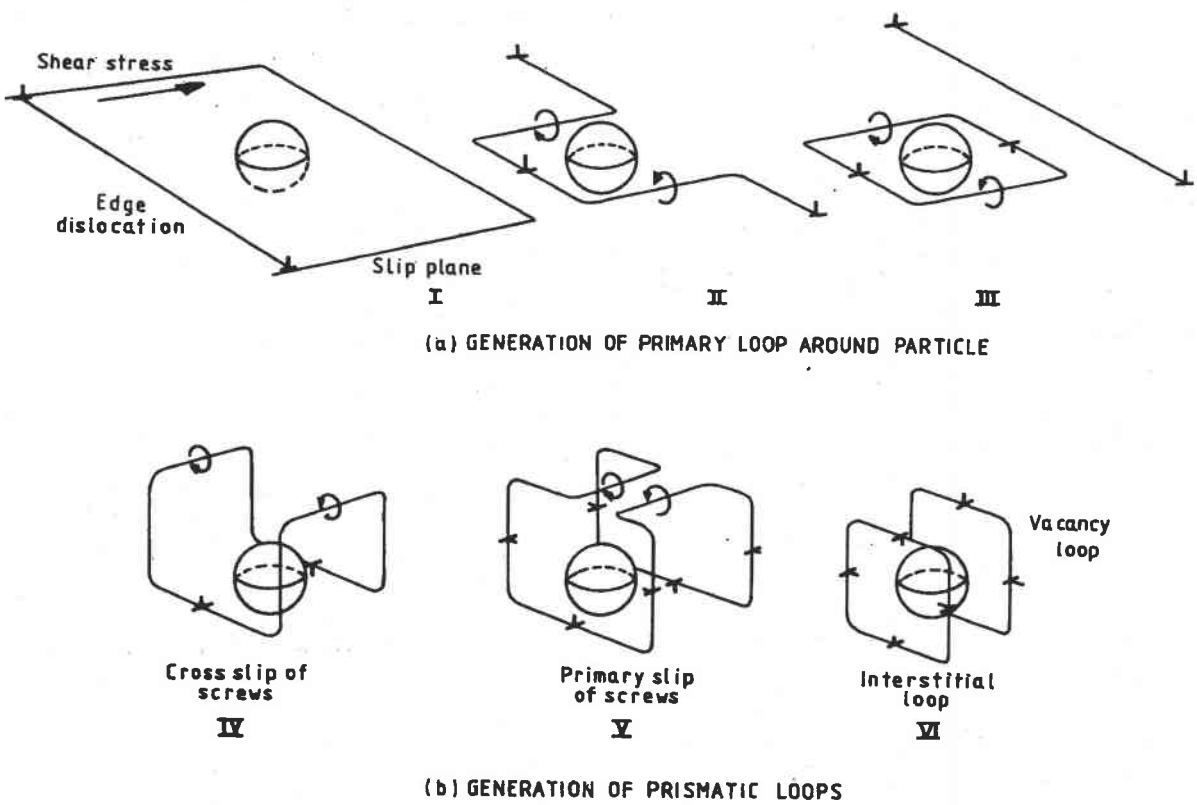
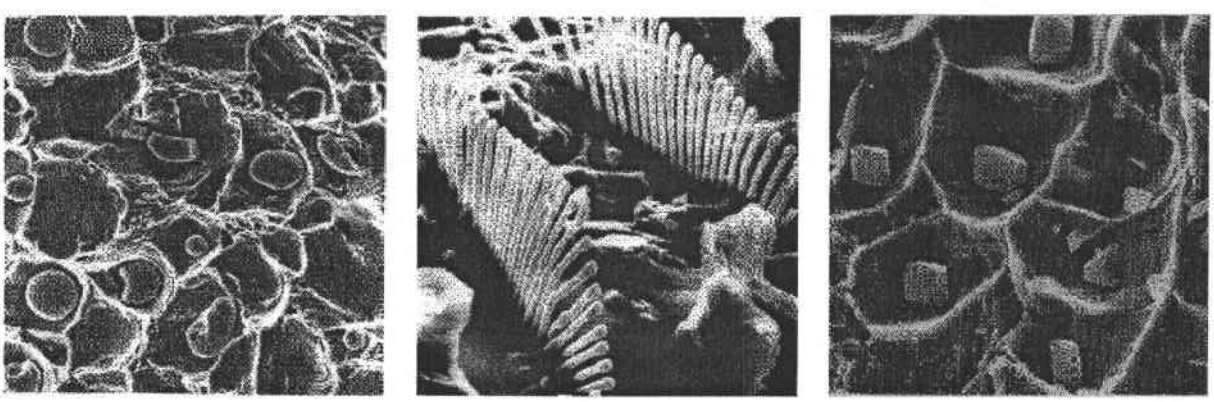


Figure I.4 : *Modèle de dislocations pour l'initiation de vide au niveau des particules par glissement dévié et annihilation de dislocations –vis (D. Broek, 1971.)*

La boucle de lacune initie le vide, et un certain nombre de ces boucles sont nécessaires pour la formation d'une cavité. En réalité, des enchevêtrements de dislocations se forment autour du précipité. Des micro-fissures se forment alors à la suite d'empilements de dislocations.
Le comportement de l'inclusion ou du précipité au cours de la déformation plastique, et son rôle de site éventuel de l'amorçage de l'endommagement, dépendent de sa rhéologie spécifique et de celle de la matrice environnante. Sa forme, le site qu'elle occupe au sein du matériau, et son orientation par rapport aux sollicitations mécaniques imposées et enfin la nature de l'interface inclusion-matrice influencent également ce comportement. En pratique, l'inclusion est généralement caractérisée par sa plasticité relative définie comme le rapport des contraintes d'écoulement de l'inclusion et de la matrice. On distingue alors les inclusions dures, lorsque ce rapport est supérieur à l'unité, et les inclusions molles, dans le cas contraire.

La *Figure I.5* révèle les formes extrêmement variées d'inclusions ou de précipités qu'on retrouve dans les matériaux métalliques. Ces hétérogénéités sont approximativement sphériques ou équi-axes. C'est le cas notamment des sulfures de manganèse du type I dans l'acier brut de solidification, des oxydes qui ne se déforment pas au cours de l'histoire thermomécanique du métal à cause de leur dureté, ou des nodules de plomb qui se déforment avec le métal mais recouvrent leur forme globulaire au cours des traitements thermiques. D'autres se présentent sous forme de cylindres ou de plaquettes très allongées, soit du fait de leur mode de formation au cours du processus de solidification, soit par déformation. Les observations métallographiques révèlent des inclusions de formes extrêmement plus complexes que dans cette description schématique.



Type I × 415 *Type II × 825* *Type III × 2000*

Figure I.5 : *Forme des trois types de sulfures de manganèse (Baker et Charles, Journal of the Iron and Steel Institute, 1972).*

La localisation de l'inclusion au sein du matériau joue un rôle non négligeable dans le processus d'amorçage de l'endommagement. On distingue :

- des inclusions intra-granulaires qui sont entièrement situées à l'intérieur d'un grain. Le comportement du système inclusion-monocristal relève de la mécanique du monocristal et peut être influencé par l'orientation de l'inclusion par rapport aux axes cristallographiques de la matrice.
- Des inclusions entourées d'un certain nombre de grains. Dans ce cas, compte tenu de l'effet de moyenne induit par le grand nombre de grains entourant l'inclusion, le formalisme de la mécanique des milieux continus semble bien se prêter à la description du comportement du système.
- Certaines inclusions peuvent se situer aux joints des grains ou aux points triples de l'agrégat polycristallin constituant la matrice.

L'orientation des inclusions par rapport aux sollicitations imposées conditionne les concentrations de contrainte et de déformation au voisinage de l'inclusion. De même, la résistance de l'interface inclusion-matrice, paramètre important du comportement du système inclusion-matrice, dépend de la nature de ces deux constituants. Cette résistance est plus faible pour des inclusions incohérentes que pour un précipité cohérent.

La caractéristique la plus importante de l'inclusion est la façon dont elle se comporte au cours de la déformation du matériau. L'amorçage de l'endommagement au cours de la mise en forme du matériau est donc indissociablement lié à la déformation de l'inclusion. Il paraît aussi important de pouvoir déterminer la déformation macroscopique qui correspond à l'amorçage de l'endommagement.

2.1.2 Mécanismes élémentaires de l'amorçage

Selon la loi de comportement de l'inclusion et de la matrice, la forme de l'inclusion et le site qu'elle occupe ainsi que la résistance de l'interface et de la sollicitation imposée, l'amorçage de l'endommagement peut se produire dans l'inclusion, dans la matrice, ou à l'interface inclusion-matrice. Précisons que le terme inclusion, dans cette partie désigne de façon générale, toute hétérogénéité structurale intra-granulaire.

a – Initiation de fissures dans l'inclusion.

L'amorçage de l'endommagement dans l'inclusion est caractérisé par l'apparition de micro-fissures dans les inclusions au cours de la déformation plastique. Si le facteur d'endommagement de l'inclusion, c'est-à-dire son aptitude à l'endommagement, est important, l'amorçage peut se produire dès le début de la déformation : fragmentation à $\bar{\varepsilon} \leq 0{,}05$ des inclusions de *MnS* dans un acier au *Mn-Ni-Mo* soumis à une déformation par traction uniaxiale ou par cintrage. Si par contre ce facteur est moindre, les premiers micro-vides s'initieront après une déformation plastique importante (fragmentation de nodules de cémentites dans un acier globulisé à *0,39%* de carbone après une déformation de $\bar{\varepsilon} \leq 0{,}5$; Inoue et Kinoshita [27]).

Dans tous les cas, l'amorçage est alors généralement suivi d'un élargissement des fissures qui conduit à la fragmentation de l'inclusion. Dans la pratique, les inclusions sont généralement polycristallines ou amorphes et peuvent être supposées isotropes. L'orientation des fissures dépend donc des directions principales de contraintes. En traction uniaxiale les fissures sont perpendiculaires à la direction de la sollicitation. On note dans certains cas, la coexistence d'au moins deux familles de fissures, selon leur orientation. Les micro-fissures sont généralement localisées dans les plans perpendiculaires aux contraintes principales positives. Cette fissuration de l'inclusion peut aussi induire très rapidement la fissuration de la matrice environnante.

b – Fissuration de la matrice entourant l'inclusion.

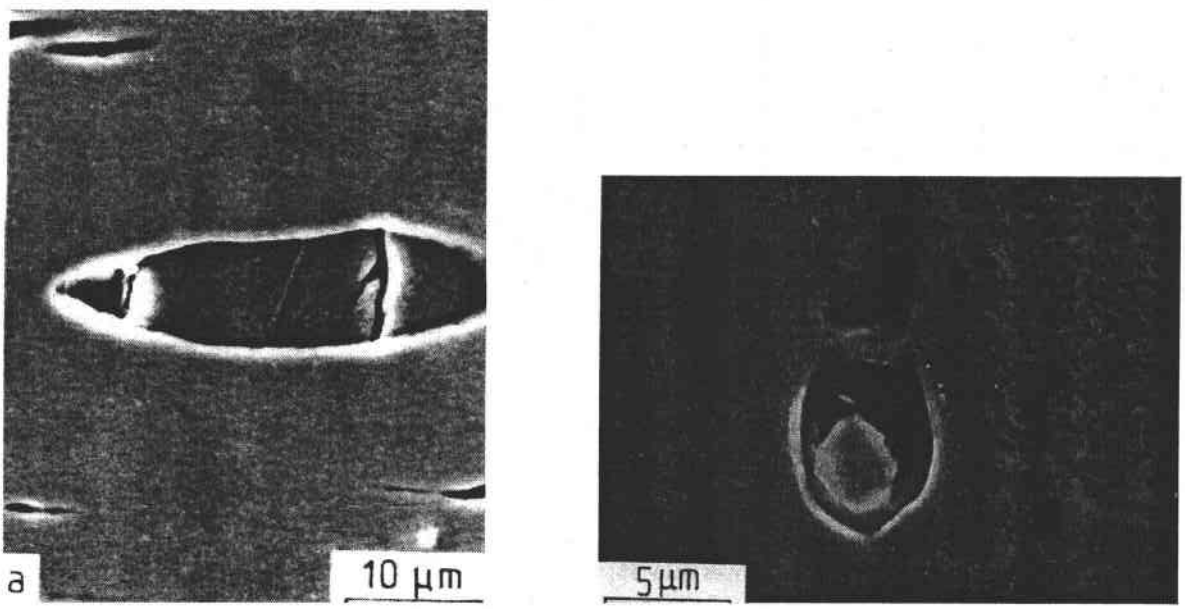
Les preuves expérimentales de l'amorçage de l'endommagement dans la matrice sont très rares. La formation de cavités pourrait s'effectuer essentiellement suivant deux mécanismes :

- Une cavitation à proximité du pôle des particules dans une zone à forte triaxialité de contraintes,
- La formation de cavités peut être liée à l'initiation de bandes de glissements au niveau des zones de concentration de contraintes localisées autour des particules.

La matrice est rarement homogène et peut contenir d'autres familles de précipités ou d'inclusions de tailles diverses. Dans de nombreux aciers, les inclusions de sulfures sont souvent entourées d'une matrice ferritique contenant de nombreux carbures.

c – Décohésion de l'interface inclusion-matrice

La formation de micro-fissures peut également résulter d'un décollement de l'interface inclusion-matrice sous l'action d'une sollicitation imposée.



- a - *- b -*

Figure I.6 : *a) Fragmentation de particule en traction uniaxiale dans un acier inoxydable austénitique - b) Cavité observée après une déformation équibiaxiale : cas de croissance indépendante de la particule (Thèse Barlat, INPG, 1974)*

La décohésion interfaciale dépend de l'état des contraintes à l'interface, de sa résistance et des comportements de l'inclusion et de la matrice. Une meilleure plasticité de l'inclusion modère les concentrations de contraintes et retarde donc la décohésion.

2.1.3. Modélisation de l'amorçage

Le but de la modélisation est d'élaborer un critère pour l'amorçage de l'endommagement lié à la présence des précipités, en tenant compte de l'histoire des sollicitations subies par le matériau. Ce travail de modélisation se fonde sur une analyse physique associée à une analyse mécanique de la structure.

L'analyse physique permet de préciser si l'amorçage s'effectue par rupture de l'inclusion, ou par décohésion de l'interface. Elle conduit également à l'évaluation des grandeurs mécaniques telles que l'énergie superficielle, la contrainte de décohésion associée à l'amorçage. Cette étude physique doit aussi permettre de caractériser le matériau en définissant ses grandeurs structurales (formes et dimensions des inclusions, distances inter-inclusionnaires, etc), ainsi que la rhéologie de la matrice et celle de l'inclusion.

Développée en parallèle à la précédente, l'analyse mécanique se situe à deux échelles. A l'échelle macroscopique, on détermine l'état de contrainte et de déformation du matériau équivalent supposé homogène, en tenant compte de sa rhéologie et des conditions aux limites macroscopiques. En ajoutant à ces données la rhéologie de l'inclusion et de la matrice, on détermine l'état de contrainte et de déformation des différents constituants de l'ensemble inclusion-matrice, considéré hétérogène à cette échelle.L'analyse mécanique microscopique peut se mener en invoquant la mécanique des milieux continus à travers le problème dit *de l'inclusion* ou la métallurgie physique.

La métallurgie physique permet à travers l'étude de l'interaction entre inclusion et dislocations de décrire l'écrouissage et l'effet Bauschinger. Divers mécanismes d'accumulation de dislocations autour des obstacles, tels qu'exposés dans les sections précédentes ont été imaginés et observés.

A travers la mécanique des milieux continus, le problème de l'inclusion a été largement abordé depuis les travaux initiaux d'Eshelby. C'est cette approche que nous adopterons dans le cadre de notre étude. Celle-ci fera l'objet d'une description détaillée dans un autre chapitre.

A l'échelle microscopique, quelle que soit l'approche adoptée, deux conditions doivent être vérifiées pour l'amorçage de l'endommagement lié à la présence d'inclusions.

- Un critère énergétique énonçant que l'énergie de déformation élastique libérée doit excéder l'énergie de formation de surface,
- un critère de contrainte critique selon lequel la contrainte locale appliquée doit atteindre une valeur critique.

a – Critères de la mécanique des milieux continus

➢ *Condition énergétique*

Une condition nécessaire pour l'apparition d'une cavité dans un matériau est que la création de surfaces soit énergétiquement possible. En effet, lors de l'initiation de la micro-cavité,

la relaxation des contraintes doit libérer assez d'énergie pour créer la nouvelle surface. Cette énergie libérée par décohésion de l'interface ou par rupture de l'inclusion est une fraction de l'énergie stockée dans l'inclusion. Elle est donc proportionnelle au volume de l'inclusion et fonction croissante du niveau de contrainte et de déformation atteint dans la matrice. La condition d'amorçage peut alors se traduire par la relation :

$$W_{vol} = W_{surfl} \tag{I.35}$$

soit :

$$\alpha V f(\bar{\varepsilon}) = 2S\gamma \tag{I.36}$$

S et V désignent respectivement la surface et le volume de l'inclusion, $\bar{\varepsilon}$ la déformation plastique équivalente imposée dans la matrice, γ l'énergie superficielle de la cavité, et α une constante dépendant de l'analyse mécanique et des matériaux considérés. Cette approche de la condition énergétique a été développée par plusieurs auteurs pour des cas particuliers. Ainsi, Gurland et Plateau [23] l'appliquent à l'étude d'une inclusion sphérique isolée dans une matrice sollicitée en traction uniaxiale. Ils proposent un critère prévoyant une variation de la déformation de la matrice nécessaire à l'amorçage en fonction inverse de la racine du rayon de l'inclusion.

Tanaka et *al.* [43], s'inspirent d'une solution approchée du problème de l'inclusion déformée élastiquement dans une matrice sous déformation plastique uniforme déduite des travaux d'Eshelby. Ces auteurs suggèrent un critère énergétique plus général que celui de Gurland et Plateau.

➢ *Condition de la contrainte critique*

La solution du problème de l'inclusion a été utilisée pour estimer les contraintes d'interface et proposer un critère de décohésion en termes de contrainte critique : Tanaka et *al.*[43], Argon et *al.* [1], Beremin [5], Gilormini [21].

a) Critères de la métallurgie physique.

➢ *Condition énergétique.*

Brown et Stobbs [8], ont proposé un critère d'amorçage de l'endommagement basé sur une condition énergétique à partir d'une approche associant la mécanique des milieux continus et la métallurgie physique. Plus tard ces mêmes auteurs introduisent une longueur caractéristique : le vecteur de Burgers $\boldsymbol{b}$, et réécrivent le critère d'amorçage :

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\frac{\gamma}{b\mu_I}\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta} \tag{I.37}$$

ou $\bar{\varepsilon}$ est la déformation plastique équivalente de la matrice quand se produit l'amorçage, γ est l'énergie superficielle créée et μ_I le module de cisaillement de l'inclusion sphérique supposée non déformée plastiquement.

➢ *Condition de la contrainte critique*

Ashby [2], s'appuie sur une estimation de la contrainte maximale à l'interface à partir de l'apparition d'empilements des boucles de dislocations prismatiques permettant l'accommodation plastique entre la matrice et l'inclusion. Il propose un critère de décohésion de l'interface pour une matrice soumise à une déformation plastique par cisaillement.

$$\bar{\varepsilon}=\alpha\frac{bL}{2R}\sigma_n^c \tag{I.38}$$

La constante α est introduite pour tenir compte de l'effet de taille : plus l'inclusion est grosse, plus tôt se produira la décohésion. R représente le rayon de l'inclusion, L la longueur des empilements des boucles de dislocations prismatiques, σ_n^c la valeur critique de la contrainte à l'interface.

Argon et *al.* [1] proposent trois critères d'amorçage fondés plutôt sur l'équilibre des boucles de dislocations prismatiques du modèle d'Ashby et permettant d'estimer L. Un autre critère d'amorçage pour les inclusions sphériques a été développé par Goods et Brown [22], en s'inspirant des travaux de Brown et Stobbs [8]. Ce critère prévoit un effet de taille contraire à celui des critères énergétiques précédents. A teneur volumique égale, plus une inclusion est grosse plus il faudra déformer la matrice pour provoquer la décohésion.

Des auteurs ont alors suggéré de vérifier à la fois la condition énergétique et la condition de contrainte critique pour prévoir l'amorçage. On peut estimer un rayon critique de l'inclusion en dessous duquel un critère énergétique serait suffisant et au dessus duquel on adopterait plutôt le critère de contrainte critique. Pour le critère de Tanaka et *al.*, ce rayon critique serait :

$$2R_c = 25\frac{\gamma}{E}\left(\frac{E}{\sigma_n^c}\right)^2 \qquad \text{(I.39)}$$

Les différents critères discutés ci-dessus prennent diversement en compte l'effet de taille. Cet effet de taille prévu par la plupart des modèles est très important et s'atténue selon Tanaka et *al.*[42,43] pour une inclusion suffisamment grosse.

La teneur inclusionnaire induit une influence du même ordre dans le critère de Argon et *al.* comme dans celui de Goods et Brown. La forme de l'inclusion est prise en compte dans les critères de Tanaka et *al.* de Gilormini et Montheillet [21], d'Argon et *al.* [1] et de Beremin [5]. La plupart de ces modèles tient compte de la triaxialité des contraintes, facteur favorisant l'amorçage de l'endommagement.

La T*ableau I.1* suivant résume les résultats de diverses modélisations de l'amorçage de l'endommagement en donnant les valeurs numériques des contraintes de décohésion de l'interface, selon la composition du matériau et pour un diamètre donné de l'inclusion.

Auteurs	**Matrice**	**Inclusion**	**D (μm)**	σ_n^c **(MPa)**	σ_n^c/E
Beremin (1981)	A 508	MnS	17×10×3	810	
Argon et Im (1975)	Acier 1045	Fe_3C	0.44	1700	0.84%
Argon et Im (1975)	Cu	CuCr	0.89	1010	0.80%
Argon et Im (1975)	Acier VM - 300	TiC	5.3	1850	0.90%
Leroy et *al.*(1981)	Acier 1045	Fe_3C	0.64	1200	0.67%
Hur et *al.*(1983)	Fe	C	35	620	
Hur et *al.*(1983)	30 DC4	MnS	24×5×3	730	

Tableau I.1. *Valeurs de la contrainte de décohésion à l'interface*

Chaque critère traduit une certaine partie de la réalité expérimentale et l'accumulation des résultats expérimentaux permettra de préciser le domaine de validité de chacun. Les travaux futurs devront prendre en compte des paramètres négligés jusqu'à présent, tels que la possible déformation plastique de l'inclusion et le calcul des hétérogénéités de contrainte dans l'inclusion.

2.2 Croissance de l'endommagement



Fig. 2.2.1 Croissance d'une cavité – Observation de faciès de rupture à –196°C d'éprouvettes prédéformées à température ambiante (Mudry, 1982).

Les premières études micromécaniques de la croissance de cavités dans un matériau ductile ont montré, aussi bien pour une cavité sphérique ou cylindrique que le taux de croissance dépend fortement du niveau de la traction hydrostatique. La rupture de matériau par coalescence de cavités est donc influencée par la triaxialité des contraintes.

2.2.1 Modèles d'endommagement non couplés en plasticité

Les premières tentatives de modélisation de la croissance de cavité étaient consacrées à la déformation d'une cavité contenue dans un solide infini. Il n'y avait pas de couplage entre l'endommagement et la plasticité. La porosité est considérée nulle et le comportement macroscopique est celui de la matrice incompressible.

A partir d'une étude de la croissance d'une cavité cylindrique dans un corps rigide plastique, McClintock [35] met en évidence l'influence de la triaxialité des contraintes sur la croissance des cavités. La généralisation de cette approche par Rice et Tracey [38], à une cavité sphérique dans un matériau rigide plastique, fournit la loi d'évolution du rayon de la cavité, à partir du principe variationnel qui régit le champ des vitesses de déformation.

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{E}_{eq}} = 0.558 \sinh\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}\right) + 0.008\chi \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}\right) \qquad \text{(I.40)}$$

Σ est la contrainte et $\dot{E}$ la vitesse de déformation à l'infini, et $\chi = -3\dot{E}_{22}/(\dot{E}_{11} - \dot{E}_{33})$. Pour une triaxialité des contraintes $\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}$ strictement positive cette loi peut être approchée par :

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{E}_{eq}} \cong 0.283 \exp\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}\right) \qquad \text{(I.41)}$$

Cette dernière montre bien l'influence exponentielle de la triaxialité des contraintes sur la vitesse de croissance des cavités, influence vérifiée expérimentalement par Marini, Mudry et Pineau [34]. L'application de ce modèle de Rice et Tracey à des matrices dont le comportement n'est pas régi par le critère de Von Misès reste à établir.

En visco-plasticité, l'approche de Rice et Tracey a été adaptée par Budiansky, Hutchinson et Slutsky, [9], et conduit à la loi de croissance suivante :

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{E}_{eq}} = 0.5\left(\frac{3m}{2}\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}} + (1-m)(1+m\,(0.4175+0.0144\chi s)\right)^n \qquad \text{(I.42)}$$

avec $s = sgn(\Sigma_m)$. Lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation m tend vers 0, on retrouve la relation de Rice et Tracey.

2.2.2. *Modèles d'endommagement couplés en plasticité.*

Les précédents modèles sont non couplés en ce sens que la relation contrainte / déformation n'est pas directement affectée par la présence des cavités. Le seul paramètre d'endommagement retenu est la porosité f dont l'évolution dérive du principe de conservation de la masse.

➢ *Critères elliptiques d'écoulement plastique.*

Pour un matériau isotrope, le critère de plasticité dépend fondamentalement de deux invariants des contraintes macroscopiques σ_m et σ_{eq}. Le troisième invariant $\det\sigma$ est généralement négligé. Les premiers travaux sur la recherche d'un critère de plasticité pour les matériaux plastiques poreux sont l'œuvre de Berg [6], qui propose la forme :

$$\sigma_{eq}^2 + g(\sigma_m) - k^2 = 0 \tag{I.43}$$

Dans cette relation, $g(\sigma_m)$ et k sont respectivement, une fonction et une constante à déterminer. Berg observe que la vitesse de dilatation est négligeable à faible triaxialité et propose une expression de la fonction $g(\sigma_m)$ conduisant au critère de Von Mises à faible contrainte hydrostatique et à un critère elliptique lorsqu'elle est importante.

$$g(\sigma_m) = 0 \text{ si } \sigma_m \leq p_i \tag{I.44}$$

$$g(\sigma_m) = \frac{k^2 (\sigma_m - p_i)^2}{(p_i - p_o)^2} \text{ si } p_i \leq \sigma_m \leq p_o \tag{I.45}$$

k et p_0 représentent la contrainte d'écoulement macroscopique sous chargement purement déviatorique et purement hydrostatique respectivement et, p_i la pression à partir de laquelle la déformation macroscopique devient dilatante.

D'autres investigations sur les critères elliptiques ont été menées par divers auteurs. Il s'agit notamment du critère de Shima et Oyane [40], à partir d'essais sur le cuivre fritté, du critère déduit des théories récentes de bornes non linéaires: Castaneda [11], Suquet [41].

Malgré leur simplicité, les critères elliptiques prédisent une vitesse d'endommagement fonction linéaire de la triaxialité des contraintes macroscopiques, alors que des résultats expérimentaux révèlent plutôt une influence exponentielle de la triaxialité des contraintes sur la vitesse de croissance des cavités.

➢ *Critère de Gurson*

Gurson [24], a proposé un critère non elliptique d'écoulement plastique des matériaux poreux:

$$\Phi = \frac{\sigma_{eq}^{\ 2}}{\sigma_0^{\ 2}} + 2f\cosh\left(\frac{3\sigma_{kk}}{2\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \tag{I.46}$$

$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}\, s_{ij}}$ la contrainte équivalente de Von Mises, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$ la contrainte déviatorique; f, σ, σ_0 représentent respectivement la fraction volumique de vides, la

contrainte moyenne macroscopique de Cauchy et une contrainte équivalente d'écoulement représentant l'état actuel des contraintes dans le matériau-matrice. La déformation plastique macroscopique du matériau s'obtient selon la loi de normalité.

Le modèle de Gurson est un modèle couplant endommagement et plasticité et sa mise en œuvre ne requiert que la porosité initiale du matériau. Les vides sont supposés aléatoirement répartis, et la réponse macroscopique isotrope. Pour le cas limite correspondant à l'absence de vide $f=0$, le critère de Gurson se réduit au critère standard de Von Mises.

$$\Phi=\sigma_{eq}{}^2-\sigma_0{}^2=0 \tag{I.47}$$

➢ *Critère de Gurson modifié ou de Tvergaarg - Needleman*

Au fur et à mesure de ses applications, le critère de Gurson a subi des modifications substantielles, qui n'ont pas pour autant, remis en cause sa forme fondamentale. Ces modifications ont surtout été effectuées pour introduire quelques améliorations par rapport aux insuffisances constatées du modèle initial de Gurson. En effet, d'après ce dernier, la perte complète de la résistance du matériau ne se produit que pour une porosité de 100%, alors que la coalescence survient réellement pour des valeurs nettement inférieures de la porosité. Ainsi, pour mieux vérifier les prévisions de localisation de l'endommagement, obtenues par des calculs par éléments finis, Tvergaard [44] introduit des paramètres ajustables dans la formulation initiale de Gurson.

$$\Phi=\frac{\sigma_{eq}{}^2}{\sigma_0{}^2}+2q_1 f\cosh\left(\frac{3q_2\sigma_{kk}}{2\sigma_0}\right)-1-q_3 f^2=0 \tag{I.48}$$

On constate alors qu'un bon accord avec les prévisions est observé pour $q_2=1$ et $q_3=q_1^2$. Il faut donc remplacer dans le critère initial de Gurson, la porosité réelle f par $q_1 f$. Selon les auteurs, diverses valeurs du paramètre q_1 ont été proposées. Ainsi, Tvergaard suggère $q_1=1.5$, Koplik et Needleman [30], $q_1=1.25$, et Perrin et Leblond (1990), à partir d'un modèle autocohérent appliqué au problème d'une sphère creuse dans un massif infini poreux sous chargement hydrostatique, $q_1=\frac{1}{e}=1.47$. Il semble que la valeur $q_1=1.25$ fournisse une meilleure approximation des résultats numériques par éléments finis.

➢ *Accélération de l'endommagement à la coalescence*

En considérant le modèle de Gurson modifié, la rupture finale du matériau par coalescence se produit pour une fraction volumique de vide f telle que : $f=\frac{1}{q_1}$. Mais cette valeur paraît trop grande par rapport à la réalité physique. En effet, des études expérimentales de Brown et Embury (1973), ont révélé que deux cavités voisines coalescent lorsque leur taille atteint l'ordre de grandeur de la distance qui les sépare. De plus les analyses micromécaniques de Anderson (1977) sur la croissance d'une cavité sphérique ont montré que la coalescence se produit pour une faction $f\approx 0.25$, valeur nettement plus petite que les $\frac{1}{q_1}$ prévue par le modèle de Gurson modifié. L'introduction du paramètre q_1 ne suffit donc pas à expliquer la rapide croissance de la porosité au voisinage de la coalescence, telle que celle révélée par les simulations numériques. Ce modèle ne permet donc manifestement pas de décrire la phase finale du processus de coalescence et il s'avère nécessaire d'introduire un critère de séparation finale du matériau. Ainsi, Tvergaard et Needleman (1982), pour prendre en compte cette accélération dans le modèle de Gurson, proposent d'introduire une porosité apparente f^* à la place de la porosité naturelle f du matériau.

$$f^*(f)=\begin{cases} f \ \ pour \ \ f\le f_c \\ f_c-\frac{f_u^*-f_c}{f_F-f_c}(f-f_c) \ \ pour \ \ f>f_c \end{cases} \qquad (I.49)$$

f_F représente la fraction volumique à la rupture finale telle que : $f^*(f_F)=f_u^*=\frac{1}{q_1}$. Cette nouvelle formulation permet de décrire l'accélération de la perte de ductilité du matériau à la phase terminale de la coalescence. La fonction f^* n'est activée que lorsque la fraction volumique atteint une valeur critique f_c. Les études menées par Koplik et Needleman [30], montrent que la valeur de f_c ne dépend ni de la triaxialité des contraintes ni de l'écrouissage, mais est plutôt une fonction croissante de la porosité initiale. Les résultats expérimentaux de Brown et Embury (1973), ainsi que le modèle numérique de Anderson (1977) suggèrent: $f_c=0.15$ et $f_F=0.25$.

2.2.3 Croissance de cavités

Au cours de la déformation du matériau poreux, la fraction volumique du vide évolue, d'une part à cause de la croissance des cavités, d'autre part par suite de la germination de nouvelles.

Cette évolution peut être traduite par la relation :

$$\dot{f} = \dot{f}_{croissance} + \dot{f}_{nucléation} \tag{I.50}$$

L'étude de l'évolution de la porosité par croissance des cavités relève d'une analyse micromécanique à partir de la connaissance du champ de vitesses au bord des cavités. L'incompressibilité plastique de la matrice conduit à :

$$\dot{f}_{croissance} = (1-f)\dot{\varepsilon}^{p}_{kk} \tag{I.51}$$

où $\dot{\varepsilon}^{p}_{kk}$ désigne la trace du taux de la déformation plastique macroscopique. La variation de la porosité conditionne celle du volume macroscopique. Le matériau endommagé est donc compressible, contrairement au matériau initial supposé incompressible.

La contribution de nouvelles créations de cavités à l'évolution de la fraction f est donnée par (Lin Xia et C. Fong Shih, 1995) :

$$\dot{f}_{nucléation} = \dot{D}\dot{\bar{\varepsilon}} + B(\dot{\bar{\sigma}} + \dot{\sigma}_M) \tag{I.52}$$

Le premier terme de cette relation correspond à la création de vide suivant un chargement en déformation, et le second, en contrainte. Chu et Needleman [14], ont proposé une distribution normale pour décrire la création de nouvelles cavités. Ainsi en déformation on a :

$$D = \frac{f_N^n}{S_N^n\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varepsilon}-\varepsilon_N}{S_N^n}\right)^2\right],\ B=0\ \ pour\ \dot{\bar{\varepsilon}}>0 \tag{I.53}$$

De même en contrainte :

$$B = \frac{f_N^s}{S_N^s\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\sigma}+\sigma_M-\sigma_N}{S_N^s}\right)^2\right],\ D=0\ \ pour\ (\dot{\bar{\sigma}}+\dot{\sigma}_M)>0 \tag{I.54}$$

avec $\bar{\varepsilon} = \int \dot{\bar{\varepsilon}}\,dt$ le déformation plastique équivalente cumulée, $\bar{\sigma}+\sigma_M$ est une mesure approximative de la contrainte normale maximale à l'interface matrice-particule, f_N^n, f_N^s sont les fractions volumiques de cavités initiées, S_N^n, S_N^s les déviations standards, σ_N, ε_N respectivement, la contrainte moyenne et la déformation moyenne de décohésion.

2.3 Coalescence des cavités

Le modèle isotrope de Gurson ne prend malheureusement en compte ni la variation de forme, ni l'évolution de leur distribution au cours de la déformation. D'autre part, l'hypothèse d'une déformation homogène au bord de l'élément de volume étudié, ne permet pas au modèle de prendre en compte les interactions importantes entre les cavités au voisinage de la coalescence.

Pour évaluer l'effet des changements de forme, Koplik et Needleman [30], ont effectué des simulations numériques sur des cellules axisymétriques. Ils considèrent une matrice écrouissable, et intègrent les grandes déformations dans la formulation du comportement ainsi que dans le changement de forme. Pour de grands taux de triaxialité (1, 2, 3), la cavité a une forme ellipsoïdale dont l'excentricité évolue avec la déformation. Une instabilité de structure de l'élément de volume s'ensuit et la déformation se localise dans le ligament situé à l'équateur de la cavité. Cette localisation s'accompagne d'une chute brutale de la courbe contrainte/déformation qui semble correspondre à la coalescence des cavités.

3 Conclusion

Les phénomènes d'endommagement ductile de matériaux polycristallins se situent généralement à deux échelles. A l'échelle microscopique, l'analyse de l'endommagement permet d'étudier avec précision la germination et le développement de cavités initiées autour d'hétérogénéités localisées dans un monocristal. Cette première étape suppose donc une description préalable du comportement élastoplastique du monocristal ainsi que des paramètres rhéologiques et morphologiques des hétérogénéités étudiées.
A une échelle intermédiaire, il s'agit de décrire le comportement effectif du grain en tenant compte de la présence des hétérogénéités. L'objectif étant de pouvoir décrire l'influence de ces hétérogénéités sur l'instant et la localisation de l'amorçage de l'endommagement ductile.

Les modèles d'homogénéisation doivent permettre d'assurer les transitions entre les différentes échelles d'analyse; de l'étude du monocristal considéré comme homogène au matériau macro-hétérogène en passant par le grain hétérogène constitué du monocristal et d'une fraction d'hétérogénéités intra-cristallines.

Après un rappel de la description de la plasticité du monocristal par glissements cristallographiques, le chapitre suivant sera consacré à la prise en compte des hétérogénéités intra-cristallines dans la modélisation de l'écrouissage anisotrope et des relations constitutives du grain hétérogène.

4 Bibliographie

[1] Argon A. S., Im J. and Safoglu R., Met. Trans., **6A**, 825, 1975.

[2] Ashby M. F., Philos. Mag., **14**, 1157, 1966.

[3] Barlat F., *Endommagement, anisotropie et courbes limites de formage,* Thèse de Docteur Ingénieur, INP, Grenoble, 1984.

[4] Becker R., Needleman A., Richmond O. and, Tvergaard V., *Void growth and failure in notched bars,* J. Mech. Phys. Solids, **36**:317-351, 1988.

[5] Beremin F. M., Met. Trans., **12A**, 723, 1981.

[6] Berg C.A., *Plastic dilatation and void interaction*, In M.F. Kaninen, W.F. Adler, A.R. Rosenfield and R.T. Jaffee, editors, Inelastic behavior of solids, pages 171-210, Mc Graw Hill, 1970.

[7] Boursin A., Chaboche J.L. and Roudolff, F., *Mécanique de l'endommagement avec conditions unilatérales et stockage d'énergie élastique*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 323 (Série I b) : 369-376, 1996.

[8] Brown L. M. and Stobbs W. N., Philos. Mag., **34**, 351, 1976.

[9] Budiansky B., Hutchinson J., Slutsky J.W., *Void growth and collapse in viscous solids*, In H.G. Hopkins and M.J. Sewell, editors, Mechanics of solids: The Rodney Hill 60th Anniversary, pages 13-45, Pergamon Press, 1982.

[10] Bui H. D. and Stolz C., *Damage theories for brittle and ductile materials*, In K. P. Herrmann L. H. Larson, editors, Fracture of Non-Metallic Materials, pages 33-46, ECSC, EEC, EAEC, 1987.

[11] Casteñeda P Ponte., *The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites*, J. Mech. Phys. Solids, **39**:45-71, 1991.

[12] Chaboche J.-L., *Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement,* Thèse de Docteur d'Etat, Paris VI, 1978.

[13] Chow C. L. and Wang J., *An anisotropic theory of continuum damage mechanic for ductile fracture*, Eng. Fract. Mech., **27**, 547, 1987.

[14] Chu C.C. and Needleman A., *Void nucleation effects in biaxially stretched sheets,* J. Eng. Materials Technol., **102**:249-256, 1980.

[15] Cordebois J.-P., *Critères d'instabilité plastique et endommagement en grandes déformations (application à l'emboutissage),* Thèse de Docteur d'Etat, Paris VI, 1983.

[16] Dodd B. and Bai Y., *Ductile fracture and ductility : with applications to metalworking*, Academic Press, London, 1987.

[17] Dragon A. and Halm D., *Modélisation de l'endommagement par mésofissuration : comportement unilateral et anisotropie induite*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.322, Série I b, 275-282, 1996.

[18] Dragon A., Halm D. and Désoyer Th., *Anisotropic damage in quasi-brittle solids: modelling, computational issues and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **2164**, 01-22, 1999.

[19] Eshelby J. D., Proc. R. Soc., **A 241**, 376, 1957.

[20] Francois D., Pineau A. et Zaoui A., *Comportement mécanique des matériaux: viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact,* Editions Hermes, 1995.

[21] Gilormini P., *Le problème de l'inclusion en viscoplasticité : Apllication à l'amorçge de l'endommagement,* Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, 1985.

[22] Goods S. H. and Brown L. M., Acta Met., **27**, 1, 1979.

[23] Gurland J. and Plateau J., Trans. ASM, **56**, 442, 1963.

[24] Gurson A.L., *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media*, J. Eng. Mat. Tech., **99**:1-15, 1977.

[25] Halm D. and Dragon A., *A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect*, Int. J. Damage Mech., **5**, 384-402, 1996.

[26] Halm D. and Dragon A., *An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials*, Euro. J. Mech. A/Solids., **17**, 439-460, 1998.

[27] Inoue T. and Kinoshita S., Trans. ISIJ, **17**, 523, 1977.

[28] Kachanov M., *Elastic solids with many cracks and related problems*, volume 30, pages 259-445, Academic Press, 1993, Boston.

[29] Kachanov M., Tsukrov I., and Shafiro B.. *Effective moduli of solids with cavities of various shapes*, Appl. Mech. Rev.,**47(1)**: 151-174,1994.

[30] Koplik J. and Needleman A., *Void growth and coalescence in porous plastic solids,* Int. J. Solids Structures., **45**:405-437, 1997.

[31] Krajcinovic D., *Constitutive equations for damaging materials*, J. Appl.Mech., Trans.ASME **50**, 355, 1983.

[32] Lemaître J. et Chaboche J-L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985.

[33] Lemaître J., *A course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[34] Marini B., Mudry F. and Pineau A., *Experimental study of cavity growth in ductile rupture*, Eng. Fracture Mech., **22**:989-996, 1985.

[35] McClinttock F.M., *A criterion for ductile fracture by growth of holes*, J. Appl. Mech. **35**:363-371, 1968.

[36] Montheillet F. et Moussy F., *Physique et mécanique de l'endommagement,* Les éditions de physique, Les Ulis France, 1986.

[37] Murakami S. and Kamiya K., *Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 39, No. 4, pp. 473-486, 1997.

[38] Rice J.R. and Tracey D.M., *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*, J. Appl. Mech. **17**:201-217,1969.

[39] Richelsen A.B. and Tvergaard V., *Dilatant plasticity or upper bounds estimates for porous ductile solids*, Acta Metall. Mater., **42**:2561-2577, 1994.

[40] Shima S. and Oyane M., *Plasticity theory for porous metals*, Int. J. Mech. Sc., **18**, 285-291, 1976.

[41] Suquet P., *On bounds of overall potential of power laws materials contaning voids with arbitrary shape*, Mech. Res. Comm., **19**:51-58, 1992.

[42] Tanaka K., Mori T. and Nakamura T., Philos. Mag., **21**, 267, 1970.

[43] Tanaka K., Mori T. and Nakamura T., Trans. Iron Steel Inst. Japan, **11**, 1971.

[44] Tvergaard V., *Influence of voids on shear band instabilities under plan strain conditions*, Int. J. Fracture, **17**:389-407, 1981.

[46] Tvergaard V. and Needleman A., *Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar,* Acta Metall. Mater., **32**:157-169, 1984.

[47] Tvergaard V., *Material failure by void growth to coalescence*, In J. W. Hutchinson and T.Y. Wu, editors, Advances in Applied Mechanics, Volume **27**, pages 83-151. Academic Press, New York, 1990.

Chapitre II

Description du comportement élastoplastique du grain hétérogène

1. Rappel de la plasticité du monocristal
   1.1 . Déformation plastique du monocristal
   1.2 . Description rhéologique du comportement plastique du monocristal
      1.2.1 Cinématique du glissement plastique
      1.2.2 Fonction d'écoulement plastique du monocristal
      1.2.3 Ecrouissage du monocristal
      1.2.4 Equation constitutive du monocristal

2. Comportement du grain contenant des hétérogénéités intracristallines
   2.1 Les bases physiques
   2.2 Modélisation de l'écrouissage intragranulaire
      2.2.1 Hypothèses
      2.2.2 Critère de plasticité du grain hétérogène
      2.2.3 Loi de comportement du grain hétérogène
   2.3 Expression du tenseur de polarisation $\tilde{P}$
      2.3.1 Borne inférieure d'ordre zéro de $\tilde{P}_{\text{inf}}$
      2.3.2 Borne supérieure d'ordre zéro de $\tilde{P}_{\text{sup}}$
      2.3.3 Estimation du tenseur $\tilde{P}_K$ par le modèle de Kröner
      2.3.4 Estimation du tenseur $\tilde{P}_{MT}$ par le modèle de Mori-Tanaka
      2.3.5 Estimation du tenseur $\tilde{P}_{sc}$ par la formulation autocohérente

3. Conclusion

4. Bibliographie

Chapitre II

Description du comportement élastoplastique du grain hétérogène.

Un matériau polycristallin est un agrégat de monocristaux constitués d'atomes arrangés périodiquement suivant un réseau cristallographique. L'étude de la structure des cristaux par les rayons X (Bragg, 1912), montre que leur déformation plastique s'effectue par glissement de plans denses contenant un grand nombre d'atomes par unité de surface. Le glissement cristallographique n'est toutefois possible que si la contrainte appliquée est supérieure à la cission critique du matériau. La déformation plastique n'est pas le fait d'un cisaillement global des liaisons atomiques, mais résulte du passage de dislocations dans le plan de cisaillement.

Ces polycristaux, comme de façon générale tous les matériaux, présentent à l'échelle microscopique une certaine fraction volumique d'impuretés ou d'hétérogénéités intra-cristallines. Ces hétérogénéités qui peuvent être des inclusions ou des précipités de seconde phase influencent dans une large mesure l'écrouissage intra-cristallin du grain et par suite, celui du matériau macroscopique. Leur prise en compte dans la description du comportement du monocristal ou plus globalement du grain hétérogène paraît nécessaire dans l'optique d'une description ultérieure des phénomènes d'endommagement causés par la présence de ces hétérogénéités.

La première partie de ce chapitre sera ainsi consacrée à la description du comportement du monocristal en rappelant les notions classiques de la plasticité cristalline. En s'appuyant sur cette description et en recourant aux techniques d'homogénéisation-localisation, nous proposerons une nouvelle description du comportement effectif du grain hétérogène constitué d'une matrice cristalline et d'hétérogénéités de troisième ordre. Nous insisterons particulièrement sur la description et la modélisation de l'écrouissage en proposant une nouvelle règle d'écrouissage mettant en évidence le caractère cinématique et anisotrope de l'écrouissage à cette échelle mésoscopique. Des développements dérivés des modèles

classiques d'homogénéisation tels que les modèles statiques, de Taylor-Lin, de Kröner, de Mori-Tanaka et autocohérent seront explorés.

