Université de Metz

UFR MIM

Département de mathématiques

Stabilisation des systèmes non linéaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 31 MARS 2000

pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Metz

(spécialité mathématiques appliquées)

par

Ourida CHABOUR

Composition du jury

Rapporteurs : G. Bornard, Directeur de Recherche CNRS.
H. Hammouri, Professeur à l'Université de Lyon I.
T. Sari, Professeur à l'Université de Mulhouse.

Examinateurs : M. Moussaoui, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon. Président.
G. Sallet, Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.
J.C. Vivalda, Chargé de Recherche à l'INRIA-Lorraine.

Thèse présentée dans le cadre du projet CONGE (Inria-Lorraine)

Université de Metz

UFR MIM

Département de mathématiques

Stabilisation des systèmes non linéaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 31 MARS 2000

pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Metz

(spécialité mathématiques appliquées)

par

Ourida CHABOUR

Composition du jury

Rapporteurs : G. Bornard, Directeur de Recherche CNRS.
H. Hammouri, Professeur à l'Université de Lyon I.
T. Sari, Professeur à l'Université de Mulhouse.

Examinateurs : M. Moussaoui, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon. Président.
G. Sallet, Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.
J.C. Vivalda, Chargé de Recherche à l'INRIA-Lorraine.

Thèse présentée dans le cadre du projet CONGE (Inria-Lorraine)

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais témoigner ma profonde gratitude au professeur Gauthier SALLET, directeur de recherche à l'INRIA-Lorraine, pour m'avoir accueilli dans son équipe, pour mon initiation à un domaine de recherche très passionnant, pour les compétences qu'il m'a apporté et la confiance qu'il m'a octroyé lors de l'accomplissement de ce travail.

J'adresse ma reconnaissance à Monsieur G. BORNARD directeur de recherche au CNRS, Monsieur H. HAMMOURI professeur à l'université Claude Bernard Lyon I, Monsieur T. SARI professeur à l'université de Mulhouse, qui m'ont accordé l'insigne honneur de rapporter cette thèse.

J'exprime également mes vifs remerciements à Monsieur M. Moussaoui professeur à l'Ecole Centrale de Lyon pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

La préparation de cette thèse a été faite au sein du projet CONGE de L'INRIA. A ce titre je tiens à remercier ses membres, et en particulier R. CHABOUR et J.C VIVALDA qui m'ont toujour été disponibles pour m'accorder aide et soutien et me faire profiter de leurs larges connaissances scientifiques. Je remercie également mes collègues de bureau P. Adda et H. Zenati pour leur gentiesse et leurs encouragements ainsi que C. Wiemert pour sa disponibilité.

Cette thèse a été financée par une bourse inter-gouvernementale Algéro-Francaise. Que les autorités de mon pays Hôte et de mon pays d'Origine soient infiniment remerciés de m'avoir donné cette chance de reprendre des études depuis longtemps interrompues.

Ma reconnaissance va également à mon père qui m'a toujour encouragé dans cette voie, à ma belle soeur et à toute ma famille sans qui ce travail n'aurait pû être. Comme je tiens à dédier ce modeste travail à Lisa, Sarah et à tous mes amis.

Table des matières

Introduction Générale

Introduction générale

La théorie mathématique du contrôle a connu un développement très important et son champ d'application couvre actuellement de nombreux domaines, notamment l'industrie, l'économie, la biologie .... .

Cette théorie fait appel à de nombreux outils mathématiques et repose sur une grande variété de modèles. Nous avons des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, ou intégrales ou intégro-différentielles, lorsque les variables caractéristiques des processus à étudier sont des fonctions de la variable d'espace. Les systèmes sont représentés mathématiquement par des équations différentielles ou par des équations aux différences, lorsque les processus sont décrits par un nombre fini de grandeurs. Les systèmes sont stochastiques, lorsque les phénomènes aléatoires interviennent.

L'un des thèmes important de cette théorie est la stabilisation de ces systèmes. Pour les systèmes régis par des équations différentielles ordinaires autonomes, le problème de la stabilisation peut s'énoncer ainsi: étant donné un système dont l'évolution peut être décrite par le système différentiel $\dot{x} = F(x,u)$ où x représente l'état du système et u la commande que l'opérateur applique, on étudie la possibilité de trouver un feedback $u = u(x)$, aussi "régulier" que possible, tel que le système en boucle fermée $\dot{x} = F(x,u(x))$, qui devient un système d'équations différentielles, soit "asymptotiquement" stable au voisinage d'un équilibre x_0, cette stabilité pouvant être de type locale ou globale. Notons que d'autres types de stabilité ont été introduites; citons la stabilité pratique et la semi global stabilité. Dans le cas des systèmes linéaires ce problème à été largement étudié et une théorie complète est disponible dans la littérature. Pour les systèmes non linéaires, le problème reste essentiellement ouvert; les résultats restent limités à des classes particulières de systèmes.

Pour étudier la stabilité d'un système, on se réfère généralement aux résultats de Lyapounov connus en théorie qualitative sous le nom de méthode directe (Cf. [41]), car elle ne nécessite pas la résolution du système. Une fonction de Lyapounov est une fonction définie positive et nulle seulement en la singularité x_0 que l'on étudie, et qui décroît le long des trajectoires non réduites à x_0. Lyapounov a montré que l'existence d'une telle fonction, permettait de conclure sur l'asymptotique stabilité du système. En effet, il suffit de vérifier que pour un système dynamique $\dot{x} = F(x)$, $\nabla V.F(x) \leq 0$, $\forall x \neq x_0$. Cette inégalité peut s'interpréter géométriquement comme suit: sur toute surface de niveau V(x) = k, centrée en la singularité x_0, toute trajectoire issue de x est rentrante par rapport au domaine $\{y : V(y) \leq k\}$.

Ce sont ces techniques qui sont à la base des résultats de stabilisation globale: méthode de Jurdjevic Quinn (Cf. [38], [51], [67], [72]), utilisation des fonctions de Lyapounov contrôlées (Cf. [4], [83], [86]), et autres résultats (Cf. [28], [84]).

Remarquons que, pour une stabilisation de type locale, on se réfère généralement à des systèmes plus simples tels les systèmes linéaires, les systèmes homogènes ou les systèmes passifs.

Dans ce mémoire, notre étude a porté sur la stabilisation par retour d'état de certaines classes de systèmes déterministes et de systèmes stochastiques.

Ce travail est donc divisé en deux parties.

Dans la première partie, nous nous intéressons à certaines classes de systèmes homogènes déterministes. Cette partie est composée de trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions sur la stabilité et la stabilisation des systèmes déterministes.

Dans le deuxième chapitre nous étudions les systèmes bilinéaires du type $\dot{x} = Ax + uBx$.

Le premier travail porte sur la stabilisation d'une classe particulière de ces systèmes.

Nous commençons par montrer que ces systèmes sont globalement pratiquement stabilisables. La notion de stabilité pratique que nous utilisons consiste à dire que les trajectoires du système rentrent au bout d'un certain temps dans une petite boule centrée au point d'équilibre du système et n'en ressortent plus. Ainsi, nous donnons une famille de feedbacks linéaires $u(x) = k_r(x)$, $r > 0$, qui assure que toutes les trajectoires du système en boucle fermée $\dot{x} = Ax + k_r(x)Bx$, rentrent dans la boule $B(0,r)$ au bout d'un certain temps T et n'en ressortent plus. Ce résultat est en fait une généralisation d'un résultat de Čelikovský donné dans [30], pour une classe particulière de systèmes en dimension 3.

Ensuite, en utilisant un résultat de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires donné dans [1] par V. Andriano nous montrons que ces systèmes sont globalement asymptotiquement stabilisables par une commande homogène bornée.

D'autre part, nous introduisons une notion de passivité pratique qui consiste à dire qu'un système est passif pratiquement s'il est passif en dehors d'une boule $B(0,r)$ de rayon r suffisamment petit. Nous montrons ensuite que la passivité pratique de ces systèmes entraîne la stabilisation pratique par un retour de sortie. Ce travail a fait l'objet des publications [20] et [22].

Le deuxième travail concerne l'étude du lien entre la locale et la globale asymptotique stabilité de ces systèmes.

Certains auteurs ont considéré ce problème en s'appuyant sur le théorème de Masséra. Ainsi, Hammouri et Marques dans [42] ont montré que la locale asymptotique stabilité impliquait la globale asymptotique stabilité en posant une condition sur les surfaces de niveau induites par ce théorème.

Dans [2], Andriano considère ce problème mais ne pose aucune condition sur les surfaces de niveau.

Dans [24], nous montrons, à l'aide d'un contre exemple que l'on ne peut s'affranchir de cette hypothèse.

Dans le chapitre 3, nous généralisons une partie des résultats précédents, à des classes de systèmes homogènes.

Nous établissons des conditions suffisantes de stabilisation d'abord dans le cas particulier où le champ soumis au contrôle est linéaire, puis pour un champ contrôlé quelconque. Nous montrons que ces résultats s'étendent à des systèmes homogènes par rapport à une famille de dilatations quelconques. Ce travail a fait l'objet des publications [21] et [22].

Dans la deuxième partie de ce travail, nous étendons certains des résultats de stabilisation de systèmes déterministes à des systèmes stochastiques.

Nous commençons par un rappel sur les notions de stabilité des systèmes stochastiques.

Notre premier résultat porte sur la stabilisation d'une classe de systèmes partiellement linéaires lorsque les phénomènes aléatoires interviennent sur ces systèmes. Dans le cas des systèmes déterministes ce problème à été étudié par A. Saberi, P.V. Kokotovich, et H.J. Sussmann dans [77].

Le deuxième résultat est une généralisation d'un travail de P. Florchinger [39], qui a étudié une classe de systèmes en cascade lorsque la partie non contrôlée du système est soumise à des phénomènes aléatoires. Pour les systèmes que nous étudions nous considérons que toutes les parties du système sont soumises aux phénomènes aléatoires.

Ces travaux ont fait l'objet des publications [25] et [26].

Chaque partie est précédée d'une introduction ce qui devrait permettre d'avoir une idée précise des problèmes traités.

Première partie

Stabilisation des systèmes déterministes

Chapitre 1 Rappels et Généralités

Chapitre 1

Rappels et Généralités

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions et résultats fondamentaux sur la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires.
Les systèmes linéaires sont d'un intérêt particulier, car souvent, c'est à leur théorie que l'on se référera pour une étude locale des systèmes non linéaires.

1.1 Notions de stabilité

1.1.1 Définitions

On considère le système autonome défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ F(x_0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

où F est un champ de vecteur globalement lipshitzien sur $\mathbb{R}^n$.
On désigne par $F_t(x)$ la solution de (1.1) issue du point x à l'instant $t = 0$ soit

$$\frac{dF_t(x)}{dt} |_{t=0} = F(x) \text{ et } F_0(x) = x.$$

Définition 1.1 *On dira que x_0 est un point d'équilibre stable pour le système (1.1) si:* $\forall \epsilon > 0, \quad \exists\, \alpha(\epsilon) > 0$, *tel que* $\|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall t \geq 0, \|F_t(x) - x_0\| < \epsilon$.

Définition 1.2 *On dira que x_0 est localement attractif pour le système (1.1) s'il existe un voisinage U de x_0 tel que $\forall x \in U$, $F_t(x)$ existe pour tout $t \geq 0$ et $\lim_{t\to\infty} F_t(x) = x_0$. Si $U = \mathbb{R}^n$, x_0 est globalement attractif.*

Définition 1.3 *On dira que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable (resp. globalement asymptotiquement stable) s'il est stable et localement attractif (resp. stable et globalement attractif).*

Pour étudier la stabilité d'un système on se référera souvent à la théorie de Lyapounov connue en théorie qualitative sous le nom de méthode directe car elle ne nécessite pas la résolution du système [41].

1.1.2 Fonctions de Lyapounov

Définition 1.4 *Une fonction $V: U \to \mathbb{R}$ continue sur un voisinage U de x_0, et différentiable sur $U - \{x_0\}$ telle que:*

- $V(x_0) = 0$ *et* $V(x) > 0$ *si* $x \neq x_0$
- $\dot{V}(x) = F.V(x) \leq 0 \; \forall x \in U$ *où* $F.V(x) = \frac{d}{dt} V F_t(x)|_{t=0} = < \nabla V(x), F(x) >$ *est appelée fonction de Lyapounov large pour (1.1) en* x_0.

  Si de plus la fonction vérifie la condition:
- $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U - \{x_0\}$ *alors V est appelée fonction de Lyapounov stricte pour (1.1) en* x_0.

Théorème 1.1 Lyapounov *Si le système (1.1) admet une fonction de Lyapounov large (resp. stricte) alors x_0 est un point d'équilibre stable (resp. asymptotiquement stable) pour le système considéré.*

Théorème 1.2 Lyapounov (version globale) *S'il existe $V : M \to \mathbb{R}$ définie positive et propre (c'est à dire l'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^+$ est un compact de M) tel que $F.V(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}$ et $F.V(x_0) = 0$ alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (1.1).*

Nous avons aussi le résultat suivant connu sous le nom du théorème inverse.

Théorème 1.3 Zoubov [90] Massera [69] Kurzwill [60] *Si F est continue et si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors le système (1.1) admet une fonction de Lyapounov stricte qui est de classe C^∞ dans un voisinage de x_0.*

Les théorèmes précédents montrent que pour prouver qu'un point d'équilibre d'un système est asymptotiquement stable il suffit de trouver une fonction de Lyapounov stricte pour le système considéré. L'application du principe d'invariance de Lasalle [64] permet de conclure sur l'asymptotique stabilité du système en considérant une fonction de Lyapounov large pour le système. Rappelons le résultat:

Définition 1.5 *Un ensemble E non vide de $\mathbb{R}^n$ est positivement invariant pour (1.1) si:*

$$\forall x \in E, \;\; F_t(x) \in E, \;\; \forall t \geq 0$$

Théorème 1.4 [64] *Soit Ω un ensemble positivement invariant pour (1.1). On suppose que chaque solution qui démarre de Ω converge vers un ensemble E de Ω et soit M le plus grand ensemble invariant par F contenue dans E. Alors toute solution bornée qui démarre de Ω converge vers M.*

Une application de ce théorème très utile en pratique est donnée par le corollaire suivant qui permet de conclure sur l'asymptotique stabilité du système.

Corollaire 1.1 *: Soit V une fonction de Lyapounov large de classe C^1 pour (1.1) en x_0 et propre ($\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$). Soit M le plus grand ensemble invariant par F et contenu dans $E = \{ x \in \mathbb{R}^n / F.V(X) = 0\}$. Si $M = \{x_0\}$, x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.*

Dans le prochain chapitre nous allons conclure sur l'asymptotique stabilité du système en considérant des fonctions de Lyapounov semi définies.

1.1.3 Fonctions de Lyapounov semi définies

Nous étendons les résultats classiques de Lyapounov à des fonctions semi définies positives. Pour ceci introduisons les notions de stabilité conditionnelle par rapport à un ensemble et d'attractivité conditionnelle par rapport à un ensemble.

Soit Z un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.6 *Le système (1.1) est stable conditionnellement à Z en x_0 si:*
$x_0 \in Z,\ \forall \epsilon > 0,\ \ \exists\ \delta(\epsilon) > 0$ *tel que* $x \in Z$ *et* $\|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow \|F_t(x) - x_0\| < \epsilon,\ \forall t \geq 0.$

Définition 1.7 *Le système (1.1) est attractif conditionnellement à Z en x_0 si:*
$x_0 \in Z,\ \exists\ \Omega(x_0) > 0$ *tel que* $\|x - x_0\| < \Omega(x_0)$ *et* $x \in Z \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|F_t(x) - x_0\| = 0.$

Définition 1.8 *Le système (1.1) est asymptotiquement stable conditionnellement à Z (resp. globalement asymptotiquement stable conditionnellement à Z) s'il est stable conditionnellement à Z et attractif conditionnellement à Z (resp. asymptotiquement stable conditionnellement à Z et $\Omega(x_0) = +\infty$).*

Nous avons alors le résultat suivant de stabilité en considérant une fonction V semi-définie.

Théorème 1.5 [47] *Soit $x = x_0$ un point d'équilibre du système (1.1) et V une fonction semi définie positive de classe C^1 telle que $\dot{V} \leq 0$.*
Soit Z le plus grand ensemble positivement invariant contenue dans $\{x : V(x) = 0\}$.
Si le système (1.1) est asymptotiquement stable conditionnellement à Z en x_0 alors il est stable en x_0.

On remarquera cependant, que l'application des théorèmes précédents, reste difficile à mettre en pratique car nous n'avons pas de méthodes constructives pour de telles fonctions. Souvent, alors et pour des études locales, on se référera à des systèmes dont l'étude est plus simple (systèmes linéaires, systèmes homogènes, systèmes réduits ...).
La technique utilisée est celle de la linéarisation qui consiste à faire un développement limité en série de Taylor d'un système non linéaire et de considérer que les termes de plus haut degré du système de référence n'ont localement pas d'influence sur la stabilité du système considéré.
Commençons par donner les principaux résultats de stabilité de ces systèmes.

1.1.4 Systèmes linéaires

La théorie mathématique linéaire étant bien développée, les équations différentielles linéaires sont analytiquement et numériquement simples à utiliser.
Ainsi pour modéliser un processus donné nous essayerons tout d'abords d'y adapter un modèle linéaire.

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{1.2}$$

Théorème 1.6 *$x = 0$ est une position d'équilibre stable pour le système (1.2) si et seulement si :*

- *(i) toutes les valeurs propres de la matrice A sont à parties réelles négatives ou nulles.*
- *(ii) Les valeurs propres de A à parties réelles nulles admettent des diviseurs élémentaires simples.*

Théorème 1.7 *$x = 0$ est une position d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.2) si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à parties réelles strictement négatives.*

Théorème 1.8 *$x = 0$ est une position d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.2) si et seulement si pour toute matrice Q symétrique, définie et positive, l'équation $A^\top P + PA = -Q$ (Équation de Lyapounov) admet une solution unique P symétrique définie et positive.*

Remarque 1.1 *: L'asymptotique stabilité dans le cas linéaire a un caractère global et exponentiel.*

Le théorème suivant dû à Lyapounov est souvent référé comme le théorème de la stabilité en première approximation.

Théorème 1.9 *On suppose que F est de classe C^1 et que $F(0) = 0$. On pose $A = \frac{\partial F}{\partial x}(0)$. On considère les équations différentielles:*

a) $\dot{x} = Ax$
b) $\dot{x} = F(x)$

- *(i) Si toutes les valeurs propres de la matrice A ont des parties réelles strictement négatives alors l'origine est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable pour (b).*
- *(ii) Si la matrice A a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive alors l'origine est instable pour (b).*

Cette approche de l'approximation locale pourra se généraliser même lorsque les termes linéaires du développement en série de Taylor du système sont nuls. On approche le système par un système homogène (lorsque ceci est possible) et on conclu sur l'asymptotique stabilité locale du système considéré en se référant au système homogène associé. Cette étude s'avère souvent fructueuse car les systèmes homogènes qui, rappelons le, représentent un premier pas de généralisation des systèmes linéaires possèdent des propriétés particulières qui permettent une étude plus simplifiée comparativement aux systèmes non linéaires en général.
Le premier résultat d'approximation local des systèmes non linéaires par des systèmes homogènes porte sur l'homogénéité classique et a été introduite par Massera [69].
Avant de présenter ce résultat commençons par rappeler les principaux résultats des systèmes homogènes.

1.1.5 Systèmes homogènes

Définition 1.9 *Une fonction $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est positivement homogène (resp. homogène) de degré k si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{R}_+$) on a $h(\lambda x) = \lambda^k h(x)$. Un champ de vecteur est homogène de degré k si toutes ses composantes sont homogènes de même degré k.*

Citons le théorème suivant dû à Rosier [75] qui permet de conclure sur l'existence d'une fonction de Lyapounov homogène pour un système homogène asymptotiquement stable.

Théorème 1.10 [75] *Si F est continue, homogène de degré p, asymptotiquement stable en $\{x_0\}$ alors le système (1.1) admet une fonction de Lyapounov stricte qui est homogène de classe C^∞ dans un voisinage de x_0.*

L'extension du théorème sur la linéarisation est alors :

Théorème 1.11 *On suppose que F est de classe C^∞ et $F(0) = 0$. On considère le développement limité de F au voisinage de $x_0 = 0$ soit $F(x) = (F_\omega(x) + F_{\omega+1}(x) + \dots)$ où pour $i = \omega, \omega+1, \dots,$ $F_i(x)$, $i \geq 1$, désignent les termes polynomiaux homogènes de degré i.*

Soit les équations différentielles

- *a)* $\dot{x} = F_\omega(x)$
- *b)* $\dot{x} = F(x)$

Si l'origine est une position d'équilibre asymptotiquement stable pour (a) alors elle est localement asymptotiquement stable pour (b).

Cette technique d'approximation a été étendu par Hermes ([45], [44]) et Kawski ([53], [54], [56]) à des systèmes homogènes par rapport à une famille de dilatations (systèmes quasi homogènes).

