THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

SPECIALITES MATHEMATIQUES

par

OUMAROU BOUKARY BAOUA

APPLICATION DU PRODUIT STAR DE BEREZIN A L'ETUDE DES PAIRES DE GELFAND RESOLUBLES

Soutenue le 05 Janvier 2000 devant la commission d'examen :

D. Arnal	Université de Metz	Directeur de recherches
B. Bekka	Université de Metz	examinateur
J.C. Cortet	Université de Dijon	rapporteur
D. Manchon	Université de Nancy	examinateur
J. Ludwig	Université de Metz	examinateur
G. Ratcliff	Université de St Louis (Missouri)	rapporteur

APPLICATION DU PRODUIT STAR DE BEREZIN A L'ETUDE DES PAIRES DE GELFAND RESOLUBLES

Sommaire

Introduction

Soient G un groupe de Lie et K un sous-groupe compact de G. Les représentations unitaires et irréductibles de G dont la restriction à K est sans multiplicité sont particulièrement aisées à décrire et permettent des calculs algébriques explicites sur les représentations de K qui apparaissent dans ces restrictions. La partie de la formule de Plancherel de G associée à ces représentations est en général complètement déterminée simplement par l'étude des fonctions sphériques sur G.

On dira qu'une paire (K, G) est de Gelfand si toutes les représentations unitaires et irréductibles de G sont sans multiplicité sur K.

L'étude des groupes semi simples G a été développée par de nombreux auteurs depuis les années soixante et soixante dix.

Dans les années quatre vingt dix, Benson, Jenkins et Ratcliff ont étudié le cas "résoluble" ou plus précisement le cas où G est le produit semi direct $K \triangleright S$, S étant un groupe de Lie résoluble, connexe et simplement connexe.

Considérons donc un groupe compact K agissant par automorphismes sur S.

On dit que (K, S) est une paire de Gelfand si l'algèbre des fonctions K-invariantes

$$L^1_K(S) = \{f \in L^1(S), f(k^{-1}(x)) = f(x), \quad k \in K, \ x \in S\}$$

est commutative sous la convolution.

Dans ce travail, on se restreint au cas où $S = \exp(\mathfrak{s})$ est un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe.

Dans le premier chapitre, on rappelle les résultats de Benson, Jenkins et Ratcliff qui réduisent le problème au cas nilpotent. En effet, on montre que la description de telles paires de Gelfand se ramène à celle du groupe K sur le radical nilpotent N de S. Ce radical doit être de pas 2. De plus, l'étude des paires de Gelfand nilpotentes se réduit, moyennant le lemme de la localisation à l'étude des paires de Gelfand (K, H_n).

Ensuite on montre que (K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si (K_0, H_n) en est une, K_0 étant la composante connexe de l'élément neutre e de K et H_n le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$.
Le cadre de notre étude est donc les paires de type (K, H_n) où K est un sous-groupe compact et connexe de $U(n)$ agissant naturellement sur H_n.
Soit π_ν une représentation unitaire et irréductible de dimension infinie de H_n induite par le caractère χ_ν. On peut étendre π_ν à G en posant :

$$W_\nu(k)f(n) = f(k^{-1}(n)) \qquad \text{puis} \qquad \psi_{\rho,\pi_\nu}(k,n) = \bar{\rho}(k) \otimes W_\nu(k) \circ \pi_\nu(n)$$

si ρ est une représentation unitaire et irréductible de K et $\bar{\rho}$ sa contagrédiente.
Génériquement, les classes des représentations ψ_{ρ,π_ν} décrivent le dual unitaire de G.
D'autre part, les représentations unitaires et irréductibles de H_n, de K et de $G = K \rhd H_n$ peuvent être décrites par la méthode des orbites. Il est donc naturel de chercher un critère géométrique portant sur les orbites coadjointes de ces groupes garantissant que la paire (K, H_n) soit de Gelfand.
Soit μ un élément du dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. on note par $\mathcal{O}_\mu^G$ l'orbite coadjointe de G passant par μ et par $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K. Benson, Jenkins et Ratcliff ont montré:

Théorème 1
(K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si pour tout μ de $\mathfrak{g}^*$, $\mathcal{O}_\mu^G \cap \mathfrak{k}^\perp$ contient au plus une seule K-orbite.

Dans le second chapitre, on rappelle ce résultat et on donne une description des orbites coadjointes de G et de H_n avec l'action de K.
Benson, Jenkins et Ratcliff prouvent le théorème 1 en utilisant des notions fines de géométrie algébrique. Nous avons cherché une preuve analytique directe en utilisant des méthodes de quantification géométrique et d'états cohérents.

Le troisième chapitre est consacré d'une part à la réalisation de la représentation induite associée à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$ identifiée à $\mathbb{C}^n$ de H_n identifié à $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ et d'autre part à l'élaboration de la théorie des états cohérents sur $\mathbb{C}^n$ qui permet un calcul symbolique. Grâce à ce calcul symbolique, on définit le produit star de Berezin sur ces orbites.

Dans le quatrième chapitre, pour toute représentation ρ dans le dual unitaire $\widehat{K}$ de K, on définit la fonction génératrice de la multiplicité :

$$\begin{aligned} m_\rho :]0,1[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ r &\longmapsto m_\rho(r). \end{aligned}$$

$m_\rho(r)$ est l'intégrale d'une fonction associée au caractère symbolique [1] de ρ sur l'orbite coadjointe de H_n correspondante.

Pour tout ρ de $\widehat{K}$, la fonction $m_\rho(r)$ est développable en série entière à coefficients dans $\mathbb{N}$. On montre que :

$$\lim_{r\to 1} m_\rho(r) = \mathrm{mult}(1_K, \psi_{\rho,\pi_\nu|K}), \qquad \forall \rho \in \widehat{K},\ \nu \in \mathfrak{h}_n^*.$$

avec la convention que si l'un de ces termes est infini, l'autre l'est aussi et par conséquent (K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si pour tout ρ de $\widehat{K}$,

$$\lim_{r\to 1} m_\rho(r) \leq 1.$$

m_ρ caractérise donc les paires de Gelfand.

Dans le cinquième chapitre, on montre grâce à un résultat de Guillemin et Sternberg que si $m_\rho(r)$ est non homogène alors, il existe un certain μ_0 dans $\mathfrak{g}^*$ tel que $\mathcal{O}_{\mu_0}^G \cap \mathfrak{k}^\perp$ contient au moins deux K-orbites.
Il reste donc le cas où les fonctions m_ρ sont toutes homogènes, de la forme :

$$m_\rho(r) = m_\rho^{(N_\rho)} r^{N_\rho}$$

avec $m_\rho^{(N_\rho)} > 1$ pour au moins un ρ de $\widehat{K}$. On sait [6] que si

$$\sup_\rho m_\rho^{(N_\rho)} < \infty$$

alors la paire est de Gelfand et donc qu'en fait $m_\rho(r) = r^{N_\rho}$ pour tout ρ de $\widehat{K}$.
Par construction de la fonction m_ρ, on a :

$$m_\rho^{(N_\rho)} \leq \binom{n-1}{N_\rho + n - 1},$$

où $\binom{k}{n}$ désigne le coefficient de binôme d'ordre k.
Il peut cependant arriver que m_ρ soit homogène pour tout ρ et que

$$\sup_\rho m_\rho^{(N_\rho)} = +\infty.$$

(voir l'exemple $T' \rhd H_2$ partie VI.3 cas $q_1 = q_2$).
Il reste difficile dans ce dernier cas de mettre en évidence le nombre de K-orbites qui apparaissent dans $\mathcal{O}_\mu^G \cap \mathfrak{k}^\perp$.

Dans le sixième chapitre nous calculons la fonction génératrice de la multiplicité pour plusieurs paires (K, H_n) de Gelfand ou non.

Quant à la seconde partie du mémoire, elle est consacrée à une étude de fonctions sphériques associées aux paires de Gelfand.
Benson, Jenkins et Ratcliff ont montré [4], [7] et [8] que ces dernières s'expriment essentiellement en fonction de polynômes $p_{k,l}$ homogènes mais non holomorphes sur $\mathbb{C}^n$.

Ces polynômes sont difficiles à calculer explicitement. On aimerait les écrire en terme de fonctions polynomiales invariantes “génériques” $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.
Benson, Jenkins et Ratcliff définissent donc des fonctions polynomiales $q_{k,l}$ orthogonales pour le produit scalaire

$$< f, g > = \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} f(z)\overline{g(z)}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} dzd\bar{z},$$

obtenues par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir des polynômes $p_{k,l}$ rangés dans un ordre naturel. Les polynômes $q_{k,l}$ s'obtiennent alors par orthogonalisation des fonctions $\gamma_1^{l_1} \ldots \gamma_n^{l_n}$ rangées dans le même ordre. Les calculs restent cependant ardus même dans les cas simples [8]. Ceci est rappelé dans le septième chapitre.

Dans le huitième chapitre, on étudie le cas $K = SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$. On introduit le produit star de Berezin sur $\mathbb{C}^n$ et puisque l'action de $SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ sur $\mathbb{C}^n$ possèdent deux invariants fondamentaux, on remplace les polynômes $\gamma_1^k \gamma_2^l$ par :

$$r_{k,l} = \epsilon^{*l} * \gamma_1^{*k} * (\frac{\bar{\epsilon}}{4})^{*l} \qquad \text{(rappelons que } \gamma_2 = \frac{\epsilon\bar{\epsilon}}{4})$$

et on introduit le produit scalaire sur l'espace des polynômes :

$$< f, g >_* = \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} (fe^{-\frac{z\bar{z}}{2}}) * (\bar{g}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}})(z) dzd\bar{z}.$$

On montre que les polynômes $p_{k,l}$ sont obtenus à partir des fonctions $r_{k,l}$ par orthogonalisation pour $< \, , >_*$.
On retrouve simplement la formule de récurrence pour les polynômes $p_{k,l}$.
On montre que

$$\gamma_1^k \gamma_2^l e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} = \epsilon^{*l} * \gamma_1^k e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} * \bar{\epsilon}^{\;*l}.$$

On établit une formule de trace qui relie la valeur de l'intégrale $\int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} \gamma_1^k \gamma_2^l e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} dzd\bar{z}$ calculée dans [8] avec les coefficients $C_{k,l}$ de la formule de récurrence des polynômes $p_{k,l}$.
Enfin, on termine ce travail par le calcul explicite des polynômes $p_{k,l}$ en fonction de γ_1 et γ_2. Ce calcul qui nous a été indiqué par G. Ratcliff utilise directement l'orthogonalité des polynômes $p_{k,l}$ pour le produit scalaire $< .,. >_*$

Chapitre I

PAIRES DE GELFAND

I.1 Définition et propriétés élémentaires.

Soit S un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar invariante à gauche dx. On note par $L^1(S)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes intégrables pour dx.
Si on fixe un élément x dans S, la forme linéaire sur $L^1(S)$:

$$f \longmapsto \int_S f(xyx^{-1})dy,$$

définit une mesure invariante à gauche sur S.
Par unicité de la mesure invariante à gauche (à un facteur près), il existe un réel positif $\Delta_S(x)$ tel que :

$$\int_S f(xyx^{-1})dy = \int_S f(yx^{-1})dy = \Delta_S(x) \int_S f(y)dy$$

et

$$\int_S f(y)dy = \int_S \Delta_S(y^{-1})f(y^{-1})dy,$$

pour tout f dans $L^1(S)$. On définit ainsi un homomorphisme continu :

$$\Delta_S : S \longrightarrow]0, +\infty[$$

appelé module du groupe S.

Soit A un groupe d'automorphismes de S.
Comme ci-dessus, si on fixe un élément a de A, la forme linéaire sur $L^1(S)$:

$$f \longmapsto \int_S f\big(a(x)\big)dx$$

définit une mesure invariante à gauche sur S. Il existe donc un réel positif $\Delta_{A,S}(a)$ tel que

$$\int_S f\big(a(x)\big)dx = \Delta_{A,S}(a) \int_S f(x)dx.$$

On définit ainsi le module du groupe A :

$$\Delta_{A,S} : A \longrightarrow]0,+\infty[.$$

Pour tout élément f de $L^1(S)$ et pour tout automorphisme a de S, on construit l'élément ${}^a f$ de $L^1(S)$ par :

$${}^a f(x) = \Delta_A(a) f\big(a^{-1}(x)\big), \quad \forall x \in S.$$

Définition I.1.1

On dit qu'une fonction f dans $L^1(S)$ est A-invariante si ${}^a f = f$ pour tout a dans A. On désigne par $L^1_A(S)$, l'ensemble des fonctions A-invariantes de $L^1(S)$.

Par suite on définit dans $L^1(S)$, la convolution $\circledast$ par :

$$f \circledast g(x) = \int_S f(y) g(y^{-1}x) dy = \int_S f(xy) g(y^{-1}) dy$$

et l'involution $\circledast$ par :

$$f^{\circledast}(x) = \Delta_S(x) \bar{f}(x^{-1})$$

pour tout f, g de $L^1(S)$ et x de S.

$L^1(S)$ devient alors une algèbre de Banach involutive et comme

$${}^a(f \circledast g) = {}^a f \circledast {}^a g \quad \text{et} \quad {}^a(f^{\circledast}) = ({}^a f)^{\circledast},$$

$L^1_A(S)$ est une sous-algèbre fermée de $L^1(S)$.

On considère maintenant un groupe compact K d'automorphismes de S.
On désigne par $L^1_K(S)$ l'algèbre des fonctions K-invariantes sur S, par $\Delta_{K,S}$ le module de K et on note dk la mesure de Haar normalisée sur K.

Lemme I.1.2

Le groupe K est unimodulaire, c'est-à-dire que $\Delta_{K,S}(k) = 1$ pour tout k dans K.

Preuve

$\Delta_{K,S}$ est un homomorphisme continu, alors $\Delta_{K,S}(K)$ est un sous-groupe compact de $]0,+\infty[$. Or $\{1\}$ est le seul sous-groupe compact de $]0,+\infty[$, d'où le résultat. ∎

Lemme I.1.3

Pour toute fonction h de $L^1(S)$, la fonction h_K définie par :

$$h_K(x) = \int_K {}^k h(x) dk, \quad \forall x \in S,$$

est K-invariante.

Preuve
En effet, pour tout l de K, on a :

$$\begin{aligned} {}^{l}(h_K)(x) &= \int_K {}^{k}h(l^{-1}x)dk \\ &= \int_K {}^{lok}h(x)dk \\ &= \int_K {}^{k}h(x)dk, \end{aligned}$$

par invariance à gauche de la mesure de Haar dk. ∎

De plus, si $\mathcal{V}$ est un voisinage de l'élément neutre e_S de S, on peut toujours trouver un autre voisinage $\mathcal{V}_K$ de e_S contenu dans $\mathcal{V}$ qui est K-invariant.
Si on considère une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(S)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \delta_{e_S} \quad \text{et} \quad \text{supp}\ \varphi_n \subset \mathcal{V}_K,$$

où δ_{e_S} désigne la mesure de Dirac au point e_S, on obtient alors que :

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n)_K = \delta_{e_S}.$$

$L^1(S)$ possède donc une unité approchée bornée constituée d'éléments K-invariants.

Définition I.1.4
On dit que (K, S) est une paire de Gelfand, si l'algèbre $L^1_K(S)$ est commutative.

Proposition I.1.5
Si (K, S) est une paire de Gelfand, alors le groupe S est unimodulaire.

Preuve
Pour tout f, g de $L^1_K(S)$ et pour tout x de S, on a :

$$f \circledast g(x) = g \circledast f(x).$$

Ce qui s'écrit :

$$\int_S f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_S g(y)f(y^{-1}x)dy.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_S g(y)f(y^{-1}x)dy &= \int_S g(xy)f(y^{-1})dy \\ &= \int_S \Delta_S(y)^{-1}g(xy^{-1})f(y)dy. \end{aligned}$$

On obtient finalement que :

$$\int_S f(y)\left[g(y^{-1}x) - \Delta_S(y)^{-1}g(xy^{-1})\right]dy = 0,$$

pour tout f, g de $L^1_K(S)$ et x de S.

En particulier, si $f = \displaystyle\int_K {}^k h \, dk$ où h est un élément quelconque de $L^1(S)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_S\int_K {}^k h(y)dk\left[g(y^{-1}x) - \Delta_S(y)^{-1}g(xy^{-1})\right]dy \\
&\quad= \int_K\int_S {}^k h(y)\left[{}^k g(y^{-1}x) - \Delta_S(y^{-1}) \ {}^k g(xy^{-1})\right]dydk \\
&\quad= \int_K\int_S h(y)\left[g(y^{-1}k^{-1}(x)) - \Delta_S(y^{-1})g(k^{-1}(x)y^{-1})\right]dydk \\
&\quad= \int_S h(y)\int_K\left[g(y^{-1}k^{-1}(x)) - \Delta_S(y^{-1})g(k^{-1}(x)y^{-1})\right]dkdy \\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\int_K\left[g(y^{-1}k^{-1}(x)) - \Delta_S(y^{-1})g(k^{-1}(x)y^{-1})\right]dk = 0,$$

pour tout x, y de S et pour tout g de $L^1_K(S)$. En particulier, si $x = e_S$ on obtient que :

$$g(y^{-1}) - \Delta_S(y^{-1})g(y^{-1}) = 0,$$

pour tout y dans S et g dans $L^1_K(S)$. Et donc $\Delta_S(y) = 1$ pour tout y dans S. ■

Remarque I.1.6

Si (K, S) est une paire de Gelfand, la mesure de Haar de S est invariante à gauche et à droite.

On considère l'ensemble $C_c(S)$ des fonctions continues à support compact sur S et l'ensemble $\mathcal{M}(S)$ des mesures bornées sur S.

Pour tout μ de $\mathcal{M}(S)$ et f de $C_c(S)$, on construit la fonction $\mu \circledast f$ de $C_c(S)$ en posant :

$$\mu \circledast f(x) = \int_S f(x^{-1}y)d\mu(y), \quad \forall x \in S.$$

On définit la convolution de deux mesures μ et ν de $\mathcal{M}(S)$ par :

$$\mu \circledast \nu(f) = \int_S\int_S f(xy)d\mu(x)d\nu(y), \quad \forall f \in C_c(S).$$

$\mathcal{M}(S)$ est alors une algèbre de convolution dont $L^1(S)$ est un idéal bilatère.

Définition I.1.7

On dit qu'une mesure μ de $\mathcal{M}(S)$ est K-invariante si pour tout k de K et pour tout f de $C_c(S)$, on a :

$$\begin{aligned} < {}^k\mu, f > &= < \mu, {}^{k^{-1}}f > \\ &= < \mu, f > . \end{aligned}$$

On note $\mathcal{M}_K(S)$ l'ensemble des mesures bornées K-invariantes de S.

Proposition I.1.8

Si (K,S) est une paire de Gelfand alors $\mathcal{M}_K(S)$ est commutative.
En particulier le sous-groupe

$$S_0 = \{x \in S,\ k(x) = x,\ \ \forall k \in K\}$$

des points fixes sous l'action de K est commutatif.

Preuve

On suppose que (K,S) est une paire de Gelfand.
On considère des mesures μ, ν dans $\mathcal{M}_K(S)$ et des fonctions K-invariantes f,g dans $C_c(S)$. Puisque ${}^k(\mu \circledast f) = {}^k\mu \circledast {}^kf$, les fonctions $\mu \circledast f$ et $\nu \circledast g$ sont dans $L^1_K(S)$. On a donc :

$$\big((\mu \circledast f) \circledast (\nu \circledast g)\big) \circledast h = \big((\nu \circledast g) \circledast (\mu \circledast f)\big) \circledast h,$$

pour tout h de $C_c(S)$. En choisissant pour f et g des unités approchées K-invariantes, on obtient à la limite que :

$$\mu \circledast \nu \circledast h = \nu \circledast \mu \circledast h,$$

pour tout h de $C_c(S)$ et par conséquent :

$$\mu \circledast \nu = \nu \circledast \mu.$$

Et comme les éléments de $L^1(S_0)$ définissent des mesures K-invariantes, $L^1(S_0)$ est commutative et du fait que

$$\delta_{x_0} \circledast \delta_{y_0} = \delta_{x_0 y_0},$$

on obtient que le groupe S_0 est aussi commutatif. ■

Pour tout point x de S, on note par $K.x$ l'orbite de x suivant K (ou K-orbite de x) *ie* :

$$K.x = \{k(x), k \in K\}$$

Proposition I.1.9 [4]

Si (K,S) est une paire de Gelfand alors les K-orbites de S commutent.

Preuve

On suppose que (K, S) est une paire de Gelfand et qu'il existe x et y dans S tels que

$$K.x\ K.y \neq K.y\ K.x,$$

ce qui revient à dire que xy n'est pas dans $K.y\ K.x$.
Soit f une fonction de $C_c(S)$ telle que :

$$f > 0, \quad f(xy) = 1 \quad \text{et} \quad f(K.y\ K.x) = 0.$$

Pour tout x de S, on construit la mesure K-invariante δ_x^K de S en posant :

$$\delta_x^K(f) = \int_K f(k(x))dk, \quad \forall f \in C_c(S).$$

On a alors pour tout f de $C_c(S)$:

$$\delta_y^K \circledast \delta_x^K(f) = \int_K \int_K f\big(k_1(y)\ k_2(x)\big)dk_1dk_2 = 0$$

et

$$\delta_x^K \circledast \delta_y^K(f) = \int_K \int_K f\big(k_1(x)\ k_2(y)\big)dk_1dk_2 > 0$$

Les mesures δ_x^K et δ_y^K ne commutent donc pas et en vertu de la proposition, I.1.8 la paire (K, S) n'est pas de Gelfand. ■

Proposition I.1.10

Soient K et L deux groupes compacts d'automorphismes de S tels que :

$$L = a \circ K \circ a^{-1}$$

pour un certain automorphisme a de S. Alors (K, S) est une paire de Gelfand si et seulement si (L, S) en est une.

Preuve

On considère l'automorphisme Φ_a de $L^1(S)$ défini par :

$$\Phi_a(f) = f \circ a, \ \forall f \in L^1(S).$$

Si f est dans $L^1_L(S)$ alors $\Phi_a(f)$ est dans $L^1_K(S)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} {}^k\Phi_a(f)(x) &= \Phi_a(f) \circ k^{-1}(x) \\ &= {}^{aoko a^{-1}}f \circ a(x) \\ &= \Phi_a(f)(x), \ \forall x \in S, k \in K. \end{aligned}$$ ■

Remarque I.1.11

Si K et L sont deux groupes compacts d'automorphismes de S tels que $K \subset L$, on a :

$$L^1_L(S) \subset L^1_K(S)$$

et donc si (K, S) est une paire de Gelfand alors (L, S) en est une.

I.2 Paires de Gelfand résolubles.

On désigne dorénavant par $S = \exp \mathfrak{s}$ un groupe de Lie résoluble, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$.
On désigne toujours par K un groupe compact agissant sur S par automorphismes.
L'action de K sur S induit par différentiation une action sur $\mathfrak{s}$ notée :

$$k(X) = {}^k X, \quad \forall X \in \mathfrak{s}, \ k \in K.$$

K est aussi un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{s}$ et on a bien évidemment la relation :

$$\exp({}^k X) = {}^k \exp(X), \quad \forall X \in \mathfrak{s}, \ k \in K.$$

Définition I.2.1

On dira que (K, S) est une paire de Gelfand résoluble si (K, S) est une paire de Gelfand et si S est résoluble connexe et simplement connexe.

Soit $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{s} + i\mathfrak{s}$, la complexification de $\mathfrak{s}$.
Pour deux idéaux quelconques $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ tels que le $\mathfrak{s}$-module $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ soit simple, il existe un unique caractère complexe λ appelé racine de $\mathfrak{s}$ qui est équivalent à $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$.
Le caractère λ est aussi une valeur propre de $\mathrm{ad}(X) = [X, .]$, X de $\mathfrak{s}$ et où $[.,.]$ est le crochet de Lie dans $\mathfrak{s}$.
Soit $R(\mathfrak{s})$, l'ensemble des racines de $\mathfrak{s}$. L'idéal $\mathfrak{n} = \bigcap_{\mathfrak{r} \in R(\mathfrak{s})} \ker(\mathfrak{r})$ est nilpotent et contient $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. $\mathfrak{n}$ est appelé le radical nilpotent de $\mathfrak{s}$.
Soit $N = \exp\ \mathfrak{n}$, le groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à $\mathfrak{n}$. Alors :

Théorème I.2.2 [4],[24]

On suppose que K est un groupe de Lie compact et connexe agissant sur S par automorphismes. Si (K, S) est une paire de Gelfand, alors les assertions suivantes sont vérifiées
i) (K, N) est aussi une paire de Gelfand.
ii) Soit $\mathfrak{s}_0 = \{X \in \mathfrak{s}, {}^k X = X, \forall k \in K\}$, l'ensemble des éléments fixes de $\mathfrak{s}$ sous l'action de K. Alors :

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{n}.$$

iii) Le spectre complexe de ad est contenu dans $i\mathbb{R}$ et pour tout X de $\mathfrak{s}_0$, Y de $\mathfrak{s}$, il existe k de K tel que :

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = \exp({}^k Y).$$

iv) $\mathfrak{s}_0$ est abélien.

Preuve

On suppose que K est un groupe de Lie compact et connexe agissant sur S par automorphismes et que (K, S) est une paire de Gelfand.

i) Puisque l'algèbre $L^1_K(N)$ des fonctions K-invariantes de N est une sous-algèbre K-invariante de l'algèbre des mesures bornées sur S, elle est alors commutative et donc (K, N) est une paire de Gelfand.

ii) Soit $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie associée à K et soit T un élément de $\mathfrak{k}$.

On considère le sous-groupe $\mathcal{T} = \exp(\mathbb{R}T)$ de K.

Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{s}$ relativement à un produit scalaire K-invariant préalablement fixé sur $\mathfrak{s}$.

Comme $\mathfrak{b}$ est aussi K-invariant, la complexification $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ de $\mathfrak{b}$ se décompose en somme directe de sous-espaces poids $\mathfrak{b}_\chi$:

$$\mathfrak{b}_\mathbb{C} = \sum_\chi \mathfrak{b}_\chi,$$

où $\mathfrak{b}_\chi = \{X \in \mathfrak{b}_\mathbb{C},\ {}^tX = \chi(t)X,\ \forall t \in \mathcal{T}\}$.

On fixe maintenant un élément X de $\mathfrak{b}_\chi \backslash \{0\}$ et on considère une valeur propre λ de $\mathrm{ad}(X)$ et un vecteur propre Y de $\mathrm{ad}(X)$ dans $\mathfrak{s}_\mathbb{C}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\lambda({}^tY) &= {}^t(\lambda Y)\\ &= [{}^tX, {}^tY]\\ &= \chi(t)\mathrm{ad}(X)({}^tY),\ \forall t \in \mathcal{T}.\end{aligned}$$

${}^tY$ est donc un vecteur propre de $\mathrm{ad}(X)$ pour la valeur propre $\bar{\chi}(t)\lambda$. Et comme la dimension de $\mathfrak{s}$ est finie, il faut que $\chi = 1$. Ce qui prouve que l'orthogonal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{n}$ doit être contenu dans $\mathfrak{s}_0$.

iii) Puisque (K, S) est une paire de Gelfand, on a pour tout X de $\mathfrak{s}_0$ et Y de $\mathfrak{s}$:

$$\begin{aligned}\exp(Y)\exp(X) &= \exp({}^lX)\exp({}^kY)\\ &= \exp(X)\exp({}^kY),\end{aligned}$$

pour certains k, l de K. Par conséquent, on obtient :

$$\exp(-X)\exp(Y)\exp(X) = \exp({}^kY),\ \ \forall X \in \mathfrak{s}_0, Y \in \mathfrak{s}.$$

En particulier :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(-X))Y &= \frac{d}{ds}_{\big|s=o} \exp(-X)\exp(sY)\exp(X)\\ &= {}^kY, \quad \forall X \in \mathfrak{s}_0,\ Y \in \mathfrak{s}.\end{aligned}$$

Et donc

$$||\mathrm{Ad}(\exp(-X))Y||_{\mathfrak{s}} = ||^{k}Y||_{\mathfrak{s}} = ||Y||_{\mathfrak{s}},$$

où $||.||_{\mathfrak{s}}$ est la norme K-invariante de $\mathfrak{s}$.
Ainsi $\mathrm{Ad}(\exp(-X))$ est un opérateur orthogonal et le spectre de $\mathrm{ad}(X)$ doit être contenu dans $i\mathbb{R}$.
iv) D'après le point précédent, on peut écrire :

$$\exp(X)\exp(\frac{q}{2^n}Y)\exp(-X) = k_n \exp(\frac{q}{2^n}Y)$$

où X est dans $\mathfrak{s}_0$, Y dans $\mathfrak{s}$, k_n dans K et où $q = 1, 2, \ldots, 2^n$, n dans $\mathbb{N}$.
Pour tout $p < n$ on a :

$$\begin{aligned}\exp(X)\exp(\frac{q}{2^p}Y)\exp(-X) &= \left[\exp(X)\exp(\frac{q}{2^n}Y)\exp(-X)\right]^{2^{n-p}}\\ &= \left[k_n \exp(\frac{q}{2^n}Y)\right]^{2^{n-p}}\\ &= k_n\left[\exp(\frac{q}{2^n}Y)\right]^{2^{n-p}}\\ &= k_n \exp(\frac{q}{2^p}Y).\end{aligned}$$

On fixe p et on fait tendre n vers l'infini. K étant un groupe compact, il existe une sous suite $(k_{n_j})_{n_j}$ de $(k_n)_n$ telle que $k_{n_j} \to k$. Alors pour tout p de $\mathbb{N}$, on a :

$$\exp(X)\exp(\frac{q}{2^p}Y)\exp(-X) = k\exp(\frac{q}{2^p}Y)$$

En particulier :

$$\exp(X)\exp(\frac{1}{2^p}Y)\exp(-X) = k\exp(\frac{1}{2^p}Y)$$

et donc :

$$\begin{aligned}\left[\exp(X)\exp(\frac{1}{2^p}Y)\exp(-X)\right]^m &= \exp(X)\exp(\frac{m}{2^p}Y)\exp(-X)\\ &= k\exp(\frac{m}{2^p}Y)\end{aligned}$$

pour tout p de $\mathbb{N}$, m de $\mathbb{Z}$. Et donc pour tout $t = \frac{m}{2^p}$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\exp(X)\exp(tY)\exp(-X) = k\exp(tY).$$

Or pour tout Y de $\mathfrak{s}_0$, X de $\mathfrak{s}$ et t de $\mathbb{R}$:

$$\exp(X)\exp(tY)\exp(-X) = \exp(tY).$$

Par conséquent :

$$[X, Y] = 0. \qquad \blacksquare$$

On construit les idéaux suivants de $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{n}^{(0)} = \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}^{(l)} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{(l-1)}], \quad l \in \mathbb{N}\backslash\{0\},$$

Pour tout l de $\mathbb{N}$, $\mathfrak{n}^{(l)}$ est K-invariant et correspond au sous-groupe distingué :

$$N^{(l)} = \exp(\mathfrak{n}^{(l)}).$$

Pour tout entier l strictement positif, on écrit :

$$\mathfrak{n}^{(l-1)} = \mathfrak{o}_l \oplus \mathfrak{n}^{(l)}.$$

L'orthogonal $\mathfrak{o}_l$ de $\mathfrak{n}^{(l)}$ dans $\mathfrak{n}^{(l-1)}$ est aussi K-invariant.
Soit r le pas de $\mathfrak{n}$ autrement dit r est le plus grand indice tel que :

$$\mathfrak{n}^{(r-1)} \neq 0.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^{(r-1)} &= [\mathfrak{n}^{(r-2)}, \mathfrak{n}] \\ &= [\mathfrak{n}^{(r-2)}, \mathfrak{o}_1 \oplus \mathfrak{n}^{(1)}] \\ &= [\mathfrak{n}^{(r-2)}, \mathfrak{o}_1] \end{aligned}$$

car $[\mathfrak{n}^{(r-2)}, \mathfrak{n}^{(1)}] = [\mathfrak{n}^{(r-2)}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]] \subset [[\mathfrak{n}^{(r-2)}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] = \{0\}$.

Proposition I.2.3 [4]
Si (K, N) est une paire de Gelfand, alors N est de pas 2 c'est-à-dire que $N^{(2)} = \{e_N\}$, e_N étant l'élément neutre de N.

Preuve
Soit r le plus grand indice tel que :

$$N^{(r-1)} \neq \{e_N\}$$

i.e

$$\mathfrak{n}^{(r-1)} \neq \{0\}.$$

On suppose que r est strictement supérieur à 2. Pour tout X de $\mathfrak{o}_1$ et Y de $\mathfrak{o}_{r-1}$, on a :

$$\exp(Y)\exp(X) = \exp(Y + X + \frac{1}{2}[Y, X])$$

par application de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff en tenant compte du fait que

$$[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], Y] = \{0\}.$$

K est un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{s}$ donc de $\mathfrak{n}$. ${}^lY$ appartient donc à $\mathfrak{n}_{r-1}$ et

$$\begin{aligned}\exp({}^kX)\exp({}^lY) &= \exp({}^kX + {}^lY + \frac{1}{2}[{}^kX, {}^lY]) \\ &= \exp(Y)\exp(X) \\ &= \exp(Y + X + \frac{1}{2}[Y, X]).\end{aligned}$$

On pose :

$$A = {}^kX + {}^lY + \frac{1}{2}[{}^kX, {}^lY] \quad \text{et} \quad B = Y + X + \frac{1}{2}[Y, X].$$

$\exp(A) = \exp(B)$ implique

$$\mathrm{Ad}(\exp(A)) = e^{\,\mathrm{ad}(A)} = \mathrm{Ad}(\exp(B)) = e^{\,\mathrm{ad}(B)}.$$

Si X et Y sont assez petits, $\mathrm{ad}(A)$ et $\mathrm{ad}(B)$ ont des valeurs propres λ telles que :

$$|\mathfrak{Im}\lambda| < \pi.$$

Alors $e^{\,\mathrm{ad}(A)} = e^{\,\mathrm{ad}(B)}$ entraîne que

$$\mathrm{ad}(A) = \mathrm{ad}(B).$$

Et donc

$$A - B = Z \in \mathfrak{z},$$

où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{n}$. Ce qui implique :

$$\exp(A) = \exp(B + Z) = \exp(B)\exp(Z).$$

Par conséquent,

$$\exp(Z) = 1.$$

Par ailleurs, le groupe

$$\Gamma = \{Z \in \mathfrak{z} \text{ tel que } \exp(Z) = 1\}$$

est discret [31] et donc

$$A = B \bmod(\Gamma).$$

Puisque $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_{r-1}$ et $[\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_{r-1}]$ sont en somme directe et que $r > 2$, on a que :

$$Y = {}^lY \text{ et } X = {}^kX$$

et donc

$$[X, Y] = [Y, X] \bmod(\Gamma).$$

On obtient finalement que :

$$2[X, Y] = 0 \bmod(\Gamma).$$

Ce qui est absurde puisqu'on a supposé que r est strictement supérieur à 2. ■

La description des actions de K sur S telles que (K, S) soit une paire de Gelfand résoluble se ramène donc à celle de toutes les actions de groupes compacts K sur des groupes nilpotents connexes et simplement connexe et de pas au plus 2 telles que (K, N) soit une paire de Gelfand.

