THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE METZ

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

par

David ALEXANDER

IDÉAUX MINIMAUX D'ALGÈBRES DE GROUPES

soutenue le 19 juin 2000 devant le jury composé de :

Didier ARNAL	Examinateur
Bachir BEKKA	Examinateur
Andrzej HULANICKI	Rapporteur
Jean LUDWIG	Directeur de thèse
Dominique MANCHON	Examinateur
Carine MOLITOR-BRAUN	Examinateur
Detlef MULLER	Rapporteur
André ROUX	Examinateur

Remerciements

Je tiens à faire part de ma plus profonde gratitude à Monsieur le Professeur Jean Ludwig, qui a dirigé cette recherche avec beaucoup de patience et d'enthousiasme. Je tiens également à lui exprimer une grande reconnaissance pour le temps qu'il m'a consacré lors de nos entretiens, toujours conviviaux et riches d'enseignements, aboutissant ainsi à ce travail, qui n'aurait pas vu le jour sans sa collaboration.

C'est un grand plaisir de compter sur la présence, parmi les membres du Jury, de Messieurs les Professeurs Didier Arnal, Bachir Bekka et André Roux, qui ont accepté d'examiner cette thèse. Leur accord m'honore et je les en remercie chaleureusement.

Je tiens également à remercier le Professeur Dominique Manchon d'avoir accepté d'être membre du Jury, ainsi que Madame le Professeur Carine Molitor-Braun, qui a montré un intérêt constant pour ce travail.

Messieurs les Professeurs Andrzej Hulanicki et Detlef Müller ont spontanément accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Qu'ils soient ici vivement remerciés.

Table des matières

Introduction

Soient G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. Un des problèmes est la détermination de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires continues irréductibles de G, noté $\widehat{G}$. Lorsque G est abélien, par le lemme de Schur, $\widehat{G}$ est en bijection avec le groupe des caractères continus de G dans le groupe multiplicatif U des nombres complexes de module 1. Lorsque G n'est pas abélien, $\widehat{G}$ n'est pas connu en général. En 1962, A. Kirillov est parvenu à déterminer $\widehat{G}$ lorsque G est nilpotent simplement connexe [16] : le dual unitaire $\widehat{G}$ de G est décrit par les orbites des éléments de $\mathfrak{g}^*$ sous l'action coadjointe de G ; cette action est définie par la relation

$$x \cdot \ell = < \mathrm{Ad}^*(x), \ell > = \ell \circ \mathrm{Ad}\big(x^{-1}\big), \qquad \ell \in \mathfrak{g}^*,\ x \in G.$$

Pour ℓ dans $\mathfrak{g}^*$, on appelle *polarisation* de $\mathfrak{g}$ en ℓ, une sous-algèbre $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$, totalement isotrope pour la forme bilinéaire B_ℓ sur $\mathfrak{g}$ définie par :

$$B_\ell(X,Y) = \ell\,[\,X,Y\,],$$

et de dimension maximale, i.e :

$$\dim \mathfrak{m} = \frac{\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^\circ}{2}$$

où

$$\mathfrak{g}^\circ = \big\{\, X \in \mathfrak{g} \;\big|\; \forall Y \in \mathfrak{g} \,:\, \ell\,[\,X,Y\,] = 0 \,\big\}.$$

En notant M le sous-groupe connexe $\exp \mathfrak{m}$ de G associé à $\mathfrak{m}$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \chi_{\ell,M} : & M & \longrightarrow & U \\ & \exp X & \mapsto & e^{i<\ell,X>} \end{array}$$

est un caractère de M. On pose :

$$\pi_{\ell,M} = \mathrm{ind}_M^G\, \chi_{\ell,M}\,.$$

Alors $\pi_{\ell,M}$ est irréductible et la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathfrak{g}^*}{\mathrm{Ad}^*(G)} & \longrightarrow & \widehat{G} \\ [\,\ell\,] & \mapsto & [\,\pi_{\ell,M}\,] \end{array}$$

est une application bijective, appelée bijection de Kirillov, où

$$\ell \sim \ell' \text{ ssi } \exists x \in G \,:\, \ell' = \mathrm{Ad}^*(x)\ell.$$

D'après Boidol [3], $\widehat{G}$ est également en bijection avec

$$\mathrm{Prim}^* L^1(G) = \{\, \mathrm{Ker}\,\pi \mid \pi \ \ast\text{-représentation topologiquement irréductible de } L^1(G) \,\}.$$

On munit cet ensemble de la topologie de Jacobson : pour une partie S de $L^1(G)$, on définit son *enveloppe*

$$h(S) = \{\, J \in \mathrm{Prim}^* L^1(G) \mid S \subset J \,\},$$

et pour une partie C de $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$, on définit son *noyau*

$$k(C) = \bigcap_{J \in C} J.$$

Alors, par définition, C est fermé dans $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$ ssi $C = h\big(k(C)\big)$.

Cette topologie est en général non séparée, mais toujours accessible, i.e, tout singleton est fermé dans $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$. En d'autres termes, tout élément J de $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$ est un idéal maximal de $L^1(G)$.

Problème

Etant donné une partie fermée C de $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$, peut-on déterminer l'ensemble $\mathcal{J}(C)$ des idéaux bilatères fermés de $L^1(G)$ d'enveloppe C ?

Lorsque $\mathcal{J}(C)$ est égal à $\{\, k(C) \,\}$, la partie C est dite *de synthèse* ou *spectrale*. Le premier résultat de synthèse spectrale est le célèbre théorème de N. Wiener affirmant que $\emptyset$ est de synthèse dans $\mathrm{Prim}^* L^1(\mathbb{R})$, i.e, tout idéal fermé propre de $L^1(\mathbb{R})$ est contenu dans le noyau d'une $\ast$-représentation topologiquement irréductible de $L^1(\mathbb{R})$. I. Segal [28] a ensuite montré que tout singleton de $\mathrm{Prim}^* L^1(\mathbb{R})$ est de synthèse, puis I. Kaplansky [14] a généralisé ce résultat à $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$ où G est abélien. Le premier résultat sur ce problème, lorsque G n'est pas abélien, a été trouvé par H. Leptin [17] qui montra que si G est nilpotent de pas 2, tout singleton est de synthèse dans $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$. Si G est nilpotent de pas 3, J. Ludwig [21] a montré que $\mathcal{J}(\{\, \mathrm{Ker}\,\pi \,\})$ est en bijection avec $\mathcal{J}(\{\, \mathrm{Ker}\,\chi \,\})$ où χ est un caractère de $L^1_w(\mathbb{R}^n)$, et w un poids à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}^n$. J. Ludwig montre qu'alors $\mathcal{J}(\{\, \mathrm{Ker}\,\pi \,\})$ contient en général une infinité d'éléments, et par suite $\{\, \mathrm{Ker}\,\pi \,\}$ n'est pas de synthèse en général. Si G est nilpotent de pas 4, les calculs deviennent beaucoup plus difficiles et aucun résultat général n'est connu. On a cependant le théorème suivant dû à J. Ludwig [19], qui donne l'existence d'un plus petit élément dans $\mathcal{J}(C)$:

Théorème

Soient G un groupe localement compact à croissance polynomiale, tel que $L^1(G)$ soit symétrique, et C une partie fermée de $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$. Alors, il existe un unique idéal bilatère fermé $j(C)$ de $L^1(G)$ tel que :

$$h\big(j(C)\big) = C$$

et

$$J \triangleleft L^1(G) \,:\, h(J) \subset C \implies j(C) \subset J.$$

Ce théorème s'applique lorsque G est de Lie nilpotent simplement connexe [6]. Par exemple, si G est abélien, alors $j(C)$ est l'adhérence dans $L^1(G)$ de l'idéal de $L^1(G)$ des fonctions dont le support de la transformée de Fourier est compact et disjoint de C [27].

Remarquons que, pour une partie fermée C de $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$, tout élément de $\mathcal{J}(C)$ est contenu dans $k(C)$. Il existe ainsi un idéal "minimal" et un idéal "maximal" d'enveloppe C. La partie C est alors de synthèse si et seulement si ces deux idéaux coïncident.

Soit π un élément de $\widehat{G}$. Afin de déterminer $\mathcal{J}(\{\operatorname{Ker}\pi\})$ lorsque le pas de G est supérieur à 3, il est naturel de commencer par déterminer $j(\{\operatorname{Ker}\pi\})$, puisque celui-ci est contenu dans chaque élément de $\mathcal{J}(\{\operatorname{Ker}\pi\})$. Le résultat obtenu par J. Ludwig lorsque G est de pas 3 incite à chercher cet idéal de $L^1(G)$ dans une sous-algèbre "assez générale" de $L^1(G)$, par exemple une algèbre à poids. Par la bijection de Kirillov, π est associée à l'orbite $O(\ell)$ d'une certaine forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$, et le cas le plus simple est celui où l'orbite $O(\ell)$ est ponctuelle. La première partie de cette thèse est consacrée à la détermination de $j(\{\operatorname{Ker}\pi\})$ dans ce cas. Elle se fait dans une algèbre plus générale encore qu'une algèbre à poids, et dans le cas d'un groupe de pas quelconque. Le résultat principal de ce chapitre repose en fait sur une propriété générale des $C^\infty(G)$-modules de dimension finie, où G est résoluble. Cette propriété, ainsi que d'autres, sont l'objet de l'annexe. Une fois trouvé cet "idéal minimal", un théorème de projection de W. Hauenschild et J. Ludwig, généralisé au chapitre 2 à une algèbre à poids, permettra de passer du cas où l'orbite $O(\ell)$ est ponctuelle au cas où celle-ci est plate. Ce cas, plus difficile, est abordé dans le dernier chapitre. Enfin, le chapitre 3, indépendant des autres, étudie de façon assez générale le comportement d'un poids sur un groupe topologique.

Notations

Par [3], l'ensemble $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$ est en bijection avec $\mathfrak{g}^*/\operatorname{Ad}^*(G)$. Afin de faciliter la lecture de cette thèse, les sous-ensembles fermés C de $\mathrm{Prim}^* L^1(G)$ et les parties fermées de $\widehat{G}$ seront identifiés avec les sous-ensembles fermés $\operatorname{Ad}^*(G)$-invariants de $\mathfrak{g}^*$. Ainsi, pour π_ℓ dans $\widehat{G}$, associé à l'orbite $O(\ell)$ d'une forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$, les ensembles $j(\{\operatorname{Ker}\pi_\ell\})$ et $\mathcal{J}(\{\operatorname{Ker}\pi_\ell\})$ seront notés respectivement $j(\ell)$ et $\mathcal{J}(\ell)$.

Conventions

Pour finir, voici les conventions adoptées dans toute la thèse. Si X est un espace topologique, on munit systématiquement X de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$, i.e la tribu engendrée par les ouverts de X, et une fonction f de X dans $\mathbb{C}$ qui est $\big(\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(\mathbb{C})\big)$-mesurable est dite *borélienne*. Sauf mention du contraire, les fonctions seront toujours supposées à valeurs complexes. Pour un groupe quelconque, e désignera l'élément neutre. Pour un groupe G et un sous-groupe N de G, la relation $N \triangleleft G$ signifie que N est distingué dans G, et le même symbole sera utilisé pour les algèbres : $I \triangleleft A$ signifie que I est un idéal bilatère fermé de l'algèbre normée A. Précisons enfin le sens de deux termes simples utilisés dans la thèse, mais dont les définitions varient parfois selon les ouvrages : un espace localement compact est en particulier *séparé* ; un espace topologique simplement connexe est en particulier *connexe*.

Chapitre 1

Orbites ponctuelles

Soient G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et π un élément de $\widehat{G}$. Dans ce chapitre, l'orbite de la forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$ associée à π par la bijection de Kirillov est supposée ponctuelle, ce qui revient à dire que ℓ est un caractère du groupe $\mathfrak{g}$. Ainsi, π est un caractère de $L^1(G)$. D'autre part, lorsque le pas de G est supérieur à 3, le résultat obtenu dans [21] suggère de calculer $j(\pi)$ dans une sous-algèbre A de $L^1(G)$ qui se doit être au moins aussi générale qu'une algèbre à poids. On exigera simplement de l'algèbre de Banach A de contenir $\mathcal{S}(G)$ comme sous-espace dense et que sa norme rende continues les injections de $\mathcal{S}(G)$ dans A et de A dans $L^1(G)$. Le théorème 1.3.3 détermine alors $j(\pi)$ dans ce cas. Notons qu'en écartant le cas où $\mathfrak{g}$ est nul, la résolubilité de $\mathfrak{g}$ montre en particulier que le sous-espace vectoriel $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ de $\mathfrak{g}$ est propre, de sorte qu'il existe toujours une forme linéaire non nulle sur $\mathfrak{g}$ dont l'orbite est ponctuelle.

Dans tout ce chapitre, sauf mention du contraire, G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application exponentielle exp est alors un C^∞-difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G, ce qui permet d'identifier G au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ en tant que variété. Si $\mathfrak{g}$ est muni du produit de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$X \cdot Y = X + Y + \frac{1}{2}\,[X,Y] + \frac{1}{12}\Big([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\Big) \\ + (\text{commutateurs d'ordre 3 au moins})$$

alors exp est un isomorphisme de groupes topologiques de $\mathfrak{g}$ sur G, ce qui permet d'identifier le groupe G et $(\mathfrak{g}, \cdot)$. Pour cette loi de groupe, $-X$ est l'inverse de X. Dans ce qui suit, λ désignera une mesure de Haar positive non nulle sur le groupe unimodulaire G et $\mathrm{d}\lambda(x)$ sera noté $\mathrm{d}x$.

1.1 Polynômes et algèbres de groupes

1.1.1 Définition

Soient G un groupe topologique et S une partie de G. On pose $S^0 = \{e\}$ et on note pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$S^n = \left\{ s_1 \dots s_n \;\middle|\; s_i \in S \right\}.$$

Lorsque G est localement compact, pour s dans G, on désigne par $\mathfrak{V}_G(s)$ l'ensemble des voisinages compacts de s dans G.

1.1.2 Proposition

Soient G un groupe localement compact connexe et U un élément de $\mathfrak{V}_G(e)$. Alors l'application τ_U de G dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\tau_U(s) = \min\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; s \in U^n \right\}$$

est borélienne et vérifie :

$$\tau_U(s) = 0 \Longleftrightarrow s = e$$
$$\tau_U(st) \le \tau_U(s) + \tau_U(t).$$

Si de plus U est symétrique, alors

$$\tau_U\left(s^{-1}\right) = \tau_U(s)$$

et la fonction d_U qui à (s,t) associe $\tau_U\left(s^{-1}t\right)$ est une distance sur G, bornée ssi G est compact, et d_U induit sur G la topologie discrète.

Preuve. Le groupe G étant connexe, τ_U est une application. Comme U est supposé compact, U est fermé dans G et est donc un borélien de G. Donc U^n est un borélien de G et sa fonction caractéristique χ_{U^n} est borélienne. Par suite,

$$\tau_U = \sup_{n \ge 1} n \left(\chi_{U^n} - \chi_{U^{n-1}}\right)$$

est borélienne. Pour la distance d_U, la boule ouverte de centre e et de rayon appartenant à $]0,1[$ est réduite à $\{e\}$ donc $\{e\}$ est ouvert dans G et d_U induit sur G la topologie discrète.

1.1.3 Il paraît difficile de définir canoniquement la notion de "fonction polynôme" sur un groupe quelconque G. A défaut d'une telle notion, 1.1.4 essaie de définir de façon naturelle la "croissance polynomiale" d'une fonction sur une classe de groupes aussi large que possible.

1.1.4 Définition

Soit G un groupe localement compact connexe. Une fonction f de G dans $\mathbb{C}$ est dite *à croissance polynomiale* si pour tout U dans $\mathfrak{V}_G(e)$, il existe un polynôme P_U à une indéterminée, à coefficients réels, tel que

$$|f| \leq P_U \circ \tau_U$$

i.e, tel que pour tout s dans G :

$$|f(s)| \leq P_U\big(\tau_U(s)\big).$$

Par exemple pour un groupe compact connexe G, les fonctions à croissance polynomiale sur G sont les fonctions bornées. Plus généralement, il est facile de vérifier que, sous les conditions de 1.1.4, une fonction à croissance polynomiale est bornée sur tout compact. La proposition suivante montre que si une fonction f de G dans $\mathbb{C}$ vérifie la condition $|f| \leq P_U \circ \tau_U$ pour *un* voisinage compact U de e dans G, alors f est à croissance polynomiale.

1.1.5 Proposition

Soit G un groupe localement compact connexe. Pour tous U et V dans $\mathfrak{V}_G(e)$, il existe des nombres réels strictement positifs k et k' tels que :

$$\tau_V \leq k\,\tau_U \leq k'\,\tau_V.$$

Preuve. Le groupe topologique G est connexe et l'intérieur de V dans G, noté $\overset{\circ}{V}$, est un voisinage de e dans G, donc pour tout s dans G, il existe un entier naturel k_s tel que s appartienne à $\overset{\circ}{V}{}^{k_s}$. La famille $\left(\overset{\circ}{V}{}^{k_s} \cap U\right)_{s\in U}$ forme alors un recouvrement ouvert du compact U et par suite, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ et des points $s_1, \ldots, s_n$ de U tels que

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{n} V^{k_{s_i}}.$$

Soit

$$k = \max\left\{ k_{s_i} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Alors U est contenu dans V^k, donc pour tout élément s de G :

$$U^{\tau_U(s)} \subset V^{k\,\tau_U(s)}$$

d'où

$$\tau_V \leq k\,\tau_U.$$

Comme U et V jouent des rôles symétriques, la proposition est démontrée.

1.1.6 Définition

Soit G un groupe topologique. Une fonction borélienne w de G dans $[1,+\infty[$ est appelée *poids sur* G si pour tous s et t dans G :

$$w(st) \leq w(s)\,w(t).$$

1.1.7 Notation

Soit G un groupe. Pour une fonction f de G dans $\mathbb{C}$, on note $\check{f}$ la fonction qui à s associe $f(s^{-1})$.

1.1.8 Il est clair que l'ensemble des poids sur G est stable par multiplication ponctuelle, inversion (tchèche), limite simple finie, enveloppe supérieure finie, et composition à gauche par des fonctions de la forme $\exp\circ f\circ \ln$, où f est une fonction croissante et sous-additive de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. De telles fonctions sont étudiées dans [11].

1.1.9 Exemple

Pour un groupe localement compact connexe G et U dans $\mathfrak{V}_G(e)$, l'application $1+\tau_U$, notée w_U, est clairement un poids à croissance polynomiale sur G, vérifiant de plus :

$$w_U(st) \leq w_U(s) + w_U(t).$$

Ce poids sera étudié en détail au chapitre 3. Pour d'autres exemples de poids, voir également le chapitre 3.

1.1.10 Notation

Soient G un groupe localement compact, λ une mesure de Haar à gauche positive non nulle sur G, et w un poids sur G. On désigne par $L^1_w(G)$ la sous-algèbre de $L^1(G)$ des classes de fonctions f intégrables par rapport à la mesure de densité w par rapport à λ, c'est à dire telles que $\int_G |f|w\,\mathrm{d}\lambda$ soit finie, et on définit alors une norme $\|\ \|_w$ sur $L^1_w(G)$ en posant :

$$\|f\|_w = \int_G |f|w\,\mathrm{d}\lambda.$$

L'algèbre $L^1_w(G)$ munie de la norme $\|\ \|_w$ est de Banach.

1.1.11 Remarque

Comme mentionné dans l'introduction, les algèbres à poids définies ci-dessus apparaissent naturellement lorsque G est de Lie simplement connexe et nilpotent de pas 3, puisque J. Ludwig a montré dans [21] que dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{J}(\pi)$ des idéaux bilatères fermés de $L^1(G)$ d'enveloppe (voir 1.2.1) un singleton $\{\pi\}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{J}(\chi)$, où χ est un caractère de $L^1_w(\mathbb{R}^n)$ pour un certain entier n et w un poids à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}^n$.

1.1.12 Définition

Soient V et W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Une application p de V dans W est appelée *polynôme* si pour tout élément v de V, les coordonnées de $p(v)$ dans une base de W sont des polynômes en les coordonnées de v dans une base de V.

Les formules de changement de base montrent qu'alors, pour tout élément v de V, les coordonnées de $p(v)$ dans *toute* base de W sont des polynômes en les coordonnées de v dans *toute* base de V. Vu les hypothèses faites sur G, la définition suivante donne une réponse satisfaisante à 1.1.3.

1.1.13 Définition

Une fonction p de G dans $\mathbb{C}$ est appelée *polynôme* si l'application $p \circ \exp$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}$ est un polynôme au sens de 1.1.12.

La PROPOSITION 3.3.6 montrera qu'un polynôme est une fonction à croissance polynomiale.

1.1.14 Notation

L'algèbre des polynômes sur G est notée $\mathcal{P}(G)$.

1.1.15 Notation

Pour X dans $\mathfrak{g}$ et pour une fonction f de classe C^∞ sur G, on note $X * f$ la dérivée de f à gauche dans la direction X et $f * X$ la dérivée de f à droite dans la direction X :

$$X * f(y) = \frac{d}{dt} f\big(\exp(-tX)y\big)_{|t=0}, \qquad y \in G$$

et

$$f * X(y) = \frac{d}{dt} f\big(y \exp(tX)\big)_{|t=0}, \qquad y \in G.$$

Une base $(X_1, \ldots, X_d)$ de $\mathfrak{g}$ étant fixée, pour un multi-indice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ de $\mathbb{N}^d$, noté α, et une fonction f de classe C^∞ sur G, on pose :

$$X^\alpha * f = X_1^{\alpha_1} * \cdots * X_d^{\alpha_d} * f,$$

$$f * X^\alpha = f * X_1^{\alpha_1} * \cdots * X_d^{\alpha_d}$$

et

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d .$$

On désigne par $\mathcal{S}(G)$ l'espace de Schwartz des fonctions f de classe C^∞ sur G telles que pour tout entier N

$$p_N(f) = \sum_{|\alpha| \le N} \int_G |X^\alpha * f| \, w^N \, \mathrm{d}\lambda$$

soit fini, où w est le poids défini, et noté w_U en 1.1.9. On vérifie que cette définition est indépendante du choix de la base de $\mathfrak{g}$ et du voisinage compact U de e dans G. On désigne par $\mathcal{D}(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(G)$ formé des fonctions à support compact.

L'espace $\mathcal{S}(G)$ muni du produit de convolution et de la famille de semi-normes $(p_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est alors une algèbre de Fréchet et $\mathcal{S}(G)$ est dense dans $\big(L^1(G), \| \; \|_1\big)$.

