THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

par

Marie–Noëlle DIETSCH

SUR QUELQUES PROBLEMES DE FILTRAGE NON LINEAIRE

Soutenue le 20 décembre 2000 devant le jury composé de :

Pierre DEL MORAL	Chargé de recherche au CNRS *Examinateur*
Marco DOZZI	Professeur à l'Université Henri Poincaré de Nancy *Examinateur*
François DUFOUR	Chargé de recherche au CNRS *Examinateur*
Patrick FLORCHINGER	Professeur à l'Université de Metz *Directeur de thèse*
François LE GLAND	Directeur de recherche à l'INRIA *Rapporteur*

Laboratoire des Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes – CNRS UPRES A-7035
ISGMP Ile du Saulcy 57045 Metz Cedex 1

Je tiens tout d'abord à remercier Patrick Florchinger qui a dirigé cette thèse en ne ménageant ni son temps ni ses encouragements pour l'aboutissement de ce travail. Sa disponibilité, ses conseils et sa compétence ont été très importants durant ces années.

Toute ma reconnaissance à Peter Caines, Peter Imkeller et François Le Gland pour avoir accepté d'être rapporteurs, pour leurs lectures attentives et leurs remarques fructueuses.

Je remercie Pierre Del Moral, Marco Dozzi et François Dufour d'avoir bien voulu examiner cette thèse et faire partie du jury.

Je remercie le Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Metz de m'avoir accueillie durant ces quatre dernières années ainsi que mes collègues qui m'ont aidée à faire mes premiers pas dans la recherche et l'enseignement.

Je remercie enfin ma famille et mes amis qui m'ont soutenue et encouragée tout au long de cette période.

TABLE DES MATIERES

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques problèmes de filtrage non linéaire à valeurs dans des espaces de dimension finie ou de dimension infinie.

Ce travail est divisé en cinq chapitres organisés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principaux résultats de la théorie du filtrage non linéaire. La première partie de ce chapitre concerne la théorie du filtrage non linéaire en dimension finie alors que la seconde partie de ce chapitre concerne la théorie du filtrage non linéaire lorsque le signal est à valeurs dans un espace de Hilbert de dimension infinie et l'observation est de dimension finie.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions un problème de filtrage non linéaire avec bruits dépendants, un signal de dimension deux, une observation unidimensionnelle et un grand rapport signal/bruit lorsqu'une seule composante du signal est observée. Le but de ce travail est de déterminer un filtre approché de dimension finie pour la partie observée et, à l'aide de ce filtre, de construire un filtre approché de dimension infinie pour la partie non observée. De plus, on montre que ce filtre approché satisfait une équation aux dérivées partielles stochastique de type Kushner–Stratonovitch de dimension réduite par rapport à l'équation de Kushner–Stratonovitch associée au problème considéré. Cette étude est l'objet de la publication [26].

Dans la suite de ce travail, nous étudions un problème de filtrage non linéaire avec bruits dépendants lorsque le signal et l'observation sont à valeurs dans des espaces de Hilbert de dimension infinie.

Dans le troisième chapitre, concernant les équations du filtrage, nous montrons que le filtre non normalisé, défini par la méthode de la probabilité de référence, est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique : l'équation de Zakai. De ce résultat, nous déduisons que le filtre est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire : l'équation de Kushner–Stratonovitch. Cette étude est l'objet de la prépublication

[29].

Dans le quatrième chapitre, concernant l'existence d'une densité pour le filtre, nous prouvons que le filtre non normalisé est absolument continu par rapport à une mesure de référence définie sur l'espace des états du signal et nous montrons que cette densité est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique déduite de l'équation de Zakai par dualité. Cette étude est l'objet de la communication [28] à la 39ième "IEEE Conference on Decision and Control" et de la prépublication [30].

Dans le cinquième chapitre, concernant la continuité du filtre par rapport aux trajectoires de l'observation, nous montrons que le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire avec bruits indépendants, à valeurs dans des espaces de Hilbert, est continu sur l'espace des mesures positives sur l'espace des états du signal muni de la convergence étroite. Cette étude est l'objet de la communication [25] à la conférence "Prague Stochastics'98" et de la publication [27].

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 FILTRAGE NON LINEAIRE

1.1.1 INTRODUCTION

Le problème du filtrage est d'estimer "au mieux" les trajectoires d'un signal aléatoire X_t connaissant une observation Y_t (partielle et entachée d'erreur) sur celui-ci. Or, le meilleur estimateur d'une fonctionnelle de X_t qui minimise le risque quadratique étant l'espérance conditionnelle de cette fonctionnelle par rapport à $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t, ce problème revient à calculer la loi conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{Y}_t$.

Ce problème a été résolu pour des systèmes linéaires par R.Kalman et R.Bucy (cf. [52] et [53]). Ce résultat, connu sous le nom de "filtre de Kalman-Bucy", a été utilisé dans de nombreux problèmes d'astronomie, de radio-guidage ainsi que de suivi de trajectoires. Ce filtre est aussi l'algorithme généralement utilisé par les ingénieurs après linéarisation des systèmes étudiés.

Le problème de filtrage pour des systèmes non linéaires est plus délicat à résoudre et la conception d'algorithmes utilisables en pratique bute sur de grandes difficultés.

Les principales questions théoriques qui se posent en filtrage non linéaire sont les suivantes :

- Peut-on établir des équations générales du filtrage non linéaire et obtenir des résultats d'unicité pour celles-ci ?
- Peut-on obtenir de bonnes approximations des solutions des équations du filtrage, faciles à mettre en oeuvre numériquement ?
- Existe–t–il des filtres approchés de dimension finie ?
- Le filtre admet-il une densité régulière ?
- Le filtre possède-t-il des propriétés de continuité par rapport aux trajectoires de l'observation ?

Les techniques du calcul différentiel stochastique développées au cours des années 1960–1970 ont permis à H.Kushner [59] de prouver que le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique : l'équation de Kushner–Stratonovitch. Ce résultat a été obtenu par d'autres techniques par M.Fujisaki, G.Kallianpur et H.Kunita [45] en introduisant la notion de processus d'innovation associé au problème de filtrage considéré. Toutefois, la non linéarité de l'équation de Kushner–Stratonovitch implique de grandes difficultés dans l'étude des propriétés de sa solution. Ce problème a été résolu par M.Zakai [86] qui a prouvé que le filtre non normalisé associé à un problème de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et coefficients bornés est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique : l'équation de Zakai. La méthode introduite par M.Zakai a été étendue au cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et coefficients bornés par M.Davis [20], M.Davis et S.Marcus [21] et E.Pardoux [72]. Les équations du filtrage associées à des problèmes de filtrage non linéaire avec coefficients d'observation non bornés ont été établies par E.Pardoux [73] et J.Baras, G.Blankenship et W.Hopkins [4] dans le cas de systèmes de filtrage avec bruits indépendants et par P.Florchinger [41] pour des systèmes de filtrage avec bruits dépendants et une observation unidimensionnelle.

La forme robuste de l'équation de Zakai associée à un problème de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et coefficients bornés a été introduite par J.Clark [16] et M.Davis [20] afin d'étudier certaines propriétés de continuité du filtre. Par application d'une transformation multiplicative, l'équation de Zakai est réduite en une équation aux dérivées partielles déterministe dont les coefficients dépendent de la trajectoire du processus d'observation. La forme robuste de l'équation de Zakai a été établie par J.M.Bismut et D.Michel [10] et E.Pardoux [72] dans le cas de systèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et coefficients bornés et par W.Hopkins [48] dans le cas de systèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et coefficients non bornés. Le cas de systèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et observation unidimensionnelle à coefficient non borné a été traité par P.Florchinger en suivant une idée introduite par P.Cannarsa et V.Vespri dans [12].

L'analyse numérique des équations du filtrage non linéaire est l'objet de différents travaux menés par de nombreux auteurs. Des schémas de discrétisation en temps de l'équation de Zakai associée à des problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants ont été proposés par H.Kushner [61], H.Korezlioglu et G.Mazziotto [55], G.Di Masi et W.Runggaldier [23], G.Di Masi, M.Pratelli et W.Runggaldier [24], A.Bensoussan, R.Glowinski et A.Rascanu [8], F.Le Gland [62] et K.Ito [49]. Les algorithmes proposés par ces auteurs ont une vitesse de convergence d'ordre δ où δ est le pas de discrétisation en temps. La discrétisation en temps de l'équation de Zakai associée à des problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants a été étudiée par R.Elliott et R.Glowinski [31] et P.Florchinger et F.Le Gland [43]. La vitesse de convergence des schémas de discrétisation exposés dans ces travaux est $\sqrt{\delta}$ où δ est le pas de discrétisation en temps. Un schéma de discrétisation en temps pour l'équation de Kushner–Stratonovitch associée à des problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants est proposé par K.Ito et B.Rozovskii [50] en utilisant une méthode de prédiction/correction. D'autre part, un schéma numérique pour les problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants, utilisant la décomposition en chaos de Wiener due à Cameron–Martin a été étudiée par S.Lototsky, R.Mikulevicius et B.Rozovskii [65]. Cet algorithme permet de séparer les calculs utilisant les observations de ceux utilisant uniquement les paramètres du signal et ainsi de réaliser ces derniers "off–line".

Les équations du filtrage non linéaire étant de dimension infinie, il est important de déterminer, si possible, des filtres de dimension finie ou au moins des filtres approchés de dimension finie. Des filtres de dimension finie ont été proposés par V.Beněs [5], J.Levine [63] et W.Wong [83] pour certaines classes de problèmes de filtrage non linéaire. Toutefois, M.Chaleyat-Maurel et D.Michel [14] ont prouvé que des filtres de dimension finie ne peuvent être construits que pour une classe négligeable de problèmes de filtrage non linéaire. Pour contourner ce problème, certains auteurs ont proposé des filtres approchés de dimension finie, pour différentes classes de problèmes de filtrage non linéaire, qui peuvent être calculés à l'aide d'un nombre fini d'équations. Parmi ces différents auteurs citons W.Fleming, D.Ji et E.Pardoux [35] et W.Fleming, D.Ji, P.Salame et Q.Zhang [36] qui ont étudié des problèmes de filtrage linéaire par morceaux, W.Fleming et E.Pardoux [38] qui ont étudié des problèmes de filtrage monotone par morceaux, R.Katzur, B.Bobrovsky et Z.Schuss [54], J.Picard [76] et [77] et A.Bensoussan [7] qui ont étudié des problèmes de filtrage asymptotiquement observé et I.Yaesh, B.Bobrovsky et Z.Schuss [84] pour le cas asymptotiquement non observé.

Le problème de l'existence d'une densité régulière pour le filtre a été étudié par utilisation de techniques usuelles en théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques ou du calcul des variations stochastique (calcul de Malliavin). En utilisant des techniques de la théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques développées par E.Pardoux [71], N.Krylov et B.Rozovsky [56] et E.Pardoux [72] ont montré, sous une hypothèse d'uniforme ellipticité, l'existence d'une densité régulière pour la solution de l'équation de Zakai associée à un problème de filtrage non linéaire à coefficients bornés. Un résultat analogue a été obtenu, sous l'hypothèse de Hörmander, par M.Chaleyat–Maurel et D.Michel [13] en utilisant des propriétés des opérateurs pseudo–différentiels et par H.Kunita [57] en utilisant des techniques de perturbation. En utilisant le calcul de Malliavin, D.Michel [68] et J.M.Bismut et D.Michel [10] ont montré, sous l'hypothèse de Hörmander, l'existence d'une densité régulière pour le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire à coefficients bornés. Cette méthode a été étendue au cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et coefficients d'observation non bornés par G.Ferreyra [34] et par P.Florchinger [40] lorsque les bruits sont dépendants et l'observation unidimensionnelle à coefficient non borné.

La continuité du filtre par rapport aux trajectoires de l'observation pour la norme de Banach sur $C_0([0,T],\mathbb{R}^d)$ a été introduite par J.Clark [16] pour des problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et coefficients bornés. Ce résultat a été étendu au cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et coefficients bornés par M.Davis [20], M.Davis et M.Spathopoulos [22] et R.Elliott et M.Kohlmann [32]. Le cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et coefficients d'observation non bornés a été étudié par W.Fleming et S.Mitter [37] lorsque les coefficients de l'observation sont polynômiaux puis, par H.Sussmann [81] dans le cas de coefficients d'observation de classe C^2 vérifiant une condition limite au voisinage de l'infini. En combinant les résultats de M.Davis et M.Spathopoulos [22] et H.Sussmann [81], P.Florchinger [39] a prouvé la continuité du filtre par rapport aux trajectoires de l'observation pour un problème de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et une observation unidimensionnelle dont le coefficient d'observation satisfait une généralisation de la condition limite introduite par H.Sussmann dans [81]. Pour conclure, remarquons qu'une notion plus faible de continuité pour le filtre a été étudiée par M.Chaleyat-Maurel et D.Michel [15] dans le cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et coefficients bornés.

1.1.2 LE PROBLEME DE FILTRAGE NON LINEAIRE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé complet et $(W_t)_{t\geq 0}$ et $(V_t)_{t\geq 0}$ deux processus de Wiener standards indépendants, définis sur cet espace et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^d$ repectivement.

Considérons le problème de filtrage non linéaire associé au processus stochastique signal/observation $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t f(X_s)\, dW_s + \int_0^t g(X_s)\, dV_s \\ \\ Y_t = \int_0^t h(X_s)\, ds + V_t \end{cases} \tag{1.1}$$

où

(H1) X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, indépendante du processus de Wiener $(W_t, V_t)_{t\geq 0}$.

(H2) b, f et g sont des applications mesurables, lipschitziennes et bornées de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbb{R}^{n\times d}$ respectivement.

(H3) h est une application mesurable et bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$.

Pour un exposé plus détailé des techniques de filtrage non linéaire lorsque les coefficients du système dépendent non seulement du signal mais aussi du temps et de l'observation nous renvoyons le lecteur au cours de E.Pardoux dans [74].

Le filtre associé au problème de filtrage (1.1) est alors défini de la manière suivante :

Définition 1.1.1 *Pour toute fonction ϕ dans $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on note $\pi_t(\phi)$, le filtre associé au problème de filtrage (1.1) défini par :*

$$\pi_t(\phi) = E\left[\phi(X_t)/\mathcal{Y}_t\right]$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma\{Y_s,\ 0\leq s\leq t\}$ est la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t.

1.1.3 LE FILTRE NON NORMALISE

Dans ce paragraphe, nous définissons le filtre non normalisé associé au problème de filtrage (1.1) par la méthode de la probabilité de référence.

Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique défini pour tout $t \geq 0$ par :

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t h(X_s)\, dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|h(X_s)\|^2\, ds\right). \tag{1.2}$$

Alors, comme la fonction h est bornée, nous avons $E(Z_t^{-1}) = 1$, pour tout $t \geq 0$.

Ainsi, si nous notons $\overline{P}$ la probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\left.\frac{d\overline{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^{-1},$$

nous déduisons du Théorème de Girsanov que le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$ est, sous la probabilité $\overline{P}$, un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ processus de Wiener indépendant du processus $(W_t)_{t\geq 0}$.

Nous pouvons alors définir le filtre non normalisé associé au problème de filtrage (1.1) de la manière suivante :

Définition 1.1.2 *Pour toute fonction ϕ dans $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on note $\rho_t(\phi)$, le filtre non normalisé associé au problème de filtrage (1.1) défini par :*

$$\rho_t(\phi) = \overline{E}\left[\phi(X_t) Z_t / \mathcal{Y}_t\right]$$

où $\overline{E}$ désigne l'espérance sous la probabilité $\overline{P}$.

De plus, le filtre et le filtre non normalisé sont liés par la formule de Kallianpur-Striebel (cf. [51] par exemple) énoncée dans le résultat suivant :

Théorème 1.1.3 *Pour toute fonction ϕ dans $C_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nous avons*

$$\pi_t(\phi) = \frac{\rho_t(\phi)}{\rho_t(1)}. \tag{1.3}$$

1.1.4 LES EQUATIONS DU FILTRAGE

Dans ce paragraphe, nous rappelons les équations du filtrage satisfaites par le filtre et le filtre non normalisé définis aux paragraphes précédents.

Dans ce but, posons $a = ff^* + gg^*$ et définissons, pour toute fonction ϕ de $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, les opérateurs aux dérivées partielles suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0\phi(x) &= \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\
\mathcal{L}_i\phi(x) &= h^i(x)\phi(x) + \sum_{l=1}^{n} g^{li}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_l}(x), \quad i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Alors, le filtre associé au problème de filtrage (1.1) est solution de l'équation de Kushner-Stratonovitch rappelée dans le résultat suivant (cf. Pardoux [74])

Théorème 1.1.4 *Pour toute fonction ϕ dans $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, le filtre $\pi_t(\phi)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$\pi_t(\phi) = \pi_0(\phi) + \int_0^t \pi_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t (\pi_s(\mathcal{L}_i\phi) - \pi_s(h^i)\pi_s(\phi))\, d\nu_s^i \tag{1.4}$$

où $\nu_t = Y_t - \int_0^t \pi_s(h)\, ds$ est un processus de Wiener standard appelé le processus d'innovation associé au problème de filtrage (1.1).

De plus, le filtre non normalisé associé au problème de filtrage (1.1) est solution de l'équation de Zakai rappelée dans le résultat suivant (cf. Pardoux [74])

Théorème 1.1.5 *Pour toute fonction ϕ dans $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, le filtre non normalisé $\rho_t(\phi)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique :*

$$\rho_t(\phi) = \rho_0(\phi) + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_i\phi)\, dY_s^i. \tag{1.5}$$

Lorsque le filtre non normalisé admet une densité de classe C^2 par rapport à la mesure de Lebesgue, l'équation aux dérivées partielles stochastique satisfaite par cette densité se déduit aisément de l'équation de Zakai (1.5) par dualité (cf. Pardoux [74]) :

Proposition 1.1.6 *Si le filtre non normalisé ρ_t admet une densité p_t de classe C^2 par rapport à la mesure de Lebesgue alors, p_t est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$p_t = p_0 + \int_0^t \mathcal{L}_0^* p_s\, ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \mathcal{L}_i^* p_s\, dY_s^i \tag{1.6}$$

Remarque 1.1.7 *Différents schémas de discrétisation en temps de l'équation (1.6) ont été proposé par différents auteurs au cours des dernières années (cf. par exemple [62] et [43] et les références contenues dans ces deux articles).*

Supposons maintenant que $g \equiv 0$ et, pour tout $t \geq 0$, posons :

$$q_t(x) = p_t(x) \exp(- < h(x), Y_t >).$$

Alors, le processus $q_t(x)$ est solution de la forme "robuste" de l'équation de Zakai; c'est à dire de l'équation aux dérivées partielles déterministe

$$q_t(x) = q_0(x) + \int_0^t \left(\mathcal{L}_{Y_s} q_s(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i^2 q_s(x) \right) ds \tag{1.7}$$

où $\mathcal{L}_{Y_t}$ est l'opérateur différentiel du second ordre défini pour toute fonction ϕ de classe C^2 par

$$\mathcal{L}_{Y_t}\phi(x) = \exp(- < h(x), Y_t >)\, \mathcal{L}_0(\exp(< h(x), Y_t >)\phi(x)).$$

Nous allons à présent donner une condition sous laquelle le filtre associé au problème de filtrage (1.1) est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définissons les champs de vecteurs suivants :

$$U_0 = b^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad U_i = f_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \le i \le n.$$

Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre de Lie engendrée par U_1, ...,U_n et $\mathcal{A}$ l'algèbre de Lie engendrée par U_0, U_1, ...,U_n.

Notons $\mathcal{I}(U_1, \ldots, U_n)$ l'idéal engendré par $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{I}(U_1, \ldots, U_n) = \{U_1, \ldots, U_n, [U_i, U_j] \ 0 \le i, j \le n, [U_i, [U_j, U_k]] \ 0 \le i, j, k \le n\}.$$

Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 1.1.8 *Supposons que tous les coefficients du problème de filtrage (1.1) sont de classe* C_b^∞.

Alors si $\mathcal{I}(U_1, \ldots, U_n)(X_0) = \mathbb{R}^n$, *le filtre non normalisé* ρ_t *admet une densité de classe* C^∞ *par rapport à la mesure de Lebesgue.*

1.1.5 CONTINUITE DU FILTRE

Les processus stochastiques π_t et ρ_t définis dans les paragraphes précédent sont des fonctions de l'observation qui ne sont définies que P^Y presque sûrement, où P^Y désigne la loi marginale du processus stochastique Y. Or, en pratique, nous aimerions pouvoir évaluer ces processus en une trajectoire de l'observation et pour cela, il est nécessaire de déterminer une version continue de l'application $y \to \rho_t(\phi, y)$.

Le résultat suivant, concernant les problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et coefficients bornés, a été prouvé par J.Clark [16].

Théorème 1.1.9 *Il existe une fonctionnelle Γ de $C_0([0,T],\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$, continue pour la norme de Banach sur $C_0([0,T],\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\Gamma(y) = \pi_t(\phi, y)$$

presque sûrement. De plus, la fonction Γ est localement lipschitzienne.

Pour conclure ce paragraphe, rappelons le résultat de continuité "au sens de Sussmann" dû à M.Chaleyat–Maurel et D.Michel [15].

Supposons que tous les coefficients du système différentiel stochastique (1.1) sont de classe C_b^∞.

Pour tout u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^d)$, définissons les processus

$$X_t^u = X_0 + \int_0^t b(X_s^u)ds + \int_0^t f(X_s^u)dW_s + \sum_{i=1}^d \int_0^t g(X_s^u)u^i(s)\,ds$$

et

$$Z_t^u = \exp\left(\int_0^t h_i(X_s^u)u^i(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \bar{U}_i h_i(X_s^u)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^d h_i^2(X_s^u)\,ds\right)$$

où $\bar{U}_i$, $1 \leq i \leq d$, est l'opérateur différentiel du premier ordre défini pour toute fonction ϕ de classe C^1 par :

$$\bar{U}_i\phi(x) = g_i^l(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_l}(x).$$

Pour tout $t > 0$, associons à u la mesure ρ_t^u définie, pour toute fonction ϕ dans $C_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ par :

$$\rho_t^u(\phi) = E(\phi(X_t^u)Z_t^u).$$

Alors, le résultat suivant a été montré dans [15].

Théorème 1.1.10 *Pour tout u dans $L^2([0,T],\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction lipschitzienne ϕ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on a :*

$$\lim_{\delta\to 0} P\left(\sup_{0\leq t\leq T}|\rho_t(\phi) - \rho_t^u(\phi)| > \varepsilon / \sup_{0\leq t\leq T}|Y_t - \int_0^t u(s)\,ds| \leq \delta\right) = 0.$$

1.1.6 FILTRES APPROCHES DE DIMENSION FINIE

Dans ce paragraphe, nous rappelons un résultat concernant les filtres approchés associés à des problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et un grand rapport signal/bruit établi par A.Gegout–Petit [46] (voir aussi [47]) que nous généraliserons au Chapitre 2 à des systèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants.

Le problème de filtrage non linéaire considéré dans [46] est de la forme :

$$\begin{cases} X_t^1 = X_0^1 + \displaystyle\int_0^t f_1(X_s^1, X_s^2)\, ds + V_t^1 \\[2ex] X_t^2 = X_0^2 + \displaystyle\int_0^t f_2(X_s^1, X_s^2)\, ds + V_t^2 \\[2ex] Y_t = \displaystyle\int_0^t h(X_s^1)\, ds + \varepsilon\, W_t \end{cases} \tag{1.8}$$

où le signal (X_t^1, X_t^2) est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et l'observation est à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, ce système est partiellement observé dans le sens où la fonction d'observation ne depend que de la composante X_t^1 du signal.