I.3 Paires de Gelfand nilpotentes et théorie des représentations.

Dans la suite on désignera par :
$N = \exp \mathfrak{n}$, un groupe de Lie connexe, simplement connexe et nilpotent de pas 2,
$\mathfrak{n}$ son algèbre de Lie,
K un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, agissant sur N par automorphismes.
Les éléments neutres de K et de N sont respectivement notés par e_K et e_N.
L'action de K sur N s'écrit :

$$k(n) = {}^k n, \quad k \in K, \; n \in N.$$

On construit le produit semi direct :

$$G = K \rhd N$$

dont la multiplication est définie pour tout $(k,n),(k',n')$ de G par :

$$(k,n)(k',n') = \big(kk', n\, {}^k n'\big).$$

Soit $L^1(G)$ l'algèbre de convolution des fonctions complexes intégrables sur G.

Définition I.3.1

On dit qu'une fonction F de $L^1(G)$ est K-biinvariante si :

$$F\big((k',e_N)\;(k,n)\;(k'',e_N)\big) = F\big((k,n)\big)$$

pour tout k, k', k'' dans K et n dans N.
On note par $L^1({}_K\backslash G/_K)$ l'algèbre des fonctions K-biinvariantes de G.

Lemme I.3.2

$L^1({}_K\backslash G/_K)$ est isométriquement isomorphe à $L^1_K(N)$.

Preuve

Pour tout F de $L^1({}_K\backslash G/_K)$, k de K et n de N, on a :

$$F\big((k,n)\big) = F\big((e_K,n)\;(k,e_N)\big) = F\big((e_K,n)\big)$$

et

$$F\big((e_K,{}^k n)\big) = F\big((k,e_N)(e_K,n)(k^{-1},e_N)\big) = F\big((e_K,n)\big).$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} L^1({}_K\backslash G/_K) & \longrightarrow & L^1_K(G) \\ F & \longmapsto & f = F\big((e_K,.)\big) \end{array}$$

est surjective par construction. C'est aussi une isométrie car

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^1({}_K\backslash G/_K)} &= \int_K \int_N |F\big((k,n)\big)|dndk \\ &= \int_K \int_N |F\big((e_K,n)\big)|dndk \\ &= \|f\|_{L^1_K(G)}. \end{aligned}$$

En outre, si F' est un autre élément de $L^1({}_K\backslash G/_K)$ et si $f' = F'\big((e_K,.)\big)$, on a :

$$\begin{aligned} f \circledast f'(m) &= \int_N f(n) f'(n^{-1}m)dn \\ &= \int_K \int_N f({}^{k^{-1}}n) f'\big(({}^{k^{-1}}n)^{-1}m\big)dndk \\ &= \int_K \int_N F\big((k,n)\big) F'\big((k,n)^{-1}(e_K,m)\big)dndk \\ &= F \circledast F'\big((e_K,m)\big), \quad \forall m \in N. \end{aligned}$$

■

Donc (K,N) est une paire de Gelfand si et seulement si $L^1({}_K\backslash G/_K)$ est commutative.
A présent, on considère l'ensemble $\widehat{G}$ des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductibles de G. On a :

Proposition I.3.3

$L^1({}_K\backslash G/_K)$ est commutative si et seulement si il existe une partie $\mathcal{C}$ dense dans $\widehat{G}$ telle que pour toute représentation unitaire et irréductible $(\pi, \mathcal{H})$ de G contenue dans $\mathcal{C}$, le sous-espace $\mathcal{H}_K$ des vecteurs K-invariants de $\mathcal{H}$ est de dimension au plus 1.
De plus si (K,N) est une paire de Gelfand, alors $\dim(\mathcal{H}_K) \leq 1$ pour toute représentation $(\pi, \mathcal{H})$ dans $\widehat{G}$.

Preuve

On suppose que $L^1({}_K\backslash G/_K)$ est commutative.

Soit 1_K la fonction caractéristique de K. Pour toute représentation $(\pi, \mathcal{H})$ de G, on a :

$$\pi(1_K)\mathcal{H} = \mathcal{H}_K.$$

D'autre part, si η et ξ sont deux éléments non nuls de $\mathcal{H}_K$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction F de $L^1(G)$ telle que :

$$||\pi(F)\xi - \eta||_{\mathcal{H}} < \epsilon$$

et donc :

$$\begin{aligned} ||\pi(1_K \circledast F \circledast 1_K)\xi - \eta||_{\mathcal{H}} &= ||\pi(1_K)\pi(F)\pi(1_K)\xi - \eta||_{\mathcal{H}} \\ &\leq ||\pi(F)\xi - \eta||_{\mathcal{H}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Comme $1_K \circledast F \circledast 1_K$ appartient à $L^1({}_K\backslash G/_K)$, $\mathcal{H}_K$ est un module $L^1({}_K\backslash G/_K)$-irréductible.

Et enfin, puisque $L^1({}_K\backslash G/_K)$ est commutative, $\mathcal{H}_K$ doit être de dimension au plus 1.

Réciproquement, si on suppose que tous les $\mathcal{H}_K$ sont de dimension au plus 1 pour toutes les représentations $(\pi, \mathcal{H})$ dans $\mathcal{C}$ alors :

$$\pi\big(L^1({}_K\backslash G/_K)\big)\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_K$$

et comme $\mathcal{H}_K$ est de dimension au plus 1, on a même :

$$\pi\big(L^1({}_K\backslash G/_K)\big)\mathcal{H} = \mathcal{H}_K$$

Et donc pour tout F, F' de $L^1({}_K\backslash G/_K)$, on a :

$$\pi(F) \circ \pi(F') = \pi(F') \circ \pi(F).$$

$L^1({}_K\backslash G/_K)$ est donc commutative car $\mathcal{C}$ est dense dans $\widehat{G}$. ■

Remarque I.3.4

Cette proposition est aussi vraie si N est un groupe localement compact et K un groupe compact d'automorphismes de N.

Cela revient à dire que pour toute représentation $(\pi, \mathcal{H})$ dans $\widehat{G}$ la multiplicité de la représentation triviale 1_K dans $\pi|_K$ est au plus 1.
La propositions I.3.3 est en fait une simple conséquence du Théorème fondamental des paires de Gelfand démontré par I.M. Gelfand dans [18].

Soit maintenant $\mathfrak{n}^*$ le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ associée à N, muni du crochet de dualité

$$< \nu, X > = \ \nu(X), \quad \forall \nu \in \mathfrak{n}^*, \ X \in \mathfrak{n}.$$

L'action contragédiente de K sur $\mathfrak{n}^*$ est définie par :

$$< k.\nu, X > = < \nu, {}^{k^{-1}}X >, \quad \forall k \in K, \ X \in \mathfrak{n}, \ \nu \in \mathfrak{n}^*.$$

D'après la théorie de Kirillov [25], il existe une bijection entre l'espace $\mathfrak{n}^*_{|N}$ des orbites coadjointes de N et l'espace $\widehat{N}$ des classes d'équivalences des représentations unitaires et irréductibles de N. Cette bijection est d'ailleurs un homéomorphisme, si $\mathfrak{n}^*_{|N}$ est muni de la topologie du quotient [10].

Soit $(\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ la représentation unitaire et irréductible de N associée à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\nu^N$ de N passant par le point ν de $\mathfrak{n}^*$.
En posant :

$$^k\pi_\nu(n) = \pi_\nu(^kn), \quad \forall k \in K, n \in N,$$

on définit une autre représentation unitaire et irréductible $(^k\pi_\nu, \mathcal{H}_{k.\nu})$ de N.
Le stabilisateur de $(\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ est donné par :

$$K_\nu = \{k \in K, {}^k\pi_\nu \text{ est unitairement équivalente à } \pi_\nu\}.$$

De plus, toujours d'après la théorie de Kirillov, π_ν est de la forme

$$\pi_\nu = \mathrm{ind}_P^N \chi_\nu,$$

avec $P = \exp \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ étant une polarisation en ν et χ_ν le caractère de P associé à ν.
Par ailleurs, si $\pi_{\nu'}$ est une autre repésentation unitaire et irréductible de N, $\pi_{\nu'}$ est équivalente à π_ν si et seulement si $\pi_{\nu'}$ est induite par un caractère associé à un point ν' de l'orbite $\mathcal{O}_\nu^N$ passant par ν. Or par constuction, $^k\pi_\nu$ est induite par $\chi_{k.\nu}$.
Le stabilisateur K_ν s'écrit donc [28]

$$K_\nu = \{k \in K, \ k.\nu \in \mathcal{O}_\nu^N\}.$$

On écrit :

$$\mathcal{H}_\nu = \{f : N \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ tel que } \ f(nm)\chi_\nu(m)^{-1}f(n) \ \text{ et } \ ||f||^2_{\mathcal{H}_\nu} < \infty\}$$

et

$$\big(\pi_\nu(n)f\big)(m) = f(n^{-1}m), \quad \forall n, m \in N.$$

$^k\pi_\nu$ est alors réalisée sur $\mathcal{H}_\nu$ par :

$$\begin{aligned}
\big(^k\pi_\nu(n)f\big)(m) &= \big(\pi_\nu(^kn)f\big)(m) \\
&= f\big(\ (^kn)^{-1} \ m \ \big) \\
&= f\big(\ ^k(n^{-1}) \ ^k(^{k^{-1}}m) \ \big) \\
&= f\big(\ ^k(n^{-1} \ ^{k^{-1}}m) \ \big), \quad \forall n, m \in N.
\end{aligned}$$

Pour tout k de K_ν, on pose :

$$\big(W_\nu(k)f\big)(m) = f(^{k^{-1}}m), \quad \forall f \in \mathcal{H}_\nu, \ m \in N.$$

$W_\nu(k)$ est alors un opérateur de $\mathcal{H}_\nu$ dans $\mathcal{H}_{k.\nu}$ qui entrelace π_ν et $^k\pi_\nu$.

En effet, pour tout f de $\mathcal{H}_\nu$, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\big(W_\nu(k)f\big)(n^k m) &= f({}^{k^{-1}}\!n\ m)\\ &= \chi_\nu(m)^{-1} f({}^{k^{-1}}\!n)\\ &= \chi_\nu(m)^{-1}\big(W_\nu(k)f\big)(n), \quad \forall n, m \in N.\end{aligned}$$

Et comme

$$\chi_{k.\nu}({}^k m) = \chi_\nu(m),$$

pour tout m dans N, on obtient que :

$$\big(W_\nu(k)f\big)(n^k m) = \chi_{k.\nu}({}^k m)^{-1}\big(W_\nu(k)f\big)(n).$$

et donc $\big(W_\nu(k)f\big)$ est un élément de $\mathcal{H}_{k.\nu}$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\big({}^k\pi_\nu(n)f\big)(m) &= \big(W_\nu(k^{-1})f\big)(n^{-1}\ {}^{k^{-1}}\!m)\\ &= \big(\pi_\nu \circ W_\nu(k^{-1})f\big)({}^{k^{-1}}\!m)\\ &= \big(W_\nu(k)\circ\pi_\nu\circ W_\nu(k^{-1})f\big)(m), \quad \forall m \in N.\end{aligned}$$

De plus, $(W_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ est par construction une représentation de K_ν.

Soit $\widehat{K}_\nu$, l'ensemble des classes d'équivalences des représentations unitaires et irréductibles de K_ν. D'après la théorie de Mackey, pour tout $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ de $\widehat{K}$, l'expression :

$$\psi_{\rho,\pi_\nu}(k,n) = \bar{\rho}(k)\otimes W_\nu(k)\pi_\nu(n), \qquad (k,n)\in K_\nu\times N,$$

où $\bar{\rho}$ est la représentation contragradiente de ρ, définit une représentation irréductible de $K_\nu \rhd N$ dans $\mathcal{H}_\rho\otimes\mathcal{H}_\nu$. De plus, l'induite

$$\tilde{\psi}_{\rho,\pi_\nu} = \mathrm{ind}_{K_\nu\rhd N}^{K\rhd N}\psi_{\rho,\pi_\nu}$$

est irréductible et toute représentation irréductible de $K \rhd N$ s'obtient de cette manière.
On a ainsi établi la paramétrisation suivante de $\widehat{G}$:

Lemme I.3.5
$\widehat{G} = \big\{\tilde{\psi}_{\rho,\pi_\nu} = ind_{K_\nu\rhd N}^{K\rhd N}\psi_{\rho,\pi_\nu},\ \text{où } \psi_{\rho,\pi_\nu} = \bar{\rho}\otimes W_\nu\pi_\nu,\ \ \forall(\rho,\mathcal{H}_\rho)\in\widehat{K}_\nu,\ \ (\pi_\nu,\mathcal{H}_\nu)\in\widehat{N}\big\}$

A présent, on note par δ la restriction de ψ_{ρ,π_ν} à K_ν. On a :

$$\delta = \bar{\rho} \otimes W_\nu.$$

Elle se décompose en :

$$\delta = \sum_{\varphi \in \widehat{K}_\nu} \mathrm{mult}(\varphi, \delta)\varphi,$$

où $\mathrm{mult}(\alpha, \beta)$ désigne la multiplicité de α dans β. On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\rho,\pi_\nu}|_K &= \mathrm{ind}_{K_\nu}^K \delta \\ &= \sum_{\varphi \in \widehat{K}_\nu} \mathrm{mult}(\varphi, \delta)\mathrm{ind}_{K_\nu}^K \varphi \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{mult}(1_K, \tilde{\psi}_{\rho,\pi_\nu}|_K) = \sum_{\varphi \in \widehat{K}_\nu} \mathrm{mult}(\varphi, \delta)\mathrm{mult}(1_K, \mathrm{ind}_{K_\nu}^K \varphi).$$

Or, d'après le théorème de réciprocité de Frobenius,

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}(1_K, \mathrm{ind}_{K_\nu}^K \varphi) &= \mathrm{mult}(1_{K_\nu}, \varphi) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } \varphi \neq 1_{K_\nu}. \\ 1 \text{ si } \varphi = 1_{K_\nu}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{mult}(1_K, \tilde{\psi}_{\rho,\pi_\nu}|_K) = \mathrm{mult}(1_{K_\nu}, \delta).$$

Cet argument est valable même si la série diverge ou si $\mathrm{mult}(\varphi, \delta) = \infty$ pour certains φ. D'autre part, si on écrit :

$$W_\nu = \sum_{\alpha \in \widehat{K}_\nu} \mathrm{mult}(\alpha, W_\nu)\alpha,$$

on obtient que

$$\bar{\rho} \otimes W_\nu = \sum_{\alpha \in \widehat{K}_\nu} \mathrm{mult}(\alpha, \delta)\bar{\rho} \otimes \alpha.$$

Or, pour tout α de $\widehat{K}_\nu$, le module $\bar{\rho} \otimes \alpha$ est équivalent au module $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{H}_\rho, \mathcal{H}_\alpha)$ et donc la représentation triviale apparaît dans $\bar{\rho} \otimes \alpha$ si et seulement si α est équivalente à ρ.

En outre, du fait que les opérateurs d'entrelacement pour ρ sont uniques à un scalaire près, la représentation triviale apparaît une seule fois dans $\rho \otimes \bar{\rho}$. Ainsi :

$$\mathrm{mult}(1_{K_\nu}, \delta) = \mathrm{mult}(\rho, W_\nu)$$

et donc :

$$\mathrm{mult}(1_K, \tilde{\psi}_{\rho,\pi_\nu}|_K) = \mathrm{mult}(\rho, W_\nu).$$

Ce qui établit :

Proposition I.3.6 [11]

(K, N) est une paire de Gelfand si et seulement si pour tout ν de $\mathfrak{n}^*$ et ρ de $\widehat{K}_\nu$, la multiplicité de ρ dans W_ν est au plus 1.

On fixe un produit scalaire K-invariant $< .,. >$ sur $\mathfrak{n}$.
On désigne par $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$ et par $\mathfrak{m}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{n}$, autrement dit

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}.$$

On pose $\mathfrak{z}_\nu = \ker(\nu_{|\mathfrak{z}})$ le noyau de $\nu_{|\mathfrak{z}}$ et on construit l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\nu &= \{x \in \mathfrak{m},\ \mathrm{ad}(x)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{z}_\nu\} \\ &= \{x \in \mathfrak{m},\ \nu[x, \mathfrak{n}] = 0\}.\end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{b}_\nu$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{a}_\nu$ dans $\mathfrak{m}$ *ie*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}_\nu \oplus \mathfrak{b}_\nu.$$

Soit enfin $\mathfrak{z}'_\nu$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{z}_\nu$ dans $\mathfrak{z}$ *ie*

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}'_\nu \oplus \mathfrak{z}_\nu.$$

En conclusion, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{n} &= \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{z} \\ &= (\mathfrak{a}_\nu \oplus \mathfrak{b}_\nu) \oplus (\mathfrak{z}_\nu \oplus \mathfrak{z}'_\nu).\end{aligned}$$

Et si on pose

$$\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{b}_\nu \oplus \mathfrak{z}'_\nu,$$

on a alors :

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{a}_\nu \oplus \mathfrak{h}_\nu \oplus \mathfrak{z}_\nu.$$

Soit $q_\nu : \mathfrak{z} \longrightarrow \mathfrak{z}'_\nu$ la projection orthogonale.
On munit $\mathfrak{a}_\nu$ du crochet de Lie trivial $[.,.]$ c'est-à-dire du crochet de $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}_\nu$ et on munit $\mathfrak{h}_\nu$ du crochet de Lie $[x,y]_\nu \stackrel{\text{déf}}{=} q_\nu[x,y]$.
On obtient alors que :

$$\mathfrak{n}_\nu = \mathfrak{n}/\mathfrak{z}_\nu \text{ est Lie isomorphe à } \mathfrak{a}_\nu \oplus \mathfrak{h}_\nu$$

et que $\mathfrak{a}_\nu$ est abélienne, $\mathfrak{h}_\nu$ est soit $\{0\}$, soit $\mathbb{R}$, soit une algèbre de Lie de Heisenberg.
Soit H_ν le groupe de Lie correspondant à $\mathfrak{h}_\nu$.
L'action de K_ν préserve $\mathfrak{a}_\nu \oplus \mathfrak{h}_\nu$, on obtient ainsi une action diagonale de K_ν sur le groupe $A_\nu \times H_\nu$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_\nu \oplus \mathfrak{h}_\nu$ et on a :

Lemme I.3.7 [5]
W_ν est sans multiplicité si et seulement si (K_ν, H_ν) est une paire de Gelfand.

Preuve
Si $\mathfrak{z}_\nu = \mathfrak{z}$ alors $\mathcal{O}_\nu^N = \{\nu\}$ et π_ν est une représentation de dimension 1. Puisque deux caractères sont équivalents si et seulement si ils coincident, on voit que :

$$K_\nu = \{k \in K, \text{ tel que } {}^k\pi_\nu = \pi_\nu\}$$

et que W_ν est la représentation triviale de K_ν sur $\mathcal{H}_\nu = \mathbb{C}$. Donc W_ν est sans multiplicité quand $\mathfrak{z}_\nu = \mathfrak{z}$. Dans ce cas, on a aussi :

$$\mathfrak{h}_\nu = \{0\}$$

et par conséquent (K_ν, H_ν) est une paire de Gelfand.
Si $\mathfrak{z}_\nu \neq \mathfrak{z}$, alors $\mathfrak{z}'_\nu = \mathfrak{z}/_{\mathfrak{z}_\nu}$ est un espace de dimension 1.
Si $\mathfrak{b}_\nu = \{0\}$, on obtient que

$$\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{z}_\nu \simeq \mathbb{R}$$

est un espace abélien de dimension 1. (K_ν, H_ν) est encore une paire de Gelfand. Dans ce cas

$$\mathcal{O}_\nu^N = \{\nu + \nu[X,.] \text{ tel que } X \in \mathfrak{m}\} = \{\nu\}$$

et W_ν est encore sans multiplicité.
Si $\mathfrak{b}_\nu \neq \{0\}$, $\mathfrak{h}_\nu$ est alors une algèbre de Lie nilpotente de pas 2 dont le centre est $\mathfrak{z}'_\nu \simeq \mathbb{R}$. C'est donc une algèbre de Lie de Heisenberg. Puisque $\mathcal{O}_\nu^N$ prend une valeur constante non nulle sur $\mathfrak{z}'_\nu$ et que l'action de K_ν préserve $\mathfrak{z}'_\nu$ et $\mathcal{O}_\nu^N$, on conclut que l'action de K_ν sur $\mathfrak{z}'_\nu$ est triviale.

En effet, si Z est un élément non nul de $\mathfrak{z}'_\nu$ et si

$$k.Z = cZ$$

pour un certain réel c et pour un certain k de K_ν, alors :

$$\nu(Z) = \nu(k.Z) = \nu(cZ) = c\nu(Z).$$

Donc $c = 1$. La représentation π_ν est triviale sur $Z_\nu = \exp(\mathfrak{z}_\nu)$ et

$$N_\nu = N/_{Z_\nu}.$$

En identifiant N_ν avec le produit de groupe $A_\nu \times H_\nu$, on peut écrire :

$$\pi_\nu(a, n) = \chi(a)\pi'_\nu(n),$$

où $\chi : A_\nu \longrightarrow \mathbb{T}$ est un caractère unitaire et $(\pi'_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ est dans $\widehat{H}_\nu$.
Pour tout k de K_ν, $W_\nu(k)$ entrelace π'_ν avec la représentation $(\pi'_\nu)^k = (\pi^k_\nu)'$ de H_ν sur $\mathcal{H}_\nu$. Et comme K_ν agit trivialement sur le centre $\mathfrak{z}'_\nu$ de $\mathfrak{h}_\nu$, alors K_ν préserve toutes les orbites coadjointes de $\mathfrak{h}^*_\nu$ qui prennent des valeurs non nulles sur $\mathfrak{z}'_\nu$. Les représentations de H_ν correspondant à ces orbites différent de π'_ν par conjugaison et par les automorphismes de dilatation de H_ν. Elles peuvent être réalisées sur l'espace de Hilbert usuel $\mathcal{H}_\nu$. Les représentations d'entrelacement de K_ν sur $\mathcal{H}_\nu$ correspondantes coincident avec les W_ν pour toutes ces représentations. Les autres éléments de $\widehat{H}_\nu$ sont de dimension 1 et correspondent à des orbites contenant un seul point. Le résultat se déduit par application de la proposition I.3.6. ∎

Théorème I.3.8 (Lemme de la localisation)[5]
Si (K, N) est une paire Gelfand, alors (K_ν, H_ν) est une paire de Gelfand pour tout ν de $\mathfrak{n}^*$. *Réciproquement, si (K_ν, H_ν) est une paire de Gelfand pour presque tout π_ν de $\widehat{N}$, alors (K, N) est une paire de Gelfand.*

Preuve
La partie directe de ce théorème est établie par les deux résultas précédents.
Réciproquement, on suppose que (K_ν, H_ν) est une paire de Gelfand. D'après le résultat précédent, W_ν est sans multiplicité.
Soient f et g deux éléments de $L^1_K(N)$.
Puisque $\pi_\nu(f)$ et $\pi_\nu(g)$ sont des opérateurs $W_\nu(K_\nu)$-invariants sur $\mathcal{H}_\nu$, ils sont simultanement diagonalisés lorsqu'on décompose $\mathcal{H}_\nu$ en sous-espaces $W_\nu(K_\nu)$-irréductibles.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\pi_\nu(f \circledast g) &= \pi_\nu(f)\pi_\nu(g)\\ &= \pi_\nu(g)\pi_\nu(f)\\ &= \pi_\nu(g \circledast f).\end{aligned}$$

Si (K_ν, H_ν) est une paire de Gelfand pour presque tout π_ν de $\widehat{N}$ alors une application du théorème de Plancherel montre que :

$$f \circledast g = g \circledast f$$

et donc (K, N) est une paire de Gelfand. ■

Dans cet ordre d'idée, on se ramène naturellement à l'étude des paires de Gelfand (K, H_n) où H_n est le groupe de Heisenberg de dimension $2n + 1$ et K un sous-groupe compact de l'ensemble $\mathrm{Aut}(H_n)$ des automorphismes de H_n.

Chapitre II

PAIRES DE GELFAND ASSOCIEES AUX GROUPES DE HEISENBERG.

II.1 Le groupe de Heisenberg.

On considère le groupe de Heisenberg H_n de dimension $2n+1$.
On note par $\mathfrak{h}_n$ son l'algèbre de Lie .
Soit K un sous-groupe compact de l'ensemble $\mathrm{Aut}(H_n)$ des automorphismes de H_n.
Puisque l'application exponentielle $\exp_{H_n}$ de $\mathfrak{h}_n$ sur H_n est bijective, $\mathrm{Aut}(H_n)$ est égal à l'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_n)$ des automorphismes de $\mathfrak{h}_n$ [15].
Le centre $Z(\mathfrak{h}_n)$ de $\mathfrak{h}_n$ est un espace K-invariant de dimension 1. Il existe donc un caractère χ du groupe compact K tel que :

$$^{k}X = \chi(k)X, \quad k \in K, X \in Z(\mathfrak{h}_n).$$

Plus précisement, $Z(\mathfrak{h}_n) = \mathbb{R}Z$, alors $\chi(K)$ est un sous-groupe compact de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et donc

$$\chi(K) = \{1\} \qquad \text{ou} \qquad \chi(K) = \{\pm 1\}$$

On suppose d'abord que l'action de K sur $Z(\mathfrak{h}_n)$ est triviale.
On désigne par V le supplémentaire orthogonal de $Z(\mathfrak{h}_n)$ dans $\mathfrak{h}_n$ relativement à un produit scalaire K-invariant. V est donc K-invariant.
On peut alors définir sur V une forme symplectique ω par :

$$[X,Y] = \omega(X,Y)Z, \quad X,Y \in V,$$

où $[.,.]$ est le crochet de Lie sur $\mathfrak{h}_n$.
De plus, l'action de K sur $Z(\mathfrak{h}_n)$ étant triviale, on a :

$$\omega(^{k}X, {}^{k}Y) = \omega(X,Y), \quad \forall k \in K, \; X,Y \in V.$$

On peut donc identifier K à un sous-groupe compact du groupe symplectique $Sp(\omega)$ de ω.

D'autre part,

$$\begin{aligned}[V,V] &= [\mathfrak{h}_n, \mathfrak{h}_n] \\ &= Z(\mathfrak{h}_n),\end{aligned}$$

et la forme ω est non dégénérée.
On fixe maintenant une base

$$\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$$

de V telle que :

$$\omega(X_s, Y_t) = \delta_{s,t} \text{ et } \omega(X_s, X_t) = \omega(Y_s, Y_t) = 0,$$

pour tout s, t dans $\{1, \ldots, n\}$.
On définit une structure complexe I_0 sur V en posant :

$$I_0 X_s = Y_s \text{ et } I_0 Y_s = -X_s, \quad \forall s = 1, n.$$

On construit enfin sur l'espace vectoriel complexe (V, I_0), le produit scalaire hermitien ω_0 suivant :

$$\omega_0(X, Y) = \omega(X, I_0 Y) - i\omega(X, Y), \quad X, Y \in V.$$

Le groupe unitaire $U(\omega_0)$ de ω_0 est un sous-groupe compact maximal de $Sp(\omega)$. Il existe donc un certain κ dans $Sp(\omega)$ tel que

$$K \subset \kappa U(\omega)\kappa^{-1}.$$

Si on pose $I = \kappa I_0 \kappa^{-1}$ et

$$< X, Y >_V = \omega(X, IY) - i\ \omega(X, Y), \quad \forall X, Y \in V,$$

et comme l'élément $\kappa^{-1} k \kappa$ de $U(\omega_0)$ commute avec I_0, on a :

$$\begin{aligned} I({}^k X) &= {}^{\kappa I_0 (\kappa^{-1} k \kappa)}({}^{\kappa^{-1}} X) \\ &= {}^{\kappa(\kappa^{-1} k \kappa)}(I_0(\kappa^{-1} X)) \\ &= {}^k(IX), \end{aligned}$$

pour tout k de K et X, Y de V. Et donc :

$$\begin{aligned} < {}^k X, {}^k Y >_V &= \omega({}^k X, I({}^k Y)) - i\ \omega({}^k X, {}^k Y) \\ &= \omega({}^k X, {}^k(IX)) - i\ \omega({}^k X, {}^k Y) \\ &= \omega(X, IY) - i\ \omega(X, Y) \\ &= < X, Y >_V, \end{aligned}$$

pour tout k de K et X, Y de V.

Par conséquent, K est un sous-groupe du groupe unitaire
des automorphismes de V qui préservent $< .,. >_V$.
Par suite, on identifie V à $\mathbb{C}^n$ l'espace complexe de dimension n muni du produit scalaire

$$< z, z' >_V = \mathfrak{Re}(z\bar{z}') + i\ \mathfrak{Im}(z\bar{z}').$$

On identifie H_n le groupe de Heisenberg de dimension $2n + 1$ à $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ muni du produit :

$$(z,t)(z',t') = \big(z + z', t + t' + \frac{1}{2}\omega(z, z')\big),$$

pour tout $(z,t), (z',t')$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ et où

$$\omega(z, z') = \mathfrak{Im}(z\bar{z}').$$

Le groupe unitaire $U(V)$ des automorphismes de V qui préservent $< .,. >_V$ agit sur H_n par :

$$k(z,t) = (kz, t), \quad k \in U(V), \ (z,t) \in V,$$

où kz est l'action naturelle de K sur V.
Si $\chi(K) = \{\pm 1\}$, on introduit l'involution f définie par :

$$\begin{aligned} f : \ H_n &\longrightarrow H_n \\ (z,t) &\longmapsto (\bar{z}, -t) \end{aligned}$$

On pose :

$$M = \mathbb{Z}_2 \rhd U(V)$$

avec $\mathbb{Z}_2$ agissant sur H_n par f et sur $U(V)$ par $k \longmapsto \bar{k}$.
M est alors le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(H_n)$ engendré par $U(V)$ et f.
K peut se décomposer en

$$K_1 = \chi^{-1}(\{1\})$$

et

$$K_2 = \chi^{-1}(\{-1\}).$$

K_1 est un sous-groupe et $\chi(K_1) = 1$, il existe donc un produit scalaire sur V noté $< .,. >_V$ tel que :

$$K_1 \subset U(V).$$

Si k est dans K_2 alors l'opérateur $\bar{k}$ défini par :

$$\bar{k}z = \overline{k\bar{z}} \qquad \text{et} \qquad \bar{k}(0,t) = (0,t)$$

est dans $U(V)$ et on a :

$$\bar{k} = fk.$$

Donc K_2 est contenu dans M et par conséquent K est aussi contenu dans M. On a ainsi montré que M est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Aut}(H_n)$.
Alors pour toute représentation de dimension infinie $(\pi, \mathcal{H})$ dans le dual unitaire $\widehat{H}_n$ de H_n, le stabilisateur K_π de $(\pi, \mathcal{H})$ est de la forme :

$$K_\pi = K \cap U(V).$$

En appliquant la proposition I.3.3, puisque l'ensemble $\mathcal{C}$ des représentations de dimension infinie est dense dans $\widehat{H}_n$ alors (K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si $(K \cap U(V), H_n)$ est une paire de Gelfand. On peut donc supposer que K est un sous-groupe compact de $U(V)$.
On désigne par $\mathcal{P}(V)$ l'ensemble des polynômes holomorphes de V.

Définition II.1.1
On dit que l'action de K sur V est sans multiplicité si la représentation $(\varrho, \mathcal{P}(V))$ de K définie par :

$$(k.\varrho)(z) = \varrho(k^{-1}z),$$

pour tout k de K, et z de V est sans multipicité.

Proposition II.1.2 [6]
(K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si K agit sans multiplicité sur V.

La preuve de ce résultat sera doné dans le paragraphe III.1.
Soit K_0 la composante connexe de K.

Lemme II.1.3
Si (K_0, H_n) n'est pas une paire de Gelfand alors $\mathcal{P}(V)$ contient des modules K_0-irréductibles avec des multiplicités arbitrairement grandes.

Preuve
On note par

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_\alpha P_\alpha$$

la décomposition de $\mathcal{P}(V)$ en modules K_0-irréductibles et on suppose que les P_α sont des sous-espaces de l'espace des polynômes homogènes de degré d_α. Chacun de ces modules a un vecteur plus haut poids p_α, de poids χ_α.
Si (K_0, H_n) n'est pas de Gelfand, il existe donc deux indices différents α et β tels que :

$$\chi_\alpha = \chi_\beta = \chi.$$

Mais alors les polynômes $p_\alpha^k p_\beta^{N-k}$ sont, pour chaque k de 0 à N, des vecteurs de plus haut poids χ^N pour l'action de K_0.

Il est facile de voir que ces polynômes forment un système
libre, ce qui prouve le lemme. ■

Lemme II.1.4 [6]
(K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si (K_0, H_n) est une paire de Gelfand.