1.1.16 La détermination de "l'idéal minimal" au paragraphe 1.3 va se faire pour une classe d'algèbres assez générale. On considère en effet dans ce chapitre une sous-algèbre de Banach $(A, \| \ \|)$ de $L^1(G)$ contenant $\mathcal{S}(G)$ comme sous-espace dense et vérifiant :

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{S}(G)\ :\ \|f\| \leq p_N(f) \\ \forall f \in A\ :\ \|f\|_1 \leq \|f\|. \end{cases}$$

La proposition suivante est connue.

1.1.17 Proposition

Les caractères de G, i.e les homomorphismes continus du groupe G dans $\mathbb{C}^\times$, sont de la forme $\exp X \mapsto e^{\ell(X)}$ où ℓ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire complexe sur $\mathfrak{g}$ telle que $\ell[X,Y]$ soit nul pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$.

1.1.18 Notation

Notons $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble des $[X,Y]$ où X et Y parcourent $\mathfrak{g}$. Fixons, jusqu'à la fin du chapitre, une forme $\mathbb{R}$-linéaire réelle ℓ sur $\mathfrak{g}$ s'annulant sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, et notons χ_ℓ le caractère unitaire de G associé à ℓ, défini par :

$$\chi_\ell(\exp X) = e^{i\ell(X)}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

On note $\mathcal{P}_\ell$ l'espace vectoriel des polynômes P, à coefficients complexes, tels que la forme linéaire continue $P\chi_\ell$ sur $\mathcal{S}(G)$ qui à f associe $\int_G fP\chi_\ell\,\mathrm{d}\lambda$ se prolonge en une forme linéaire continue sur A. Un polynôme P à coefficients complexes appartient donc à $\mathcal{P}_\ell$ ssi il existe un nombre réel positif c tel que pour tout f dans $\mathcal{S}(G)$:

$$\left|\int_G fP\chi_\ell\,\mathrm{d}\lambda\right| \leq c\,\|f\|.$$

1.1.19 Notation

Soient G un groupe et s un élément de G. Pour une fonction f de G dans $\mathbb{C}$, on note $L_s f$ ou ${}_s f$ la translatée de f à gauche par s qui à t associe $f(s^{-1}t)$, et $R_s f$ ou f_s la translatée de f à droite par s qui à t associe $f(ts)$.

1.1.20 Théorème

L'espace vectoriel $\mathcal{P}_\ell$ est de dimension finie.

Preuve.
1) Le calcul ci-dessous est un préliminaire pour 2). Son résultat sera également utilisé dans la preuve du théorème 1.3.3.
Soient f dans $\mathcal{S}(G)$, Q un polynôme et χ_q un caractère unitaire de G. Pour tout x de G :

$$f * Q\chi_q(x) = \chi_q(x)\int_G f(y)\,Q(y^{-1}x)\,\overline{\chi_q(y)}\,\mathrm{d}y.$$

Si

$$x = \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i\right) \qquad \text{et} \qquad y = \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \mu_i X_i\right)$$

où $(X_1, \ldots, X_d)$ est une base de $\mathfrak{g}$, alors

$$y^{-1}x = \exp\left(\sum_{j=1}^{d} \nu_j X_j\right)$$

où chaque ν_j est un polynôme en les λ_i et μ_i. Par conséquent $Q(y^{-1}x)$ est un polynôme en les λ_i, donc en x, dont les coefficients sont des polynômes en les μ_i, donc en y :

$$Q(y^{-1}x) = \left(\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d} R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}(y)\, S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}\right)(x)$$

où $R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}$ et $S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}$ sont des polynômes. Il vient alors :

$$\begin{aligned} f * Q\chi_q(x) &= \chi_q(x) \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d} \left(\int_G f\, R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}\, \overline{\chi_q}\, \mathrm{d}\lambda\right) S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_d}(x) \\ &= (P\,\chi_q)(x) \end{aligned}$$

où P est un polynôme.

2) Soient Q dans $\mathcal{P}_\ell$ et g dans $\mathcal{S}(G)$. D'après 1)

$$g * (Q\,\chi_\ell) = Q_g\,\chi_\ell$$

où Q_g est un polynôme, et pour tout f dans $\mathcal{S}(G)$:

$$\begin{aligned} |< Q_g\,\chi_\ell, f >| &= |< g * (Q\,\chi_\ell), f >| \\ &= |< Q\,\chi_\ell, \check{g} * f >| \\ &\le c\,p_N(\check{g} * f) = c \sum_{|\alpha|\le N} \int_G |(X^\alpha * \check{g}) * f|\; w^N\, \mathrm{d}\lambda \\ &\le c' \int_G |h_{\alpha_0} * f|\, w^N \mathrm{d}\lambda \\ &\le c'\, \|h_{\alpha_0}\|_{w^N}\, \|f\|_{w^N} \\ &\le c_g\, \|f\|_{w^N}. \end{aligned}$$

où N est un entier (dépendant de Q et ℓ), c, c', c_g sont des constantes indépendantes de f, et h_{α_0} un élément de $\mathcal{S}(G)$. Comme $\mathcal{S}(G)$ est dense dans $L^1_{w^N}(G)$ pour $\|\;\|_{w^N}$, $Q_g\,\chi_\ell$ se prolonge par continuité en une forme linéaire continue sur $L^1_{w^N}(G)$ vérifiant pour tout f dans $L^1_{w^N}(G)$:

$$|< Q_g\,\chi_\ell, f >| \le c_g \|f\|_{w^N} \;;$$

donc

$$\left\|\frac{Q_g}{w^N}\right\|_\infty < +\infty.$$

Notons $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des polynômes P tels que $\|P/w^N\|_\infty$ soit finie.

Comme le poids w^N est à croissance polynomiale, l'espace $\mathcal{P}_N$ est de dimension finie et on a montré que pour tout Q dans $\mathcal{P}_\ell$ et tout g dans $\mathcal{S}(G)$, $Q_g\,\chi_\ell$ appartient à $\mathcal{P}_N\,\chi_\ell$.

3) Soient Q dans $\mathcal{P}_\ell$, $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite de voisinages compacts de e dans G telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} < \lambda(K_n) \leq \frac{2}{n}$$

et $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(G)$ vérifiant pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\operatorname{supp}(g_n) \subset K_n \; ; \quad \int_G g_n \overline{\chi_\ell} \, \mathrm{d}\lambda = 1 \; ; \quad \|g_n\|_\infty \leq n.$$

Alors, pour tout x dans K_1 :

$$\begin{aligned}
|g_n * Q\,\chi_\ell(x) - Q\,\chi_\ell(x)| &= \left|\int_G g_n(y)\Big(Q(y^{-1}x) - Q(x)\Big)\overline{\chi_\ell(y)}\,\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \int_{K_n} |g_n|\,|(Q_x)\check{} - Q(x)|\,\mathrm{d}\lambda \\
&\leq \|g_n\|_\infty \,\|(Q_x)\check{} - Q(x)\|_{\infty,K_n}\,\lambda(K_n) \\
&\leq 2 \sup_{x\in K_1} \|(Q_x)\check{} - Q(x)\|_{\infty,K_n}.
\end{aligned}$$

La fonction $(Q_x)\check{} - Q(x)$ vaut 0 en e et est continue en e, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_n * Q\,\chi_\ell - Q\,\chi_\ell\|_{\infty,K_1} = 0.$$

Donc $Q\,\chi_\ell$ est adhérent à l'espace normé de dimension finie $(\mathcal{P}_N\,\chi_\ell, \| \; \|_{\infty,K_1})$, et par suite $Q\,\chi_\ell$ appartient à $\mathcal{P}_N\,\chi_\ell$, i.e Q appartient à $\mathcal{P}_N$. Finalement $\mathcal{P}_\ell$ est contenu dans $\mathcal{P}_N$ ce qui montre que $\mathcal{P}_\ell$ est de dimension finie.

1.1.21 Proposition

Pour tout x dans G, les opérateurs de translations L_x et R_x sont continus sur $(\mathcal{S}(G), \| \; \|)$.

Preuve. Fixons x dans G et soit $\big(f_n, {}_x(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments du graphe Γ_{L_x} de L_x qui converge dans $(\mathcal{S}(G), \| \; \|)$ vers un élément $(0, f)$ de $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(G)$. Alors les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big({}_x(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers 0 et f dans $\mathcal{S}(G)$. Notons $< \, , \, >$ la forme bilinéaire de dualité sur $L^1(G) \times L^\infty(G)$:

$$< f, g > = \int_G f g \,\mathrm{d}\lambda, \qquad f \in L^1(G), \; g \in L^\infty(G).$$

Comme $f \mapsto < f, g >$ est continu, de norme inférieure à $\|g\|_\infty$, les suites $(< f_n, g >)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(< {}_x(f_n), g >)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers 0 et $< f, g >$. Or, on vérifie facilement que

$$< {}_x(f_n), g > = \left\langle f_n, {}_{x^{-1}}g \right\rangle$$

donc $(< {}_x(f_n), g >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après ce qui précède, et par suite $< f, g >$ est nul. Cette dernière relation étant vraie pour tout g dans $L^\infty(G)$, on en déduit que f est nulle, donc $(0, f)$ appartient à Γ_{L_x} et Γ_{L_x} est fermé dans $\mathcal{S}(G)^2$. Par le théorème du graphe fermé, L_x est continu de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(G)$.

On prouve de façon analogue le résultat pour les translations à droite.

1.1.22 Proposition

L'espace vectoriel $\mathcal{P}_\ell$ est invariant par translations.

Preuve. Soient P dans $\mathcal{P}_\ell$ et x, z des éléments de G. Comme cela a déjà été remarqué, pour tout $y = \exp Y$ dans G,

$$_xP_z(y) = P(x^{-1}yz)$$

est un polynôme en les coordonnées de Y dans toute base de $\mathfrak{g}$, donc $_xP_z$ est un polynôme, et pour tout f dans $\mathcal{S}(G)$:

$$\begin{aligned} < {_xP_z}\,\chi_\ell, f > &= \int_G f(y)\, P(x^{-1}yz)\, \chi_\ell(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \chi_\ell(x)\, \overline{\chi_\ell(z)} \int_G {_{x^{-1}}f_{z^{-1}}}\; P\chi_\ell\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \chi_\ell(x)\, \overline{\chi_\ell(z)} < P\chi_\ell, {_{x^{-1}}f_{z^{-1}}} >. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $P\chi_\ell$ se prolonge en une forme linéaire continue sur A, il en est de même pour $_xP_z\,\chi_\ell$ par la PROPOSITION 1.1.21, donc $_xP_z$ appartient à $\mathcal{P}_\ell$.

1.1.23 Notation

Jusqu'à la fin du chapitre, W désigne un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{P}_\ell$ invariant par translations, et $W\chi_\ell$ est noté W_ℓ. On pose également :

$$I(W) = \{ f \in A \mid \forall P \in W \;:\; < P\chi_\ell, f > = 0 \}.$$

1.1.24 Proposition

L'espace vectoriel W_ℓ est invariant par translations et par convolution par des éléments de $\mathcal{S}(G)$.

Preuve. Soient P dans W et x, y, z des éléments de G. On a

$$\begin{aligned} {_x(P\chi_\ell)_z}(y) &= (P\chi_\ell)(x^{-1}yz) \\ &= \overline{\chi_\ell(x)}\, \chi_\ell(z)\, ({_xP_z}\,\chi_\ell)(y), \end{aligned}$$

donc $_x(P\chi_\ell)_z$ appartient à W_ℓ et W_ℓ est invariant par translations.
En outre, pour tout f dans $\mathcal{S}(G)$

$$f * P\chi_\ell = \int_G f(x)\, {_x(P\chi_\ell)}\, \mathrm{d}x$$

et

$$P\chi_\ell * f = \int_G \check{f}(x) (P\chi_\ell)_x\, \mathrm{d}x$$

sont des intégrales vectorielles convergentes dans W_ℓ d'après ce qui précède.

1.1.25 Notation

Soient P dans W et f, g des éléments de A. Alors $P\chi_\ell$ définit une forme linéaire continue sur A par définition, donc $< P\chi_\ell, g * f >$ existe. On pose

$$< \check{g} * (P\chi_\ell), f > = < P\chi_\ell, g * f >.$$

Alors $\check{g} * (P\chi_\ell)$ ainsi définie est une forme linéaire continue sur A. De même

$$< P\chi_\ell * \check{g}, f > = < P\chi_\ell, f * g >$$

définit une forme linéaire continue $P\chi_\ell * \check{g}$ sur A.

1.1.26 Proposition

Le sous-espace vectoriel fermé $I(W)$ de A est un idéal bilatère de A.

Preuve. Soient f dans $I(W)$, P dans W, g dans A et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(G)$ qui converge vers g dans A. Par la PROPOSITION 1.1.24, $< \check{g_n} * P\chi_\ell, f >$ existe pour tout n et par la notation précédente

$$< P\chi_\ell, g_n * f > = < \check{g_n} * P\chi_\ell, f > = 0.$$

Comme $(< P\chi_\ell, g_n * f >)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $< P\chi_\ell, g * f >$, il vient

$$< P\chi_\ell, g * f > = 0,$$

donc $g * f$ appartient à $I(W)$, ce qui prouve que $I(W)$ est un idéal à gauche de A. On montrerait de manière analogue que $I(W)$ est un idéal à droite de A.

1.2 Enveloppe

1.2.1 Définition

Pour une algèbre de Banach A, on note $\mathrm{Prim}(A)$ l'ensemble des idéaux primitifs de A, i.e, l'ensemble des noyaux des représentations algébriquement irréductibles de A dans des espaces de Banach.

1.2.2 Définition

Pour une algèbre de Banach A dense dans une $*$-algèbre de Banach B, on note $\mathrm{Prim}^*(A)$ l'ensemble des restrictions à A des noyaux des $*$-représentations topologiquement irréductibles de B dans des espaces de Hilbert. On appelle *noyau d'une partie C de* $\mathrm{Prim}^*(A)$ l'ensemble

$$k(C) = \bigcap_{J\in C} J$$

et on appelle *enveloppe d'une partie S de A* l'ensemble

$$h(S) = \{\, J \in \mathrm{Prim}^*(A) \mid S \subset J \,\}.$$

1.2.3 Pour une algèbre de Banach A dense dans une $*$-algèbre de Banach B, l'ensemble $\mathrm{Prim}^*(A)$ est muni de la topologie de Jacobson. Par définition, une partie C de $\mathrm{Prim}^*(A)$ est fermée dans $\mathrm{Prim}^*(A)$ ssi C est égale à $h\big(k(C)\big)$. La topologie de Jacobson est accessible, i.e, tout singleton est fermé dans $\mathrm{Prim}^*(A)$.

Le but de ce paragraphe est de déterminer l'enveloppe de $I(W)$.

1.2.4 Proposition

> *Vu les hypothèses faites sur A dans 1.1.16, on a*
> $$\mathrm{Prim}^*(A) = \mathrm{Prim}(A).$$

Preuve.
1) Soit π une représentation unitaire topologiquement irréductible de G et donc de $L^1(G)$. Alors $\pi_{|_A}$ est topologiquement irréductible sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit

$$\mathcal{H}_0 = \mathrm{Vec}\left\{ \pi(f)\xi \mid \xi \in \mathcal{H},\ f \in A,\ \pi(f) \text{ est de rang fini} \right\}.$$

Comme $\pi\big(\mathcal{S}(G)\big)$ contient beaucoup d'opérateurs de rang fini, $\mathcal{H}_0$ est un sous-espace vectoriel non trivial A-invariant de $\mathcal{H}$ et la restriction de π à $\mathcal{H}_0$ définit un module simple de A. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\pi_{|_A}$ est un idéal primitif de A :

$$\mathrm{Prim}^*(A) = \left\{ \mathrm{Ker}\,\pi_{|_A} \mid \pi \in \widehat{G} \right\} \subset \mathrm{Prim}(A)$$

Prouvons l'autre inclusion. Si (T, V) est un A-module simple sur un espace de Banach V, alors $T_{|_{\mathcal{S}(G)}}$ est un $\mathcal{S}(G)$-module topologiquement irréductible. Par [23] il existe π dans $\widehat{G}$ tel que :

$$\mathrm{Ker}\left(T_{|_{\mathcal{S}(G)}}\right) = \mathrm{Ker}\left(\pi_{|_{\mathcal{S}(G)}}\right).$$

Par [22], $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_{\mathcal{S}(G)}}\right)$ est dense dans $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,T$ contient $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$.

2) Montrons que $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$ est un idéal bilatère maximal de A. Soit M un idéal bilatère fermé de A contenant $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$. Supposons que M soit différent de $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$. Alors il existe g dans M telle que g n'appartienne pas à $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$. Par [22], on sait que l'idéal bilatère

$$R = \left\{ f \in \mathcal{S}(G) \mid \pi(f) \text{ est de rang fini} \right\}$$

est dense dans $\mathcal{S}(G)$ et donc dans A. Par conséquent $R * g * R$ n'est pas contenu dans $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$ et M contient donc un élément h tel que $\pi(h)$ soit le projecteur orthogonal noté P_λ sur un vecteur C^∞ λ de $\mathcal{H}_\pi$. Soit f dans $\mathcal{S}(G)$ telle que $\pi(f)$ soit aussi un projecteur orthogonal de dimension 1, P_μ, avec $< \lambda, \mu >$ non nul. Alors :

$$\begin{aligned} \pi(f) &= |< \lambda, \mu >|^{-2}\, P_\mu \circ P_\lambda \circ P_\mu \\ &= \pi\left(< \lambda, \mu >^{-1} f * h * f\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$f - < \lambda, \mu >^{-1} f * h * f \in \mathrm{Ker}\,\pi \subset M$$

et par conséquent f appartient à M. Comme R est engendré comme idéal par ces éléments f, ceci montre que M contient l'idéal R et finalement M est égal à A puisque M est fermé dans A. Ceci montre que $\mathrm{Ker}\,T$ et $\mathrm{Ker}\left(\pi_{|_A}\right)$ sont égaux.

1.2.5 Proposition

L'espace W est invariant par dérivations i.e, pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et tout P dans W, $X * P$ et $P * X$ appartiennent à W.

Preuve. Pour X dans $\mathfrak{g}$, P dans W et t dans $\mathbb{R}^\times$, on a

$$t^{-1}\left({}_{\exp(tX)}P - P\right) \in W$$

car W est invariant par translations. Comme W est de dimension finie, il vient :

$$X * P \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t\to 0} t^{-1}\left({}_{\exp(tX)}P - P\right) \in W$$

ce qui montre que W est invariant par dérivations à gauche.
On montrerait de même que W est invariant par dérivations à droite.

Par l'introduction de [5], on a :

1.2.6 Proposition

Il existe une fonction degré "deg" sur l'espace vectoriel des polynômes sur G à coefficients complexes, telle que pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et tout polynôme P, on ait :

$$\deg(X * P) < \deg P.$$

1.2.7 Corollaire

Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, il existe un entier naturel k tel que pour tout P dans W, $X^k * P$ soit nul.

Preuve. Le corollaire résulte de la PROPOSITION 1.2.6, W étant de dimension finie.

1.2.8 Proposition

L'enveloppe $h\big(I(W)\big)$ de $I(W)$ contient $\operatorname{Ker}\chi_\ell$.

Preuve. Pour X dans $\mathfrak{g}$ et P dans W

$$\begin{aligned}\pi(X)(P\chi_\ell) &= X * (P\chi_\ell)\\ &= (X * P)\chi_\ell - i<\ell, X>(P\chi_\ell)\end{aligned}$$

définit une représentation π de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans W_ℓ. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\pi(X)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(W_\ell)$ est nilpotent par le COROLLAIRE 1.2.7. Par le théorème d'Engel, il existe un élément non nul P dans W tel que pour tout X dans $\mathfrak{g}$, $\pi(X)(P\chi_\ell)$ soit nul. Donc P est constant. Par suite, χ_ℓ appartient à W_ℓ et donc $I(W)$ est contenu dans $\operatorname{Ker}\chi_\ell$ i.e, $\operatorname{Ker}\chi_\ell$ appartient à $h\big(I(W)\big)$.

1.2.9 Notation

Pour f dans $L^1(G)$, la transformée de Fourier de f en ℓ est notée $\widehat{f}(\ell)$ et est définie par :

$$\widehat{f}(\ell) = \int_G f\,\overline{\chi_\ell}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Afin de formuler simplement le lemme 1.2.11, il convient d'adopter la notation suivante :

1.2.10 Notation

Soit P un "monôme" sur G, i.e, par la définition 1.1.13 : dans une base $(X_1, \ldots, X_d)$ de $\mathfrak{g}$, pour tous nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$:

$$P \circ \exp\left(\sum_{1 \leq r \leq d} \lambda_r X_r\right) = \prod_{1 \leq r \leq d} \lambda_r^{\alpha_r}.$$

On pose :

$$\partial P = \prod_{1 \leq r \leq d} (-i)^{-\alpha_r}\, \partial_r^{\alpha_r}$$

et on étend cette définition par $\mathbb{C}$-linéarité à tout polynôme.

La présence du coefficient $(-i)^{-\alpha_r}$ dans la notation ci-dessus est uniquement destinée à donner une expression simple pour $\partial P(\widehat{f})(-\ell)$ (voir 1.2.11).

1.2.11 Lemme

Pour tout f dans A :

$$f \in I(W) \Longleftrightarrow \forall P \in W\ :\ \left(\partial P(\widehat{f})\right)(-\ell) = 0,$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Preuve. Par les deux notations précédentes, pour tout P dans W :

$$\begin{aligned}\left(\partial P(\widehat{f})\right)(-\ell) &= \int_G f\, P\, \chi_\ell \,\mathrm{d}\lambda \\ &= < P\chi_\ell, f >,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

1.2.12 Théorème

L'enveloppe $h\big(I(W)\big)$ de $I(W)$ est $\{\operatorname{Ker}\chi_\ell\}$.

Preuve. Par la PROPOSITION 1.2.8, $\operatorname{Ker}\chi_\ell$ appartient à $h\big(I(W)\big)$.

Soit π une $*$-représentation topologiquement irréductible de $L^1(G)$ dans un espace de Hilbert dont le noyau dans A contient $I(W)$. Par le THÉORÈME 1.1.20, $I(W)$ est de codimension finie dans A, donc π est de dimension finie et définit une représentation $\widetilde{\pi}$ unitaire continue irréductible du groupe nilpotent G. Par le théorème de Lie, $\widetilde{\pi}$ est un caractère. Donc π est un caractère $\chi_{\ell'}$ où ℓ' est une forme $\mathbb{R}$-linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ s'annulant sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ par la PROPOSITION 1.1.17 et 1.1.18.