En outre, nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- $(V_t^1)_{t\geq 0}$, $(V_t^2)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ sont des processus de Wiener réels standards indépendants, définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- X_0^1 est déterministe.
- X_0^2 est une variable aléatoire réelle indépendante des processus $(V_t^1)_{t\geq 0}$, $(V_t^2)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$.
- f_1 et f_2 sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C_b^3.
- La fonction g définie pour tout (x^1, x^2) dans $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x^1, x^2) = \int_0^{x^1} f_1(u, x^2) du$$

est de classe C_b^3.

- h est une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C_b^2, telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < h'(x)$.

Alors, le filtre approché $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$M_t = X_0^1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (dY_s - h(M_s)\,ds)$$

satisfait le résultat suivant.

Proposition 1.1.11 *Soit $T > 0$ fixé; sous la probabilité P nous avons, pour tout $t \in [0,T]$,*

(i) $(X_t^1 - M_t) = O(\sqrt{\varepsilon})$.

(ii) $E[X_t^1/\mathcal{Y}_t] - M_t = O(\sqrt{\varepsilon})$.

D'autre part, le processus stochastique $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ défini par :

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t f_1(X_s^1, X_s^2)\,dX_s^1 - \frac{1}{2}\int_0^t f_1(X_s^1, X_s^2)^2\,ds\right)$$

étant tel que $E(\Gamma_t^{-1}) = 1$ pour tout $t \geq 0$, le Théorème de Girsanov implique que le processus stochastique $(X_t^1)_{t\geq 0}$ est, sous la probabilité $\tilde{P}$ définie par la dérivée de Radon–Nikodym

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \Gamma_t^{-1}$$

un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ processus de Wiener indépendant des processus stochastiques $(X_t^2)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$.

Définissons alors les processus stochastiques $(\check{X}_t^2)_{t\geq 0}$ et $(\check{\Gamma}_t)_{t\geq 0}$ par :

$$\check{X}_t^2 = X_0^2 + \int_0^t f_2(M_s, X_s^2(M))\,ds + V_t^2$$

et

$$\check{\Gamma}_t = \exp\left(\int_0^t f_1(M_s, \check{X}_t^2)\, dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_1(M_s, \check{X}_s^2)^2\, ds\right)$$

et posons

$$\mu_t(\varphi) = \frac{\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\, \check{\Gamma}_t/\mathcal{M}_t]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{M}_t]}.$$

Alors, pour toute fonction φ dans $C_b^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\mu_t(\varphi) - E\left[\phi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t\right] = O(\varepsilon)$$

et le filtre approché $\mu_t(\varphi)$ satisfait l'équation de type Kushner–Stratonovitch indépendante du processus stochastique $(X_t^1)_{t\geq 0}$ énoncée dans le résultat suivant.

Proposition 1.1.12 *Pour toute fonction φ dans $C_b^2(\mathbb{R})$, le filtre approché $\mu_t(\varphi)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$\begin{aligned}\mu_t(\varphi) &= E[X_0^2] + \int_0^t \mu_s(\mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi)\, ds \\ &\quad + \int_0^t [\mu_s(f_1(M_s,.)\,\varphi) - \mu_s(\varphi)\,\mu_s(f_1(M_s,.))]\,[dM_s - \mu_s(f_1(M_s,.))\, ds]\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{L}_{(s,y)}\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi''(x) + \varphi'(x)\, f_2(x,y).$$

De plus, le processus stochastique $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ défini pour toute fonction φ de $C_b^2(\mathbb{R})$ par :

$$\sigma_t(\varphi) = \tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\, \check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]$$

satisfait l'équation aux dérivées partielles stochastique, de type Zakai, suivante

$$\sigma_t(\varphi) = \sigma_0(\varphi) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{L}_{(s,M_s)}\,\varphi)\, ds + \int_0^t \sigma_s(f_1(M_s,.)\,\varphi)\, dM_s.$$

1.2 FILTRAGE SUR LES ESPACES DE HILBERT

1.2.1 INTRODUCTION

La théorie du filtrage pour des systèmes en dimension infinie a été développée à partir du début des années 1970 par de nombreux auteurs.

L'étude des problèmes de filtrage associés à des systèmes linéaires en dimension infinie est l'objet d'une vaste littérature. Parmi les nombreux travaux publiés sur ce sujet, citons ceux de R.Curtain et A.Pritchard [17], H.Kushner [60] et A.Bensoussan [6]. L'objet principal de ces travaux est d'établir les équations du filtre de Kalman–Bucy associé à de tels systèmes.

Les équations du filtrage associées à des problèmes de filtrage non linéaire lorsque le signal est à valeurs dans un espace de Hilbert de dimension infinie et l'observation est de dimension finie ont été établies par N.Ahmed [1], N.Ahmed et J.Zabczyk [3] et N.Ahmed, M.Fuhrman et J.Zabczyk [2] pour des systèmes avec bruits dépendants et des coefficients de diffusion constants et par R.Elliott et J.Moore [33] pour des systèmes avec bruits indépendants et des coefficients de diffusion dépendant du signal.

L'équation de Zakai associée à un problème de filtrage non linéaire avec bruits indépendants lorsque le signal et l'observation sont à valeurs dans des espaces de Hilbert de dimension infinie a été établie par P.Florchinger dans [42].

L'existence d'une densité, par rapport à une mesure de référence sur l'espace d'états du signal, pour le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire avec bruits dépendants lorsque le signal est à valeurs dans un espace de Hilbert de dimension infinie et l'observation est de dimension finie a été prouvée par N.Ahmed, M.Fuhrman et J.Zabczyk dans [2].

Le but de ce paragraphe est de rappeler les principaux résultats établis par N.Ahmed, M.Fuhrman et J.Zabczyk dans [2].

1.2.2 PROCESSUS DE WIENER

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler la définition d'un processus de Wiener à valeurs dans un espace de Hilbert.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé complet, H et U deux espaces de Hilbert séparables et Q un opérateur symétrique, positif appartenant à $L(U)$.

Supposons tout d'abord que Tr $Q < +\infty$. Alors il existe un système orthonormal complet (e_k) dans U et une suite bornée de nombres réels positifs tels que

$$Q\, e_k = \lambda_k\, e_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique $(W(t))_{t\geq 0}$, à valeurs dans U, est un Q-processus de Wiener si*

1. $W(0) = 0$.
2. *Le processus $(W(t))_{t\geq 0}$ est à trajectoires continues et à accroissements indépendants.*
3. *Pour tous $t, s \geq 0$, la loi de la variable aléatoire $(W(t) - W(s))$ est gaussienne d'espérance 0 et de covariance $(t-s)\, Q$.*

Si de plus le Q-processus de Wiener $(W(t))_{t\geq 0}$ est tel que

1. $W(t)$ *est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
2. $W(t+h) - W(t)$ *est indépendant de $\mathcal{F}_t$, $\forall h \geq 0$, $\forall t \geq 0$*

nous dirons que $(W(t))_{t\geq 0}$ est un Q-processus de Wiener par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Nous avons alors le résultat suivant

Proposition 1.2.2 *Si $(W(t))_{t\geq 0}$ est un Q-processus de Wiener tel que Tr $Q < +\infty$, alors*

1. $(W(t))_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien sur* U *et*

$$E(W(t)) = 0, \quad Cov(W(t)) = tQ, \quad t \geq 0.$$

2. Pour tout t, $(W(t))_{t\geq 0}$ *peut s'écrire*

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\, \beta_i(t)\, e_i \tag{1.9}$$

où

$$\beta_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} < W(t), e_i >, \quad i = 1, 2, \ldots$$

sont des processus de Wiener réels mutuellement indépendants sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et la série de (1.9) converge dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

La variation quadratique d'un Q-processus de Wiener $(W(t))_{t\geq 0}$ tel que Tr $Q < +\infty$ est donnée par

$$\ll W(t) \gg = tQ, \quad t \geq 0$$

et le théorème de Levy pour les processus de Wiener réels se généralise dans le cas de processus de Wiener à valeurs dans U de la façon suivante.

Théorème 1.2.3 *Soit* $T > 0$; *une martingale* $M \in \mathcal{M}_T^2(H)$ *telle que* $M(0) = 0$ *est un* Q*-processus de Wiener sur* $[0, T]$, *adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et à accroissements* $M(t) - M(s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, *indépendants de* $\mathcal{F}_s$, *pour* $s \in [0, T]$ *si et seulement si* $\ll M(t) \gg = tQ$, $t \in [0, T]$.

Nous allons à présent supposer que Q est un opérateur borné, auto-adjoint et positif sur U. Q n'étant plus un opérateur nucléaire, le Q-processus de Wiener n'est plus necessairement à valeurs dans U; nous allons voir comment étendre la définition d'un processus de Wiener à ce cas.
Afin d'éviter des cas triviaux, nous supposons que l'opérateur Q est strictement positif, i.e que $Qx \neq 0$ pour $x \neq 0$.

Considérons $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}(U)$ muni de la norme induite $\|u\|_0 = \|Q^{-\frac{1}{2}}(u)\|$, $u \in U_0$ et soit U_1 un espace de Hilbert quelconque tel que

(i) U est plongé de façon continue dans U_1

(ii) l'inclusion de U_0 dans U_1 est Hilbert-Schmidt.

Si (g_i) est une base orthonormale complète de U_0 et (β_i) une famille de processus de Wiener standards réels indépendants nous avons le résultat suivant

Proposition 1.2.4 *Le processus défini par*

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \beta_i(t), \quad t \geq 0$$

est un Q_1-processus de Wiener sur U_1 tel que tr $Q_1 < +\infty$.
Par ailleurs, pour $a \in U$, le processus

$$< a, W(t) >= \sum_{i=1}^{\infty} < a, g_i > \beta_i(t)$$

est un processus de Wiener réel et

$$E < a, W(t) >< b, W(s) >= (t \wedge s) < Qa, b >, \quad a, b \in U$$

De plus, nous avons Im $Q_1^{\frac{1}{2}} = U_0$ et

$$\|u\|_0 = \|Q_1^{-\frac{1}{2}} u\|_1.$$

Nous appelons $(W(t))_{t \geq 0}$ également un Q-processus de Wiener.

Lorsque l'opérateur Q est nucléaire, $Q^{\frac{1}{2}}$ est Hilbert-Schmidt et si nous prenons $U_1 = U$ nous retrouvons le concept classique de Q-processus de Wiener.

Si Tr $Q = +\infty$, nous appelons le processus construit un processus de Wiener cylindrique sur U.

Finalement, nous pouvons remarquer que les espaces $Q_1^{\frac{1}{2}}(U_1)$ sont identiques pour toutes les extensions U_1 possibles.

1.2.3 LE PROBLEME ETUDIE

Soit $(W_1(t))_{t\geq 0}$ un processus de Wiener cylindrique, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, à valeurs dans U et $(W_2(t))_{t\geq 0}$ un processus de Wiener standard, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendant du processus $(W_1(t))_{t\geq 0}$.

Soit $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique à valeurs dans $H \times \mathbb{R}^d$, solution du problème de filtrage non linéaire :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t (A X_s + F(X_s))\, ds + \int_0^t R\, dW_1(s) + \int_0^t B\, dW_2(s) \\ \\ Y_t = \displaystyle\int_0^t G(X_s)\, ds + W_2(t) \end{cases} \tag{1.10}$$

où

(H1) X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans H.

(H2) Le semi–groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ engendré par l'opérateur A est tel que :

$$||S(t)|| \leq M e^{-\alpha t}$$

pour M et $\alpha > 0$.

(H3) L'application $F : H \longrightarrow H$ est bornée et lipschitzienne.

(H4) L'opérateur $R : U \longrightarrow H$ est linéaire, positif, auto–adjoint et continu.

(H5) L'opérateur $B : \mathbb{R}^d \longrightarrow H$ est linéaire et continu.

(H6) L'application $G : H \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est continue et bornée.

Remarquons que d'après le Théorème 7.4 de [18], par exemple, l'équation différentielle stochastique définissant le signal $(X_t)_{t\geq 0}$ admet, sous les hypothèses (H1) à (H5), une solution faible unique.

Pour tout espace de Hilbert réel séparable K, notons $UC_b^k(H,K)$, $k \in \mathbb{N}$, l'espace linéaire des applications ϕ de H dans K qui sont, ainsi que leurs dérivées de Fréchet jusqu'à l'ordre k, bornées et uniformément continues. De plus, si $\phi \in UC_b^0(H,\mathbb{R})$ est telle que l'application $x \mapsto \phi(Ax)$ définie sur $\mathcal{D}(A)$ possède un prolongement continu défini sur H alors, ce prolongement sera noté, lui aussi, ϕ_A.

En notant, de manière analogue à [2], l'espace $\mathcal{D}_0$ défini par :

$$\mathcal{D}_0 = \{\phi \in UC_b^0(H,\mathbb{R})/\phi_A \in UC_b^0(H,\mathbb{R}), \phi_{xx} \text{ et } (\phi_A)_{xx} \in UC_b^0(H,\mathcal{L}_1(H,H))\}$$

nous pouvons définir le filtre associé au système (1.10) de la manière suivante.

Définition 1.2.5 *Pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, on note $\Pi_t(\phi)$, le filtre associé au système* (1.10) *défini, pour tout $t \geq 0$, par :*

$$\Pi_t(\phi) = E[\phi(X_t)/\mathcal{Y}_t]$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}$ est la tribu engendrée par les trajectoires du processus d'observation jusqu'au temps t.

En utilisant la méthode de la "probabilité de référence" nous définissons maintenant le filtre non normalisé associé au système (1.10).

Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique défini, pour tout $t \geq 0$, par

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t < G(X_s), dY_s >_V - \frac{1}{2}\int_0^t \|G(X_s)\|_V^2 \, ds\right).$$

Alors, comme l'application G est bornée, nous avons $E(Z_t^{-1}) = 1$, pour tout $t \geq 0$ et, si nous définissons la probabilité $\overline{P}$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ par la dérivée de Radon-Nikodym

$$\left.\frac{d\overline{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^{-1}$$

le théorème de Girsanov (voir [70]) entraîne que le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$ est, sous la probabilité $\overline{P}$, un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ processus de Wiener standard, indépendant de $(W_1(t))_{t\geq 0}$.

Nous pouvons alors définir le filtre non normalisé associé au système (1.10) de la manière suivante.

Définition 1.2.6 *Pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, on note $\rho_t(\phi)$, le filtre non normalisé associé au système (1.10) défini, pour tout $t \geq 0$, par*

$$\rho_t(\phi) = \overline{E}[\phi(X_t)\, Z_t/\mathcal{Y}_t].$$

De plus, le filtre et le filtre non normalisé sont liés, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, par la formule de Kallianpur-Striebel (cf. [51] par exemple) :

$$\Pi_t(\phi) = \frac{\rho_t(\phi)}{\rho_t(1)}.$$

1.2.4 L'EQUATION DE ZAKAI

En utilisant les techniques usuelles du filtrage non linéaire N.Ahmed et J.Zabczyk [3] ont montré que le filtre non normalisé associé au système (1.10) est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique : l'équation de Zakai.

Théorème 1.2.7 *Pour tout fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, le filtre non normalisé $\rho_t(\phi)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$\rho_t(\phi) = \rho_0(\phi) + \int_0^t \rho_s(L_0\phi)\, ds + \int_0^t < \rho_s(L_1\phi), dY_s >_{\mathbb{R}^d}$$

où L_0 et L_1 sont les opérateurs différentiels du deuxième et premier ordre définis par :

$$L_0\phi(X) =< X, A^\star\phi_x(X) >_H + < F(X), \phi_x(X) >_H + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((RR^\star + BB^\star)\phi_{xx}(X)\right)$$

et

$$L_1\phi(X) = G(X)\phi(X) + B^\star\phi_x(X).$$

1.2.5 EXISTENCE D'UNE DENSITE POUR LE FILTRE

Supposons maintenant que les hypothèses suivantes sont elles aussi satisfaites.

(H7) Les opérateurs $Q_t = \int_0^t S(s)\, Q\, S(s)^\star ds$, $t \geq 0$, avec $Q = RR^\star + BB^\star$, sont traçables.

(H8) L'opérateur $Q_\infty = \int_0^{+\infty} e^{tA}\, Q\, e^{tA^\star} dt$ est nucléaire.

Soit μ la mesure gaussienne sur H, d'espérance 0 et d'opérateur de covariance Q_∞; c'est à dire, l'unique mesure invariante sur H associée à l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t AX_s ds + \int_0^t RdW_1(s) + \int_0^t BdW_2(s).$$

Nous supposons de plus, que la mesure μ satisfait l'hypothèse suivante.

(H9) La loi ν de X_0 est absolument continue par rapport à μ et $q_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$ est dans $L^2(H, \mu)$.

Alors, nous avons le résultat suivant concernant l'existence d'une densité pour le filtre non normalisé ρ_t par rapport à la mesure μ.

Théorème 1.2.8 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H9) sont satisfaites et que*

(i) $\mathrm{Im}\, Q_\infty \subset \mathrm{Dom}(A)$ *et il existe* $K > 0$ *tel que pour tout* $x, y \in H$

$$| < x, AQ_\infty y > | \leq K|Q^{\frac{1}{2}}x||Q^{\frac{1}{2}}y|$$

(ii) Il existe $C > 0$ *tel que pour tout* $x \in H$

$$|Q^{-\frac{1}{2}}F(x)| \leq C$$

(iii) $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} Q_{\infty}^{\frac{1}{2}} \cap \operatorname{Im} R$.

Alors, il existe un processus $(\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$-adapté $(q_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $L^2(H,\mu)$ tel que pour tout $t \geq 0$,

$$\rho_t(dx) = q_t(x)\,\mu(dx)$$

et, la densité $(q_t)_{t\geq 0}$ est l'unique solution faible de l'équation aux dérivées partielles stochastique déduite de l'équation de Zakai par dualité.

Chapitre 2

FILTRAGE D'UN SIGNAL PARTIELLEMENT OBSERVE DANS LE CAS D'UN GRAND RAPPORT SIGNAL/BRUIT POUR UN SYSTEME AVEC BRUITS DEPENDANTS

2.1 INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'étudier un problème de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et un grand rapport signal/bruit lorsqu'une seule composante du signal est observée.

En fait, nous considérons un problème de filtrage non linéaire de la forme

$$
\begin{cases}
X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dV_s + \int_0^t b(X_s)dW_s \\
\\
Y_t = \int_0^t h(X_s)ds + \varepsilon W_t
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

où le signal $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, l'observation Y_t est à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la fonction d'observation h n'est pas injective, dans le sens où elle dépend uniquement de la composante X_t^1 du signal.

Notre objectif est de déterminer la loi conditionnelle du processus X_t sachant $\mathcal{Y}_t = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$, la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t. Dans le cas de problèmes de filtrage non linéaire, cette loi conditionnelle satisfait une équation aux dérivées partielles stochastique : l'équation de Zakai [86].

La fonction h ne dépendant que de la composante X_t^1 du signal, la composante X_t^2 du signal n'est pas forcément $\mathcal{Y}_t$ mesurable lorsque $\varepsilon = 0$. Par conséquent, nous sommes donc amené à distinguer les deux cas suivants :

- La variance conditionnelle de toutes les composantes du signal tend vers 0 quand ε tend vers 0 : c'est à dire que le signal est observable.
- Le signal n'est pas entièrement observé quand $\varepsilon = 0$.

Dans le cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants, des critères d'observabilité du signal ont été établis sous différents jeux d'hypothèses par O.Zeitouni et A.Dembo [87], J.Picard [78], I.Yaesh, B.Bobrovsky et Z.Schuss [84] et P.Milheiro [69]. Dans [84], des conditions suffisantes pour l'observabilité du signal sont obtenues à l'aide d'un développement asymptotique formel de la loi conditionnelle de X_t sachant $\mathcal{Y}_t$ pour un signal de dimension deux lorsque seule l'une des composantes du signal est observée. Un cas particulier du problème exposé dans [84] a été étudié par P.Milheiro dans [69] lorsque la composante du signal n'est pas bruitée.

Lorsque le signal $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ n'est pas entièrement observé quand $\varepsilon = 0$ et que les bruits du système de filtrage sont indépendants, Y.Takeuchi et H.Akashi [82] ont montré, en supposant que seule la composante X_t^1 du signal est observée, que $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ tend en probabilité vers $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$, où $\mathcal{X}_t^1 = \sigma(X_s^1, 0 \leq s \leq t)$, quand ε tend vers 0. En utilisant ce résultat ainsi que les propriétés de continuité du filtre par rapport à l'observation prouvés entre autres par M.Davis et M.Spathopoulos [22], H.Sussmann [79], P.Florchinger [39] et M.Chaleyat–Maurel et D.Michel [15], A.Gegout-Petit [46] montre l'existence d'un filtre approché (c'est à dire d'une semi–martingale $\mathcal{Y}_t$-mesurable définie par un nombre fini d'équations) pour la composante X_t^2 du signal lorsque le signal est de dimension deux et l'observation est de dimension un. L'idée développée dans [46] est de remplacer X_t^1 par un filtre approché dans l'équation de Zakai satisfaite par $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ qui est la limite en pro babilité de $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$.

Cette méthode donne un rayon de convergence d'ordre ε entre le filtre et le filtre approché qui est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique de dimension réduite par rapport à l'équation de Zakai et par conséquent plus facile à résoudre numériquement.

Le but de ce chapitre est d'étendre le résultat établi par A.Gegout-Petit [46] à des systèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants.

Ce chapitre est divisé en trois paragraphes organisés de la manière suivante. Dans le premier paragraphe, nous introduisons le problème de filtrage non linéaire étudié dans ce chapitre et nous définissons des filtres approchés pour $E[X_t^1/\mathcal{Y}_t]$ et $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$. Dans le deuxième paragraphe, nous calculons l'ordre de l'approximation de $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ par le filtre approché introduit au paragraphe précédent. Dans le troisième paragraphe, nous montrons que les filtres approchés définis au premier paragraphe sont solutions d'équations aux dérivées partielles stochastique similaires aux équations de Zakai et de Kushner-Stratonovitch.

2.2 DEFINITIONS ET PREMIERS RESULTATS

2.2.1 LE PROBLEME ETUDIE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé complet.. Pour toute semi-martingale $(X_t)_{t\geq 0}$ définie sur cet espace, on notera $\mathcal{X}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$, la tribu engendrée par les trajectoires du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ jusqu'au temps t.

Soit ε un réel positif, $(V_t^1)_{t\geq 0}$, $(V_t^2)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ des processus de Wiener standards indépendants, définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(X_t^1)_{t\geq 0}$, $(X_t^2)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ les semi-martingales à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions du problème de filtrage non linéaire suivant

$$\begin{cases} X_t^1 = X_0^1 + \displaystyle\int_0^t f_1(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t k(X_s^1)\, dV_s^1 \\ X_t^2 = X_0^2 + \displaystyle\int_0^t f_2(X_s^1, X_s^2)\, ds + \int_0^t l(X_s^2)\, dV_s^2 + \int_0^t b(X_s^2)\, dW_s \\ Y_t = \displaystyle\int_0^t h(X_s^1)\, ds + \varepsilon\, W_t \end{cases} \tag{2.2}$$

où

(H1) X_0^1 est déterministe.

(H2) X_0^2 est une variable aléatoire réelle indépendante des processus $(V_t^1)_{t\geq 0}$, $(V_t^2)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$.

(H3) f_1 et f_2 sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C_b^3.

(H4) k, l et b sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C_b^3.

(H5) Il existe des constantes strictement positives k_1 et k_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2$.

(H6) La fonction g définie pour tout (x^1, x^2) dans $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x^1, x^2) = \int_0^{x^1} (k(u))^{-2} f_1(u, x^2) du$$

est de classe C_b^3.

