



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



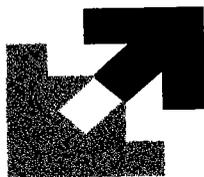
INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

---

# THESE

---

Présentée à



---

UNIVERSITE DE METZ

---

PAR

**Hammadi ABICHOU**

**Pour l'obtention du grade de :  
DOCTEUR de l' UNIVERSITÉ de METZ**

**SPÉCIALITÉ : Sciences de l'ingénieur**

**Option : Mécanique**

**Simulation de l'emboutissage à froid  
par une Méthode Asymptotique Numérique**

Soutenue le 04 juillet 2001 devant le jury composé de:

J. C. Gelin  
Y. Q. Guo  
M. Gueury  
Y. Chevalier  
H. Ben Dhia  
G. Ferron  
M. Potier-Ferry

LMARC & ENSMM Besançon  
Université de Reims  
Univ. H. Poincaré Nancy  
ISMCM-CESTI Paris  
ECAM  
LPMM – Metz  
LPMM – Metz

Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Directeur de Thèse

Mes remerciements vont en premier lieu au professeur Michel Potier-Ferry qui m'a accueilli dans son équipe de recherche et qui a su m'orienter et guider mes premiers pas dans le domaine de la recherche.

J'exprime mes sincères remerciements à Messieurs Jean Claude Jelin et Ying Qiao GUO pour avoir rapporté ce travail avec beaucoup d'attention. Par leurs remarques et leurs suggestions ils m'ont permis d'entrevoir de nouvelles et intéressantes perspectives à ce travail.

Je tiens également à remercier Messieurs M. Gueury, Y. Chevalier, H. Ben Dhia et G. Ferron de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie mes amies et amis du L.P.M.M. pour leur aide et leur soutien dans la réalisation de ce travail et pour tous les bons moments passés ensemble.

*A ma femme, mes parents et à toute ma famille, en Tunisie et en France...*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	20010295
Cote	S/M3 01/10
Loc	Magasin

## PLAN DE LA THESE

<b><u>Introduction générale</u></b>	5
<b><u>CHAPITRE 1 Etude bibliographique</u></b>	9
<i>Introduction</i>	11
<b>1.1. Description du procédé</b>	11
<b>1.2. Intérêt d'une simulation numérique du procédé</b>	12
<b>1.3. Modélisations mécaniques du procédé de l'emboutissage</b>	15
<b>1.3.1. Modèle rigide plastique</b>	15
<b>1.3.2. Modèle viscoplastique</b>	16
<b>1.3.3. Modèle superplastique</b>	16
<b>1.3.4. Modèle élastoplastique</b>	17
<b>1.4. Eléments finis utilisés dans les simulations numériques de l'emboutissage</b>	17
<b>1.4.1. Approche membrane</b>	17
<b>1.4.2. Approches bidimensionnelles et approches solides</b>	18
<b>1.4.3. Approche coque</b>	18
<b>1.5. Problème de contact et de frottement</b>	19
<i>Introduction</i>	19
<b>1.5.1. Position du problème de contact</b>	20
<b>1.5.2. Conditions de contact</b>	21
<b>1.5.3. Lois de frottements utilisées dans les simulations numériques</b>	22
<b>1.5.3.a. Modèle de Coulomb</b>	22
<b>1.5.3.b. Modèle de Tresca</b>	24
<b>1.5.3.c. Modèle de frottement non local</b>	24
<b>1.5.4. Méthodes de traitement des problèmes de contact et de frottement</b>	25

1.5.4.a. <i>Méthode de Lemke</i>	26
1.5.4.b. <i>Méthode des Multiplicateurs de Lagrange</i>	27
1.5.4.c. <i>Méthode de Pénalisation</i>	28
1.5.4.d. <i>Méthode de Lagrange augmentée</i>	29
1.5.4.e. <i>Méthode des éléments d'interface</i>	30
<b>1.6. Méthodes de résolution numériques</b>	31
<i>Introduction</i>	31
1.6.1. Méthodes classiques	32
1.6.2. Méthodes Asymptotiques Numériques	32
<b>1.7. Conclusions</b>	40
<b><u>CHAPITRE 2 Formulation du problème de contact entre un corps rigide et une coque</u></b>	41
<i>Introduction</i>	42
<b>2.1. Formulation du problème</b>	44
2.1.1. Description cinématique de la coque	44
2.1.2. Equation d'équilibre	45
2.1.3. Loi de comportement	46
2.1.4. Etude du problème de contact	48
2.1.4.a. <i>Conditions de contact</i>	49
2.1.4.b. <i>Régularisation de la loi de contact</i>	50
2.1.4.c. <i>Géométrie de contact en 3D</i>	51
<b>2.2. Méthode Asymptotique Numérique</b>	53
2.2.1. Méthodes de perturbation	53
2.2.2. Les approximants de Padé	56
2.2.3. Discrétisation par éléments finis	56
2.2.4. Procédure de continuation	58

<b>2.3. Conclusions</b>	59
<b><u>CHAPITRE 3 Application à la simulation de l'emboutissage hémisphérique</u></b>	60
<i>Introduction</i>	61
<b>3.1. Simulation de l'emboutissage hémisphérique</b>	61
<b>3.1.1. Présentation du problème</b>	61
<b>3.1.2. Traitement des problèmes non-linéaires dans Abaqus</b>	64
<b>3.1.3. Comparaison des résultats</b>	67
<b>3.2. Etude de l'ordre optimal de troncature des séries</b>	69
<b>3.3. Etude de l'influence des paramètres de régularisation</b>	71
<b>3.3.1. Influence de la régularisation de la loi de comportement</b>	71
<b>3.3.2. Influence de la régularisation de la loi de contact</b>	72
<b>3.4. Efficacité de l'algorithme</b>	75
<b>3.5. Etude de l'amincissement de la tôle</b>	77
<b>3.6. Etude de la qualité de la solution</b>	79
<b>3.7. Conclusions</b>	81
<b><u>CHAPITRE 4 Adoucissement de la loi de contact</u></b>	83
<i>Introduction</i>	83
<b>4.1. Formulation du problème</b>	83
<b>4.1.1. Conditions de contact avec interpénétration</b>	84
<b>4.1.2. Régularisation des conditions de contact avec interpénétration</b>	84
<b>4.1.3. Géométrie de contact</b>	86
<b>4.1.4. Technique de perturbation</b>	86
<b>4.2. Application à la simulation de l'emboutissage hémisphérique</b>	88

4.2.1. Gestion de la valeur d'interpénétration	88
4.2.2. Ajustage des paramètres de régularisation	89
4.2.3. Comparaison des temps de calcul	92
4.2.4. Comparaison de la qualité de la solution	93
4.3. Conclusions	94
<b><u>CHAPITRE 5 Généralisation des surfaces des outils</u></b>	95
<i>Introduction</i>	96
5.1. Méthodes utilisées pour la représentation de surfaces de contact	96
5.1.1. Maillage des surfaces en éléments à géométrie simple	96
5.1.2. Représentation analytique des surfaces	96
5.1.3. Carreaux de Bézier	97
5.1.3.a. Approximation polynomiale d'une courbe	97
5.3.2.b. Approximation polynomiale d'une surface	98
5.2. Représentation des surfaces par les fractions rationnelles	99
5.3. Représentations des surfaces dans le cadre de la M.A.N.	101
5.3.1. Régularisation des surfaces composées de surfaces simples	101
5.3.2. Traitements des surfaces arbitraires	104
5.4. Conclusions	106
<b><u>Conclusions générales et perspectives</u></b>	107
<b><u>Références bibliographiques</u></b>	109

## **Introduction générale**

La réalisation par emboutissage, des pièces à parois minces, est couramment effectuée dans différents secteurs industriels, notamment en construction automobile. L'emboutissage est un procédé de mise en forme qui consiste à transformer une tôle fine plane en une forme non développable, au moyen de presses mécaniques ou hydrauliques. Ces dernières années, pour satisfaire les besoins des industriels, en terme de qualité et de compétitivité, de nombreux travaux ont été consacrés à la simulation numérique de ce procédé afin d'optimiser et d'assurer la faisabilité des produits.

La résolution numérique d'un problème de mise en forme consiste à déterminer les différentes configurations de la structure au cours de ses déformations, en tenant compte des conditions évolutives de contact [CNRS/1990]. Les méthodes de résolution les plus connues actuellement et les plus largement implémentées dans les codes de calcul par éléments finis sont les méthodes itératives basées sur le processus de prédiction-corrrection. Ces méthodes procèdent en deux étapes ; la première consiste à linéariser le problème non linéaire de départ et donc à prédire une nouvelle solution, tandis que la deuxième étape consiste à corriger le résidu d'équilibre global de la structure par itérations successives. Une bibliographie importante sur ces méthodes est disponible dans tous les livres d'éléments finis traitant les problèmes non linéaires [Zienkiewicz et Taylor/91] [Crisfield/91] [Bathe/96].

Les logiciels actuels de simulation numérique utilisent le plus souvent des algorithmes de résolution de type Newton-Raphson pour résoudre les problèmes non linéaires. Les algorithmes implémentés dans ces logiciels de simulation sont d'autant moins performants lorsque les non-linéarités s'accumulent. C'est notamment le cas de l'emboutissage pour lequel sont réunies à la fois les non-linéarités physiques (plasticité, éventuellement l'endommagement), des non-linéarités géométriques (grands déplacements, grandes rotations et grandes déformations) auxquelles il faut ajouter les non-linéarités de contact et de frottement. Pour ces raisons, la simulation numérique des procédés de mise en

forme par éléments finis a pour principal inconvénient le coût de calcul élevé [Bussy et Vauchez/89].

Ces dernières années, plusieurs travaux ont été consacrés à l'amélioration de la convergence des méthodes de résolution et à l'adaptation du pas de calcul [Crisfield//83] [Crisfield//81] [Ramm/81]. L'équipe de Ladevèze travaille sur la résolution des problèmes non linéaires en utilisant des méthodes de calcul non incrémentales [Ladevèze/85] [Ladevèze/91] : il s'agit d'une méthode itérative qui à chaque itération , propose une approximation des variables en tout point de la structure et sur la totalité de l'incrément.

En parallèle à ces méthodes, nous avons celles de perturbation qui existent depuis longtemps [Signorini/30]. Ces dernières n'avaient pas trouvé une adhésion unanime de la part des numériciens car elles sont basées sur des développements analytiques de la solution et leurs applications étaient limitées aux problèmes à géométrie simple. Il a fallu attendre 1968 pour que Thompson et Walker [Thompson et Walker/68] présentent une première association des méthodes de perturbation et des méthodes d'éléments finis mais les conclusions quant à l'efficacité de ces méthodes n'étaient pas probantes. En 1990, dans un article consacré aux problèmes de bifurcations perturbées, Damil et Potier-Ferry ont repris ces méthodes et, grâce à un choix judicieux de la formulation de base (quadratique), ils ont pu obtenir des développements jusqu'à des ordres élevés, ce qui a permis d'améliorer la solution asymptotique en exigeant un temps raisonnable de calcul du second membre [Damil et Potier-Ferry/90].

La méthode asymptotique numérique (M.A.N.) a été fiabilisée quelques années plus tard par B. Cochelin et ses collaborateurs (1994) en présentant un algorithme permettant de suivre complètement les branches de solution en appliquant la M.A.N. pas à pas dans une procédure de continuation. Cette technique de continuation a été perfectionnée plus tard par Elhage Hussein *et al* [Elhage-hussein *et al*/00] qui a proposé une technique de continuation basée sur les approximants de Padé.

La M.A.N consiste à chercher la solution d'un problème non linéaire sous forme de série entière. Elle permet de transformer le problème de départ en une succession de problèmes linéaires admettant le même opérateur de rigidité tangente. A chaque ordre, les termes non linéaires sont reportés sur un second membre obtenu de façon optimale.

La M.A.N. est alors appliquée aux problèmes présentant des non-linéarités telles que les coques élastiques en rotations modérées, ou aux indicateurs de bifurcations pour les problèmes à géométrie non linéaire pour ne citer que quelques exemples. A partir de cette avancée considérable, la M.A.N. s'est avérée être une solution alternative aux méthodes itératives classiques. De plus, pour une classe de problèmes, il est démontré que cette méthode est rapide (moins de matrices de rigidité à décomposer), fiable (automatique avec des pas adaptatifs) et facile à utiliser. On peut citer à titre d'exemples les problèmes de coques en grandes rotations [Ammar/96] [Zahrouni *et al*/99], la mécanique des fluides [Tri *et al*/96] [Cadou/97], la viscoplasticité en grandes déformations [Brunelot/99], la plasticité [Braikat/97] [Zahrouni *et al* /98], le problème de contact [Elhage-Hussein/98] et le traitement des problèmes de dynamique [Cohelin et Compain/99].

Nous présentons dans ce travail une modélisation tridimensionnelle du procédé de l'emboutissage où sont couplées plusieurs types de non-linéarités (géométrique, matérielle et non-linéarité due au contact).

### ***Contenu de la thèse***

Dans le premier chapitre, on présente une étude bibliographique sur l'emboutissage comme procédé de mise en forme, en insistant sur l'aspect numérique. Ensuite on présente une bibliographie ou un état de l'art des méthodes asymptotiques numériques qui constituent le cadre de notre simulation du procédé.

Dans le deuxième chapitre, on présente une modélisation du problème de contact entre un corps rigide et une coque élastoplastique. Une application de l'algorithme obtenu à la simulation de l'emboutissage hémisphérique sera présentée dans le chapitre 3. Les résultats du modèle présenté montreront l'efficacité de l'algorithme en les comparant à ceux obtenus par le code industriel Abaqus. Une étude détaillée des différents paramètres de régularisation introduits, pour un choix judicieux de leurs valeurs, sera présentée.

Une amélioration de la modélisation des conditions de contact dans le cadre de la M.A.N. fera l'objet du chapitre 4. Dans ce chapitre, on propose une autre régularisation de la loi de contact. On désire par cette nouvelle régularisation, adoucir la loi de contact, qui

présente une dureté particulière comparée aux autres types de non-linéarités. L'adoucissement effectué consiste à autoriser une interpénétration entre le corps rigide et la structure étudiée (tôle déformable). L' algorithme est testé sur le problème étudié dans le chapitre 3.

Une extension de ces algorithmes pour une simulation de l'emboutissage et des procédés de mise en forme, en généralisant les formes des outils est étudiée au dernier chapitre. On construit les formes géométriques complexes à partir des formes simples. On procède d'une méthode de régularisation des formes de surfaces de contact dans certains cas et d'une méthode de recouvrement dans d'autres cas. Dans les deux cas, une procédure de recherche de la distance minimale (point de contact/surface rigide) est employée.

Les résultats obtenus, montreront la validité des algorithmes et l'efficacité des méthodes asymptotiques pour le traitement des problèmes qui combinent des différentes non-linéarités, en les comparant à ceux obtenus par les méthodes de résolution classiques.

**CHAPITRE 1****Etude bibliographique**

<b><i>Introduction</i></b>	11
<b>1.1. Description du procédé</b>	11
<b>1.2. Intérêt d'une simulation numérique du procédé</b>	12
<b>1.3. Modélisations mécaniques du procédé de l'emboutissage</b>	15
<b>1.3.1. Modèle rigide plastique</b>	15
<b>1.3.2. Modèle viscoplastique</b>	16
<b>1.3.3. Modèle superplastique</b>	16
<b>1.3.4. Modèle élastoplastique</b>	17
<b>1.4. Eléments finis utilisés dans les simulations numériques de l'emboutissage</b>	17
<b>1.4.1. Approche membrane</b>	17
<b>1.4.2. Approches bidimensionnelles et approches solides</b>	18
<b>1.4.3. Approche coque</b>	18
<b>1.5. Problème de contact et de frottement</b>	19
<b><i>Introduction</i></b>	19
<b>1.5.1. Position du problème de contact</b>	20
<b>1.5.2. Conditions de contact</b>	21
<b>1.5.3. Lois de frottements utilisées dans les simulations numériques</b>	22
<b><i>1.5.3.a. Modèle de Coulomb</i></b>	22
<b><i>1.5.3.b. Modèle de Tresca</i></b>	24
<b><i>1.5.3.c. Modèle de frottement non local</i></b>	24
<b>1.5.4. Méthodes de traitement des problèmes de contact et de frottement</b>	25
<b><i>1.5.4.a. Méthode de Lemke</i></b>	26
<b><i>1.5.4.b. Méthode des Multiplicateurs de Lagrange</i></b>	27
<b><i>1.5.4.c. Méthode de Pénalisation</i></b>	28

---

1.5.4.d. Méthode de Lagrange augmentée	29
1.5.4.e. Méthode des éléments d'interface	30
<b>1.6. Méthodes de résolution numériques</b>	<b>31</b>
<i>Introduction</i>	31
1.6.1. Méthodes classiques	32
1.6.2. Méthodes Asymptotiques Numériques	32
<b>1.7. Conclusions</b>	<b>40</b>

## **Introduction**

L'emboutissage est un procédé de mise en forme des pièces à froid et quelques fois à chaud. Il permet, par déformation plastique des tôles minces et au moyen des outils, d'obtenir des pièces non-développables et de formes tridimensionnelles plus ou moins complexes. Les tôles à emboutir sont généralement des tôles laminées d'alliages métalliques ductiles. L'emboutissage est un procédé qui marque sa présence dans presque toutes les industries mécaniques.

L'emboutissage a une grande importance industrielle, si l'on se réfère au tonnage des pièces fabriquées. La faible épaisseur des tôles utilisées dans la production, permet un gain important du poids et une économie de la matière. Les pièces obtenues par ce procédé peuvent également avoir une grande rigidité vues leurs formes et leurs conceptions. C'est un procédé qui permet donc un bon rapport rigidité-poids, ce qui est très souhaité et recherché dans l'industrie. C'est grâce à ces avantages que ce procédé trouve une large application. Il est très utilisé dans la fabrication du mobilier métallique, de l'électroménager, de l'emballage métallique, de l'aéronautique et surtout de l'automobile ( il suffit ici de dire que sur un véhicule l'emboutissage concerne 500 pièces environ ). Un autre avantage très important pour ce procédé : il est très bien adapté au travail en série, un outillage spécial permet d'atteindre des cadences de production d'environ 60 pièces par minute.

### **1. Description du procédé**

La machine à emboutir est constituée de trois éléments principaux : un poinçon, une matrice et un serre-flan. Le poinçon délimite le contour intérieur et applique la force nécessaire à la mise en forme de la tôle: force d'emboutissage. Quant à la matrice, elle délimite le contour extérieur de la pièce. Le serre-flan permet, en pressant la tôle contre la matrice, de contrôler l'écoulement du métal le long du poinçon et d'éviter le phénomène du plissement (figure 1.1)

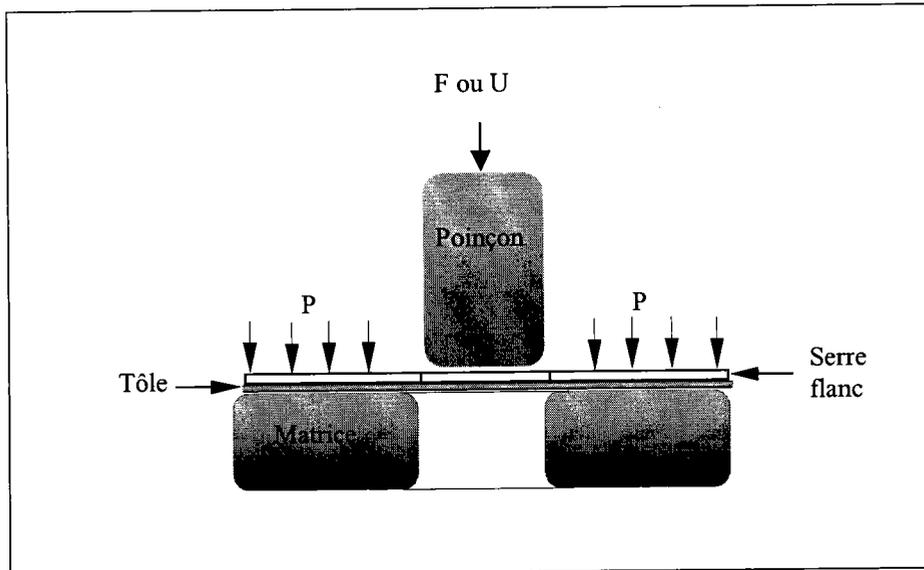


Figure (1.1) Description de l'outillage de l'emboutisseuse

La méthode de formage dans ce procédé dépend du mode d'action du serre-flan. C'est un formage par expansion si la partie de la tôle située entre la matrice et le serre-flan est bloquée. Il est appelé formage par rétreint lorsque cette partie du métal a la liberté de glisser et de s'écouler pour alimenter la hauteur de la pièce. Pour contrôler le glissement de la tôle, une méthode souvent utilisée dans l'industrie, consiste à freiner latéralement la tôle à l'aide des jons de retenue qui l'obligent à se plier et se déplier.

## 2. Intérêt d'une simulation numérique du procédé

Les facteurs principaux dont dépend la réussite de l'opération d'emboutissage sont : le matériau de la tôle, les paramètres de l'outillage et les conditions opératoires. Les deux premiers facteurs constituent des thèmes de recherche majeurs en emboutissage. Les propriétés mécaniques des matériaux qui influent directement sur la réussite de l'opération de l'emboutissage sont:

- La limite d'élasticité ( $Re$ )
- La résistance à la rupture ( $Rm$ )
- L'allongement à la rupture ( $A$ )
- Le coefficient d'écrouissage ( $n$ )
- Le coefficient d'anisotropie ( $r$ )

qui peuvent être déterminées au moyen d'un simple essai de traction.

D'autres propriétés sont souvent prises en compte pour juger l'emboutissabilité d'une tôle par exemple :

- la courbe limite de formage ( CLF) ou FDL (Forming Limit Diagram),
- le rapport limite l'emboutissage, LDR ( Limiting Drawing Ratio ),
- la profondeur maximale de Godet,
- le profondeur limite de pièce hémisphérique LDH (Limiting Dome Heith).

Il est très important à ce niveau de tenir compte du fait que ces propriétés ne sont pas constantes au cours de l'opération de la mise en forme. Ces propriétés varient en fonction des chemins de déformation, la complexité de la forme des pièces, la vitesse de déformation et de l'augmentation de température.

Après avoir déterminé le comportement du matériau, il faut caractériser l'outillage du procédé en définissant les propriétés suivantes :

- la forme et l'état de surface de l'outillage,
- les profils des outils,
- le jeu entre le poinçon et la matrice,
- la forme et la position de jonc du retenue,
- la cadence de la production,
- la pression de serre flan
- la lubrification (dans certain cas)

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des outils de l'emboutissage pour améliorer la qualité des produits et réduire les coûts de fabrication. Les outils sont réalisés en fonte pour des grandes séries ( plus de 1000000 de pièces) et en béton de résine pour les pièces prototypes ( de l'ordre de 100 pièces). Les défauts des pièces embouties peuvent apparaître pendant ou après l'opération de l'emboutissage, ils se produisent sous les formes suivantes:

- striction /rupture
- plis
- défaut dimensionnels ( retour élastique, amincissement inacceptable)
- défauts surfaciques (rayures, peau d'orange)

Tous cela montre bien que l'emboutissage, comme procédé de mise en forme, est **un procédé complexe et difficile à maîtriser**. Pour cela, des essais aux laboratoires et aux

ateliers sont souvent nécessaires pour déterminer une combinaison adéquate de ces paramètres et obtenir un emboutissage réussi. Or **ces essais sont généralement nombreux lents et coûteux** [El Mouatassim et Jameux/94] [Picart *et al*/99]. Ces dernières années des nombreux outils de calcul, de simulation et de CAO ont été développés afin de **prévoir l'emboutissabilité des tôles, de réduire les coûts et les délais de production des pièces et d'améliorer la qualité des produits**. Ces outils de calcul et de simulation, qui sont une suite logique des progrès scientifiques en calcul des structures, sont devenus possibles grâce à l'évolution de cette branche de la mécanique et des moyens informatiques à bas prix et aux développement des algorithmes bien adaptés. Ces algorithmes sont devenus capables de prendre en compte les grandes déformations, les grandes vitesses de déformation et les lois de comportement des matériaux ainsi que le traitement des conditions de contact entre les outils et la tôle [Afzali et Bouhelier/94].

Pour satisfaire les besoins de l'industrie ( et surtout l'industrie automobile) en simulation numérique de l'emboutissage, des nombreux logiciels ont été développés et mis en service pour les industriels. Parmi ces logiciels, on peut citer:

- ISOPUNCH (société ISOFORM SOLLAC)
- SIMEM2 (société SIMTECH)
- ABAQUS (Société ABAQUS soft ware)
- LS-DYNA-3D (société DYNALYS)
- FORGE2 (société TRANSVALOR)
- OPTRIS (société MATRA DATA VISION)
- PAM-STAMP (société ESI)
- RADIOSS(société MECALOG)

Tous ces logiciels de simulation sont fondés sur la méthode des éléments finis. Dans cette liste des codes et des outils de simulation du procédé, on peut distinguer deux catégories de modèles. Des modèles dits simplifiés et des modèles complets. Parmi les modèles simplifiés, on trouve (par exemple) l'approche dite 'approche inverse'. Cette approche inverse a été développée par l'équipe de J. L. Batoz [Batoz *et al*/89]. La première version de cette approche a été présentée en 1989 en utilisant des éléments membranes. Cette méthode permet d'éviter la lenteur de la procédure du calcul incrémentale dans l'analyse de la loi de comportement et les conditions de contact. Les points matériels dans la tôle déformée sont déterminés à partir

de la forme finale de la pièce emboutie (forme CAO maillée). En 1995, cette approche a été améliorée en tenant compte des phénomènes de flexion qu'on ne peut pas négliger dans la simulation du procédé [Batoz *et al*/95]. La méthode inverse a été implémentée dans quelques codes industriels tels que FAST3D, ICEM-STAMP, FLECH(UTC), ISOPUNSH (SOLLAC). Cette méthode fournit des résultats approchés par rapport aux modèles complets, mais elle reste un outil très rapide et très utile dans la phase du pré-dimensionnement. Les simulations ou les modèles qualifiés de 'complets' correspondent à un schéma de résolution incrémentale. L'approche incrémentale, par opposition à l'approche simplifiée, permet un suivi précis de l'évolution des différents phénomènes rencontrés pendant les différentes phases du processus. Les approches incrémentales peuvent être basées sur une méthode statique implicite (ABAQUS, MARC...), statique explicite ou dynamique explicite (OPTRIS, PAM-STAMP, RADIOS, ABAQUS...). En raison de la complexité des phénomènes à simuler (couplage de plasticité, contact...), **le temps de calcul reste un facteur très pénalisant dans ces approches.**

### **3. Modélisations mécaniques du procédé de l'emboutissage**

La simulation numérique de l'emboutissage nécessite une description très fine des phénomènes physiques et mécaniques rencontrés pendant les différentes phases du procédé. L'introduction des lois de comportement du matériau, aussi réalistes que possibles et prenant en compte des processus physiques susceptibles d'intervenir, est indispensable [Lemaitre/85] [Gelin/90]. Dans la littérature de la simulation des procédés de mise en forme, différents modèles ont été adoptés pour décrire le comportement du matériau à emboutir. Il est difficile de classer ces approches par méthodologie car la mise en forme des métaux fait intervenir des problèmes divers nécessitant des approches variées. Néanmoins, on va citer dans cette section celles qui sont les plus utilisées dans les simulations numériques du procédé.

#### **3.1. Modèle rigide plastique**

Dans ce modèle, le comportement est supposé être parfaitement plastique ; les déformations élastiques sont négligées. On peut citer le modèle de [Lee et Kobayashi/73] [Kobayashi et Kim/78] [Wagoner *et al*/88]. Dans d'autres modèles l'aspect d'anisotropie a été développé [Gotoh et Ishise/78] [Gotoh/80]. Le problème de contact et de frottement est

pris en compte, au début, dans le modèle rigide plastique de Zienkiewicz *et al* [Zienkiewicz *et al*/78]. Dans un modèle rigide plastique, les équations constitutives impliquées sont plus simples, comparées aux autres approches. La formulation éléments finis correspondante est une formulation généralement en vitesse et les contraintes sont liées directement aux taux de déformations et ils ne sont pas réactualisés par leurs incréments mais calculés à la fin de chaque pas. L'approximation faite dans ce modèle peut être justifiée dans le cas de forgeage où le niveau des déformations plastiques atteintes est très élevé, elles peuvent atteindre des centaines pour cents comparées aux déformations élastiques. Dans l'emboutissage à froid, les déformations élastiques ne sont pas négligeables, ainsi que les phénomènes du retour élastique et des contraintes résiduelles ne peuvent être accessibles facilement par un tel modèle. Par contre, avec des temps de calcul de 2 à 3 fois moins élevés (à discrétisations égales), elles sont particulièrement efficaces pour la simulation du forgeage où le taux de corroyage et le remplissage des formes en matrice sont principalement recherchés [Brunet/90].

### **3.2. Modèle viscoplastique**

En général, le comportement viscoplastique est modélisé par une loi de Norton-Hoff [Germain/85] [Lohegnies *et al*/89] [Brunet/90] [Chenot *et al*/92] [Chenot/93] [Hacquain/96] [Chenot/97] [Rachik et Roelandt/98] [Brunelot/99]. Ce modèle est généralement utilisé dans les procédés de mise en forme à chaud ou pour des matériaux dont l'aspect de viscosité est dominant comme le cas des polymères par exemple. Les remarques à propos de ce modèle sont semblables à celles faites sur le modèle rigide plastique

### **3.3 Modèle superplastique**

Certains alliages possèdent ce type de lois de comportements. Ces alliages permettent des élongations qui varient entre 200 et 1000% et peuvent atteindre, dans certains cas, 5000%. Parmi les simulations basées sur ce modèle, on peut citer [Zhang *et al*/86] [Wood *et al*/89] [Bellet *et al*/90]. La superplasticité du métal, dans une certaine gamme de températures et de vitesses de déformation, permet de déformer, sous des contraintes faibles (pression gazeuse), le métal et lui faire épouser la forme

d'un moule. Ce type de loi de comportement est adopté souvent dans les simulations des procédés de mise en forme par gonflage.

### **3.4 Modèle élastoplastique**

Dans la littérature, plusieurs approches sont basées sur ce modèle. Les premières simulations basées sur ce modèle étaient limitées à la théorie des petites déformations, et les conditions de contact n'étaient pas prises en compte [Wifi/76] [Wang et Budiansky/78] [Duroux et Batoz/90]. Ensuite, des modèles prenant en compte l'aspect de grandes déformations élastoplastiques ont été développés [Tang/81] [Brunet/90] [Gelin *et al*/95]. Dans le cas de l'emboutissage, un modèle élastoplastique semble le plus réaliste pour modéliser le comportement du matériau. D'autant plus qu'il permet un accès facile aux phénomènes des contraintes résiduelles et du retour élastique. La formulation d'éléments finis correspondante à ce modèle est une formulation en déplacement, le plus souvent, lagrangienne réactualisée. En élastoplasticité, la difficulté principale vient de la nécessité d'une configuration de référence et du grand nombre des variables d'état impliquées dans la formulation. Par ailleurs, la loi de comportement, sous sa forme incrémentale, doit être intégrée et transformée dans le principe variationnel. L'approche élastoplastique semble la plus utilisée pour la simulation des procédés de mise en forme des produits plats tel est le cas pour l'emboutissage [Brunet/90].

## **4. Eléments finis utilisés dans les simulations numériques de l'emboutissage**

Les modèles de simulation numériques de l'emboutissage dépendent fortement du type des éléments finis utilisés pour discrétiser la tôle. Dans la littérature, on trouve des approches membranes, approches 2D, approches solides et approches coques.