Si ℓ' est distincte de ℓ, il existe f dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que $\widehat{f}(-\ell')$ soit égale à 1 et $\widehat{f}$ soit nulle sur un voisinage de $-\ell$. Alors f n'appartient pas à $\operatorname{Ker}\chi_{\ell'}$ et appartient à $I(W)$ par le LEMME 1.2.11. Comme ceci contredit l'hypothèse, ℓ' est égale à ℓ.

1.3 Idéal minimal

1.3.1 Proposition

Pour toute partie fermée C de $\mathrm{Prim}^*(A)$, *il existe un idéal bilatère fermé $j(C)$ de A d'enveloppe C et tel que tout idéal bilatère fermé de A dont l'enveloppe est contenue dans C contienne $j(C)$.*

Preuve. La preuve donnée dans [26] s'adapte au cas général.

Le THÉORÈME 1.2.12 peut alors s'écrire $j(\mathrm{Ker}\,\chi_\ell) \subset I(W)$, ce qui entraîne, compte tenu de la PROPOSITION 1.1.22, $j(\mathrm{Ker}\,\chi_\ell) \subset I(\mathcal{P}_\ell)$, soit encore, d'après l'abus d'écriture convenu dans l'introduction, $j(\ell) \subset I(\mathcal{P}_\ell)$. Le théorème suivant montrera l'autre inclusion.

1.3.2 Lemme

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de A' qui est $*\,A$-invariant à gauche. Alors tout élément de F est une somme finie de fonctions de la forme $P\chi_q$, où P est un polynôme, et χ_q un caractère unitaire de G.

Preuve. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ une base de F. Alors $\mathcal{D}(G) * \mu_1 + \cdots + \mathcal{D}(G) * \mu_n$ est dense dans l'espace vectoriel de dimension finie F, donc est égal à F.
Soient μ dans F et g dans $\mathcal{D}(G)$. Pour tout f dans $\mathcal{S}(G)$:

$$\begin{aligned} < g * \mu|_{\mathcal{S}(G)}, f > &= < \mu|_{\mathcal{S}(G)}, \check{g} * f > \\ &= \int_G \varphi(x)\,(1-\Delta)^N(\check{g} * f)(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

pour une certaine fonction φ à croissance modérée, de classe C^∞ sur G et un certain entier N, où Δ désigne le Laplacien de G, d'après [25]. En posant

$$h = (1-\Delta)^N \check{g},$$

on a alors

$$< g * \mu|_{\mathcal{S}(G)}, f > = \int_G \psi f \,\mathrm{d}\lambda$$

où

$$\psi(x) = \int_G h\,\varphi_x \,\mathrm{d}\lambda.$$

La forme linéaire $g * \mu$ est donc donnée sur $\mathcal{S}(G)$ par une fonction ψ de classe C^∞ sur G. Comme $\mathcal{S}(G)$ est dense dans A, la forme linéaire $g * \mu$ peut s'identifier à ψ et avec cette identification, F est ainsi formé de fonctions C^∞.
Le lemme résulte alors de la PROPOSITION 1 de l'ANNEXE.

1.3.3 Théorème

Le plus petit idéal bilatère fermé de A d'enveloppe $\{\mathrm{Ker}\,\chi_\ell\}$ *est*

$$j(\ell) = I(\mathcal{P}_\ell).$$

Preuve.
1) Il a déjà été remarqué que $j(\ell)$ est contenu dans $I(\mathcal{P}_\ell)$.

Par [20], il existe un entier naturel N tel que $j(\ell)$ soit égal à $\overline{(\operatorname{Ker}\chi_\ell)^N}$.
Montrons par récurrence sur n que si T est une forme linéaire continue sur A qui annule $(\operatorname{Ker}\chi_\ell)^n$ alors T est de la forme $P\chi_\ell$ où P appartient à $\mathcal{P}_\ell$.
Le résultat est vrai si n est égal à 1.
Soit m dans $\mathbb{N}^*$ tel que T annule $(\operatorname{Ker}\chi_\ell)^m$ et n'annule pas $(\operatorname{Ker}\chi_\ell)^{m-1}$.
2) a) Soit f_0 dans $\operatorname{Ker}\chi_\ell$. Alors $\check{f}_0 * T$ est une forme linéaire continue sur A et pour tout u dans $(\operatorname{Ker}\chi_\ell)^{m-1}$:

$$< \check{f}_0 * T, u > \overset{\text{déf}}{=} < T, f_0 * u > = 0$$

car $f_0 * u$ appartient à $(\operatorname{Ker}\chi_\ell)^m$. L'hypothèse de récurrence montre alors que

$$\check{f}_0 * T = P_{f_0}\chi_\ell$$

où P_{f_0} appartient à $\mathcal{P}_\ell$.

b) Soient f et f_1 dans A tels que $\chi_\ell(f_1)$ soit égal à 1. Alors $f - \chi_\ell(f)f_1$ appartient à $\operatorname{Ker}\chi_\ell$, et par conséquent

$$(f - \widehat{f}(-\ell)f_1)\check{} * T = P_f\,\chi_\ell$$

où P_f appartient à $\mathcal{P}_\ell$ d'après a), c'est à dire

$$\begin{aligned} \check{f} * T &= \widehat{f}(-\ell)\check{f}_1 * T + P_f\,\chi_\ell \\ &\in \mathbb{C}(\check{f}_1 * T) + \mathcal{P}_\ell\,\chi_\ell. \end{aligned}$$

Ceci montre que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\check{A} * T$, qui est contenu dans A', est de dimension finie par le THÉORÈME 1.1.20.
Soit ϕ un élément de A.
3) Par 2) et le LEMME 1.3.2, $\check{\phi} * T$ est de la forme

$$\check{\phi} * T = \sum_{j=1}^{p} P_j\,\chi_{q_j}$$

où les P_j sont des polynômes et les χ_{q_j} des caractères unitaires de G que l'on suppose tous distincts. Montrons que p est égal à 1 et q_1 à ℓ.
Soit f_0 dans $\operatorname{Ker}\chi_\ell \cap \mathcal{S}(G)$. La fonction $f_0 * \phi$ appartient à $\operatorname{Ker}\chi_\ell$, donc d'après 2) a) :

$$(f_0 * \phi)\check{} * T = P\,\chi_\ell$$

où P appartient à $\mathcal{P}_\ell$. D'autre part, le calcul 1) fait dans la preuve du THÉORÈME 1.1.20 montre que

$$\begin{aligned} (f_0 * \phi)\check{} * T &= \sum_{j=1}^{p} \check{f}_0 * P_j\chi_{q_j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} Q_j\chi_{q_j} \end{aligned}$$

où les Q_j sont des polynômes que l'on peut supposer tous non nuls. Finalement

$$P\,\chi_\ell = \sum_{j=1}^{p} Q_j\chi_{q_j}\,.$$

Dans le module des combinaisons linéaires (dont les coefficients sont des polynômes) des caractères unitaires de G, toute famille finie de caractères unitaires distincts de G est libre. Par suite p est égal à 1, donc q_1 est égal à ℓ et $\check{\phi} * T$ s'écrit $Q\chi_\ell$ où Q est un polynôme. Comme ϕ appartient à A et T à A', $\check{\phi} * T$ est continu sur A donc Q appartient à $\mathcal{P}_\ell$.

4) L'espace $\mathcal{P}_\ell$ étant de dimension finie, soient $f_1, \ldots, f_M$ des fonctions de Schwartz sur G telles que

$$< P\chi_\ell, f_i > = 0, \quad i = 1, \ldots, M \Longrightarrow P = 0.$$

Posons pour tout P dans $\mathcal{P}_\ell$:

$$\|P\chi_\ell\|_\ell = \max_{1 \leq i \leq M} |< P\chi_\ell, f_i >|.$$

Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité dans $\mathcal{S}(G)$. Pour tout f dans $\mathcal{S}(G)$:

$$< \check{\phi}_n * T - T, f > = < T, \phi_n * f - f >. \tag{1}$$

La suite $(\phi_n * f - f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(G)$, donc dans A, et T étant continu sur A, $(< \check{\phi}_n * T - T, f >)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 par (1). La majoration

$$\|\check{\phi}_n * T - \check{\phi}_m * T\|_\ell \leq \max_{1 \leq i \leq M} |< \check{\phi}_n * T - T, f_i >| + \max_{1 \leq i \leq M} |< \check{\phi}_m * T - T, f_i >|$$

montre que la suite $(\check{\phi}_n * T)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\| \ \|_\ell$, donc convergente vers un élément $P\chi_\ell$ où P appartient à $\mathcal{P}_\ell$, l'espace $\mathcal{P}_\ell\chi_\ell$ étant de dimension finie, donc complet. Soit f dans $\mathcal{S}(G)$. Posons pour tout Q dans $\mathcal{P}_\ell$:

$$\|Q\chi_\ell\|_f = \|Q\chi_\ell\|_\ell + |< Q\chi_\ell, f >|.$$

Alors $\| \ \|_f$ est une norme sur $\mathcal{P}_\ell\chi_\ell$ équivalente à $\| \ \|_\ell$, puisque $\mathcal{P}_\ell\chi_\ell$ est de dimension finie. Donc la suite $(\check{\phi}_n * T)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P\chi_\ell$ pour $\| \ \|_f$ et la majoration

$$\begin{aligned} |< P\chi_\ell - T, f >| &\leq |< P\chi_\ell - \check{\phi}_n * T, f >| + |< \check{\phi}_n * T - T, f >| \\ &\leq \|P\chi_\ell - \check{\phi}_n * T\|_f + |< \check{\phi}_n * T - T, f >| \end{aligned}$$

valable pour tout n dans $\mathbb{N}$, donne, en faisant tendre n vers l'infini :

$$< P\chi_\ell - T, f > = 0.$$

Comme $\mathcal{S}(G)$ est dense dans A, ceci prouve que T est égal à $P\chi_\ell$. Donc T annule $I(\mathcal{P}_\ell)$, et le théorème de Hahn-Banach montre finalement que $I(\mathcal{P}_\ell)$ est contenu dans $j(\ell)$.

1.3.4 Notation

Pour une algèbre de Banach A dense dans une $*$-algèbre de Banach B, et pour une partie fermée C de $\mathrm{Prim}^*(A)$, on note $\mathcal{J}(C)$ l'ensemble des idéaux bilatères fermés de A dont l'enveloppe est C :

$$\mathcal{J}(C) = \{ J \triangleleft A \mid h(J) = C \}.$$

Dans le cas présent, l'ensemble $\{ \operatorname{Ker} \chi_\ell \}$ est fermé dans $\mathrm{Prim}^*(A)$, et comme convenu dans l'introduction, l'ensemble $\mathcal{J}(\{ \operatorname{Ker} \chi_\ell \})$ sera noté abusivement $\mathcal{J}(\ell)$.

1.3.5 Notation

Soit J un idéal bilatère fermé de A. On lui associe le sous-espace vectoriel $V(J)$ de $\mathcal{P}_\ell$ défini par :

$$V(J) = \{\, P \in \mathcal{P}_\ell \mid \forall f \in J \,:\, Pf \in \operatorname{Ker} \chi_\ell \,\}.$$

1.3.6 Proposition

Soit J un idéal bilatère fermé de A. Le sous-espace vectoriel $V(J)$ de $\mathcal{P}_\ell$ est invariant par translations.

Preuve. Le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}(G) * V(J) * \mathcal{S}(G)$ est dense dans l'espace vectoriel de dimension finie $V(J)$, donc est égal à $V(J)$. Le résultat découle alors de la formule :

$${}_x(f * P * g)_y = {}_xf * P * g_y$$

valable pour tous f et g dans $\mathcal{S}(G)$, P dans $V(J)$, et x, y dans G.

1.3.7 Notation

Notons $\mathcal{TP}_\ell$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathcal{P}_\ell$ invariants par translations.

1.3.8 Notation

Pour un espace vectoriel topologique E et une partie X de E, on note X° l'orthogonal de X dans E, i.e, l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E annulant X :

$$X^\circ = \{\, \varphi \in E' \mid \forall x \in X \,:\, <\varphi, x> = 0 \,\}.$$

Le plus important résultat de ce chapitre est le théorème suivant :

1.3.9 Théorème

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{TP}_\ell &\longrightarrow \mathcal{J}(\ell) \\ W &\mapsto I(W) \end{aligned}$$

est une bijection décroissante, de bijection réciproque

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\ell) &\longrightarrow \mathcal{TP}_\ell \\ J &\mapsto V(J). \end{aligned}$$

Preuve. Par le THÉORÈME 1.2.12, la correspondance $W \mapsto I(W)$ est bien à valeurs dans $\mathcal{J}(\ell)$. Soit W un élément de $\mathcal{TP}_\ell$. Par définition de $I(W)$, l'espace $W\chi_\ell$ est contenu dans $I(W)^\circ$. D'autre part, il est clair que

$$\frac{I(W)}{I(\mathcal{P}_\ell)} \simeq (W\chi_\ell)^\circ$$

où

$$(W\chi_\ell)^\circ = \left\{ [\,f\,] \in \frac{A}{I(\mathcal{P}_\ell)} \,\middle|\, \forall P \in W \,:\, <P\chi_\ell, f> = 0 \right\}.$$

Donc

$$I(W)^\circ \simeq \frac{A}{I(W)} \simeq \frac{\frac{A}{I(\mathcal{P}_\ell)}}{\frac{I(W)}{I(\mathcal{P}_\ell)}} \simeq \frac{\frac{A}{I(\mathcal{P}_\ell)}}{(W\chi_\ell)^\circ} \simeq W\chi_\ell$$

et par suite

$$I(W)^\circ = W\chi_\ell \tag{1}$$

ce qui montre que l'application $W \mapsto I(W)$ est injective. Montrons la surjectivité. Soit J un élément de $\mathcal{J}(\ell)$. Alors J contient $j(\ell)$, donc son orthogonal J° est contenu dans $j(\ell)^\circ$, ce qui s'écrit, d'après le THÉORÈME 1.3.3 :

$$J^\circ \subset \mathcal{P}_\ell\,\chi_\ell$$

et donc par définition de $V(J)$:

$$J^\circ \subset V(J)\,\chi_\ell.$$

Comme l'autre inclusion est claire, il vient :

$$J^\circ = V(J)\,\chi_\ell$$

d'où

$$J = \big(V(J)\,\chi_\ell\big)^\circ.$$

Par la PROPOSITION 1.3.6, $V(J)$ appartient à $\mathcal{TP}_\ell$ et il résulte de (1) écrite avec $W = V(J)$:

$$\big(V(J)\,\chi_\ell\big)^\circ = I\big(V(J)\big)$$

et ainsi

$$J = I\big(V(J)\big)$$

ce qui montre la surjectivité de l'application $W \mapsto I(W)$ et par suite, la bijectivité de $J \mapsto V(J)$.

1.4 Exemple

Soit w un poids symétrique à croissance polynomiale sur G.

1.4.1 Pour N dans $\mathbb{N}$, on désigne par A_N la sous-algèbre de $L^1(G)$ des classes de fonctions f telles que $\sum_{|\alpha|\le N}\int_G |X^\alpha * f|w + |f * X^\alpha| w\,\mathrm{d}\lambda$ soit finie, et on définit alors une norme $\|\ \|$ sur A_N en posant :

$$\|f\| = \sum_{|\alpha|\le N}\int_G |X^\alpha * f|w + |f * X^\alpha|w\,\mathrm{d}\lambda.$$

L'algèbre A_N munie de la norme $\|\ \|$ est de Banach et satisfait les conditions données en 1.1.16. Le théorème 1.3.3 s'applique donc dans ce cas.

En particulier si N est nul, l'algèbre à poids $L^1_w(G)$ définie en 1.1.10 est un exemple d'algèbre A satisfaisant les conditions données en 1.1.16. Ce paragraphe énonce les résultats principaux du chapitre dans ce cas particulier, important pour la suite.

1.4.2 Notation

Soient G un groupe localement compact et w un poids sur G. On note $L^\infty_w(G)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions f essentiellement bornées par w, c'est à dire telles que $\|f/w\|_\infty$ soit finie , et on définit alors une norme $\|\ \|$ sur $L^\infty_w(G)$ en posant :

$$\|f\| = \left\|\frac{f}{w}\right\|_\infty .$$

La proposition suivante, qui décrit le dual topologique $L^1_w(G)'$ de $L^1_w(G)$, est connue.

1.4.3 Proposition

Soient G un groupe localement compact, λ une mesure de Haar à gauche positive non nulle sur G, et w un poids sur G. L'application

$$\begin{aligned} \psi : L^\infty_w(G) &\longrightarrow L^1_w(G)' \\ g \quad &\mapsto \quad \psi g \ : L^1_w(G) \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad\qquad f \quad \mapsto \ < g, f > = \int_G fg \,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $L^\infty_w(G)$ sur le dual topologique $L^1_w(G)'$ de $L^1_w(G)$.

Dans la suite, les espaces $L^1_w(G)'$ et $L^\infty_w(G)$ seront identifiés. Le dual topologique de $L^1_w(G)$ étant connu, il est possible de donner une description plus parlante de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_\ell$ défini dans 1.1.18 :

1.4.4 Notation

Soit w un poids sur G. On note $\mathcal{P}_w(G)$ l'espace vectoriel des polynômes essentiellement bornés par w :

$$\mathcal{P}_w(G) = \mathcal{P}(G) \cap L^\infty_w(G).$$

1.4.5 D'après 1.4.3, il est clair que

$$\mathcal{P}_\ell = \mathcal{P}_w(G)$$

et le théorème 1.3.3 s'écrit :

$$\begin{aligned} j(\ell) &= I\big(\mathcal{P}_w(G)\big) \\ &= \left\{ f \in L^1_w(G) \;\middle|\; \forall P \in \mathcal{P}_w(G) \ : \ \int_G P(x)\, f(x)\, \chi_\ell(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}. \end{aligned}$$

1.4.6 Cas particuliers

1) Si w est le poids constant égal à 1, alors $L^1_w(G)$ coïncide avec $L^1(G)$, et $\mathcal{P}_w(G)$ ne contient que des constantes, donc $j(\ell)$ est égal à $\{\operatorname{Ker}\chi_\ell\}$, ce qui montre que $\{\operatorname{Ker}\chi_\ell\}$ est de synthèse. On retrouve dans ce cas un résultat de [14].

2) Si dans une direction X_0, $w\big(\exp(tX_0)\big)$ croît au moins comme $|t|$, alors $\mathcal{P}_w(G)$ contient un polynôme non constant, donc $j(\ell)$ est strictement contenu dans $\{\operatorname{Ker}\chi_\ell\}$ et par conséquent $\{\operatorname{Ker}\chi_\ell\}$ n'est pas de synthèse. Ainsi, pour un poids w non constant, le singleton $\{\operatorname{Ker}\chi_\ell\}$ n'est pas de synthèse dans $L^1_w(G)$ en général.

Chapitre 2

Le théorème de projection

Soient G un groupe localement compact et N un sous-groupe normal fermé de G. Le théorème de projection prouvé par W. Hauenschild et J. Ludwig pour la première fois en 1981 [9], établit une bijection entre l'ensemble des idéaux bilatères fermés de $L^1(G)$ qui sont $L^\infty(G/N)$-invariants et l'ensemble des idéaux bilatères fermés de $L^1(N)$ qui sont G-invariants. Les hypothèses des applications de ce théorème aux ensembles de synthèse ont été affaiblies par B. Bekka [1]. Ce théorème a été récemment démontré par J. Ludwig et C. Molitor-Braun pour $\mathcal{S}(G)$ où G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe [25]. Dans ce chapitre, ce même théorème est prouvé pour une classe d'algèbres intermédiaires entre $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$, à savoir les algèbres à poids.

Dans tout ce chapitre, G est un groupe localement compact, N un sous-groupe normal fermé de G et w un poids symétrique continu sur G, valant 1 en e. On note λ – resp. λ_N – une mesure de Haar à gauche positive non nulle sur G – resp. sur N –.

2.1 Les applications restriction et extension

2.1.1 Notation

Pour une algèbre A dont la multiplication est notée $*$, et pour deux parties B et C de A, on note

$$B * C = \{\, b * c \mid b \in B,\ c \in C \,\}.$$

2.1.2 Notation

Pour une fonction u de N dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$u^x(n) = u\big(x^{-1}nx\big), \qquad n \in N,\ x \in G$$

et pour une fonction f de G dans $\mathbb{C}$, on note $f_{|_N}$ la restriction de f à N. L'espace vectoriel des fonctions continues – resp. continues bornées, continues à support compact – sur G est noté $\mathcal{C}(G)$ – resp. $\mathcal{C}^b(G)$, $\mathcal{K}(G)$ –. Le sous-espace vectoriel engendré par une partie P d'un espace vectoriel est noté $< P >$. Pour un idéal bilatère I de $L^1_w(G)$, on note :

$$I_c = < I * \mathcal{K}(G) >.$$

2.1.3 Proposition

Soit I un idéal bilatère de $L^1_w(G)$. Alors I_c est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^b(G)$. Pour tous f dans I_c et x dans G, la fonction ${}_xf_{|_N}$ appartient à $L^1_{w_{|_N}}(N)$ et l'application qui à x associe ${}_xf_{|_N}$ est continue de G dans $L^1_{w_{|_N}}(N)$.

Preuve. La première assertion résulte de [27 Chap.7.3.3] et [10 Th.20.16].
Pour tout x dans G, tous f dans I et k dans $\mathcal{K}(G)$, il vient d'après [27 Chap.7.3.3] :

$$\int_N |{}_x(f * k)(n)|\, w(n)\,\mathrm{d}n \le w(x)\,\|f\|_w \sup\left\{ \lambda_N\Big({}_y(kw)_{|_N}\Big) \;\Big|\; y \in G \right\}$$
$$\le w(x)\,\|f\|_w\,\|kw\|_\infty\,\lambda_N\big(N \cap K^{-1}K\big)$$

où K est le support de k. Donc ${}_x(f * k)_{|_N}$ appartient à $L^1_{w_{|_N}}(N)$, ce qui montre que pour tous f dans I_c et x dans G, la fonction ${}_xf_{|_N}$ appartient à $L^1_{w_{|_N}}(N)$.