1. Rappel de la plasticité du monocristal

L'étude du comportement élastoplastique d'un monocristal a été entreprise en petites déformations par Mandel [19] et Hill [9-11], et étendue aux transformations finies par Hill et Rice [12]. A l'échelle mésoscopique, un élément de matériau, par exemple un grain dans un polycristal, est le siège d'un nombre fini de mécanismes de déformations inélastiques. Chacun de ces mécanismes obéit à sa propre fonction de charge et à la règle de normalité. Les équations constitutives de cette description établies par Mandel et Hill puis généralisées par Hill, Rice, et Sewell (1972) sont une transposition de la plasticité phénoménologique macroscopique à l'échelle granulaire (Lipinski et *al.* [18], Petryk [20]).

Parmi tous les mécanismes de déformations plastiques, on suppose que le glissement cristallographique est le seul actif.

1.1 Déformation plastique du monocristal.

La déformation plastique des matériaux cristallins à froid résulte du mouvement de défauts du réseau appelés dislocations. Une ligne de dislocation est un défaut d'empilement d'atomes se répétant périodiquement et qui peut se présenter généralement sous forme de dislocation coin, de dislocation vis ou de boucle de dislocations (*Figure II. 1*). Les dislocations se créent dès la formation des cristaux et ont une densité très élevée dans la plupart des métaux et alliages, comme le montre la *Figure II.2*.

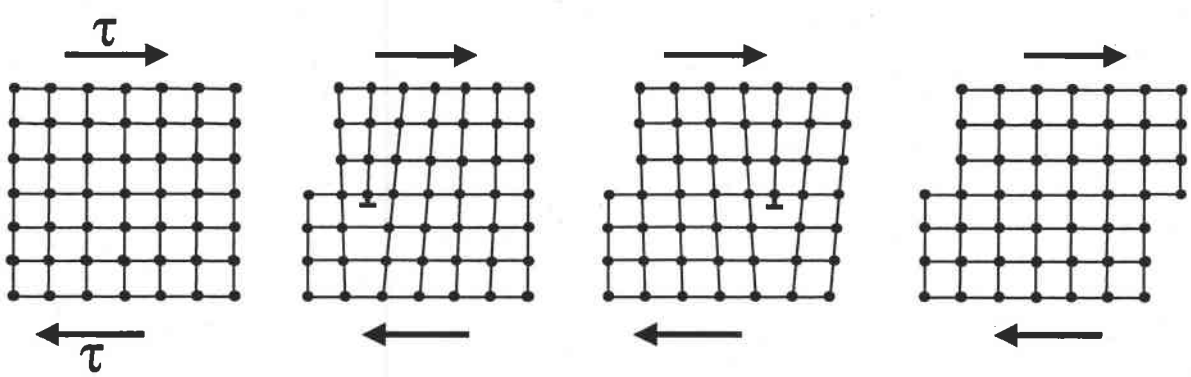


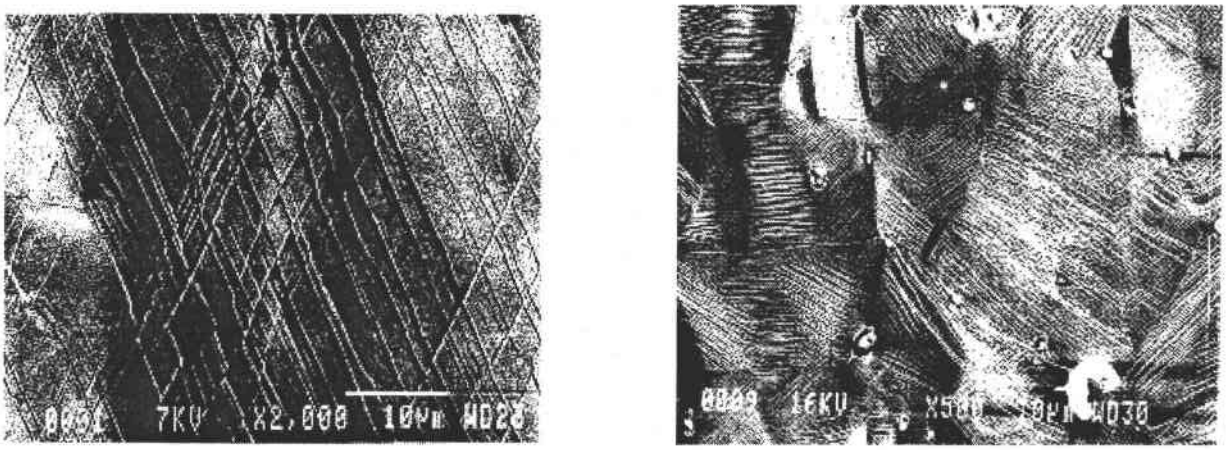
Figure II.1 : *Déplacement par glissement d'une dislocation*

Les déformations élastiques résultent des variations réversibles des espaces inter-atomiques, nécessaires à l'équilibre des sollicitations extérieures ou des mouvements de dislocations. Les déformations permanentes, plastiques ou viscoplastiques, par contre, correspondent à des déplacements relatifs d'atomes, stables après cessation de la sollicitation.

Pour la plupart des solides cristallins, la déformation plastique à froid découle des glissements de dislocations le long des plans cristallographiques denses. A chaque type de matériau correspondent des plans de glissements appropriés. Le tableau suivant présente les directions ainsi que les plans de glissements associés selon la structure du matériau considéré.

Structure	Direction de glissement	Plan de glissement
CFC	<110>	{111}
CC	<111>	{110}, {112}, {123}

Tableau II. 1 : *Directions et plans de glissement.*



- a - *- b -*

Figure II.2 : *a) Lignes de glissement dans un monocristal de cuivre orienté en glissement double (thèse Ph. Dubois) - b) Lignes de glissement dans un polycristal de cuivre écroui de 20% (Photo P. Mussot)*

Pour les matériaux cubiques à faces centrées, les glissements peuvent s'opérer selon 12 systèmes de glissement équivalents. Par ailleurs, dans les cristaux cubiques centrés, certains glissements peuvent donner lieu à un genre de glissements en faisceau.

La vitesse de glissement $\dot{\gamma}$ est liée au mouvement à vitesse moyenne $\overline{v}$ d'une densité ρ_m de dislocations mobiles de vecteur de Burgers b, par la relation d'Orowan :

$$\dot{\gamma}=\rho_m b\overline{v} \qquad \text{(II.1)}$$

Cette équation permet de relier les paramètres microscopiques associés au mouvement des dislocations aux grandeurs mésoscopiques de la déformation plastique.

1.2 Description rhéologique du comportement plastique du monocristal

Le glissement dans un cristal n'est actif que lorsqu'une condition, la loi de Schmid et Boas, est vérifiée. Le glissement cristallographique commence quand la cission résolue sur un plan cristallographique de glissement atteint une valeur critique. Lorsque, sous l'action d'une sollicitation extérieure, une dislocation coin ou vis se déplace et traverse un cristal, elle engendre un déplacement irréversible égal au vecteur de Burgers de la dislocation. Un système de glissement, schématisé par la *Figure II.3*, est défini par la normale unitaire $\vec{n}$ au plan de glissement et par le vecteur unitaire $\vec{m}$ de la direction de glissement.

L'examen des divers obstacles que doivent franchir les dislocations permet d'estimer la contrainte qu'il faut appliquer pour provoquer une déformation plastique. Nous appelons cette contrainte, limite d'écoulement. Pour une famille donnée de dislocations, on peut ainsi préjuger de la forme d'un critère de plasticité basée sur la cission réduite $\tau=\vec{m}\cdot\sigma\cdot\vec{n}$:

$$f(\sigma)=|\tau|-\tau_{cr} \qquad \text{(II.2)}$$

où σ est la contrainte de Cauchy , et τ_{cr} la limite d'écoulement du système considéré.

Pour cette famille, on peut avoir à considérer également le glissement collectif dans la direction opposée $-\vec{m}$. Il faudra dans ce cas faire intervenir une cission réduite critique éventuellement différente. Pour un élément de volume cristallin donné, il est donc nécessaire de prendre en compte toutes les familles de dislocations susceptibles de glisser dans leur plan. Généralement, il n'existe qu'un petit nombre de systèmes de glissement facile, cristallographiquement déterminés, dans les conditions de plasticité à basse température. Dans tous les cas, à chaque système de glissement facile g correspond son propre critère de plasticité $f^g(\sigma)$ et donc sa propre cission réduite critique τ_{cr}^g. Le cristal ne sera le siège d'une déformation plastique que lorsque l'état de contrainte σ permettra d'annuler au moins, l'une des fonctions de charge.

Plan de glissement

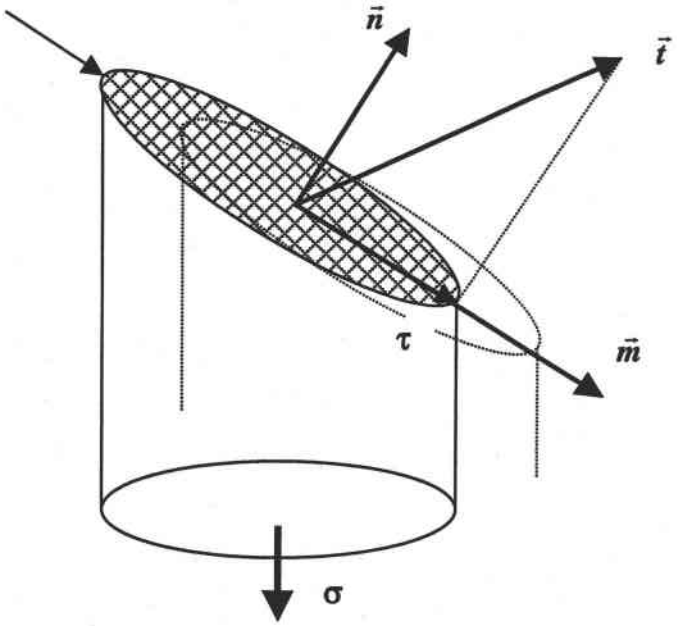


Figure II.3 : *Représentation schématique d'un système de glissement.*

1.2.1 Cinématique du glissement plastique

On considère, comme représenté par la *Figure II.4*, deux plans cristallographiques de la même famille de normale $\vec{n}$, distants de D et glissant plastiquement dans la même direction $\vec{m}$. En posant : $\vec{b}=b\vec{m}$ et $D=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=x_k n_k$, la vitesse de déplacement relatif des deux plans est donnée par l'expression :

$$\vec{u}(M)=\rho_m D\bar{\nu}\vec{b} \tag{II.3}$$

Si on tient compte de la relation d'Orowan $\dot{\gamma}=\rho_m b\bar{\nu}$ et du mécanisme du glissement plastique tel que représenté par la *Figure II.5*, l'expression de la vitesse de glissement s'écrit :

$$\dot{u}_i=\dot{\gamma}x_k n_k m_i \tag{II.4}$$

On peut alors déduire l'expression de la vitesse de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^p$ définie par :

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij}=\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}) \tag{II.5}$$

Soit, en supposant $\dot{\gamma}$ constant dans l'élément de volume considéré :

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij}=\frac{\dot{\gamma}}{2}(m_i n_j+m_j n_i)=\frac{\dot{\gamma}}{2}(S_{ij}+S_{ji})=R_{ij}\dot{\gamma} \tag{II.6}$$

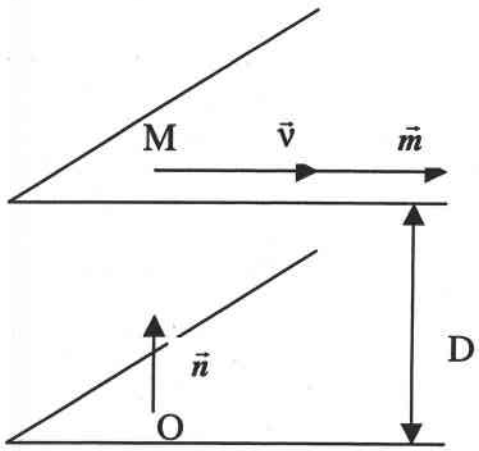


Figure II.4 : *Schématisation de la cinématique du glissement plastique.*

Le tenseur R représente la partie symétrique du tenseur de Schmid défini par le produit tensoriel :

$$S=\vec{m}\otimes\vec{n} \tag{II.7}$$

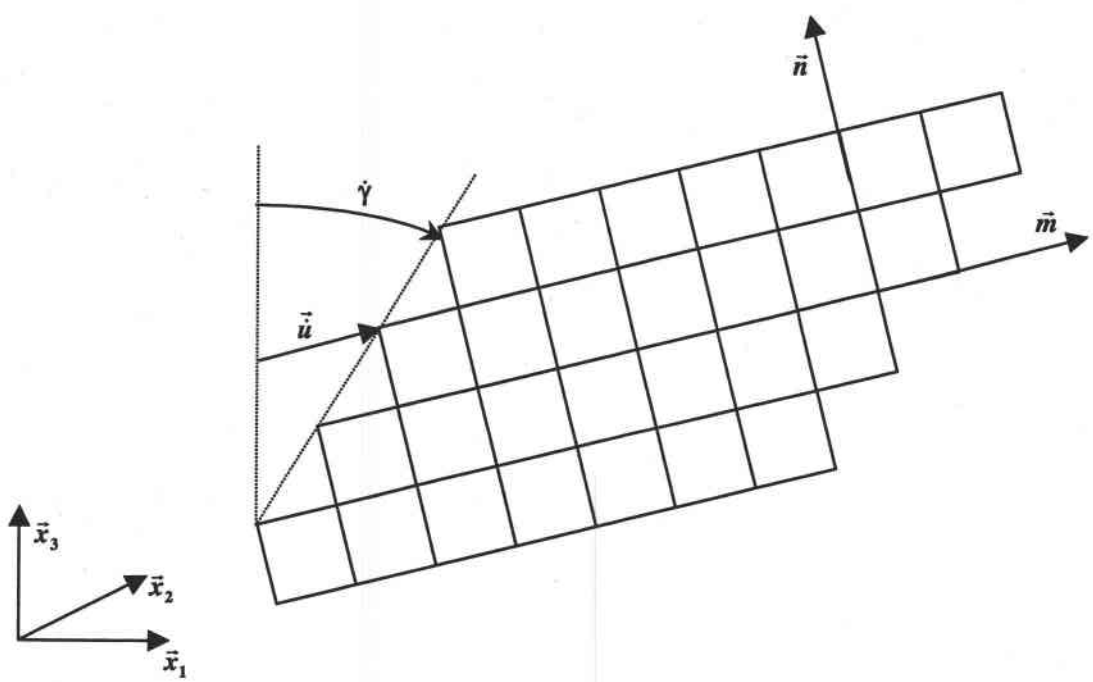


Figure II.5 : *Représentation schématique du glissement plastique.*

Lorsque plusieurs systèmes de glissement g sont simultanément activés, la vitesse de déformation plastique correspondant est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \sum_{g} R_{ij}^{g} \dot{\gamma}^{g} \tag{II.8}$$

D'autre part, la vitesse de rotation plastique associée, définie par $\dot{\omega}_{ij}^{p} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i})$ devient :

$$\dot{\omega}_{ij}^{p} = \sum_{g} Q_{ij}^{g} \dot{\gamma}^{g} \tag{II.9}$$

Le tenseur Q défini par :

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji}) \tag{II.10}$$

représente la partie antisymétrique du tenseur de Schmid S défini par II.7.

La description ci-dessus permet, pour une densité de dislocations mobiles donnée ρ_m, de déduire la vitesse de déformation plastique correspondante. Cette description du glissement plastique pour être complète nécessiterait de préciser la proportion de ρ_m par rapport à la densité totale et surtout l'évolution de cette densité de dislocations mobiles au cours d'un trajet de chargement. A travers une formulation semi-phénoménologique, cette évolution sera décrite sous forme d'une loi d'écrouissage qui se combine avec la loi d'écoulement plastique définie plus haut.

1.2.2 Fonction d'écoulement plastique du monocristal.

D'après le critère de Schmid, un système de glissement g est potentiellement actif lorsque la cission résolue τ^{g} sur ce système atteint un seuil critique τ_{cr}^{g}. On peut donc définir pour chaque système une fonction de charge de la forme :

$$f^{g}(\sigma) = \tau^{g} - \tau_{cr}^{g} \leq 0 \tag{II.11}$$

A cette condition, s'ajoute la règle de consistance pour les systèmes actifs.

$$\dot{f}^{g}(\sigma) = \dot{\tau}^{g} - \dot{\tau}_{cr}^{g} = 0 \tag{II.12}$$

La loi d'écoulement plastique du monocristal peut alors être résumée par les relations :

$$\dot{\gamma}^{g} = \begin{cases} 0 \text{ pour } \begin{cases} \tau^{g} < \tau_{cr}^{g} \text{ ou} \\ \tau^{g} = \tau_{cr}^{g} \text{ et } \dot{\tau}^{g} \leq 0 \end{cases} \\ > 0 \text{ pour } \tau^{g} = \tau_{cr}^{g} \text{ et } \dot{\tau}^{g} = \dot{\tau}_{cr}^{g} \end{cases} \tag{II.13}$$

La cission résolue τ^g est définie comme la projection du tenseur de contrainte sur le système de glissement g (*Figure II.3*).

$$\tau^g = \vec{m}^g \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}^g \tag{II.14}$$

Relation qui, compte tenu de la symétrie du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, peut s'écrire sous la forme :

$$\tau^g = R_{ij}^g \, \sigma_{ij} \tag{II.15}$$

La dérivation par rapport au temps de cette cission résolue donne :

$$\dot{\tau}^g = R_{ij}^g \left(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\omega}_{ik}^* \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj}^*\right) \tag{II.16}$$

Ou plus simplement :

$$\dot{\tau}^g = R_{ij}^g \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \tag{II.17}$$

$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ représentant la dérivée corotationelle de $\boldsymbol{\sigma}$ par rapport au réseau cristallin : $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\omega}_{ik}^* \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj}^*$, et $\dot{\omega}^*$ le tenseur des vitesses de rotation du réseau. Dans une formulation en petites déformations, le taux de cission résolue peut être approchée par :

$$\dot{\tau}^g = R_{ij}^g \dot{\sigma}_{ij} \tag{II.18}$$

Il reste donc à décrire l'évolution des cissions critiques sur chaque système au cours du processus de déformation.

1.2.3 Ecrouissage du monocristal.

Au cours du glissement cristallographique, les dislocations sont en mouvement, interagissent entre elles, se multiplient et s'annihilent dans les plans de glissement. Ces phénomènes induisent une évolution de la cission critique au cours de la déformation plastique appelée écrouissage. Le glissement plastique sur un système g entraîne non seulement l'écrouissage de ce système mais aussi de tous les autres systèmes h. Durant l'écoulement plastique du monocristal, le taux d'écrouissage $\dot{\tau}_{cr}^g$ dépend donc de la vitesse de glissement plastique $\dot{\gamma}^h$ de tous les systèmes actifs. Cet écrouissage du monocristal peut être traduit de façon phénoménologique au travers d'une matrice d'écrouissage H^{gh}.

$$\dot{\tau}_{cr}^g = \sum_{h=1}^{NSA} H^{gh} \dot{\gamma}^h \tag{II.19}$$

où NSA désigne le Nombre de Systèmes Actifs.

L'expression de la matrice d'écrouissage H^{gh} et son évolution peuvent être étudiées expérimentalement au travers d'essais d'écrouissage latent (durcissement croisé des systèmes). Ces essais révèlent une forte anisotropie de cette matrice liée aux interactions de contact entre les dislocations. En moyenne sur le cristal, la matrice d'écrouissage peut être traduite sous la forme :

$$H^{gh} = h^{(gh)} a^{gh} \tag{II.20}$$

$h^{(gh)}$ représente les modules dépendant de l'histoire du chargement imposé, et a^{gh} est la matrice décrivant l'anisotropie des interactions entre les systèmes de glissement, sa forme pouvant s'obtenir au moyen d'essais d'écrouissage latent (Franciosi et *al.* [7]). L'écrouissage du monocristal peut être assez bien décrit par une matrice H^{gh} dépendant de deux termes correspondant aux interactions faibles et fortes entre dislocations.

- Les interactions faibles reliées au terme H_1, décrivent l'auto-écrouissage. Sa valeur est de l'ordre de $\mu/250$ pour les cristaux cubiques à faces centrées et $\mu/500$ pour les cubiques centrés (Lipinski [17]); μ étant le module de cisaillement du matériau.
- Les interactions fortes, représentées par le terme H_2 proportionnel à H_1 par le coefficient d'anisotropie $A>1$ pour tenir compte de l'écrouissage latent du monocristal : $H_2 = AH_1$.

1.2.4 Equation constitutive du monocristal.

Il s'agit de déduire les propriétés globales du monocristal à partir des relations décrivant sa déformation plastique par glissement cristallographique. La décomposition additive du taux de déformation compatible $\dot{\varepsilon}$ du monocristal en partie élastique $\dot{\varepsilon}^e$ et en partie plastique $\dot{\varepsilon}^p$ peut s'écrire :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{II.21}$$

D'après la loi de Hooke, on peut écrire :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^p_{kl}) \tag{II.22}$$

Introduisons l'expression $\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \sum_{g=1}^{NSA} R^g_{ij}\,\dot{\gamma}^g$ et projetons le taux de contrainte sur un système quelconque g, nous obtenons :

$$R^g_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij} = R^g_{ij}\,C_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \sum_{g=1}^{NSA} R^g_{kl}\,\dot{\gamma}^g) \tag{II.23}$$

Si le système g est actif , alors :

$$R_{ij}^{g}\,\dot{\sigma}_{ij}=\dot{\tau}_{cr}^{g}=\sum_{h=1}^{NSA}H^{gh}\,\dot{\gamma}^{g} \tag{II.24}$$

Soit :

$$R_{ij}^{g}\,C_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}=\sum_{h=1}^{NSA}\left(H^{gh}+R_{ij}^{g}\,C_{ijkl}\,R_{kl}^{h}\right)\,\dot{\gamma}^{h} \tag{II.25}$$

La résolution de cette équation fournira l'expression de la vitesse de glissement $\dot{\gamma}^{h}$. Posons :

$$K^{gh}=\left(H^{gh}+R_{ij}^{g}\,C_{ijkl}\,R_{kl}^{h}\right)^{-1} \tag{II.26}$$

En supposant que cette matrice existe, on obtient :

$$\dot{\gamma}^{g}=\sum_{h=1}^{NSA}K^{gh}\,R_{ij}^{h}\,C_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{II.27}$$

Dans ces conditions, la réécriture de la relation II.22 conduit à :

$$\dot{\sigma}_{ij}=\left(C_{ijrs}-\sum_{g=1}^{NSA}\sum_{h=1}^{NSA}C_{ijkl}\,R_{kl}^{g}\,K^{gh}\,R_{pq}^{h}\,C_{pqrs}\right)\dot{\varepsilon}_{rs} \tag{II.28}$$

On déduit alors l'expression des modules tangents instantanés du monocristal, définis par :

$$\dot{\sigma}_{ij}=l_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{II.29}$$

soit :

$$l_{ijrs}=C_{ijrs}-\sum_{g=1}^{NSA}\sum_{h=1}^{NSA}C_{ijkl}\,R_{kl}^{g}\,K^{gh}\,R_{pq}^{h}\,C_{pqrs} \tag{II.30}$$

Cette expression des modules tangents du monocristal est basée sur l'hypothèse selon laquelle le tenseur défini par la relation II.26 existe. D'autre part, le choix de la combinaison de systèmes actifs pose le problème de l'unicité de la solution. L'importance de la structure de la matrice d'écrouissage a été soulignée par les travaux de Hill et Rice [12], de Lipinski [17] et de Petryk [20].

2 Comportement du monocristal contenant des hétérogénéités intra-granulaires.

La présence d'atomes étrangers dans un cristal, même supposé pur, est une règle générale. Ces éléments étrangers que l'on peut qualifier d'impuretés peuvent apparaître dans le cristal sous forme de solution solide, de précipités de seconde phase ou tout simplement des inclusions volontairement introduites lors de son élaboration pour améliorer certaines de ses

propriétés mécaniques. Les précipités ou inclusions présents dans le matériau interagissent avec les dislocations lors du mouvement de ces dernières. Ces interactions se traduisent par un durcissement du cristal et aussi par un phénomène d'écrouissage cinématique.

2.1 Les bases physiques.

Une façon très efficace de durcir une matrice, consiste à y répartir des précipités de seconde phase. On peut faire apparaître les précipités dans une matrice cristalline par un processus de traitements thermiques. Les dislocations qui naissent dans la matrice ne peuvent plus traverser les précipités et sont alors obligées de les contourner. De manière générale, les dislocations ne peuvent cisailler une particule que si cette dernière est cohérente avec la matrice, c'est-à-dire qu'il y a une continuité de réseau cristallographique entre la matrice et la particule. Quel que soit le mécanisme de franchissement des particules-précipités par les dislocations (cisaillement ou contournement), la particule oppose une certaine résistance au passage des dislocations. Dans le cas d'un cisaillement de précipité, le passage d'une dislocation tend à faciliter le passage des suivantes, L'écrouissage dans ce cas est alors plus faible que celui développé dans un mécanisme de contournement où le mécanisme d'Orowan ajoute à chaque passage une boucle de dislocation autour du précipité.

Les particules prises en compte dans notre étude sont essentiellement non cohérentes. Elles sont donc contournées par un mécanisme analogue à la source de Frank-Read, le mécanisme d'Orowan, et la formation de boucles de dislocations autour de l'hétérogénéité intra-granulaire qu'est le précipité. La présence de ces particules entraîne ainsi une augmentation significative de la contrainte critique observée sous sollicitation monotone croissante.

Sous des sollicitations cycliques, les cristaux durcis par des particules présentent un fort effet Bauschinger et un écrouissage cinématique. En effet, comme le montre la *Figure II.6*, sous l'action d'une contrainte de cisaillement τ , les dislocations franchissent les particules et les premières boucles d'Orowan se forment. Au fur et à mesure du passage des dislocations, des boucles de dislocations s'empilent autour des particules et des contraintes internes se développent. Lorsqu'on inverse le sens du chargement, on diminue progressivement ces contraintes internes, la densité des boucles de dislocation diminue avec le retour au contact de la particule des dislocations décrochées. Les boucles correspondant au premier trajet disparaissent et on retrouve l'état initial, avant de reformer d'autres boucles selon le nouveau sens du chargement. Cette réversibilité de la plasticité microscopique dans de telles

conditions, est d'autant plus significative que les boucles se développent dans un même plan. Dans le cas contraire, les contraintes internes peuvent être relaxées par des mécanismes de glissement dévié et la réversibilité ne sera plus observée.

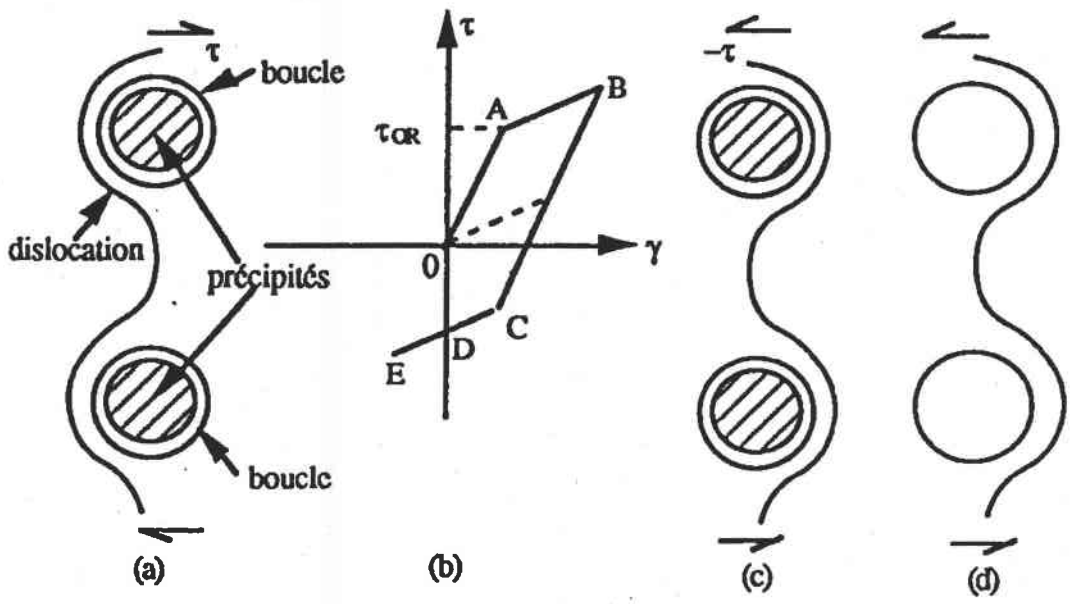


Figure II.6 : *Interaction dislocation-précipités avec formation de boucles (a) qui disparaissent lors de la déformation en retour ((c) et (d)), (D'après D. François et al., 1995).*

Les boucles développées autour des précipités traduisent quantitativement l'incompatibilité de déformation entre ceux-ci et la matrice. L'écrouissage cinématique résulte surtout de la forte polarisation des contraintes engendrées par les boucles de dislocations, comme le montre la *Figure II.7.*

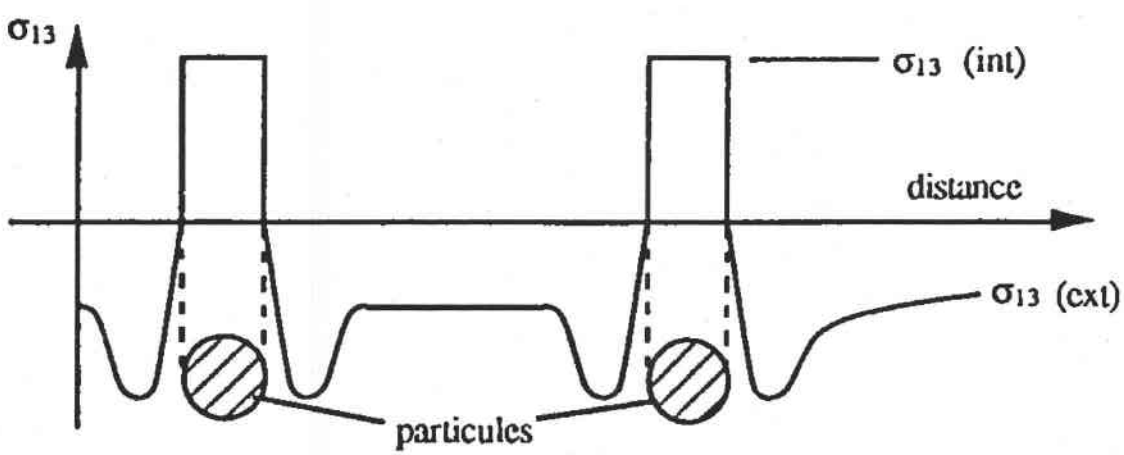


Figure II.7 : *Contraintes engendrées dans les particules (int) et dans la matrice (ext) par des boucles de dislocations (D'après D. François et al., 1995)*

La prise en compte de l'écrouissage intra-cristallin induit par la présence des précipités intra-granulaires dans la modélisation du comportement effectif du grain est exposée dans le paragraphe suivant.

2.2 Modélisation de l'écrouissage intra-granulaire.

La formulation autocohérente, basée sur les glissements plastiques sur des systèmes cristallographiques, développée pour la modélisation de la plasticité de matériaux polycristallins, peut être étendue à la description du comportement de métaux polyphasés présentant des hétérogénéités interphasiales. Ainsi, comme les matériaux composites, le comportement de matériaux biphasés a été modélisé, en élasticité par Ahaouri et *al.* [1], et en élastoplasticité par Corvasce et al. [4], Tandon and Weng [24].

Dans le cadre de l'élasticité, le comportement d'une matrice contenant des précipités intra-cristallins a été abordé par Qiu et Weng [21]. Peu d'investigations ont été menées pour la modélisation du comportement élastoplastique de polycristaux comportant des hétérogénéités intra-granulaires.

Dans une étude récente, Schmitt et *al.*[23], ont proposé une modélisation du comportement élastoplastique de ce type de matériaux cristallins. Leur approche est basée sur une technique d'homogénéisation à double transition d'échelle pour tenir compte de la distribution non uniforme des précipités à l'échelle du polycristal.

Dans notre investigation, une première transition micro-méso nous permet de proposer une description micromécanique du comportement élastoplastique du grain hétérogène comportant une certaine population de précipités non cisaillables. On déduit une nouvelle expression de la matrice d'écrouissage pour prendre en compte non seulement les interactions classiques dislocations-dislocations du monocristal mais aussi les interactions glissements-précipités. Ces dernières sont directement reliées aux contraintes internes générées par les boucles de dislocations qui s'empilent autour des précipités. Le comportement effectif du monocristal contenant une certaine fraction volumique de précipités intra-granulaires est déterminé par une approche analytique en recourant à une solution approchée de l'équation intégrale cinématique construite à cette échelle.

2.2.1 Hypothèses

On considère un monocristal contenant une fraction volumique f d'hétérogénéités (*Figure II.8*). Dans cette étude, nous supposons que ces hétérogénéités ont un comportement purement élastique tandis que la matrice cristalline est élastoplastique.

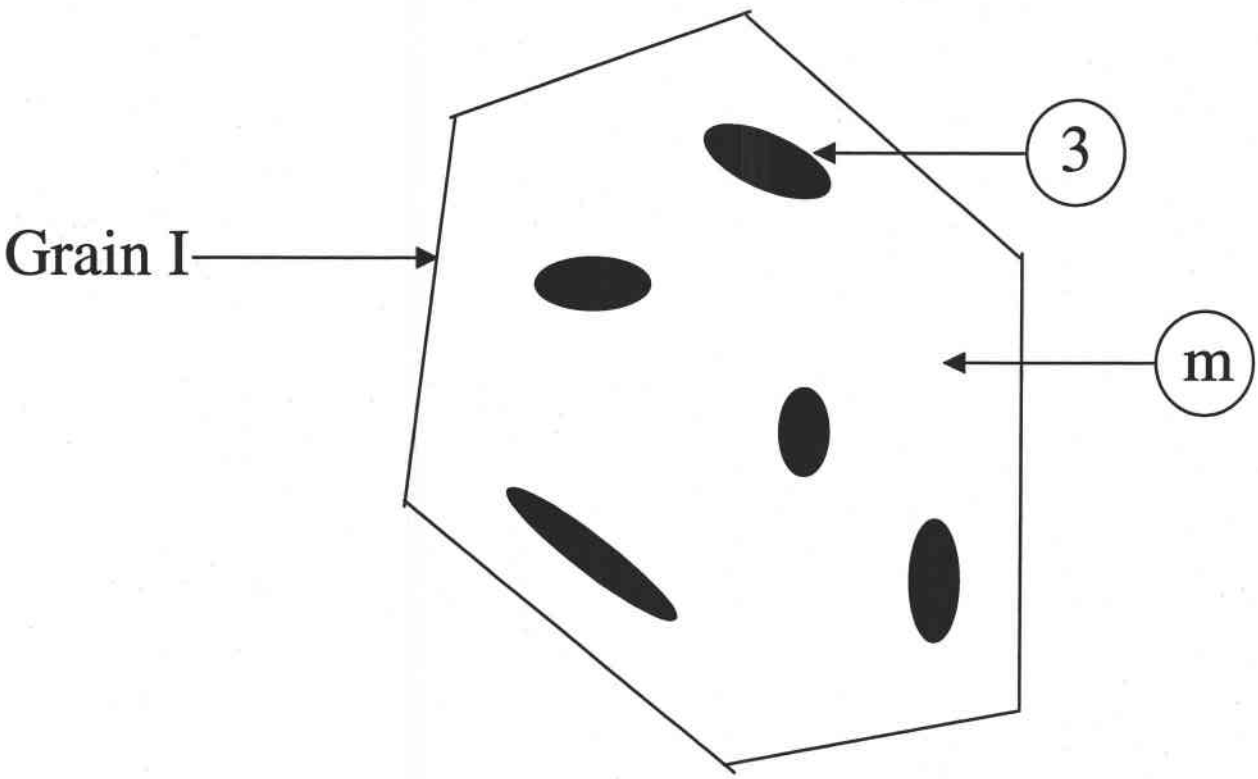


Figure II.8 : *monocristal contenant des hétérogénéités intra-cristallines.*

Les équations constitutives se traduisent par les relations :

- *Hétérogénéités intra-granulaires* (***indice 3***)

De fraction volumique f, cette phase a un comportement purement élastique qui peut être différent de celui du monocristal.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^3 = \tilde{\boldsymbol{c}}^3 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^3$$
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^3 = \tilde{\boldsymbol{s}}^3 : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^3 \qquad \text{(II.31)}$$

- *Matrice cristalline ou monocristal* (***indice m***)

De comportement élastoplastique, sa déformation plastique résulte de glissements cristallographiques de dislocations sur des systèmes actifs et obéit au critère de Schmid. Si

τ^g_{mcr} représente la cission critique d'un système quelconque g, ce système est potentiellement actif lorsque :

$$R^g : \sigma^m = \tau^g_{mcr} \tag{II.32}$$

Le taux de déformation plastique du monocristal est alors donné par la relation :

$$\dot{\varepsilon}^{pm} = \sum_{g=1}^{NSA} R^g \dot{\gamma}^g \tag{II.33}$$

Les relations constitutives générales du monocristal s'écrivent dès lors :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^m &= \tilde{l}^m : \dot{\varepsilon}^m \\ \dot{\varepsilon}^m &= \tilde{m}^m : \dot{\sigma}^m \end{aligned} \tag{II.34}$$

et,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^m &= \dot{\varepsilon}^{em} + \dot{\varepsilon}^{pm} \\ \dot{\sigma}^m &= \tilde{c}^m : \dot{\varepsilon}^{em} \end{aligned} \tag{II.35}$$

- *Grain hétérogène* (***indice I***)

Le grain effectif constitué par ces deux phases a un comportement élastoplastique décrit par:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^I &= \tilde{l}^I : \dot{\varepsilon}^I \\ \dot{\varepsilon}^I &= \tilde{m}^I : \dot{\sigma}^I \end{aligned} \tag{II.36}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^I &= \dot{\varepsilon}^{eI} + \dot{\varepsilon}^{pI} \\ \dot{\sigma}^I &= \tilde{c}^I : \dot{\varepsilon}^{eI} \end{aligned} \tag{II.37}$$

2.2.2 Critère de plasticité du grain hétérogène I.

En s'inspirant de la formulation générale des lois de comportement à partir de la surface de charge et du potentiel de dissipation, on peut réécrire les équations de la plasticité du monocristal en supposant l'existence d'une fonction d'écoulement f^k pour un système k :

$$f^k = f(\sigma^m, \tau^k_{mcr}) = R^k : \sigma^m - \tau^k_{mcr} \leq 0 \tag{II.38}$$

Le système k devient actif (c'est à dire qu'il y a glissement plastique) lorsque :

$$f^k = 0 \text{ et } df_\gamma{}^k > 0 \tag{II.39}$$

où $df_\gamma{}^k = \dfrac{\partial f^k}{\partial \sigma^m} : d\sigma^m$.

La plasticité associée et la normalité inhérente au critère de Schmid conduisent dès lors aux relations suivantes, équivalentes à celles établies plus haut :

$$d\varepsilon^{pm} = \sum_{k=1}^{NSA} d\lambda^k \frac{\partial f^k}{\partial \sigma} = \sum_{k=1}^{NSA} R^k \, d\lambda^k \tag{II.40}$$

$$d\gamma^k = -d\lambda^k \frac{\partial f^k}{\partial \tau^k_{mcr}} = d\lambda^k \tag{II.41}$$

La loi de mélange en contrainte appliquée au problème décrit ci-dessus conduit à :

$$\sigma^I = f\,\sigma^3 + (1-f)\sigma^m \tag{II.42}$$

La fraction volumique f peut éventuellement évoluer avec la déformation, si l'on tient compte de l'empilement suivant le mécanisme d'Orowan des boucles de dislocations autour des hétérogénéités intracristallines, lors du processus de glissement cristallographique. Dans la présente étude, nous supposerons que cette fraction reste constante.

Dans l'approche proposée, la déformation plastique du grain s'effectue par glissements cristallographiques localisés dans le monocristal, les hétérogénéités intragranulaires étant supposés purement élastiques. En tenant compte de la loi de mélange II.42 réécrite sous la forme :

$$\sigma^m = (\sigma^I - f\,\sigma^3)/(1-f) \tag{II.43}$$

la fonction d'écoulement plastique généralisée au grain hétérogène devient :

$$f^k = f(\sigma^I, \sigma^3, \tau^k_{mcr}) = R^k : (\sigma^I - f\,\sigma^3) - (1-f)\tau^k_{mcr} \le 0 \tag{II.44}$$

ou encore :

$$f^k(\sigma^I, X, \tau^k_{cr}) = R^k : (\sigma^I - X) - \tau^k_{cr} \le 0 \tag{II.45}$$

avec

$$\tau^k_{cr} = (1-f)\tau^k_{mcr} \tag{II.46}$$

Cette fonction de charge révèle l'écrouissage mixte anisotrope et cinématique présent dans le grain hétérogène. La variable tensorielle d'écrouissage cinématique $X = f\,\sigma^3$ est une fonction linéaire de la fraction volumique des hétérogénéités et de leur niveau de contrainte.

Comme dans la description du comportement du monocristal, en tenant compte de la plasticité associée ainsi que de la règle de normalité, on peut poser :

$$d\varepsilon^{pl} = \sum_{k=1}^{NSA} d\Gamma^k \frac{\partial f^k}{\partial \sigma} = \sum_{k=1}^{NSA} R^k \, d\Gamma^k \tag{II.47}$$

où $d\Gamma^k$ représente l'incrément de glissement plastique sur un système k du grain hétérogène. En tenant compte de l'expression II.44 et de la relation II.41, on obtient :

$$d\Gamma^k = -(1-f)\, d\lambda^k \frac{\partial f^k}{\partial \tau^k_{mcr}} \tag{II.48}$$

Soit :

$$d\Gamma^k = (1-f)\, d\gamma^k \tag{II.49}$$

Cette relation entre l'incrément de glissement plastique du grain hétérogène et celui du monocristal découle de l'hypothèse introduite dans l'étude et selon laquelle seule la matrice représentée par le monocristal est le siège d'une déformation plastique par glissement. Il en aurait été autrement si l'hétérogénéité intragranulaire était également élastoplastique. Finalement, le taux de déformation plastique du grain hétérogène s'écrit :

$$d\varepsilon^{pl} = \sum_{k=1}^{NSA} R^k\, d\Gamma^k = \sum_{k=1}^{NSA} (1-f)\, R^k\, d\gamma^k \tag{II.50}$$

soit :

$$d\varepsilon^{pl} = (1-f)\, d\varepsilon^{pm} \tag{II.51}$$

La dernière équation permet de relier le taux de déformation de la matrice cristalline à celui du grain hétérogène. En fait, une démarche alternative basée sur la loi de mélange et les relations de localisation permet d'établir la relation générale :

$$d\varepsilon^{pl} = f\, d\varepsilon^{3p} + (1-f)\, d\varepsilon^{pm} \tag{II.52}$$

Compte tenu de l'hypothèse du comportement purement élastique de l'hétérogénéité ($d\varepsilon^{3p} = 0$), la relation II.51 devient immédiate.

La localisation de contraintes internes d'ordre trois au niveau des hétérogénéités intra-granulaires influence directement l'écrouissage du grain. La présence de ces hétérogénéités induit des incompatibilités du champ de déformation de sorte que le taux de contrainte dans le grain hétérogène diffère de celui de la matrice cristalline par un terme relié au champ de déformation de ce dernier. Cette différence peut être traduite par la relation suivante :

$$d\sigma^m = d\sigma^l + \tilde{P} : d\varepsilon^m \tag{II.53}$$

Ici $\tilde{P}$ est un tenseur de polarisation dont l'expression sera fournie par la résolution du problème complexe d'interaction entre les hétérogénéités intra-granulaires et le monocristal.

En tenant compte de la loi de mélange exprimée en taux de contrainte :

$$d\sigma^l = f\, d\sigma^3 + (1-f)\, d\sigma^m \tag{II.54}$$

on déduit :

$$d\sigma^m = \frac{1}{1-f}(d\sigma^l - f\, d\sigma^3) \tag{II.55}$$

Puis en introduisant II.53 :

$$f\,d\sigma^3 = f\,d\sigma^I - (1-f)\tilde{P}:d\varepsilon^m \qquad \text{(II.56)}$$

La condition de consistance, lorsqu'il y a écoulement plastique sur un système de glissement k ($f^k=0$ et $df_\gamma^{\,k}>0$), donne :

$$\frac{\partial f^k}{\partial \sigma^I}:d\sigma^I + \frac{\partial f^k}{\partial \sigma^3}:d\sigma^3 + \frac{\partial f^k}{\partial \tau^k_{mcr}}d\tau^k_{mcr} = 0 \qquad \text{(II.57)}$$

Soit en tenant compte de l'expression II.44 :

$$R^k:d\sigma^I - f\,R^k:d\sigma^3 - (1-f)\,d\tau^k_{mcr} = 0 \qquad \text{(II.58)}$$

Cette relation peut être réécrite en introduisant II.56 :

$$R^k:d\sigma^I + R^k:\tilde{P}:d\varepsilon^m - d\tau^k_{mcr} = 0 \qquad \text{(II.59)}$$

La décomposition additive de la déformation suivant $d\varepsilon^m = d\varepsilon^{em} + d\varepsilon^{pm}$ et la loi de Hooke qui s'écrit $d\varepsilon^{em} = \tilde{s}^m:d\sigma^m$ conduisent à :

$$R^k:d\sigma^I + R^k:\tilde{P}:d\varepsilon^{em} + R^k:\tilde{P}:d\varepsilon^{pm} - d\tau^k_{mcr} = 0 \qquad \text{(II.60)}$$

La présence des hétérogénéités influence le mécanisme de déformation de la matrice car elles constituent des obstacles au mouvement des dislocations. Cette influence est traduite par les deuxième et troisième termes de la règle de consistance appliquée au grain hétérogène (II.60). L'étape suivante consiste en l'élimination des variables liées à la matrice que sont $d\sigma^m$ et $d\varepsilon^{pm}$ pour ne conserver que celles associées aux hétérogénéités intra-granulaires. On postule en premier lieu l'existence des tenseurs de localisation de contrainte $\tilde{b}^3$ et $\tilde{b}^m$ tels que :

$$d\sigma^3 = \tilde{b}^3:d\sigma^I \qquad \text{(II.61)}$$

$$d\sigma^m = \tilde{b}^m:d\sigma^I \qquad \text{(II.62)}$$

La loi de mélange II.54 conduit à la relation suivante :

$$\tilde{b}^m = (\tilde{I} - f\,\tilde{b}^3)/(1-f) \qquad \text{(II.63)}$$

D'autre part, pour la matrice cristalline :

$$d\tau^g_{mcr} = \sum_{h=1}^{NSA} H^{gh}\,d\gamma^h \qquad \text{(II.64)}$$

$$d\varepsilon^{pm} = \sum_{h=1}^{NSA} R^h\,d\gamma^h \qquad \text{(II.65)}$$

par conséquent, la règle de consistance II.60 s'écrit alors :

$$R^k:d\sigma^I + \frac{1}{(1-f)}R^k:\tilde{P}:\tilde{s}^m:(\tilde{I} - f\,\tilde{b}^3):d\sigma^I - \sum_{h=1}^{NSA}(H^{kh} - R^k:\tilde{P}:R^h)\,d\gamma^h = 0 \qquad \text{(II.66)}$$

On peut introduire l'incrément de glissement du grain hétérogène Γ^k directement relié à celui du monocristal par II.49. En multipliant cette expression précédente par $(1-f)$:

$$R^k:\left[(1-f)\tilde{I}+\tilde{P}:\tilde{s}^m:(\tilde{I}-f\tilde{b}^3)\right]:d\boldsymbol{\sigma}^I=\sum_{h=1}^{NSA}(H^{kh}-R^k:\tilde{P}:R^h)\,d\Gamma^h \qquad \text{(II.67)}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\aleph^{kh}=H^{kh}-R^k:\tilde{P}:R^h \qquad \text{(II.68)}$$

$$\tilde{U}=(1-f)\tilde{I}+\tilde{P}:\tilde{s}^m:(\tilde{I}-f\tilde{b}^3) \qquad \text{(II.69)}$$

et

$$\dot{\tau}^k=R^k:\tilde{U}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}^I \qquad \text{(II.70)}$$

Nous obtenons une nouvelle règle d'écrouissage pour le grain hétérogène :

$$\dot{\tau}^k_{cr}=\sum_{h=1}^{NSA}\aleph^{kh}\dot{\Gamma}^h \qquad \text{(II.71)}$$

$\aleph^{gh}$ apparaît comme une nouvelle expression de la matrice d'écrouissage prenant en compte, non seulement les interactions classiques dislocation-dislocations, mais également les interactions entre les dislocations et les hétérogénéités intra-granulaires à travers le terme $R^g:\tilde{P}:R^h$. Ce terme additionnel est directement lié aux contraintes internes induites par les boucles de dislocations qui se forment autours des hétérogénéités au cours de la phase de leur contournement.