(H7) h est une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C_b^2 telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < h'(x)$.

Remarque 2.2.1 *L'hypothèse (H6) est satisfaite si, par exemple, la fonction f_1 est à support compact par rapport à la variable x^1.*

Pour conclure ce paragraphe, introduisons la notion de comparaison avec les puissances de ε pour un processus stochastique $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adapté dépendant de ε.

Définition 2.2.2 *Un processus stochastique $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adapté $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ et dépendant de ε est d'ordre ε^n, et on note $Z_t = O(\varepsilon^n)$, s'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $r > 0$ tels que, pour tout $t_0 > 0$ et $1 \leq q < \infty$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$,*

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \|Z_t\|_q \leq C\varepsilon^n \quad et \quad \sup_{0 \leq t < \infty} \|Z_t\|_q \leq C\varepsilon^r$$

où $\|.\|_q$ est la norme de $L^q(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

2.2.2 UN FILTRE APPROCHE POUR X_t^1 ET $E[X_t^1/\mathcal{Y}_t]$

L'objet de ce paragraphe est de montrer que le processus stochastique $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par :

$$M_t = X_0^1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t k(M_s)(dY_s - h(M_s)\, ds) \tag{2.3}$$

est un filtre approché pour $E[X_t^1/\mathcal{Y}_t]$ d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$.

Remarque 2.2.3 *De la définition du processus stochastique $(M_t)_{t\geq 0}$, on déduit facilement que pour tout $t \geq 0$, les tribus $\mathcal{M}_t$ et $\mathcal{Y}_t$ sont égales.*

Le processus stochastique $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par (2.3) satisfait le résultat d'approximation suivant.

Proposition 2.2.4 *Soit $T > 0$ fixé; sous la probabilité P nous avons, pour tout $t \in [0,T]$,*

(i) $(X_t^1 - M_t) = O(\sqrt{\varepsilon})$.

(ii) $E[X_t^1/\mathcal{Y}_t] - M_t = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Preuve : Par application de la formule d'Itô, nous avons :

$$\begin{aligned} d(X_t^1 - M_t)^2 &= 2(X_t^1 - M_t)\Big(f_1(X_t^1, X_t^2)\,dt + k(X_t^1)\,dV_t^1 - k(M_t)\,dW_t \\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon}k(M_t)(h(X_t^1) - h(M_t))\,dt + k^2(X_t^1)\,dt + k^2(M_t)\,dt\Big). \end{aligned}$$

Comme $|X_t^1 - M_t|^q = ((X_t^1 - M_t)^2)^{\frac{q}{2}}$, nous obtenons en appliquant une deuxième fois la formule d'Itô

$$\begin{aligned} d|X_t^1 - M_t|^q &= q(X_t^1 - M_t)^{q-1}\Big(f_1(X_t^1, X_t^2)\,dt - \frac{1}{\varepsilon}k(M_t)(h(X_t^1) - h(M_t)\,dt \\ &\quad +k(X_t^1)\,dV_t^1 - k(M_t)\,dW_t\Big) \\ &\quad +\frac{q(q-1)}{2}(X_t^1 - M_t)^{q-2}(k^2(X_t^1) + k^2(M_t))\,dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E[|X_t^1 - M_t|^q] &\leq qE\left[|X_t^1 - M_t|^{q-1}\Big(f_1(X_t^1, X_t^2) - \frac{1}{\varepsilon}k(M_t)(h(X_t^1) - h(M_t))\Big)\right] \\ &\quad +\frac{q(q-1)}{2}E\left[|X_t^1 - M_t|^{q-2}(k^2(X_t^1) + k^2(M_t))\right]. \end{aligned}$$

Comme la fonction h est croissante, nous déduisons de l'égalité ci–dessus et de (H4), (H5) et (H7), l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E[|X_t^1 - M_t|^q] &\leq q\left(E[|X_t^1 - M_t|^{q-1}f_1(X_t^1, X_t^2)] - \frac{\alpha k_1}{\varepsilon}E[|X_t^1 - M_t|^q]\right)\\ &+k_2^2 q(q-1)E[|X_t^1 - M_t|^{q-2}].\end{aligned}$$

De plus, en posant $N_0 = \inf\{N \in \mathbb{N} \ / \ Nk_1 > 2\}$, l'inégalité de Young nous donne

$$|X_t^1 - M_t|^{q-1}|f_1(X_t^1, X_t^2)| \leq \frac{\alpha}{N_0\varepsilon}|X_t^1 - M_t|^q + \left(\frac{N_0\varepsilon}{\alpha}\right)^{q-1}|f_1(X_t^1, X_t^2)|^q$$

et

$$k_2^2(q-1)|X_t^1 - M_t|^{q-2} \leq \frac{\alpha}{N_0\varepsilon}|X_t^1 - M_t|^q + k_2^q(q-1)^{\frac{q}{2}}\left(\frac{N_0\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{q-2}{2}}.$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}E[|X_t^1 - M_t|^q] \leq \frac{q}{\varepsilon}\left(-C_1E[|X_t^1 - M_t|^q] + C_2\varepsilon^{\frac{q}{2}}\right)$$

où C_1 et C_2 sont les constantes positives définies par :

$$C_1 = \alpha k_1 - \frac{2\alpha}{N_0}$$

et

$$C_2 = \left(\frac{N_0}{\alpha}\right)^q ||f_1||^q + k_2^q(q-1)^{\frac{q}{2}}\left(\frac{N_0}{\alpha}\right)^{\frac{q-2}{2}}.$$

De cette dernière majoration nous déduisons :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{qC_1t}{\varepsilon}}E[|X_t^1 - M_t|^q]\right) \leq \frac{C_2}{C_1}\varepsilon^{\frac{q}{\varepsilon}}\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{qC_1t}{\varepsilon}}\right)$$

ce qui implique :

$$E[|X_t^1 - M_t|^q] \leq e^{-\frac{qC_1t}{\varepsilon}}E[|X_0^1 - M_0|^q] + \frac{C_2}{C_1}\varepsilon^{\frac{q}{2}}.$$

Ainsi, l'estimation (i) se déduit de l'inégalité précédente en remarquant que $X_0^1 = M_0$.

De plus, l'espérance conditionnelle étant une contraction dans tous les espaces L^p, l'estimation (ii) est une conséquence immédiate de (i) et de la remarque 2.2.3.

□

2.2.3 UN CHANGEMENT DE PROBABILITE

Le but de ce paragraphe est d'introduire une nouvelle probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ sous laquelle le processus stochastique $(X_t^1)_{t\geq 0}$ est indépendant des processus de Wiener $(V_t^2)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$.

Soit $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique défini par :

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t \left(k(X_s^1)\right)^{-2} f_1(X_s^1, X_s^2)\, dX_s^1 - \frac{1}{2}\int_0^t (k(X_s))^{-2} f_1(X_s^1, X_s^2)^2\, ds\right).$$

Des hypothèses (H3) et (H4) nous déduisons que $E(\Gamma_t^{-1}) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Alors, en notant $\tilde{P}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ définie par la dérivée de Radon-Nikodym

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \Gamma_t^{-1}, \tag{2.4}$$

le théorème de Girsanov implique que le processus stochastique $(\tilde{X}_t^1)_{t\geq 0}$ défini pour tout $t \geq 0$ par :

$$\tilde{X}_t^1 = \int_0^t k^{-1}(X_s^1) dX_s^1$$

est un processus de Wiener sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \tilde{P})$.

De plus, comme $\mathcal{X}_t^1 = \tilde{\mathcal{X}}_t^1$, le processus stochastique $(X_t^1)_{t\geq 0}$ est, sous la probabilité $\tilde{P}$, indépendant des processus $(V_t^2)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$.

Remarque 2.2.5 *De la définition de la probabilité $\tilde{P}$, on déduit qu'une martingale est d'ordre ϵ^n sous la probabilité P si, et seulement si, elle est d'ordre ϵ^n sous la probabilité $\tilde{P}$.*

D'autre part, en appliquant la formule d'Itô à $g(X_t^1, X_t^2)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Gamma_t &= \exp\Big(g(X_t^1, X_t^2) - g(X_0^1, X_0^2) - \int_0^t \mathcal{L}_{(s,X_s^1)} g(X_s^1, X_s^2)\, ds \\
&\quad + \int_0^t k^{-1}(X_s^1) f_1(X_s^1, X_s^2) \frac{\partial k}{\partial x_1}(X_s^1)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_s^1, X_s^2)\, ds \\
&\quad - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2) b(X_s^2)\, dW_s - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2) l(X_s^2)\, dV_s^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \left(k(X_s^1)\right)^{-2} f_1(X_s^1, X_s^2)^2\, ds\Big)
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{L}_{(s,X_s^1)} g(X_s^1, X_s^2) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_s^1, X_s^2) f_2(X_s^1, X_s^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(X_s^1, X_s^2)(l(X_s^2)^2 + b(X_s^2)^2).$$

Ce résultat nous conduit à introduire les notations suivantes :

Définition 2.2.6 *Pour toute trajectoire x de $C([0,T];\mathbb{R})$ posons :*

$$X_t^2(x) = X_0^2 + \int_0^t f_2(x_s, X_s^2(x))\, ds + \int_0^t l(X_s^2(x))\, dV_s^2 + \int_0^t b(X_s^2(x))\, dW_s$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma_t(x) &= \exp\Big(g(x_t, X_t^2(x)) - g(x_0^1, X_0^2) - \int_0^t \mathcal{L}_{(s,x_s)} g(x_s, X_s^2(x))\, ds \\
&\quad + \int_0^t k^{-1}(x_s) f_1(x_s, X_s^2(x)) \frac{\partial k}{\partial x_1}(x_s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_s, X_s^2(x))\, ds \\
&\quad - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x)) b(X_s^2(x))\, dW_s - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x)) l(X_s^2(x))\, dV_s^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^t (k(x_s))^{-2} f_1(x_s, X_s^2(x))^2\, ds\Big).
\end{aligned}$$

De cette définition, nous déduisons le résultat suivant :

Proposition 2.2.7 *Soit $T > 0$ fixé; pour tout $p \in \mathbb{R}$, il existe une constante $c(p,T)$ telle que pour tout $t \in [0,T]$ et pour toute trajectoire x de $C([0,T],\mathbb{R})$,*

$$E[(\Gamma_t(x))^p] \leq c(p,T).$$

Preuve : Ce résultat est immédiat en remarquant que comme toutes les fonctions, ainsi que leurs dérivées, sont bornées nous avons :

$$\begin{aligned}
(\Gamma_t(x))^p &= \exp\Big(p\Big(g(x_t, X_t^2(x)) - g(x_0^1, X_0^2) - \int_0^t \mathcal{L}_{(s,x_s)} g(x_s, X_s^2(x))\,ds\Big) \\
&+ p\int_0^t k^{-1}(x_s) f_1(x_s, X_s^2(x)) \frac{\partial k}{\partial x_1}(x_s)\,ds - \frac{p}{2}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_s, X_s^2(x))\,ds \\
&+ \frac{p^2}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, b(X_s^2(x))\right)^2 ds + \frac{p^2}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, l(X_s^2(x))\right)^2 ds \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t (k(x_s))^{-2} f_1(x_s, X_s^2(x))^2\,ds\Big) \times \\
&\exp\left(-p\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, l(X_s^2(x))\,dV_s^2 - \frac{p^2}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, l(X_s^2(x))\right)^2 ds\right. \\
&\left. + p\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, b(X_s^2(x))\,dW_s - \frac{p^2}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, b(X_s^2(x))\right)^2 ds\right) \\
&\leq c(p,T)\exp\left(-p\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, l(X_s^2(x))\,dV_s^2\right. \\
&- \frac{p^2}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, l(X_s^2(x))\right)^2 ds - p\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, b(X_s^2(x))\,dW_s \\
&\left. - \frac{p^2}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, b(X_s^2(x))\right)^2 ds\right)
\end{aligned}$$

où $c(p,T)$ ne dépend pas de x et le terme restant est une martingale exponentielle d'espérance 1.

□

2.2.4 UN FILTRE APPROCHE POUR $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$

Considérons tout d'abord le cas limite du problème de filtrage (2.2) lorsque $\varepsilon = 0$.

La fonction h étant injective, le processus stochastique $(X_t^1)_{t\geq 0}$ est complètement observé et le problème étudié se ramène par conséquent à un problème de filtrage où le processus $(X_t^1)_{t\geq 0}$ est l'observation et le processus $(X_t^2)_{t\geq 0}$ est le signal. Ainsi, le changement de probabilité effectué en (2.4) est "naturel" car, sous la probabilité $\tilde{P}$, le processus stochastique $(\tilde{X}_t^1)_{t\geq 0}$ est un processus de Wiener et, pour toute fonction φ de $C_b^2(\mathbb{R})$, le processus stochastique $\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{X}_t^1]$ est solution de l'équation de Zakai :

$$\begin{aligned}\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{X}_t^1] &= \tilde{E}[\varphi(X_0^2)] + \int_0^t \tilde{E}[\mathcal{L}_{(s,X_s^1)}\varphi(X_s^2)\,\Gamma_s/\mathcal{X}_s^1]\,ds \\ &\quad + \int_0^t \tilde{E}[\varphi(X_s^2)\,k(X_s^1)^{-2}\,f_1(X_s^1,X_s^2)\,\Gamma_s/\mathcal{X}_s^1]\,dX_s^1.\end{aligned}$$

Maintenant, si nous supposons que $\varepsilon > 0$, les équations de Kushner-Stratonovitch vérifiées par $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ et $E[\varphi(X_t^1)/\mathcal{Y}_t]$ sont couplées. C'est pourquoi nous voulons trouver un filtre approché pour $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ et prouver que celui–ci est solution d'une équation de type Kushner-Stratonovitch indépendante de X^1.

Dans ce but, définissons les processus stochastiques $\left(\check{X}_t^2\right)_{t\geq 0}$ et $\left(\check{\Gamma}_t\right)_{t\geq 0}$ par

$$\check{X}_t^2 = X_t^2(M)$$

et

$$\check{\Gamma}_t = \exp\left(\int_0^t (k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,\check{X}_s^2)\,dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t (k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,\check{X}_s^2)^2\,ds\right).$$

Remarque 2.2.8 *Avec ces définitions, on a, pour tout $t \geq 0$, $\check{\Gamma}_t = \Gamma_t(M)$.*

Montrons maintenant que pour toute fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le processus stochastique $(\mu_t(\varphi))_{t\geq 0}$ défini par :

$$\mu_t(\varphi) = \frac{\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{M}_t]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{M}_t]} \tag{2.5}$$

est une semi-martingale $\mathcal{Y}_t$-mesurable qui approche $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$.

En fait, comme le processus stochastique $(X_t^1)_{t\geq 0}$ est "proche" du processus stochastique $(M_t)_{t\geq 0}$, nous nous attendons à ce que $\mu_t(\varphi)$ soit proche de $\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{X}_t^1]\big(\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{X}_t^1]\big)^{-1} = E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$ et, comme $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ converge en probabilité, lorsque ε tend vers 0, vers $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{X}_t^1]$, nous espérons obtenir un processus stochastique proche de $E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$.

2.3 ORDRE DE $\mu_t(\varphi) - E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat d'approximation suivant :

Théorème 2.3.1 *Soit $T < \infty$ fixé. Si pour toute fonction φ dans $C_b^2(\mathbb{R})$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que :*

$$\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = O(\varepsilon^n)$$

et

$$\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = O(\varepsilon^n)$$

alors, pour tout $t \in [0,T]$, nous avons :

$$\mu_t(\varphi) - E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t] = O(\varepsilon^n).$$

Preuve : En utilisant la formule de Kallianpur–Striebel (cf. [51] par exemple) et la définition du processus stochastique $(\mu_t)_{t\geq 0}$ donnée en (2.5) nous déduisons l'existence d'une constante positive K telle que :

$$\begin{aligned}
E[|E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t] - \mu_t(\varphi)|^p] &= E\left[\left|\frac{\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]}{\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]} - \frac{\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}\right|^p\right] \\
&\leq K\,E\left[\left|\frac{\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}{\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]}\right|^p\right] \\
&\quad + K\,E\left[\left|\frac{\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}\,\frac{1}{\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]}(\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t])\right|^p\right].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne la majoration suivante pour le premier terme de l'inégalité (2.6) :

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left|\frac{\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}{\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]}\right|^p\right] \\
&\quad \leq \sqrt{E\left[\left(\frac{1}{\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]}\right)^{2p}\right]}\sqrt{E\Big[(\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t])^{2p}\Big]} \\
&\quad = O(\varepsilon^{np}).
\end{aligned}
$$

En effet, en appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $x \mapsto (\frac{1}{x})^{1-2p}$, définie sur $\mathbb{R}_+^\star$, nous avons :

$$
E\left[\left(\frac{1}{\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]}\right)^{2p}\right] = \tilde{E}\Big[\Gamma_t(\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t])^{-2p}\Big] \leq \tilde{E}[(\Gamma_t)^{1-2p}] = E[(\Gamma_t)^{-2p}]
$$

où le dernier terme ne dépend pas de ε.

Le second terme de l'inégalité (2.6) se majore de manière analogue après avoir remarqué que l'on a :

$$
\frac{\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]} \leq \|\varphi\|_\infty.
$$

$\square$

Ainsi, pour obtenir une estimation de $\mu_t(\varphi) - E[\varphi(X_t^2)/\mathcal{Y}_t]$ il suffit d'estimer les quantités

$$
\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]
$$

et

$$
\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t].
$$

2.3.1 ORDRE DE $\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]$

En notant $(Z_t^2(x,y))_{t\geq 0}$ le processus stochastique défini pour tout $t \geq 0$ comme la dérivée directionnelle

$$Z_t^2(x,y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{X_t^2(x+\lambda y) - X_t^2(x)}{\lambda}$$

nous montrons le résultat suivant.

Proposition 2.3.2 *Pour tout $t \geq 0$ nous avons :*

$$Z_t^2(x,y) = \phi_t \int_0^t \phi_s^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_s, X_s^2(x))\, y_s\, ds \tag{2.7}$$

où ϕ_t est le processus exponentiel défini par :

$$\begin{aligned}\phi_t &= \exp\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x)) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial l}{\partial x_2}(X_s^2(x))\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial x_2}(X_s^2(x))\right)^2\right) ds\right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \frac{\partial l}{\partial x_2}(X_s^2(x))\, dV_s^2 + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x_2}(X_s^2(x))\, dW_s\right).\end{aligned}$$

Preuve : De la définition du processus stochastique $X_t^2(x)$ nous déduisons que :

$$\begin{aligned}Z_t^2(x,y) &= \lim_{\lambda\to 0}\int_0^t \frac{f_2(x_s+\lambda y_s, X_s^2(x+\lambda y)) - f_2(x_s, X_s^2(x))}{\lambda}\, ds \\ &\quad + \lim_{\lambda\to 0}\int_0^t \frac{l(X_s^2(x+\lambda y)) - l(X_s^2(x))}{\lambda}\, dV_s^2 \\ &\quad + \lim_{\lambda\to 0}\int_0^t \frac{b(X_s^2(x+\lambda y)) - b(X_s^2(x))}{\lambda}\, dW_s\end{aligned} \tag{2.8}$$

D'autre part, en utilisant une technique similaire à celle dévelopée par H.Kunita [58], A.Gegout–Petit [46] a montré la dérivabilité par rapport à λ des intégrales stochastiques figurant dans l'égalité (2.8).

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
Z_t^2(x,y) &= \int_0^t \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_s, X_s^2(x))\, y_s + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_s, X_s^2(x))\, Z_s^2(x,y) \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial l}{\partial x_2}(X_s^2(x))\, Z_s^2(x,y)\, dV_s^2 + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial x_2}(X_s^2(x))\, Z_s^2(x,y)\, dW_s.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $Z_t^2(x,y)$ est solution d'une équation différentielle stochastique affine dont la solution est donnée par (2.7).

□

De plus, des Propositions 2.2.4 et 2.3.2 nous déduisons facilement le résultat suivant :

Corollaire 2.3.3 *Soit $T > 0$ fixé; alors pour tout $t \in [0,T]$ et $\lambda \in [0,1]$ nous avons :*

$$
Z_t^2(M + \lambda(X^1 - M), X^1 - M) = O(\sqrt{\varepsilon}).
$$

De ce résultat, nous déduisons alors l'estimation suivante.