2.1.4 Proposition

Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des voisinages compacts symétriques de e dans G, et pour U dans $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}_U(G)_+$ l'ensemble des fonctions positives continues sur G à support compact inclus dans U. Il existe une approximation de l'unité $(\varepsilon_U)_{U\in\mathcal{B}}$ de $L^1_w(G)$ vérifiant :

$$\forall U \in \mathcal{B} \;:\; \|\varepsilon_U\|_w = 1 \;\;;\;\; \varepsilon_U \in \mathcal{K}_U(G)_+ \;\;;\;\; \varepsilon_U = \varepsilon_U{}^*$$

et

$$\forall f \in L^1_w(G) \;:\; \lim_{U\in\mathcal{B}} \|f * \varepsilon_U - f\|_w = \lim_{U\in\mathcal{B}} \|\varepsilon_U * f - f\|_w = 0.$$

Preuve. Soient U dans $\mathcal{B}$ et f_U une fonction non nulle dans $\mathcal{K}_U(G)_+$. Notons c_U la norme de $f_U+f_U{}^*$ dans $L^1_w(G)$ et ε_U la fonction $c_U{}^{-1}(f_U+f_U{}^*)$. Alors ε_U appartient à $\mathcal{K}_U(G)_+$, est autoadjointe, de norme 1 dans $L^1_w(G)$ et pour f dans $L^1_w(G)$:

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_U * f - f\|_w &= \int_G \left| \int_G \Big(\varepsilon_U(x) f\big(x^{-1}y\big) - f(y)\varepsilon_U(x) w(x)\Big)\,\mathrm{d}x \right| w(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_U \varepsilon_U(x) \left(\int_G |L_x f(y) - w(x) f(y)|\, w(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_U \varepsilon_U(x)\, \|L_x f - w(x) f\|_w\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sup_{x\in U} \|L_x f - w(x) f\|_w \int_G \varepsilon_U\, w\,\mathrm{d}\lambda = \sup_{x\in U} \|L_x f - w(x) f\|_w\end{aligned}$$

La fonction qui à x associe $\|L_x f - w(x) f\|_w$ est continue sur U puisque w est continu et f appartient à $L^1_w(G)$, et comme w prend la valeur 1 en e, elle vaut 0 en e. Par suite

$$\lim_{U\in\mathcal{B}} \sup_{x\in U} \|L_x f - w(x) f\|_w = 0$$

et donc

$$\lim_{U\in\mathcal{B}} \|\varepsilon_U * f - f\|_w = 0.$$

En remarquant que $f * \varepsilon_U$ est l'adjointe de $\varepsilon_U * f^*$, on en déduit de même :

$$\lim_{U\in\mathcal{B}} \|f * \varepsilon_U - f\|_w = 0.$$

2.1.5 Proposition

> *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $L^1_w(G)$. Alors F est un idéal à gauche – resp. à droite – de $L^1_w(G)$ ssi F est stable par L – resp. R –.*

Preuve. Supposons que F soit un idéal à gauche de $L^1_w(G)$. Soient f dans F et x dans G. Alors pour tout U dans $\mathcal{B}$, la fonction $(L_x\varepsilon_U) * f$ appartient à F. Comme d'autre part

$$\begin{aligned}L_x f &= L_x\Big(\lim_{U\in\mathcal{B}} \varepsilon_U * f\Big) \\ &= \lim_{U\in\mathcal{B}} L_x(\varepsilon_U * f) \\ &= \lim_{U\in\mathcal{B}} (L_x\varepsilon_U) * f\end{aligned}$$

la fonction $L_x f$ appartient à F, car F est fermé dans $L^1_w(G)$ par hypothèse.

Réciproquement, supposons que F soit stable par L. Soit α une forme linéaire continue sur $L^1_w(G)$ nulle sur F. Alors α appartient à $L^\infty_w(G)$ par 1.4.3, et pour tous g dans $L^1_w(G)$ et f dans F :

$$\begin{aligned}\int_G \alpha(g * f)\,\mathrm{d}\lambda &= \int_G g(x) \left(\int_G \alpha(y)\, L_x f(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque pour tout x dans G, $L_x f$ appartient à F et α est nulle sur F. Donc α est nulle sur $L^1_w(G) * F$ ce qui montre que $L^1_w(G) * F$ est contenu dans F par le théorème de Hahn-Banach.

On montrerait de façon analogue le résultat pour les idéaux à droite de $L^1_w(G)$.

2.1.6 Notation

Pour un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions de G dans $\mathbb{C}$, on note :

$$\mathcal{F}_{|_N} = \left\{ f_{|_N} \,\middle|\, f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Pour une partie P d'un espace topologique X, on désigne par $\overline{P}^X$ l'adhérence de P dans X.

2.1.7 Notation

Soit I un idéal bilatère de $L^1_w(G)$. On pose :

$$R(I) = \overline{I_{c|_N}}^{L^1_{w|_N}(N)}.$$

2.1.8 Proposition

Soit I un idéal bilatère fermé de $L^1_w(G)$. Alors I_c est un sous-espace vectoriel dense de I, invariant par translations, et $R(I)$ est un idéal bilatère fermé G-invariant de $L^1_{w|_N}(N)$, i.e, pour f dans $R(I)$ et x dans G, f^x appartient à $R(I)$.

Preuve. Pour tous x, y dans G, f dans I, et g dans $\mathcal{K}(G)$, on a :

$${}_x(f * g)_y = {}_xf * g_y$$

Comme I est un idéal bilatère fermé de $L^1_w(G)$, I est invariant par translations donc ${}_xf$ appartient à I, et comme g_y appartient à $\mathcal{K}(G)$, la fonction ${}_x(f * g)_y$ appartient à $I * \mathcal{K}(G)$, donc ${}_x(f * g)_y$ appartient à I_c et I_c est invariant par translations. De plus :

$$I = \langle I * L^1_w(G) \rangle = \langle I * \overline{\mathcal{K}(G)}^{L^1_w(G)} \rangle \subset \overline{\langle I * \mathcal{K}(G) \rangle}^{L^1_w(G)} = \overline{I_c}^{L^1_w(G)} \subset \overline{I}^{L^1_w(G)} = I$$

la 1ère égalité provenant de l'existence d'une approximation de l'unité dans $L^1_w(G)$ (2.1.4). Comme $I_{c|_N}$ est un sous-espace vectoriel de $L^1_{w|_N}(N)$, $R(I)$ l'est également. Soient m et n dans N. Pour tout f dans I_c, la fonction ${}_nf_m{}_{|_N}$ est égale à ${}_n\left(f_{|_N}\right)_m$ donc ${}_n\left(f_{|_N}\right)_m$ appartient à $I_{c|_N}$ et a fortiori à $R(I)$, ce qui montre que ${}_n\left(I_{c|_N}\right)_m$ est contenu dans $R(I)$, et par conséquent

$$\overline{{}_n\left(I_{c|_N}\right)_m}^{L^1_{w|_N}(N)} \subset R(I).$$

Comme l'endomorphisme $f \mapsto {}_nf_m$ de $L^1_{w|_N}(N)$ est continu, on a

$${}_nR(I)_m \subset \overline{{}_n\left(I_{c|_N}\right)_m}^{L^1_{w|_N}(N)}$$

donc ${}_nR(I)_m$ est contenu dans $R(I)$ d'après ce qui précède et $R(I)$ est ainsi invariant par translations. Comme de plus $R(I)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^1_{w|_N}(N)$, il en résulte que $R(I)$ est un idéal bilatère fermé de $L^1_{w|_N}(N)$. Il reste à montrer que $R(I)$ est G-invariant. En remarquant que pour tout f dans I_c et tout x dans G, la fonction $f^x{}_{|_N}$ est égale à $\left(f_{|_N}\right)^x$, on montrerait de façon analogue que $R(I)$ est invariant par conjugaison.

2.1.9 Notation

Comme le sous-groupe fermé N de G est normal dans G, la restriction à N de la fonction module de G est la fonction module de N. La fonction module de G sera donc simplement notée Δ.

2.1.10 Notation

On note $\mathcal{I}^G$ l'ensemble des idéaux bilatères fermés G-invariants de $L^1_{w_{|_N}}(N)$. Chaque élément u de $L^1_{w_{|_N}}(N)$ définit une mesure de Radon bornée sur G, en posant pour f dans $\mathcal{K}(G)$:

$$u(f) = \int_N f_{|_N}(n)\, u(n)\, \mathrm{d}n.$$

Par [10 Th.20.9], pour u dans $L^1_{w_{|_N}}(N)$ et f dans $\mathcal{K}(G)$, la fonction $f * u$ a pour expression :

$$f * u(x) = \int_N \Delta(n^{-1}) f(xn^{-1}) u(n)\, \mathrm{d}n, \qquad x \in G.$$

Pour J dans $\mathcal{I}^G$, on note $e(J)$ l'adhérence dans $L^1_w(G)$ du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{K}(G) * J$.

2.1.11 Proposition

Pour J dans $\mathcal{I}^G$, l'extension $e(J)$ de J est un idéal bilatère fermé de $L^1_w(G)$ qui est $L^\infty(G/N)$-invariant, i.e, pour tous φ dans $L^\infty(G/N) \subset L^\infty_w(G)$ et g dans $e(J)$, la fonction φg appartient à $e(J)$.

Preuve. On a pour tout f dans $\mathcal{K}(G)$, tous u dans $L^1_{w_{|_N}}(N)$ et x, y dans G :

$$\begin{aligned}
(f * u)_x(y) &= (f * u)(yx) \\
&= \int_N \Delta(n^{-1}) f(yxn^{-1}) u(n)\, \mathrm{d}n \\
&= \Delta(x) \int_N \Delta(n^{-1}) f_x(yn^{-1}) u^x(n)\, \mathrm{d}n \\
&= \Delta(x)\, f_x * u^x(y)
\end{aligned}$$

donc $(f * u)_x$ est égal à $\Delta(x)\, f_x * u^x$. On montrerait de même que ${}_x(f * u)$ est égal à ${}_xf * u$. Donc $\mathcal{K}(G) * J$ est invariant par translations. Comme pour tous x et y dans G l'endomorphisme de $L^1_w(G)$ qui à f associe ${}_xf_y$ est continu, le sous-espace vectoriel fermé $e(J)$ de $L^1_w(G)$ est invariant par translations, donc est un idéal bilatère fermé de $L^1_w(G)$ par 2.1.5.
Soient φ dans $L^\infty(G/N)$, f dans $\mathcal{K}(G)$, et u dans J. Pour tout x dans G, on a :

$$\begin{aligned}
(\varphi f * u)(x) &= \int_N \Delta(n^{-1}) \varphi(x) f(xn^{-1}) u(n)\, \mathrm{d}n \\
&= \big(\varphi(f * u)\big)(x)
\end{aligned}$$

donc

$$\varphi f * u = \varphi(f * u).$$

2.1.12 Notation

On note $\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$ l'ensemble des idéaux bilatères fermés $L^\infty(G/N)$-invariants de $L^1_w(G)$ et r la restriction de R à $\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$.

On a ainsi deux applications

$$\begin{aligned} e : \mathcal{I}^G &\longrightarrow \mathcal{I}^{L^\infty(G/N)} \\ J &\mapsto e(J) = \overline{<\mathcal{K}(G) * J>}^{L^1_w(G)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r : \mathcal{I}^{L^\infty(G/N)} &\longrightarrow \mathcal{I}^G \\ I &\mapsto r(I) = \overline{\left\{ f_{|_N} \mid f \in <I * \mathcal{K}(G)> \right\}}^{L^1_{w_{|_N}}(N)} \end{aligned}$$

dont on va montrer qu'elles sont réciproques l'une de l'autre.

2.1.13 Proposition

Pour deux éléments J_1 et J_2 de $\mathcal{I}^G$:

$$e\left(J_1 * J_2\right) = \overline{e(J_1) * e(J_2)}^{L^1_w(G)}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} e(J_1) * e(J_2) &= \overline{<\mathcal{K}(G) * J_1 * J_2>}^{L^1_w(G)} \\ &= \overline{<\mathcal{K}(G) * J_1 * J_2 * \mathcal{K}(G)>}^{L^1_w(G)} \\ &= \overline{<\mathcal{K}(G) * J_1> * <J_2 * \mathcal{K}(G)>}^{L^1_w(G)} \\ &= \overline{\overline{<\mathcal{K}(G) * J_1>}^{L^1_w(G)} * \overline{<J_2 * \mathcal{K}(G)>}^{L^1_w(G)}}^{L^1_w(G)} \\ &= \overline{e(J_1) * e(J_2)}^{L^1_w(G)} \end{aligned}$$

la 2^{nde} égalité étant due à l'existence d'une approximation de l'unité dans $L^1_w(G)$ formée d'éléments de $\mathcal{K}(G)$ (2.1.4) et la $4^{\text{ème}}$ est due à la continuité de la multiplication dans $L^1_w(G)$.

2.2 Les représentations induites

La démonstration du théorème principal de ce chapitre s'appuie sur les résultats des deux lemmes qui suivent.

2.2.1 Lemme

Soient H un sous-groupe fermé de G tel que la restriction à H de la fonction module de G soit la fonction module de H, et ρ une représentation unitaire continue de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}(\rho)$. On notera encore ρ l'$*$-représentation non dégénérée de $L^1_{w_{|_H}}(H)$ dans $\mathcal{H}(\rho)$ associée à ρ. De même, $\operatorname{ind}_H^G \rho$ définit une $*$-représentation non dégénérée de $L^1_w(G)$ dans $\mathcal{H}(\operatorname{ind}_H^G \rho)$ que l'on notera encore $\operatorname{ind}_H^G \rho$. Alors :

$$\operatorname{Ker} \operatorname{ind}_H^G \rho = \left\{ f \in L^1_w(G) \,\middle|\, \forall x, y \in G : {}_x f_{y}{}_{|_H} \in \operatorname{Ker} \rho \right\}.$$

Preuve. Notons $\mathcal{C}_\rho(G)$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{K}(G) * \operatorname{Ker} \operatorname{ind}_H^G \rho$. Alors $\mathcal{C}_\rho(G)$ est formé de fonctions continues. Soient f dans $L^1_w(G)$, φ dans $\mathcal{K}(G)$, ξ dans $\mathcal{H}(\rho)$, et x dans G. La fonction qui à (y,h) associe $f(y)\,\varphi\big(y^{-1}x^{-1}h\big)$ est intégrable sur $G \times H$ et est de norme inférieure à $\|f\|_1\|\varphi\|_1$. L'invariance à gauche de la mesure de Haar sur G et le théorème de Fubini montrent que la fonction qui à (y,h) associe $f\big(x^{-1}hy\big)\,\varphi\big(y^{-1}\big)$ appartient à $L^1(G\times H)$. Enfin la fonction $\widetilde{\varphi_\xi}$ de G dans $\mathcal{H}(\rho)$ qui à x associe $\int_H \varphi(xh)\rho(h)\xi\,\mathrm{d}h$ appartient à $\mathcal{H}\big(\operatorname{ind}_H^G \rho\big)$ d'après [2]. Ainsi, pour f dans $\mathcal{C}_\rho(G)$, $\operatorname{ind}_H^G \rho(f) = 0$ entraîne :

$$
\begin{aligned}
0 &= \operatorname{ind}_H^G \rho(f)\widetilde{\varphi_\xi}\big(x^{-1}\big)\\
&= \int_G f(y) \int_H \varphi\big(y^{-1}x^{-1}h\big)\rho(h)\xi\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}y\\
&= \int_G \varphi\big(y^{-1}\big) \int_H f\big(x^{-1}hy\big)\rho(h)\xi\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{1}
$$

la 2^{nde} égalité résultant de l'hypothèse faite sur H. Comme cette égalité est vraie pour tout φ dans $\mathcal{K}(G)$ et tout ξ dans $\mathcal{H}(\rho)$, la continuité de la fonction qui à y associe $\int_H f\big(x^{-1}hy\big)\rho(h)\xi\,\mathrm{d}h$ montre que pour tous x et y dans G :

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_H f\big(x^{-1}hy\big)\,\rho(h)\,\mathrm{d}h\\
&= \int_H {}_xf_y|_H(h)\,\rho(h)\,\mathrm{d}h\\
&= \rho\left({}_xf_y|_H\right)
\end{aligned}
$$

On a ainsi montré que si f appartient à $\mathcal{C}_\rho(G)$, alors pour tous x et y dans G, ${}_xf_y|_H$ appartient à $\operatorname{Ker}\rho$. Or $\mathcal{C}_\rho(G)$ est dense dans $\operatorname{Ker}\operatorname{ind}_H^G \rho$, $\operatorname{Ker}\rho$ est fermé dans $L^1_{w|_H}(H)$, et pour tous x, y dans G, l'application $f \mapsto {}_xf_y|_H$ de $L^1_w(G)$ dans $L^1_{w|_H}(H)$ est continue. On a donc montré l'inclusion :

$$
\operatorname{Ker}\operatorname{ind}_H^G \rho \subset \Big\{ f \in L^1_w(G) \;\Big|\; \forall x, y \in G : {}_xf_y|_H \in \operatorname{Ker}\rho \Big\}.
$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, soit f une fonction du membre de droite. On a pour tous x et y dans G :

$$
0 = \int_H f\big(x^{-1}hy\big)\,\rho(h)\,\mathrm{d}h
$$

donc pour tout φ dans $\mathcal{K}(G)$ et tout ξ dans $\mathcal{H}(\rho)$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_G \varphi\big(y^{-1}\big) \int_H f\big(x^{-1}hy\big)\,\rho(h)\xi\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}y\\
&= \operatorname{ind}_H^G \rho(f)\,\widetilde{\varphi_\xi}\big(x^{-1}\big)
\end{aligned}
$$

la dernière égalité résultant de (1). Comme ceci est vrai pour tout x dans G, $\operatorname{ind}_H^G \rho(f)\,\widetilde{\varphi_\xi}$ est nulle. Or l'ensemble $\big\{\, \widetilde{\varphi_\xi} \mid \varphi \in \mathcal{K}(G),\, \xi \in \mathcal{H}(\rho) \,\big\}$ est total dans $\mathcal{H}\big(\operatorname{ind}_H^G \rho\big)$ d'après [2], et $\operatorname{ind}_H^G \rho(f)$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{H}\big(\operatorname{ind}_H^G \rho\big)$, donc $\operatorname{ind}_H^G \rho(f)$ est nulle.

2.2.2 Pour g dans $\mathcal{K}(G)$ et ψ dans $L^\infty_{w|_N}(N)$ continue, on définit

$$\psi_g(x) = \int_N \psi(n)\, g(n^{-1}x)\, \mathrm{d}n, \qquad x \in G.$$

Par [27 chap 7 ; 3.5], la fonction ψ_g est continue et appartient à $L^\infty_w(G)$. On note $<\ ,\ >$ la forme bilinéaire de dualité (1.4.3) sur $L^1_w(G) \times L^\infty_w(G)$, i.e, pour f dans $L^1_w(G)$ et φ dans $L^\infty_w(G)$:

$$< \varphi, f > = \int_G f\varphi\, \mathrm{d}\lambda.$$

Pour un idéal bilatère fermé I de $L^1_{w|_N}(N)$, le sous-espace vectoriel

$$I^\circ = \left\{ \varphi \in L^\infty_{w|_N}(N) \,\middle|\, \forall f \in I : < \varphi, f > = 0 \right\}$$

de $L^\infty_{w|_N}(N)$ est faiblement fermé et invariant par translations car I est invariant par translations. De plus, I° est G-invariant ssi I l'est et l'application qui à I associe I° est injective par [10 Th 40.4]. On note $\mathrm{ind}_N^G\, \rho$ la représentation de G induite par un élément ρ de $\widehat{N}$.

2.2.3 Lemme

Soient I un idéal bilatère fermé de $L^1_w(G)$, J dans $\mathcal{I}^G$, et ρ dans $\widehat{N}$.

1) $I \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{ind}_N^G\, \rho \Longleftrightarrow R(I) \subset \mathrm{Ker}\, \rho.$

2) $e(J) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{ind}_N^G\, \rho \Longleftrightarrow J \subset \mathrm{Ker}\, \rho.$

Si de plus I appartient à $\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$ alors pour ψ dans $L^\infty_{w|_N}(N)$ et φ dans $L^\infty_w(G)$ continues :

3) $\varphi \in I^\circ \Longleftrightarrow \forall x \in G \ :\ {}_x\varphi|_N \in r(I)^\circ.$

4) $\psi \in J^\circ \Longleftrightarrow \forall g \in \mathcal{K}(G) \ :\ \psi_g \in e(J)^\circ.$

Preuve.
1) Si I est contenu dans $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ind}_N^G\, \rho$ alors :

$$I_c|_N \subset I|_N \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{ind}_N^G\, \rho|_N \subset \mathrm{Ker}\, \rho$$

la dernière inclusion résultant du LEMME 2.2.1. Comme $\mathrm{Ker}\, \rho$ est fermé dans $L^1_{w|_N}(N)$, $R(I)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\, \rho$.

Réciproquement, supposons que $R(I)$ soit contenu dans $\mathrm{Ker}\, \rho$ et soit f dans I_c. Alors pour tous x et y dans G, ${}_{x^{-1}}f_{y^{-1}}|_N$ appartient à $R(I)$, donc $\rho\left({}_{x^{-1}}f_{y^{-1}}|_N\right)$ est nul par hypothèse, ce qui s'écrit :

$$0 = \int_N f\left(xny^{-1}\right)\, \rho(n)\, \mathrm{d}n.$$

Donc pour tout ξ dans $\mathcal{H}(\mathrm{ind}_N^G \rho)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{G/N}\int_N f(xny^{-1})\Delta(y^{-1})\rho(n)\xi(y)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\dot{y}\\
&= \int_{G/N}\int_N f(xn^{-1}y^{-1})\Delta(y^{-1})\Delta(n^{-1})\rho(n)^{-1}\xi(y)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\dot{y}\\
&= \int_{G/N}\int_N f(xn^{-1}y^{-1})\Delta(y^{-1})\Delta(n^{-1})\xi(yn)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\dot{y}\\
&= \int_G f(xy^{-1})\xi(y)\Delta(y)^{-1}\,\mathrm{d}y\\
&= \int_G f(y)\,\xi(y^{-1}x)\,\mathrm{d}y\\
&= \mathrm{ind}_N^G \rho(f)\xi(x)
\end{aligned}$$

la 4ème égalité étant due à la formule de Weil. On a ainsi prouvé que $\mathrm{ind}_N^G \rho(f)$ est nulle pour tout f dans I_c. D'après la continuité de $\mathrm{ind}_N^G \rho$ et 2.1.8, $\mathrm{ind}_N^G \rho$ annule I.

2) Pour tous g dans $\mathcal{K}(G)$ et ξ dans $\mathcal{H}(\rho)$, notons

$$\widetilde{g_\xi}(x) = \int_N g(xn)\,\rho(n)\xi\,\mathrm{d}n, \qquad x \in G.$$

Alors, pour tous f dans $\mathcal{K}(G)$ et u dans J, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_N^G \rho(f*u)\widetilde{g_\xi}(x) &= \int_G (f*u)(y)\int_N g(y^{-1}xm)\,\rho(m)\xi\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}y\\
&= \int_G\int_N \Delta(n)^{-1}f(yn^{-1})u(n)\,\mathrm{d}n\int_N g(y^{-1}xm)\,\rho(m)\xi\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}y\\
&= \int_G\int_N f(y)u(n)\,\mathrm{d}n\int_N g(n^{-1}y^{-1}xm)\rho(m)\xi\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}y\\
&= \Delta(x)^{-1}\int_G \Delta(y)f(y)\int_N {}_{x^{-1}y}g(n^{-1})\int_N u^{x^{-1}y}(mn)\,\rho(m)\xi\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}n\\
&= \Delta(x)^{-1}\int_G \Delta(y)f(y)\int_N {}_{x^{-1}y}g(n^{-1})\,\rho\Big((u^{x^{-1}y})_n\Big)\xi\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{ind}_N^G \rho$ annule $e(J)$, l'égalité précédente valable pour tous f, g dans $\mathcal{K}(G)$, ξ dans $\mathcal{H}(\rho)$, u dans J et x dans G, montre que ρ annule J.