Définition 1.10 [45]
Étant donné un ensemble de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $\omega_i \geq 1$ $(i = 1, \dots, n)$
Une famille de dilatations est une application $\delta_\lambda^\omega : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $\delta_\lambda^\omega(x) = (\lambda^{\omega_1} x_1, \dots, \lambda^{\omega_n} x_n)$.

Une fonction $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est homogène de degré k par rapport à la dilatation δ^ω (δ^ω homogène) si $h \circ \delta_\lambda^\omega = \lambda^k h$.

Un champ de vecteur

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \chi_i(x)}{\partial x_i}$$

sur $\mathbb{R}^n$ *est* δ^ω *homogène de degré* k *si* $\chi_i(\delta^\omega_\lambda(x)) = \lambda^{k+\omega_i}\chi_i(x)$ $(i = 1,\dots,n)$.
Le vecteur d'Euler associé à δ^ω *est défini par* $\nu(x) = (\omega_1 x_1,\dots,\omega_n x_n)^\mathsf{T}$.

Les rayons δ^ω *homogènes (associés à* δ^ω*) sont les solutions de l'équation différentielle* $\dot{x} = \nu(x)$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.12 *considérons les systèmes:*

- *a)* $\dot{x} = F(x)$ *ou* F *est un champ de vecteurs lipshtzien sur* $\mathbb{R}^n$ *homogène de degré* k *par rapport à la dilatation* δ^ω *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $F(0) = 0$ *(* F *vérifiant les conditions d'existence et d'unicité des solutions).*
- *b)* $\dot{x} = G(x)$ *où* G *est un champ de vecteur homogène dont le degré par rapport à la dilatation* δ^ω *est strictement plus grand que* k.
- *c)* $\dot{x} = F(x) + G(x)$

Alors si l'origine est une position d'équilibre asymptotiquement stable pour a) elle est asymptotiquement stable pour c).

Lorsqu' on ne peut pas décider de la stabilité du système en considérant le système approché (linéaire ou homogène) la technique de la variété centrale peut s'avérer fructueuse.

1.1.6 Variété centrale

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y) \\ \dot{y} = By + g(x,y) \end{cases} \tag{1.3}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in M_{(n\times n)}(\mathbb{R})$ $B \in M_{(m\times m)}(\mathbb{R})$ tel que :

- i) toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle nulle.
- ii) toute valeur propre de B admet une partie réelle strictement négative .

f et g sont deux applications de classe C^2, respectivement de $\mathbb{R}^{n+m}$ dans $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^{n+m}$ dans $\mathbb{R}^m$ vérifiant:

$f(0,0) = 0$ $f'(0,0) = 0$

$g(0,0) = 0$ $g'(0,0) = 0$

où $f'(0,0)$ et $g'(0,0)$ sont respectivement les jacobiennes de f et de g en (0,0).

Définition 1.11 *: Soit* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une application suffisamment régulière. La sous variété* $y = h(x)$ *est une variété centrale pour le système (1.3) si elle est invariante pour (1.3) et si* $h(0) = 0$ *et* $h'(0) = 0$

On a alors les théorèmes :

Théorème 1.13 [19] *Il existe une variété centrale pour le système (1.3) donnée par* $y = h(x)$ *pour* $\|x\| < \alpha$ *avec* h *de classe* C^2 *et* $\alpha > 0$.
Le flot de (1.3) sur la variété centrale est gouverné par le système:

$$\dot{z} = Az + f(z,h(z)) \tag{1.4}$$

Théorème 1.14

- *a) Si la solution nulle de (1.4) est stable (asymptotiquement stable) (instable) alors il est en de même pour la solution nulle de (1.3)*
- *b) Supposons que la solution nulle de (1.4) soit stable. Soit* $(x(t),\ y(t))$ *la solution de (1.3) avec* $\|x(0),y(0)\|$ *suffisamment petit, alors il existe* $z(t)$ *solution de (1.4) telle que pour* $t \to \infty$ *on ait:*

$$\begin{cases} x(t) = z(t) + o(e^{-\gamma t}) \\ y(t) = h(z(t)) + o(e^{-\gamma t}) \end{cases} \tag{1.5}$$

où γ *est un réel strictement positif.*

Rappelons aussi le résultat suivant qui concerne les systèmes triangulaires et qui permet de conclure sur l'asymptotique stabilité d'un système.

1.1.7 Systèmes triangulaires

Soit le système défini par:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(y) \end{cases} \tag{1.6}$$

où F et G sont des fonctions régulières telles que $F(0,0) = 0$ et $G(0) = 0$
On considère

$$\dot{x} = F(x,0) \tag{1.7}$$

Théorème 1.15 Seibert et Suarez [80]
On suppose que :

- *i)* $x = 0$ *est une position d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.7)*
- *ii)* $y = 0$ *est une position d'équilibre asymptotiquement stable pour l'équation* $\dot{y} = G(y)$
  Alors, (0,0) est une position d'équilibre localement asymptotiquement stable pour le système (1.6).

1.2 Notions de stabilisation

On considère un système dont l'évolution peut être décrite par le système différentiel:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,u) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{1.8}$$

où $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 telle que $F(0,0) = 0$.

Le problème auquel on s'intéresse est de trouver un feedback $u = u(x)$ aussi "régulier" que possible tel que $x = 0$ soit une position d'équilibre asymptotiquement stable pour le système bouclé $\dot{x} = F(x,u(x))$.

Rappelons que nous avons aussi d'autres types de stabilisation. Citons la semi globale stabilisation et la stabilisation pratique qui sont définies ainsi.

Définition 1.12 *Le système (1.8) sera dit stabilisable semi globallement si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, on peut trouver une loi de commande $u_K = u_K(x)$ régulière tel que le système en boucle fermée soit localement asymptotiquement stable et le bassin d'attraction contienne le compact K.*

Pour la stabilisation pratique, remarquons que nous trouvons dans la littérature, plusieurs définitions.

Définition 1.13 [34] *le système (1.8) sera dit asymptotiquement pratiquement stabilisable à l'origine, s'il existe un voisinage V de $\mathbb{R}^n$, tel pour tout $\epsilon \geq 0$, on peut trouver un feedback $u_\epsilon(x)$ tel que: pour toute condition initialle dans V, le feedback $u = u_\epsilon(x)$ stabilise la boule centrée en zéro de rayon ϵ.*

Définition 1.14 [30] *le système (1.8) sera dit pratiquement stabilisable, si pour tout $\epsilon > 0$ on peut construire un feedback $u_\epsilon(x)$ tel que les trajectoires du système en boucle fermée rentrent au bout d'un certain temps dans la boule de centre zéro et de rayon ϵ et n'en ressortent plus.*

Remarque 1.2 *On notera que les questions relatives au problème de stabilisation portent en général sur les propriétés des loies de commandes stabilisantes.*

Remarque 1.3 *La notion de feedback que nous introduisons ici suppose que le système permet automatiquement de "lire" l'état x du système et de calculer en conséquence la valeur appropriée du contrôle .*

Remarquons que ceci n'est en fait toujour le cas, pour la plupart des phénomènes physiques l'état x n'est pas complètement accessible à l'observation. La variable observée désignée par sortie du système est une fonction de x.

Nous commencons par donner les principaux résultats de stabilisation des systèmes linéaires au sujet desquels, rappelons le une théorie complète existe.

1.2.1 Stabilisation des systèmes linéaires

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad B \in M_{n\times m}(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{1.9}$$

Théorème 1.16 Kalman *Étant donné $\Lambda_n = \{\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_n\}$ un ensemble de nombres complexes tels que si $\lambda \in (C - \mathbb{R})$ et $\lambda \in \Lambda_n \Rightarrow \overline{\lambda} \in \Lambda_n$.*
Si rang de $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est égal à n alors il existe $K \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tel que le spectre de $(A+BK)$ soit égal à Λ_n.
Le système (1.9) est stabilisable par la commande $u(x) = K(x)$.

Proposition 1.1 *Si rang de $(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n_1 < n$. Alors il existe une matrice T non singulière telle que*

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in M_{n_1\times n_1}(\mathbb{R})$, $B_1 \in M_{n_1\times m}(\mathbb{R})$ et rang de $(B_1,A_1B_1,\dots A_1^{n-1}B_1) = n_1$.

Les valeurs propres de A_3 sont appelées modes incontrôlables.

Les modes incontrôlables sont dits stables (resp. instables) (resp critiques) si les valeurs propres de A_3 sont à parties réelles négatives (resp. positives) (resp. nulles).

Théorème 1.17 *Le système (1.9) est stabilisable si et seulement si les modes incontrôlables sont stables.*

1.2.2 Stabilisation des systèmes non linéaires

Dans le cas des systèmes non linéaires, pour la stabilisation locale des conditions nécessaires ont été données par Brockett [13], Coron [33], Krasnosel'ski et Zabreiko [61] et diverses techniques (techniques d'approximation, techniques de la variété centrale, linéarisation, zéro dynamique , ...) ont été utilisées pour obtenir des feedbacks stabilisants, (Cf [5], [13], [16], [28], [36], [45], [53], [55]). Pour les résultats de stabilisation globale, ils sont essentiellement basés sur les techniques de Lyapounov: méthode de Jurdjevic - Quinn (Cf [38], [51], [67], [72]), fonctions de Lyapounov contrôlées (Cf [4], [83], [86]) et autres résultats (Cf [28], [84]).

Rappelons les résultats principaux:

Conditions nécessaires de Brockett [13]

Le théorème suivant dû à R.W Brockett [13] donne des conditions nécessaires de stabilisation asymptotique d'un système non linéaire par une commande de classe C^1.

Théorème 1.18 *Si le système (1.9) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ alors :*

- *i) Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.*
- *ii) Il existe un voisinage N de (0,0) tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$ il existe un contrôle $u_\lambda(.)$ défini sur $[0,\infty[$ qui ramène le système de l'état $x = \lambda$ en $t = 0$ à l'état $x = 0$ en $t = \infty$. En d'autres termes, si $x(t)$ est une solution de $\dot{x} = F(x,u_\lambda)$ vérifiant $x(0) = \lambda$ alors $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.*
- *iii) l'application*
  $\gamma : \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^n$
  $(x,u) \to F(x,u)$
  est surjective sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.4 :

- *1.1 La condition (i) n'est pas nécessaire si on se contente d'un feedback continu comme le montre l'exemple suivant (Kawski [55]):*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - {x_2}^3. \\ \dot{x_2} = u. \\ \dot{x} = (x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

qui est stabilisable avec $u(x) = -x_2 + x_1 + 4/3{x_1}^{1/3} - x_2^3.$

- *1.2 La condition (ii) est une condition nécessaire de stabilité, si la régularité exigée est au moins de classe C^1.*
- *1.3 La condition (iii) est également une condition nécessaire pour l'existence d'un feedback stabilisateur continu.*
- *1.4 Les conditions de Brockett ne sont pas suffisantes pour l'existence d'un feedback stabilisateur même si la régularité exigée est seulement la continuité.*

Techniques de stabilisation

Approximations locales Comme nous l'avons déjà remarqué, la théorie de la stabilité des systèmes linéaires est simple. Aussi, une approche de la stabilisabilité des systèmes non linéaires se réfère à cette théorie.

Soit $A = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$, $B = \frac{\partial F}{\partial u}(0,0)$

Nous avons le théorème:

Théorème 1.19 *Si le système (1.9) est stabilisable alors le système (1.8) est localement stabilisable par le même feedback.*

Lorsque nous ne pouvons pas conclure sur la stabilité du système en considérant le linéarisé on utilise une approximation locale du système par un système homogène.

Si cette méthode dite d'approximation locale ne donne pas de résultat, on utilise d'autres approches. Citons la linéarisation, la linéarisation partielle, la passivation. Ces méthodes sont basées sur le fait de transformer le système en un système équivalent du point de vue de la stabilisation par difféomorphisme local (ou si possible global) dans l'espace d'état et/ou des contrôles.
Nous allons présenter ces méthodes.

Approche de la linéarisation Soit un système de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1.10}$$

Où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, l'entrée $u = (u_1,u_2,\ldots,u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ et la sortie $y = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Les champs de vecteurs $f, g_1,\ldots,g_m$ et la fonction $h = (h_1,\ldots,h_m)^T$ sont supposés de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.15 *Un feedback statique régulier défini sur un ouvert E de $\mathbb{R}^n$ est une loi de commande*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{1.11}$$

où $v(t) \in \mathbb{R}^m$ est une nouvelle entrée et $\alpha : E \to \mathbb{R}^m, \beta : E \to M_{m\times m}(\mathbb{R})$ sont des fonctions de classe C^∞ sur E telle que la matrice $\beta(x)$ soit inversible pour tout $x \in E$.

Définition 1.16 *On dira que le système (1.10) est linéarisable sur E par un feedback de la forme (1.11) s'il existe un changement de coordonnées locales $\xi = \Phi(x)$ transformant le système bouclé:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1.12}$$

en un système linéaire contrôlable et observable

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + Gv \\ y = h\xi \end{cases} \tag{1.13}$$

Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de feedbacks statiques réguliers solution du problème de linéarisation sur un ouvert E de $\mathbb{R}^n$ ont étés données grâce aux propriétés de la matrice de découplage associée au système.
Soit ϕ_i le plus grand entier tel que pour tout $k < \phi_i, 1 \leq j \leq m$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on ait $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$ (où $L_X \lambda$ désigne la dérivée de Lie de la fonction λ suivant le champ X) et soit $A(x) = (L_{g_j} L_f^{\phi_i} h_i(x))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$.

Théorème 1.20 *Le problème de la linéarisation par un feedback de la forme (1.12) admet des solutions locales sur un ouvert E de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\Sigma_{i=1}^n (\phi_i + 1) = n$ et la matrice $A(x)$ est inversible sur E, les solutions étant données par*

$$\alpha(x) = A^{-1}(x)[C\Phi(x) - b(x)], \quad \beta(x) = A^{-1}(x)$$

où $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et

$$\Phi(x) = (h_1(x), \ldots, L_f^{\phi_1} h_1(x), \ldots, h_m(x), \ldots, L_f^{\phi_m} h_m(x))^T$$

est la fonction définissant le changement de coordonnées locales sur E.

Citons une autre classe de systèmes pour laquelle le problème de stabilisation est plus simple comparativement aux systèmes non linéaires en générale; Les systèmes passifs. Une des techniques de stabilisation des systèmes non linéaires est alors de rendre le système passif moyennant un feedback statique régulier. Cependant ceci ne pourra s'appliquer qu'a des systèmes particuliers (systèmes faiblement minimum phase et de degré relatif 1) comme on le verra par la suite.

Rappelons les principales notions ayant trait à la passivité:

Approche de la passivité Considérons le système entrée - sortie suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1.14}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^m$.
f et les m colonnes de g sont des champs de vecteurs C^∞ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application C^∞.
On suppose que $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$

Définition 1.17 *Soit X un sous ensemble connexe de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On dit que le système (1.14) est passif sur X s'il existe une fonction V continue semi définie positive sur X telle que:*

$$\forall x \in X, \quad V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t u^T(s) y(s) ds. \tag{1.15}$$

$\forall t \geq 0$ *tel que* $x(s) \in X$, $\forall s \in [0,t]$ *et* $\forall u : [0,t] \to \mathbb{R}^m$ *bornée sur tout intervalle borné de* $\mathbb{R}^+$.

Si de plus la fonction V est différentiable, la relation (1.15) s'écrit:

$$\dot{V}(x(t)) \leq u^T(t)y(t). \tag{1.16}$$

Remarque 1.5 *Si V est définie positive le système (1.14) s'il est passif est stable au sens de Lyapounov.*

Définition 1.18 *Le système* (1.14) *est de degré relatif* $(1,1,\dots,1)$ *en* $x = 0$ *si la matrice* $L_g h(0)$ *est non singulière (*$L_g h$ *étant la dérivée de Lie de la fonction h suivant le champ de vecteurs g).*

Définition 1.19 *Le système (1.14) est dit zéro-state détectable si pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$h(x(t,x,0)) = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t,x,0) = 0$$

Nous avons le résultat de stabilisation suivant:

Stabilisation par sortie de feedback

Théorème 1.21 ([18]) *Si le système (1.14) est passif avec une fonction V de classe* C^1 *alors le feedback* $u = -y$ *assure l'asymptotique stabilité du point d'équilibre* $x = 0$ *de ce système si et seulement si ce dernier ci est zéro-state détectable.*

Si V est propre le résultat est global.

La stabilisation des systèmes passifs étant simple, une des techniques de stabilisation des systèmes non linéaires sera alors la transformation par feedback de ce système en un système passif.

Feedback passivité: Rappelons que si le système (1.14) a un degré relatif 1 et si la distribution engendrée par les champs de vecteurs $g_1(x),\dots,g_m(x)$ est involutive , alors il existe (n-m) fonctions réelles $(z_1(x),\dots,z_m(x))$ définies dans un voisinage dé 0 telles que (1.14) s'écrive dans le système de coordonnées (z, y) sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{z} = q(z,y) \\ \dot{y} = b(z,y) + a(z,y)u \end{cases} \tag{1.17}$$

où a(z,y) est une matrice non singulière pour tout (z,y) dans un voisinage de (0,0).

$$\dot{z} = q(z,0) \tag{1.18}$$

est la zéro dynamique du système.

Définition 1.20 *Le système (1.14) est faiblement minimum phase si sa zéro dynamique est stable. Il est dit minimum phase lorsque sa zéro dynamique est asymptotiquement stable.*

Nous avons le résultat important dû à C.I. Byrnes-A.Isidori-J. C. Willems ([18]), qui permet de rendre un système passif par une commande régulière.

Théorème 1.22 *Le système (1.14) est localement feedback équivalent à un système passif de fonction V définie positive, si et seulement si il est de degré relatif 1 et est faiblement minimum phase.*
Le résultat est global lorsque le système est minimum phase.

Systèmes de type Jurdjevic Quinn
Théorème 1.23 Jurdjevic Quinn *Soit*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + uY(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.19}$$

où $X(x) = Ax$ avec A une matrice $(n \times n)$ avec n valeurs propres imaginaires distinctes. Si

$$\{ad^k XY(x),\ k \in N\} = \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Alors (1.19) est globalement asymptotiquement stable avec

$$u = -\langle x, Y(x)\rangle.$$

Ce résultat a ensuite été généralisé à des systèmes affines quelconques par plusieurs auteurs notamment dans ([72]) sous la forme suivante.

Théorème 1.24 [72] *Soit*

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i Y^i(x) \tag{1.20}$$

Un système analytique défini sur $\mathbb{R}^n$ avec $X(0) = 0$.

S'il existe une fonction analytique $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie positive et propre telle que

$$X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Alors le système bouclé avec la loi de commande

$$u_i(x) = -Y^i V(x)$$

est globalement asymptotiquement stable si et seulement si

$W = \{x \in \mathbb{R}^n / X^{k+1}V(x) = X^kY^iV(x) = 0; k \in N, i = 1 \ldots m\}$ *est réduit à* $\{0\}$.

Exemple:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2^3 \\ \dot{x_2} = x_3^3 \\ \dot{x_1}^3 = u \end{cases}$$

est stabilisable avec la commande $u(x) = -x_2^3 - (x_1 + x_3 + x_3^3)$ en prenant comme fonction de Lyapounov

$$V(x) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + \tfrac{1}{4}x_2^4 + \tfrac{1}{4}x_3^4$$

Fonctions de Lyapounov "contrôlées" Arstein ([4]), Sontag ([83]) Étant donné un système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,u) \\ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{1.21}$$

et V: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie positive et propre, on dira que V est une fonction de Lyapounov contrôlée pour le système (1.21), si

$$inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), X(x,u) \rangle < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

On peut remarquer que si (1.21) admet un feedback stabilisateur continu alors, d'après le théorème inverse de Lyapounov ([69], [60], [90]) , le système (1.21) admet une fonction de Lyapounov stricte de classe C^∞ et donc (1.21) admet une fonction de Lyapounov contrôlée.

Sontag ([83]) a démontré que si un système affine en contrôles admet une fonction de Lyapounov contrôlée, alors il est stabilisable avec un feedback C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$; en plus il a donné une formule explicite du feedback stabilisateur. On rappelle son résultat pour un système mono-entrée. Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.22}$$

où f et g sont des fonctions de classe C^∞.

Supposons qu'il existe $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ de classe C^∞, définie positive et propre telle que:

$$inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), f(x) + ug(x) \rangle < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

en d'autres termes:

$$\left.\begin{array}{r}\langle \nabla V(x),g(x)\rangle = 0 \\ \\ x \neq 0\end{array}\right| \Rightarrow \langle \nabla V(x),f(x)\rangle < 0$$

Posons $a(x) = \langle \nabla V(x), f(x)\rangle$ et $b(x) = \langle \nabla V(x), g(x)\rangle$
alors

$$u(x) = \begin{cases} \frac{-a(x)-\sqrt{a^2(x)+b^4(x)}}{b(x)} & si\ b(x) \neq 0 \\ 0 & si\ b(x) = 0 \end{cases}$$

stabilise (1.22). En outre, u sera continue si $\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0$ tel que

$x \in B(0,\alpha) - \{0\} \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R} : \|u\| < \epsilon$ et $\langle \nabla V(x), f(x) + ug(x)\rangle < 0$.