Preuve
Puisque
$$L^1_K(H_n) \subset L^1_{K_0}(H_n),$$
si (K_0, H_n) est de Gelfand, alors (K, H_n) est aussi de Gelfand.
Réciproquement si (K, H_n) est de Gelfand et si K a l composantes connexes engendrées par $k_1, ..., k_l$, on décompose $\mathcal{P}(V)$ en modules K-irréductibles
$$\mathcal{P}(V) = \underset{\alpha}{\oplus} P_\alpha.$$
Si, en tant que K_0-modules, n des P_α sont équivalents :
$$P_{\alpha_1} \underset{K_0}{\simeq} P_{\alpha_2} \underset{K_0}{\simeq} \cdots \underset{K_0}{\simeq} P_{\alpha_n} \underset{K_0}{\simeq} P,$$
alors par le théorème de Frobenius appliqué à la représentation $\sigma = \mathrm{ind}_{K_0}^K P$, de dimension $l \dim P$, on voit que $n \leq l$.
Soit alors W un module K_0-irréductible apparaissant dans P_α, P_α est engendré par les k_jW et il existe une partie J de $\{1, ...l\}$ telle que le K_0-module P_α soit isomorphe à $\underset{J}{\oplus} k_jW$, il y a donc au plus 2^l K_0-modules inéquivalents donc au plus $l2^l$ P_α distincts dans lesquels W apparaît. Par le lemme II.1.3, (K_0, H_n) est de Gelfand. ■

On peut donc se restreindre à n'étudier que les paires de Gelfand (K, H_n) où K est un sous-groupe compact et connexe de $U(V)$.
De plus, $U(V)$ est isomorphe au groupe $U(n)$ des matrices unitaires $n \times n$.
Dorénavant, K désignera un sous-groupe compact et connexe de $U(n)$.
On rappelle quelques résultats fondamentaux, lorsqu'on se restreint à ce cadre.
Il est clair que s'il y a un polynôme p K-invariant non constant, dans $\mathcal{P}(V)$ alors pour chaque sous-module K-irréductible W de $\mathcal{P}(V)$, la composante isotypique de W contient tous les p^kN et donc la multiplicité de W dans $\mathcal{P}(V)$ est infinie.
Réciproquement, on peut montrer que si une représentation unitaire et irréductible σ de K apparait avec une multiplicité infinie, alors il y a un polynôme p K-invariant non constant dans $\mathcal{P}(V)$. On a donc :

Théorème II.1.5 [6]

Une représentation ρ dans $\widehat{K}$ apparaît dans $\mathcal{P}(V)$ avec une multiplicité infinie si et seulement si toutes les représentations unitaires et irréductibles de K apparaissent dans $\mathcal{P}(V)$ avec des multiplicités infinies.

On suppose que l'action de K sur V est irréductible, si $K_{\mathbb{C}}$ la complexification de K.
$K_{\mathbb{C}}$ est alors un sous-groupe connexe réductif et algébrique de $GL(n, \mathbb{C})$, le groupe des matrices complexes inversibles $n \times n$. Il agit irréductiblement sur V.
De plus, la représentation de K sur V est sans multiplicité si et seulement si la représentation complexifiée de $K_{\mathbb{C}}$ sur V est sans multiplicité.
Vu que les représentations linéaires sans multiplicité des groupes algébriques, connexes et réductifs ont été classés par V. Kac, on a :

Théorème II.1.6 [6],[23]

Soit K un sous-groupe compact et connexe de $U(n)$ agissant irréductiblement sur V. Les assertions suivantes sont équivalentes.
i) (K, H_n) est une paire de Gelfand.
ii) La représentation de $K_{\mathbb{C}}$ sur V est sans multiplicité.
iii) La représentation de $K_{\mathbb{C}}$ sur V est équivalente à l'une des représentations dans le tableau suivant :

Représentations sans multiplicité

Groupe	*agissant sur*	*valeur(s) de n*
$Sl(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n \geq 2$
$Gl(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n \geq 1$
$Sp(k, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n = 2k$
$\mathbb{C}^* \times Sp(k, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n = 2k$
$\mathbb{C}^* \times SO(n, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n \geq 2$
$Gl(k, \mathbb{C})$	$S^2(\mathbb{C}^k) \simeq \mathbb{C}^n$	$n = k(k+1)/2, \quad k \geq 2$
$Sl(k, \mathbb{C})$	$\Lambda^2(\mathbb{C}^k) \simeq \mathbb{C}^n$	$n = \binom{k}{2}$ et k est pair
$Gl(k, \mathbb{C})$	$\Lambda^2(\mathbb{C}^k) \simeq \mathbb{C}^n$	$n = \binom{k}{2}$
$Sl(k, \mathbb{C}) \times Sl(l, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l \simeq \mathbb{C}^n$	$n = kl, \quad k \neq l$
$Gl(k, \mathbb{C}) \times Sl(l, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l \simeq \mathbb{C}^n$	$n = kl$
$Gl(2, \mathbb{C}) \times Sp(k, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2k} \simeq \mathbb{C}^n$	$n = 4k$

$Sl(3,\mathbb{C}) \times Sp(k,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2k} \simeq \mathbb{C}^n$	$n = 6k$
$Gl(3,\mathbb{C}) \times Sp(k,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2k} \simeq \mathbb{C}^n$	$n = 6k$
$Gl(4,\mathbb{C}) \times Sp(4,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^{8} \simeq \mathbb{C}^n$	$n = 32$
$Sl(k,\mathbb{C}) \times Sp(4,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^{8} \simeq \mathbb{C}^n$	$n = 8k, \quad k > 4$
$Gl(k,\mathbb{C}) \times Sp(4,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^{8} \simeq \mathbb{C}^n$	$n = 8k, \quad k > 4$
$\mathbb{C}^* \times Spin(7,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n = 8$
$\mathbb{C}^* \times Spin(9,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n = 16$
$Spin(10,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n = 16$
$\mathbb{C}^* \times Spin(10,\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$	$n = 16$
$\mathbb{C}^* \times G_2$	$\mathbb{C}^n$	$n = 7$
$\mathbb{C}^* \times E_6$	$\mathbb{C}^n$	$n = 27$

Le cas où K n'agit pas trivialement sur V a aussi été étudié par Benson et Ratcliff. Ils ont donné une première classification de ces paires de Gelfand, lorsque l'action de K sur V est une somme de deux représentations irréductibles dans [9].

II.2 Critère géométrique sur les paires de Gelfand.

On s'intéresse maintenant à un critère géométrique qui met en présence les orbites coadjointes. Pour cela on fait appel à la quantification géométrique encore appelée méthode des orbites qui établit une correspondance entre les représentations unitaires irréductibles et les orbites coadjointes entières de l'algèbre de Lie.
Cette méthode décrit dans un premier temps les duaux unitaires des groupes compacts, des groupes nilpotents (pour lesquels, elle est réduite à la correspondance usuelle de Kirillov) et des produits semi-directs des groupes nilpotent par des groupes compacts.
On dispose ensuite de la formule géométrique de la multiplicité qui exprime la multiplicité des groupes de représentations en termes d'orbites.
Autrement dit si :
H est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$,
L est un sous-groupe compact de H d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$,
$\mathfrak{h}^*$ et $\mathfrak{l}^*$ les duaux respectifs de H et de L,
si $r_{\mathfrak{l}} : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{l}^*$ est la restriction canonique,
On suppose qu'à chaque orbite entière $\mathcal{O}_0$ de $\mathfrak{l}^*$ correspond une et une seule représentation unitaire et irréductible $(\pi_0, \mathcal{H}_0)$ de L.
De même, on suppose qu'à chaque orbite entière $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{h}^*$ correspond une et une seule représentation unitaire et irréductible $(\pi, \mathcal{H})$ de H,
on conjecture que la multiplicité de π_0 dans $\pi_{|L}$ est le nombre

$$\#\big(\mathcal{O} \cap r_{\mathfrak{l}}^{-1}(\mathcal{O}_0)\big)_{|L},$$

de L-orbites dans $\mathcal{O}$ qui sont réduites à $\mathcal{O}_0$.
De telles formules apparaissent dans la décomposition entière des groupes nilpotents, des groupes résolubles ou des groupes exponentiels résolubles [2], [3], [12] et[17].
On sait qu'elles sont asymptotiquement vraies pour les groupes compacts [20].
Plus précisement, dans notre cas, on forme le produit semi direct

$$G = K \rhd H_n,$$

muni de la multiplication

$$\begin{aligned} \big(k,(z,t)\big)\big(k',(z',t')\big) &= \big(kk',(z,t)\ k(z',t')\big) \\ &= \big(kk',(z+kz',t+t'-\frac{1}{2}\omega(z,kz'))\big), \end{aligned}$$

pour tout $\big(k,(z,t)\big), \big(k',(z',t')\big)$ de G.

Son algèbre de Lie est :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \triangleright \mathfrak{h}_n,$$

où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie associée à K.
On désigne par $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}^*$ et $\mathfrak{h}_n^*$, les duaux respectifs de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}_n$.
On note par $r_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ la restriction canonique.
Pour tout μ de $\mathfrak{g}^*$, on considère $(\pi_\mu, \mathcal{H}_\mu)$ la représentation unitaire et irréductible de G associée à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\mu^G$ de G passant par μ.
L'orbite coadjointe de K associée à la représentation triviale 1_K de K est $\{0\}$ et

$$r_{\mathfrak{k}}^{-1}(\{0\}) = \mathfrak{k}^\perp.$$

La multiplicité de 1_K dans $\pi_{\mu|K}$ devrait être le nombre de K-orbites dans l'intersection

$$\mathcal{O}_\mu^G \cap \mathfrak{k}^\perp.$$

Ce qui suggère le résultat :

<u>Théorème II.2.1</u> [6]
(K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si pour tout μ de $\mathfrak{k}^\perp$, $\mathcal{O}_\mu^G \cap \mathfrak{k}^\perp$ contient au plus une seule K-orbite.

Dans ce travail, on ne donne pas la démonstration explicite de ce théorème qui est longue, délicate et utilise des notions fines de géométrie algébrique. On se propose de relier directement le calcul de la multiplicité des représentations de K avec celui des K-orbites dans $\mathcal{O}_\mu^G \cap \mathfrak{k}^\perp$. (voir partie IV)
Par suite, on s'attache à décrire les orbites coadjointes de G.
Pour ce faire, on identifie l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ au groupe de Lie H_n grâce à l'application exponentielle

$$\exp_{H_n} : \mathfrak{h}_n \longrightarrow H_n.$$

Le crochet de Lie sur $\mathfrak{h}_n$ est donné par :

$$[(z,t),(z't')] = \big(0, -\omega(z,z')\big),$$

pour tout $(z,t),(z't')$ de $V \times \mathbb{R}$.
On identifie l'espace V à son dual V^* en posant :

$$z^*(z') = \omega(z,z'),$$

pour tout z, z' de V. Dans ce cas, le dual $\mathfrak{h}_n^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ s'écrit :

$$\mathfrak{h}_n^* = \big\{\nu_{(z_0,\lambda)},\ \ \nu_{(z_0,\lambda)}(z,t) = z_0^*(z) + \lambda t,\ \ \forall z, z_0 \in V,\ \lambda, t \in \mathbb{R}\big\}.$$

L'action dérivée de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{h}_n$ s'écrit :

$$A(z,t) = (Az, 0), \quad \forall A \in \mathfrak{k}, \ (z,t) \in \mathfrak{h}_n,$$

tandis que l'action contragédiente de K sur $\mathfrak{h}_n^*$ est $k.\nu_{(z_0,\lambda)}$ avec

$$< k.\nu_{(z_0,\lambda)}, (z,t) > = < \nu_{(z_0,\lambda)}, k^{-1}(z,t) >,$$

pour tout k dans K, z, z_0 dans V et λ, t dans $\mathbb{R}$.
L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \rhd \mathfrak{h}_n$ étant isomorphe à $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}_n$, les éléments de $\mathfrak{g}$ seront notés

$$X = \big(A, (z,t)\big), \quad A \in \mathfrak{k}, \ z \in V, \ t \in \mathbb{R}.$$

Et puisque le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^* &= (\mathfrak{k} \rhd \mathfrak{h}_n)^* = \mathfrak{h}_n^{\perp} \oplus \mathfrak{k}^{\perp} \\ &\simeq \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{h}_n^* \simeq \mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{h}_n, \end{aligned}$$

les éléments de $\mathfrak{g}^*$ s'écriront $\mu_{(\alpha,z_0,\lambda)}$ avec

$$\mu_{(\alpha,z_0,\lambda)}\big(A,(z,t)\big) = \alpha(A) + z_0^*(z) + \lambda t,$$

pour tout α dans $\mathfrak{k}^*$, A dans $\mathfrak{k}$, z, z_0 dans V et λ, t dans $\mathbb{R}$.
On construit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \times : V \times V &\longrightarrow \mathfrak{k}^* \\ (z,z') &\longmapsto z \times z' \end{aligned}$$

avec

$$z \times z'(A) = \omega(z', Az), \quad A \in \mathfrak{k}.$$

Lemme II.2.2
L'action coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$ est donnée par :

$$Ad_G^*\big(k,(z,t)\big)\mu_{(\alpha,z_0,\lambda)} = \mu_{(Ad_K^*(k)\alpha + z\times kz_0 + \frac{\lambda}{2} z\times z, kz_0+\lambda z, \lambda)}$$

pour tout $\big(k,(z,t)\big)$ dans G, (α, z_0, λ) dans $\mathfrak{k}^* \times V \times \mathbb{R}$ et où Ad_K^* désigne l'action coadjointe de K sur k^*.

Preuve
On compare l'application ϕ de $\mathfrak{g}$ dans G définie par :

$$\big(A,(z,t)\big) \longmapsto \exp_K(A).\exp_{H_n}(z,t)$$

à l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G.

$$\big(A,(z,t)\big) \longmapsto \exp_G\big(A,(z,t)\big)$$

où $\exp_K$ est l'application exponentielle de $\mathfrak{k}$ dans K.

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff donne pour s assez petit :

$$\begin{aligned}\exp_K(sA).\exp_{H_n}\big(s(z,t)\big) &= \exp_G\big(sA,(0,0)\big).\exp_G\big(0,s(z,t)\big)\\ &= \exp_G\big(sA, s(z,t)+O(s^2)\big)\end{aligned}$$

où $O(s^2)$ est un vecteur de H_n somme d'une série de termes en s^n, $n>2$.
On calcule d'abord l'action adjointe de G. Elle est donnée par :

$$\mathrm{Ad}_G\big(k,(z,t)\big)\big(A,(z_1,t_1)\big) = \frac{d}{ds}_{\big|s=0}\Big[\big(k,(z,t)\big)\ \exp_G\big(sA,s(z_1,t_1)\big)\ \big(k,(z,t)\big)^{-1}\Big].$$

Puisqu'on évalue au point $s=0$, on peut oublier le terme $O(s^2)$ dans le calcul de l'action coadjointe. On a modulo s^2:

$$\begin{aligned}&\big(k,(z,t)\big)\ \big(\exp_K(sA),s(z_1,t_1)\big)\ \big(k,(z,t)\big)^{-1}\\ &= \big(k\exp_K(sA),(z+skz_1,t+st_1-\tfrac{s}{2}\omega(z,kz_1))\big)\ \big(k^{-1},(-k^{-1}z,-t)\big)\\ &= \big(k\exp_K(sA)k^{-1},(z+skz_1-k\exp_K(sA)k^{-1}z, st_1-\tfrac{s}{2}\omega(z,kz_1)+\tfrac{1}{2}\omega(z,k\exp_K(sA)k^{-1}z)\\ &\qquad +\tfrac{s}{2}\omega(kz_1,k\exp_K(sA)k^{-1}z)\big)\end{aligned}$$

Et on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}_G\big(k,(z,t)\big)\big(A,(z_1,t_1)\big)\\ &\qquad = \Big(\mathrm{Ad}_K(k)A,\big(kz_1-(\mathrm{Ad}_K(k)A)z,t_1-\omega(z,kz_1)+\frac{1}{2}\omega(z,\mathrm{Ad}_K(k)Az)\big)\Big).\end{aligned}$$

Et en particulier

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}_G\Big(\big(k,(z,t)\big)^{-1}\Big)\big(A,(z_1,t_1)\big) = \mathrm{Ad}_G\big(k^{-1},(-k^{-1}z,-t)\big)\big(A,(z_1,t_1)\big)\\ &= \Big(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A,\big(k^{-1}z_1+\mathrm{Ad}_K(k^{-1})Ak^{-1}z,t_1+\omega(k^{-1}z,k^{-1}z_1)\\ &\qquad +\frac{1}{2}\omega(k^{-1}z,\mathrm{Ad}_K(k^{-1})Ak^{-1}z)\big)\Big).\end{aligned}$$

L'action coadjointe de G s'écrit :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}^*_G\big(k,(z,t)\big)\mu_{(\alpha,z_0,\lambda)}\big(A,(z_1,t_1)\big)\\ &\qquad = \mu_{(\alpha,z_0,\lambda)}\Big(\mathrm{Ad}_G\big((k,(z,t))^{-1}\big)\Big)\big(A,(z_1,t_1)\big)\\ &\qquad = \alpha(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A)+z_0^*(k^{-1}z_1)+z_0^*(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A\ kz_1)\\ &\qquad\quad +\lambda t_1+\lambda\omega(k^{-1}z,k^{-1}z_1)\\ &\qquad\quad +\frac{\lambda}{2}\omega(k^{-1}z,\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A\ k^{-1}z).\end{aligned}$$

Or

- $\alpha(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A) = \mathrm{Ad}_K^*(k)\alpha(A)$.
- $$\begin{aligned} z_0^*(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A\ k^{-1}z) &= \omega(z_0, \mathrm{Ad}_K(k^{-1})A\ k^{-1}z) \\ &= (k^{-1}z \times z_0)(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A) \\ &= \mathrm{Ad}_K^*(k)(k^{-1}z \times z_0)(A) \\ &= (z \times kz_0)(A). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}\omega(k^{-1}z, \mathrm{Ad}_K(k^{-1})A\ k^{-1}z) &= \frac{\lambda}{2}(k^{-1}z \times k^{-1}z)(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A) \\ &= \frac{\lambda}{2}(k^{-1}z \times z_0)(\mathrm{Ad}_K(k^{-1})A) \\ &= \frac{\lambda}{2}\mathrm{Ad}_K^*(k)(k^{-1}z \times k^{-1}z)(A) \\ &= \frac{\lambda}{2}(z \times z)(A). \end{aligned}$$
- $z_0^*(k^{-1}z_1) = (kz_0)^*(z_1)$.
- $$\begin{aligned} \lambda\omega(k^{-1}z, k^{-1}z_1) &= \lambda(k^{-1}z)^*(k^{-1}z_1) \\ &= \lambda z^*(z_1). \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\mathrm{Ad}_G^*\big(k,(z,t)\big)\mu_{(\alpha,z_0,\lambda)}\big(A,(z_1,t_1)\big) = \mu_{(Ad_K^*(k)\alpha+z\times kz_0+\frac{\lambda}{2}z\times z, kz_0+\lambda z,\lambda)}\big(A,(z_1,t_1)\big) \quad \blacksquare$$

L'orbite coadjointe de G passant par $\mu_{(\alpha,z_0,\lambda)}$ est donc :

$$\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,\lambda)} = \big\{\mu_{(Ad_K^*(k)\alpha+z\times kz_0+\frac{\lambda}{2}z\times z, kz_0+\lambda z,\lambda)},\ k \in K, z \in V\big\}.$$

En particulier si $\nu = \nu_{(0,\lambda)}$, on a $K_\nu = K$ (voir lemme IV.1.1) et donc les orbites telles que $\lambda \neq 0$ sont toutes de la forme $\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)}$.

On désigne par $\mathcal{O}^K_\alpha$ (respectivement $\mathcal{O}^{H_n}_{(z_0,\lambda)}$) l'orbite coadjointe de K (respectivement de H_n) passant par α de $\mathfrak{k}^*$ (respectivement $\nu_{(z_0,\lambda)}$ de $\mathfrak{h}_n^*$). On a :

Lemme II.2.3

Si $\lambda \neq 0$, l'application $\mathfrak{A} : \mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)} \longrightarrow \mathcal{O}^K_\alpha \times \mathcal{O}^{H_n}_{(0,\lambda)}$ définie par

$$Ad_G^*\big(k,(z,t)\big)\mu_{(\alpha,0,\lambda)} \overset{\mathfrak{A}}{\longmapsto} \big(Ad_K^*(k)\alpha, Ad_{H_n}^*(z,t)\nu_{(0,\lambda)}\big)$$

est un isomorphisme.

Preuve

$\mathfrak{A}$ est surjective par construction. Il suffit donc de vérifier l'injection.
Si les images par $\mathfrak{A}$ de deux points $\mu_{(Ad_K^*(k)\alpha+\frac{\lambda}{2}z\times z,\lambda z,\lambda)}$ et $\mu_{(Ad_K^*(k')\alpha+\frac{\lambda}{2}z'\times z',\lambda z',\lambda)}$ de $\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)}$ sont égales, on a :

$$\mathrm{Ad}_K^*(k)\alpha = \mathrm{Ad}_K^*(k')\alpha \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ad}_{H_n}^*(z,t)\nu_{(0,\lambda)} = \mathrm{Ad}_{H_n}^*(z',t')\nu_{(0,\lambda)}.$$

Or $\mathrm{Ad}_{H_n}^*(z,t)\nu_{(0,\lambda)} = \mathrm{Ad}_{H_n}^*(z',t')\nu_{(0,\lambda)}$ implique que :

$$\nu_{(0,\lambda)}\big(\mathrm{Ad}_{H_n}(-z,-t)(z_1,t_1)\big) = \nu_{(0,\lambda)}\big(\mathrm{Ad}_{H_n}(-z',-t')(z_1,t_1)\big),$$

pour tout (z_1,t_1) de H_n. Et comme

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_{H_n}(-z,-t)(z_1,t_1) &= \frac{d}{dt}|_{s=0}(-z,-t)\exp_{H_n}(sz_1,st_1)(z,t)\\ &= \frac{d}{dt}|_{s=0}(sz_1,st_1+\omega(z,sz_1))\\ &= (z_1,t_1+\omega(z,z_1)),\end{aligned}$$

pour tout (z_1,t_1) de H_n. On obtient que :

$$\nu_{(0,\lambda)}(z_1,t_1+\omega(z,z_1)) = \nu_{(0,\lambda)}(z_1,t_1+\omega(z',z_1))$$

pour tout (z_1,t_1) de H_n. Ce qui entraîne que $\omega(z,z_1)=\omega(z',z_1)$ pour tout z_1 de V et par conséquent $z=z'$. On en conclut que :

$$\mu_{(Ad_K^*(k)\alpha+\frac{\lambda}{2}z\times z,\lambda z,\lambda)} = \mu_{(Ad_K^*(k')\alpha+\frac{\lambda}{2}z'\times z',\lambda z',\lambda)}. \qquad \blacksquare$$

Remarque II.2.4

L'application $\mathfrak{A}$ n'est pas un symplectomorphisme.
En effet pour tout $\mu=\mu_{(k.\alpha+\frac{\lambda}{2}z\times z,\lambda z,\lambda)}$ de $\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)}$ et X de $\mathfrak{k}^*$, on définit le champ $X^*_{G|\mu}$ tangeant à l'orbite par :

$$\begin{aligned}(X_G^*f)_{|\mu} &= \frac{d}{dt}_{|t=0} f\big(\mathrm{Ad}_G^*(\exp tX_G^*)\mu\big)\\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0} f\big(\mu_{(Ad_K^*(\exp tX)(k.\alpha+\frac{\lambda}{2}z\times z),\exp tXz,\lambda)}\big).\end{aligned}$$

Et donc

$$\mathfrak{A}_*(X_G^*)\varphi_{|(\alpha,z,\lambda)} = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi\circ\mathfrak{A})\big(\mathrm{Ad}_G^*(\exp tX)\mu\big)$$

pour toute forme linéaire $\varphi : \mathcal{O}^K_\alpha \times \mathcal{O}^{H_n}_{(0,\lambda)} \to \mathbb{R}$.

Or

$$\mathrm{Ad}_G^*(\exp tX)\mu_{(k.\alpha+\frac{\lambda}{2}z\times z,\lambda z,\lambda)} = \mu_{(Ad_K^*(\exp tX)k.\alpha+\frac{\lambda}{2}(\exp tXz)\times(\exp tXz),\lambda\exp tXz,\lambda)}$$

et donc

$$\mathfrak{A}\big(\mathrm{Ad}_G^*(\exp tX)\mu_{(k.\alpha+\frac{\lambda}{2}z\times z,\lambda z,\lambda)}\big) = \big(\mathrm{Ad}_K^*(\exp tX)k.\alpha, \mathrm{Ad}_{H_n}^*(\exp tX,0)\nu_{(0,\lambda)}\big)$$

par suite

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi\circ\mathfrak{A})\big(\mathrm{Ad}_G^*(\exp tX)\mu\big) = X_K^*\varphi_{|(\alpha,Ad_{H_n}^*(z,0)\nu_{(0,\lambda)})} + X_{\mathbb{C}^n}^*\varphi_{|(\alpha,Ad_{H_n}^*(z,0)\nu_{(0,\lambda)})}$$

où $X_{\mathbb{C}^n}^*$ est le générateur du groupe

$$\begin{aligned} z &\longmapsto \exp tXz \\ \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{A}$ est un symplectomorphisme, on devrait avoir :

$$\omega_G(X_G^*, Y_G^*)_{|\mu} = \mathfrak{A}^*\Big((\omega_K\times\omega_{H_n})\ \big(\mathfrak{A}_*(X_G^*), \mathfrak{A}_*(X_G^*)\big)\Big)$$

pour tout X, Y de $\mathfrak{k}$. Or $\mathfrak{A}_*(X_G^*) = X_K^* + X_{\mathbb{C}^n}^*$ et donc :

$$\begin{aligned}(\omega_K\times\omega_{H_n})\ \big(\mathfrak{A}_*(X_G^*), \mathfrak{A}_*(X_G^*)\big) &= \omega_K(X_K^*, Y_K^*) + \omega_{H_n}(X_{\mathbb{C}^n}^*, Y_{\mathbb{C}^n}^*)\\ &= < k.\alpha, [X,Y] > + < \lambda z, [X,Y]_{\mathbb{C}^n}^* >\\ &= < k.\alpha, [X,Y] > +\lambda < z, [X,Y].z >\\ &= < k.\alpha + \lambda z\times z, [X,Y] >\end{aligned}$$

et enfin

$$\mathfrak{A}^*\Big((\omega_K\times\omega_{H_n})\ \big(\mathfrak{A}_*(X_G^*), \mathfrak{A}_*(X_G^*)\big)\Big) = < k.\alpha + \lambda z\times z, [X,Y] > .$$

Alors que

$$\begin{aligned}\omega_G(X_G^*, Y_G^*)_{|\mu} &= < (k.\alpha + \frac{\lambda}{2}z\times z, \lambda z, \lambda), [X,Y] >\\ &= < k.\alpha + \frac{\lambda}{2}z\times z, [X,Y] >\end{aligned}$$

Définition II.2.5

On appelle orbite générique toute orbite coadjointe de G de la forme :

$$\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)}, \quad (\alpha,\lambda) \in \mathfrak{k}^* \times \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

L'ensemble des orbites génériques de G est noté par :

$$Gen = \left\{\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)}, \quad (\alpha,\lambda) \in \mathfrak{k}^* \times \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\} \simeq \mathfrak{k}^*/K \times \left(\mathbb{R}\backslash\{0\}\right).$$

On appelle orbite singulière toute orbite coadjointe de G de la forme :

$$\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,0)}, \quad (\alpha,z_0) \in \mathfrak{k}^* \times V.$$

L'ensemble des orbites singulières de G est noté par :

$$Sing = \left\{\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,0)}, \quad (\alpha,z_0) \in \mathfrak{k}^* \times V\right\}.$$

Le résultat suivant est immédiat :

Lemme II.2.6

L'ensemble des orbites coadjointes de G est l'union disjointe de Sing et de Gen.
De plus, la reunion des orbites génériques est dense dans $\mathfrak{g}^*$

On revient maintenant sur l'intersection $\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,\lambda)} \cap \mathfrak{k}^\perp$.
Puisque

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}^\perp &= \left\{\mu_{(\alpha,z,\lambda)} \in \mathfrak{g}^*, \quad \alpha(\mathfrak{k}) = 0, \quad (z,\lambda) \in V \times \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\mu_{(0,z,\lambda)} \in \mathfrak{g}^*, \quad (z,\lambda) \in V \times \mathbb{R}\right\} \\
&\simeq \mathfrak{h}_n^*,
\end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,\lambda)} \cap \mathfrak{k}^\perp &= \left\{\nu_{(kz_0+\lambda z,\lambda)}, \ k \in K, z \in V \text{ tels que } \mathrm{Ad}^*_K(k)\alpha + z \times kz_0 + \frac{\lambda}{2} z \times z = 0\right\} \\
&= \left\{\nu_{(kz_0+\lambda z,\lambda)}, \ k \in K, z \in V \text{ tels que } \alpha + k^{-1}z \times z_0 + \frac{\lambda}{2} k^{-1}z \times k^{-1}z = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Maintenant, l'espace réel $V_{\mathbb{R}}$ muni de la forme ω est une variété symplectique sur laquelle l'action de K sur V est fortement hamiltonienne. On définit donc :

Définition II.2.7

On définit l'application moment non normalisée

$$\tau_{\mathfrak{k}} : V \longrightarrow \mathfrak{k}^*$$

de l'action de K dans V par :

$$\begin{aligned}\tau_{\mathfrak{k}}(z)(A) &= \omega(z, Az) \\ &= \frac{1}{i} < z, Az >_V, \quad \forall A \in \mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Corollaire II.2.8 [6]

i) Pour tout (α, z_0) de $\mathfrak{k}^* \times V$, $\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,0)} \cap \mathfrak{k}^\perp$ contient au plus une seule K-orbite.

ii) Pour tout (α, λ) de $\mathfrak{k}^* \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)} \cap \mathfrak{k}^\perp$ contient une seule K-orbite si et seulement si $\tau_{\mathfrak{k}}$ est injective sur les K-orbites.

Preuve

En effet, on a :

$$\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,\lambda)} \cap \mathfrak{k}^\perp = \left\{\nu_{(kz_0+\lambda z,\lambda)},\ k \in K, z \in V \text{ tels que } \alpha + k^{-1}z \times z_0 + \frac{\lambda}{2}\tau_{\mathfrak{k}}(k^{-1}z) = 0\right\}.$$

i) Si $\lambda = 0$ alors

$$\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,0)} \cap \mathfrak{k}^\perp = \left\{\nu_{(kz_0,0)},\ k \in K, \text{ tel qu'il existe } z \text{ dans } V \text{ vérifiant } \alpha = -k^{-1}z \times z_0\right\}.$$

On en déduit que s'il existe z tel que $\alpha = -z \times z_0$ alors

$$\mathcal{O}^G_{(\alpha,z_0,0)} \cap \mathfrak{k}^\perp = K.\nu_{(z_0,0)}$$

qui est une seule K-orbite, sinon l'intersection est vide.

ii) Si $z_0 = 0$ et $\lambda \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)} \cap \mathfrak{k}^\perp &= \left\{\nu_{(\lambda z,\lambda)},\ z \in V \text{ tels qu'il existe } k \text{ dans } K \text{ vérifiant } \tau_{\mathfrak{k}}(k^{-1}z) = -\frac{2\alpha}{\lambda}\right\} \\ &= \tau_{\mathfrak{k}}^{-1}(\mathcal{O}^K_{-\frac{2\alpha}{\lambda}}),\end{aligned}$$

où $\mathcal{O}^K_{-\frac{2\alpha}{\lambda}}$ est l'orbite coadjointe de K passant par $-\frac{2\alpha}{\lambda}$. ■

L'intersection d'une orbite singulière quelconque de G et de $\mathfrak{k}^\perp$ contient au plus une seule K-orbite. Le cas intéressant à étudier est donc l'intersection d'une orbite générique quelconque de G et de $\mathfrak{k}^\perp$. Et puisque

$$\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,\lambda)} \simeq \mathcal{O}^K_\alpha \times \mathcal{O}^{H_n}_{(0,\lambda)},$$

on se propose d'étudier les orbites coadjointes génériques de H_n.

Chapitre III

ETATS COHERENTS ET PRODUIT STAR DE BEREZIN SUR LES ORBITES COADJOINTES DE H_n.

On considère la base $\{X_1,\ldots,X_n,Y_1\ldots,Y_n,Z\}$ de $\mathfrak{h}_n$ constituée des éléments :

$$X_j=(0,\ldots,1,0\ldots,0),\ Y_j=(0,\ldots,1,0\ldots,0) \text{ et } Z=(0,\ldots,0,1),$$

avec les relations de commutation :

$$[X_i,Y_j]=\delta_{ij}Z.$$

Dans la suite, on désignera simplement par ν le point $\nu_{(0,\lambda)}$ de $\mathfrak{h}_n^*$ pour un certain λ non nul fixé dans $\mathbb{R}$.
L'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{(0,\lambda)}^{H_n}$ de H_n passant par le point ν est paramétrée par :

$$P_j(\nu)=<\nu,X_j> \quad \text{et} \quad Q_j(\nu)=\frac{1}{\lambda}<\nu,Y_j>.$$

On désigne par $Z(H_n)$ le centre de H_n.
Soit χ le caractère défini sur le centre $Z(H_n)$ de H_n par :

$$\chi(\exp cZ)=e^{ic\lambda}.$$

D'après le théorème de Stone et Von Neumann (cas particulier de la théorie de Kirillov) il existe une unique représentation irréductible π_ν de H_n telle que :

$$\pi_{\nu|Z(H_n)}=\chi Id.$$

Cette représentation a plusieurs réalisations [15]. Ici, on choisit celle de Fock-Bargman qui apparait comme une induite holomorphe associée à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{(0,\lambda)}^{H_n}$.
On la réalise pour $\lambda=1$ à partir d'une polarisation positive K-invariante. Ce qui permet de construire facilement l'opérateur d'entrelacement $W_\nu(k)$, k dans K_ν (qui dans ce cas, coïncide avec K) de telle sorte que $(W_\nu,\mathcal{H}_\nu)$ soit une représentation de K_ν.

Pour tout X_0 de $\mathfrak{h}_n$, on pose :

$$X_0^- f(\nu) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\exp_{H_n} -sX_0\nu) \quad \text{et} \quad \tilde{X}_0(\nu) = < X_0, \nu > .$$

L'ensemble $\{X_0^-{}_{|\nu}, \;\; X_0 \in \mathfrak{h}_n\}$ engendre $T_\nu(\mathcal{O}^{H_n}_{(0,\lambda)})$ et la 2-forme définie par :

$$\omega_\nu(X_0^-, Y_0^-) = < \nu, [X_0, Y_0] >,$$

pour tout X_0, Y_0 de $\mathfrak{h}_n$, est une 2-forme symplectique H_n-invariante.
De plus, $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,\lambda)}$ muni de la structure ω_ν est symplectomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la 2-forme canonique $dP \wedge dQ$.