Le tenseur $\tilde{U}$ prend en compte la contribution des contraintes internes d'ordre trois $\boldsymbol{\sigma}^3$ à l'écrouissage équivalent du grain hétérogène. La présence du tenseur $\tilde{s}^m$ dans l'expression de $\tilde{U}$ prouve que ce dernier tient également compte de l'hétérogénéité du comportement élastique entre les deux phases du grain. Le tenseur $\tilde{U}$, défini par II.69 et fonction du tenseur de localisation des contraintes $\tilde{b}^3$, disymétrise l'écrouissage du grain. En effet, la valeur critique de la cission sur un système g pour un glissement dans une direction $\vec{m}$ est différente de celle pour un glissement dans la direction opposée $-\vec{m}$, traduisant l'écrouissage cinématique du système. Les relations II.68 et II.70 décrivent alors un écrouissage complexe du grain hétérogène. En effet, les cristaux durcis par des hétérogénéités présentent non seulement un écrouissage plus fort mais également un effet Bauschinger.

2.2.3 Loi de comportement du grain hétérogène.

L'objectif de cette partie est de déterminer l'expression des modules tangents du grain hétérogène en reliant le taux de contrainte au taux de déformation correspondant. A partir de

la décomposition additive du taux de déformation $d\varepsilon^I$ du monocristal en partie élastique $d\varepsilon^{el}$ et en partie plastique $d\varepsilon^{pl}$ et de la loi d'Hooke, on peut écrire :

$$d\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I (d\varepsilon_{kl}^I - d\varepsilon_{kl}^{pl}) \tag{II.72}$$

En tenant compte de la relation $d\varepsilon^{pl} = \sum_{g=1}^{NSA} R^g \, d\Gamma^g$ établie précédemment, nous obtenons :

$$d\sigma^I = \tilde{C}^I : (d\varepsilon^I - \sum_{g=1}^{NSA} R^g \, d\Gamma^g) \tag{II.73}$$

On peut alors déduire :

$$R^k : \tilde{U} : d\sigma^I = R^k : \tilde{U} : \tilde{C}^I : d\varepsilon^I - \sum_{g=1}^{NSA} R^k : \tilde{U} : \tilde{C}^I : R^g \, d\Gamma^g \tag{II.74}$$

Pour un système g actif, les relations II.70 et II.71 permettent d'écrire :

$$\sum_{g=1}^{NSA} \aleph^{kg} \, d\Gamma^g = R^k : \tilde{U} : \tilde{C}^I : d\varepsilon^I - \sum_{g=1}^{NSA} R^k : \tilde{U} : \tilde{C}^I : R^g \, d\Gamma^g \tag{II.75}$$

soit :

$$R^k : \tilde{U} : \tilde{C}^I : d\varepsilon^I = \sum_{g=1}^{NSA} \left[\aleph^{kg} + R^k : \tilde{U} : \tilde{C}^I : R^g \right] d\Gamma^g \tag{II.76}$$

Introduisons la matrice K^{gh} telle que :

$$K^{gh} = \left[\aleph^{gh} + R^g : \tilde{U} : \tilde{C}^I : R^h \right]^{-1} \tag{II.77}$$

ou encore en tenant compte de II.68 :

$$K^{gh} = \left[H^{gh} + R^g : (\tilde{U} : \tilde{C}^I - \tilde{P}) : R^h \right]^{-1} \tag{II.78}$$

En supposant que cette matrice existe, on obtient :

$$d\Gamma^g = \sum_{h=1}^{NSA} K^{gh} \, R^h : \tilde{U} : \tilde{C}^I : d\varepsilon^I \tag{II.79}$$

La loi de comportement II.72 du grain s'écrit alors :

$$d\sigma^I = \left(\tilde{C}^I - \sum_{g=1}^{NSA} \sum_{h=1}^{NSA} \tilde{C}^I : R^g \, K^{gh} \, R^h : \tilde{U} : \tilde{C}^I \right) : d\varepsilon^I \tag{II.80}$$

soit :

$$d\sigma^I = \tilde{l}^I : d\varepsilon^I \tag{II.81}$$

Avec :

$$\tilde{l}^I = \tilde{C}^I - \sum_{g=1}^{NSA} \sum_{h=1}^{NSA} \tilde{C}^I : R^g \, K^{gh} \, R^h : \tilde{U} : \tilde{C}^I \tag{II.82}$$

Cette expression du tenseur des modules tangents du grain hétérogène présente une structure similaire à celle du tenseur des modules tangents du monocristal donné par II.30. Lorsque $\tilde{P}=\tilde{0}$ on a :

$$\tilde{l}^{I}=\tilde{C}^{I}-(1-f)\sum_{g=1}^{NSA}\sum_{h=1}^{NSA}\tilde{C}^{I}:R^{g}K^{gh}R^{h}:\tilde{C}^{I} \qquad \text{(II.83)}$$

Par rapport au comportement élastoplastique du monocristal décrit par la relation II.30, le grain hétérogène présente, dans ce cas particulier, un durcissement relatif dû à la présence d'hétérogénéités qui ne contribuent pas à la phase plastique de la déformation. Pour revenir au cas initial du monocristal homogène, il faudra alors négliger ces hétérogénéités. Ainsi, avec $\tilde{P}=\tilde{0}$ et $f=0$ on obtient $\tilde{U}=\tilde{I}$ et $\tilde{l}^{I}=\tilde{l}^{m}$.

2.3 Expression du tenseur $\tilde{P}$.

Pour compléter la description du comportement du grain hétérogène, nous proposons dans ce paragraphe, plusieurs approches permettant d'estimer le tenseur de polarisation $\tilde{P}$. Il s'agit essentiellement des modèles d'homogénéisation de milieux hétérogènes permettant une localisation des contraintes dans les différentes phases du matériau. En rappelant la relation de localisation du taux de contrainte dans la matrice :

$$\dot{\sigma}^{m}=\tilde{b}^{m}:\dot{\sigma}^{I} \qquad \text{(II.84)}$$

on peut écrire :

$$\dot{\sigma}^{m}-\dot{\sigma}^{I}=\dot{\sigma}^{m}-\tilde{b}^{m^{-1}}:\dot{\sigma}^{m} \qquad \text{(II.85)}$$

soit :

$$\dot{\sigma}^{m}-\dot{\sigma}^{I}=(\tilde{I}-\tilde{b}^{m^{-1}}):\tilde{l}^{m}:\dot{\varepsilon}^{m} \qquad \text{(II.86)}$$

Ou encore :

$$\dot{\sigma}^{m}=\dot{\sigma}^{I}+(\tilde{I}-\tilde{b}^{m^{-1}}):\tilde{l}^{m}:\dot{\varepsilon}^{m} \qquad \text{(II.87)}$$

En comparant cette relation à II.53 définissant le tenseur $\tilde{P}$, on peut identifier ce dernier :

$$\tilde{P}=(\tilde{I}-\tilde{b}^{m^{-1}}):\tilde{l}^{m} \qquad \text{(II.88)}$$

On constate, que $\tilde{P}$ dépend, à travers le tenseur de localisation $\tilde{b}^{m}$, de la fraction volumique d'hétérogénéités intra-granulaires, des paramètres géométriques du problème et de la loi de comportement de chaque constituant. Tout comme pour l'expression du critère de Schmid modifié pour le grain hétérogène, il convient d'exprimer ce tenseur uniquement en fonction des propriétés du grain et de l'hétérogénéité.

Nous observons alors que :

$$\tilde{P}=\tilde{l}^{m}-\left(\tilde{m}^{m}:\tilde{b}^{m}\right)^{-1} \tag{II.89}$$

Les propriétés des deux phases et du grain hétérogène sont liées par :

$$(1-f)\tilde{m}^{m}:\tilde{b}^{m}+f\,\tilde{s}^{3}:\tilde{b}^{3}=\tilde{m}^{1} \tag{II.90}$$

soit :

$$(\tilde{m}^{m}:\tilde{b}^{m})^{-1}=(1-f)(\tilde{m}^{1}-f\,\tilde{s}^{3}:\tilde{b}^{3})^{-1} \tag{II.91}$$

De cette dernière expression, nous déduisons également :

$$\tilde{l}^{m}=(1-f)\tilde{b}^{m}:(\tilde{m}^{1}-f\,\tilde{s}^{3}:\tilde{b}^{3})^{-1} \tag{II.92}$$

En introduisant ces deux derniers résultats dans l'expression II.89, nous obtenons :

$$\tilde{P}=(1-f)(\tilde{b}^{m}-\tilde{I}):(\tilde{m}^{1}-f\,\tilde{s}^{3}:\tilde{b}^{3})^{-1} \tag{II.93}$$

La relation II.63 permet d'éliminer $\tilde{b}^{m}$ de cette expression. En définitive, le tenseur de polarisation $\tilde{P}$ s'écrit alors :

$$\tilde{P}=f\,(\tilde{I}-\tilde{b}^{3}):(\tilde{m}^{1}-f\,\tilde{s}^{3}:\tilde{b}^{3})^{-1} \tag{II.94}$$

Conformément à la remarque faite plus haut, nous constatons que le tenseur $\tilde{P}$ dépend, cette fois-ci explicitement, de la fraction volumique de l'hétérogénéité, de sa forme (géométrie), et des propriétés tangentes de la matrice cristalline et des hétérogénéités (à travers $\tilde{m}^{1}$).

Le tenseur $\tilde{P}$ est complètement déterminé suite à la résolution du problème de localisation des contraintes dans l'hétérogénéité intra-cristalline. Nous proposons, dans un premier temps, les bornes d'ordre zéro de ce tenseur. Par la suite, trois approximations plus fines seront discutées.

2.3.1 Borne inférieure d'ordre zéro $\tilde{P}_{inf}$

La borne inférieure d'ordre zéro correspond au modèle statique de Sachs [22]. Dans ce cas, on suppose que :

$$\tilde{b}^{m}=\tilde{b}^{3}=\tilde{I} \tag{II.95}$$

Nous déduisons immédiatement de II.94 que :

$$\tilde{P}_{inf}=\tilde{0} \tag{II.96}$$

Par conséquent, le formalisme proposé plus haut est réduit pratiquement à la description du comportement du monocristal sans hétérogénéités, puisque dans ce cas :

$$\dot{\sigma}^{1}=\dot{\sigma}^{m}=\dot{\sigma}^{3} \tag{II.97}$$

et :

$$\tilde{U}=(1-f)\tilde{I} \qquad \text{(II.98)}$$

Ce cas déjà discuté plus haut, correspond au durcissement du monocristal par les hétérogénéités élastiques. L'écrouissage intra-granulaire est accru par les incompatibilités de déformation élastoplastique entre les deux phases du grain.

2.3.2 *Borne supérieure d'ordre zéro* $\tilde{P}_{sup}$

La borne supérieure d'ordre zéro s'obtient en supposant que :

$$\tilde{a}^m=\tilde{a}^3=\tilde{I} \qquad \text{(II.99)}$$

Cette hypothèse correspond au modèle de Taylor-Lin et $\tilde{a}^3$ et $\tilde{a}^m$ désignent respectivement les tenseurs de localisation du taux de déformation de l'hétérogénéité et de la matrice. Le lien entre les tenseurs de localisation des taux de déformations et de contraintes peut s'obtenir par l'analyse suivante.

Soit $\tilde{a}^\varphi$ le tenseur de localisation du taux de déformation pour une phase φ (matrice ou hétérogénéité) de propriétés tangentes $\tilde{l}^\varphi$. Nous pouvons alors écrire :

$$\dot{\varepsilon}^\varphi=\tilde{a}^\varphi:\dot{\varepsilon}^I \qquad \text{(II.100)}$$

ou encore :

$$\tilde{l}^{\varphi-1}:\dot{\sigma}^\varphi=\tilde{a}^\varphi:\tilde{l}^{I-1}:\dot{\sigma}^I \qquad \text{(II.101)}$$

soit :

$$\dot{\sigma}^\varphi=\tilde{l}^\varphi:\tilde{a}^\varphi:\tilde{l}^{I-1}:\dot{\sigma}^I \qquad \text{(II.102)}$$

En comparant cette dernière relation avec l'expression de la localisation des taux de contraintes pour la phase φ, nous obtenons :

$$\tilde{b}^\varphi=\tilde{l}^\varphi:\tilde{a}^\varphi:\tilde{l}^{I-1}=\tilde{l}^\varphi:\tilde{a}^\varphi:\tilde{m}^I \qquad \text{(II.103)}$$

Ainsi, dans le cas de l'hétérogénéité intra-cristalline supposée ici purement élastique, nous obtenons :

$$\tilde{b}^3=\tilde{c}^3:\tilde{a}^3:\tilde{m}^I \qquad \text{(II.104)}$$

En tenant compte de l'hypothèse II.99 :

$$\tilde{b}^3=\tilde{c}^3:\tilde{m}^I \qquad \text{(II.105)}$$

De ce dernier résultat, on peut déduire l'expression du tenseur $\tilde{P}$:

$$\tilde{P}=f(\tilde{I}-\tilde{c}^3:\tilde{m}^I):(\tilde{m}^I-f\tilde{s}^3:\tilde{c}^3:\tilde{m}^I)^{-1} \qquad \text{(II.106)}$$

ou :

$$\tilde{P}=f(\tilde{I}-\tilde{c}^{3}:\tilde{m}^{I}):\frac{\tilde{I}^{I}}{1-f} \qquad \text{(II.107)}$$

soit, plus simplement :

$$\tilde{P}=\frac{f}{1-f}(\tilde{I}^{I}-\tilde{c}^{3}) \qquad \text{(II.108)}$$

Nous pouvons alors analyser la loi d'évolution de la variable d'écrouissage cinématique $\dot{X}$:

$$\dot{X}=f\dot{\sigma}^{3}=f\tilde{b}^{3}:\dot{\sigma}^{I} \qquad \text{(II.109)}$$

En introduisant II.105, nous obtenons :

$$\dot{X}=f\tilde{c}^{3}:\dot{\varepsilon}^{I} \qquad \text{(II.110)}$$

De même, la matrice d'écrouissage modifiée définie par $\aleph^{kh}=H^{kh}-R^{k}:\tilde{P}:R^{h}$ se réécrit :

$$\aleph^{kh}=H^{kh}-\frac{f}{1-f}R^{k}:(\tilde{I}^{I}-\tilde{c}^{3}):R^{h} \qquad \text{(II.111)}$$

Par ailleurs, le terme $\tilde{U}=\left(\tilde{I}+(1-f)\tilde{P}:\tilde{s}^{m}:(f\tilde{I}-\tilde{b}^{3})\right)$, introduisant l'effet des contraintes internes du troisième ordre sur l'évolution de la cission critique, devient :

$$\tilde{U}=\left(\tilde{I}+\frac{f}{(1-f)^{2}}(\tilde{I}^{I}-\tilde{c}^{3}):\tilde{s}^{m}:(\tilde{I}-f\tilde{c}^{3}:\tilde{m}^{I})\right) \qquad \text{(II.112)}$$

L'écrouissage mixte anisotrope et cinématique induit par la présence des hétérogénéités intra-cristallines est, sous les hypothèses de ce modèle, très prépondérant. En effet, du fait de la relation II.98, les variables $\aleph^{gh}$, $\tilde{U}$ et $\dot{X}$ décrivant l'écrouissage du grain hétérogène prennent des valeurs correspondant à leur borne supérieure alors que dans le modèle de Sachs elles étaient négligeables, plus précisément nulles.

Les deux tentatives précédentes de détermination de l'expression du tenseur de polarisation $\tilde{P}$ même si elles permettent d'avoir un aperçu sommaire de l'écrouissage mixte du grain hétérogène n'en demeurent pas moins de grossières estimations. Ainsi dans la suite, des modèles de résolution du problème d'interaction hétérogénéités / monocristal, tels que les modèles de Kröner, de Mori–Tanaka ou l'approche autocohérente permettront d'affiner cette description.

On considère pour ce faire, le problème du grain hétérogène défini précédemment et pour lequel le comportement local peut être défini par la relation :

$$\dot{\sigma}(r)=\tilde{l}(r):\dot{\varepsilon}(r) \qquad \text{(II.113)}$$

Les équations de ce problème de matériaux hétérogènes élastoplastiques peuvent être transformées en l'équation intégrale suivante :

$$\dot{\varepsilon}(r)=\dot{\varepsilon}^0-\int_V \Gamma_0(r-r'):(\tilde{l}(r')-\tilde{l}^0):\dot{\varepsilon}(r')dV' \qquad \text{(II.114)}$$

$\tilde{\Gamma}_0$ représente la fonction de Green modifiée du milieu de référence infini uniforme de module tangent $\tilde{l}_0$. Les modèles de résolution de cette équation intégrale diffèrent essentiellement par le choix du milieu de référence. Les modèles standards introduisent une hypothèse supplémentaire en adoptant un opérateur $\tilde{\Gamma}_0$ réduit à sa seule partie locale $\tilde{\Gamma}(r)\delta(r-r')$. Dederichs et Zeller [5] ont montré que $\tilde{\Gamma}_0$ peut être décomposé en une partie locale $\tilde{\Gamma}(r)\delta(r-r')$ et une partie non locale $\tilde{\Gamma}_0^2(r-r')$ dont la variation est proportionnelle à $\frac{1}{|r-r'|^3}$.

Sous cette hypothèse, à partir de l'équation intégrale II.114 et en suivant une démarche qui sera largement explicitée *au paragraphe 1.1.2 du chapitre III*, il est possible de déduire le taux de déformation dans l'une des phases φ du grain hétérogène. En recourant à la moyenne volumique dans cette phase pour représenter son état de déformation on obtient :

$$\dot{\varepsilon}^\varphi=\dot{\varepsilon}^0-\tilde{T}_0^{\varphi\varphi}:\Delta\tilde{l}_0^\varphi:\dot{\varepsilon}^\varphi \qquad \text{(II.115)}$$

où :

$$\tilde{T}_0^{\varphi\varphi}=\frac{1}{V_\varphi}\int_{V_\varphi}\int_{V_\varphi}\tilde{\Gamma}(r-r')\,dV_\varphi\,dV_\varphi \qquad \text{(II.116)}$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme d'une opération de localisation :

$$\dot{\varepsilon}^\varphi=\left(\tilde{I}+\tilde{T}_0^{\varphi\varphi}:\Delta\tilde{l}_0^\varphi\right)^{-1}:\dot{\varepsilon}^0=\tilde{a}_0^\varphi:\dot{\varepsilon}^0 \qquad \text{(II.117)}$$

avec :

$$\tilde{a}_0^\varphi=\left(\tilde{I}+\tilde{T}_0^{\varphi\varphi}:\Delta\tilde{l}_0^\varphi\right)^{-1} \qquad \text{(II.118)}$$

La relation de la moyenne appliquée à la déformation donne :

$$\dot{\varepsilon}^I=<\dot{\varepsilon}^\varphi>=<\tilde{a}_0^\varphi>:\dot{\varepsilon}^0 \qquad \text{(II.119)}$$

d'où :

$$\dot{\varepsilon}^0=<\tilde{a}_0^\varphi>^{-1}:\dot{\varepsilon}^I \qquad \text{(II.120)}$$

Le vrai tenseur de localisation de la déformation est alors donné par :

$$\tilde{a}^\varphi=\tilde{a}_0^\varphi:<\tilde{a}_0^\varphi>^{-1} \qquad \text{(II.121)}$$

Pour un biphasé pour lequel la phase 2 a une fraction volumique f ; (comme dans notre cas):

$$\tilde{a}^1=\tilde{a}_0^1:((1-f)\tilde{a}_0^1+f\,\tilde{a}_0^2)^{-1} \qquad \text{(II.122)}$$

ou encore :

$$\tilde{a}^1 = \left((1-f)\tilde{a}_0^1 : \tilde{a}_0^{1-1} + f\,\tilde{a}_0^2 : \tilde{a}_0^{1-1}\right)^{-1} \qquad \text{(II.123)}$$

soit :

$$\tilde{a}^1 = \left((1-f)\tilde{I} + f\,\tilde{a}_0^2 : \tilde{a}_0^{1-1}\right)^{-1} \qquad \text{(II.124)}$$

Par la même démarche on peut montrer que :

$$\tilde{a}^2 = \left((1-f)\tilde{a}_0^1 : \tilde{a}_0^{2-1} + f\,\tilde{I}\right)^{-1} \qquad \text{(II.125)}$$

Après ces préliminaires, nous pouvons appliquer des modèles classiques de résolution de l'équation intégrale du problème du grain hétérogène.

2.3.3 Expression du tenseur $\tilde{P}_K$ par l'estimation de Kröner

Dans ce cas particulier, le milieu de référence est supposé avoir le même comportement que l'hétérogénéité élastique intra-granulaire.

$$\tilde{l}_0 = \tilde{c}^3 \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^0 = \dot{\varepsilon}^3 \qquad \text{(II.126)}$$

Ces hypothèses conduisent à :

$$\tilde{a}_0^3 = \tilde{I} \quad \text{et} \quad \tilde{a}_0^m = \left(\tilde{I} + \tilde{T}_K^{mm} : \Delta\tilde{l}_K^m\right)^{-1} \qquad \text{(II.127)}$$

Avec : $\Delta\tilde{l}_K^m = \tilde{l}^m - \tilde{c}^3$. On peut alors calculer :

$$\tilde{a}_K^m = \left((1-f)\tilde{I} + f\,\tilde{a}_0^3 : \tilde{a}_0^{m-1}\right)^{-1} \qquad \text{(II.128)}$$

Expression qui peut être explicitée sous la forme :

$$\tilde{a}_K^m = \left(\tilde{I} + f\,\tilde{T}_K^{mm} : \Delta\tilde{l}_K^m\right)^{-1} \qquad \text{(II.129)}$$

De même dans l'hétérogénéité :

$$\tilde{a}_K^3 = \left((1-f)\tilde{a}_0^m : \tilde{a}_0^{3-1} + f\,\tilde{I}\right)^{-1} \qquad \text{(II.130)}$$

ou finalement :

$$\tilde{a}_K^3 = \left((1-f)(\tilde{I} + \tilde{T}_K^{mm} : \Delta\tilde{l}_K^m)^{-1} + f\,\tilde{I}\right)^{-1} \qquad \text{(II.131)}$$

D'autre part, nous savons que :

$$\tilde{l}^1 = f\,\tilde{c}^3 : \tilde{a}_K^3 + (1-f)\tilde{l}^m : \tilde{a}_K^m \qquad \text{(II.132)}$$

soit :

$$\tilde{l}^1 - \tilde{c}^3 = (1-f)\Delta\tilde{l}_K^m : \tilde{a}_K^m \qquad \text{(II.133)}$$

Nous pouvons alors déduire :

$$\Delta\tilde{l}_K^m = \frac{1}{1-f}(\tilde{l}^1 - \tilde{c}^3) : \tilde{a}_K^{m-1} \qquad \text{(II.134)}$$

Introduisons l'égalité II.129, on obtient :

$$\tilde{a}_K^{m-1} = \left(\tilde{I} + f\,\tilde{T}_K^{mm} : \Delta\tilde{l}_K^{m}\right) = \left(\tilde{I} + \frac{f}{1-f}\tilde{T}_K^{mm} : (\tilde{l}^{\,1} - \tilde{c}^{\,3}) : \tilde{a}_K^{m-1}\right) \qquad \text{(II.135)}$$

ou :

$$\left(\tilde{I} - \frac{f}{1-f}\tilde{T}_K^{mm} : (\tilde{l}^{\,1} - \tilde{c}^{\,3})\right) : \tilde{a}_K^{m-1} = \tilde{I} \qquad \text{(II.136)}$$

d'où :

$$\tilde{a}_K^{m} = \left(\tilde{I} - \frac{f}{1-f}\tilde{T}_K^{mm} : (\tilde{l}^{\,1} - \tilde{c}^{\,3})\right) \qquad \text{(II.137)}$$

D'autre part, puisque :

$$f\,\tilde{a}_K^{3} + (1-f)\,\tilde{a}_K^{m} = \tilde{I} \qquad \text{(II.138)}$$

Alors de II.137 on peut déduire :

$$\tilde{a}_K^{3} = \tilde{I} + \tilde{T}_K^{mm} : (\tilde{l}^{\,1} - \tilde{c}^{\,3}) \qquad \text{(II.139)}$$

soit :

$$\tilde{a}_K^{3} = \tilde{I} - \tilde{E}_K + \tilde{T}_K^{mm} : \tilde{l}^{\,1} \qquad \text{(II.140)}$$

avec $\tilde{E}_K = \tilde{T}_K^{mm} : \tilde{c}^{\,3}$, le tenseur d'Eshelby pour le modèle de Kröner. De la relation : $\tilde{b}_K^{3} = \tilde{c}^{\,3} : \tilde{a}_K^{3} : \tilde{m}^{1}$ on déduit :

$$\tilde{b}_K^{3} = \tilde{c}^{\,3} : \tilde{m}^{1} + \tilde{c}^{\,3} : (\tilde{T}_K^{mm} - \tilde{E}_K : \tilde{m}^{1}) \qquad \text{(II.141)}$$

On constate que cette expression du tenseur de localisation $\tilde{b}_K^{3}$ diffère de celle obtenue par le modèle de Taylor-Lin par son second terme. Ce dernier représente *la correction* ou *l'accommodation* du tenseur de localisation des contraintes, due au modèle de Kröner. Le tenseur de polarisation s'obtient dès lors par la relation :

$$\tilde{P}_K = f\,(\tilde{I} - \tilde{b}_K^{3}) : (\tilde{m}^{1} - f\,\tilde{s}^{\,3} : \tilde{b}_K^{3})^{-1} \qquad \text{(II.142)}$$

2.3.4 *Expression du tenseur $\tilde{P}_{MT}$ par le modèle de Mori-Tanaka*

Dans la formulation de Mori-Tanaka le milieu de référence adopté pour la résolution de l'équation intégrale II. 114 a le même comportement que la matrice cristalline.

$$\tilde{l}_0 = \tilde{l}^{\,m} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^{0} = \dot{\varepsilon}^{m} \qquad \text{(II.143)}$$

soit :

$$\tilde{a}_0^{3} = \left(\tilde{I} + \tilde{T}_{MT}^{33} : \Delta\tilde{l}_{MT}^{3}\right)^{-1} \text{ et } \tilde{a}_0^{m} = \tilde{I} \qquad \text{(II.144)}$$

avec : $\Delta\tilde{l}^{3}_{MT} = \tilde{c}^{3} - \tilde{l}^{m}$. Les relations II.124 et II.125 permettent d'écrire :

$$\tilde{a}^{3}_{MT} = \left(\tilde{I} + (1-f)\tilde{T}^{33}_{MT} : \Delta\tilde{l}^{3}_{MT}\right)^{-1} \tag{II.145}$$

et :

$$\tilde{a}^{m}_{MT} = \left((1-f)\tilde{I} + f\,(\tilde{I} + \tilde{T}^{33}_{MT} : \Delta\tilde{l}^{3}_{MT})^{-1}\right)^{-1} \tag{II.146}$$

De II.132 on peut établir :

$$\tilde{l}^{I} - \tilde{l}^{m} = f\,\Delta l^{3}_{MT} : \tilde{a}^{3}_{MT} \tag{II.147}$$

soit :

$$\Delta l^{3}_{MT} = \frac{1}{f}(\tilde{l}^{I} - \tilde{l}^{m}) : \tilde{a}^{3-1}_{MT} \tag{II.148}$$

Or :

$$\tilde{a}^{3-1}_{MT} = \left(\tilde{I} + (1-f)\tilde{T}^{33}_{MT} : \Delta\tilde{l}^{3}_{MT}\right) = \tilde{I} + \frac{1-f}{f}\tilde{T}^{33}_{MT} : (\tilde{l}^{I} - \tilde{l}^{m}) : \tilde{a}^{3-1}_{MT} \tag{II.149}$$

Relation à partir de laquelle on peut calculer :

$$\tilde{a}^{3}_{MT} = \left(\tilde{I} - \frac{1-f}{f}\tilde{T}^{33}_{MT} : (\tilde{l}^{I} - \tilde{l}^{m})\right) \tag{II.150}$$

On peut alors déterminer l'expression du tenseur de localisation de contrainte défini par $\tilde{b}^{3}_{MT} = \tilde{c}^{3} : \tilde{a}^{3}_{MT} : \tilde{m}^{I}$

$$\tilde{b}^{3}_{MT} = \tilde{c}^{3} : \tilde{m}^{I} + \frac{1-f}{f}\tilde{c}^{3} : \tilde{T}^{33}_{MT} : \left(\tilde{l}^{m} : \tilde{m}^{I} - \tilde{I}\right) \tag{II.151}$$

ou encore :

$$\tilde{b}^{3}_{MT} = \tilde{c}^{3} : \tilde{m}^{I} + \frac{1-f}{f}\tilde{c}^{3} : \left(\tilde{E}_{MT} : \tilde{m}^{I} - \tilde{T}^{33}_{MT}\right) \tag{II.152}$$

Avec $\tilde{E}_{MT} = \tilde{T}^{33}_{MT} : \tilde{l}^{m}$, le tenseur d'Eshelby équivalent de la formulation de Mori-Tanaka.

L'inconvénient majeur de l'approche de Mori-Tanaka pour notre modélisation découle de ce que le tenseur de localisation fourni par II.151 dépend directement du module tangent élastoplastique de la matrice cristalline, contrairement aux autres formulations développées dans cette partie. Sa mise en œuvre requiert, en plus du module tangent du grain hétérogène et du module élastique de l'hétérogénéité, la prise en compte explicite du comportement de la matrice. Le modèle de Mori-Tanaka semble donc inadapté à notre nouvelle description du comportement du grain hétérogène, l'objectif essentiel étant une complète retranscription du modèle de plasticité cristalline au niveau du grain hétérogène.

Tout comme le modèle de Kröner précédent, on note la présence d'un terme de correction par rapport à l'approche de Taylor-lin. Le tenseur de polarisation découle de la relation :

$$\tilde{P}_{MT} = f(\tilde{I} - \tilde{b}^3_{MT}) : (\tilde{m}^1 - f\,\tilde{s}^3 : \tilde{b}^3_{MT})^{-1} \qquad \text{(II.153)}$$

2.3.5 *Expression du tenseur $\tilde{P}_{sc}$ par l'approximation autocohérente*

Pour la résolution de l'équation intégrale du problème du grain hétérogène, le milieu de référence choisi est le milieu effectif dont on cherche à estimer les propriétés. Ainsi sous ces hypothèses ($\tilde{l}^0 = \tilde{l}^1$ et $\dot{\varepsilon}^0 = \dot{\varepsilon}^1$) de la formulation autocohérente on obtient :

$$<\tilde{a}^{\varphi}> = \tilde{I} \qquad \text{(II.154)}$$

et :

$$\tilde{a}^{\varphi}_0 = \tilde{a}^{\varphi}_{sc} \qquad \text{(II.155)}$$

Par conséquent :

$$\tilde{a}^m_{sc} = \left(\tilde{I} + \tilde{T}^{mm}_{sc} : (\tilde{l}^m - \tilde{l}^1)\right)^{-1} \qquad \text{(II.156)}$$

$$\tilde{a}^3_{sc} = \left(\tilde{I} + \tilde{T}^{33}_{sc} : (\tilde{c}^3 - \tilde{l}^1)\right)^{-1} \qquad \text{(II.157)}$$

On peut alors déterminer directement l'expression du tenseur $\tilde{b}^3_{sc}$ défini par :

$$\tilde{b}^3_{sc} = \tilde{c}^3 : \tilde{a}^3_{sc} : \tilde{m}^1 \qquad \text{(II.158)}$$

soit :

$$\tilde{b}^3_{sc} = \tilde{c}^3 : \left(\tilde{I} + \tilde{T}^{33}_{sc} : (\tilde{c}^3 - \tilde{l}^1)\right)^{-1} : \tilde{m}^1 \qquad \text{(II.159)}$$

ou encore :

$$\tilde{b}^3_{sc} = \tilde{c}^3 : \left(\tilde{l}^1 + \tilde{l}^1 : \tilde{T}^{33}_{sc} : (\tilde{c}^3 - \tilde{l}^1)\right)^{-1} \qquad \text{(II.160)}$$

En développant cette expression on obtient :

$$\tilde{b}^3_{sc} = \left(\tilde{l}^1 : \tilde{s}^3 + \tilde{l}^1 : \tilde{T}^{33}_{sc} : \tilde{c}^3 : \tilde{s}^3 - \tilde{l}^1 : \tilde{T}^{33}_{sc} : \tilde{l}^1 : \tilde{s}^3\right)^{-1} \qquad \text{(II.161)}$$

En simplifiant :

$$\tilde{b}^3_{sc} = \left(\tilde{l}^1 : \tilde{s}^3 + \tilde{l}^1 : \tilde{T}^{33}_{sc} - \tilde{l}^1 : \tilde{E}_{sc} : \tilde{s}^3\right)^{-1} \qquad \text{(II.162)}$$

en posant $\tilde{E}_{sc} = \tilde{T}^{33}_{sc} : \tilde{l}^1$, le tenseur d'Eshelby équivalent de l'approche aurocohérente. Finalement :

$$\tilde{b}^3_{sc} = \left(\tilde{l}^1 : (\tilde{I} - \tilde{E}_{sc}) : \tilde{s}^3 + \tilde{l}^1 : \tilde{T}^{33}_{sc}\right)^{-1} \qquad \text{(II.163)}$$

Le tenseur $\tilde{P}_{sc}$ s'obtient dès lors à partir de la relation :

$$\tilde{P}_{sc} = f\,(\tilde{I} - \tilde{b}^{3}_{sc}):(\tilde{m}^{1} - f\,\tilde{s}^{3}:\tilde{b}^{3}_{sc})^{-1} \qquad \text{(II.164)}$$

Dans la formulation autocohérente, le choix du milieu de référence permet une bonne estimation des propriétés effectives. Malgré son caractère implicite, pour l'étude que nous menons, elle semble plus précise par rapport aux autres, pour que nous l'adoptions pour les applications. Une procédure itérative permet de converger vers une limite satisfaisant à la condition d'autocohérence.

3 Conclusion

Dans cette seconde partie de notre étude, nous avons proposé une nouvelle description du comportement élastoplastique d'un grain hétérogène. Un accent particulier a notamment été mis sur la modélisation de l'écrouissage intra-granulaire. Cette nouvelle formulation permet de rendre compte de l'écrouissage mixte anisotrope et cinématique généralement constaté pour de tels matériaux présentant des hétérogénéités. Bien plus que la tentative de description proposé par Schmitt et *al.*[23], nous avons établi de façon précise et cohérente le caractère cinématique de l'écrouissage du grain hétérogène. Il a été proposé un critère d'écoulement inspiré de la démarche classique basée sur le concept de surface de charge et sur la condition de consistance de l'écoulement plastique.

Deux classes de variables internes apparaissent dans ce critère. D'une part, les glissements cristallographiques Γ^{g} et d'autre part les contraintes internes du troisième ordre σ^{3}. L'influence des hétérogénéités sur le comportement du grain est prise en compte à travers la modification de la matrice d'écrouissage faisant apparaître un terme additionnel $R^{g}:\tilde{P}:R^{h}$ ainsi qu'une évolution disymétrique de la cission critique des systèmes de glissement (effet Bauschinger au niveau du système).

La prise en compte de ces modifications supposent la détermination du tenseur de polarisation de contraintes $\tilde{P}$. Plusieurs solutions approchées ont été analysées et la formulation autocohérente adaptée au grain hétérogène a été choisie pour les simulations numériques.

De façon générale, le comportement global du grain est une transposition à l'échelle de ce dernier du formalisme de la plasticité cristalline développée pour l'étude du monocristal. Le monocristal contenant des hétérogénéités a été *remplacé* par le grain équivalent pour lequel nous avons construit une fonction d'écoulement plastique, une règle d'écrouissage ainsi qu'une loi constitutive de son comportement tangent.

La description du comportement effectif du grain est ainsi établie. Le chapitre suivant sera donc logiquement consacré à la seconde transition permettant de déduire le comportement macroscopique du polycristal. La formulation autocohérente adaptée à la plasticité des métaux sera à cet effet mise en œuvre pour assurer la transition d'échelle.

4 Bibliographie

[1] Ahaouri K., *Contribution à la modélisation de la thermo-élasticité et de l'acousto-élasticité des matériaux microhétérogènes,* Thèse, 1990.

[2] Berveiller M.and Zaoui A., *An extension to the self consistent scheme to plastically flowing polycrystals*, J. Mech. Phys. Sol., **26**, pp 325-339, 1979.

[3] Berveiller M.and Zaoui A., *Modelling of the plastic behavior of inhomogeneous media*, J. Eng. mater. Tec., **106**, p 295, 1984.

[4] Corvasce F. Lipinski P., Berveiller M., *Thermo-mechanical behavior of metal matrix composites,* 3rd Int. Symp. on Non-destructive Char Mater., 3-6 October, Saarbrücken, Germany, 1988.

[5] Dederichs P. H., Zeller R., Z. Phys., 259, pp 103-113, 1973.

[6] Eshelby J. D., Proc. R. Soc. London, **A 241,** p 376, 1957.

[7] Franciosi P., Berveiller M., Zaoui A.; *Latent hardening in copper and aluminium single crystals*, Acta. Metall., **28**, pp 273-283, 1980.

[8] Franciosi P., Proc. 8th Risφ Symposium Denmark, pp 83-89, 1984.

[9] Hill R., J. Mech. Phys. Solids., **13**, pp 89-101, 1965.

[10] Hill R., J. Mech. Phys. Solids., **13**, pp 213-222, 1965.

[11] Hill R., J. Mech. Phys. Solids, **14**, pp 95-102, 1966.

[12] Hill R.and Rice J.R., *Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain*, J. Mech. Phys. Solids, **20**, pp 401-413, 1972.

[13] Kröner E., *Kontinuums theorie der versetzung und eigenspannung*, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

[14] Kröner E., Acta Metall., **9**, pp 155-165, 1961.

[15] Kröner E., J. Mech. Phys. Solids., **25**, pp 137-155, 1977.

[16] Lin T. H., J. Mech. Phys. Solids., **5**, pp 143-158, 1957.

[17] Lipinski P., Thèse d'habilitation, Université de Metz, 1993.

[18] Lipinski, P., Berveiller M., Corvasce F., *Statical approach to elastoplastic behavior of polyrcystatls at finite deformation*, Arch. Mechanics, **40**, pp 725-740, 1998.

[19] Mandel J., Cours CISM 97, Udine, Springer, New York, 1971.

[20] Petryk H., Proc. IUTAM Symp. Micro- and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity, Bochum, 1997.

[21] Qui Y. and Weng G. H., *Elastic constants of a polycrystal with transversally isotropic grains, and the influence of precipitates*; Mech. Of Mater., **12**, 1, 1990.

[22] Sachs G., Zeit. Der V.D.I., **72**, pp 739-747, 1928.

[23] Schmitt C., Lipinski P. and Berveiller M., *Micromechanical modelling of the elastoplastic behavior of polycrystals containing precipitates – Application to hypo – and hyper-eutectoid steels*, Int. J. Plast., **Vol 13**, No. 3, pp 183-199, 1997.

[24] Tandon G. P. and Weng G. J., *A Theory of particle reinforced plasticity,* J. Appl. Mech., 55, 126, 1988.

[25] Taylor G. I., J. Inst. Metals., **62**, pp 307-315, 1938.

[26] Zattarin P., Thèse, Université de Metz, 2000.

Chapitre III

Description du comportement macroscopique du polycristal

1. Comportement macroscopique du polycristal
   1.1 . Homogénéisation
      1.1.1 Equation intégrale cinématique
      1.1.2 Approximation autocohérente

2. Calcul des tenseurs d'interaction

3. Calcul des modules tangents effectifs
   3.1 . Modules élastiques effectifs
   3.2 . Modules tangents instantanés

4. Sélection des systèmes actifs

5. Loi de comportement macroscopique

6. Evolution de la structure interne
   6.1 Texture cristallographique
   6.2 Evolution de la contrainte interne d'ordre trois dans l'hétérogénéité

7. Conclusion

8. Bibliographie

Chapitre III

Comportement macroscopique du polycristal.

Les approches micromécaniques permettant la détermination des propriétés de matériaux hétérogènes à partir des propriétés des constituants, du rôle des interfaces et de la microstructure de l'agrégat, débouchent sur une meilleure description des lois de comportement des matériaux. Ce sont également de précieux outils pour l'élaboration de matériaux nouveaux, dans la mesure où l'effet de la microstructure et du comportement local est traduit en termes de comportement global au travers de modèles de transitions d'échelles.
Pour l'analyse des propriétés linéaires, de nombreux modèles ont été proposés par Voigt [35], Reuss [28], Hill [15]. Plus généralement, la solution complète et définitive du problème des milieux microhétérogènes à comportement linéaire peut être obtenue grâce à des théories statistiques systématiques(Kröner [22], Willis [36], Dederichs and Zeller[9]).
L'étude de la plasticité de métaux polycristallins a été pendant longtemps, limitée à des applications des modèles simples de Taylor [32], Sachs [30], statiques de Zaoui [37] ou aux améliorations proposés par Lin[25], Honneff et Mecking [17], Kocks et Canova [21].
Une alternative a été proposée dans le cadre de petites déformations élastoplastiques par Kröner [22] au travers de modèles autocohérents qui, par la suite, ont été développés par Hill [15], Budiansky and Wu [6], Hutchinson [18-19], Berveiller et Zaoui [4].
Cette approche est basée sur le calcul d'Eshelby [10] concernant les interactions entre constituants de forme ellipsoïdale et déformés plastiquement dans une matrice infinie.
La formation des textures cristallographiques aux grandes déformations a été initialement abordée par application du modèle de Kröner-Hill par Hihi et *al.*[14]. Pour de grandes déformations plastiques, c'est tout l'état microstructural et mécanique qui est profondément modifié. La détermination du comportement tangent actuel nécessite l'établissement de l'évolution avec la déformation de quatre familles de paramètres physiques ou d'état :

- A l'échelle intracristalline, la multiplication des dislocations et l'évolution de leur répartition spatiale (création de cellules, parois, etc.) sont responsables de l'écrouissage intracristallin. Ce phénomène est décrit par l'intermédiaire d'une matrice d'écrouissage [12,13] reliant la vitesse de la cission critique aux taux de glissement plastique sur les systèmes actifs. L'étude de la structure de cette matrice sera présentée lors de la description du comportement du monocristal.
- A l'échelle intercristalline (échelle des grains), la désorientation relative des réseaux cristallins constitue une source de contraintes internes par l'intermédiaire des incompatibilités du champ de déformation plastique, voire élastique pour les matériaux anisotropes. Ces contraintes internes jouent un rôle essentiel et fondamental dans la plasticité des métaux. Au cours de l'écoulement plastique, les contraintes internes se développent du fait des incompatibilités, se relaxent, (au moins partiellement) grâce à l'accommodation plastique et contribuent ainsi au comportement élastoplastique macroscopique, qui se manifeste par un écrouissage anisotrope du matériau.
- A cette même échelle, le mécanisme de glissement plastique induit une rotation plastique qui entraîne une rotation des réseaux cristallins, en relation avec les équations de compatibilités de Kröner. Ces rotations sont à l'origine de la formation des textures cristallographiques de déformation, responsables de l'anisotropie du comportement élastoplastique du polycristal. Une analyse des effets associés aux incompatibilités intergranulaires a été effectuée par Berveiller [3].
- La déformation plastique engendre un changement de forme et d'orientation des grains. L'influence de cette texture morphologique sur la texture cristallographique a été démontrée par Van Houtte [34], Honeff and Mecking et par Tiem et *al.* [33] sur les contraintes internes. La distribution spatiale, ou texture topologique, joue également un rôle important sur l'anisotropie et le niveau de contraintes internes.

Ces divers phénomènes se combinent lors de la déformation plastique. L'approche autocohérente permet de suivre l'évolution des différents paramètres.

Dans cette étude, nous proposons une approche autocohérente basée sur le principe de l'homogénéisation, consistant à déterminer le comportement mécanique équivalent d'un élément de volume de métal à partir des lois de comportement de ses constituants par

l'intermédiaire d'une transition d'échelle. Nous procédons à une double transition d'échelle pour déterminer le comportement macroscopique du polycristal contenant des hétérogénéités intra-granulaires. Après la description du comportement élastoplastique du monocristal et la modélisation de l'écrouissage intra-granulaire induit par les hétérogénéités, présentées au chapitre précédent, le présent chapitre aura pour objet la description du comportement macroscopique du matériau polycristallin déduit de l'échelle inférieure du grain hétérogène par une formulation autocohérente. Nous exposerons également les autres outils de la procédure d'homogénéisation tels que le calcul des tenseurs d'interaction, des modules tangents instantanés, la démarche de sélection des systèmes actif.

1. Modélisation du comportement macroscopique du polycristal

Les sections précédentes ont permis de décrire successivement le comportement du monocristal seul ainsi que celui du grain équivalent, constitué dans cette étude d'une matrice cristalline comportant une certaine fraction volumique de précipités. Il s'agit par la suite de déterminer la loi de comportement macroscopique du polycristal. L'identification d'une telle loi de comportement se fera à l'issue d'une transition d'échelle suivie d'une homogénéisation. Les opérations de localisation puis d'homogénéisation décrites dans cette partie permettent au travers de transitions d'échelles de déterminer successivement, à l'échelle mésoscopique le comportement global du grain défini par le monocristal et le précipité, puis le comportement global macroscopique du polycristal.