Proposition 2.3.4 *Soit $T > 0$ fixé; alors pour tout $t \in [0,T]$ nous avons :*

$$
\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t] - \tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = O(\sqrt{\varepsilon}).
$$

Preuve : Pour tous x, y dans $C([0,T];\mathbb{R})$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
\Gamma_t(x) - \Gamma_t(y) &= \Gamma_t(y + (x-y)) - \Gamma_t(y) \\
&= \xi_t(1) - \xi_t(0) \\
&= \int_0^1 \xi_t'(\lambda)\, d\lambda
\end{aligned}
$$

où $\xi_t(\lambda)$ est défini pour tout $\lambda \in [0,1]$ par :

$$
\xi_t(\lambda) = \Gamma_t(y + \lambda(x-y)).
$$

Donc, comme d'après [46] les intégrales stochastiques figurant dans la définition de Γ_t sont dérivables par rapport à λ, nous obtenons :

$$\xi_t'(\lambda) = \Gamma_t(y+\lambda(x-y))\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\log(\Gamma_t(y+\lambda(x-y)))$$

où

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\lambda}\log(\Gamma_t(y+\lambda(x-y))) = \\
&\quad k^{-2}(y_t+\lambda(x_t-y_t))f_1(y_t+\lambda(x_t-y_t),X_t^2(y+\lambda(x-y)))(x_t-y_t) \\
&\quad +\frac{\partial g}{\partial x_2}(y_t+\lambda(x_t-y_t),X_t^2(y+\lambda(x-y)))Z_t^2(y+\lambda(x-y),x-y) \\
&\quad +\int_0^t \psi_1(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))(x_s-y_s)\,ds \\
&\quad +\int_0^t \psi_2(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))Z_s^2(y+\lambda(x-y),x-y)\,ds \\
&\quad -\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))\,l(X_s^2(y+\lambda(x-y)))(x_s-y_s)\,dV_s^2 \\
&\quad -\int_0^t \Bigg[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))l(X_s^2(y+\lambda(x-y))) \\
&\qquad\qquad +\frac{\partial g}{\partial x_2}(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))\frac{\partial l}{\partial x_2}(X_s^2(y+\lambda(x-y)))\Bigg] \\
&\qquad\qquad .Z_s^2(y+\lambda(x-y),x-y)\,dV_s^2 \\
&\quad -\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))\,b(X_s^2(y+\lambda(x-y)))(x_s-y_s)\,dW_s \\
&\quad -\int_0^t \Bigg[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))b(X_s^2(y+\lambda(x-y))) \\
&\qquad\qquad +\frac{\partial g}{\partial x_2}(y_s+\lambda(x_s-y_s),X_s^2(y+\lambda(x-y)))\frac{\partial b}{\partial x_2}(X_s^2(y+\lambda(x-y)))\Bigg] \\
&\qquad\qquad .Z_s^2(y+\lambda(x-y),x-y)\,dW_s
\end{aligned}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont les fonctions définies par :

$$\begin{aligned}
\psi_1(x_1,x_2) &= -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)f_2(x_1,x_2)-\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial x_1\partial x_2^2}(x_1,x_2)(l(x_2)^2+b(x_2)^2)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - k(x_1)^{-2} f_1(x_1,x_2)\left(\frac{\partial k}{\partial x_1}(x_1)\right)^2 + f_1(x_1,x_2)k(x_1)^{-1}\frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2}(x_1) \\
& + k(x_1)^{-1}\frac{\partial k}{\partial x_1}(x_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) + f_1(x_1,x_2)^2 k(x_1)^{-3}\frac{\partial k}{\partial x_1}(x_1) \\
& - k(x_1)^{-2} f_1(x_1,x_2)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\psi_2(x_1,x_2) = & -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3}(x_1,x_2)(l(x_2)^2+b(x_2)^2) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) \\
& - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)f_2(x_1,x_2) - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\left(l(x_2)\frac{\partial l}{\partial x_2}(x_2) + b(x_2)\frac{\partial b}{\partial x_2}(x_2)\right) \\
& + k(x_1)^{-1}\frac{\partial k}{\partial x_1}(x_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \\
& - k(x_1)^{-2} f_1(x_1,x_2)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

Ainsi, en remarquant que $\Gamma_t - \check{\Gamma}_t = \Gamma_t(M+(X^1-M)) - \Gamma_t(M)$, nous obtenons l'estimation suivante :

$$
\begin{aligned}
\Gamma_t - \check{\Gamma}_t = & \int_0^1 \Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\log(\Gamma_t(M+\lambda(X^1-M)))\,d\lambda \\
= & \int_0^1 \Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\,k(M_t+\lambda(X_t^1-M_t))^{-2} \\
& \quad .f_1(M_t+\lambda(X_t^1-M_t), X_t^2(M+\lambda(X-M)))\,(X_t^1-M_t)\,d\lambda \\
& + \int_0^1 \Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\,\frac{\partial g}{\partial x_2}(M_t+\lambda(X_t^1-M_t), X_t^2(M+\lambda(X^1-M))) \\
& \quad .Z_t^2(M+\lambda(X^1-M), X^1-M)\,d\lambda \\
& + \int_0^1 \Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\int_0^t \psi_1(M_s+\lambda(X_s^1-M_s), X_s^2(M+\lambda(X^1-M))) \\
& \quad .(X_s^1-M_s)\,ds\,d\lambda \\
& + \int_0^1 \Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\int_0^t \psi_2(M_s+\lambda(X_s^1-M_s), X_s^2(M+\lambda(X^1-M))) \\
& \quad .Z_s^2(M+\lambda(X^1-M), X^1-M)\,ds\,d\lambda \\
& - \int_0^1 \Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(M_s+\lambda(X_s^1-M_s), X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&.l(X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\,(X_s^1-M_s)\,dV_s^2\,d\lambda\\
&-\int_0^1\Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\int_0^t\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(M_s+\lambda(X_s^1-M_s),X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\right.\\
&.l(X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))+\frac{\partial g}{\partial x_2}(M_s+\lambda(X_s^1-M_s),X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\\
&\left.\cdot\frac{\partial l}{\partial x_2}(X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\right]Z_s^2(M+\lambda(X^1-M),X^1-M)\,dV_s^2\,d\lambda\\
&-\int_0^1\Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\int_0^t\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(M_s+\lambda(X_s^1-M_s),X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\\
&.b(X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\,(X_s^1-M_s)\,dW_s\,d\lambda\\
&-\int_0^1\Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\int_0^t\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(M_s+\lambda(X_s^1-M_s),X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\right.\\
&.b(X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))+\frac{\partial g}{\partial x_2}(M_s+\lambda(X_s^1-M_s),X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\\
&\left.\cdot\frac{\partial b}{\partial x_2}(X_s^2(M+\lambda(X^1-M)))\right]Z_s^2(M+\lambda(X^1-M),X^1-M)\,dW_s\,d\lambda
\end{aligned}
$$

où f_1, k, l, b, ψ_1 et ψ_2 ainsi que les dérivées premières de l, b et g et les dérivées secondes de g sont des fonctions bornées de $M_s+\lambda(X_s^1-M_s)$ et $Z_s^2(M+\lambda(X^1-M))$.

Donc, comme X_0^1 est déterministe et, d'après la Proposition 2.2.4 et le Corollaire 2.3.3, les processus stochastiques $X_s^1-M_s$ et $Z_s^2(M+\lambda(X^1-M),X^1-M)$ sont d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$, nous déduisons de l'égalité précédente que

$$
\tilde{E}[\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]-\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]=O(\sqrt{\varepsilon}).
$$

□

2.3.2 ORDRE DE $\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]-\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]$

Proposition 2.3.5 *Soit $T>0$ fixé; alors pour tout $t\in[0,T]$ nous avons :*

$$
\tilde{E}[\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t/\mathcal{Y}_t]-\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]=O(\sqrt{\varepsilon}).
$$

Preuve : Pour tous x, y dans $C([0,T],\mathbb{R})$ nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi(X_t^2(x))\,\Gamma_t(x)-\varphi(X_t^2(y))\,\Gamma_t(y) &= \nu_t(1)-\nu_t(0)\\ &= \int_0^1 \nu_t'(\lambda)\,d\lambda\end{aligned}$$

où $\nu_t(\lambda)$ est défini pour tout $\lambda \in [0,1]$ par :

$$\nu_t(\lambda)=\varphi(X_t^2(y+\lambda(x-y)))\,\Gamma_t(y+\lambda(x-y)).$$

Par conséquent, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\varphi(X_t^2)\,\Gamma_t-\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t &= \int_0^1 \Big[\varphi'(X_t^2(M+\lambda(X^1-M)))\,\Gamma_t(M+\lambda(X^1-M))\\ &\qquad .Z_t^2(M+\lambda(X^1-M),X^1-M)\\ &\qquad +\varphi(X_t^2(M+\lambda(X^1-M)))\,\xi_t'(M+\lambda(X^1-M))\Big]\,d\lambda.\end{aligned}$$

Le résultat de la Proposition 2.3.5 se déduit aisément de cette égalité en remarquant que les processus $\xi_t'(M+\lambda(X^1-M))$ et $Z_t^2(M+\lambda(X^1-M),X^1-M)$ sont d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$.

□

2.4 UNE EQUATION POUR LE FILTRE APPROCHE $\mu_t(\varphi)$

Le but de ce paragraphe est de montrer que le processus stochastique σ_t défini pour toute fonction φ dans $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par :

$$\sigma_t(\varphi)=\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] \tag{2.9}$$

est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique de type Zakai et que le filtre approché $\mu_t(\varphi)$ défini par (2.5) est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique de type Kushner–Stratonovitch indépendante de X^1.

Proposition 2.4.1 *Pour toute fonction φ dans $C_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le processus stochastique $\sigma_t(\varphi)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique :*

$$\begin{aligned}\sigma_t(\varphi) &= \sigma_0(\varphi) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{L}_{(s,M_s)}\,\varphi)\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sigma_s\left((h(M_s)-h(X_s^1))\,\varphi'\,b\right)\,ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma_s\left((k(M_s))^{-1}\,f_1(M_s,.)\,\varphi'\,b\right)\,ds \qquad (2.10)\\ &\quad + \int_0^t \sigma_s\left((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.)\,\varphi + (k(M_s))^{-1}\,\varphi'\,b\right)\,dM_s.\end{aligned}$$

Preuve : Par application de la formule d'Itô, nous avons, pour toute fonction φ dans $C_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\varphi(\check{X}_t^2) &= \varphi(X_0^2) + \int_0^t \left[\varphi'(\check{X}_s^2)\,f_2(M_s,\check{X}_s^2) + \frac{1}{2}\varphi''(\check{X}_s^2)l(\check{X}_s^2)^2 + \frac{1}{2}\varphi''(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)^2\right]\,ds \\ &\quad + \int_0^t \varphi'(\check{X}_s^2)l(\check{X}_s^2)\,dV_s^2 + \int_0^t \varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)\,dW_s \\ &= \varphi(X_0^2) + \int_0^t \mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi(\check{X}_s^2)\,ds + \int_0^t \varphi'(\check{X}_s^2)l(\check{X}_s^2)\,dV_s^2 + \int_0^t \varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)\,dW_s\end{aligned}$$

et

$$\check{\Gamma}_t = 1 + \int_0^t \check{\Gamma}_s\;(k(M_s))^{-2}\;f_1(M_s,\check{X}_s^2)\,dM_s.$$

D'où

$$\begin{aligned}\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t &= \varphi(X_0^2) + \int_0^t \check{\Gamma}_s\mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi(\check{X}_s^2)\,ds + \int_0^t \check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)l(\check{X}_s^2)\,dV_s^2 \\ &\quad + \int_0^t \check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)\,dW_s + \int_0^t \check{\Gamma}_s\varphi(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-2}f_1(M_s,\check{X}_s^2)\,dM_s \\ &\quad + \int_0^t \check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-1}f_1(M_s,\check{X}_s^2)\,ds\end{aligned}$$

Or, comme $W_t = \int_0^t (k(M_s))^{-1}\,dM_s + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h(M_s) - h(X_s^1)\,ds$, nous obtenons :

$$\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t = \varphi(X_0^2) + \int_0^t \check{\Gamma}_s\left[\mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi(\check{X}_s^2) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(h(M_s)-h(X_s^1))\right]\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-1}f_1(M_s,\check{X}_s^2)\,ds \qquad (2.11)\\
&+\int_0^t \check{\Gamma}_s\left[\varphi(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-2}f_1(M_s,\check{X}_s^2)+(k(M_s))^{-1}\,\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)\right]dM_s\\
&+\int_0^t \check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)l(\check{X}_s^2)\,dV_s^2.
\end{aligned}
$$

D'autre part, comme les tribus $\sigma(X_0^2, V_s^2, 0 \le s \le t)$ et $\mathcal{Y}_t \vee \mathcal{X}_t^1$ sont indépendantes, nous avons pour toute fonction F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$,

$$\tilde{E}[F(M_s,\check{X}_s^2)\,\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_t] = \tilde{E}[F(M_s,\check{X}_s^2)\,\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s].$$

Donc, en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{Y}_t$ dans les deux membres de l'égalité (2.11) et en appliquant le théoreme de Fubini pour les intégrales stochastiques (voir E.Pardoux [74] ou R.Lipster–A.Shiryayev [64] par exemple), nous avons :

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\,\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] &= \tilde{E}[\varphi(X_0^2)/\mathcal{Y}_0] + \int_0^t \tilde{E}[\check{\Gamma}_s\mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi(\check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]\,ds\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \tilde{E}[\check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(h(M_s)-h(X_s^1))/\mathcal{Y}_s]\,ds\\
&+\int_0^t \tilde{E}[\check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-1}f_1(M_s,\check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]\,ds\\
&+\int_0^t \tilde{E}\left[\check{\Gamma}_s\left(\varphi(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-2}f_1(M_s,\check{X}_s^2)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+(k(M_s))^{-1}\,\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)\right)/\mathcal{Y}_s\right]\,dM_s.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le processus stochastique $\sigma_t(\varphi)$ défini par (2.9) est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (2.10).

□

Proposition 2.4.2 *Pour toute fonction φ de $C_b^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le processus stochastique $\mu_t(\varphi)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique :*

$$
\begin{aligned}
\mu_t(\varphi) &= E(X_0^2) + \int_0^t \left(\mu_s(\mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi) + \mu_s\left(\frac{1}{\varepsilon}\,(h(M_s)-h(X_s^1))\varphi'\,b\right)\right)ds\\
&+\int_0^t \mu_s\left((k(M_s))^{-1}\,f_1(M_s,.)\varphi'\,b\right)ds
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^t \left[\mu_s\left((k(M_s))^{-2} f_1(M_s,.)\,\varphi + (k(M_s))^{-1}\varphi' b\right) - \mu_s(\varphi)\,\mu_s((k(M_s))^{-2} f_1(M_s,.))\right]$$
$$.\left[dM_s - \mu_s((k(M_s))^{-2} f_1(M_s,.))\,k(M_s)^2\,ds\right].$$

Preuve : Comme pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$\check{\Gamma}_t = 1 + \int_0^t \check{\Gamma}_s (k(M_s))^{-2} f_1(M_s, \check{X}_s^2)\, dM_s,$$

des arguments similaires à ceux développés dans la preuve du résultat précédent nous permettent de montrer que :

$$\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t] = 1 + \int_0^t \tilde{E}[\check{\Gamma}_s (k(M_s))^{-2} f_1(M_s, \check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]\, dM_s$$

et, par application de la formule d'Itô nous avons :

$$\begin{aligned}(\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t])^{-1} &= 1 - \int_0^t \frac{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s (k(M_s))^{-2} f_1(M_s, \check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]}{(\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t])^2}\, dM_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\left(\tilde{E}[\check{\Gamma}_s (k(M_s))^{-2} f_1(M_s, \check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]\right)^2}{(\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t])^3}\, k(M_s)^2\, ds.\end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte du fait que le processus stochastique $\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]$ est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (2.10), nous obtenons par application de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}&\frac{\tilde{E}[\varphi(\check{X}_t^2)\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_t/\mathcal{Y}_t]} = \\ &\quad E(X_0^2) - \int_0^t \tilde{E}[\varphi(\check{X}_s^2)\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s] \frac{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s (k(M_s))^{-2} f_1(M_s, \check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]}{(\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s])^2}\, dM_s \\ &\quad + \int_0^t \tilde{E}[\varphi(\check{X}_s^2)\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s] \frac{(\tilde{E}[\check{\Gamma}_s (k(M_s))^{-2} f_1(M_s, \check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s])^2}{(\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s])^3} k(M_s)^2\, ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\tilde{E}\left[\check{\Gamma}_s \varphi'(\check{X}_s^2) b(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-1} f_1(M_s, \check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s\right]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s]}\, ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\tilde{E}\left[\check{\Gamma}_s \mathcal{L}_{(s,M_s)} \varphi(\check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s\right]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s]}\, ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \frac{\tilde{E}\left[\check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(h(M_s)-h(X_s^1))/\mathcal{Y}_s\right]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s]}\,ds\\
&+\int_0^t \frac{\tilde{E}\left[\check{\Gamma}_s\left(\varphi(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-2}f_1(M_s,\check{X}_s^2)+\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-1}\right)/\mathcal{Y}_s\right]}{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s]}\,dM_s\\
&-\int_0^t \frac{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s(k(M_s))^{-2}f_1(M_s,\check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]}{(\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s])^2}\tilde{E}\left[\check{\Gamma}_s\varphi(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-2}f_1(M_s,\check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s\right]k(M_s)^2\,ds\\
&-\int_0^t \frac{\tilde{E}[\check{\Gamma}_s(k(M_s))^{-2}f_1(M_s,\check{X}_s^2)/\mathcal{Y}_s]}{(\tilde{E}[\check{\Gamma}_s/\mathcal{Y}_s])^2}\tilde{E}\left[\check{\Gamma}_s\varphi'(\check{X}_s^2)b(\check{X}_s^2)(k(M_s))^{-1}/\mathcal{Y}_s\right]k(M_s)^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Cette égalité devient, en tenant compte de la définition du processus stochastique $\mu_t(\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
\mu_t(\varphi) &= E(X_0^2)+\int_0^t \mu_s(\varphi)\,\left(\mu_s((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.))\right)^2\,k(M_s)^2\,ds\\
&+\int_0^t\left(\mu_s(\mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi)+\frac{1}{\varepsilon}\mu_s\left((h(M_s)-h(X_s^1))\varphi'\,b\right)+\mu_s\left((k(M_s))^{-1}\,f_1(M_s,.)\varphi'\,b\right)\right)ds\\
&-\int_0^t\mu_s\left((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.)\right)\mu_s\left((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.)\,\varphi+(k(M_s))^{-1}\varphi'\,b\right)\,k(M_s)^2\,ds\\
&-\int_0^t\mu_s(\varphi)\,\mu_s((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.))\,dM_s+\int_0^t\mu_s((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.)\,\varphi+(k(M_s))^{-1}\varphi'\,b)\,dM_s
\end{aligned}
$$

ce qui implique :

$$
\begin{aligned}
\mu_t(\varphi) &= E(X_0^2)-\int_0^t\mu_s(\varphi)\,\mu_s((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.))\left[dM_s-\mu_s((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.))\,k(M_s)^2ds\right]\\
&+\int_0^t\mu_s\left((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.)\,\varphi+(k(M_s))^{-1}\varphi'\,b\right)\left[dM_s-\mu_s((k(M_s))^{-2}\,f_1(M_s,.))\,k(M_s)^2ds\right]\\
&\quad+\int_0^t\left(\mu_s(\mathcal{L}_{(s,M_s)}\varphi)+\frac{1}{\epsilon}\mu_s\left((h(M_s)-h(X_s^1))\varphi'\,b\right)+\mu_s\left((k(M_s))^{-1}\,f_1(M_s,.)\varphi'\,b\right)\right)ds.
\end{aligned}
$$

□

Chapitre 3

LES EQUATIONS DU FILTRAGE

3.1 INTRODUCTION

Les équations du filtrage associées à des problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants, à valeurs dans des espaces de dimension finie, ont été établies, sous différents jeux d'hypothèses, par M.Zakai [86], M.Davis [20], M.Davis et S.Marcus [21], M.Davis et M.Spathopoulos [22], E.Pardoux [72], W.Hopkins [48] et P.Florchinger [41].

Plus récemment, N.Ahmed et J.Zabczyk [3], N.Ahmed, M.Fuhrman et J.Zabczyk [2] et R.Elliott et J.Moore [33] ont étudié des problèmes de filtrage non linéaire lorsque le signal est à valeurs dans un espace de Hilbert et l'observation est de dimension finie. Un résultat d'unicité pour la solution de l'équation de Zakai a été prouvé par A.Bhatt, G.Kallianpur et R.Karandikar [9] par exemple.

L'équation de Zakai associée à un problème de filtrage non linéaire avec bruits indépendants lorsque le signal et l'observation sont à valeurs dans des espaces de Hilbert de dimension infinie a été établie dans [42] par P.Florchinger.

Le but de ce chapitre est d'étendre ce résultat à des systèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants.

Ce chapitre est divisé en trois parties organisées de la manière suivante. Dans la première partie, nous introduisons le problème de filtrage étudié et nous définissons, par la méthode de la probabilité de référence, le filtre non normalisé associé à ce problème. Dans la seconde partie, nous montrons que le filtre non normalisé est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique : l'équation de Zakai. Dans la troisième partie, nous déduisons de l'équation de Zakai que le filtre est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire : l'équation de Kushner–Stratonovitch.

3.2 LE PROBLEME ETUDIE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé complet, H, U et V trois espaces de Hilbert séparables et $(W_1(t))_{t\geq 0}$ et $(W_2(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Wiener cylindriques indépendants, adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans U et V respectivement.

Soit $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique à valeurs dans $H \times V$ solution du problème de filtrage non linéaire :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t (A\,X_s \,+\, F(X_s))\,ds + \int_0^t R(X_s)\,dW_1(s) + \int_0^t B(X_s)\,dW_2(s) \\ \\ Y_t = \displaystyle\int_0^t G(X_s)\,ds + W_2(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

où

(H1) X_0 est une variable aléatoire, $\mathcal{F}_0$-mesurable, à valeurs dans H.

(H2) Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ engendré par l'opérateur A est tel que

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$$

pour M et $\alpha > 0$.

(H3) L'application $F : H \longrightarrow H$ est lipschitzienne.

(H4) Les applications $R : H \longrightarrow L_2(U, H)$, l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de U dans H, et $B : H \longrightarrow L_2(V, H)$ sont lipschitziennes.

(H5) L'application $G : H \longrightarrow V$ est continue et bornée.

Alors, d'après le Théorème 7.4 de [18], par exemple, l'équation différentielle stochastique définissant le signal $(X_t)_{t\geq 0}$ admet, sous les hypothèses (H1) à (H4), une solution faible unique.

Pour tout espace de Hilbert réel séparable K, notons $UC_b^k(H, K)$, $k \in \mathbb{N}$, l'espace linéaire des applications ϕ de H dans K qui sont, ainsi que leurs dérivées de Fréchet jusqu'à l'ordre k, bornées et uniformément continues. De plus, si $\phi \in UC_b^0(H, \mathbb{R})$ est telle que l'application $x \mapsto \phi(Ax)$ définie sur $\mathcal{D}(A)$ possède un prolongement continu défini sur H alors, ce prolongement sera noté, lui aussi, ϕ_A.

Introduisons maintenant, de manière analogue à [2], l'espace $\mathcal{D}_0$ défini par

$$\mathcal{D}_0 = \{\phi \in UC_b^0(H, \mathbb{R}) / \phi_A \in UC_b^0(H, \mathbb{R}), \phi_{xx} \text{ et } (\phi_A)_{xx} \in UC_b^0(H, \mathcal{L}_1(H, H))\}. \tag{3.2}$$

Alors, en notant $\mathcal{Y}_t = \sigma\{Y_s,\ 0 \leq s \leq t\}$ la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t, nous pouvons définir pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$ le filtre associé au système (3.1) par :

$$\Pi_t(\phi) = E[\phi(X_t)/\mathcal{Y}_t].$$

Maintenant, nous utilisons la méthode de la "probabilité de référence" pour définir le filtre non normalisé associé au système (3.1).

Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique défini pour tout $t \geq 0$ par :

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t < G(X_s),\, dY_s >_V - \frac{1}{2}\int_0^t \|G(X_s)\|_V^2\, ds\right).$$

Alors, comme G est bornée, nous avons $E(Z_t^{-1}) = 1$, pour tout $t \geq 0$, et si on note $\overline{P}$ la probabilité définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ par la dérivée de Radon-Nikodym :

$$\left.\frac{d\overline{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^{-1},$$

le théorème de Girsanov prouvé par J.Y.Ouvrard [70] entraîne que le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$ est, sous la probabilité $\overline{P}$, un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ processus de Wiener indépendant de $(W_1(t))_{t\geq 0}$.

Nous définissons alors, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, le filtre non normalisé associé au système (3.1) par :

$$\rho_t(\phi) = \overline{E}[\phi(X_t)\, Z_t/\mathcal{Y}_t]. \tag{3.3}$$

De plus, le filtre et le filtre non normalisé sont liés, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, par la formule de Kallianpur-Striebel (voir [51] par exemple) :

$$\Pi_t(\phi) = \frac{\rho_t(\phi)}{\rho_t(1)}.$$

3.3 L'EQUATION DE ZAKAI

En suivant les différentes étapes conduisant à établir l'équation de Zakai associée à des problèmes de filtrage non linéaire en dimension finie (cf. E.Pardoux [74] par exemple), nous prouvons le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 *Pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, le filtre non normalisé ρ_t est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique :*

$$\rho_t(\phi) = \rho_0(\phi) + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \int_0^t < \rho_s(\mathcal{L}_1\phi), dY_s >_V \tag{3.4}$$

où $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ sont les opérateurs différentiels du deuxième et premier ordre définis pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}_0$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0\phi(X) &= < X, A^\star\phi_x(X) >_H + < F(X), \phi_x(X) >_H \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left((R(X)R(X)^\star + B(X)B(X)^\star)\,\phi_{xx}(X)\right)\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}_1\phi(X) = G(X)\phi(X) + B(X)^\star\phi_x(X).$$

Remarque 3.3.2 *Les processus stochastiques $(G(X_t)\phi(X_t))_{t\geq 0}$ et $(B(X_t)^\star\phi_x(X_t))_{t\geq 0}$ étant à valeurs dans l'espace de Hilbert V, nous avons pour tout $t \geq 0$:*

$$G(X_t)\phi(X_t) + B(X_t)^\star\phi_x(X_t) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left((G(X_t)\phi(X_t))_i + (B(X_t)^\star\phi_x(X_t))_i\right) e_i$$

où $(e_i)_{i\geq 0}$ est une base de V et $(G(X_t)\phi(X_t))_i$ et $(B(X_t)^\star\phi_x(X_t))_i$ sont les composantes réelles respectives dans cette base de $G(X_t)\phi(X_t)$ et $B(X_t)^\star\phi_x(X_t)$.