Réciproquement, si ρ annule J alors pour tous x, y dans G, n dans N, et u dans J, ρ annule $(u^{x^{-1}y})_n$; ce qui montre d'après le calcul précédent que pour tous f, g dans $\mathcal{K}(G)$, et ξ dans $\mathcal{H}(\rho)$, $\mathrm{ind}_N^G \rho(f*u)$ annule $\widetilde{g_\xi}$. Comme l'ensemble $\{\,\widetilde{g_\xi} \mid g \in \mathcal{K}(G),\, \xi \in \mathcal{H}(\rho)\,\}$ est total dans $\mathcal{H}(\mathrm{ind}_N^G \rho)$ et que $\mathrm{ind}_N^G \rho(f*u)$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{H}(\mathrm{ind}_N^G \rho)$, $\mathrm{ind}_N^G \rho(f*u)$ est nulle, et donc $\mathrm{ind}_N^G \rho$ annule $e(J)$ par continuité.

3) Pour tout φ dans $L^\infty_w(G)$, tous η dans $L^\infty(G/N)$ et f dans I_c, la fonction ηf appartient à I par hypothèse sur I et :

$$\begin{aligned}
<\varphi, \eta f> &= \int_G \eta f \varphi \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{G/N} \eta(\dot{x}) \int_N f(xn)\, \varphi(xn)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}\dot{x} \\
&= \int_{G/N} \eta(\dot{x}) \left\langle {}_{x^{-1}}\varphi\big|_N \,,\, {}_{x^{-1}}f\big|_N \right\rangle \mathrm{d}\dot{x}
\end{aligned}$$

ce qui justifie la 3ème des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi \in I^\circ &\iff \forall f \in I \;:\; <\varphi, f> = 0 \\
&\iff \forall f \in I_c \;:\; \forall \eta \in L^\infty(G/N) \;:\; <\varphi, \eta f> = 0 \\
&\iff \forall f \in I_c \;:\; \forall x \in G \;:\; \left\langle {}_{x^{-1}}\varphi\big|_N \,,\, {}_{x^{-1}}f\big|_N \right\rangle = 0 \\
&\iff \forall f \in I_c \;:\; \forall x \in G \;:\; \left\langle {}_{x^{-1}}\varphi\big|_N \,,\, f\big|_N \right\rangle = 0 \\
&\iff \forall x \in G \;:\; {}_x\varphi\big|_N \in \left(I_c\big|_N\right)^\circ \\
&\iff \forall x \in G \;:\; {}_x\varphi\big|_N \in r(I)^\circ
\end{aligned}$$

la 2nde étant due à l'hypothèse sur I et 2.1.8, la 4ème à 2.1.8, et la dernière s'obtenant par continuité.

4) Pour tous u dans $L^1_{w|_N}(N)$ et f, g dans $\mathcal{K}(G)$:

$$\begin{aligned}
<f * u, \psi_g> &= \int_G \int_N \Delta(n)^{-1} f(xn^{-1}) u(n)\, \mathrm{d}n \int_N \psi(m) g(m^{-1}x)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}x \\
&= \int_G \int_N f(x) u(n)\, \mathrm{d}n \int_N \psi(m) g(m^{-1}xn)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}x \\
&= \int_G \int_N \int_N \Delta(x) f(x) u(x^{-1}mnx) \psi(m) g(nx)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}x \\
&= \int_G \Delta(x) f(x) \int_N \int_N (u^x)_n(m)\, \psi(m)\, g_x(n)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}x \\
&= \int_G \Delta(x) f(x) \int_N <\psi, (u^x)_n> g_x(n)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

ce qui justifie la 3ème des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\psi \in J^\circ &\iff \forall u \in J \;:\; <\psi, u> = 0 \\
&\iff \forall u \in J,\ \forall x \in G,\ \forall n \in N \;:\; <\psi, (u^x)_n> = 0 \\
&\iff \forall u \in J,\ \forall f, g \in \mathcal{K}(G) \;:\; <f * u, \psi_g> = 0 \\
&\iff \forall g \in \mathcal{K}(G) \;:\; \psi_g \in <\mathcal{K}(G) * J>^\circ \\
&\iff \forall g \in \mathcal{K}(G) \;:\; \psi_g \in e(J)^\circ
\end{aligned}$$

la dernière s'obtenant par continuité.

2.3 Le théorème de projection

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

2.3.1 Théorème

L'application

$$\begin{aligned} e : \mathcal{I}^G &\longrightarrow \mathcal{I}^{L^\infty(G/N)} \\ J &\mapsto e(J) = \overline{<\mathcal{K}(G) * J>}^{L^1_w(G)} \end{aligned}$$

est une bijection préservant l'inclusion, de bijection réciproque

$$\begin{aligned} r : \mathcal{I}^{L^\infty(G/N)} &\longrightarrow \mathcal{I}^G \\ I &\mapsto r(I) = \overline{\left\{ f_{|_N} \mid f \in <I * \mathcal{K}(G)> \right\}}^{L^1_{w|_N}(N)} . \end{aligned}$$

Preuve. Pour u dans $L^1_{w|_N}(N)$, ψ dans $L^\infty_{w|_N}(N)$ continue, g dans $\mathcal{K}(G)$ et x dans G, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle u \, , \, {}_{x^{-1}}(\psi_g)_{|_N} \right\rangle &= \int_N u(m)\, \psi_g(xm)\, \mathrm{d}m \\ &= \int_N u(m) \int_N \psi(n)\, g(n^{-1}xm)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}m \\ &= \Delta(x) \int_N \int_N u^x(m)\, {}_x(\check{g})(m^{-1}n)\psi(n)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}n \\ &= \Delta(x) \int_N u^x * {}_x(\check{g})(n)\, \psi(n)\, \mathrm{d}n \\ &= \Delta(x) \left\langle \psi \, , \, u^x * {}_x(\check{g})_{|_N} \right\rangle . \end{aligned}$$

De plus, il existe une approximation de l'unité de $L^1_w(G)$ formée d'éléments g_i de $\mathcal{K}(G)$ (2.1.4), donc $\left(g_{i|_N}\right)_{i \in I}$ est une approximation de l'unité de $L^1_{w|_N}(N)$, ce qui justifie la 3$^{\text{ème}}$ des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \psi \in J^\circ &\Longleftrightarrow \forall u \in J \ : \ < \psi, u > = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall u \in J, \ \forall x \in G \ : \ < \psi, u^x > = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall u \in J, \ \forall x \in G, \ \forall g \in \mathcal{K}(G) \ : \ \left\langle \psi \, , \, u^x * {}_x(\check{g})_{|_N} \right\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall u \in J, \ \forall x \in G, \ \forall g \in \mathcal{K}(G) \ : \ \left\langle u \, , \, {}_x(\psi_g)_{|_N} \right\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in G, \ \forall g \in \mathcal{K}(G) \ : \ {}_x(\psi_g)_{|_N} \in J^\circ \end{aligned}$$

la 2$^{\text{ème}}$ équivalence étant due à la G-invariance de J. D'autre part, les assertions 4) puis 3) du LEMME 2.2.3 montrent successivement que

$$\begin{aligned} \psi \in J^\circ &\Longleftrightarrow \forall g \in \mathcal{K}(G) \ : \ \psi_g \in e(J)^\circ \\ &\Longleftrightarrow \forall g \in \mathcal{K}(G), \ \forall x \in G \ : \ {}_x(\psi_g)_{|_N} \in r\big(e(J)\big)^\circ \end{aligned}$$

donc

$$J^\circ = r\big(e(J)\big)^\circ$$

d'où

$$J = r\big(e(J)\big) .$$

Par l'assertion 3) du LEMME 2.2.3, l'application r est injective donc pour tout I appartenant à $\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$: $e\big(r(I)\big) = J$ entraîne $r\Big(e\big(r(I)\big)\Big) = r(J)$ c'est à dire $r(I) = r(J)$ d'où $I = J$ et $e\big(r(I)\big) = I$. Enfin e et r préservent l'inclusion vu leurs définitions.

2.3.2 Notation

Pour une partie fermée G-invariante F de $\operatorname{Prim}^* L^1_{w_{|_N}}(N)$, on note

$$\mathcal{J}^G(F) = \{\, J \in \mathcal{I}^G \mid h(J) = F \,\}$$

et

$$e_F = e_{|_{\mathcal{J}^G(F)}}.$$

La partie F étant fermée dans $\operatorname{Prim}^* L^1_{w_{|_N}}(N)$, l'élément $k(F)$ appartient à $\mathcal{J}^G(F)$. Réciproquement :

2.3.3 Notation

Pour une partie fermée $L^\infty(G/N)$-invariante E de $\operatorname{Prim}^* L^1_w(G)$, on note

$$\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E) = \Big\{\, I \in \mathcal{I}^{L^\infty(G/N)} \mid h(I) = E \,\Big\}$$

et

$$r_E = r_{|_{\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)}}.$$

2.3.4 Théorème

Soit F une partie fermée G-invariante de $\operatorname{Prim}^* L^1_{w_{|_N}}(N)$. Posons

$$E = \Big\{ \operatorname{Ker}\pi \,\Big|\, \pi \in \widehat{G} \ : \ \pi_{|_N}\big(k(F)\big) = \{0\} \Big\}.$$

Alors E est une partie fermée de $\operatorname{Prim}^* L^1_w(G)$ qui est $L^\infty(G/N)$-invariante, l'application

$$\begin{aligned} e_F : \mathcal{J}^G(F) &\longrightarrow \mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E) \\ J &\mapsto e_F(J) = \overline{<\mathcal{K}(G) * J>}^{L^1_w(G)} \end{aligned}$$

est bien définie et est une bijection croissante, de bijection réciproque r_E. De plus :

$$k(E) = e_F\big(k(F)\big).$$

Preuve.

1) Pour tous J dans $\mathcal{I}^G$ et π dans $\widehat{G}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\pi \in h\big(e(J)\big) &\Longleftrightarrow e(J) \subset \operatorname{Ker}\pi \\ &\Longleftrightarrow J \subset r\,(\operatorname{Ker}\pi) \\ &\Longleftrightarrow J \subset \operatorname{Ker}\pi_{|_N} \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\pi_{|_N} \in h(J). \end{aligned}$$

la 2$^{\text{nde}}$ équivalence étant due au THÉORÈME 2.3.1.

Donc pour tout J dans $\mathcal{J}^G(F)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\pi \in h\big(e_F(J)\big) &\iff \operatorname{Ker}\pi_{|_N} \in F \\ &\iff k(F) \subset \operatorname{Ker}\pi_{|_N} \\ &\iff \operatorname{Ker}\pi \in E\end{aligned}$$

la 2$^{\text{nde}}$ équivalence résultant du fait que F est fermé dans $\operatorname{Prim}^* L^1_{w_{|_N}}(N)$. Ceci montre que

$$h\big(e_F(J)\big) = E \tag{1}$$

d'où

$$e_F(J) \in \mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E).$$

Donc e_F est à valeurs dans $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$, et E est fermé dans $\operatorname{Prim}^* L^1_w(G)$ d'après (1).

2) Comme $k(F)$ appartient à $\mathcal{J}^G(F)$, la relation (1) peut s'écrire pour $k(F)$:

$$h\Big(e\big(k(F)\big)\Big) = E$$

d'où

$$e\big(k(F)\big) \subset k(E)$$

donc, par le THÉORÈME 2.3.1

$$k(F) \subset r\big(k(E)\big).$$

Réciproquement, pour tout I dans $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ et tout ρ dans $\widehat{N}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\rho \in h\big(r(I)\big) &\iff r(I) \subset \operatorname{Ker}\rho \\ &\iff I \subset \operatorname{Ker}\operatorname{ind}_N^G \rho \\ &\iff \operatorname{Ker}\operatorname{ind}_N^G \rho \in h(I) \\ &\iff k\big(h(I)\big) \subset \operatorname{Ker}\operatorname{ind}_N^G \rho \\ &\iff k(E) \subset \operatorname{Ker}\operatorname{ind}_N^G \rho \\ &\iff r\big(k(E)\big) \subset \operatorname{Ker}\rho \\ &\iff \operatorname{Ker}\rho \in h\Big(r\big(k(E)\big)\Big)\end{aligned}$$

la 2$^{\text{nde}}$ et la 6$^{\text{ème}}$ équivalence résultant du LEMME 2.2.3 1), la 5$^{\text{ème}}$ du fait que I est d'enveloppe E. Ceci montre que

$$h\big(r(I)\big) = h\Big(r\big(k(E)\big)\Big). \tag{2}$$

Comme $k(F)$ appartient à $\mathcal{J}^G(F)$, alors $e\big(k(F)\big)$ appartient à $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ d'après 1). L'égalité ci-dessus peut alors s'écrire pour $e\big(k(F)\big)$:

$$h\Big(r\Big(e\big(k(F)\big)\Big)\Big) = h\Big(r\big(k(E)\big)\Big)$$

c'est à dire, par le THÉORÈME 2.3.1 :

$$h\big(k(F)\big) = h\Big(r\big(k(E)\big)\Big)$$

et puisque F est fermé dans $\operatorname{Prim}^* L^1_{w_{|_N}}(N)$:

$$F = h\Big(r\big(k(E)\big)\Big)$$

donc

$$r\big(k(E)\big) \subset k(F).$$

On a ainsi montré que :

$$r\big(k(E)\big) = k(F)$$

et

$$k(E) = e\big(k(F)\big)$$

par le THÉORÈME 2.3.1. La relation (2) s'écrit alors :

$$h\big(r(I)\big) = F.$$

Comme de plus $r(I)$ appartient à $\mathcal{I}^G$, il vient $r(I) \in \mathcal{J}^G(F)$ et $I = e\big(r(I)\big) = e_F\big(r_E(I)\big)$. Par conséquent e_F est surjective et donc bijective par le THÉORÈME 2.3.1, de bijection réciproque r_E.

2.3.5 On garde dans les deux points suivants les notations de 2.3.2 à 2.3.4. Si le groupe G est de Lie nilpotent simplement connexe, et si le poids w est à croissance polynomiale sur G, toujours supposé continu symétrique et valant 1 en e, alors les idéaux $j(E)$ et $j(F)$ de $L^1_w(G)$ et $L^1_{w_{|_N}}(N)$ existent. Les résultats qui suivent s'appliquent donc dans ce cas.

2.3.6 Corollaire

Si $j(F)$ et $j(E)$ existent, alors :

1) $j(F) \in \mathcal{J}^G(F)$

2) $j(E) \in \mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E) \Longleftrightarrow e\big(j(F)\big) = j(E)$.

Preuve.
1) Soient J un idéal bilatère fermé de $L^1_{w_{|_N}}(N)$ d'enveloppe F et x dans G. On note J^x l'ensemble $\{\, f^x \mid f \in J\,\}$. La partie F étant G-invariante, pour P dans $\mathrm{Prim}^*\, L^1_{w_{|_N}}(N)$, on a :

$$\begin{aligned} P \in F &\Longleftrightarrow P^{x^{-1}} \in F \\ &\Longleftrightarrow P^{x^{-1}} \in h(J) \\ &\Longleftrightarrow J \subset P^{x^{-1}} \\ &\Longleftrightarrow J^x \subset P \\ &\Longleftrightarrow P \in h\big(J^x\big) \end{aligned}$$

donc

$$F = h\big(J^x\big).$$

En particulier pour $j(F)$:

$$F = h\big(j(F)^x\big),$$

ce qui entraîne par définition de $j(F)$:

$$j(F) \subset j(F)^x.$$

En changeant x en x^{-1}, on a finalement montré que $j(F)$ est égal à $j(F)^x$ et par suite $j(F)$ appartient à $\mathcal{J}^G(F)$.

2) Si $j(E)$ appartient à $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ alors $j(E)$ est le plus petit idéal bilatère fermé $L^\infty(G/N)$-invariant de $L^1_w(G)$ d'enveloppe E. Par le THÉORÈME 2.3.4, $j(E)$ est l'image par e_F du plus petit idéal bilatère fermé G-invariant de $L^1_{w_{|N}}(N)$ d'enveloppe F, c'est à dire $j(F)$ d'après 1) :

$$e_F\big(j(F)\big) = j(E).$$

La réciproque résulte de 1) et du THÉORÈME 2.3.4.

2.3.7 Corollaire

On suppose que $j(E)$ et $j(F)$ existent.

1) *Si E est spectral alors F l'est aussi.*

2) *Si F est spectral et si $j(E)$ est l'extension de $j(F)$, alors E est spectral.*

Preuve. On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} F \text{ est spectral} &\iff j(F) = k(F) \\ &\iff \mathcal{J}^G(F) \text{ est un singleton} \\ &\iff \mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E) \text{ est un singleton} \end{aligned}$$

la 2$^{\text{nde}}$ équivalence étant due à 2.3.6, et la dernière à 2.3.4.

1) Si E est spectral, alors $j(E)$ coïncide avec $k(E)$ qui de plus appartient à $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ d'après le THÉORÈME 2.3.4, donc $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ est un singleton et par conséquent F est spectral.

2) Si $j(E)$ est l'extension de $j(F)$, alors $j(E)$ appartient à $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ d'après le COROLLAIRE 2.3.6 ; or $k(E)$ appartient à $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ par le THÉORÈME 2.3.4, et comme F est supposé spectral, $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$ est un singleton. Par conséquent $j(E)$ et $k(E)$ coïncident, i.e E est spectral.

Chapitre 3

Comportement d'un poids

Ce chapitre étudie de façon générale le comportement d'un poids sur un groupe topologique. Le paragraphe 1 montre qu'en l'absence d'hypothèses, un poids peut être "irrégulier" (par exemple discontinu en tout point, ou même non borné sur tout ouvert non vide). Des conditions suffisantes sont ensuite données pour assurer à un poids des propriétés satisfaisantes de continuité et de croissance. Le paragraphe 2 donne, dans une algèbre de Lie nilpotente de pas inférieur à 6, les résultats de calculs qui ont motivé une proposition du paragraphe suivant (proposition 3.3.4). Le paragraphe 3 donne, pour un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, une propriété du poids "le plus naturel" attaché à un groupe localement compact connexe (défini en 1.1.9). Cette propriété (théorème 3.3.12) est illustrée par des exemples dans le dernier paragraphe.

3.1 Poids sur un groupe topologique

Les trois propositions suivantes étudient sous quelle condition un poids est localement borné. La première ramène l'étude en l'élément neutre :

3.1.1 Proposition

Soient G un groupe localement compact et w un poids sur G, borné sur un ouvert non vide de G. Alors w est borné sur tout compact.

Preuve. Soient O un ouvert non vide de G sur lequel w est borné, et K un compact non vide de G. Fixons r dans O. La famille $\left(sOr^{-1} \cap K\right)_{s\in K}$ forme alors un recouvrement ouvert du compact K et par suite, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ et des points $s_1, \ldots, s_n$ appartenant à K tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} s_i O r^{-1}.$$

Notons

$$c = \max\left\{ w(s_i) \;\middle|\; i = 1, \ldots, n \right\}$$

et

$$c' = \sup\left\{ w(t) \;\middle|\; t \in O \right\}.$$

Pour tout s dans K, il existe i dans $\{1, \ldots, n\}$ et t dans O tels que

$$s = s_i t r^{-1}$$

d'où

$$\begin{aligned} w(s) &\leq w(s_i)\, w(t)\, w\left(r^{-1}\right) \\ &\leq c\, c'\, w\left(r^{-1}\right), \end{aligned}$$

ce qui montre que w est borné sur K.

L'hypothèse faite dans 3.1.1 n'est pas inutile comme le montre la proposition suivante :

3.1.2 Proposition

Sur le groupe additif $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, il existe un poids qui n'est borné sur aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit H un supplémentaire du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}$ dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. On vérifie que la fonction

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} = \mathbb{Q} \oplus H &\longrightarrow \,]1, +\infty[\\ r1 \oplus h &\mapsto \quad 1 + e^h \end{aligned}$$

est un poids sur $(\mathbb{R}, +)$. Soient ε un nombre réel strictement positif et h un nombre strictement positif appartenant à H. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un nombre rationnel r_n tel que

$$|r_n + nh| < \varepsilon$$

et alors

$$w(r_n + nh) = 1 + e^{nh}$$

ce qui montre que w n'est pas borné sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et par suite sur tout voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Le poids w n'est alors borné sur aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}$ par la PROPOSITION 3.1.1.

La proposition suivante montre qu'un poids ne peut se comporter de cette façon si le groupe est compact :

3.1.3 Proposition

Tout poids sur un groupe compact est borné.

Preuve. Soit G un groupe compact, λ la mesure de Haar normalisée sur G, et w un poids sur G que l'on suppose non borné. Il existe alors une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait

$$w(s_n) \geq n^2 .$$

Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$F_n = \{ s \mid s \in G \text{ et } w(s) \geq n \}.$$

Soit s un élément de G n'appartenant pas à F_n. Alors

$$n^2 \leq w(s_n) \leq w(s)\, w(s^{-1}s_n) < n\, w(s^{-1}s_n),$$

d'où

$$w(s^{-1}s_n) > n$$

et par conséquent $s^{-1}s_n$ appartient à F_n, i.e, s appartient à $s_nF_n^{-1}$. On a ainsi montré que, pour tout n dans $\mathbb{N}$

$$G = F_n \cup s_nF_n^{-1},$$

donc

$$1 \leq \lambda(F_n) + \lambda(F_n^{-1}) = 2\,\lambda(F_n). \tag{1}$$

D'autre part, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante , on a :

$$\lambda\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda(F_n)$$

et comme les valeurs prises par tout poids sont finies par définition, l'intersection des F_n est vide et par suite

$$0 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda(F_n)$$

ce qui contredit (1).

Les quatre propositions suivantes étudient la continuité d'un poids . Commençons par un contre-exemple général :

3.1.4 Proposition

Sur tout groupe topologique G non dénombrable, séparable, non discret, en particulier si G est localement compact séparable non discret, il existe un poids discontinu en tout point.