1.1 Equation intégrale cinématique

Par une transition d'échelle on relie les grandeurs locales à celles de l'échelle supérieure en introduisant des tenseurs de localisation. Les opérations conduisant à la détermination des tenseurs de localisation sont basées essentiellement sur la résolution d'une équation intégrale cinématique à partir des propriétés des fonctions d'interactions de Green. La mise en œuvre de la transition d'échelle passe par la recherche de solution d'une équation intégrale.

Résoudre le problème de localisation d'un matériau hétérogène revient à construire une solution vérifiant à la fois les équations d'équilibre, de compatibilité, de comportement et les conditions aux limites du problème. L'équation intégrale d'un problème élastique fut établie

par Dederichs and Zeller [9]. En élastoplasticité, sa formulation a été mise en œuvre en petites déformations notamment par Berveiller et Zaoui [4], et par Lipinski [26] en grandes transformations. Le comportement local d'un matériau élastoplastique est défini par :

$$\dot{\sigma}(r)=\tilde{l}(r):\dot{\varepsilon}(r) \tag{III.1}$$

où le tenseur d'ordre quatre $\tilde{l}(r)$ représente le module tangent élastoplastique au point r. Si un champ de contraintes vérifie les conditions d'équilibre quasi-statique alors :

$$\dot{\sigma}_{ij,j}=0 \tag{III.2}$$

L'introduction de la loi de comportement III.1 dans cette dernière relation conduit à :

$$(l_{ijkl}(r)\dot{\varepsilon}_{kl}(r))_{,j}=0 \tag{III.3}$$

On rappelle que la relation de compatibilité du champ de déformation s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(r)=\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}(r)+\dot{u}_{j,i}(r)) \tag{III.4}$$

En tenant compte des symétries du tenseur $\tilde{l}(r)$, on peut réécrire de la relation III.3 sous la forme :

$$(l_{ijkl}(r)\dot{u}_{k,l}(r))_{,j}=0 \tag{III.5}$$

En supposant le matériau macro-homogène, on peut introduire un milieu fictif homogène, de module tangent élastoplastique L^0_{ijkl} tels que :

$$l_{ijkl}(r)=L^0_{ijkl}+\delta l_{ijkl}(r) \tag{III.6}$$

La relation III.5 devient alors :

$$L^0_{ijkl}\dot{u}_{k,lj}(r)+(\delta l_{ijkl}(r)\dot{u}_{k,l}(r))_{,j}=0 \tag{III.7}$$

ou encore, en introduisant le champ de forces fictif $f_i=(\delta l_{ijkl}(r)\dot{u}_{k,l}(r))_{,j}$:

$$L^0_{ijkl}\dot{u}_{k,lj}(r)+f_i=0 \tag{III.8}$$

Pour résoudre cette équation de Navier, on a recours à la fonction de Green du problème adjoint. On cherche le champ de déplacement en un point r induit par une force f_i appliquée en un autre point r'. On montre que la vitesse de déplacement en un point r du volume V, pour ce problème est donnée par :

$$\dot{u}_m(r)=\int_V \delta_{jm}\,\delta(r-r')\dot{u}_j(r')\,dV \tag{III.9}$$

où δ_{jm} désigne le symbole de Kronecker et $\delta(r-r')$ la distribution de Dirac. On peut maintenant introduire le tenseur de Green G défini par :

$$L^0_{ijkl}\, G_{km,li}(r-r') + \delta_{jm}\,\delta(r-r') = 0 \qquad \text{(III.10)}$$

et :

$$\lim_{(r-r')\to\infty} G_{jm}(r-r') = 0 \qquad \text{(III.11)}$$

Le tenseur de Green G_{km} désigne le déplacement crée au point r dans la direction k par une force unité $\delta_{jm}\,\delta(r-r')$ s'exerçant dans la direction m et appliquée au point r' du milieu infini de référence. En tenant compte de la définition du tenseur de Green, la vitesse du déplacement devient :

$$\dot{u}_m(r) = -\int_V L^0_{ijkl}\, G_{km,li}(r-r')\,\dot{u}_j(r')\,dV \qquad \text{(III.12)}$$

Rappelons quelques propriétés du tenseur de Green :

$$G_{km,li}(r-r')\,\dot{u}_j(r') = (G_{km,l}(r-r')\,\dot{u}_j(r'))_{,i} - G_{km,l}(r-r')\,\dot{u}_{j,i}(r') \qquad \text{(III.13)}$$

$$G_{km,l}(r-r')\,\dot{u}_{j,i}(r') = (G_{km}(r-r')\,\dot{u}_{j,i}(r'))_{,l} - G_{km}(r-r')\,\dot{u}_{j,il}(r') \qquad \text{(III.14)}$$

Associées au théorème de la divergence, les relations précédentes permettent de réécrire III.12

$$\begin{aligned}\dot{u}_m(r) = &-\int_S L^0_{ijkl}\, G_{km,l}(r-r')\,\dot{u}_j(r')\,n_i\,dS \\ &+\int_S L^0_{ijkl}\, G_{km}(r-r')\,\dot{u}_{j,i}(r')\,n_l\,dS - \int_V L^0_{ijkl}\, G_{km}(r-r')\,\dot{u}_{j,il}(r')\,n_i\,dV\end{aligned} \qquad \text{(II.15)}$$

La première intégrale représente le champ de vitesse de déplacement dans un solide homogène ayant la même géométrie et soumis aux mêmes conditions aux limites que le solide considéré. Ce champ sera noté $\dot{u}^0_m(r)$. Si on suppose que les conditions aux limites sont uniquement du type déplacement imposé à la surface alors la seconde intégrale est nulle. En effet dans ce cas, le vecteur vitesse de déplacement imposé $\dot{u}$ est nul sur la surface S. La relation III.15 se simplifie sous la forme :

$$\dot{u}_m(r) = \dot{u}^0_m(r) - \int_V L^0_{ijkl}\, G_{km}(r-r')\,\dot{u}_{j,il}(r')\,n_i\,dV \qquad \text{(III.16)}$$

D'autre part la relation III.7 peut se réécrire:

$$L^0_{ijkl}\,\dot{u}_{k,lj}(r) + (\delta l_{ijkl}(r)\,\dot{\varepsilon}_{k,l}(r))_{,j} = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

On peut également établir l'égalité :

$$\begin{aligned}(\delta l_{ijkl}(r')\,\dot{\varepsilon}_{k,l}(r'))_{,j}\, G_{im}(r-r') = &(\delta l_{ijkl}(r')\,\dot{\varepsilon}_{k,l}(r')\,G_{im}(r-r'))_{,j} \\ &-\delta l_{ijkl}(r')\,\dot{\varepsilon}_{k,l}(r')\,G_{im,j}(r-r')\end{aligned} \qquad \text{(III.18)}$$

Les deux égalités précédentes et le théorème de la divergence permettent de réécrire la solution III.16 :

$$\dot{u}_m(r)=\dot{u}^0_m(r) \; -\int_V G_{im,j}(r-r')\delta l_{ijkl}(r')\dot{\varepsilon}_{kl}(r')n_i\,dV \qquad \text{(III.19)}$$

Le gradient de vitesse de déplacement devient alors :

$$\dot{u}_{m,n}(r)=\dot{u}^0_{m,n}(r) \; -\int_V G_{im,jn}(r-r')\delta l_{ijkl}(r')\dot{\varepsilon}_{kl}(r')n_i\,dV \qquad \text{(III.20)}$$

Pour une simplification ultérieure il est utile d'introduire les tenseurs de Green modifiés définis comme suit :

Partie symétrique : $\Gamma^s_{mij}(r-r')=-\frac{1}{2}(G_{im,jn}(r-r')+G_{in,jm}(r-r'))$ (III.21)

Partie antisymétrique : $\Gamma^{as}_{mij}(r-r')=-\frac{1}{2}(G_{im,jn}(r-r')-G_{in,jm}(r-r'))$ (III.22)

On déduit alors les expressions des taux de déformation et de rotation à partir de III.19 :

$$\dot{\varepsilon}_{mn}(r)=\dot{\varepsilon}^0_{mn}(r) \; +\int_V \Gamma^s_{mnij}(r-r')\delta l_{ijkl}(r')\dot{\varepsilon}_{kl}(r')n_i\,dV \qquad \text{(III.23)}$$

et :

$$\dot{\omega}_{mn}(r)=\dot{\omega}^0_{mn}(r) \; +\int_V \Gamma^{as}_{mnij}(r-r')\delta l_{ijkl}(r')\dot{\varepsilon}_{kl}(r')n_i\,dV \qquad \text{(III.24)}$$

La résolution du problème de la détermination des propriétés effectives de milieux hétérogènes se ramène donc à la recherche d'une solution des équations intégrales III.23 et III.24, solution de laquelle pourront être déduits les tenseurs de localisation. Nous proposerons, dans la section suivante, les expressions de ces tenseurs dans le cas de la formulation autocohérente.

En élasticité linéaire, Kröner [22] a proposé pour la première fois une solution par une méthode autocohérente et a de plus, montré que la solution obtenue par cette méthode était exacte dans le cas où les propriétés locales sont reparties aléatoirement de manière uniforme.

Par rapport aux autres tentatives de résolution de l'équation intégrale, l'approche autocohérente constitue un compromis raisonnable entre les méthodes statistiques systématiques et les approximations de champs uniformes de Taylor-Lin-Voigt ou l'approche statique de Zaoui [37]. Les hétérogénéités de déformation, y compris granulaires sont négligées dans l'approche de Taylor-Lin-Voigt. Une première adaptation de la méthode autocohérente à la plasticité par Hihi et *al.* [14] a révélé une bonne correspondance des résultats avec les observations expérimentales.

Par la suite, l'avantage de cette approche pour des chargements radiaux et non monotones, à travers des simulations en petites déformations élastoplastiques a été établi par Beradaï et *al.*[2]. Cette approche peut donc se prêter à la description du comportement élastoplastique d'un polycristal considéré comme un agrégat constitué de grains d'orientations et éventuellement de structures cristallographiques différentes.

1.2 Approximation autocohérente

Hypothèses

L'approche autocohérente développée par Kröner en élasticité s'inspire, tout comme la démarche de Hill en plasticité des petites déformations, de la solution du problème d'inclusion proposée par Eshelby. Sa formulation en grandes transformations élastoplastiques avec prise en compte des rotations des grains et de l'écrouissage intragranulaire a été proposée par Lipinski [26]. L'application de la méthode autocohérente pour l'étude du comportement élastoplastique des polycristaux nécessite l'adoption de deux hypothèses :

1. Le matériau est granulaire et les grains ont une forme ellipsoïdale,
2. Le module tangent du matériau et le gradient de vitesse varient faiblement à l'intérieur du constituant, de sorte que le comportement réel de ce dernier peut être raisonnablement décrit par leurs valeurs moyennes.

On suppose donc que le comportement est uniforme dans chaque grain. Cette seconde hypothèse paraît discutable car elle ne tient pas compte d'éventuelles hétérogénéités plastiques intragranulaires, comme c'est le cas du monocristal comportant des précipités qui fait l'objet de notre étude. La solution proposée dans ce cas consiste à recourir à une double transition d'échelle.

On introduit alors la notion d'hétérogénéité par morceaux grâce à une fonction indicatrice de l'inclusion I, représentant à l'échelle mésoscopique le précipité dans le monocristal, ou un grain dans le polycristal à l'échelle macroscopique.

$$\theta^I(r)=\begin{cases}0 \;\; si \;\; r\notin V_I \\ 1 \;\; si \;\; r\in V_I\end{cases} \qquad \text{(III.25)}$$

où V_I représente le volume de l'inclusion I. On a donc :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(r)=\sum_{I=1}^{N}\dot{\varepsilon}_{ij}^{I}\,\theta^I(r) \qquad \text{(III.26)}$$

$$\delta l_{ijkl}(r)=\sum_{I=1}^{N}(l_{ijkl}^{I}-L_{ijkl}^{0})\theta^{I}(r)=\sum_{I=1}^{N}\Delta l_{ijkl}^{I}\,\theta^{I}(r) \qquad \text{(III.27)}$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}^{I}$ et l_{ijkl}^{I} sont les caractéristiques supposées uniformes dans l'inclusion I. En introduisant les relations III.26 et III.27 dans l'équation intégrale III.23 on peut écrire :

$$\dot{\varepsilon}_{mn}(r)=\dot{\varepsilon}_{mn}^{0}(r)+\int_{V}\Gamma_{mnij}^{s}(r-r')\Big(\sum_{I=1}^{N}\Delta l_{ijkl}^{I}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{I}(r')\theta^{I}(r')\Big)dV \qquad \text{(III.28)}$$

On peut dès lors effectuer la moyenne de cette équation sur le volume V_I et déterminer l'expression de la vitesse de déformation dans l'inclusion I.

$$\dot{\varepsilon}_{mn}^{I}=\dot{\varepsilon}_{mn}^{0}+\frac{1}{V_I}\int_{V_I}\Bigg(\sum_{J=1}^{N}\Big(\int_{V_J}\Gamma_{mnij}^{s}(r-r')\sum_{I=1}^{N}\Delta l_{ijkl}^{J}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{J}\,\theta^{J}(r')\Big)dV_J\Bigg)dV_I \qquad \text{(III.29)}$$

Cette relation permet d'introduire les tenseurs d'interaction définis par :

$$T_{mnij}^{IJ}=\frac{1}{V_I}\int_{V_I}\int_{V_J}\Gamma_{mnij}^{s}(r-r')\,dV_J\,dV_I \qquad \text{(III.30)}$$

La définition de ces tenseurs permet de réécrire simplement l'égalité III.29 :

$$\dot{\varepsilon}_{mn}^{I}=\dot{\varepsilon}_{mn}^{0}+\sum_{J=1}^{N}T_{mnij}^{IJ}\,\Delta l_{ijkl}^{J}\,\dot{\varepsilon}_{mn}^{J} \qquad \text{(III.31)}$$

Les tenseurs $\tilde{T}^{IJ}$ représentent les interactions entre les inclusions I et J et le milieu homogène de référence. Les expressions de ces tenseurs sont basées sur une approche suggérée par Fassi-Fehri et *al.* [11].

Dans le contexte de l'application de cette démarche à un polycristal, la relation III.31 constitue un système linéaire d'équations dont le nombre équivaut à celui des grains dans le polycristal. Dans le cas particulier où $I=J$, le tenseur $\tilde{T}^{II}$ décrit les interactions entre l'inclusion I et le milieu environnant. En tenant compte de la remarque précédente, on peut réécrire III.31 sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{mn}^{I}=\dot{\varepsilon}_{mn}^{0}+T_{mnij}^{II}\Delta l_{ijkl}^{I}\,\dot{\varepsilon}_{mn}^{I}+\sum_{J=1\,(J\neq I)}^{N}T_{mnij}^{IJ}\,\Delta l_{ijkl}^{J}\,\dot{\varepsilon}_{mn}^{J} \qquad \text{(III.32)}$$

L'approche autocohérente consiste à choisir le milieu effectif comme milieu de référence.

$$L_{ijkm}^{0}=L_{ijkl}^{eff} \qquad \text{(III.33)}$$

hypothèse qui conduit alors à la relation :

$$\dot{\varepsilon}_{mn}^{0}=\dot{E}_{mn} \qquad \text{(III.34)}$$

Dans ces conditions, l'expression III.32 devient :

$$\dot{\varepsilon}_{mn}^{I}-T_{mnij}^{II}\,\Delta l_{ijkl}^{I}\,\dot{\varepsilon}_{mn}^{I}=\dot{E}_{mn}+\sum_{J=1\,(J\neq I)}^{N}T_{mnij}^{IJ}\,\Delta l_{ijkl}^{J}\,\dot{E}_{kl} \qquad \text{(III.35)}$$

En réorganisant cette expression sous la forme de l'équation III.31, on peut alors identifier le tenseur de localisation des déformations dans l'inclusion I défini par :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{I} = A_{ijkl}^{I}\,\dot{E}_{kl} \tag{III.36}$$

soit :

$$A_{mnkl}^{I} = (I_{mnop} - T_{mnij}^{II}\,\Delta l_{ijop}^{I})^{-1}\,(I_{opkl} + \sum_{J=1(J\neq I)}^{N} T_{opij}^{IJ}\,\Delta l_{ijrs}^{J}\,A_{rskl}^{J}) \tag{III.37}$$

La détermination du tenseur de localisation permet de déduire l'expression des modules tangents effectifs du milieu hétérogène. En effet, ces derniers représentent les moyennes volumiques des modules tangents locaux de chaque phase :

$$L_{ijkl}^{eff} = \overline{l_{ijmn}(r)\;A_{mnkl}(r)} \tag{III.38}$$

Relation qu'on peut réécrire :

$$L_{ijkl}^{eff} = \frac{1}{V}\int_{V}(\sum_{I=1}^{N} l_{ijmn}^{I}\,A_{mnkl}^{I}\,\theta^{I}(r))\,dV \tag{III.39}$$

On introduit la fraction volumique f^{I} de l'inclusion, définie par :

$$f^{I} = \frac{V_{I}}{V} \tag{III.40}$$

L'équation III.38 devient alors :

$$L_{ijkl}^{eff} = \sum_{I=1}^{N} f^{I}\,l_{ijmn}^{I}\,A_{mnkl}^{I} \tag{III.41}$$

La détermination du tenseur des modules tangents effectifs découle donc de la résolution de l'équation doublement implicite III.41. En effet, le tenseur de localisation $\tilde{A}^{I}$ dépend des tenseurs de localisation des autres constituants, ainsi que des tenseurs d'interaction $\tilde{T}^{II}$ et, $\tilde{T}^{IJ}$ qui eux–mêmes nécessitent la connaissance des modules $\tilde{L}^{eff}$. La résolution d'un tel problème peut s'effectuer de manière itérative. Dans le cas du polycristal, les tenseurs de localisation $\tilde{A}^{I}$ prennent en considération, par l'intermédiaire des tenseurs $\tilde{T}^{IJ}$, les interactions entre les grains. Par une démarche analogue, le taux de contrainte $\dot{\sigma}^{I}$ dans une inclusion I peut être relié au taux de contrainte macroscopique par le biais d'un tenseur de localisation en contrainte.

$$\dot{\sigma}_{ij}^{I} = B_{ijkl}^{I}\,\dot{\Sigma}_{kl} \tag{III.42}$$

Cette approche multisite permet de rendre compte de l'effet de la répartition spatiale des hétérogénéités sur les propriétés mécaniques du milieu. Cependant, dans la plasticité des métaux, à cause de l'écrantage des actions intergranulaires à distance par les joints de grains,

on adopte une approche monosite, en négligeant les interactions entre les grains. Ceci conduit à une expression simplifiée du tenseur de localisation :

$$A^{I}_{mnkl} = (I_{mnkl} - T^{II}_{mnij}\,\Delta l^{I}_{ijkl})^{-1} \qquad \text{(III.43)}$$

Les expressions des tenseurs $\tilde{L}^{eff}$ et $\tilde{A}^{I}$ étant connues pour un état microstructural donné du polycristal, l'étape suivante consistera en l'étude de l'évolution de la structure interne du matériau.

2. Calcul des tenseurs d'interaction.

Les équations de la formulation autocohérente présentent un caractère implicite. La construction de la solution par cette approche suppose donc la mise en œuvre d'une procédure itérative. Une telle procédure itérative, même si elle permet de traiter des polycristaux comportant un très grand nombre de grains conduit à un temps de calcul très élevé pour le cas d'un problème de plasticité, par exemple. Cette consommation exagérée de temps est essentiellement liée aux calculs répétitifs des tenseurs d'interaction. L'optimisation des calculs de ces tenseurs se révèle donc indispensable pour une bonne modélisation. Cette optimisation du temps de calculs ne devra certainement pas se faire au détriment de leur précision. En effet, la précision de la modélisation du comportement du matériau étudié dépend nettement de la bonne évaluation des tenseurs d'interaction. A part le cas particulier d'inclusions sphériques dans un milieu isotrope où l'on peut déterminer les expressions analytiques de ces tenseurs, leur calcul se fait généralement par des méthodes d'intégration numérique.

Kneer [20], puis Mura [37] ont proposé une méthode de calcul des tenseurs d'interaction $\tilde{T}^{II}$ en exploitant les techniques de transformée de Fourier du tenseur de Green. La démarche a été généralisée par Fassi-Fehri [11] pour la détermination des tenseurs $\tilde{T}^{II}$ dans le cas d'une paire d'inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope.

Les expressions analytiques des tenseurs d'interactions ne sont connues que dans le cas du milieu isotrope ; pour des inclusions présentant une géométrie particulière, telle que des sphères, des fibres longues ou des penny-shape.

Dans la majorité des autres cas, leur évaluation se fait par approximation numérique. Il s'agit notamment du calcul numérique d'une intégrale double (Lipinski [26]). Pour évaluer cette

intégrale, Lipinski [26] a proposé un algorithme fondé sur la méthode de quadrature de Gauss. Le souci d'optimisation de ce calcul, a incité Carmasol et Lipinski [7] puis Zattarin [39] à recourir à un nouvel algorithme basé sur un développement en polynômes trigonométriques des fonctions à intégrer. A précision identique, cette nouvelle méthode conduit à une réduction notable du temps de calcul par rapport la méthode classique de Gauss. C'est naturellement cette méthode que nous avons adoptée pour nos applications.

3. Calcul des modules tangents effectifs

La difficulté principale dans la mise en œuvre de la méthode autocohérente est représentée par le caractère implicite des équations à résoudre. Dans l'approximation de la solution par une procédure itérative, à une étape donnée, on choisit comme milieu de référence, celui dont le comportement a été calculé à l'étape précédente. Cette approximation trouve une justification dans les résultats satisfaisants obtenus par Hihi et *al.*, [14] et par Beradaï et *al.*[2]

3.1 Modules élastiques effectifs

Le comportement élastique effectif d'un volume élémentaire représentatif (grain, ou polycristal selon l'échelle) sera déduit du comportement local élastique des constituants, ainsi que de leurs textures cristallographiques, morphologiques et topologiques. Cette détermination se fait suivant une procédure incrémentale.

Pour une modélisation monosite, les constantes élastiques initiales sont approchées par la solution du modèle élémentaire de Voigt :

$$\tilde{C}_0 = \tilde{C}^V = \sum_{ph} f^{ph} \tilde{c}^{ph} \qquad \text{(III.44)}$$

$\tilde{C}^{ph}$, f^{ph} représentent respectivement le tenseur de constantes élastiques et la fraction volumique de chaque phase ou constituant. L'approximation de la solution $\tilde{C}^{eff}$ est obtenue selon la procédure suivante :

- ✓ A une itération i donnée, les constantes élastiques calculées à l'étape $i-1$, sont considérées comme celles du milieu de référence et sont utilisées pour déterminer les tenseurs d'interactions $\tilde{T}_i^{II}$.

- ✓ Calcul de la déviation des propriétés $\Delta\tilde{C}_i^{ph}$ par rapport au milieu de référence calculé à l'étape $i-1$.
- ✓ Calcul du tenseur de localisation $\tilde{a}_i^{ph}$.
- ✓ Approximation des modules élastiques effectifs $\tilde{C}_i$.
- ✓ Vérification de la convergence de la solution. On compare les normes du tenseur de constantes élastiques déterminé à deux itérations successives. On suppose que la convergence est acquise lorsque :

$$\frac{\left\|\tilde{C}_i\right\|-\left\|\tilde{C}_{i-1}\right\|}{\left\|\tilde{C}_{i-1}\right\|}\leq\varepsilon \qquad \text{(III.45)}$$

ε représente la tolérance adoptée. Cette méthode converge assez rapidement, une précision de $\varepsilon=10^{-4}$ est atteinte en *3* ou *4* itérations selon le degré d'hétérogénéité du matériau étudié. Elle a été comparée à d'autres méthodes, notamment celles proposées par Begis et *al.* [1] Sangani et Lu [31], Brockenbrough et *al.* [5] et Rodin [29]. Cette analyse des résultats (Zattarin et *al* [38]) montre que la méthode autocohérente conduit à des résultats similaires aux autres approches. De plus, cette méthode est applicable quelle que soit la complexité du problème. On sait déterminer les tenseurs d'interaction d'inclusions de textures cristallographiques, morphologiques ou topologiques quelconques, baignées dans un milieu anisotrope.

3.2 Modules tangents instantanés

La procédure de calcul des modules élastiques est théoriquement généralisable au calcul des modules tangents élastoplastiques. Cependant, la formulation en taux des variables mécaniques suggère le recours à une approche incrémentale. D'autre part, on peut s'affranchir du processus itératif de la méthode précédente pour des incréments de chargement assez petits. Au début de la procédure de calcul, le tenseur des modules tangents est pris égal à celui des modules élastiques. La suite des calculs s'effectue selon les étapes suivantes :

- ✓ Calcul du tenseur d'interaction $\tilde{T}^{II}$ à partir du module tangent $\tilde{L}^{sc}$ déterminé à l'étape précédente.

- ✓ Détermination des systèmes de glissement potentiellement actifs, c'est-à-dire vérifiant le critère de Schmid. Une nouvelle procédure de sélection des systèmes actifs proposée par Zattarin [18] sera exposée par la suite.
- ✓ Détermination du tenseur des modules tangents $\tilde{l}$ du constituant.
- ✓ Déviation $\Delta\tilde{l}$ du comportement par rapport à $\tilde{L}^{sc}$.
- ✓ Calcul du tenseur de localisation $\tilde{a}$ du constituant.
- ✓ Evolution de la microstructure du constituant et réactualisation des variables internes du monocristal.
- ✓ Incrémentation de la variable pilote (contrainte ou déformation globale). Le processus est arrêté lorsque cette variable atteint une valeur limite fixée au début du chargement.

L'influence du pas d'incrémentation sur les résultats de la méthode autocohérente, l'évolution de la microstructure ainsi que les textures cristallographiques ont été analysées par Lipinski [26].

4. Sélection de systèmes actifs

Dans un polycristal sous chargement, il existe pour chaque monocristal un certain nombre de systèmes potentiellement actifs, c'est-à-dire vérifiant le critère de Schmid. Mais, il faut déterminer parmi ces systèmes de glissement potentiellement actifs la combinaison de ceux qui deviendront effectivement actifs.Lipinski [26] en a proposé une méthode qui consiste à sélectionner la combinaison dont l'énergie de déformation est minimale. Dans cette procédure le facteur temps introduit ne correspond pas exactement au temps physique mais plutôt au paramètre d'incrémentation des variables définissant le problème élastoplastique. D'autre part, le temps de calcul est excessivement important à cause des 2^{NSPA} tests à effectuer.

Zattarin [39], en s'inspirant des travaux de Leffers (1968) et Wierzbanowski et *al.* (1992) a proposé un critère qui consiste à n'activer qu'un seul système à la fois. Cette procédure consiste à fixer un incrément du taux de contrainte (ou de la vitesse de déformation) puis à sélectionner comme système actif $\boldsymbol{h}$, le système potentiellement actif pour lequel la différence entre la cission résolue et la cission critique est maximale. La vitesse de cisaillement fournit dans ce cas un sous-incrément pendant lequel les cissions critiques, la déformation plastique, le taux de contrainte ainsi que l'orientation du réseau cristallographique du monocristal évoluent. La procédure est répétée jusqu'au moment où il

n'y a plus de systèmes potentiellement actifs. D'autre part, pour chaque système activé, on vérifie bien qu'il est linéairement indépendant de ceux déjà répertoriés depuis le début de l'incrément. La combinaison de systèmes linéairement indépendants permet alors de déterminer le tenseur des modules tangents du monocristal.

La mise en œuvre pratique de cette procédure de sélection de systèmes actifs suppose une reformulation des équations de comportement du monocristal, dans laquelle le taux de contrainte est directement lié à la vitesse de déformation plastique.

5. Loi de comportement élastoplastique macroscopique

Pour décrire le comportement du grain, on relie son taux de contrainte à la vitesse de déformation plastique correspondant à travers la relation :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{S}_{ij} + \lambda_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}^{p}_{kl} \qquad \text{(III.46)}$$

$\dot{S}$ est relié à la variable macroscopique pilote (taux de contrainte ou de déformation). L'identification des tenseurs $\dot{S}$ et λ se fait en réécrivant l'équation intégrale dans une modélisation monosite. Dans une telle formulation, la vitesse de déformation du monocristal est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{E}_{ij} + T^{II}_{ijkl}\,\Delta l_{klmn}\,\dot{\varepsilon}_{mn} \qquad \text{(III.47)}$$

Si l'on introduit le tenseur de Hill $\tilde{L}^{*}$ défini par :

$$L^{*}_{ijkl} = L^{eff}_{ijkl} + (T^{II}_{ijkl})^{-1} \qquad \text{(III.48)}$$

La relation III.47 peut se réécrire sous la forme :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\Sigma}_{ij} + L^{*}_{ijkl}\,(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{E}_{kl}) \qquad \text{(III.49)}$$

La contribution élastique à la vitesse de déformation est reliée au taux de contrainte par l'intermédiaire du tenseur des complaisances $\tilde{s}$.

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = s_{ijkl}\,\dot{\sigma}_{kl} \qquad \text{(III.50)}$$

En décomposant la vitesse de déformation en partie élastique et en partie plastique, cette relation conduit à une réécriture de III.49 sous la forme :

$$\dot{\sigma}_{ij} = B_{ijkl}\,\dot{\Sigma}_{kl} - B_{ijkl}\,L^{*}_{klmn}\,\dot{E}_{mn} + \lambda_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}^{p}_{kl} \qquad \text{(III.51)}$$

où :

$$B_{ijkl} = \left(I_{ijkl} - L^{*}_{ijkl}\,s_{mnkl}\right)^{-1} \qquad \text{(III.52)}$$

et :

$$\lambda_{ijkl} = B_{ijmn} L^*_{mnkl} \tag{III.53}$$

Comme énoncé plus haut, la variable pilote $\dot{S}$ peut s'écrire soit en fonction du taux de contrainte macroscopique, soit en fonction de la vitesse de déformation macroscopique.

Lorsque le chargement du polycristal est piloté en taux de contrainte :

$$\dot{S}_{ij} = -B_{ijkl} \left(L^{eff}_{klmn} T^{II}_{mnop} \right)^{-1} \dot{\Sigma}_{op} \tag{III.54}$$

De même, en chargeant en taux de déformation :

$$\dot{S}_{ij} = -B_{ijkl} \left(T^{II}_{klmn} \right)^{-1} \dot{E}_{mn} \tag{III.55}$$

6. Evolution de la structure interne

La structure interne du polycristal se modifie constamment au cours de la déformation plastique. Le mouvement et le stockage des dislocations (sous formes de cellules) conduisent à une évolution de la matrice d'écrouissage, et par suite des cissions critiques sur chaque système de glissement. De même, l'orientation du réseau cristallographique change au cours du processus de déformation et induit des contraintes internes résiduelles. Enfin, la forme et l'orientation de chaque constituant évoluent

6.1 Texture cristallographique

En considérant le glissement cristallographique, multiple et homogène comme le seul mécanisme de déformation inélastique, il s'agit donc de spécifier l'évolution des angles d'Euler qui caractérisent l'orientation du réseau cristallin, l'évolution des cissions critiques ayant déjà été définie.

L'orientation du réseau cristallin est caractérisée par la vitesse de rotation élastique $\dot{\omega}_e$ uniforme dans chaque grain. La décomposition de la vitesse de rotation totale en partie élastique et en partie plastique fournit :

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\omega}^e_{ij} + \dot{\omega}^p_{ij} \tag{II.56}$$

La vitesse de rotation plastique $\dot{\omega}^p$ est donnée par la relation II.9 ; la vitesse de rotation totale $\dot{\omega}$ est fournie par l'approximation autocohérente de l'équation III.24. On peut alors déduire l'expression de la vitesse de rotation élastique :

$$\dot{\omega}_{ij}^{e} = \dot{\omega}_{ij} - \sum_{g} S_{ij}^{g}\, \dot{\gamma}^{g} \tag{II.57}$$

L'évolution des angles d'Euler est fournie par les relations :

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\omega}_{13}^{e} \frac{\sin\varphi_2}{\sin\phi} - \dot{\omega}_{23}^{e} \frac{\sin\varphi_2}{\sin\phi} \tag{II.58}$$

$$\dot{\phi} = \dot{\omega}_{23}^{e} \cos\varphi_2 + \dot{\omega}_{13}^{e} \sin\varphi_2 \tag{II.59}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \cos\phi \left(\dot{\omega}_{13}^{e} \frac{\sin\varphi_1}{\sin\phi} + \dot{\omega}_{23}^{e} \frac{\sin\varphi_1}{\sin\phi} \right) \tag{II.60}$$

Dans le cas de grandes transformations, on fait évoluer la forme et l'orientation de chaque grain au cours de la déformation, avec des lois d'évolutions données par Lipinski [26]. On suppose que la variation de la forme et de l'orientation du monocristal a une influence moindre sur les résultats que celle de l'évolution de la cission critique ou de l'orientation du réseau cristallographique.

6.2 Evolution de la contrainte interne d'ordre trois dans l'hétérogénéité

La présence des hétérogénéités intragranulaires entraîne le développement de contraintes internes d'ordre trois localisées aussi bien dans la matrice cristalline que dans les hétérogénéités. La forte polarisation de ces contraintes internes dans les hétérogénéités est à l'origine du caractère cinématique de l'écrouissage du grain. La formulation proposée pour la modélisation du comportement de ce dernier permet également de suivre l'évolution de ces contraintes internes au cours du processus de déformation du matériau. Par le biais du tenseur de localisation nous pouvons écrire :

$$\dot{\sigma}^{3} = \tilde{b}^{3} : \dot{\sigma}^{I} \tag{III.61}$$

avec $\tilde{b}^{3} = \tilde{c}^{3} : \tilde{a}^{3} : \tilde{m}^{I}$. Nous obtenons alors :

$$\dot{\sigma}^{3} = \tilde{c}^{3} : \tilde{a}^{3} : \tilde{m}^{I} : \dot{\sigma}^{I} \tag{III.62}$$

D'autre part, le taux de contrainte du grain hétérogène peut être relié à son taux de déformation par :

$$\dot{\sigma}^{I} = \left(\tilde{m}^{I} - \tilde{s}^{I} \right)^{-1} : \dot{\varepsilon}^{PI} \tag{III.63}$$

D'où :

$$\dot{\sigma}^{3} = \tilde{c}^{3} : \tilde{a}^{3} : \tilde{m}^{I} : \left(\tilde{m}^{I} - \tilde{s}^{I} \right)^{-1} : \dot{\varepsilon}^{PI} \tag{III.64}$$

soit :

$$\dot{\sigma}^3 = \tilde{c}^3 : \tilde{a}^3 : \left(\tilde{I} - \tilde{s}^1 : \tilde{l}^1\right)^{-1} : \dot{\varepsilon}^{PI} \qquad \text{(III.65)}$$

Finalement, en introduisant l'expression du taux de déformation donnée par II.49, on obtient :

$$\dot{\sigma}^3 = \sum_{k=1}^{NSA} \tilde{c}^3 : \tilde{a}^3 : \left(\tilde{I} - \tilde{s}^1 : \tilde{l}^1\right)^{-1} : R^k \, d\Gamma^k \qquad \text{(III.66)}$$

L'expression du tenseur de localisation de déformation $\tilde{a}^3$ dépend de l'approximation de la solution de l'équation intégrale du problème du grain hétérogène. En particulier les trois modèles standards discutés dans le paragraphe précédent en donnent une estimation.

La relation III.66 montre que les contraintes internes d'ordre trois peuvent être directement reliées aux mécanismes de déformation plastique par glissements cristallographiques. Elles dépendent comme on pouvait s'y attendre des propriétés mécaniques et géométriques de l'hétérogénéité considéré et des propriétés du grain équivalent. Il n'est pas nécessaire de disposer explicitement des propriétés de la matrice pour déduire ces contraintes internes. L'idée d'une retranscription du comportement du grain sans tenir compte directement de celui du monocristal est ainsi établie. La démarche proposée dans cette étude permet ainsi de suivre l'évolution des contraintes internes d'ordre trois qui jouent un rôle important dans le comportement effectif du grain et à une échelle plus grande, celui du matériau macroscopique.

7 Conclusion

La modélisation proposée permet de décrire le comportement local et macroscopique du polycristal contenant des hétérogénéités intragranulaires. Une attention particulière a été portée sur l'étude des relations fondamentales du comportement du grain hétérogène. Il s'agit d'une réelle innovation par rapport aux travaux antérieurs. En effet, contrairement aux approches classiques considérant le grain comme homogène, notre description permet de descendre jusqu' à l'échelle intracristalline afin de rendre compte de façon plus précise de la contribution non négligeable des hétérogénéiétés, surtout dans l'optique d'une analyse de l'endommagement causé par ces dernières. La cohérence de la démarche avec la formulation classique de la plasticité cristalline a été préservée grâce notamment à une règle d'écrouissage appropriée. Par ailleurs, il est également possible de suivre l'évolution des contraintes internes d'ordre trois, paramètres essentiel du caractère cinématique de l'écrouissage du grain.

Avant d'aborder la phase d'endommagement ductile du matériau, le chapitre suivant permet d'éprouver la modélisation proposée. Les applications numériques effectuées permettent de valider le comportement annoncé tant pour le grain que pour le matériau macroscopique. Les résultats présentés dans cette partie sont destinés essentiellement à analyser plus finement l'influence des paramètres rhéologiques et géométriques des hétérogénéités ainsi que la modification de l'écrouissage du grain.

8 Bibiographie

[1] Begis D., Bestagno A., Duvaut G., Hassim,A., Nuc M., Rapport de recherche INRIA, 1983.

[2] Beradaï Ch., Berveiller M, Lipinski P., Int. J. Plasticity., **3**, pp 143-163, 1987.

[3] Berveiller M., Thèse d'Etat, Paris Nord, 1978.

[4] Berveiller M.and Zaoui A., *An extension of the self consistent scheme to plastically flowing polycrystals*, J. Mech. Phys. Sol., **26**, pp 325-339, 1979.

[5] Brockenbrough J. R., Wienecke H. A., Romanko A. D., *A unit cell model of a particulate composite*, 1992.

[6] Budiansky B., Wu T. T., Proc. 4th US Nat. Cong of Applied Mech.,1175-1183, 1962.

[7] Carmasol A. Lipinski P., 2ème Congrès Marocain de Mécanique, Maroc, p 307, 1995.

[8] Corvasce F. Lipinski P., Berveiller M., *Thermo-mechanical behavior of metalmatrix composites,* 3rd Int. Symp. on Non-destructive Char Mater., 3-6 October, Saarbrücken, Germany, 1988.

[9] Dederichs P. H., Zeller, R., Z. Phys., **259**, pp 103-113, 1973.

[10] Eshelby J. D., Proc. R. Soc. London, **A 241,** p 376, 1957.

[11] Fassi-Fehri O., Thèse, Université de Metz, 1985.

[12] Franciosi P., Berveiller M., Zaoui A., *Latent hardening in copper and aluminium single crystals*, Acta. Metall., **28**, pp 273-283, 1980.

[13] Franciosi P., Proc. 8th Risφ Symposium Denmark, pp 83-89, 1984.

[14] Hihi A., Fassi-Fehri O., Berveiller M, Int. J. Engng. Sci., **25**, p 691, 1987.

[15] Hill R., J. Mech. Phys. Solids., **13**, pp 89-101, 1965.

[16] Hill R., Rice J.R., *Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain*, J. Mech. Phys. Solids, **20**, pp 401-413, 1972.

[17] Honeff H., Mecking H., Proc. Icotom, **6**, 1, pp 428, 1978.

[18] Hutchinson J. W., J. Mech. Phys. Solids., **12**, pp 11-21, 1964.

[19] Hutchinson J. W., *Elastic-plastic behavior of polycrystalline metals and composites*, Proc. R. Soc. London, **Ser. A 319,** pp 247-258, 1970.

[20] Kneer G., Physica Status solidi, **9**, p 825, 1965.

[21] Kocks U. F., Canova, G. R., Risφ Nat. Lab., Roskilde, Denmark, **35**, 1986.

[22] Kröner E., Kontinuums theorie der versetzung und eigenspannung, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

[23] Kröner E., Acta Metall., **9**, pp 155-165, 1961.

[24] Kröner E., J. Mech. Phys. Solids., **25**, pp 137-155, 1977.

[25] Lin T. H., J. Mech. Phys. Solids., **5**, pp 143-158, 1957.

[26] Lipinski P., Thèse d'habilitation, Université de Metz, 1993.

[27] Mura, T., J. Appl. Mech., **38**, pp 865-868, 1971.

[28] Reuss A., Z. Angew Math. Mech., **9**, pp 49-58, 1929.

[29] Rodin G., J., Int. J. Solids Structures, pp 1849-1863, 1993.

[30] Sachs G., Zeit. Der V.D.I., **72**, pp 739-747, 1928.

[31] Sangani A. S., Lu, W., J. Mech. Phys. Solids, **35**, pp 1-21, 1987.

[32] Taylor G. I., J. Inst. Metals., **62**, pp 307-315, 1938.

[33] Tiem S., Berveiller M., Canova, G., Acta Metall., **34**, pp 2139-2149, 1986.

[34] Van Houtte P., Acta Metall., **26**, p 591, 1978.

[35] Voigt W., Wied. Ann., **38**, pp 573-587, 1889.

[36] Willis J. R., Q. J. Mech. Appl. Math., **17**, pp 157-164, 1964.

[37] Zaoui A., Thèse d'Etat, Paris, 1970.

[38] Zattarin P., Lipinski, P., 13ème Congrès de Mécaniques, Poitiers, pp 357-360, 1997.

[39] Zattarin P., Thèse, Université de Metz, 2000.

Chapitre IV

Simulations numériques de l'écrouissage par précipitation du polycristal

1. Validation du modèle : influence du nombre de grains pour le polycristal

2. Comportement macroscopique du polycristal

3. Ecrouissage induit par les précipités

4. Evolution des contraintes internes
   - 4.1. Contraintes internes localisées dans le grain
   - 4.2. Contraintes internes d'ordre trois
   - 4.3. Influence de la forme et de l'orientation des précipités
   - 4.4. Influence de la fraction volumique des précipités

5. Chargement cyclique
   - 5.1 Effet Bauschinger
   - 5.2 Durcissement cyclique

6. Surfaces d'écoulement plastique

7. Ecrouissage cinématique du polycristal

8. Conclusion

Chapitre IV

Simulations numériques de l'écrouissage par précipitation du polycristal.

Les résultats présentés dans cette partie, découlent de l'application de la formulation de l'écrouissage induit par des hétérogénéités intragranulaires et décrite dans les chapitres II et III. La description proposée est basée sur une homogénéisation à deux échelles permettant de décrire le comportement macroscopique du matériau contenant des hétérogénéités intragranulaires, à partir des comportements locaux microscopiques des constituants ainsi que de leur géométrie.

Dans le cadre de ces applications numériques, les hétérognéités intragranulaires sont essentiellement représentées par des particules intracristallines ou précipités. De forme généralement ellipsoïdale ou simplement sphérique, ces précipités sont supposés plus durs que le monocristal dans lequel ils sont localisés.

Après des vérifications préliminaires, relatives à l'influence du nombre de grains retenus pour représenter l'élément de volume du polycristal, sur la qualité des résultats, nous avons analysé l'évolution de la structure interne du matériau, l'influence de la forme et de la fraction volumique des précipités sur les réponses mécaniques du matériau. L'initiation et le développement de l'endommagement ductile dépendent largement de l'évolution de cette structure interne. Les simulations réalisées dans cette étude, ont alors pour but essentiel de mieux décrire tous les paramètres représentatifs de l'état interne du matériau. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux contraintes internes d'ordre trois développées à l'échelle intragranulaire dont l'état permet de prédire l'amorçage de l'endommagement. L'analyse des surfaces de plasticité après un certain niveau de prédéformation nous permettra également de suivre de façon plus complète l'anisotropie de cette modification de la structure. Ce concept de surface d'écoulement plastique sera aussi invoqué pour rendre compte du caractère cinématique de l'écrouissage du fait de la présence des précipités.

L'étude du problème de détermination des propriétés effectives d'un matériau hétérogéne suppose la description précise des données initiales. Il faut dans un premier temps décrire la sollicitation et sa variation en fonction du temps : sollicitations monotones ou non, radiales ou non radiales; puis définir l'état initial du polycristal en identifiant :

- La nature métallurgique et cristallographique des constituants,
- La microstructure initiale du polycristal : forme et orientation des grains,
- Le comportement élastique du monocristal et des particules intragranulaires,
- Les familles de systèmes de glissement plastique,
- Pour un polycristal pré-écroui, les contraintes résiduelles initiales et les cissions critiques pour tout système de glissement.

Si le choix des propriétés élastiques du monocristal semble sans difficulté majeure, le comportement plastique du monocristal paraît complexe. Le dépouillement approprié des essais simples type traction, permette de déduire la valeur de la cission critique initiale τ_{cr}^{0}.

Pour la définition de la matrice d'écrouissage H^{gh}, une analyse des interactions entre les systèmes de glissement au moyen du tétraèdre de Thompson permet de définir les classes d'interactions ainsi que la structure de cette matrice. La détermination des différents termes de la matrice H^{gh} se fait, de façon expérimentale, au travers d'un essai d'écrouissage latent. En première approximation cette matrice pourra être supposée constante. En l'absence de données expérimentales, une telle hypothèse, même si elle peut paraître grossière, est satisfaisante pour des déformations n'excédant pas *10 %*.

La définition qualitative de la forme et de l'orientation des grains peut être obtenue en recourrant à des observations métallographiques. Il est nécessaire de caractériser au préalable le polycristal étudié en définissant sa microstructure, les propriétés élastiques des particules et celles de la matrice cristalline ainsi que les propriétés élastoplastiques du grain. Le matériau test retenu pour nos applications, est assez proche des investigations antérieures trouvées dans la littérature. Ce choix permet de rester dans un cadre assez général, pour d'éventuels choix de paramètres ou d'études comparées ultérieures. Les constantes élastiques des deux phases cubiques du grain, sont résumées dans le tableau suivant :

	$C_{11}(GPa)$	$C_{12}(GPa)$	$C_{44}(GPa)$
Monocristal - Cu	165	119	76
Précipités - Cr	340	59	99

***Tableau IV.1 :** Constantes élastiques des phases constituant le grain.*

La microstructure du matériau est définie par les textures cristallographiques et morphologiques. Suivant les observations expérimentales, nous supposons dans cette modélisation que les grains sont de forme sphérique.

La formulation autocohérente a été appliquée pour la modélisation du comportement de matériaux cubiques comportant des particules intragranulaires. Le monocristal présente des systèmes de glissements faciles pour lesquels les cissions critiques initiales sont identiques. La matrice d'écrouissage est définie par deux termes (H_1, H_2) et l'anisotropie est caractérisée par A, rapport entre le module d'auto-écrouissage H_1 et celui d'écrouissage latent H_2. Dans cette étude les propriétés du monocristal Cu conduisent à $H_1 = 140\,MPa$ et $A = 1.5$. La microstructure du monocristal est caractérisée par la donnée de ses textures cristallographiques et morphologiques. Les orientations cristallographiques des grains sont générées à partir de fonctions de répartition statistiques. Ces orientations sont définies, pour chaque grain, par les trois angles d'Euler : φ_1, ϕ, φ_2.