Ainsi, $\rho_t(\mathcal{L}_1\phi)$ désigne le processus stochastique à valeurs dans V défini par :

$$\rho_t(\mathcal{L}_1\phi) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\rho_t((G(X_t)\phi(X_t))_i) + \rho_t((B(X_t)^\star\phi_x(X_t))_i)\right) e_i.$$

Preuve : Par application de la formule d'Itô, nous obtenons :

$$d\phi(X_t) = \mathcal{L}_0\phi(X_t)dt + < \phi_x(X_t), R(X_t)dW_1(t) >_H + < \phi_x(X_t), B(X_t)dW_2(t) >_H$$

et

$$dZ_t = Z_t < G(X_t), dY_t >_V .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}d(\phi(X_t)Z_t) &= \mathcal{L}_0\phi(X_t)Z_t dt + Z_t < \phi_x(X_t), R(X_t)dW_1(t) >_H \\ &\quad + Z_t < \phi_x(X_t), B(X_t)dW_2(t) >_H + \phi(X_t)Z_t < G(X_t), dY_t >_V \\ &\quad + d \ll \phi(X), Z \gg_t\end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\ll \phi(X), Z \gg_t$ désigne la variation quadratique des processus stochastiques $(\phi(X_t))_{t\geq 0}$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$.

D'autre part, si Q est l'opérateur de covariance du processus de Wiener $(W_2(t))_{t\geq 0}$ et $V_0 = Q^{1/2}(V)$, il existe une base orthonormale complète $(g_i)_{1\leq i\leq +\infty}$ dans V_0 et une famille de processus de Wiener réels standards mutuellement indépendants $(\beta_i)_{1\leq i\leq +\infty}$ tels que, pour tout $t \geq 0$,

$$W_2(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i\beta_i(t).$$

Ainsi, on a :

$$d\phi(X_t) = \mathcal{L}_0\phi(X_t)dt + < \phi_x(X_t), R(X_t)dW_1(t) >_H + \sum_{i=1}^{+\infty} < \phi_x(X_t), B(X_t)g_i >_H d\beta_i(t)$$

et

$$dZ_t = Z_t < G(X_t), G(X_t) >_V dt + Z_t \sum_{i=1}^{+\infty} < G(X_t), g_i >_V d\beta_i(t).$$

Donc, comme les processus de Wiener $(W_1(t))_{t\geq 0}$ et $(W_2(t))_{t\geq 0}$ sont indépendants, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d \ll \phi(X), Z \gg_t &= \sum_{i=1}^{+\infty} Z_t < G(X_t), g_i >_V < \phi_x(X_t), B(X_t)g_i >_H dt \\ &= Z_t < \phi_x(X_t), B(X_t) \sum_{i=1}^{+\infty} < G(X_t), g_i >_V g_i >_H dt \\ &= Z_t < \phi_x(X_t), B(X_t)G(X_t) >_H dt \end{aligned}$$

et, par conséquent, (3.5) devient :

$$\begin{aligned} d(\phi(X_t)Z_t) &= \mathcal{L}_0\phi(X_t)Z_t dt + Z_t < \phi_x(X_t), R(X_t)dW_1(t) >_H \\ &\quad + Z_t < \phi_x(X_t), B(X_t)dW_2(t) >_H + \phi(X_t)Z_t < G(X_t), dY_t >_V \\ &\quad + Z_t < \phi_x(X_t), B(X_t)G(X_t) >_H dt \end{aligned}$$

et, en utilisant la définition du processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
d(\phi(X_t)Z_t) &= \mathcal{L}_0\phi(X_t)Z_t dt \ + Z_t < \phi_x(X_t), R(X_t)dW_1(t) >_H \\
&\quad + Z_t < \phi(X_t)G(X_t) + B(X_t)^\star \phi_x(X_t), dY_t >_V .
\end{aligned}
$$

C'est à dire :

$$
\begin{aligned}
\phi(X_t)Z_t &= \phi(X_0) + \int_0^t \mathcal{L}_0\phi(X_s)Z_s ds + \int_0^t Z_s < \phi_x(X_s), R(X_s)dW_1(s) >_H \\
&\quad + \int_0^t Z_s < \phi(X_s)G(X_s) + B(X_s)^\star \phi_x(X_s), dY_s >_V .
\end{aligned}
$$

D'où, en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{Y}_t$, sous la probablité $\overline{P}$ dans les deux membres de l'égalité ci-dessus, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\rho_t(\phi) &= \overline{E}[\phi(X_0)/\mathcal{Y}_t] + \overline{E}\left[\int_0^t \mathcal{L}_0\phi(X_s)Z_s ds/\mathcal{Y}_t\right] \\
&\quad + \overline{E}\left[\int_0^t Z_s < \phi_x(X_s), R(X_s)dW_1(s) >_H /\mathcal{Y}_t\right] \\
&\quad + \overline{E}\left[\int_0^t Z_s < \mathcal{L}_1\phi, dY_s >_V /\mathcal{Y}_t\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Fubini stochastique prouvé par Lipster et Shiryayev dans [64] et, en remarquant que le processus stochastique $\left(\int_0^t Z_s < \phi_x(X_s), R(X_s)dW_1(s) >_H\right)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ martingale locale, nous avons :

$$
\rho_t(\phi) = \rho_0(\phi) + \int_0^t \overline{E}\left[\mathcal{L}_0\phi(X_s)Z_s/\mathcal{Y}_s\right] ds + \int_0^t < \overline{E}\left[\mathcal{L}_1\phi Z_s/\mathcal{Y}_s\right], dY_s >_V .
$$

C'est à dire, en tenant compte de la définition du filtre non normalisé,

$$
\rho_t(\phi) = \rho_0(\phi) + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \int_0^t < \rho_s(\mathcal{L}_1\phi), dY_s >_V .
$$

$\square$

3.4 L'EQUATION DE KUSHNER-STRATONOVITCH

Dans ce paragraphe, nous montrons que le filtre associé au problème de filtrage (3.1) est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique non linéaire : l'équation de Kushner-Stratonovitch.

Théorème 3.4.1 *Pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$, le filtre Π_t est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique :*

$$\Pi_t(\phi) = \Pi_0(\phi) + \int_0^t \Pi_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \int_0^t < \Pi_s(\mathcal{L}_1\phi) - \Pi_s(\phi)\Pi_s(G), d\nu_s >_V \quad (3.6)$$

où $\nu_s = Y_t - \int_0^t \Pi_s(G)ds$ est le processus d'innovation associé au système (3.1).

Preuve : Montrons tout d'abord que pour tout $t \geq 0$,

$$\rho_t(1) = \exp\left(\int_0^t < \Pi_s(G), dY_s >_V - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Pi_s(G)\|_V^2\, ds\right). \quad (3.7)$$

Par application de la formule d'Itô nous avons :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s < G(X_s), dY_s >_V .$$

Alors, en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{Y}_t$ dans les deux membres de l'égalité précédente et en utilisant, comme dans la preuve du Théorème 3.3.1,le théorème de Fubini stochastique prouvé dans [64], nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\rho_t(1) &= \overline{E}\,[Z_t/\mathcal{Y}_t] \\
&= 1 + \overline{E}\left[\int_0^t Z_s < G(X_s), dY_s >_V /\mathcal{Y}_t\right] \\
&= 1 + \int_0^t < \overline{E}\,[Z_s G(X_s)/\mathcal{Y}_s], dY_s >_V \\
&= 1 + \int_0^t < \rho_s(G), dY_s >_V .
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Kallianpur-Striebel, l'égalité ci-dessus devient

$$\rho_t(1) = 1 + \int_0^t \rho_s(1) < \Pi_s(G), dY_s >_V$$

ce qui conduit immédiatement à la représentation exponentielle donnée en (3.7).

D'autre part, comme d'après la formule de Kallianpur-Striebel, nous avons pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$,

$$\Pi_t(\phi) = \frac{\rho_t(\phi)}{\rho_t(1)}$$

nous obtenons, par application de la formule d'Itô,

$$d\Pi_t(\phi) = d\rho_t(\phi)(\rho_t(1))^{-1} + \rho_t(\phi)d(\rho_t(1))^{-1} + d \ll \rho_.(\phi), (\rho_.(1))^{-1} \gg_t \quad (3.8)$$

où $\ll \rho_.(\phi), (\rho_.(1))^{-1} \gg_t$ désigne la variation quadratique des processus $(\rho_t(\phi))_{t\geq 0}$ et $((\rho_t(1))^{-1})_{t\geq 0}$.

De plus, d'après l'égalité (3.7) nous avons :

$$(\rho_t(1))^{-1} = \exp\left(- \int_0^t < \Pi_s(G),\, dY_s >_V + \frac{1}{2}\int_0^t \|\Pi_s(G)\|_V^2\, ds \right)$$

et, par conséquent, en utilisant la formule d'Itô, nous obtenons :

$$d(\rho_t(1))^{-1} = (\rho_t(1))^{-1} \left(- < \Pi_t(G),\, dY_t >_V + \|\Pi_t(G)\|_V^2\, dt \right). \quad (3.9)$$

Ainsi, en tenant compte de (3.4) et (3.9), nous déduisons de (3.8) que

$$\begin{aligned} d\Pi_t(\phi) \quad = \quad & (\rho_t(1))^{-1} \left(\rho_t(\mathcal{L}_0\phi)\, dt + < \rho_t(\mathcal{L}_1\phi), dY_t >_V\right) \\ & + \rho_t(\phi)(\rho_t(1))^{-1} \left(- < \Pi_t(G),\, dY_t >_V + \|\Pi_t(G)\|_V^2\, dt \right) \\ & + d \ll \rho_.(\phi), \rho_.(1))^{-1} \gg_t . \end{aligned}$$

D'autre part, si Q_1 est l'opérateur de covariance du processus de Wiener $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $V_1 = Q_1^{1/2}(V)$, il existe une base orthonormale complète $(h_i)_{1\leq i\leq +\infty}$

dans V_1 et une famille de processus de Wiener réels standards mutuellement indépendants $(\beta'_i)_{1\leq i\leq +\infty}$ tels que, pour tout $t \geq 0$,

$$Y_t = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i \beta'_i(t).$$

Ainsi, les processus stochastiques $(\rho_t(\phi))_{t\geq 0}$ et $(\rho_t(1)^{-1})_{t\geq 0}$ sont solutions des équations différentielles stochastiques

$$d\rho_t(\phi) = \rho_t(\mathcal{L}_0\phi)dt + \sum_{i=1}^{+\infty} < \rho_t(\mathcal{L}_1\phi), h_i >_V d\beta'_i(t)$$

et

$$d\rho_t(1)^{-1} = \rho_t(1)^{-1}||\Pi_t(G)||_V^2 dt - \rho_t(1)^{-1} \sum_{i=1}^{+\infty} < \Pi_t(G), h_i >_V d\beta'_i(t).$$

Par conséquent, la variation quadratique des processus stochastiques $(\rho_t(\phi))_{t\geq 0}$ et $(\rho_t(1)^{-1})_{t\geq 0}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} d \ll \rho_.(\phi), \rho_.(1)^{-1} \gg_t &= -\rho_t(1)^{-1} \sum_{i=1}^{+\infty} < \rho_t(\mathcal{L}_1\phi), h_i >_V < \Pi_t(G), h_i >_V dt \\ &= -\rho_t(1)^{-1} < \rho_t(\mathcal{L}_1\phi), \sum_{i=1}^{+\infty} < \Pi_t(G), h_i >_V h_i >_V dt \\ &= -\rho_t(1)^{-1} < \rho_t(\mathcal{L}_1\phi), \Pi_t(G) >_V dt \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned} d\Pi_t(\phi) = \; & (\rho_t(1))^{-1}\rho_t(\mathcal{L}_0\phi)\, dt + (\rho_t(1))^{-1} < \rho_t(\mathcal{L}_1\phi), dY_t >_V \\ & - (\rho_t(1))^{-1}\rho_t(\phi) < \Pi_t(G), \, dY_t >_V + (\rho_t(1))^{-1}\rho_t(\phi)\, ||\Pi_t(G)||_V^2\, dt \\ & - < (\rho_t(1))^{-1}\rho_t(\mathcal{L}_1\phi), \Pi_t(G) >_V \, dt. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant la formule de Kallianpur-Striebel, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Pi_t(\phi) &= \Pi_0(\phi) + \int_0^t \Pi_s(\mathcal{L}_0\phi)\,ds + \int_0^t < \Pi_s(\mathcal{L}_1\phi), dY_s >_V \\ &\quad - \int_0^t < \Pi_s(\phi)\Pi_s(G),\, dY_s >_V + \int_0^t < \Pi_s(\phi)\Pi_s(G),\, \Pi_s(G) >_V \,ds \\ &\quad - \int_0^t < \Pi_s(\mathcal{L}_1\phi), \Pi_s(G) >_V \,ds.\end{aligned}$$

Finalement, en posant $\nu_s = Y_s - \int_0^s \Pi_u(G)\,du$, l'égalité précédente devient :

$$\Pi_t(\phi) = \Pi_0(\phi) + \int_0^t \Pi_s(\mathcal{L}_0\phi)\,ds + \int_0^t < \Pi_s(\mathcal{L}_1\phi) - \Pi_s(\phi)\Pi_s(G), d\nu_s >_V .$$

$\square$

Chapitre 4

EXISTENCE D'UNE DENSITE POUR UN PROBLEME DE FILTRAGE EN DIMENSION INFINIE

4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de filtrage non linéaire avec bruits additifs dépendants lorsque le signal et l'observation sont à valeurs dans des espaces de Hilbert de dimension infinie H et V.

Le résultat principal de ce chapitre est de montrer que le filtre associé à un tel problème de filtrage non linéaire est absolument continu par rapport à une mesure de référence μ sur H.

Des problèmes de filtrage non linéaire avec bruits additifs dépendants lorsque le signal est à valeurs dans un espace de Hilbert H de dimension infinie et l'observation est à valeurs dans un espace de dimension finie ont été étudiés entre autres par N.Ahmed, M.Fuhrman et J.Zabczyk [2] et R.Elliott et J.Moore [33].

Dans [2], les auteurs montrent par des techniques basées sur des résultats fondamentaux de l'analyse des équations différentielles stochastiques à valeurs sur des espaces de Hilbert que le filtre associé à de tels problèmes de filtrage non linéaire possède une densité par rapport à une mesure de référence μ sur l'espace des états du signal.

Le but de ce chapitre est d'étendre ce résultat à la classe de problèmes de filtrage non linéaire considérée dans ce chapitre.

Ce chapitre est divisé en cinq parties organisées de la manière suivante. Dans la première partie, nous rappelons quelques résultats concernant l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les équations différentielles stochastiques à valeurs dans les espaces de Hilbert. Dans la seconde partie, nous introduisons le problème de filtrage non linéaire étudié dans ce chapitre. Dans la troisième partie, nous montrons que le filtre non normalisé admet, lorsque les bruits sont indépendants, une densité par rapport à une mesure μ sur l'espace des états du signal. Dans la quatrième partie, nous calculons la forme robuste de l'équation de Zakai obtenue au paragraphe précédent. Dans la cinquième partie, nous montrons que le filtre non normalisé associé à un problème de filtrage avec bruits dépendants admet une densité par rapport à une mesure donnée sur l'espace des états du signal.

4.2 EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES SUR LES ESPACES DE HILBERT

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution d'équations différentielles stochastiques sur des espaces de Hilbert de dimension infinie. Nous renvoyons le lecteur à [18] pour un exposé plus détaillé sur le sujet.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé complet, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{U}$ des espaces de Hilbert séparables et $(W(t))_{t\geq 0}$ un processus de Wiener cylindrique, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\mathcal{U}$.

Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique à valeurs dans $\mathcal{H}$, solution de l'équation différentielle stochastique :

$$Z_t = \xi + \int_0^t (\mathcal{K}\, Z_s \;+\; \mathcal{M}(Z_s))\, ds + \int_0^t \mathcal{B}(Z_s)\, dW(s) \tag{4.1}$$

où

- La variable aléatoire ξ est $\mathcal{F}_0$–mesurable.
- $\mathcal{K}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(\mathcal{P}_t)$ sur $\mathcal{H}$.
- $\mathcal{M}$ est une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.
- $\mathcal{B}$ est une application d'un sous espace $\mathcal{V}$ de $\mathcal{H}$ dans $L_2(\mathcal{U}, \mathcal{H})$, l'espace de Hilbert–Schmidt des opérateurs linéaires de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{H}$ muni de la norme de Hilbert–Schmidt.

Définition 4.2.1 *Un processus stochastique $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adapté $(Z_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, est une solution faible de l'équation différentielle stochastique (4.1) si, et seulement si,*

(i) Pour presque tout $t \geq 0$, $Z_t \in \mathcal{V}$ P–presque–sûrement.

(ii) Pour tous $h \in \mathrm{Dom}(\mathcal{K}^\star)$ et $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} < Z_t, h >_{\mathcal{H}} \;&=\; < \xi, h >_{\mathcal{H}} + \int_0^t < Z_s, \mathcal{K}^\star h >_{\mathcal{H}} \, ds + \int_0^t < h, \mathcal{M}(Z_s) >_{\mathcal{H}} \, ds \\ &\quad + \int_0^t < h, \mathcal{B}(Z_s)\, dW(s) >_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

P–presque–sûrement.

Alors, le résultat suivant concernant l'existence et l'unicité d'une solution faible pour l'équation différentielle stochastique (4.1) a été prouvé dans le Théorème 7.6 et la Proposition 6.3 de [18].

Théorème 4.2.2 *Supposons que $\mathcal{V} = \mathcal{H}$ et que les opérateurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{B}$ sont lipschitziens. Alors, pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable ξ, l'équation différentielle stochastique (4.1) possède une solution faible unique.*

Supposons maintenant que l'espace de Hilbert $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathcal{H}$, l'inclusion $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{H}$ étant continue, et que l'opérateur $\mathcal{B}$ est linéaire et continu.

Soit a une forme bilinéaire définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ satisfaisant la condition de coercivité suivante :

Il existe $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$a(v,v) + \alpha||v||_{\mathcal{V}}^2 \leq k||v||_{\mathcal{H}}^2 \tag{4.2}$$

pour tout v dans $\mathcal{V}$.

Si on note Dom($\mathcal{K}$) l'ensemble des éléments v de $\mathcal{V}$ tels que l'application $w \longrightarrow a(v,w)$ possède un prolongement continu sur $\mathcal{H}$, le théorème de Riesz implique que pour tout v dans Dom($\mathcal{K}$), il existe un unique élément de $\mathcal{H}$, noté $\mathcal{K}v$, tel que

$$a(v,w) = < \mathcal{K}v, w >_{\mathcal{H}}$$

pour tout $w \in \mathcal{V}$. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{K}$, défini par la forme bilinéaire a est linéaire et engendre un C_0 semi–groupe analytique.

D'autre part, nous dirons que l'opérateur $\mathcal{B}$ satisfait une condition de superparabolicité si, il existe $\eta \in (0,1)$ et $\rho \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{2}||\mathcal{B}(v)||_{L_2(\mathcal{U},\mathcal{H})}^2 + \eta\, a(v,v) \leq \rho\, ||v||_{\mathcal{H}}^2 \tag{4.3}$$

pour tout $v \in \mathcal{V}$.

Alors, le résultat suivant d'existence et d'unicité d'une solution faible pour l'équation différentielle stochastique (4.1) a été prouvé par E.Pardoux [71] (voir aussi le Théorème 6.24 de [18]).

Théorème 4.2.3 *Supposons que l'opérateur $\mathcal{K}$ vérifie la condition de coercivité, que l'opérateur $\mathcal{B}$ vérifie la condition de superparabolicité et que $\mathcal{M} = 0$. Alors, l'équation différentielle stochastique (4.1) possède une unique solution faible $(Z_t)_{t\geq 0}$ qui est $\mathcal{H}$ continue et telle que pour tout $T > 0$,*

$$E\left(\int_0^t \|Z_t\|_{\mathcal{V}}^2 dt\right) < \infty.$$

4.3 LE PROBLEME DE FILTRAGE NON LINEAIRE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé complet, H, U et V trois espaces de Hilbert réels séparables et $(W(t))_{t\geq 0}$ un processus de Wiener cylindrique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ à valeurs dans V.

Soit $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ le processus stochastique à valeurs dans $H \times U$ solution du problème de filtrage non linéaire :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t (A X_s + F(X_s))\, ds + \int_0^t B\, dW(s) \\ \\ Y_t = \displaystyle\int_0^t G(X_s)\, ds + CW(t) \end{cases} \tag{4.4}$$

où

(H1) X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable, à valeurs dans H.

(H2) Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ engendré par l'opérateur A est tel que

$$\|S(t)\| \leq M e^{-\alpha t}$$

pour M et $\alpha > 0$.

(H3) L'application $F : H \to H$ est lipschitzienne.

(H4) L'opérateur $B : V \to H$ est linéaire et continu.

(H5) L'application $G : H \to U$ est continue et bornée.

(H6) L'opérateur $C : V \to U$ est linéaire, continu et surjectif.

(H7) Les opérateurs $Q_t = \int_0^t S(s)\, Q\, S(s)^\star ds$, $t \geq 0$, avec $Q = BB^\star$, sont traçables.

(H8) L'opérateur $Q_\infty = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tA}\, Q\, \mathrm{e}^{tA^\star} dt$ est nucléaire.

Alors, d'après le Théorème 7.4 de [18] par exemple, l'équation différentielle stochastique définissant le signal $(X_t)_{t\geq 0}$ admet, sous les hypothèses (H1) à (H5), une solution faible unique.

Sous les hypothèses (H1) à (H8), le problème de filtrage non linéaire (4.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t (A\, X_s \,+\, F(X_s))\, ds + \int_0^t R_1^{\frac{1}{2}}\, dW_1(s) + \int_0^t B_1\, dW_2(s) \\ Y_t &= \int_0^t G(X_s)\, ds + R_2^{\frac{1}{2}} W_2(t) \end{aligned} \right. \tag{4.5}$$

où $(W_1(t))_{t\geq 0}$ et $(W_2(t))_{t\geq 0}$ sont des processus de Wiener cylindriques indépendants, à valeurs dans H et U, respectivement, et R_1 et R_2 sont des opérateurs positifs, auto–adjoints, et l'opérateur R_2 est inversible.

De plus, les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} Q &= R_1 + B_1 B_1^\star \\ CC^\star &= R_2. \end{aligned}$$

Pour simplifier la présentation, on suppose maintenant que R_2 est l'opérateur identité sur l'espace de Hilbert U.

D'autre part, d'après les résultats du chapitre précédent, le filtre non normalisé ρ_t associé au problème de filtrage non linéaire (4.5), défini par (3.3), est solution, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}_0$ (où $\mathcal{D}_0$ est l'espace défini par (3.2)), de l'équation de Zakai :

$$\rho_t(\phi) = \rho_0(\phi) + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \int_0^t < \rho_s(\mathcal{L}_1\phi), dY_s >_V \qquad (4.6)$$

où $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ sont les opérateurs différentiels du premier et deuxième ordre, définis pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}_0$ par :

$$\mathcal{L}_0\phi(X) =< X, A^\star\phi_x(X) >_H + < F(X), \phi_x(X) >_H + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(Q\,\phi_{xx}(X))$$

et

$$\mathcal{L}_1\phi(X) = G(X)\phi(X) + B_1^\star\phi_x(X)$$

et le filtre Π_t associé au problème de filtrage non linéaire (4.5) est solution, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}_0$, de l'équation de Kushner-Stratonovitch :

$$\Pi_t(\phi) = \Pi_0(\phi) + \int_0^t \Pi_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \int_0^t < \Pi_s(\mathcal{L}_1\phi) - \Pi_s(\phi)\Pi_s(G), d\nu_s >_V$$

où $\nu_s = Y_t - \int_0^t \Pi_s(G)ds$ est le processus d'innovation associé au système (4.5).