Une autre classe importante de systèmes non linéaires est celle des systèmes partiellement linéaires. Cette classe de systèmes a été largement étudiée par plusieurs auteurs. L'attention dont ces systèmes ont fait l'objet est dû aux résultats sur la linéarisation partielle par feedback qui permettrait de transformer un système non linéaire en un système en cascade.

Systèmes partiellement linéaires Soit le système partiellement linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = Ay + Bu \end{cases} \tag{1.23}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^k$.

f une fonction de classe C^∞ telle que $f(0,0) = 0$.

Pour cette classe de systèmes Vidyasagar [89] a montré que si l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x,0) \tag{1.24}$$

est localement asymptotiquement stable en l'origine de $\mathbb{R}^n$ et si le système linéaire

$$\dot{y} = Ay + Bu \tag{1.25}$$

est localement stabilisable par un feedback linéaire $u(y) = Ky$, alors le système composite (1.23) est localement stabilisable par le même feedback.

Notons que ce résultat ne s'adapte pas à la stabilisation globale.

A titre d'exemple citons l'exemple (cf [80])

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2y^2 - 1) \\ \dot{y} = u \end{cases}$$

qui est localement stabilisable par le feedback $u(y) = -y$ mais qui ne peut être stabilisé globalement ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2y^2 = 2\}$ est invariant pour le système composite bouclé)

En fait la stabilisation globale de ces systèmes ne pourra être obtenue qu'en posant des conditions supplémentaires sur la fonction f.

Dans ce cadre là, citons le résultat de Saberi, Kokotovic, Sussmann [77], qui supposent que le système (1.23) est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x,\xi)C\xi \\ \dot{\xi} = A\xi + Bu \end{cases} \tag{1.26}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A \in M_{q\times q}$, $B \in M_{q\times m}$, f et g des fonctions de classe C^∞.

Sous les conditions

- $[H_1]$ $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable pour l'équation $\dot{x} = f(x)$
- $[H_2]$ (A,B) est stabilisable et il existe K tel que $P(A + BK) + (A + BK)^T P$ soit définie négative.
- $[H_3]$ $B^T P = -C$

Les auteurs montrent que le système (1.23) est globalement asymptotiquement stabilisable.

Chapitre2 Les Systèmes Bilinéaires Homogènes

Chapitre 2

Les systèmes bilinéaires homogènes

Notre étude porte sur la stabilisation d'une classe de systèmes bilinéaires homogènes de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

où A et B sont des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Rappelons que pour la théorie du contrôle non linéaire, ces systèmes sont particulièrement intéressants du fait qu'ils modélisent beaucoup de phénomènes pratiques tels les processus économiques, thermiques, physiologiques ... (cf [70]). Ils ont ainsi été étudiés par de nombreux auteurs (Cf [6], [9], [28], [30], [20]).
Cependant nous remarquons que nous avons en fait peu de résultats de stabilisation.

En effet, pour ce type de systèmes le degré relatif n'est pas défini en zéro et le linéarisé est indépendant du contrôle, de ce fait les différentes approches de stabilisation ne peuvent s'appliquer de manière efficace.

Hormis les systèmes à dérive dissipative pour lesquels le théorème de Jurdjevic Quinn (Cf [51]) permet de mettre en évidence des lois de commandes stabilisantes pour les autres systèmes les résultats existants sont partiels.

Même dans le cas de la stabilisation par feedback constant, qui consiste à déterminer un paramètre α tel que les valeurs propres de la matrice $A + \alpha B$ soient à parties réelles strictement négatives, le problème n'est pas résolu. Dans [87], Tsinias donne une condition suffisante qui se ramène à celle de la recherche d'une fonction de Lyapounov contrôlée. Dans [68], Luesnik -Neijmeir donnent une condition d'algèbre de Lie pour triangulariser simultanément les deux matrices A et B.

Les autres résultats existants concernent l'étude des systèmes en petites dimensions. Ainsi, Baccioti, Boieri dans [8] ont étudié la stabilisation par feedbacks de classe C^1 des systèmes plans. R. Chabour, G. Sallet, J.C. Vivalda dans [28], ont donné une classification complète des systèmes de dimension deux par rapport à leur stabilisabilité. Pour les systèmes qui ne sont pas stabilisables par feedbacks continu, ils ont introduit des commandes positives homogènes de degré zéro. Dans le cas de la dimension trois, Ĉelikovskỳ [30] a étudié une classe particulière de systèmes de la forme (2.1). Il a considéré le cas où la matrice A est diagonale et la matrice B est antisymétrique. L'auteur donne des conditions nécessaires et suffisantes qui assurent la global asymptotique stabilité de ces systèmes par un feedback constant et des conditions suffisantes pour la global stabilité pratique par une famille de feedbacks linéaires. Il est important de noter que pour les systèmes étudiés l'auteur donne plusieurs exemples physiques dont ils sont le modèle.

Dans ce présent travail, nous généralisons les résultats de Čelikovský [30] à des classes de systèmes plus larges et en dimension n quelconque.

Ainsi dans cette thèse, nous avons étudié les systèmes bilinéaires homogènes

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2}$$

lorsque la matrice A n'est pas nécessairement diagonalisable et que la matrice B est antisymétrique relativement à un produit scalaire: il existe une matrice P symétrique définie positive telle que $B^T P + PB = 0$.

Nous avons étudié ces systèmes du point de vue de leur stabilisabilité. Nous avons montré que ces systèmes sont globalement pratiquement stabilisables par une commande linéaire et construit une commande homogène qui assurait la globale asymptotique stabilité.

Par ailleurs, nous avons établi le lien entre la stabilisabilité pratique de ces systèmes et le concept de la passivité. En effet, une approche intéressante de la stabilisabilité des systèmes non linéaires est basée sur le concept de passivité. En particulier, un système non linéaire peut être rendu passif si et seulement s'il est de degré relatif 1, et a une zéro dynamique stable. De plus les systèmes non linéaires passifs qui sont zéro state détectables, peuvent être globalement asymptotiquement stabilisés par un retour de sortie.

Dotés d'une sortie, les systèmes bilinéaires, objet de notre étude, ont un degré relatif 1 sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et une zéro dynamique stable. Aussi, il est tentant d'utiliser l'idée de la passivité pour les stabiliser. Cependant, comme le degré relatif de ces systèmes présente une singularité à l'origine, la théorie classique de la passivité ne peut s'appliquer. Ceci nous a amené à introduire une nouvelle notion la passivité pratique: un système est pratiquement passif s'il est passif en dehors d'un voisinage de zéro. Nous avons alors établi le lien entre la passivité pratique et la stabilisation pratique de ces systèmes: si un système bilinéaire homogène est pratiquement passif alors il est pratiquement stabilisable par un retour de sortie.

Ce premier travail a fait l'objet des publications [20] et [22].

Certains auteurs ont étudié ces systèmes sous l'angle du lien entre la local asymptotique stabilité et la global asymptotique stabilité.

Dans [42], H. Hammouri et J. Marques montrent que certains systèmes bilinéaires homogènes, localement asymptotiquement stabilisables par un feedback non nécessairement homogène sont globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback borné $u(x)$

qu'ils construisent explicitement. Pour cela les auteurs, utilisent les fonctions de Lyapounov localement définies et posent une condition sur les surfaces de niveau de ces fonctions.

dans [2], V. Andriano a examiné ce problème mais ne pose aucune condition sur les surfaces de niveau de ces fonctions.

Nous montrons dans [24], à l'aide d'un contre exemple que l'on ne peut s'affranchir de cette hypothèse.

Stabilisation des systèmes bilinéaires homogènes

O. Chabour R. Chabour H. Zenati

C. R. Académie des Sciences 1998. (Cf [20])

Résumé: Nous nous intéressons à la stabilisation des systémes bilinéaires homogènes. Nous donnons des conditions suffisantes pour que le système bilinéaire soit stabilisable par un feedback homogène de degré zéro. Le feedback stabilisant est donné explicitement. *(Rubrique: Automatique théorique).*

Stabilization of homogeneous bilinear systems

Abstract: We deal with the problem of stabilizing the bilinear homogeneous systems. We give sufficient conditions for a bilinear system to be stabilizable with homogeneous feedback of degree zero. The explicit design of the feedback is given. *(Heading: Automation theorical).*

2.1 Introduction

Un problème important de l'automatique est celui de la stabilisation d'un système par un retour d'état.

Les systèmes non linéaires affines en le contrôle de type

$$\dot{x} = f(x) + ug(x) \tag{2.3}$$

ont été étudiés dans le cas $g(0) \neq 0$ (voir [3] [8] [10]).

Les systèmes bilinéaires sont des systèmes de type (2.3) pour lesquels les champs soumis au contrôle s'annulent en l'origine ($g(0) = 0$) si bien que le système linéarisé devient indépendant du contrôle. Peu de résultats de stabilisation ont été obtenus pour ce type de systèmes: hormis les systémes bilinéaires à dérive dissipative pour lesquels le théorème de Jurdjevic-Quinn [9] permet de mettre en évidence des lois de commandes polynomiales, seuls les systèmes bilinéaires plans ont fait l'objet d'une étude systèmatique (voir [2], [4], [5], [6], [7]).

Dans cet article, on s'intéresse à une classe de systèmes bilinéaires. On donne des conditions suffisantes de stabilisation par une commande positivement homogène de degré zéro.

2.1.1 Formulation du problème

On s'intéresse aux systèmes bilinéaires homogènes du type:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R},\ A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.4}$$

Définition 2.1 *On dit que le système (2.4) est stabilisable s'il existe une loi de commande $x \to u(x)$ telle que pour le système bouclé:*

$$\dot{x} = Ax + u(x)Bx \tag{2.5}$$

l'origine soit un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Définition 2.2 *Une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, est dite positivement homogène de degré k si $u(\lambda x) = \lambda^k u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.*

2.1.2 Stabilisation

Théorème 2.1 *Supposons qu'il existe $b \in \mathbb{R}^n$, $F \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ et $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, définie positive tels que les deux propriétés suivantes soient vérifiées:*

- *(i)* $B^TP + PB = 0$
- *(ii)* $(A + BbF)^TP + P(A + BbF) < 0.$

Alors le système (2.4) est stabilisable par le feedback positivement homogène de degré 0

$$u(x) = k(x)F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^T(Pb \cdot F)x + Fx\sqrt{(x^TPb)^2 + (\beta - b^TPb)(x^TPx)}}{(x^TPx)} & si\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où β est une constante positive vérifiant $\beta \geq b^TPb$.

La démonstration du théorème précédent utilise le lemme suivant.

Lemma 2.1 *(V. Andriano [1]) Considérons le système $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f localement lipshitzienne et $f(0) = 0$*

Supposons qu'il existe une famille d'ensembles compacts $\{D_i\}_{i\in\mathbb{R}^+}$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. *$\cap_{i>0} D_i = 0$;*
2. *pour tout $i < j$, $D_i \subset int D_j$;*
3. *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $j \in \mathbb{R}^+$ tel que $x \in \partial D_j$;*
4. *pour tout $i \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \partial D_i$ le champ de vecteur $f(x)$ est rentrant par rapport au domaine borné D_i.*

Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable pour le système considéré.

Démonstration du théorème (2.1)

Considérons la forme quadratique $V(x) = (x-b)^T P(x-b)$.
La dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé

$$\dot{x} = Ax + (Fx)Bx \tag{2.6}$$

est donnée par

$\dot{V}(x) = \langle x, (A^T P + PA)x\rangle - 2\langle x, A^T Pb\rangle - (Fx)\langle x, B^T Pb\rangle + (Fx)\langle x, P(Bb)\rangle$
où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire usuel.

En utilisant l'associativité du produit matriciel et le fait que
$Pb = b^T P$ et $(B^T P)b = -b^T(B^T P)$, il vient que

$$\dot{V}(x) = \langle x, (A^{\mathrm{T}}P + PA)x\rangle - 2\langle x, A^{\mathrm{T}}Pb\rangle + \langle x, (F^{\mathrm{T}}b^T B^{\mathrm{T}}P)x\rangle + \langle x, P(Bb)Fx\rangle$$

$$= < x\,,\, (A + BbF)^T P + P(A + BbF)x > -2 < x\,,\, A^T Pb >$$

Par l'hypothèse (ii) du théorème (2.1),

$$< x\,,\, (A + BbF)^T P + P(A + BbF)x >< 0,\quad x \neq 0$$

donc

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{tel que } \|x\| \geq \alpha \Longrightarrow \dot{V}(x) < 0.$$

Soit maintenant le domaine $D = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq \beta\}$, où β est un nombre strictement positif.
Pour β suffisamment grand, 0 est à l'intérieur de D et on a $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall\, x \in \partial D$. Ainsi les trajectoires du système bouclé (2.6) ne quittent pas le domaine borné D. Il reste donc à montrer que les solutions convergent vers 0. Pour cela, introduisons la fonction positivement homogène k définie par

$$k(x) = \frac{x^{\mathrm{T}}Pb + \sqrt{(x^T Pb)^2 + (\beta - b^{\mathrm{T}}Pb)(x^{\mathrm{T}}Px)}}{x^{\mathrm{T}}Px}$$

où β est une constante positive vérifiant $\beta \geq b^T Pb$.
Par construction, le feedback homogène de degré 0 est donné par

$$u(x) = k(x)F(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^{\mathrm{T}}(Pb\cdot F)x + Fx\sqrt{(x^{\mathrm{T}}Pb)^2 + (\beta - b^{\mathrm{T}}Pb)(x^{\mathrm{T}}Px)}}{(x^{\mathrm{T}}Px)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'ensuit que le système bouclé

$$\dot{x} = X(x) = Ax + u(x)Bx \tag{2.7}$$

est homogène de degré 1. Remarquons que la fonction k vérifie

$$k(x)\,x \in \partial D \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad et \quad k(x) = 1 \quad \forall x \in \partial D$$

donc les systèmes (2.6) et (2.7) coincident sur ∂D
Soit maintenant le domaine D_λ, image de D par l'homothètie de centre 0 et de rapport $\lambda > 0$, défini par $D_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, V(\frac{x}{\lambda}) \leq \beta\right\}$.
Il est immédiat de voir que $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ est une famille d'ensembles compacts vérifiant les conditions (1), (2) et (3) du lemme de V. Andriano [1].
Il reste donc à montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \partial D_\lambda$, le champ de vecteur $X(x)$ est rentrant par rapport au domaine D_λ. Or, comme le champ $X(x)$ est homogène de degré 1 et rentrant par rapport au domaine D, il suffit de prouver que les espaces tangents à ∂D et ∂D_λ, en x^0 et $\lambda\, x^0$ respectivement, sont parallèles.
Si on définit par $T_y(S)$ l'espace tangent à la surface S au point y et par X_y un élément de $T_y(S)$, (vecteur tangent en y), il vient que pour toute fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ on a
$X_{x^0}(V) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$ et
$X_{\lambda x^0}(V) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\frac{\lambda x^0}{\lambda})(x_i - \lambda x_i^0) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x^0)(x_i - \lambda x_i^0)$
Manifestement, les vecteurs tangents X_{x^0} et $X_{\lambda x^0}$ sont parallèles.Par conséquent, le champ de vecteur $X(x)$ est rentrant par rapport au domaine bornéD_λ, $(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+)$.
En appliquant alors les résultats du lemme (2.1), on déduit que le système bouclé (2.6) admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Remarque 2.1 *La propriété (ii) du théorème (2.1) est équivalente à*
$(ii)'$ $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $< x, Bb >_P = 0 \implies < x, Ax >_P < 0, \quad \forall\, x \neq 0.$ *où* $<,>_P$ *désigne le produit scalaire associé à la matrice* P.

Exemple (1): Soients $A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \theta \\ \gamma & 4 & \delta \\ -\theta & \eta & -2 \end{pmatrix}$ $et\, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
où $\alpha, \theta, \gamma, \delta$ et η sont des nombres réels.

Notons que le système bilinéaire $\dot{x} = Ax + u\ Bx$ n'est pas stabilisable par feedback continu car $Tr(A) > 0$ et $Tr(B) = 0$.

Prenons pour ce système $P = Id_{\mathbb{R}^3}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ et $F = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & 5 & \delta + \eta \end{pmatrix}$.
On vérifie facilement que

$$< x, \Big((A + Bb\,F)^T P + P(A + Bb\,F)\Big)x >= -2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)$$

Exemple (2) Soient $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & \vdots & 0 & \\ \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & B_2 & \end{pmatrix}$

où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_i < 0$, $i = 2, ..., n$; $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = -B_2^T$.

Pour $P = Id_{\mathbb{R}^n}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$ et $F = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, on verifie que

$$< x, \Big((A + Bb\,F)^T P + P(A + Bb\,F)\Big)x >= 2(-\lambda_1\ x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\ x_i^2).$$

2.1.3 Références bibliographiques

[1] V. Andriano, Global feedback stabilization of the angular velocity of a symmetric rigid body, *Systems & Control Lett.,* **20**, (1993) 361–364.

[2] A. Bacciotti et P. Boieri, A characterization of single input planar bilinear systems, *Systems & Control Lett.,* **16,** (1991) 139–143.

[3] A. Boothby et R. Marino, Feedback stabilization of planar nonlinear systems, *Systems & Control Lett.,* **12,** (1989) 87–92.

[4] S. Čelikovský, On the stabilization of the homogeneous bilinear systems, *Systems & Control Lett.,* **21**, (1993) 503–510.

[5] R. Chabour et J.C. Vivalda, Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan, *C.R Acad. Scie. Paris,* **312**, série I, (1991) 1017–1020.

[6] R. Chabour et J.C. Vivalda, Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan par une commande non régulière, *Proceeding European Control Conference Grenoble,* (1991) 485–487.

[7] R. Chabour , G. Sallet et J.C Vivalda, Stabilization of non linear two dimensional systems: a bilinear approch, *Math. Control Signals Systems,* **6**, (1993) 224–246.

[8] W.P. Dayawansa, C.F. Martin et G. Knowles, Asymptotic Stabilization of a class of smooth two-dimentional systems, *SIAM J. Control Optim.,* **28**, (1990) 1321–1349.

[9] V. Jurdjevic et J.P Quinn, Controllability and Stability, *Journal of differential equations,* **28**, N° **3**, (1978) 381–389.

[10] M. Kawski, Stabilization of non linear systems in the plane, *Systems & Control Lett.,* **12,** (1989) 169–175.

Asymptotic and Practical Stabilization of Bilinear Systems

O. Chabour R. Chabour H. Zenati

Systems & Control Letters (Accepté) (Cf [22])

Abstract: This paper deals with practical stabilization and asymptotic stabilization of a class of bilinear homogeneous systems. Firstly, a sufficient condition is given for these systems to be globally practically stabilizable by means of a family of linear feedback laws. After on, using the homogeneity property of the bilinear systems we prove that this condition is also sufficient for the global asymptotic stabilization by homogeneous feedbacks of degree zero. An explicit design of asymptotically stabilizing feedbacks, that are smooth on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and bounded on $\mathbb{R}^n$, is carried out. Finally we emphazise how our results can be related to the passivity theory frequently used to deal with the stabilization problem.

Key-words: bilinear systems; homogeneous feedback; linear feedback; practical stabilization; asymptotic stabilization; practical passivity.

2.2 Introduction

The feedback stabilization of nonlinear control systems is widely recognized as an important problem in control theory. In this paper our purpose is to study both global practical stabilization and global asymptotic stabilization of homogeneous bilinear systems of the form

$$\dot{x} = Ax + uBx \tag{2.8}$$

where $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$, A and B are constant $(n \times n)$ matrices.
In the nonlinear control theory, bilinear systems are important in their own right: examples of such systems include nuclear and thermal control processes, ecologic, physiologic, and economic systems (see [12]). Stabilizability

of bilinear systems has been widely studied in the last past years by many authors (see e.g. [2], [3], [5], [6], [7], [13]). However, it is shown in [5] that even in the planar case, there exists a large class of homogeneous bilinear systems which cannot be stabilized by continuous feedbacks. In [6], a complete algebraic classification of planar bilinear systems of the form (2.8) with respect to their stabilizability is presented. In the three dimensional case, [7] considers the particular class of bilinear systems of the form (2.8) for which A is a diagonal matrix with a negative trace and B is a skew-symmetric matrix. For these systems, a necessary and sufficient condition for global asymptotic stabilization by constant feedbacks and a sufficient condition for global practical stabilization by a family of linear feedbacks are given.

This work is within the framework of the lines of [5] and [7]. We generalize part of the results of these works for a wide class of n-dimensional homogeneous bilinear systems ($n \geq 2$). First, we give an extension of the practical stabilization result of [7] by providing a sufficient condition for (2.8) to be practically stabilizable by a family of linear feedbacks. It is worth pointing out that the sufficient condition we impose on the matrix A, does imply neither that this matrix is diagonal nor that its trace is negative. Later, using a lemma of [1] on the asymptotic stability of ordinary differential equations, we derive for the foregoing a new result on asymptotic stabilization of bilinear system (2.8). It turns out that previous sufficient condition for global practical stabilization remains sufficient for system (2.8) to be globally asymptotically stabilizable by homogeneous feedback of degree zero. An explicit design of stabilizing feedback laws is provided. Observe that this statement extends for a class of n-dimensional homogeneous bilinear systems some results of [5] on the stabilization of planar bilinear systems. Notice that for general control systems, Lyapunov stability and practical stability are not equivalent (see [11]).