### **4.1 Approche membrane**

Dans cette approche, seuls les effets des composantes des efforts dans le plan de la tôle sont pris en compte. Plusieurs modèles basés sur cette approche ont été proposés [Kobayachi et Kim/78] [Wang et Budiansky /78] [Wang/84] [Wood *el*/89] [Duroux et Batoz/90] [Brunet/90] [Bellet *et al*/90] [Guo *et al*/92]. Ces approches ont permis aux auteurs de prévoir

la répartition des déformations et des contraintes ainsi qu'une bonne estimation des efforts exercés sur les outils avec des temps de calcul et des espaces mémoire faibles par rapport aux autres approches. Mais le problème qui se pose est qu'une approche pareille ne permet pas de prévoir les phénomènes des plis et les phénomènes de cisaillement qui sont très importants en emboutissage.

#### **4.2 Approches bidimensionnelles et approches solides**

Dans le but de simplifier la simulation numérique de l'emboutissage, plusieurs approches se sont limitées à une étude bidimensionnelle ou axisymétrique du procédé, ce qui a permis d'aboutir souvent à de bons résultats. Dans toutes ces approches, les formes des emboutis étudiées étaient simples. Ce qui n'est pas toujours le cas, surtout lorsque on parle de l'industrie automobile. Les approches tridimensionnelles basées sur des éléments volumiques (solides) sont plutôt utilisées dans la simulation des procédés de mise en forme des produits massifs tels que le laminage et la coulée continue ou le forgeage. Les modèles basés sur cette dernière approche ne sont pas nombreux. Ceci s'explique par les temps de calcul très importants générés par ces types d'éléments. Par ailleurs, vu la faible épaisseur des tôles utilisées dans l'industrie de l'emboutissage, une approche coque semble la plus réaliste pour une simulation de ce procédé.

#### **4.3 Approche coque**

Dans cette approche, les effets de flexion dans le plan de la tôle sont superposés aux effet membranes. Plusieurs simulations basées sur cette approche ont été développées [Boivin/90] [Onãte et Saracibar/92] [Gelin et al/95] [Picart et al/99]. La formulation coque semble la formulation la plus efficace dans la discrétisation par éléments finis des tôles destinées pour la mise en forme.

## **5. Problème de contact et de frottement**

### ***Introduction***

Les problèmes des procédés de mise en forme incluent souvent des conditions limites de type contact/frottement [Germain/85] [Durville/93] [Hacquin/96] [Chenot/97] [Fourment *et al*/97]. En effet dans les opérations de mise en forme, les matériaux se déplacent par rapport aux outils le long du processus, ce qui génère des efforts de pression et de frottement entre le produit et les outils. Pour cette raison, la prise en compte des conditions de contact est indispensable dans la simulation numérique de ces procédés. Du point de vue numérique, la simulations des procédés constitue une tâche délicate en raison du couplage de différentes non-linéarités (géométrie, plasticité, contact).

Le problème de contact reste le problème le plus sensible à cause des nombreux conditions à satisfaire et l'attention à accorder pour assurer la convergence de la solution avec un temps de calcul raisonnable surtout en 3D où l'augmentation du nombre des points de contact génère une réduction considérable de la taille des incréments de temps [Nagtaal et Taylor/91]

Dans la simulation numérique de ces procédés, le problème de contact est généralement assimilé à un contact entre solides déformables qui représente la matière à déformer, et des solides indéformables ou obstacles qui représentent les outils (poinçon, matrice, serre flan.)

Pour la résolution du problème de contact divers types de méthodes sont utilisés. On peut citer la méthode de Lemke [Klarbring/86] [Pinto/90], la méthode de pénalisation [Jean/93] [Curnier et Alart/88] [Brunet/88] [Ben Dhia/89] [Lochegnies *et al*/89], la méthode des multiplicateurs de Lagrange [Bathe et Chaudhary/85] [Bath et Chaudhary/86] [Courtois et Ricard/88] [Combescure *et al*/88] et la méthode du Lagrangien augmenté [Ju et Taylor/88] [Frachome *et al*/89] [Simo et Laursen/92]. Une autre classe de méthode consiste à introduire des éléments finis spécifiques intégrant toutes les conditions de contact dans leur définition [Grolad et Critescu/83] [Charlier et Cescotto/88]. Toutes ces méthodes présentent leurs avantages et aussi leurs inconvénients. Les schémas de ces différentes méthodes remplissent tous à leurs manières les étapes nécessaires à la prise en compte des phénomènes de contact et de frottement [Jean et Touzot/88], à savoir :

- La détection du contact
- La détection de la perte de contact
- Le respect de la condition de non interpénétration
- La détection du glissement ou de l'adhérence.

### 5.1. Position du problème

On considère un corps S occupant le domaine  $\Omega$  et ayant pour frontière  $\partial\Omega$  avec :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_F + \partial\Omega_d + \partial\Omega_c$$

Le solide S est soumis à une densité de force surfacique  $f_s$  sur la frontière  $\partial\Omega_F$  et une densité de force de volume  $f$  dans  $\Omega$ . La frontière  $\partial\Omega_d$  est supposée être à déplacement imposé  $u_d$  (figure 1.2).

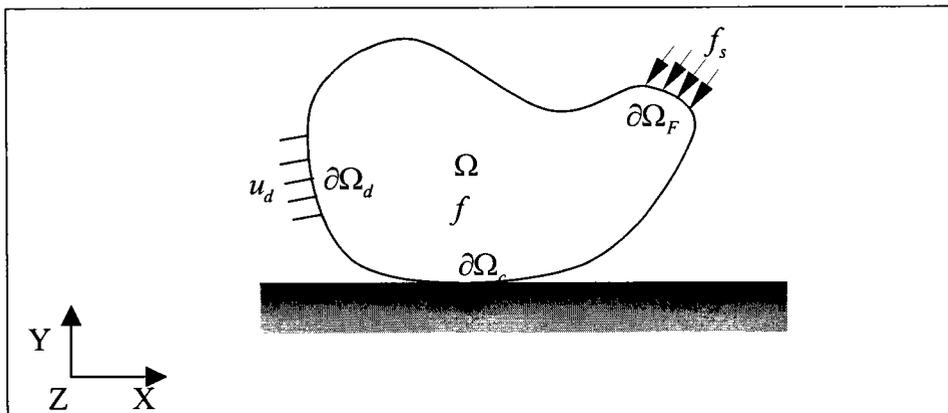


Figure (1.2) Corps déformable en contact avec une surface rigide

Sur la frontière  $\partial\Omega_c$ , le corps est susceptible d'être en contact unilatéral. Le corps S serait alors soumis à une densité surfacique de forces due à la réaction de la surface rigide  $f_c$ . Généralement, l'étude mécanique d'un tel problème revient à rechercher le champ de déplacement cinématiquement admissible  $U$  du solide engendré par le chargement décrit ci-dessus.

Dans un cadre statique, le problème revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (1.1)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_s \quad \text{sur } \partial\Omega_F \quad (1.2)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_c \quad \text{sur } \partial\Omega_c \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_d \quad (1.4)$$

A ces quatre conditions s'ajoutent la loi de comportement du matériau qui peut être élastique, plastique, élastoplastique ou autre.

## 5.2. Conditions de contact

Le problème de contact génère d'autres conditions à prendre en compte par rapport aux autres problèmes mécaniques. Les conditions de contact, dans le cas d'un contact avec frottement, portent simultanément sur le déplacement et les forces de contact induites.

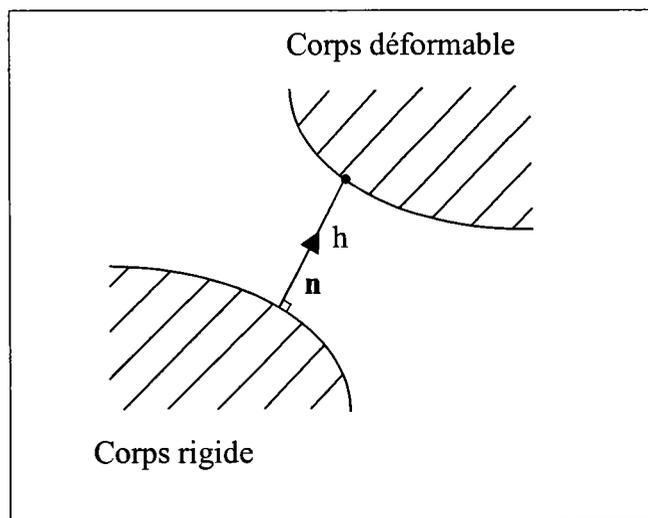


Figure (1.3) conditions de contact unilatéral

Les points (ou les nœuds après discrétisation par éléments finis) appartenant à la surface de contact doivent satisfaire aux conditions suivantes :

- \* Condition de non-interpénétration des deux corps:

$$h \geq 0 \quad (1.5)$$

- \* Condition de contact unilatéral ou condition de non adhésion:

$$\mathbf{f}_c \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (1.6)$$

L'effort a pour effet de comprimer le corps au point de contact.

\* Condition de complémentarité

$$|\mathbf{f}_c| h = 0 \quad (1.7)$$

Lorsqu'il y a contact, l'écart  $h$  est nul et une réaction de contact est générée. Pour un écart non nul, la réaction est réduite à zéro.

### **5.3. Lois de frottement utilisées dans les simulations numériques**

Dans les procédés de mise en forme à froid, ce qui est le cas de l'emboutissage, le phénomène de frottement joue un rôle important. Plusieurs simulations du procédé ont tenu compte de ce phénomène en proposant des procédures de gestion plus ou moins complexes.

Dans la pratique, il existe trois catégories principales du frottement :

- frottement quasi statique
- frottement hydrodynamique
- frottement avec pénétration et usure

Dans l'industrie des procédés de mise en forme, le phénomène le plus connu fait partie plutôt de la première catégorie.

#### **5.3.a. Modèle de Coulomb**

Ce modèle met en jeu un coefficient de frottement qui est le rapport de l'effort tangentiel à l'effort normal exercé par un solide sur l'autre :

$$\begin{aligned}
 & F_t \leq \mu |F_n| \\
 & \text{si } F_t < \mu |F_n| \quad \text{on a } v_t = 0 \\
 & \text{si } F_t = \mu |F_n| \quad \text{il } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } v_t = -\lambda F_t
 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\mu$  est le coefficient du frottement,  $v_t$  est la vitesse tangentielle du point considéré,  $F_n$  et  $F_t$  représentent respectivement la composante tangentielle et la composante normale de la force du contact au point étudié.

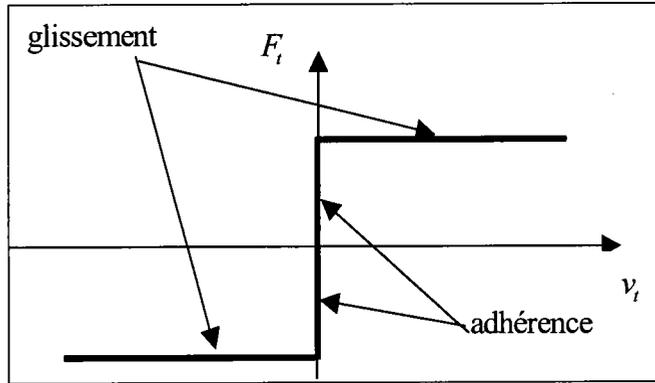


Figure (1.4) loi du frottement : Modèle de Coulomb

Cette loi peut être écrite aussi en fonction de la vitesse tangentielle relative ( $v_t^{rel}$ )

$$F_t = -\mu |F_n| \frac{v_t^{rel}}{|v_t^{rel}|} \quad \text{si } v_t^{rel} \neq 0 \tag{1.9}$$

$$F_t < \mu |F_n| \quad \text{si } v_t^{rel} = 0 \tag{1.10}$$

On remarque que cette loi présente une discontinuité, ce qui va créer des difficultés lors de la simulation numérique. Pour surmonter ces difficultés, des techniques de régularisation sont souvent employées:

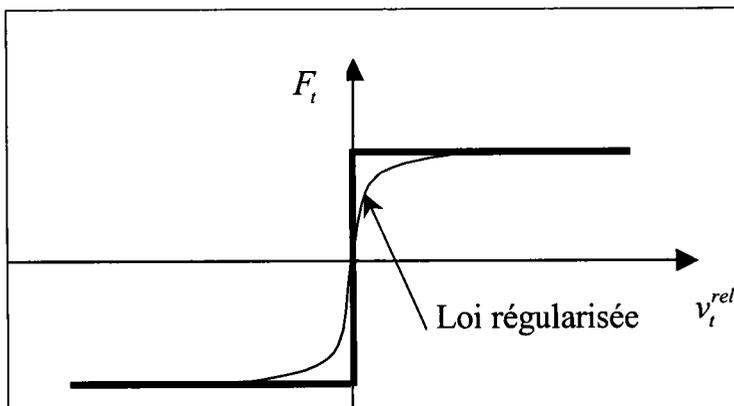


figure (1.5): régularisation de la loi de frottement.

Dans les industries d'emboutissage, on utilise rarement les lubrifiants: ceci peut justifier une hypothèse d'invariance du coefficient de frottement.

### 5.3.b. Modèle de Tresca

Cette loi s'écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\text{Si } |\mathbf{F}_t| < \frac{m}{\sqrt{3}} F_0, \mathbf{v}_t^{rel} = 0 \quad (1.11)$$

$$\text{Si } |\mathbf{F}_t| = \frac{m}{\sqrt{3}} F_0 \text{ il } \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \mathbf{v}_t = -\lambda \mathbf{F}_t \quad (1.12)$$

$m$  représente le coefficient de frottement de Tresca.

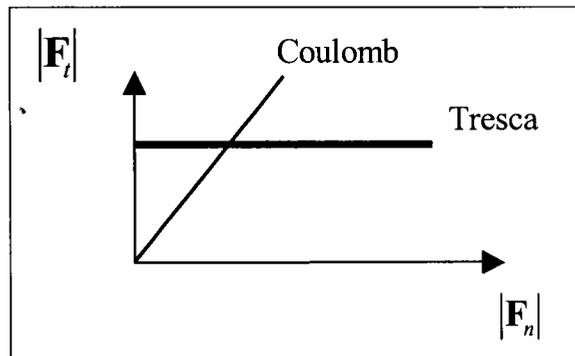


Figure (1.6) Modèles de frottement : Coulomb, Tresca.

On remarque que le modèle de Tresca présente un seuil de frottement constant. Les forces de contact tangentielles induites par le frottement sont indépendantes de la réaction normale.

### 5.3.c. Modèle de frottement non local

Ce modèle a été proposé par J.T Oden et E.B Pires [Oden et Pires/83] [Oden et Pires /88] [Oden/88]. Au contraire des lois de Tresca et de Coulomb, qui déterminent la valeur de la force tangentielle  $F_t$  à partir de l'effort normal de contact  $F_n$  en un point P, dans ce modèle,

elle est déterminée au voisinage de ce point. Les auteurs ont proposé aussi une loi non locale et non linéaire par rapport au déplacement tangentiel  $u_t$ .

Vu la complexité de la formulation, on se limite à cette brève présentation. Par ailleurs, ce modèle est rarement utilisé dans la gestion de problème de contact dans les simulations numériques des procédés.

La mise en œuvre du modèle de Tresca reste aisé du fait de la simplicité de son écriture en comparaison à la loi de frottement de Coulomb, qui est plus élaborée dans sa définition.

La loi de Coulomb décrit bien le phénomène de frottement si  $|\mathbf{F}_t|$  n'est pas très important, par contre la loi de Tresca est surtout proposé dans le cas où  $|\mathbf{F}_t|$  est grand. Pour les procédés d'emboutissage les pressions  $|\mathbf{F}_t|$  de contact sont beaucoup moins importantes que lors du forgeage et du filage. Par ailleurs, en vertu des essais industriels de l'emboutissage, la loi de Coulomb est mieux adaptée pour représenter le frottement entre métaux que la loi de Tresca [Avitzur/83].

#### **5.4. Méthodes de traitement des problèmes de contact et de frottement**

La résolution d'un problème de calcul de structures non-linéaire sans tenir compte des conditions de contact revient à la recherche de la solution d'un système de type:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité qui dépend du vecteur de déplacement solution du problème  $\mathbf{U}$ . Le vecteur  $\mathbf{F}$ , est un vecteur second membre qui représente les forces extérieures. En tenant compte des conditions de contact, la dernière équation devient :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})] [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] + [\mathbf{R}] \quad (1.14)$$

Le vecteur  $\mathbf{R}$  représente les réactions de contact.

Ces réactions de contact sont indéterminées *a priori* et constituent des inconnues supplémentaires au problème à résoudre.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter le problème de contact :

### 5.4.a Méthode de Lemke:

La méthode de Lemke [Klarbring/86] [Raous *et al*/88] [Pinto/90] [Chertier/97] traite en premier la zone de contact ( condensation sur la surface de contact) par opposition aux autres méthodes qui traitent globalement l'ensemble des corps en contact et leurs interfaces. La résolution du problème de contact, à l'aide de cette technique, revient à :

Trouver  $\mathbf{w} \in R^p$ ,  $\mathbf{z} \in R^p$  tels que :

$$\mathbf{w} - \mathbf{Mz} = \mathbf{q} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{w}_i \geq 0 \quad (1.16)$$

$$\mathbf{z}_i \geq 0 \quad i=1, \dots, p \quad (1.17)$$

$$\mathbf{w}_i \mathbf{z}_i = 0 \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{q}$  est un vecteur donné de  $R^p$  et  $\mathbf{M}$  une matrice carrée donnée et de rang  $p$ . Il est nécessaire de passer par une technique de condensation [Lebon/88] du système :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{U})] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = [\mathbf{F}] + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_l \\ \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

où les indices  $l$  et  $c$  indiquent respectivement les nœuds libres et les nœuds en contact. Ce qui revient à résoudre:

$$[\mathbf{K}^*(\mathbf{U})] [\mathbf{U}_c] - [\mathbf{R}_c] = [\mathbf{F}^*] \quad (1.20)$$

$\mathbf{K}^*$  et  $\mathbf{F}^*$  sont les formes condensées de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$ .

Par identification avec (1.15), (1.16), (1.17) et (1.18), on a :

$$\mathbf{W} = -\mathbf{R}_c \geq 0, \quad \mathbf{z} = -\mathbf{u}_c \geq 0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{F}^*, \quad \mathbf{M} = \mathbf{K}^*$$

La méthode de Lemke est une méthode mixte puisqu'elle comporte la résolution en déplacement et en force de contact. Cette méthode présente une simplicité et une performance en vitesse et en qualité de résultats. Néanmoins, pour des problèmes où le nombre de points de contact est grand (>200) il peut apparaître des phénomènes d'accumulations d'erreurs dus principalement à la condensation [Kallala/93].

### 5.4.b. Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode est utilisée dans les problèmes d'optimisation sous contraintes. Elle consiste à introduire des paramètres supplémentaires dits multiplicateurs de Lagrange. Elle revient, en fait, à introduire des contraintes supplémentaires sur les nœuds en contact dans le système matériel global. Plusieurs algorithmes basés sur cette méthode ont été développés [Bathe et Chaudhary/85] [Bathe et Chaudhary /86] [Bathe et Mijailovich/88] [Courtois et Ricard/88] [Combescure *et al*/88].

La condition cinématique de contact peut s'écrire en un point de contact sous la forme suivante :

$$p=Q_c.u_c+\delta=0 \quad (1.21)$$

Où  $\delta$  est la pénétration initiale du point de contact,  $p$  est la pénétration actuelle liée au déplacement  $u_c$  du point de contact par l'intermédiaire d'un opérateur  $Q_c$  [Zhong/93]. Pour un ensemble de N points de contact l'équation (1.21) s'écrit d'une manière plus générale sous la forme :

$$\mathbf{P}=\mathbf{Q}\mathbf{U}+\Delta \quad (1.22)$$

Dans la méthode de multiplicateurs de Lagrange, la fonctionnelle à extrémiser est remplacée par:

$$\Pi_L(\mathbf{U},\Lambda)=\frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}-\mathbf{U}^T\mathbf{F}+\Lambda^T(\mathbf{Q}\mathbf{U}+\Delta) \quad (1.23)$$

où  $\Lambda$  est un vecteur de même dimension que  $\mathbf{P}$ . Ses composantes s'appellent les multiplicateurs de Lagrange. Le problème d'extremum revient donc à trouver  $\mathbf{U}$  et  $\Lambda$  tels que :

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial \mathbf{U}}=0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial \Lambda}=0 \quad (1.25)$$

L'équation (1.24) donne:

$$\mathbf{K}\mathbf{U}-\mathbf{F}+\mathbf{Q}\Lambda=0 \quad (1.26)$$

et l'équation (1.23) donne :

$$\mathbf{Q}\mathbf{U}+\Delta=0 \quad (1.27)$$

En combinant les équations (1.26) et (1.27), on obtient :

$$\mathbf{K}_L \mathbf{U}_L = \mathbf{F}_L \quad (1.28)$$

$$\text{avec } \mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{Q}^t \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ -\Delta \end{pmatrix}, \mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \Lambda \end{pmatrix}$$

En résolvant l'équation (1.26), on obtient le déplacement  $\mathbf{U}$  et le multiplicateur de Lagrange  $\Lambda$ . On peut constater que dans cette méthode, les multiplicateurs de Lagrange ont le sens physique des forces de contact. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est une méthode mixte puisqu'elle comporte la résolution en déplacement et en mutiplicateurs.

Comme on peut le constater, l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange, multiplie le nombre d'inconnues du problème. L'apparition d'un bloc de zéros dans l'opérateur tangent pose des problèmes numériques dans la résolution et exige l'utilisation des algorithmes particuliers tel que la méthode de type gradient [Chenais et Rousselet/88]. L'avantage de cette méthode est que les conditions aux limites sont exactement satisfaites [Zhong/93].

#### 5.4.c. Méthode de pénalisation

La méthode de pénalité est parmi les méthodes qui sont couramment utilisées dans les codes d'éléments finis pour sa grande facilité de programmation [Hunek/93]. L'étude du problème de contact par cette méthode permet de passer d'un problème d'optimisation sous contraintes à un problème d'optimisation sans contrainte.

Cette méthode consiste à introduire, dans la fonctionnelle du problème, la fonction de pénalisation suivante:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{P}' \alpha \mathbf{P} \quad (1.29)$$

Où  $\alpha$  est une matrice diagonale de composantes  $\alpha_{ii}$  qui constituent les coefficients de pénalisation. La fonctionnelle à minimiser devient donc:

$$\begin{aligned} \Pi_p &= \Pi + \pi_p \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{U}' \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}' \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{P}' \alpha \mathbf{P} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Et par suite, le champ de déplacement  $\mathbf{U}$  solution du problème est le champ qui minimise la fonctionnelle  $\Pi_p$  :

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (1.31)$$

En substituant (1.22) et (1.30) dans (1.31), on obtient l'équation suivante :

$$\mathbf{K}_p \mathbf{U} = \mathbf{F}_p \quad (1.32)$$

Avec  $\mathbf{K}_p = \mathbf{K} + \mathbf{Q}' \alpha \mathbf{Q}$  et  $\mathbf{F}_p = \mathbf{F} + \mathbf{Q}' \alpha \Delta$

En résolvant l'équation (1.32) on obtient le déplacement  $\mathbf{U}$ . Les forces de contact sont données par la relation :

$$\mathbf{F}_c = \alpha \mathbf{P}(\mathbf{U}) \quad (1.33)$$

Cette équation est résolue, après, au moyen d'une méthode de Newton-Raphson. Ce qui permet de déterminer l'état des nœuds de la zone de contact à chaque itération. Dans la méthode de pénalisation le déplacement est la seule inconnue.

En ce qui concerne les coefficients de pénalisation, ils doivent être assez grands pour minimiser l'interpénétration, tout en gardant un bon conditionnement de la matrice de rigidité. Ceci n'est pas toujours évident, en fait les conditions de contact ne sont satisfaites que pour des valeurs infinies des coefficients de pénalisations ce qui engendre un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité. Cette méthode entraîne une réduction du pas de temps pour un schéma d'intégration explicite. Par ailleurs, elle ne permet pas de vérifier exactement les conditions de contact et dépend fortement du choix du coefficient de pénalité : un mauvais choix entraîne des résultats physiquement inacceptables.

#### **5.4.d. Méthode du Lagrangien augmenté**

Cette méthode est une combinaison entre la méthode de multiplicateur de Lagrange et la méthode de pénalisation. Elle consiste à satisfaire les conditions d'équilibre tout en gardant un bon conditionnement de la matrice de rigidité et ceci en choisissant des coefficients de pénalisation finis ou moins 'fortement' que pour la pénalisation seule. Elle présente un autre avantage: il n'y a pas une augmentation des paramètres étant donné qu'elle revient à une pénalisation du multiplicateur de Lagrange qui n'est plus considéré comme inconnu lors de la résolution mais qui sera augmenté au cours d'un processus itératif.

Dans cette méthode l'expression de l'énergie potentielle totale devient :

$$\Pi_{Lp} = \Pi_L + \frac{1}{2} \Lambda^T \varepsilon \Lambda \quad (1.34)$$

Où  $\varepsilon$  est une matrice diagonale qui contient les paramètres de pénalisation  $\varepsilon_{ii}$ ,  $i=1,N$

La stationnarité de  $\Pi_{Lp}$  permet d'écrire :

$$\frac{\partial \Pi_{Lp}}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \Pi_{Lp}}{\partial \Lambda} = 0 \quad (1.36)$$

Les équation (1.34) et (1.35) donnent l'équation du problème à résoudre :

$$\mathbf{K}_{Lp} \mathbf{U}_L = \mathbf{F}_L \quad (1.37)$$

avec  $\mathbf{K}_{Lp} = \begin{bmatrix} \mathbf{KQ}' \\ \mathbf{Q} \ \varepsilon \end{bmatrix}$

Le multiplicateur de Lagrange est réactualisé après chaque pas d'équilibre (algorithme d'Uzawa) ou après chaque itération d'équilibre [Simo et Laursen/92].

Dans le deuxième cas, il n'y a pas de boucle, mais la réactualisation du multiplicateur de Lagrange modifie la convergence quadratique du schéma consistant de Newton-Raphson [Simo Laursen/92].

Dans le contexte du problème de contact avec frottement une formulation à trois champs indépendants (Hu Washizu) a été proposée par Papadopoulos et Taylor [Papadopoulos et Taylor/93]. Dans cette formulation, un contact entre éléments est postulé au lieu du contact entre les nœuds. Ce qui introduit une fonction considérée comme variable indépendante dans la formulation.

#### 5.4.e. Méthode des éléments d'interface

Cette méthode est basée sur l'introduction des éléments aux sens éléments finis entre les zones susceptibles d'entrer en contact [Grolad et Critescu/83] [Charlier et Cescotto/88]. Les éléments de contact appartiennent à la fois aux deux solides en contact et ont un comportement prédéfini. Ces éléments d'interface réagissent au signe de la contrainte normale moyenne. Dans le cas d'une compression (valeur négative de la contrainte), le rôle de l'élément est maintenu, sinon il y'a rupture de contact (traction).

Dans le cas de contact glissant, la matrice d'élasticité de l'élément de contact s'écrit :

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ telle que } \begin{bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_n \\ \sigma_m \end{bmatrix} = [D_c] \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \gamma_m \end{bmatrix} \text{ avec } \gamma_m = 2\varepsilon_m$$

En présence de contact avec frottement la matrice d'élasticité devient :

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \text{ où } G \text{ est un terme de frottement et défini par } \tau_m = G\gamma_m$$

Au niveau de la matrice de rigidité, la prise en compte des éléments de contact se traduit par l'addition d'un bloc supplémentaire. Ainsi, la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  de la structure aura la forme :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_A & & \\ & \mathbf{K}_C & \\ & & \mathbf{K}_B \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K}_A$  et  $\mathbf{K}_B$  étant les matrices de rigidité de deux corps A et B susceptibles d'entrer en contact et  $\mathbf{K}_C$  la matrice de rigidité des éléments de contact.

Cette approche de contact donne des résultats satisfaisants pour des géométries de zones de contact simples. Elle présente des contraintes au niveau de la discrétisation en espace et son application est très limitée. Cette méthode a été implémentée dans plusieurs codes industriels tels que CASTOR [Grolad et Critescu/83] et ABAQUS [ABAQUS/5.3].

## **6. Méthodes des résolutions numériques**

### ***Introduction***

L'établissement d'une méthode de simulation numérique des procédés de mise en forme se fait sur trois étapes: une formulation théorique du problème qui permet d'aboutir aux conditions mécaniques (équilibre, loi de comportement, contact,...) puis une discrétisation du problème (exemple méthode des éléments finis), ensuite une résolution des systèmes d'équations non-linéaires obtenus. Ces dernières années, la méthode des éléments finis a connu un essor considérable, et est maintenant utilisée dans la plupart des codes et les méthodes numériques pour les sciences de l'ingénieur, elle permet d'effectuer une discrétisation spatiale du problème à résoudre. De nombreux ouvrages existent sur le sujet:

[Dhatt et Touzot/84] [Batoz et Dhatt/90] [Imbert/91] [Zienkiewicz et Taylor/91] [Bathe/96]. Malgré le nombre important des codes de simulations numériques existants, le nombre des méthodes et des techniques de résolutions numériques des équations non-linéaires reste très limité.

### **6.1 Méthodes classiques**

La technique la plus connue est celle de Newton Raphson ou technique de prédiction-correction. Cette technique procède en deux étapes; la première consiste à linéariser le problème non-linéaire de départ et donc à prédire une nouvelle solution, tandis que la deuxième consiste à corriger le résidu d'équilibre global de la structure par itérations successives. Ces méthodes sont bien adaptées pour la résolution de toutes les non-linéarités possibles : plasticité, contact,... En revanche, elles n'exploitent pas les particularités de chaque type de non-linéarité, et le choix des paramètres de contrôle demande un utilisateur expérimenté. Le choix de la taille des pas est très délicat dans ces techniques ; un incrément de temps très grand n'assure pas la convergence de la solution, et un incrément très petit multiplie remarquablement le coût du temps de calcul. Cependant, plusieurs articles ont été consacrés à l'amélioration de la convergence de ces algorithmes et à l'adaptation du pas du calcul [Criesfield/81] [Criesfield/83].

Depuis quelques années, quelques équipes de recherche travaillent, non pas seulement sur l'amélioration de ces algorithmes, mais aussi sur le développement de nouvelles techniques et algorithmes de résolution des problèmes non-linéaires, en vue de proposer des outils précis, robustes et fiables. L'équipe de Ladevèze travaille sur une méthode de calcul non-incrementale dite 'méthode à grands incréments de temps [Ladevèze/85] [Ladevèze/91] [Ladevèze/96]

Malgré l'augmentation rapide des puissances des calculs informatiques, les logiciels de simulation de l'emboutissage nécessitent encore des **temps de mise en données et de calcul très importants** et ne permettent donc, au bureau des méthodes, que de procéder aux ultimes vérifications et validations avant la fabrication des outils [Lachat et Ravier/99].

### **6.2. Les méthodes asymptotiques numériques**

La Méthode asymptotique numérique (M.A.N.) est une famille d'algorithmes qui permet de résoudre des problèmes non linéaires grâce à l'association des techniques de perturbation et des

méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. En effet, la M.A.N. permet de chercher les branches solutions sous la forme de séries entières par rapport à un paramètre "a" que nous précisons plus tard. De cette manière, nous transformons le problème non linéaire de départ en une suite récurrente de problèmes linéaires, bien posés, admettant tous le même opérateur tangent. Ensuite, ces problèmes linéaires sont résolus numériquement, généralement par la méthode des éléments finis. Comme le rayon de convergence des séries est fini, une procédure de continuation a été proposée [Cochelin/94] permettant de définir la longueur de chaque pas asymptotique de sorte que le résidu reste très faible. Chaque fin de pas servira alors comme point de départ pour le pas suivant. La longueur de pas est par conséquent déterminée *a posteriori*; ceci n'est pas toujours le cas des méthodes itératives habituelles. Ainsi, nous avons une longueur de pas adaptative et déterminée de façon simple et optimale : c'est le point clé de l'efficacité et de la robustesse de la méthode asymptotique numérique. L'idée est donc de tracer numériquement la branche solution non pas par une séquence de points mais par une séquence de morceaux.