Dans la suite de ce chapitre, on notera μ la mesure gaussienne sur H, d'espérance 0 et d'opérateur de covariance Q_∞.

Remarquons que μ est l'unique mesure invariante sur H associée à l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t A\,X_s\, ds + \int_0^t B\, dW(s).$$

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il existe un processus stochastique $(\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$ adapté $(q_t)_{t\geq 0}$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, tel que le processus $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ défini pour tout $t \geq 0$, par $\sigma_t(dx) = q_t(x)\mu(dx)$ est solution de l'équation de Zakai (4.6).

Supposons de plus, que l'hypothèse suivante est satisfaite :

(H9) La loi ν de X_0 est absolument continue par rapport à μ et $q_0 = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ est dans $L^2(H, \mu)$.

4.4 EXISTENCE D'UNE DENSITE POUR LE FILTRE LORSQUE LES BRUITS SONT INDEPENDANTS

Dans ce paragraphe, on suppose que $B_1 = 0$; c'est à dire que le processus $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ est solution du problème de filtrage non linéaire suivant :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \displaystyle\int_0^t (A X_s \; + \; F(X_s))\, ds + \int_0^t R_1^{\frac{1}{2}}\, dW_1(s) \\ \\ Y_t = \displaystyle\int_0^t G(X_s)\, ds + W_2(t) \end{cases} \tag{4.7}$$

Dans ce cas, le filtre non normalisé ρ_t associé au problème de filtrage non linéaire (4.7) satisfait, pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}_0$ l'équation de Zakai :

$$\rho_t(\phi) = \rho_0(\phi) + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_0 \phi)\, ds + \int_0^t < \rho_s(G\phi), dY_s >_V \tag{4.8}$$

où $\mathcal{L}_0$ est l'opérateur différentiel du deuxième ordre défini pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}_0$ par :

$$\mathcal{L}_0 \phi(X) =< X, A^\star \phi_x(X) >_H + < F(X), \phi_x(X) >_H + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\,(R_1\, \phi_{xx}(X))\,. \tag{4.9}$$

Alors, nous obtenons le résultat suivant concernant l'existence d'une densité pour le filtre non normalisé.

Théorème 4.4.1 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H9) sont satisfaites et que $B_1 = 0$. De plus, supposons que :*

(i) $F = 0$

ou

(ii) L'application $F : H \to H$ *est bornée et pour* $T > 0$, *on a :*

$$\int_0^T \|Q_t^{-\frac{1}{2}} S(t)\| dt < \infty.$$

Alors, le processus $\sigma_t(dx) = q_t(x)\,\mu(dx)$ *est solution de l'équation de Zakai (4.8) et la densité* $(q_t)_{t\geq 0}$ *est l'unique solution faible de l'équation aux dérivées partielles stochastique :*

$$q_t = q_0 + \int_0^t \mathcal{L}^\star q_s ds + \int_0^t < Gq_s, dY_s >_V \tag{4.10}$$

où $\mathcal{L}$ *est une extension de l'opérateur* $\mathcal{L}_0$ *comme générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe sur* $\mathcal{H} = L^2(H, \mu)$.

Preuve : Sous les hypothèses (i) ou (ii), G.Da Prato et J.Zabczyk [19] ont montré, avec une définition légérement différente de l'espace $\mathcal{D}_0$, que l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_0$ défini par (4.9) possède un prolongement en un générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ d'un C_0 semi–groupe sur $\mathcal{H} = L^2(H, \mu)$.

Nous utilisons maintenant le résultat du Théorème 4.2.2 pour montrer que l'équation aux dérivées partielles stochastique (4.7) admet une solution faible unique $(q_t)_{t\geq 0}$ puis, nous montrerons que le processus stochastique $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ défini pour tout $t \geq 0$ par $\sigma_t(dx) = q_t(x)\mu(dx)$ est solution de l'équation de Zakai (4.8).

L'opérateur $\mathcal{K}$ défini par $\mathcal{K} = \mathcal{L}^\star$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi–groupe $(P_t^\star)_{t\geq 0}$, et l'opérateur $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ dans $L^2(V, \mathcal{H})$ défini pour tout $x \in H$ et $u \in V$ par :

$$(\mathcal{B}(q)u)(x) =< G(x)q(x), u >_V$$

est linéaire et continu.

Ainsi, les hypothèses du Théorème 4.2.2 sont satisfaites avec $\mathcal{M} = 0$ et l'équation aux dérivées partielles stochastique (4.10) admet une solution faible, $\mathcal{Y}_t$–adaptée, unique $(q_t)_{t\geq 0}$.

Alors, pour toute fonction ϕ dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}^{**})$, nous avons :

$$< q_t, \phi >_{\mathcal{H}} = < q_0, \phi >_{\mathcal{H}} + \int_0^t < q_s, \mathcal{L}^{**}\phi >_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t << \phi G, q_s >_{\mathcal{H}}, dY_s >_V . \tag{4.11}$$

D'autre part, comme $\mathcal{L}^{**} = \mathcal{L}$, $\mathcal{D}_0 \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{L}^{**}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ et $\sigma_t(dx) = q_t(x)\,\mu(dx)$, nous avons, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$,

$$< q_t, \phi >_{\mathcal{H}} = \sigma_t(\phi)$$

$$< q_t, \mathcal{L}^{**}\phi >_{\mathcal{H}} = < q_t, \mathcal{L}\phi >_{\mathcal{H}} = \sigma_t(\mathcal{L}_0\phi)$$

et

$$<< \phi G, q_s >_{\mathcal{H}}, dY_s >_V = << \phi, G q_t >_{\mathcal{H}}, dY_t >_V = < \sigma_t(G\phi), dY_t >_V .$$

D'où, en tenant compte des égalités ci–dessus, l'égalité (4.11) devient :

$$\sigma_t(\phi) = \sigma_0(\phi) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{L}_0\phi)\, ds + \int_0^t < \sigma_s(G\phi), dY_s >_V .$$

Par conséquent, le processus $\sigma_t(dx) = q_t(x)\mu(dx)$ est solution de l'équation de Zakai (4.8).

□

Remarque 4.4.2 *Comme le filtre Π_t est lié au filtre non normalisé ρ_t par la formule de Kallianpur-Striebel, le Théorème 4.4.1 implique que le filtre admet, lui aussi, une densité par rapport à la mesure de référence μ.*

4.5 LA FORME ROBUSTE DE L'EQUATION DE ZAKAI ASSOCIEE A UN PROBLEME DE FILTRAGE AVEC BRUITS INDEPENDANTS

Le but de ce paragraphe est d'établir la forme robuste de l'équation de Zakai (4.10) associée au problème de filtrage avec bruits indépendants (4.7) obtenue au paragraphe précédent.

En fait, nous montrons, sous les hypothèses du Théorème 4.4.1 que le processus stochastique $(p_t(x))_{t\geq 0}$ défini par :

$$p_t(x) = q_t(x) \exp(- < G(x), Y_t >_V) \tag{4.12}$$

est solution d'une équation aux dérivées partielles ordinaire dont les coefficients dépendent de la trajectoire du processus d'observation. Ce résultat dû à M.Davis [20] dans le cas de systèmes de filtrage non linéaire en dimension finie est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.5.1 *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.4.1 sont satisfaites. Alors, le processus stochastique $(p_t(x))_{t\geq 0}$ défini par (4.12) est solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{dp_t}{dt}(x) = \mathcal{L}_{Y_t} p_t(x) - \frac{1}{2} p_t(x) < G(x), G(x) >_V \tag{4.13}$$

où $\mathcal{L}_{Y_t}$ est l'opérateur différentiel du deuxième ordre défini pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}_0$ par :

$$\mathcal{L}_{Y_t}\phi(x) = \exp(- < G(x), Y_t >_V)\, \mathcal{L}^\star \left(\exp(< G(x), Y_t >_V)\phi(x)\right).$$

Preuve : Par application de la formule d'Itô, nous obtenons :

$$d\left(\exp(-<G(x),Y_t>_V)\right) = -\exp(-<G(x),Y_t>_V) <G(x),dY_t>_V \quad (4.14)$$
$$+\frac{1}{2}\exp(-<G(x),Y_t>_V) <G(x),G(x)>_V\, dt$$

et, en tenant compte de (4.10) et (4.14),

$$\begin{aligned} dp_t(x) &= d\left(q_t(x)\exp(-<G(x),Y_t>_V)\right) \\ &= \exp(-<G(x),Y_t>_V)\left(\mathcal{L}^\star q_t(x)dt + <G(x)q_t(x),dY_t>_V \right. \\ &\qquad \left. - q_t(x) <G(x),dY_t>_V + \frac{1}{2} <G(x),G(x)>_V dt\right) \\ &\quad + d \ll q(x), \exp(-<G(x),Y>_V) \gg_t . \end{aligned} \quad (4.15)$$

D'autre part, si Q_1 est l'opérateur de covariance du processus de Wiener $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $V_1 = Q_1^{\frac{1}{2}}(V)$, il existe une base orthonormale complète $(h_i)_{1\leq i\leq +\infty}$ dans V_1 et une famille de processus de Wiener réels standards mutuellement indépendants $(\beta_i')_{1\leq i\leq +\infty}$ tels que, pour tout $t \geq 0$,

$$Y_t = \sum_{i=1}^{+\infty} h_i \beta_i'(t).$$

Ainsi, on a :

$$dq_t(x) = \mathcal{L}^\star q_t(x)dt + \sum_{i=1}^{+\infty} <G(x)q_t(x),h_i>_V \, d\beta_i'(t)$$

et

$$\begin{aligned} d\left(\exp(-<G(x),Y_t>_V)\right) &= \frac{1}{2}\exp(-<G(x),Y_t>_V) <G(x),Y>_V dt \\ &\quad - \exp(-<G(x),Y_t>_V)\sum_{i=1}^{+\infty} <G(x),h_i>_V \, d\beta_i'(t). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & d << q(x), \exp(-<G(x),Y>_V) >>_t \\ &= -\exp(-<G(x),Y_t>_V)\sum_{i=1}^{+\infty} <G(x)q_t(x),h_i>_V <G(x),h_i>_V dt \\ &= -q_t(x)\exp(-<G(x),Y_t>_V) <G(x),G(x)>_V dt \end{aligned}$$

et, en substituant cette quantité dans l'égalité (4.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} dp_t(x) &= \exp(- < G(x), Y_t >_V)\mathcal{L}^\star q_t(x)dt \\ &\quad - \frac{1}{2}q_t(x)\exp(- < G(x), Y_t >_V) < G(x), G(x) >_V dt \\ &= \mathcal{L}_{Y_t}p_t(x)dt - \frac{1}{2}p_t(x) < G(x), G(x) >_V dt. \end{aligned}$$

□

4.6 EXISTENCE D'UNE DENSITE POUR LE FILTRE LORSQUE LES BRUITS SONT DEPENDANTS

Afin de prouver le résultat principal de ce paragraphe, introduisons de manière analogue à celle de [2], l'espace de Sobolev $\mathcal{V} = W_Q^{1,2}(\mu)$ de la manière suivante.

Soit $(e_k)_{k\geq 0}$ une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de Q_∞, et soit $C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ ayant des dérivées de tout ordre continues et bornées.

Une fonction ϕ de H dans $\mathbb{R}$ est dans $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ tels que

$$\phi(x) = f(< x, e_1 >, \ldots, < x, e_m >)$$

pour tout x dans H.

Dans la suite de ce chapitre, on notera $\mathcal{V} = W_Q^{1,2}(\mu)$ l'espace de Hilbert obtenu comme le complété de $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$ pour la norme

$$\|\phi\|_{\mathcal{V}}^2 = \int_H \|Q^{\frac{1}{2}}\phi_x(x)\|^2\mu(dx) + \int_H \phi(x)^2\mu(dx).$$

Alors, le résultat suivant a été prouvé par N.Ahmed, M.Fuhrman et J.Zabczyk dans [2].

Proposition 4.6.1 *$W_Q^{1,2}(\mu)$ peut être identifié à un sous-espace dense de $L^2(H,\mu)$, l'inclusion étant continue.*

Rappelons maintenant le résultat suivant concernant les mesures gaussiennes sur H prouvé dans [2]:

Proposition 4.6.2 *Soit H un espace de Hilbert réel séparable et Q_∞ un opérateur positif, auto–adjoint et traçable sur H. Soit P la projection orthogonale de H sur la fermeture de* $\mathrm{Im}\, Q_\infty^{\frac{1}{2}}$*, $(e_k)_{k\geq 0}$ une base orthonormale complète de H telle que $Q_\infty e_k = \lambda_k e_k$ pour $\lambda_k \geq 0$ et μ la mesure gaussienne sur H d'espérance* 0 *et de matrice de covariance Q_∞.*

Alors,

(i) Pour tout h dans H la série

$$\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}}x, h \gg = \sum_{k=1,\lambda_k\geq 0}^{\infty} < h, e_k >< x, e_k > \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$$

converge dans $L^2(H,\mu)$, et

$$\int_H \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}}x, h \gg^2 \mu(dx) = \|Ph\|^2.$$

De plus, si h est dans $\mathrm{Im}\, Q_\infty^{\frac{1}{2}}$ *et x est dans H, on a :*

$$\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}}x, h \gg = < x, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}h >$$

μ presque partout.

(ii) Pour tout h dans $\mathrm{Im}\, Q_\infty^{\frac{1}{2}}$ *et ϕ, ψ dans $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$, nous avons :*

$$\begin{aligned}\int_H < \phi_x(x), h > \psi(x)\mu(dx) &= -\int_H < \psi_x(x), h > \phi(x)\mu(dx) \\ &\quad + \int_H \phi(x)\psi(x) \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}}x, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}h \gg \mu(dx).\end{aligned}$$

(iii) Pour tout h dans $\mathrm{Im}\, Q_\infty^{\frac{1}{2}}$*, k dans H et ϕ dans $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$, nous avons :*

$$\begin{aligned}\int_H < \phi_x(x), h >< k, x > \mu(dx) &= -\int_H < k, h > \phi(x)\mu(dx) \\ &+ \int_H \phi(x) < k, x > \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} h \gg \mu(dx).\end{aligned}$$

(iv) Pour tout h dans $\mathrm{Im}\, Q_\infty^{\frac{1}{2}}$, *$k$ dans H et ϕ dans $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$, nous avons :*

$$\begin{aligned}\int_H < \phi_x(x), h > \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, k \gg \mu(dx) &= -\int_H < k, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} h > \phi(x)\mu(dx) \\ &+ \int_H \phi(x) \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, k \gg \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} h \gg \mu(dx).\end{aligned}$$

Preuve : Les assertions (i) et (ii) ont été prouvées par Z.Ma et M.Röckner [66] dans le cadre d'espaces de Wiener abstraits.

Pour démontrer l'assertion (iii), considérons une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $C_b^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) = x \quad \text{si } x \in [-n, n]$$

et

$$|f_n'(x)| \leq 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, en posant, pour tout $n \geq 1$, $g_n = f_n(< k, . >)$, la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge vers $< k, . >$ et la suite $(< (g_n)_x, h >)_{n\geq 1}$ converge vers $< k, h >$ dans $L^2(H, \mu)$.

Ainsi, le résultat de l'assertion (iii) est une conséquence immédiate de (ii) et du Théorème de Lebesgue.

Du résultat prouvé dans l'assertion (i), nous déduisons que pour tout $x \in H$,

$$\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, k \gg = \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, Pk \gg$$

μ presque partout, ce qui implique que k est dans $\mathrm{Im}\, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}$.

Soit $(k_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de Im $Q_\infty^{-\frac{1}{2}}$ telle que $\|k_n - k\| \to 0$.

Alors, en appliquant le résultat de (iii) à $\psi_n(x) =< Q_\infty^{-\frac{1}{2}} k_n, x >$ et en remarquant que $\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, h \gg =< x, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} h >$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_H < \phi_x(x), h >\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, k_n \gg \mu(dx) &= -\int_H < k_n, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} h > \phi(x)\mu(dx) \\ &+ \int_H \phi(x) \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, k_n \gg\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} h \gg \mu(dx).\end{aligned}$$

Donc, comme d'après l'assertion (ii), $\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, k_n \gg$ tend vers $\ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x, k \gg$ dans $L^2(H, \mu)$, le résultat de l'assertion (iv) est une conséquence immédiate de l'égalité précédente par passage à la limite.

□

Montrons maintenant que la forme bilinéaire $\mathcal{G}$ définie sur $\mathcal{F}C_b^\infty(H) \times \mathcal{F}C_b^\infty(H)$ par :

$$\mathcal{G}(\phi, \psi) = \int_H (< \phi_x(x), AQ_\infty \psi_x(x) >_H + < F(x), \phi_x(x) >_H) \mu(dx) \quad (4.16)$$

et l'opérateur $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$ dans $L_2(V, L^2(H, \mu))$ défini pour tout $q \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$ et $u \in V$, par :

$$(\mathcal{B}(q)u)(x) =< G(x)q(x), u >_V - < B_1^\star q_x(x), u >_V + \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 u, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x \gg q(x) \quad (4.17)$$

vérifient les hypothèses du Théorème 4.2.3.

Pour cela, rappelons tout d'abord le résultat suivant dû à N.Ahmed, M.Fuhrman et J.Zabczyk [2].

Théorème 4.6.3 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H9) sont satisfaites et que*

(i) Im $Q_\infty \subset$ Dom(A) *et il existe* $K > 0$ *tel que pour tout* $x, y \in H$

$$| < x, AQ_\infty y > | \leq K|Q^{\frac{1}{2}}x||Q^{\frac{1}{2}}y|. \tag{4.18}$$

(ii) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in H$

$$|Q^{-\frac{1}{2}}F(x)| \leq C. \tag{4.19}$$

Alors, la forme bilinéaire $\mathcal{G}$ possède un unique prolongement continu sur $\mathcal{V}$, noté, lui aussi, $\mathcal{G}$. De plus, $\mathcal{G}$ satisfait la condition de coercivité (4.2) et détermine un prolongement $\mathcal{L}$ de l'opérateur $\mathcal{L}_0$. En outre, pour tout $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, il existe $C_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\mathcal{G}(\phi, \phi) \geq \alpha\|\phi\|^2_{\mathcal{V}} + C_\alpha\|\phi\|^2_{L^2(H,\mu)} \tag{4.20}$$

pour tout $\phi \in \mathcal{V}$.

Le résultat précédent est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants.

Soit $(R_t)_{t\geq 0}$ le semi–groupe de transition de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t AX_s ds + \int_0^t BdW(s)$$

agissant sur l'espace $UC_b^0(H, \mathbb{R})$. La mesure μ étant invariante pour le semi–groupe $(R_t)_{t\geq 0}$, les résultats prouvés dans [18] ou [85] impliquent que ce semi–groupe s'étend de manière unique en un C_0 semi–groupe sur $L^2(H, \mu)$ de générateur $\mathcal{A}$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 3.6 prouvé par M.Fuhrman dans [44] (voir aussi V.Bogachev, M.Röckner et B.Schmuland [11]).

Lemme 4.6.4 *Soit $\mathcal{E}$ la forme bilinéaire définie pour tous ϕ, ψ dans $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$ par*

$$\mathcal{E}(\phi, \psi) = \int_H < \phi_x(x), AQ_\infty\psi_x(x) > \mu(dx).$$

Alors, sous les hypothèses du Théorème 4.6.3, la forme bilinéaire $\mathcal{E}$ admet un unique prolongement continu, toujours noté $\mathcal{E}$, en une forme bilinéaire sur $\mathcal{V}$ satisfaisant la condition de coercivité (4.2) et, pour toute fonction ϕ dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ *et ψ dans $\mathcal{V}$, on a :*

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V}, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}(\phi, \psi) = < \mathcal{A}\phi, \psi >_{L^2(H,\mu)} .$$

De plus, pour toutes fonctions ϕ et ψ dans $\mathcal{V}$, nous avons :

$$|\mathcal{E}(\phi, \psi)| \leq K \|\psi\|_{\mathcal{V}} \qquad \text{et} \qquad -\mathcal{E}(\phi, \psi) = \frac{1}{2}\|\phi\|_{\mathcal{V}}^2$$

où K est la constante définie dans l'assertion (i) du Théorème 4.6.3.

Lemme 4.6.5 *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.6.3 sont satisfaites. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toutes fonctions ϕ et ψ dans $\mathcal{V}$,*

$$\left| \int_H < F(x), \phi_x(x) > \psi(x)\, \mu(dx) \right| \leq \|\phi\|_{\mathcal{V}} \|\psi\|_{\mathcal{V}}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{V}$,

$$\left| \int_H < F(x), \phi_x(x) > \phi(x)\, \mu(dx) \right| \leq \varepsilon \|\phi\|_{\mathcal{V}}^2 + C_\varepsilon \|\phi\|_{L^2(H,\mu)}^2.$$

Preuve : D'après l'hypothèse (4.19), nous avons pour toutes fonctions ϕ et ψ dans $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_H < F(x), \phi_x(x) > \psi(x)\, \mu(dx) \right| &\leq \int_H \|Q^{-\frac{1}{2}} F(x)\| \, \|Q^{\frac{1}{2}} \phi_x(x)\| \, |\psi(x)|\, \mu(dx) \\ &\leq C \|\phi\|_{\mathcal{V}} \|\psi\|_{L^2(H,\mu)} \end{aligned}$$

ce qui prouve la première assertion du lemme. De plus, en prenant $\phi = \psi$, nous obtenons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int_H < F(x), \phi_x(x) > \psi(x)\, \mu(dx) \right| \leq \varepsilon \|\phi\|_{\mathcal{V}}^2 + \frac{C^2}{4\varepsilon} \|\phi\|_{L^2(H,\mu)}^2$$

ce qui prouve la seconde assertion du lemme.

□

Preuve du Théorème 4.6.3 : Les résultats des deux lemmes précédents impliquent que la forme bilinéaire $\mathcal{G}$ est bien définie, satisfait l'inégalité (4.20), et il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|\mathcal{G}(\phi, \psi)| \leq M \|\phi\|_{\mathcal{V}} \|\psi\|_{\mathcal{V}}$$

pour toutes fonctions ϕ et ψ dans $\mathcal{V}$.

De plus, $\mathcal{G}$ définit le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ d'un semi–groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ fortement continu de $L^2(H,\mu)$ qui est, d'après [18], un prolongement de $\mathcal{L}_0$.

□

Nous démontrons alors le résultat suivant.

Théorème 4.6.6 *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.6.3 sont satisfaites et que*

$$\text{Im } B_1 \subset \text{Im } Q_\infty^{\frac{1}{2}} \cap \text{Im } R_1^{\frac{1}{2}}. \tag{4.21}$$

Alors l'opérateur $\mathcal{B}$ possède un prolongement en un opérateur, encore noté $\mathcal{B}$, de $\mathcal{V}$ dans $L_2(V, L^2(H,\mu))$ tel que :

$$< \mathcal{B}(q)u, \phi >_{L^2(H,\mu)} = << \phi, Gq >_{L^2(H,\mu)}, u >_V + << q, B_1^\star \phi_x >_{L^2(H,\mu)}, u >_V \tag{4.22}$$

pour tout $q \in \mathcal{V}$, $\phi \in \mathcal{D}_0$ et $u \in V$.

De plus, il existe $\eta \in (0,1)$ et $C > 0$ tels que

$$\|\mathcal{B}(q)\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} \leq \eta \|q\|^2_{\mathcal{V}} + C\|q\|^2_{L^2(H,\mu)} \tag{4.23}$$

pour tout $q \in \mathcal{V}$.

Pour montrer le Théorème 4.6.6, rappelons tout d'abord le résultat suivant.

Lemme 4.6.7 *Sous les hypothèses du Théorème 4.6.6, l'application* $\phi \longrightarrow B_1^\star \phi_x$, *définie sur* $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$, *admet un prolongement en une application continue de* $\mathcal{V}$ *dans* $L^2(V,\mu)$.