Preuve. Soient D une partie dénombrable dense de G et H le sous-groupe de G engendré par D. Comme G est supposé non dénombrable, le sous-groupe dénombrable H de G est distinct de G, et le sous-groupe propre H de G étant dense dans G, son complémentaire dans G est aussi dense dans G. Il est alors facile de vérifier que la fonction e^{χ}, où χ désigne la fonction caractéristique du complémentaire de H dans G, est un poids discontinu en tout point de G.

3.1.5 Proposition

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. Sur tout groupe topologique séparé non discret G, il existe un poids continu en e, prenant la valeur a en e et dont l'ensemble des points de discontinuité est infini. Si de plus, G est séparable, il existe un poids sur G, continu en e, prenant la valeur a en e et dont l'ensemble des points de discontinuité contient une partie dénombrable donnée, ne contenant pas e, dense dans G.

Preuve. Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de G, tous distincts et distincts de e. Posons pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout s dans G :

$$w_n(s) = \begin{cases} a^2 & \text{si } s = s_n \\ a & \text{si } s \neq s_n \end{cases}$$

et

$$w(s) = \prod_{n\geq 1} w_n(s)^{2^{-n}}.$$

Il est facile de vérifier que le produit définissant w est convergent et que w est un poids sur G vérifiant :

$$w(e) = a \tag{1}$$

et

$$w(s_n) > a, \qquad n \geq 1 \tag{2}$$

D'autre part, le groupe G étant séparé, pour tous n et p dans $\mathbb{N}^*$, il existe un voisinage $V_{n,p}$ de s_n dans G tel que pour tout k dans $\{1,\dots,p\}$, l'élément s_k n'appartienne pas à $U_{n,p}$, où $U_{n,p}$ désigne le voisinage pointé $V_{n,p} \setminus \{s_n\}$. Alors pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et tout s dans $U_{n,p}$:

$$a \leq w(s) = a^{1-2^{-p}} \prod_{k>p} w_k(s)^{2^{-k}} \leq a^{1-2^{-p}} \prod_{k>p} a^{2^{1-k}} = a^{1+2^{-p}} \tag{3}$$

Pour p suffisamment grand, (2) et (3) montrent que w est discontinu en s_n.

Le groupe G étant séparé et les s_k distincts de e, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, il existe un voisinage V_p de e dans G tel que pour tout k dans $\{1,\dots,p\}$, l'élément s_k n'appartienne pas à V_p. Alors pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et tout s dans V_p, il vient, comme dans (3) :

$$a \leq w(s) \leq a^{1+2^{-p}} \tag{4}$$

Comme p est arbitrairement grand, (1) et (4) montrent que w est continu en e.

Supposons de plus, G séparable. Etant donné une partie dénombrable D, ne contenant pas e, dense dans G, le raisonnement précédent montre le résultat en prenant pour $(s_n)_{n\geq 1}$ une énumération des éléments de D.

3.1.6 La proposition suivante donne maintenant une condition suffisante pour qu'un poids soit continu. Tout comme dans les propositions 3.1.1 et 3.1.5, le comportement global d'un poids est régi par son comportement sur un voisinage aussi petit que l'on veut de l'élément neutre. C'est en quelque sorte un "principe de localisation".

3.1.7 Proposition

Soient G un groupe topologique et w un poids sur G, borné sur un voisinage de e dans G. Notons pour tout t dans G :

$$\begin{cases} \overline{w}(t) = \lim\limits_{V \in \mathfrak{V}_G(t)} \sup\left\{ w(s) \mid s \in V \right\} \\ \underline{w}(t) = \lim\limits_{V \in \mathfrak{V}_G(t)} \inf\left\{ w(s) \mid s \in V \right\} \end{cases}$$

et posons

$$\delta = \frac{\overline{w}}{\underline{w}}\cdot$$

Alors

$$1 \leq \delta \leq \overline{w}(e).$$

Preuve. Soient ε un nombre réel strictement positif et t un élément de G. Il existe un voisinage symétrique V de e dans G assez petit, et s_1, s_2 dans V tels que

$$\begin{cases} w(ts_1) > (1+\varepsilon)^{-1/3}\,\overline{w}(t) \\ w(ts_2) < (1+\varepsilon)^{1/3}\,\underline{w}(t) \\ \forall s \in tV^2t^{-1} \ :\ w(s) \leq (1+\varepsilon)^{1/3} \lim\limits_{U \in \mathfrak{V}_G(e)} \sup\left\{ w(u) \mid u \in U \right\}. \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} 1 \leq \delta(t) = \frac{\overline{w}(t)}{\underline{w}(t)} &< (1+\varepsilon)^{2/3}\, w(ts_1)\, w(ts_2)^{-1} \\ &\leq (1+\varepsilon)^{2/3}\, w\big(ts_1(ts_2)^{-1}\big) \\ &= (1+\varepsilon)^{2/3}\, w\Big(t\big(s_1 s_2^{-1}\big)t^{-1}\Big) \\ &\leq (1+\varepsilon)^{2/3} \sup\left\{ w(s) \mid s \in tV^2t^{-1} \right\} \\ &\leq (1+\varepsilon)\,\overline{w}(e). \end{aligned}$$

Comme ε est arbitrairement petit et t quelconque dans G, l'encadrement précédent s'écrit :

$$1 \leq \delta \leq \overline{w}(e).$$

3.1.8 Corollaire

Sur un groupe topologique, tout poids continu en e et prenant la valeur 1 en e est continu.

Preuve. Soit w un poids vérifiant les hypothèses. Le poids w étant supposé continu en e, il est borné sur un voisinage de e. D'autre part, les hypothèses sur w montrent que $\overline{w}$ prend la valeur 1 en e, donc $\overline{w}$ égale $\underline{w}$ par la PROPOSITION 3.1.7, i.e, w est continu.

3.1.9 Remarque

Dans la proposition précédente, la condition sur la valeur prise par le poids en e est nécessaire d'après la PROPOSITION 3.1.5.

3.1.10 Si, sur un groupe localement compact, l'objet d'étude est, non pas un poids donné, mais l'algèbre à poids qu'il définit, alors seule la "classe" des poids donnant naissance à cette algèbre importe. H. Freudenthal a remarqué que si w est un poids sur un groupe localement compact G, alors $w'(s) = \inf_U \sup_{t\in U} w(st)$, où U parcourt l'ensemble des voisinages compacts de e dans G, définit un poids sur G *semi-continu supérieurement* donnant naissance à la même algèbre que w [27 p.83]. La proposition suivante donne une condition suffisante sur un poids pour que "sa classe" contienne un "représentant continu".

3.1.11 Proposition

Soient G un groupe localement compact – resp. de Lie – et w un poids sur G, borné sur tout compact. Il existe un poids continu – resp. C^∞ – w' sur G définissant la même sous-algèbre de $L^1(G)$ que w, i.e, tel que les algèbres $L^1_w(G)$ et $L^1_{w'}(G)$ soient égales.

Preuve. Soit K un voisinage compact symétrique de e dans G. Posons

$$c = \sup\left\{ w(s) \mid s \in K \right\}.$$

Soit f dans $\mathcal{K}_K(G)_+$ – resp. positive et C^∞ à support inclus dans K – tel que $\lambda\check{f} = c$. Alors, pour tout s dans G :

$$\begin{aligned} w * f(s) &= \int_K w(st)\, \check{f}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_K w(s)\, w\big(t^{-1}\big)^{-1}\, \check{f}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq w(s) \int_K c^{-1}\, \check{f}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= w(s) \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$w \leq w * f.$$

D'autre part, pour tout s dans G :

$$\begin{aligned} w * f(s) &= \int_G w(st)\, \check{f}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq w(s) \int_G w\, \check{f}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= k\, w(s) \end{aligned}$$

où

$$k = \lambda\big(w\check{f}\big).$$

On ainsi montré que :

$$w \leq w * f \leq k\, w. \tag{1}$$

Posons

$$w' = k\, w * f.$$

Alors w' est continu – resp. C^∞ –, à valeurs dans $[1, +\infty[$, et vérifie pour tous s, t dans G :

$$w'(st) = k\, w * f(st) \leq k^2\, w(st) \leq k^2\, w(s)\, w(t) \leq k^2\, (w * f)(s)\, (w * f)(t) = w'(s)\, w'(t).$$

Donc w' est un poids sur G définissant la même sous-algèbre de $L^1(G)$ que w d'après (1).

3.1.12 Dans les trois propositions suivantes, on étudie la croissance d'un poids sur un groupe localement compact connexe. La première montre que, sur un tel groupe, tout poids est dominé par une puissance du poids e^{τ_U}. Une estimation de la croissance de τ_U est alors donnée dans la proposition suivante lorsque le groupe est supposé de Lie. La dernière proposition montre que sur un tel groupe, la croissance de tout poids est au plus exponentielle.

3.1.13 Proposition

Soient G un groupe localement compact connexe et w un poids sur G borné sur tout compact. Pour tout U dans $\mathfrak{V}_G(e)$, il existe un nombre réel positif k_U tel que

$$w \leq e^{k_U \tau_U}$$

i.e, tel que pour tout s dans G :

$$w(s) \leq e^{k_U \tau_U(s)}.$$

Preuve. Soit s un élément de G différent de e. Par définition de $\tau_U(s)$, il existe des éléments $s_1, \ldots, s_{\tau_U(s)}$ appartenant à U tels que

$$s = s_1 \ldots s_{\tau_U(s)}$$

donc

$$\begin{aligned} w(s) &\leq w(s_1) \ldots w\left(s_{\tau_U(s)}\right) \\ &\leq c_U^{\tau_U(s)} \\ &= e^{k_U \tau_U(s)} \end{aligned}$$

où

$$c_U = \max \left\{ w(t) \mid t \in U \right\}$$

et

$$k_U = \ln c_U .$$

3.1.14 Proposition

Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une norme $\| \ \|$ quelconque étant fixée sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, pour tout U dans $\mathfrak{V}_G(e)$, il existe un nombre réel strictement positif c_U tel que pour tout X dans $\mathfrak{g}$:

$$\tau_U(\exp X) < 1 + c_U \|X\| .$$

Preuve. Soient r un nombre réel strictement positif tel que l'exponentielle de la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans $\mathfrak{g}$ soit contenue dans U, et X un élément non nul de $\mathfrak{g}$. Il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$(n-1)r < \|X\| \leq nr .$$

Alors

$$\exp X = \left(\exp \frac{X}{n}\right)^n \in U^n$$

d'où

$$\tau_U(\exp X) \leq n < 1 + r^{-1}\|X\| .$$

Enfin le résultat est encore vrai si X est nul.

3.1.15 Corollaire

Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et w un poids sur G borné sur tout compact. Une norme quelconque étant choisie sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, il existe un nombre réel c supérieur à 1 et un nombre réel positif k tels que pour tout X dans $\mathfrak{g}$:

$$w(\exp X) \leq c\, e^{k\|X\|}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer les PROPOSITIONS 3.1.13 puis 3.1.14.

3.1.16 Exemples

Prenons pour G le groupe additif $\mathbb{R}^n$. Une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^n$ étant choisie, la fonction

$$x \mapsto 1 + a\,\|x\|,$$

où a est un nombre réel non nul, est un poids ssi a est strictement positif. La fonction

$$x \mapsto 1 + b\,\|x\| + a\,\|x\|^2, \qquad a \neq 0,$$

est un poids ssi les nombres réels a et b sont strictement positifs et vérifient

$$2a \leq b^2.$$

Plus généralement, soit m un entier supérieur à 2. Choisissons un nombre réel strictement positif a_1, puis successivement $a_2, \ldots, a_m$ de sorte que pour tout k dans $\{2, \ldots, m\}$, on ait :

$$0 < a_k \leq \min\left\{ \frac{p!\, q!\, a_p\, a_q}{k!} \;\middle|\; 1 \leq p \leq q \leq k-1 \text{ et } p+q=k \right\}.$$

On vérifie alors que la fonction

$$x \mapsto 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \|x\|^k$$

est un poids sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple la fonction

$$x \mapsto 1 + c\,\|x\| + b\,\|x\|^2 + a\,\|x\|^3, \qquad 2b \leq c^2,\ 3a \leq bc,$$

où a, b et c sont des nombres réels strictement positifs, est un poids sur $\mathbb{R}^n$.

3.1.17 Remarque

Si w est un poids, il se peut que $\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}$ ne soit pas un poids ; donc si w et w' sont deux poids et si λ appartient à $[0,1]$, alors $\lambda w + (1-\lambda)w'$ n'est pas un poids en général. Voici un contre-exemple : des calculs directs montrent que la fonction w définie sur le groupe additif $\mathbb{R}$ par

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} e^{\frac{2}{3}|x|} - \dfrac{1}{2}, & \text{si } |x| \leq \dfrac{3}{2}\ln 2 \\[2mm] 2|x| + \dfrac{5}{2} - 3\ln 2, & \text{si } |x| > \dfrac{3}{2}\ln 2 \end{cases}$$

est un poids continu, symétrique, à croissance polynomiale, et vérifie pour tous r, s appartenant à $\left[-\frac{3}{4}\ln 2, \frac{3}{4}\ln 2\right]$ tels que $r+s$ soit non nul :

$$\frac{1}{2}w(r+s) + \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}w(r) + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}w(s) + \frac{1}{2}\right).$$

3.2 Calculs explicites en pas inférieur à 6

Dans tout ce paragraphe, $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie nilpotente. Partant de $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, on définit $\mathfrak{g}_m$ pour m dans $\mathbb{N}^*$ comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par l'ensemble des $[X,Y]$ où X parcourt $\mathfrak{g}$ et Y parcourt $\mathfrak{g}_{m-1}$. Le pas de nilpotence de $\mathfrak{g}$ est noté n, c'est à dire que $\mathfrak{g}_n$ est réduit à $\{0\}$ et $\mathfrak{g}_{n-1}$ est non nul.

3.2.1 Dans la suite de ce paragraphe, le crochet de deux éléments quelconques X et Y de $\mathfrak{g}$ va être écrit, lorsque cela est possible, sous la forme de produits dans le groupe $\mathfrak{g}$ de $\alpha_i X$ et $\beta_i Y$ où α_i et β_i sont des nombres réels. Une telle écriture sera obtenue à partir de la *formule de Baker-Campbell-Hausdorff* [15] :

$$\begin{aligned} X\cdot Y \equiv X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]+\frac{1}{12}[Y,[Y,X]]-\frac{1}{24}\Big[Y,[X,[X,Y]]\Big] \\ -\frac{1}{720}\Big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]-\frac{1}{720}\Big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big] \\ +\frac{1}{120}\Big[X,\big[X,[Y,[Y,X]]\big]\Big]+\frac{1}{120}\Big[Y,\big[Y,[X,[X,Y]]\big]\Big] \\ +\frac{1}{360}\Big[X,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]+\frac{1}{360}\Big[Y,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big] \qquad \operatorname{mod}\mathfrak{g}_5 \end{aligned}$$

et en utilisant d'autre part quatre autres formules, écrites dans 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 et valables d'ailleurs dans toute algèbre de Lie, qui résultent de l'identité de Jacobi :

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \tag{1}$$

3.2.2 Remarquons d'abord que l'égalité (1) écrite en prenant $[X,Y]$ pour Z donne :

$$\Big[X,[Y,[X,Y]]\Big]=\Big[Y,[X,[X,Y]]\Big].$$

La proposition suivante donne un analogue de l'identité de Jacobi pour 4 éléments.

3.2.3 Proposition

Pour tous éléments X, Y, Z, T dans $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\Big[X,[Y,[Z,T]]\Big]+\Big[Y,[Z,[T,X]]\Big]+\Big[Z,[T,[X,Y]]\Big]+\Big[T,[X,[Y,Z]]\Big] \\ =[[X,Z],[Y,T]] \end{aligned} \tag{2}$$

Preuve. D'après (1), on a

$$\Big[X,[Y,[Z,T]]\Big]=\Big[Y,[X,[Z,T]]\Big]-[[Z,T],[X,Y]]$$

et

$$\Big[Z,[T,[X,Y]]\Big]=\Big[T,[Z,[X,Y]]\Big]-[[X,Y],[Z,T]].$$

Il vient alors

$$\Big[X,[Y,[Z,T]]\Big]+\Big[Z,[T,[X,Y]]\Big]=\Big[Y,[X,[Z,T]]\Big]+\Big[T,[Z,[X,Y]]\Big]$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}&\Big[X,[Y,[Z,T]]\Big]+\Big[Y,[Z,[T,X]]\Big]+\Big[Z,[T,[X,Y]]\Big]+\Big[T,[X,[Y,Z]]\Big]\\ =&\Big[Y,[X,[Z,T]]\Big]+\Big[Y,[Z,[T,X]]\Big]+\Big[T,[Z,[X,Y]]\Big]+\Big[T,[X,[Y,Z]]\Big]\\ =&\Big[Y,[T,[Z,X]]\Big]+\Big[T,[Y,[X,Z]]\Big]\\ =&[[X,Z],[Y,T]]\end{aligned}$$

les deux dernières égalités résultant de (1).

La PROPOSITION 3.2.3 permet de trouver deux autres formules :

3.2.4 L'identité (2) écrite en prenant X pour Z et $[Y,[X,Y]]$ pour T donne :

$$\begin{aligned}&\Bigg[X,\Big[Y,\Big[Y,[X,[X,Y]]\Big]\Big]\Bigg]+\Bigg[Y,\Big[X,\Big[X,[Y,[Y,X]]\Big]\Big]\Bigg]\\ =&-\frac{1}{3}\left(\Bigg[X,\Big[X,\Big[Y,[Y,[Y,X]]\Big]\Big]\Bigg]+\Bigg[Y,\Big[Y,\Big[X,[X,[X,Y]]\Big]\Big]\Bigg]\right)\end{aligned}$$

et (2) écrite en prenant X pour Z et $[X,[X,Y]]$ pour T donne :

$$\begin{aligned}&2\Bigg[X,\Big[Y,\Big[X,[X,[X,Y]]\Big]\Big]\Bigg]\\ =&\Bigg[Y,\Big[X,\Big[X,[X,[X,Y]]\Big]\Big]\Bigg]-\Bigg[X,\Big[X,\Big[X,[Y,[Y,X]]\Big]\Big]\Bigg].\end{aligned}$$

3.2.5 Posons, pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$:

$$A_1(X,Y)=X\cdot Y\cdot(-X)\cdot(-Y).$$

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff est maintenant utilisée pour "développer" la quantité $A_1(X,Y)$. Les formules 3.2.2 à 3.2.4 permettent ensuite de réduire la somme obtenue et de donner finalement une expression respectant la symétrie des rôles joués par X et Y dans la définition de $A_1(X,Y)$, puisqu'il est clair que

$$A_1(X,Y)=-A_1(Y,X).$$

Après de longs calculs, voici le résultat obtenu modulo $\mathfrak{g}_6$:

$$\begin{aligned}
A_1(X,Y) \equiv {} & [X,Y] + \frac{1}{2}\left([X,[X,Y]] - [Y,[Y,X]]\right) + \frac{1}{4}\Big[Y,[X,[X,Y]]\Big] \\
& + \frac{1}{6}\left(\Big[X,[X,[X,Y]]\Big] - \Big[Y,[Y,[Y,X]]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{12}\left(\Big[Y,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big] - \Big[X,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{24}\left(\Big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big] - \Big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\right) \\
& + \frac{5}{144}\left(\Big[Y,\Big[Y,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big] - \Big[X,\Big[X,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{48}\left(\Big[Y,\Big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big] - \Big[X,\Big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{48}\left(\Big[Y,\Big[X,\big[X,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big] - \Big[X,\Big[Y,\big[Y,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{120}\left(\Big[X,\Big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big] - \Big[Y,\Big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big]\right).
\end{aligned}$$

Pour faire disparaître dans $A_1(X,Y)$ les termes comportant exactement 2 crochets, posons

$$A_2(X,Y) = A_1(X,Y) \cdot A_1(-X,-Y).$$

On obtient alors, modulo $\mathfrak{g}_6$:

$$\begin{aligned}
A_2(X,Y) \equiv {} & 2[X,Y] + \frac{1}{2}\Big[Y,[X,[X,Y]]\Big] + \frac{1}{3}\left(\Big[X,[X,[X,Y]]\Big] - \Big[Y,[Y,[Y,X]]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\Big[X,\big[X,[Y,[Y,X]]\big]\Big] + \Big[Y,\big[Y,[X,[X,Y]]\big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\Big[X,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big] + \Big[Y,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\right) \\
& + \frac{5}{72}\left(\Big[Y,\Big[Y,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big] - \Big[X,\Big[X,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{24}\left(\Big[Y,\Big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big] - \Big[X,\Big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{24}\left(\Big[Y,\Big[X,\big[X,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big] - \Big[X,\Big[Y,\big[Y,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big]\right) \\
& + \frac{1}{60}\left(\Big[X,\Big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\Big] - \Big[Y,\Big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big]\Big]\right).
\end{aligned}$$

L'écriture de cette expression respecte encore la symétrie des rôles joués par X et Y dans la mesure où $A_2(X,Y)$ vérifie la relation

$$A_2(X,Y) = -A_2(-Y,-X).$$

La suppression des termes contenant exactement 3 crochets dans $A_2(X,Y)$ peut se faire efficacement avec des multiples complexes de X et Y en posant

$$A_3(X,Y) = A_2(X,Y) \cdot A_2(iY, iX).$$

Elle peut également se faire avec des multiples réels de X et Y en posant d'abord

$$\begin{cases} A_2^1(X,Y) = A_2(X,Y) \cdot A_2\left(\dfrac{X}{2}, -8Y\right) \\ A_2^2(X,Y) = A_2^1(X,Y) \cdot A_2^1\left(-8X, \dfrac{Y}{2}\right) \end{cases}$$

puis

$$A_3'(X,Y) = A_2^2(X,Y) \cdot A_2^2(-Y, X).$$

L'expression $A_3'(X,Y)$ ne comporte alors plus de commutateurs d'ordre 3 (voir ci-après). Le choix des coefficients dans l'expression de $A_2^1(X,Y)$ et $A_2^2(X,Y)$ n'est pas unique, mais tout autre choix réel aurait aussi conduit à des expressions "cassant la symétrie entre X et Y". On obtient alors, modulo $\mathfrak{g}_6$:

$$\begin{aligned} A_3(X,Y) \equiv 4\,[X,Y] &+ \frac{1+i}{2}\left(\Big[X,\big[X,[Y,[Y,X]]\big]\Big] + \Big[Y,\big[Y,[X,[X,Y]]\big]\Big]\right) \\ &+ \frac{1+i}{2}\left(\Big[X,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\Big] + \Big[Y,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\Big]\right) \\ &+ \frac{1}{30}\left(\Big[X,\big[X,[X,[X,[X,Y]]]\big]\Big] - \Big[Y,\big[Y,[Y,[Y,[Y,X]]]\big]\Big]\right) \\ &+ \frac{5}{12}\Big[Y,\big[X,[X,[X,[X,Y]]]\big]\Big] + \frac{1}{4}\Big[X,\big[Y,[Y,[Y,[Y,X]]]\big]\Big] \\ &+ \frac{17}{36}\Big[Y,\big[Y,[X,[X,[X,Y]]]\big]\Big] + \frac{7}{36}\Big[X,\big[X,[Y,[Y,[Y,X]]]\big]\Big] \\ &+ \frac{1}{12}\left(\Big[Y,\big[X,[X,[Y,[Y,X]]]\big]\Big] - \Big[X,\big[Y,[Y,[X,[X,Y]]]\big]\Big]\right) \\ &+ \frac{1}{3}\left(\Big[X,\big[X,[X,[Y,[Y,X]]]\big]\Big] + \Big[Y,\big[Y,[Y,[X,[X,Y]]]\big]\Big]\right) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$A_3'(X,Y) \equiv 36\,[X,Y] \mod \mathfrak{g}_4.$$