En partant de la formulation en déplacement d'un problème tridimensionnel d'élasticité en non linéaire géométrique avec une loi de comportement linéaire, l'énergie potentielle est stationnaire pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible et s'écrit sous la forme suivante:

$$\delta \Pi = \int_V \gamma'(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \delta \gamma(\mathbf{u}) dv - \lambda Pe(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad (1.38)$$

Où  $\mathbf{D}$  est la matrice de comportement,  $\mathbf{u}$  le champ des déplacements,  $\lambda$  un paramètre de chargement et  $Pe$  est le travail des efforts extérieurs.  $\gamma$  est la déformation de Green-Lagrange que nous pouvons décomposer en une partie linéaire et une autre partie non linéaire:

$$\gamma(\mathbf{u}) = \gamma'(\mathbf{u}) + \gamma''(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{2}({}^t \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \quad (1.39)$$

$$\delta \gamma(\mathbf{u}) = \gamma'(\delta \mathbf{u}) + 2 \gamma''(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$$

Le principe de base de la technique de perturbation consiste à chercher les branches de solution du problème (1.38) en développant  $\mathbf{u}$  et  $\lambda$  en séries entières par rapport à un paramètre de chemin bien choisi "a". Ce paramètre, représente une inconnue supplémentaire, il peut être défini de la même manière que les paramètres de contrôle pour les algorithmes itératifs classiques (charge imposée, déplacement imposé ou longueur d'arc imposée). Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{u}(a) = \sum_{i=0}^p a^i \mathbf{u}_i, \quad \lambda(a) = \sum_{i=0}^p a^i \lambda_i \quad (1.40)$$

En injectant (1.39) dans l'équation (1.38) et en identifiant les termes obtenus suivant la puissance de "a", nous obtenons une suite récurrente de problèmes linéaires que nous pouvons écrire à l'ordre  $p$  quelconque sous la forme suivante :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{u}_p) = \lambda_p \mathbf{F} + \mathbf{F}_p^{nl} \quad (1.41)$$

où  $\mathbf{L}_t$  représente un opérateur tangent de rigidité qui dépend uniquement de la solution initiale  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ ,  $\mathbf{F}$  le vecteur des forces appliquées,  $\mathbf{F}_p^{nl}$  un vecteur second membre ou un vecteur résidu qui contient des termes dépendant des ordres inférieurs à  $p$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L}_t(\mathbf{u}_p), \delta \mathbf{u} \rangle = & \int_V (\gamma_l(\mathbf{u}_p) + 2 \gamma_{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_p) : \mathbf{D} : \gamma_l(\delta \mathbf{u})) dv + \\ & + \int_V (\gamma_l(\mathbf{u}_0) + 2 \gamma_{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) : \mathbf{D} : \gamma_{nl}(\mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u})) dv \\ & + \int_V (\gamma_l(\mathbf{u}_p) + 2 \gamma_{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_p) : \mathbf{D} : \gamma_{nl}(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u})) dv \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\langle \mathbf{F}, \delta \mathbf{u} \rangle = P_e(\delta \mathbf{u}) \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L}_p^{nl}, \delta \mathbf{u} \rangle = & - \int_V \sum_{r=1}^{p-1} \left( \gamma_l(\mathbf{u}_r) + \sum_{m=0}^r \gamma_{nl}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{r-m}) \right) : \mathbf{D} : 2 \gamma_l(\mathbf{u}_{p-r}, \delta \mathbf{u}) dv \\ & - \int_V \sum_{r=1}^{p-1} \gamma_{nl}(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p-r}) : \mathbf{D} : (\gamma_l(\delta \mathbf{u}) + 2 \gamma_{nl}(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u})) dv \end{aligned} \quad (1.43)$$

Remarquons que l'expression du vecteur  $\mathbf{F}_p^{nl}$  fait intervenir une double sommation due à la formulation de départ qui est cubique. Cela peut avoir une influence importante sur le temps de calcul.

Après avoir établi la condition d'équilibre à l'ordre  $p$ , nous procédons à la discrétisation du problème pour le résoudre par une méthode des éléments finis de type déplacement. Le problème global discrétisé s'écrit sous la forme suivante:

$$[\mathbf{K}t]\{\mathbf{u}_p\} = \lambda_p \{\mathbf{F}\} + \{\mathbf{F}_p^{nl}\} \quad (1.44)$$

où  $[\mathbf{K}t]$  désigne la matrice de rigidité tangente écrite au point représentant la solution initiale,  $\{\mathbf{u}_p\}$  le vecteur déplacement discrétisé à l'ordre  $p$ .

Le but de cette méthode est donc de parcourir une grande partie de la branche solution en n'inversant qu'une seule matrice  $[\mathbf{K}t]$  commune à tous les problèmes linéaires (1.8), et de reporter tous les termes non linéaires sur le vecteur  $\{\mathbf{F}_p^{nl}\}$  qui dépend des ordres précédant l'ordre  $p$ .

Parmi les premiers travaux les plus cités dans la littérature sur l'application des méthodes de perturbation, on trouve celui de Signorini [Signorini/30] qui a explicité les relations entre l'élasticité non linéaire et l'élasticité linéarisée en écrivant le problème non linéaire sous forme d'une suite de problèmes d'élasticité linéaire. Vient ensuite Koiter qui a écrit en 1945 sa thèse sur la théorie des bifurcations en élasticité non linéaire dans laquelle, pour caractériser la sensibilité aux imperfections des structures élastiques, il a utilisé une méthode de perturbation tronquée à l'ordre 2 [Koiter/45]. Ces travaux ont été repris plus tard par Budiansky (1974) [Budiansky/74] puis par Potier-Ferry [Potier-Ferry/87]. A noter que la majorité des travaux sur les méthodes de perturbation pour le calcul de structure trouve ses origines dans la théorie de Koiter. Jusqu'ici, les méthodes de perturbation, de part leur aspect analytique, ne résolvaient que des problèmes à géométrie simple.

Thompson et Walker [Thompson et walker/68], ont été les premiers à associer ces techniques à la méthode des éléments finis pour l'étude des problèmes de mécanique des structures. Ils ont élaboré une théorie générale pour résoudre un problème non linéaire discret par une méthode de perturbation qu'ils ont appliqué ensuite au problème d'équilibre de poutre élastique. Ils ont obtenu alors une succession de problèmes linéaires par dérivations successives des équations de départ par rapport au paramètre de développement « $a$ ». Ils ont ensuite déterminé les sept premiers termes de la série pour une poutre en flexion avec une non-linéarité géométrique, et ils ont comparé les résultats obtenus avec la solution analytique exacte. Ils ont montré que plus l'ordre de troncature augmente, meilleure est la précision asymptotique. En revanche, les auteurs ont conclu que ces méthodes ne peuvent traiter que

des problèmes avec des non-linéarités modérées. Plus tard, Walker (1969) [Walker/69] a publié un article dans lequel il a étudié la stabilité et le comportement d'un arc circulaire en grands déplacements. Il a utilisé les méthodes de perturbation comme moyen de prédiction de la solution qu'il corrigeait systématiquement à la fin de chaque pas par les procédures itératives de Newton-Raphson. Pour ses développements, Walker est parti d'une formulation cubique en déplacement, du même type que (1.38) avec une troncature de la série à un petit ordre. Un certain nombre de travaux sur les applications de ces algorithmes sont résumés par Gallagher en 1975 [Gallagher/75]. Toutefois, l'auteur a conclu que ces méthodes ne sont pas amenées à se développer dans le cadre des éléments finis.

Les années 80 ont connu une relance de l'intérêt des méthodes de perturbation. Ainsi, Noor et ses collaborateurs ont associé ces dernières à la méthode de réduction de Rayleigh-Ritz [Noor et Peters/80] [Noor/81] [Noor et Peters/81]. Partant du principe que la réponse d'un problème en statique est décrite par un système d'équations algébriques, cette méthode consiste à remplacer ces équations par un système réduit d'équations avec beaucoup moins d'inconnues. Ces auteurs ont utilisé la méthode de perturbation pour générer la base de Ritz. Quelques avantages peuvent se dégager de ces nouveaux algorithmes, par exemple la réduction de la taille du problème à résoudre et l'amélioration du rayon de convergence de la solution asymptotique, permettant ainsi d'optimiser le nombre de décompositions de la matrice de rigidité. Plusieurs articles montrent l'efficacité de cette méthode. Cependant, le temps de calcul n'est pas discuté sérieusement dans ces articles, alors que le but recherché est, justement, d'allier l'efficacité à l'économie du temps de calcul; voir l'article de synthèse sur ces méthodes, présenté par Riks en 1984 [Riks/84].

En 1990, Damil et Potier-Ferry [Damil et Potier-Ferry/90] ont écrit le premier article original qui traite des bifurcations perturbées à l'aide des méthodes asymptotiques numériques. En effet, pour obtenir une efficacité numérique et une écriture simple du second membre  $\{F^{nl}\}$  jusqu'à des ordres élevés, ces auteurs ont proposé une formulation de départ quadratique. Au lieu de partir de la formulation en déplacement (1.38) qui est cubique, Azrar *et al.* [Azrar *et al.*/93] ont proposé de réduire le degré de non-linéarité de  $\mathbf{u}$  en introduisant le champ des contraintes comme variable indépendante. Si nous considérons l'élasticité 3D, cette formulation de base correspond à la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, qui est stationnaire

pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible  $\delta \mathbf{u}$  et un champ  $\delta \mathbf{S}$  quelconque :

$$\delta HR(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \int_V \left\{ \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + {}^t \delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - {}^t \mathbf{S} : \mathbf{D}^{-1} : \delta \mathbf{S} \right\} dV - \lambda \mathbf{P}_e(\delta \mathbf{u}) \quad (1.45)$$

Les variables développées en série sont donc le paramètre de charge  $\lambda$  ainsi que le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et le champ des contraintes  $\mathbf{S}$  que nous pouvons rassembler dans un vecteur mixte  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix}$ . L'avantage de cette écriture est que le problème à résoudre est écrit dans un cadre quadratique que nous pouvons mettre sous la forme suivante en fonction du vecteur mixte :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \lambda) = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) - \lambda \mathbf{F} = 0 \quad (1.46)$$

où  $\mathbf{R}$  est le vecteur résidu,  $\mathbf{L}$  un opérateur linéaire et  $\mathbf{Q}$  un opérateur quadratique.

Nous avons les relations suivantes :

$$\langle \mathbf{L}(\mathbf{U}), \delta \mathbf{U} \rangle = \int_V \left\{ \mathbf{S} : \boldsymbol{\gamma}_l(\delta \mathbf{u}) + {}^t \delta \mathbf{S} : (\boldsymbol{\gamma}_l(\mathbf{u}) - \mathbf{D}^{-1} : \mathbf{S}) \right\} dV \quad (1.47)$$

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \delta \mathbf{U} \rangle = \int_V \left\{ \mathbf{S} : 2 \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + {}^t \delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right\} dV \quad (1.48)$$

Si nous appliquons maintenant la méthode de perturbation, nous obtenons à l'ordre  $p$  un problème linéaire qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{L}_l(\mathbf{U}_p) = \lambda_p \mathbf{F} + \mathbf{F}_p^{nl} \quad (1.49)$$

où  $\mathbf{L}_l$  correspond au même opérateur de rigidité explicité dans le cas de la formulation cubique. Le nouveau vecteur non linéaire  $\mathbf{F}_p^{nl}$  s'écrit quant à lui comme suit :

$$\mathbf{F}_p^{nl} = - \sum_{r=1}^p \mathbf{Q}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_{p-r}) \quad (1.50)$$

avec :

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_{p-r}), \delta \mathbf{U} \rangle = \int_V \left\{ {}^t \mathbf{S}_r : \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_{p-r}, \delta \mathbf{u}) + {}^t \mathbf{S}_{p-r} : \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_r, \delta \mathbf{u}) + {}^t \delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\gamma}_{nl}(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p-r}) \right\} dV \quad (1.51)$$

Contrairement à la formulation cubique (1.38) qui fait intervenir une double sommation dans l'expression du second membre  $\mathbf{F}_p^{nl}$ , la formulation quadratique n'a besoin que d'une simple sommation. Le temps de calcul de  $\left\{ \mathbf{F}_p^{nl} \right\}$  reste petit par rapport à celui nécessaire pour le calcul de la matrice de rigidité tangente et par conséquent un pas asymptotique exige un temps CPU du même ordre que celui correspondant à la méthode de Newton-Raphson modifiée.

Dans son travail de thèse, Zahrouni [Zahrouni/98] a présenté une étude détaillée du coût d'une formulation quadratique et son intérêt par rapport à une formulation cubique.

A l'ordre  $p$ , nous procédons à une condensation des contraintes en remplaçant la variable de contraintes par la loi de comportement qui sera donc respectée exactement en chaque point d'intégration. Nous utiliserons par la suite une discrétisation habituelle par éléments finis en déplacement.

Cette idée fut vite généralisée et son champ d'application élargi pour résoudre des problèmes de coques en non linéaire géométrique dans le cadre des rotations modérées [Azrar/93], mais aussi pour le calcul des points de bifurcations [Bouty/94] et la recherche des branches post-critiques de flambage [Bouty *et al*/93] [Vanucci *et al*/98], ainsi que pour la résolution des équations de Navier-Stokes [Tri/96] [Tri *et al*/96] [Cadou/97] [Hadji/95]...

Comme la représentation en série est limitée par son rayon de convergence (propriété intrinsèque), quelques algorithmes ont été développés pour améliorer la représentation de la solution par série entière [Cochelin *et al*/94] [Baker *et al*/96]. Nous pouvons remplacer l'approximation polynomiale par des fractions rationnelles et ainsi écrire :

$$\mathbf{u}(a) - \mathbf{u}(0) = \sum f_i(a) - \mathbf{u}_i \quad (1.52)$$

où  $f_i(a)$  sont des fractions rationnelles appelées aussi approximants de Padé. C'est une façon simple d'améliorer le rayon de validité des séries; toutefois une fraction rationnelle présente malheureusement des pôles (des zéros au dénominateur) et des défauts (facteurs communs entre le numérateur et le dénominateur).

Najah *et al.* [Najah *et al*/98] ont présenté une revue critique des méthodes asymptotiques numériques (techniques de bases réduites, représentation polynomiale et approximants de Padé). Il en ressort qu'une efficacité de ces algorithmes est obtenue avec un

ordre élevé de troncature des séries. Quant aux conclusions, elles prônent la représentation polynomiale en raison de sa fiabilité et de sa rapidité, ou les approximants de Padé à condition d'améliorer la fiabilité de cette technique.

Récemment, une procédure de continuation basée sur les approximants de Padé a été élaborée par Elhage-Hussein *et al* [Elhage-Hussein et al/00] et implémentée dans de nombreux algorithmes asymptotiques.

Les méthodes asymptotiques ont montré leur efficacité pour la résolution des problèmes de mécanique des fluides [Cadou/97], plasticité [Braikat/95], viscoplasticité [Brunelot/99], contact unilatéral [Elhage-Hussein/98] et coques en grandes rotations [Zahrouni/97]. Récemment, les applications des méthodes asymptotiques ont été élargi pour traiter les problèmes de dynamique [Cochelin et Compain/99], problèmes de grandes tailles, sous-structuration et les procédés de mise en forme [Brunelot/99] [Abichou *et al*/01].

## 1.7. Conclusions

L'emboutissage comme procédé de mise en forme implique de nombreux phénomènes physiques et mécaniques (plasticité, contact, frottement,...). La simulation numérique de ce procédé s'avère indispensable pour prévoir l'emboutissabilité des produits et diminuer le coût et les délais de fabrication. Une telle simulation, pour qu'elle soit la plus réaliste possible, doit décrire d'une façon très fine les différents phénomènes physiques rencontrés le long du processus. Lors de la simulation, ces phénomènes physiques se manifestent par un couplage de différentes non-linéarités : non-linéarité géométrique, matérielle, et non-linéarité de contact. C'est ce couplage des non-linéarités qui rend la simulation difficile à élaborer et qui multiplie, par ailleurs, le temps de calcul des codes et des logiciels actuels. Les logiciels destinés à la simulation numérique en mécanique utilisent souvent des méthodes incrémentales itératives pour la résolution des problèmes non linéaires. Ces méthodes classiques nécessitent des temps de calcul très élevés quand il s'agit de problèmes de grandes tailles et qui combinent de nombreuses non-linéarités. Ce qui est le cas dans la simulation des procédés de mise en forme en général et de l'emboutissage en particulier.

Dans ce travail de thèse, nous allons présenter une simulation du procédé de l'emboutissage basé sur les méthodes asymptotiques numériques, qui constituent, maintenant, une alternative intéressante pour la résolution des problèmes non linéaires. Notre objectif est d'alléger les temps de calcul qui présentent un grand problème dans les simulations numériques du procédé. Nous testons donc, notre méthode dans la résolution des problèmes qui combinent différentes non-linéarités. On note que dans ce travail, nous n'avons pas l'intention d'élaborer un logiciel complet de simulation du procédé ; ceci constituera l'objet de nos prochains travaux.

## Chapitre 2

### Formulation du problème de contact entre un corps rigide et une coque

<i>Introduction</i>	42
<b>2.1. Formulation du problème</b>	44
2.1.1. Description cinématique de la coque	44
2.1.2. Equation d'équilibre	45
2.1.3. Loi de comportement	46
2.1.4. Etude du problème de contact	48
2.1.4.a. Conditions de contact	49
2.1.4.b. Régularisation de la loi de contact	50
2.1.4.c. Géométrie de contact en 3D	51
<b>2.2. Méthode Asymptotique Numérique</b>	53
2.2.1. Méthodes de perturbation	53
2.2.2. Les approximants de Padé	56
2.2.3. Discrétisation par éléments finis	56
2.2.4. Procédure de continuation	58
<b>2.3. Conclusions</b>	59

### **Introduction**

L'emboutissage, est un procédé de mise en forme des matériaux, généralement à froid. Il consiste à déformer d'une façon permanente des tôles minces sous l'effet des outils. Cette définition se traduit numériquement, lors de la simulation, par une combinaison de différentes non-linéarités telles que la non-linéarité géométrique (tôles minces), plasticité (déformation permanente) et non-linéarité due au contact (outils). D'après l'étude bibliographique présentée au chapitre 1, les lois élastoplastiques sont les lois de comportement qui décrivent véritablement le comportement des métaux au cours du procédé, et les éléments finis du type coque semblent les plus efficaces dans la discrétisation des tôles destinées pour la mise en forme.

Dans ce chapitre, nous présenterons une modélisation tridimensionnelle du contact entre un corps rigide soumis à un déplacement aléatoire et une coque élastoplastique. L'objectif est de proposer une simulation de l'emboutissage en utilisant des éléments finis du type coque. Dans cette simulation, nous adopterons une formulation de coque bien adaptée aux phénomènes de grands déplacements et de grandes rotations. Au niveau de la loi de comportement et sous l'hypothèse que dans ce procédé les phénomènes de grandes transformations (grands déplacements et grandes rotations) sont plus importants que les phénomènes de grandes déformations, on va adopter une loi élasto-plastique en petites déformations. Dans le cadre de la MAN, pour surmonter la difficulté engendrée par la discontinuité de cette loi, une procédure de régularisation est employée.

Le contact entre la tôle et les outils est assimilé à un contact entre un corps déformable et des corps rigides. Ces conditions de contact constituent une très forte non-linéarité due à la singularité de ces conditions. Comme pour la loi de comportement, pour appliquer une technique de perturbation, une procédure de régularisation a été proposée dans le cadre des travaux de thèses d'Elhage-Hussein [Elhage-Hussein/98]. Partant de ces travaux, nous allons faire une extension de la modélisation du contact à une échelle 3D et nous allons imposer des déplacements aux surfaces rigides pour décrire le mouvement des outils lors d'une opération de mise en forme.

L'objectif de ce chapitre est de présenter le problème à résoudre, d'une part la théorie de coque utilisée, la loi de comportement, les conditions de contact et d'autre part le principe variationnel qui lui est associé.

**2.1. Formulation du problème**

Dans cette étude, nous considérons une formulation tridimensionnelle du problème de coque en présence des conditions de contact unilatéral. La formulation adoptée est basée sur la formulation de coque proposée par Büchter et Ramm [ Büchter et Ramm/92]. Une telle formulation a été choisie pour deux raisons; premièrement la non-linéarité géométrique peut être exprimée dans un cadre quadratique ce qui est très conseillé dans la littérature des M.A.N., en fait, elle permet une application facile des techniques de perturbation et l’obtention d’un algorithme rapide et donc un gain en temps de calcul. Deuxièmement, cette formulation utilise une loi de comportement tridimensionnelle sans condensation ce qui permet une implémentation moins difficile des lois de comportements non-linéaires.

**2.1.1. Description cinématique de la coque**

Dans cette formulation, la cinématique de base utilisée repose sur les théories classiques des plaques et coques.

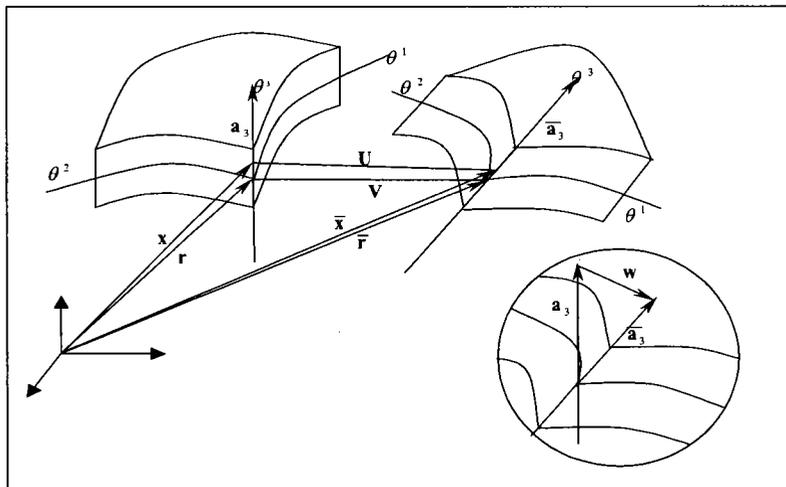


Figure (2.1) : Géométrie et cinématique de la coque

Ainsi un point quelconque de la géométrie de la coque (figure 2.1) est repéré, sur la configuration initiale, par un vecteur  $x$  exprimé sous la forme suivante :

$$x(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = r(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 a_3(\theta^1, \theta^2)$$

où  $\mathbf{r}$  est un vecteur qui repère la surface moyenne,  $\mathbf{a}_3$  est le vecteur directeur de la coque au point considéré et  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  désigne les coordonnées curvilignes convectives. En supposant une variation linéaire du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  dans la direction de l'épaisseur, ce dernier peut s'écrire comme suit:

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  représentent respectivement le déplacement d'un point de la surface moyenne et la différence entre les vecteurs directeurs de la coque entre la configuration de référence et celle déformée.

### 2.1.2. Equation d'équilibre

Les inconnues du problème dans la formulation de coque adoptée sont le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , la déformation de Green Lagrange  $\boldsymbol{\gamma}$  et le second tenseur de Piola Kirchhoff  $\mathbf{S}$ . En 3D l'équilibre du système s'exprime par la relation suivante :

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\gamma} dv - P_c(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

où  $P_c(\delta \mathbf{u})$  est le travail généré par les forces de contact que nous expliciterons ultérieurement. Pour l'instant, on suppose que les forces de contact sont données, ce qui entraîne la linéarité de la fonctionnelle  $P_c(\bullet)$ .

Dans ce travail, nous utiliserons l'élément de coque proposé par Büchter et Ramm [Büchter et Ramm/92] avec une variation linéaire du déplacement dans l'épaisseur comme dans les formulations conventionnelles de coques. En revanche, il inclut une variable supplémentaire qui représente une variation linéaire de la déformation  $\gamma_{33}$  dans l'épaisseur. Cette variable permet en effet, d'utiliser une loi de comportement tridimensionnelle sans condensation mais aussi de prendre en compte les effets des grandes déformations. Elle est introduite au moyen du concept E.A.S. de Simo et Rifai [Simo et Rifai/90]. Le principe de ce concept est d'introduire une déformation additionnelle  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  indépendante du déplacement et qui doit être orthogonale au champ des contraintes :

$$\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{B}\mathbf{u} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{Bu}$  est la partie compatible du champ de déformation ( $\mathbf{Bu}=\gamma(\mathbf{u})+\gamma_n(\mathbf{u})$ ). La déformation additionnelle  $\tilde{\gamma}$  doit vérifier la condition additionnelle suivante:

$$\int_v 'S : \tilde{\gamma} dv = 0 \quad (2.3)$$

La présente formulation n'est pas différente du problème initial : en fait, la solution exacte, correspond à  $\tilde{\gamma} = 0$ .

En élasticité, l'équation (2.3) découle de la stationnarité de la fonctionnelle:

$$\frac{1}{2} \int_v '(\mathbf{Bu} + \tilde{\gamma}) : \mathbf{D} : (\mathbf{Bu} + \tilde{\gamma}) dv \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice de comportement.

### 2.1.3. Loi de comportement

Au cours du procédé de l'emboutissage, les matériaux subissent des déformations permanentes. Dans cette section, nous tiendrons compte des déformations plastiques dans la simulation du procédé.

La loi de comportement en présence des déformations plastiques dépend de l'histoire du chargement d'où l'aspect incrémental de la plasticité [Hill/50] [Halphen et Salençon/87].

Pour traiter la plasticité dans le cadre de la M.A.N., des travaux ont été menés par Brunelot [Brunelot/99] pour la résolution des problèmes viscoplastiques en grandes déformations. Un autre travail est en cours, pour modéliser de vraies lois élastoplastiques qui tiennent compte de la décharge élastique [Imazaten/01].

Dans cette étude, la décharge élastique n'est pas prise en compte, nous adoptons donc une loi de comportement plastique basée sur la théorie de déformation totale. Ce qui est très convenable quand la non-linéarité physique est plus importante que l'effet du processus irréversible et l'histoire du chargement.

La difficulté du traitement de ce type de non-linéarité réside dans l'aspect discontinu des lois mises en jeu et la formulation non-quadratique. Pour obtenir une représentation analytique et pour que le problème soit bien posé, deux étapes sont nécessaires. La première consiste à régulariser la loi de comportement car cette dernière n'est pas analytique et n'est donc pas développable en séries entières. La deuxième étape doit conduire, grâce à un changement de

variables, à réduire le degré de non-linéarité du problème en introduisant des variables intermédiaires. Ce qui permet une écriture quadratique du problème et par conséquent d'améliorer l'efficacité numérique de l'algorithme asymptotique en réduisant de manière significative le temps de calcul. La taille mémoire nécessaire pour le stockage des variables intermédiaires reste négligeable devant celle du problème global [Potier-Ferry *et al*/97].

Dans cette partie, nous avons choisi une loi de comportement basée sur la relation de Ramberg-Osgood qui s'écrit dans le cas 3D sous la forme suivante [ABAQUS/98-1] :

$$E\gamma = (1+\nu)\mathbf{S}^d - (1-2\nu)P\mathbf{I} + \frac{3}{2}\alpha \left[ \frac{S_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} \mathbf{S}^d \quad (2.5)$$

avec  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $n$ ,  $\mathbf{S}^d$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{I}$  et  $\sigma_y$  sont des paramètres intrinsèques du matériau et représentent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson, un coefficient scalaire, l'exposant réel d'écrouissage, le tenseur déviateur des contraintes, la pression hydrostatique équivalente ( $\mathbf{P} = -\frac{1}{3}\mathbf{S}\cdot\mathbf{I}$ ), la matrice unité et la contrainte limite d'élasticité.

Comme le coefficient d'écrouissage n'est pas un entier, cette relation n'est pas analytique pour des contraintes nulles, une procédure de régularisation a été introduite en modifiant légèrement la contrainte équivalente de Mises  $S_{eq}$ .

$$S_{eq}^2 = \frac{3}{2}\mathbf{S}^d : \mathbf{S}^d + \eta_m^2 \sigma_y^2 \quad (2.6)$$

où  $\eta_m$  est un paramètre de régularisation positif assez petit. Remarquons que pour  $\eta_m = 0$  nous retrouvons la loi de comportement initiale.

Une nouvelle variable est introduite sous la forme suivante :

$$\kappa = \frac{3}{2}\alpha \left[ \frac{S_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} = \frac{3}{2}\alpha \left[ \frac{3}{2\sigma_y^2} \mathbf{S}^d : \mathbf{S}^d + \eta_m^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.7)$$

Pour surmonter la difficulté due au terme en puissance ( $n$  est réel), dans le travail de Braikat [Braikat/95] l'ordre de troncature des séries a été limité à l'ordre 6. Zahrouni *et al* [Zahrouni *et al*/98] ont évité cette limitation en utilisant une équation différentielle et en introduisant la variable suivante:

$$\zeta^2 = \frac{S_{eq}^2}{\sigma_y^2} = \frac{3}{2\sigma_y^2} S^d : S^d + (\eta_m)^2 \quad (2.8)$$

ce qui signifie que :

$$\kappa = \frac{3}{2} \alpha \zeta^{n-1} \quad (2.9)$$

Cette relation entre  $\kappa$  et  $\zeta$  est une relation en puissance qui n'est pas quadratique. Toutefois une fonction de type  $y=x^n$  peut être écrite sous une forme différentielle équivalente  $xdy=nydx$  qui est quadratique par rapport aux variables  $x$  et  $y$ . Les deux variables  $\kappa$  et  $\zeta$  sont définies donc par la relation suivante:

$$\zeta d\kappa = (n-1) \kappa d\zeta \quad (2.10)$$

Pour obtenir la même pente au démarrage que celle de la loi sans régularisation, il est facile de montrer que le premier terme de l'équation (2.5) doit être multiplié par  $(1+\alpha n)$ .

Donc la loi de comportement régularisée se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &\bullet E(1+\alpha(\eta_m)^n)\gamma = (1+\nu)S^d - (1-2\nu)PI + \kappa S^d \\ &\bullet \zeta^2 = \frac{S_{eq}^2}{\sigma_y^2} = \frac{3}{2\sigma_y^2} S^d : S^d + (\eta_m)^2 \\ &\bullet \zeta d\kappa = (n-1) \kappa d\zeta \end{aligned} \quad (2.11)$$

#### 2.1.4. Etude du problème de contact

Dans la simulation numérique des procédés de mise en forme, la prise en compte des conditions de contact revêt un caractère essentiel pour une bonne mise en œuvre et un suivi effectif du procédé [Wang/84] [Hacquín/96] [Chenot/97]. Ces conditions de contact sont évolutives au cours du processus, le matériau à déformer se rapproche des outils, prend le contact, reste en contact (adhésion) puis il le perd (décollement). Au niveau modélisation, le problème de contact est géré par un ensemble de conditions unilatérales [Kikuchi et Oden /88] [Raous et al/88] [Jean/93]. Ces conditions constituent de nouvelles difficultés à cause de l'aspect non-linéaire de ces conditions [Onâte et Saracibar/92].

Comme dans la modélisation de la non-linéarité matérielle, pour appliquer une technique de perturbation au traitement du problème de contact, une procédure de régularisation a été proposée par Elhage-Hussein *et al* [Elhage-Hussein *et al* 98]. Le travail

avait pour but la résolution du problème de contact bidimensionnel sans frottement entre une structure élastique et des solides rigides.

Pour développer un modèle 3D utilisant des éléments finis de type coque, nous avons effectué une extension de ces travaux à une échelle tridimensionnelle et nous avons tenu compte des mouvements des corps rigides, représentant les outils, au cours du processus.