Further, as suggested it by the anonymous reviewer, an interesting approach to nonlinear stabilizability problem is the one based on passivity concepts (see [14], [4], [9]). In particular, a nonlinear system can be rendered passive via a smooth change of feedbacks if and only if its relative degree is one and it is weakly minimum phase. Moreover, passive nonlinear systems which are zero-state detectable can be globally asymptotically stabilized by output feedback. Let us mention now that the bilinear systems we consider have relative degree one on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and stable zero dynamics. So, one is naturally tempted to make use of passivity ideas to investigate the problem of stabilizing such systems. Unfortunately, due a singularity at the origin, the relative degree of the bilinear systems (2.8) is not well defined. So, the passivity theory cannot be applied straightforwardly to solve the problem. Nevertheless, this remark has motivated us to introduce a *practical passivity* *concept*: we say that a system is practically passive if it is passive everywhere except possibly on a small neighborhood of the origin. It turns out that, in some sense, practical passivity plays the same role for practical stabilization than the one played by passivity for asymptotic stabilization. By the way, for homogeneous bilinear systems, thanks to the link between practical stabilization and asymptotic stabilization, this one can now be viewed from the practical passivity point. To the best of our knowledge, the passivity approach has never be used before to investigate the stabilization problem in case when the relative degree has a singularity at the equilibrium point.

The paper is organized as follows. section (2.3) contains some definitions and basic notations. In section (2.4) we state and prove our sufficient condition on the practical stabilization of the bilinear system (2.8). In section (2.5) we show that under the previous condition, system (2.8) is asymptotically stabilizable by a homogeneous feedback of degree zero which is explicitly computed. In section (2.6) we introduce the practical passivity concept and show how global practical stabilization can be solved for system (2.8) via output feedback.

2.3 Notations and basic definitions

Throughout the paper, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ denotes the set of the $(n \times m)$ real matrices. The identity matrix of $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ is denoted by I_n. For a vector $b \in \mathbb{R}^n$ (resp. $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$), we denote by b' (resp. A') the transpose of b (resp. A) and by $\|b\|$ the euclidean norm of b. For a non empty subset $D \subset \mathbb{R}^n$, the notation $intD$ (resp. ∂D) is used to denote the interior of D (resp. the boundary of D). For $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$, the open ball of center x and radius r is denoted by $B(x, r)$.
Given a differential equation

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.9}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ and f satisfies a local lipschitz condition, we denote by $x(t, x_0)$ the solution of (2.9) with the initial condition $x(0, x_0) = x_0$. We say that the trajectory $\{x(t, x_0), t \geq 0\}$ enters a subset $D \subset \mathbb{R}^n$ after some finite time $T \geq 0$ if $x(t, x_0) \in D, \forall t \in [T, T + \epsilon]$ for some $\epsilon > 0$. We say that it enters D after the instant T and remains within it thereafter if $x(t, x_0) \in D, \forall t \geq T$.

Definition 2.1 *System (2.8) is said to be globally asymptotically stabilizable if there exists a feedback law $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ such that the origin is globally asymptotically stable for the closed-loop system*

$$\dot{x} = Ax + u(x)\ Bx$$

The feedback law $u(x)$ is said to be homogeneous of degree k if $u(\lambda\ x) = \lambda^k\ u(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$ and $\lambda > 0$.

Definition 2.2 *System (2.8) is said to be globally practically stabilizable at the origin by means of the family of feedback laws $\{u_r,\ r > 0\}$, if for any $r > 0$, all the trajectories of the closed-loop system*

$$\dot{x} = Ax + u_r(x)\ Bx$$

enter the ball $B(0, r)$ after an instant $T < +\infty$ and remain within it thereafter.

Remark 2.1 *The notion of practical asymptotic stability was first introduced by LaSalle and Lefshetz [11] (see also [8]) and has been discussed recently in [17], [7]. As the anonymous reviewer has mentioned it, there are many definitions of practical asymptotic stability. Definition (2.2) is the one which is given by S. Ĉelikovský in [7].*

2.4 Practical stabilization

In this section we provide a sufficient condition ensuring that the bilinear systems (2.8) are globally practically stabilizable by a family of linear feedback laws. First, recall the following lemma, established in [7], that we use to prove our result.

Lemma 2.1 *(see [7]) Consider a continuous map $\psi : \mathbb{R}^n \to R$. Then bilinear system (2.8) is globally practically stabilizable by the family of feedbacks $\{\psi(kx), k > 0\}$ if and only if all the trajectories of the system*

$$\dot{x} = Ax + \psi(x)Bx$$

enter a bounded set and remain within it thereafter.

Remark 2.2 *Note that if the the trajectories of $\dot{x} = Ax + \psi(x)Bx$ enter a bounded set $B(0, R), R > 0$, then by homogeniety, the trajectories of $\dot{x} = Ax + \psi(kx)Bx$ enter the bounded set $B(0, R/k)$. Thus, the relation between k and r (given in definition 2.1) is $r = R/k$.*

We can now state and prove our main theorem.

Theorem 2.1 *For system (2.8) assume that there exist $b \in \mathbb{R}^n$, $F \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ and a positive definite symmetric matrix $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, such that*
(a_1) $\quad B'P + PB = 0$

(a_2) $\quad (A + Bb\,F)'P + P(A + Bb\,F) < 0.$

Then (2.8) is globally practically stabilizable at the origin by the family of linear feedbacks

$$\{u_r(x) = c_r F x, c_r > 0\} \tag{2.10}$$

Proof. According to lemma (2.1), it is sufficient to show that all the trajectories of the closed-loop system

$$\dot{x} = Ax + Fx\ Bx \tag{2.11}$$

enter a bounded set and remain within it thereafter. Notice at first that the differential equation (2.11) has an analytic right hand side which guarantee existence and unicity of the solutions. Now let $V(x)$ be the positive real function defined by $V(x) = (x - b)'P(x - b)$. The derivative of $V(x)$ along trajectories of (2.11) is given by

$$\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x - 2\,x'A'Pb - (Fx)x'B'Pb - (Fx)b'PBx$$

Since Fx is a scalar, one has

$$(Fx)x'B'Pb = x'B'PbFx \quad \text{and} \quad (Fx)'b'PBx = x'F'b'PBx$$

As a consequence of these equalities one has

$$\dot{V}(x) = x'(A'P + PA)x - 2x'A'Pb + x'PBbFx + x'F'b'B'Px$$

$$= x'\left((A + BbF)'\,P + P\,(A + Bb\ F)\right)x - 2x'A'Pb$$

It follows from assumption (a_2) that $\dot{V}(x) < 0$ when $\|x\|$ is sufficiently large. Hence, one can deduce that for a sufficiently large $R > 0$, all trajectories of (2.11) enter the bounded set $D_R = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq R\}$ and remain within it thereafter. According to lemma 1, it follows that system (2.8) is globally practically stabilizable by the family of linear feedbaks given by (2.10). This concludes the proof.

Remarque 2.1 *As it has been mentionned in remark (2.1), the constant c_r, which is given in (2.10), and r are related by the relation $c_r = R/r$, $R > 0$.*

We illustrate Theorem (2.1) by the following example for which [Theorem 3] [7] does not apply.

Example 1. Consider on $\mathbb{R}^3$ the bilinear system

$$\dot{x} = Ax + uBx \tag{2.12}$$

where $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remark that [theo3] [7] does not apply because matrix A is not $\mathbb{R}$-diagonalizable. Besides system (2.12) is not stabilizable by any continuous feedback at the origin. Indeed, for such a feedback, the linear approximation of the closed-loop system is given by $\dot{x} = (A + u(0)B)x$, and this system has an uncontrollable and unstable mode since $Tr(A + u(0)B) = Tr(A) > 0$. However, with $b = (0, 0, -1)'$, $F = (2, 5, 4)$ and $P = I_{\mathbb{R}^3}$, one can easily check that assumptions (a_1) and (a_2) hold. Hence, according to Theorem 1 the system (2.12) is globally practically stabilizable at the origin by the family of linear feedbaks $\{u_r(x) = c_r F x, c_r > 0\}$.

2.5 Asymptotic Stabilization

By taking advantage of the main result of the previous section, we show in this one that under conditions of Theorem (2.1) , System (2.8) is also stabilizable by a homogeneous feedback of degree zero. In order to prove this assertion, we need the following lemma which has been established in [1].

Lemma 2.2 *(see [1]) Consider the system $\dot{x} = f(x)$, where f a locally Lipshitz function such that $f(0) = 0$.*
Assume that there exists a family of compact sets $\{D_i\}_{i\in\mathbb{R}^+}$ with the following properties:

1. *$\cap_{i>0} D_i = 0$;*
2. *for all $i < j$ $D_i \subset int D_j$;*
3. *for all $x \in \mathbb{R}^n$ there exists $j \in \mathbb{R}^+$ such that $x \in \partial D_j$;*
4. *for all $i \in \mathbb{R}^+$ and for all $x \in \partial D_i$ the vector field $f(x)$ enter the bounded set D_i after some time $t = T < +\infty$.*

Then, the considered system is globally asymptotically stable at the origin.

Theorem 2.2 *Under the assumptions of Theorem (2.1), System (2.8) is globally asymptotically stabilizable by the homogeneous feedback of degree zero*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x'(PbF)x + Fx\sqrt{(x'Pb)^2 + (R - b'Pb)(x'Px)}}{x'Px} & if \quad x \neq 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \tag{2.13}$$

where R is any sufficiently large positive constant satisfying $R > b'Pb$.

Proof. First for all, since the function $x \mapsto u(x)$ is homogeneous of degree zero, the partial derivatives of the vector field $x \mapsto X(x) = Ax + u(x)Bx$ are also homogeneous of degree zero. Therefore the vector field X is analytic on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and its first derivative is bounded. We can conclude that X is locally Lipschitz on $\mathbb{R}^n$. This ensures the existence and unicity of the trajectories of the closed-loop system

$$\dot{x} = X(x) \tag{2.14}$$

Now, according to Theorem (2.1), the linear control

$$\tilde{u}(x) = Fx$$

forces system (2.8) in the bounded domain $D_R = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq R\}$, where $V(x) = (x-b)'P(x-b)$, provided that $R > 0$ is sufficiently large. On the one hand, consider the positive real function defined on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ by

$$\eta(x) = \frac{x'Pb + \sqrt{(x'Pb)^2 + (R - b'Pb)(x'Px)}}{x'Px}$$

which satisfies $V(\eta(x)\, x) = R$, $\forall x \neq 0$. So, one has $\eta(x)\, x \in \partial D_R$ *forall* $x \neq 0$ and $\eta(x) = 1$forall $x \in \partial D_R$. (Geometrically, the function η brings each point of the space $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ to the boundary ∂D_R). Setting

$$u(x) = \tilde{u}(\eta(x)\, x)$$

for all $x \neq 0$ and $u(0) = 0$. As $\tilde{u}(x) = Fx$, one gets the homogeneous feedback (2.13).

On the other hand let $\{D_R^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ be the familly of compact sets defined by

$$D_R^\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^n / V(\frac{x}{\lambda}) \leq R\right\} = \{\lambda\, y / y \in D_R\}$$

Obviously $\{D_R^\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ satisfies the conditions (i)-(iii) of Lemma (2 2). So, it only remains to show that for all $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ and for all $x \in \partial D_R^\lambda$, the trajectory $x(t,x)$ of the closed-loop system (2.14) enters the bounded set D_R^λ and remains within it thereafter. Denote by ϕ_R and ϕ_R^λ the real functions defined for all $x \in \mathbb{R}^n$ by $\phi_R(x) = V(x) - R$ and $\phi_R^\lambda(x) = V(\frac{x}{\lambda}) - R$. It follows that $\partial D_R = \{x \in \mathbb{R}^n / \phi_R(x) = 0\}$ and $\partial D_R^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n / \phi_R^\lambda(x) = 0\}$. For $x \in \partial D_R^\lambda$ let $y \in \partial D_R$ be such that $x = \lambda\, y$. Then the gradiant vectors of ϕ_R^λ and ϕ_R at respectively x and y satisfy

$$grad(\phi_R^\lambda(x)) = \frac{1}{\lambda}\, grad(\phi_R(y)) \neq 0$$

and so ∂D_R^λ and ∂D_R have parallel tangent spaces respectively at x and y. Moreover, by homogeneity, the vector field X satisfies $X(x) = \lambda X(y)$. Now, on ∂D_R, since $\eta_x \equiv 1$, one has $X(x) = Ax + FxBx$, and so the vector field X point into ∂D_R. Accordingly, it follows that on ∂D_R^λ, X points into D_R^λ. Hence, one can deduce that for all $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ and for all $x \in \partial D_R^\lambda$, the trajectory $x(t,x)$ of (2.14) enters D_R^λ and remains within it thereafter, which completes the proof.
We illustrate the previous theorem by the following example.
Example 2. Consider the bilinear system

$$\dot{x} = Ax + uBx \tag{2.15}$$

where $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, with $\lambda_1 > 0$, $\lambda_i < 0, i = 2, ..., n$, and

$$B = \begin{pmatrix} & B_2 & \vdots & 0 & \\ \cdots & & \vdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \vdots & B_{n-2} & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ and } B_{n-2} = -B'_{n-2}.$$

Note that if $\mathrm{Tr}(A) > 0$, then it does not exist a C^0-stabilizing feedback for the system (2.15) because it fails to satisfy Brockett's necessary conditions (see [2]). However, using formula (2.13) one can find a homogeneous stabilizing feedback. For, setting $P = I_n$, $b = (0, 1, 0, ..., 0)'$ and $F = (-2\lambda_1, 0, ..., 0)$, one observes that assumptions (a_1) and (a_2) are satisfied. Therefore, one concludes from Theorem (2.2)that the system (2.15) is globally asymptotically stabilized by the homogeneous feedback of degree zero

$$u(x) = \frac{2\lambda_1(-x_2 + \sqrt{x_2^2 + (R-1)\ \|x\|^2}\ )\ x_1}{\|x\|^2}$$

provided that $R > 0$ is sufficiently large.

2.6 Practical passivity and practical output stabilization

Passivity concepts are widely used in control theory as design tools of stabilizing control laws of nonlinear systems. Therefore, it is tempting to interpret our results from the point of view of passivity. We thank an anonymous refree for this suggestion. However, for the bilinear systems we consider the relative singular at the origin that makes the available theory unusable.

The attemps that we have made to overcome this obstacle lead us to introduce the new concept of practical passivity. This means that the system should be passive outside a prespecified small neighborhood of the origin. As shown in forcoming Theorem (2.3), this idea is of interest when the practical output stabilization of the system (2.8) is addressed.
Consider the single-input single-output nonlinear system

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{2.16}$$

where $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ and $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are smooth functions with $f(0, 0) = 0$ and $h(0) = 0$. We will be interested to the case when the state $x(t)$ is uniquely determined by its initial value $x(0)$ and the input function $u(t)$. We assume that $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ belongs to an input set $\mathcal{U}$ of functions which are bounded on all bounded subintervals of $\mathbb{R}^+$.

Définition 2.1 *Assume that the function:* $(u(t), y(t)) \mapsto u(t)y(t)$ *is locally integrable for every* $u \in \mathcal{U}$. *System (2.16) is said to be practically passive if there exists a* C^0 *nonnegative function* $V(x)$ *and a sufficiently small* $r > 0$ *such that*

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t u(s)y(s)ds \tag{2.17}$$

for all $t \geq 0$ *and for all* $u : [0, t] \to \mathbb{R}$ *such that* $\|x(s)\| \geq r, \forall s \in [0, t]$.
If in addition $V(x)$ *is differentiable, (2.17) can be written as*

$$\dot{V}(x(t)) \leq u(t)y(t) \tag{2.18}$$

Consider now the bilinear system (2.8) endowed with an output, say

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = h(x) \end{cases} \tag{2.19}$$

where $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a smooth function with $h(0) = 0$. The following theorem links practical passivity and output practical stabilization for the system (2.19).

Theorem 2.3 *Let the system (2.19) be practically passive with a* C^1 *function* $V(x)$ *wich is radially unbounded and let* $Z \subset \mathbb{R}^n$ *be the largest positively invariant set contained in* $H = h^{-1}(0)$. *If the restriction of (2.19) to* Z, *with zero input, is globally practically stable, then the family of output feedback laws* $u_k(y) = -k\, y$, $k > 0$, *achieves the global practical stabilization of (2.19) at the origin.*

Proof. The practical passivity of (2.19) implies that there exists $r > 0$ such that (2.18) holds. Let $E = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}$ and M be the largest invariant set in E. The assumption (2.18) implies that for $u = -y$, the derivative of V along the trajectories of the closed-loop system

$$\dot{x} = Ax - y\ Bx \tag{2.20}$$

satisfies for all $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \geq r \Rightarrow \dot{V}(x(t)) \leq -y(t)^2 \leq 0 \tag{2.21}$$

Now, as V is positive and radially unbounded, there exists $c > 0$, large enough such that $B(0,r) \subset D_V = \{x \in \mathbb{R}^n, V(x) < c\}$. Let $S_V = \{x \in \mathbb{R}^n, V(x) = c\}$ be the boundary of D_V.

By (2.18), it is obvious that the trajectory $x(t, x_0)$ of (2.20) starting from x_0 in D_V remains in $D_V \cup S_V$ and hence (2.20) is globally practically stable according to Lemma (2.1). On the other hand, if x_0 is not in D_V, let $x(t) = x(t, x_0)$. It is clear that $V(x(t))$ is nonincreasing in $\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)$ and bounded from below ($V(x(t)) \geq 0$), and hence $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = l$ exists. Let $\Omega(x_0)$ be the limit set of the motion. On this limit set $V(x(t)) = l$, for all $t \geq 0$, because of continuity of V. So, $\dot{V}(x(t)) = 0$ on $\Omega(x_0)$ and since $\Omega(x_0)$ is an invariant set of $\dot{x} = Ax, y = 0$ it follows that $\Omega(x_0) \subset M \subset E$. Finally, since $M \subseteq Z$ because $E \subseteq H$, and since all the solutions in Z enter a bounded set and remain within it thereafter, it follows that (2.19) is globally practically stabilizable by the family of output feedback laws $u_k(y) = -k\ y,\ k > 0$.

2.7 Conclusion

In this paper, asymptotic and practical stabilization for homogeneous bilinear systems was explored. First, a sufficient condition ensuring that a bilinear system is globally practically stabilizable at the origin by a family of linear feedbak laws was given. Next, using a practical stabilization result and the homogeneity property of the system under consideration, homogeneous feedback laws of degree zero (bounded) that globally asymptotically stabilize the bilinear system are given. The corresponding stabilizing feedback laws are smooth, except at the equilibrium point of the system. Finally, a new passivity concept was introduced as a design tool of practically stabilizing control laws of bilinear systems.

Acknowledgment We would like to thank Dr. J.C. Vivalda for his fruitful discussions. We also gratefully acknowledge the efforts of the anonymous reviewers of this manuscript, who spent a large amount of time on it and who suggested valuable improvements.

2.8 References

[1] V. Andriano, Global feedback stabilization of the angular velocity of a symmetric rigid body, *Systems Control Lett.* **20** (1993) 361-364.
[2] A. Bacciotti, Constant feedback stabilizability of bilinear systems, in: M.A Kaashoek, J.H van Schuppen, A.C.M. Ran, eds., *Proc.Int.Symp.MTNS-89*, Realization and Modelling in SS.ystem Theory. Vol.I (1989) 357-367.
[3] P. Banks, Stabilizability of finite and infinite-dimentional bilinear systems, *IMA J. Math. Control Inform.* **3** (1986) 255-271.
[4] C.I. Byrnes, A.Isidori and J.C. Willems, Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems,*IEEE Trans.* **36** (1991) 1228-1240.
[5] R. Chabour, G. Sallet and J.C. Vivalda, Stabilization of nonlinear two dimensional systems: a bilinear approch, in: *Math. Control Signals Systems* , **6** (1993) 224-246.
[6] R. Chabour and J.C. Vivalda, Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan, *C.R Acad.Scie. Paris*, 312 (1991) 1017-1020.
[7] S. Celikovský, On the stabilization of the homogeneous bilinea r systems, *Systems Control Lett.* **21** *(1993) 503-510.*
[8] W.Hahn, Stability of motion, *Springer Verlag, New York 1967.*
[9] D. Hill and P. Moylan, dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties, *J. Franklin Inst.*, **309** (1980) 327-357.
[10] D.E. Koditschek and K.S. Narendra, Stabilizability of second-order bilinear systems, *IEEE Trans.***AC-28**(1983)987-989.
[11] J.P. LaSalle and S. Lefschetz, Stability by Lyapunov's direct method with Applications, *Academic Press, New York, 1961.*
[12] R.R. Mohler, Bilinear Control Processes, *Academic Press, New York, 1975*
[13] J. P Quinn, Stabilization of bilinear systems by quadratic feedback controls, *J. Math Anal. Appl.* **75**(1980) 66-80.
[14] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. Kokotovic, Constructive Nonlinear Control, *Springer,* 1996.
[15] H.J. Sussmann, Subanalytic sets and feedback control, *Springer* 1996
[16] H.J. Sussmann, Subanalytic sets and feedback control, *J. Diff. Equ.* **31** (1979), 31-52.
[17] J.Tsinias, Existence of control Lyapunov functions and applications to state feedback stabilizability of nonlinear systems, *SIAM J.Control and Optim.* **29** (1991) 457-473.