Supprimons maintenant les termes de $A_3(X,Y)$ contenant exactement 4 crochets. Pour cela, posons

$$A_4(X,Y) = A_3(X,Y) \cdot A_3(-X,-Y).$$

Posons de même

$$A_4'(X,Y) = A_3'(X,Y) \cdot A_3'(-X,-Y).$$

On obtient alors, modulo $\mathfrak{g}_6$:

$$\begin{aligned}
A_4(X,Y) \equiv 8\,[X,Y] \\
&+\tfrac{1}{15}\Big(\big[X,\big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\big]\big]-\big[Y,\big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\big]\big]\Big)\\
&+\tfrac{5}{6}\big[Y,\big[X,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\big]\big]+\tfrac{1}{2}\big[X,\big[Y,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\big]\big]\\
&+\tfrac{17}{18}\big[Y,\big[Y,\big[X,[X,[X,Y]]\big]\big]\big]+\tfrac{7}{18}\big[X,\big[X,\big[Y,[Y,[Y,X]]\big]\big]\big]\\
&+\tfrac{1}{6}\Big(\big[Y,\big[X,\big[X,[Y,[Y,X]]\big]\big]\big]-\big[X,\big[Y,\big[Y,[X,[X,Y]]\big]\big]\big]\Big)\\
&+\tfrac{2}{3}\Big(\big[X,\big[X,\big[X,[Y,[Y,X]]\big]\big]\big]+\big[Y,\big[Y,\big[Y,[X,[X,Y]]\big]\big]\big]\Big)
\end{aligned}$$

et

$$A_4'(X,Y) \equiv 72\,[X,Y] \quad \bmod \mathfrak{g}_5 .$$

Pour faire disparaître les termes contenant exactement 5 crochets dans $A_4(X,Y)$, posons

$$A_5(X,Y) = A_4(X,Y)\cdot A_4(ijX, ijY)$$

où

$$j = e^{\frac{i2\pi}{3}} .$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
A_5(X,Y) &\equiv 8(1-j^2)\,[X,Y] \quad \bmod \mathfrak{g}_6\\
&\equiv 8\sqrt{3}\,e^{\frac{i\pi}{6}}\,[X,Y] \quad \bmod \mathfrak{g}_6
\end{aligned}$$

3.2.6 Application

Si $\mathfrak{g}$ est de pas 2, alors : $[X,Y] = A_1(X,Y)$

Si $\mathfrak{g}$ est de pas 3, alors : $[X,Y] = A_2\left(\frac{X}{\sqrt{2}},\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)$

Si $\mathfrak{g}$ est de pas 4, alors : $[X,Y] = A_3\left(\frac{X}{2},\frac{Y}{2}\right) = A_3'\left(\frac{X}{6},\frac{Y}{6}\right)$

Si $\mathfrak{g}$ est de pas 5, alors : $[X,Y] = A_4\left(\frac{X}{2\sqrt{2}},\frac{Y}{2\sqrt{2}}\right) = A_4'\left(\frac{X}{6\sqrt{2}},\frac{Y}{6\sqrt{2}}\right)$

Si $\mathfrak{g}$ est de pas 6, alors : $[X,Y] = A_5\left(\frac{X}{2\sqrt{2}\,\sqrt[4]{3}\,e^{\frac{i\pi}{12}}},\frac{Y}{2\sqrt{2}\,\sqrt[4]{3}\,e^{\frac{i\pi}{12}}}\right)$

La proposition suivante généralise les résultats de 3.2.6 à un pas quelconque.

3.2.7 Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas n supérieur à 2. Il existe des nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n}$ tels que pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$:

$$[X, Y] = \prod_{j=1}^{2^{n-1}} (\alpha_{2j-1}X) \cdot (\alpha_{2j}Y).$$

Preuve. Pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$:

$$A_1(X, Y) = X \cdot Y \cdot (-X) \cdot (-Y)$$

et

$$A_1(X, Y) \equiv [X, Y] \mod \mathfrak{g}_2.$$

Supposons construit

$$\begin{aligned} A_k(X, Y) &= \prod_{j=1}^{2^k} (b_{2j-1}X) \cdot (b_{2j}Y) \\ &\equiv a_k [X, Y] \mod \mathfrak{g}_{k+1} \end{aligned}$$

où k est un entier non nul et a_k un nombre complexe non nul.
En développant l'expression de $A_k(X, Y)$ par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, les termes de $A_k(X, Y)$ appartenant à $\mathfrak{g}_{k+1}$ et n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_{k+2}$ ont exactement $k+2$ "composantes". Soit ζ une racine primitive $2(k+2)$ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Posons

$$A_{k+1}(X, Y) = A_k(X, Y) \cdot A_k(\zeta X, \zeta Y).$$

Alors

$$\begin{aligned} A_{k+1} &\equiv A_k(X, Y) + A_k(\zeta X, \zeta Y) \mod \mathfrak{g}_{k+2} \\ &\equiv a_k(1 + \zeta^2)\, [X, Y] \mod \mathfrak{g}_{k+2}. \end{aligned}$$

Puisque k est non nul, ζ est différent de $\pm i$, et comme a_k est non nul, $a_k(1 + \zeta^2)$ est non nul. Ainsi

$$\begin{aligned} A_{k+1}(X, Y) &= \prod_{j=1}^{2^k} (b_{2j-1}X) \cdot (b_{2j}Y) \cdot \prod_{j=1}^{2^k} (b_{2j-1}\zeta X) \cdot (b_{2j}\zeta Y) \\ &= \prod_{j=1}^{2^{k+1}} (c_{2j-1}X) \cdot (c_{2j}Y) \end{aligned}$$

et

$$A_{k+1}(X, Y) \equiv a_{k+1} [X, Y] \mod \mathfrak{g}_{k+2}$$

où

$$a_{k+1} = a_k(1 + \zeta^2) \neq 0.$$

On a ainsi montré que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, il existe des nombres complexes $b_1, \dots, b_{2^{k+1}}$ et un nombre complexe non nul a_k tels que pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$:

$$a_k [X, Y] \equiv \prod_{j=1}^{2^k} (b_{2j-1}X) \cdot (b_{2j}Y) \mod \mathfrak{g}_{k+1}.$$

En particulier, il existe des nombres complexes $b_1, \ldots, b_{2^n}$ et un nombre complexe non nul a_{n-1} tels que pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$:

$$a_{n-1}\,[X,Y] = \prod_{j=1}^{2^{n-1}} (b_{2j-1}X)\cdot(b_{2j}Y)$$

puisque $\mathfrak{g}_n$ est réduit à $\{0\}$. Soit δ une racine carrée de a_{n-1} dans $\mathbb{C}$, et pour tout j dans $\{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, posons $\alpha_j = b_j/\delta$. Il vient alors :

$$[X,Y] = \prod_{j=1}^{2^{n-1}} (\alpha_{2j-1}X)\cdot(\alpha_{2j}Y).$$

3.2.8 Remarque
Comme le montre 3.2.6, on peut supposer dans la PROPOSITION 3.2.7 tous les nombres α_i *réels* si n est inférieur à 5, mais avec un nombre de facteurs dans le produit éventuellement supérieur à 2^n. La PROPOSITION 3.3.4 montrera que ce résultat subsiste même si n est supérieur à 5.

3.3 Cas d'une algèbre de Lie nilpotente de pas quelconque

3.3.1 Dans tout ce paragraphe, G désigne un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et n le pas de nilpotence de $\mathfrak{g}$. Rappelons que pour X dans $\mathfrak{g}$ et i dans $\{1, \ldots, n\}$, X appartient à $\mathfrak{g}_i$ ssi X est combinaison linéaire de termes comportant tous au moins i crochets. Pour tout i dans $\{1 \ldots, n\}$, choisissons un sous-espace vectoriel supplémentaire V_i de $\mathfrak{g}_i$ dans $\mathfrak{g}_{i-1}$. Alors

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i.$$

Enfin, pour X et Y dans $\mathfrak{g}$, on note

$$\{X,Y\} = X\cdot Y\cdot(-X)\cdot(-Y).$$

3.3.2 Lemme

Pour tous éléments $X_1, \ldots, X_n$ dans $\mathfrak{g}$, on a :

$$[X_1,[X_2,[\ldots,X_{n-1}]\ldots]] \equiv \{X_1,\{X_2,\{\ldots,X_{n-1}\}\ldots\}\} \mod \mathfrak{g}_{n-1}$$

et

$$[X_1,[X_2,[\ldots,X_n]\ldots]] = \{X_1,\{X_2,\{\ldots,X_n\}\ldots\}\}.$$

Preuve.
1) Prouvons la première assertion. Si n est égal à 1 ou 2, la propriété est vide. Si n est égal à 3, on a, par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff

$$[X_1,X_2] = \{X_1,X_2\} + \frac{1}{2}([X_2,[X_2,X_1]] - [X_1,[X_1,X_2]])$$

d'où

$$[X_1,X_2] \equiv \{X_1,X_2\} \mod \mathfrak{g}_2.$$

Supposons le résultat vrai pour une algèbre de Lie nilpotente de pas $n-1 \geq 3$ et soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas n. Comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$ est nilpotente de pas $n-1$, il vient, par hypothèse de récurrence :

$$[X_2+u_2,[\ldots,X_{n-1}+u_{n-1}]\ldots] = \{X_2+u_2,\{\ldots,X_{n-1}+u_{n-1}\}\ldots\}+v$$

où les u_i appartiennent à $\mathfrak{g}_{n-1}$ et v à $\mathfrak{g}_{n-2}$. Or $\mathfrak{g}_{n-1}$ est central, donc l'égalité précédente s'écrit :

$$[X_2,[\ldots,X_{n-1}]\ldots] = \{X_2,\{\ldots,X_{n-1}\}\ldots\}+v.$$

Notons

$$u = \{X_2,\{\ldots,X_{n-1}\}\ldots\} \in \mathfrak{g}_{n-3}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\{X_1,u\} &= e^{\operatorname{ad} X_1}(u)\cdot(-u)\\ &= \left(u+[X_1,u]+\frac{1}{2}[X_1,[X_1,u]]\right)\cdot(-u)\\ &= [X_1,u]+\frac{1}{2}[X_1,[X_1,u]]\end{aligned}$$

car

$$[[X_1,u],u] \in \mathfrak{g}_{2n-4} \subset \mathfrak{g}_n = \{0\}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\{X_1,\{X_2,\{\ldots,X_{n-1}\}\ldots\}\} &= [X_1,[X_2,[\ldots,X_{n-1}]\ldots]] - [X_1,v] + \frac{1}{2}[X_1,[X_1,u]]\\ &\equiv [X_1,[X_2,[\ldots,X_{n-1}]\ldots]] \mod \mathfrak{g}_{n-1}.\end{aligned}$$

2) La propriété à prouver est vraie lorsque n est égal à 2 comme cela a été vu dans 1). Supposons le résultat vrai pour une algèbre de Lie nilpotente de pas $n-1 \geq 2$ et soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas n. Comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$ est nilpotente de pas $n-1$, il vient, par hypothèse de récurrence :

$$[X_2,[\ldots,X_n]\ldots] = \{X_2,\{\ldots,X_n\}\ldots\}+v$$

où v appartient à $\mathfrak{g}_{n-1}$. Notons

$$u = \{X_2,\{\ldots,X_n\}\ldots\} \in \mathfrak{g}_{n-2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\{X_1,u\} &= e^{\operatorname{ad} X_1}(u)\cdot(-u)\\ &= (u+[X_1,u])\cdot(-u)\\ &= [X_1,u]\\ &= [X_1,u+v]\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\{X_1,\{X_2,\{\ldots,X_n\}\ldots\}\} = [X_1,[X_2,[\ldots,X_n]\ldots]].$$

3.3.3 Dans la proposition suivante, le crochet de deux éléments quelconques X et Y de $\mathfrak{g}$ va être écrit comme produit dans le groupe $\mathfrak{g}$ de a_iX et b_iY où a_i et b_i sont des nombres réels. Une borne est donnée pour le nombre de facteurs dans le produit, ce qui précise un résultat de [29].

3.3.4 Proposition

Pour tout entier naturel n supérieur à 2 :

1) Il existe un entier naturel m, ne dépendant que de n, et $2m$ nombres réels $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$ tels que pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, on ait :

$$X + Y = \prod_{i=1}^{m} (a_i X) \cdot (b_i Y).$$

2) Il existe un entier naturel p, ne dépendant que de n, et $2p$ nombres réels $c_1, \ldots, c_p$, $d_1, \ldots, d_p$ tels que pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, on ait :

$$[X, Y] = \prod_{i=1}^{p} (c_i X) \cdot (d_i Y).$$

De plus, m et p sont inférieurs à $2^n(2^n - 5) + 2n + 2$.

Preuve.
1) Si n est égal à 2, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente de pas 2 et on montre facilement à l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff que pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$

$$X + Y = \frac{X}{2} \cdot Y \cdot \frac{X}{2}.$$

Supposons le résultat vrai pour une algèbre de Lie nilpotente de pas $n - 1 \geq 2$ et soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas n. Comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{n-1}$ est nilpotente de pas $n - 1$, pour tous X_1 et X_2 dans $\mathfrak{g}$, il vient, par hypothèse de récurrence :

$$X_1 + X_2 = \prod_{i=1}^{m} (c_i X_1) \cdot (d_i X_2) + u(X_1, X_2)$$

où $u(X_1, X_2)$ appartient à $\mathfrak{g}_{n-1}$, donc au centre de $\mathfrak{g}$. Il existe des nombres réels $c_{i_1 \ldots i_n}$ où $(i_1, \ldots, i_n)$ parcourt $\{1, 2\}^n$ tels que :

$$\begin{aligned} u(X_1, X_2) &= \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n} c_{i_1 \ldots i_n} \, [X_{i_1}, [X_{i_2}, [\ldots, X_{i_n}] \ldots]] \\ &= \prod_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n} [c_{i_1 \ldots i_n} X_{i_1}, [X_{i_2}, [\ldots, X_{i_n}] \ldots]]. \end{aligned}$$

Par le LEMME 3.3.1, on a

$$u(X_1, X_2) = \prod_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n} \{c_{i_1 \ldots i_n} X_{i_1}, \{X_{i_2}, \{\ldots, X_{i_n}\} \ldots\}\}$$

et donc

$$X_1 + X_2 = \prod_{i=1}^{m} (c_i X_1) \cdot (d_i X_2) \cdot \prod_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n} \{c_{i_1 \ldots i_n} X_{i_1}, \{X_{i_2}, \{\ldots, X_{i_n}\} \ldots\}\}$$

où $c_{1 \ldots 1}$ et $c_{2 \ldots 2}$ sont nuls.

En notant m_n le nombre suffisant de facteurs pour écrire toute somme $X_1 + X_2$ sous la forme d'un produit dans le groupe $\mathfrak{g}$ lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente de pas n, on a montré que m_2 est égal à 3 et que

$$m_n = m_{n-1} + (2^n - 2)(3 \times 2^{n-1} - 2)$$

par conséquent

$$m_n = 2^{n+1}(2^n - 5) + 4n + 3.$$

2) Prouvons la 2^{nde} assertion. Si n est égal à 2, alors pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, on a

$$[X, Y] = X \cdot Y \cdot (-X) \cdot (-Y).$$

Le reste de la preuve est analogue à 1) et on trouve donc

$$p_n = 2^{n+1}(2^n - 5) + 4n + 4$$

où p_n indique le nombre suffisant de facteurs pour écrire tout crochet $[X_1, X_2]$ sous la forme d'un produit dans le groupe $\mathfrak{g}$, lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente de pas n.

3.3.5 Corollaire

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de pas n supérieur à 2. Soient $X_1, \ldots, X_p$ des éléments de $\mathfrak{g}$ de la forme :

$$X_i = \left[X_i^1, \left[X_i^2, \left[\ldots, X_i^{k_i}\right]\ldots\right]\right].$$

Il existe un entier naturel q, ne dépendant que de p et n, tel que :

$$\sum_{i=1}^{p} X_i = \prod_{j=1}^{q} \prod_{\substack{1 \le i_j \le p \\ 1 \le l_{i_j} \le k_{i_j}}} c_{i_j l_{i_j}} X_{i_j}^{l_{i_j}}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la PROPOSITION 3.3.4 autant de fois que nécessaire.

3.3.6 Fixons dans la suite de ce paragraphe une norme euclidienne $\|\ \|$ sur $\mathfrak{g}$, et notons U l'exponentielle de la boule unité B de $\mathfrak{g}$. Le poids w_U défini en 1.1.9 sera noté w_G.

3.3.7 Corollaire

Il existe un nombre réel c_1 supérieur à 1 tel que pour tous j dans $\{1, \ldots, n-1\}$, et X dans $\mathfrak{g}_j$:

$$w_G(\exp X) \le c_1 \left(1 + \|X\|\right)^{(j+1)^{-1}}.$$

Preuve. Fixons j dans $\{1, \ldots, n-1\}$ et soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une base orthonormée de $\mathfrak{g}_j$. Chaque X_i peut être choisi de sorte que

$$X_i = \left[X_i^1, \left[X_i^2, \left[\ldots, X_i^{j+1}\right]\ldots\right]\right]$$

pour certains éléments X_i^k de $\mathfrak{g}$. Fixons X dans $\mathfrak{g}_j$.

Alors

$$(1+\|X\|)^{-1}X=\sum_{i=1}^{p} c_i X_i$$

où les nombres réels c_i sont de valeurs absolues inférieures à 1, d'où

$$\begin{aligned}
X&=\sum_{i=1}^{p} c_i(1+\|X\|)\left[X_i^1,\left[X_i^2,\left[\dots,X_i^{j+1}\right]\dots\right]\right]\\
&=\sum_{i=1}^{p}\left[c_i(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}X_i^1,\left[(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}X_i^2,\left[\dots,(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}X_i^{j+1}\right]\dots\right]\right]
\end{aligned}$$

Par le COROLLAIRE 3.3.5, il vient

$$X=\prod_{m=1}^{q}\prod_{\substack{1\le i_m\le p\\ 1\le r_m\le j+1}} c_{i_m r_m}(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}X_{i_m}^{r_m}$$

pour un certain entier naturel q et certains nombres réels $c_{i_m r_m}$, ne dépendant que de j, n, et p. Soit s le nombre de facteurs dans le produit précédent. Posons

$$c=\max\left\{\,|c_{i_m r_m}|\;\middle|\;1\le i_m\le p\,,\ 1\le r_m\le j+1\,,\ 1\le m\le q\,\right\}$$

et

$$t=\max\left\{\,\|X_i^k\|\;\middle|\;1\le i\le p\,,\ 1\le k\le j+1\,\right\}.$$

Alors

$$\exp X\in U^{s\left(1+E\left(ct(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}\right)\right)}$$

où E désigne la partie entière, d'où par définition de w_G

$$\begin{aligned}
w_G(\exp X)&\le 1+s\left(1+E\left(ct(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}\right)\right)\\
&\le 1+s+sct(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}\\
&\le c_1(1+\|X\|)^{(j+1)^{-1}}
\end{aligned}$$

où

$$c_1=1+s+sct\,.$$

3.3.8 Proposition

Il existe un nombre réel c_2 supérieur à 1 tel que, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, on ait pour tout j dans $\{1,\dots,n\}$:

$$(1+\|X_j\|)^{1/j}\le c_2\,w_G(\exp X)$$

où X_j désigne la composante de X appartenant à V_j.

Preuve. Fixons j dans $\{1,\dots,n\}$.
1) Soit ε un nombre réel strictement positif. Montrons par récurrence sur m que pour tout entier m supérieur à 1, il existe un nombre réel a_ε tel que si $\exp X$ appartient à $(\exp\varepsilon B)^m$, alors $\|X_j\|$ est inférieure à $a_\varepsilon(1+m)^j$. Montrons en outre que l'on peut supposer a_ε strictement inférieur à 1 si ε est suffisamment petit.

Si m est égal à 1, alors $\|X_j\|$ est inférieure à ε, donc $\varepsilon\, 2^{-j}$ convient pour a_ε.

Supposons le résultat vrai pour $m-1$ et soit $\exp X$ dans $(\exp \varepsilon B)^m$. Alors $\exp X$ s'écrit $\exp(Y \cdot W)$ où $\exp Y$ appartient à $(\exp \varepsilon B)^{m-1}$ et W à εB. Par hypothèse de récurrence, il existe un nombre réel a_ε indépendant de X tel que

$$\|Y_j\| \leq a_\varepsilon\, m^j . \tag{1}$$

Par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$(Y.W)_j = Y_j + W_j + Q_j(Y,W) \tag{2}$$

où

$$Q_j(Y,W) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p \geq 1 \\ i_1+\cdots+i_p \leq j}} c^j_{i_1\dots i_p} \left[T_{i_1}, [\dots, T_{i_p}] \dots\right]_j \tag{3}$$

et où chaque T_{i_k} est Y_{i_k} ou W_{i_k}, i.e un élément de V_{i_k}. Comme chaque W_{i_k} apparaît au moins une fois dans chaque crochet, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\left\| \left[T_{i_1}, [\dots, T_{i_p}] \dots\right]_j \right\| &\leq \left\| \left[T_{i_1}, [\dots, T_{i_p}] \dots\right] \right\| \\
&\leq \varepsilon\, \|T_{i_1}\| \dots \widehat{\|T_{i_k}\|} \dots \|T_{i_p}\| \\
&\leq \varepsilon\, a_\varepsilon m^{i_1} \dots \widehat{a_\varepsilon m^{i_k}} \dots a_\varepsilon m^{i_p} \\
&\leq \varepsilon\, a_\varepsilon^{p-1}\, m^{j-1} \\
&\leq \varepsilon\, b_\varepsilon^{j-1}\, m^{j-1}
\end{aligned}$$

où

$$b_\varepsilon = \max\{\, 1,\ a_\varepsilon \,\}.$$

La relation (3) entraîne alors

$$\|Q_j(Y,W)\| \leq \varepsilon\, b_\varepsilon^{j-1}\, m^{j-1} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p \geq 1 \\ i_1+\cdots+i_p \leq j}} |c^j_{i_1\dots i_p}|.$$

Notons N le nombre de termes dans la somme précédente et posons

$$c = \max\left\{\, |c^j_{i_1\dots i_p}| \;\middle|\; i_1,\dots,i_p \geq 1 \text{ et } i_1+\cdots+i_p \leq j \,\right\}.$$

Il vient par suite

$$\|Q_j(Y,W)\| \leq \varepsilon\, c\, N\, b_\varepsilon^{j-1}\, m^{j-1}$$

puis par (2) et (1)

$$\begin{aligned}
\|(Y.W)_j\| &\leq \|Y_j\| + \|W_j\| + \|Q_j(Y,W)\| \\
&\leq a_\varepsilon\, m^j + \varepsilon + \varepsilon\, c\, N\, b_\varepsilon^{j-1}\, m^{j-1} \\
&\leq c_\varepsilon\, (1+m)^j
\end{aligned}$$

où

$$c_\varepsilon = a_\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\, c\, N\, b_\varepsilon^{j-1}.$$

La dernière majoration s'écrit

$$\|X_j\| \leq c_\varepsilon\, (1+m)^j .$$

Par ailleurs, le nombre réel c_ε est strictement inférieur à 1 si ε est suffisamment petit.