De plus, il existe $\eta \in (0,1)$ *tel que*

$$\begin{aligned}\int_H \|B_1^\star \phi_x(x)\|_V^2 \mu(dx) &\leq \eta \int_H < Q\phi_x(x), \phi_x(x) > \mu(dx) \\ &\leq \eta \|\phi\|_{\mathcal{V}} \end{aligned} \qquad (4.24)$$

pour tout $\phi \in \mathcal{V}$.

Preuve : Comme Im $B_1 \subset$ Im $R_1^{\frac{1}{2}}$, les résultats de l'appendice B de [18] impliquent qu'il existe $k > 0$ tel que $\|B_1^\star x\|_V^2 \leq k \|R_1^{\frac{1}{2}} x\|_V^2$, pour tout $x \in H$.

Ainsi, en prenant $\eta \in (0,1)$ tel que $\eta(1-\eta)^{-1} \geq k$, nous obtenons :

$$(1-\eta) < B_1 B_1^\star x, x > \leq \eta < R_1 x, x >$$

et, pour tout $\phi \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$, nous avons :

$$(1-\eta) \int_H < B_1 B_1^\star \phi_x(x), \phi_x(x) > \mu(dx) \leq \eta \int_H < R_1 \phi_x(x), \phi_x(x) > \mu(dx).$$

Cette inégalité implique (4.24) en remarquant que $Q = R_1 + B_1 B_1^\star$.

□

Preuve du Théorème 4.6.6 : Tout d'abord, écrivons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$, où

$$(\mathcal{B}_1(q)u)(x) = q(x) < G(x), u >_V$$

et

$$(\mathcal{B}_2(q)u)(x) = - < B_1^\star q_x(x), u >_V + q(x) \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 u, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x \gg .$$

En notant $(f_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de V, la définition de la norme de Hilbert-Schmidt implique que pour tout $q \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}_1(q)\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} &= \sum_{i\in I} \|\mathcal{B}_1(q)f_i\|^2_{L^2(H,\mu)} \\
&= \sum_{i\in I} \|q < G, f_i >_V \|^2_{L^2(H,\mu)} \\
&= \sum_{i\in I} | < G, f_i >_V |^2 \|q\|^2_{L^2(H,\mu)} \\
&= \|q\|^2_{L^2(H,\mu)} \sum_{i\in I} | < G, f_i >_V |^2 \\
&= \|q\|^2_{L^2(H,\mu)} \|G\|^2_V \\
&\leq \|q\|^2_{L^2(H,\mu)} \sup_{x\in H} \|G(x)\|^2_V .
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $q \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}_2(q)\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} &= \sum_{i\in I} \|\mathcal{B}_2(q)f_i\|^2_{L^2(H,\mu)} \\
&= \sum_{i\in I} \|- < q_x, B_1 f_i >_V + q \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}(.) \gg \|^2_{L^2(H,\mu)} \\
&= \sum_{i\in I} \int_H \Big(< q_x(x), B_1 f_i >^2_V + q(x)^2 \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) \gg^2 \\
&\quad -2q(x) < q_x(x), B_1 f_i >_V \gg Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) \gg \Big) \mu(dx).
\end{aligned}$$

Or, en appliquant (iv) de la Proposition 4.6.2 à $B_1 f_i \in \operatorname{Im} Q_\infty^{\frac{1}{2}}$, $Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i \in H$ et $q \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_H 2q(x) < q_x(x), B_1 f_i >_V \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) \gg \mu(dx) \\
&\quad = \int_H < (q^2)_x(x), B_1 f_i >_V \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) \gg \mu(dx) \\
&\quad = -\int_H < Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i > q^2(x)\, \mu(dx) \\
&\qquad + \int_H q^2(x) \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}}(x) \gg^2 \mu(dx)
\end{aligned}$$

et ainsi,

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{B}_2(q)\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} \\
&\quad = \sum_{i\in I}\int_H \left(< q_x(x), B_1 f_i >_V^2 + < Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i > q^2(x) \right) \mu(dx) \\
&\quad = \sum_{i\in I}\int_H \left(< q_x(x), B_1 f_i >_V^2 + \|Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 f_i\|_H^2 q^2(x) \right) \mu(dx) \\
&\quad = \int_H \left(\|B_1^\star q_x(x)\|_H^2 + q^2(x) \|Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} \right) \mu(dx) \\
&\quad = \int_H \|B_1^\star q_x(x)\|_H^2 \mu(dx) + \|Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} \|q\|^2_{L^2(H,\mu)}
\end{aligned}
$$

Les deux dernières estimations impliquent que pour tout q dans $\mathcal{F}C_b^\infty(H)$,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(q)\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} \leq \; & \left(\int_H \|B_1^\star q_x(x)\|_H^2 \mu(dx) + \|Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} \|q\|^2_{L^2(H,\mu)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \|q\|_{L^2(H,\mu)} \sup_{x\in H} \|G(x)\|_V . \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Donc, comme d'après le Lemme 4.6.7, il existe $\eta \in (0,1)$ tel que

$$
\int_H \|B_1^\star q_x(x)\|_V^2 \mu(dx) \leq \eta \|q\|_{\mathcal{V}}
$$

nous déduisons de (4.25) que l'inégalité (4.23) est satisfaite pour tout $q \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$.

De plus, l'opérateur $\mathcal{B}$ se prolonge de manière évidente en un opérateur linéaire borné, toujours noté $\mathcal{B}$, de $\mathcal{V}$ dans $L_2(V, L^2(H,\mu))$ et, pour ce prolongement, l'inégalité (4.23) est satisfaite pour tout $q \in \mathcal{V}$.

Montrons maintenant que l'inégalité (4.22) est satisfaite.

Pour tout $q, \phi \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$ et $u \in \mathcal{V}$ nous avons :

$$
\int_H < (\mathcal{B}_1(q)u)(x), \phi(x) > \mu(dx) = \int_H q(x)\phi(x) < G(x), u >_V \mu(dx)
$$

et, d'après l'assertion (ii) de la Proposition 4.6.2,

$$\int_H < (\mathcal{B}_2(q)u)(x), \phi(x) > \mu(dx)$$
$$= \int_H \left(-\phi(x) < q_x(x), B_1 u >_V + \phi(x) q(x) \ll Q_\infty^{-\frac{1}{2}} B_1 u, Q_\infty^{-\frac{1}{2}} x \gg \right) \mu(dx)$$
$$= \int_H < \phi_x(x), B_1 u >_V q(x)\, \mu(dx).$$

Ainsi, en sommant ces deux égalités, nous obtenons l'égalité (4.22) pour tous $q, \phi \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$.

De plus, cette égalité peut être étendue par continuité pour tous $q \in \mathcal{V}$ et $\phi \in \mathcal{F}C_b^\infty(H)$ et, par passage à la limite, l'égalité (4.22) reste valide pour tous $q \in \mathcal{V}$ et $\phi \in \mathcal{D}_0$.

□

Montrons maintenant le résultat principal de ce paragraphe concernant l'existence d'une densité par rapport à la mesure μ pour le filtre associé au système (4.5).

Théorème 4.6.8 *Supposons que les hypothèses (H1) à (H9) ainsi que les conditions (4.18), (4.19) et (4.21) sont satisfaites. Alors, le processus $\sigma_t(dx) = q_t(x)\mu(dx)$ est solution de l'équation de Zakai (4.6) et la densité $(q_t)_{t\geq 0}$ est l'unique solution faible de l'équation aux dérivées partielles stochastique :*

$$q_t = q_0 + \int_0^t \mathcal{L}^\star q_s ds + \int_0^t \mathcal{B} q_s dY_s \tag{4.26}$$

où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ sont les opérateurs différentiels obtenus respectivement dans les Théorèmes 4.6.3 et 4.6.6.

De plus, le processus $(q_t)_{t\geq 0}$ est $L^2(H,\mu)$ continu et pour tout $T > 0$,

$$E\left(\int_0^T \|q_t\|^2_{W_Q^{1,2}(\mu)} dt \right) < \infty. \tag{4.27}$$

Preuve : D'après le Théorème 4.6.3, la forme bilinéaire $\mathcal{G}$ définie par (4.16) est continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$, satisfait la condition de coercivité (4.2) et définit un prolongement $\mathcal{L}$ de l'opérateur $\mathcal{L}_0$.

De plus, d'après le Théorème 4.6.6, l'opérateur $\mathcal{B}$ défini par (4.17) est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{V}$ dans $L^2(V, \mathcal{H})$ tel que pour tout $q \in \mathcal{V}, \phi \in \mathcal{D}_0$ et $u \in V$,

$$< \mathcal{B}(q)u, \phi >_{L^2(H,\mu)} = << \phi, Gq >_{L^2(H,\mu)}, u >_V + << q, B_1^\star \phi_x >_{L^2(H,\mu)}, u >_V .$$

D'autre part, les inégalités (4.20) et (4.23) impliquent que pour tout $\phi \in \mathcal{V}$,

$$\frac{1}{2}\|\mathcal{B}(q)\|^2_{L_2(V,L^2(H,\mu))} \leq -\frac{\eta}{2\alpha}\mathcal{G}(\phi,\phi) - \frac{\eta C_\alpha}{2\alpha}\|q\|^2_{L^2(H,\mu)} + \frac{C}{2}\|q\|^2_{L^2(H,\mu)}$$

pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ et pour un choix convenable de $\eta \in (0,1)$, $C > 0$ et $C_\alpha \in \mathbb{R}$.

Ainsi, en choisissant α tel que $\eta < 2\alpha$ nous obtenons que l'opérateur $\mathcal{B}$ satisfait la condition de superparabolicité (4.3).

Donc, les hypothèses du Théorème 4.2.3 sont vérifiées et par conséquent, l'équation (4.26) admet une unique solution faible, $\mathcal{Y}_t$ adaptée, $(q_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant l'estimation (4.27).

Alors, pour toute fonction ϕ dans Dom($\mathcal{L}^{\star\star}$) nous avons :

$$\begin{aligned} < q_t, \phi >_{L^2(H,\mu)} &= < q_0, \phi >_{L^2(H,\mu)} + \int_0^t < q_s, \mathcal{L}^{\star\star}\phi >_{L^2(H,\mu)} ds \\ &\quad + \int_0^t < \phi, \mathcal{B}q_t dY_t >_{L^2(H,\mu)} \end{aligned} \tag{4.28}$$

et, comme l'opérateur $\mathcal{B}$ satisfait, d'après le Théorème 4.6.6, l'égalité (4.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} < q_t, \phi >_{L^2(H,\mu)} &= < q_0, \phi >_{L^2(H,\mu)} + \int_0^t < q_s, \mathcal{L}^{\star\star}\phi >_{L^2(H,\mu)} ds \\ &\quad + \int_0^t << \phi, Gq_t >_{L^2(H,\mu)}, dY_s >_V \\ &\quad + \int_0^t << q_s, B_1^\star \phi_x >_{L^2(H,\mu)}, dY_s >_V . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Or, comme $\mathcal{L}^{\star\star} = \mathcal{L}$, $\mathcal{D}_0 \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{L}^{\star\star}) = \mathrm{Dom}(\mathcal{L})$ et $\sigma_t(dx) = q_t(x)\,\mu(dx)$, nous avons, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{D}_0$,

$$< q_t, \phi >_{L^2(H,\mu)} = \sigma_t(\phi)$$

$$< q_t, \mathcal{L}^{\star\star}\phi >_{L^2(H,\mu)} = < q_t, \mathcal{L}\phi >_{L^2(H,\mu)} = \sigma_t(\mathcal{L}_0\phi)$$

$$<< \phi, Gq_t >_{L^2(H,\mu)}, dY_t >_V = < \sigma_t(G\phi), dY_t >_V$$

$$<< q_t, B_1^\star \phi_x >_{L^2(H,\mu)}, dY_t >_V = < \sigma_t(B_1^\star \phi_x), dY_t >_V .$$

D'où, en tenant compte des égalités ci–dessus, l'égalité (4.29) devient :

$$\sigma_t(\phi) = \sigma_0(\phi) + \int_0^t \sigma_s(\mathcal{L}_0\phi)ds + \int_0^t < \sigma_s(G\phi), dY_s >_V + \int_0^t < \sigma_s(B_1^\star\phi_x), dY_s >_V$$

et par conséquent, le processus $\sigma_t(dx) = q_t(x)\,\mu(dx)$ est solution de l'équation de Zakai (4.6).

□

4.7 EXEMPLE

Supposons que le signal $(X_t)_{t\geq 0}$ est solution de la généralisation de l'équation de la chaleur stochastique :

$$\begin{cases} dX(t,\xi) = \left(\dfrac{\partial^2 X}{\partial \xi^2}(t,\xi) + f(X(t,\xi))\right) dt + dW_1(t,\xi) + b(\xi)\, dW_2(t), & \xi \in (0,1) \\[2ex] X(t,0) = X(t,1) = 0, \qquad t > 0 \\[2ex] X(0,.) = X_0(.) \end{cases}$$

où $(W_1(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Wiener cylindrique sur $H = L^2(0,1)$, $(W_2(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendant de $(W_1(t))_{t\geq 0}$, f

est une fonction lipschitzienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et b est dans $L^2(0,1)$.

Supposons de plus, que l'observation $(Y_t)_{t\geq 0}$ est de la forme :

$$Y_t = \int_0^t G(X_s)ds + W_2(t)$$

où G est une fonction continue et bornée de H dans $\mathbb{R}^d$.

Alors, le domaine du générateur $A = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ est $\mathrm{Dom}(A) = H_0^1(0,1) \cap H_2(0,1)$ et la mesure de référence μ est la loi du pont brownien sur H $(\beta(\xi))_{\xi \in [0,1]}$ dont la fonction de corrélation est donnée par :

$$E\left(\beta(\xi)\beta(\eta)\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\xi(1-\eta), & 0 \leq \xi \leq \eta \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{2}\eta(1-\xi), & 0 \leq \eta \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Par conséquent, si b est dans $H_0^1(0,1)$, les hypothèses du Théorème 4.6.8 sont satisfaites et la solution de l'équation de Zakai associée à ce problème de filtrage admet une densité par rapport à la mesure μ.

Chapitre 5

CONTINUITE PAR RAPPORT AUX TRAJECTOIRES DE L'OBSERVATION DU FILTRE ASSOCIE A DES SYSTEMES DE DIMENSION INFINIE

5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de filtrage non linéaire avec bruits indépendants lorsque le signal et l'observation sont à valeurs dans des espaces de Hilbert réels séparables H et V.

Notre but est de déterminer des conditions suffisantes sous lesquelles le filtre associé à de tels systèmes est continu par rapport aux trajectoires de l'observation.
Pour cela, nous définissons de manière analogue à celle exposée par E.Pardoux [74], le filtre et le filtre non normalisé comme deux collections de mesures sur

H, et nous montrons leur continuité sur $\mathcal{M}_+(H)$, l'espace des mesures positives sur H, muni de la convergence étroite. Toutefois, comme le processus d'observation est à valeurs dans un espace de Hilbert de dimension infinie, nous utiliserons, pour étendre à notre modèle la méthode developpée dans [74], une formule d'Itô pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Hilbert de dimension infinie établie par M.Métivier dans [67].

La continuité par rapport aux trajectoires de l'observation du filtre associé à des problèmes de filtrage non linéaires en dimension finie a été étudiée par de nombreux auteurs.

Cette question a été traitée dans le cas de systèmes de filtrage non linéaire à coefficients bornés par M.Davis [20] lorsque le signal et l'observation sont indépendants et par M.Davis et M.Spathopoulos [22] lorsque le signal et l'observation sont dépendants. Le cas de systèmes de filtrage non linéaire avec bruits indépendants et un coefficient d'observation non borné à croissance sous exponentielle a été étudié par H.Sussmann dans [79]. En combinant les résultats exposés dans [20] et [79], P.Florchinger [39] a démontré la continuité du filtre par rapport aux trajectoires de l'observation dans le cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et une observation unidimensionnelle à coefficient non borné.

Notons qu'une notion plus faible de continuité pour le filtre a été étudiée par M.Chaleyat-Maurel et D.Michel [15] dans le cas de problèmes de filtrage non linéaire avec bruits dépendants et coefficients bornés.

Ce chapitre est divisé en trois paragraphes organisés de la manière suivante. Dans le premier paragraphe, nous rappelons quelques notions usuelles de la théorie du calcul stochastique sur les espaces de Hilbert et nous introduisons le problème de filtrage non linéaire étudié dans ce chapitre. Dans le deuxième paragraphe, nous utilisons la méthode de la "probabilité de référence" pour définir une nouvelle probabilité sous laquelle le processus d'observation est un processus de Wiener et nous introduisons le filtre non normalisé associé au problème de filtrage considéré. Dans le troisième paragraphe, nous montrons la continuité par rapport aux trajectoires de l'observation du filtre et du filtre non normalisé. Le résultat principal de ce chapitre est énoncé dans le Théorème 5.4.5.

5.2 NOTATIONS ET HYPOTHESES

5.2.1 QUELQUES RAPPELS DE LA THEORIE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES SUR LES ESPACES DE HILBERT

Dans cette partie, nous rappelons quelques notions usuelles de la théorie du calcul stochastique pour des processus à valeurs dans des espaces de Hilbert. Pour de plus amples détails concernant cette théorie, nous renvoyons le lecteur à [18] par exemple.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ un espace probabilisé complet, V un espace de Hilbert réel séparable.

Un processus stochastique $(W(t))_{t\in[0,T]}$, à valeurs dans V, est un Q-processus de Wiener, où Q est un opérateur sur V, positif et symétrique si, et seulement si,

1. $W(0) = 0$.
2. Le processus $(W(t))_{t\in[0,T]}$ est à trajectoires continues et à accroissements indépendants.
3. Pour tous $t, s \in [0,T]$, la loi de la variable aléatoire $(W(t) - W(s))$ est gaussienne d'espérance 0 et de covariance $(t-s)\,Q$.

Le sous-espace $V_0 = Q^{\frac{1}{2}}(V)$ muni du produit scalaire

$$< u, v >_0 = < Q^{-\frac{1}{2}}u, Q^{-\frac{1}{2}}v >_V$$

est un espace de Hilbert et l'espace $L_2^0 = L_2(V_0, H)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de V_0 dans un espace de Hilbert H est, muni de la norme

$$\|\Psi\|_{L_2^0}^2 = \|\Psi Q^{\frac{1}{2}}\|^2 = Tr(\Psi Q \Psi^*),$$

un espace de Hilbert séparable.

Pour un processus mesurable $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$, à valeurs dans L_2^0, nous définissons les normes

$$|||\phi|||_t = \left(E\int_0^t \|\phi_s\|_{L_2^0}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}, \; t \in [0,T]$$

et nous notons $\mathcal{N}_W^2(0,T;L_2^0)$ l'espace de Hilbert des processus L_2^0 prévisibles $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ tels que $|||\phi|||_T < +\infty$.

5.2.2 LE PROBLEME ETUDIE

Soit H, U et V trois espaces de Hilbert séparables, $(W_1(t))_{t\in[0,T]}$ un Q_1-processus de Wiener à valeurs dans U et $(W_2(t))_{t\in[0,T]}$ un Q_2-processus de Wiener à valeurs dans V, où Q_1 et Q_2 sont des opérateurs positifs, symétriques et traçables définis sur U et V respectivement. De plus, nous supposons que les processus de Wiener $(W_1(t))_{t\in[0,T]}$ et $(W_2(t))_{t\in[0,T]}$ sont indépendants.

Soit $(X_t, Y_t)_{t\in[0,T]}$ le processus stochastique à valeurs dans $H \times V$, solution du problème de filtrage non linéaire :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t F(X_s)ds + \int_0^t R(X_s)dW_1(s) \\ \\ Y_t = \int_0^t G(X_s)ds + W_2(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

où :

(H1) X_0 est donné dans H; $Y_0 = 0$.

(H2) L'application $F : H \to H$ est lipschitzienne et bornée.

(H3) L'application $G : H \to V$ est continue, bornée et admet des dérivées du premier et deuxième ordre continues et bornées, notées G' et G'' respectivement. De plus, nous supposons que pour tout $x \in H$, la fonction $G''(x)$ est dans $\mathcal{L}(L_2^0; V)$ (l'espace des fonctions linéaires de L_2^0 dans V) et l'application $x \mapsto G''(x)$ est uniformément continue sur tout sous-espace borné de H.

(H4) L'opérateur $R : H \to \mathcal{N}^2_{W_1}(0,T; L_2^0)$ est lipschitzien et borné.

Afin de définir le filtre associé au problème de filtrage non linéaire (5.1), rappelons la notation suivante, utilisée dans [2].

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $UC_b^k(H, \mathbb{R})$ l'espace linéaire des applications ϕ de H dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées de Fréchet jusqu'à l'ordre k, bornées et uniformément continues.

Alors, pour tout $t \in [0,T]$ et pour toute fonction ϕ de $UC_b^0(H, \mathbb{R})$, nous définissons le filtre π_t associé au système (5.1) par :

$$\pi_t(\phi) = E\left[\phi(X_t)/\mathcal{Y}_t\right]$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma\{Y_s, 0 \le s \le t\}$ est la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t.

5.3 LA PROBABILITE DE REFERENCE

Dans ce paragraphe, nous utilisons la méthode de "la probabilité de référence" pour définir une nouvelle probabilité sous laquelle le processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Wiener.

Soit $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ le processus stochastique défini pour tout $t \in [0,T]$ par

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t < G(X_s),\, dY_s >_V - \frac{1}{2}\int_0^t \|G(X_s)\|_V^2\, ds\right). \tag{5.2}$$

Alors, comme G est bornée, nous avons $E(Z_t^{-1}) = 1$ pour tout $t \in [0,T]$, et si nous notons $\bar{P}$ la probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ par la dérivée de Radon–Nikodym

$$\left.\frac{d\overline{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^{-1},$$

le Théorème de Girsanov démontré par J.Y.Ouvrard dans [70] entraîne que le processus d'observation $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est, sous la probabilité $\overline{P}$, un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ processus de Wiener indépendant de $(W_1(t))_{t\in[0,T]}$.

Ainsi, nous définissons pour tout $t \in [0,T]$ et pour toute fonction ϕ dans $UC_b^0(H, \mathbb{R})$, le filtre non normalisé associé au problème de filtrage non linéaire (5.1) par :

$$\rho_t(\phi) = \overline{E}\left[\phi(X_t)Z_t/\mathcal{Y}_t\right].$$

De plus, les techniques usuelles de la théorie du filtrage non linéaire nous permettent de montrer que le filtre π_t et le filtre non normalisé ρ_t sont liés par la formule de Kallianpur-Striebel (voir [51] par exemple) :

$$\pi_t(\phi) = \frac{\rho_t(\phi)}{\rho_t(1)}.$$

5.4 CONTINUITE DU FILTRE

Pour montrer la continuité par rapport aux trajectoires de l'observation du filtre et du filtre non normalisé associés au problème de filtrage non linéaire (5.1) nous avons besoin de fixer la valeur de Y_t dans l'expression définissant Z_t. Dans ce but, nous calculons l'intégrale stochastique apparaissant dans (5.2) à l'aide d'une formule d'intégration par parties.