III.1 L'induite holomorphe ($\lambda = 1$).

Puisque K est un sous-groupe de $U(n)$ agissant naturellement sur V, on fixe une polarisation positive K-invariante de $\mathfrak{h}_n^{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{h} = > Z, X_j + i\, Y_j <^{\mathbb{C}} .$$

Elle définit sur $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ une polarisation géométrique F_ν de $T_\nu(\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)})^{\mathbb{C}}$ telle que :

$$F_\nu = > \partial P_j + i\partial Q_j <^{\mathbb{C}} .$$

Si on pose $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, tout élément

$$g = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}}(aX + bY + cZ), \quad a, b \in \mathbb{C}^n, c \in \mathbb{C}$$

de $H_n^{\mathbb{C}}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$g = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} \frac{\alpha}{2i}(X - iY) \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} [\frac{\beta}{2i}(X + iY) + \mu Z]$$

où $\alpha = -b + ia$, $\beta = b + ia$ et $\mu = c - \dfrac{\alpha\beta}{4i}$.

Proposition III.1.1 [33]
L'orbite $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ est isomorphe à $H_n^{\mathbb{C}}/\exp_{H_n^{\mathbb{C}}}\mathfrak{h}$ et est donc munie d'une structure complexe $H_n^{\mathbb{C}}$-invariante. Avec cette structure, si on pose :

$$z = P + iQ,$$

on identifie $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ à $V = \mathbb{C}^n$ et l'action de $H_n^{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ s'écrit :

$$g.z = z + b - ia$$

pour tout z de $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ et où g est l'élément $\exp_{H_n^{\mathbb{C}}}(aX + bY + cZ)$ de $H_n^{\mathbb{C}}$.

Preuve

On prolonge l'action $\mathfrak{h}_n^{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-linéairement. Puisque :

$$X_j^- = \frac{\partial}{\partial Q_j} \quad \text{et} \quad Y_j^- = \frac{\partial}{\partial P_j},$$

alors

$$(X_j - iY_j)^- = \frac{\partial}{\partial Q_j} + i\frac{\partial}{\partial P_j} = 2i\frac{\partial}{\partial z_j}$$

et

$$(X_j + iY_j)^- = \frac{\partial}{\partial Q_j} - i\frac{\partial}{\partial P_j} = -2i\frac{\partial}{\partial z_j}$$

donc

$$\exp_{H_n^{\mathbb{C}}} \frac{\beta}{2i}(X_j + iY_j).z = z \quad \text{et} \quad \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} \frac{\alpha}{2i}(X_j - iY_j).z = z - \alpha.$$

On en déduit que $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$ est isomorphe à $H_n^{\mathbb{C}}/\exp_{H_n^{\mathbb{C}}}\mathfrak{h}$ et à $\mathbb{C}^n$ par

$$\exp_{H_n^{\mathbb{C}}} -\frac{z}{2i}(X_j - iY_j)\nu_0 \longrightarrow [\exp_{H_n^{\mathbb{C}}} -\frac{z}{2i}(X_j - iY_j)] \longrightarrow z.$$

Et on montre par un calcul direct que l'action de $H_n^{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$ a la forme annoncée. ∎

On construit au dessus du fibré principal

$$H_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n},$$

le fibré linéaire

$$\begin{array}{rcl} L \simeq (H_n^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C})/_\sim & \xrightarrow{\mathfrak{P}} & \mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n} \\ [g, \zeta] & \longmapsto & [g] = g.0 \end{array}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par :

$$(g, \zeta) \sim (g', \zeta')(\text{ou } [g, \zeta] = [g', \zeta']) \iff \exists h \in \mathfrak{h} \text{ tel que } (g', \zeta') = (gh, \chi(h^{-1})\zeta).$$

Soit σ la section holomorphe du fibré principal $H_n^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$ définie par

$$\sigma(z) = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} -\frac{z}{2i}(X - iY),$$

alors toute section holomorphe s de L s'écrit :

$$s(z) = [\sigma(z), F(z)],$$

où $F(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$.

Si Γ est l'espace des sections holomorphes de L, l'action de $H_n^{\mathbb{C}}$ sur Γ s'écrit :

$$(g.s)(z) = gs(g^{-1}z),$$

où $g[\sigma(z), F(z)] = [g\sigma(z), F(z)]$.
On note $\mathcal{H}_\nu$ l'espace des fonctions holomorphes f sur $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$ telles que :

$$||f||^2_{\mathcal{H}_\nu} = \int_{\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}} |f(z)|^2 e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} dz d\bar{z} < \infty.$$

Proposition III.1.2 [33]
La représentation induite holomorphe $(\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ de H_n associée à l'orbite $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$ peut être simplement définie par :

$$\pi_\nu\big(\exp_{H_n}(aX + bY + cZ)\big)f\ (z) = f(z - b + ia)e^{ic + \frac{1}{4}(b+ia)(2z-b+ia)},$$

pour tout f dans $\mathcal{H}_\nu$, z dans $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$, a, b dans $\mathbb{R}^n$, et c dans $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout z de $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$, $g = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}}(aX + bY + cZ)$ de $H_n^{\mathbb{C}}$ et s de Γ on a :

$$\begin{aligned}(gs)(z) &= [g\sigma(g^{-1}z), F(g^{-1}z)] \\ &= [\sigma(z)\sigma(z)^{-1}\ g\sigma(g^{-1}z), F(g^{-1}z)] \\ &= [\sigma(z), \chi(c(g,z))F(g^{-1}z)],\end{aligned}$$

si on pose :

$$\begin{aligned}c(g, z) &= \sigma(z)^{-1}\ g\sigma(g^{-1}z) \\ &= \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} \frac{b + ia}{2i}(X + iY) \exp_{H_n^{\mathbb{C}}}[c + \frac{(b + ia)(2z - b + ia)}{4i}]Z\end{aligned}$$

Remarque III.1.3
i) La représentation π_ν est unitaire si on munit $\mathcal{H}_\nu$ du produit scalaire :

$$< f, f' >_{\mathcal{H}_\nu} = \int_{\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}} f(z)\bar{f}'(z)e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}} dz d\bar{z}.$$

ii) $\{z^l, l \in \mathbb{N}^n\}$ est un système orthogonal complet de vecteurs de $\mathcal{H}_\nu$.

iii) L'ensemble $\mathcal{P}(V)$ des polynômes holomorphes sur V est dense dans $\mathcal{H}_\nu$.

III.2 Calcul symbolique sur les orbites coadjointes de H_n.

Pour tout s de Γ, z de $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$ et q de $\mathfrak{P}^{-1}(z)$, on pose :

$$s(\mathfrak{P}(q)) = \tilde{s}(q)q.$$

L'application

$$s \longmapsto \tilde{s}(q)$$

est alors une fonctionnelle linéaire continue sur Γ.

D'après le théorème de Riesz, il existe une section holomorphe e_q dans Γ telle que :

$$\tilde{s}(q) = < s, e_q >_{\mathcal{H}_\nu},$$

pour tout s de $\mathcal{H}_\nu$.

Et bien entendu H_n agit sur Γ. On a :

$$e_{cq} = \bar{c}^{-1} e_q, \quad \forall c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

et

$$g e_q = e_{gq}, \quad \forall g \in H_n.$$

Définition III.2.1

La section e_q est appelée l'état cohérent associé à q.

Soit s_0 la section (qui ne s'annule pas) du fibré linéaire L définie par :

$$s_0(z) = [\sigma(z), 1],$$

avec $\sigma(z) = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} -\frac{z}{2i}(X - iY)$.

En posant :

$$e_{s_0(z)}(u) = [\sigma(u), E_z(u)],$$

on définit alors une fonction holomorphe E_z de $\mathcal{H}_\nu$ et toute section de carré intégrable s de L s' écrit :

$$\begin{aligned} s(z) &= [\sigma(z), F(z)] \\ &= < F, E_z >_{\mathcal{H}_\nu} [\sigma(z), 1] \end{aligned}$$

et

$$F(z) = < F, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}$$

où F appartient à $\mathcal{H}_\nu$.

Proposition III.2.2 [33]

Pour tout z de $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}$, la fonction E_z est définie par :

$$E_z(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{\frac{1}{2}u\bar{z}}, \quad \forall\, u \in \mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}.$$

Preuve

Pour tout polynôme f, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= < f, E_0 >_{\mathcal{H}_\nu} \\ &= \frac{< f, 1 >_{\mathcal{H}_\nu}}{< 1, 1 >_{\mathcal{H}_\nu}}. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que :

$$E_0 = ||1||_{\mathcal{H}_\nu}^{-2} 1 = \frac{1}{(2\pi)^n} 1.$$

Si $z = P + iQ$, on a :

$$z = g.0$$

avec $g = \exp_{H_n}(-QX + PY)$.
Et donc :

$$\begin{aligned} g.s_0(z) &= g[\sigma(0), e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}.1] \\ &= [g, 1] \\ &= [\sigma(z)\sigma(z)^{-1}g, 1] \\ &= [\sigma(z), \chi(c(g, z))1], \end{aligned}$$

avec $c(g, z) = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} \frac{b + ia}{2i}(X + iY) \exp_{H_n^{\mathbb{C}}}[c + \frac{(b + ia)(2z - b + ia)}{4i}]Z$ (cf III.1) et

$$\chi(c(g, z)) = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} \frac{1}{4}(P - iQ)(2z - P - iQ) = e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} g.s_0(0) &= e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}[\sigma(z), 1] \\ &= e^{\frac{1}{4}z\bar{z}} s_0(z). \end{aligned}$$

On a d'une part, $e_{cq} = \bar{c}^{-1} e_q$ donc

$$\begin{aligned} e_{gs_0(0)}(u) &= e^{-\frac{1}{4}z\bar{z}} e_{s_0(z)}(u) \\ &= [\sigma(u), e^{-\frac{1}{4}z\bar{z}} E_z(u)] \quad (i) \end{aligned}$$

et d'autre part, $ge_q = e_{gq}$ donc :

$$\begin{aligned} e_{gs_0(0)}(u) &= (ge_{s_0(0)})(u) \\ &= g.[\sigma(g^{-1}u), E_0(g^{-1}u)] \\ &= [g\sigma(g^{-1}u), (2\pi)^{-n} 1] \\ &= [\sigma(u)c(g, u), (2\pi)^{-n}] \\ &= (2\pi)^{-n}[\sigma(u), \chi(c(g, u))]. \end{aligned}$$

Et comme

$$\chi(c(g,u)) = \exp_{H_n^{\mathbb{C}}} \frac{1}{4}(P-iQ)(2u-P-iQ)$$
$$= e^{\frac{1}{4}\bar{z}(2u-z)},$$

on obtient

$$e_{gs_0(0)}(u) = \frac{1}{(2\pi)^n}[\sigma(u), e^{\frac{\bar{z}}{4}(2u-z)}] \quad (ii)$$

L'identification de (i) et de (ii) donne que :

$$E_z(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{\frac{1}{2}\bar{z}u}, \qquad \forall\, u \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

■

Remarque III.2.3

La fonction $z \longmapsto E_z$ est le noyau reproduisant de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\nu$

III.3 Produit star de Berezin sur les orbites coadjointes de H_n.

L'orbite coadjointe $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ munie de sa structure symplectique naturelle ω_ν, est symplectomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la 2-forme canonique $dP \wedge dQ$. Il existe donc [16] à équivalence près un unique produit star sur $(\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}, \omega_\nu)$.
De plus, on a vu (proposition III.1.1) que les orbites coadjointes du groupe de Heisenberg possèdent une structure kählérienne H_n-invariante. Ce qui n'est pas le cas de tous les groupes de Lie nilpotents. En effet, si une telle structure kählérienne existe, l'orbite est une variété avec une métrique riemannienne, donc une connexion riemannienne, invariante. Or, le groupe filiforme d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g} = > X_0, X_1, \ldots, X_n <, \quad [X_0, X_i] = X_{i+1}$$

a des orbites de dimension au plus 2 qui ne peuvent, si n est assez grand, admettre de connexion invariante.
Cette structure kählérienne implique l'existence d'une structure symplectique et d'une structure complexe, nécéssaires à la construction du produit star de Berezin.

Définition III.3.1

Soit A, un opérateur borné sur $\mathcal{H}_\nu$.
On appelle symbole (au sens de Berezin) de l'opérateur A, la fonction $\widehat{A}$ de $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ définie par :

$$\widehat{A}(z) = \frac{< AE_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}, \quad z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

Le symbole $\widehat{A}$ est une fonction analytique. Il admet un seul développement $\tilde{A}$ au voisinage de la diagonale $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)} \times \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ qui soit antiholomorphe en la première variable et holomorphe en la seconde variable. Il est donné par :

$$\tilde{A}(z,u) = \frac{< AE_z, E_u >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_u >_{\mathcal{H}_\nu}}, \quad (z,u) \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)} \times \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

En effet, pour tout opérateur borné A de $\mathcal{H}_\nu$, les fonctions

$$(\bar{z}, u) \longmapsto < AE_{\bar{z}}, E_u >_{\mathcal{H}_\nu} \quad \text{et} \quad (\bar{z}, u) \longmapsto < E_{\bar{z}}, E_u >_{\mathcal{H}_\nu}$$

sont entières sur $\mathbb{C}^{2n}$ [15]. De plus $< E_{\bar{z}}, E_u >_{\mathcal{H}_\nu} = e^{izu} \neq 0$ pour tout z, u de $\mathbb{C}^n$.
Alors la fonction

$$(\bar{z}, u) \longmapsto \frac{< AE_{\bar{z}}, E_u >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_{\bar{z}}, E_u >_{\mathcal{H}_\nu}}$$

est holomorphe sur la diagonale. Par conséquent $\tilde{A}(z,u)$ est antiholomorphe en z et holomorphe en u près de la diagonale. Il est entièrement déterminé [15] par

$$\widehat{A}(z) = \tilde{A}(z,z), \quad \forall z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

De plus l'opérateur A peut s'écrire grâce à la fonction $\widehat{A}$ comme un opérateur à noyau. En effet, pour tout φ de $\mathcal{H}_\nu$ et z de $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)} \simeq V$, on a :

$$\begin{aligned}
(A\varphi)(z) &= < A\varphi, E_z >_{\mathcal{H}_\nu} = < \varphi, A^* E_z >_{\mathcal{H}_\nu} \\
&= \int_V \varphi(u) \overline{A^* E_z(u)} e^{\frac{-u\bar{u}}{2}} du d\bar{u} \\
&= \int_V \varphi(u) \overline{< A^* E_z, E_u >_{\mathcal{H}_\nu}} e^{\frac{-u\bar{u}}{2}} du d\bar{u} \\
&= \int_V \varphi(u) < AE_u, E_z >_{\mathcal{H}_\nu} e^{\frac{-u\bar{u}}{2}} du d\bar{u} \\
&= \int_V \varphi(u) \tilde{A}(u,z) < E_u, E_z >_{\mathcal{H}_\nu} e^{\frac{-u\bar{u}}{2}} du d\bar{u} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V \varphi(u) \tilde{A}(u,z) e^{\frac{\bar{u}(z-u)}{2}} du d\bar{u}
\end{aligned}$$

où A^* désigne l'opérateur adjoint de A. Ce qui établit une correspondance bijective entre l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\nu)$ des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\nu$ et l'espace $\widehat{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\nu)}$ des symboles de ces opérateurs.

Proposition III.3.2

Si A est un opérateur borné de rang fini sur $\mathcal{H}_\nu$ alors la trace de A est donnée par :

$$\mathfrak{Tr} A = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} \widehat{A}(z) dz d\bar{z}.$$

Preuve

En effet, A s'écrit sous la forme

$$A = UP$$

où U est un opérateur unitaire et P un opérateur positif de rang fini tel que $P = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. P est diagonalisable. Il existe donc une suite finie de vecteurs propres $\{e_j\}_{j=1,N}$ telle que

$$Pe_j = \lambda_j e_j \quad \text{avec} \quad |\lambda_j| = 1.$$

On complète $\{e_j\}_{j=1,N}$ en une base orthonormée $\{e_j\}_{j\in J}$ de $\mathcal{H}_\nu$.
Puisque $Pe_n = 0$ pour tout $n > N$, on a :

$$\begin{aligned}(A\varphi)(z) &= \sum_{j=1}^{N} \lambda_j < \varphi, e_j >_{\mathcal{H}_\nu} e_j(z) \\ &= \int_V \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi(u)\overline{e_j(u)} e_j(z) e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u}\end{aligned}$$

pour tout φ de $\mathcal{H}_\nu$. Et comme

$$(A\varphi)(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V \varphi(u)\tilde{A}(u,z) e^{\frac{\bar{u}(z-u)}{2}} du d\bar{u},$$

on obtient que :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\tilde{A}(u,z) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{e_j(u)} e_j(z) e^{\frac{\bar{u}z}{2}},$$

Pour tout u, z de V. Et puisque $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{e_j(u)} e_j(z) e^{\frac{\bar{u}z}{2}}$ est continue, l'application

$$(u,z) \longmapsto \tilde{A}(u,z)$$

est aussi continue. Et donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} \widehat{A}(z) dz d\bar{z} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V \tilde{A}(z,z) dz d\bar{z} \\ &= \int_V \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{e_j(z)} e_j(z) e^{\frac{z\bar{z}}{2}} dz d\bar{z} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \lambda_j < e_j, e_j >_{\mathcal{H}_\nu} \\ &= \mathfrak{Tr} A,\end{aligned}$$

car $< e_j, e_j >_{\mathcal{H}_\nu} = 1$. ∎

Soient A et B deux opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\nu$. En posant

$$\widehat{A} * \widehat{B} = \widehat{A \circ B},$$

on définit un produit star noté $*$ sur l'espace $\widehat{\mathcal{L}(\mathcal{H}_\nu)} \subset C^\infty(\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)})$ [15].

Définition III.3.3

$*$ est appelé produit star de Berezin.
On notera par $[\widehat{A}, \widehat{B}]_*$, le commutateur $\widehat{A} * \widehat{B} - \widehat{B} * \widehat{A}$.

Proposition III.3.4

Pour deux opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\nu$ A et B tels qu'il existe ϵ de $]0,1[$ vérifiant :

$$|\tilde{A}(u,z)| < e^{(1-\epsilon)(\frac{u\bar{u}}{4}+\frac{z\bar{z}}{4})} \quad \text{et} \quad |\tilde{B}(u,z)| < e^{(1-\epsilon)(\frac{u\bar{u}}{4}+\frac{z\bar{z}}{4})},$$

la formule intégrale du produit star de Berezin est donnée pour tout z de $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)} \simeq V$ par :

$$(\widehat{A} * \widehat{B})(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_V \tilde{A}(u,z)\tilde{B}(z,u) e^{\frac{\bar{u}z+\bar{z}u}{2}} e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u},$$

en particulier pour tout polynôme $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ (respectivement toute fonction de la forme $P(z,\bar{z})e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}$ où P est un polynôme).

Preuve

En effet si A et B ont la forme annoncée, pour toute fonction polynomiale φ de $\mathcal{H}_\nu$, on a :

$$\begin{aligned}
A \circ B(\varphi)(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V (B\varphi)(v)\tilde{A}(v,z) e^{\frac{\bar{v}(z-v)}{2}} dv d\bar{v} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_V \tilde{A}(v,z) \int_V \varphi(u)\tilde{B}(u,v) e^{\frac{\bar{u}(v-u)}{2}} du d\bar{u} e^{\frac{\bar{v}(z-v)}{2}} dv d\bar{v} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V \widetilde{A \circ B}(u,z)\varphi(u) e^{\frac{\bar{u}(z-u)}{2}} du d\bar{u}
\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{A \circ B}(u,z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V \tilde{A}(v,z)\tilde{B}(u,v) e^{\frac{\bar{u}(v-u)}{2}} e^{\frac{\bar{v}(z-v)}{2}} e^{\frac{-\bar{u}(z-u)}{2}} dv d\bar{v}$$

qui est dans ce cas absolument convergente. On a donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{A} * \widehat{B}(z) &= \widehat{A \circ B}(z) = \widetilde{A \circ B}(z,z) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_V \tilde{A}(v,z)\tilde{B}(z,v) e^{\frac{\bar{v}z+\bar{z}v}{2}} e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire III.3.5

Si $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ ont la même forme que dans la proposition précédente alors :

i) si $\widehat{A}$ est une fonction holomorphe et $\widehat{B}$ une fonction analytique quelconque alors

$$\widehat{A} * \widehat{B}(z) = \widehat{A}(z)\widehat{B}(z), \quad \forall z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

ii) De même si $\widehat{B}$ est une fonction antiholomorphe et $\widehat{A}$ une fonction analytique quelconque On a :

$$\widehat{A} * \widehat{B}(z) = \widehat{A}(z)\widehat{B}(z), \quad \forall z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

iii) Si $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont des fonctions polynomiales (respectivement des fonctions de la forme $P(z,\bar{z})e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}$ où P est polynomiale), alors $\widehat{A} * \widehat{B}$ est aussi polynomiale (respectivement de la forme $P(z,\bar{z})e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}$).

Preuve

i) On suppose que $\widehat{A}$ est holomorphe. Cela revient à dire que :

$$\tilde{A}(u,z) = \widehat{A}(z), \quad \forall u, z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{A} * \widehat{B}(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_V \widehat{A}(z)\tilde{B}(z,u) e^{\frac{\bar{u}z+\bar{z}u}{2}} e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{A}(z) \int_V \tilde{B}(z, z+v) e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v} \qquad (\text{ en posant } u = z+v \text{ }) \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{A}(z) \int_{B(0,R)} \sum_{|l|\geq 0} \frac{1}{l!} (\partial_u^{(l)} \tilde{B})(z,z) v^l e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v}
\end{aligned}$$

où $B(0,R)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon R et où $\sum_{|l|\geq 0} \frac{1}{l!}(\partial_u^{(l)}\tilde{B})(z,z)v^l$ est le développement en série de $\tilde{B}(z, z+v)$ suivant v au voisinage de 0. La série converge uniformement sur $B(0,R)$, on peut échanger la somme et l'intégration.

Et puisque $\int_{B(0,R)} v^l e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v}$ est nulle pour tout $|l| \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{A} * \widehat{B}(z) &= \widehat{A}(z)\tilde{B}(z,z) \\
&= \widehat{A}(z)\widehat{B}(z).
\end{aligned}$$

ii) Si $\widehat{B}$ est antiholomorphe. C'est-à-dire que :

$$\tilde{B}(z,u) = \widehat{B}(z), \quad \forall u, z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

Le résultat s'obtient de la même manière que précédemment.

iii) Si $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont polynomiales c'est-à-dire $\widehat{A}(z) = P_1(z,\bar{z})$ et $\widehat{B}(z) = P_2(z,\bar{z})$, on a alors:

$$\tilde{A}(u,z) = P_1(z,\bar{u}) \quad \text{et} \quad \tilde{B}(u,z) = P_2(u,\bar{z})$$

et donc

$$\begin{aligned}
\widehat{A} * \widehat{B}(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_V P_1(z,\bar{u}) P_2(u,\bar{z}) e^{\frac{\bar{u}z+\bar{z}u}{2}} e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V P_1(z,\bar{u}) P_2(u,\bar{z}) e^{-\frac{(u-z)(\bar{u}-\bar{z})}{2}} du d\bar{u} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V P_1(z,\bar{v}+\bar{z}) P_2(v+z,\bar{z}) e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v} \quad (\text{ en posant } u = z+v\ ) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V \sum_{|l|\geq 0} \frac{1}{l!} (\partial_u^{(l)} P_1)(z,\bar{z}) v^l \sum_{|m|\geq 0} \frac{1}{m!} (\partial_u^{(m)} P_2)(z,\bar{z}) v^m e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v}.
\end{aligned}$$

On échange la somme et l'intégration de la même manière que précédement. Et puisque

$$\int_{B(0,R)} (\bar{v})^l v^m e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v} = (2\pi)^n 2^l l! \delta_{l,m},$$

$\widehat{A} * \widehat{B}(z)$ est un polynôme.

Et enfin si :

$$\widehat{A}(z) = P_1(z,\bar{z}) e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \quad \text{et} \quad \widehat{B}(z) = P_2(z,\bar{z}) e^{-\frac{z\bar{z}}{2}},$$

on a alors :

$$\tilde{A}(u,z) = P_1(z,\bar{u}) e^{-\frac{z\bar{u}}{2}} \quad \text{et} \quad \tilde{B}(z,u) = P_1(u,\bar{z}) e^{-\frac{\bar{z}u}{2}}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\widehat{A} * \widehat{B}(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_V P_1(z,\bar{u}) e^{-\frac{z\bar{u}}{2}} P_2(u,\bar{z}) e^{-\frac{u\bar{z}}{2}} e^{\frac{u\bar{z}+\bar{z}u}{2}} e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_V P_1(z,\bar{u}) P_2(u,\bar{z}) e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u}.
\end{aligned}$$

Avec le même calcul que précédemment, on montre que $\int_V P_1(z,\bar{u}) P_2(u,\bar{z}) e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u}$ est polynomiale. Par conséquent, $\widehat{A} * \widehat{B}(z)$ a la forme annoncée. ∎

Chapitre IV

LA FONCTION GENERATRICE DE LA MULTIPLICITE.

IV.1 Calcul de la multiplicité.

On désigne toujours par $(\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ la représentation unitaire irréductible de H_n associée à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ de H_n passant par le point $\nu = \nu_{(0,1)}$ de $\mathfrak{h}_n^*$ et réalisée dans la partie II.1. On définit $({}^k\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$, K_ν et $W_\nu(k)$, k dans K_ν de la même manière que dans la partie I.3

Lemme IV.1.1

Pour tout k de K, les représentations $(\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ et $({}^k\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ sont unitairement équivalentes.

Preuve

En effet, pour tout k dans K et pour tout (z,t) de $\mathfrak{h}_n$, on a :

$$\begin{aligned} < k.\nu_{(0,1)}, (z,t) > &= < \nu_{(0,1)}, (k^{-1}z, t) > \\ &= 1t \\ &= < \nu_{(0,1)}, (z,t) > . \end{aligned}$$

Ce qui entraine que $k.\nu = \nu$ pour tout k de K et donc :

$$K_\nu = \{k \in K, k.\nu \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}\} = K. \qquad \blacksquare$$

Lemme IV.1.2

Pour tout k de K, l'opérateur $W_\nu(k)$ défini par :

$$W_\nu(k)f(z) = f(k^{-1}z) \quad \forall f \in \mathcal{H}_\nu, \ \ z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)},$$

vérifie :

$$W_\nu(k) \circ {}^k\pi_\nu(z_1, t_1) \circ W_\nu(k)^{-1} = \pi_\nu(z_1, t_1) \quad (z_1, t_1) \in H_n.$$

Preuve

Relativement à la base $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$ de $\mathfrak{h}_n$ définie au § II.1 et sous identification de H_n avec $\mathfrak{h}_n$, tout élément (z_1, t_1) de H_n s'écrit :

$$(z_1, t_1) = \exp_{H_n}(aX + bY + cZ) = (a + ib, c) \quad a, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi pour f dans $\mathcal{H}_\nu$, z dans $\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n} \simeq V = \mathbb{C}^n$,

$$\pi_\nu(z_1, t_1)f\ (z) = f(z - b + ia)e^{ic + \frac{1}{4}(b+ia)(2z-b+ia)}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} W_\nu(k) \circ {}^k\pi_\nu(z_1, t_1) \circ W_\nu(k)^{-1} f(z) &= W_\nu(k) \circ \pi_\nu\big(k(a + ib), c\big) f(kz) \\ &= W_\nu(k) f\big(kz + k(-b + ia)\big) e^{ic + \frac{1}{4}k(b+ia)(2z-b+ia)} \\ &= f(z - b + ia) e^{ic + \frac{1}{4}(b+ia)(2z-b+ia)} \\ &= \pi_\nu(z_1, t_1) f\ (z). \end{aligned}$$

■

On peut donc déduire de la proposition I.3.6 le résultat suivant:

Corollaire IV.1.3

(K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si pour tout ρ de $\widehat{K}$, la multiplicité de ρ dans W_ν est inférieure ou égale à 1.

On considère à présent une représentation $(\psi, \mathcal{H}_\psi)$ de dimension finie de K. ($\mathcal{H}_\psi$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}_\nu$.)

Sa décomposition sur l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductibles de K est :

$$\psi = \sum_{\rho \in \hat{K}} \mathrm{mult}(\rho, \psi)\rho,$$

où $\mathrm{mult}(\rho, \psi)$ désigne la multiplicité de ρ dans ψ.

De plus, si χ_ρ est le caractère associé à la représentation ρ de $\widehat{K}$, la multiplicité de ρ dans ψ est donnée par la formule [30] :

$$\mathrm{mult}(\rho, \psi) = \int_K \mathfrak{Tr}\psi(k)\chi_\rho(k^{-1})dk$$

où dk est la mesure de Haar normalisée sur K.

Soit P la projection orthogonale de $\mathcal{H}_\nu$ sur $\mathcal{H}_\psi$ et soit $\phi(k) = \psi(k)P$. On a alors :

$$\mathfrak{Tr}\psi(k) = \mathfrak{Tr}\phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathcal{O}_{(0,1)}^{H_n}} \widehat{\phi(k)}(z) dz d\bar{z}$$

où $\widehat{\phi(k)}(z) = \dfrac{< \phi(k)E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}$ est le symbole de $\phi(k)$.

Et donc

$$\mathrm{mult}(\rho, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_K \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} \widehat{\phi(k)}(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk.$$

On revient maintenant sur la représentation W_ν. Elle se décompose sur l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductibles de K comme suit :

$$W_\nu = \sum_{\rho \in \hat{K}} m_\rho \rho,$$

où $m_\rho = \mathrm{mult}(\rho, W_\nu)$ est la multiplicité de ρ dans W_ν.
Cette somme est bien sûr infinie puisque la dimension de $\mathcal{H}_\nu$ est infinie.

Définition IV.1.4

L'opérateur $W_\nu(k)$, k dans K a pour symbole la fonction $E_*(k)(z)$ appelée l'exponentielle star et définie par :

$$E_*(k)(z) = \frac{< W_\nu(k)E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}, \quad z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

$W_\nu(k)$, k dans K n'est généralement pas un opérateur à trace, mais si tel est le cas, la multiplicité de tout ρ de $\widehat{K}$ dans W_ν devrait être :

$$m_\rho = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_K \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(k)(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk.$$

Dans la suite, on se propose d'étudier cette intégrale. Pour cela, on rappelle d'abord la formule d'intégration de Weyl.

Théorème IV.1.5 [32]

Soient :
K un groupe de Lie compact et connexe,
T un tore maximal de K,
$\mathfrak{w}$ le groupe de Weyl associé à T,
$|\mathfrak{w}|$ l'ordre de $\mathfrak{w}$,
dk et dt les mesures de Haar normalisées respectivement sur K et T,
Δ le système de racines de K associé à T.
Alors, pour toute fonction continue f sur K, on a :

$$\int_K f(k)dk = \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T D(t) \int_K f(ktk^{-1})\, dk\, dt,$$

où $D(t) = \prod_{\alpha \in \Delta} (1 - t^\alpha)$.

<u>**Corollaire IV.1.6**</u> [32]
Si la fonction f est centrale c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$f(ktk^{-1}) = f(t),$$

pour tout k dans K, t dans T, alors

$$\int_K f(k)dk = \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T f(t)D(t)dt.$$

Puisque dans notre cas, K est un sous-groupe compact et connexe de $U(n)$, quitte à conjuguer K dans $U(n)$, on peut supposer que T est le tore maximal diagonalisé T de K c'est-à-dire que tout élément t de T est de la forme :

$$t = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1(t)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{i\theta_n(t)} \end{pmatrix}, \quad \theta_j(t) \in [0, 2\pi].$$

Dans la suite, on notera $\theta_j = \theta_j(t)$ pour tout j dans$\{1, \ldots, n\}$.

<u>**Lemme IV.1.7**</u>
Si pour un t de T, l'intégrale $f(t) = \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(t)(z)dzd\bar{z}$ converge alors pour tout k de K $f(ktk^{-1})$ converge et $f(ktk^{-1}) = f(t)$.

<u>**Preuve**</u>
La fonction $k \longmapsto E_*(k)(z)$ vérifie :

$$\begin{aligned} E_*(ktk^{-1})(z) &= \frac{< E_{kt^{-1}k^{-1}z}, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}} \\ &= \frac{< E_{t^{-1}k^{-1}z}, E_{k^{-1}z} >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_{k^{-1}z}, E_{k^{-1}z} >_{\mathcal{H}_\nu}} \\ &= E_*(t)(k^{-1}.z), \end{aligned}$$

pour tout t dans T et k dans K. Et donc si l'intégrale

$$f(k) = \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(k)(z)dzd\bar{z}$$

a un sens, on aurait :

$$\begin{aligned} f(ktk^{-1}) &= \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(t)(k^{-1}z)dzd\bar{z} \\ &= \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(t)(z)dzd\bar{z} \\ &= f(t), \end{aligned}$$

pour tout t dans T et k dans K. ■

De plus, le caractère χ_ρ est une fonction centrale. Ce qui ramène l'intégrale définissant m_ρ , si elle existe, sous la forme :

$$m_\rho = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T D(t)\chi_\rho(t^{-1})\int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(t)(z)dzd\bar{z}dt.$$

Par suite, pour tout t de T, on a :

$$\begin{aligned} E_*(t)(z) &= \frac{< E_{tz}, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}} \\ &= \frac{\int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_{tz}(u)\overline{E}_z(u)dud\bar{u}}{\int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_z(u)\overline{E}_z(u)dud\bar{u}} = \frac{\int_V e^{\frac{1}{2}t^{-1}\bar{z}u}e^{\frac{1}{2}z\bar{u}}e^{\frac{-1}{2}u\bar{u}}dud\bar{u}}{\int_V e^{\frac{1}{2}\bar{z}u}e^{\frac{1}{2}z\bar{u}}e^{\frac{-1}{2}u\bar{u}}dud\bar{u}} \\ &= e^{\frac{1}{2}(t^{-1}-Id_K)z\bar{z}}, \end{aligned}$$

où Id_K désigne l'application identité de K. Et par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(t)(z)dzd\bar{z} &= \int_V e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n(e^{-i\theta_j}-1)z_j\bar{z}_j}dz_jd\bar{z}_j \\ &= (2\pi)^n\prod_{j=1}^n\frac{1}{1-e^{-i\theta_j(t)}}, \end{aligned}$$

si pour tout j dans $\{1,\dots,n\}$, $\theta_j(t)$ n'est pas un multiple de 2π. On obtient finalement :

$$m_\rho = \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T\prod_{j=1}^n\frac{1}{1-e^{-i\theta_j(t)}}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt,$$

qui ne converge pas en général. En effet on a :

<u>Un contre exemple.</u>

On se place dans le cas $G = SU(3) \rhd H_3$ et on se propose de calculer l'intégrale

$$m_\rho = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{SU(3)}\int_{\mathcal{O}^{H_3}_{(0,1)}} E_*(k)(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk$$

pour toute représentation unitaire et irréductible ρ de $SU(3)$.