Données initiales du problème :

Plasticité du monocristal

Cission critique initiale identique pour tous les systèmes : $\tau_{cr}^0 = 140MPa$

Matrice d'écrouissage $H_1 = 100MPa$, $H_2/H_1 = 1.5$

Microstructure de l'aggrégat

100 à 5 000 grains

Orientations cristallographique des grains : générées par une

Fonction de répartition statistique ;

Forme initiale des grains : sphère ou ellipsoïde.

Précipités

Répartition : fraction volumique f par monocristal

Forme : sphère ou ellipsoïde.

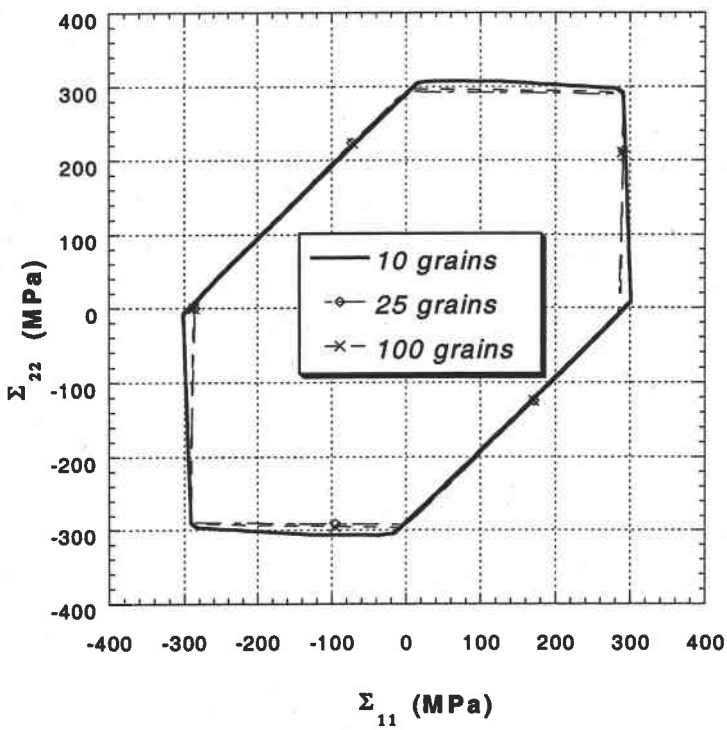
1. Validation du modèle : influence du nombre de grains

Les nombreux tests coûteux en temps de calcul correspondant à la recherche des systèmes linéairement indépendants, sont évités dans ce modèle, en recourant à une succession de glissements simples plutôt qu' à des glissements multiples. D'autre part, le temps de la mise

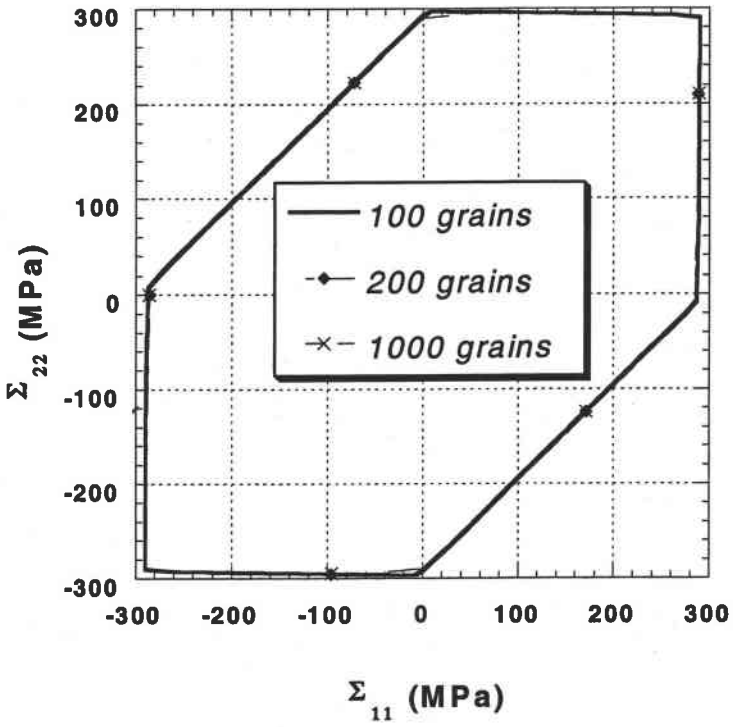
en œuvre numérique dépend linéairement du nombre de grains retenu pour représenter le polycristal. Le recours aux glissements simples permet de réduire ce temps de calcul. Cette réduction du temps de calcul sera d'autant plus importante que le nombre de grains constituant le volume élémentaire du polycristal n'est pas trop grand. Cependant, le nombre de grains doit être suffisant pour bien reproduire la microstructure du matériau étudié. Une bonne modélisation découle aussi d'un bon compromis entre un nombre de grains conduisant à une bonne représentation de la texture du matériau et un temps de calcul acceptable.

Pour étudier l'influence du nombre de grains sur la modélisation, nous avons représenté l'évolution de la surface de plasticité initiale du matériau, pour une fraction volumique de *10%* de précipités par grain.

On constate, sur les *Figures IV.1 (a et b)*, un écart entre les surfaces pour deux nombres différents de grains. Pour une modélisation de *100* grains et plus (*Figures IV.1- b)*, cet écart devient très négligeable. On peut donc supposer qu'à partir de 100 grains, la précision du modèle n'évolue plus très fortement si l'on augmente le nombre de grains.



- a -



- b -

Figure IV.1 : *Evolution de la surface d'écoulement plastique initiale en fonction du nombre de grains représentant le polycristal.*

Cette étude de la surface de plasticité initiale ne constitue évidemment pas un test suffisant pour juger de l'influence du nombre de grains adoptés pour le polycristal. Elle permet néanmoins d'avoir une première idée sur le nombre minimum à retenir et aussi l'influence de ce nombre sur la qualité des résultats à attendre. Pour l'analyse de l'évolution de la structure interne (contraintes internes résiduelles, surface d'écoulement plastique après prédéformation), un nombre d'au moins *500* grains sera considéré, dans un souci de précision des résultats.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons des résultats du modèle d'écrouissage sur :

- Le comportement élastoplastique global du polycristal découlant de la formulation autocohérente et du mode du chargement. Les diverses simulations effectuées dans cette partie ont essentiellement pour objectif d'analyser l'influence des précipités sur la réponse macroscopique du polycristal.
- L'évolution de la structure interne du polycristal pour un chargement donné. Les précipités étant localisés dans les grains, la perturbation des contraintes

dans ces derniers et le développement des contraintes internes d'ordre trois semblent inévitables. Une analyse précise de ces différentes contraintes internes s'impose dès lors. Une attention particulière a été notamment portée sur l'influence de la fraction volumique des précipités ainsi que de leur forme et leur orientation. L'évolution des surfaces d'écoulement plastique et la mise en évidence de l'écrouissage mixte anisotrope et cinématique, signalé dans les chapitres précédents ont également été analysées.

2 Comportement élastoplastique macroscopique

L'exploitation du comportement élastoplastique du modèle proposé a été effectuée pour trois types de chargements simples pilotés en taux de contrainte macroscopique :

- Un essai de traction uniaxiale : $\dot{\Sigma}_{11}=\dot{\Sigma}$, toutes les autres composantes étant nulles,
- Un essai de cisaillement pur : $\dot{\Sigma}_{12}=\dot{\Sigma}_{21}=\dot{\Sigma}$, toutes les autres composantes étant nulles,
- Un essai de laminage : $\dot{\Sigma}_{11}=-\dot{\Sigma}_{22}=\dot{\Sigma}$, toutes les autres composantes étant nulles

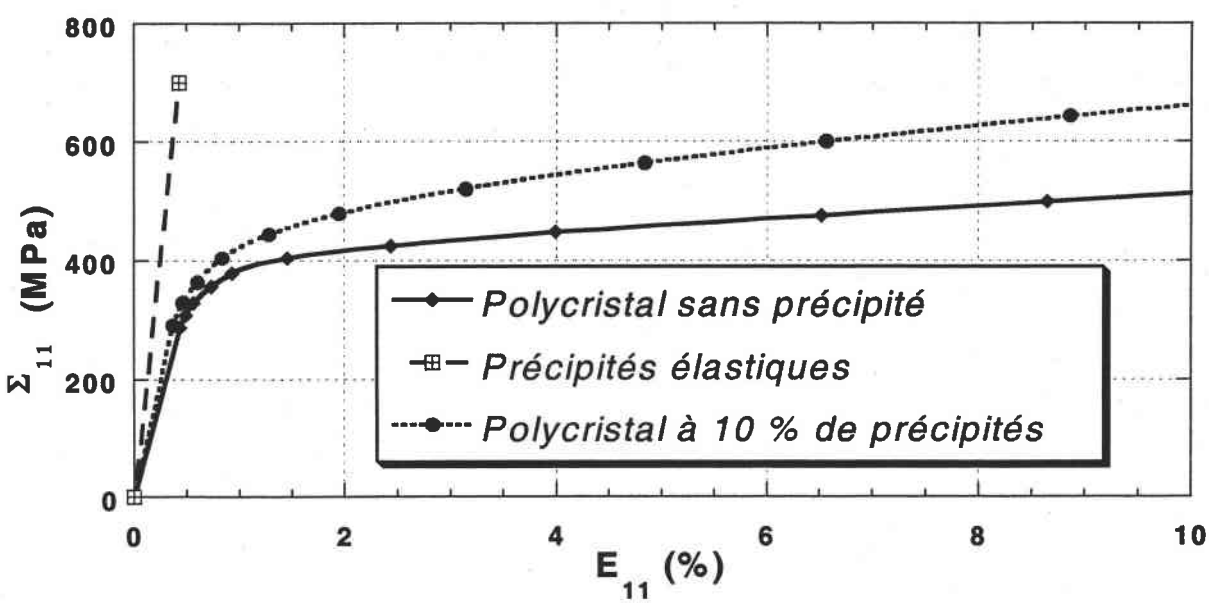


Figure IV.2 : *Loi de comportement en traction des précipités, de la matrice (monocristal) et du matériau contenant des précipités sphériques.*

La *Figure IV.2* permet d'observer l'influence des hétérogénéités intragranulaires sur le comportement macroscopique du matériau. Ces hétérogénéités étant supposées plus dures que le cristal, le comportement effectif du mélange cristal-hétérogénéités est, comme on pouvait s'y attendre, intermédiaire entre ceux du cristal et des hétérogénéités. Le matériau équivalent est ainsi plus dur que le monocristal mais moins que les hétérogénéités intragranulaires, conformément à la loi classique de mélange.

Par ailleurs, contrairement au modèle autocohérent classique, la courbe du comportement du polycristal contenant des précipités intragranulaires, présente une évolution non linéaire dans sa partie élastoplastique. Ce phénomène est la conséquence des modifications introduites par le modèle d'écrouissage proposé. Sous différents chargements, traction, laminage et cisaillement, le modèle présente, dans l'espace des contraintes et de déformations équivalentes, des réponses similaires, comme le montre la *Figure IV.3* ci-après.

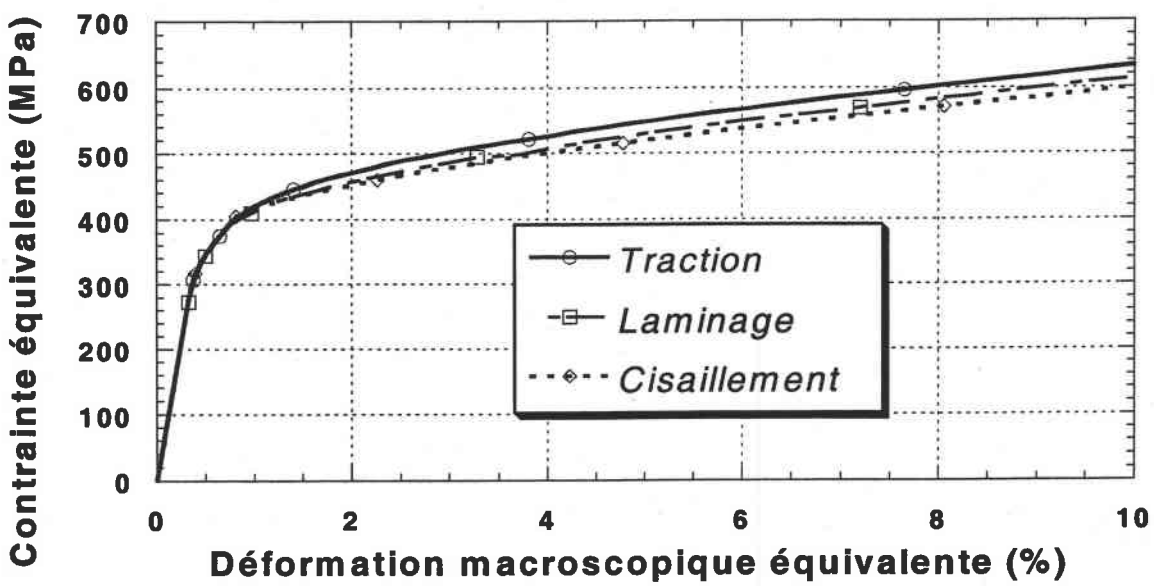


Figure IV.3 : *Comportement macroscopique élastoplastique du polycristal sous différentes sollicitations pour 10 % de précipités sphériques par grain.*

Après une évolution linéaire correspondant à la phase purement élastique, la courbe du comportement élastoplastique macroscopique prend une allure parabolique qui peut être reliée à l'activation progressive de différents systèmes de glissement dans la matrice. Aux interactions classiques dislocation-dislocations s'ajoutent celles entre les particules et les

glissements de dislocations. L'effet des concentrations de contraintes s'amplifie alors avec la déformation plastique.

3 Ecrouissage induit par la présence de précipités.

Les courbes de la *Figure IV.4* représentent le comportement macroscopique du matériau en fonction de la fraction volumique de précipités sphériques.

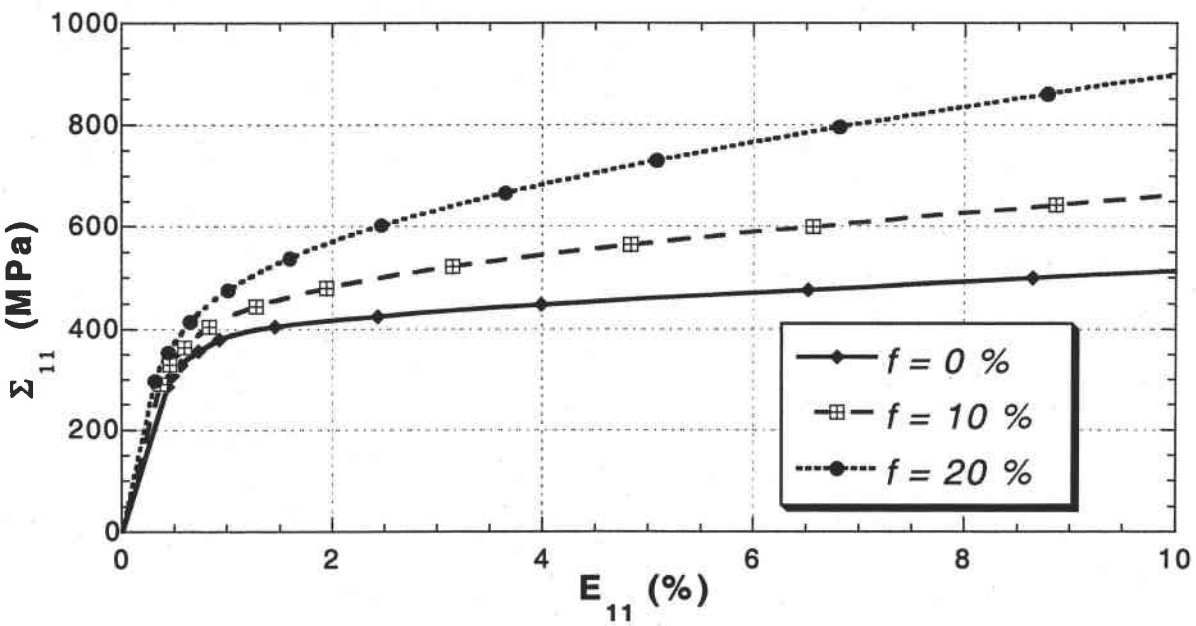


Figure IV.4 : *Evolution de la courbe de traction du polycristal en fonction de la fraction volumique de précipité par grain.*

On constate que la limite macroscopique d'élasticité augmente avec la fraction volumique des particules. Cette évolution peut être reliée aux concentrations de contraintes induites par la présence des particules (hétérogénéités élastiques). Cette limite correspond à l'activation du système de glissement le plus chargé. Pour un essai de traction et en l'absence de précipités, cette limite d'élasticité macroscopique correspond approximativement au double de la cission critique initiale imposée. Ce relèvement du seuil de plasticité initiale peut également être observé en représentant la surface de plasticité initiale du matériau pour différentes fractions volumiques de précipités.

On constate une expansion de la surface d'écoulement initial en fonction de la fraction de précipités tout en conservant la forme correspondant au critère de Tresca. Cette évolution de la limite d'écoulement plastique du modèle est linéaire et s'accorde bien avec les résultats dérivés de la théorie de l'écrouissage linéaire de Mori-Tanaka. L'écrouissage observé dans cette étude est assez important car les précipités ne sont pas cisaillés par les dislocations dans leur mouvement.

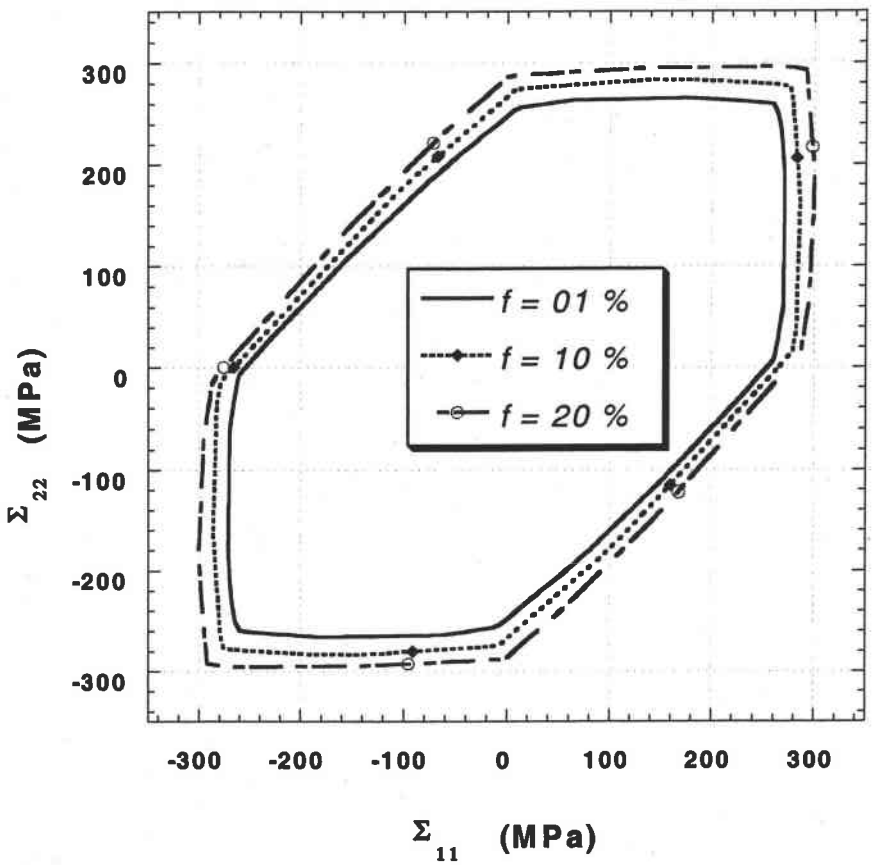


Figure IV.5 : *Surfaces d'écoulement plastique initial du polycristal en fonction de la fraction volumique de précipité par grain.*

4 Evolution des contraintes internes

A l'échelle intracristalline, la multiplication des dislocations, l'évolution de leur répartition spatiale (cellules, parois, empilements...) et leurs interactions avec les précipités cristallographiquement incohérents, sont responsables de l'écrouissage intracristallin. Par

ailleurs, les hétérogénéités du comportement élastique et les incompatibilités du champ de déformation plastique entre le cristal et les précipités entraînent des contraintes internes du troisième ordre très importantes. De même, à l'échelle des grains, la désorientation relative des réseaux cristallins constitue une source de contraintes internes du fait des incompatibilités du champ de déformation plastique.

Suite à un trajet de chargement ayant conduit à des déformations plastiques, il subsiste après une décharge complète un champ de contraintes internes en équilibre appelées contraintes résiduelles. Pour déterminer ce champ, on envisage un écoulement plastique éventuel lors de la décharge associée aux contraintes résiduelles. Le calcul des contraintes résiduelles se ramène au calcul des contraintes locales pour un cycle de chargement :

$$\Sigma=0 \Rightarrow \Sigma \, donné \Rightarrow \Sigma=0 \qquad \text{(IV.1)}$$

Dans le cas où il n'y a pas d'écoulement plastique à la décharge, le champ constant par morceaux des contraintes résiduelles localisées dans un grain I du polycristal peut s'écrire :

$$(\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{I})_{\Sigma=0} = (\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{I})_{\Sigma} - \tilde{C}^{I} : \left(\tilde{I} - \tilde{T}^{II} : \Delta\tilde{C}_{e}^{I}\right)^{-1} : \tilde{S}_{eff}^{I} : \Sigma \qquad \text{(IV.2)}$$

$(\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{I})_{\Sigma}$ désigne les contraintes moyennes dans le grain I sous la charge Σ.

$(\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{I})_{\Sigma=0}$ désigne les contraintes résiduelles moyennes dans le grain I après décharge ($\Sigma=0$).

Le terme $\tilde{C}^{I} : \left(\tilde{I} - \tilde{T}^{II} : \Delta\tilde{C}_{e}^{I}\right)^{-1} : \tilde{S}_{eff}^{I} : \Sigma$ correspond aux contraintes locales dans le grain I dues à la contrainte Σ et à l'hétérogénéité de comportement élastique. $\Delta\tilde{C}_{e}^{I} = \tilde{C}^{I} - \tilde{C}^{eff}$ est la différence de comportement élastique entre le grain I et le polycristal à l'état actuel (effet de la texture induite).

Ces préliminaires étant établis, nous pouvons analyser les contraintes internes localisées aussi bien dans les grains que dans les précipités intragranulaires ou la matrice cristalline. Pour ce faire, nous avons suivi l'évolution des ces contraintes pour trois grains tests caractérisés par leur orientation cristallographique. Avant d'analyser précisément l'évolution des contraintes internes d'ordre trois situées dans les précipités et la matrice cristalline, il paraît nécessaire d'étudier les contraintes internes localisées dans les grains hétérogènes. De leur évolution dépend celle de l'ordre inférieur.

4.1 Contraintes internes d'ordre deux.

Il s'agit fondamentalement de contraintes internes localisées dans les différents grains du polycristal. En effet, au cours de l'écoulement plastique, des contraintes internes se développent à l'échelle intercristalline. Ces contraintes internes se relaxent partiellement

grâce à l'accommodation plastique et contribuent de manière significative au comportement élastoplastique macroscopique. Leur évolution est due au développement de fortes incompatibilités plastiques entre les grains.

Les courbes de la *Figure IV.6* ci-après, correspondent à l'évolution des contraintes internes situées dans les trois grains tests, en fonction de la déformation macroscopique, dans un essai de traction uniaxiale dans la direction **1**. Ces courbes présentent une évolution non linéaire et ceci bien au delà des premiers stades de la plastification. Cette allure parabolique peut être rapportée aux effets des hétérogénéités présentes à l'intérieur du grain et qui perturbent notablement le champ de déformation intragranulaire.

Nous constatons, par ailleurs, que le niveau de ces contraintes internes varie selon les grains. Les grains étant essentiellement caractérisés par leur orientation cristallographique, l'influence de cette dernière sur le développement des contraintes internes apparaît certaine.

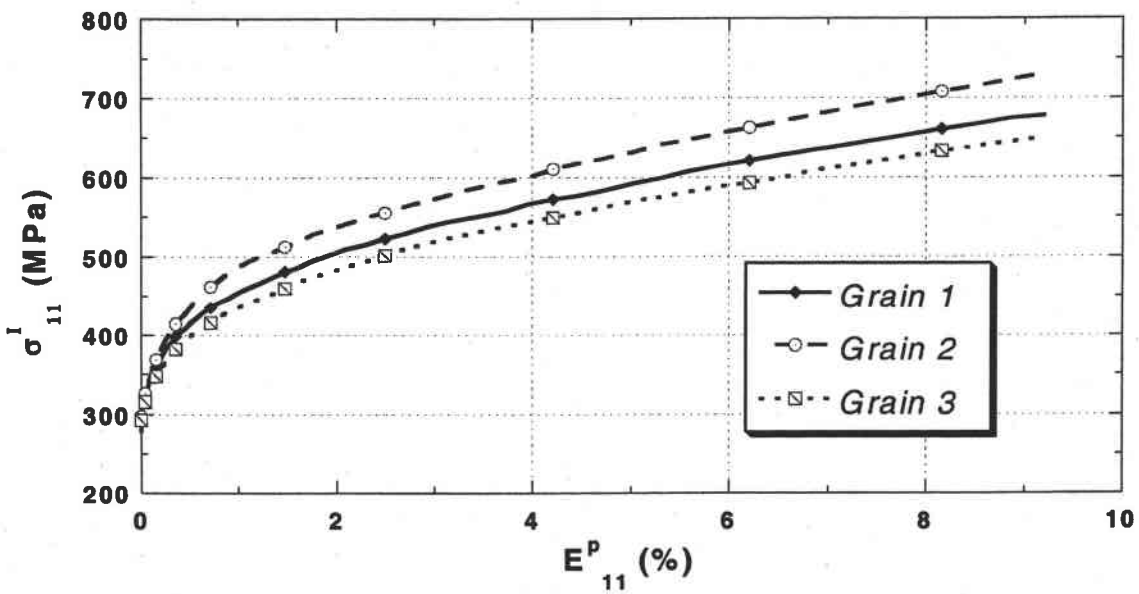


Figure IV.6 : *Contraintes internes dans différents grains du polycristal sollicité en traction (fraction de précipités : f =10%).*

La *Figure IV.7* permet d'appréhender plus précisément cette différence de comportement des contraintes internes d'ordre deux. Pour les trois grains tests choisis, les contraintes internes sont approximativement du même ordre de grandeur que la contrainte macroscopique. On note cependant une relative disparité: selon l'orientation du grain, ces contraintes internes sont ainsi soit inférieures soit supérieure à la contrainte macroscopique.

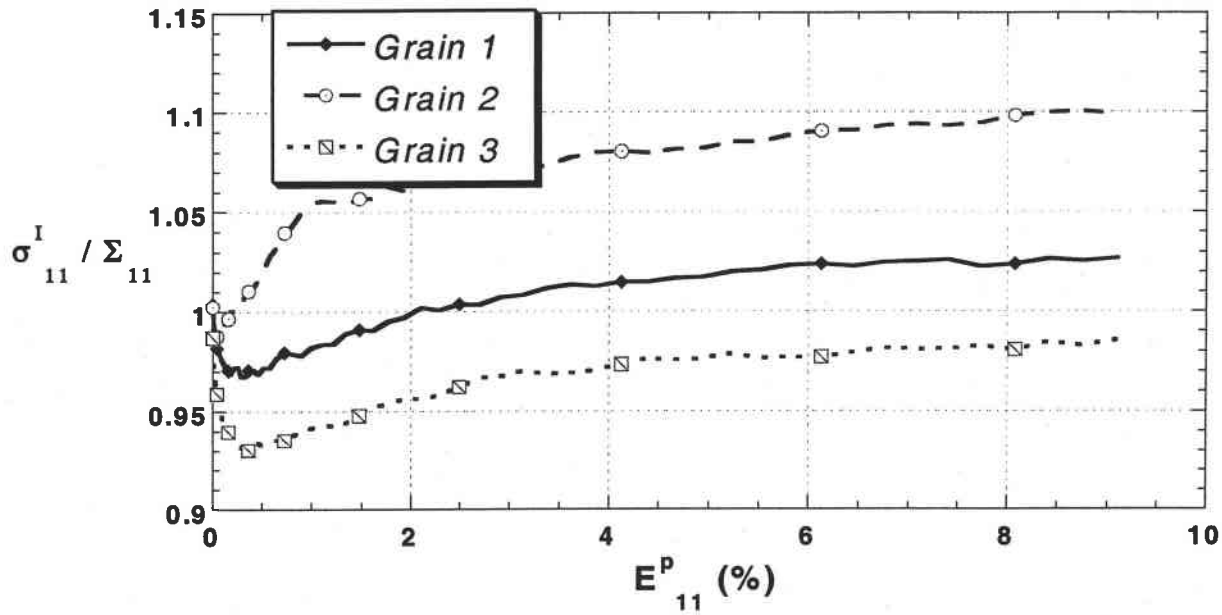


Figure IV.7 : *Valeurs relatives des contraintes internes dans les trois grains du polycristal sollicité en traction (fraction de précipités : f =10%).*

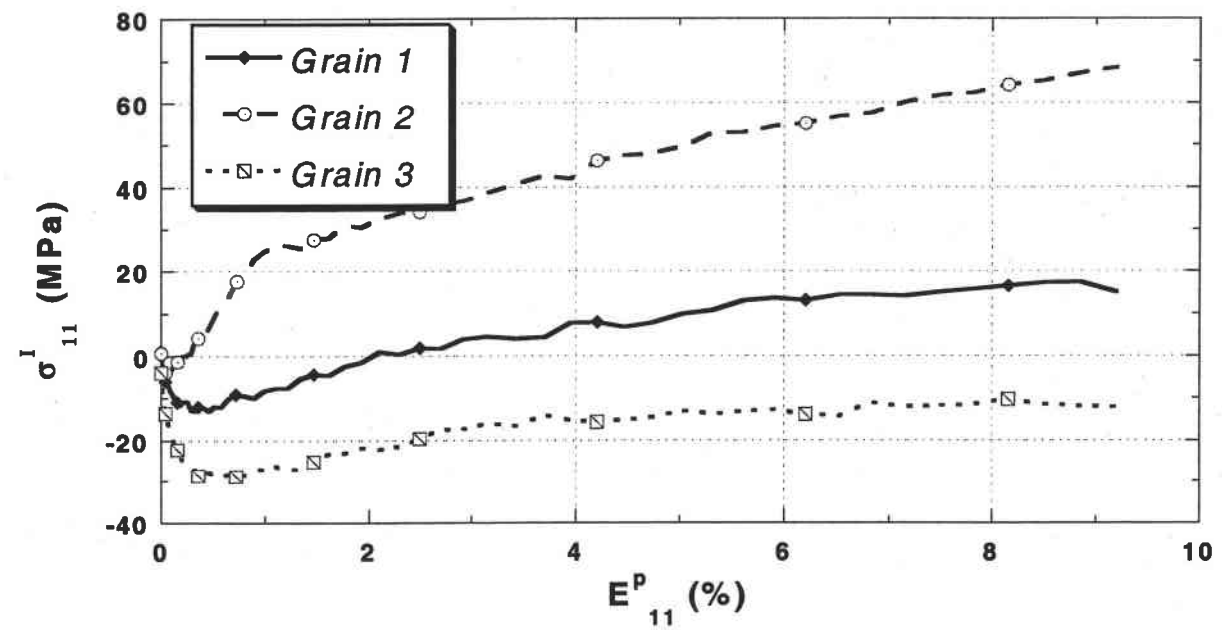


Figure IV.8 : *Contrainte interne résiduelle σ^I_{11} dans divers grains d'un polycristal sollicité en traction dans la direction 1 (f =10%).*

Nous avons également analysé les contraintes internes subsistant dans les grains après une décharge consécutive au même essai de traction que précédemment. Les courbes de la *Figure IV.8* révèlent une évolution non monotone des contraintes internes résiduelles en fonction de la déformation plastique macroscopique.

A une première évolution relativement importante de ces contraintes résiduelles, succède une phase de croissance modérée s'établissant après environ 2% de déformation plastique. Au début de la déformation plastique, peu de systèmes de glissement sont actifs, les incompatibilités se développent plus facilement aux joints de grains. Par contre, au-delà des 2 % de la déformation plastique, le nombre plus grand de systèmes de glissement actifs rend l'augmentation des contraintes résiduelles plus faible.

Certains grains ont des contraintes résiduelles négatives alors que d'autres composantes sont positives. Cette situation est conforme aux relations d'équilibre :

$$\sum_I f^I \sigma_{ij}^I = 0 \qquad \text{(IV.3)}$$

Par ailleurs, la distribution des contraintes résiduelles dans l'espace des orientations cristallographiques n'est pas aléatoire. Dans un essai de traction suivant l'axe 3, les grains dont l'orientation de l'axe (111) tend à être parallèle à l'axe de traction sont soumis à des contraintes résiduelles positives alors que pour ceux dont l'axe (100) se rapproche de la direction de traction, la contrainte résiduelle est négative (Lipinski, 1993).

4.2 Contraintes internes d'ordre trois.

L'évolution des contraintes internes d'ordre trois localisées dans les particules conditionne l'initiation de l'amorçage de l'endommagement. Les divers critères d'amorçage, par décohésion de l'interface précipités-matrice ou par rupture de précipités, sont basés sur l'étude de l'état de contrainte ou de déformation existant dans les précipités, dans la matrice cristalline ou plus directement au niveau de leur interface.

Dans l'optique de la mise en œuvre d'un modèle d'amorçage de l'endommagement initié au niveau des hétérogénéités, il s'avère indispensable d'analyser l'évolution des contraintes internes d'ordre trois. Dans la modélisation autocohérente adoptée pour cette étude, nous avons proposé au *paragraphe 6.2 du chapitre III*, une description de l'évolution de cette contrainte interne dans les précipités. Les résultats de cette formulation conduisent aux différentes représentations ci-après.

Les contraintes internes dans les précipités, portées sur la *Figure IV.9*, sont assez importantes. Elles sont, dans le cas particulier du matériau adopté dans cette étude, deux fois plus grandes que la contrainte macroscopique (voir *Figure IV.10*). L'importance de ces contraintes internes est la résultante de la polarisation des contraintes au niveau des précipités. Ces derniers sont en effet le siège d'empilement de boucles de dislocations, lors de leur mouvement cristallographique.

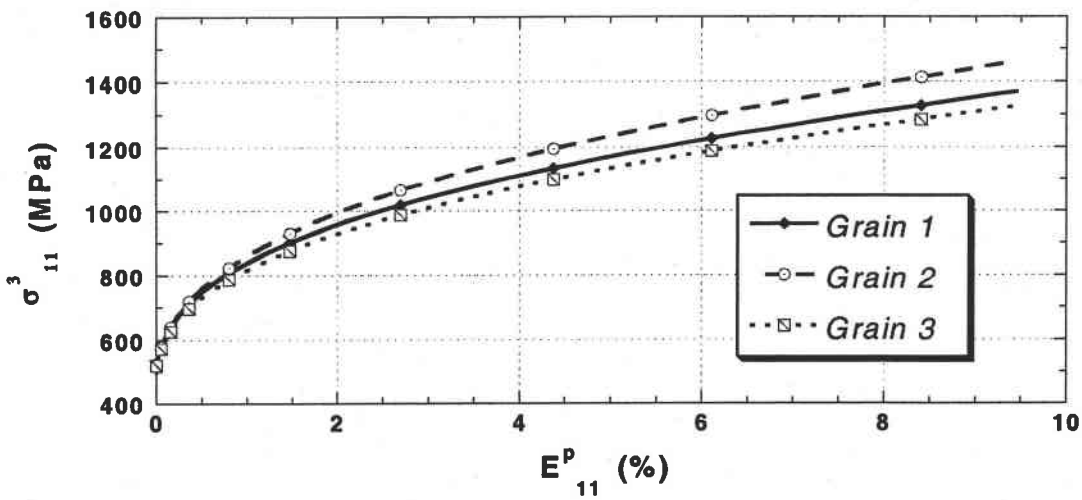


Figure IV.9 : *Contraintes internes dans les précipités après un essai de traction (f =10%).*

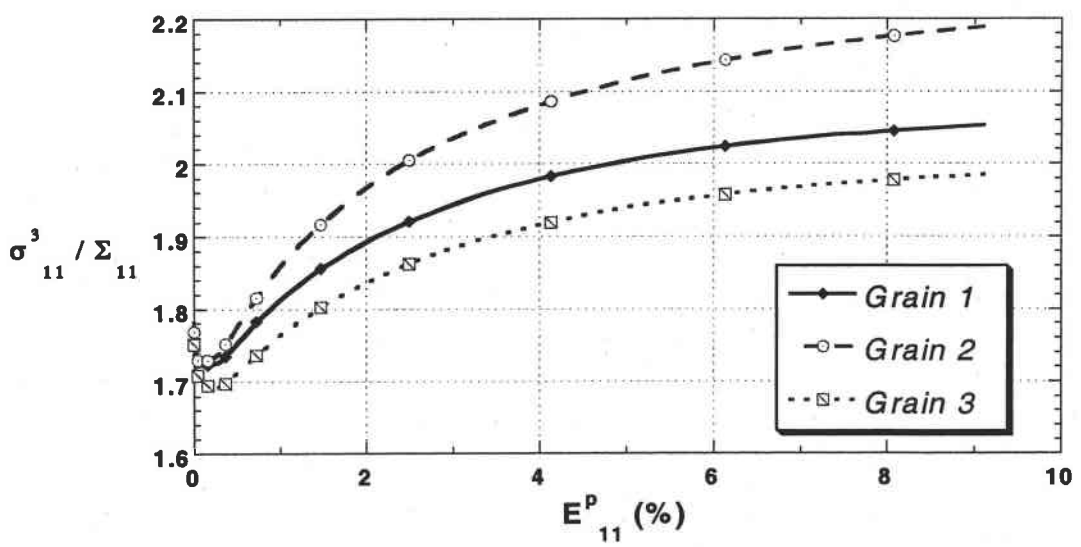


Figure IV.10 : *Evolution relative des contraintes internes résiduelles* σ^3_{11} *dans les précipités d'un polycristal sollicité en traction dans la direction 1 (f =10%).*

Contrairement à ce que montrent certains résultats antérieurs, notamment ceux de Schmitt et *al.* (1997), après la forme parabolique caractéristique du début de la phase élastoplastique, la courbe est non linéaire en fonction de la déformation macroscopique. L'effet d'écrouissage

anisotrope mis en évidence lors de la description n'est donc pas linéaire mais varie en fonction du niveau de déformation et de l'évolution de la structure interne du matériau.

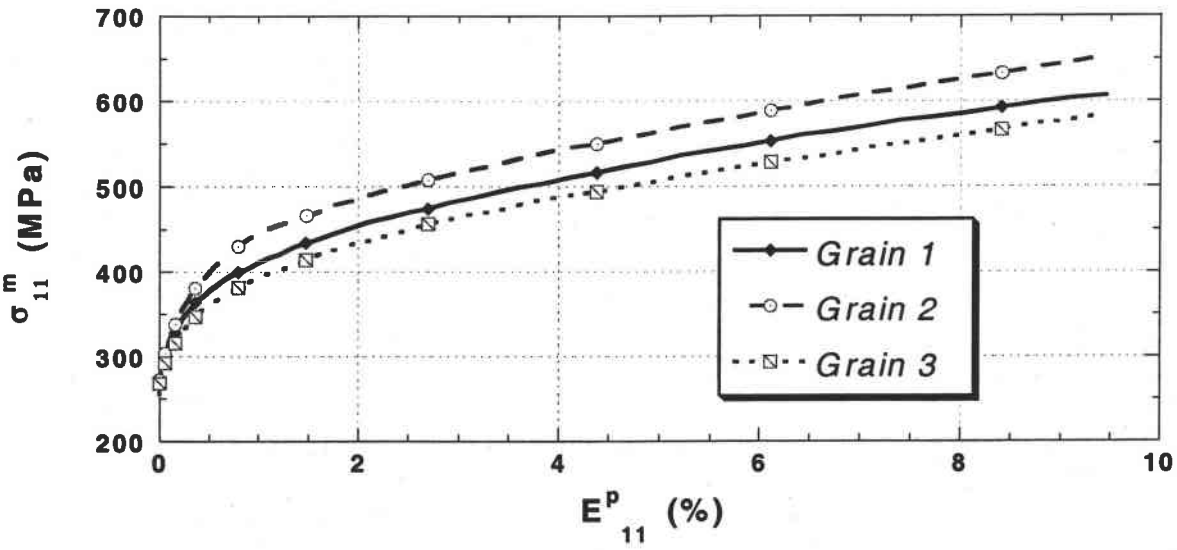


Figure IV.11 : *Contraintes internes dans la matrice cristalline de différents grains après un essai de traction (f =10%).*

Des contraintes internes du troisième ordre se développent également dans la matrice cristalline du grain. Leur évolution est représentée sur la *Figure IV.11*. Ces contraintes internes présentent la même évolution en fonction de la déformation macroscopique que celles situées dans les précipités mais sont nettement moins importantes que ces dernières.
Après une décharge, on s'intéresse aux contraintes résiduelles. La forte polarisation des contraintes internes est plus marquée dans l'analyse des contraintes résiduelles (voir *Figure IV.12*). Les contraintes résiduelles localisées dans les précipités sont de l'ordre de la contrainte macroscopique mais sont nettement supérieures à celles situées dans la matrice cristalline. Le comportement résiduel de la matrice décrit par les courbes de la *Figure IV.13* correspond à un état de compression alors que les précipités demeurent dans la même sollicitation en traction.

Cette différence très marquée de l'état de contraintes internes entre les précipités et la matrice cristalline sera, comme nous l'avons annoncé, l'un des facteurs déterminants de l'amorçage de l'endommagement par décohésion de l'interface entre ces deux phases. En effet, la frontière

mécanique que constitue l'interface, est le siège d'un saut de contraintes assez important pour vaincre les forces de cohésion entre les précipités et le monocristal.

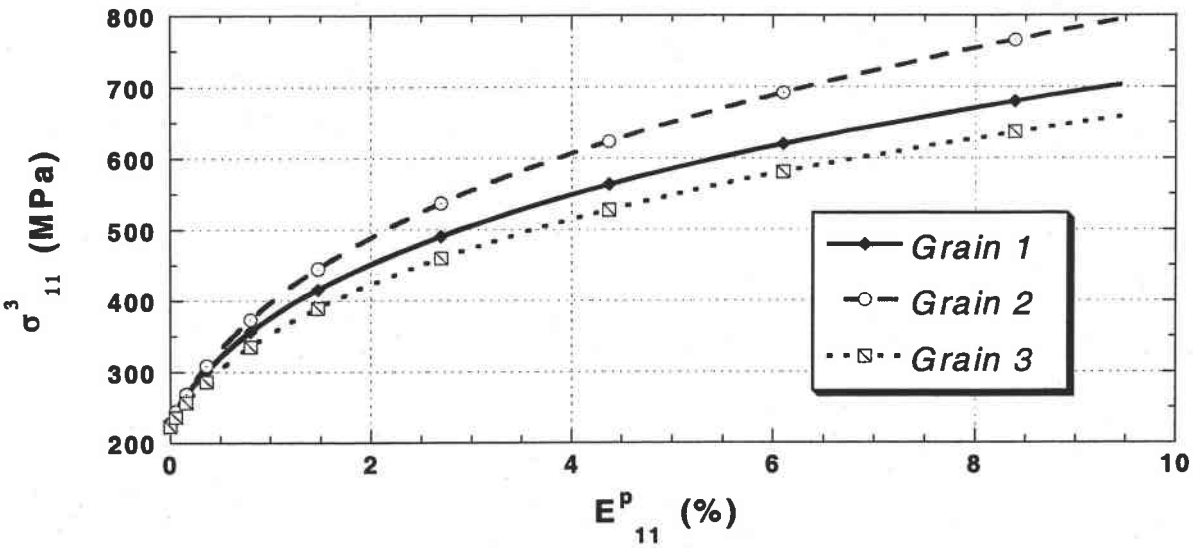


Figure IV.12 : *Contrainte interne résiduelle dans les précipités pour un polycristal sollicité en traction (f =10%).*

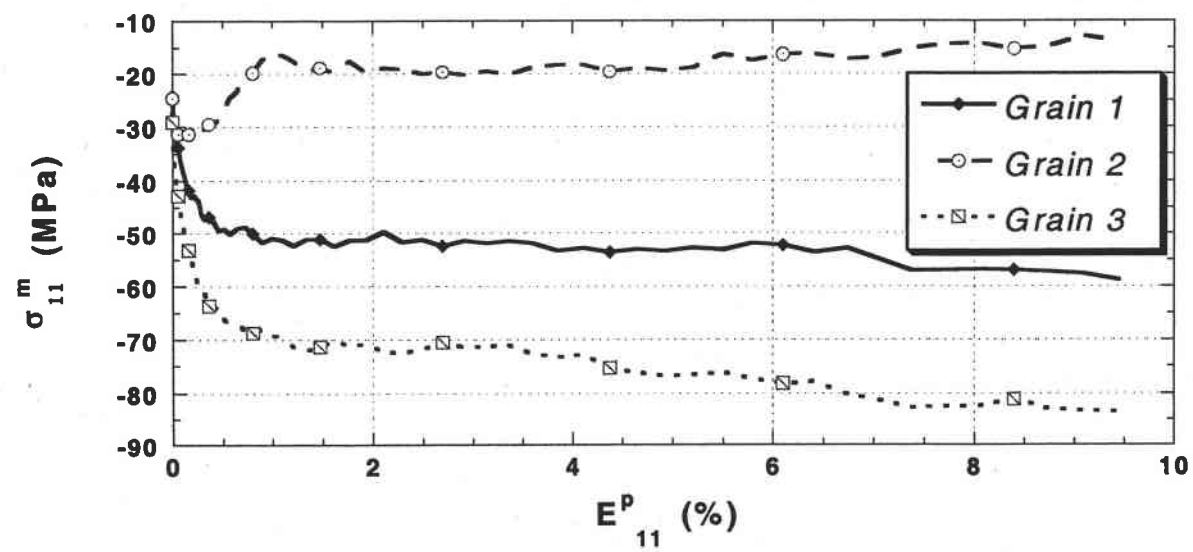


Figure IV.13 : *Contrainte interne résiduelle dans la matrice cristalline dans un essai de traction uniaxiale (f =10%).*

L'importance de ce saut de contrainte est essentiellement due à l'hétérogénéité du comportement entre les deux phases en présence dans le grain. Ainsi, dans le cas particulier de l'élasticité homogène, c'est-à-dire en supposant que les comportements élastiques des

précipités et du monocristal sont identiques, on constate que les contraintes résiduelles développées dans les précipités sont moins importantes que précédemment (*Figure IV.14*).