#### 2.1.4.a. Conditions de contact

Nous considérons une structure élastoplastique dont la loi de comportement satisfait la relation de Ramberg-Osgood mentionnée précédemment. Nous supposons que cette structure occupe un domaine  $\Omega$  dont une partie de la frontière  $\partial\Omega_c$  est susceptible d'entrer en contact avec une surface rigide.

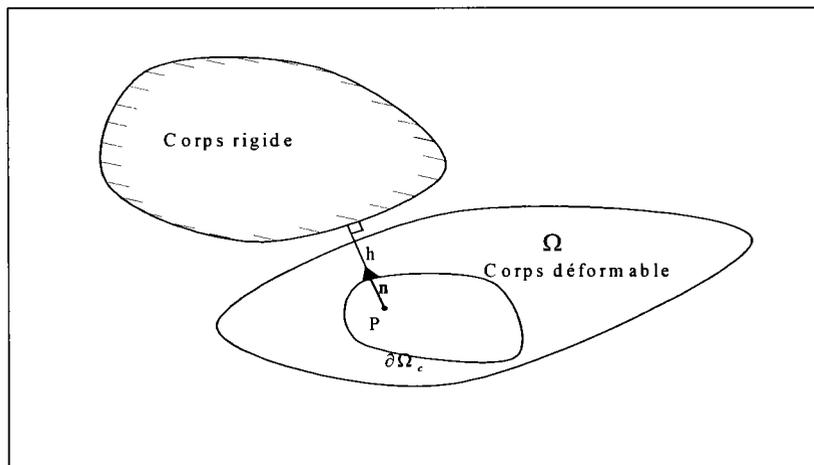


Figure (2.2) : Contact : interaction surface rigide/surface déformable

La zone effective de contact ainsi que les efforts de contact évoluent au cours du processus et sont donc les inconnues du problème étudié. L'action locale de corps rigide sur la structure est représentée par une force de réaction notée  $\mathbf{R}$ .

Un point P de la surface déformable entre en contact avec la surface rigide lorsque la distance qui les sépare devient nulle.

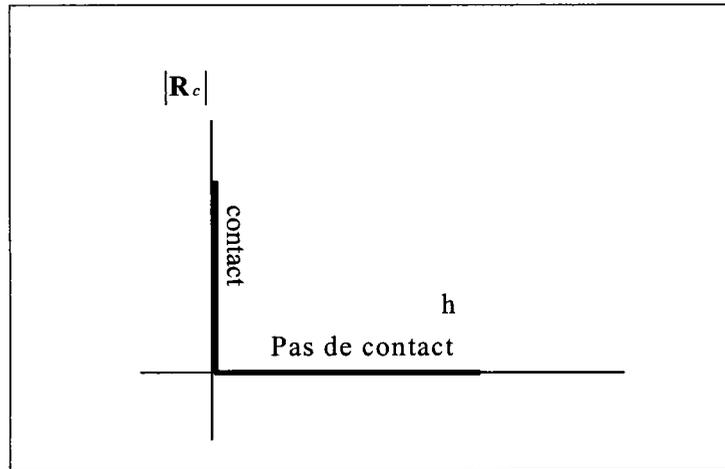


Figure (2.3) : Loi analytique de contact

La variable  $h$  est la distance ou l'écart entre les deux corps au point de contact considéré,  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la surface rigide passant par ce point.

A tout point candidat au contact sont associées les conditions classiques du contact unilatéral suivantes:

- Le point de contact ne doit pas pénétrer la surface rigide :

$$h \geq 0 \quad (2.12)$$

- Le point de contact ne doit pas adhérer à la surface de contact :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (2.13)$$

- D'une part lorsque le point est en contact, l'écart  $h$  est nul et une réaction de contact est générée. D'autre part en l'absence de contact,  $h$  est non nul et la force de contact est réduite à zéro :

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) \cdot h = 0 \quad (2.14)$$

#### 2.1.4.b. Régularisation de la loi de contact.

Les conditions de contact (2.12), (2.13) et (2.14) ne sont pas analytiques. Or cette condition est nécessaire pour appliquer une technique de perturbation. Elhage-Hussein et al [Elhage-Hussein et /98] ont proposé une régularisation par une relation hyperbolique, il ont ainsi écrit:

$$\mathbf{R} = \frac{\eta_c(\delta - h)}{h} \mathbf{n} \quad (2.15)$$

où  $\delta$  est l'écart initial entre les surfaces et  $\eta_c$  est un petit paramètre positif suffisamment petit ( l'indice  $c$  permet de l'identifier par rapport au paramètre utilisé pour la régularisation de la loi de comportement (2.11) ). Ainsi pour une valeur assez petite de  $\eta_c$ , les conditions de contact (2.12), (2.13) et (2.14) sont presque vérifiées.

La surface de contact est constituée d'un ensemble de points caractérisés chacun par un couple de variables  $\delta$  et  $h$ , cette dernière régularisation n'est donc pas uniforme sur toute la toute la surface. Nous devons donc définir le paramètre de régularisation en chaque point afin d'homogénéiser le comportement à l'interface. Si nous supposons un écart donné  $h_d$  et que nous lui associons une pression de contact  $R_d$ , alors le paramètre de régularisation est défini en chaque point de contact par l'expression suivante :

$$\eta_c(\text{point}) = \frac{R_d h_d}{\delta(\text{point}) - h_d} \quad (2.16)$$

Ainsi pour l'ensemble des points de contact, la régularisation est uniforme et caractérisée par les deux paramètres  $h_d$  et  $R_d$ . Bien évidemment, la valeur de  $h_d$  doit être inférieure à la valeur minimale des écarts initiaux  $\delta$  de chaque point.

#### 2.1.4.c. Géométrie du contact en 3D

Pour résoudre le problème, en plus de la relation (2.15), deux équations supplémentaires sont nécessaires. Ces deux équations sont données par la géométrie des surfaces rigides considérées. Elhage-Hussein [Elhage-Hussein/98] a étudié dans un cadre bidimensionnel le problème de contact pour différents types de surfaces, surface plane, circulaire et surface arbitraire définie par une courbe de Bézier. Dans ce chapitre nous nous limiterons à l'étude de contact entre une coque qui a un comportement élastoplastique et une surface rigide sphérique soumise à un déplacement arbitraire. C'est ce déplacement qui va nous permettre de décrire le mouvement des outils au cours du processus de l'emboutissage. Le traitement du problème de contact en considérant des corps rigides de formes complexes sera traité ultérieurement.

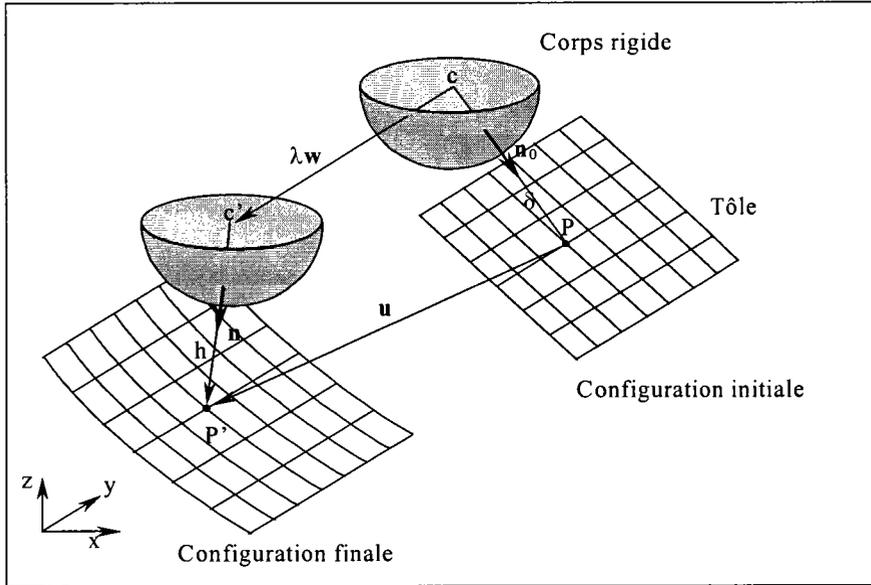


Figure (2.4) : Modélisation du problème de contact (références géométriques): cas d'un corps rigide soumis à un déplacement arbitraire.

Dans la présente modélisation, la déformation dans la structure est due seulement au déplacement du corps rigide que nous avons choisi ici sous la forme de  $\lambda \mathbf{w}$ . Le vecteur  $\mathbf{w}$  représente le déplacement imposé sur l'outil, donc connu en module, sens et direction.  $\lambda$  est le paramètre de contrôle du problème. Un point  $P$  de la structure est défini par le vecteur position  $\mathbf{X}$  et les paramètres initiaux de contact  $(\delta, \mathbf{n}_0)$  dans la configuration initiale. Il occupe la position  $P'$  dans la configuration courante après un déplacement  $\mathbf{u}$  (figure 2.4). L'écart de contact  $h$  et la normale  $\mathbf{n}$  peuvent donc être exprimés par ces deux équations quadratiques:

$$(h + \rho)^2 = \langle \mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{C} - \lambda \mathbf{w}, \mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{C} - \lambda \mathbf{w} \rangle \tag{2.17}$$

$$(h + \rho) \mathbf{n} = \mathbf{X} + \mathbf{u} - \mathbf{C} - \lambda \mathbf{w} \tag{2.18}$$

où  $\rho$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{C}$  représentent respectivement le rayon de la sphère, un vecteur décrivant la position initiale du point étudié et un vecteur décrivant la position initiale du centre de la sphère. Ces deux équations peuvent être substituées dans l'équation (2.15) pour obtenir l'expression de la force de contact  $\mathbf{R}$  en fonction, seulement, du déplacement  $\mathbf{u}$  et du paramètre de charge  $\lambda$ .

Dans ce travail, nous nous limiterons à une formulation de contact 3D sans frottement. La modélisation du problème de frottement dans le cadre de la M.A.N. n'a pas posé de problèmes particuliers dans les travaux de thèse de Brunelot [ Brunelot/99].

## 2.2. Méthode Asymptotique Numérique

### 2.2.1. Technique de perturbation

Dans cette section, la méthode asymptotique sera appliquée pour résoudre le problème global correspondant à l'équation d'équilibre (2.1), la condition de compatibilité (2.3), la loi de comportement (2.11) et les conditions de contact (2.15), (2.17) et (2.18) . Nous appliquons donc une technique de perturbation qui consiste à développer toutes les variables du problème en séries entières. Nous notons par  $\mathbf{U}=\mathbf{U}(\mathbf{u},\tilde{\gamma},\mathbf{S},h,\mathbf{n},\mathbf{R}..)$  le vecteur représentant l'ensemble des inconnues. Ce vecteur et le paramètre de charge sont développés sous forme de séries entières tronquées à un ordre  $p$  au voisinage d'une solution initiale connue  $(\mathbf{U}_0,\lambda_0)$  par rapport à un paramètre de développement «  $a$  » :

$$\begin{cases} U(a)=U_0+aU_1+a^2U_2+\dots \\ \lambda(a)=\lambda_0+a\lambda_1+a^2\lambda_2+\dots \end{cases} \quad (2.19)$$

Le paramètre «  $a$  » constitue une inconnue additionnelle que nous choisissons de définir par l'expression suivante:

$$a = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 \quad (2.20)$$

Le choix de ce paramètre est basé sur la même stratégie que celle adoptée dans les méthodes itératives. La forme de la dernière équation correspond à une combinaison de déplacement et de charge comme la longueur d'arc imposé dans le cas des algorithmes itératifs. Nous aurions pu aussi identifier ce paramètre à un incrément de charge ou de déplacement [Cochelin *et al*/94]. En substituant les équations (2.19) et (2.20) dans celles qui gouvernent le problème global et en identifiant membre à membre par rapport à la puissance de «  $a$  », on obtient une séquence de problèmes linéaires bien posés qui vont être résolus par une méthode de discrétisation par éléments finis jusqu'à un ordre de troncature de séries. Ces problèmes

linéaires admettent tous le même opérateur tangent et donc la même matrice de rigidité tangente. Nous obtiendrons ainsi une représentation analytique d'une partie de la branche solution en n'effectuant qu'une seule décomposition de la matrice de rigidité tangente, ce qui est très important pour des problèmes fortement non-linéaires et surtout pour des problèmes de grande taille.

Le développement de l'équation d'équilibre et la condition de compatibilité jusqu'à un ordre de troncature  $p$  donne :

$$\int \left\{ {}^t\mathbf{S}_0 : 2\gamma_{nl}(u_p, \delta u) + {}^t\mathbf{S}_p : (\gamma_l(\delta u) + \gamma_{nl}(u_0, \delta u)) + \sum_{r=1}^{p-1} {}^t\mathbf{S}_r : 2\gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) \right\} dv - \int_{\mathcal{S}_c} R_p^c \delta u ds = 0 \quad (2.21)$$

$$\int {}^t\mathbf{S}_p : \delta \tilde{\gamma} dv = 0 \quad (2.22)$$

Le développement des équations constitutives conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \text{Ordre 1: } \mathbf{S}_1 = \mathbf{D}_t : \gamma_1 \\ \text{Ordre } p: \mathbf{S}_p = \mathbf{D}_t : \gamma_p + \mathbf{S}_p^{res} \end{cases} \quad (2.23)$$

où la matrice  $\mathbf{D}_t$  représente le module tangent de la loi de comportement et qui a l'expression suivante :

$$\mathbf{D}_t = [C_1 \mathfrak{I} + C_2 \mathbf{I} + C_3 \mathbf{S}_0^d \mathbf{S}_0^d] \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité,  $\mathfrak{I}$  est un tenseur identité d'ordre quatre,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes définies par les expressions suivantes :

$$C_1 = \frac{E(1+\alpha\eta)}{1+\nu\kappa_0}$$

$$C_2 = \frac{(3\nu+\kappa_0)C_1}{3(1-2\nu)}$$

$$C_3 = \frac{-KC_1}{1+\nu+\kappa_0+K\mathbf{S}_0^d : \mathbf{S}_0^d}$$

$$K = \frac{3(n-1)\kappa_0}{2\sigma_0^2 \zeta_0^2}$$

$\mathbf{S}_p^{res}$  est le tenseur des contraintes résiduelles (résiduelle au sens de développement asymptotique) à l'ordre  $p$  :

$$\mathbf{S}_p^{res} = \frac{1}{1+\nu+\kappa_0} \left[ C_5 \left[ \mathcal{G} \mathbf{S}_0^d : \mathbf{S}_0^d + \left( \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \mathbf{S}_{p-r}^d \right) : \mathbf{S}_0^d \right] - \mathcal{G} \right] \mathbf{S}_0^d - \frac{1}{1+\nu+\kappa_0} \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r \mathbf{S}_{p-r}^d \quad (2.25)$$

$C_5$  et  $\mathcal{G}$  sont des constantes définies par les expression suivantes

$$C_5 = \frac{-K}{1+\nu+\kappa_0 + K \mathbf{S}_0^d : \mathbf{S}_0^d}$$

$$\mathcal{G} = \sum_{r=1}^{p-1} \frac{(p-r)(n-1)-r}{p \zeta_0} \zeta_{p-r} \kappa_r + \frac{3(n-1)\kappa_0}{4 \sigma_0^2 \zeta_0^2} \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{S}_0^d : \mathbf{S}_{p-r}^d - \frac{(n-1)\kappa_0}{2 \zeta_0^2} \sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r \zeta_{p-r}$$

L'expression des contraintes est ensuite introduite dans l'équation d'équilibre pour obtenir un problème avec le champ de déplacement comme seul inconnue et par la suite une formulation d'éléments finis en déplacement.

Après développement en séries entière et identification membre à membre par rapport à la puissance de «  $a$  », les conditions de contact (2.15), (2.17) et (2.18) donnent les expressions suivantes :

A l'ordre 1 :

$$\begin{cases} h_1 = \frac{\langle \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 - \mathbf{c} - \lambda_0 \mathbf{w} , \mathbf{u}_1 - \lambda_1 \mathbf{w} \rangle}{h_0 + \rho} \\ \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 - \lambda_1 \mathbf{w} - h_1 \mathbf{n}_0}{h_0 + \rho} \\ \mathbf{R}_1 = \frac{\eta_c (\delta - h_0)}{h_0} \mathbf{n}_1 - \frac{h_1}{h_0} (\eta_c \mathbf{n}_0 + \mathbf{R}_0) \end{cases} \quad (2.26)$$

A l'ordre  $p$  :

$$\begin{cases} h_p = \frac{\langle \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 - \mathbf{c} - \lambda_0 \mathbf{w} , \mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{w} \rangle}{h_0 + \rho} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\langle \mathbf{u}_{p-r} - \lambda_{p-r} \mathbf{w} , \mathbf{u}_{p-r} - \lambda_{p-r} \mathbf{w} \rangle}{h_0 + \rho} \\ \mathbf{n}_p = \frac{\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{w} - h_p \mathbf{n}_0}{h_0 + \rho} - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{h_r \mathbf{n}_{p-r}}{h_0 + \rho} \\ \mathbf{R}_p = \frac{\eta_c (\delta - h_0)}{h_0} \mathbf{n}_p - \frac{h_p}{h_0} (\eta_c \mathbf{n}_0 + \mathbf{R}_0) - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{h_r}{h_0} (\eta_c \mathbf{n}_{p-r} + \mathbf{R}_{p-r}) \end{cases} \quad (2.27)$$

Nous pouvons remarquer qu'après substitution des expressions de l'écart  $h_p$  et la normale  $\mathbf{n}_p$  dans celle de la réaction de contact  $\mathbf{R}_c$ , cette dernière va dépendre seulement du champ

du déplacement et du paramètre de chargement  $\lambda$ , ce qui va rendre facile l'application de la méthode des éléments finis.

### 2.2.2. Les approximants de Padé.

Dans la littérature des méthodes asymptotiques numériques, les représentations par les séries ont été améliorées en introduisant les représentations par les fractions rationnelles nommées : approximants de Padé. [Najah et al//98], [Elhage-Hussein et al/00]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} \mathbf{U}_1 + a^2 \frac{D_{n-3}}{D_{n-1}} \mathbf{U}_2 + \dots + a^{n-1} \frac{1}{D_{n-1}} \mathbf{U}_n \\ \lambda(a) = \lambda_0 + a \frac{D_{n-2}}{D_{n-1}} \lambda_1 + a^2 \frac{D_{n-3}}{D_{n-1}} \lambda_2 + \dots + a^{n-1} \frac{1}{D_{n-1}} \lambda_n \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $D_i(a)$  sont des polynômes de degré ( $i$ ) avec des coefficients réels ( $d_i$ ) [ $i=1, n-1$ ] :

$$D_i(a) = 1 + ad_1 + a^2 d_2 + \dots + a^i d_i \quad (2.29)$$

Il a été démontré dans [Najah et al//98], [Elhage-Hussein et al/00] que les représentations rationnelles augmentent considérablement le domaine de validité des séries et par suite la taille des pas de calcul ce qui permet une réduction du temps de calcul.

Dans ce qui suit, les résultats présentés correspondront à un algorithme de la M.A.N. avec les approximations de Padé. En fait dans ce travail, cette technique a été implémentée et a montré, via des tests, une amélioration des domaines de validité des séries. Généralement, les approximants de Padé permettent une réduction de l'ordre de 50% du nombre des pas nécessaires pour trouver la solution.

### 2.2.3. Discrétisation par éléments finis

Nous utilisons une discrétisation usuelle d'un élément quadrilatéral isoparamétrique à huit nœuds. La modélisation de la géométrie et du champ de déplacement s'expriment respectivement par:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n N^k \mathbf{r}^k + \theta^3 N^k \mathbf{a}_3^k$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n N^k \mathbf{v}^k + \theta^3 N^k \mathbf{w}^k$$

où  $N^k$  désigne les fonctions de forme,  $\mathbf{r}^k$ ,  $\mathbf{a}_3^k$ ,  $\mathbf{v}^k$  et  $\mathbf{w}^k$  sont des variables nodales interpolées via les fonctions de formes classiques des éléments quadrilatéraux à huit nœuds,  $k$  indique le numéro du nœud et  $n$  désigne le nombre des nœuds de l'élément qui vaut 8 dans l'élément fini considéré dans cette étude.

Après l'application des techniques de perturbation et la discrétisation par éléments finis, le problème à l'ordre  $p$  peut s'écrire sous la forme suivante:

$$[K_t] \{U_p\} = \{F_p^{nl}\} + \{R_p^r\} \quad (2.30)$$

où  $[K_t]$  est la matrice de rigidité tangente sans contact, elle est calculée au voisinage de la solution initiale  $(U_0, \lambda_0)$ ,  $\{U_p\}$  est le vecteur déplacement discrétisé à l'ordre  $p$ ,  $\{F_p^{nl}\}$  est le second membre classique dans la méthode asymptotique numérique. Le vecteur  $\{U_p\}$  est décomposé en deux termes :  $\{U_p\} = \{U_p^c, U_p^{nc}\}$ , où  $\{U_p^c\}$  est le déplacement des nœuds candidats au contact et  $\{U_p^{nc}\}$  le déplacement du reste des nœuds de la structure. Le vecteur  $\{R_p^r\} = \{R_p^c, 0\}$  représente les forces de contact et nous pouvons l'exprimer sous la forme suivante:

$$\{R_p^c\} = [K_{tc}] \{U_p^c\} + \lambda_p \{F^c\} + \{F_p^{nlc}\} \quad (2.31)$$

$[K_{tc}]$  est une matrice symétrique qu'on appelle matrice de rigidité de contact.  $\{F^c\}$  est un vecteur force qui dépend surtout du vecteur déplacement imposé  $\mathbf{w}$ .  $\{F_p^{nlc}\}$  est un vecteur qui dépend non-linéairement des termes de contact aux ordres précédents.

Le problème est discrétisé en utilisant l'élément fini coque mentionné précédemment. Pour assurer une bonne description des phénomènes de flexion, 5 points d'intégration numérique de Gauss sont utilisés suivant l'épaisseur.

### 2.2.4. Procédure de continuation

Comme les séries ont un domaine de validité limité, une procédure de continuation a été proposée par Cochelin [Cochelin/94] pour décrire toute la solution. Dans chaque pas la valeur maximale ( $a_m$ ) du paramètre «  $a$  » est définie automatiquement. Un simple critère consiste à exiger que la solution entre deux ordres consécutifs reste inférieure à une valeur  $\varepsilon_1$  :

$$a_m = \left( \varepsilon_1 \frac{\|\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (2.32)$$

Dans ce travail, nous utiliserons une procédure de continuation basée sur les approximants de Padé qui a été proposée récemment par Elhage-Hussein et al [Elhage-Hussein et al/00]. Dans ce cas, le domaine de validité ( $a_{mp}$ ) de la solution est défini par l'expression suivante:

$$\varepsilon_2 = \frac{\|\mathbf{P}_n(a_{mp}) - \mathbf{P}_{n-1}(a_{mp})\|}{\|\mathbf{P}_n(a_{mp}) - \mathbf{u}_0\|} \quad (2.33)$$

où la valeur maximale  $a_{mp}$  est cherchée dans l'intervalle  $[a_m, \text{premier pôle}]$  et déterminée par une technique de dichotomie. Le premier pôle est la plus petite racine réelle du dénominateur  $D_{n-1}$  de l'équation (2.29).

### 2.3. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation 3D d'un problème de contact entre une coque élastoplastique et une sphère rigide soumise à un déplacement arbitraire. Les conditions de contact évolutives sont transformées en une relation analytique fonction de l'écart entre la structure et la surface rigide. Il s'agit donc d'une loi de contact régularisée. Ceci nous permettra de considérer un ensemble des points de la structure, susceptibles d'entrer en contact avec le corps rigide. La résolution du problème va donner l'évolution de ces points de contact, l'évolution de l'état de la structure déformée sous l'effet du déplacement imposé à la surface rigide.

Après avoir formulé le problème dans un cadre quadratique, nous avons appliqué une technique de perturbation. Ceci nous a permis de transformer, comme lors de tout traitement d'un problème mécanique avec la M.A.N, les problèmes non-linéaires de départ en une suite récurrente de problèmes linéaires bien posés et admettant tous le même opérateur tangent. Ce dernier contient des termes provenant de la non-linéarité matérielle et des termes provenant du contact. La méthode des éléments finis a été appliquée pour effectuer une discrétisation spatiale des problèmes linéaires obtenus. Ces problèmes linéaires discrétisés, admettent tous la même matrice de rigidité, ce qui constitue un des points forts de la méthode utilisée (MAN).

Nous avons obtenu, donc un algorithme qui nous permettra de simuler numériquement l'emboutissage en 3D des coques minces où la non-linéarité géométrique est couplée avec la non-linéarité matérielle et la non-linéarité des conditions évolutives de contact.

## Chapitre 3

### Application à la simulation de l'emboutissage hémisphérique

<b>Introduction</b>	61
<b>3.1. Simulation de l'emboutissage hémisphérique</b>	61
<b>3.1.1. Présentation du problème</b>	61
<b>3.1.2. Traitement des problèmes non-linéaires dans Abaqus</b>	64
<b>3.1.3. Comparaison des résultats</b>	67
<b>3.2. Etude de l'ordre optimal de troncature des séries</b>	69
<b>3.3. Etude de l'influence des paramètres de régularisation</b>	71
<b>3.3.1. Influence de la régularisation de la loi de comportement</b>	71
<b>3.3.2. Influence de la régularisation de la loi de contact</b>	72
<b>3.4. Efficacité de l'algorithme</b>	75
<b>3.5. Etude de l'amincissement de la tôle</b>	77
<b>3.6. Etude de la qualité de la solution</b>	79
<b>3.7. Conclusions</b>	81

## **Introduction**

Dans ce chapitre, nous appliquons la formulation présentée dans le chapitre précédent (chapitre 2) à la simulation de l'emboutissage hémisphérique. Ce procédé est considéré comme un test standard dans l'industrie de la mise en forme des matériaux. C'est un test qui a été étudié expérimentalement par [Gosh et Hecker/75] et traité numériquement pour la première fois par Wang et Budiansky [Wang et Budiansky/78] dans un modèle basé sur une formulation d'éléments finis de type membrane. Ce test est souvent utilisé pour valider les modèles et les simulations numériques de l'emboutissage [Bellet et al/90][ABAQUS/98-2]. A travers la simulation de ce procédé, nous allons valider l'algorithme asymptotique présenté dans le chapitre précédent (chapitre 2).

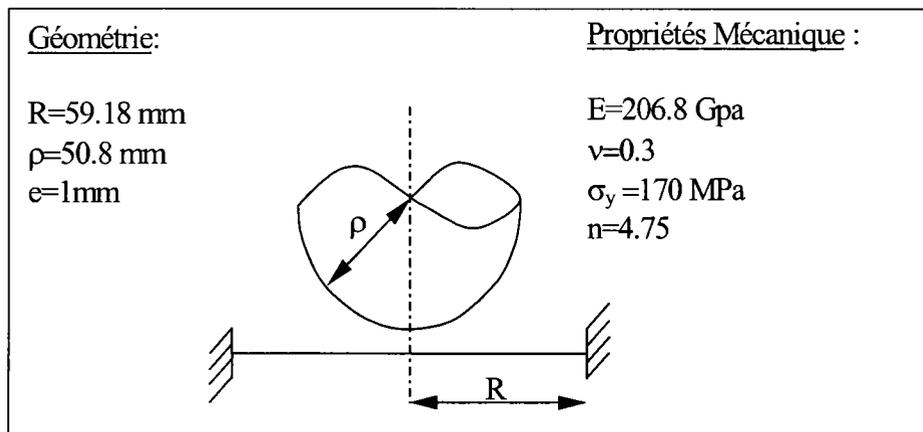
Les résultats obtenus seront comparés avec ceux du code industriel Abaqus, que nous utilisons ici comme référence.

## **3.1. Simulation de l'emboutissage hémisphérique d'une tôle circulaire**

### **3.1.1. Présentation du problème**

L'emboutissage hémisphérique consiste à déformer une structure, généralement de forme circulaire, par contact avec un outil (poinçon) de forme hémisphérique.

Sur la figure (3.1), on montre la géométrie et les propriétés mécaniques de la structure étudiée. La tôle est de 1 mm d'épaisseur, de forme circulaire et supposée encastree sur son contour. En raison de la symétrie de la structure considérée, seulement un quart de la tôle est étudié. Le matériau de la tôle considérée est l'acier désoxydé à l'aluminium (aluminium-killed steel), supposé satisfaire la relation contrainte déformation élastoplastique de Ramberg-Osgood (équation 2.5 du chapitre 2).

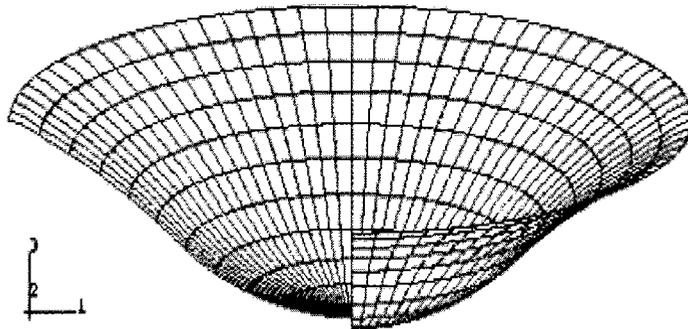


Figure(3.1) : Simulation de l'emboutissage hémisphérique : géométrie et propriétés mécaniques

La tôle est déformée par contact avec un outil sphérique soumis à un déplacement vertical qu'on a noté  $w$  dans le paragraphe 2.1.4.c. du chapitre 2.

La structure est discrétisée en utilisant l'élément fini décrit dans le chapitre précédent [Büchter et Ramm/92]. C'est un élément quadrilatéral à 8 nœuds ( 6 degrés de liberté par nœud ) qui est utilisé ici avec 5 couches de points de Gauss d'intégration numérique dans l'épaisseur et 4 points d'intégration par couche.

Dans cette étude, on suppose que tous les nœuds de la structure sont susceptibles d'entrer en contact avec la surface rigide exceptés les nœuds du contour qui sont encastés. Par suite, le nombre des points de contact considéré dans les calculs et les discussions correspond au nombre de degrés de libertés du problème divisé par 6 ( nombre de degrés de libertés par nœud ). Donc, un problème de 6000 d.d.l., contient environ 1000 points de contact.



*Figure(3.2) : Déformé de la tôle après un déplacement vertical  
du poinçon de 27.8 mm*

La figure (3.2 ) montre la déformée de la tôle qui correspond à un déplacement vertical de l'outil de 27.8 mm. Dans toute l'étude qui suit, le déplacement verticale de l'outil est toujours limité à cette valeur maximum.

Au chapitre précédent, nous avons vu que les conditions non analytiques de la loi contact ont été régularisées par une loi hyperbolique fonction de l'écart entre le point de contact et la surface rigide ( $h$ ) et le paramètre de régularisation  $\eta_c$ . Plus le paramètre de régularisation est petit ( $Rd$  est petit ), plus la loi de contact régularisée se rapproche du contact parfait. La figure (3.3) illustre ceci.

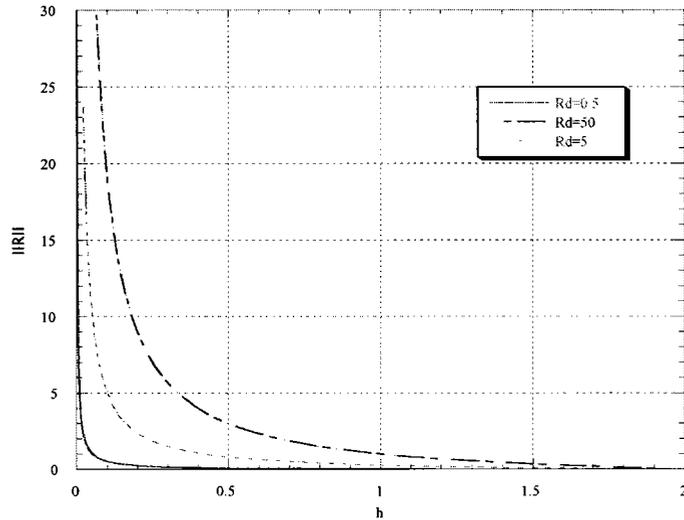


Figure (3.3) Variation de l'intensité de la réaction de contact en un nœud en fonction de l'écart  $h$  :  
influence du paramètre de régularisation

La figure (3.3) représente l'évolution de la réaction de contact, en un point de la surface considérée en contact lorsque l'écart  $h$  entre ce point et la surface rigide tend vers zéro. Pour  $Rd=0.5$ , le paramètre de régularisation correspondant est très petit et la loi de régularisation correspondante ( $R=\eta_c \frac{\delta-h}{h}$ ) est très voisine de la loi discontinue ( $Rh=0$ ).