Comme dans le cas général, on choisit le tore maximal diagonalisé de $SU(3)$ dont les éléments sont de la forme :

$$t = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_3} \end{pmatrix}$$

où $\theta_j = \theta_j(t)$ est dans $[0, 2\pi]$, pour tout j appartenant à $\{1, \ldots, 3\}$ et où $\theta_3 = -(\theta_1 + \theta_2)$. Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} m_\rho &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T \chi_\rho(t^{-1}) D(t) \int_{\mathcal{O}^{H_3}_{(0,1)}} E_*(t)(z) dz d\bar{z} dt \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T \prod_{j=1}^{3} \frac{1}{1 - e^{-i\theta_j(t)}} \chi_\rho(t^{-1}) D(t) dt. \end{aligned}$$

On a alors besoin de la formule du caractère de Weyl :
Etant donnés K un groupe compact et connexe et T un tore maximal de K, on considère:
Δ le sysème des racines de K relativement à T,
P une chambre de Weyl de T,
Δ^+ l'ensemble des racines positives de K relativement à P et
$\mathfrak{w}$ le groupe de Weyl de K associé à T.
On convient quitte à remplacer K par un recouvrement compact $\widetilde{K}$ de K que la demi somme des racines positives $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ est un poids. On a :

Proposition IV.1.7 [26]
Si ρ de $\widehat{K}$ est de plus haut poids λ_0, alors, pour tout t de T, le caractère χ_ρ de ρ est donné par :

$$\chi_\rho(t) = \frac{1}{D^+(t)} \sum_{s \in \mathfrak{w}} \det(s) t^{s(\lambda_0 + \delta)},$$

où $D^+(t) = t^\delta \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - t^\alpha)$.

En particulier, si $K = SU(n)$ et si T est le tore maximal diagonalisé de $SU(n)$, $\mathfrak{w}$ est le groupe symétrique de n lettres et $\det s$ est la signature de la permutation s de $\mathfrak{w}$. [26]

Dans notre cas, $\mathfrak{w}$ est le groupe de permutations de $\{1, 2, 3\}$.
Les racines de $SU(3)$ sont les formes linéaires

$$\alpha_{j,l} = \theta_j - \theta_l, \quad j \neq l.$$

Soit un choix de racines positives :

$$\begin{aligned}
\alpha_{1,2} &= \theta_1 - \theta_2 > 0 \\
\alpha_{1,3} &= \theta_1 - \theta_3 = 2\theta_1 + \theta_2 > 0 \\
\alpha_{2,3} &= \theta_2 - \theta_3 = \theta_1 + 2\theta_2 > 0 \\
\alpha_{2,1} &= \theta_2 - \theta_1 < 0 \\
\alpha_{3,1} &= \theta_3 - \theta_1 = -2\theta_1 - \theta_2 < 0 \\
\alpha_{3,2} &= \theta_3 - \theta_2 = -\theta_1 - 2\theta_2 < 0.
\end{aligned}$$

$\alpha_{1,2}$ et $\alpha_{2,3}$ sont les seules racines simples puisque $\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3}$. La demi somme des racines positives est :

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha_{1,2} + \alpha_{1,3} + \alpha_{2,3}) = \theta_1 - \theta_3.$$

Soit λ_0 le plus haut poids de ρ de $\widehat{K}$.
D'après le théorème du plus haut poids, λ_0 ne dépend que des racines simples. On écrit :

$$\lambda_0 = a\alpha_{1,2} + b\alpha_{2,3}$$

Et comme λ_0 est entier, il doit vérifier la condition :

$$\frac{2 < \lambda_0, \alpha_{j,k} >}{< \alpha_{j,k}, \alpha_{j,k} >} \in \mathbb{N},$$

pour toute racine positive $\alpha_{j,k}$. On a donc :

$$\frac{2 < \lambda_0, \alpha_{1,2} >}{< \alpha_{1,2}, \alpha_{1,2} >} = 2a + 2b\frac{< \alpha_{2,3}, \alpha_{1,2} >}{< \alpha_{1,2}, \alpha_{1,2} >} \in \mathbb{N}.$$

Or $< \alpha_{1,2}, \alpha_{1,2} >=< \alpha_{2,3}, \alpha_{2,3} >= \frac{1}{3}$ et
$< \alpha_{2,3}, \alpha_{1,2} >= -\frac{1}{2} < \alpha_{1,2}, \alpha_{1,2} >^{\frac{1}{2}} < \alpha_{2,3}, \alpha_{2,3} >^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}$, ce qui entraîne que :

$$2a - b \in \mathbb{N}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{2 < \lambda_0, \alpha_{2,3} >}{< \alpha_{2,3}, \alpha_{2,3} >} &= 2a\frac{< \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3} >}{< \alpha_{2,3}, \alpha_{2,3} >} + 2b \\
&= -a + 2b \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Et :

$$\frac{2 < \lambda_0, \alpha_{1,3} >}{< \alpha_{1,3}, \alpha_{1,3} >} = a + b \in \mathbb{N}.$$

car $\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,3}$.

Alors :

$$\lambda_0 + \delta = (a+1)\theta_1 + (b-a)\theta_2 - (b+1)\theta_3.$$

Pour toute permutation s de $\{1,2,3\}$, on a :

$$s(\lambda_0 + \delta) = (a+1)\theta_{s(1)} + (b-a)\theta_{s(2)} - (b+1)\theta_{s(3)},$$

et donc

$$s(\lambda_0 + \delta) + \delta = (a+1)\theta_{s(1)} + (b-a)\theta_{s(2)} - (b+1)\theta_{s(3)} + \theta_1 - \theta_3.$$

On note $\varepsilon(s)$, la signature de s.

Pour $s = \mathrm{id}$

On a $\varepsilon(s) = 1$ et

$$\begin{aligned} s(\lambda_0 + \delta) + \delta &= (a+2)\theta_1 + (b-a)\theta_2 - (b+2)\theta_3 \\ &= (a+b+4)\theta_1 + (-a+2b+2)\theta_2. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{s = (2,3,1)}$

On a $\varepsilon(s) = 1$ et

$$\begin{aligned} s(\lambda_0 + \delta) + \delta &= -b\theta_1 + (a+1)\theta_2 + (b-a-1)\theta_3 \\ &= (a-2b+1)\theta_1 + (2a-b+2)\theta_2. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{s = (3,1,2)}$

On a $\varepsilon(s) = 1$ et

$$\begin{aligned} s(\lambda_0 + \delta) + \delta &= (b-a+1)\theta_1 - (b+1)\theta_2 + a\theta_3 \\ &= (-2a+b+1)\theta_1 + (-a-b-1)\theta_2. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{s = (2,1,3)}$

On a $\varepsilon(s) = -1$ et

$$\begin{aligned} s(\lambda_0 + \delta) + \delta &= (b-a+1)\theta_1 + (a+1)\theta_2 - (b+2)\theta_3 \\ &= (-a+2b+3)\theta_1 + (a+b+3)\theta_2. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{s = (3,2,1)}$

On a $\varepsilon(s) = -1$ et

$$\begin{aligned} s(\lambda_0 + \delta) + \delta &= -b\theta_1 + (b-a)\theta_2 + a\theta_3 \\ &= (-a-b)\theta_1 + (-2a+b)\theta_2. \end{aligned}$$

Pour s = (1, 3, 2)

On a $\varepsilon(s) = -1$ et

$$\begin{aligned} s(\lambda_0 + \delta) + \delta &= (a+2)\theta_1 - (b+1)\theta_2 + (b-a-1)\theta_3 \\ &= (2a-b+3)\theta_1 + (a-2b)\theta_2. \end{aligned}$$

Et donc le caractère de ρ est donné pour tout t de T par :

$$\begin{aligned} \chi_\rho(t) = \frac{1}{D^+(t)} \Big[& e^{i[(a+b+4)\theta_1 + (-a+2b+2)\theta_2]} + e^{i[(a-2b+1)\theta_1+(2a-b+2)\theta_2]} \\ & + e^{i[(-2a+b+1)\theta_1+(-a-b-1)\theta_2]} - e^{i[(-a+2b+3)\theta_1+(a+b+3)\theta_2]} \\ & - e^{i[(-a-b)\theta_1+(-2a+b)\theta_2]} - e^{i[(2a-b+3)\theta_1+(a-2b)\theta_2]} \Big]. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout t de T, on a :

$$\begin{aligned} D(t) &= \prod_{\alpha\in\Delta} (1 - e^{i\alpha}) \\ &= e^{i\delta} \prod_{\alpha\in\Delta^+} (1 - e^{-i\alpha}) \quad e^{-i\delta} \prod_{\alpha\in\Delta^+} (1 - e^{i\alpha}) \\ &= D^+(t) D^+(t^{-1}). \end{aligned}$$

Alors, si on définit la fonction $\mathfrak{E}$ par :

$$\chi_\rho(t) = \frac{\mathfrak{E}(t)}{D^+(t)},$$

pour tout t de T, on obtient que :

$$\begin{aligned} m_\rho &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T \prod_{j=1}^{3} \frac{1}{1 - e^{-i\theta_j(t)}} \frac{\mathfrak{E}(t^{-1})}{D^+(t^{-1})} D^+(t) D^+(t^{-1}) dt \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T \prod_{j=1}^{3} \frac{1}{1 - e^{-i\theta_j(t)}} \mathfrak{E}(t^{-1}) D^+(t) dt \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T \mathfrak{E}(t^{-1}) \frac{e^{i(2\theta_1+\theta_2)(t)}(1 - e^{i(\theta_1-\theta_2)(t)})(1 - e^{i(2\theta_1+\theta_2)(t)})(1 - e^{i(\theta_1+2\theta_2)(t)})}{(1 - e^{-i\theta_1(t)})(1 - e^{-i\theta_2(t)})(1 - e^{-i(-\theta_1-\theta_2)(t)})} dt. \end{aligned}$$

On pose maintenant :

$$F(\theta_1(t), \theta_2(t)) = \frac{1}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)(t)}} G(\theta_1(t), \theta_2(t))$$

où

$$G(\theta_1(t), \theta_2(t)) = \mathfrak{E}(t^{-1}) \frac{e^{i(2\theta_1+\theta_2)(t)}(1 - e^{i(\theta_1-\theta_2)(t)})(1 - e^{i(2\theta_1+\theta_2)(t)})(1 - e^{i(\theta_1+2\theta_2)(t)})}{(1 - e^{-i\theta_1(t)})(1 - e^{-i\theta_2(t)})}$$

On se met au point $\theta_0(t)$ tel que $G(\theta_0(t), -\theta_0(t)) \neq 0$.
Il existe un voisinage $]\theta_0(t) - \alpha, \theta_0(t) + \alpha[$ sur lequel :

$$|G(\theta(t), -\theta(t))| > \frac{|G(\theta_0(t), -\theta_0(t))|}{2} = A$$

et

$$\begin{aligned}\int_T |F(\theta(t) + s, -\theta(t) + s)| 2d\theta ds &\geq 2A \int_{s=-\alpha}^{s=+\alpha} \frac{1}{|1 - e^{i(2s)}|} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} d\theta ds \\ &\geq 4A\pi \int_{s=-\alpha}^{s=+\alpha} \frac{ds}{|1 - e^{i(2s)}|}\end{aligned}$$

Or $|1 - e^{i(2s)}|$ est équivalent en $s = 0$ à $|s|$ et donc l'intégrale m_ρ diverge.

IV.2 La fonction génératrice de la multiplicité.

Définition IV.2.1
Pour tout $r > 0$, l'application

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} : V &\longrightarrow V \\ z &\longmapsto rz\end{aligned}$$

est appelée dilatation de V.

On considère le groupe

$$\mathbb{R}^+ \times K = \{(r, k),\ r > 0,\ k \in K\}$$

muni de la multiplication

$$(r, k).(r', k') = (rr', kk'),$$

pour tout (r, k), (r', k') de $\mathbb{R}^+ \times K$. Il agit naturellement sur V par

$$(r, k).z = r^{-1}(k.z)$$

et donc de façon naturelle sur $\mathcal{H}_\nu$. En posant, pour tout F de $\mathcal{H}_\nu$:

$$T_r F(z) = F(rz),$$

on définit dans l'espace $\mathcal{H}_\nu$, un opérateur diagonal T_r tel que :

$$\begin{aligned}\big(T_r \circ W_\nu(k)\big)(z^l) &= (r, k).z^l \\ &= r^l (k.z)^l.\end{aligned}$$

Lemme IV.2.2
Pour tout $r < 1$, T_r est un opérateur à trace de trace :

$$\mathfrak{Tr}(T_r) = \sum_{N \geq 0} r^N \binom{N + n - 1}{n - 1} < \infty.$$

où $\binom{N+n-1}{n-1}$ désigne le coefficient de binôme d'ordre $n - 1$.

Preuve

Il est en effet positif, diagonalisé sur la base orthonormée de $\mathcal{H}_\nu$ formée par les monômes homogènes de $\mathcal{H}_\nu$ et sa trace est :

$$\sum_{N\geq 0} r^N \dim(\mathcal{P}_N(V)).$$

où $\mathcal{P}_N(V)$ est l'ensemble des polynômes holomorphes homogènes de dégré N.
On obtient par récurrence que :

$$\dim(\mathcal{P}_N(V)) = \binom{N+n-1}{n-1}.$$

Et donc la série

$$\begin{aligned}\sum_{N\geq 0} r^N \dim(\mathcal{P}_N(V)) &= \sum_{N\geq 0} r^N \binom{N+n-1}{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{N\geq 0} \left(r^{N+n-1}\right)^{(n-1)}\end{aligned}$$

converge puisque la série $\sum_{N\geq 0} r^{N+n-1} = \dfrac{1}{(1-r)^n}$ converge absolumment pour $r<1$. ■

Le symbole de l'opérateur $T_r \circ W_\nu(k)$ est donné par :

$$E_*(r,k)(z) = \frac{< E_{(r,k)z}, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}, \quad z \in \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}.$$

En particulier

$$\begin{aligned}E_*(r,t)(z) &= \frac{< E_{(r,t)z}, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}} \\ &= e^{\frac{1}{2}(t^{-1}rz\bar{z}-z\bar{z})},\end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(r,t)(z)dzd\bar{z} = (2\pi)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-re^{-i\theta_j}}, \quad \forall t \in T.$$

$E_*(r,t)(z)$ est donc intégrable sur $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ pour $r<1$. On introduit alors la fonction $m_\rho(r)$ définie par :

$$m_\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_K \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(r,k)(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk.$$

Avec les mêmes arguments que dans la partie IV.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
m_\rho(r) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T D(t)\chi_\rho(t^{-1})\int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} E_*(r,t)(z)dzd\bar{z}dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T D(t)\chi_\rho(t^{-1})\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-re^{-i\theta_j}}dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T \prod_{j=1}^{n}\sum_{p_j\geq 0}(re^{-i\theta_j})^{p_j}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,\dots,p_n\geq 0} r^{p_1+\cdots+p_n}\int_T e^{-i(p_1\theta_1+\cdots+p_n\theta_n)}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{N\geq 0} r^N\int_T \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} e^{-i(p_1\theta_1+\cdots+p_n\theta_n)}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt \\
&= \sum_{N\geq 0} r^N m_\rho^{(N)},
\end{aligned}$$

si on note

$$m_\rho^{(N)} = \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} e^{-i(p_1\theta_1+\cdots+p_n\theta_n)}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt.$$

C'est-à-dire que l'introduction du groupe de dilatation nous permet de chercher les multiplicités des représentations du groupe $\mathbb{R}\times K$ dans $\mathcal{H}_\nu$.
Pour des dégrés différents M et$N$, les représentations de $\mathbb{R}\times K$ dans $\mathcal{P}_M(V)$ et $\mathcal{P}_N(V)$ n'ont aucun entrelacement.

<u>Définition IV.2.3</u>
La fonction $m_\rho(r)$ est appelée la fonction génératrice des multiplicités de ρ.

Cette définition vient du résultat suivant :
Soit ρ_N la représentation de K dans $\mathcal{P}_N(V)$ définie par :

$$\rho_N(k)f(z) = f(k^{-1}z), \ \ \forall k\in K,$$

pour tout élément f de $\mathcal{P}_N(V)$ défini par

$$f(z) = \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} a_{p_1,\dots,p_n} z_1^{p_1}\dots z_n^{p_n}, \ \ z\in V.$$

Lemme IV.2.4

i) Le caractère de ρ_N est la fonction centrale χ_{ρ_N} telle que :

$$\chi_{\rho_N} : t \longmapsto \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} e^{-i(p_1\theta_1+\cdots+p_n\theta_n)}, \quad \forall t \in T.$$

ii) Pour tout N dans $\mathbb{N}$ et ρ dans $\widehat{K}$, $m_\rho^{(N)}$ est la multiplicité de ρ dans ρ_N.

Preuve

i) Pour tout t de T, on a :

$$\begin{aligned}\rho_N(t)f(z) &= f(t^{-1}z)\\ &= \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} e^{-i(p_1\theta_1+\cdots+p_n\theta_n)} a_{p_1,\ldots,p_n} z_1^{p_1}\ldots z_n^{p_n}.\end{aligned}$$

Et comme les éléments $z_1^{p_1}\ldots z_n^{p_n}$ tels que $p_1+\cdots+p_n = N$ forment une base diagonale de $\mathcal{P}_N(V)$, on obtient que :

$$\begin{aligned}\chi_{\rho_N}(t) &= \mathfrak{T}r\rho_N(t)\\ &= \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} e^{-i(p_1\theta_1+\cdots+p_n\theta_n)}.\end{aligned}$$

ii) On écrit :

$$\rho_N = \sum_{\varphi\in\hat{K}} \mathrm{mult}(\varphi,\rho_N)\varphi$$

et

$$\chi_{\rho_N}(t) = \sum_{\varphi\in\hat{K}} \mathrm{mult}(\varphi,\rho_N)\chi_\varphi(t), \qquad t \in T.$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}m_\rho^{(N)} &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T \sum_{p_1+\cdots+p_n=N} e^{-i(p_1\theta_1+\cdots+p_n\theta_n)}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt\\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T \chi_{\rho_N}(t)\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt\\ &= \int_K \sum_{\varphi\in\hat{K}} \mathrm{mult}(\varphi,\rho_N)\chi_\varphi(k)\chi_\rho(k^{-1})dk\\ &= \mathrm{mult}(\rho,\rho_N).\end{aligned}$$

■

Par ailleurs, on peut interpréter différemment l'intégrale

$$m_\rho^{(N)} = \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T \chi_{\rho_N}(t)\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt.$$

En effet si K est le groupe $U(n)$ tout entier, la représentation W_ν se décompose en

$$W_\nu = \bigoplus_{N\geq 0} \tilde{\rho}_N,$$

où chaque $\tilde{\rho}_N$ est irréductible et non équivalent à $\tilde{\rho}_M$, si $M \neq N$.

Soit Π_N le projecteur spectral associé à $\tilde{\rho}_N$.

Π_N est alors la projection sur l'espace des polynômes homogènes de dégré N. On a :

Corollaire IV.2.5

Pour tout N dans $\mathbb{N}$ et ρ dans $\widehat{K}$, on a :

$$m_\rho^{(N)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T\int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} (\widehat{W_\nu}(t) * \widehat{\Pi}_N)(z)\overline{\chi_\rho(t)}D(t)dzd\bar{z}dt.$$

Preuve

D'après [1] le symbole de Π_N est :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Pi}_N(z) &= \int_{U(n)} E_*(k)(z)\chi_{\tilde{\rho}_N}(k^{-1})dk. \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}\int_T e^{\frac{1}{2}t^{-1}z\bar{z}}\chi_{\tilde{\rho}_N}(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}\int_T \sum_{l\geq 0}\frac{1}{l!}(\frac{1}{2}t^{-1}z\bar{z})^l\chi_{\tilde{\rho}_N}(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}}{|\mathfrak{w}|}\sum_{l\geq 0}\frac{1}{2^l l!}\int_T\sum_{|p|=l}\frac{l!}{p_1!\dots p_n!}(z_1\bar{z}_1)^{p_1}\dots(z_n\bar{z}_n)^{p_n} \\
&\qquad\qquad e^{i(p_1\theta_1+\dots+p_n\theta_n)}\chi_{\tilde{\rho}_N}(t^{-1})D(t)dt.
\end{aligned}$$

Et comme le caractère associé à $\tilde{\rho}$ est $\chi_{\tilde{\rho}_N}(t) = \sum_{|q|=N} e^{-i(q_1\theta_1+\dots+q_n\theta_n)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{\Pi}_N(z) &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}\frac{1}{2^N N!}\int_T\sum_{p_1+\dots+p_n=N}\frac{N!}{p_1!\dots p_n!}(z_1\bar{z}_1)^{p_1}\dots(z_n\bar{z}_n)^{p_n}\chi_{\tilde{\rho}_N}(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{1}{N!}(\frac{z\bar{z}}{2})^N e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}.
\end{aligned}$$

On revient maintenant au cas d'un sous-groupe fermé connexe quelconque K de $U(n)$. Le symbole de l'opérateur $W_\nu(t) \circ \Pi_N$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\widehat{W_\nu(t) \circ \Pi_N}(z) &= \widehat{W}_\nu(t) * \widehat{\Pi}_N(z) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} \widetilde{W_\nu}(t)(v,z)\widetilde{\Pi}_N(z,v) e^{\frac{z\bar{v}+v\bar{z}}{2}} e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_V e^{\frac{1}{2}(t^{-1}rz\bar{v}-z\bar{v})} \frac{1}{N!}(\frac{v\bar{z}}{2})^N e^{-\frac{1}{2}v\bar{z}} e^{\frac{z\bar{v}+v\bar{z}}{2}} e^{-\frac{v\bar{v}}{2}} dv d\bar{v} \\
&= \frac{1}{N!}(\frac{tz\bar{z}}{2})^N e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Sa trace est donc :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Tr}\big(W_\nu(t) \circ \Pi_N\big) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} (\widehat{W}_\nu(t) * \widehat{\Pi}_N)(z) dz d\bar{z} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_V \frac{1}{N!}(\frac{tz\bar{z}}{2})^N e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}} dz d\bar{z} \\
&= \sum_{|q|=N} e^{-i(q_1\theta_1+\cdots+q_n\theta_n)}.
\end{aligned}$$

Et on retrouve :

$$\begin{aligned}
m_\rho^{(N)} &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T \mathfrak{Tr}(W_\nu(t) \circ \Pi_N)\overline{\chi_\rho(t)} D(t) dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{|\mathfrak{w}|} \int_T \int_{\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}} (\widehat{W}_\nu(t) * \widehat{\Pi}_N)(z)\overline{\chi_\rho(t)} D(t) dz d\bar{z} dt.
\end{aligned}$$

■

Proposition IV.2.6

(K, H_n) est une paire de Gelfand si et seulement si pour tout ρ de $\widehat{K}$, on a :

$$\lim_{r \mapsto 1} m_\rho(r) \leq 1.$$

Preuve

En effet, par définition, la multiplicité de ρ dans W_ν notée m_ρ est la somme des $m_\rho^{(N)}$ si cette somme est finie et infini sinon. ■

Chapitre V

PAIRES DE GELFAND ET ETATS COHERENTS.

On a vu dans la partie IV que la fonction génératrice de la multiplicité caractérise les paires de Gelfand. Dans cette partie, on se propose d'étudier l'intersection $\mathcal{O}^{G}_{(\alpha,0,1)} \cap \mathfrak{k}^{\perp}$ en utilisant la fonction génératrice de la multiplicité. Pour cela, on rappelle d'abord le résultat suivant dû à Guillemin et Sternberg.
Soit K un groupe de Lie compact et (X, ω) une variété symplectique sur laquelle K agit de façon hamiltonienne c'est-à-dire qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens $\mathcal{H}(X)$.
C'est en particulier le cas lorsque l'action de K sur X possède une application moment $\tau : X \to \mathfrak{k}^*$ telle que si $\tilde{X} = \tau(x)X,\ x \in X,\ d\tilde{X}_{|_x} = i(X^*)\omega$.
On dira alors que X est un espace K-hamiltonien.
On définit sur X une préquantification K-invariante c'est-à-dire la donnée d'un fibré en droites L, d'une connexion ∇ et d'un produit scalaire hermitien $< .,. >_L$ sur L.
On considère $\mathfrak{h}$ une polarisation K-invariante définie positive et l'espace Γ des sections polarisées sur L.
On désigne par π la représentation de K dans Γ. On a :

Théorème V.1 [19]
Soit $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe entière de K.
Si $\mathcal{O}$ n'est pas dans l'image de l'application moment alors la représentation irréductible de K correspondant à $\mathcal{O}$ n'apparait pas dans π.

En particulier pour $X = \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$, l'orbite $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ est un espace hamiltonien muni d'une structure complexe $H_n^{\mathbb{C}}$-invariante et l'action de K dans V est fortement hamiltonienne. Son applicaton moment $\tau_{\mathfrak{k}}$ est définie en II.27.
L'espace Γ des sections holomorphes sur le fibré linéaire $L \to \mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$ est identifié à l'espace $\mathcal{H}_\nu$ des fonctions de carré intégrable muni du produit scalaire $< .,. >_{\mathcal{H}_\nu}$ (voir partie III).
Puisque W_ν est la représentation de K dans $\mathcal{H}_\nu$, si $\mathcal{O}^{K}_{P_\rho}$ est l'orbite coadjointe entière de K associée à ρ de $\widehat{K}$ on a :

Corollaire V.2

Si ρ apparaît dans W_ν alors $\mathcal{O}^K_{P_\rho}$ est contenu dans l'image de l'application moment.

Théorème V.3

On suppose qu'il existe deux entiers distincts et non nuls M et N tels que

$$m_\rho^{(N)} \geq 1 \text{ et } m_\rho^{(M)} \geq 1,$$

alors il existe un certain μ_0 dans $\mathfrak{g}^*$ tel que l'intersection $\mathcal{O}^G_{\mu_0} \cap \mathfrak{k}^\perp$ contienne au moins deux K-orbites.

Preuve

Soit $r_\mathfrak{k} : \mathfrak{u}(n)^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ la restriction canonique.
On désigne par $\mathcal{O}_N^{U(n)}$ l'orbite coadjointe de $U(n)$ associée ρ_N.
Si $m_\rho^{(N)} \geq 1$ alors $\mathrm{mult}(\rho, \rho_N) \geq 1$. En appliquant le corollaire V.2, on obtient que

$$\mathcal{O}^K_{P_\rho} \subset r_\mathfrak{k}(\mathcal{O}_N^{U(n)}) \subset \tau_{\mathfrak{u}(n)}(V)$$

où $\tau_{\mathfrak{u}(n)}$ est l'application moment de l'action du groupe compact $U(n)$ sur V.
D'autre part, $r_\mathfrak{k}(\mathcal{O}_N^{U(n)})$ contient le point $r_\mathfrak{k}(\mu_0)$ où μ_0 est défini par :

$$\begin{aligned} \mu_0 : \mathfrak{u}(n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{N}{i} x_{1,1}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{N}{i} x_{1,1} &= \frac{N}{i} < (1,0,\ldots,0), X(1,0,\ldots,0) > \\ &= \frac{1}{i} < \sqrt{N}(1,0,\ldots,0), X(\sqrt{N},0,\ldots,0) > \\ &= \tau_{\mathfrak{u}(n)}(Z_N)(X), \end{aligned}$$

Z_N étant l'élément $(\sqrt{N},0,\ldots,0)$ de $\mathbb{C}^n$.
Ainsi donc $\mathcal{O}_N^{U(n)}$ est une orbite coadjointe de $U(n)$ passant par μ_0. En plus, elle est dans l'image par $\tau_{\mathfrak{u}(n)}$ de la sphère de rayon $\sqrt{N}$.
On considère maintenant l'injection canonique

$$\mathrm{inj} : \mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(n).$$

Puisque

$$\tau_\mathfrak{k} = \tau_{\mathfrak{u}(n)} \circ \mathrm{inj},$$

alors $r_\mathfrak{k}(\mathcal{O}_N^{U(n)})$ est dans l'image par $\tau_\mathfrak{k}$ de la sphère de rayon $\sqrt{N}$.
De même, si on désigne par $\mathcal{O}_M^{U(n)}$ l'orbite coadjointe de $U(n)$ associée à ρ_M et puisque $m_\rho^{(M)} \geq 1$, on obtient avec les mêmes arguments que $r_\mathfrak{k}(\mathcal{O}_M^{U(n)})$ est dans l'image par $\tau_\mathfrak{k}$ de

la sphère de rayon $\sqrt{M}$.
Les deux sphères sont différentes, il y a donc apparition de deux K-orbites dans V.
Et enfin puisque

$$\tau_{\mathfrak{k}}^{-1}(\mathcal{O}_{-2\alpha}^{K}) = \mathcal{O}_{(\alpha,0,1)}^{G} \cap \mathfrak{k}^{\perp},$$

elles sont toutes deux dans $\mathcal{O}_{(\alpha,0,1)}^{G} \cap \mathfrak{k}^{\perp}$. ∎

De ce résultat, on peut déduire deux corollaires immédiats :

Corollaire V.4
Si pour tout ρ de $\widehat{K}$,

$$m_\rho(r) = m_\rho^{(N)} r^N \text{ avec } m_\rho^{(N)} \leq 1$$

alors, pour tout α de $\mathfrak{k}^*$, l'intersection $\mathcal{O}_{(\alpha,0,1)}^{G} \cap \mathfrak{k}^{\perp}$ contient au plus une seule K-orbite.

Corollaire V.5
Si il existe ρ de $\widehat{K}$ tel que m_ρ est non borné, alors pour tout α de $\mathfrak{k}^*$, l'intersection $\mathcal{O}_{(\alpha,0,1)}^{G} \cap \mathfrak{k}^{\perp}$ contient au moins deux K-orbites.

En effet, si $(\alpha, 0, 1)$ est entier dans $\mathfrak{g}^*$ (*i.e.* le caractère correspondant s'exponentie à tout le stabilisateur de $(\alpha, 0, 1)$) et si il existe ρ de $\widehat{K}$ et tel que m_ρ est non borné,
la représentation de G associée à l'orbite $\mathcal{O}_{(\alpha,0,1)}^{G}$ contient la représentation ρ_α de K associée à $\mathcal{O}_{\alpha}^{K}$. Elle est réalisée dans $\mathcal{H}_\nu$ qui contient donc ρ_α. D'après le théorème II.1.5, $\mathcal{P}(V)$ contient une infinité de représentations de ce type, elles ne peuvent être contenues toutes dans un des espaces $\mathcal{P}_N(V)$ donc il y a au moins N et M tels que :

$$m_\rho^{(N)} \geq 1 \text{ et } m_\rho^{(M)} \geq 1, \quad M \neq N.$$

Par application du théorème précédent, l'intersection $\mathcal{O}_{(\alpha,0,1)}^{G} \cap \mathfrak{k}^{\perp}$ contient au moins deux K-orbites.

On suppose maintenant que m_ρ est homogène pour tout ρ de $\widehat{K}$ c'est-à-dire que :

$$m_\rho(r) = m_\rho^{(N_\rho)} r^{N_\rho}$$

Rappelons [6] que si il existe C tel que :

$$m_\rho^{(N_\rho)} \leq C$$

pour tout ρ de $\widehat{K}$, alors la paire est de Gelfand *i.e.* $m_\rho^{(N_\rho)} \leq 1$.

Problème ouvert

On suppose que pour tout ρ de $\widehat{K}$ la fonction m_ρ est telle que :

$$m_\rho(r) = m_\rho^{(N_\rho)} r^{N_\rho} \text{ et } \sup_\rho m_\rho^{(N_\rho)} = \infty.$$

La paire (K, H_n) n'est bien entendu pas de Gelfand puisque pour au moins un ρ, on a :

$$\lim_{r \to 1} m_\rho(r) > 1.$$

Dans ce cas, toutes les K-orbites qui apparaîssent dans $\mathcal{O}^G_{(\alpha,0,1)} \cap \mathfrak{k}^\perp$ sont dans la même $U(n)$-orbite (dans $\mathfrak{h}_n^*$). On conjecture que plusieurs orbites apparaîssent.

Chapitre VI

EXEMPLES.

VI.1 Le cas $SU(3) \triangleright H_3$.