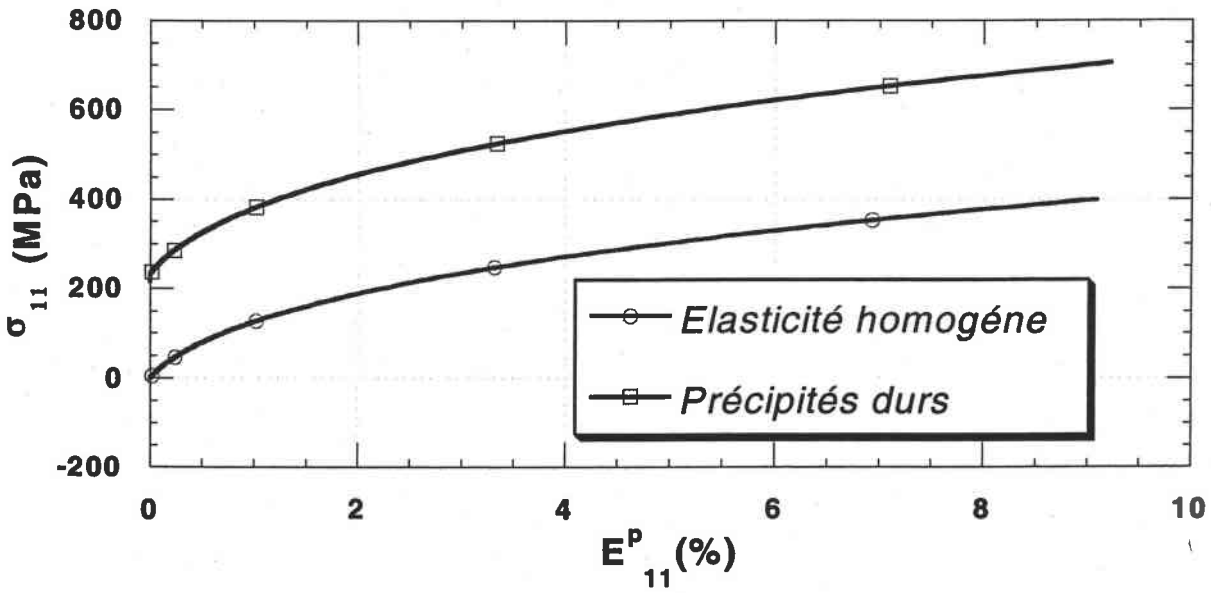


Figure IV.14 : *Contrainte résiduelle dans les précipités pour un polycristal sollicité en traction (f =10%) – Cas où le comportement élastique des précipités est identique à celui du monocristal.*

L'évolution des contraintes internes d'ordre trois dépende certainement de la géométrie des hétérogénéités, de leur orientation et de leur proportion volumique. L'influence de ces divers paramètres mérite d'être précisée, les précipités généralement observés dans le monocristal présentant en effet une certaine variété non négligeable.

4.3 Influence de la forme et de l'orientation des précipités sur les contraintes internes d'ordre trois.

Dans cette partie, nous nous proposons d'analyser l'influence de la forme des précipités sur le comportement élastoplastique du polycristal, à travers l'étude des contraintes résiduelles lors d'un essai de traction uniaxiale.

Chaque précipité, supposé de forme ellipsoïdale, est caractérisé par ses paramètres de forme a, b et c représentant ses demi-axes. L'axe de traction imposée est parallèle à l'axe a de ces précipités.

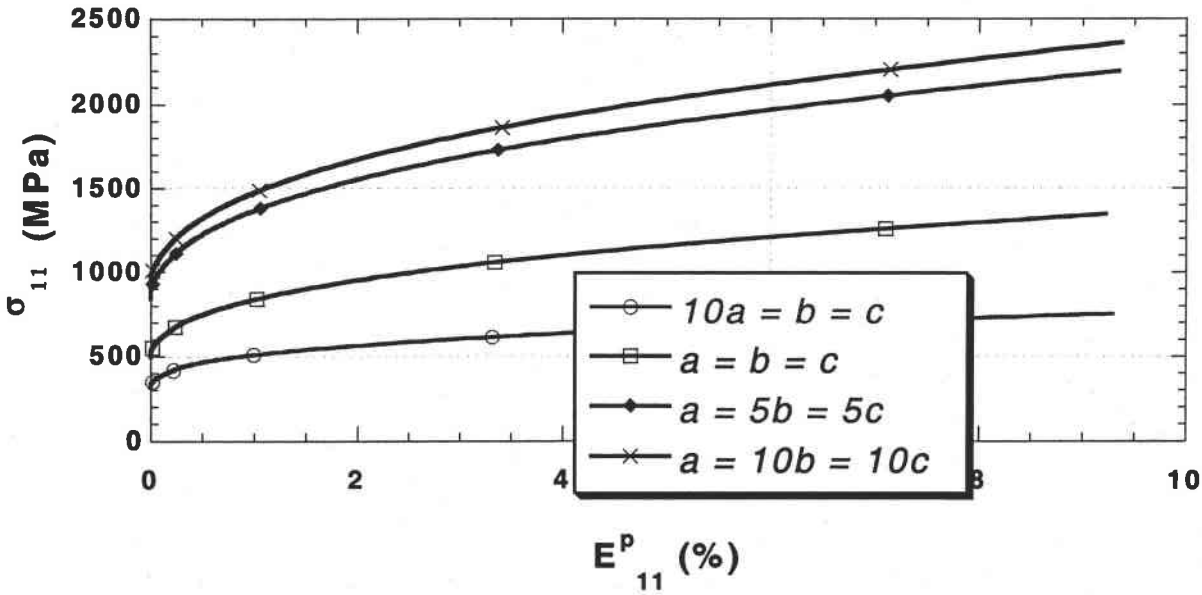


Figure IV.15 : *Influence de la forme des précipités sur les contraintes internes développées dans les précipités du polycristal sollicité en traction (f =10%).*

On constate un adoucissement ou un durcissement du comportement résiduel avec la forme initiale des précipités. Les contraintes internes localisées dans les précipités évoluent différemment, selon la forme des précipités.

La limite élastique augmente avec la valeur du rapport a/c. On observe nettement un durcissement du matériau lorsque ce rapport augmente. Les contraintes internes résiduelles d'ordre trois sont très nettement influencées par la forme des précipités. Les interactions entre la matrice cristalline et les précipités, fortement dépendant de la forme de ces derniers, résultent en un écrouissage intracristallin très important selon l'orientation des précipités par rapport à la direction de la sollicitation.

Dans le cas particulier d'un ellipsoïde allongé, les contraintes internes résiduelles dans les précipités sont plus importantes lorsque l'axe de la plus grande longueur est parallèle à celui de la traction imposée et plus faible dans le cas où ces deux axes sont perpendiculaires. Par contre, dans la matrice cristalline, nous observons une évolution contraire. On y développe moins de contraintes internes lorsque la plus grande longueur de l'ellipsoïde est parallèle à la direction de la sollicitaion (*Figure IV. 16*).

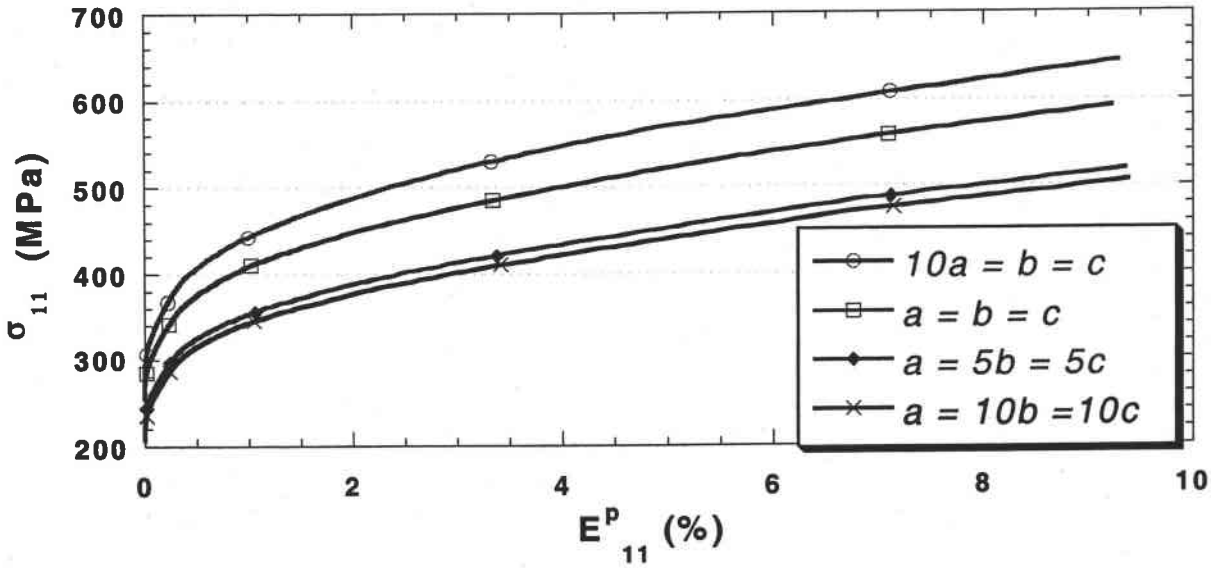


Figure IV.16 : *Influence de la forme des précipités sur les contraintes internes développées dans la matrice cristalline du grain dans un essai de traction (f =10%).*

4.4 Influence de la fraction volumique des précipités sur les contraintes internes d'ordre trois.

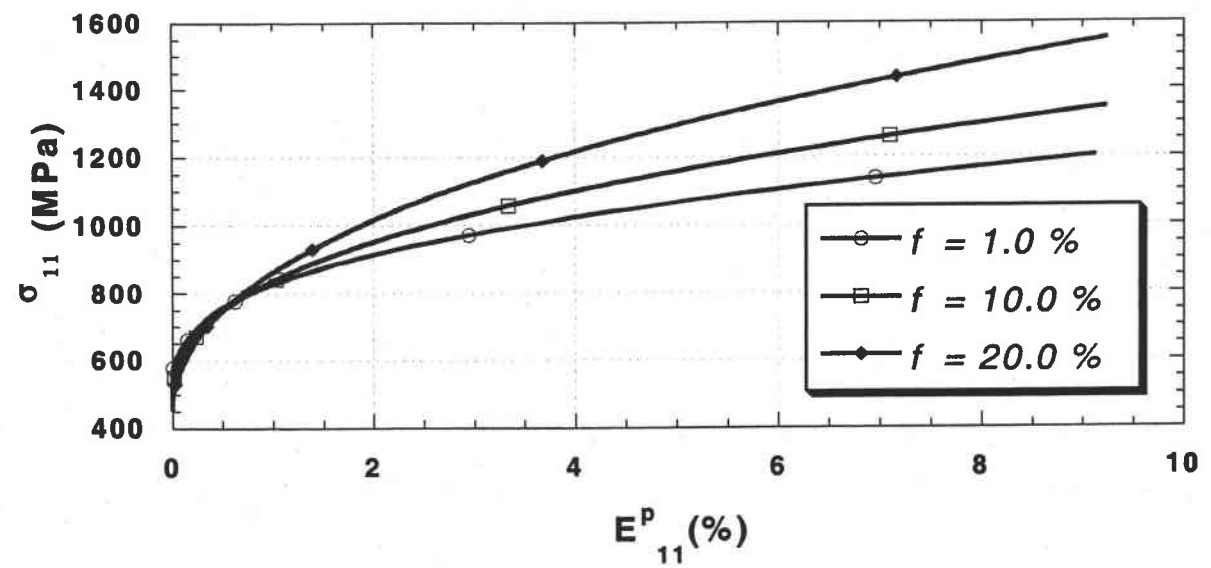


Figure IV.17 : *Influence de la fraction volumique des précipités sur les contraintes internes développées dans les précipités du polycristal sollicité traction (f =10%).*

Tout comme le comportement macroscopique, les contraintes internes dépendent de la fraction volumique des précipités. Les *Figures IV.17* et *IV.18* mettent en évidence une

croissance de ces contraintes ainsi qu'un écrouissage intragranulaire plus important avec l'évolution de la population de précipités. Plus il y' a de précipités dans un grain, plus les obstacles au mouvement des dislocations sont nombreux et plus la polarisation des contraintes internes au niveau des précipités est importante.

On constate que l'effet de la forme et de l'orientation des précipités sur l'évolution des contraintes internes du troisième ordre est plus marqué que celui de la fraction volumique.

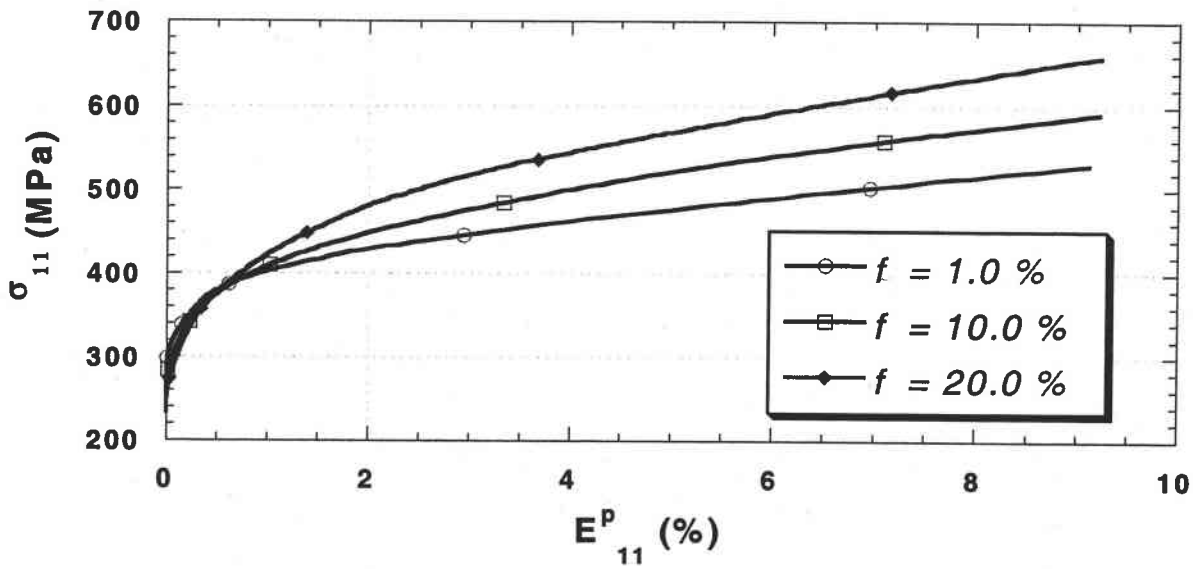


Figure IV.18 : *Influence de la fraction volumique des précipités sur les contraintes internes résiduelles dans la matrice cristalline du grain dans un essai de traction (f =10%).*

5. Chargement cyclique

On se propose dans cette section, d'analyser la réponse du polycristal hétérogène à une sollicitation cyclique. Le matériau est alors soumis à une sollicitation en déformation périodique dans le temps.

On étudie alors l'évolution des cycles de réponses dans le plan (E, Σ). On peut alors mettre en évidence les effets du chargement cyclique tels que l'effet Bauschinger ou le phénomène d'adoucissement ou de durcissement cyclique. La réponse cyclique du matériau est également analysé en fonction de la proportion volumique de précipités ainsi que de leur forme et de leur orientation.

5.1 Effet Bauschinger

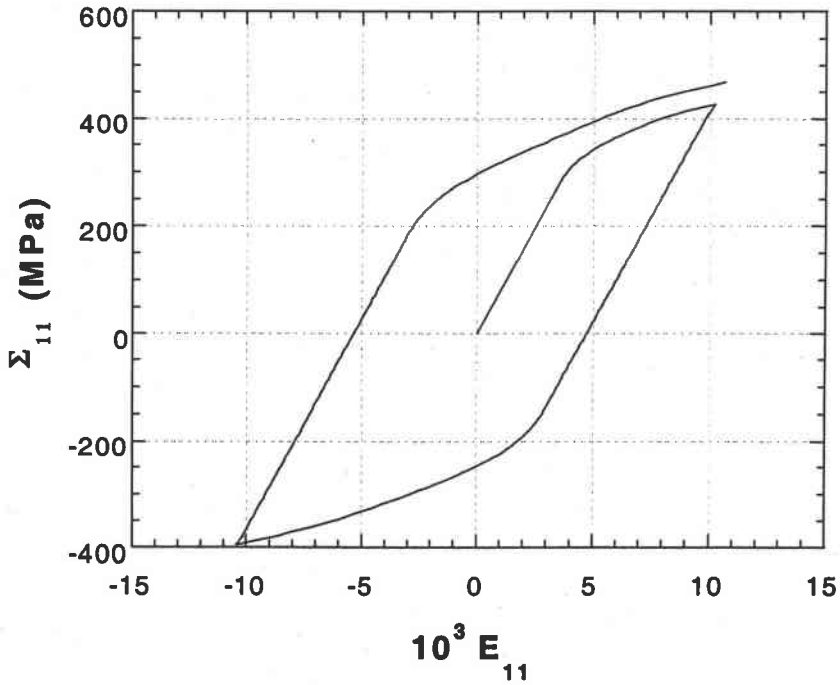


Figure IV.19 : *Mise en évidence de l'effet Bauschinger.*

Lorsque le matériau est soumis à un chargement de traction suivi d'une compression, on constate que du fait de la traction préalable, le matériau s'est écroui dans la direction de la traction. Cette précharge a également adouci le matériau dans le sens de la compression. La limite d'élasticité en traction a augmenté, alors qu'en compression elle devient plus faible.

5.2 Durcissement cyclique

Sous sollicitations cycliques, la plupart des matériaux développe souvent un adoucissement ou un durcissement lié à la variation de leurs propriétés d'écrouissage. Ce comportement dépend du matériau, de son état initial et de la température. En analysant la réponse (*Figure IV.20*) du matériau soumis à une sollicitation cyclique, on constate que l'amplitude des contraintes augmente, la déformation étant par ailleurs imposée.

L'allure générale de la courbe du comportement du matériau sous chargement cyclique est conforme aux résultats expérimentaux. En l'absence d'essais sur le matériau étudié, il nous est impossible d'analyser avec une plus grande précision, la qualité de ces résultats.

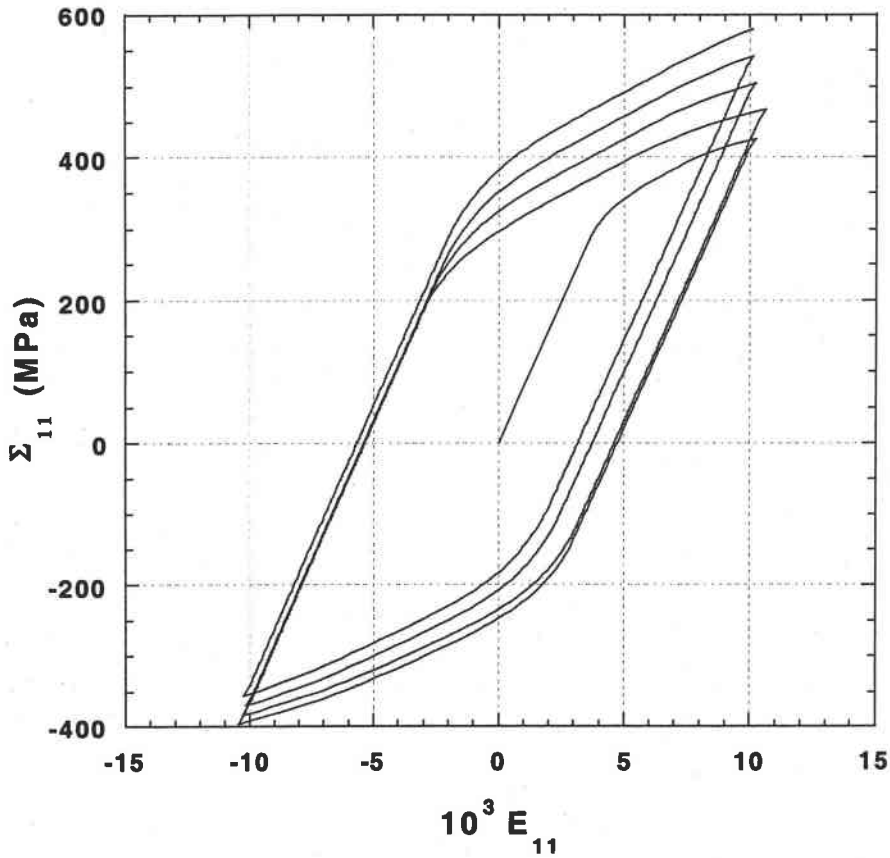


Figure IV.20 : *Phénomène de durcissement cyclique.*

Le phénomène de durcissement, tout comme l'effet Bauschinger sont accentués par la fraction volumique de précipités intragranulaires ainsi que leur forme et leur orientation par rapport au chargement. L'effet Bauschinger est lié au développement de contraintes résultant des hétérogénéités de déformation plastique intragranulaire. En fonction de la fraction volumique, la forme et l'orientation de ces hétérogénéités intragranulaires, les contraintes internes responsables de l'effet Bauschinger se développeront plus ou moins facilement. L'augmentation de l'amplitude des contraintes est plus importante pour 20% de précipités que pour 1% (*Figure IV.21*).

L'influence de la forme et de l'orientation des précipités par rapport à la sollicitation (*Figure IV. 22*) est similaire à celle observée sur les contraintes internes d'ordre trois. Pour une forme ellipsoïdale allongée, le durcissement cyclique est plus important lorsque le plus grand axe est parallèle à la direction de la traction-compression.

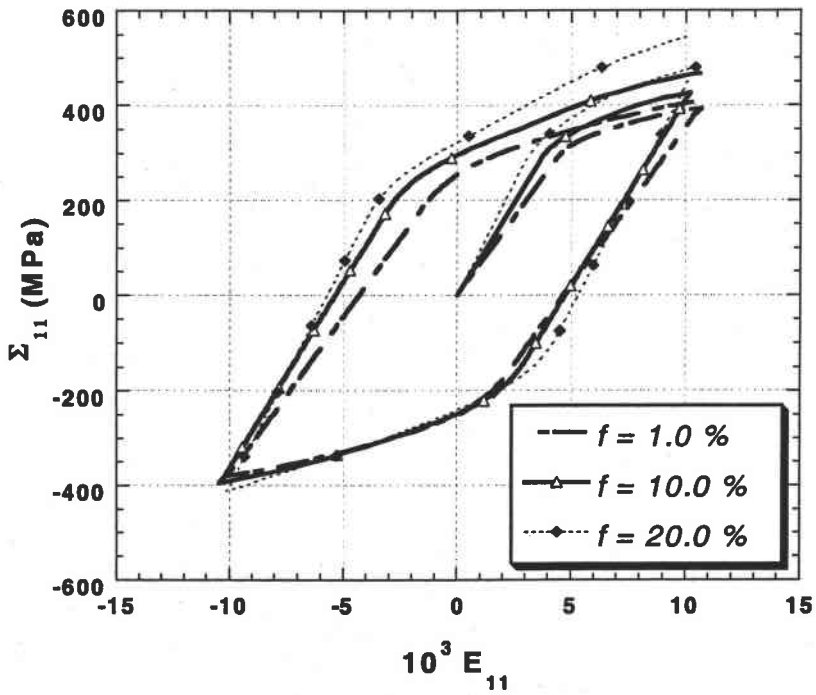


Figure IV.21 : *Effet de la fraction volumique sur la réponse à un cycle de sollicitation traction-compression).*

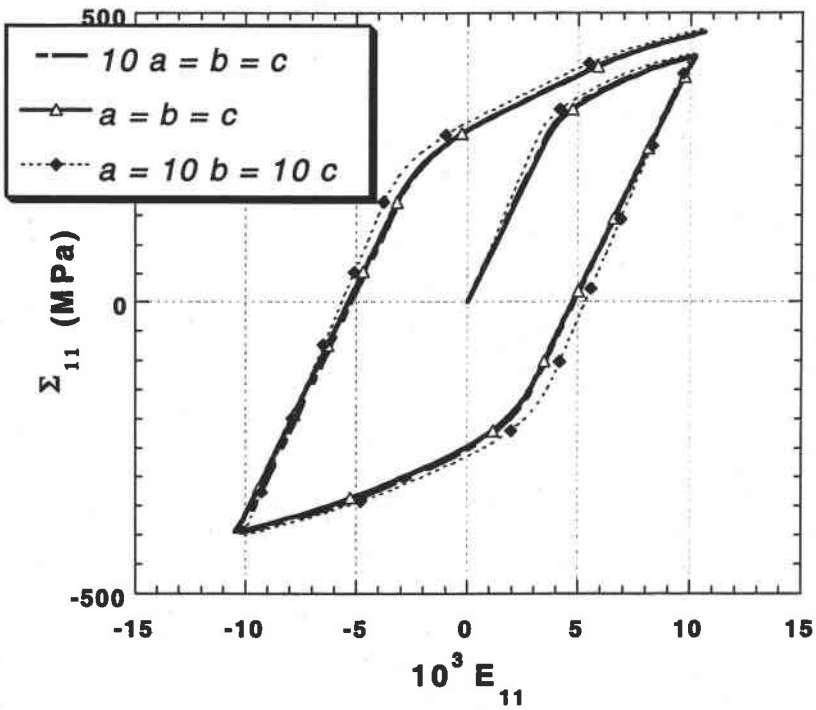


Figure IV.22 : *Effet de la forme des précipités sur la réponse à un cycle de sollicitation traction-compression.*

6. Surfaces d'écoulement plastique

Pour décrire le comportement multiaxial des matériaux, on a généralement recours au concept de surface d'écoulement. Pour un élément de volume du matériau, cette surface caractérise le comportement élastique ou élasto-plastique.

On peut suivre l'évolution de cette surface d'écoulement plastique. La limite d'écoulement est définie par l'état de contrainte correspondant à une déformation plastique équivalente au sens de Von Mises : $E_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} E_{ij}^p E_{ij}^p}$. La *Figure IV.23* représente, pour des chargements monotones biaxés, la forme de la surface d'écoulement plastique du matériau macroscopique en fonction de la limite d'écoulement.

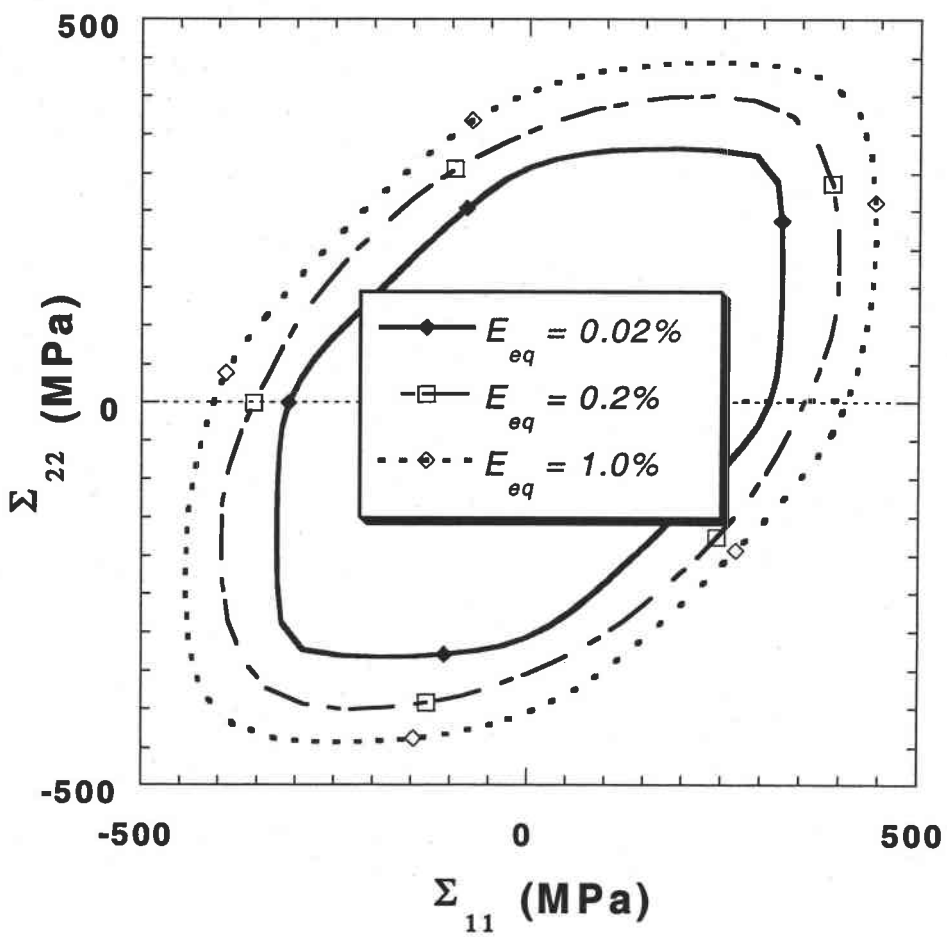


Figure IV.23 : *Surfaces de plasticité pour des chargements biaxés radiaux en fonction de la définition du seuil d'écoulement plastique (10% de précipités sphériques).*

La surface de plasticité initiale correspond aux prédictions du critère de Tresca. Cette surface évolue avec le seuil (de 0.02% à 0.2%), vers le critère de Von Misès. Dans cette étude, les surfaces présentées correspondent à $E_{eq}=0.2\%$. Après une précharge en traction, on analyse la surface d'écoulement plastique macroscopique.

On constate qu'après des chargements plastiques, les surfaces d'écoulement de la *Figure IV.24* présentent un changement notable de forme caractérisé par :

- Une translation de la surface dans la direction du chargement
- La présence d'un point conique plus ou moins prononcé selon le trajet de chargement
- Un aplatissement de la surface d'écoulement dans la direction opposée à celle du chargement.
- Un écrouissage dans les directions transverses au chargement.

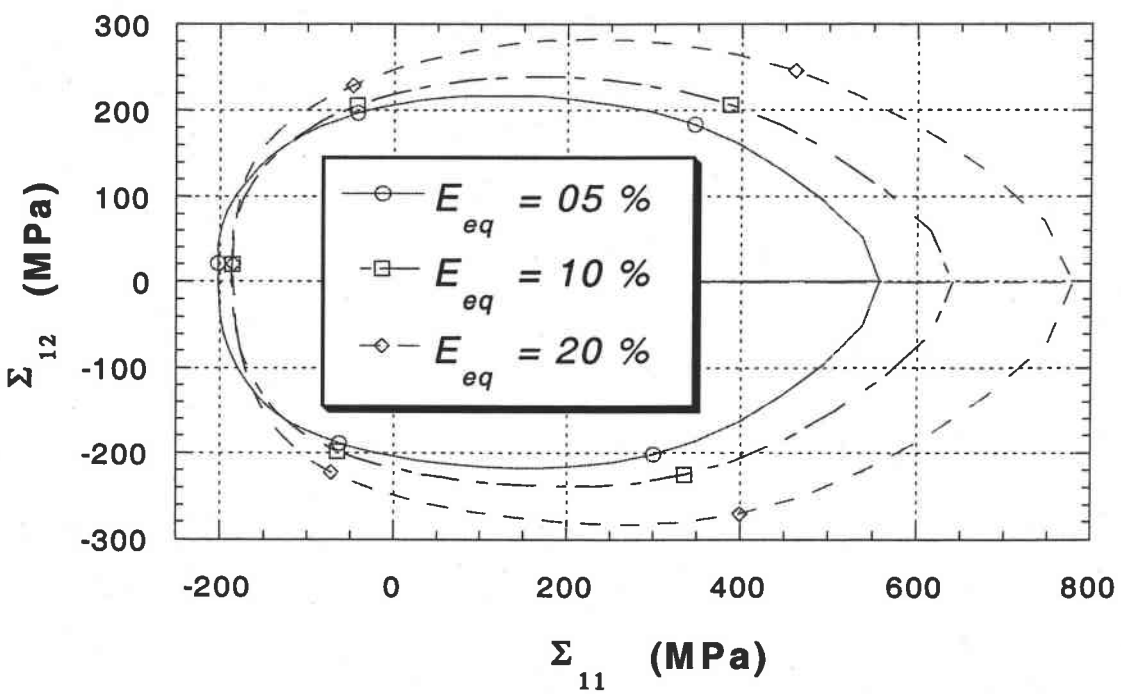


Figure IV.24 : *Surfaces de plasticité pour différents niveaux de pré-déformation en traction pour un matériau contenant 10 % de précipités sphériques.*

On note sur la *Figure IV. 25*, une expansion de la surface, autant plus importante que le taux de pré-déformation est élevé. La déformation plastique des matériaux polycristallins entraîne une importante modification de la structure interne ainsi qu'une variation de l'état mécanique du polycristal.

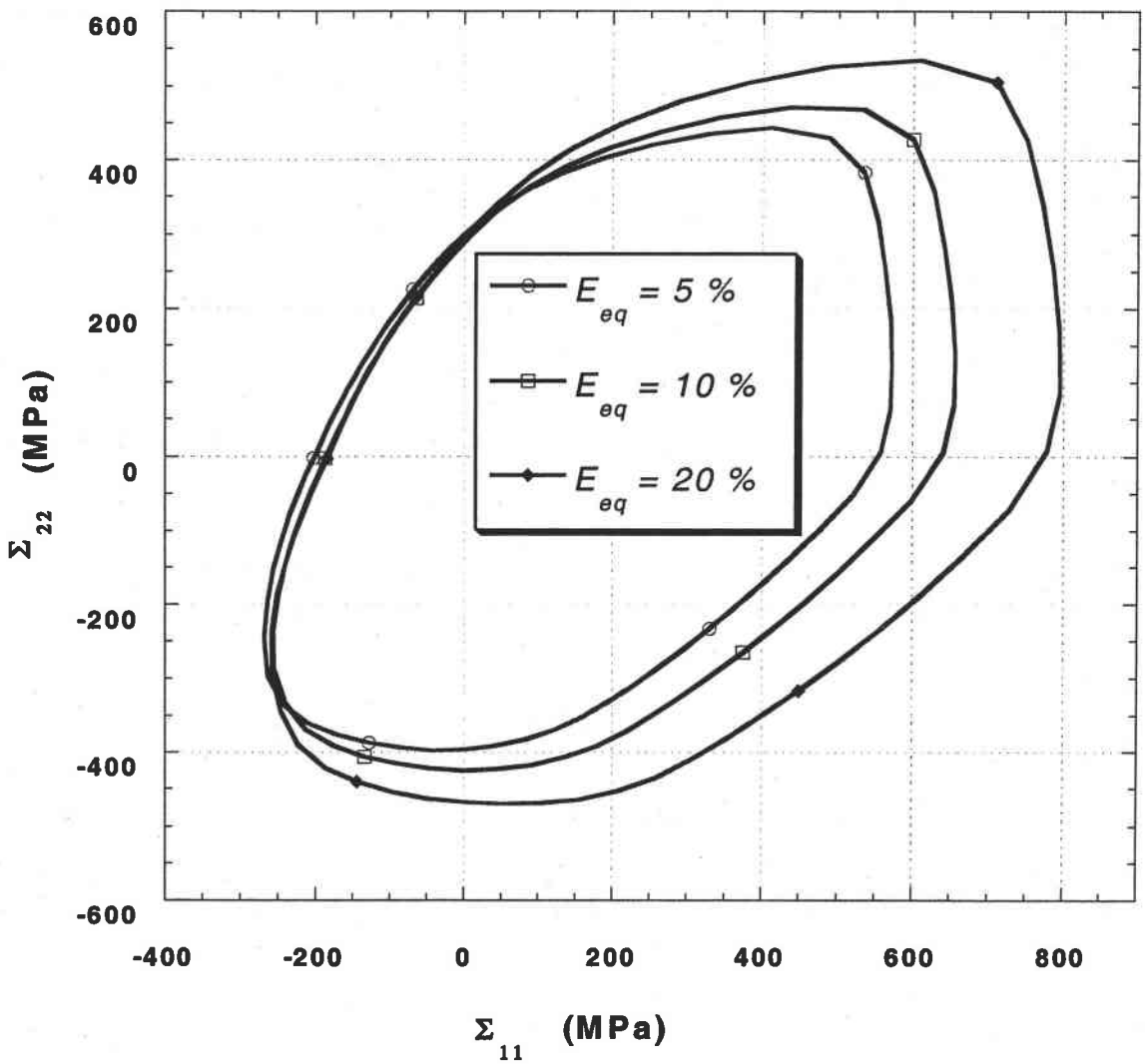


Figure IV.25 *: Surface de plasticité pour différents niveaux de prédéformation en traction pour un matériau contenant 10 % de précipités.*

Dans un essai de traction par exemple, le mouvement des dislocations dans la direction du chargement est rendu difficile par les incompatibilités du champ de déformation présentes à l'échelle du grain. La densité des dislocations mobiles peut être très élevée et conduit à la

formation du point conique observé sur les surface d'écoulement et qui peut être relié à l'écrouissage du matériau. La surface d'écoulement plastique a été analysée également pour tous les chargements élémentaires : traction, cisaillement et laminage (*Figures IV.26* et *IV.27*).

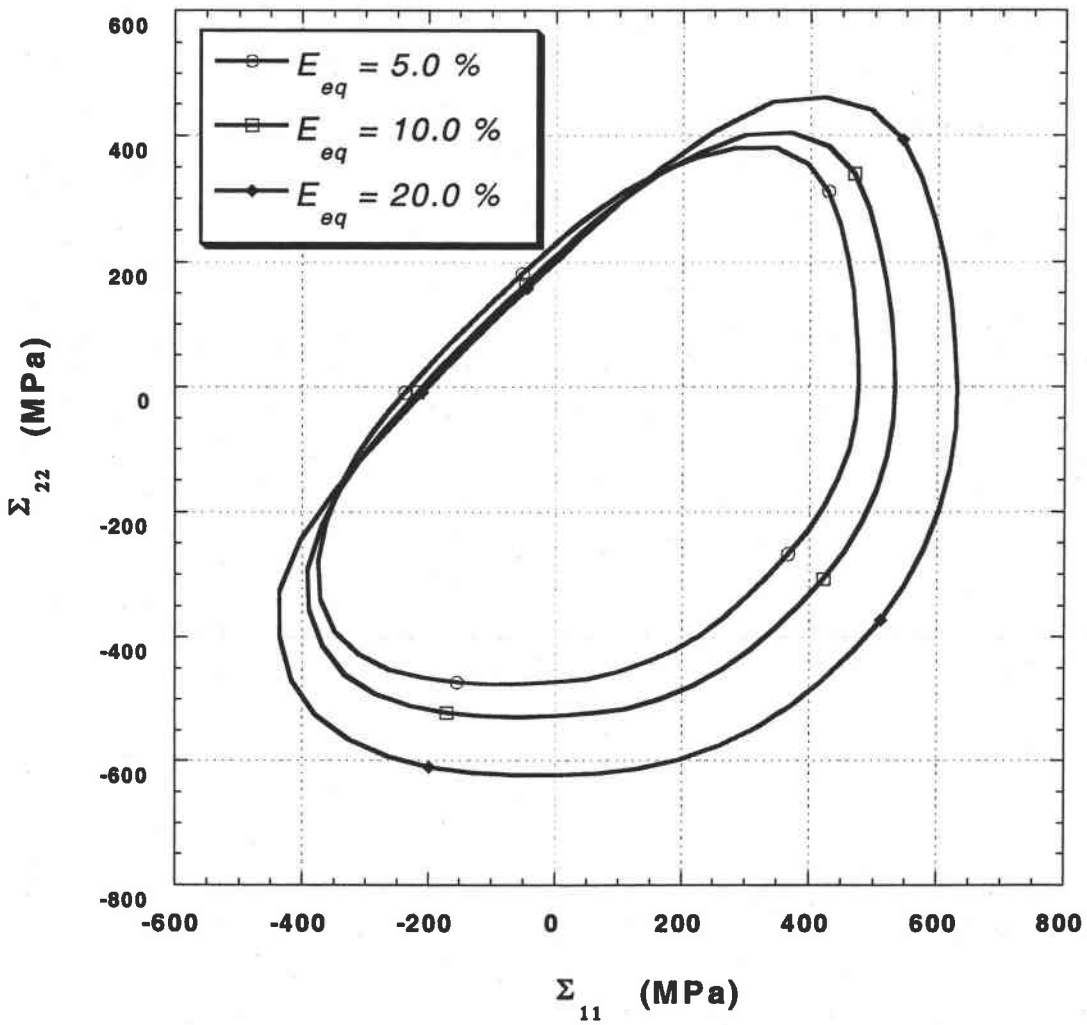


Figure IV.26 : *Surface de plasticité pour différents niveaux de prédéformation en laminage pour un matériau contenant 10 % de précipités sphériques.*

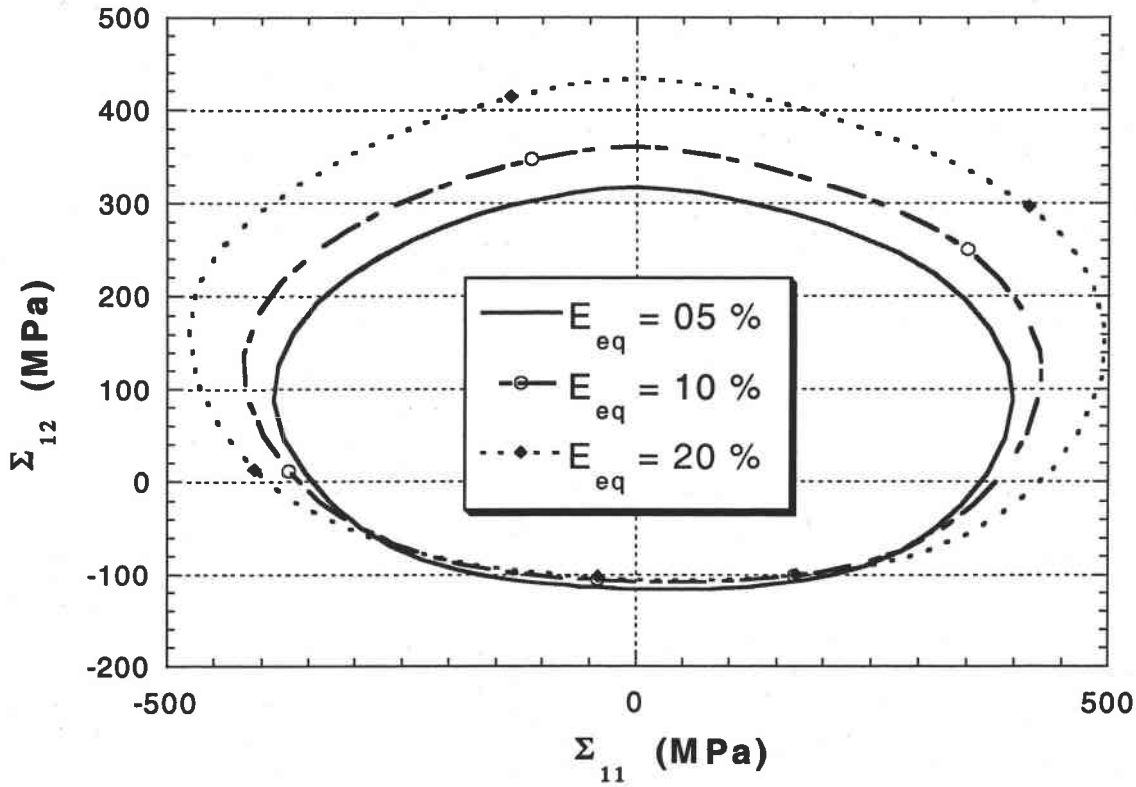


Figure IV.27 : *Surface de plasticité pour différents niveaux de prédéformation en cisaillement pour un matériau contenant 10 % de précipités sphériques.*

7. Influence de la fraction volumique de particules sur l'écrouissage cinématique du matériau

Les cristaux durcis par des particules présentent non seulement un fort effet Bauschinger mais également un écrouissage mixte anisotrope et cinématique. Lors du processus de déformation plastique d'un cristal comportant des précipités, on note la formation de boucles de dislocations autour de ces derniers. Ces boucles traduisent quantitativement l'incompatibilité de déformation entre ceux-ci et la matrice et engendrent une forte polarisation des contraintes. Il en résulte un écrouissage cinématique du matériau. Cet écrouissage cinématique est, comme nous l'avons montré au *Chapitre III,* dépendant du niveau de déformation du matériau, du taux de contrainte dans les précipités et de leur fraction volumique.

La représentation des surfaces d'écoulement plastique en fonction de cette fraction volumique telle que fournie par les *Figures IV. 28* et *IV. 29* permet de vérifier cette idée.

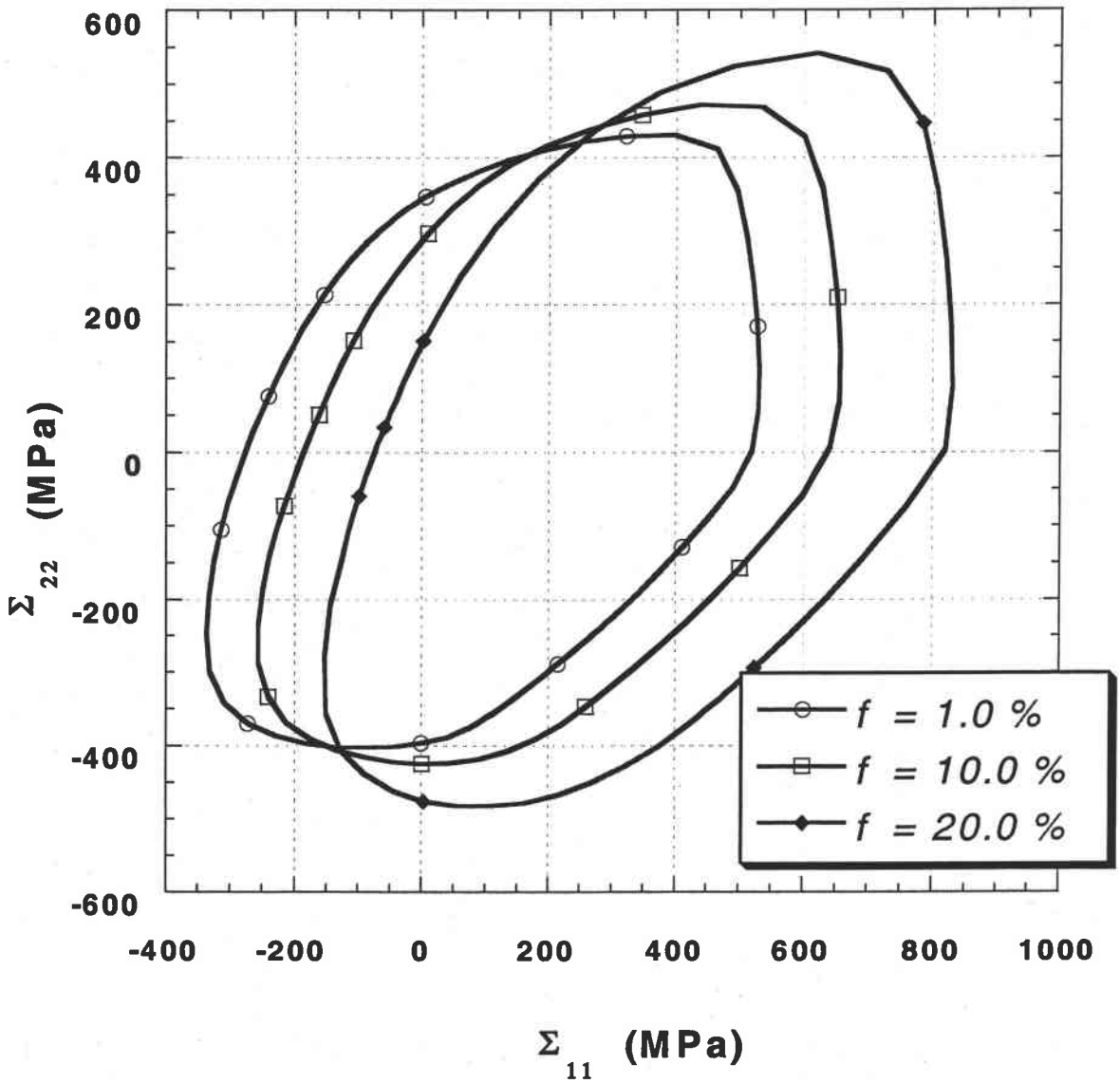


Figure IV.28 : *Evolution de la surface de plasticité après une prédéformation en traction uniaxiale (E_{eq} =10%), en fonction de la fraction volumique de précipités.*

Quel que soit le trajet du préchargement, on note une translation combinée à une expansion anisotrope de la surface d'écoulement plastique en fonction de la fraction volumique des précipités. Cette translation se fait dans la direction du chargement. L'évolution de la forme de la surface de plasticité est anisotrope, en ce sens que le relèvement de la limite d'écoulement macroscopique en fonction de la fraction volumique n'a pas la même valeur dans toutes les directions. En valeur absolue, ce relèvement est plus important dans la direction de chargement que dans les autres directions.