### 3.1.2. Traitement des problèmes non-linéaires dans Abaqus

Fondé en 1978, Abaqus est un logiciel de simulation pour l'analyse de nombreux problèmes d'ingénierie. C'est un programme général d'éléments finis qui offre la possibilité de traiter et de créer différents modèles en combinant différentes procédures, différents types d'éléments et différents matériaux. Pour traiter les non-linéarités de type matérielles, Abaqus permet de modéliser la plasticité des métaux avec des modèles de Drucker-Prager, la plasticité avec état critique, plasticité des mousses écrasables (absorption d'énergie), plasticité des métaux poreux, modèles de roches fissurées, influence de la vitesse de déformation, viscoplasticité par fluage et/ou par gonflement, critère de plasticité de Hill et le modèle de Romberg-Osgood en utilisant la théorie de la plasticité en déformation totale.

Numériquement, le traitement des problèmes non-linéaires dans Abaqus est basé sur la méthode de Newton-Raphson avec une longueur de pas adaptative.

Pour traiter le problème de contact, Abaqus utilise en général la méthode des multiplicateurs de Lagrange (5.4.d. du chapitre 1).

Dans ce code, deux lois de contact sont disponibles:

**la loi rigide ou dure:** avec cette loi, deux surfaces sont en contact si la distance qui les sépare est nulle. Une pression de contact est alors transmise à l'interface. Lorsque cette pression atteint une valeur nulle, les surfaces se séparent.

$$p=0 \quad \text{si } h>0$$

$$p=kh \quad \text{avec } k \text{ infini, si } h=0$$

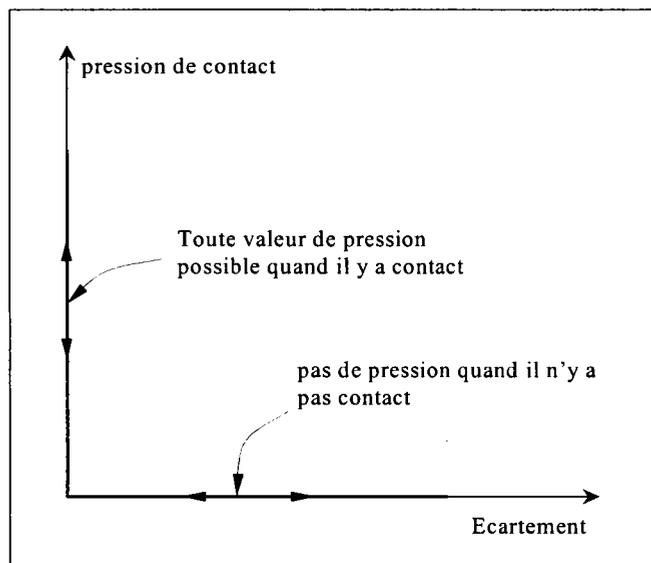


Figure (3.4) Loi de contact non-régularisée

Le contact de type dur est la loi utilisée par défaut dans tous les problèmes de contact dans Abaqus.

**La loi régularisée:** Dans ce modèle, la pression est définie en fonction de l'écart ( $h$ ) par une relation exponentielle. L'utilisateur doit entrer une distance initiale de contact ( $c$ ) et une valeur de pression ( $p^0$ ) qui correspond à la pression en ( $h=0$ ). En effet, le contact entre les deux surfaces est établi si ( $h$ ) atteint la valeur ( $c$ ).

$$\begin{aligned}
 p &= 0 && \text{pour } h \leq -c \\
 p &= \frac{p^0}{e^7 - 1} \left[ \frac{h+1}{c} (e^{\frac{h+1}{c}} - 1) \right] && \text{pour } -c < h < 6c \\
 p &= \frac{p^0}{e^7 - 1} \left[ 7e^7 - 1 + \left( \frac{h}{c} - 6 \right) (8e^7 - 1) \right] && \text{pour } 6c < h < 7c
 \end{aligned}$$

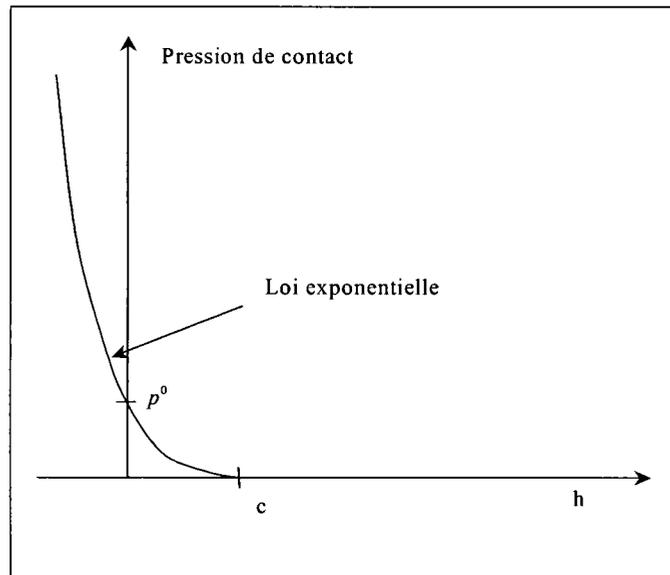


Figure (3.5) La loi régularisée : courbe pression en fonction de  $h$

### L'algorithme master-slave.

Lorsque l'approche 'Contact Pair' est considérée, Abaqus utilise le concept 'master-slave' pour définir l'interface de contact. Le principe de l'approche 'Contact Pair' est d'associer deux surfaces potentiellement en contact, de telle sorte que l'une des deux surfaces ne puisse pas pénétrer l'autre. Une des surfaces est désignée surface 'esclave' et l'autre la surface 'maître'. Les nœuds de la surface esclave sont contraints de ne pas pénétrer la surface 'maître'. Les nœuds de la surface 'maître' peuvent, en principe, pénétrer la surface 'esclave'. En général, la surface 'maître' est choisie comme étant la surface du matériau le plus rigide si les matériaux sont différents ou la surface du corps qui possède le maillage le plus fin si les matériaux sont les mêmes. En présence de corps rigides, la surface rigide est toujours la surface 'maître'.

### ***Les options 'Small Sliding' et 'Finite Sliding'***

Avec l'approche 'contact pair', deux formulations sont disponibles pour modéliser l'interaction au niveau de l'interface de contact. La première est la formulation 'small-sliding' dans laquelle les deux surfaces peuvent faire des rotations et de faibles glissements l'une par rapport à l'autre. Ceci implique que les nœuds de la surface esclave interagissent toujours avec la même zone de la surface 'maître'. La deuxième est la formulation 'finite-sliding' qui est la plus générale et qui est utilisée par défaut. Dans cette dernière, de grands glissements, de grandes rotations, et de grandes déformations des surfaces sont autorisés. Pour éviter les problèmes de convergence, Abaqus lisse automatiquement les surfaces maîtresses dans un contact de type 'finite-sliding'. De toute évidence la formulation 'finite-sliding' est plus coûteuse en temps de calcul surtout en 3D.

### ***Représentation des surfaces de contact***

Dans l'étude de contact entre des corps déformables, il est évident que les deux corps doivent être maillées. Pour représenter les surfaces de contact dans le cas des corps rigides, trois approches sont possibles dans Abaqus:

- Définir les surfaces analytiquement, en 2D ou 3D
- Mailler la surface d'un corps en utilisant des éléments rigides
- Ecrire un sous programme utilisateur (RSURF) pour définir la surface

Dans ce travail, nous avons choisi d'utiliser la loi de contact 'rigide' non-régularisée. Nous utilisons aussi l'approche 'Contact Pair' qui est adoptée par Abaqus pour traiter la plupart des problèmes de contact [Abaqus/98-1]. Dans cette approche, on décrit uniquement les surfaces en contact par une paire de surfaces, sans définir explicitement les éléments de contact. Ces derniers sont directement gérés par cette approche. Le corps rigide utilisé dans le problème étudié dans ce chapitre est une sphère qu'on représente analytiquement dans le calcul Abaqus.

#### **3.1.3. Comparaison des résultats**

La figure (3.6) montre une comparaison de la variation des contraintes équivalentes de Mises en fonction du paramètre de contrôle  $\lambda$  qui contrôle le déplacement du poinçon. Les courbes correspondent au point de Gauss le plus proche du centre de la tôle.

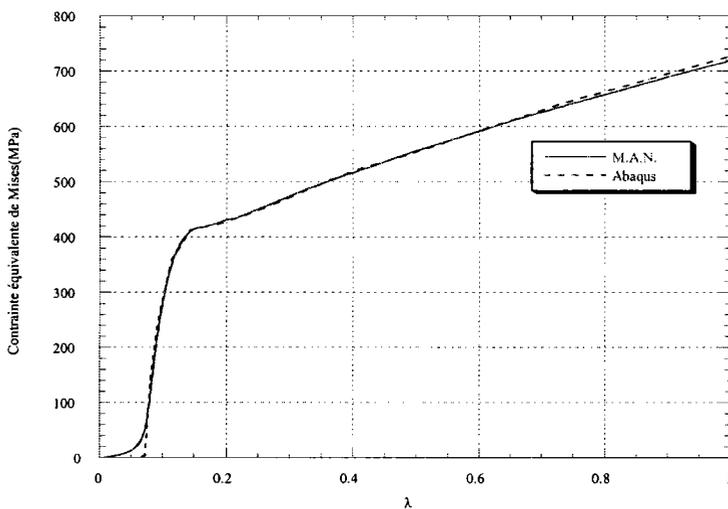


Figure (3.6) : Evolution de la contraite équivalente de Mises en fonction du paramètre de charge  $\lambda$  Comparaison avec Abaqus

On remarque la bonne précision de l’algorithme asymptotique pour estimer les contraintes dans la tôle. Les courbes sont décalées vers la droite à cause de l’écart initial entre la tôle et le poinçon, qui vaut 2 mm dans tous les calculs effectués dans cette étude.

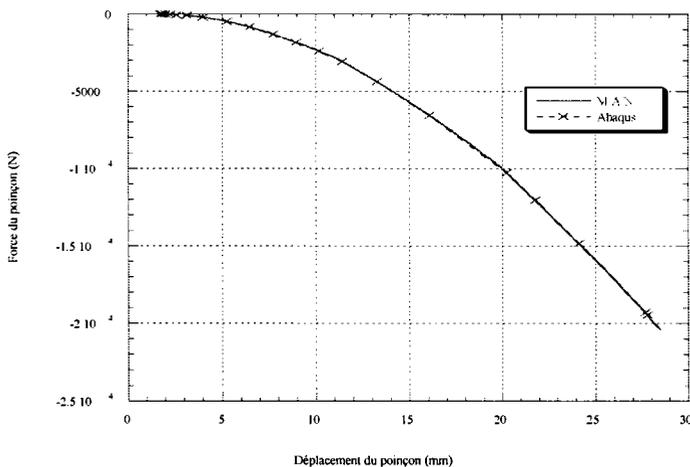


Figure (3.7) : Evolution de la force du poinçon en fonction de son déplacement : comparaison avec le code industriel Abaqus

La figure (3.7) représente l’évolution de la force du poinçon en fonction de son déplacement au cours du processus. Cette force correspond à la force totale de contact qui est équivalente à

la somme des forces de contact en chaque point candidat au contact. Dans les procédés de mise en forme, cette force correspond à la force exercée par les outils. Cette dernière est aussi appelée force d'emboutissage.

On peut remarquer, à partir de ces deux dernières figures, la bonne estimation des contraintes dans la tôle ainsi que la très bonne prévision de la force de l'emboutissage.

### 3.2. Etude de l'ordre optimal de troncature des séries

Nous avons vu dans la revue bibliographique et le chapitre 2 que l'algorithme asymptotique fait intervenir un second membre  $\{F^{nl}\}$  dans les équations qui gouvernent le problème. Le temps de calcul de ce terme dépend surtout de l'ordre des séries. A partir d'un certain ordre, ce temps de calcul devient élevé. Dans cette section, on va étudier le temps CPU afin de déterminer l'ordre optimal de troncature des séries. Aucune comparaison du temps de calcul avec les méthodes itératives ne sera présentée dans un premier temps. Cette comparaison fera l'objet d'une section ultérieure. L'étude est faite pour un algorithme asymptotique basé sur les représentations polynomiales et un algorithme basé sur les représentations rationnelles (Approximants de Padé) et ce pour différentes tailles du problème. Pour chaque taille du problème et chaque ordre considéré, on présente, le nombre de pas nécessaires pour achever le calcul, le rapport entre le temps nécessaire pour l'évaluation du second membre  $\{F^{nl}\}$  et le temps  $t_1$  nécessaire pour l'évaluation et la décomposition de la matrice de rigidité tangente  $[K_t]$ ; et finalement le temps total relatif correspondant au rapport entre le temps total CPU et le temps  $t_1$ .

Ordre	Nbre de pas	t(Fnl)/t(Kt)	temps total relatif
8	187	0,53	286,11
10	145	0,66	240,7
12	123	0,86	228,78
13	116	0,96	227,36
14	110	1,08	228,8
15	106	1,19	232,14
20	99	1,44	241,56

Tableau (3.1) : Ordre optimal, séries : 600 d.d.l

Ordre	Nbre de pas	t(Fnl)/t(Kt)	temps total relatif
8	167	0,52	253,84
10	129	0,69	218,01
12	108	0,84	198,72
13	101	0,94	195,94
14	97	1,13	206,61
15	93	1,24	208,32
20	80	1,92	233,6

Tableau (3.2) : Ordre optimal, séries :1537 d.d.l

Ordre	Nbre de pas	t(Fnl)/t(Kt)	temps total relatif
8	155	0,57	238,15
10	119	0,67	198,73
12	99	0,93	190,92
13	94	1,02	189,51
14	90	1,14	192,24
15	86	1,24	192,64
20	77	1,76	212,52

Tableau (3.3) : Ordre optimal, séries :5766 d.d.l

Ordre	Nbre de pas	t(Fnl)/t(Kt)	Temps total relatif
8	110	0,49	163,9
10	85	0,66	141,1
12	73	0,85	135,05
13	68	0,95	132,6
14	64	1,08	133,12
15	61	1,19	133,59
20	56	1,43	136,08

Tableau (3.4) : Ordre optimal, Padé :600 d.d.l

Ordre	Nbre de pas	t(Fnl)/t(Kt)	Temps total relatif
8	94	0,52	142,88
10	75	0,7	127,5
12	63	0,84	115,92
13	59	0,94	114,46
14	57	1,04	116,28
15	54	1,23	120,42
20	44	1,88	126,72

Tableau (3.5) : Ordre optimal, Padé :1537 d.d.l

Ordre	Nbre de pas	$t(Fnl)/t(Kt)$	Temps total relatif
8	86	0,54	132,85
10	71	0,66	117,86
12	60	0,93	115,57
13	55	1,01	110,56
14	53	1,14	113,31
15	51	1,23	113,8
20	43	1,83	121,69

Tableau (3.6) : Ordre optimal, Padé :5766 d.d.l

On peut ainsi observer la diminution du nombre des pas au fur et à mesure que l'ordre de troncature des séries augmente. Un passage de l'ordre 8 à l'ordre 20 divise presque par deux le nombre de décompositions des matrices nécessaires pour obtenir la solution. Toutefois, comme l'ordre a augmenté, le temps de calcul des vecteurs seconds membres  $\{F^{nl}\}$  a aussi augmenté: ce passage de l'ordre 8 à l'ordre 20 entraîne aussi une multiplication par trois du rapport  $\frac{tF^{nl}}{tK_t}$ . Comme le montrent ces tableaux, l'ordre optimal de troncature des séries est de 13. Ce résultat est en bon accord avec quelques résultats de la littérature de La M.A.N. où l'ordre optimal varie souvent entre 10 et 15 et le rapport  $\frac{tF^{nl}}{tK_t}$  avoisine 1 généralement.

### **3.3. Etude de l'influence des paramètres de régularisation**

Dans la formulation du problème (chapitre 2), on a introduit deux paramètres de régularisation. Il s'agit d'un paramètre de régularisation de la loi de comportement et d'un paramètre de régularisation de la loi de contact. Dans cette section, nous allons étudier l'influence de ces paramètres sur le temps de calcul ainsi que sur la qualité de la solution obtenue par l'algorithme.

#### **3.3.1. Influence de la régularisation de la loi de comportement**

Pour étudier l'influence du paramètre de régularisation  $\eta_m$  de la loi de comportement (équation 2.9 du chapitre 2), on a effectué quatre calculs correspondants à  $\eta_m = 0.001$ , 0.01, 0.1 et  $\eta_m = 1$ . Nous remarquerons que pour les trois premières valeurs, l'algorithme donne la

même qualité de solution et ce avec le même nombre de décompositions de matrices de rigidité tangente. Une valeur  $\eta_m=1$ , induit une modification inacceptable de la réponse globale figure (3.8). Ceci paraît être tout à fait normal car dans ce cas la loi de comportement a été énormément modifiée. Par la suite et pour tout le reste des calculs, nous prendrons une valeur de  $\eta_m=0.1$ .

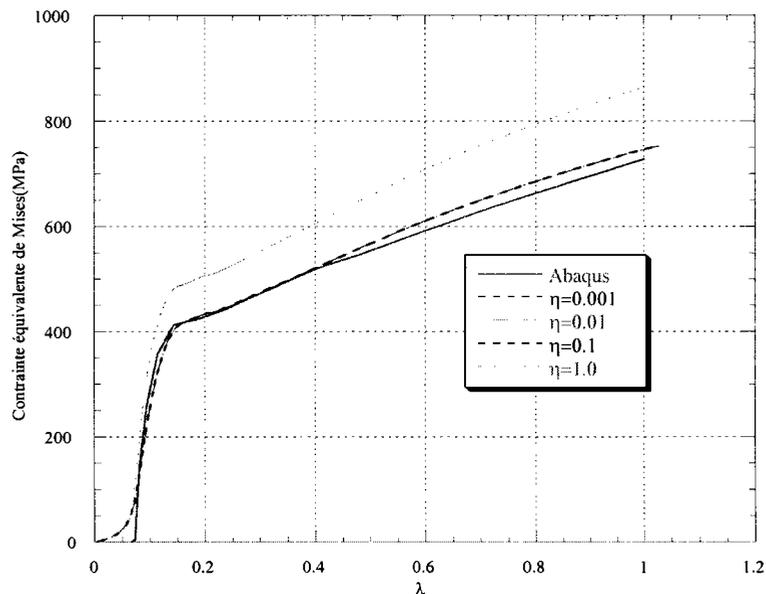


Figure (3.8) : Etude de l'influence du paramètre de régularisation de la loi de comportement  $\eta_m$  sur la qualité de la solution.

### **3.3.2. Influence de la régularisation de la loi de contact**

Si le paramètre de régularisation de la loi de comportement peut être choisi d'une façon plus ou moins arbitraire dans un large intervalle, la régularisation des conditions de contact doit être définie avec beaucoup plus d'attention. Dans la loi de contact, pour définir une régularisation forte ou une douce, on doit faire varier le couple  $(R_d, h_d)$  de la relation (2.16). Pour la même densité du maillage ( discrétisation en 600 d.d.l. ), on compare les résultats pour  $R_d=5$  et  $R_d=0.5$  avec ceux obtenus par le code industriel Abaqus ( $R_d=0$ ).

On remarque que le paramètre de régularisation de la loi de contact a une influence considérable sur la qualité de la solution.

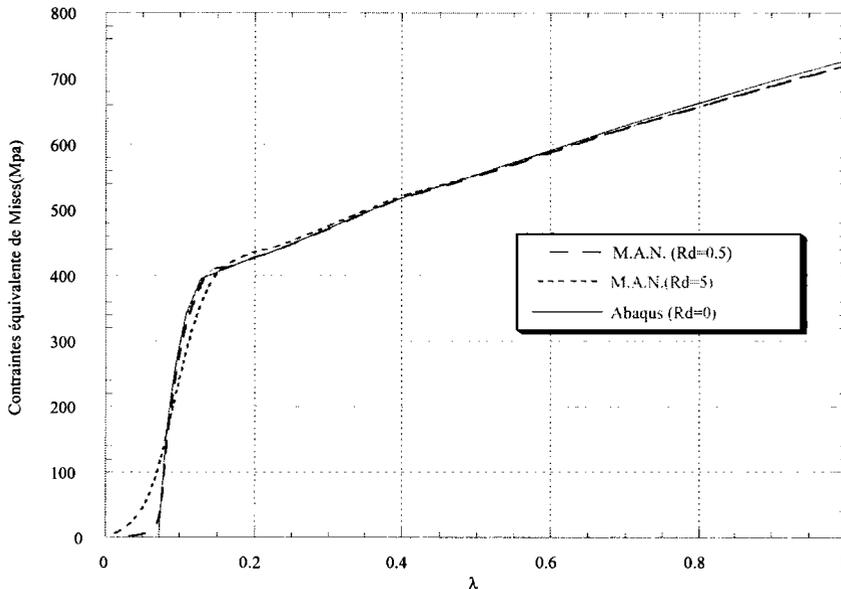


Figure (3.9) : Etude de l'influence du paramètre de régularisation de la loi de contact  $\eta_c$  sur la qualité de la solution.

Comme le montre la figure (3.9) plus petite est la valeur de  $R_d$ , meilleure est la qualité de la solution. Ceci n'est pas le cas pour la force du poinçon correspondante à la force totale de contact qui n'est pas très affectée par cette régularisation. En effet, au contraire des forces locales (contraintes par exemple), les forces globales sont directement liées à l'équilibre global qui est satisfait même en choisissant des valeurs très grandes du paramètre de régularisation des conditions de contact (figure 3.10).

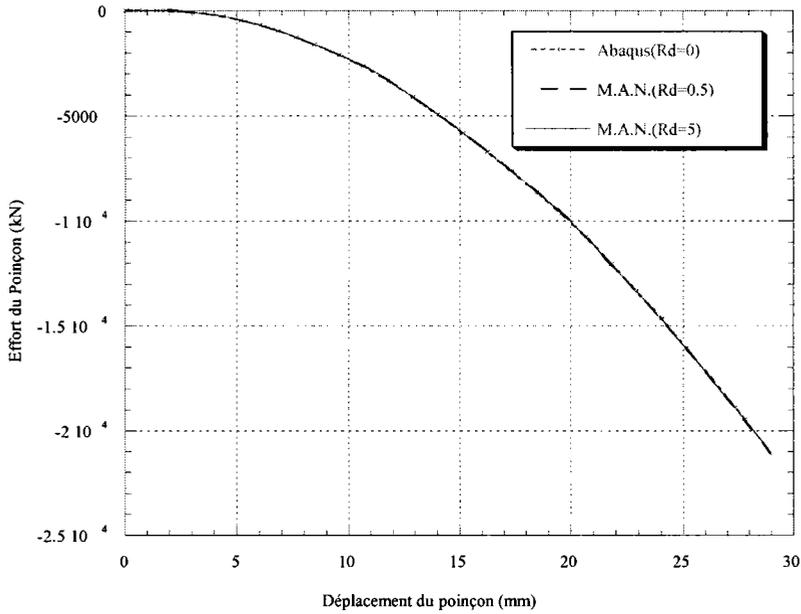


Figure (3.10) : Comparaison de la force du poinçon: force d'emboutissage, influence de la régularisation de la loi de contact

Maintenant, nous allons étudier l'influence de ce paramètre de régularisation sur le temps de calcul et par la suite sur la rapidité de l'algorithme.

Abaqus	M.A.N.	
	Rd=5	Rd=0,5
185	39	68

Tableau (3.7) Influence de la régularisation de la loi de contact ( $hd=0.05$ ), comparaison avec Abaqus : Nombre de décompositions des matrices nécessaires pour atteindre un déplacement de 27.8 mm pour un problème de 600 ddl

Dans le tableau 3.7, on montre l'influence de la régularisation de la loi de contact sur la rapidité de l'algorithme, comparé au code industriel Abaqus. On remarque que le nombre des pas de la M.A.N., correspondant au nombre de décompositions de matrice, augmente pour des petites valeurs du paramètre de régularisation des conditions de contact. En effet, quand le paramètre de régularisation est faible, la non-linéarité du problème devient plus sévère et par conséquence plusieurs pas sont nécessaires pour achever le calcul. On retiendra par la suite une valeur de  $Rd=0.5$  ( $hd=0.05$ ) pour assurer une précision suffisante dans l'estimation des variables locales.

### 3.4. Efficacité de l'algorithme

Le problème présenté précédemment a été étudié pour trois tailles différentes du problème, correspondantes respectivement à 600, 1537 et 5766 degrés de liberté.

Dans le tableau (3.8), on compare le nombre des décompositions des matrices de rigidité tangente nécessaires pour atteindre un déplacement du poinçon de 27.8 mm. Rappelons qu'ici la comparaison est faite en terme de 'constructions et décompositions' de la matrice de rigidité tangente. En effet, dans les méthodes itératives (méthodes utilisé par Abaqus, pris ici comme référence), il y a souvent plusieurs itérations à chaque pas et c'est le nombre de traitement (constructions + décompositions ) qui est déterminant pour le temps de calcul.

Comparé à Abaqus, l'algorithme asymptotique nécessite très peu d'opérations 'constructions et décompositions'. On remarque bien que le raffinement du maillage rend difficile la convergence de la méthode itérative (Abaqus) à l'opposé de l'algorithme asymptotique qui préserve son efficacité. Abaqus nécessite six fois plus de 'constructions - décompositions' par rapport à l'algorithme asymptotique pour un problème de 5766 d.d.l.

d.d.l.	M.A.N.	Abaqus
600	68	185
1537	59	197
5766	55	326

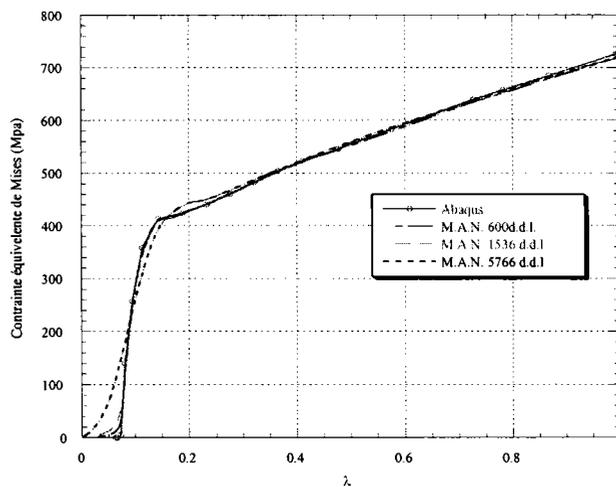
*Figure (3.8) Nombre de décompositions de matrices de rigidité tangente : comparaison de la M.A.N. avec Abaqus.*

Notons au passage que pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté, c'est la décomposition de la matrice de rigidité qui consomme le plus de temps CPU, et que c'est sur ce point que les efforts des chercheurs sont particulièrement déployés.

Notons que pour des problèmes de grande taille, le nombre de points de contact devient très important. Ceci induit un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité tangente qui génère une lenteur de la convergence. Par ailleurs, la taille de cette matrice dans les méthodes itératives, qui utilisent les multiplicateurs de Lagrange (cas de Abaqus) dans le traitement du

problème de contact, est plus grande que celle de l'algorithme asymptotique (chapitre 1, 5.4.b). Si on note par  $N_c$  le nombre des points de contact, dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la matrice à inverser a une taille égale à  $(nddl+N_c) * (nddl+N_c)$ , par contre dans l'algorithme asymptotique la taille de cette matrice est seulement de  $(nddl)*(nddl)$ . Dans notre algorithme, pour prendre en compte les conditions de contact, on ne modifie pas la taille de la matrice de rigidité tangente. Ce résultat est très important surtout pour le traitement des problèmes de simulation de mise en forme où plusieurs non-linéarités sont couplées, les structures étudiées sont généralement de grande taille et un maillage très fin est souvent nécessaire pour assurer la convergence et obtenir une solution assez précise.

On note que ces résultats sont obtenus en utilisant le même couple de régularisation de la loi de contact  $(R_d, h_d)$ . Si on analyse le tableau (3.8), on remarque une légère réduction du nombre des décompositions des matrices quand le nombre des points de contact augmente. Ceci est dû au fait qu'après discrétisation, chaque point de la surface de contact est soumis à une force  $R_c$ . Après raffinement du maillage, la force globale de contact reste constante tandis que la force nodale de contact est réduite. Ce phénomène, comme le montre la figure (3.9), est équivalent à une augmentation de la valeur du paramètre de régularisation de la loi de contact ce qui adoucit sa non-linéarité.



Figure(3.11) : Influence du maillage sur la qualité de la solution

### 3.5. Etude de l'amincissement de la tôle

Parmi les phénomènes les plus importants qui se déroulent lors d'un processus de la mise en forme des tôles minces, on rencontre le phénomène de l'amincissement du flan, qui peut engendrer des fissurations voire des ruptures. L'amincissement ou la variation de l'épaisseur est parmi les facteurs qui doivent être bien estimés lors des simulations du procédé. Il est l'un des facteurs qui permettent d'évaluer l'emboutissabilité d'une pièce dans la phase du bureau d'études. Le flan étudié dans cette section a une épaisseur initiale de 1 mm.

Dans cette section, nous testons notre algorithme dans la prédiction de la variation de l'épaisseur en le comparant avec le code Abaqus.

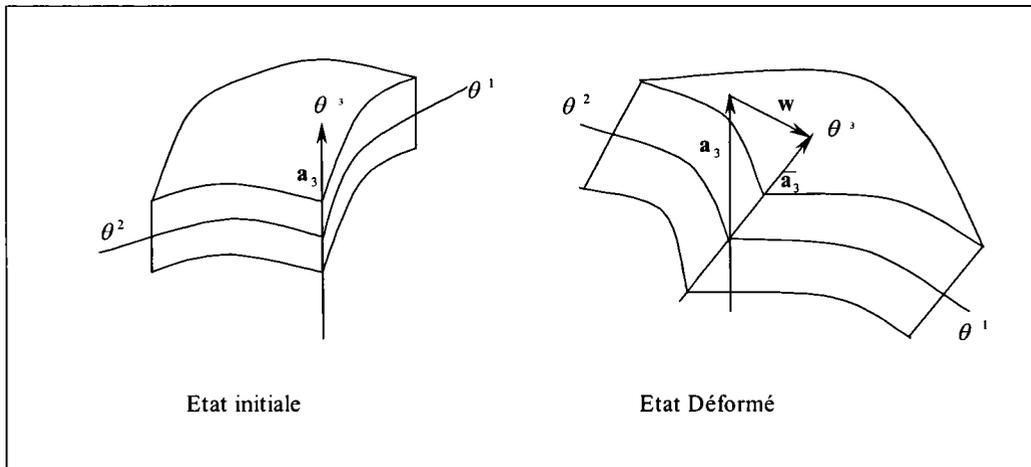


figure (3.12) Calcul de la variation de l'épaisseur

D'après la cinématique de l'élément fini utilisé (figure 3.12), la valeur de l'épaisseur  $e$  de la tôle en un point donné se déduit directement du vecteur directeur de la coque en ce point:

$$e = \|\vec{\bar{a}}_3\|$$

Ce vecteur directeur est calculé en fonction de l'orientation initiale de la coque et de sa variation :

$$\vec{\bar{a}}_3 = \vec{a}_3 + \vec{w}$$

si on attribut les composantes suivantes à ces vecteurs :  $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} t_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}_{(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}$  ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} t \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}$

L'épaisseur de la tôle vaut donc :

$$e = \|\vec{a}_3 + \vec{w}\| = \sqrt{(t+t_0)^2 + (v+v_0)^2 + (w+w_0)^2}$$

Pour étudier la variation de l'épaisseur, on a pris un exemple correspondant à une discrétisation en 600 *d.d.l.* du problème présenté précédemment. Le déplacement vertical imposé au poinçon vaut toujours 27.8 mm. On compare à la fin du calcul la valeur de l'épaisseur au niveau des nœuds situés sur une section radiale. Au niveau du code industriel Abaqus on a utilisé plusieurs types d'éléments dont le calcul permet une évaluation de l'épaisseur et sa récupération dans les fichiers de sortie. La raison pour laquelle plusieurs types d'éléments sont pris est d'éviter l'effet de l'élément choisi dans le calcul. On a remarqué (figure 3.13) une différence de l'ordre de 15 % entre les valeurs données par l'algorithme asymptotique et celle du code Abaqus.