On se place dans les mêmes conditions que dans les parties IV.1 et IV.2 et on se propose de calculer l'intégrale

$$\begin{aligned}
m_\rho(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{SU(3)}\int_{\mathcal{O}^{H_3}_{(0,1)}} E_*(r,k)(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T D(t)\chi_\rho(t^{-1})\prod_{j=1}^{3}\frac{1}{1-re^{-i\theta_j(t)}}dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} r^{p_1+p_2+p_3}\int_T e^{-i(p_1\theta_1+p_2\theta_2+p_3\theta_3)}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} r^{p_1+p_2+p_3}\int_T e^{-i[(p_1-p_3)\theta_1+(p_2-p_3)\theta_2]}\mathfrak{E}(t^{-1})D^+(t)dt,
\end{aligned}$$

où $\mathfrak{E}(t)$ est défini dans la partie IV.1. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}(t^{-1})D^+(t) = \Big[& e^{-i[(a+b+4)\theta_1+(2b-a+2)\theta_2]} + e^{-i[(a-2b+1)\theta_1+(2a-b+2)\theta_2]} \\
& + e^{-i[(-2a+b+1)\theta_1-(a+b+1)\theta_2]} - e^{-i[(2b-a+3)\theta_1+(a+b+3)\theta_2]} \\
& - e^{-i[(-a-b)\theta_1+(b-2a)\theta_2]} - e^{-i[(-b+2a+3)\theta_1+(a-2b)\theta_2]}\Big] \\
& \times\Big[e^{i(4\theta_1+2\theta_2)} - e^{i(3\theta_1+3\theta_2)} - e^{i(3\theta_1)} + e^{i(\theta_1+2\theta_2)} + e^{i(\theta_1-\theta_2)} - 1\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-i[(a+b)\theta_1+(2b-a)\theta_2]} - e^{-i[(a+b+1)\theta_1+(2b-a-1)\theta_2]} - e^{-i[(a+b+1)\theta_1+(2b-a+2)\theta_2]} \\
&+ e^{-i[(a+b+3)\theta_1+(2b-a)\theta_2]} + e^{-i[(a+b+3)\theta_1+(2b-a+3)\theta_2]} - e^{-i[(a+b+4)\theta_1+(2b-a+2)\theta_2]}
\end{aligned}$$

$$+e^{-i[(a-2b-3)\theta_1+(2a-b)\theta_2]} - e^{-i[(a-2b-2)\theta_1+(2a-b-1)\theta_2]} - e^{-i[(a-2b-2)\theta_1+(2a-b+2)\theta_2]}$$

$$+e^{-i[(a-2b)\theta_1+(2a-b)\theta_2]} + e^{-i[(a-2b)\theta_1+(2a-b+3)\theta_2]} - e^{-i[(a-2b+1)\theta_1+(2a-b+2)\theta_2]}$$

$$+e^{-i[(-2a+b-3)\theta_1-(a+b+3)\theta_2]} - e^{-i[(-2a+b-2)\theta_1-(a+b+4)\theta_2]} - e^{-i[(-2a+b-2)\theta_1-(a+b+1)\theta_2]}$$

$$+e^{-i[(-2a+b)\theta_1-(a+b+3)\theta_2]} + e^{-i[(-2a+b)\theta_1-(a+b)\theta_2]} - e^{-i[(-2a+b+1)\theta_1-(a+b+1)\theta_2]}$$

$$-e^{-i[(2b-a-1)\theta_1+(a+b+1)\theta_2]} + e^{-i[(2b-a)\theta_1+(a+b)\theta_2]} + e^{-i[(2b-a)\theta_1+(a+b+3)\theta_2]}$$

$$-e^{-i[(2b-a+2)\theta_1+(a+b+1)\theta_2]} - e^{-i[(2b-a+2)\theta_1+(a+b+4)\theta_2]} + e^{-i[(2b-a+3)\theta_1+(a+b+3)\theta_2]}$$

$$-e^{-i[(-a-b-4)\theta_1+(b-2a-2)\theta_2]} + e^{-i[(-a-b-3)\theta_1+(b-2a-3)\theta_2]} + e^{-i[(-a-b-3)\theta_1+(b-2a)\theta_2]}$$

$$-e^{-i[(-a-b-1)\theta_1+(b-2a-2)\theta_2]} - e^{-i[(-a-b-1)\theta_1+(b-2a+1)\theta_2]} + e^{-i[(-a-b)\theta_1+(b-2a)\theta_2]}$$

$$-e^{-i[(-b+2a-1)\theta_1+(a-2b-2)\theta_2]} + e^{-i[(-b+2a)\theta_1+(a-2b-3)\theta_2]} + e^{-i[(-b+2a)\theta_1+(a-2b)\theta_2]}$$

$$-e^{-i[(-b+2a+2)\theta_1+(a-2b-2)\theta_2]} - e^{-i[(-b+2a+2)\theta_1+(a-2b+1)\theta_2]} + e^{-i[(-b+2a+3)\theta_1+(a-2b)\theta_2]}.$$

L'expression de $m_\rho(r)$ est alors :

$$\frac{1}{4\pi^2|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}\Bigg[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{p_1+p_2+p_3}e^{-i[(p_1-p_3+a+b)\theta_1+(p_2-p_3-a+2b)\theta_2]}d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+\cdots+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{p_1+p_2+p_3}e^{-i[(p_1-p_3+2a-b+3)\theta_1+(p_2-p_3+a-2b)\theta_2]}d\theta_1 d\theta_2\Bigg]$$

Avec 36 intégrales entre les crochets, mais chaque intégrale n'apparait que si l'exposant de l'exponentielle qu'elle contient est nul. Il ne restera donc que les 36 termes suivants :

1) si $p_1 = p_3-a-b$ et $p_2 = p_3+a-2b$ dans l'expression de $m_\rho(r)$ il ne reste que :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int\int_0^{2\pi} r^{p_1+p_2+p_3}d\theta_1 d\theta_2 = +r^{3p_3-3b}$$

De la même manière on a :

2) si $p_1 = p_3 - a - b - 1$ et $p_2 = p_3 + a - 2b + 1$ $\Rightarrow$ $I_2 = -r^{3p_3-3b}$

3) si $p_1 = p_3 - a - b - 1$ et $p_2 = p_3 + a - 2b - 2$ $\Rightarrow$ $I_3 = -r^{3p_3-3b-3}$

4) si $p_1 = p_3 - a - b - 3$ et $p_2 = p_3 + a - 2b$ $\Rightarrow$ $I_4 = +r^{3p_3-3b-3}$

5) si $p_1 = p_3 - a - b - 3$ et $p_2 = p_3 + a - 2b - 3$ $\Rightarrow$ $I_5 = +r^{3p_3-3b-6}$

6)	si	$p_1 = p_3 - a - b - 4$	et	$p_2 = p_3 + a - 2b - 2$	$\Rightarrow$	$I_6 = -r^{3p_3-3b-6}$
7)	si	$p_1 = p_3 - a + 2b + 3$	et	$p_2 = p_3 - 2a + b$	$\Rightarrow$	$I_7 = +r^{3p_3-3a+3b+3}$
8)	si	$p_1 = p_3 - a + 2b + 2$	et	$p_2 = p_3 - 2a + b + 1$	$\Rightarrow$	$I_8 = -r^{3p_3-3a+3b+3}$
9)	si	$p_1 = p_3 - a + 2b + 2$	et	$p_2 = p_3 - 2a + b - 2$	$\Rightarrow$	$I_9 = -r^{3p_3-3a+3b}$
10)	si	$p_1 = p_3 - a + 2b$	et	$p_2 = p_3 - 2a + b$	$\Rightarrow$	$I_{10} = +r^{3p_3-3a+3b}$
11)	si	$p_1 = p_3 - a + 2b$	et	$p_2 = p_3 - 2a + b - 3$	$\Rightarrow$	$I_{11} = +r^{3p_3-3a+3b-3}$
12)	si	$p_1 = p_3 - a + 2b - 1$	et	$p_2 = p_3 - 2a + b - 2$	$\Rightarrow$	$I_{12} = -r^{3p_3-3a+3b-3}$
13)	si	$p_1 = p_3 + 2a - b + 3$	et	$p_2 = p_3 + a + b + 3$	$\Rightarrow$	$I_{13} = +r^{3p_3+3a+6}$
14)	si	$p_1 = p_3 + 2a - b + 2$	et	$p_2 = p_3 + a + b + 4$	$\Rightarrow$	$I_{14} = -r^{3p_3+3a+6}$
15)	si	$p_1 = p_3 + 2a - b + 2$	et	$p_2 = p_3 + a + b + 1$	$\Rightarrow$	$I_{15} = -r^{3p_3+3a+3}$
16)	si	$p_1 = p_3 + 2a - b$	et	$p_2 = p_3 + a + b + 3$	$\Rightarrow$	$I_{16} = +r^{3p_3+3a+3}$
17)	si	$p_1 = p_3 + 2a - b$	et	$p_2 = p_3 + a + b$	$\Rightarrow$	$I_{17} = +r^{3p_3+3a}$
18)	si	$p_1 = p_3 + 2a - b - 1$	et	$p_2 = p_3 + a + b + 1$	$\Rightarrow$	$I_{18} = -r^{3p_3+3a}$
19)	si	$p_1 = p_3 + a - 2b + 1$	et	$p_2 = p_3 - a - b - 1$	$\Rightarrow$	$I_{19} = -r^{3p_3-3b}$
20)	si	$p_1 = p_3 + a - 2b$	et	$p_2 = p_3 - a - b$	$\Rightarrow$	$I_{20} = +r^{3p_3-3b}$
21)	si	$p_1 = p_3 + a - 2b$	et	$p_2 = p_3 - a - b - 3$	$\Rightarrow$	$I_{21} = +r^{3p_3-3b-3}$
22)	si	$p_1 = p_3 + a - 2b - 2$	et	$p_2 = p_3 - a - b - 1$	$\Rightarrow$	$I_{22} = -r^{3p_3-3b-3}$
23)	si	$p_1 = p_3 + a - 2b - 2$	et	$p_2 = p_3 - a - b - 4$	$\Rightarrow$	$I_{23} = -r^{3p_3-3b-6}$
24)	si	$p_1 = p_3 + a - 2b - 3$	et	$p_2 = p_3 - a - b - 3$	$\Rightarrow$	$I_{24} = +r^{3p_3-3b-6}$
25)	si	$p_1 = p_3 + a + b + 4$	et	$p_2 = p_3 + 2a - b + 2$	$\Rightarrow$	$I_{25} = -r^{3p_3+3a+6}$
26)	si	$p_1 = p_3 + a + b + 3$	et	$p_2 = p_3 + 2a - b + 3$	$\Rightarrow$	$I_{26} = +r^{3p_3+3a+6}$
27)	si	$p_1 = p_3 + a + b + 3$	et	$p_2 = p_3 + 2a - b$	$\Rightarrow$	$I_{27} = +r^{3p_3+3a+3}$
28)	si	$p_1 = p_3 + a + b + 1$	et	$p_2 = p_3 + 2a - b + 2$	$\Rightarrow$	$I_{28} = -r^{3p_3+3a+3}$
29)	si	$p_1 = p_3 + a + b + 1$	et	$p_2 = p_3 + 2a - b - 1$	$\Rightarrow$	$I_{29} = -r^{3p_3+3a}$
30)	si	$p_1 = p_3 + a + b$	et	$p_2 = p_3 + 2a - b$	$\Rightarrow$	$I_{30} = +r^{3p_3+3a}$
31)	si	$p_1 = p_3 - 2a + b + 1$	et	$p_2 = p_3 - a + 2b + 2$	$\Rightarrow$	$I_{31} = -r^{3p_3-3a+3b+3}$
32)	si	$p_1 = p_3 - 2a + b$	et	$p_2 = p_3 - a + 2b + 3$	$\Rightarrow$	$I_{32} = +r^{3p_3-3a+3b+3}$
33)	si	$p_1 = p_3 - 2a + b$	et	$p_2 = p_3 - a + 2b$	$\Rightarrow$	$I_{33} = +r^{3p_3-3a+3b}$
34)	si	$p_1 = p_3 - 2a + b - 2$	et	$p_2 = p_3 - a + 2b + 2$	$\Rightarrow$	$I_{34} = -r^{3p_3-3a+3b}$
35)	si	$p_1 = p_3 - 2a + b - 2$	et	$p_2 = p_3 - a + 2b - 1$	$\Rightarrow$	$I_{35} = -r^{3p_3-3a+3b-3}$
36)	si	$p_1 = p_3 - 2a + b - 3$	et	$p_2 = p_3 - a + 2b$	$\Rightarrow$	$I_{36} = +r^{3p_3-3a+3b-3}$

On regroupe les résultats obtenus suivants les puissances de r. On obtient :

$$\begin{aligned} m_\rho(r) = \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\Bigg[& \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_1+I_2+I_{19}+I_{20}) + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_3+I_4+I_{21}+I_{22}) \\ & + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_5+I_6+I_{23}+I_{24}) + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_7+I_8+I_{31}+I_{32}) \\ & + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_9+I_{10}+I_{33}+I_{34}) + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_{11}+I_{12}+I_{35}+I_{36}) \\ & + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_{13}+I_{14}+I_{25}+I_{26}) + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_{15}+I_{16}+I_{27}+I_{28}) \\ & + \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_{17}+I_{18}+I_{29}+I_{30})\Bigg]. \end{aligned}$$

On étudie cette expression, terme par terme. Ainsi, on a :

- $$\begin{aligned} \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_1+I_2+I_{19}+I_{20}) &= \Bigg[\sum_{\substack{p_1=p_3-a-b\geq 0\\ p_2=p_3+a-2b\geq 0\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b} - \sum_{\substack{p_1=p_3-a-b-1\geq 0\\ p_2=p_3+a-2b+1\geq 0\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b} \\ & - \sum_{\substack{p_1=p_3+a-2b+1\geq 0\\ p_2=p_3-a-b-1\geq 0\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b} + \sum_{\substack{p_1=p_3+a-2b\geq 0\\ p_2=p_3-a-b\geq 0\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b}\Bigg]. \\ &= \Bigg[\sum_{\substack{p_3\geq a+b\\ p_3\geq -a+2b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b} - \sum_{\substack{p_3\geq a+b+1\\ p_3\geq -a+2b-1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b} \\ & - \sum_{\substack{p_3\geq -a+2b-1\\ p_3\geq a+b+1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b} + \sum_{\substack{p_3\geq -a+2b\\ p_3\geq a+b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b}\Bigg]. \end{aligned}$$

Or $2a-b\geq 0$ entraîne que $-a+2b\leq a+b$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0} (I_1+I_2+I_{19}+I_{20}) &= \sum_{p_3\geq a+b} r^{3p_3-3b} - \sum_{p_3\geq a+b+1} r^{3p_3+3b} \\ & \quad - \sum_{p_3\geq a+b+1} r^{3p_3+3b} + \sum_{p_3\geq a+b} r^{3p_3+3b} \\ &= 2r^{3a}. \end{aligned}$$

De la même manière on a :

$$\bullet \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_3+I_4+I_{21}+I_{22}) = -\sum_{\substack{p_3\geq a+b+1\\ p_3\geq -a+2b+2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-3} + \sum_{\substack{p_3\geq a+b+3\\ p_3\geq -a+2b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-3}$$
$$+\sum_{\substack{p_3\geq -a+2b\\ p_3\geq a+b+3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-3} - \sum_{\substack{p_3\geq -a+2b+2\\ p_3\geq a+b+1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-3}$$

Si $2a-b=0$, on a $-a+2b=a+b$ et donc :

$$\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_3+I_4+I_{21}+I_{22}) = -\sum_{p_3\geq 3a+2} r^{3p_3-3b-3} + \sum_{p_3\geq 3a+3} r^{3p_3-3b-3}$$
$$+\sum_{p_3\geq 3a+3} r^{3p_3-3b-3} - \sum_{p_3\geq 3a+2} r^{3p_3-3b-3}$$
$$= -2r^{3a+3}.$$

Si $2a-b\geq 1$, on a $-a+2b+2\leq a+b+1$ et donc :

$$\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_3+I_4+I_{21}+I_{22}) = -\sum_{p_3\geq a+b+1} r^{3p_3-3b-3} + \sum_{p_3\geq a+b+3} r^{3p_3-3b-3}$$
$$+\sum_{p_3\geq a+b+3} r^{3p_3-3b-3} - \sum_{p_3\geq a+b+1} r^{3p_3-3b-3}$$
$$= -2r^{3a} - 2r^{3a+3}.$$

En résumé :

$$\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_3+I_4+I_{21}+I_{22}) = \begin{cases} -2r^{3a+3} & \text{si} \quad 2a-b=0.\\ -2r^{3a}-2r^{3a+3} & \text{si} \quad 2a-b\geq 1.\end{cases}$$

$$\bullet \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_5+I_6+I_{23}+I_{24}) = \sum_{\substack{p_3\geq a+b+3\\ p_3\geq -a+2b+3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-6} - \sum_{\substack{p_3\geq a+b+4\\ p_3\geq -a+2b+2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-6}$$
$$-\sum_{\substack{p_3\geq -a+2b+2\\ p_3\geq a+b+4\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-6} + \sum_{\substack{p_3\geq -a+2b+3\\ p_3\geq a+b+3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3b-6}$$

De même $2a-b\geq 0$ entraîne que $-a+2b\leq a+b$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_5+I_6+I_{23}+I_{24}) &= \sum_{p_3\geq a+b+3} r^{3p_3-3b-6} - \sum_{p_3\geq a+b+4} r^{3p_3-3b-6}\\ &\quad - \sum_{p_3\geq a+b+4} r^{3p_3-3b-6} + \sum_{p_3\geq a+b+3} r^{3p_3-3b-6}\\ &= 2r^{3a+3}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_7+I_8+I_{31}+I_{32}) &= \sum_{\substack{p_3\geq a-2b-3\\ p_3\geq 2a-b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b+3} - \sum_{\substack{p_3\geq a-2b-2\\ p_3\geq 2a-b-1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b+3}\\ &\quad - \sum_{\substack{p_3\geq 2a-b-1\\ p_3\geq a-2b-2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b+3} - \sum_{\substack{p_3\geq 2a-b\\ p_3\geq a-2b-3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b+3}\end{aligned}$$

Si $2a-b=0$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_7+I_8+I_{31}+I_{32}) &= \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3-3a+3b+3} - \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3-3a+3b+3}\\ &\quad - \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3-3a+3b+3} + \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3-3a+3b+3}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Si $2a-b\geq 1$, puisque $a+b\geq 0$, on a $2a-b\geq a-2b$ et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_7+I_8+I_{31}+I_{32}) &= \sum_{p_3\geq 2a-b} r^{3p_3-3a+3b+3} - \sum_{p_3\geq 2a-b-1} r^{3p_3-3a+3b+3}\\ &\quad - \sum_{p_3\geq 2a-b-1} r^{3p_3-3a+3b+3} + \sum_{p_3\geq 2a-b} r^{3p_3-3a+3b+3}\\ &= -2r^{3a}.\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_7+I_8+I_{31}+I_{32}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 2a-b=0.\\ -2r^{3a} & \text{si} \quad 2a-b\geq 1.\end{cases}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_9+I_{10}+I_{33}+I_{34}) &= -\sum_{\substack{p_3\geq a-2b-2\\ p_3\geq 2a-b+2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b} + \sum_{\substack{p_3\geq a-2b\\ p_3\geq 2a-b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b}\\ &\quad + \sum_{\substack{p_3\geq 2a-b\\ p_3\geq a-2b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b} - \sum_{\substack{p_3\geq 2a-b+2\\ p_3\geq a-2b-2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b}\end{aligned}$$

Or $a+b\geq 0$ implique $a-2b\leq 2a-b$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_9+I_{10}+I_{33}+I_{34}) &= -\sum_{p_3\geq 2a-b+2} r^{3p_3-3a+3b}+\sum_{p_3\geq 2a-b} r^{3p_3-3a+3b}\\ &\quad +\sum_{p_3\geq 2a-b} r^{3p_3-3a+3b}-\sum_{p_3\geq 2a-b+2} r^{3p_3-3a+3b}\\ &= 2r^{3a}+2r^{3a+3}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{11}+I_{12}+I_{35}+I_{36}) &= \sum_{\substack{p_3\geq a-2b\\ p_3\geq 2a-b+3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b-3}-\sum_{\substack{p_3\geq a-2b+1\\ p_3\geq 2a-b+2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b-3}\\ &\quad -\sum_{\substack{p_3\geq 2a-b+2\\ p_3\geq a-2b+1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b-3}+\sum_{\substack{p_3\geq 2a-b+3\\ p_3\geq a-2b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3-3a+3b-3}\end{aligned}$$

De même $a+b\geq 0$ implique $a-2b\leq 2a-b$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{11}+I_{12}+I_{35}+I_{36}) &= \sum_{p_3\geq 2a-b+3} r^{3p_3-3a+3b-3}-\sum_{p_3\geq 2a-b+2} r^{3p_3-3a+3b-3}\\ &\quad -\sum_{p_3\geq 2a-b+2} r^{3p_3-3a+3b-3}+\sum_{p_3\geq 2a-b+3} r^{3p_3-3a+3b-3}\\ &= -2r^{3a+3}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{13}+I_{14}+I_{25}+I_{26}) &= \sum_{\substack{p_3\geq -2a+b-3\\ p_3\geq -a-b-3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+6}-\sum_{\substack{p_3\geq -2a+b-2\\ p_3\geq -a-b-4\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+6}\\ &\quad -\sum_{\substack{p_3\geq -a-b-4\\ p_3\geq -2a+b-2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+6}+\sum_{\substack{p_3\geq -a-b-3\\ p_3\geq -2a+b-3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+6}\end{aligned}$$

Puisque $a+b\geq 0$ et $2a-b\geq 0$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{13}+I_{14}+I_{25}+I_{26}) &= \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+6}-\sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+6}\\ &\quad -\sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+6}+\sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+6}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{15}+I_{16}+I_{27}+I_{28}) = -\sum_{\substack{p_3\geq -2a+b-2\\ p_3\geq -a-b-1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+3} + \sum_{\substack{p_3\geq -2a+b\\ p_3\geq -a-b-3\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+3} + \sum_{\substack{p_3\geq -a-b-3\\ p_3\geq -2a+b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+3} - \sum_{\substack{p_3\geq -a-b-1\\ p_3\geq -2a+b-2\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a+3}$$

De même $a+b\geq 0$ et $2a-b\geq 0$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{15}+I_{16}+I_{27}+I_{28}) &= -\sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+3} + \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+3}\\ &\quad + \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+3} - \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a+3}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{17}+I_{18}+I_{29}+I_{30}) = \sum_{\substack{p_3\geq -2a+b\\ p_3\geq -a-b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a} - \sum_{\substack{p_3\geq -2a+b+1\\ p_3\geq -a-b-1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a} - \sum_{\substack{p_3\geq -a-b-1\\ p_3\geq -2a+b+1\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a} - \sum_{\substack{p_3\geq -a-b\\ p_3\geq -2a+b\\ p_3\geq 0}} r^{3p_3+3a}$$

Si $2a-b=0$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{17}+I_{18}+I_{29}+I_{30}) &= \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a} - \sum_{p_3\geq 1} r^{3p_3+3a}\\ &\quad - \sum_{p_3\geq 1} r^{3p_3+3a} + \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a}\\ &= 2r^{3a}.\end{aligned}$$

Si $2a-b\geq 1$, on a alors $-a-b-1\leq 0$ et $-2a+b+1\leq 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{17}+I_{18}+I_{29}+I_{30}) &= \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a} - \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a}\\ &\quad - \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a} + \sum_{p_3\geq 0} r^{3p_3+3a}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_{p_1,p_2,p_3\geq 0}(I_{17}+I_{18}+I_{29}+I_{30})=\begin{cases}2r^{3a} & \text{si} \quad 2a-b=0.\\ 0 & \text{si} \quad 2a-b\geq 1.\end{cases}$$

Conclusion

• si $2a-b=0$:

$$\begin{aligned} m_\rho(r) &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\left[2r^{3a}-2r^{3a+3}+2r^{3a+3}+0+2r^{3a}+2r^{3a+3}-2r^{3a+3}+0+0+2r^{3a}\right] \\ &= \frac{6}{|\mathfrak{w}|}r^{3a}=r^{3a}, \end{aligned}$$

car $|\mathfrak{w}|=6$.

• Si $2a-b\geq 1$:

$$\begin{aligned} m_\rho(r) &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\left[2r^{3a}-2r^{3a}-2r^{3a+3}+2r^{3a+3}-2r^{3a}+2r^{3a}+2r^{3a+3}-2r^{3a+3}+0+0+0\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et finalement :

$$m_\rho(r)=\begin{cases}r^{3a} & \text{si} \quad 2a-b=0.\\ 0 & \text{si} \quad 2a-b\geq 1.\end{cases}$$

Par suite

$$\lim_{r\to 1} m_\rho(r)\leq 1.$$

Ce qui confirme que $(SU(3),H_3)$ est une paire de Gelfand.

VI.2 Le cas $SU(2)\triangleright H_2$.

On conserve les mêmes notations que dans les parties IV.1 et VI.1 et on se propose de calculer l'intégrale :

$$m_\rho(r)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{SU(2)}\int_{\mathcal{O}^{H_2}_{(0,1)}}E_*(r,k)(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk,$$

pour tout ρ de $\widehat{K}$.

On choisit le tore diagonalisé T de $SU(2)$ dont les éléments sont de la forme :

$$t=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1} & 0\\ 0 & e^{i\theta_2}\end{pmatrix},\qquad \theta_j=\theta_j(t)\in[0,2\pi] \text{ avec } \theta_2=-\theta_1.$$

Toujours avec les mêmes arguments que précédemment, on a :

$$\begin{aligned}
m_\rho(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{SU(2)}\int_{\mathcal{O}^{H_2}_{(0,1)}} E_*(r,k)(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T D(t)\chi_\rho(t^{-1})\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{1-re^{-i\theta_j(t)}}dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2}\int_T e^{-i(p_1\theta_1+p_2\theta_2)}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2}\int_T e^{-i[(p_1-p_2)\theta_1]}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt.
\end{aligned}$$

Les racines de $SU(2)$ associées à T sont les formes linéaires :

$$\alpha_{1,2} = \theta_1 - \theta_2 = 2\theta_1 > 0$$

et

$$\alpha_{2,1} = \theta_2 - \theta_1 = -2\theta_1 < 0.$$

La demi somme des racines positives est :

$$\delta = \frac{1}{2}\alpha_{1,2} = \theta_1.$$

Ainsi donc

$$D^+(t) = e^{i\theta_1}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-i\alpha}) = e^{i\theta_1}(1-e^{-2i\theta_1})$$

et

$$D(t) = D^+(t)D^+(t^{-1}) = (1-e^{2i\theta_1})(1-e^{-2i\theta_1}).$$

Soit λ_0 le plus haut poids de ρ de $\widehat{K}$. Il ne dépend que de l'unique racine simple $\alpha_{1,2}$ de $SU(2)$. On écrit :

$$\lambda_0 = a\alpha_{1,2} = 2a\theta_1.$$

Vu que $\dfrac{2 < \lambda_0, \alpha_{1,2} >}{< \alpha_{1,2}, \alpha_{1,2} >} \in \mathbb{N}$, on obtient que $2a$ appartient à $\mathbb{N}$.

Pour tout t de T, le caractère $\chi_\rho(t)$ de ρ est :

$$\chi_\rho(t) = \frac{1}{D^+(t)}\sum_s \varepsilon(s)e^{i[s(\delta+\lambda_0)+\delta]}$$

où s est une permutation de $\{1,2\}$ de signature $\varepsilon(s)$.

Puisque $\lambda_0 + \delta = (a+1)\theta_1 - a\theta_2$, on a

$$s(\delta+\lambda_0) = (a+1)\theta_{s(1)} - a\theta_{s(2)}.$$

<u>Pour s = id</u>

on a $\varepsilon(s) = 1$ et

$$s(\delta + \lambda_0) = (a+1)\theta_1 - a\theta_2 = (2a+1)\theta_1.$$

<u>Pour s = (2, 1)</u>

on a $\varepsilon(s) = -1$ et

$$s(\delta + \lambda_0) = (a+1)\theta_2 - a\theta_1 = -(2a+1)\theta_1.$$

et donc

$$\begin{aligned}\chi_\rho(t) &= \frac{e^{i(2a+1)\theta_1} - e^{-i(2a+1)\theta_1}}{e^{i\theta_1}(1 - e^{-2i\theta_1})}\\ &= \frac{e^{2ia\theta_1} - e^{-2i(a+1)\theta_1}}{1 - e^{-2i\theta_1}}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}m_\rho(r) &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2}\int_T e^{-i[(p_1-p_2)\theta_1]}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt\\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2}\int_0^{2\pi} e^{-i[(p_1-p_2)\theta_1]}\frac{e^{-2ia\theta_1} - e^{2i(a+1)\theta_1}}{1 - e^{2i\theta_1}}(1 - e^{2i\theta_1})(1 - e^{-2i\theta_1})\frac{d\theta_1}{2\pi}\\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2}\int_0^{2\pi} e^{-i(p_1-p_2)\theta_1}\left[e^{-2ia\theta_1} - e^{-2i(a+1)\theta_1} - e^{2i(a+1)\theta_1} + e^{2ia\theta_1}\right]\frac{d\theta_1}{2\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2}\int_0^{2\pi}\Big[e^{-i(p_1-p_2+2a)\theta_1} - e^{-i(p_1-p_2+2a+2)\theta_1}\\ &\qquad\qquad - e^{-i(p_1-p_2-2a-2)\theta_1} + e^{-i(p_1-p_2-2a)\theta_1}\Big]\frac{d\theta_1}{2\pi}\\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\Big[\sum_{\substack{p_1\geq 0\\ p_2=p_1+2a\geq 0}} r^{2p_1+2a} - \sum_{\substack{p_1\geq 0\\ p_2=p_1+2a+2\geq 0}} r^{2p_1+2a+2} - \sum_{\substack{p_1\geq 0\\ p_2=p_1-2a-2\geq 0}} r^{2p_1-2a-2} + \sum_{\substack{p_1\geq 0\\ p_2=p_1-2a\geq 0}} r^{2p_1-2a}\Big]\\ &= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\Big[\sum_{p_1\geq 0} r^{2(p_1+a)} - \sum_{p_1\geq 0} r^{2(p_1+a+1)} - \sum_{p_1\geq 2a+2} r^{2(p_1-a-1)} + \sum_{p_1\geq 2a} r^{2(p_1-a)}\Big]\\ &= \frac{2}{|\mathfrak{w}|}r^{2a}\\ &= r^{2a},\end{aligned}$$

car $|\mathfrak{w}| = 2$. Et enfin :

$$\lim_{r\mapsto 1} m_\rho(r) = 1.$$

$\big(SU(2), H_2\big)$ est bien une paire de Gelfand.

Remarque

Dans le cas $SU(2) \triangleright H_2$ l'intégrale donnant m_ρ est convergente. On peut l'écrire directement. En effet pour tout ρ de $\widehat{K}$, on a :

$$\begin{aligned}
m_\rho &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{SU(2)}\int_{\mathcal{O}^{H_2}_{(0,1)}} E_*(k)(z)\chi_\rho(k^{-1})dzd\bar{z}dk \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T \chi_\rho(t^{-1})D(t)\int_{\mathcal{O}^{H_2}_{(0,1)}} E_*(t)(z)dzd\bar{z}dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_T \prod_{j=1}^{2}\frac{1}{1-e^{-i\theta_j(t)}}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1-e^{i\theta_1})(1-e^{-i\theta_1})}\frac{e^{-2ia\theta_1}-e^{2i(a+1)\theta_1}}{1-e^{2i\theta_1}}(1-e^{2i\theta_1})(1-e^{-2i\theta_1})\frac{d\theta_1}{2\pi} \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i(4a+2)\theta_1}-1}{e^{-2i\theta_1}-1}e^{2ia\theta_1}(1+e^{i\theta_1})(1+e^{-i\theta_1})\frac{d\theta_1}{2\pi} \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{p=0}^{2a}e^{-2ip\theta_1}\Big)e^{2ia\theta_1}(2+e^{i\theta_1}+e^{-i\theta_1})\frac{d\theta_1}{2\pi} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

VI.3 Le cas $T' \triangleright H_2$.

avec

$$T' = \Big\{t = \begin{pmatrix} e^{iq_1\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{iq_2\theta_2}\end{pmatrix},\quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_1(t) \in [0,2\pi] \text{ et } q_1, q_2 \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
m_\rho(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{T'}\int_{\mathcal{O}^{H_2}_{(0,1)}} E_*(r,t)(z)\chi_\rho(t^{-1})dzd\bar{z}dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\int_{T'} D(t)\chi_\rho(t^{-1})\prod_{j=1}^{2}\frac{1}{1-re^{-iq_j\theta_j(t)}}dt \\
&= \frac{1}{|\mathfrak{w}|}\sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2}\int_{T'} e^{-i[(p_1q_1+p_2q_2)\theta_1]}\chi_\rho(t^{-1})D(t)dt.
\end{aligned}$$

Pour ρ de $\widehat{K}$ de plus haut poids $a\theta_1$, a appartenant à $\mathbb{Z}$, on a :

$$\chi_\rho(t) = e^{ia\theta_1}, \quad \forall t \in T'.$$

Et donc :

$$m_\rho(r) = \sum_{p_1,p_2\geq 0} r^{p_1+p_2} \int_0^{2\pi} e^{-i(p_1q_1+p_2q_2+a)\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \sum_{\substack{p_1,p_2\geq 0\\ p_1q_1+p_2q_2=-a}} r^{p_1+p_2}.$$

a) Si $\mathbf{q_1 = 0,\ q_2 \neq 0}$

On suppose que $q_2 > 0$. Si $a \leq 0$ et si a est un multiple de $-q_2$, on a :

$$m_\rho(r) = \sum_{\substack{p_1\geq 0, p_2\geq 0\\ p_2q_2=-a}} r^{p_1-\frac{a}{q_2}}$$
$$= \infty$$

De même si $q_2 < 0$, si $a \geq 0$ et si a est un multiple de $-q_2$, on a :

$$m_\rho(r) = \sum_{\substack{p_1\geq 0, p_2\geq 0\\ p_2q_2=-a}} r^{p_1-\frac{a}{q_2}}$$
$$= \infty$$

Dans tous les cas,

$$\lim_{r\mapsto 1} m_\rho(r) > 1.$$

(T', H_2) n'est donc pas une paire de Gelfand si $q_1 = 0$ et $q_2 \neq 0$ (ou $q_1 \neq 0$ et $q_2 = 0$).

b) Si $\mathbf{q_1 \leq q_2 < 0}$

On considère la représentation ρ de $\widehat{K}$ de plus haut poids $a = (q_2 - 1)q_1$.

On peut trouver plusieurs entiers positifs p_1, p_2 tels que $p_1q_1 + p_2q_2 = -a$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} -a &= (1-q_2)q_1 \ + \ (0)\ q_2 \\ &= \ (1)\ q_1 \ + \ (-q_1)\ q_2 \ . \end{aligned}$$

Donc :

$$m_\rho(r) = r^{((1-q_2)+0)} + r^{((1)+(-q_1))} + \sum_{\substack{p_1,p_2\geq 0\\ p_1q_1+p_2q_2=-a\\ 1-q_2\neq p_1\neq 1}} r^{p_1+p_2}$$
$$= r^{1-q_2} + r^{1-q_1} + \sum_{\substack{p_1,p_2\geq 0\\ p_1q_1+p_2q_2=-a\\ 1-q_2\neq p_1\neq 1}} r^{p_1q_1+p_2q_2}.$$

et puisque

$$\lim_{r\rightarrow 1} m_\rho(r) > 1,$$

(T', H_2) n'est pas une paire de Gelfand.