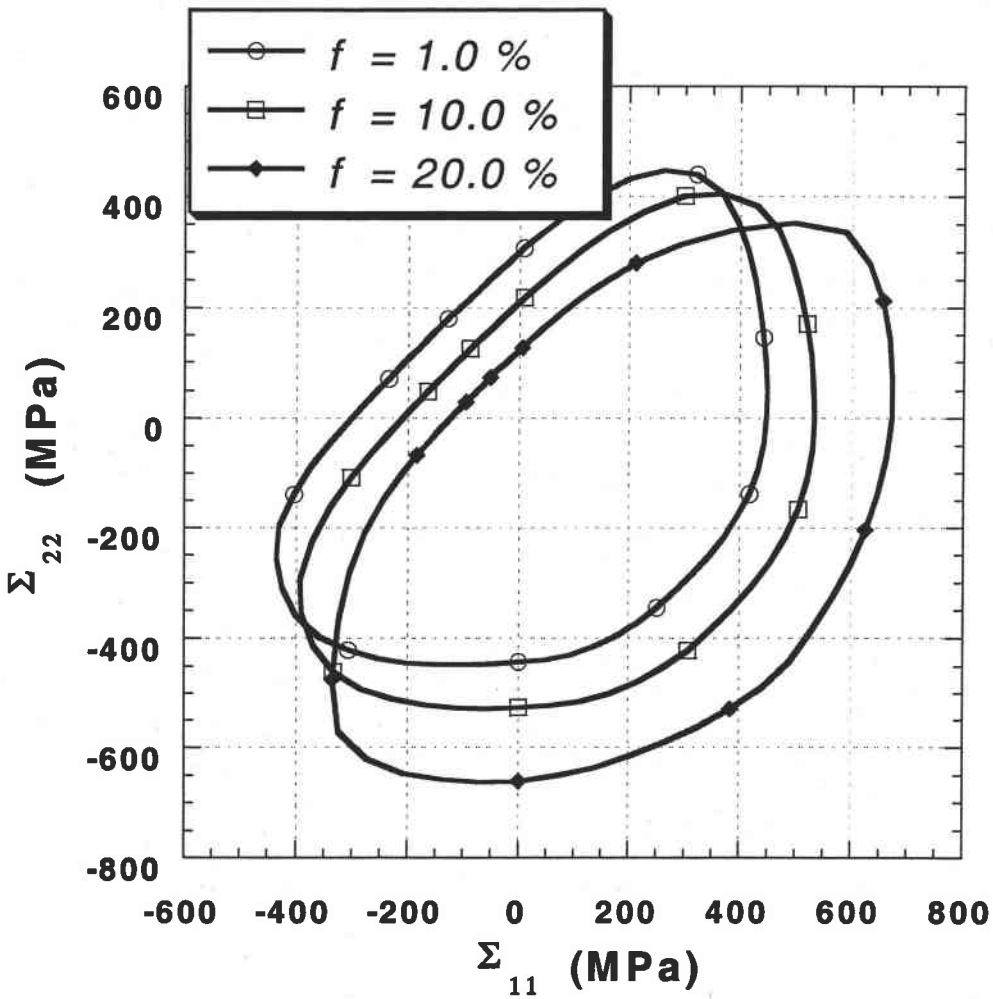


Figure IV.29 : *Evolution de la surface de plasticité après une prédéformation en laminage (E_{eq} =10%)en fonction de la fraction volumique de précipités.*

Nous avons établi dans le *Chapitre II* que la variable d'écrouissage X, associée à cette évolution cinématique du matériau est une fonction linéaire de la fraction volumique des hétérogénéités et de leur niveau de contrainte interne : $X = f\,\sigma^3$. Cette description est bien traduite dans la modélisation présentée. En effet, sur la *Figure IV. 30*, nous constatons que la limite d'écoulement macroscopique dépend linéairement de la fraction volumique des précipités.

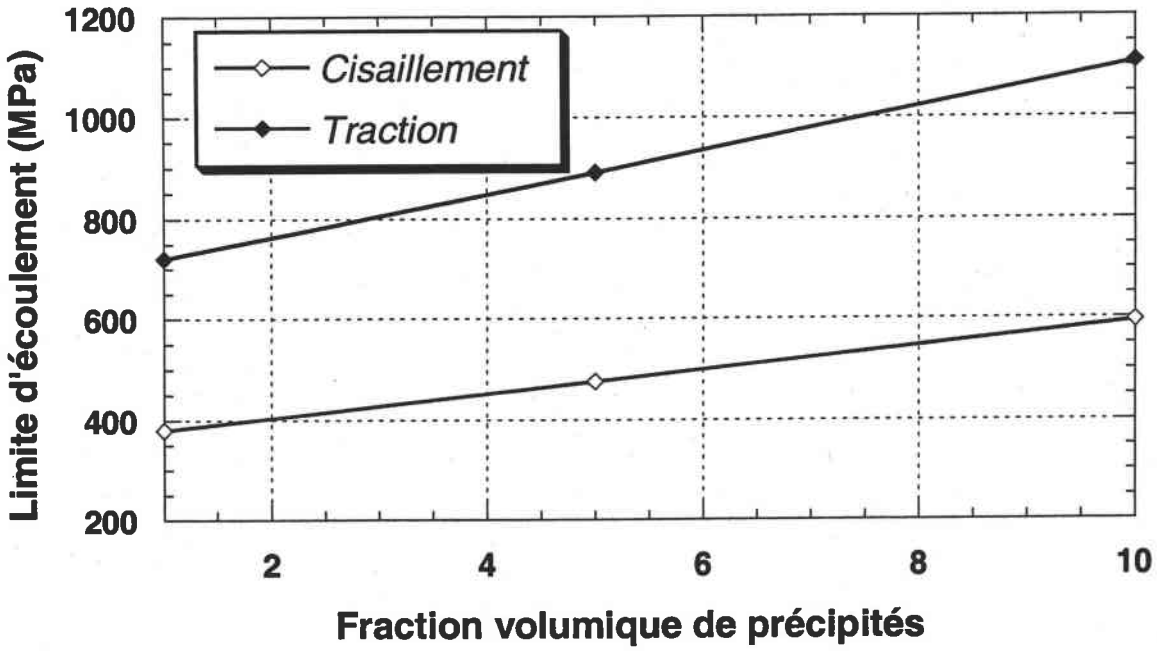


Figure IV.30 : *Evolution de la limite d'écoulement (après préchargement de $E_{eq}=10\%$) dans la direction du chargement en fonction de la fraction volumique de précipités.*

8 Conclusion

Les résultats de simulations numériques présentés dans cette première partie donnent une idée du comportement élastoplastique des matériaux polycristallins contenant des hétérogénéités intragranulaires. La présence de ces particules étrangères induit des modifications du comportement global du grain et à une échelle plus grande, de celui du polycristal.
Ces résultats sont issus de la nouvelle formulation de l'écrouissage du grain hétérogène, telle que décrite au *Chapitre II*. Cette modélisation de l'écrouissage intracristallin tient compte des interactions entre les dislocations dans leur mouvement et les particules non cohérentes qui constituent des obstacles à ce mouvement.

L'analyse des surfaces d'écoulement a révélé le caractère mixte anisotrope et cinématique de l'écrouissage induit par la présence de précipités intragranulaires. Les distorsions de la forme de cette surface sont notamment caractérisées par une expansion et une translation anisotrope.

Les modifications du comportement interne du métal ont également été analysées à travers l'étude des contraintes internes développées dans les divers grains ainsi que celles localisées dans les particules intragranulaires et la matrice cristalline. Ces différents résultats ont été développés en fonction de paramètres de particules - forme, orientation et fraction volumique - mais également en fonction du mode de sollicitation auquel est soumis le matériau étudié. Nous avons constaté une forte polarisation des contraintes internes d'ordre trois au niveau des précipités faisant apparaître, à l'interface cristal-précipités, des sauts de contraintes très importants. Cette discontinuité très prononcée de la contrainte interne à l'interface sera l'un des facteurs décisifs de la décohésion de ce dernier. L'initiation de la cavité par ce mécanisme amorcera le processus d'endommagement ductile du matériau.

Après cette première phase d'applications, au cours de laquelle nous avons mis en évidence l'existence de fortes singularités dans l'évolution locale des contraintes internes du troisième ordre, nous aborderons dans le chapitre suivant, l'étude des deux premières phases de l'endommagement ductile. Après l'amorçage des microcavités, ces dernières vont croître, essentiellement avec la déformation plastique du cristal environnant.

Chapitre V

Application à la modélisation de l'endommagement ductile.

1. Décohésion de l'interface précipité-matrice cristalline
   1.1 Condition énergétique d'amorçage de l'endommagement
   1.2 Condition de la contrainte critique de l'amorçage
   1.3 Modélisation de la décohésion

2. Adoucissement du grain poreux

3. Croissance de l'endommagement

4. Vers la rupture du grain

5. Conclusion

6. Bibliographie

Chapitre V

Application à la modélisation de l'endommagement ductile.

La rupture par coalescence de microcavités représente un mécanisme important de l'endommagement ductile des métaux. Les cavités s'initient généralement au niveau de précipités de seconde phase, soit par rupture de ces derniers, soit par une décohésion de l'interface précipité/matrice cristalline. La cavité ainsi créée va croître avec la déformation plastique de la matrice environnante.

Les premières approches micromécaniques de ces mécanismes d'endommagement ductile ont consisté essentiellement en l'étude de la croissance d'une cavité isolée dans un solide élastoplastique infini (McClintock [4]; Rice et Tracey [6]). Par la suite, des travaux se sont concentrés sur la prise en compte des interactions non négligeables entre cavités voisines. Les préoccupations des chercheurs se sont également portées sur la modélisation des deux autres importantes étapes du processus de l'endommagement ductile : l'amorçage de cavités et la description du stade final, ou rupture par coalescence de cavités.

Plusieurs modèles de comportement des matériaux poreux ont été développés. A partir de l'étude d'un agrégat de cavités dans une matrice parfaitement plastique, Gurson [2] a proposé une condition d'écoulement plastique du matériau macroscopique. D'autres critères d'écoulement plastique ont été proposés par Shima et Oyane [7]. Ces divers modèles, à l'instar de celui de Gurson, s'ils donnent de résultats satisfaisants pour certaines formes de précipités à l'origine de la création de cavités, se révèlent assez limités dans la description de la rupture finale du matériau.

Des modifications ont été introduites au modèle initial de Gurson pour l'adapter à la modélisation de cette étape finale. Tvergaard et Needleman [9] ont ainsi proposé une fonction de la fraction volumique de cavités pour mieux représenter l'accélération de la perte de ductilité du matériau à l'approche de la rupture finale.

Les résultats de cette partie sont issus d'une première adaptation du modèle d'écrouissage par hétérogénéités intragranulaires à la description du processus d'endommagement ductile. Le but essentiel est de vérifier l'aptitude de la formulation adoptée à la prise en compte de la décohésion de l'interface et de la croissance des cavités ainsi créés. Une modélisation plus élaborée sera étudiée pour préciser les résultats et rendre compte de tous les paramètres liés à l'endommagement tels que le changement de forme des cavités, la prise en compte après la décohésion de la présence des précipités à l'intérieur des cavités.

Dans la présente modélisation, basée sur une double transition d'échelle micro-méso-macro nous proposons une description micromécanique du processus de l'endommagement. Les cavités s'initient au niveau des précipités intragranulaires et c'est l'état interne du matériau qui pilote essentiellement tous les mécanismes. Les techniques d'homogénéisation-localisation, permettent à chaque instant, soit de plonger dans la matière pour préciser les contraintes et déformations locales, soit de réactualiser les propriétés du grain, ou du polycristal équivalent en tenant compte des modifications des propriétés locales induites par la croissance des cavités. L'amorçage de l'endommagement par décohésion interfaciale résulte de l'évolution de l'état de contrainte et de déformation au niveau du précipité. La phase de croissance de l'endommagement, est également directement reliée à la déformation plastique de la matrice environnante. Le comportement pré-endommagement du matériau est décrit par le modèle d'écrouissage du chapitre précédent.

Après une description des mécanismes d'amorçage de l'endommagement par décohésion interfaciale, nous présenterons le critère retenu pour la modélisation de cette première étape. Ce critère est basée sur une conditions énergétique pour prendre en compte l'effet de taille de la particule à l'origine de la décohésion. Nous étudierons également l'instant d'amorçage de l'endommagement par décohésion de l'interface dans les différents grains du polycristal caractérisé par une certaine disparité. Le niveau des contraintes étant différent selon leur orientation, l'initiation des cavités ne devrait pas être simultanée dans tous les grains hétérogènes.

Nous présenterons ensuite une discussion sur la croissance de l'endommagement par variation de la porosité. L'influence du mode de sollicitation et de la triaxialité des contraintes sera analysée pour spécifier la réponse mécanique du matériau endommagé.

Dans le cadre de cette étude, les cavités sont essentiellement initiées par décohésion d'interface. La croissance de l'endommagement au cours de la déformation plastique est abordée d'un point de vue purement local. Cette croissance de l'endommagement résulte de la combinaison de deux mécanismes : l'augmentation du nombres des cavités par de nouvelles

germinations au cours de la déformation, et l'évolution de la taille de ces cavités, ce qui se traduit par la formule.

$$\dot{f} = \dot{f}_{nucleation} + \dot{f}_{croisssance} \tag{V.1}$$

La première partie est consacrée à l'initiation de l'endommagement par décohésion. Cette première étape de l'endommagent est régie par deux critères.

1. Décohésion de l'interface précipité - matrice cristalline

Modéliser l'amorçage de l'endommagement revient à proposer, à partir d'une analyse physique et mécanique des propriétés structurales du matériau, un critère pour l'initiation d'une cavité par rupture de l'hétéogénéité intragranulaire ou par décohésion de l'interface.

A l'échelle microscopique, deux conditions doivent être vérifiées pour l'amorçage de l'endommagement lié à la présence de précipités hétérogènes.

- Un critère énergétique énonçant que l'énergie de déformation élastique stockée dans le précipité et libérée lors de l'amorçage doit excéder l'énergie de création de surfaces à l'interface matrice-précipité.
- Un critère de contrainte critique selon lequel, l'amorçage de l'endommagement n'est possible que si la contrainte locale du précipité ou à l'interface atteint la valeur critique de rupture du précipité ou de la décohésion interfaciale.

L'analyse mécanique développée à deux échelles, permet de déterminer l'état de contrainte et de déformation du matériau macroscopique en tenant compte de sa rhéologie et des conditions aux limites. A l'échelle microscopique, la mise en œuvre d'une formulation autocohérente du problème de l'inclusion, conduit à la détermination de l'état local de contrainte et de déformation, aussi bien dans le précipité intragranulaire que dans la matrice cristalline pour envisager la mise en œuvre des critères d'amorçage de l'endommagement.

1.1 Condition énergétique de l'amorçage de l'endommagement

L'énergie libérée par la relaxation des contraintes lors de l'initiation d'une microcavité est une fraction de l'énergie stockée dans le précipité. Elle est donc proportionnelle au volume du précipité et est une fonction croissante du niveau de contrainte et de déformation locale.La condition d'amorçage peut donc s'écrire :

$$W_{vol} = W_{surf} \tag{V.2}$$

où :

$$W_{vol} = \frac{1}{2} V \ \boldsymbol{\sigma}^3 : \tilde{\boldsymbol{s}}^3 : \boldsymbol{\sigma}^3 \tag{V.3}$$

et

$$W_{surf} = 2S\gamma \tag{V.4}$$

γ représente l'énergie superficielle de la cavité, S et V respectivement la surface et le volume du précipité. Ce critère énergétique introduit un effet de taille du précipité à travers le rapport $\frac{V}{S}$. Plus le précipité est gros et plus faible sera l'énergie ou la déformation nécessaire à l'amorçage de l'endommagement.

1. 2 Condition de contrainte critique d'amorçage de l'endommagement

A partir de l'estimation des contraintes à l'interface, ce critère stipule que pour initier une microcavité par décohésion de l'interface, le saut de contrainte doit atteindre une valeur critique σ^c dépendant des propriétés spécifiques de la matrice et du précipité, mais également de la cohésion à l'interface. L'introduction des opérateurs interfaciaux permet de déterminer les champs de déplacement et de contrainte à l'interface.

Durant la phase du comportement du grain avant la décohésion, ces champs sont continus à l'interface car il y a une liaison supposée parfaite entre les deux constituants du grain hétérogène. Le saut de déplacement à l'interface est alors nul.

$$[\dot{u}_i] = \dot{u}_i^m - \dot{u}_i^3 = 0 \tag{V.5}$$

Ainsi en un point quelconque de l'interface, les conditions de compatibilités :

$$du_i = u_{i,j}\, dx_j \tag{V.6}$$

imposent :

$$[\dot{u}_{i,j}]dx_j = (\dot{u}_{i,j}^m - \dot{u}_{i,j}^3)dx_j = 0 \tag{V.7}$$

Or si $\vec{n}$ représente la normale unitaire de l'interface on a :

$$n_j\, dx_j = 0 \tag{V.8}$$

On peut alors déduire de (V.7) la relation suivante :

$$[\dot{u}_{i,j}] = (\dot{u}_{i,j}^m - \dot{u}_{i,j}^3) = \lambda_i\, n_j \tag{V.9}$$

Les composantes λ_i du vecteur $\vec{\lambda}$ représentent les coefficients de proportionnalité correspondant à l'amplitude du saut du taux de déplacement à l'interface. Dans l'hypothèse des petites perturbations on peut écrire :

$$[\dot{\varepsilon}_{ij}]=(\dot{\varepsilon}_{ij}^{m}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{3})=\frac{1}{2}(\lambda_i n_j+\lambda_j n_i) \tag{V.10}$$

L'équilibre de l'interface en parfaite cohésion suppose également la continuité du vecteur de contrainte :

$$\dot{\sigma}_{ij}^{m} n_j=\dot{\sigma}_{ij}^{3} n_j \tag{V.11}$$

soit :

$$[\dot{\sigma}_{ij}]n_j=(\dot{\sigma}_{ij}^{m}-\dot{\sigma}_{ij}^{3})n_j=0 \tag{V.12}$$

En introduisant les lois du comportement des deux phases :

$$(l_{ijkl}^{m}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{m}-c_{ijkl}^{3}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{3})n_j=0 \tag{V.13}$$

et en tenant compte de V.10, on obtient :

$$(l_{ijkl}^{m}-c_{ijkl}^{3})\dot{\varepsilon}_{kl}^{3} n_j+l_{ijkl}^{m}\lambda_k n_l n_j=0 \tag{V.14}$$

On peut alors déduire l'expression des coefficients λ_i :

$$\lambda_m=K_{im}^{-1}(c_{ijkl}^{3}-l_{ijkl}^{m})\dot{\varepsilon}_{kl}^{3} n_j \tag{V.15}$$

où :

$$K_{ik}=l_{ijkl}^{m} n_l n_j \tag{V.16}$$

ce qui conduit à une nouvelle expression du saut du taux de déformation :

$$[\dot{\varepsilon}_{ij}]=(\dot{\varepsilon}_{ij}^{m}-\dot{\varepsilon}_{ij}^{3})=L_{ijmn}^{*}(c_{mnkl}^{3}-l_{mnkl}^{m})\dot{\varepsilon}_{kl}^{3} \tag{V.17}$$

L'opérateur interfacial $\tilde{L}^{*}$ est défini par :

$$L_{ijkl}^{*}=\frac{1}{4}(K_{ik}^{-1} n_j n_l+K_{il}^{-1} n_j n_k+K_{jk}^{-1} n_i n_l+K_{jl}^{-1} n_i n_k) \tag{V.18}$$

De la relation V.17, on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{m}=(I_{ijkl}+L_{ijmn}^{*}(c_{mnkl}^{3}-l_{mnkl}^{m}))\dot{\varepsilon}_{kl}^{3} \tag{V.19}$$

soit :

$$\dot{\sigma}_{ij}^{m}=l_{ijkl}^{m}\,\dot{\varepsilon}_{kl}^{3}+l_{ijkl}^{m}\,L_{klmn}^{*}\,\dot{\sigma}_{mn}^{3}-l_{ijkl}^{m}L_{klmn}^{*}\,l_{mnrs}^{m}\,\dot{\varepsilon}_{rs}^{3} \tag{V.20}$$

ou encore :

$$\dot{\sigma}_{ij}^{m}=(l_{ijrs}^{m}-l_{ijkl}^{m}L_{klmn}^{*}\,l_{mnrs}^{m})\dot{\varepsilon}_{rs}^{3}+l_{ijkl}^{m}\,L_{klmn}^{*}\,\dot{\sigma}_{mn}^{3} \tag{V.21}$$

Le saut de contrainte s'écrit alors :

$$[\dot{\sigma}_{ij}]=\dot{\sigma}_{ij}^{m}-\dot{\sigma}_{ij}^{3}=(l_{ijrs}^{m}-l_{ijkl}^{m}L_{klmn}^{*}\,l_{mnrs}^{m})\dot{\varepsilon}_{rs}^{3}-(I_{ijmn}-l_{ijkl}^{m}\,L_{klmn}^{*})\dot{\sigma}_{mn}^{3} \tag{V.22}$$

ou :

$$[\dot{\sigma}_{ij}]=\left(l^m_{ijrs}-l^m_{ijkl}L^*_{klmn}\,l^m_{mnrs}\right)s^3_{rsop}\dot{\sigma}^3_{op}-\left(l^m_{ijop}-l^m_{ijkl}\,L^*_{klrs}l^m_{rsmn}\right)m^m_{mnop}\,\dot{\sigma}^3_{op} \qquad (V.23)$$

et finalement :

$$[\dot{\sigma}_{ij}]=\left(l^m_{ijrs}-l^m_{ijkl}L^*_{klmn}\,l^m_{mnrs}\right)\left(s^3_{rsop}-m^m_{rsop}\right)\dot{\sigma}^3_{op} \qquad (V.24)$$

On peut définir un opérateur interfacial de contraintes $\tilde{O}$ tel que :

$$O_{ijrs}=l^m_{ijrs}-l^m_{ijkl}L^*_{klmn}\,l^m_{mnrs} \qquad (V.25)$$

L'expression complète du saut de contrainte à l'interface devient :

$$[\dot{\sigma}_{ij}]=O_{ijrs}\left(s^3_{rsop}-m^m_{rsop}\right)\dot{\sigma}^3_{op} \qquad (V.26)$$

Connaissant l'état de contrainte $\dot{\sigma}^3$ ainsi que les propriétés élastoplastiques de la matrice cristalline et du précipité il est alors possible de déterminer la contrainte normale maximale à l'interface. Le critère de décohésion est satisfait lorsque cette contrainte normale atteint la valeur critique σ^n_{cr}. Contrairement à la condition énergétique, la condition de la contrainte critique ne dépend pas explicitement de la taille du précipité. Ce critère n'est pas exploité dans cette étude. Les valeurs des divers paramètres liés au critère de décohésion sont :

$$R=0.5\mu m \ , \quad \gamma=1\ J/m^2$$

A titre d'exemple, la *Figure V.1* présente, pour le critère énergétique, l'évolution de la déformation macroscopique nécessaire à l'amorçage par décohésion, en fonction de la taille du précipité. On constate que la décohésion de petits précipités exige des niveaux de déformation assez élevés alors que les premiers stades de déformation du matériau suffisent généralement à initier des cavités autour de précipités de grande taille.

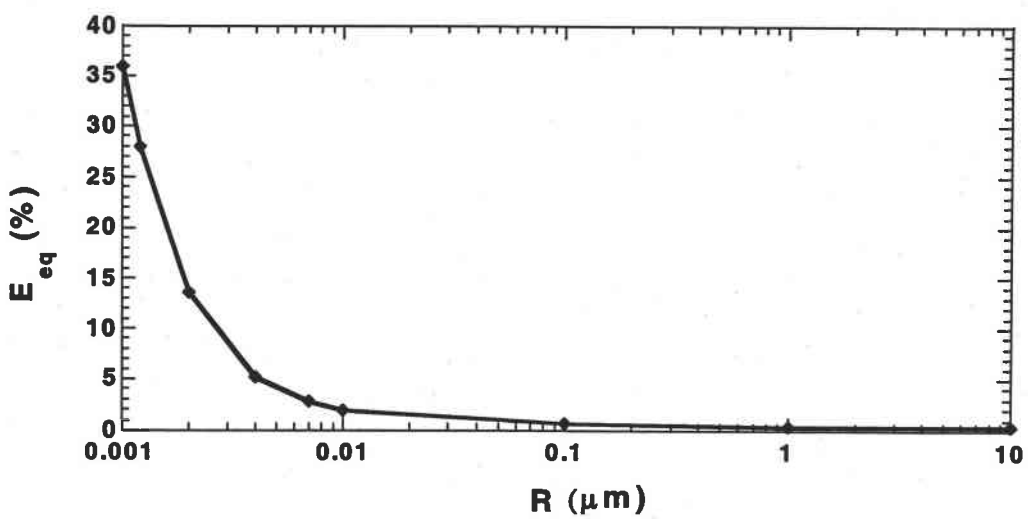


Figure V.1 : *Déformation macroscopique au moment de l'amorçage en fonction de la taille des précipités sphériques.*

1.3 Modélisation de la décohésion de l'interface cristal-précipités

Plusieurs modèles de décohésion d'interface ont été proposés pour la simulation numérique de la progression d'une cavité d'interface. Ces modèles qui s'inscrivent dans le cadre d'un dommage mécanique de l'interface en reliant les discontinuités du déplacement à l'interface aux tractions correspondantes, sont basés sur les travaux de Needleman [5] et Tvergaard [8]. Cette approche permet de décrire le processus de la décohésion de l'interface en supposant que les tractions interfaciales dérivent d'un potentiel $\phi(u_n, u_t)$, fonction du saut de déplacement normal et tangentiel à l'interface. Cette modélisation introduit entre autres une longueur caractéristique δ de l'interface.

La démarche initiale de Needleman et de Tvergaard a été modifiée par Chaboche et *al.* [1], pour décrire d'une part le comportement de contact-frottement de l'interface après la séparation totale, et d'autre part garantir la continuité du comportement des deux phases de matériaux. Le comportement de l'interface lors de l'amorçage de la décohésion déduit de la présente modélisation présente une évolution très proche des modèles de décohésion de Needleman et Tvergaard (*Figure V.2*). Signalons que les grains tests des simulations sont les mêmes que ceux adoptés au chapitre précédent.

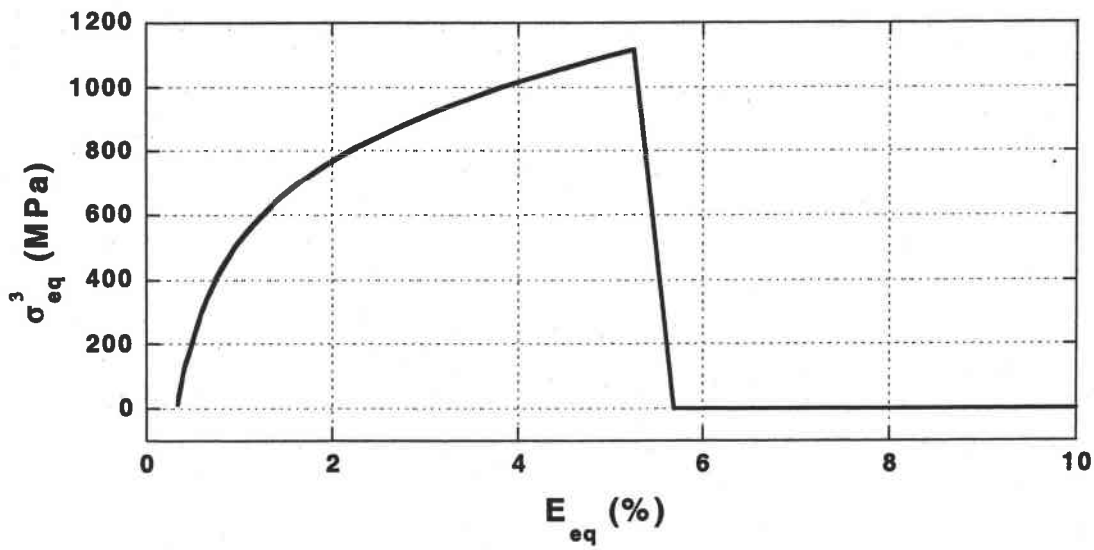


Figure V. 2: *Comportement mécanique du précipité dans le grain 1, au cours du processus d'endommagement ductile du polycristal.*

Lors du chargement, la contrainte interne du précipité et à l'interface augmente avec la déformation du matériau. Cette première phase est élastique. Durant cette phase élastique, le précipité emmagasine de l'énergie élastique qui sera restituée lors de la relaxation des

contraintes consécutive à la création de nouvelles surfaces. Dès que le critère de décohésion est satisfait, la séparation de l'interface est effective et il n'y a plus de continuité de la matière. L'énergie stockée dans le précipité est restituée pour la création de surfaces et la contrainte locale du précipité s'annule.

Cette chute de la contrainte sera d'autant plus rapide que l'énergie stockée est importante. C'est essentiellement ce cas de figure que nous observons dans la simulation présentée à la *Figure V.2*. Le processus d'amorçage de l'endommagement par décohésion de l'interface, se déroule indépendamment dans chaque grain du polycristal, en fonction de l'état actuel de contrainte et de déformation. Pour les différents résultats proposés, la fraction volumique de précipités considérée est égale à 10%.

La *Figure V.3* ci-après montre que le processus d'amorçage de l'endommagement par décohésion dans un grain peut commencer dès les premières phases de la déformation plastique. On constate que par exemple pour le grain 2, ce processus prend place au voisinage de 2% de déformation macroscopique. Ce résultat relatif à l'instant d'amorçage est en accord avec les investigations antérieures de Roberts et *al.* (1976) et de Bernard et *al.* (1979). En effet, dans le cas d'inclusions de sulfures de manganèse dans un acier, ces auteurs estiment que la décohésion se produit pour une déformation voisine de 0,02. Précisons que cet instant d'amorçage dépend essentiellement du degré d'adhésion entre les précipités et de la matrice.

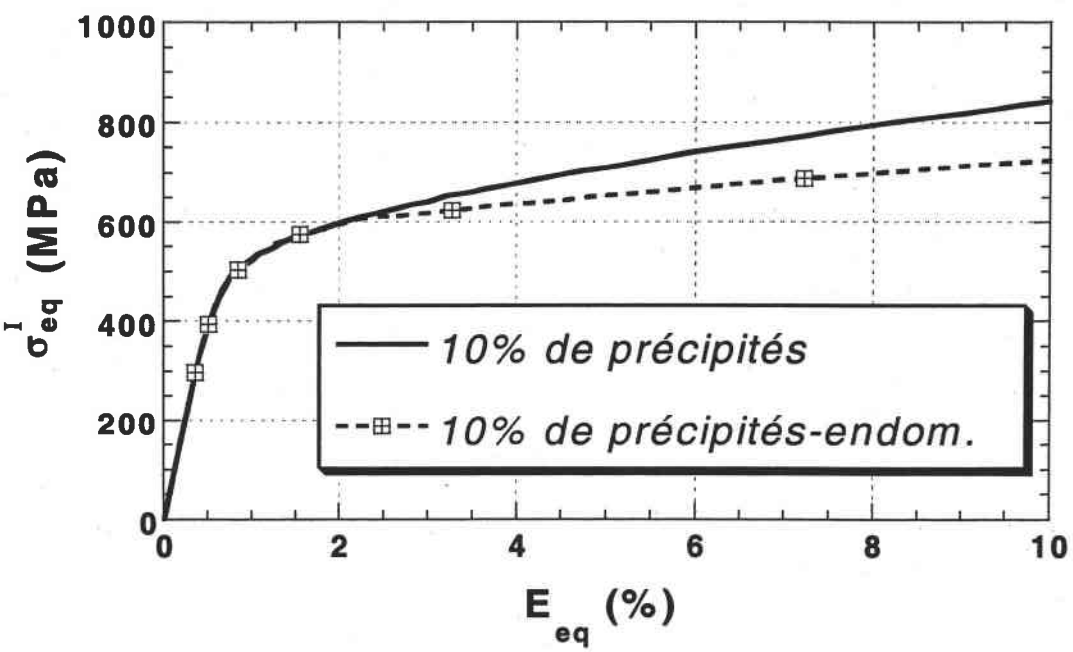


Figure V. 3 : *Essai d'expansion équibiaxiale - Comportement relatif du grain 2, à l'amorçage de l'endommagement en fonction de la déformation macroscopique du polycristal.*

A l'échelle du grain, la décohésion de l'interface se caractérise par une chute relative de la réponse mécanique. Elle résulte de la perte presque brutale de la cohésion entre les deux phases du grain et la substitution du précipité dur par une cavité de contrainte nulle. Le précipité à l'origine de la cavité ne participe plus à l'écrouissage-durcissement du matériau mais au contraire l'adoucit.

Cette réduction de la contrainte mésoscopique est suivie d'une phase de croissance correspondant au comportement d'écrouissage–adoucissement du grain hétérogène. Durant cette phase cohabitent en effet l'écrouissage intracristallin du monocristal et l'adoucissement introduit par la présence de la porosité.

La décohésion ne se déroule donc pas de façon simultanée dans tous les grains. Dans certains grains, des cavités peuvent être à la phase de croissance au moment où de nouvelles cavités s'initient dans d'autres. La *Figure V.4* illustre le comportement à l'amorçage du *grain1*. Contrairement au comportement du *grain 2* représenté par la *Figure V.3*, la décohésion dans le *grain 1*, est plus tardif. L'endommagement ne s'y amorce que pour une déformation macroscopique voisine de 4 % alors qu'à ce moment, le *grain 2* est déjà dans la phase de la croissance de ses cavités initialement créées.

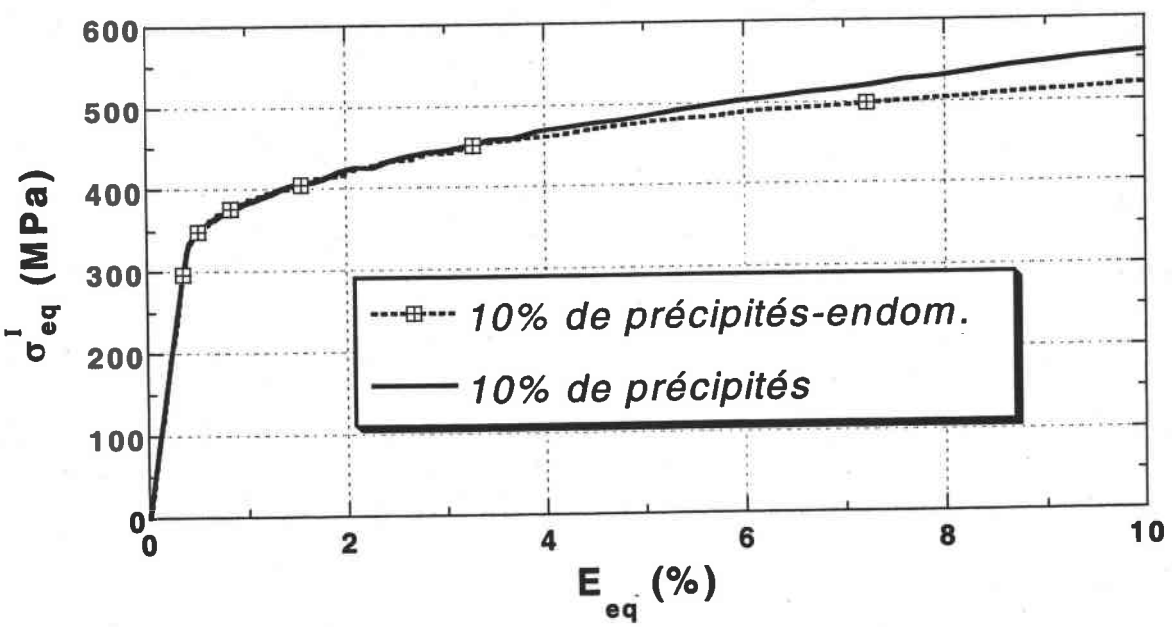


Figure V. 4 : *Essai d'expansion équibiaxiale - Comportement relatif du grain 1 à l'amorçage de l'endommagement en fonction de la déformation macroscopique.*

Cette disparité de l'amorçage doit être rapportée à l'état de contraintes internes d'ordre trois développées dans chacun des grains. L'étude des ces dernières dans le chapitre précédent a permis de constater que le niveau de contraintes internes dans le *grain 2* est plus important que celui du *grain1*. L'amorçage de l'endommagement étant la conséquence directe de cette localisation de contraintes, il paraît logique que le *grain 2* soit le premier à subir le processus d'endommagement.

Dans un exemple d'essai de traction équibiaxiale d'un polycristal à 100 grains, on constate que les premières décohésions s'initient autour de *2%* de déformation macroscopique équivalente (*Figure V.5*). Le nombre de grains endommagés augmente par la suite avec l'état de déformation du matériau. L'évolution de l'endommagement dans cette phase intermédiaire résulte des effets combinés de la croissance des cavités antérieurement créées et de nouvelles germinations.

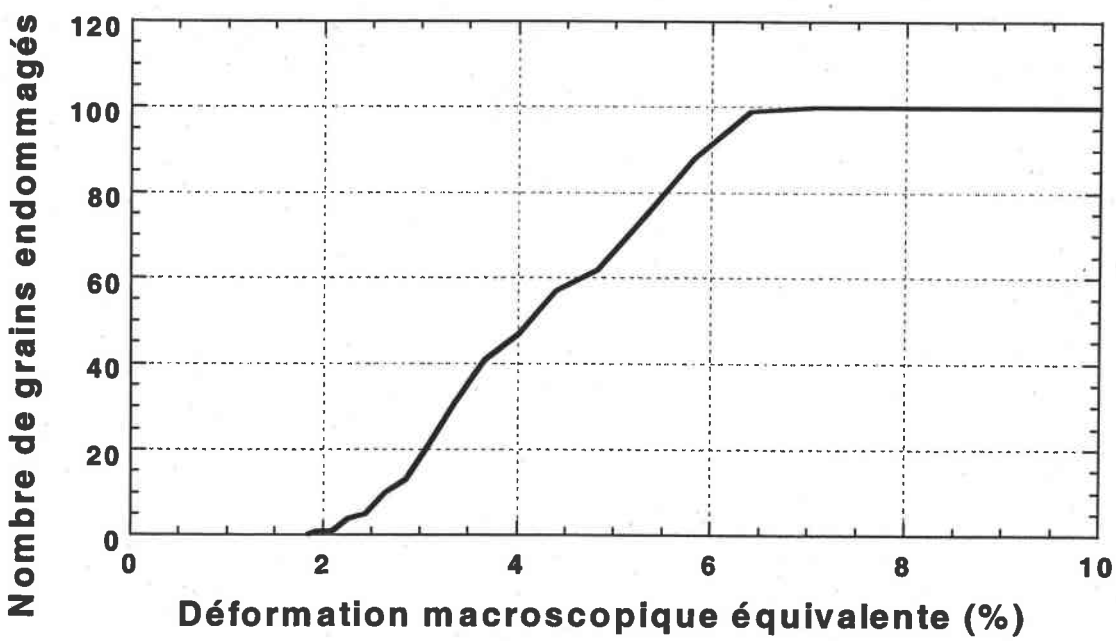


Figure V.5 : *Evolution du nombre de grains endommagés par décohésion interfaciale, en fonction de la déformation macroscopique équivalente. Polycristal à 100 grains, soumis à un essai d'expansion équibiaxiale.*

Dans cet exemple à 100 grains, le phénomène d'initiation de l'endommagement par décohésion de l'interface est complètement achevé autour de *10%* de déformation équivalente. L'endommagement ductile croît dès lors, essentiellement par croissance des cavités.

L'analyse de la réponse macroscopique du matériau au cours de l'amorçage de l'endommagement montre que la réduction de la contrainte équivalente est plus modérée que celle observée au niveau du grain. Elle se déroule également durant une phase beaucoup plus longue. La contribution d'une décohésion dans un grain est en effet pondérée par sa fraction volumique à l'échelle macroscopique. Cette réduction de la contrainte macrocopique croît en fonction de l'augmentation du nombres de grains au sein desquels le critère de décohésion est satisfait. L'amorçage à l'échelle macroscopique s'inscrit dans une phase allant de 2 % à 10%.

2. Modélisation du comportement du grain poreux

A la fin du processus de décohésion de l'interface précipité-monocristal il y a complète séparation entre ces deux phases. Le précipité n'influence plus notablement le comportement global du grain poreux. C'est généralement ce que l'on observe dans le cas d'une croissance radiale de la cavité. Le cas où le précipité à l'origine de l'endommagement intervient dans la croissance de la cavité est un problème très complexe du fait du champ non encore bien caractérisé de contraintes supplémentaires engendrée par la présence des précipités.
Dans la suite, nous faisons alors l'hypothèse d'une cavité libre, c'est-à-dire que le précipité est bien isolé au sein de la cavité. Après complète décohésion dans un grain, on pose :

$$\tilde{c}^{3} = \tilde{0} \tag{V.27}$$

A travers l'approximation autocohérente, l'expression du tenseur de localisation de la déformation dans la cavité, donnée par la relation II.157 devient :

$$\tilde{a}_{sc}^{3} = \left(\tilde{I} - \tilde{T}_{sc}^{33} : \tilde{l}^{I}\right)^{-1} \tag{V.28}$$

De même, on peut déduire :

$$\tilde{b}^{3} = \tilde{0} \tag{V.29}$$

Mais aussi :

$$\tilde{b}^{m} = (1-f)\tilde{I} \tag{V.30}$$

Le tenseur de polarisation introduit par II.53 et dont une expression est fournie par la relation II.88, s'écrit dans le cas particulier du vide :

$$\tilde{P}_{V} = f\,\tilde{l}^{m} \tag{V.31}$$

Du fait de la relation V.28, le tenseur des modules tangents du grain s'exprime sous la forme :

$$\tilde{l}^{\,l} = (1-f)\,\tilde{l}^{\,m} : \tilde{a}^{\,m} \tag{V.32}$$

ou encore :

$$\tilde{l}^{\,l} = \tilde{l}^{\,m} : (\tilde{I} - f\,\tilde{a}^{\,3}) \tag{V.33}$$

En réécrivant V.31, on obtient dès lors l'expression du tenseur de polarisation :

$$\tilde{P}_V = f\,\tilde{l}^{\,l} : (\tilde{I} - f\,\tilde{a}^{\,3})^{-1} \tag{V.34}$$

On peut alors déduire une règle équivalente de l'écrouissage-adoucissement du grain poreux :

$$\dot{\tau}^{k}_{cr} = \sum_{h=1}^{NSA} \aleph^{kh}\,\dot{\Gamma}^{h} \tag{V.35}$$

où :

$$\dot{\tau}^{k}_{cr} = R^{k} : \tilde{U} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{l} \tag{V.36}$$

avec :

$$\tilde{U} = (1-f)\,\tilde{I} + \tilde{P}_V : \tilde{s}^{\,m} \tag{V.37}$$

et

$$\aleph^{kh} = H^{kh} - R^{k} : \tilde{P}_V : R^{h} \tag{V.38}$$

A travers cette description de l'écrouissage du grain poreux, il est intéressant de pouvoir remarquer que la matrice $\aleph^{kh}$ s'affaiblit avec la déformation plastique. En effet, l'expression du tenseur de polarisation $\tilde{P}$ fournie par la relation V.31 permet d'affirmer que le terme additionnel $R^{k} : \tilde{P} : R^{h}$ est défini positif. Il en résulte un adoucissement du grain poreux relativement au monocristal.

Signalons également que l'expression de $\tilde{P}$ est conforme à la loi de la moyenne volumique en taux de contrainte des constituants du grain hétérogène. En effet, en introduisant cette expression dans la relation $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{m} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{l} + \tilde{P} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m}$ posée pour la description du grain hétérogène, on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{m} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{l} + f\,l^{m} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{m} \tag{V.39}$$

soit :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{l} = (1-f)\,\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{m} \tag{V.40}$$

La description proposée pour le grain hétérogène est donc cohérente avec les relations classiques de la mécanique des matériaux composites.

Les autres relations constitutives du comportement du grain poreux, plus précisément l'expression du tenseur de modules tangents élastoplastiques, s'obtiennent par une démarche similaire à celle exposée au *paragraphe II.2.2.3*.

Les relations V.27 et V.29 introduisent l'annulation de la contribution des contraintes internes d'ordre trois initialement localisées dans les précipités, à l'écrouissage du grain équivalent. Il y a succession de deux phases dans le comportement du grain hétérogène :

- une première phase caractérisée par un écrouissage par précipitation,
- une phase d'adoucissement qui s'initie avec la décohésion de l'interface précipité - matrice cristalline et qui marque l'amorçage de l'endommagement ductile du matériau.

A la fin de l'amorçage, la fraction initiale de cavités dans un grain donné, est égale à celle de précipités avant la décohésion.