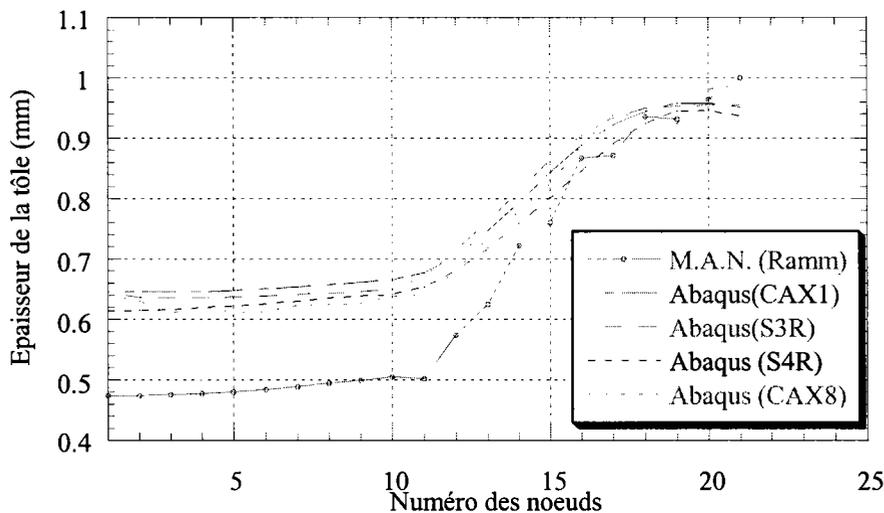
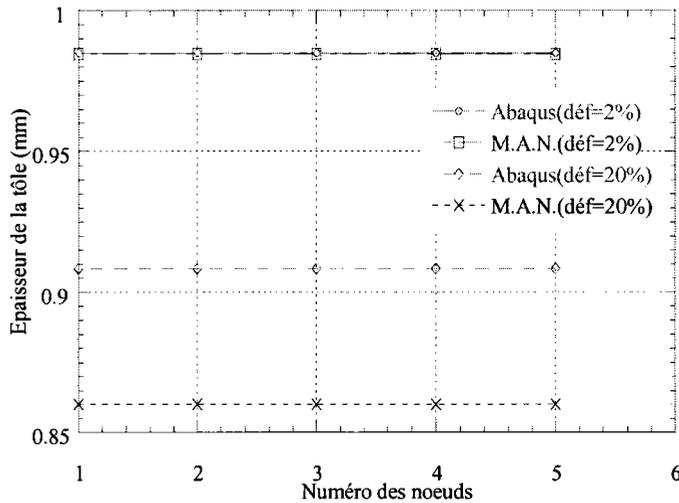


Figure (3.13) Etude de la variation de l'épaisseur de la tôle:  
Comparaison avec le code Abaqus

En première hypothèse, nous avons supposé que l'algorithme de contact peut être à l'origine de différence entre les résultats. Pour cela on a effectué un petit test de traction axiale qui ne fait pas intervenir les conditions de contact. La plaque étudiée est discrétisée en utilisant deux éléments de type Ramm. En premier lieu, nous avons mené le calcul jusqu'à un palier de déformation de 2% pour atteindre enfin une valeur de 20%. Nous avons constaté que

pour des déformations de l'ordre de 2%, les résultats obtenus par l'algorithme sont en bon accord avec ceux obtenus par le biais du code Abaqus (figure 3.14).



Figure( 3.14) : Test sur la variation de l'épaisseur pour deux éléments soumis à une traction axiale, comparaison avec Abaqus

Pour des déformations de l'ordre de 20%, le décalage réapparaît de nouveau. En conséquence, le seul paramètre qui peut être mis en cause est la loi de comportement. Celle que nous avons adoptée ne permet pas de traiter l'aspect des grandes déformations. C'était déjà notre hypothèse dans le chapitre2. Actuellement, un travail dans le cadre d'une thèse, est en cours pour modéliser les lois de comportement élastoplastique en grandes déformations par des algorithmes asymptotiques numériques.

### 3.6. Etude de la qualité de la solution

Dans cette section, nous étudions la précision de l'algorithme présenté. Pour cela nous allons comparer l'évolution du résidu au cours du processus. Les résultats seront comparés avec ceux obtenus par le code Abaqus. On rappelle que, au niveau de la valeur du résidu, Abaqus utilise une valeur par défaut de  $5 \cdot 10^{-3}$ , si l'utilisateur ne fixe pas une valeur dans les paramètres numériques dans le fichier des données relatif au problème. Dans l'algorithme présenté, la précision est gérée par les deux paramètres de précision. Il s'agit de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  des équations (2.35) et (2.36) du chapitre2. Tous les calculs présentés dans cette étude, correspondent à des paramètres de précision suffisamment faibles  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-7}$  et donc aucune opération ou phase de correction a été employée. Une étude du problème de contact en

utilisant des algorithmes asymptotiques basée sur une procédure de prédiction-correction est en cours. On s'attend, par cette dernière technique, à une augmentation de la taille des pas de la M.A.N en utilisant des paramètres de précision moins serrés que ceux utilisés dans ce travail.

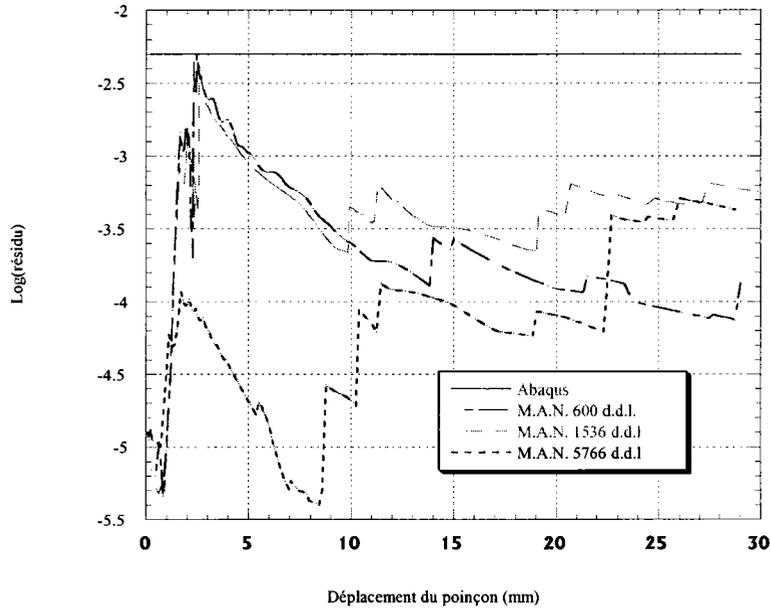


Figure (3.15) : Etude de la variation du résidu, comparaison avec le code Abaqus

Une variation du résidu au cours du processus, peut être constatée (figure 3.15), ce qui est tout à fait logique compte tenu du fait que l'équilibre est satisfait en tout point au cours d'un pas de calcul de la M.A.N. Malgré cette variation, les valeurs du résidu restent en dessous de celles obtenues par le code Abaqus.

### **3.7. Conclusions**

Dans ce chapitre, nous avons appliqué l'algorithme asymptotique présenté dans le chapitre précédent à la simulation tridimensionnelle de l'emboutissage hémisphérique d'une coque mince. Donc une simulation de l'emboutissage est possible en utilisant un algorithme basé sur la méthode asymptotique numérique. Le couplage de la non-linéarité géométrique, la non-linéarité matérielle et la non-linéarité du contact, dans un cadre tridimensionnel, n'a pas altéré l'efficacité de la M.A.N. Les résultats présentés montrent clairement la précision de l'algorithme pour prédire l'évolution des contraintes et la force de l'emboutissage au cours du processus. L'étude de temps CPU nous a permis de localiser l'ordre optimal de troncature des séries pour éviter un coût élevé du calcul du second membre. L'analyse détaillée des paramètres de régularisation introduits dans le modèle nous ont facilité l'ajustage de ces paramètres pour un bon compromis entre rapidité et précision de l'algorithme. Enfin la comparaison des résultats en terme de temps de calcul, avec ceux obtenus par le code Abaqus sont en faveur de la Méthode Asymptotique au sens de la rapidité et ceci grâce à l'aspect automatique de la détermination de la taille de pas et à l'algorithme spécial du traitement du problème de contact. Rappelons aussi que contrairement aux méthodes itératives pour lesquelles les branches de solution ne sont obtenues que de manière discrètes (des points), les calculs asymptotiques donnent des représentations analytiques continues en chaque pas de calcul.

L'algorithme présenté conserve son efficacité quand la taille des problèmes augmente, ceci est très important dans la simulation des procédés de mise en forme où les problèmes traités sont généralement de grande taille, le nombre de points de contact est très élevé et le raffinement du maillage est souvent nécessaire pour assurer la convergence et obtenir une solution satisfaisante.

## Chapitre 4

### Adoucissement de la loi de contact

<b><i>Introduction</i></b>	83
<b>4.1. Formulation du problème</b>	83
<b>4.1.1. Conditions de contact avec interpénétration</b>	84
<b>4.1.2. Régularisation des conditions de contact avec interpénétration</b>	84
<b>4.1.3. Géométrie de contact</b>	86
<b>4.1.4. Technique de perturbation</b>	86
<b>4.2. Application à la simulation de l'emboutissage hémisphérique</b>	88
<b>4.2.1. Gestion de la valeur d'interpénétration</b>	88
<b>4.2.2. Ajustage des paramètres de régularisation</b>	89
<b>4.2.3. Comparaison des temps de calcul</b>	92
<b>4.2.4. Comparaison de la qualité de la solution</b>	93
<b>4.3. Conclusions</b>	94

## Introduction

Dans la littérature de la simulation numérique des procédés de mise en forme des matériaux, les conditions de contact introduisent une rigidité numérique particulière due à la méconnaissance *a priori* des surfaces de contact et à la forte discontinuité des nombreuses conditions non-linéaires à satisfaire. En particulier en 3D, où le nombre des points de contact est souvent très grand [Nagtaal et Taylor/91]. Pour surmonter ces difficultés les codes industriels autorisent généralement une interpénétration entre les corps rigides et les corps déformables.

Dans la modélisation du problème de contact avec la méthode asymptotique, nous avons vu que la loi adoptée (équation 2.15 du chapitre 2 ) n'autorise pas ce phénomène d'interpénétration. La dureté numérique des conditions de contact, dans le cadre de la M.A.N. se manifeste par des tailles de pas de calcul relativement réduites, comparées à celles correspondantes aux autres non-linéarités telles que la non-linéarité géométrique et la non-linéarité matérielle ( plasticité en déformation totale). Ici nous précisons que nous comparons l'apport de la M.A.N. dans différents problèmes non linéaires, mais comparée aux méthodes classiques du traitement du problème de contact, l'apport de la méthode asymptotique reste très grand [Elhage-Hussein/98], [Brunelot/99], voire spectaculaire surtout lorsque le nombre de points de contact devient très grand : contact 3D [Abichou et al/99]. Dans ce chapitre, dans le but d'adoucir la loi de contact, nous proposerons une modélisation autorisant une interpénétration entre le corps rigide et la structure. L'objectif ici est de réduire le caractère raide des conditions de contact. Pour tester cette nouvelle modélisation, nous l'appliquerons à la simulation de l'emboutissage hémisphérique que nous avons traité dans le chapitre 3.

### **4.1 Formulation du problème**

La formulation du problème présentée dans le chapitre 2 reste valable dans le développement de ce chapitre, seule la loi de contact change. Ainsi, le problème global est décrit par l'équation d'équilibre (2.1), la loi de comportement régularisée (2.11) et les nouvelles conditions de contact que nous allons développer dans ce chapitre.

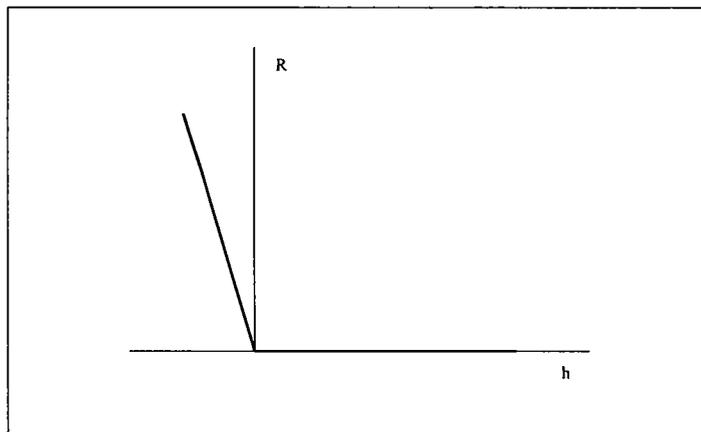
### 4.1.1. Conditions de contact avec interpénétration

Le phénomène d'interpénétration se manifeste géométriquement par un écart  $h$ , entre le corps rigide et la structure à déformer, de signe négatif. La réaction de contact dépend de l'interpénétration ( $h$ ) et le point de contact doit satisfaire les conditions suivantes :

- si  $h \geq 0$ ,  $R=0$  ( Il n'y a pas de contact ) (4.1)

- si  $h \leq 0$ ,  $R \neq 0$  ( Le point est en contact ) (4.2)

- $R.h=0$  ( La condition de non-adhésion ) (4.3)



Figure(4.1) : Conditions de contact avec interpénétration

Si l'écart  $h$  est négatif, une réaction de contact est générée et elle est de même sens que la normale  $\mathbf{n}$ , tandis que si l'écart est positif ou nul la réaction est réduite à zéro. Nous constatons la discontinuité de la relation entre l'écart et la réaction du contact. Dans notre travail, il est nécessaire de détenir des relations non singulières pour pouvoir appliquer une technique de perturbation.

### 4.1.2. Régularisation des conditions de contact avec interpénétration

Les conditions de contact avec interpénétration (4.1), (4.2) et (4.3) ne sont pas analytiques donc elle ne sont pas développables en séries entières. Pour pouvoir appliquer une

technique asymptotique nous proposons de régulariser ces équations. Afin d'assurer un cadre quadratique du problème pour la bonne mise en œuvre de la méthode asymptotique, nous proposons la régularisation suivante:

$$\begin{cases} (R + Kh)R = \eta(\delta - h) \\ \mathbf{R} = R \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (4.4)$$

Où  $R$  est le module de la réaction de contact,  $h$  est l'écart entre le corps rigide et la structure déformable,  $K$  est un paramètre positif (rigidité de l'obstacle) et suffisamment grand par rapport à l'unité.  $\delta$  est l'écart initial entre le point de contact et la surface rigide,  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface de contact passant par le point de contact étudié.  $\mathbf{R}$  est la réaction de contact (vecteur).  $\eta$  est le paramètre de régularisation de la loi de contact.

La première équation du système (4.4) donne le module de la force de contact. Quant à la seconde, elle détermine le sens et la direction de la réaction de contact qui sont fixés par la normale  $\mathbf{n}$  au point de contact étudié.

Comme nous l'avons fait pour le modèle adopté dans le chapitre précédent (section 2.1.4.b.), pour assurer une régularisation uniforme sur la surface de contact, le paramètre de régularisation est calculé, en chaque point candidat au contact, par la relation suivante:

$$\eta_c = \frac{(Rd + Khd)Rd}{\delta - hd} \quad (4.5)$$

Dans la figure (4.2), nous montrons la différence entre la loi de contact régularisée adoptée dans les chapitres précédents (modèle d'Elhage-Hussein *et al*) et la nouvelle loi qui autorise une interpénétration. Dans ce qui suit, pour identifier les deux modélisations nous qualifions la loi de contact sans pénétration de 'contact dur' et le contact qui autorise une interpénétration de 'contact adouci'.

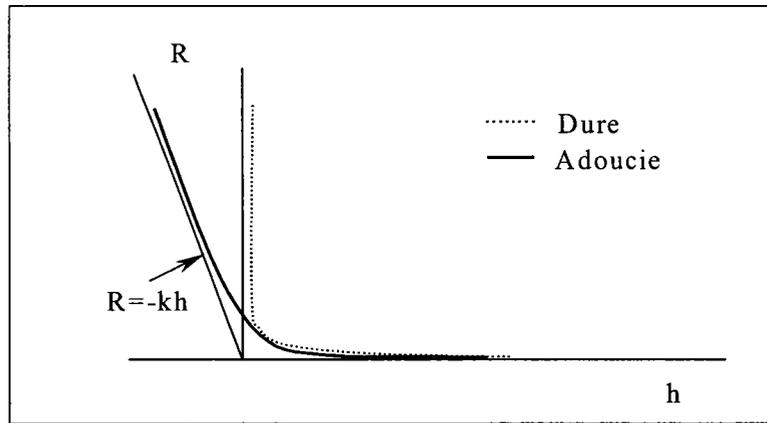


Figure (4.3) : Comparaison des lois de contact régularisées

Nous pouvons constater que pour des valeurs très grandes du paramètre  $K$ , la nouvelle loi tend vers la loi de contact dur.

### 4.1.3 Géométrie de contact

Pour résoudre le problème de contact, les équations (4.4) doivent être complétées grâce aux définitions des variables supplémentaires ( $h$ ) et  $\mathbf{n}$ . Ces dernières sont données par la géométrie du corps rigide utilisée et la cinématique du problème de contact étudié. Dans cette partie, nous nous limiterons à un corps rigide de forme sphérique, donc nous conservons les définitions de ( $h$ ) et  $\mathbf{n}$  données par les équations (2.17) et (2.18) du chapitre 2.

### 4.1.4. Technique de perturbation

Dans cette section, nous appliquons une technique de perturbation à la loi de contact régularisé (4.4). Nous développons en séries entières, par rapport au paramètre de développement «  $a$  », les variables mises en jeu dans l'équation (4.4), à savoir  $\mathbf{R}$ ,  $h$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\lambda$ . Après identification des développements obtenus membre à membre par rapport à «  $a$  », nous obtenons les systèmes d'équations suivantes:

A l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = \frac{\langle \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 - \mathbf{c} - \lambda_0 \mathbf{w}, \mathbf{u}_1 - \lambda_1 \mathbf{w} \rangle}{h_0 + \rho} \\ \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 - \lambda_1 \mathbf{w} - h_1 \mathbf{n}_0}{h_0 + \rho} \\ R_1 = -\frac{(\eta_c + KR_0)h}{2R_0 + Kh_0} \\ \mathbf{R}_1 = R_0 \mathbf{n}_1 + R_1 \mathbf{n}_0 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

A l'ordre  $p$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_p = \frac{\langle \mathbf{X} + \mathbf{u}_0 - \mathbf{c} - \lambda_0 \mathbf{w}, \mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{w} \rangle}{h_0 + \rho} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p-1} \frac{\langle \mathbf{u}_{p-r} - \lambda_{p-r} \mathbf{w}, \mathbf{u}_{p-r} - \lambda_{p-r} \mathbf{w} \rangle}{h_0 + \rho} \\ \mathbf{n}_p = \frac{\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{w} - h_p \mathbf{n}_0}{h_0 + \rho} - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{h_r \mathbf{n}_{p-r}}{h_0 + \rho} \\ R_p = -\frac{KR_0 + \eta_c}{2R_0 + Kh_0} h_p - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{R_r + Kh_r}{2R_0 + Kh_0} R_{p-r} \\ \mathbf{R}_p = R_0 \mathbf{n}_p + R_p \mathbf{n}_0 + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{R}_r \mathbf{n}_{p-r} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Ainsi la relation non-linéaire (4.4) est transformée en  $p$  relations linéaires. La linéarité de ces résolutions en permet une résolution simple.

Nous rappelons que ces relations sont définies en chaque point de la surface susceptible d'entrer en contact avec la surface rigide sphérique. La régularisation du problème de contact permet de supposer connus *a priori* les points candidats au contact et d'imposer en chacun de ces points un effort de contact régularisé. La régularisation des conditions de contact rend automatique l'étude de l'évolution du contact, c'est à dire l'analyse des positions relatives des points, la prise en compte des conditions de contact dans l'équilibre du problème et le décollement des points.

Après une discrétisation par éléments finis, nous obtenons une forme matricielle de la réaction de contact, en tout point susceptible d'entrer en contact, que nous pouvons écrire sous la forme suivante :

$$[\mathbf{R}_p^r] = [\mathbf{K}_{lc}] \{\mathbf{U}_p\} + \lambda_p \{\mathbf{F}^c\} + \{\mathbf{F}_p^{nlc}\} \quad (4.8)$$

Les termes impliqués dans cette relation sont définis dans le chapitre 2. Évidemment, leurs expressions ont changé car nous avons changé la loi de contact. Les termes de la matrice  $[K_{tc}]$  vont être pris en compte dans l'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire. De même pour les vecteurs  $\{F^c\}$  et le vecteur  $\{F_p^{nlc}\}$  que l'on superpose, respectivement, au vecteur force élémentaire et au vecteur second membre élémentaire.

## **4.2. Application à la simulation de l'emboutissage hémisphérique**

A travers la simulation de l'emboutissage hémisphérique, nous validons le nouvel algorithme de contact. Pour cela nous reprenons le problème présenté dans le chapitre 3 qui consiste à déformer une tôle par contact avec un poinçon sphérique soumis à un déplacement vertical. La structure étudiée est une coque élastoplastique de forme circulaire. Nous conservons, ici, les mêmes données du problème, voir la figure (3.1) du chapitre 3.

### **4.2.1. Gestion de la valeur d'interpénétration**

Dans ce modèle, nous devons bien sûr trouver une stratégie de gestion de la valeur d'interpénétration entre la surface rigide et la surface déformable. Dans les codes industriels la valeur de l'interpénétration  $H_{crit}$  (Allowable penetration) est généralement fixée par l'utilisateur, sinon elle est prise par défaut. La valeur de  $H_{crit}$  est calculée en fonction de la taille des éléments finis utilisés dans le problème. Dans l'algorithme proposé, pour respecter la valeur de  $H_{crit}$ , nous proposons de vérifier après chaque pas de calcul la condition suivante:

$$R \geq K.H_{crit} \quad (4.9)$$

Où  $R$  le module de la réaction du contact au point étudié et  $K$  le paramètre introduit dans la nouvelle régularisation du contact. Après un pas de calcul si cette condition n'est pas satisfaite, on augmente la valeur du paramètre  $K$ .

### 4.2.2. Ajustage des paramètres de régularisation

Les conclusions du chapitre 3 concernant le choix de l'ordre de troncature des séries et le choix des paramètres de régularisation sont prises en compte dans ce chapitre. Ainsi les calculs présentés ici correspondront à un ordre 13 de troncature de séries.

La figure (4.5) montre l'évolution de la réaction en un point de contact en fonction de l'écart  $h$ , qui peut être négatif dans cette nouvelle régularisation des conditions de contact. Cette figure met en évidence l'influence du paramètre de régularisation de la loi de contact, comme dans le cas de la loi de contact dur. Dans cette régularisation, nous avons choisi une valeur de  $10^2$  pour le paramètre  $K$  qui gère la valeur de l'interpénétration.

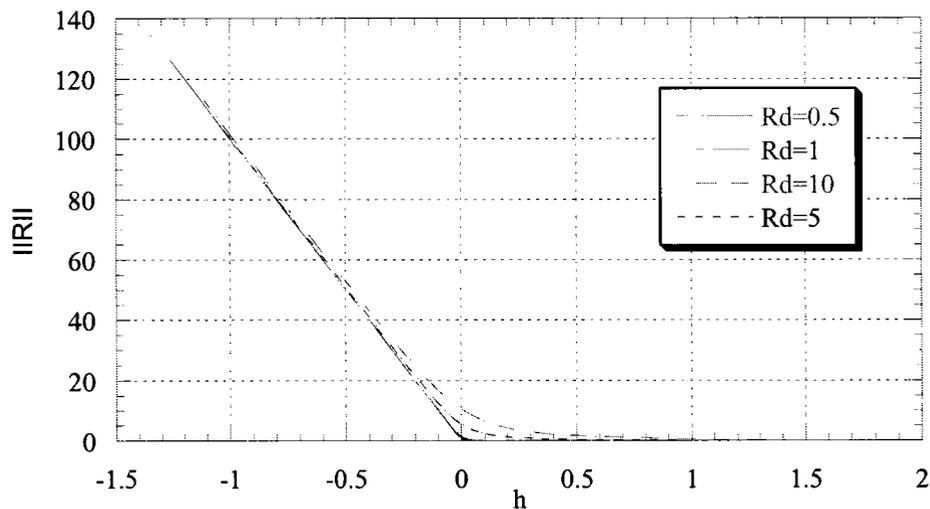


Figure (4.4) Evolution de la réaction du contact en un point en fonction de l'écart  $h$  :  
influence de la régularisation de la loi de contact,  $K=10^2$

Sur la figure (4.5), la valeur de  $K$  vaut  $10^3$ , ce qui réduit remarquablement la valeur de l'interpénétration.

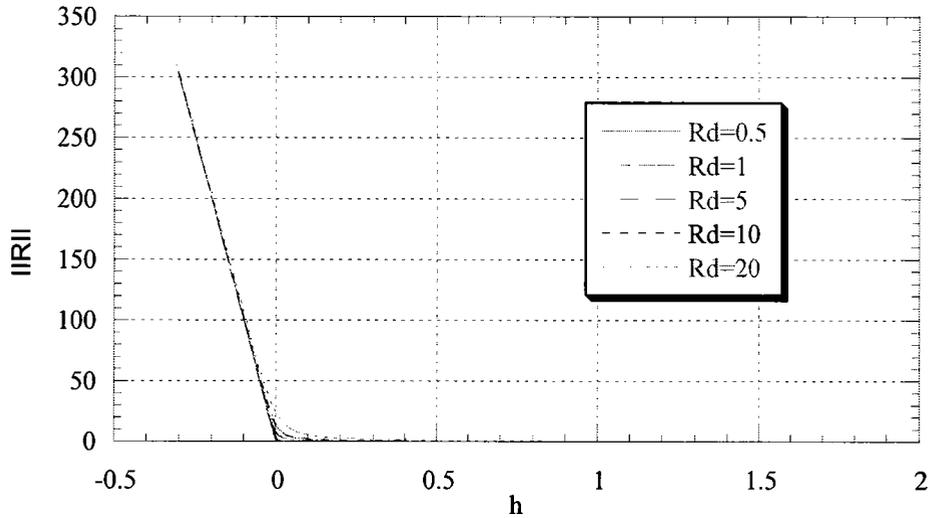


Figure (4.5) Evolution de la réaction du contact en un point en fonction de l'écart  $h$  : influence de la régularisation de la loi de contact,  $K=10^3$

Pour comparer la nouvelle modélisation avec celle adoptée dans le chapitre précédent, nous avons choisi une valeur de  $K=10^3$  pour que l'interpénétration ne soit pas excessive (figure 4.6).

En ce qui concerne les paramètres de régularisation  $Rd$  et  $hd$ , nous avons les valeurs utilisées dans le chapitre précédent ( $hd=0.05$  et  $Rd=0.5$ ) pour assurer une bonne estimation des grandeurs locales.

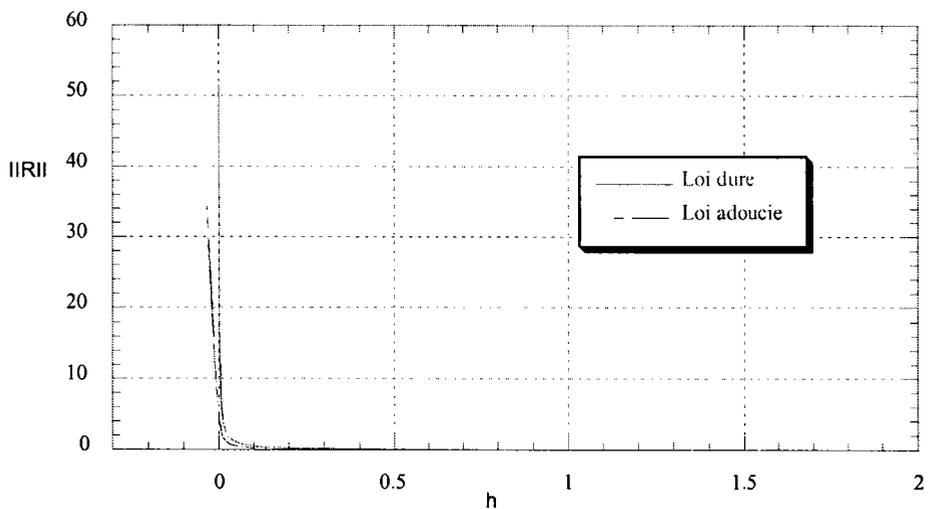


Figure (4.6) Evolution de la réaction du contact en un point en fonction de l'écart  $h$  : comparaison des deux lois de contact

Sur la figure (4.6), nous montrons une comparaison entre les deux modèles pour l'évolution de la réaction en un point de contact en fonction de l'écart  $h$ .

Maintenant nous allons essayer de voir l'impact de l'adoucissement de la loi de contact sur les résultats obtenus.

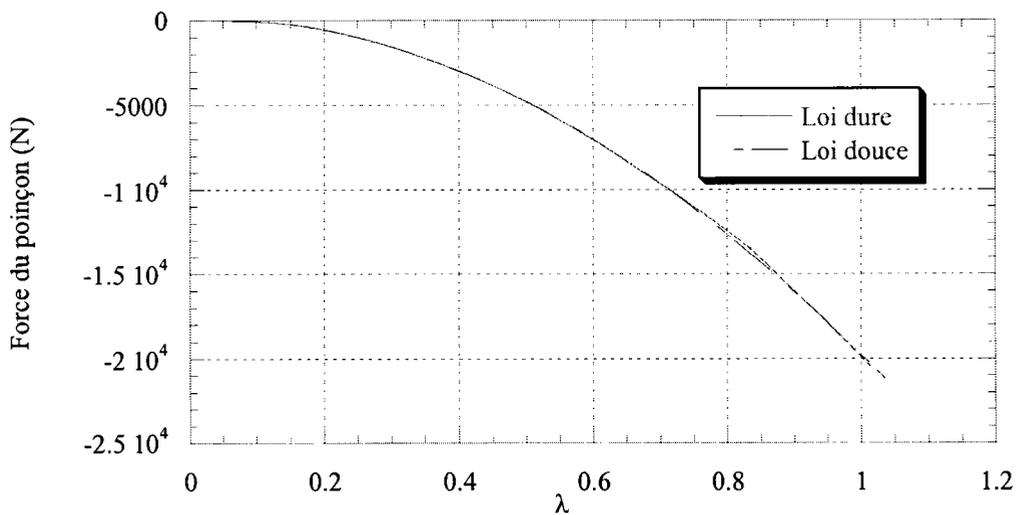


Figure (4.7) Evolution de la force du poinçon en fonction du paramètre de charge : comparaison des deux lois de contact

La figure (4.7) montre une comparaison de l'évolution de l'effort du le poinçon en fonction du paramètre de charge  $\lambda$ . Les deux algorithmes (loi de contact dur et loi de contact adoucie) semblent donner les mêmes résultats. La nouvelle modélisation n'a pas altéré la précision de l'algorithme dans l'estimation de l'effort global de contact ou l'effort de l'emboutissage.