Proposition 5.4.1 *Sous les hypothèses* (H_1) *à* (H_4) *nous avons*

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\Big(< G(X_t), Y_t >_V - \int_0^t < G'(X_s)F(X_s), Y_s >_V ds \\ &\quad - \int_0^t < Y_s, G'(X_s)R(X_s)dW_1(s) >_V - \frac{1}{2}\int_0^t ||G(X_s)||_V^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t < G''(X_s)\left(R(X_s)Q_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(R(X_s)Q_1^{\frac{1}{2}}\right)^*, Y_s >_V ds \Big) \end{aligned}$$

Preuve: En intégrant par parties l'intégrale stochastique $\int_0^t < G(X_s),\, dY_s >_V$ nous obtenons :

$$\int_0^t < G(X_s),\, dY_s >_V = < G(X_t)\,, Y_t >_V - \int_0^t < dG(X_s),\, Y_s >_V . \tag{5.3}$$

D'autre part, en appliquant la formule d'Itô démontrée par M.Métivier dans [67], nous avons :

$$dG(X_t) = G'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}G''(X_t)d \ll X \gg_t \tag{5.4}$$

où $\ll X \gg_t$ désigne la variation quadratique du processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$, définie en [18].

De plus, la variation quadratique du processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ peut être calculée à l'aide du résultat suivant, démontré dans [18] :

Théorème 5.4.2 *Pour tout* Q*–processus de Wiener* $(W_t)_{t\in[0,T]}$, *à valeurs dans* U, *et pour tout processus stochastique* $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$ *de* $\mathcal{N}_W^2(0,T;L_2^0)$, *le processus stochastique* $\left(\int_0^t \phi_s\, dW_s\right)_{t\in[0,T]}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *martingale continue de carré intégrable et sa variation quadratique est donnée par :*

$$\ll \int_0^{\cdot} \phi_s\, dW_s \gg_t = \int_0^t \left(\phi_s\, Q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\phi_s\, Q^{\frac{1}{2}}\right)^* ds.$$

Ainsi, l'égalité (5.4) devient :

$$dG(X_t) = G'(X_t)(F(X_t)dt+R(X_t)dW_1(t))+\frac{1}{2}G''(X_t)\left(R(X_t)Q_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(R(X_t)Q_1^{\frac{1}{2}}\right)^* dt \tag{5.5}$$

et le résultat de la Proposition 5.4.1 se déduit alors facilement de (5.3) et (5.5).

□

Remarque 5.4.3 *Si le processus d'observation est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ alors, le résultat de la Proposition 5.4.1 est immédiat par utilisation de la formule d'Itô prouvée dans [18] par exemple.*

Afin de fixer la valeur de Y_t dans la définition du processus $(Z_t)_{t\in[0,T]}$, définissons pour tout y dans $C([0,T],V)$, le processus stochastique $(Z_t(y))_{t\in[0,T]}$ par :

$$\begin{aligned} Z_t(y) &= \exp\Big(< G(X_t), y(t) >_V - \int_0^t < G'(X_s)F(X_s), y(s) >_V ds \\ &- \int_0^t < y(s), G'(X_s)R(X_s)dW_1(s) >_V - \frac{1}{2}\int_0^t ||G(X_s)||_V^2 ds \quad (5.6) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t < G''(X_s)\left(R(X_s)Q_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(R(X_s)Q_1^{\frac{1}{2}}\right)^*, y(s) >_V ds\Big). \end{aligned}$$

De plus, la définition du processus stochastique $(Z_t(y))_{t\in[0,T]}$ donnée en (5.6) implique que pour tout $t \in [0,T]$, nous avons $Z_t = Z_t(Y)$.

Maintenant, définissons de manière analogue à E.Pardoux [74], deux collections de mesures sur H de la façon suivante.

Définition 5.4.4 *Pour toute fonction ϕ dans $UC_b^0(H,\mathbb{R})$, notons $\sigma_t(y,\phi)$ et $\pi_t(y,\phi)$ les deux collections de mesures sur H, indexées par $(t,y) \in [0,T] \times C([0,T],V)$, définies par :*

$$\sigma_t(y,\phi) = \overline{E}(\phi(X_t)\, Z_t(y))$$

et

$$\pi_t(y,\phi) = \sigma_t(y,1)^{-1}\, \sigma_t(y,\phi).$$

D'après cette définition, les processus $\sigma_t(\phi)$ et $\sigma_t(Y,\phi)$ sont indistinguables et, par utilisation de la formule de Kallianpur-Striebel, on en déduit que les processus $\pi_t(\phi)$ et $\pi_t(Y,\phi)$ sont eux aussi indistinguables.

En tenant compte de cette dernière remarque, nous pouvons démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.4.5 *Pour tout $t \in [0,T]$, les applications $y \mapsto \sigma_t(y,.)$ et $y \mapsto \pi_t(y,.)$ sont continues de $\mathcal{C}([0,T],V)$ dans $\mathcal{M}_+(H)$, l'espace des mesures positives sur H, muni de la convergence étroite.*

De plus, pour toute fonction ϕ dans $UC_b^0(H,\mathbb{R})$, les applications $y \mapsto \sigma_t(y,\phi)$ et $y \mapsto \pi_t(y,\phi)$ sont localement lipschitziennes de $\mathcal{C}([0,T],V)$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve: Soient $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{C}([0,T],V)$ convergeant vers y, et ϕ une fonction de $UC_b^0(H,\mathbb{R})$.

Pour démontrer la première partie du Théorème 5.4.5, il nous suffit de prouver que la suite $(\sigma_t(y_n,\phi))_{n\geq 0}$ converge vers $\sigma_t(y,\phi)$.

D'après la Définition 5.4.4, nous obtenons :

$$\sigma_t(y_n,\phi) = \overline{E}(\phi(X_t)\, Z_t(y_n)) = \int_\Omega \phi(X_t)\, Z_t(y_n)\, d\overline{P}.$$

Or, la suite $(\phi(X_t)Z_t(y_n))_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers le processus $\phi(X_t)Z_t(y)$ et, il existe une constante positive K telle que $|\phi(X_t)Z_t(y)| \leq K$ presque sûrement. Donc, d'après le théorème de Lebesgue, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \phi(X_t)\, Z_t(y_n)\, d\overline{P} = \int_\Omega \phi(X_t)\, Z_t(y)\, d\overline{P}$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_t(y_n,\phi) = \sigma_t(y,\phi).$$

Ainsi, l'application $y \mapsto \sigma_t(y,.)$ est continue de $\mathcal{C}([0,T],V)$ dans $\mathcal{M}_+(H)$ muni de la convergence étroite.

Prouvons maintenant la deuxième partie du Théorème 5.4.5, c'est à dire que l'application $y \mapsto \sigma_t(y, \phi)$ est lipschitzienne.

La fonction ϕ étant bornée, il existe une constante positive C_1 telle que

$$\left| \int_\Omega \phi(X_t) Z_t(y) d\bar{P} - \int_\Omega \phi(X_t) Z_t(y') d\bar{P} \right| \leq C_2 \int_\Omega |Z_t(y) - Z_t(y')| d\bar{P} \qquad (5.7)$$

pour tous y, y' dans $\mathcal{C}([0,T], V)$.

D'autre part, en notant $Z_t(y) = \exp(V_t(y))$, nous montrons facilement qu'il existe une constante positive C_2 telle que :

$$\begin{aligned} |Z_t(y) - Z_t(y')| &\leq |V_t(y) - V_t(y')|.|\exp(V_t(y)) - \exp(V_t(y'))| \\ &\leq C_3 |V_t(y) - V_t(y')| \qquad (5.8) \end{aligned}$$

et, d'après la Proposition 5.4.1, nous avons :

$$\begin{aligned} |V_t(y) - V_t(y')| \leq \; & |< G(X_t), y(t) - y'(t) >_V| \\ & + \int_0^t |< y(s) - y'(s), G'(X_s) R(X_s) dW_1(s) >_V| \\ & + \int_0^t |< y(s) - y'(s), G'(X_s) F(X_s) >_V| ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t |< y(s) - y'(s), G''(X_s) \left(R(X_s) Q_1^{\frac{1}{2}} \right) \left(R(X_s) Q_1^{\frac{1}{2}} \right)^\star >_V ds. \end{aligned}$$

De plus, comme le processus $\left(\int_0^t |< y(s) - y'(s), G'(X_s) R(X_s) dW_1(s) >_V| \right)_{t \in [0,T]}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ martingale locale, nous obtenons, en prenant l'espérance sous la probabilité $\overline{P}$ dans les deux membres de cette inégalité :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |V_t(y) - V_t(y')| d\bar{P} \leq \; & \bar{E}(|< G(X_t), y(t) - y'(t) >_V|) \\ & + \bar{E}\left(\int_0^t |< y(s) - y'(s), G'(X_s) F(X_s) >_V| ds \right) \\ & + \frac{1}{2} \bar{E}\left(\int_0^t |< y(s) - y'(s), G''(X_s) \left(R(X_s) Q_1^{\frac{1}{2}} \right) \left(R(X_s) Q_1^{\frac{1}{2}} \right)^\star >_V ds \right) \end{aligned}$$

Finalement, comme toutes les fonctions apparaissant dans l'expression précédente sont bornées, l'inégalité de Cauchy–Schwarz entraîne que

$$\int_\Omega |V_t(y) - V_t(y')| d\bar{P} \leq C_3 \|y - y'\|_\infty \tag{5.9}$$

où C_3 est une constante positive.

D'autre part, d'après (5.7) et (5.8) nous avons

$$|\sigma_t(y, \phi) - \sigma_t(y', \phi)| \leq C_1 \, C_2 \int_\Omega |V_t(y) - V_t(y')| d\overline{P}$$

et, en utilisant la majoration obtenue pour $\int_\Omega |V_t(y) - V_t(y')| d\overline{P}$ dans (5.9), nous en déduisons qu'il existe une constante positive C ($C = C_1 C_2 C_3$) telle que

$$|\sigma_t(y, \phi) - \sigma_t(y', \phi)| \leq C \, \|y - y'\|_\infty \tag{5.10}$$

ce qui implique que l'application $y \longmapsto \sigma_t(y, \phi)$ est localement lipschitzienne de $\mathcal{C}([0,T], V)$ dans $\mathbb{R}$.

De plus, comme nous pouvons démontrer, de manière analogue qu'en dimension finie, que $\sigma_t(y, 1)^{-1}$ est borné, nous déduisons de l'inégalité (5.10) que l'application $y \longmapsto \pi_t(y, \phi)$ est localement lipschitzienne de $\mathcal{C}([0,T], V)$ dans $\mathbb{R}$.

□

Bibliographie

[1] N.U.Ahmed, Nonlinear filtering for stochastic differential equations on Hilbert spaces. Actes de 14th IMACS World Congress, Georgia Tech, Atlanta (Ga) (1994) 5–8.

[2] N.U.Ahmed, M.Fuhrman, J.Zabczyk, On filtering equations in infinite dimensions. *Journal of Functional Analysis* **143** (1997) 180–204.

[3] N.U.Ahmed, J.Zabczyk, Nonlinear filtering for semilinear stochastic differential equations on Hilbert spaces. *Preprint 522 of the Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences*, Mars 1994.

[4] J.Baras, G.Blankenship, W.Hopkins, Existence, uniqueness and asymptotic behaviour of solutions of a class of Zakai equation with unbounded coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC 28** (1983) 203–214.

[5] V.E.Beněs, Exact finite dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift. *Stochastics and Stochastics Reports* **5** (1981) 65-92.

[6] A.Bensoussan, Filtrage optimal des systèmes linéaires. Dunod, Paris (1971).

[7] A.Bensoussan, On some approximation techniques in nonlinear filtering. *Stochastic Differential Systems, Stochastic Control and Applications*, (Minneapolis 1986), Springer (1988).

[8] A.Bensoussan, R.Glowinski, A.Rascanu, Approximation of Zakai equation by the splitting–up method. In : J.Zabczyk (ed.), Stochastic Systems

and Optimization *Lecture Notes in Control and Information Sciences* **136** (1989).

[9] A.Bhatt, G.Kallianpur, R.L.Karandikar, Uniqueness and robustness of solution of measure valued equations of nonlinear filtering. Technical Report 431. Center for Stochastic Processes, University of North Carolina, Chapel Hill (1994).

[10] J.M.Bismut, D.Michel, Diffusions conditionnelles. *Journal of Functional Analysis* Part I **44** (1981) 174–211, Part II **4** (1982) 274–292.

[11] V.Bogachev, M.Röckner, B.Schmuland, Generalized Mehler semigroups and applications. *Probability Theory and Related Fields* **105** (2) (1996) 193–225.

[12] P.Cannarsa, V.Vespri, Existence and uniqueness of solutions to a class of stochastic partial differential equations. *Stochastic Analysis and Applications* **3** (1985) 315–339.

[13] M.Chaleyat-Maurel, D.Michel, Hypoellipticity theorems and conditional laws. *Zeit. Wahr. Verw. Geb.* **65** (1984) 573–597.

[14] M.Chaleyat-Maurel, D.Michel, Des résultats de non existence de filtre de dimension finie. *Stochastics and Stochastics Reports* **13** (1984) 83-102.

[15] M.Chaleyat-Maurel, D.Michel, Une propriété de continuité en filtrage non linéaire. *Stochastics and Stochastics Reports* **19** (1986) 11-40.

[16] J.M.C.Clark, The design of robust approximations to the stochastic differential equations of nonlinear filtering. In : J.Skwirzynski (ed.), *Communication Systems and Random Process Theory* Sijthoff and Noordhoof (1978).

[17] R.F.Curtain, A.J.Pritchard, Infinite dimensional linear systems theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer–Verlag (1978).

[18] G.Da Prato, J.Zabczyk, Stochastic equations in infinite dimensions. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **44** Cambridge University Press (1992).

[19] G.Da Prato, J.Zabczyk, Regular densities of invariant measures in Hilbert spaces. *Journal of Functional Analysis* **130** (1995) 427–449.

[20] M.H.A.Davis, Pathwise nonlinear filtering. In: M.Hazenwinkel and J.Willems (eds.), Stochastic Systems the Mathematics of Filtering and Identification and Applications, Reidel, Dordrecht (1981).

[21] M.H.A.Davis, S.I.Marcus, An introduction to nonlinear filtering. In: M.Hazenwinkel and J.Willems (eds.), Stochastic Systems the Mathematics of Filtering and Identification and Applications, Reidel, Dordrecht (1981).

[22] M.H.A.Davis, M.Spathopoulos, Pathwise nonlinear filtering for nondegenerate diffusions with noise correlation. *SIAM Journal on Control and Optimization* **25** (1987) 260-278.

[23] G.Di Masi, W.Runggaldier, Continuous–time approximations for the nonlinear filtering problem. *Applied Mathematics and Optimization* **7** 3 (1981) 233–245.

[24] G.Di Masi, M.Pratelli, W.Runggaldier, An approximation for the nonlinear filtering problem with error bound. *Stochastics and Stochastics Reports* **14** 4 (1985) 247–271.

[25] M.N.Dietsch, Continuity with respect to the trajectory of the observation of the filter associated to systems in infinite dimensions. *Proceedings of Prague Stochastics'98*, Prague (Cz) (1998) 103–106.

[26] M.N.Dietsch, Filtering of a partially observed process in the case of a high signal–to–noise ratio for correlated systems. *Stochastic Analysis and Applications* **18** 3 (2000) 347–360.

[27] M.N.Dietsch, A continuity property for the filter associated to Hilbert–space valued systems. *Systems and Control Letters* **40** 3 (2000) 165–171.

[28] M.N.Dietsch, Existence of a density for the filter associated to Hilbert–space valued systems. *Proceedings of the* 39*th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney (Aus) (2000).

[29] M.N.Dietsch, Filtering equations for nonlinear filtering in infinite dimensions. Soumis pour publication.

[30] M.N.Dietsch, Nonlinear filtering for Hilbert–space valued systems. Soumis pour publication.

[31] R.Elliott, R.Glowinski, Approximations to solutions of the Zakai filtering equation. *Stochastic Analysis and Applications* **7** 2 (1988) 145–168.

[32] R.J.Elliott, M.Kohlmann, Robust filtering for correlated multidimensional observations. *Math. Z.* **178** (1981) 559-578.

[33] R.J.Elliott, J.B.Moore, Zakai equation for Hilbert space valued processes. *Stochastic Analysis and Applications* **16** (4) (1998) 597-605.

[34] G.S.Ferreyra, Smoothness of the unnormalized conditional measures of stochastic nonlinear filtering. Proceedings of 23rd *IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas (NV), (1984).

[35] W.H.Fleming, D.Ji, E.Pardoux, Piecewise linear filtering with small observation noise. *Proceedings 8th International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, Antibes 1988, Lecture Notes in Control and Information Sciences **111** Springer Verlag, Berlin (1988) 725-739.

[36] W.H.Fleming, D.Ji, P.Salame, Q.Zhang, Discrete time piecewise linear filtering with small observation noise. Brown University Providence RI 02912, Division of Applied Mathematics, September 1988 LCDS/CCS 88-27.

[37] W.H.Fleming, S.K. Mitter, Optimal control and pathwise nonlinear filtering of non degenerate diffusions. *Stochastics and Stochastics Reports* **8** (1) (1982) 63–77.

[38] W.H.Fleming, E.Pardoux, Piecewise monotone filtering with small observation noise. *SIAM Journal on Control and Optimization* **27** (1989) 1156-1181.

[39] P.Florchinger, Continuité par rapport à la trajectoire de l'observation du filtre associé à des systèmes corrélés à coefficients de l'observation non bornés. *Stochastics and Stochastics Reports* **28** (1989) 21-64.

[40] P.Florchinger, Malliavin calculus with time depending coefficients and application to nonlinear filtering. *Probability Theory and Related Fields* **86** (1990) 203-233.

[41] P.Florchinger, Zakai equation of nonlinear filtering with unbounded coefficients. The case of dependent noises. *Systems and Control Letters* **21** (1993) 413–422.

[42] P.Florchinger, Nonlinear filtering in infinite dimensional spaces. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego (CA), (1997).

[43] P.Florchinger, F.Le Gland, Time–discretization of the Zakai equation for diffusion processes observed in correlated noise. *Stochastics and Stochastics Reports* **35** (1991) 233–256.

[44] M.Fuhrman, Analyticity of transition semigroups and closability of bilinear forms in Hilbert spaces, *Studia Math. (1)* **115** (1995) 53-71.

[45] M.Fujisaki, G.Kallianpur, H.Kunita, Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem. *Osaka Journal of Mathematics* **9** (1972) 19–40.

[46] A.Gegout-Petit, Filtrage d'un processus partiellement observé et équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies. Thèse, Université de Provence (1995).

[47] A.Gegout-Petit, Approximate filter for the conditional law of a partially observed process in nonlinear filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization* **36**(4) (1998) 1423-1447.

[48] W.Hopkins, Nonlinear filtering of non degenerate diffusions with unbounded coefficients. Thèse, University of Maryland at College Park (1982).

[49] K.Ito, Approximation of the Zakai equation for nonlinear filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization* **34** (1996) 620–634.

[50] K.Ito, B.Rozovkii, Approximation of the Kushner equation for nonlinear filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization* **38** 3 (2000) 893–915.

[51] G.Kallianpur, Stochastic filtering theory. Springer Verlag, Berlin (1980).

[52] R.Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng ASME* **82** (1960) 33-45.

[53] R.Kalman, R.Bucy, New results in nonlinear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng ASME* **83** (1961) 95-108.

[54] R.Katzur, B.Bobrovski, Z.Schuss, Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one dimensional diffusions measured in a low noise chanel. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **44** (1984) Part I: 591-604, Part II: 1176-1191.

[55] H.Korezlioglu, G.Mazziotto, Approximations of the nonlinear filter by periodic sampling and quantization. In : A.Bensoussan and J.L.Lions (eds.), Analysis and Optimization of Systems *Lecture Notes in Control and Information Sciences* **62** (1984) 553–567.

[56] N.Krylov, B.Rozovsky, On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations. *Math. USSR Izvestija* **11** (1977) 1267–1284.

[57] H.Kunita, Densities of measure–valued process governed by a stochastic partial differential equation. *Systems and Control Letters* **1** (1981) 100–104.

[58] H.Kunita, Stochastic flows and stochastic differential equations. Cambridge University Press (1990).

[59] H.J.Kushner, Dynamical equations for optimal nonlinear filtering. *Journal of Differential Equations* **3** (1967) 179–190.

[60] H.J.Kushner, Filtering for linear distributed parameter systems, *SIAM Journal on Control* **8** (1970) 346-359.

[61] H.J.Kushner, Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations. Academic Press (1977).

[62] F.Le Gland, Time discretization of nonlinear filtering equations. *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa (1994) 2601-2606.

[63] J.Levine, Finite dimensional filters for a class of nonlinear systems and immersion in a linear system. *SIAM Journal on Control and Optimization* **25** (1987) 1430-1439.

[64] R.S.Lipster, A.N. Shiryayev, Statistics of random processes. Springer-Verlag, Berlin, Vol. 1 (1977), Vol. 2 (1978).

[65] S.Lototsky, R.Mikulevicius, B.Rozovskii, Nonlinear filtering revisited : A spectral approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* (à paraitre).

[66] Z.M.Ma, M.Röckner, Introduction to the theory of non-symmetric Dirichlet forms. Springer Verlag, Berlin (1992).

[67] M.Métivier, Semimartingales. De Gruyter (1974).

[68] D.Michel, Régularité des lois conditionnelles en théorie du filtrage non linéaire et calcul des variations stochastiques. *Journal of Functional Analysis* **41** (1981) 3-36.

[69] P.Milheiro de Oliveira, Etudes asymptotiques en filtrage non linéaire avec petit bruit d'observation. Thèse, Université de Provence (1990).

[70] J.Y.Ouvrard, Martingales locales et théorème de Girsanov dans les espaces de Hilbert réels séparables. *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **B 94** (1973) 351-368.

[71] E.Pardoux, Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones. Thèse, Université Paris XI (1975).

[72] E.Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes. *Stochastics and Stochastics Reports* **3** (2) (1979) 127-167.

[73] E.Pardoux, Equations du filtrage non linéaire de la prédiction et du lissage. *Stochastics and Stochastics Reports* **6** (1982) 193–231.

[74] E.Pardoux, Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX, *Lectures Notes in Mathematics* **1464**, Springer Verlag, Berlin (1991) 67-163.

[75] J.Picard, Filtrage de diffusions vectorielles faiblement bruitées. Analysis and Optimisation of Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* **83**, Springer (1986).

[76] J.Picard, Nonlinear filtering of one–dimensional diffusions in the case of a high signal–to–noise ratio. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **46** (1986) 1098-1125.

[77] J.Picard, Asymptotic study of estimation problems with small observation noise. *Stochastic Modelling and Filtering*, Rome 1984, Lecture Notes in Control and Information Sciences **91** Springer Verlag, Berlin (1987).

[78] J.Picard, Efficiency of the extended Kalman filter for nonlinear systems with small noise. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **51** 3 (1991) 843–885.

[79] H.J.Sussmann, On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations. *Annals of Probability* **6** (1978) 19-41.

[80] H.J.Sussmann, Rigorous results on the cubic sensor problem. In: Hazenwinkel and Willems (eds.), Stochastic Systems the Mathematics of Filtering and Identification and Applications, Reidel, Dordrecht (1981).

[81] H.J.Sussmann, Les équations différentielles du filtrage non linéaire. *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des Systèmes et le Traitement du Signal* **3** (1983) 639-648, ed. CNRS.

[82] Y.Takeuchi, H.Akashi, On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations. *Annals of Probability* **6** (1978) 19-41.

[83] W.S.Wong, On a new class of finite dimensional estimation algebras. *Systems and Control Letters* **9** (1987) 78–83.

[84] I.Yaesh, B.Z.Bobrovsky, Z.Schuss, Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for two dimensional diffusions measured in a low noise chanel. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **50** (1990) 1134-1155.

[85] K.Yoshida, Functional Analysis. Springer Verlag, Berlin (1965).

[86] M.Zakai, On the optimal filtering of diffusion processes. *Zeit. Wahr. Verw. Geb.* **11** (3) (1969) 230–243.

[87] O.Zeitouni, A.Dembo, On the maximal achievable accuracy in nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **33** 10 (1988) 965–967.