3. Croissance de l'endommagement

Les précipités autour desquels se sont formées des cavités ne jouent aucun rôle dans la phase suivante de croissance des cavités. La croissance des cavités existantes est déterminée à partir du principe de conservation de la masse appliqué à la matrice lors de la déformation plastique (*Annexe I*).

$$\dot{f}_{croisssance} = (1-f)\dot{\varepsilon}^{I}_{kk} \tag{V.41}$$

Tvergaard et Needleman [9] ont introduit une fonction $f^*(f)$ pour tenir compte de l'accélération de la croissance à l'approche de la rupture finale (*voir Chapitre I*).

$$f^* = \begin{cases} f, & f < f_c \\ f_c + \dfrac{f_u - f_c}{f_f - f_c}(f - f_c), & f \geq f_c \end{cases} \tag{V.42}$$

ou encore :

$$f^* = f_c + K(f - f_c), \quad f \geq f_c \tag{V.43}$$

A la rupture totale du grain considéré, la fraction volumique de cavités qu'il contient est égale à f_f et la nouvelle variable d'endommagement f^*, prend alors sa valeur ultime correspondante f_u. Les observations expérimentales permettent normalement de connaître la fraction volumique de cavités à la rupture finale et de déterminer ainsi le paramètre K.

Dans la littérature, les valeurs de ces nouvelles variables de la porosité sont généralement voisines de :

$$f_c = 0.1015, \quad f_u = 0.8, \quad f_f = 0.25 \tag{V.44}$$

soit :

$$K \cong 5 \tag{V.45}$$

Le choix précis des valeurs de ces paramètres devra se faire en validant le modèle par des essais expérimentaux. Cette opération permettra de déterminer pour chaque matériau les valeurs appropriées pour une description plus précise du processus d'endommagement.

Ces premiers résultats ont montré que la présence de précipités intragranulaires durs, induisait un écrouissage plus ou moins important selon la fraction volumique ou la forme de ces précipités.

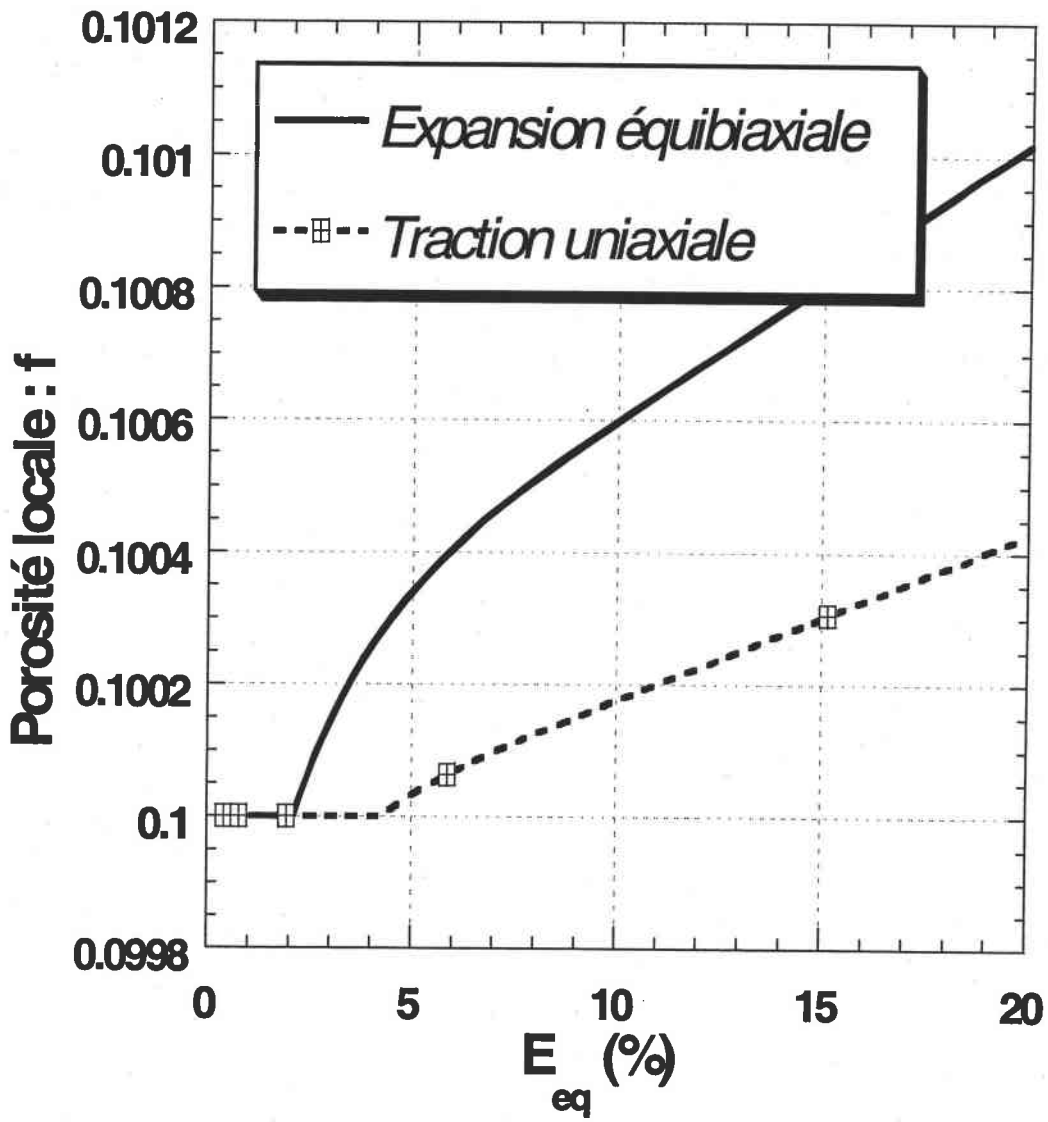


Figure V.6 : *Evolution de la fraction volumique de cavités dans un grain, au cours de l'endommagement ductile.*

La germination de cavités au niveau de ces précipités entraîne, par contre, un adoucissement général du matériau. Cet adoucissement est très fortement influencé par le type de chargement auquel est soumis le matériau. La morphologie et la croissance des cavités seront différentes selon que le matériau subit une traction uniaxiale ou une expansion équibiaxiale (*Figure V.6*). Dès cette première germination, l'adoucissement du matériau devient de plus en plus prononcé du fait de la croissance de l'endommagement. Le phénomène d'adoucissement peut être plus important dans un grain que dans un autre, en fonction essentiellement de son orientation et de son état de contrainte.

L'endommagement volumique peut être également défini par des mesures de la variation de densité relative $\frac{\Delta d}{d}$ du matériau étudié. C'est le cas notamment dans le travail de *Schmitt J.-H.*, 1981. Nous avons pu constater en comparant les deux approches, qu'elles conduisent à un même ordre de grandeur de la croissance de l'endommagement volumique. La croissance des cavités dépend du mode de sollicitation auquel est soumis le matériau. Ainsi, une expansion équibiaxiale génère une croissance de l'endommagement plus forte qu'une traction uniaxiale. Dans un chargement en traction simple, la pression hydrostatique développée est plus faible qu'en expansion équibiaxiale. Le taux d'endommagement est donc une fonction croissante de la pression hydrostatique développée lors de l'essai de chargement.

Le comportement des matériaux poreux est également très sensible à la triaxialité des contraintes. Pour analyser cette influence, nous avons étudié l'évolution de la fraction volumique de cavités contenues dans un grain en fonction de la triaxialité de la contrainte macroscopique imposée. La triaxialité de la contrainte macroscopique est définie par: $X = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}$, où $\Sigma_m = \frac{1}{3}\Sigma_{kk}$ et $\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\Sigma'_{ij}\Sigma'_{ij}}$; Σ' représentant la partie déviatorique de la contrainte macroscopique.

Une grande triaxialité favorise davantage le processus d'endommagement qu'une simple traction uniaxiale. Sur les courbes de la *Figure V.7*, nous constatons que plus la triaxialité de la contrainte imposée est forte, plus la croissance des porosités est importante.

La croissance de l'endommagement ductile des matériaux est souvent caractérisée par une accélération de la perte de ductilité à l'approche de la rupture finale par coalescence de

cavités. Cette particularité associée au stade final du processus d'endommagement ductile est assez bien reproduite par le modèle.

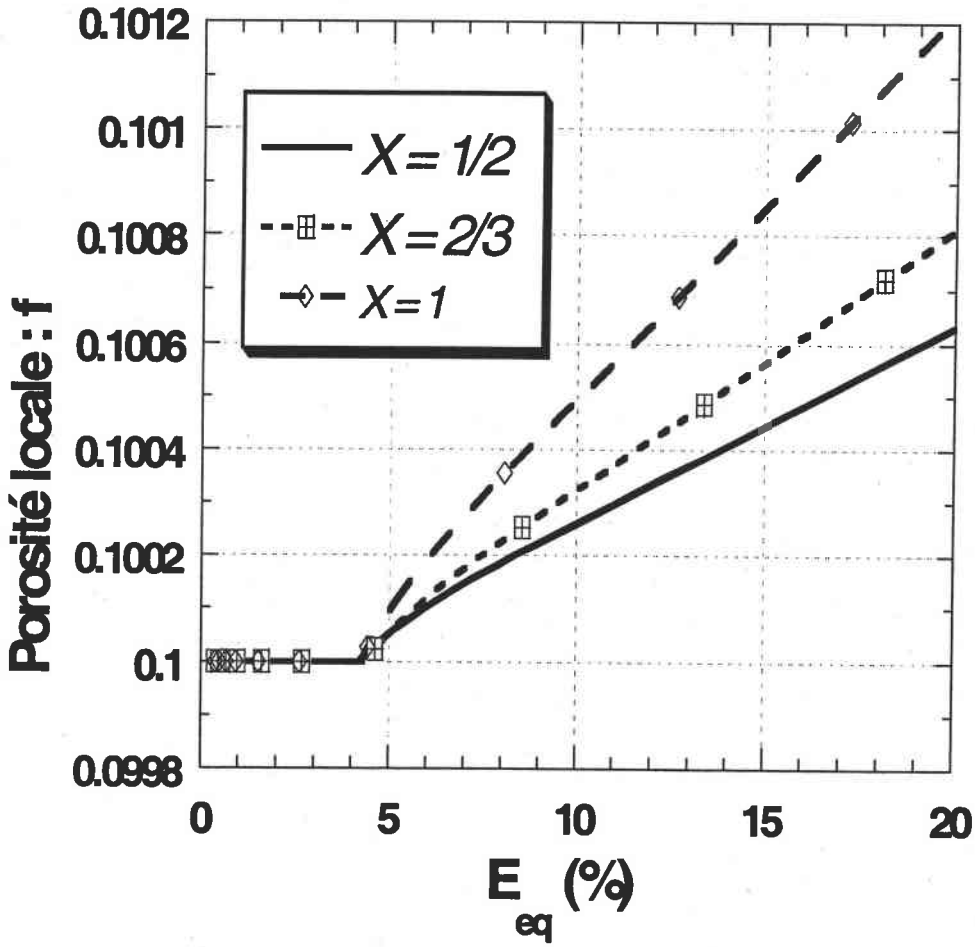


Figure V.7 : *Evolution de la fraction volumique de cavités dans un grain, en fonction de la triaxialité de la contrainte macroscopique imposée (chargement axisymétrique).*

Les résultats de l'évolution de la fraction volumique de cavités en fonction de la déformation équivalente révèlent un changement de la pente de cette courbe, (*Figure V.8*). L'accélération de la croissance débute lorsque la fraction volumique atteint une valeur critique f_c.

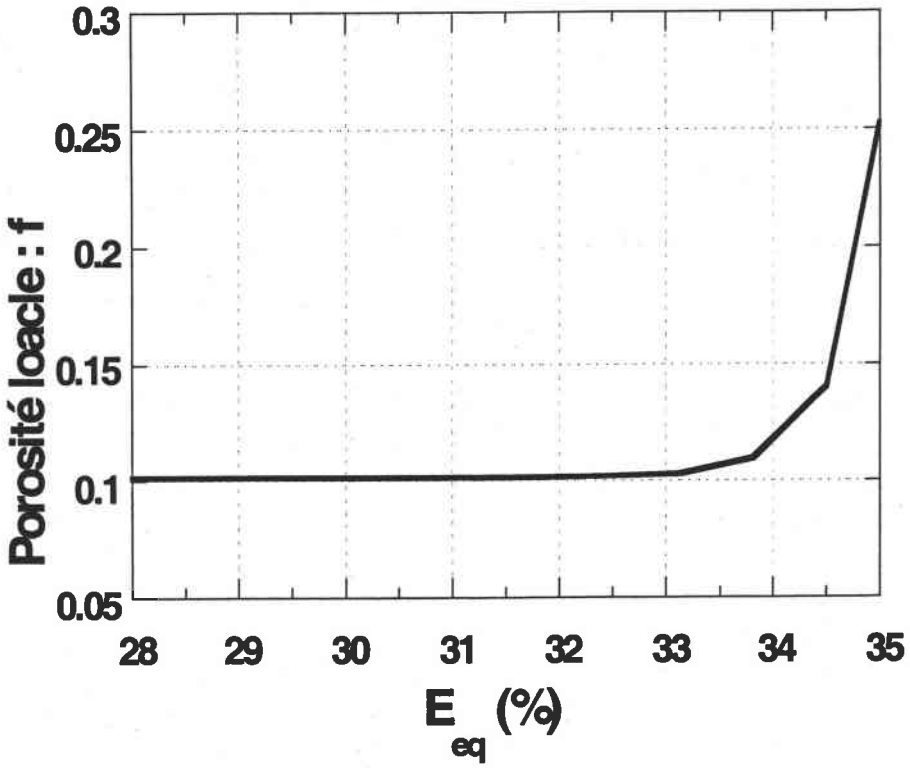


Figure V.8 : *Accélération du processus d'endommagement dans le grain 2 à l'approche de la rupture finale par coalescence de cavités voisines (essai d'expansion equibiaxiale).*

Dans la présente étude, les phénomènes concourant au processus d'endommagement, sont localisés à une échelle microscopique, à l'intérieur du grain. Pour caractériser l'effet global de cet endommagement sur le matériau macroscopique, nous introduisons un concept de porosité moyenne macroscopique. Il s'agit plus précisément de la moyenne volumique des porosités locales de tous les grains de l'élément de volume. Cette porosité moyenne permet d'avoir une idée de l'évolution de l'endommagement à l'échelle du matériau.

Sur la courbe de la *Figure V.9*, on note bien les deux phases de la croissance de l'endommagement. Une évolution modérée jusqu'à la porosité critique, suivie d'une accélération à l'approche de la coalescence des cavités.

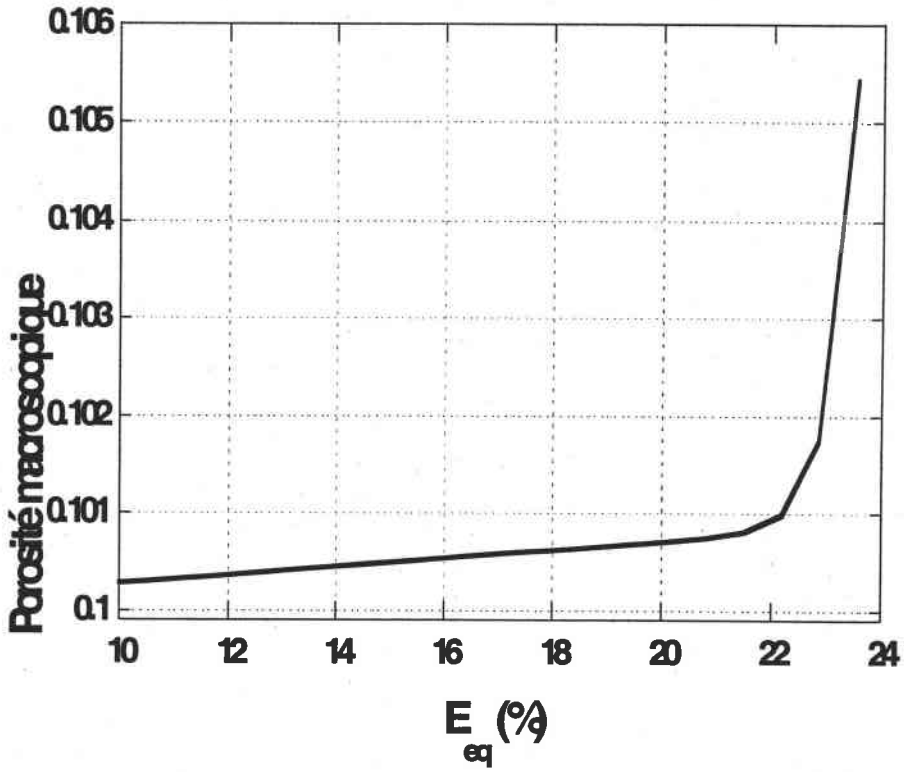


Figure V.9 : *Evolution de la porosité moyenne macroscopique du polycristal lors d'une expansion équibiaxiale.*

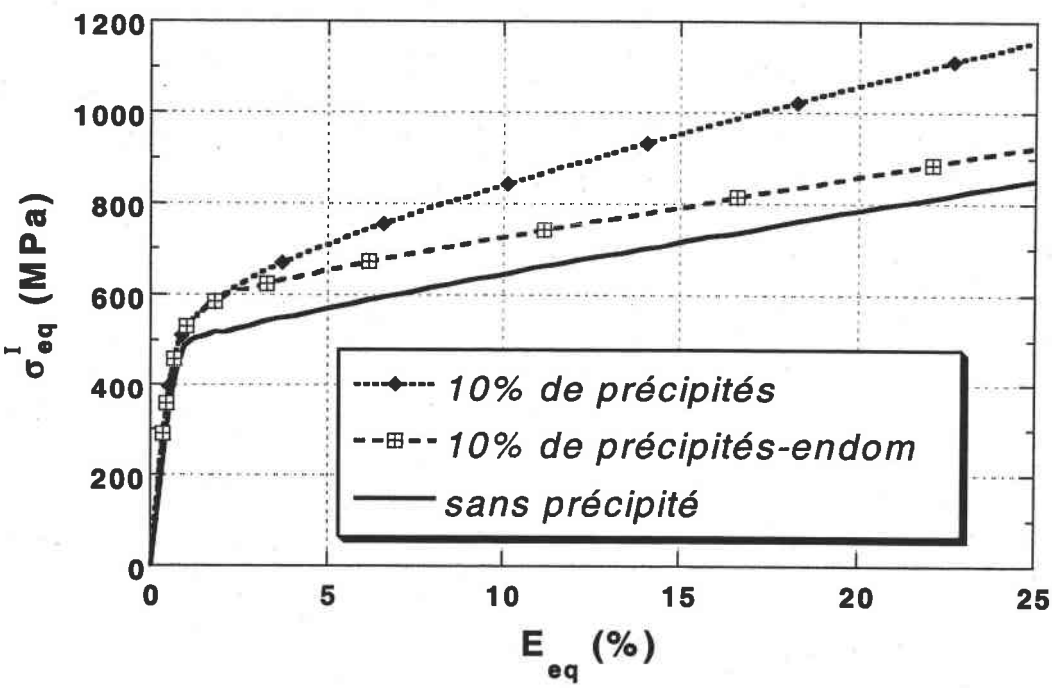


Figure V.10 : *Comparaison du comportement équivalent du grain 2, polycristal sous une expansion équibiaxiale.*

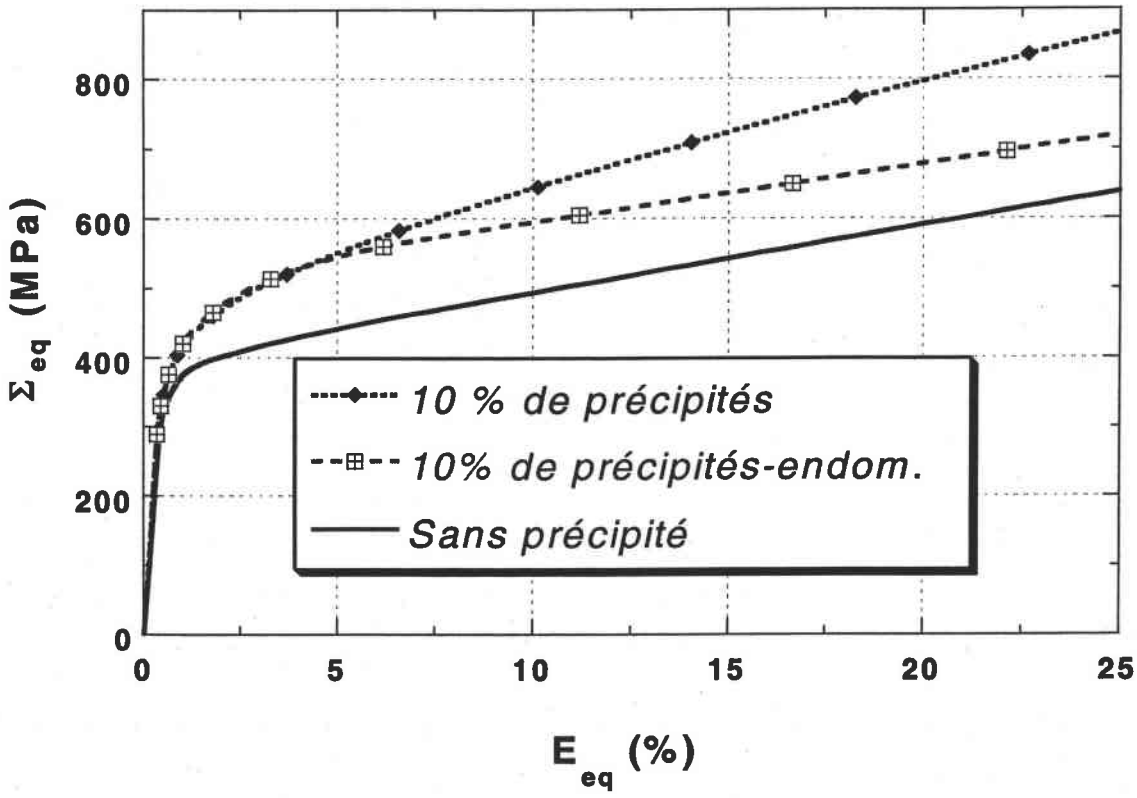


Figure V.11 : *Comportement macroscopique du polycristal sous une expansion équibiaxiale.*

On peut aussi apprécier la croissance de l'endommagement en analysant les réponses mécaniques, mésoscopiques et macroscopiques du matériau. Après l'amorçage de l'endommagement, ces réponses pour le matériau endommagé sont plus faibles que celles correspondant du matériau sans précipités (*Figures V.10* et *V.11*). La réduction relative de la contrainte s'accentue avec la déformation du matériau. Cette réduction est la conséquence de la croissance de la porosité moyenne. En fonction de la déformation effective du grain, la porosité va croître jusqu'à sa valeur ultime correspondant à la rupture du grain.

4. Vers la rupture du grain

La rupture du grain est supposée survenir lorsque sa porosité f atteint la valeur finale f_f. Conformément à nos remarques sur l'influence du mode de sollicitation sur la réponse mécanique du matériau, nous constatons que la rupture finale macroscopique dans un essai

d'expansion équibiaxiale se produit pour un niveau de déformation beaucoup moins important que dans un chargement en traction uniaxiale (*Figures V.12* et *V.13*).

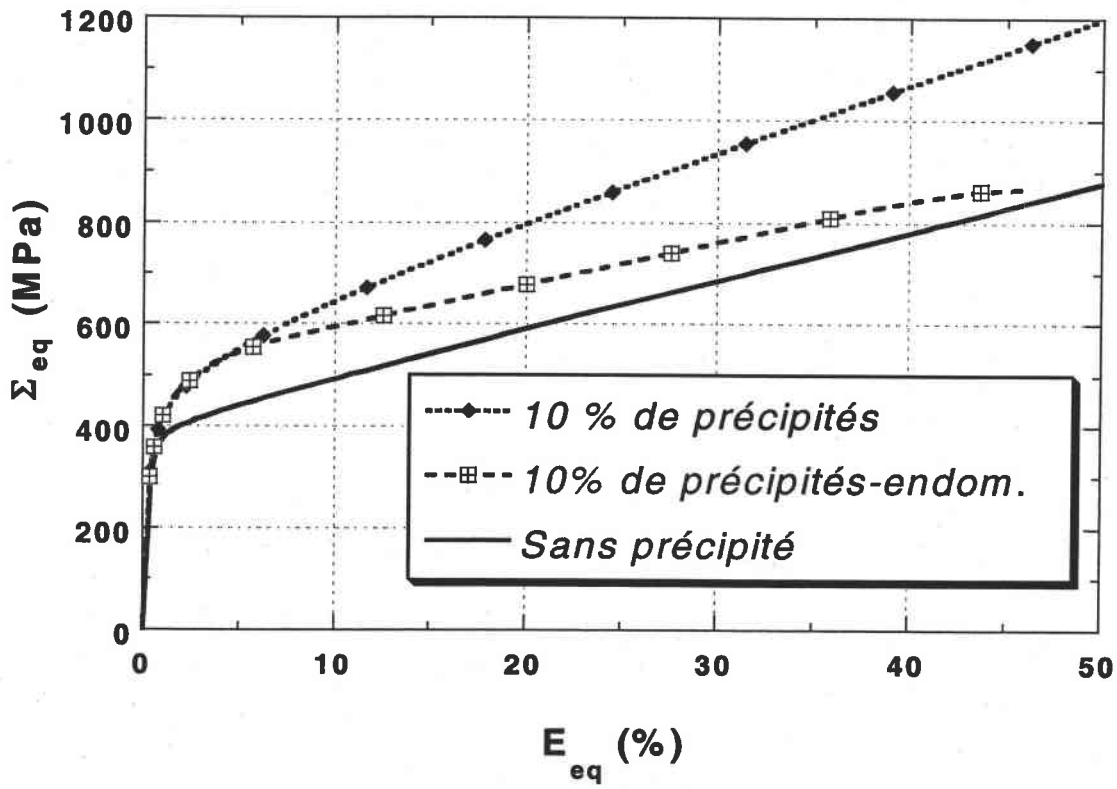


Figure V.12 : *Courbe d'endommagement du matériau lors d'un essai d'expansion équibiaxiale.*

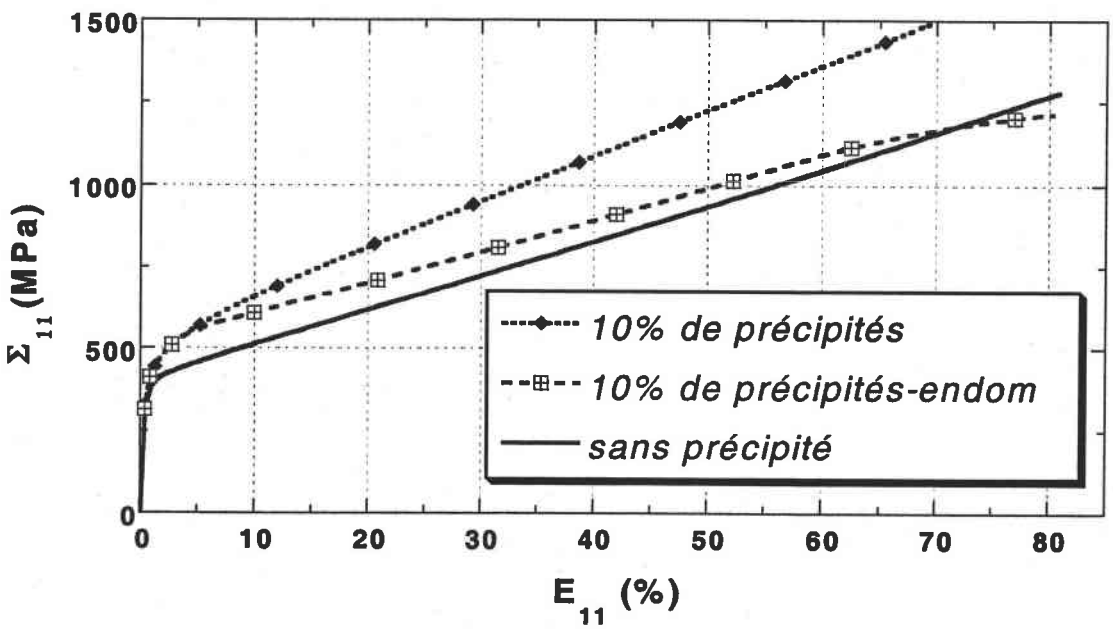


Figure V.13 : *Courbe d'endommagement macroscopique dans un essai de traction uniaxiale*

Dès que la porosité finale de rupture est atteinte, la contrainte dans le grain s'annule et nous supposons que le grain correspondant est ruiné et ne participe plus à la résistance du matériau. L'adoucissement macroscopique augmente et devient de plus en plus important avec l'augmentation du nombre de grains arrivant à leur coalescence. La courbe de la *Figure V.14* résume la réponse mécanique élastoplastique complète du matériau durant sa phase de déformation. En l'analysant, nous pouvons identifier les principales étapes du comportement du matériau , de l'élasticité jusqu'à la rupture finale :

1. Une première phase d'écrouissage allant de l'élasticité jusqu'à environ 2% de déformation équivalente. Elle est essentiellement caractérisée par un relèvement de la limite élastique et un durcissement par rapport au matériau sans précipités.
2. La phase d'amorçage qui s'effectue de 2% à 10 % de la déformation macroscopique. Elle correspond aux créations de cavités par décohésion de l'interface matrice/précipité dans les différents grains de l'élément de volume. Cette nucléation de cavités entraîne une réduction assez importante de la contrainte macroscopique.

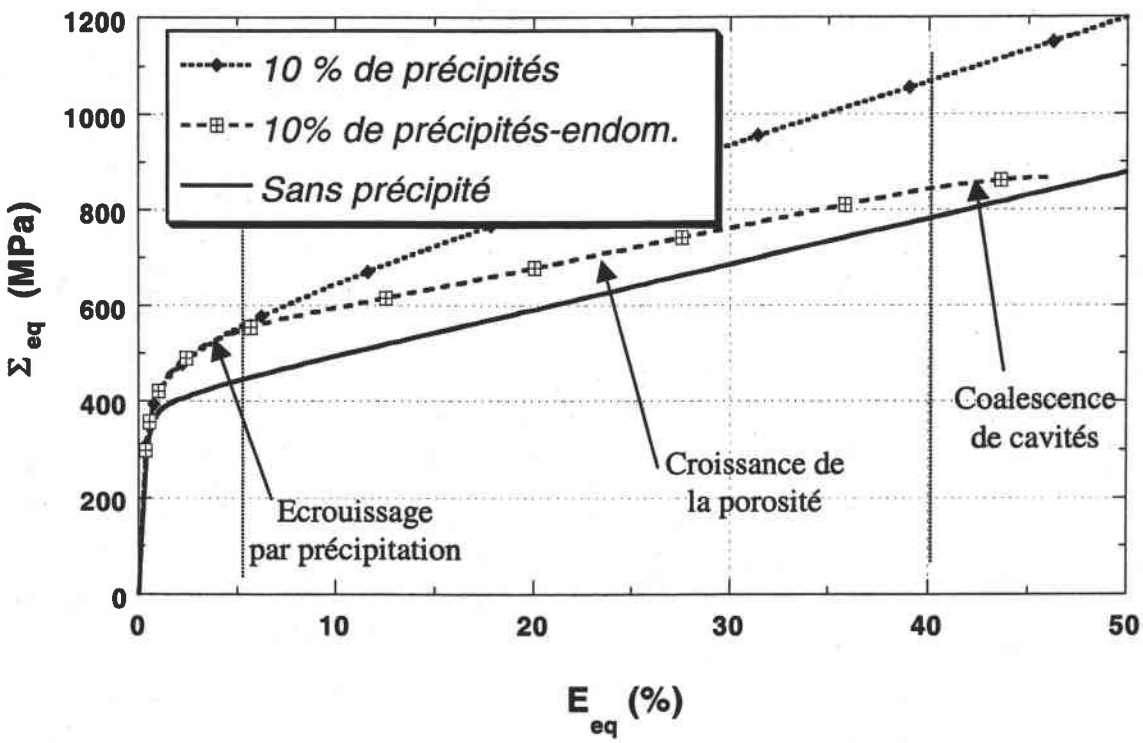


***Figure V.14** : Différentes phases du comportement macroscopique global dans une expansion équibiaxiale.*

3. S'ensuit une phase intermédiaire où cohabitent à la fois l'écrouissage intergranulaire classique et un adoucissement relatif qui s'accentue avec la croissance des cavités liée à la déformation plastique de la matrice cristalline.
4. La variation de la porosité s'accélère avec la coalescence des cavités à partir d'un niveau de déformation, fonction du chargement (~ 70% en traction simple, ~40% en expansion équibiaxiale). A partir de ce stade, dans plusieurs grains les cavités atteignent leur taille critique pour la perte complète de la ductilité.

Le modèle reproduit donc assez bien, au moins qualitativement, le comportement mécanique effectif d'un matériau: l'écrouissage par précipitation et les étapes successives de l'endommagement ductile.

Malgré l'évolution continue de l'endommagement, la rupture finale du matériau est un phénomène très instable et donc assez délicat à reproduire par le modèle. L'analyse micromécanique de la rupture finale permet de postuler la formation d'une bande de déformation très intense entre deux cavités voisines. Il s'ensuit une croissance exagérée de ces dernières dans la direction de la bande. La prédiction de la rupture peut se faire en élaborant des critères. Cependant, le phénomène de rupture est difficilement traduisible par les équations classiques de la mécanique. Celles-ci sont basées entre autres sur la compatibilité et la continuité des déplacements. La formulation proposée ne se prête pas à une détermination précise de la déformation équivalente du grain après coalescence des cavités et à la rupture finale. Il s'avère nécessaire pour une modélisation précise de la rupture finale du grain, de faire appel à d'autres approches.

5. Conclusion

Un modèle de description du processus d'endommagement ductile de matériaux polycristallins a été proposé. L'amorçage de l'endommagement est exclusivement la résultante des fortes contraintes internes localisées dans les hétérogénéités intragranulaires que sont les précipités et des sauts de contraintes importants qu'elles induisent à l'interface. Nous nous sommes préoccupés essentiellement de la nucléation de cavités par décohésion de l'interface matrice cristalline-précipité. La modélisation de cette première étape du processus d'endommagement fournit une description assez proche des résultats issus de travaux antérieurs tels que ceux de Needleman et Tvergaard.

La croissance des cavités est essentiellement contrôlée par l'évolution de la déformation de la matrice cristalline. L'influence du mode de chargement et de la triaxialité des contrainte sur la variation de la porosité est bien traduite par le modèle.

Cependant la modélisation proposée ne tient pas compte du changement de forme de la cavité au cours du chargement. Nous avons en effet fait l'hypothèse d'une évolution radiale des cavités et appliqué des essais en expansion radiale. Une extension nécessaire à cette étude devrait consister à inclure un paramètre relatif au changement de forme de la cavité.

Toutefois le recours à une double transition d'échelle a permis de prendre en compte toute la microstructure du monocristal et des hétérogénéités dans la description du matériau macroscopique. L'endommagement n'est pas introduit de façon artificielle, mais découle de la présence naturelle d'hétérogénéités. Les cavités ne s'initient qu'après une première phase du comportement du matériau, caractérisée par un écrouissage mixte anisotrope et cinématique.

Avant de contribuer à la ruine du polycristal, les précipités ont paradoxalement collaboré à sa résistance.

6 Bibliographie

[1] Chaboche J.-L., Girard R. and Lavasseur P., *On the interface debonding models,* Int. J. of Damage Mech., Vol.**6**, pp. 220-257, 1997.

[2] Gurson A.L., *Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media*, J. Eng. Mat. Tech., **99**:1-15, 1977.

[3] Hill R., *An invariant treatment of interfacial discontinuities in elastic composites*, In "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis, Muskhelishvili 80th Anniversary Volume", **5**, pp.597-604, Moscow, 1972.

[4] McClinttock F.M., *A criterion for ductile fracture by growth of holes*, J. Appl. Mech. **35**:363-371, 1968.

[5] Needleman A., *A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion debonding,* J. Appl. Mech., **54**, pp.525-531, 1987.

[6] Rice J.R. and Tracey D.M., *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*, J. Appl. Mech. **17**:201-217,1969.

[7] Shima S. and Oyane M., *Plasticity theory for porous metals*, Int. J. Mech. Sc., **18**, 285-291, 1976.

[8] Tvergaard V., *Material failure by void growth to coalescence*, In J. W. Hutchinson and T.Y. Wu, editors, Advances in Applied Mechanics, Volume **27**, pages 83-151. Academic Press, New York, 1990.

[9] Tvergaard V. and Needleman A., *Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar,* Acta Metall. Mater., **32**:157-169, 1984.

[10] Walpole L. J., *A coated inclusion in an elastic medium,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **83**, pp.495-506, 1978.

[11] Walpole L. J., *Elastic Behavior of Composites Materials : Theoretical Foundations,* Advances in Applied Mechanics, **Vol 21**, pp.169-242, 1981.

Conclusion générale

Notre étude a proposé une nouvelle approche de la modélisation micromécanique du comportement élastoplastique de matériaux polycristallins comportant des hétérogénéités intragranulaires. Nous avons insisté particulièrement sur la prise en compte des hétérogénéités inhérentes à l'élaboration de tout matériau métallique, dans la description de l'écrouissage de ce dernier. Des interactions non négligeables ont lieu entre ces particules étrangères et les dislocations lors du glissement cristallographique de ces dernières. Une nouvelle formulation de cet écrouissage intra-cristallin du grain hétérogène a été proposée. Elle permet au modèle de rendre compte de l'anisotropie et du caractère cinématique du comportement de ce type de matériaux. Le travail réalisé a également introduit la modélisation du processus de l'endommagement ductile du matériau. L'étude de l'écrouissage par particule étrangère dure a en effet révélé une forte polarisation du champ de contrainte dans les particules ainsi qu'à l'interface cristal-particule. L'amorçage de l'endommagement par décohésion de cette interface est la conséquence logique de ces importantes concentrations de contraintes. La croissance des cavités ainsi initiées sera induite par la déformation de la matrice cristalline environnante.

Plus précisement, les améliorations proposées portent sur :

- La description cohérente de la plasticité du grain hétérogène constitué d'un monocristal contenant des hétérogénéités élastiques. Les lois constitutives proposées transposent à l'échelle du grain, la description classique de la plasticité cristalline basée sur le concept de glissements cristallographiques de dislocation et de la loi de Schmid. L'approche se prête bien à la transition ultérieure conduisant au comportement du polycristal.
- L'écrouissage anisotrope intragranulaire, jusqu'à présent encore mal caractérisé, trouve dans la présente étude une nouvelle formulation. La modélisation rend compte, non seulement des interactions classiques dislocations-dislocations, mais également de celles entre les dislocations et les hétérogénéités. Malgré la complexité des microstrutures et des phénomènes microscopiques, nous avons proposé une

description faisant ressortir les caractères anisotrope et cinématique de l'écrouissage. Par rapport aux investigations antérieures, cette formulation constitue une réelle amélioration.

- Dans une première partie de l'analyse de l'évolution de la structure qu'induit inévitablement la présence des hétérogénéités, nous nous sommes intéressés aux contraintes internes d'ordre deux et trois. Leur parfaite modélisation conditionne la bonne description de l'amorçage de l'endommagement au niveau des hétérogénéités. La décohésion de l'interface matrice cristalline-hétérogénéités est en effet, la résultante de la forte concentration de contraintes localisée autour de ces dernières. L'étude paramétrique à laquelle nous nous sommes livrés, a permis de préciser les influences certaines de la proportion d'hétérogénéités, de leur forme et de l'orientation par rapport à la sollicitation imposée, sur l'évolution de ces contraintes internes d'ordre trois.
- L'étude de la modification de la structure interne du matériau a aussi été mise en œuvre à travers une analyse du comportement des surfaces de plasticité après une pré-déformation. Nous avons ainsi confirmé le caractère mixte anistrope et cinématique de l'écrouissage tel qu'annoncé dans la formulation proposée.
- L'amorçage de l'endommagement par décohésion de l'interface matrice-précipités procède logiquement de l'importante polarisation des contraintes dans les précipités. Sa localisation et l'instant d'initiation des cavités dépendent étroitement de l'orientation et de la forme des précipités. Les résultats liés au comportement de l'interface sont assez proches des prédictions initiales de Needleman et Tvergaard sur la décohésion interfaciale.
- La croissance de l'endommagement résulte essentiellement de l'initiation de nouvelles cavités et de la variation de la porosité due à l'accroissement des cavités antérieures. Cette dernière est directement reliée à la déformation de la matrice cristalline. L'influence du mode de sollicitation et notamment de la triaxialité des contraintes sur la croissance de l'endommagement a été largement discutée.

La description de l'étape finale de l'endommagement ductile nécessite l'introduction de nouveaux paramètres liés, soit à la taille critique des cavités ainsi qu'une prise en compte précise des tous les phénomènes de coalescence et de striction. Pour la modélisation de la rupture ductile, les observations expérimentales indiquent que le recours à une formulation en

grandes déformations est indispensable. Sa mise en œuvre suppose également la connaissance des lois de comportement locales, en grandes déformations.

Même si l'hypothèse de la pure élasticité des hétérogénéités simplifie la description du grain hétérogène, envisager un comportement élastoplastique des hétérogénéités n'est pas à exclure. Reste à trouver des justifications expérimentales à une telle configuration, ce qui ne semble pas être le cas actuellement.

Enfin, les résultats de cette modélisation théorique devrait, pour être validés, être confrontés à des études expérimentales sur des matériaux polycristallins. L'étude a établi que l'écrouissage des métaux est modifié aussi bien par la prise en compte d'hétérogénéités intragranulaires que par l'introduction de l'endommagement.

Annexe I

Variation de la porosité.

our l'étude de la croissance et de la coalescence de l'endommagement ductile, la variable interne la plus immédiate est la fraction volumique de cavités ou porosité. La variation de cette porosité dans un matériau, provient de la nucléation de nouvelles cavités et de la croissance de celles existantes par déformation plastique de la matrice environnante.

$$\dot{f} = \dot{f}_{croisssance} + \dot{f}_{nucléation} \qquad \text{(AI.1)}$$

Par une analyse micromécanique, il est possible de discuter de l'expression de la variation de la porosité par croissance de cavités déjà initiées. On considère un volume élémentaire représentatif V comportant un volume P de cavités. La vitesse de variation du volume de cavités est donnée par la relation :

$$\frac{|\dot{P}|}{|P|} = \int_{\partial P} \vec{v}.\vec{n}\, ds \qquad \text{(AII.2)}$$

$\vec{n}$ étant la normale au bord des cavités, le calcul de cette expression nécessite la connaissance du champ de vitesse $\vec{v}$ au bord des cavités. En admettant la matrice incompressible, la variation de la porosité par croissance de cavités résulte d'un bilan de volume. Par dérivation de la porosité f définie par :

$$f = \frac{|P|}{|V|} \qquad \text{(AI.3)}$$

on obtient :

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{|\dot{P}|}{|P|} - \frac{|\dot{V}|}{|V|} \qquad \text{(AI.4)}$$

L'hypothèse de l'incompressibilité de la matrice, traduite par $|\dot{V}| = |\dot{P}|$ conduit à :

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{|\dot{V}|}{|V|}\left(\frac{|V|}{|P|} - 1\right) \qquad \text{(AI.5)}$$

soit encore :

$$\frac{\dot{f}}{f}=\frac{|\dot{V}|}{|V|}\ \frac{1-f}{f} \tag{AI.6}$$

Par ailleurs, la vitesse de variation du volume de l'élément de matériau est égale à la trace de son tenseur de vitesse de déformation.

$$\frac{|\dot{V}|}{|V|}=Tr\,\dot{E}=\dot{E}_{kk} \tag{AI.7}$$

L'expression finale de la variation de porosité s'écrit :

$$\dot{f}_{croissance}=(1-f)Tr\,\dot{E} \tag{AI.8}$$

La variation de la porosité résulte de la variation du volume macroscopique du matériau. Le matériau endommagé est donc compressible même si la matrice ne l'est pas. La connaissance du comportement macroscopique ou plus exactement de sa vitesse de déformation, permet de déduire, pour une porosité donnée, l'évolution de l'endommagement.

Résumé

L'étude propose une modélisation micromecanique du comportement élastoplastique d'un matériau polycristallin contenant des heterogeneités intra-granulaires. Elle est basée sur une homogénéisation à double échelles permettant de rendre compte de l'influence de ces heterogeneités dans la description de l'écrouissage et de l'endommagement ductile. Des interactions ont en effet lieu entre ces particules étrangères et les dislocations au cours du glissement cristallographique, selon le mécanisme d'Orowan avec la formation des boucles de dislocations. Une première transition, micro-meso permet de déduire une relation constitutive du comportement du monocristal contenant des particules. Le comportement du grain hétérogène (monocristal + particules) est déduit de la formulation classique de la plasticité cristalline basée sur le glissement cristallographique et le critère de Schmid. Une seconde transition méso-macro à l'aide d'une formulation autocohérente, conduit à la détermination du comportement élastoplastique du polycristal. Ce comportement équivalent est caractérisé par un écrouissage anisotrope et cinématique résultant de l'évolution de la microstructure inter- et intra-granulaire. Les résultats ont permis d' analyser les contraintes internes du deuxième et troisième ordre développées pendant l'écoulement plastique.

La forte polarisation des contraintes internes du troisième ordre localisées dans le grain hétérogène est à l'origine de la nucléation des microcavités par decohesion de l'interface cristal/particule. La croissance des cavités résulte de la déformation plastique du cristal environnant selon le principe de la conservation de masse. La variation de la porosité a été analysée en fonction de la microstructure de grain et du mode de chargement pour mettre en évidence la sensibilité du matériau endommagé à la triaxialité de la contrainte appliquée.

Mots clés : Matériaux polycristallins, Ecrouissage, Contraintes internes, Particules intra-granulaires, Homogénéisation, Surfaces de plasticité, Endommagement ductile, Décohésion interfaciale.

Micromechanical modelling of the hardening of polycrystalline materials containing intra-granular heterogeneities. Introduction to ductile damage.

A micromechanical modelling of the elastoplastic behavior of a polycrystalline material containing intra-granular heterogeneities is proposed. It is based on a two-lewel homogenisation approach in order to take into account the influence of intra-crystalline heterogeneities, in the hardening and the ductile damage. Interactions indeed take place between these foreign particles and dislocations during the crystallographic slip, according to Orowan mechanism with formation of dislocations loops. A new formulation of intra-crystalline hardening of the heterogeneous grain is proposed. First, a micro-meso transition is employed to establish a constitutive relation for a single crystal containing particles. The behavior of the equivalent single crystal with particles is derived from the classical formulation of plasticity of the single crystal based on the Schmid's law. Then, the transition to the macroscopic scale is performed with a self-consistent scheme to determine the elastoplastic behavior of the macroscopic material. The equivalent behavior of the model is characterized by a mixed anisotropic and kinematic hardening resulting from an evolution of inter- and intra-granular material microstructure. Results have been analyzed in light of second and third order internal stresses developed during the plastic flow. Especially, yield surfaces have been determined for various preloadings and particle volume fractions.

The strong polarization of third order internal stresses localised in the grain is at the origin of microvoids nucleation by crystal/particle interface decohesion. Cavities growth is related to the plastic straining of the surrounding crystal. The porosity variation has been analyzed according to the grain microstructure and also to the loading pattern to highlight the sensitivity of the damaged material to the triaxiality of the remote stress.

Key words : Polycrystalline materials,Hardening, Internal stresses, Particles, Two level homogenisation, Yield surface, Ductile damage, Interface debonding.