Remark on local and global stabilization of homogeneous bilinear systems

O. Chabour J.-C. Vivalda

Systems & Control Letters (soumis) (Cf [24])

Abstract: In this paper, we deal with the problem of stabilization of homogeneous bilinear systems. The aim is to clarify some results on stabilizability of these systems.
Key-Words: Global stabilization. Local stabilization. L-semi global stabilization. Bilinear systems.

2.9 Introduction:

The feedback stabilization of nonlinear control systems has been investigated by many authors. In this paper our purpose is to clarify a result given by V.Andriano in [1] on the link between local and global stabilization of homogeneous bilinear systems of the form:

$$\dot{x} = Ax + uBx \tag{2.22}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, A , B are constantes real matrices $(n \times n)$.
Stabilizability of bilinear systems has been widely studied in the last past years by many authors see eg ([1]....[10]). In [5] a complete algebraic classification of planar bilinear systems of the form (2.22) with respect to their stabilizability is made. For the three dimentional case, in [7] the authors deal with a particular class of bilinear systems of the form (2.22) with A diagonal and B skew symetric. For these systems a necessary and sufficient condition for global asymptotic stabilization by constant feedback and a sufficient condition for stabilization by a family of linear feedbacks is given. In [6], the authors give a sufficient condition for the stabilization of systems of the form (2.22) by means of homogeneous feedback of degree zero. Another interesting problem is considered in the literature. The question is: does the local asymptotic stabilizability (LAS) of (2.22) imply the global asymptotic stabilizability (GAS)? More precisely let us assume that there exists a feedback

law (locally defined) $u : x \to u(x)$ such that the closed system

$$\dot{x} = Ax + u(x)Bx \tag{2.23}$$

is locally asymptotically stable about the origin, does there exists a feedback law (globally defined) $\overline{u}(x)$ wich makes the origin of (2.22) globally asymptotically stable. To the closed loop system (2.23) is associated a positive definite function V locally defined such that $\dot{V}(x)$ (the derivative of V along the trajectories of system (2.23) is negative definite.
In [8], Hammouri and Marques proved that LAS implies GAS under some assumption on the level surfaces of the Lyapunov function related to system (2.23). In [1], Andriano asserts that the answer to the above question is yes without any assumption on the level surfaces of the Lyapunov function. Unfortunatly the proof wich is given in this last article is false and this is the aim of this paper to show this.
The paper is organised as follows: section (2.10) contains somes definitions. In section (2.11), we make a remark on the link between local and global stabilization of bilinear homogeneous systems of the form (2.22) and we point out an error in the proof of the second theorem of [1].

2.10 Definitions:

Let

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{2.24}$$

be a control system with f smooth verifying $f(0,0) = 0$.

Definition 2.1 *: System (2.24) is said to be locally (resp. globally) asymptotically stabilizable if there exists a feedback law $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that the origin is locally (resp. globally) asymptotically stable for the closed loop system: $\dot{x} = f(x, u(x))$.*

Of course, local stabilizability does not imply global stabilizability.

The following notion of stabilization was introduced by Andriano in [1].
Definition 2.2 *: The system $\dot{x} = f(x) + ug(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ and $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ with $f(0) = 0$ is said to be L-semi globally stabilizable if there exists a sequence of compact sets M_k such that $\bigcup_{k=1^\infty} M_k = \mathbb{R}^n$, $0 \in intM_1$, $M_k \subset intM_{k+1}$ and for all k there exists a C^∞ function $u_k(x)$ and a C^1 function V_k such that :*

(i) the system $F_k = f + u_k g$ is locally asymptotically stable.

(ii) $M_k \subset A(F_k)$ where $A(F_k)$ denotes the region of attraction of F_k.
(iii) M_k is a positively invariant set for F_k.
(iv) V_k is positive definite on M_k.
(vi) $\nabla V_k.F_k$ and $\nabla V_k.F_{k-1}$ are definite negative on $\overline{M_k \setminus M_{k-1}}$.

Definition 2.3 : *We will say that the domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, is strictly star-shaped with respect to a point x_0 if the half line starting from x_0 cuts ∂D at a single point.*

2.11 A Remark on stabilizability of homogeneous bilinear systems.

In [1] the author shows that if an homogeneous bilinear system of the form (2.22) is locally stabilizable then it is globally stabilizable.
In his proof the author uses Massera's theorem and consider the locally defined Liapunov function V: $U_0 \to \mathbb{R}_+$, where U_0 is a neighborhood of the origin.
If $\mathcal{B} = \overline{\{x : V(x) \leq \epsilon\}} \subset U_0$ and $u(x)$ the feedback that makes the origin asymptotically stable, for a real number $a > 1$ and $n \in \mathbb{N}$ he puts:

- $u_n(x) = u(x/a^n)$
- $F_n = A + u_n B$
- $K_n = a^n \mathcal{B}$
- $V_n(x) = a^n V(x/a^n)$

The author proves that all the conditions (i)-(iv) of the definition (2.2) are satisfied and that there exists a neighborhood of $a = 1$ such that $\nabla V_n.F_{n-1}(x)$ is negative definite for all $x \in K_n \setminus K_{n-1}$. So, the L-semi global stabilizability of the system (2.22) holds. Using a previous theorem wich states that if an affine system is L-semi globally stabillizable then it is globally stabilizable, he deduces the global asymptotic stabilizability of the system (2.22).
But we remark that this proof is based on the assumption $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$ and if $\mathcal{B}$ is not star-shaped with respect to the origin this assumption may be false.
For this, let us consider system (2.22) with:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7/4 \end{pmatrix},$$

$u(x) = -x_2^2$ and the Lyapunov function $V(x) = x_1^2 + x_1 x_2^3 + (7/24)(x_2)^6$.

It is clear that V is definite positive (the discriminant of V, regarded as a quadratic form in x_1, is $(-1/6)x_2^6)$) and that $\dot{V}$ is negative definite ($\dot{V} = (-2x_1 + x_2)^2 - x_2^2(3x_1 + (7/4)(x_2^3))^2$).
Now remark that the domaine $\mathcal{B} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq \epsilon\}}$ is not star-shaped with respect to the origin.
In fact, let $\lambda \in \mathbb{R}_+$ and $\varphi(\lambda) = V(\lambda x)$.
For (x_1, x_2) fixed, we claim that if x_1x_2 is negative and $|x_1/x_2^3|$ small enough there exist λ_1 and λ_2 $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1)$ such that, $\varphi'(\lambda_1)\varphi'(\lambda_2)$ is negative. (φ' denoting the derivative of φ),
Then there exist λ_{12} and λ_{22} $(0 < \lambda_1 < \lambda_{12} < \lambda_{22} < \lambda_2 < 1)$ such that $\varphi(\lambda_{12}) = \varphi(\lambda_{22})$.
So, putting $K_n = a^n\mathcal{B}$, we cannot have $K_{n-1} \subset \text{int } K_n$ for all $a > 1$. To be more precise, we claim:

Lemme 2.1 : *A necessary condition for K_{n-1} to be included in intK_n with ($a > 1$) is that $(a^4 - 5a^2 + 1) > 0$.*

Proof of lemma (2.1)

The discriminant of the quadratic form $Q(X) = a^{4n}X_1^2 + a^{2n}(a^2+1)X_1X_2 + (7/24)(a^4 + a^2 + 1)X_2^2$ is equal to $-(a^{4n}/6)(a^4 - 5a^2 + 1)$.
So, if we assume that $(a^4 - 5a^2 + 1) \leq 0$, we can find $(X_1, X_2) \neq (0,0)$ such that $Q(X) \leq 0$.
Putting $x_1 = X_1$ and $x_2 = X_2^{1/3}$, we have:
$a^{4n}x_1^2 + a^{2n}(a^2+1)x_1x_2^3 + (7/24)(a^4 + a^2 + 1)x_2^6 \leq 0$.
An easy calculation will convince the reader that this last inequality is equivalent to:$V(x/a^{n-1}) \leq V(x/a^n)$.
So it is possible to choose α such that $\alpha^2 V(x/a^{n-1}) \leq \epsilon \leq \alpha^2 V(x/a^n)$.
(V being definite positive, $V(x/a^{n-1}) > 0$)
Putting $\tilde{x_1} = \alpha x_1$ and $\tilde{x_2} = \alpha^{1/3}x_2$, this last inequality is equivalent to: $V(\tilde{x}/a^{n-1}) \leq \epsilon \leq V(\tilde{x}/a^n)$.
So we see that $K_{n-1} \not\subset \text{int } K_n$ if $(a^4 - 5a^2 + 1) \leq 0$.
In order to apply his main theorem Andriano needs the inequality:
$\nabla V_n.F_{n-1}(x) < 0$ on $K_n \setminus K_{n-1}$. We state the following lemma:

Lemme 2.2 : *A necessary condition for $\nabla V_n.F_{n-1}(x)$ to be negative (with $a > 1$) is that $(6a^2 - 7) < 0$.*

Proof of lemma (2.2)

Recall that
$V_n(x) = a^n V(x/a^n)$,
$u_{n-1}(x) = u(x/a^{n-1})$,

$F_{n-1}(x) = Ax + u_{n-1}(x)Bx$.
An easy computation gives:
$\nabla V_n.F_{n-1}(x) =$
$-[2x_1/a^n + x_2^3/a^{3n}][2x_1 + x_2^3/a^{2n-2}] - [3x_1x_2^2/a^{3n} + (7/4)(x_2^5/a^{5n})]\ [3x_1 + (7/4)(x_2^3/a^{2n-2})]$.
Let x, $(x \neq 0)$, such that $(2x_1 + x_2^3/a^{2n-2}) = 0$, then $\nabla V_n.F_{n-1}(x) = -(x_2^8/16a^{7n-2})(7-6a^2)$. For this x we have: $V(x/a^n) = (x_2^6/24a^{6n})(6a^4 - 12a^2 + 7)$ and
$V(x/a^{n-1}) = (x_2)^6/24a^{6n-6}$.
Now it is possible to find x_2, $(x_2 \neq 0)$, such that $V(x/a^n) < \epsilon < V(x/a^{n-1})$ because this inequality is equivalent to:

$$24a^{6n-6}\epsilon < (x_2)^6 < (24a^{6n}\epsilon)/(7 - 12a^2 + 6a^4) \tag{2.25}$$

and since we have $1 < a^6/(7 - 12a^2 + 6a^4)$ provided $a > 1$ (notice that $a^6 - (6a^4 - 12a^2 + 7) = (a^2-1)(a^4 - 5a^2 + 7) > 0$), we can pick x_2 such that inequality (2.25) holds.
We have proven that it is possible to find a point x such that
$x \in K_n \setminus K_{n-1}$ $(V(x/a^n) < \epsilon < V(x/a^{n-1}))$ and such that
$\nabla V_n.F_{n-1}(x) = -(x_2^8/16a^{7n-2})(7-6a^2)$.
So, the condition $(7-6a^2) > 0$ is necessary in order to have $\nabla V_n.F_{n-1}(x) < 0$ on $K_n \setminus K_{n-1}$.

In conclusion in order to have $K_{n-1} \subset \text{int } K_{n-1}$ and $\nabla V_n.F_{n-1} < 0$ on $K_n \setminus K_{n-1}$, we must have $(a^4 - 5a^2 + 1 \leq 0)$ and $(6a^2 - 7) < 0$ but it is easily seen that these conditions are incompatible if $a > 1$.

2.12 Conclusion:

The global asymptotic stabilization of bilinear homogeneous systems can be derived from the local asymptotic stabilization of these systems if we put a sufficient condition on the Lyapunov functions wich are induced by Massera's Theorem.
Remark that this result can be derived from [6] where an alternative and more easy proof of this fact is given.

2.13 References

[1] V. Andriano , Global feedback stabilization of the angular velocity of a symmetric rigid body, *Systems Control Lett.* **20** *(1993) 361-364.*

[2] A. Bacciotti, Constant feedback stabilizability of bilinear systems, in: M.A Kaashoek, J.H van Schuppen, A.C.M. Ran, eds., *Proc.Int.Symp.MTNS-89*, Realization and Modelling in System Theory. Vol.I (1989) 357–367.

[3] S.P. Banks, Stabilizability of finite and infinite-dimentional bilinear systems, *IMA J. Math. Control Inform.* **3** (1986) 255–271.

[4] R. Chabour, G. Sallet and J.C. Vivalda, Stabilization of nonlinear two dimensional systems: a bilinear approch, in: *Math. Control Signals Systems* , **6** (1993) 224–246.

[5] R. Chabour and J.C. Vivalda, Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan, *C.R Acad.Scie. Paris*,**312** (1991) 1017–1020.

[6] O.Chabour, R.Chabour, H.Zenati, G.Sallet,Stabilizability of homogeneous polynomial systems in: *Proc.27 IEEE C.D.C.*(1998). 4098–4099.

[7] S. Celikovský, On the stabilization of the homogeneous bilinear systems, *Systems Control Lett.* **21** *(1993) 503–510.*

[8] H. Hammouri and J.C.Marques, Stabilization of homogeneous bilinear systems, *Appl. Math. Letters* **7-1** (1994) 23–28.

[9] D.E. Koditschek and K.S. Narendra, Stabilizability of second-order bilinear systems, *IEEE Trans.*$\mathbf{AC}$**-28**(1983) 987–989.

[10] R.R. Mohler, Bilinear Control Processes, *Academic Press, New York, 1975*

Chapitre3 Les systèmes Homogènes

Chapitre 3

Stabilisation des systèmes homogènes

Les systèmes homogènes constituent une classe importante de systèmes non linéaires. En effet, d'une part ils modèlisent beaucoup de phénomènes pratiques, d'autre part, de part leurs propriétés d'homogéneité ils constituent une première généralisation des systèmes linéaires.

L'application du théorème de Masséra permet de conclure sur l'asymptotique stabilité locale d'un système analytique dont les termes de plus bas degré dans le développement en série de Taylor constituent un système homogène localement asymptotiquement stable. Ce résultat a été généralisé par K. Kawski [53] et H. Hermes [45] à des systèmes homogènes par rapport à un groupe de dilatation (systèmes quasi homogènes).
Ceci a pour conséquence un résultat important sur la stabilisation des systèmes non linéaires. Ainsi, si un système non linéaire contrôlé admet une approximation homogène stabilisable par une commande homogène alors il est stabilisable localement par cette même commande.

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés a ces systèmes. (Cf [3], [32], [35], [53], [55], [45], [75]).

Pour les systèmes à champ contrôlés linéaires, A. Andreini, A. Baccioti et G. Stephani dans ([3]) et W.P. Dayawansa et C.F. Martin dans ([35]) ont donné une condition suffisante de stabilisabilité de ces systèmes dans $\mathbb{R}^3$. Celle ci se ramène à l'existence d'une fonction de Lyapounov contrôlèe homogène. W.P. Dayawansa, C.F. Martin et G. Knowles dans [36], ont donné une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité de ces systèmes dans le plan.

Pour les systèmes homogènes plus généraux, les résultats sont essentiellement basés sur le théorème de Coleman ([31]), qui permet de restreindre l'analyse des systèmes de dimension 3 à la sphère homogène Σ^2. Ainsi, les résultats portent essentiellement sur les systèmes de petites dimensions. Citons, pour les systèmes affines, les résultats de K. Kawski ([53], [54], [55], [56], [57]) qui a donné des conditions suffisantes de stabilisabilité locale par un feedback homogène continu pour les systèmes localement contrôlables de dimension 2 et 3. Pour les systèmes homogènes de types quadratiques dans [12], B. Bonnard et H. Tebkish ont donné une étude complète sur l'asymptotique stabilisation de ces systèmes dans $\mathbb{R}^2$, W.P. Dayawansa, C.F. Martin et S. Samelson ont donné dans [37] une condition suffisante de stabilisabilité pour une classe de systèmes dans $\mathbb{R}^3$.

Dans ce chapitre, nous étudions des classes particulières de systèmes homogènes affines en dimension n quelquonque.
Nous donnons des conditions suffisantes sous lesquelles les systèmes étudiés sont globalement asymptotiquement stabilisables par des commandes C^∞ sauf peut être en zéro. Pour les systèmes à champ contrôlé linéaires nous construisons le feedback stabilisateur. Pour les systèmes de forme plus générale, affine nous donnons une condition suffisante de stabilisabilité asymptotique globale par une commande homogène. Ce travail a été publié dans [21].

Dans [23], nous généralisons ce dernier résultat à des systèmes homogènes par rapport à un groupe de dilatations. Nous montrons que s'il existe une commande continue telle que les trajectoires du système bouclé correspondant convergent dans un domaine étoilé en zéro, alors le système est globalement asymptotiquement stabilisable par une commande quasi homogène.

Stabilizability of homogeneous polynomial systems

O. Chabour R.Chabour G. Sallet and H.Zenati

C.D.C 1998 (Cf [21])

Abstract: In this paper the problem of stabilizability at the origin of a homogeneous polynomial systems on $\mathbb{R}^n$ is adressed and solved from a new point of view. Sufficient conditions for the existence of stabilizing homogeneous feedback laws are given.

3.1 Introduction

This paper is a contribution to the global stabilization of nonlinear systems by feedback. The results concern systems of the form

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

where f and g are homogeneous polynomial vector fields of degree, respectively, k_1 and k_2. We assume that k_1 is an odd integer ($k_1 \geq 1$) and $k_1 \geq k_2 \geq 0$. The problem is to find feedback laws $u(x)$ smooth on $\mathbb{R}^n - \{0\}$ that make the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x) + u(x)g(x) \tag{3.2}$$

globally asymptotically stable about $x = 0$. In this case we say that system (3.1) is stabilizable. These systems have been considered by several authors (see [5], [2]) and references there in. They serve as a local approximation of more general systems and describe great number of applications. In the present work we propose a new constructive methodology for the stabilizability of (3.1) wich was recently discussed in [3]. We provide sufficient conditions for the existence of a stabilizing feedback laws $u(x)$ smooth on $\mathbb{R}^n - \{0\}$. The case when $g(x) = Bx$, where B is a $n \times n$ constant matrix, is also considered.

3.2 Basic notations and definitions

Throught this paper, $\|x\|$ and A^T are, respectively, the usual Euclidean norm of a point $x \in \mathbb{R}^n$ and the transposed matrix of A. Given a non empty set D, $intD$ is the interior of D and ∂D is its boundary.

Definition 3.1 *We say that a function* $h(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *is positively homogeneous of degree* k *if* $h(\lambda\ x) = \lambda^k h(x)$ *for each* $x \in \mathbb{R}^n$ *and* $\lambda > 0$.

A vector field $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))^T$ *is said to be homogeneous of degree* k *if all its components are homogeneous functions of the same degree* k.

Definition 3.2 *We will call the domaine* $D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ *containing the origin strictly star-shaped with respect to a point* $x_0 \in D$ *if the half straight line going from* x_0 *cuts* ∂D *at a single point.*

3.3 Stabilizability

Theorem 3.1 *Given the system (3.1), assume that for a strictly star-shaped domain* $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ *with respect to the origin, there exists a continuous function* $\tilde{u}(x) : \partial D \to \mathbb{R}$, *such that all the trajectories of the closed-loop system*

$$\dot{x} = f(x) + \tilde{u}(x)\ g(x) \tag{3.3}$$

enter the bounded domain D *and remain within it thereafter. Then there exists a homogeneous feedback* $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *of degree* $(k_1 - k_2)$ *such that* $x = 0$ *is an asymptotically stable equilibrium point of*

$$\dot{x} = f(x) + u(x)\ g(x) \tag{3.4}$$

Proof of theorem (3.1) Let the domain D given in theorem (3.1) be represented by the set $\{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq 0\}$, where the function $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is at least of class C^1. The boundary of D is the set $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, V(x) = 0\}$. By assumption, we have

$$(\frac{\partial V}{\partial x})^T\ (f(x) + \tilde{u}(x)\ g(x)) < 0 \text{ forall } x \in \partial D$$

and $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\exists\, h(x) > 0$ such that $h(x)\ x \in \partial D$ and $h(x) = 1$ for all $x \in \partial D$. Setting

$$u(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{h(x)}\right)^{k_1 - k_2} \tilde{u}\,(h(x)\,x) & if\ \ x \neq 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

It is clear that $u(x)$ coincides with $\tilde{u}(x)$ on ∂D.
Now we show that $u(x)$ is positively homogeneous of degree $k_1 - k_2$. Indeed, for each $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ and for all real number $\mu > 0$, we have

$$h(\mu\, x)\, \mu\, x \in \partial D.$$

Now since the points x and $\mu\, x$ lie on a same half straight line going from the origin and which must cut the boundary ∂D at a single point, it follows that

$$h(\mu\, x)\, \mu\, x \;=\; h(x)\, x.$$

So, for $x \neq 0$, $\quad h(\mu\, x) \;=\; \dfrac{1}{\mu}\, h(x)$
Then,

$$u(\mu\, x) = \left(\frac{1}{h(\mu\, x)}\right)^{k_1 - k_2} \tilde{u}(h(\mu\, x)\mu x) = \mu^{k_1 - k_2}\, u(x).$$

Consider now $D_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;/\; V(\dfrac{x}{\lambda}) \leq 0\right\}$ the image of D by the homothetic transformation with the center 0 and the report $\lambda \in \mathbb{R}^+$. It is easily seen that $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ is a family of compact sets wich satisfies the conditions of V. Andriano lemma [1]:
(i) $\cap_{\lambda > 0} D_\lambda = 0\,;$
(ii) for all $\lambda < \mu \qquad D_\lambda \subset int D_\mu\,;$
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, \lambda > 0$ such that $x \in \partial D_\lambda$.
Now, since the feedback $u(x)$ is homogeneous function of degree $k_1 - k_2$ and coincides with $\tilde{u}(x)$ on ∂D, it follows that the system (3.4) is homogeneous of degree k_1 and its solutions enter the bounded set D and remain within it thereafter. Hence, in order to complete the proof, it remains to show that the tangent spaces of ∂D and ∂D_λ at x^0 and λx^0 respectively, are parallel.
Let $T_{x^0}(\partial D)$ be the tangent space of ∂D at x^0, and X_{x^0} an element of $T_{x^0}(\partial D)$ (a tangent vector of ∂D at x^0). For all function $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, one has

$$X_{x^0}(V) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$$

and

$$X_{\lambda x^0}(V) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x^0)(x_i - \lambda x_i^0)$$

Obviously, X_{x^0} and $X_{\lambda x^0}$ are parallel. So, by Andriano lemma [1], the theorem follows.