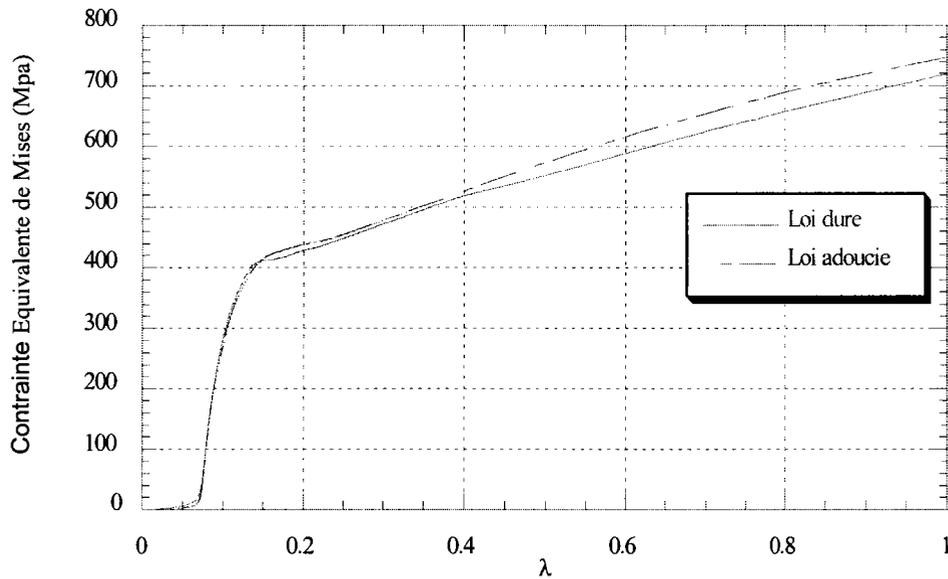


Figure (4.8) Evolution de la contrainte équivalente de Mises en fonction du paramètre de charge : comparaison des deux lois de contact

La figure (4.8) illustre l'évolution de la contrainte équivalente de Mises en fonction du paramètre de charge  $\lambda$ . Contrairement à la force du poinçon qui est une force globale, la contrainte de Mises, en tant que variable locale, est légèrement affectée par le phénomène d'interpénétration. Un compromis doit donc être fait entre la précision et la rapidité de l'algorithme. En effet, un adoucissement de la loi de contact permet un gain du temps de calcul (section suivante) tout en perdant légèrement en terme de précision.

### 4.2.3 Comparaison des temps de calcul

Dans cette section, nous comparons le temps de calcul nécessaire pour un déplacement du poinçon d'une valeur de 27.8 mm. Pour les tailles du problème présentées dans le chapitre 3, nous comparons le nombre de pas faits par l'algorithme basé sur une modélisation du contact dur à celles donnés par le nouvel algorithme.

n.d.d.l	M.A.N	
	avant	maintenant
600	68	39
1537	58	48
5766	55	46

Tableau (4.1) : Comparaison en terme de nombre d'inversions de matrices entre les deux modèles de la loi de contact

Le tableau (4.1) rassemble le nombre de décompositions de matrices tangentes nécessaire pour résoudre le problème discrétisé en 600, 1537 et 5766 degrés de liberté. Ce tableau illustre l'apport de l'adoucissement de la loi de contact. Cet apport est plus important dans un problème discrétisé en 600 *d.d.l.*, où nous pouvons constater un gain de presque 50%. Lorsque nous augmentons la densité du maillage, l'apport de l'adoucissement est moins important. En fait la nouvelle loi de contact est adouci deux fois: une fois par la régularisation hyperbolique et une fois par le coefficient de pénalisation  $K$ . Or on a vu au chapitre 3, que l'adoucissement dû à la régularisation hyperbolique est un peu plus fort avec le maillage fin, par ce qu'on a travaillé avec un contact nodal. On peut donc comprendre que l'adoucissement dû à la pénalisation  $K$  est plus important quand il s'applique à un contact encore "dur". C'est pourquoi la pénalisation permet de réduire davantage le nombre de pas avec le maillage grossier qu'avec les maillages plus fins. Dans la plupart des codes de simulation du problème de contact, le raffinement du maillage est souvent nécessaire pour éviter des interpénétrations excessives et assurer la convergence de la solution.

#### 4.2.4. Comparaison de la qualité de la solution

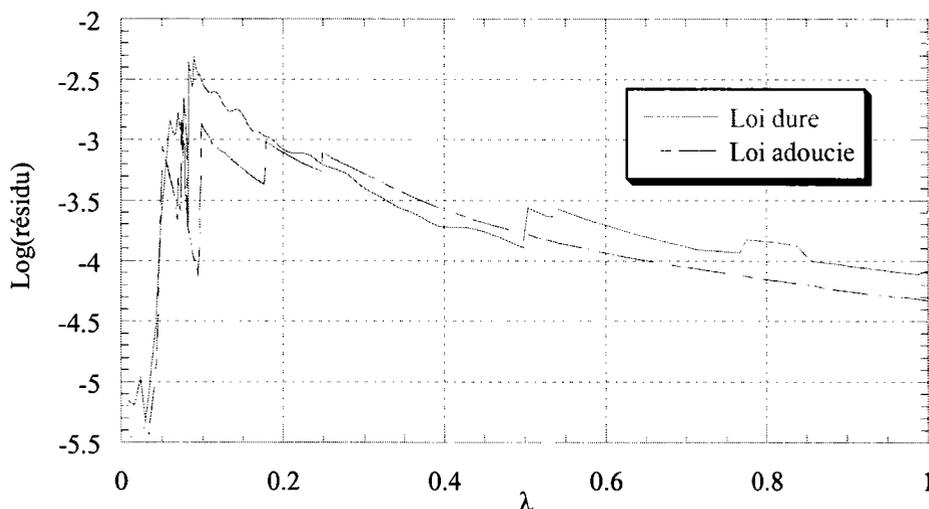


Figure (4.9) Evolution du résidu de l'équilibre en fonction du paramètre de charge : comparaison des deux lois

La figure (4.9) illustre une comparaison de l'évolution des résidus de l'équilibre donnés par les deux algorithmes en fonction du paramètre de charge  $\lambda$ . Nous constatons que nous pouvons réduire l'effet de la forte non-linéarité de la loi de contact tout en assurant une solution aussi précise que celle obtenue avec une loi de contact dure.

### 4.3. Conclusions

Ainsi, nous avons présenté une nouvelle régularisation des conditions de contact. Cette régularisation, au contraire de celle adoptée dans les chapitres 2 et 3, autorise une interpénétration entre le corps rigide et la structure déformable. Le but est de réduire l'effet du caractère raide des conditions de contact. Nous avons appliqué l'algorithme obtenu à la simulation de l'emboutissage que nous avons traité auparavant en utilisant une loi de contact dure. Les résultats obtenus montrent d'abord qu'il est possible de traiter le problème de contact avec interpénétration avec une méthode asymptotique. Ils soulignent aussi, clairement, l'effet de l'adoucissement de la loi de contact sur le temps de calcul. Nous avons pu, grâce à cette nouvelle régularisation, réduire le temps de calcul tout en assurant des résultats aussi précis que ceux obtenus en utilisant un algorithme de contact dur.

Nous avons constaté aussi que grâce à cette nouvelle régularisation, nous pouvons, pour un choix spécifique des paramètres introduits, modéliser à la fois la loi de "contact dur" et la loi de "contact adouci".

**CHAPITRE 5****Généralisation de surfaces de contact**

<b><i>Introduction</i></b>	96
<b>5.1. Méthodes utilisées pour la représentation de surfaces de contact</b>	96
<b>5.1.1. Maillage des surfaces en éléments à géométrie simple</b>	96
<b>5.1.2. Représentation analytique des surfaces</b>	96
<b>5.1.3. Carreaux de Bézier</b>	97
<b><i>5.1.3.a. Approximation polynomiale d'une courbe</i></b>	97
<b><i>5.1.3.b. Approximation polynomiale d'une surface</i></b>	98
<b>5.2. Représentation des surfaces par les fractions rationnelles</b>	99
<b>5.3. Représentations des surfaces dans le cadre de la M.A.N.</b>	101
<b>5.3.1. Régularisation des surfaces composées de surfaces simples</b>	101
<b>5.3.2. Traitements des surfaces arbitraires</b>	104
<b>5.4. Conclusions</b>	106

## **Introduction**

Au cours des chapitres précédents, nous avons présenté des algorithmes qui traitent de problèmes en présence des conditions de contact. Dans ces algorithmes, la géométrie des surfaces de contact mis en jeu, étaient limités à des formes simples. Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à étendre ces algorithmes au traitement des surfaces de formes géométriquement complexes. En premier lieu, nous présentons les différentes méthodes utilisées pour la représentation des surfaces de contact. Dans la deuxième partie, nous montrerons comment, nous pouvons représenter les surfaces de contact dans le cadre de la M.A.N., tout en respectant les spécificités de la méthode à savoir la continuité des fonctions employées et le cadre quadratique du problème global.

### **5.1. Méthodes utilisées pour la représentation des surfaces de contact**

La modélisation des outils, généralement supposés parfaitement rigides, constitue une tâche importante et délicate dans la modélisation numérique de l'emboutissage et les procédés de mise en forme en général. Dans la littérature, il existe trois méthodes pour modéliser numériquement les outils, qui seront bien évidemment représentés par leur surfaces actives. Cette section est consacrée à la présentation de ces méthodes et à l'étude des avantages et des limitations de chaque méthode.

#### **5.1.1. Maillage des surfaces en éléments à géométrie simple**

Pour surmonter la difficulté qui réside dans la complexité des surfaces mises en jeu, ces dernières sont maillées par des éléments finis triangulaires ou rectangulaires. Ici, nous entendons par éléments finis des éléments de surfaces, purement géométriques. Ces éléments sont généralement supposés rigides. Cette méthode présente deux inconvénients:

- La modélisation des surfaces compliquées est délicate et difficile à réaliser.
- La non-régularité des surfaces maillées engendre des problèmes numériques dans la résolution du problème de contact surtout quand il s'agit de surfaces représentant des rayons de congé.

#### **5.1.2. Représentation analytique des surfaces de contact**

Cette méthode est utilisée dans la simulation des cas académiques de mise en forme, où la validation des logiciels de calcul a nécessité le traitement des exemples simples. Ceci permet

d'analyser les résultats expérimentaux. Sachant que cette opération est pratiquement impossible à réaliser dans un cas industriel. Les exemples d'outillage traités sont constitués par une matrice torique, un serre-flan en forme de couronne généralement plane et un poinçon sphérique, ou conique à fond plat dans certains cas. Avec ce type d'outillage, où la première méthode est facile d'utilisation, on a simulé sans difficulté particulière l'emboutissage hémisphérique d'une tôle circulaire (chapitre 3 et chapitre 4). La méthode de représentation analytique des surfaces présente les avantages suivants:

- Les surfaces obtenues sont de formes régulières,
- La méthode nécessite une place mémoire dérisoire. En effet, seul le stockage de quelques paramètres (rayons, centre, ...) est nécessaire, contrairement à la première méthode qui nécessite le stockage des coordonnées de tous les sommets des éléments, ainsi que leurs connectivités.
- L'outillage est très facile à gérer.

La limitation de cette méthode réside dans le fait que les surfaces rencontrées dans les problèmes industriels n'admettent pas toujours des représentations analytiques.

### 5.1.3. Carreaux de Bézier

Faute d'avoir une représentation analytique ( une carte ) exacte ou approchée des outils, les méthodes d'approximations de surfaces se sont imposées. Inspiré du métier de l'emboutisseur qui utilise une méthode très particulière pour gérer les courbes ( qui ne sont que des sections de surfaces), P. Bezier a mis en œuvre dans un premier temps, une méthode d'approximation bien adaptée à ce métier. Cette méthode a été étendue ensuite pour traiter le cas des surfaces [Farrin/90].

#### 5.1.3.a. Approximation polynomiale d'une courbe

Etant donnée une courbe C, nous pouvons approximer les coordonnées d'un point appartenant à cette courbe par:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i t^i \\ y(t) = \sum_{i=1}^N \beta_i t^i \\ z(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i t^i \end{cases} \quad (5.1)$$

Où l'on a introduit un paramètre  $t \in [0,1]$ , où  $t^i$  représente  $t$  à la puissance  $i$ ,  $N$  le degré du polynôme,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ses coefficients vérifiant  $x(0)=\alpha_0, y(0)=\beta_0, z(0)=\gamma_0$  les coefficients de l'origine de la courbe. Les coordonnées de l'extrémité de la courbe vérifient  $x(1)=\alpha_1, y(1)=\beta_1, z(1)=\gamma_1$ .

Si on note  $P(t)$  le vecteur des coordonnées d'un point quelconque de la courbe, nous avons:

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Ce qui peut se mettre sous la forme:

$$P(t) = \sum_{i=0}^N b_i t^i, \quad b_i = [\alpha_i, \beta_i, \gamma_i]$$

Cette équation définit parfaitement la courbe paramétrée par  $(t)$ .

### 5.1.3.b. Approximation polynomiale d'une surface

En partant du principe qu'une surface peut être obtenue en faisant varier les points d'une courbe dans un domaine bien défini. Chaque point de cette courbe va décrire une courbe appartenant à la surface. Si la première, dite courbe génératrice, peut être approximée par un polynôme de degré  $N$ , chaque courbe engendrée par le mouvement de la génératrice, peut être approximée par un polynôme  $M$ . Les deux courbes décrites par le mouvement des points extrêmes de la génératrice sont appelées courbes directrices. Ces courbes sont paramétrées par une variable  $m \in [0,1]$ . Bien évidemment pour  $m=0$  on retrouve la génératrice initiale et pour  $m=1$  on retrouve la génératrice finale. La surface  $S$  est paramétrée par  $t$  et  $m$ . Un point appartenant à la surface est noté  $P(t,m)$ , il s'exprime par:

$$P(t,m) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M B_{ij} t^i m^j \quad (5.2)$$

Une telle représentation répond bien à notre cas car elle s'adapte bien au développement asymptotique. Elle permet à partir d'un ensemble de points donnés de définir une surface quelconque qui approche les surfaces réelles de l'outil. Ces coefficients  $b_i$  et  $B_{ij}$  sont calculés à partir des coordonnées de points choisis sur la surface réelle. Ceci permet d'avoir toutes les informations utiles en chaque point de la surface (le plan tangent et la normale à la surface en un point).

## 5.2. Représentation des surfaces par les fractions rationnelles

Si nous résumons ce que nous avons présenté dans la section précédente, nous pouvons dire que dans la modélisation géométrique pour la représentation des surfaces et des courbes, deux concepts mathématiques non linéaires sont généralement utilisés:

- **La modélisation implicite** qui permet de représenter facilement les quadriques simples ( ligne, cercle, conique, plan, sphère,...) mais ne permet absolument pas la représentation de formes quelconques qui peuvent être utilisées dans la conception ou la fabrication.

- **Les polynômes paramétriques** (splines) représentent bien les courbes quelconques mais sont relativement imprécis pour la représentation des quadriques simples.

Pour éviter les inconvénients des deux approches ci dessus, nous proposons d'utiliser les B-splines rationnelles et non uniformes sous forme canonique pour représenter la géométrie.

Pour générer des profils, trois types de courbe peuvent être utilisés:

- Un segment de droite.
- Un arc de cercle.
- Une spline quelconque.

Mathématiquement, ces géométries peuvent être définies par la formule suivante [Tiller/83]:

$$C(t)=(x(t),y(t),0)=\frac{\sum_{i=1}^n B_{i,k}(t).h_i.P_i}{\sum_{i=1}^n B_{i,k}(t).h_i} \quad (5.5)$$

où  $P_i$  sont les points bidimensionnels appelés points de contrôle,  $t$  est le paramètre (  $a \leq t \leq b$  ) avec  $a$  et  $b$  fixes tel que :  $0 \leq a < b$

$B_{i,k}$  sont les coefficients des polynômes de la variable  $t$  d'ordre  $k$  et de degré  $k-1$ . Ils sont appelés les fonctions de base.

Ces fonctions sont complètement définies par l'ordre  $k$  et le vecteur  $\{t_j\}_{j=1}^{n+k}$  où :

$$a=t_1=t_2=\dots=t_k < t_{k+1} \leq t_{k+1} \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b.$$

S'il existe un nombre positif  $d$  tel que

$$t_{l+1} - t_l = d \quad \text{pour } k \leq l \leq n$$

le vecteur  $\{t_j\}$  est alors uniforme.

La valeur de  $B_{i,k}$  pour  $t$  fixé est calculé en utilisant l'algorithme récursif de Cox-De Boor.

$h_i$  sont les coordonnées homogènes ( $h_i > 0$ ) pour tout  $i$ .

Les surfaces sont représentées mathématiquement par :

$$S(t) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) h_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{i,k}(s) B_{j,l}(t) h_{ij}} \quad (5.6)$$

Avec  $P_{ij}$  un ensemble de  $n \times m$  points de contrôle tridimensionnel,  $h_{ij}$  un ensemble de  $n \times m$  coordonnées homogènes.

Dans le cas des splines quelconques, en plus de la position des points spécifiés, l'utilisateur a quelques latitudes quant au nombre de points et à l'ordre des B-splines devant être utilisés. L'ordre détermine les propriétés de continuité de la courbe et par la même sa forme. Si les splines sont utilisées, leurs dérivés jusqu'à  $k-2$  sont continues. Par exemple si  $k=4$  (B-spline cubique), la tangente et la courbure sont continues, par contre si  $k=3$  (quadratique) seule la tangente est continue. De façon générale plus l'ordre est élevé, plus lourd est le système à résoudre. Aussi l'utilisateur doit toujours utiliser l'ordre minimum pour obtenir le niveau correct pour la continuité.

Le nombre et la position des points spécifiés par l'utilisateur sont fondamentaux pour la détermination de la forme de la courbe. Plus de points donnent un meilleur contrôle de la forme mais conduisent à des volumes de calculs plus importantes.

Dans le cadre de la Méthode Asymptotique Numérique, la représentation des surfaces de contact au moyen de ce processus s'avère très intéressante dans le sens où elle permet de traiter à la fois les surfaces implicites et les surfaces arbitraires. Par ailleurs, ce genre de représentations s'adapte bien aux développements asymptotiques. Aussi nous sommes convaincus, d'après nos expériences avec les séries polynomiales et fractionnelles, que ces derniers sont plus efficaces et plus rapides.

### 5.3. Représentation des surfaces de contact dans le cadre de la M.A.N.

#### Introduction

La modélisation du problème de contact dans le cadre de la méthode asymptotique numérique fait intervenir la géométrie des surfaces rigides (équations 2.17 et 2.18 du chapitre 2). Cette caractéristique n'a pas généré de difficultés particulières dans le cas de géométries simples telles que les lignes, cercles, plans et sphères [Elhage-Hussein *et al.*/98]], [Brunelot/99] et [Abichou *et al.* /01]. Ceci n'est pas le cas lorsqu'il s'agit des corps de géométries complexes où les représentations analytiques ne sont pas toujours évidentes. Il suffit de prendre comme exemple la simulation des procédés de mise en forme dans le domaine de l'automobile. Une représentation de ces outils nécessite donc la mise en jeu de différentes fonctions capables de décrire ces différentes formes.

#### 5.3.1. Régularisation des surfaces de contact.

Le problème qui se pose au niveau de la simulation du problème de contact, en présence des surfaces de formes complexes, est le passage d'un point de contact d'une surface à une autre. Autrement dit au niveau de la connexion ou de la jonction de surfaces différentes. Comme le montre la figure 5.1, un point de contact occupant la position  $i$  se trouve après un certain temps à la position  $i'$  en quittant la surface de contact (figure 5.1.a) ou en pénétrant la surface de contact (figure 5.1.b)

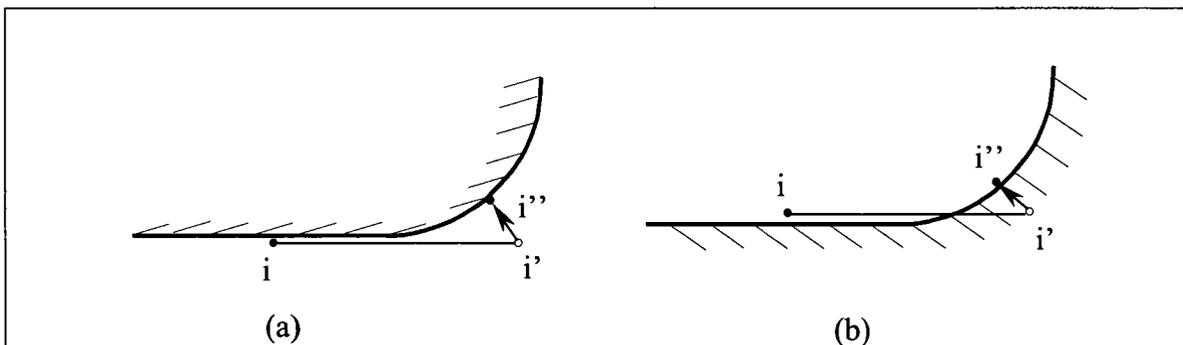


Figure (5.1) Correction de la position d'un point de contact par rapport à la surface rigide:  
(a):cas de décollement, (b) cas d'interpénétration

Dans les méthodes itératives de traitements des problèmes de contact, la phase de correction, permet de rectifier la position de ce point en le projetant sur la surface de contact (position  $i''$  figure 5.1). De toute évidence, cette technique génère un temps de calcul prohibitif, si l'on se met dans le cas d'un problème de mise en forme où le nombre des points de contact est très grand et le changement d'allure des surfaces de contact est très fréquent.

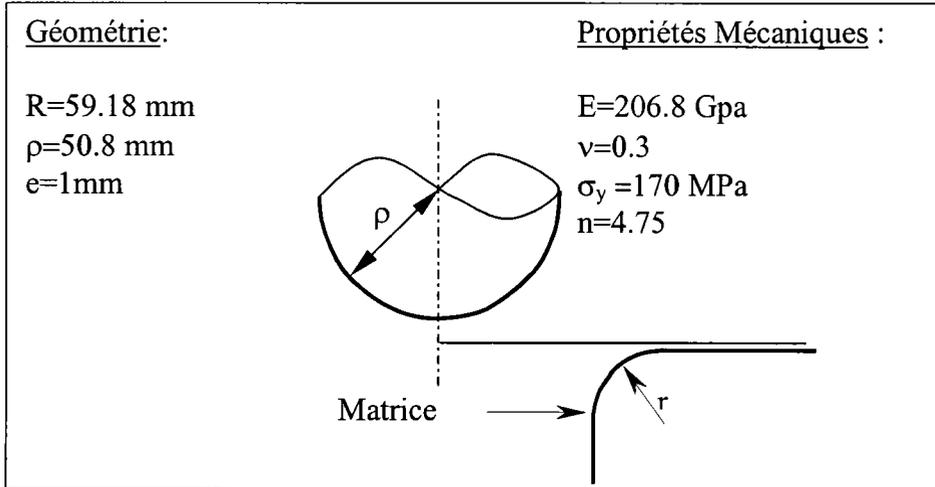
Dans le cadre de la MAN, cette procédure de correction ne peut être adoptée. Et nous ne pouvons pas arrêter le calcul chaque fois qu'un point de contact quitte une surface pour entrer en contact avec une autre, ceci va pénaliser la méthode. Des travaux sont en cours pour l'application de la MAN avec une technique de prédiction correction aux problèmes de contact.

Pour surmonter ces difficultés, sans passer par une procédure de correction, nous proposons de procéder par une technique de régularisation des fonctions qui décrivent les surfaces, dont la géométrie présente des discontinuités.

L'idée de base dans cette technique est de construire les surfaces complexes à partir de surfaces simples. Ainsi une surface de forme compliquée va être construite à partir d'une succession de raccordement de surfaces simples. Nous prenons donc la surface compliquée, nous la subdivisons en surfaces simples; le passage d'une surface à l'autre est assuré par la régularisation. Si nous nous plaçons à une échelle bidimensionnelle, toute surface compliquée sera construite à partir de raccordements ligne - ligne ou ligne - arc de cercle. Il est évident que cette tâche devient plus difficile si nous nous plaçons dans un cadre tridimensionnel.

L'autre motivation d'utiliser cette procédure de régularisation est la limitation des courbes de Bézier pour représenter des surfaces qui présentent des rayons de congé. Dans les procédés de mise en forme, ces rayons de congé ont des dimensions précises et constituent des zones où la structure qui va entrer en contact a un comportement très sensible surtout lorsqu'il s'agit de congés de rayons très faibles.

Aux chapitres 3 et 4, nous avons présenté des algorithmes de simulation de l'emboutissage hémisphérique. Le traitement du problème de contact était limité à une surface rigide qui représente le poinçon. Ici nous nous sommes attachés à introduire une surface rigide qui représente la matrice dans le procédé de l'emboutissage. Cette matrice est constituée d'une partie plane et d'une partie arrondie définie par un rayon de congé  $r$  (figure 5.2).



Figure(5.2): simulation en présence d'une matrice avec un rayon de congé

Pour représenter cette matrice, nous proposons de la construire à partir d'un ensemble de raccords ligne-cercle. Nous définissons, dans un repère lié au raccord, tout point M du raccord par

le vecteur  $\mathbf{M} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ . Géométriquement nous proposons de représenter un raccord ligne-cercle par la

fonction suivante:

$$Z = \sqrt{r^2 - X^2} + \eta \frac{r^2}{X - r} \tag{5.3}$$

où r est le rayon de congé et η un paramètre de régularisation de la géométrie, il est positif et suffisamment petit.

Dans une configuration quelconque, un point est défini par le vecteur  $\mathbf{m} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que:

$$\mathbf{m} = [\mathbf{R}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + (\mathbf{t}) \tag{5.4}$$

Où [R] représente la matrice de rotation du repère lié au raccord par rapport au repère global. Le vecteur (t) représente la translation du repère lié au raccord par rapport au repère global.

La régularisation proposée a été testée pour s'assurer qu'elle permet bien une représentation d'un raccord ligne-cercle. Par contre son implémentation dans nos algorithmes de contact sera réalisée ultérieurement.

### 5.3.2 Traitements des surfaces arbitraires

Pour faciliter la tâche, nous allons nous placer dans un cadre 2D. Nous considérons une surface de contact représentée par une courbe de Bézier d'ordre  $n$ . Certes l'utilisation de la représentation complète de la surface va générer un temps de calcul énorme. Dans le cadre de la MAN, pour minimiser les développements des calculs et le temps de calcul, nous proposons l'idée suivante.

En se basant sur le fait que pour chaque point de contact, on construit une matrice de rigidité de contact  $[K_{tc}]$ , nous n'allons plus définir la surface de contact une fois pour toute au début du calcul mais nous allons définir pour chaque point de contact une surface élémentaire de contact. Cette surface élémentaire est définie, elle aussi, par une courbe de Bézier mais d'ordre  $m$  limité ( $m \ll n$ ). Cette surface élémentaire est un morceau de la surface globale. C'est le morceau le plus proche du point de contact étudié. Après un pas de calcul, la surface élémentaire de contact est mise à jour. Ceci ne change rien en terme de temps de calcul puisque la matrice  $[K_{tc}]$  est évaluée au début de chaque pas.

#### **Exemple:**

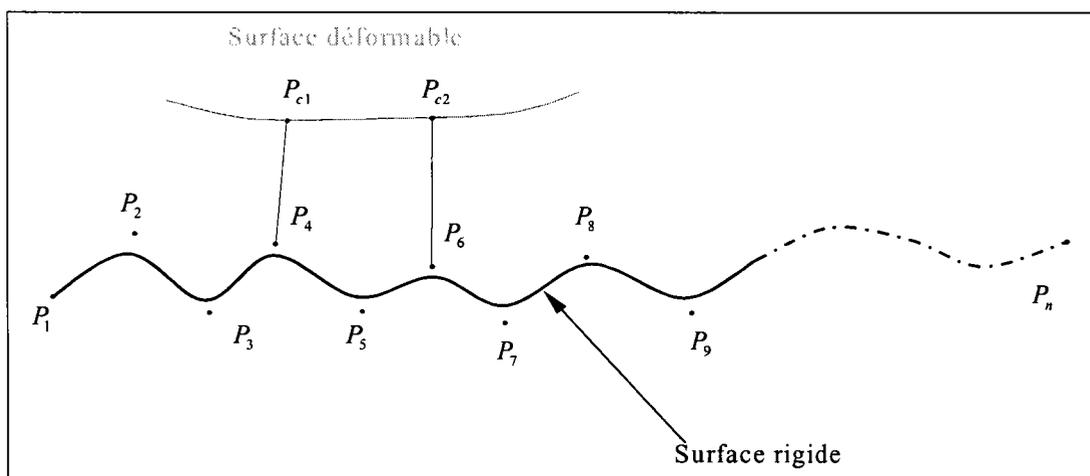


Figure 5.3 représentation de surfaces de contact définies par des surfaces arbitraires d'ordre élevé

Ainsi, si l'on choisit de limiter la surface élémentaire à l'ordre 7 par exemple, le point de contact  $P_{c1}$  sera étudié par rapport à la surface élémentaire construite par le polygone défini par les points  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  et  $P_7$ . Quant au point  $P_{c2}$ , il sera calculé par rapport à la surface construite par le polygone défini par les points de contrôle  $P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$  et  $P_9$ . Le point le plus proche est 'au milieu' de la liste des points, qui définissent la surface élémentaire. Ceci permet d'assurer que cette surface élémentaire représente efficacement la surface de contact, lorsque le point étudié se déplace en amont ou en aval du point le plus proche.

Nous pouvons constater que si on suit le trajet d'un point de contact, nous trouverons que ce trajet est guidé par un ensemble de surfaces élémentaires qui sont en recouvrement entre elles. Ces surfaces en recouvrement représente d'une façon assez précise la surface globale, si on choisit un ordre suffisant pour la surface élémentaire.

### **Algorithme:**

Au début de chaque pas de calcul et pour chaque point de contact:

- On cherche dans la liste des points du polygone qui définit la surface globale, le point le plus proche.
- On construit la surface élémentaire correspondante.
- On construit la matrice  $[K_{ic}]$  calculée par rapport à cette surface

Cette technique que nous venons de présenter peut être appliquée de la même manière pour les représentations par les fractions rationnelles (section 5.2). Ceci va nous permettre de traiter à la fois les surfaces de formes quelconques et les surfaces de formes simples ou implicites.

## 5.4. Conclusions

Les procédés de mise en forme des matériaux font intervenir des outils de géométrie généralement complexe. Au cours des simulations numériques de ces procédés, ces outils sont souvent représentés par leurs surfaces actives. La représentation de ces surfaces constitue une tâche très délicate. Une représentation doit être assez précise pour décrire véritablement la forme des outils et par la suite la conception du produit qu'on désire obtenir à la fin de l'opération de la mise en forme. La représentation géométrique est un facteur déterminant de l'efficacité de l'algorithme de contact.

Dans le cadre de la MAN, la nécessité d'avoir des représentations analytique, donc développables en séries entières nous a poussé à proposer des techniques spécifiques pour le traitement des surfaces de formes complexes. Nous avons proposé, d'abord une méthode de régularisation qui consiste à construire les surfaces compliquées par un ensemble de raccordements de surfaces simples. Dans le cas des problèmes qui utilisent des surfaces arbitraires: surfaces de Bezier (Polynômes) ou surfaces B-Surfaces ( fractions rationnelles), nous avons à traiter ces surfaces, qui ont des ordres élevés, en les décomposant en surfaces d'ordres limités ou moins élevés pour réduire le nombre de variables intermédiaires et par la suite assurer une bonne mise en œuvre de la Méthode Asymptotique. Les théories présentées dans ce chapitre ne sont pas encore implémentées dans les algorithmes de contact présentés dans les chapitres précédents. Ceci constituera l'objet de nos prochains travaux.