Remarque

Si $q_1 = q_2$, $m_\rho(r)$ est homogène. En effet :

$$m_\rho(r) = \begin{cases} C^{n-1}_{\frac{-a}{q_2}+n-1} \, r^{\frac{-a}{q_2}} & \text{si} \quad -a \text{ est un multiple de } q_2. \\ 0 & \text{si} \quad -a \text{ n'est pas un multiple de } q_2. \end{cases}$$

c) Si $\mathbf{q_1 < 0 < q_2}$

On choisit maintenant la représentation ρ de $\widehat{K}$ de plus haut poids $a = q_1 q_2$.
De même, on peut trouver plusieurs entiers positifs p_1, p_2 tels que $p_1 q_1 + p_2 q_2 = -a$:

$$\begin{aligned} -a &= (0) \; q_1 + (-q_1) \; q_2 \\ &= (q_2) \; q_1 + (-2q_1) \; q_2 \\ &\vdots \\ &= (mq_2) \; q_1 + (-(m+1)q_1) \; q_2 \quad , \end{aligned}$$

pour tout m dans $\mathbb{N}$. (T', H_2) n'est pas un paire de Gelfand car

$$\lim_{r \to 1} m_\rho(r) = +\infty.$$

d) Si $\mathbf{0 < q_1 \leq q_2}$

Soit ρ de $\widehat{K}$, la représentation de plus haut poids $a = -(2q_2 + 1)q_1$.
On peut toujours écrire :

$$\begin{aligned} -a &= (2q_2 + 1)q_1 + 0 \; q_2 \\ &= 1 \; q_1 + 2q_1 \, q_2 \quad . \end{aligned}$$

et donc (T', H_2) n'est pas un paire de Gelfand.
On remarque encore que si $q_1 = q_2$, $m_\rho(r)$ est homogène. De même que plus haut :

$$m_\rho(r) = \begin{cases} C^{n-1}_{\frac{-a}{q_2}+n-1} \, r^{\frac{-a}{q_2}} & \text{si} \quad -a \text{ est un multiple de } q_2. \\ 0 & \text{si} \quad -a \text{ n'est pas un multiple de } q_2. \end{cases}$$

Chapitre VII

LES FONCTIONS SPHERIQUES ASSOCIEES AUX PAIRES DE GELFAND.

VII.1 Définition et rôle des fonctions sphériques.

Etant donnés N un groupe de Lie connexe, simplement connexe et nilpotent de pas 2 et K un groupe compact agissant sur N par automorphismes, on forme le produit semi direct

$$G = K \rhd N$$

et on désigne par $C_c(G)$ (respectivement $L^1(G)$) l'algèbre de convolution des fonctions continues à supports compacts (respectivement intégrables pour dx, la mesure de Haar invariante à gauche) de G.
On note par $C_c^K(G)$ (respectivement $L^1_K(G)$) la sous-algèbre de convolution des fonctions K-biinvariantes de $C_c^K(G)$ (respectivement $L^1(G)$).
On suppose que (K, N) est une paire de Gelfand.

Définition VII.1.1
On appelle fonction sphérique associée à la paire de Gelfand (K, N) (ou fonction K-sphérique), toute fonction continue K-biinvariante ϕ sur G telle que l'application :

$$f \longmapsto \chi(f) = \int_G f(x)\phi(x^{-1})dx,$$

soit un caractère non nul de $C_c^K(G)$. Autrement dit :

$$\chi(f \circledast g) = \chi(f)\chi(g)$$

pour tout f, g dans $C_c^K(G)$.

Remarque VII.1.2

Les fonctions K-sphériques jouent le rôle que les fonctions exponentielles jouent dans la transformation usuelle de Fourier pour les paires de Gelfand.

Proposition VII.1.3 [14]

Soit ϕ, une fonction continue, K-biinvariante et non identiquement nulle sur G. Alors ϕ est une fonction K-sphérique si et seulement si

$$\int_K \phi(xky)dk = \int_K \phi(x)\phi(y)$$

pour tout x, y dans G et où dk est la mesure de Haar sur K.
En particulier, si e_G est l'élément neutre de G, on a :

$$\phi(e_G) = 1.$$

Preuve

Pour tout f dans $C_c(G)$, on pose :

$$f^K(x) = \int_K \int_K f(k_1 x k_2) dk_1 dk_2, \quad x \in G$$

et

$$\Phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx.$$

Ainsi pour tout f, g dans $C_c(G)$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(f^K \circledast g^K) - \Phi(f^K)\Phi(g^K) &= \int_G \int_G [\phi(xy) - \phi(x)\phi(y)] f^K(x) g^K(y) dx dy \\
&= \int_G \int_G [\phi(xy) - \phi(x)\phi(y)] \int_K \int_K f(k_1 x k_2) dk_1 dk_2 \\
&\qquad \int_K \int_K g(k_3 x k_4) dk_3 dk_4 dx dy \\
&= \int_G \int_G [\int_K \phi(xky)dk - \phi(x)\phi(y)] f(x) g(y) dx dy.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition VII.1.4 [14]

Soit ϕ une fonction continue, K-biinvariante et non identiquement nulle sur G. Alors ϕ est une fonction K-sphérique si et seulement si les assertions suivantes sont vérifiées :
i) $\phi(e_G) = 1$.
ii) Pour toute fonction f dans $C_c^K(G)$, il existe un nombre $\chi(f)$ tel que :

$$\phi \circledast f = \chi(f)\phi.$$

Preuve

On suppose que ϕ est une fonction K-sphérique.
Pour tout f dans $C_c^K(G)$, on a :

$$\begin{aligned} f \circledast \phi(x) &= \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)dy \\ &= \int_G f(y)[\int_K \phi(y^{-1}kx)dk]dy \\ &= [\int_G f(y)\phi(y^{-1})dy]\phi(x) \end{aligned}$$

et en particulier

$$\phi(e) = 1.$$

Réciproquement, si ϕ vérifie i) et ii), l'application

$$f \longmapsto \chi(f) = \int_G f(y)\phi(y^{-1})dy$$

est un caractère de l'algèbre $C_c^K(G)$. ■

Théorème VII.1.5 [14]

Soit ϕ une fonction K-sphérique bornée alors l'application :

$$f \longmapsto \chi(f) = \int_G f(y)\phi(y^{-1})dy$$

est un caractère de $L^1({}_K\backslash G/{}_K)$ et tout caractère de $L^1({}_K\backslash G/{}_K)$ est de cette forme.

Preuve

La partie directe de ce théorème résulte de la définition des fonctions K-sphériques et de la densité de $C_c^K(G)$ dans $L^1({}_K\backslash G/{}_K)$.

Réciproquement, puisque (K, N) est une paire de Gelfand, $L^1({}_K\backslash G/{}_K)$ est une algèbre de Banach commutative pour la convolution. Or les caractères non nuls d'une algèbre de Banach commutative sont des formes linéaires continues de norme 1. Par suite, il existe une fonction ϕ dans $L^\infty(G)$ K-biinvariante telle que :

$$||\phi||_\infty = 1$$

et

$$\chi(f) = \int_G f(y)\phi(y^{-1})dy.$$

De plus la relation $\chi(f \circledast g) = \chi(f)\chi(g)$ permet d'écrire :

$$\int_G f \circledast \phi(y)g(y)dy = \chi(f) \int_G \phi(y)g(y)dy.$$

Ceci étant vrai pour tout f, g dans $C_c^K(G)$, on a :

$$f \circledast \phi(x) = \chi(f)\phi(x)$$

localement presque partout et d'après la proposition VII.1.4, ceci montre que ϕ est localement presque partout égale à une fonction sphérique. ■

Soit $\widehat{L_K^1(N)}$ le spectre de $L^1({}_K\backslash G/_K)$ (ou espace de Gelfand).

D'après la théorie de Gelfand, $\widehat{L_K^1(N)}$ peut être muni d'une topologie qui en fait un espace localement compact.

Et grâce au théorème VII.1.5, l'espace $\widehat{L_K^1(N)}$ s'identifie à l'espace des fonctions K-sphériques bornées.

L'intégration contre une fonction K-sphérique bornée définit donc un homomorphisme continu de $L^1({}_K\backslash G/_K)$ qui est isomorphe à $L_K^1(N)$. Tous les homomrphismes continus de $L^1({}_K\backslash G/_K)$ donc de $L_K^1(N)$ sont de cette forme.

On considère $(\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ une représentation unitaire et irréductible de N.

On construit la représentation unitaire et irréductible $({}^k\pi_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ de la même manière que dans la partie I.3.

On note toujours par K_ν le stabilisateur de π_ν.

Soit $\mathcal{H}_\nu = \underset{\alpha}{\oplus} P_\alpha$ la décomposition de $\mathcal{H}_\nu$ en sous-espaces K_ν-irréductibles. Cette somme étant bien sûr infinie.

<u>Théorème VII.1.6</u> [4]

Pour tout P_α, tout v de norme 1 dans P_α et tout x dans N, l'expression :

$$\phi_{\pi_\nu,\alpha}(x) = \int_K < \pi_\nu(kx)v, v >_{\mathcal{H}_\nu} dk,$$

définit une fonction K-sphérique bornée indépendante du choix de v dans P_α et toute fonction K-sphérique bornée s'obtient de cette manière.

<u>Preuve</u>

On considère l'homomorphisme :

$$\mathfrak{H}_\nu : L_K^1(N) \longrightarrow \mathbb{C}$$

défini par l'intégration contre $\phi_{\pi_\nu,\alpha}$.

Puisque $L^1(N)$ est une algèbre de convolution de Banach symétrique [24], il existe une représentation $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ de $L^1(N)$ et un sous-espace $\mathcal{H}_\phi$ de dimension 1 dans $\mathcal{H}_\pi$ tels que :

$$(\pi_{|L^1_K(N)}, \mathcal{H}_\phi) \text{ soit équivalente à } (\mathfrak{H}_\nu, \mathbb{C}).$$

Comme $\mathfrak{H}_\nu$ est irréductible, l'extension π est aussi irréductible [29]. On montre grâce aux identités approchées en tout point de N que π est obtenue par intégration de π_ν avec $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{H}_\pi$.
Soit v un vecteur de norme 1 dans $\mathcal{H}_\phi$. Alors pour tout f de $L^1_K(N)$, on a :

$$\pi_\nu(f)v = \mathfrak{H}_\nu(f)v$$

et donc :

$$\begin{aligned}
< \phi_{\pi_\nu,\alpha}, f >_{\mathcal{H}_\nu} &= \mathfrak{H}_\nu(f) \\
&= < \pi_\nu, (f)v, v >_{\mathcal{H}_\nu} \\
&= \int_N f(x) < \pi_\nu, (x)v, v >_{\mathcal{H}_\nu} dx \\
&= \int_K \int_N f(k^{-1}x) < \pi_\nu, (x)v, v >_{\mathcal{H}_\nu} dxdk \qquad \text{(car } f \text{ est } K\text{-invariant)} \\
&= \int_K \int_N f(x) < \pi_\nu, (kx)v, v >_{\mathcal{H}_\nu} dxdk.
\end{aligned}$$

Et comme $\phi_{\pi_\nu,\alpha}$ est K-invariant, en changeant l'ordre d'intégration on obtient que :

$$\phi_{\pi_\nu,\alpha}(x) = \int_K < \pi_\nu(kx)v, v >_{\mathcal{H}_\nu} dk. \qquad \blacksquare$$

De plus, Benson, Jenkins et Ratcliff montrent [4] que si $\pi_{\nu'}$ est une autre représentation unitaire et irréductible de N, alors :

$$\phi_{\pi_\nu,\alpha} = \phi_{\pi_{\nu'},\alpha'} \text{ si et seulement si } \pi_\nu \text{ est équivalente à } \pi_{\nu'} \text{ et } \alpha = \alpha'.$$

<u>Corollaire VII.1.7</u> [7]
Soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ une base orthonormale de P_α.
Si $K_\nu = K$, on a alors pour tout x de N :

$$\phi_{\pi_\nu,\alpha}(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} < \pi_\nu(x)v_j, v_j >_{\mathcal{H}_\nu} .$$

On se restreint au cas où $N = H_n$ le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$ et où K est un sous-groupe compact et connexe de $U(n)$ agissant naturellement sur H_n.

VII.2 Les fonctions K-sphériques associées aux groupes de Heisenberg.

On garde les notations des parties précédentes, à savoir que H_n est le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$, K est un sous-groupe compact et connexe de $U(n)$ agissant naturellement sur V de telle sorte que (K, H_n) soit une paire de Gelfand.
Les représentations unitaires et irréductibles de dimension infinie de H_n sont de la forme [15] :

$$\pi_{\nu_{(0,\lambda)}}(z,t) = \pi_{\nu_{(0,1)}}(\sqrt{|\lambda|}z, \lambda t),$$

où

$$\left(\pi_{\nu_{(0,1)}}(z,t)f\right)(w) = e^{it-\frac{w\bar{z}}{2}-\frac{z\bar{z}}{4}} f(w+z)$$

et λ est dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, tandis que les caractères de H_n sont donnés par :

$$\chi_w(z,t) = e^{\frac{i}{2}(w\bar{z}+\bar{w}z)}, \ w \in V.$$

On leur associe respectivement les fonctions K-sphériques :

$$\phi_{\pi_{\nu_{(0,\lambda)}},\alpha} = \int_K < \pi_{\nu_{(0,\lambda)}}(kz,t)v, v >_{\mathcal{H}_\nu} dk \qquad \text{(type I)}$$

et

$$\eta_w(z,t) = \int_K \chi_w(kz,t)dk \qquad \text{(type II).}$$

L'ensemble des fonctions K-sphériques de type II est dense dans l'ensemble des fonctions f de $L^1(H_n)$ dont la transformée de Fourier s'annule en $t=0$.
Ce dernier est par construction inclu dans l'intersection des noyaux des χ_{η_ω} donc l'ensemble des fonctions K-sphériques de type II est de mesure nulle dans l'espace de Gelfand $\widehat{L^1_K(H_n)}$.
Dans la suite, on se réduit à n'étudier que les fonctions K-sphériques de type I.
On a établi (partie IV) que $K_\nu = K$.
Avec les mêmes notations que la partie précédente, les fonctions sphériques bornées associées à (K, H_n) sont donc de la forme :

$$\phi_{\pi_{\nu_{(0,\lambda)}},\alpha} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} < \pi_{\nu_{(0,\lambda)}} v_j, v_j >_{\mathcal{H}_\nu}.$$

On pose :

$$\phi_\alpha = \phi_{\pi_{\nu_{(0,1)}},\alpha}.$$

On a alors :

$$\phi_\alpha = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} < \pi_{\nu_{(0,1)}}(kz,t)v_j, v_j >_{\mathcal{H}_\nu}$$

D'autre part, l'espace $\mathcal{P}(V)$ des polynômes holomorphes sur $V = \mathbb{C}^n$ est dense dans l'espace Hilbertien $\mathcal{H}_\nu$ des fonctions de carré intégrable, muni du produit scalaire :

$$< f, g >_{\mathcal{H}_\nu} = \int_V f(z)\overline{g(z)}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} dz d\bar{z}.$$

Soit :

$$\mathcal{P}(V) = \underset{\alpha}{\oplus} P_\alpha,$$

la décomposition de $\mathcal{P}(V)$ en sous-espaces K-irréductibles. La somme étant cette fois finie. On fixe une base orthonormale $\{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ de P_α et on pose :

$$p_\alpha = (2\pi)^n \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} v_j \bar{v}_j.$$

Proposition VII.2.1 [7]
i) p_α est un élément K-invariant de l'espace $\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$ des polyômes sur l'espace réel $V_\mathbb{R}$.
ii) $\{p_\alpha\}$ est une base de l'espace ${}^K\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$ des polynômes K-invariants sur $V_\mathbb{R}$.

Preuve
En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(V_\mathbb{R}) &= \mathcal{P}(V) \otimes_\mathbb{C} \overline{\mathcal{P}(V)} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} P_\alpha \otimes \bar{P}_\beta. \end{aligned}$$

On fixe v dans ${}^K\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$ et on écrit :

$$v = \sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta},$$

où $v_{\alpha,\beta}$ est un élément de $P_\alpha \otimes \bar{P}_\beta$.
Cette somme est finie puisque $v_{\alpha,\beta} = 0$ pour presque tout (α, β).
Puisque les sous-espaces $P_\alpha \otimes \bar{P}_\beta$ sont K-invariants et deux à deux orthogonaux , tout $v_{\alpha,\beta}$ doit être K-invariant. Donc les éléments K-invariants de chaque $P_\alpha \otimes \bar{P}_\beta$ engendrent ${}^K\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$.
Et comme $\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$ est sans multiplicité, une application du lemme de Schur montre que $P_\alpha \otimes \bar{P}_\beta$ n'a pas de vecteur K-fixe lorsque $\alpha \neq \beta$ et que $P_\alpha \otimes \bar{P}_\beta$ contient un sous-espace de dimension 1 constitué de vecteurs K-fixes qui est engendré par p_α.
Et enfin, l'ensemble $\{p_\alpha\}$ est linéairement indépendant puisqu'il y a pas de relations de dépendance linéaire non triviales entre les sous-espaces $P_\alpha \otimes \bar{P}_\beta$ de $\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$. ■

On rappelle maintenant des résultats fondamentaux de la théorie des invariants dans ce cadre-ci.
Le polynôme p_α est homogène de dégré $2\deg(P_\alpha)$.
On en déduit que tout les polynômes invariants sont de dégré pair.
Si q est un polynôme invariant de dégré $2m$, il devrait appartenir à l'espace engendré par

$$\{p_\alpha,\ \ \deg(P_\alpha) \leq m\}$$

Puisque K est compact, ${}^K\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$ est alors engendré par un espace de dimension finie.
Si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux vecteurs de K-plus haut poids dans $\mathcal{P}(V)$, c'est-à-dire qu'ils respectent le choix d'une sous-algèbre de Cartan fixée et l'ensemble des racines positives de K, alors $f(z)g(z)$ est aussi un vecteur de K-plus haut poids.
Un vecteur de K-plus haut poids dans $\mathcal{P}(V)$ est dit primitif si on ne peut pas l'écrire comme produit de K-plus haut poids.
Soient $P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_d}$, les composantes irréductibles dans $\mathcal{P}(V)$ qui contiennent des vecteurs de K-plus haut poids primitifs. On pose :

$$\gamma_j = p_{\alpha_j}$$

Définition VII.2.2
Les polynômes γ_j, j dans $\{1, \ldots, d\}$ sont appelés invariants fondamentaux.

Théorème VII.2.3 [21]
Si l'action de K sur V est irréductible, on a :

$${}^K\mathcal{P}(V_\mathbb{R}) = \mathbb{C}[\gamma_1, \ldots, \gamma_d].$$

Preuve : Voir [21]

Lorsque V est K-irréductible, le dual V^* de V (qui est contenu dans $\mathcal{P}(V)$) est l'une des composantes K-irréductibles primitives.
On notera par γ_1 le polynôme invariant de $\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$ lui correspondant. On a :

$$\gamma_1(z) = \frac{|z|^2}{2n},$$

où $n = \dim_\mathbb{C}(V)$.

Théorème VII.2.4 (Procédure d'orthogonalisation) [7]
Avec les notations précédentes, on a :

$$\phi_\alpha(z,t) = e^{it - \frac{1}{4}z\bar{z}} q_\alpha,$$

où q_α est un polynôme dont la composante homogène de plus haut dégré est de dégré

$$(-1)^m p_\alpha,$$

avec $m = (\frac{1}{2})\deg(p_\alpha)$.

Plus précisement, les polynômes $\{q_\alpha\}$ *sont obtenus à partir des polynômes* $\{p_\alpha\}$ *(à un scalaire multiplicatif près), par application de l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt qui respecte la mesure*

$$d\tilde{z} = e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}dzd\bar{z}$$

et en normalisant de telle sorte que $q_\alpha(0) = 1$.
La suite $\{p_\alpha\}$ *étant ordonnée de telle façon que :*

$$(\alpha < \beta) \Rightarrow \deg(p_\alpha) \leq \deg(p_\beta).$$

On peut donc, au moins en principe, retrouver les fonctions K-sphériques ϕ_α, c'est-à-dire les polynômes q_α en appliquant un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à une base de l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[\gamma_1, \ldots, \gamma_d]$ pour un produit scalaire provenant de celui de $\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$. Cependant, ce calcul est difficile à mener explicitement en général c'est-à-dire pour les cas où $K \neq U(n)$. [8]

Chapitre VIII

LES FONCTIONS $SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$-SPHERIQUES SUR LE GROUPE DE HEISENBERG.

Dans cette partie, on étudie exclusivement le cas $K = SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$.
Ce cas a été étudié en détail dans [8]. C'est en effet un bon exemple de paire de Gelfand pour lequel la décomposition en sous-espaces K-irréductibles des espaces $\mathcal{H}_\pi$ des représentations π de $\widehat{H}_n$ n'est pas triviale et demande une bonne connaissance des fonctions sphériques. On se propose donc de décrire les fonctions sphériques ou plutôt les q_α qui leurs sont associés comme polynômes non commutatifs en utilisant le produit star de Berezin au lieu du produit usuel.

VIII.1 Description des K-orbites et étude des invariants

On considère donc l'action de $K = SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ sur les espaces $V = \mathbb{C}^n$ et H_n, le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ agissant sur V par la multiplication scalaire.
Pour z de V et $k = (A, e^{i\theta})$ de $SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$, on écrit :

$$k.z = e^{i\theta}(Az).$$

$(SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}, H_n)$ est une paire de Gelfand. Nous montrerons dans cette partie que la décomposition de l'ensemble $\mathcal{P}(V)$ des polynômes holomorphes sur V en sous-espaces $SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$-irréductibles est sans multiplicité.
Pour tout z de V, on écrit :

$$z = (u, v),$$

où $u = \mathfrak{Re}(z)$ et $v = \mathfrak{Im}(z)$ sont dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme VIII.1.1

1) Pour tout θ appartenant à $\mathbb{R}\backslash\{m\pi,\ m \in \mathbb{Z}\}$,
$e^{i\theta}.z$ est dans $SO(n, \mathbb{R}).z$ si et seulement si $||u|| = ||v||$ et $u.v = 0$.

2) Si z de V est tel que $||u|| \neq ||v||$ ou $u.v \neq 0$, alors :
$e^{i\theta}.z$ est dans $SO(n, \mathbb{R}).z$ si et seulement si θ est un multiple entier de π.

Preuve

Soit z fixé dans V.

On suppose qu'il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta}.z$ appartient à $SO(n,\mathbb{R}).z$. Il existe alors A de $SO(n,\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$e^{i\theta}.z = Az.$$

Si on écrit $z = u + iv$ où u et v sont dans $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$\cos\theta\ u - \sin\theta\ v + i(\cos\theta\ v + \sin\theta\ u) = Au + iAv.$$

Ce qui revient à dire que :

$$\begin{cases} Au = \cos\theta\ u - \sin\theta\ v \\ Av = \cos\theta\ v + \sin\theta\ u \end{cases}$$

Et puisque A est dans $SO(n,\mathbb{R})$, on a :

$$||Au||^2 = ||u||^2, \quad ||Av||^2 = ||v||^2 \quad \text{et} \quad Au.Av = u.v.$$

Par suite :

$$\begin{cases} \cos^2\theta\ ||u||^2 + \sin^2\theta\ ||v||^2 - 2\sin\theta\cos\theta\ u.v = ||u||^2 \\ \cos^2\theta\ ||v||^2 + \sin^2\theta\ ||u||^2 + 2\sin\theta\cos\theta\ u.v = ||v||^2 \\ (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\ u.v + \sin\theta\cos\theta\ (||u||^2 - ||v||^2) = u.v \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\sin^2\theta\ ||u||^2 + \sin^2\theta\ ||v||^2 - 2\sin\theta\cos\theta u.v = 0 \\ \sin^2\theta\ ||u||^2 - \sin^2\theta\ ||v||^2 + 2\sin\theta\cos\theta u.v = 0 \\ \sin\theta\cos\theta\ (||u||^2 - ||v||^2) - 2\sin^2\theta\ u.v = 0 \end{cases}$$

1) Si $\theta \neq m\pi$ pour tout m de $\mathbb{Z}$, le système précédent se ramène à :

$$\begin{cases} \sin\theta\ (||u||^2 - ||v||^2) + \cos\theta(2u.v) = 0 \\ \cos\theta\ (||u||^2 - ||v||^2) - \sin\theta(2u.v) = 0 \end{cases}$$

ce qui n'est possible que si $||u|| = ||v||$ et $u.v = 0$.

2) Il est clair que si $||u|| \neq ||v||$ ou $u.v \neq 0$ alors $e^{i\theta}.z = Az$ implique $\theta = m\pi$, m dans $\mathbb{Z}$. Réciproquement si $\theta = m\pi$, m dans $\mathbb{Z}$ alors $e^{i\theta}.z = \pm z$ appartient à $SO(n,\mathbb{R}).z$ ■

On restreint θ à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ et on considère les sous-espaces K-invariants :

$$V_1 = \{z \in V,\ \ ||u|| \neq ||v|| \text{ ou } u.v \neq 0\}$$

et

$$V_2 = \{z \in V,\ \ ||u|| = ||v|| \text{ et } u.v = 0\}.$$

Proposition VIII.1.2

Les K-orbites de V sont de la forme :

1) $K.z \simeq S^{n-1} \times \mathbb{T}$ si z est dans V_1 et si $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ sont linéairement dépendants.

2) $K.z \simeq V_{n,2} \times \mathbb{T}$ si z est dans V_1 et si $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ sont linéairement indépendants.

3) $K.z \simeq V_{n,2}$ si z est dans V_2 et si $\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ sont linéairement indépendants.

4) $K.0 = \{0\}$.

Ici, $V_{n,2}$ désigne la variété compacte de Stiefel des 2-repères orthonormés dans $\mathbb{R}^{2n}$ et S^{n-1} désigne la sphère unité de dimension $n-1$.

Preuve

Soit z fixé dans V_1.

Tout point $k.z$ de l'orbite $K.z$ s'écrit $e^{i\theta}Az$ avec θ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et A dans $SO(n, \mathbb{R})$.

En effet :

• si :

$$k.z = e^{i\theta_1}A_1 z$$

avec θ_1 dans $[-\pi, -\frac{\pi}{2}[$, on écrit :

$$e^{-i\pi}.z = A_0 z$$

et donc :

$$k.z = e^{i(\theta_1+\pi)}A_1A_0z,$$

où $\theta = \theta_1 + \pi$ est dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $A = A_1A_0$ dans $SO(n, \mathbb{R})$.

• si θ_1 est dans $[\frac{\pi}{2}; \pi[$, on écrit :

$$e^{i\pi}.z = A_0 z$$

et on obtient :

$$k.z = e^{i(\theta_1-\pi)}A_1A_0z,$$

où $\theta = \theta_1 - \pi$ est dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $A = A_1A_0$ dans $SO(n, \mathbb{R})$.

De plus,

$$e^{i\theta}A.z = e^{i\theta'}A'.z \text{ si et seulement si } A.z = A'.z.$$

Alors l'application

$$k.z \longmapsto (A.z, e^{i\theta})$$

est une bijection de $K.z$ dans $SO(n, \mathbb{R}).z \times \mathbb{T}/_{\{\pm 1\}}$. D'où l'identification :

$$K.z \simeq SO(n, \mathbb{R}).z \times \mathbb{T}.$$

D'autre part, si u et v sont linéairement dépendants et non nuls, on a :

$$SO(n, \mathbb{R}).z \simeq SO(n, \mathbb{R}).u \text{ (ou } SO(n, \mathbb{R}).v \text{ si } u = 0)$$

et

$$SO(n, \mathbb{R}).u \simeq S^{n-1}.$$

L'orbite d'un point z de V_1 tel que u et v sont linéairement dépendants et non nuls est :

$$K.z \simeq S^{n-1} \times \mathbb{T} \qquad \text{et} \qquad \dim K.z = n.$$

Si u et v sont linéairement indépendants, on a :

$$SO(n, \mathbb{R}).z \simeq V_{n,2}.$$

L'orbite d'un point z de V_1 tel que u et v sont linéairement indépendants est :

$$K.z \simeq V_{n,2} \times \mathbb{T} \qquad \text{et} \qquad \dim K.z = 2n - 2.$$

On fixe maintenant un point z dans V_2. Pour tout k de K, on a :

$$k.z = e^{i\theta} A.z = Ae^{i\theta}.z = AA_0 z \in SO(n, \mathbb{R}).z$$

et donc :

$$K.z \simeq SO(n, \mathbb{R}).z.$$

Si u et v sont linéairement indépendants, on a :

$$K.z \simeq V_{n,2} \qquad \text{et} \qquad \dim K.z = 2n - 3.$$

Si u et v sont linéairement dépendants, on a $||u|| = \beta ||u||$ et $u.(\beta u) = 0$ et donc $u = v = 0$

$$K.0 = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \dim K.0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Les orbites génériques sont données par le deuxième point point de la proposition VIII.1.2. Elles sont de codimension 2, ce qui suggère que l'action de $SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ sur V possède deux invariants fondamentaux.

Puisque $(SO(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}, H_n)$ est une paire de Gelfand, la décomposition de $\mathcal{P}(V)$ en sous-espaces de polynômes K-irréductibles est sans multiplicité. Cette décomposition passe par celle de $\mathcal{P}(V)$ en polynômes homogènes. On écrit :

$$\mathcal{P}(V) = \bigoplus_{m \geq 0} P_m,$$

où $P_m = P_m(V)$ est l'ensemble des polynômes homogènes de dégré m. C'est un espace de dimension finie. Il est K-invariant.

Soient :

$$\epsilon = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_n^2}.$$

On définit l'ensemble des polynômes harmoniques par :

$$\mathcal{H} = Ker\Big(\Delta : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)\Big).$$

Soit $\mathcal{H}_m$ l'ensemble des polynômes harmoniques homogènes de dégré m. On a :

$$\mathcal{H}_m = \mathcal{H} \cap P_m.$$

Les espaces $\mathcal{H}_m$ sont $SO(n, \mathbb{R})$-invariants par construction. Et un calcul direct de leurs plus hauts poids montre [26] qu'ils sont irréductibles et inéquivalents.
En utilisant la multiplication par ϵ, on montre [8] qu'on a la décomposition :

$$\begin{aligned}
P_m &= \mathcal{H}_m \oplus \epsilon P_{m-2} \\
&= \mathcal{H}_m \oplus \epsilon \mathcal{H}_{m-2} \oplus \epsilon P_{m-4} \\
&\vdots \\
&= \mathcal{H}_m \oplus \epsilon \mathcal{H}_{m-2} \oplus \cdots \oplus \epsilon^l \mathcal{H}_{m-2l} \oplus \cdots
\end{aligned}$$

Pour tout k, l dans $\mathbb{N}$, on pose :

$$P_{k,l} = \epsilon^l \mathcal{H}_k.$$

Les sous-espaces $P_{k,l},\ k + 2l = m$ sont alors des modules K-invariants, irréductibles et non équivalents, les espaces $\mathcal{H}_{k,l}$ correspondants étant en que $SO(n, \mathbb{R})$-modules équivalents à $\mathcal{H}_k$. L'action de $\mathbb{T}$ sépare les P_m donc les $\mathcal{H}_{k,l}$ de deux "couches" différentes. De plus :

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{m \geq 0} \sum_{k+2l=m} P_{k,l}.$$

Pour tout module $P_{k,l}$, on fixe une base orthonormée $\{v_j\}$ de $P_{k,l}$ et on construit le polynôme K-invariant associé au module $P_{k,l}$ suivant :

$$p_{k,l} = (2\pi)^n \sum_j v_j \bar{v}_j.$$

Ainsi pour $k = 1$ et $l = 0$, le polynôme K-invariant associé au module $P_{1,0} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_1(V)$ dans la base orthonormée

$$\frac{z}{||z||_{\mathcal{H}_\nu}} = \Big(\frac{z_1}{||z_1||_{\mathcal{H}_\nu}}, \ldots, \frac{z_n}{||z_n||_{\mathcal{H}_\nu}}\Big)$$

est :

$$\begin{aligned} p_{1,0} &= (2\pi)^n \frac{z\bar{z}}{||z||^2_{\mathcal{H}_\nu}} \\ &= \frac{1}{2} z\bar{z}. \end{aligned}$$

De même, pour $k = 0$ et $l = 1$, le polynôme K-invariant associé au module $P_{0,1} = \epsilon\mathcal{H}_0 = \epsilon\mathbb{C}$ dans la base orthonormée

$$\frac{\epsilon}{||\epsilon||_{\mathcal{H}_\nu}}$$

est :

$$\begin{aligned} p_{0,1} &= (2\pi)^n \frac{\epsilon\bar{\epsilon}}{||\epsilon||^2_{\mathcal{H}_\nu}} \\ &= \frac{|\epsilon|^2}{8n}. \end{aligned}$$

On choisit comme invariants fondamentaux les polynômes :

$$\gamma_1 = p_{1,0} = \frac{|z|^2}{2}$$

et

$$\gamma_2 = 2np_{0,1} = \frac{|\epsilon|^2}{4}.$$

Benson, Jenkins et Ratcliff [8] montrent directement que l'algèbre ${}^K\mathcal{P}(V_\mathbb{R})$ des polynômes invariants est exactement $\mathbb{C}[\gamma_1, \gamma_2]$. Nous retrouverons ce résultat dans la partie suivante.

VIII.2. Fonctions $SO(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{T}$-sphériques et produit star de Berezin.

Soit $\Pi_{k,l}$ la projection orthogonale de $\mathcal{P}(V)$ sur $P_{k,l}$ définie par :

$$\Pi_{k,l}(z) = \sum_j < f, v_j >_{\mathcal{H}_\nu} v_j,$$

pour tout f de $\mathcal{P}(V)$. Le symbole de $\Pi_{k,l}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_{k,l}(z) &= \frac{< \Pi_{k,l} E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}} \\ &= (2\pi)^n e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \sum_j v_j(z)\bar{v}_j(z) \\ &= e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} p_{k,l}(z). \end{aligned}$$

A présent, on définit les opérateurs m_ϵ et Δ de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathcal{P}(V)$ respectivement par :

$$m_\epsilon : v \longmapsto \epsilon v$$

et

$$\Delta : v \longmapsto \Delta v.$$

Leurs symboles sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned}\widehat{m}_\epsilon(z) &= \frac{< m_\epsilon E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}\\ &= \frac{m_\epsilon E_z(z)}{E_z(z)}\\ &= \epsilon(z)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}(z) &= \frac{< \Delta E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}\\ &= \frac{\Delta E_z(z)}{E_z(z)}\\ &= \frac{1}{e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}}(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_n^2})(e^{-\frac{z\bar{z}}{2}})\\ &= \frac{1}{4}\overline{\epsilon(z)}\end{aligned}$$

pour tout z de V. Les opérateurs m_ϵ et Δ comme tout opérateur de symbole polynomial défini de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathcal{P}(V)$ s'écrivent sous forme d'opérateur intégral :

$$(A\varphi)(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V \tilde{A}(u,z)\varphi(u)e^{\frac{z\bar{u}}{2}}e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u},$$

avec $A = m_\epsilon$ (respectivement Δ).