Theorem 3.2 *Consider the system*

$$\dot{x} = f(x) + u\; Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

where B is a $n \times n$ constant matrix and f is a polynomial homogeneous vector field of odd degree $k_1 \geq 1$. If there exists a real $(n \times n)$ symmetric positive definite matrix P and a vector $b \in \mathbb{R}^n$ such that *(i)* $B^T P + PB = 0$

(ii) $Ker\ (Bb)^T P \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P f(x) < 0\} \cup \{0\}$.

then the system (3.5) is stabilizable.

Proof of theorem (3.2) Let

$$\tilde{u}(x) = -\alpha\ \|x\|^{k_1-1}\ (Bb)^T P x$$

and

$$V(x) = (x+b)^T P (x+b).$$

For $\|x\|$ sufficiently large, the derivative of $V(x)$ with respect to the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x) + \tilde{u}(x)\, Bx \tag{3.6}$$

has the same sign as the function

$$\varphi(x) = x^T P f(x) - \alpha\ \|x\|^{k_1-1}\ \left[(Bb)^T P x\right]^2.$$

Since $\varphi(x)$ is a homogeneous function of degree $k_1 + 1$, there exists $\alpha > 0$ such that $\varphi(x) < 0$ for each $x \neq 0$. Then, for α fixed, there exists $\beta > 0$ (sufficiently large) such that the domain $D = \{x \in \mathbb{R}^n /\ V(x) - \beta \leq 0\}$ satisfies the following properties:

$$i)\ \dot{V} < 0 \text{ on } \partial D \qquad ii)\ 0 \in intD$$

So, it follows from theorem 3.1 that the system (3.5) is stabilizable thanks the homogeneous feedback

$$u(x) = \begin{cases} -\alpha\ \|x\|^{k_1-1}\ (Bb)^T P x\ h(x) & if\ \ x \neq 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

where

$$h(x) = \frac{-x^T P b + \sqrt{(x^T P b)^2 + (\beta - b^T P b)(x^T P x)}}{x^T P x}.$$

3.4 References

[1] V. Andriano, "Global feedback stabilization of the angular velocity of a symmetric rigid body", *Systems Control Lett.,* 20, 1993, pp. 361-364.

[2] A. Andreini, A. Bacciotti and G. Stefani, "Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree", *Systems Control Lett.,* 10, 1988, pp. 251-256.

[3] O. Chabour, R. Chabour and H. Zenati, "Stabilisation des systèmes bilinéaires Homogènes", *C.R Acad. Scie. Paris*, 1998, pp. 633-636.

[4] S. Ĉelikovský, "On the stabilization of the homogeneous bilinear systems", *Systems Control Lett.*, 21, 1993, pp. 503-510.

[5] H. Hermes, "Homogeneous feedback control for homogeneous systems", *Systems Control Lett.*, 24, 1995, pp. 7-11.

Homogeneous Stabilizing Feedbacks for Homogeneous Systems

O. Chabour R. Chabour H. Zenati

A.C.C.2000 (Accepté) (Cf [23])

Abstract In this paper we deal with the stabilizability problem of a homogeneous nonlinear systems. We provide sufficient condition under which the system considered is globally asymptotically stabilizable by an homogeneous feedback law.

3.5 Introduction

Asymptotic stabilization is of much interest in nonlinear control theory, see for instance [2 3 4]. In this paper we consider control systems of the form

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

where f and g are homogeneous vector fields of order k_1 and k_2 with respect to a family of dilations.

These systems serve as local approximation of general control systems where the higher order terms have been negleted (see [7],[5]). M. Kawski, in [5] (see also [4]), has shown that every affine controllable system of dimension two or three admits an homogeneous approximation which is stabilizable by homogeneous feedback.

In [8], using the homogeneity propertie, L. Rosier proved that if an homogeneous nonlinear system is locally asymptotically stabilizable by means of an homogeneous feedback law, then it can be globally asymptotically stabilizable by adding an integrator.

Our main interest in this paper is the existence, and construction, of an homogeneous feedback control, which makes system (1) globally asymptotically stabilizable at the origin.

3.6 Basic notations and definitions

In this paper, $\|x\|$ and A^T are, respectively, the usual Euclidean norm of a point $x \in \mathbb{R}^n$ and the transposed matrix of A.

Definition 3.1 *For a fixed of coordinates $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, and positive integers $r_1, ..., r_n \geq 1$, a family of dilations is a map $\delta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $(\lambda, x) \mapsto \delta_\lambda(x) = (\lambda^{r_1} x_1, ..., \lambda^{r_n} x_n)$.*
A function $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is δ-homogeneous (homogeneous with respect to the dilation δ) of degree k if

$$\forall \lambda > 0 : h(\delta_\lambda(x)) = h(\lambda^{r_1} x_1, ..., \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^k \ h(x)$$

A vector field $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))^T$ is said to be δ-homogeneous of degree k if for all $i \in \{1, ..., n\}$, we have

$$\forall \lambda > 0 : F_i(\delta_\lambda(x)) = F_i(\lambda^{r_1} x_1, ..., \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^{k+r_i} \ F_i(x)$$

Associeted to a given dilation, the Euler vector field is defined by

$$\nu(x) = (r_1 x_1, ..., r_n x_n)^T$$

and the homogeneous rays are the solutions of the differential equation

$$\dot{x} = \nu(x)$$

Definition 3.2 *We will call the domaine $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ containing the origin strictly star-shaped with respect to a point $x_0 \in D$ if the homogeneous ray going from x_0 (at $t = 0$) cuts ∂D at a single point.*

3.7 Stabilizability

Theorem 3.1 *Given the system (1), assume that for a strictly star-shaped domain $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) with respect to the origin and such that ∂D is differentiable, there exists a continuous function $\tilde{u}(x) : \partial D \to \mathbb{R}$, such that all the trajectories of the closed-loop system*

$$\dot{x} = f(x) + \tilde{u}(x) \ g(x) \tag{3.8}$$

enter the bounded domain D and remain within it thereafter. Then there exists a homogeneous feedback $u(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, of degree $(k_1 - k_2)$ such that $x = 0$ is an asymptotically stable equilibrium point of the closed-loop system

$$\dot{x} = X(x) = f(x) + u(x) \ g(x) \tag{3.9}$$

In order to prove the theorem (3.1) we need the following lemma wich has been proven by V.Andriano in [1].

Lemma [1] *Consider the system:*

$$\dot{x} = f(x) \quad , \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

where f is Lipshitz and $f(0) = 0$.
Assume that there exists a family of compact sets $\{D_i\}_{i\in\mathbb{R}^+}$ with the following properties:
(i) $\cap_{i>0} D_i = 0$;
(ii) for all $i < j$ $\quad D_i \subset int D_j$;
(iii) for all $x \in \mathbb{R}^n$ there exists $j \in \mathbb{R}^+$ such that $x \in \partial D_j$;
(iv) for all $i \in \mathbb{R}^+$ and for all $x \in \partial D_i$ the vector field $f(x)$ enter the bounded set D_i
after some time $T < \infty$ and remain within it thereafter.

Then $x = 0$ is globally asymptotically stable for the corresponding system.

Proof of theorem 3.1. Let the domain D given in theorem 1 be represented by the set $D = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq R\}$, where V is a C^1 positive function ($V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$) and $R > 0$ sufficiently large. By assumption, we have

$$(\frac{\partial V}{\partial x})^T (f(x) + \tilde{u}(x)\, g(x)) < 0 \quad , \quad \text{for } x \in \partial D.$$

and for all $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ there exists $\lambda = \lambda(x) > 0$ such that

$$\lambda(x).x = (\lambda(x)^{r_1} x_1, ..., \lambda(x)^{r_n} x_n) \in \partial D$$

where $r_1, ..., r_n$ are positive integers, and

$$\lambda(x) = 1 \text{ on } \partial D.$$

Now, setting

$$u(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda(x)}\right)^{k_1-k_2} \tilde{u}\,(\lambda(x).x) & if \;\; x \neq 0 \\ \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

Since $\lambda(x) = 1$ on ∂D, it follows that $u(x)$ coincides with $\tilde{u}(x)$ on ∂D. Moreover, using the facts:

i) $\forall \epsilon > 0, \;\; \lambda(\delta_\epsilon(x)).\delta_\epsilon(x) \in \partial D.$

ii) the points x and $y = \delta_\epsilon(x)$ lie on a same homogeneous ray (solution curve of $\dot{x} = \nu(x)$),

it follows that $u(x)$ is homogeneous of degree $k_1 - k_2$.
Now, we prove that feedback $u(x)$ makes the system (1) globally asymptotically stable. Let us define

$$D_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ V(\frac{x_1}{\lambda^{r_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\lambda^{r_n}}) \leq R \right\}$$

the image of D by the transformation $\delta_\lambda(x) = (\lambda^{r_1}x_1, \ldots, \lambda^{r_n}x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Note that $D_1 = D$. It is easily seen that $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ is a family of compact sets wich satisfies the conditions (i) - (iii) of the above lemma. So, it only remains to show that for all $\lambda \in \mathbb{R}^+$ and for all $x \in \partial D_\lambda$, all the trajectories of (3) enter D_λ and remain within it thereafter. Note that the systems (2) and (3) coincide on ∂D, so the vector field (3) points "inward" on ∂D. Now, by using the homogeneity, we will show that the vector field (3) points inward on ∂D_λ, for all $\lambda > 0$. Thus, it turns out to prove that the tangent spaces of ∂D and ∂D_λ ($\forall \lambda > 0$) respectively, at x^0 and $\delta_\lambda(x^0)$, are parallel.
Let $T_{x^0}(\partial D)$ be the tangent space of ∂D at x^0, and X_{x^0} an element of $T_{x^0}(\partial D)$. For $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, we have

$$X_{x^0}(V) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)$$

and

$$\begin{aligned} X_{\delta_\lambda(x^0)}(V) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\frac{x_1}{\lambda^{r_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\lambda^{r_n}}) \right) (x_i - \lambda^{r_i} x_i^0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{r_i}} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x^0)(x_i - \lambda^{r_i} x_i^0). \end{aligned}$$

Thus the tangent vectors X_{x^0} and $X_{\delta_\lambda(x^0)}$ are parallel. So, it follows that the vector field (3) points inward on ∂D_λ, forall $\lambda > 0$ and this means that all the trajectories of the closed-loop system (3) enter the bounded set D_λ, for all $\lambda > 0$, and remain in it thereafter, and the theorem is proved.

3.8 References

[1] V. Andriano, Global feedback stabilization of the angular velocity of a symmetric rigid body, *Systems Control Lett.* **20** (1993) 361-364.

[2] A. Andreini, A. Bacciotti and G. Stefani, Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree, *Systems Control Lett.,* **10** (1988) 251-256.
[3] R. Chabour, G. Sallet and J.C. Vivalda, Stabilization of non linear two dimensional systems: a bilinear approch, in: *Math. Control Signals Systems* , **6** (1993) 224-246.
[4] O. Chabour, R. Chabour and H. Zenati, Stabilisation des systèmes bilinéaires Homogènes, *C.R. Acad.Scie. Paris*, **326** (1998) 633-636.
[5] H. Hermes, Homogeneous feedback control for homogeneous systems, *Systems & Control Lett.*, **24** (1995) 7-11.
[6] M.Kawski, Stabilization of nonlinear systems in the plane, *Systems & Control Lett.* **12** (1989) 169-175.
[7] M. Kawski. Homogeneous feedback laws in dimension three. *Proceedings 28th CDC, Tampa, Florida*, (1989) 1370-1375.
[8] L. Rosier. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, **19**, (1992) 467-473.

Deuxième partie

Stabilisation des systèmes stochastiques

Chapitre 4

Les systèmes stochastiques

Dans cette partie de la thèse nous étendons des résultats de stabilisation globale de systèmes non linéaires déterministes à des systèmes non linéaires stochastiques.

Nous nous sommes intéressés aux systèmes partiellement linéaires et aux systèmes en cascade plus généraux, lorsque les phénomènes aléatoires ne sont pas négligés. Nous nous sommes placés dans la situation la plus générale, c'est à dire, lorsque la dérive et la partie contrôlée du système déterministe sont soumis à des perturbations. Avant de présenter ce travail qui a fait l'objet des publications [25] et [26], nous commencerons par un bref exposé de la version stochastique de la théorie de Lyapounov (cf [59]).

4.1 Rappels et Généralités

Etant donné $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ un espace de probabilité $(w_t,\ t \in \mathbb{R}^+)$ un processus de Wiener standard défini sur cet espace et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration continue à droite engendrée par le processus w_t.
On considère l'équation différentielle stochastique écrite au sens de Itô

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma_0(x_s)ds + \Sigma_{k=1}^m \int_0^t \sigma_k(x_s)dw_s^k \tag{4.1}$$

où x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable.

σ_0 et σ_k des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, lipshitziennes qui vérifient

- (i) il existe K >0 tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\Sigma_{k=0}^m(\|\sigma_k(x)\|) \leq K(1 + \|x\|)$$

- (ii) $\sigma_k(0) = 0\ \forall k = 0, \dots m$

On notera par $x_t(x_0)$ la solution à l'instant t du système (4.1), issue de x_0 à l'instant $t = 0$.

Si on note L le générateur infinitésimal du processus stochastique x_t, L est l'opérateur différentiel de second ordre défini par :

$\forall \Psi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a

$$L\Psi(x) = \Sigma_{i=1}^n \sigma_0^i(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \Sigma_{i,j=1}^n a^{i,j}(x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

où $a^{i,j}(x) = \Sigma_{k=1}^m \sigma_k^i(x) \sigma_k^j(x) \qquad 1 \leq i,j \leq n.$

4.1.1 Notions de stabilités

Stabilité en probabilité

Définition 4.1 *La position d'équilibre $x_t = 0$ du système différentiel stochastique (4.1) est stable en probabilité si $\forall \epsilon > 0$ on a $\lim_{x_0 \to 0} P(sup_{t>0} \|x_t(x_0)\| > \epsilon) = 0$*

Théorème 4.1 (Khasminski) *[59] Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov V définie dans un voisinage D de l'origine (i.e.une fonction de classe C^2 définie positive et propre) telle que $LV(x) \leq 0$ pour tout $x \in D$, alors la solution $x_t = 0$ du système (4.1) est stable en probabilité.*

Stabilité asymptotique en probabilité

Définition 4.2 *La position d'équilibre $x_t = 0$ du système (4.1) est asymptotiquement stable en probabilité si*

- *(i) $x_t = 0$ est stable en probabilité.*
- *(ii) Il existe D un voisinage de l'origine tel que $P(\lim_{t \to +\infty} \|x_t(x_0)\| = 0) = 1$, $\forall x_0 \in D$.*

  Si $D = \mathbb{R}^n$ (4.1) est globalement asymptotiquement stable en probabilité.

Théorème 4.2 (Khasminski) *[59] Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov V définie sur un voisinage D de 0 tel que $LV(x) < 0 \quad \forall x \in D, x \neq 0$ alors la position d'équilibre du système (4.1) est asymptotiquement stable en probabilité.*

Stabilité exponentielle en moyenne d'ordre p

Définition 4.3 *La position d'équilibre $x_t = 0$ du système (4.1) est exponentiellement stable en probabilité s'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 tel que pour tout x_0 on ait $E\|x_t(x_0)\|^p \leq C_1(\|x_0\|)^p e^{-C_2(t)}$.*
On parlera de stabilité en moyenne lorsque $p = 1$ et de stabilité en moyenne quadratique lorsque $p = 2$.

4.1.2 Notions de stabilisation: Formulation du problème

On considère une équation différentielle stochastique contrôlée

$$dx_t = (f_1(x_t) + ug_1(x_t))dt + f_2(x_t)dw_t + ug_2(x_t)\tilde{dw}_t \tag{4.2}$$

$f_i = (f_{i,1}, \dots f_{i,n})^T$, $g_i = (g_{i,1}, \dots g_{i,n})^T, i = 1,2$
où $f_i et g_i$ sont des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions d'existence et d'unicité des solutions telles que $f_i(0) = g_i(0) (i = 1,2)$ et ω_t et $\tilde{\omega}_t$ sont des processus de wiener standards.
Le problème de la stabilisation est de déterminer une loi de commande $u : x_t \to u(x_t)$ telle que $u(0) = 0$ et tel que $x = 0$ soit une position d'équilibre asymptotiquement stable en probabilité, ou exponentiellement stable pour le système bouclé

$$dx_t = (f_1(x_t) + u(x_t)g_1(x_t))dt + f_2(x_t)dw_t + u(x_t)g_2(x_t)\tilde{dw}_t$$

.

4.2 Stabilisation d'un système partiellement linéaire

Dans cette partie de notre travail, nous considérons une classe de systèmes partiellement linéaires, étudiée dans le cas des systèmes déterministes par A. Saberi, P.V Kokotovich et H.J. Sussmann [77] sur laquelle nous faisons intervenir des phénomènes aléatoires sur les parties linéaires et non linéaires du système.

Soit le système:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_t = x_0 + \int_0^t (f_0(x_s) + G_0(x_s,\xi_s)C_0\xi_s ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t f_k(x_s)dw_s^k + \sum_{\tilde{k}=1}^m \int_0^t G_k(x_s,\xi_s)C_k\xi_s d\tilde{w}_s^k \\ \xi_t = \xi_0 + \int_0^t (A\xi_s + Bu)ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t D_k\xi_s dw_s^k \end{array} \right. \tag{4.3}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^q$.

$f_k(x) = (f_{k,1}(x), \dots ,f_{k,n}(x))^T ,k = 0, \dots ,m$
$G_k(x,\xi)C_k\xi = (G_k(x,\xi)C_k\xi)_1, \dots ,G_k(x,\xi)C_k\xi)_n)^T ,k = 0, \dots ,m.$

f_k et G_k sont des fonctions de classe $C^\infty k = 0, \dots ,m.$

A, B, $C_k(k = 0, \dots ,m;)$, $D_k(k = 1, \dots ,m)$ sont des matrices de dimention appropriées.

Sous les hypothèses suivantes:

1. Il existe une fonction de Lyapounov V définie positive et propre de classe C^∞ pour le système

$$x_t = x_0 + \int_0^t (f_0(x_s) + \sum_{k=1}^m \int_0^t f_k(x_s)dw_s^k \quad (4.4)$$

2. Il existe une matrice P symétrique définie positive telle que: La matrice $P(A + BK) + (A + BK)^T P + \sum_{i=1}^m (D_i^T P D_i)$ soit définie négative.

3. $KerB^T \subset KerC_k k = 0, \dots ,m.$

nous montrons que les systèmes (4.3) sont globalement asymptotiquement stabilisables en probabilité.

Remarque 4.1 *La condition* 2 *implique que le système (4.4) est asymptotiquement stable en probabilité. (Cf ref([40]))*

Remarque 4.2 *comme le bruit affecte la variable* ξ, *le feedback stabilisant le système déterministe associé à (4.3)* $((w_t \equiv 0),(\tilde{w}_t \equiv 0),(\tilde{\tilde{w}}_t \equiv 0))$ *n'assure plus la stabilisation du système (4.3).*

4.3 Stabilisation d'un système en cascade

Dans le cas des systèmes déterministes, ces systèmes ont étés étudiés par plusieurs auteurs (Cf [78], [77], [80]).

Dans le cas des systèmes stochastiques, P. Florchinger [39] a donné des conditions suffisantes de stabilisabilité en probabilité d'une classe de ces systèmes lorsque la partie non contrôlée du système est soumise à des phénomènes aléatoires.Nous donnons une généralisation de ce résultat en faisant intervenir les phénomènes aléatoires sur les parties contrôlées et non contrôlées du système.