## **Conclusions générales et perspectives**

Dans ce travail de thèse, nous avons présenté des algorithmes asymptotiques numériques pour la simulation de l'emboutissage à froid. Une simulation de l'emboutissage en 3D est, donc possible, en utilisant un solveur asymptotique numérique. On pouvait se demander si l'efficacité de la M.A.N. était altérée par le couplage des non linéarités géométriques, matérielles et de celles dues au contact unilatéral : d'après les résultats obtenus dans cette thèse, cette efficacité est préservée. Pour réaliser des calcul de séries entières, il a été nécessaire de régulariser la loi de contact unilatéral: il est clairement établi que cette régularisation n'affecte pas du tout la prédiction des quantités globales ( force d'emboutissage) et assez peu celle des quantités locales comme les contraintes. La méthode asymptotique s'est montrée bien plus performante que le code commercial Abaqus, qui est réputé être un bon code de calcul implicite d'emboutissage. La comparaison des résultats en terme de temps de calcul, avec ceux obtenus par le code Abaqus sont en faveur de la Méthode Asymptotique au sens de la rapidité. Ceci est obtenu grâce à la gestion automatique de la taille de pas et à un traitement spécifique du contact unilatérale. Rappelons aussi que contrairement au méthodes itératives pour lesquelles les branches de solution ne sont obtenues que de manière discrète (des points), les calculs asymptotiques donnent des représentations analytiques continues à chaque pas de calcul.

L'algorithme présenté conserve son efficacité quand la taille des problèmes augmente : ceci est très important dans la simulation des procédés de mise en forme où les problèmes traités sont généralement de grande taille, le nombre de points de contact est très élevé et le raffinement du maillage est souvent nécessaire pour assurer la convergence et obtenir une solution satisfaisante.

Nous avons proposé aussi une nouvelle régularisation de la loi de contact que nous avons qualifié de régularisation adoucie. Avec cette nouvelle modélisation nous avons montré que nous pouvons traiter des problèmes de contact avec une possibilité d'interpénétrations entre les corps en contact. Le nouvel algorithme a été testé sur un problème de simulation de l'emboutissage hémisphérique. Les résultats obtenus montrent bien que nous pouvons réduire l'effet du caractère raide des conditions de contact, tout en assurant une bonne précision de l'algorithme et surtout en réduisant le temps de calcul. Nous avons constaté aussi que cette nouvelle régularisation nous permet, pour un choix spécifique des paramètres, de modéliser à la fois la loi de "contact dur" et la loi de "contact adouci".

Dans le but de simuler le procédé de l'emboutissage et les procédés de mise en forme en général, en tenant compte des différents outils qui peuvent être mis en jeu, à savoir les serre-flans, les matrices, les joncs de retenue, nous avons présenté les différentes méthodes que nous pouvons utiliser dans le cadre de la MAN pour représenter les surfaces de formes compliquées. Ces méthodes prennent en compte les spécificités des Méthodes Asymptotiques, à savoir la continuité des fonctions et des relations employées et le cadre quadratique du problème étudié pour assurer une bonne mise en œuvre des techniques de perturbation.

Dans notre équipe, on vise prochainement le perfectionnement des algorithmes présentés en développant des lois de contact entre des corps déformables et en introduisant des lois de comportement plus réalistes, qui prennent en compte l'aspect des grandes déformations et le phénomène de la décharge élastique. Pour élaborer un logiciel prototype de simulation de l'emboutissage et des procédés de mise en forme en général, nous allons inclure dans les algorithmes obtenus l'aspect 'micro-structure' qui a un rôle important dans les procédés de mise en forme. Nous allons aussi offrir la possibilité de traiter ces problèmes à l'aide des procédures de 'sous-structuration' et des calculs parallèles.

**Références bibliographiques**

- [ABAQUS/95] ABAQUS. *Theory and users manuals (version 5.3)*. Hibbitt, Karlsson and Sorenson, Inc., 1080 Main Street, Pawtucket, RI 02860, USA, 1995.
- [ABAQUS/98-1] ABAQUS. *Theory and users manuals (version 5.8)*. Hibbitt, Karlsson and Sorenson, Inc., 1080 Main Street, Pawtucket, RI 02860, USA, 1998.
- [ABAQUS/98-2] ABAQUS. *Examples problem manuals (version 5.8)*. Hibbitt, Karlsson and Sorenson, Inc., 1080 Main Street, Pawtucket, RI 02860, USA, 1998.
- [Abichou *et al*/99] H. Abichou, J. Brunelot, H. Zahrouni et M. Potier-Ferry, *First steps towards a simulation of material forming processes by an Asymptotic Numerical Method*, ECCM'99, Munich, Allemagne, 1999.
- [Abichou *et al*/01] H. Abichou, H. Zahrouni et M. Potier-Ferry, *First attempt to simulate deep-drawing processes within an Asymptotic Numerical Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, Soumis.
- [Afzali et Bouhelier/94] M. Afzali et C. Bouhelier, *Emboutissage, intérêt de la simulation et produits existants*, Recueil de conférences : Calcul en emboutissage, applications industrielles pour la conception des pièces, Publication CETIM, 1994.
- [Ammar/96] S. Ammar, *Méthode asymptotique numérique perturbée appliquée à la résolution des problèmes non linéaires en grande rotation et grand déplacement*, Thèse de doctorat de l'université de Laval, Québec, 1996.
- [Anderson/82] B. S. Anderson, *A numerical study of the deep drawing process*, Numerical Methods of Industrial Forming Processes, (Eds) Pittman *et al.*, Pineridge press, Swansea, U. K., pp.:109, 1982.
- [Avitzur/83] *Handbook of metal forming processes*, Wiley-Intersciences, 1983.
- [Azrar *et al*/93] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry, *An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36, pp.: 1251-1277, 1993.
- [Baker *et al*/96] G. A. Baker et P. Graves Morris, *Padé Approximants*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, 2<sup>nd</sup> Edition, Cambridge University Press, 59, 1996.
- [Bathe et Chaudhary/85] K. J. Bathe et A. Chaudhary, *A solution method for planar and axisymmetric contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, pp.:65-88,1985.
- [Bathe et Chaudhary/86] K. J. Bathe et A. Chaudhary, *A solution method for static and dynamic analysis for three dimensional contact problem with friction*. Computers and Structures, 6, 24, pp.:855-873, 1986.

- [**Bathe et Mijailovich/88**] K. J. Bathe et S. Mijailovich, *Finite element analysis of frictional contact problems*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:31-45, 1988.
- [**Bathe/96**] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Engewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.
- [**Batoz et al/89**] J. L. Batoz, P. Duroux, Y. Q. Guo et J. M. Detraux, *An efficient algorithm to estimate the large strains in deep-drawing*, NUMIFORM'89, Balkema, pp.:383-388, 1989.
- [**Batoz et Dhatt/90**] J. L. Batoz et G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*, (Eds) Hermes, Paris, 1990.
- [**Batoz et al/95**] J. L. Batoz, Y. Q. Guo et F. Mercier, *The inverse approach including bending effects for the analysis and design of sheet metal forming parts*, NUMIFORM'95, Balkema, pp.:661-667, 1989.
- [**Bellet et al/90**] M. Bellet, E. Massoni et J. L. Chenot, *Calcul des membranes élastoplastiques et élasto-viscoplastiques, Application à l'emboutissage et au formage superplastique*, Physique et Mécanique de la Mise en Forme des Métaux, Moussey et Franciosi, (Eds) Paris, CNRS, 1990.
- [**Ben Dhia/89**] H. Ben Dhia, *Modelisation and resolution by a penalty duality method of unilateral contact problem*. NUMIFORM89, 1989.
- [**Ben Dhia/90**] H. Ben Dhia, *Modelling and numerical approach of contact and dry friction in simulation of sheet metal forming*, WCCM2, 2, pp.:779-782, 1990.
- [**Boivin/90**] M. Boivin, *Prévision du retour élastique lors du pliage des tôles*, Physique et Mécanique de la Mise en Forme des Métaux, Moussy et Franciosi, (Eds) Paris, CNRS, 1990.
- [**Boutyour et al/93**] E. H. Boutyour, B. Cochelin, et M. Potier-Ferry, *Calculs des points de bifurcation par une méthode asymptotique numérique*, Compte rendu du premier Congrès National de Mécanique au Maroc, pp.:371-378, 1993.
- [**Boutyour/94**] E. H. Boutyour, *Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul de bifurcations: Application aux structures élastiques*, Thèse de doctorat de l'université de Metz, 1994.
- [**Braikat/95**] B. Braikat, *Méthode asymptotique numérique et fortes non linéarités*, Thèse de doctorat de la faculté des sciences, Casablanca, 1995.
- [**Brunelot/99**] J. Brunelot, *Simulation de la mis en forme à chaud par la Méthode Asymptotique Numérique*, Thèse de doctorat de l'université de Metz, 1999.
- [**Brunet/88**] M. Brunet, *A finite element method for unilateral contact and friction problem involving finite strain and large displacement*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:209-220, 1988.

- [Brunet/90] M. Brunet, *Modélisation numérique par éléments finis d'un emboutissage profond*, Ecole d'été d'Oléron, dirigé par F. Moussy et P. Franciosi, (Eds ) Paris, CNRS, pp.:516-521,1990.
- [Budiansky/74] B. Budiansky, *Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures*, Advances in Applied Mechanics, 14, pp.: 65, 1974.
- [Bussy et Vauchez/89] P. Bussy et P. Vauchez, *Simulation numérique du processus d'emboutissage*, 9<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Metz 5-8 septembre, pp.: 528-531, 1989.
- [Büchter et Ramm/92] N. Büchter et E. Ramm, *Shell theory versus degeneration- a comparison in large rotation finite element analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 34, pp.: 39-59, 1992.
- [Cadou/97] J. M. Cadou, *Méthode asymptotique numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure*, Thèse de doctorat de l'université de Metz, 1997.
- [Causse-Massoni /87] E. Causse-Massoni, *Modélisation numérique de l'emboutissage par elements finis*, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1987.
- [Chabrand et al /88] P. Chabrand, Y. Pinto et M. Raous, *Numerical modelling of friction for metal forming processes*, EUROMECH, Modelling of metal forming processes, Sophia Antipolis, pp.: 93-99, 1988.
- [Charlier et Cescotto /88] R. Charlier et S. Cescotto, *Modélisation du phénomène de contact unilatéral avec frottement dans un contexte de grandes déformations*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:177-192,1988.
- [Chenais et Rousselet /88] D. Chenais et B. Rousselet, *Conception optimale de structure assistée par ordinateur*, Ecole d'été, Sophia-Antipolis, 1988.
- [Chenot/93] J. L. Chenot, *La modélisation numérique des procédés de mise en forme*, La Revue de Métallurgie - CIT/Science et Génie des Matériaux, pp.:1567-1576, 1993.
- [Chenot/97] J. L. Chenot, *New tends in finite element modeling of metal forming processes*, Computational Plasticity Fundamental and Applications, Barcelone, CIMNE, pp.:209-223, 1997.
- [Chertier/97] O. Chertier, *Contact et frottement entres solides déformables en grandes déformations*, Thèse de doctorat de l'université d'Aix Marseille2, 1997.
- [CNRS/90] Physique et Mécanique de la mise en forme des métaux, Ecole d'été d'Oléron, dirigé par F. Moussy et P. Franciosi, (Eds ) Paris, CNRS, 1990.
- [Cochelin et al/94] B. Cochelin, N. Damil, et M. Potier-Ferry, *Asymptotic numerical methods and padé approximants for nonlinear elastic structures*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 37, pp.:1187-1213, 1994.

- [Cochelin/94] B. Cochelin. *A path-following technique via an asymptotic-numerical method*, Computer and Structures, 53, 5, pp.:1181-1192, 1994.
- [Cochelin et Compain/99] B. Cochelin et C. Compain, *Une Méthode Asymptotique Numérique pour la dynamique non-linéaire transitoire*, 4<sup>ème</sup> Congrès de Calcul des Structures, D. Guédra-Degeorges, P. Ladevèze et M. Raous, 18-21 mai, Giens, pp.: 239-244, 1999.
- [Combescure et al/88] A. Combescure, A. Millard et P. Verpeaux, *Numerical methods in the CASTEM system for the treatment of the contact problems*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:249-261, 1988.
- [Courtois et Ricard/88] P. Courtois, A. Ricard, *Finite element analysis of industrial friction contact problems*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:263-276, 1988.
- [Crisfield/81] M. A. Crisfield, *A fast incremental iteration solution procedure that handles snap-through*, Computers and Structures, 13, pp.:55-62, 1981.
- [Crisfield/83] M. A. Crisfield, *An arc-length method including line search and acceleration*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 19, pp.:1269-1289, 1983.
- [Crisfield/91] M. A. Crisfield, *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley & Sons, 1991.
- [Damil et Potier-Ferry/90] N. Damil et M. Potier-Ferry, *A new method to compute perturbed bifurcation: Application to the buckling of imperfect elastic structures*, International Journal of Engineering Sciences, 26, 9, pp.:943-957, 1990.
- [Dhatt et Touzot/84] G. Dhatt et G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris, 1984.
- [Durville/93] D. Durville, *Modélisation Mécanique et simulation numérique de l'avalement dans le procédé d'emboutissage*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Central de Paris, 1993.
- [Curnier et Alart/88] A. Curnier, P. Alart, *A generalized Newton method for contact problems with friction*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:67-82, 1988.
- [Duroux et Batoz/90] P. Duroux et J. L. Batoz, *Une méthode d'évaluation des déformations dans les tôles minces embouties*, Physique et Mécanique de la Mise en Forme des Métaux, Moussy et Franciosi, (Eds ) Paris , CNRS, 1990.
- [Elhage-Hussein/98] A. Elhage-Hussein, *Modélisation des problèmes de contact par une méthode asymptotique numérique*, Thèse de doctorat de l'université de Metz, 1998.
- [Elhage-Hussein et al/98] A. Elhage-Hussein, N. Damil et M. Potier-Ferry, *An Asymptotic Numerical Algorithm for frictionless contact problem*, Revue Européenne des Eléments Finis, 7, pp.: 119-130,1998.

- [Elhage-Hussein *et al*/00] A. Elhage-Hussein, N. Damil et M. Potier-Ferry, *A Numerical continuation method based on Padé Approximants*, International Journal of Solids and Structures, 37, pp.:6981-7001, 2000.
- [El Mouatassim et Jameux/94] M. El Mouatassim et J. P. Jameux, *La simulation numérique de l'emboutissage chez RENAULT, validation de logiciels explicites*. Recueil de conférences : Calcul en emboutissage, applications industrielles pour la conception des pièces. Publication CETIM, 1994.
- [Gallagher/75] R. H. Gallagher, *Perturbation procedures in nonlinear finite element structural analysis*, Computational Mechanics-Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 461, pp.:75-89, 1975.
- [Farrin/90] G. Farrin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Computer Science and Scientific Computing, second edition, 1990.
- [Fourment *et al*/97] L. Fourment, K. Mocellin et J. L. Chenot, *An implicit contact algorithm for 3D simulation of the forging process*, Computational Plasticity, Barcelone, CIMNE, Fundamentals and Application, pp.:873-877,1997.
- [Franchomme *et al* /89] P. Franchomme, A. Ricard, J. Oudin et Y. Ravalard, *Simulation du contact 2D dans SYSTUS par la méthode du Lagrangien Augmenté*, StruCoMe 89, (Eds) Paris, pp.: 187-198, 1989.
- [Gelin/90] J. C. Gelin, *Analyse de problèmes en mise en forme*, Physique et Mécanique de la Mise en Forme des Métaux, Moussey et Franciosi, (Eds) Paris, CNRS,pp.:359, 1990.
- [Gelin *et al*/95] J . C. Gelin, L. Boulman, et P. Boisse, Quasi-static implicit transient analyses of sheet metal forming using a C0 three node shell element, Journal of Material Processing Technology, 50, 1-40, pp.: 54-69, 1995.
- [Germain/85] Y. Germain, *Modélisation par éléments finis d'écoulement viscoplastique avec frottement - Application au forgeage à chaud*. Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Mines de Paris,1985.
- [Gosh et Hecker/75] A. Gosh et S. S. Hecker, *Failure in thin sheets stretched over rigid punches*, Metallurgical Transactions, 6A, pp.: 1065-1074, 1975.
- [Gotoh et Ishise/78] M. Gotoh et F. Ishise, *A finite element analysis of rigid-plastic deformation of the flange in a deep drawing process based on fourth-degree yield function I*, International Journal of Mechanical Sciences, 20, pp.: 423, 1978.
- [Gotoh/80] M. Gotoh, *A finite element analysis of rigid-plastic deformation of the flange in a deep drawing process based on fourth-degree yield function II*, International Journal of Mechanical Sciences, 22, pp.: 367,1980.
- [Grolade et Cristescu/83] D. Grolade, C. Cristescu, *Résolution du problème de contact entre solides élastiques*. CETIM, Senlis, 1983.

- [Guo et al/92] Y. Q. Guo, J. L. Batoz, M. Elmoutassim et J. M. Detraux, *On the estimation of thickness strain in thin car panels by the inverse approach*, NUMIFORM'92, Chenot, Wood, Zienkiewicz (Eds), Balkema, Rotterdam, 1992.
- [Hadji/95] S. Hadji, *Méthode de résolution pour les fluides incompressibles*. Thèse de doctorat de l' Université de Technologie de Compiègne, 1995.
- [Halphen et Salençon/87] B. Halphen et J. Salençon, *Elasto-plasticité*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987.
- [Hacquin/96] A. Hacquin, *Modélisation thermomécanique tridimensionnelle du laminage*, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996.
- [Hill/50] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford (G. B.), 1950.
- [Hunek/93] I. Hunek, *On a penalty formulation for contact-impact problems*. Computers and Structures, 48, pp.:193-203,1993.
- [Imzatene/01] A. Imzatene, *Méthodes numériques pour les problèmes non linéaires : Application à l'élastoplasticité en transformations finis*, Thèse de doctorat de l'université de Metz, En cours.
- [Imbert/91] J. F. Imbert, *Analyse des structures par éléments finis*, 3<sup>ème</sup> édition, CEPADUES, Toulouse, 1991.
- [Jean et Touzot/88] M. Jean et G. Touzot, *Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:145-160, 1988.
- [Jean/93] M. Jean, *Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement*, Matériaux et Techniques, 1-2-3, pp.: 22-32, 1993.
- [Ju et Taylor/88] J. W. Ju, et R. L Taylor, *A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of non linear frictional contact problems*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.:1-14, 1988.
- [Kallala/93] C. Kallala, *Approche géométrique du contact entre solides par la méthode des éléments finis dans un cadre grandes déformations élastoplastiques*, Thèse de doctorat de L'ENSAM, Paris, 1993.
- [Kikuchi et Oden/88] N. Kikuchi et J. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM Studies In Applied Mathematics, 1988.
- [Klarbring/86] A. Klarbring, *A mathematical programming to three dimensional contact problem with friction*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, pp.: 175-200, 1986.

- [**Kobayashi et Kim/78**] S. Kobayashi et J. Kim, *Deformation analysis of axisymmetric sheet metal forming processes by the rigid plastic finite element method*, Mechanics of Sheet Metal Forming, (Eds) D. P. Koistinen and N. M. Wang, Plenum press, New York, pp.:341, 1978.
- [**Koiter/45**] W. T. Koiter, *On the stability of elastic equilibrium*. Thèse de doctorat de l'Université de Delft, English translation: NASA Techniques Translations, F. 10,883, 1967, 1945.
- [**Lachat et Ravier/99**] J. C Lachat et P. Ravier, *Recherche et développement dans la mise en œuvre des aciers*, 4<sup>ème</sup> Congrès de Calcul des Structures, D. Guédrà-Degeorges, P. Ladevèze et M. Raous, 18-21 mai, Giens, pp.: 41-49, 1999.
- [**Ladevèze/85**] P. Ladevèze, *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 300, 2, pp.:41-44, 1985.
- [**Ladevèze/91**] P. Ladevèze, *New advances in the large time increment method*, New advances in Computational Structural Mechanics, P. Ladevèze - O.C. Zienkiewicz (Eds), Elsevier, pp.:3-21, 1991.
- [**Ladevèze/96**] P. Ladevèze, *Mécanique non linéaire des structures: Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Hermès, Paris, 1996.
- [**Lee et Kobayashi/73**] C. H. Lee et S. Kobayashi, *New solution to rigid-plastic deformation problems using a matrix method*, Journal of Engineering Industries, ASME, 95, pp.: 865, 1973.
- [**Lebon/88**] F. Lebon, *Résolution numérique des problèmes de frottement de Coulomb. Accélération de la convergence par une méthode multi-grilles internes*, Thèse de doctorat de l'université de Provence Aix-Marseille, 1988.
- [**Lemaitre et Chaboche/85**] J. Lemaitre et J. L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 19985
- [**Lochegnies et al/89**] D. Lochegnies, J. Oudin, J. Picard, J.C Jelin, J.M. Rigaut et Y. Ravalard, *Frictional contact modeling in viscoplasticity and large deformation by finite element method*, Fifth International Symposium on Numerical Method in Engineering, Lausanne, 1989.
- [**Nagtaal et Taylor/91**] J. C. Nagtaal et L. M. Taylor, *Comparison of implicit and explicit finite element methods for analysis of sheet forming problems*, VDI BERICHTE, 894, pp.: 705-725, 1991.
- [**Najah et al/98**] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry, *A critical review of asymptotic numerical methods*, Archives of Computational Methods in Engineering, 5, pp.: 31-50,1998.
- [**Noor et Peters/80**] A. K. Noor et J. M. Peters, *Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures*, AIAA Journal, 18, 4, Article No 79-0747R, 1980.

- [Noor/81] A. K. Noor, *Recent advances in reduction methods for nonlinear problems*, Computers and Structures, 13, pp.: 31-44, 1981.
- [Nour et Peters/81] A. K. Noor et J. M. Peters, *Tracing post-limit-point paths with reduced basis technique*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 28, pp.:217-240, 1981.
- [Oden et Pires/83] J. T. Oden et E.B. Pires, *Non local and non-linear friction laws and variational principles of contact problems in elasticity*, Journal of Applied mechanics, 50, pp.:67-75, 1983.
- [Oden et Pires/88] J. T. Oden et E.B. Pires, *Analysis of contact problems with friction under oscillating loads*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 39, pp.:337-362, 1988.
- [Oden/88] J. T. Oden, *New models of friction for non linear elastodynamics problems*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue,1 , 7, pp.:47-54, 1988.
- [Onâte et Saracibar/92] E. Onâte et C. Agelet de Saracibar, *Alternatives for finite element analysis of sheet metal forming processes*, Proceedings of Numerical Method in Industrial Forming Processes, Chenot, Wood, Zienkiewicz (Eds), pp.: 78-88,1992.
- [Papadopoulos et Taylor/93] P. Papadopoulos et R. L. Taylor, *A simple algorithm for threedimensional finite element analysis of contact problems*, Computers and Structures,46, pp.: 1107-1118, 1993.
- [Peeters et Konter/92] F. J. H. Peeters et A.W.A. Konter (MARC Analysis Research Corporation–Europe), *Numerical simulation of industrial metal forming processes*, Numiforme92; Sophia-Antipolis,14-18 September 1992.
- [Picart et al/99] P. Picart, O. Ghouati, N. Boudeau, J. C. Gelin, *Optimisation des paramètres de procédés de mise forme des matériaux avec minimisation de l'endommagement et de la striction localisée*, 4<sup>ème</sup> Congrès de Calcul des Structures, D. Guédra-Degeorges, P. Ladevèze et M. Raous, 18-21 mai, Giens, pp.: 355-360, 1999.
- [Pinto/90] Y. Pinto, *Contact et frottement en grande déformation plastique, Application au serre-flan en emboutissage*, Thèse de doctorat de l'université de Provence Aix-Marseille I, 1990.
- [Potier-Ferry/87] M. Potier-Ferry, *Foundations of elastic post-buckling theory*, Buckling and Post-buckling, Lecture Notes in Physics, 288, pp.:1-82, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Potier-Ferry et al/97] M. Potier-Ferry, N. Damiel, B. Braikat, J. Descamps, J. M.Cadou, H. L. Cao et A. Elhage-Hussein, *Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique*, C. R. Acad. Sci. Paris, 324, Série II b, pp.: 171-177, 1997.
- [Rachik et Roelandt/98] M. Rachik et J. M. Roelandt, *Schéma explicite d'ordre élevé pour les problème non linéaires de calcul de structures*, Revue Européenne des Eléments Finis, 7, 4 pp.: 401-420,1998.

- [**Ramm/81**] E. Ramm, *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Non-linear finite element analysis in structural mechanics*, (Eds) E. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [**Raous et al /88**] M. Raous, P. Chabrand et F. Lebon, *Numerical method for frictional contact problem and applications*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Special issue, 1, 7, pp.: 111-128, 1988.
- [**Riks/84**] E. Riks, *Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 47, pp.:219-259, 1984.
- [**Signorini/30**] Signorini, *Sulle deformazioni termoelastiche finite*, 3<sup>rd</sup> International Congress of Applied Mechanics, 2, pp.:80-89, 1930.
- [**Thompson et Walker/68**] J. M. T. Thompson and A. C. Walker, *The non-linear perturbation analysis of discrete structural systems*, International Journal of Solids and Structures, 4, pp.:757-768, 1968.
- [**Simo et Rifai/90**] J. C. Simo et M. S. Rifai, *A class of mixed assumed strain methods and method of incompatible modes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, pp.:1595-1636, 1990.
- [**Simo et Laursen/92**] J. C. Simo, T. A. Laursen, *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*, Computers and Structures, 1, 1, pp.: 97-116, 1992.
- [**Tang/81**] S. C Tang , *Large elastoplastic strain analysis of flanged hole forming*, Computers and Structures, 13, pp.:363, 1981.
- [**Tiller/83**] W. Tiller, *Rational B-Splines for curve and surface representation*, IEEE, Computer Graphics and Applications, 1983.
- [**Tri/96**] A. TRI, *Méthode asymptotique numérique pour les fluides visqueux incompressibles et la détection de la bifurcation de Hoff*, Thèse de doctorat de l'université de Metz, 1996.
- [**Tri et al/96**] A. Tri, B. Cochelin et M. Potier-Ferry, *Résolution des équations de Navier Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une Méthode Asymptotique Numérique*, Revue Européenne des Eléments Finis, 5, 4, pp.:415-442, 1996.
- [**Vannucci et al/98**] P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry, *An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 41, pp.:1365-1389, 1998.
- [**Walker/69**] A. C. Walker, *A non-linear fea of shallow circular arches*, International Journal of Solids and Structures, 5, pp.:97-102, 1969.
- [**Wang/84**] N. M. Wang, *A rigid-plastic rate-sensitive finite element method for modelling sheet metal forming processes*, Numerical analysis of Forming Processes, (Eds) J. F. T. Pitman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood et J. M. Alexander, John Wiley & Sons Ltd, London, pp.: 117-164, 1984.

- [Wang et Budiansky/78] N. M. Wang et B. Budiansky, *Analysis of sheet metal forming by a finite element method*, Journal of Applied Mechanics, ASME, 45, pp.: 73, 1978.
- [Wagoner et al/88 ] R. H. Wagoner, E. Nakamachi et Y. Germain, *Experience with explicit and implicit finite element programs for sheet forming analysis*, Modelling of Metal Forming Processes, (Eds) J. L. Chenot and E. Onate, Kluwer Academic publishers, pp.: 131, 1988.
- [Wifi/76] A. S. Wifi, *An incremental complete solution of the stretch forming and deep drawing of a circular blank using an hemispherical punch*, International Journal of Mechanical Sciences, 18, pp.: 23, 1976.
- [Wood et al/89] R. D. Wood, J. Bonnet et A. H . S. Wagadipura, *Simulation of the superplastic forming of thin sheet components using the finite element method*, NUMIFORM'89, (Eds) Thompson, Balkema, Rotterdam, 1989.
- [Zahrouni/98] H. Zahrouni, *Méthode Asymptotique Numérique pour les coques en grandes rotations*, Thèse de doctorat de l'université de Metz, 1998.
- [Zahrouni et al/98] H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, H. Elasmr et N. Damil, *Asymptotic numerical method for non-linear constitutive laws*, Revue Européenne des Eléments Finis, 7, pp.: 841-869,1998.
- [Zahrouni et al/99] H. Zahrouni, B. Cochelin et M. Potier-Ferry, *Computing finite rotations of shells by an asymptotic numerical method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 175, pp.: 71-85, 1999.
- [Zhang et al/86] W. C. Zhang, R. D. Wood et O. C. Zienkiewicz, *Superplastic forming analysis using a finite element viscous flow formulation*, Aluminium Technology'86, The institute of metal, London, 4, pp.: 111.4-111.6, 1986.
- [Zienkiewicz et al/78] O. C. Zienkiewicz, P. C. Jean et, E. Onate, *Flow of solids during forming and extrusion, some aspect of numerical solutions*, Solids and Structures, 14, pp.: 15,1978.
- [Zienkiewicz et Taylor/91] O. C. Zienkiewicz et R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill, 4th Edition, London- New-York, 1991.
- [Zhong/93] Z. H. Zhong, *Finite element procedure for contact-impact problems*. Oxford University press, Oxford, 1993.

## **Simulation de l'emboutissage à froid par une Méthode Asymptotique Numérique**

L'emboutissage est un procédé de mise en forme des tôles minces, qui permet de réaliser de nombreux objets ou pièces, en particulier pour l'automobile. La simulation complète de pièces complexes reste difficile à réaliser en raison de la longueur des calculs à effectuer, qui est due à la taille des problèmes à résoudre (nombre de degrés de liberté) et au couplage de multiples non-linéarités (grandes transformations, comportement plastique, contact, frottement). L'objectif de cette thèse est d'alléger ces calculs en utilisant une nouvelle méthode de résolution appelée Méthode Asymptotique Numérique. Cette méthode consiste à transformer les problèmes non-linéaires à résoudre en une succession de problèmes linéaires qui admettent tous le même opérateur tangent. Dans cette thèse on a adopté une formulation de coque bien adaptée au phénomènes de grandes transformation. Au niveau de la loi de comportement, la décharge élastique n'est pas prise en compte, on a adopté donc la théorie de la plasticité en déformation totale. Pour réaliser des calculs de séries entières, il a été nécessaire de régulariser la loi de comportement ainsi que la loi de contact unilatéral. Le couplage des différentes linéarité n'a pas altéré l'efficacité de la MAN. Les résultats obtenus montrent bien la précision des algorithmes et la rapidité de la méthode utilisée en la comparant aux méthodes de résolution classiques.

### **Mots clé**

Emboutissage – plasticité - contact - méthode de perturbation - méthode des éléments finis.

## **Simulation of the cold deep drawing by an Asymptotic Numerical Method**

The deep drawing is a forming process largely used in the industry, especially in the car manufactures. The numerical simulation of this kind of processes needs much CPU time because of the several nonlinearities due to the geometry, contact phenomenon and the constitutive law. The aim of this thesis is to reduce the computing time using an alternative method called "Asymptotic Numerical Method". This latter allows us to search solution branches in the form of power series and transforms the nonlinear problems into a succession of well posed linear problems involving the same tangent operator. In this thesis a shell formulation well adopted to large transformation phenomenon is adopted. As the elastic unload is considered, the theory of plasticity with the total deformation is adopted. To apply a perturbation technique, a regularisation of the constitutive law as well as the contact conditions has been used. Compared to the classical iterative method, the A.N.M. needs always less matrix decompositions and less computing time. The reason of this performance is the ability of the method to decompose only one stiffness matrix by step and to adjust automatically the step size of the local nonlinearity encountered. For the class of problems presented in this thesis, the ANM is efficient, reliable and easy to perform.

### **Key words**

Deep drawing – plasticity – contact - Perturbation techniques - finite element method.