On peut calculer le produit star de leurs symboles. Ce qui donne pour tout z dans V :

$$\begin{aligned}\widehat{m}_\epsilon * \widehat{\Delta}(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\int_V \tilde{m}_\epsilon(v,z)\tilde{\Delta}(z,v)e^{\frac{z\bar{v}+\bar{z}v}{2}}e^{-\frac{v\bar{v}}{2}}dvd\bar{v}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V \epsilon(z)\frac{1}{4}\overline{\epsilon(z)}e^{-\frac{(v-z)(\bar{v}-\bar{z})}{2}}dvd\bar{v}\\ &= \widehat{m}_\epsilon(z)\widehat{\Delta}(z).\end{aligned}$$

De même pour tout z de V, on a :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta} * \widehat{m}_\epsilon(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}\int_V \tilde{\Delta}(v,z)\tilde{m}_\epsilon(z,v)e^{\frac{z\bar{v}+\bar{z}v}{2}}e^{-\frac{v\bar{v}}{2}}dvd\bar{v}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V \frac{1}{4}\overline{\epsilon(v)}\epsilon(v)e^{-\frac{(v-z)(\bar{v}-\bar{z})}{2}}dvd\bar{v}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{4}\int_V \overline{\epsilon(u+z)}\epsilon(u+z)e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u}.\end{aligned}$$

Or $\epsilon(u+z)=\epsilon(u)+\epsilon(z)+2uz$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\epsilon(u+z)\overline{\epsilon(u+z)} &= \epsilon(z)\overline{\epsilon(z)}+\epsilon(u)\overline{\epsilon(u)}+4(uz)(\bar{u}\bar{z})\\ &+\epsilon(u)\overline{\epsilon(z)}+\epsilon(z)\overline{\epsilon(u)}+\epsilon(u)(2\bar{u}\bar{z})\\ &+(2uz)\overline{\epsilon(z)}+(2uz)\overline{\epsilon(u)}+\epsilon(z)(2\bar{u}\bar{z}).\end{aligned}$$

Puisque $\int_{\mathbb{C}} u_j^k\bar{u}_j^l e^{-\frac{u_j\bar{u}_j}{2}}du_jd\bar{u}_j=(2\pi)2^l l!\delta_{k,l}$, pour tout k,l de $\mathbb{N}$ et j dans $\{1,\dots,n\}$,on a

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}*\widehat{m}_\epsilon(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{4}\int_V \epsilon(z)\overline{\epsilon(z)}e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u}+\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{4}\int_V \epsilon(u)\overline{\epsilon(u)}e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u}\\ &+\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{4}\int_V 4(uz)(\bar{u}\bar{z})e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u}\\ &= \widehat{m}_\epsilon(z)\widehat{\Delta}(z)+2(n+|z|^2).\end{aligned}$$

Remarque VIII.2.1

Si f est un symbole quelconque défini dans V, on a pour tout z dans V :

$$(\widehat{m}_\epsilon * f)(z)=f(z)\widehat{m}_\epsilon(z) \quad \text{et} \quad (f*\widehat{\Delta})(z)=\widehat{\Delta}(z)f(z).$$

Ceci est dû au fait que $\widehat{m}_\epsilon$ (respectivement $\widehat{\Delta}$) est une fonction holomorphe (respectivement antiholomorphe)(proposition III.3.5).

On considère l'opérateur Ψ de $\mathcal{P}(V)$ dont le symbole est défini par :

$$\widehat{\Psi}(z)=(n+|z|^2), \quad \forall z\in V.$$

Proposition VIII.2.2

Les trois symboles $(\widehat{m}_\epsilon,\widehat{\Delta},\widehat{\Psi})$ engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$.

Preuve

Le calcul du produit star des symboles des opérateurs m_ϵ et Δ donne :

$$\begin{aligned}[\widehat{m}_\epsilon,\widehat{\Delta}]_* &= \widehat{m}_\epsilon*\widehat{\Delta}-\widehat{\Delta}*\widehat{m}_\epsilon\\ &= -2\widehat{\Psi}\end{aligned}$$

D'autre part, grâce à la remarque VIII.3.1 on a $2\widehat{\Psi}*\widehat{\Delta}=2\widehat{\Psi}\widehat{\Delta}$. Et :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta}*2\widehat{\Psi} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V \frac{1}{4}\overline{\epsilon(v)}2(n+\bar{z}v)e^{-\frac{(v-z)(\bar{v}-\bar{z})}{2}}dvd\bar{v}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V \frac{1}{2}\overline{\epsilon(z+u)}\big(n+\bar{z}(z+u)\big)e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V \big[\frac{1}{2}\overline{\epsilon(z)}(n+|z|^2)+(\bar{u}\bar{z})(\bar{z}u)\big]e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u}\\ &= 2\widehat{\Psi}(z)\widehat{\Delta}(z)+8\widehat{\Delta}(z), \quad \forall z\in V.\end{aligned}$$

On a donc :

$$[2\widehat{\Psi},\widehat{\Delta}]_* = -8\widehat{\Delta}.$$

De la même manière, on a $\widehat{m}_\epsilon * 2\widehat{\Psi} = 2\widehat{\Psi}\ \widehat{m}_\epsilon$ et

$$\begin{aligned} 2\widehat{\Psi} * \widehat{m}_\epsilon &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V 2(n+\bar{v}z)\ \epsilon(v)e^{-\frac{(v-z)(\bar{v}-\bar{z})}{2}}dvd\bar{v} \\ &= 2\widehat{\Psi}(z)\widehat{m}_\epsilon(z) + 8\widehat{m}_\epsilon(z). \end{aligned}$$

Et enfin :

$$[2\widehat{\Psi},\widehat{m}_\epsilon]_* = 8\widehat{m}_\epsilon.$$

■

De plus Ψ est donné par :

$$\begin{aligned} \Psi\varphi(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V \varphi(u)(n+\bar{u}z)e^{\frac{\bar{u}z}{2}}e^{-\frac{u\bar{u}}{2}}dud\bar{u} \\ &= n\varphi(z) + 2\sum_j z_j\frac{\partial\varphi}{\partial z_j(z)}. \end{aligned}$$

Remarque VIII.2.3

Si $\varphi(z)$ est un polynôme de dégré l, on a :

$$\Psi\varphi(z) = (n+2l)\varphi(z).$$

Proposition VIII.2.4

Pour tout k,l dans $\mathbb{N}$, le symbole du projecteur orthogonal $\Pi_{k,l}$ est :

$$\widehat{\Pi}_{k,l} = \frac{1}{C_{k,l}}\underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \widehat{\Pi}_{k,0} * \underbrace{\widehat{\Delta}*\cdots*\widehat{\Delta}}_{l\text{fois}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C_{k,l}}\epsilon^{*l} * \widehat{\Pi}_{k,0} * (\frac{\bar{\epsilon}}{4})^{*l},$$

où $C_{k,l} = \dfrac{4^l l!(k+\frac{n}{2}+l-1)!}{(k+\frac{n}{2}-1)!}$.

Pour démontrer cette proposition on passe par le lemme suivant :

Lemme VIII.2.5

Pour tout l et pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a :

1) $2\widehat{\Psi} * \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} = \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \big(2\widehat{\Psi} + 8l\big).$

2) $\widehat{\Delta} * \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \widehat{\Pi}_{k,0} = 4l(k+\frac{n}{2}+l-1)\underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{(l-1)\text{fois}} * \widehat{\Pi}_{k,0}.$

3) $\underbrace{\widehat{\Delta}*\cdots*\widehat{\Delta}}_{l\text{fois}} * \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \widehat{\Pi}_{k,0} = \dfrac{4^l l!(k+\frac{n}{2}+l-1)!}{(k+\frac{n}{2}-1)!}\widehat{\Pi}_{k,0}.$

Preuve

Pour montrer le premier point, il suffit de voir que

$$[2\widehat{\Psi}, \widehat{m}_\epsilon]_* = 8\widehat{m}_\epsilon$$

entraine que

$$2\widehat{\Psi} * \widehat{m}_\epsilon = \widehat{m}_\epsilon * (2\widehat{\Psi} + 8)$$

et de déduire le résultat par une récurrence sur l.

Pour démontrer le deuxième point, on rappelle d'abord que pour tout φ de $\mathcal{P}(V)$ on a :

$$\Pi_{k,0}(\varphi) \in P_{k,0} = \mathcal{H}_k.$$

et donc par définition des polynômes harmoniques $\Delta \circ \Pi_{k,0}$ et par suite $\widehat{\Delta} * \widehat{\Pi}_{k,0}$ sont identiquement nuls. Alors :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta} * \widehat{m}_\epsilon * \widehat{\Pi}_{k,0} &= (2\widehat{\Psi} + \widehat{m}_\epsilon * \widehat{\Delta}) * \widehat{\Pi}_{k,0}\\ &= 2\widehat{\Psi} * \widehat{\Pi}_{k,0}\\ &= 4(k + \frac{n}{2})\widehat{\Pi}_{k,0}.\end{aligned}$$

Le résultat s'obtient par récurrence sur l. Quant au troisième point, c'est une simple conséquence du deuxième point. ∎

Preuve de la proposition VIII.2.4

On considère l'opérateur $T_{k,l}$ de symbole :

$$\widehat{T}_{k,l} = \frac{1}{C_{k,l}} \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \widehat{\Pi}_{k,0} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}}.$$

$T_{k,l}$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{P}(V)$ sur $P_{k,l}$.

En effet, on vérifie, par application du lemme précédent que :

$$\widehat{T}_{k,l} * \widehat{T}_{k,l} = \widehat{T}_{k,l} \quad \text{et} \quad \overline{\widehat{T}}_{k,l} = \widehat{T}_{k,l}.$$

où $\overline{\widehat{T}}_{k,l}$ est le conjugué de $\widehat{T}_{k,l}$.

D'autre part, on note par $\mathrm{Im}(\widehat{T}_{k,l})$ l'ensemble image de $\mathcal{P}(V)$ par l'opérateur de symbole $\widehat{T}_{k,l}$. La représentation de $\mathfrak{sl}_2$ dans $\mathcal{P}(V)$ est une somme directe de représentations de plus petits poids $n + 2k$, $k \geq 0$. Ces poids sont positifs donc chaque représentation est de type $S^+_{v,q}$ avec les notations de Dixmier [13] c'est-à-dire une représentation de dimension infinie où Ψ est diagonalisé, admet les poids

$$n + 2k, n + 2k + 4, \ldots, n + 2k + 4q, \ldots$$

de multiplcité 1. ϵ envoie un vecteur de poids $n+2k+4q$ sur un vecteur de poids $n+2k+4(q+1)$, ϵ est injectif le plus petit poids n'est pas dans l'image de ϵ. Δ envoie un vecteur de poids $n+2k+4q,\ q>0$ sur un vecteur de poids $n+2k+4(q-1)$, Δ est surjectif et son noyau est l'espace de plus petit poids. Donc pour tout v de $P_{k,0}$ et tout entier l, il existe u de $P_{k,l}$ tel que :

$$v = \underbrace{\Delta\circ\cdots\circ\Delta}_{l\text{fois}} u.$$

Et donc :

$$P_{k,0} \subset \operatorname{Im} \underbrace{\Delta\circ\cdots\circ\Delta}_{l\text{fois}}.$$

On a alors :

$$\operatorname{Im}(\Pi_{k,0}\circ \underbrace{\Delta\circ\cdots\circ\Delta}_{l\text{fois}}) = P_{k,0}$$

et finalement

$$\operatorname{Im}(T_{k,l}) = \underbrace{m_\epsilon\circ\cdots\circ m_\epsilon}_{l\text{fois}}(P_{k,0}) = P_{k,l}.$$

Ce qui établit que :

$$\widehat{T}_{k,l} = \widehat{\Pi}_{k,l} = e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} p_{k,l}.$$ ■

On considère à présent la projection orthogonale Π_m de $\mathcal{P}(V)$ sur le sous-espace $P_m = \sum_{k+2l=m} P_{k,l}$, alors pour tout z de V on a :

$$\Pi_m(z) = \sum_{k+2l=m} \Pi_{k,l}(z).$$

Son symbole est donné par :

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_m(z) &= \sum_{k+2l=m} \widehat{\Pi}_{k,l}(z)\\ &= e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \sum_{k+2l=m} p_{k,l}(z),\end{aligned}$$

pour tout z de V.
D'autre part si $(W_\nu, \mathcal{H}_\nu)$ est la représentation de $U(n)$ définie par :

$$W_\nu(k)f(z) = f(k^{-1}z),$$

pour tout f de $\mathcal{H}_\nu$ et z de $\mathcal{O}^{H_n}_{(0,1)}$,

W_ν se décompose en :

$$W_\nu = \underset{m}{\oplus}\, \tilde{\rho}_m$$

où les $\tilde{\rho}_m$ sont irréductibles et non équivalents. Π_m est alors le projecteur spectral associé à $\tilde{\rho}_m$ et son symbole est donné par :

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_m(z) &= \int_{U(n)} \frac{< W_\nu(k)E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}}{< E_z, E_z >_{\mathcal{H}_\nu}} \chi_{\tilde{\rho}_m}(k^{-1})dk \\ &= \frac{\gamma_1^m}{m!} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}},\end{aligned}$$

ici, $\chi_{\tilde{\rho}_m}$ est le caractère associé à $\tilde{\rho}_m$ (proposition IV.2.5)
Les deux écritures de $\widehat{\Pi}_m$, entrainent :

$$\sum_{k+2l=m} \widehat{\Pi}_{k,l} = \frac{\gamma_1^m}{m!} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}},$$

c'est-à-dire :

$$\widehat{\Pi}_{m,0} = \frac{\gamma_1^m}{m!} e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} - \sum_{l=1}^{[\frac{m}{2}]} \frac{1}{C_{m-2l,l}} \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \widehat{\Pi}_{m-2l,0} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}},$$

pour tout $m \geq 2$ et où $[\frac{m}{2}]$ désigne la partie entière de $\frac{m}{2}$.
On retrouve ainsi les résultats de [8] puisque d'une part, on a :

$$\sum_{k+2l=m} p_{k,l} = \frac{\gamma_1^m}{m!}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} p_{k,l} &= \frac{1}{C_{k,l}} e^{\frac{z\bar{z}}{2}} \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \widehat{\Pi}_{k,0} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}} \\ &= \frac{1}{C_{k,l}} e^{\frac{z\bar{z}}{2}} (\widehat{m}_\epsilon)^l \widehat{\Pi}_{k,0} (\widehat{\Delta})^l \\ &= \frac{\gamma_2^l}{C_{k,l}} p_{k,0}, \end{aligned}$$

grâce à la remarque VIII.2.1 et enfin :

$$\begin{aligned} p_{m,0} &= \frac{\gamma_1^m}{m!} - \sum_{l=1}^{[\frac{m}{2}]} p_{m-2l,l} \\ &= \frac{\gamma_1^m}{m!} - \sum_{l=1}^{[\frac{m}{2}]} \frac{\gamma_2^l}{C_{m-2l,l}} p_{m-2l,0}. \end{aligned}$$

Plutôt que de calculer explicitement les $p_{k,l}$, Benson, Jenkins et Ratcliff [8] cherchent des polynômes orthogonaux $q_{k,l}$, obtenus par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt des $p_{k,l}$ rangés dans un ordre naturel. Ils montrent alors que les $q_{k,l}$ sont aussi des polynômes orthogonaux obtenus par orthogonalisation des $\gamma_1^k\gamma_2^l$ dans le même ordre naturel.

Ici, on définit un autre produit scalaire $< .,. >_*$ sur $\mathcal{P}(V)$ en posant :

$$< u,v >_*= \int_V (ue^{-\frac{z\bar z}{2}} * \bar v e^{-\frac{z\bar z}{2}})(z)dzd\bar z,$$

pour tout u,v dans $\mathcal{P}(V)$ et puisque les fonctions $\widehat{\Pi}_{k,l}$ sont des symboles de projecteurs sur des espaces, deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel, on a :

Théorème VIII.2.6

Pour tout (k,l) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on a :

1) $< p_{k,l}, p_{k',l'} >_*= (2\pi)^n\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}\ \dim(P_{k,l})$.

2) $$p_{k,l} = \frac{1}{k!}\frac{1}{C_{k,l}}\underbrace{\widehat{m}_\epsilon *\cdots* \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \underbrace{\gamma_1 *\cdots* \gamma_1}_{k\text{fois}} * \underbrace{\widehat{\Delta}*\cdots*\widehat{\Delta}}_{l\text{fois}} + \\ + \sum_{\substack{k',l'\\ k'+2l'<k+2l}} a_{k',l'}\underbrace{\widehat{m}_\epsilon *\cdots* \widehat{m}_\epsilon}_{l'\text{fois}} * \underbrace{\gamma_1 *\cdots* \gamma_1}_{k'\text{fois}} \underbrace{\widehat{\Delta}*\cdots*\widehat{\Delta}}_{l'\text{fois}}.$$

Preuve

1) On a :

$$\begin{aligned} < p_{k,l}, p_{k',l'} >_* &= \int_V (p_{k,l}e^{-\frac{z\bar z}{2}} * \bar p_{k',l'}e^{-\frac{z\bar z}{2}})(z)dzd\bar z \\ &= \int_V (\widehat{\Pi}_{k,l} * \widehat{\Pi}_{k',l'})(z)dzd\bar z \\ &= (2\pi)^n\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}\ \dim(P_{k,l}). \end{aligned}$$

2) On a d'une part :

$$\begin{aligned} p_{k,l} &= \frac{\gamma_2^l}{C_{k,l}}p_{k,0} = \frac{1}{C_{k,l}}(\widehat{m}_\epsilon)^l p_{k,0}(\widehat{\Delta})^l \\ &= \frac{1}{C_{k,l}}\underbrace{\widehat{m}_\epsilon *\cdots* \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * p_{k,0} * \underbrace{\widehat{\Delta}*\cdots*\widehat{\Delta}}_{l\text{fois}}. \end{aligned}$$

Et comme

$$p_{k,0} = \frac{\gamma_1^k}{k!} - \sum_{l=1}^{[\frac{k}{2}]}\frac{\gamma_2^l}{C_{k-2l,l}}p_{k-2l,0},$$

on obtient que :

$$p_{k,l} = \frac{1}{C_{k,l}}\Big[\underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \frac{\gamma_1^k}{k!} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}} - \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \frac{1}{C_{k-2j,j}} \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \gamma_2^j p_{k-2j,0} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}}\Big]$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{C_{k,l}}\Big[\underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \frac{\gamma_1^k}{k!} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}} + \sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * Q_j(\gamma_1, \gamma_2) * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}}\Big],$$

avec $Q_j(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{s=1}^{[\frac{k}{2}]} a_s \gamma_1^{k-2s} \gamma_2^s$, a_s étant dans $\mathbb{R}$.

Et d'autre part, on établit par un calcul direct que

$$\underbrace{\gamma_1 * \cdots * \gamma_1}_{k\text{fois}} = \gamma_1^k + \sum_{j=1}^{k-1} b_j \gamma_1^j, \quad b_j \in \mathbb{R}.$$ ■

Ce qui prouve que les $p_{k,l}$ sont des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $<,>_*$, obtenus par la procédure de Gram-Schmidt à partir des polynômes $r_{k,l} = \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \underbrace{\gamma_1 * \ldots \gamma_1}_{k\text{fois}} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}}$ ordonnés par :

$$(k,l) \leq (k',l') \text{ si et seulement si } k+2l < k'+2l' \text{ ou } k+2l = k'+2l' \text{ et } k \leq k'.$$

De plus, nous avons comme simple conséquence de la remarque VIII.2.1 :

$$e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \gamma_1^k \gamma_2^l = \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * \gamma_1^k e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}},$$

pour tout (k,l) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Et comme

$$\gamma_1^k e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} = k! \sum_{t+2j=k} \widehat{\Pi}_{t,j}$$

pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a :

$$e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \gamma_1^k \gamma_2^l = \underbrace{\widehat{m}_\epsilon * \cdots * \widehat{m}_\epsilon}_{l\text{fois}} * k! \sum_{t+2j=k} \widehat{\Pi}_{t,j} * \underbrace{\widehat{\Delta} * \cdots * \widehat{\Delta}}_{l\text{fois}}$$

$$= k! \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{C_{k-2j,l+j}}{C_{k-2j,j}} \widehat{\Pi}_{k-2j,l+j},$$

et donc

$$\int_V \gamma_1^k \gamma_2^l e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} dz d\bar{z} = (2\pi)^n k! \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{C_{k-2j,l+j}}{C_{k-2j,j}} \mathfrak{Tr}(\widehat{\Pi}_{k-2j,l+j}).$$

Comme $\widehat{\Pi}_{k-2j,l+j}$ est le projecteur de $\mathcal{P}(V)$ sur $P_{k-2j,l+j}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Tr}(\widehat{\Pi}_{k-2j,l+j}) &= \dim\,(\mathcal{H}_{k-2j}) \\ &= \dim\,(P_{k-2j}) - \dim\,(P_{k-4j}). \end{aligned}$$

D'où :

Proposition VIII.2.7

Pour tout (k,l) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on a :

$$\int_V \gamma_1^k \gamma_2^l e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} dz d\bar{z} = (2\pi)^n k! \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{C_{k-2j,l+j}}{C_{k-2j,j}} \left[\binom{k-2j+n-1}{k-2j} - \binom{k-2j+n-3}{k-2j-2} \right].$$

On obtient ainsi une nouvelle identité faisant intervenir les coefficients $C_{k,l}$.
Cette intégrale a été calculée dans [8]. Elle vaut :

$$\int_V \gamma_1^k \gamma_2^l e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} dz d\bar{z} = (2\pi)^n 4^l k! (l!)^2 \binom{2l+n+k-1}{k} \binom{l+\frac{n}{2}-1}{l}.$$

Cependant, nous ne sommes pas arrivé à relier ces deux nombres par un calcul direct.
Nous concluons ce travail par le calcul explicite des polynômes $p_{k,l}$. Ce calcul a été mené à bien par Gail Ratcliff en utilisant l'orthogonalié de ces polynômes pour le produit scalaire $<.,.>_*$.

Lemme VIII.2.8

Pour tout entier m dans $\mathbb{N}$, le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} (x-j-2)(x-j-3)\ldots(x-j-m),$$

est identiquement nul.

Preuve

Le dévéloppement du terme $(x-j-2)(x-j-3)\ldots(x-j-m)$ suivant j s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{m-1} A_k(x) j^k$$

où $A_k(x)$ est un polynôme en x qui ne dépend pas de j.

On peut alors écrire :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(x) \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} j^k.$$

Et pour tout k dans $\{0, 1, , \ldots, m-1\}$, le terme $\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} j^k$ est nul. En effet, le polynôme sur $\mathbb{R}$ défini par :

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-1)^m \\ &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} x^{m-j} \end{aligned}$$

et toutes ses dérivées d'ordre strictement inférieur à m s'annulent en $x = 1$.
Au rang $k = 0$ on obtient :

$$R(1) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} = 0.$$

Au rang $k = 1$, on écrit :

$$R'(1) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!} (m-j) = 0.$$

et on déduit le résultat pour $k = 1$ grâce au résultat du rang précédent. Le résultat pour tout $k < m$ s'établit par itération. On en conclut que Q est identiquement nul. ■

Théorème VIII.2.9
Pour tout k, l dans $\mathbb{N}$,

$$p_{k,l} = \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!} \gamma_2^{l+j}$$

Preuve
Pour tout k, l dans $\mathbb{N}$, on a établi que :

$$\frac{\gamma_1^k}{k!} = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{\gamma_2^j}{C_{k-2j,j}} p_{k-2j,0} \qquad \text{et} \qquad p_{k,l} = \frac{\gamma_2^l}{C_{k,l}} p_{k,0}$$

Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_1^k}{k!}\gamma_2^l &= \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{\gamma_2^{j+l}}{C_{k-2j,j}} p_{k-2j,0}\\ &= \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{C_{k-2j,j+l}}{C_{k-2j,j}} p_{k-2j,j+l}\end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout j_0 fixé dans $\{0,1,\ldots,[\frac{k}{2}]\}$, on a :

$$\begin{aligned}< \frac{\gamma_1^k}{k!}\gamma_2^l, p_{k-2j_0,l+j_0} >_* &= \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{C_{k-2j,j+l}}{C_{k-2j,j}} < p_{k-2j,j+l}, p_{k-2j_0,l+j_0} >_*\\ &= \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{C_{k-2j,j+l}}{C_{k-2j,j}} (2\pi)^n \delta_{k-2j,k-2j_0}\delta_{l+j,l+j_0} \dim(P_{k-2j_0,l+j_0})\\ &= (2\pi)^n \dim(\mathcal{H}_{k-2j_0}) \frac{C_{k-2j_0,l+j_0}}{C_{k-2j_0,j_0}}\end{aligned}$$

Par suite, si on change $k-2j_0$ en k' et $l+j_0$ en l' on obtient que :

$$< \frac{\gamma_1^k}{k!}\gamma_2^l, p_{k',l'} >_* = \begin{cases} (2\pi)^n \dim(\mathcal{H}_{k'}) \frac{C_{k',l'}}{C_{k',l'-l}} & \text{si} \quad k'+2l' = k+2l \text{ et } l \leq l'.\\ 0 & \text{si} \quad k'+2l' = k+2l \text{ et } l > l'.\end{cases}$$

et on remarque que :

$$< \frac{\gamma_1^k}{k!}\gamma_2^l, p_{k',l'} >_* = 0$$

pour tout k, k', l, l' dans $\mathbb{N}$ tels que $k'+2l' \neq k+2l$.
A présent, on pose :

$$\tilde{p}_{k,l} = \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}$$

pour tout k, l dans $\mathbb{N}$. Alors $\tilde{p}_{k,l}$ est un polynôme orthogonal à tous les $p_{k',l'}$, tels que $k \neq k'$ ou $l \neq l'$. En effet :

1) Si $k'+2l' \neq k+2l$ on a :

$$< \tilde{p}_{k,l}, p_{k',l'} >_* = \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} < \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}, p_{k',l'} >_* = 0.$$

2) Si $k'+2l' = k+2l$ avec $l' = l-m$ pour un certain $m > 0$ *i.e.* $k' = k+2m$, on a :

$$< \tilde{p}_{k,l}, p_{k+2m,l-m} >_* = \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} < \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}, p_{k+2m,l-m} >_* = 0.$$

car $l+j > l-m$ pour tout j dans $\{0,1,\ldots,[\frac{k}{2}]\}$.

3) Si $k'+2l' = k+2l$ avec $l' = l+m$ pour un certain $m>0$ *i.e.* $k' = k-2m$, on a :

$$\begin{aligned}
< \tilde{p}_{k,l}, p_{k-2m,l+m} >_* &= \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} < \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}, p_{k-2m,l+m} >_* \\
&= \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} < \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}, p_{k-2m,l+m} >_*
\end{aligned}$$

car $< \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}, p_{k-2m,l+m} >_* = 0$ si $l+j > l+m$ autrement dit si $j>m$. Donc :

$$\begin{aligned}
< \tilde{p}_{k,l}, p_{k-2m,l+m} >_* &= \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} < \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}, p_{k-2m,l+m} >_* \\
&= (2\pi)^n \dim(\mathcal{H}_{k-2m}) \frac{C_{k-2m,l+m}}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}C_{k-2m,m-j}} \\
&= (2\pi)^n \dim(\mathcal{H}_{k-2m}) \frac{C_{k-2m,l+m}}{C_{k,l}} \frac{(k+\frac{n}{2}-2m-1)!}{4^m m!(k+\frac{n}{2}-2)!} \\
&\quad \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \frac{m!}{j!(m-j)!}(k+\frac{n}{2}-j-2)\dots(k+\frac{n}{2}-j-m) \\
&= (2\pi)^n \dim(\mathcal{H}_{k-2m}) \frac{C_{k-2m,l+m}}{C_{k,l}} \frac{(k+\frac{n}{2}-2m-1)!}{4^m m!(k+\frac{n}{2}-2)!} Q(k+\frac{n}{2}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
< \tilde{p}_{k,l}, p_{k,l} >_* &= \frac{1}{C_{k,l}} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{(-1)^j}{C_{k-j-1,j}} < \frac{\gamma_1^{k-2j}}{(k-2j)!}\gamma_2^{l+j}, p_{k,l} >_* \\
&= \frac{1}{C_{k,l}} \frac{1}{C_{k-1,0}} < \frac{\gamma_1^k}{k!}\gamma_2^l, p_{k,l} >_* \\
&= (2\pi)^n \dim(\mathcal{H}_k) \\
&= < p_{k,l}, p_{k,l} >_*
\end{aligned}$$

On en conclut que $\tilde{p}_{k,l} = p_{k,l}$ pour tout k,l dans $\mathbb{N}$. ∎

Bibliographie

[1] Arnal, D. ; Ben amar, M. et Selmi, M. :
"Le problème de la réduction a un sous-groupe dans la quantification par déformation"
Ann. fac. sci. Toulouse Vol. XII N°1 (1991)

[2] Baklouti, A. :
" Nouvelle désintégration lisse de $L^2(G)$ pour les groupes résolubles exponentiels "
J. Lie Theory 8 N°1 25-50(1998)

[3] Baklouti, A. :
" Opérateurs d'entrelacement des représentations unitaires et cortex des groupes de Lie nilpotents. "
Th. Doct. Université de Metz (1995)

[4] Benson, C.; Jenkins, J. and Ratcliff, G. :
" On Gelfand pairs associated with the solvable Lie groups "
Trans Amer Math Soc 321 N°1, 85-115 (1990)

[5] Benson, C.; Jenkins, J. and Ratcliff, G. :
" The orbits method and Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups "
J. geom. Anal.

[6] Benson, C.; Jenkins, J.; Lipsman, R.L. and Ratcliff, G. :
" A geometric criterion for Gelfand pairs associated with the Heisenberg group "
Pac. J. Math. 178 N°1 1-36 (1997)

[7] Benson, C.; Jenkins, J. and Ratcliff, G. :
" Bounded K-spherical functions on Heisenberg groups "
J. Funct. Anal. 105 N°2 409-443(1992)

[8] Benson, C.; Jenkins, J. and Ratcliff, G. :
" $O(n)$-spherical functions on Heisenberg groups "
Comtemp. Math. 145, 181-197 (1993)

[9] Benson, C. and Ratcliff, G. :
" A classification of multiplicity free actions "
J. Algebra. 181 N°1 152-186(1996)

[10] Brown, I.D. :
" Dual topology of a nilpotent Lie group "
Ann. Sci. Ecole Norm. sup. N°6 407-411 (1973)

[11] Carcano, G. :
" A commutativity condition for algebras of invariant functions.
Boll. Un. Mat. Italiano 7: 1091-1105 (1987)

[12] Corwin, L. and Greenleaf, F. :
" Complex algebraic geometry and calculation of multiplicity for induced representations of nilpotent Lie groups"
Trans. Amer. Math. Soc. 305: 601-622 (1988)

[13] Dixmier,J. :
" Les algèbres enveloppantes "
Gauthier-Villars Paris 1972

[14] Faraut, J. :
" Analyse harmonique sur les paires de Gelfand et les espaces Hyperboliques"
Les cours du C.I.M.P.A. 315-446 (1982)

[15] Folland, G.B. :
" Harmonic analysis in phase space "
Princeton university press, New jersey 1989

[16] Fronsdal, C. :
" Remarks on quantization "
Reports on Math. physics 15 N°1 111-145 (1978)

[17] Fugiwara, H. :
" Sur les restrictions des orbites des groupes de Lie résolubles exponentiels "
Invent. Math. 104: 647-654 (1991)

[18] Gelfand, I.M. :
" Sphericals functions on symmetrics spaces "
Dokl. Akad. Nauk. U.S.S.R. 70: 5-8 (1950)
Amer. Math. Soc. Transl. 37: 39-44 (1964)

[19] Guillemin, V. and Sternberg, G. :
" Geometric quantization and multiplicities of group representations "
Invent. Math. 67 : 512-538 (1982)

[20] Heckman, G.J. :
" Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact connected Lie groups "
Invent. Maths. 67 :333-356 (1982)

[21] Howe, R. :
" Some remarks on classical invariant theory "
Trans. Amer. Math. Soc. 313 : 539-570 (1989)

[22] Howe, R. and Umeda,T. :
" The capelli identity, the double commutant theorem and the multiplicity free action "
preprint

[23] Kac, V. :
" Some remarks on nilpotent orbits"
J. Algebra 64 : 190-213 (1980)

[24] Kikuchi, K. :
" K-spherical representations for Gelfand pairs associated to solvable Lie groups"
J. Math. Soc. Japan 49 N°3 : 469-486 (1997)

[25] Kirillov, A.A. :
" Unitary representations of nilpotent Lie groups"
Uspeki Math. Nauk. 17 : 57-110 (1962)
Russian Math. Surveys 17: 57-110 (1962)

[26] Knapp, A.W. :
" Representations theory of semisimple groups "
princeton university press New-jersey 1986

[27] Leptin, H. :
" A new kind of eigenfunctions expensions on groups "
Pac. J. Math. 116: 45-67 (1985)

[28] Lipsman, R. :
" Orbits theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical"
J. Math. Pure and appl. 59: 337-374 (1980)

[29] Naimark, M. :
" Normed rings "
Wolters-Noordhoff (1970)

[30] Pukanszky, L. :
" Leçons sur les représentations des groupes "
Dunod Paris 1967

[31] Varadaradjan,V.S. :
" Lie groups, Lie algebras and their representations"
Springer verlag 1984

[32] Wallach, N. :
" Harmonic analysis on homogeneous spaces "
Dekker New-York 1973

[33] Zahir, H. :
" Produits star et réprésentations des groupes de Lie "
Th. Doct. Université de Metz (1991)