On considère le système

$$\begin{cases} dx_t = f_1(x_t,y_t)dt + f_2(x_t,y_t)dw_t \\ \\ dy_t = g_1(x_t,y_t)dt + g_2(x_t,y_t)dw_t^0 + \sum_{i=1}^p u_i(h_i(x_t,y_t)dt + \tilde{h}_i(x_t,y_t)dw_t^i) \end{cases} \quad (4.5)$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$,

$\{w_t, w_t^i,\ 0 \le i \le p\}$ sont des processus de wiener standard indépendant à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ $\mathbb{R}^{m_i}$ respectivement,

f_1, g_1, f_2, g_2, h_i and $\tilde{h}_i$ $(1 \le i \le p)$ sont des functions de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ dans $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^{n_1+m}$, $\mathbb{R}^{n_2+m_0}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ et $\mathbb{R}^{n_2+m_i}$ respectivement, s'annulant à l'origine .

u_i $(1 \le i \le p)$ sont des contrôles à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Supposant qu'il existe 2 fonctions de Lyapounov V_1 et V_2 définies respectivement sur $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, tel que:

1. la fonction f_1 peut être décomposée pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ sous la forme suivante

$$f_1(x,y) = f_1^1(x,y) + f_1^2(x,y)\nabla V_2(y)$$

où

- $f_1(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{n_2}$
- pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$$\sum_{i=1}^{n_1} f_1^{1i}(x,y)\frac{\partial V_1}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{m} f_2^{li}(x,y)f_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}(x) \le 0$$

2. Si l'on pose

$$\Gamma(x,y) = g_1(x,y) + (f_1^2(x,y))^t \nabla V_1(x)$$

on a

- $\Gamma(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_1}$
- pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$$\sum_{i=1}^{n_2} \Gamma^i(x,y)\frac{\partial V_2}{\partial y_i}(y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{m_0} g_2^{li}(x,y)g_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y_i \partial y_j}(y) \le 0$$

Alors en utilisant le théorème de Jurdjevic Quinn [27], nous montrons que les systèmes étudiés sont globalement asymptotiquement stables en probabilité.

Stabilization of a partially linear stokastique system

O. Chabour M. Oumoun

IASTED 1998 (Cf [25])

Abstract: The purpose of this paper is to state sufficient conditions for the existence of feedback laws which render the equilibrium solution of a composite partially linear stochastic system globally asymptotically stable in probability.

Key–Words: Partially linear stochastic systems, Feedback law, Stochastic stability.

4.4 Introduction

The main object of this paper is to provide sufficient conditions for the global asymptotic stabilization in probability of composite partially linear stochastic systems.
The stabilization of deterministic composite partially linear systems by state feedback laws has been investigated by many authors in the last past years (see [2], [6], [7]). In [9], Saberi, Kokotovic and Sussmann give sufficient conditions for the global stabilization of systems in the form

$$\dot{x} = f_0(x) + G_0(x,\xi)C_0\xi \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^p \tag{4.6}$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu \qquad u \in \mathbb{R}^q \tag{4.7}$$

Under suitable assumptions, they prove, if the equilibrium $x = 0$ of $\dot{x} = f_0(x)$ is globally asymptotically stable and the pair (A, B) is stabilizable, that the equilibrium solution $(x, \xi) = (0, 0)$ of the composite system (4.6,4.7) is globally asymptotically stable.
The aim of this paper is to extend the above result when equations (4.6) and (4.7) are corrupted by multiplicative noises.
In the case when only equation (4.6) is corrupted by noise which depends only in x, Chabour and Florchinger [3] give sufficient conditions for the exponential stabilisation in mean square.

4.5 Stochastic stability

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ be an usual probability space and denote by w a standard $\mathbb{R}^m$-valued Wiener process defined on this space. Denote by $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ the complete right-continuous filtration generated by w. Let $x_t \in \mathbb{R}^n$ be the stochastic process solution of the stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(x_s)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t X_i(x_s)dw_s^i \tag{4.8}$$

where $X_0, X_1, ..., X_m$ are $(m+1)$ smooth vector fields on $\mathbb{R}^n$ vanishing at the origin which we write for any x in $\mathbb{R}^n$ as,

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} \quad 0 \leq i \leq m.$$

Moreover, the infinitesimal generator associated with the stochastic differential equation (4.8), denoted by $\mathcal{L}$, is defined for any functional Ψ in $C^2(\mathbb{R}^n)$ by

$$\mathcal{L}\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{0,i}(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

where

$$a^{i,j}(x) = \sum_{k=1}^{m} X_{k,i}(x)X_{k,j}(x), \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Furthermore, for any t in $\mathbb{R}_+^n$ and x_0 in $\mathbb{R}^n$, denote by $x_t(x_0)$, the solution at time t of the stochastic differential equation (4.8) starting from the state x_0.
The different notions of stochastic stability we are dealing with in this paper are the following

Definition 4.1 *The solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (4.8) is said to be stable in probability if for any $\epsilon > 0$*

$$\lim_{x_0 \to 0} P\left(\sup_{t>0} |x_t(x_0)| > \epsilon\right) = 0.$$

If, in addition, there exists a neighbourhood D of the origin such that

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in D$$

the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (4.8) is said to be asymptotically stable in probability. It is globally asymptotically stable in probability (G.A.S.P) if

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Furthermore, the following criterions in terms of Lyapunov function for the stochastic stability hold (see [1], [5]).

Theorem 4.1 *Let D be a neighbourhood of the point $x = 0$ which is contained in $\mathbb{R}^n$ together with its boundary, and assume that there exists a Lyapunov function V defined in D (i.e. a proper function V positive definite mapping D into $\mathbb{R}$) such that*

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0 \ \ (\textit{respectively } \mathcal{L}V(x) < 0), \ \ \forall x \in D, \ x \neq 0$$

Then, the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (4.8) is stable (respectively asymptotically stable) in probability. It is G.A.S.P if

$$\mathcal{L}V(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0$$

4.6 Problem statement

The purpose of this section is to introduce the class of composite linear systems we are dealing with in this paper.
Consider the pair of stochastic processes $(x_t, \xi_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ solution of the multi-inputs composite linear stochastic system written in the sense of Itô,

$$\begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t (f_0(x_s) + G_0(x_s, \xi_s)C_0\xi_s)ds \\ \quad + \sum_{k=1}^m \int_0^t f_k(x_s)dw_s^k + \sum_{k=1}^m \int_0^t G_k(x_s, \xi_s)C_k\xi_s d\tilde{w}_s^k \\ \xi_t = \xi_0 + \int_0^t (A\xi_s + Bu)ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t D_k\xi_s d\tilde{\tilde{w}}_s^k, \quad u \in \mathbb{R}^q \end{cases} \tag{4.9}$$

where $f_k(x) = (f_{k,1}(x), \ldots, f_{k,n}(x))^T$, $G_k(x,\xi)C_k\xi = ((G_k(x,\xi)C_k\xi)_1, \ldots, (G_k(x,\xi)C_k\xi)_n)^T$, $k = 0, \ldots, m$. H^T will denote the transposed matrix of H.
with $f_k(x)$, $G_k(x,\xi)$ $(k = 0, \ldots, m)$ are a smooth (i.e., C^∞) functions and A, B, C_k $(k = 0, \ldots, m)$ and D_k $(k = 1, \ldots, m)$ are constant matrices.
The stochastic differential system (4.9) is said to be asymptotically feedback stabilizable in probability at the origin if there exists a function $u(x,\xi)$ mapping $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ into $\mathbb{R}^q$, vanishing in the origin, such that the equilibrium solution $(x_t, \xi_t) = (0,0)$ of the closed-loop system deduced from (4.9) with this u is asymptotically stable in probability.

Throughout the paper it is assumed that:
(H_1) A smooth Lyapunov function $V(x) > 0$, $x \neq 0$; $V(0) = 0$, for the system

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_0(x_s)ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t f_k(x_s)dw_s^k \tag{4.10}$$

is known such that $V(x) \longrightarrow +\infty$ as $\|x\| \longrightarrow +\infty$ and

$$\sum_{i=1}^n f_{0,i}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m f_{k,i}(x)f_{k,j}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x) < 0, \quad \forall x \neq 0$$

(H_2) There exist a matrix K and a symetric and definite positive matrix P such that

$$P(A+BK) + (A+BK)^T P + \sum_{i=1}^m D_i^T P D_i = -Q < 0$$

$(H_3) \quad KerB^TP \subset KerC_k, \quad k = 0, \ldots, m$

Denote by $a(x,\xi)$ and $b(x,\xi)$ the functionals defined by

$$a(x,\xi) = -\xi^T Q\xi + \sum_{i=1}^{n} f_{0,i}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f_{k,i}(x)f_{k,j}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$$b(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(G_0(x,\xi)C_0\xi)_i\frac{\partial V}{\partial x_i}(x)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(G_k(x,\xi)C_k\xi)_i((G_k(x,\xi)C_k\xi)_j\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

4.7 Main result

The aim of this section is to state and prove the main result of this paper on the feedback stabilization of the class of control stochastic differential equations introduced in the previous section.

Théorème 4.1 *Suppose there exist a function V and a matrices K and P such that (H_1), (H_2) and (H_3) are satisfied. Then there is a smooth feedback u which globally asymptotically stabilizes system (4.9) in probability.*

Proof Consider the smooth and definite positive function

$$W(x,\xi) = V(x) + \xi^T P\xi$$

and the feedback

$$u(x,\xi) = K\xi + v(x,\xi), \quad v(x,\xi) \in \mathbb{R}^q \tag{4.11}$$

Denote by $\mathcal{L}$ the infinitesimal generator of the closed-loop system deduced from (4.9) when the control law u is given by (4.11). We have

$$\mathcal{L}W(x,\xi) = a(x,\xi) + b(x,\xi) + 2\xi^T PBv(x,\xi)$$

we let

$$\beta(x,\xi) = (\beta_1(x,\xi),\ldots,\beta_q(x,\xi)) = 2\xi^T PB$$

we also let

$$\delta(x,\xi) = a(x,\xi) + b(x,\xi)$$

then

$$\mathcal{L}W(x,\xi) = \delta(x,\xi) + \sum_{i=1}^{q} v_i(x,\xi)\beta_i(x.\xi)$$

By (H_3) we have

$$\|\beta(x,\xi)\|^2 = \sum_{i=1}^{q} \beta_i^2(x,\xi) = 0 \Rightarrow b(x,\xi) = 0$$

and by (H_1) and (H_2) we have

$$b(x,\xi) = 0 \Rightarrow \delta(x,\xi) = a(x,\xi) < 0, \quad \forall (x,\xi) \neq (0,0)$$

Then the conditions (H_1), (H_2) and (H_3) are equivalent to $\beta(x,\xi) = 0$ imply $\delta(x,\xi) < 0$, that is

$$(\delta(x,\xi), \|\beta(x,\xi)\|) \in S$$

where

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / \ b > 0 \ \text{ or } \ a < 0\}$$

It is easy to show that the function defined by

$$\phi(a,b) = \begin{cases} \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^4}}{b} & \text{if } \ b \neq 0 \\ \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

is real-analytic on S (see [8]).

Thus we may define the feedback law $v = (v_1, \ldots, v_q)$, where:

$$v_i(x,\xi) = -\beta_i(x,\xi)\phi(\delta(x,\xi), \|\beta(x,\xi)\|^2) \tag{4.12}$$

Moreover, at nonzero (x,ξ) we have that

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W(x,\xi) &= \delta(x,\xi) + \textstyle\sum_{i=1}^{q} v_i(x,\xi)\beta_i(x,\xi) \\ &= \delta(x,\xi) + \phi(\delta(x,\xi), \|\beta(x,\xi)\|^2)\|\beta(x,\xi)\|^2 \\ &= -\sqrt{\delta^2(x,\xi) + \|\beta(x,\xi)\|^8} < 0 \end{aligned}$$

and according with the stochastic Lyapunov theorem 4.1, the equilibrium solution $(x_t, \xi_t) \equiv (0,0)$ of the closed-loop system deduced from (4.9) when u is given by (4.11, 4.12) is globally asymptotically stable in probability. This completes the proof.

Remark Condition (H_2) means that the system

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t (A\xi_s + Bu)ds + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t D_k \xi_s d\tilde{\tilde{w}}_s^k$$

$\xi \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^q$ is globally asymptotically stable in probability by the linear feedback $u(\xi) = K\xi$ (see [4]).

4.8 References

[1] L. Arnold, *Stochastic differential equations : Theory and applications.* Wiley, New York (1974).

[2] C. Byrnes and A. Isidori, New results and examples in nonlinear feedback stabilization, *Systems & Control Letters* **12** (1989) 437–442.

[3] R. Chabour and P. Florchinger, Exponential mean square stability of partially linear stochastic systems, *Appl. Math. Lett* **6** (1993) 91–95.

[4] Z. Y. Gao and N. U. Ahmed, Feedback stabilizability of nonlinear stochastic systems with state-dependent noise, *International Journal of Control* **45** (2) (1987), 729–737.

[5] R. Z. Has'minskii, *Stochastic stability of differential equations.* Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1980).

[6] P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann, A positive real codition for global stabilization of nonlinear systems, *Systems & Control Letters* **13** (1989) 125–133.

[7] E. D. Sontag, Smooth stabilization implies coprime factorization , *IEEE Trans. Automat. Control,* **34** (1989) 435–443.

[8] E. D. Sontag, A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems & control letters* **13** (1989):117–123.

[9] A. Saberi, P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann, Global stabilization of partially linear composite systems, *SIAM J. Control and Optimisation* **28** (1990) 1491–1503.

On the global stabilization of cascade stochastic systems

O. Chabour, M. Oumoun, G. Sallet

CDC 1998 (Cf [26])

Abstract: In this paper we state sufficient conditions for the existence of feedback laws which render the equilibrium solution of a class of nonlinear cascade stochastic systems globally asymptotically stable in probability.

Key–words: Cascade stochastic systems, Feedback law, Stochastic stability.

4.9 Introduction:

The main object of this paper is to give sufficient conditions for the global asymptotic stabilization in probability of nonlinear cascade stochastic systems, more precesely, we generalize the result proved in [4] to cascade systems where both the drift and the controller part are corrupted by noise. The stabilization of nonlinear deterministic cascade systems by state feedback law has been investigated by many authors in the last past years (see e.g [6], [7], [8] and references therein).
The existence of stabilizing feedback laws for nonlinear stochastic control systems has been studied by Gao and Ahmed by means of a procedure based on the properties of the "Stochastic Algebraic Riccati Equation". More recently, nonlinear stochastic control systems have been studied from the point of view of the stabilization by using the stochastic Lyapunov techniques (see [1], [2], [3]).
This paper is divided in three parts and is organized as follows. In section (4.10), we recall some definitions and results, proved by Khasminskii [5], on the Lyapunov stability in probability of stochastic deferential equations. In section(4.11), we introduce the class of stochastic differential systems we are dealing with in this paper. In section (4.12), we recall the stochastic Jurdjevic-Quinn's theorem established in [1] and we state and prove the main result of

the paper on the stabilization in probability of the class of systems introduced in section (4.11).

4.10 Stochastic stability

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ be an usual probability space and denote by w a standard $\mathbb{R}^m$-valued Wiener process defined on this space. Denote by $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ the complete right-continuous filtration generated by w. Let $x_t \in \mathbb{R}^n$ be the stochastic process solution of the stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = x_0 + \int_0^t X(x_s)ds + \int_0^t Y(x_s)dw_s \tag{4.13}$$

where X and Y are smooth vector fields on $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^{n+m}$, respectively, vanishing in the origin, and satisfying the following growth condition: There exists $K \in \mathbb{R}$ such that for any $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|X(x)| + |Y(x)| \leq K(1 + |x|)$$

Furthermore, for any t in $\mathbb{R}^n_+$ and x_0 in $\mathbb{R}^n$, denote by $x_t(x_0)$, the solution at time t of the stochastic differential equation (4.13) starting from the state x_0.

The different notions of stochastic stability we are dealing with in this paper are the following

Définition 4.1 *The solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (4.13) is said to be stable in probability if for any $\epsilon > 0$*

$$\lim_{x_0 \to 0} P\left(\sup_{t>0} |x_t(x_0)| > \epsilon\right) = 0.$$

If, in addition, there exists a neighbourhood D of the origin such that

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in D$$

the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (4.13) is said to be asymptotically stable in probability. It is globally asymptotically stable in probability (G.A.S.P) if

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Denoting by $\mathcal{L}$ the infinitesimal generator associated with the stochastic differential equation (4.13), on can prove the following version of the Lyapunov theorem

Théorème 4.1 *(see [5])Let D be a neighbourhood of the point $x = 0$ which is contained in $\mathbb{R}^n$ together with its boundary, and assume that there exists a Lyapunov function V defined in D (i.e. a proper function V positive definite mapping D into $\mathbb{R}$) such that*

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0 \ \ (respectively\ \mathcal{L}V(x) < 0), \ \ \forall x \in D, \ x \neq 0$$

Then, the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (4.13) is stable (respectively asymptotically stable) in probability. It is G.A.S.P if

$$\mathcal{L}V(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0$$

4.11 Statement of the problem

The purpose of this section is to introduce the class of cascade nonlinear stochastic systems we are dealing with in this paper.

Consider the pair of stochastic processes $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ solution of the multi-inputs cascade nonlinear stochastic system written in the sens of Itô,

$$\begin{cases} dx_t = f_1(x_t, y_t)dt + f_2(x_t, y_t)dw_t \\ dy_t = g_1(x_t, y_t)dt + g_2(x_t, y_t)dw_t^0 + \sum_{i=1}^{p} u_i(h_i(x_t, y_t)dt + \tilde{h}_i(x_t, y_t)dw_t^i) \end{cases} \tag{4.14}$$

where $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\{w_t, w_t^i, \ \ 0 \leq i \leq p\}$ are standard real-valued independant Wiener processes with values in $\mathbb{R}^m$ respectively in $\mathbb{R}^{m_i}$, f_1, g_1, f_2, g_2, h_i and $\tilde{h}_i$ $(1 \leq i \leq p)$ are functionals mapping $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ into $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^{n_1+m}$, $\mathbb{R}^{n_2+m_0}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ and $\mathbb{R}^{n_2+m_i}$ respectevely, vanishing in the origin and satisfying a growth condition and u_i $(1 \leq i \leq p)$ are real-valued measurable control laws.

The stochastic differential system (4.14) is said to be asymptotically feedback stabilizable in probability at the origin if there exists a function $u(x, y)$ mapping $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ into $\mathbb{R}^p$, vanishing in the origin, such that the equilibrium solution $(x_t, y_t) = (0, 0)$ of the closed-loop system deduced from (4.14) with this u is asymptotically stable in probability.

4.12 Main result

The aim of this section is to state and prove the main result of this paper on the feedback stabilization of the class of control stochastic differential equations introduced in the previous section. The main tool to construct the feedback will be the following result establiched in [1], which give sufficient conditions for the global asymptotic stabilizability in probability for control nonlinear stochastic systems of the form

$$dx_t = X_0(x_t)dt + X(x_t)dw_t + \sum_{i=1}^{p} u_i(Y_i(x_t)dt + Z_i(x_t)dw_t^i) \tag{4.15}$$

where X_0, Y_i $(1 \leq i \leq p)$, X and Z_i $(1 \leq i \leq p)$ are functionals mapping $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+m}$ and $\mathbb{R}^{n+m_i}$ respectively, vanishing in the origin and satisfying a growth condition and, $\{w_t, t \geq 0\}$ and $\{w_t^i, t \geq 0\}$ are standard real-valued independant Wiener processes with values in $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^{m_i}$, respectively, and u_i $(1 \leq i \leq p)$ are real-valued measurable control laws.

Théorème 4.2 *Assume there exists a Lyapunov function V such that*

1. $LV(x) \leq 0$ *for any* $x \in \mathbb{R}^n$
2. *The set* $W = \{x \in \mathbb{R}^n / \ L^{k+1}V(x) = L^k Y_j V(x) = 0; \quad k \in \mathbb{N}; \quad j = 1, ..., p\}$ *is reduced to* $\{0\}$

then, the feedback law u defined on $\mathbb{R}^n$ by

$$u_k(x) = -\frac{Y_k V(x)}{1 + (\beta_k(x))^2} \quad k = 1, ..., p$$

is a stabilizing feedback law for the stochastic system (4.15).

where

$$LV(x) = \sum_{i=1}^{n} X_0^i(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} X^{li}(x)X^{lj}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$$\beta_k(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k} X_k^{li}(x)X_k^{lj}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Let us comme back to the system (4.14), and introduce the following assumptions:

Assume there exist two Lyapunov functionals V_1 and V_2 defined on $\mathbb{R}^{n_1}$ and $\mathbb{R}^{n_2}$, respectively, such that

1. The functional f_1 can be decomposed for any $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ as

$$f_1(x, y) = f_1^1(x, y) + f_1^2(x, y)\nabla V_2(y)$$

   where
   - $f_1(0, y) = 0$ for any $y \in \mathbb{R}^{n_2}$
   - for any $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$$\sum_{i=1}^{n_1} f_1^{1i}(x, y)\frac{\partial V_1}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{m} f_2^{li}(x, y)f_2^{lj}(x, y)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}(x) \leq 0$$

2. If we put

$$\Gamma(x, y) = g_1(x, y) + (f_1^2(x, y))^t \nabla V_1(x)$$

   on has
   - $\Gamma(x, 0) = 0$ for any $x \in \mathbb{R}^{n_1}$
   - for any $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$$\sum_{i=1}^{n_2} \Gamma^i(x, y)\frac{\partial V_2}{\partial y_i}(y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{m_0} g_2^{li}(x, y)g_2^{lj}(x, y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y_i \partial y_j}(y) \leq 0$$

for any $(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, set

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ g_1(x, y) \end{pmatrix}, \quad G(x, y) = \begin{pmatrix} f_2(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad H_i(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_i(x, y) \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq p.$$

and

$$W(x, y) = V_1(x) + V_2(y)$$

then W is a Lyapunov function defined on $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, and L denotes the second order differential operator defined for any function $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^{n_1+n_2}, \mathbb{R})$ by

$$L\Psi(z) = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} F^i(z)\frac{\partial \Psi}{\partial z_i}(z) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_1+n_2}\sum_{l=1}^{m+m_0} G^{li}(z)G^{lj}(z)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i \partial z_j}(z)$$

In the case where $\tilde{h}_i = 0$, $1 \leq i \leq p$, it means that the controller part of the system (4.14) is not corrupted by noise, Florchinger in [4] prove that under assuptions 1 and 2 and if the set $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} /\ L^{k+1}W(x, y) = L^k H_j W(x, y) = 0;\ \ k \in \mathbb{N};\ \ j = 1, ..., p\}$ is reduced to $\{0\}$ then the feedback

$$u_i(x, y) = \langle \nabla V_2(y), h_i(x, y) \rangle, \quad 1 \leq i \leq p \tag{4.16}$$

globally asymptotically stabilizes in probability system (4.14), when $\tilde{h}_i = 0$.

Now, if every thing is corrupted by noise, it means that the drift as well as the controller part are corrupted by noise, and under assumption 1 and 2 (i.e the same assumptions used by Florchinger in [4], one can prove the following stabilization result for the stochastic system (4.14).

Théorème 4.3 *If assumption 1 and 2 holds and the set;* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} /\ L^{k+1}W(x,y) = L^k H_j W(x,y) = 0; \quad k \in \mathbb{N}; \quad j = 1,...,p\}$ *is reduced to* $\{0\}$, *then the stochastic differential equation (4.14) is asymtotically stabilizable in probability.*

Proof of theorem 4.3 For any $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, on has

$$\begin{aligned}
LW(x,y) &= LV_1(x) + LV_2(y) \\
&= \langle \nabla V_1(x), f_1(x,y)\rangle + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{m} f_2^{li}(x,y) f_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\
&\quad + \langle \nabla V_2(y), g_1(x,y)\rangle + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{m_0} g_2^{li}(x,y) g_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y_i \partial y_j}(y) \\
&= \langle \nabla V_1(x), f_1^1(x,y) + f_1^2(x,y)\nabla V_2(y)\rangle + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{m} f_2^{li}(x,y) f_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\
&\quad + \langle \nabla V_2(y), \Gamma(x,y) - (f_1^2(x,y))^t \nabla V_1(x)\rangle + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{m_0} g_2^{li}(x,y) g_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y_i \partial y_j}(y) \\
&= \langle \nabla V_1(x), f_1^1(x,y)\rangle + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{m} f_2^{li}(x,y) f_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}(x) \le 0 \\
&\quad + \langle \nabla V_2(y), \Gamma(x,y)\rangle + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{m_0} g_2^{li}(x,y) g_2^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y_i \partial y_j}(y) \le 0
\end{aligned}$$

hence, according with hypotheses 1 and 2, yields

$$LW(x,y) \le 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

Moreover, since the set U is reduced to $\{0\}$, one can deduce from the stochastic Jurdjevic-Quinn theorem 4.2 that the feedback law u defined on $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ by

$$u_k(x,y) = -\frac{\langle \nabla V_2(y), h_k(x,y)\rangle}{1+\beta_k^2}, \quad 1 \le k \le p$$

where $\beta_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{m_k} \tilde{h}_k^{li}(x,y)\tilde{h}_k^{lj}(x,y)\frac{\partial^2 V_2}{\partial y_i \partial y_j}(y)$

renders the stochastic system (4.14) globally asymptotically stable in probability, which concludes the proof.

Remark If the controller part is not corrupted by noise (i.e $\tilde{h}_i = 0$), then the feedback $u_i = -\langle \nabla V_2(y), h_i(x,y) \rangle$ stabilizes system (4.14) in probability which is not true if $\tilde{h}_i \neq 0$.

4.13 References

[1] R. Chabour and M. Oumoun, A Jurdjevic–Quinn Theorem for stochastic nonlinear systems, *Journal Stochastic Analysis & Application* **16** (1998) 43–50.

[2] R. Chabour and M. Oumoun, On A universal formula for the stabilization of control stochastic nonlinear systems, *Journal Stochastic Analysis & Application,* to appear.

[3] O. Chabour and M. Oumoun, Global stabilization of partially linear stochastic systems. *IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control, Grindelwald, Switzerland, February 18-20, 1998.*

[4] P. Florchinger, Global stabilization of cascade stochastic systems, *Proc. 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, December 1995* 2185–2186.

[5] R. Z. Has'minskii, *Stochastic stability of differential equations.* Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1980).

[6] M. Jankovic, R. Sepulchre and P. V. Kokotovic, Constructive lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41** (1996) 1723–1735.

[7] A. Saberi, P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann, Global stabilization of partially linear composite systems, *SIAM J. Control and Optimisation* **28** (1990) 1491–1503.

[8] P. Seibert and R. Suarez, Global stabilization of nonlinear cascade systems, *Systems and Control Letters* **14** (1990) 347–352.

Bibliographie

[1] V. Andriano. Global feedback stabilization of the angular velocity of a symmetric rigid body. *Systems & Control Letters*, 20, pp. 361-364, 1993.

[2] V. Andriano. Sommes results on global and semi global stabilization of affines systems.*Systems & Control Letters*, 33 , pp. 259-263, 1999.

[3] A. Andreini, A. Bacciotti and G. Stefani. Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree. *Systems & Control Letters,* 10, pp. 251-256, 1988.

[4] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Anal. TMA,* 7, pp. 1163-1173, 1983.

[5] D . Ayels. Local and global stabilisability for nonlinear systems. *in Theory and applications of Nonlinear Control Systems* (C.I. Beyrnes and A. Lyndquist eds.), Amsterdam, pp. 93-105, 1986.

[6] A. Bacciotti. Constant feedback stabilizability of bilinear systems *M.A Kaashoek, J H Van Shuppen. A C M Ran eds . Proc Int. Symp. M. T. N. S. 89 Realisation and modelling in system theorie. Vol 1 (1989)* , pp. 357-367.

[7] A. Bacciotti. Local stabilization of nonlinear control systems. *Series on Advance in Mathematics and Applied Sciences.* 8: Word Scientific, Singapore 1992.

[8] A. Bacciotti and P. Boieri. A characterization of single input planar nonlinear systems. *Systems & Control Letters,* 16, pp. 139-143, 1991.

[9] S.P. Banks. Stabilizability of finite and infinite-dimentional bilinear systems. *IMA J. Math. Control Inform*, 3, pp. 255-271, 1986.

[10] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr. On the stabilization of continuous and discret time nonlinear systems. *2ème Conférence Internationale de Marrakesh sur les équations différentielles*, pp. 16-20, 1995.

[11] W. Boothby and R. Marino. Feedback stabilization of planar nonlinear systems.*Systems & Control Letters*, 12, pp. 87-92, 1989.

[12] B. Bonnard and H.Tebkish. Quadratic control systems *Proc. CDC* Los Angeles, pp 146-151 ,1987

[13] R. W. Brockett. Asymptotic stability and Feedback stabilization. *Differential Geometric Control Theory, Progress in Mathematics, Boston MA*, pp. 181-191, 1983.

[14] C.I. Byrnes, A.Isidori. Global feedback stabilization of nonlinear minimum phase systems *Proc. CDC* . Lauderdale, 1985.

[15] C.I. Byrnes, A.Isidori. A frequency domaine philosophy for nonlinear systems with applications to stabilization and to adaptive control. *Proc. CDC* Las Vegas 1984.

[16] C.I. Byrnes, A.Isidori. Local stabilization of minimum phase nonlinear systems.*Systems & Control Letters,*, 11, pp 9-7, 1988.

[17] C.I. Byrnes, A.Isidori. New result and exemples in non linear feedback stabilisation. *Systems & Control Letters,*, 12, pp 437-442, 1989.

[18] C.I. Byrnes, A.Isidori and J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans.* 36, pp. 1228-1240, 1991.

[19] J.Carr Applications of Center Manifolds Theory. Springer-Verlag, NY 1981.

[20] O. Chabour, R. Chabour and H. Zenati. Stabilisation des systèmes bilinéaires homogènes. *C.R. Acad. Scie. Paris*, t.326, serie I, pp. 633-636 , 1998.

[21] O. Chabour, R. Chabour and H. Zenati. Stabilizability of homogeneous polynomial systems. *Proc. CDC*, Tampa-Florida, 1998.

[22] O. Chabour, R. Chabour and H. Zenati. Practical Stabilization and Stabilizability of Homogeneous Bilinear systems. *Systems Control Letters*, (accepté).

[23] O. Chabour, R. Chabour and H. Zenati. Homogeneous Stabilizing Feedbacks for homogeneous Systems. *ACC2000*, (accepté).

[24] O. Chabour, J.C. Vivalda. Remark on local and global stabilization of homogeneous bilinear systems. *Systems Control Letters* , (soumis).

[25] O. Chabour, M. Oumoun. Global stabilization of partially linear stochastique systems. *IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control, Grindelwald, Switzerland* pp.22-24, 1998.

[26] O. Chabour,M. Oumoun. On the global stabilization of cascade stochastic systems. *Proc. CDC*, Tampa-Florida, 1998.

[27] R. Chabour, M. Oumoun. A Jurdjevic-Quinn Theorem for stochastic nonlinear systems, *Journal Stochastic Analysis Applications*, (a paraitre)

[28] R. Chabour, G. Sallet and J.C. Vivalda. Stabilization of nonlinear two dimensional systems: a bilinear approach. *Math. Control Signals Systems* , 6, pp. 224-246, 1993.

[29] R. Chabour and J.C. Vivalda. Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan par une commande non régulière. *Proc. of European Control Conference*, pp. 485-487, Grenoble, 1991.

[30] S. Celikovsk'y. On the stabilization of the homogeneous bilinear systems. *Systems Control Letters*, 21, pp. 503-510, 1993.

[31] C. Coleman. Asymptotic stability in 3-space. Cesari, LaSalle, Lefschetz(ed.) Contribution to the theory of nonlinear oscillations, *Annals of Mathematics Studies*, 45, Princeton University Press, 1960.

[32] J.M. Coron and L. Praly. Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems & Control Letters*, 17, pp. 89-104, 1991.

[33] J.M.Coron. A necessary condition for feedback stabilisation *Systems & Control Letters*, 14, pp. 227-232, 1990.

[34] W.P. Dayawansa, C. F. Martin. Asymptotique stabilization of two dimentional systems. *Systems & Control Letters*, 12, pp. 205-211, 1989.

[35] W.P. Dayawansa, C. F. Martin. Some sufficient condition for asymptotic stabilizability of three dimentional homogeneous systems. in Proc. of the 28th *C.D.C.*, Tampa - Florida, pp. 1366-1369, 1989.

[36] W.P. Dayawansa, C.F. Martin and G. Knowles. Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimentional systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 28, pp. 1321-1349, 1990.

[37] W.P. Dayawansa, C. F. Martin, S.Samelson. Asymptotique stabilization of a generic class of three dimentional homogeneous quadratic systems. *Systems & Control Letters*, 24, pp. 115-123, 1995.

[38] J.P. Gauthier and G. Bornard. Stabilisation des systèmes non linéaires. *Outils et méthodes math. pour l'automa., Ed. Landau I.D., CNRS, Paris*, Vol. 1, pp.307-324, 1981.

[39] P. Florchinger, Global stabilization of cascade stochastic systems, *Proc. of the C.D.C.*, pp. 2185-2186, 1995.

[40] Z.Y. Gao and Ahmed Nu. Feedback stabilizability of nonlinear stochastic systems with state dependent noise. *Int. J. of Control* (45) (2) pp.729-737, 1987.

[41] W. Hahn. Stability of motion. *Springer Verlag*, New York 1967.

[42] H. Hammouri and J.C. Marques. Stabilization of homogeneous bilinear systems. *Appl. Math. Letters*, 7, pp. 23-28, 1994.

[43] R. Z. Has'minskii, *Stochastic stability of differential equations.* Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1980).

[44] H. Hermes. Asymptotically stabilizing feedback controls and the nonlinear regulator problem. *SIAM J. Control Optim.*, 29, pp. 185-196, 1991.

[45] H. Hermes. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. *Lecture Notes in Applied and Pure Mathematics*, 127, pp. 249-260, 1991.

[46] H. Hermes. Homogeneous feedback control for homogeneous systems. *Systems Control Lett.*, 24, pp. 7-11, 1995.

[47] A. Iggidr, B. Kalitine, R. Outbib. Semi-definite Lyapunov fonctions, stability and stabilization.*Mathematics of control, Signals, and Systems,* 1996.

[48] D. Hill and P. Moylan. Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. *J, Franklin Inst.*, 309, pp. 327-357, 1980.

[49] A. Isidori and C.H.Mooy. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros, in *Modelling and adaptive control*, C. Byrnes and A. Kurszanki, eds., Lectures Notes in Control and Information Sciences 105, New York: Springer-Verlag, 1986.

[50] A. Isidori. Nonlinear Control Systems. *Springer Verlag*, Berlin, 3ed edition, 1995.

[51] V. Jurdjevic and J. P. Quinn. Controllability and Stability. *Journal of Differential Equations*, 28, pp, 381-389, 1978.

[52] Kalouptsidis N. and Tsinias J. Stability Improvement of nonlinear Systems by feedback,*IEEE Transactions on Automatic Control* 29, pp.364-367, 1984.

[53] M. Kawski. Homogeneous Feedback Laws in Dimension Three, *28th IEEE CDC 1989, Tampa, pp.1370-1375*

[54] M. Kawski, Controlability, Approximations and Stabilization, in Computation and Control, *Ed.s Bowers K. and Lund J., Birkhäuser* 1989, pp.155-167.

[55] M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control Letters*, 12, pp. 169-175, 1989.

[56] M. Kawski. Homogeneous stabilizing feedback. *Control Theory and Advanced Technology*, 6, pp. 497-516, 1990.

[57] M. Kawski. Families of dilations and asymptotic stability. *Analysis of Controlled Dynamical Systems*, 12, Bikhauser, 1991.

[58] M. Kawski. Geometric homogeneity and stabilization. *Proc. IFAC NOLCOS*, 1995.

[59] R.Z. Khasminski. Stochastic stability of differential equations *Stijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn* 1980.

[60] J. Kurzweil. On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion. *Proc. AMS Translations*, 24, pp. 19-77, 1963.

[61] M.A. Krasonel'ski et P.P. Zabreiko. Geometric methods of nonlinear analysis *Springer Verlag, New York*, 1984.

[62] P.V. Kokotovich et H.J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of non linear systems, *Systems & Control Letters*, 13, pp. 125-133, (1989).

[63] D.E. Koditschek and K.S. Narendra. Stabilizability of second-order bilinear systems. *IEEE Transaction*, AC-28, pp. 987-989, 1983.

[64] J. P. LaSalle. Stability theory for ordinary differential equations. *J. Diff. Equations*, vol. 4, pp. 307-324, 1968.

[65] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. Stability by Lyapunov's direct method with Applications. *Academic Press, New York*, 1961.

[66] W. Lin. Feedback stabilization of general nonlinear systems: A passive system approach. *Systems & Control Letters*, 25, pp. 41-52, 1995.

[67] K.K Lee et A. Arapostalis. Remarks on smooth feedback stabilization of nonlinear systems.*Systems & Control Letters*, 10, pp. 41-44, 1998.

[68] R. Luesnik and H. Nijmeijer. On the stabilisation of bilinear systems via constant feedback, *Linear Algebra and its applications (Special issue on "Linear Systems and Control"* 122, 123, 124, pp. 457-474. 1989.

[69] J.L. Massera. Contribution to stability theory. *Annals of Mathematics*, pp. 182-206, 64, 1956.

[70] R.R. Mohler. Bilinear Control Processes. *Academic Press, New York*, 1975.

[71] Morino. High-Gain feedback in non linear control systems, *International journal control* , 42, pp 1369-1385, 1985.

[72] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of rigid body revisited. *Systems & Control Letters*, 18, pp. 93-98, 1992.

[73] M. Oumoun and J.C. Vivalda. On the stabilization of a class of bilinear systems in 3-space. *European Journal of Control*, 2, pp. 193-200, 1996.

[74] J. P. Quinn. Stabilization of bilinear systems by quadratic feedback controls. *J. Math Anal. Appl.*, 75, pp. 66-80, 1980.

[75] L. Rosier. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19, 6 , pp. 467-473, 1992.

[76] L. Rosier. Etude de quelques problèmes de stabilisation. *Thèse de l'université de Paris XI*, 1993.

[77] A. Saberi, P.V. Kokotovich and H.J. Sussman. Global stabilization of partially linear composite systems. *SIAM J. Of Control and Optim.* 28, pp.1491-1503.

[78] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. Kokotovic. Constructive Nonlinear Control. *Springer Verlag*, London, 1997.

[79] S. Sastry et A. Isidori. Adaptive control of linearizable systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34, pp. 1123-1131. 1989.

[80] P. Seibert and Suarez. On the problem of stability in the presence of an invariant manifold - Application to stabilizability of nonlinear control systems, *Reporte de Investigacion UAM. , Mexico,*, 1988.

[81] H.J. Sussmann et P.V. Kokotovich. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 36, pp.424-440. 1991.

[82] M. Slemrod. Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity. *SIAM J. Control and Optim.,* 16, pp. 131- 141, 1978.

[83] E. D. Sontag. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters,* 13, pp. 117-123, 1989.

[84] E. D. Sontag. Feedback stabilization of nonlinear systems. in *Robust Control of Linear systems and nonlinear control* M.A. Kaashoek- J.H. Van Shuppen et A.C.M. Ran. eds., Boston. Birkhauser pp 61-81, 1990.

[85] H.J. Sussmann. Subanalytic sets and feedback control. *Journal of Differential Equation*, 31, pp. 31-52, 1979.

[86] J. Tsinias. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilizability. *Mathematics of control, Signals and Systems*, 2, pp. 343-3572, 1989.

[87] J. Tsinias. Remarks on feedback stabilizability of homogeneous systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 6, pp. 533-542, 1990.

[88] J. Tsinias. Existence of control Lyapunov functions and applications to state feedback stabilizability of nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optim.,* 29, pp. 457-473, 1991.

[89] Vidiasagar. Decompositions techniques for large scale systems with nonadditive interactions: stability and stabilizability, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 25, pp.773-779, 1980.

[90] V.I. Zoubov. Method of A.M.Lyapunov and their applications, *P. Noordhoff, LTD Groningen, The Netherlands* 1980.

Résumé

Dans cette thèse, notre étude a porté sur la stabilisation de certaines classes de systèmes déterministes et de systèmes stochastiques. Ce travail est donc divisé en deux parties.

Dans la première partie, nous nous intéressons à certaines classes de systèmes homogènes déterministes. En premier lieu, nous considérons les systèmes bilinéaires homogènes. Nous donnons des conditions suffisantes sous lesquelles les systèmes considérés sont globalement pratiquement stabilisables par une famille de commandes linéaires et nous montrons que ces conditions assurent la globale asymptotique stabilité par une commande homogène bornée que nous construisons. D'autre part, nous introduisons une notion de passivité pratique. Nous montrons que la pratique passivité de ces systèmes entraine la pratique stabilisation par un retour de sortie. En second lieu, nous considérons les systèmes homogènes et les systèmes quasi homogènes nous donnons des conditions suffisantes de stabilisabilité.

Dans la deuxième partie de cette thèse nous étendons des résultats de stabilisation de systèmes déterministes à des systèmes stochastiques. Notre premier résultat porte sur la stabilisation d'une classe de systèmes partiellement linéaires lorsque les phénomènes aléatoires interviennent sur ces systèmes. Notre deuxième résultat porte sur la stabilisation d'une classe de systèmes en cascades.

Abstract

In this thesis we deal with stabilization of some classes of deterministic and stochastic systems. This work is divided in two part.

In the first part, we consider the bilinear homogeneous systems. Firstly, sufficient conditions are given for these systems to be globally practically stabilizable by means of a family of linear feedback laws. After on, using the homogeneity property of the bilinear systems, we prove that these conditions are also sufficient for the global asymptotic stabilization by homogeneous feedbacks of degree zero. An explicit design of asymptotically stabilizing feedbacks, is carried out. Finally, we emphazise how our results can be related to the passivity theory frequently used to deal with the stabilization problem. Secondely, we consider homogeneous polynomial systems and homogeneous systems with respect to a dilatation. We provide sufficient conditions under wich the systems considered are globally asymptotically stabilizable.

In the second part, we consider composite partially linear stochastic systems and cascade stochastic systems. We state sufficient conditions for the existence of feedback laws which render the equilibrium solution of these systems globally asymptotically stable in probability.