2) Soient $\exp X$ dans U et ε un nombre réel strictement positif. Notons M_ε l'entier naturel vérifiant

$$M_\varepsilon - 1 < \varepsilon^{-1} \leq M_\varepsilon .$$

Alors

$$\|M_\varepsilon^{-1} X\| \leq \varepsilon \, \|X\| \leq \varepsilon$$

donc $\exp\bigl(M_\varepsilon^{-1} X\bigr)$ appartient à $\exp \varepsilon B$ et par conséquent

$$\exp X \in (\exp \varepsilon B)^{M_\varepsilon} .$$

3) Soit X un élément non nul de $\mathfrak{g}$. Fixons ε suffisamment petit pour que a_ε soit inférieur à 1 dans 1). Par définition $\exp X$ appartient à $U^{w_G(\exp X)-1}$ donc à $(\exp \varepsilon B)^{M_\varepsilon\left(w_G(\exp X)-1\right)}$ d'après 2), et d'après 1)

$$\begin{aligned} \|X_j\| &\leq \Bigl(1 + M_\varepsilon\bigl(w_G(\exp X) - 1\bigr)\Bigr)^j \\ &\leq \bigl(M_\varepsilon \, w_G(\exp X)\bigr)^j \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (1 + \|X_j\|)^{1/j} &\leq \Bigl(1 + \bigl(M_\varepsilon \, w_G(\exp X)\bigr)^j\Bigr)^{1/j} \\ &\leq (1 + M_\varepsilon^j\,)^{1/j} \, w_G(\exp X). \end{aligned}$$

3.3.9 Proposition

Il existe un nombre réel c_3 supérieur à 1 tel que pour tout $Y_1 \cdots Y_n$ où chaque Y_j appartient à $\mathfrak{g}_{j-1}$, on ait

$$\|X_j\|^{1/j} \leq c_3 \max_{1 \leq i \leq j} (1 + \|Y_i\|)^{1/i}$$

et

$$\|Y_j\|^{1/j} \leq c_3 \max_{1 \leq i \leq j} (1 + \|X_i\|)^{1/i}$$

où X_j désigne la composante de $Y_1 \cdots Y_n$ appartenant à V_j.

Preuve. Fixons j dans $\{1, \ldots, n\}$. Par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$X_j = Y_j + \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_p \geq 1 \\ i_1 + \cdots + i_p \leq j}} c^j_{i_1 \ldots i_p} \, \bigl[Y_{i_1}, [\ldots, Y_{i_p}] \ldots\bigr]_j \tag{1}$$

d'où

$$\|X_j\| \leq \|Y_j\| + \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_p \geq 1 \\ i_1 + \cdots + i_p \leq j}} |c^j_{i_1 \ldots i_p}| \, \|Y_{i_1}\| \ldots \|Y_{i_p}\| .$$

Posons

$$c = \max \Bigl\{ |c^j_{i_1 \ldots i_p}| \Bigm| i_1, \ldots, i_p \geq 1 \text{ et } i_1 + \cdots + i_p \leq j \Bigr\}$$

et notons N le nombre de termes dans la somme précédente.

Il vient alors

$$\|X_j\| \leq \|Y_j\| + c \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p \geq 1 \\ i_1+\cdots+i_p \leq j}} \left(\|Y_{i_1}\|^{1/i_1}\right)^{i_1} \dots \left(\|Y_{i_p}\|^{1/i_p}\right)^{i_p}$$

$$\leq \|Y_j\| + cN \left(\max_{1 \leq i \leq j} (1 + \|Y_i\|)^{1/i} \right)^j$$

$$\leq (1 + cN) \left(\max_{1 \leq i \leq j} (1 + \|Y_i\|)^{1/i} \right)^j .$$

Finalement

$$\|X_j\|^{1/j} \leq (1 + cN)^{1/j} \max_{1 \leq i \leq j} (1 + \|Y_i\|)^{1/i} .$$

La seconde majoration se prouve en remarquant qu'il existe une formule analogue à (1) en permutant les X_i et les Y_i. Il suffit alors de recopier ligne par ligne les majorations ci-dessus.

Le théorème qui suit résume les résultats précédents.

3.3.10 Théorème

Il existe des nombres réels strictement positifs c et c' tels que pour tout X dans $\mathfrak{g}$, on ait :

$$c \max_{1 \leq i \leq n} (1 + \|X_i\|)^{1/i} \leq w_G(\exp X) \leq c' \max_{1 \leq i \leq n} (1 + \|X_i\|)^{1/i}$$

où X_i désigne la composante de X appartenant à V_i.

Preuve. La PROPOSITION 3.3.8 montre l'existence de c. Soit X un élément de $\mathfrak{g}$. Il existe des éléments $Y_1, \dots, Y_n$, où chaque Y_j appartient à $\mathfrak{g}_{j-1}$ tels que

$$X = Y_1 \cdots Y_n .$$

Par 1.1.9, il vient

$$w_G(\exp X) \leq \sum_{j=1}^{n} w_G(\exp Y_j)$$

et le COROLLAIRE 3.3.7 entraîne

$$w_G(\exp X) \leq c_1 \sum_{j=1}^{n} (1 + \|Y_j\|)^{1/j} .$$

Il résulte alors de la PROPOSITION 3.3.9

$$w_G(\exp X) \leq c_1 \sum_{j=1}^{n} \left[1 + c_3^j \max_{1 \leq i \leq j} (1 + \|X_i\|)^{j/i} \right]^{1/j}$$

$$\leq c_1 \sum_{j=1}^{n} 1 + c_3 \max_{1 \leq i \leq j} (1 + \|X_i\|)^{1/i}$$

$$\leq c_1 n \left(1 + c_3 \max_{1 \leq i \leq n} (1 + \|X_i\|)^{1/i} \right)$$

$$\leq c_1 n (1 + c_3) \max_{1 \leq i \leq n} (1 + \|X_i\|)^{1/i}.$$

3.3.11 Notation

Soit G un groupe localement compact connexe. On note G_1 le groupe dérivé de G, i.e, l'adhérence dans G du sous-groupe engendré par les commutateurs de G. Alors $U \cap G_1$, noté V, est un voisinage compact symétrique de e dans G_1, et le poids w_V sur G_1 défini en 1.1.9 sera noté w_{G_1}.

3.3.12 Théorème

Il existe un nombre réel strictement positif c tel que :

$$w_G\big|_{G_1} \leq c\, w_{G_1}^{1/2}.$$

Preuve. On montre facilement par récurrence sur i que pour tout i dans $\mathbb{N}$:

$$(\mathfrak{g}_1)_i \subset \mathfrak{g}_{2i+1}. \tag{1}$$

Notons p le pas de nilpotence de $\mathfrak{g}_1$ et soit Y un élément de $\mathfrak{g}_1$. Alors Y s'écrit

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 \cdots Y_p \\ &= X_1 + \cdots + X_p \end{aligned}$$

où chaque Y_i appartient à $(\mathfrak{g}_1)_{i-1}$ et X_i à $(V_1)_i$ où, comme dans 3.3.1, les sous-espaces vectoriels $(V_1)_i$ sont définis de sorte que $(\mathfrak{g}_1)_{i-1}$ soit somme directe de $(\mathfrak{g}_1)_i$ et $(V_1)_i$ pour tout i dans $\{1, \ldots, p\}$. Comme cela a été remarqué dans 1.1.9 :

$$\begin{aligned} w_G(\exp Y) &= w_G(\exp Y_1 \ldots \exp Y_p) \\ &\leq w_G(\exp Y_1) + \cdots + w_G(\exp Y_p). \end{aligned}$$

Or chaque Y_i appartient à $\mathfrak{g}_{2i-1}$ d'après (1), donc par le COROLLAIRE 3.3.7 :

$$w_G(\exp Y_i) \leq c_1\,(1 + \|Y_i\|)^{1/2i}$$

d'où

$$\begin{aligned} w_G(\exp Y) &\leq c_1 \sum_{i=1}^{p} (1 + \|Y_i\|)^{1/2i} \\ &\leq c_1 p \max_{1\leq i\leq p} (1 + \|Y_i\|)^{1/2i} \\ &\leq c_1 p \left(\max_{1\leq i\leq p} (1 + \|Y_i\|)^{1/i} \right)^{1/2} \\ &\leq c_1 p + c_1 p \left(\max_{1\leq i\leq p} \|Y_i\|^{1/i} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La PROPOSITION 3.3.9 entraîne alors

$$w_G(\exp Y) \leq c_1 p + c_1 p \left(c_3 \max_{1\leq i\leq p} (1 + \|X_i\|)^{1/i} \right)^{1/2}$$

et par la PROPOSITION 3.3.8

$$\begin{aligned} w_G(\exp Y) &\leq c_1 p + c_1 p \big(c_3\, c_2\, w_{G_1}(\exp Y) \big)^{1/2} \\ &\leq c\, w_{G_1}^{1/2}(\exp Y) \end{aligned}$$

où

$$c = c_1 p + c_1 p\,(c_2 c_3)^{1/2}.$$

3.4 Exemples

Ce paragraphe donne les premiers exemples concrets de poids sur des groupes de Lie nilpotents simplement connexes. Sur un tel groupe G, 1.1.9 montre qu'il est possible d'associer, de façon naturelle, à tout voisinage compact U de e dans G, un poids w_U sur G. Un choix judicieux de U permettra des simplifications dans les calculs et la PROPOSITION 1.1.5 montre que le choix d'un voisinage particulier ne restreint pas la généralité du résultat. Chaque exemple se termine par l'illustration du THÉORÈME 3.3.12, où la constante c est calculée explicitement.

Dans ce qui suit, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre de Lie des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.

3.4.1 Désignons par H_n le groupe de Heisenberg $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, dont la loi est donnée par

$$(x, y, z)(x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(x \cdot y' - y \cdot x')\right)$$

où $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel de x et y dans $\mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Le groupe de Lie H_n est nilpotent de pas 2, et son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{n+2}(\mathbb{R})$, constituée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & \dots & x_n & z \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & y_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant (x, y, z) l'élément ci-dessus, l'application exp est alors l'application identique. Posons

$$U_{a,b} = [-a, a]^n \times [-b, b]^n \times \left[-\frac{abn}{2}, \frac{abn}{2}\right]$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

Alors $U_{a,b}$ est un voisinage compact symétrique de e dans H_n, et le choix particulier du dernier intervalle permet de trouver l'expression "la plus simple possible" des puissances successives de ce voisinage. On montre en effet facilement par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$:

$$U_{a,b}^k = [-ak, ak]^n \times [-bk, bk]^n \times \left[-\frac{abn}{2}k^2, \frac{abn}{2}k^2\right]$$

d'où

$$w_{U_{a,b}}(x, y, z) = 1 + \max\left\{-E\left(-\frac{\|x\|_\infty}{a}\right), -E\left(-\frac{\|y\|_\infty}{b}\right), -E\left(-\sqrt{\frac{2|z|}{abn}}\right)\right\}$$

où E désigne la fonction partie entière.

Comme le groupe dérivé $(H_n)_1$ de H_n est $\{0\}^2 \times \mathbb{R}$, l'expression de $w_{U_{a,b}}$ sur $(H_n)_1$ s'écrit

$$\begin{aligned} w_{U_{a,b}}(0,0,z) &= 1 - E\left(-\sqrt{\frac{2|z|}{abn}}\right) \\ &< 2 + \sqrt{\frac{2|z|}{abn}}\,. \end{aligned}$$

Posons

$$V_{a,b} = U_{a,b} \cap (H_n)_1\,.$$

Alors pour tout k dans $\mathbb{N}$:

$$V_{a,b}^k = \{0\}^{2n} \times \left[-\frac{abn}{2}\,k, \frac{abn}{2}\,k\right]$$

d'où

$$\begin{aligned} w_{V_{a,b}}(0,0,z) &= 1 - E\left(-\frac{2|z|}{abn}\right) \\ &\geq 1 + \frac{2|z|}{abn}\,. \end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie que :

$$\sup\left\{ \frac{2+\sqrt{u}}{\sqrt{1+u}} \;\middle|\; u \geq 0 \right\} = \sqrt{5},$$

et par conséquent

$$w_{U_{a,b}}\big|_{V_{a,b}} < \sqrt{5}\, w_{V_{a,b}}^{1/2}\,.$$

3.4.2 Désignons par K_3 le groupe de Lie nilpotent de pas 3, dont la variété sous-jacente est $\mathbb{R}^4$, et dont la loi est donnée par

$$\begin{aligned} (x,y_1,y_2,y_3)(x',y_1',y_2',y_3') = \Big(x+x', y_1+y_1', y_2+y_2'+\frac{1}{2}(xy_1'-x'y_1), y_3+y_3' \\ +\frac{1}{2}(xy_2'-x'y_2)+\frac{1}{12}(xy_1'-x'y_1)(x-x')\Big)\,. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_3$ de K_3 est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$, constituée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & x & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant (x,y_1,y_2,y_3) l'élément ci-dessus, l'application exp est alors l'application identique. Posons

$$U_{a,b} = [-a,a] \times [-b,b] \times \left[-\frac{ab}{2},\frac{ab}{2}\right] \times \left[-\frac{5a^2b}{36},\frac{5a^2b}{36}\right]$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

Alors $U_{a,b}$ est un voisinage compact symétrique de e dans K_3 et on montre facilement par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$U_{a,b}^n = [-an, an] \times [-bn, bn] \times \left[-\frac{ab}{2}n^2, \frac{ab}{2}n^2\right] \times \left[-\frac{5a^2b}{36}n^3, \frac{5a^2b}{36}n^3\right]$$

d'où

$$w_{U_{a,b}}(x, y_1, y_2, y_3) = 1 + \max\left\{ -E\left(-\frac{|x|}{a}\right), -E\left(-\frac{|y_1|}{b}\right), -E\left(-\sqrt{\frac{2|y_2|}{ab}}\right), -E\left(-\sqrt[3]{\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}}\right)\right\}.$$

Comme le groupe dérivé $(K_3)_1$ de K_3 est $\{0\}^2 \times \mathbb{R}^2$, l'expression de $w_{U_{a,b}}$ sur $(K_3)_1$ s'écrit

$$\begin{aligned} w_{U_{a,b}}(0, 0, y_2, y_3) &= 1 + \max\left\{ -E\left(-\sqrt{\frac{2|y_2|}{ab}}\right), -E\left(-\sqrt[3]{\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}}\right)\right\} \\ &< 2 + \max\left\{ \sqrt{\frac{2|y_2|}{ab}}, \sqrt[3]{\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}}\right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$V_{a,b} = U_{a,b} \cap (K_3)_1 .$$

Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$V_{a,b}^n = \{0\}^2 \times \left[-\frac{ab}{2}n, \frac{ab}{2}n\right] \times \left[-\frac{5a^2b}{36}n, \frac{5a^2b}{36}n\right]$$

d'où

$$\begin{aligned} w_{V_{a,b}}(0, 0, y_2, y_3) &= 1 + \max\left\{ -E\left(-\frac{2|y_2|}{ab}\right), -E\left(-\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}\right)\right\} \\ &\geq 1 + \max\left\{ \frac{2|y_2|}{ab}, \frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}\right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie que :

$$\sup\left\{ \frac{2 + \max\{\sqrt{u}, \sqrt[3]{v}\}}{\sqrt{1 + \max\{u, v\}}} \;\middle|\; u, v \in \mathbb{R}_+ \right\} = \sup\left\{ \frac{2 + \sqrt[3]{v}}{\sqrt{1+v}} \;\middle|\; v \geq 0\right\}$$

et

$$2{,}36 < \sup\left\{ \frac{2 + \sqrt[3]{v}}{\sqrt{1+v}} \;\middle|\; v \geq 0\right\} < 2{,}37.$$

Par conséquent, il vient

$$w_{U_{a,b}}\big|_{V_{a,b}} < 2{,}37\, w_{V_{a,b}}^{1/2} .$$

3.4.3 Désignons par N_3 le groupe de Lie nilpotent de pas 3, dont la variété sous-jacente est $\mathbb{R}^6$ et dont la loi est donnée par

$$(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,z)(x'_1,x'_2,x'_3,y'_1,y'_2,z') = \Big(x_1+x'_1, x_2+x'_2, x_3+x'_3, y_1+y'_1 \\ +\frac{1}{2}(x_1x'_2 - x'_1x_2), y_2+y'_2+\frac{1}{2}(x_2x'_3 - x'_2x_3), z+z'+\frac{1}{2}(x_1y'_2 - x'_1y_2 + y_1x'_3 - y'_1x_3) \\ +\frac{1}{12}(x_1x_2x'_3 + x'_1x'_2x_3 + x_1x'_2x'_3 - 2x_1x'_2x_3 - 2x'_1x_2x'_3)\Big).$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_3$ de N_3 est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$ constituée des matrices strictement triangulaires supérieures, i.e, de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & y_1 & z \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant (x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,z) l'élément ci-dessus, l'application exp est l'application identique. Posons

$$U_{a,b,c} = [-a,a]\times[-b,b]\times[-c,c]\times\left[-\frac{ab}{2},\frac{ab}{2}\right]\times\left[-\frac{bc}{2},\frac{bc}{2}\right]\times\left[-\frac{5abc}{18},\frac{5abc}{18}\right]$$

où a, b, c sont des nombres réels strictement positifs.

Alors $U_{a,b,c}$ est un voisinage compact symétrique de e dans N_3, et on montre facilement que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$U^n_{a,b,c} = [-an,an]\times[-bn,bn]\times[-cn,cn]\times\left[-\frac{ab}{2}n^2,\frac{ab}{2}n^2\right]\times\left[-\frac{bc}{2}n^2,\frac{bc}{2}n^2\right] \\ \times\left[-\frac{5abc}{18}n^3,\frac{5abc}{18}n^3\right]$$

d'où

$$w_{U_{a,b,c}}(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,z) = 1+\max\left\{-E\left(-\frac{|x_1|}{a}\right), -E\left(-\frac{|x_2|}{b}\right), -E\left(-\frac{|x_3|}{c}\right),\right. \\ \left. -E\left(-\sqrt{\frac{2|y_1|}{ab}}\right), -E\left(-\sqrt{\frac{2|y_2|}{bc}}\right), -E\left(-\sqrt[3]{\frac{3{,}6|z|}{abc}}\right)\right\}.$$

Comme le groupe dérivé $(N_3)_1$ de N_3 est $\{0\}^3\times\mathbb{R}^3$, l'expression de $w_{U_{a,b,c}}$ sur $(N_3)_1$ s'écrit

$$w_{U_{a,b,c}}(0,0,0,y_1,y_2,z) = 1+\max\left\{-E\left(-\sqrt{\frac{2|y_1|}{ab}}\right), -E\left(-\sqrt{\frac{2|y_2|}{bc}}\right),\right. \\ \left. -E\left(-\sqrt[3]{\frac{3{,}6|z|}{abc}}\right)\right\} \\ < 2+\max\left\{\sqrt{\frac{2|y_1|}{ab}}, \sqrt{\frac{2|y_2|}{bc}}, \sqrt[3]{\frac{3{,}6|z|}{abc}}\right\}.$$

Posons

$$V_{a,b,c} = U_{a,b,c} \cap (N_3)_1 .$$

Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$V_{a,b,c}^n = \{0\}^3 \times \left[-\frac{ab}{2} n, \frac{ab}{2} n \right] \times \left[-\frac{bc}{2} n, \frac{bc}{2} n \right] \times \left[-\frac{5abc}{18} n, \frac{5abc}{18} n \right]$$

d'où

$$\begin{aligned} w_{V_{a,b,c}}(0,0,0,y_1,y_2,z) &= 1 + \max \left\{ -E\left(-\frac{2|y_1|}{ab}\right), -E\left(-\frac{2|y_2|}{bc}\right), -E\left(-\frac{3{,}6|z|}{abc}\right) \right\} \\ &\geq 1 + \max \left\{ \frac{2|y_1|}{ab}, \frac{2|y_2|}{bc}, \frac{3{,}6|z|}{abc} \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\sup \left\{ \frac{2 + \max\{\sqrt{u}, \sqrt{v}, \sqrt[3]{w}\}}{\sqrt{1 + \max\{u, v, w\}}} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{R}_+ \right\} = \sup \left\{ \frac{2 + \sqrt[3]{w}}{\sqrt{1+w}} \;\middle|\; w \geq 0 \right\}$$

et, comme dans l'exemple précédent, il vient :

$$w_{U_{a,b,c}}\big|_{V_{a,b,c}} < 2{,}37\, w_{V_{a,b,c}}^{1/2} .$$

3.4.4 Désignons par K_4 le groupe de Lie nilpotent de pas 4, dont la variété sous-jacente est $\mathbb{R}^5$ et dont la loi est donnée par

$$\begin{aligned} (x, y_1, y_2, y_3, y_4)(x', y_1', y_2', y_3', y_4') = \Big(& x + x', y_1 + y_1', y_2 + y_2' + \frac{1}{2}(xy_1' - x'y_1), y_3 + y_3' \\ & + \frac{1}{2}(xy_2' - x'y_2) + \frac{1}{12}(xy_1' - x'y_1)(x - x'), y_4 + y_4' + \frac{1}{2}(xy_3' - x'y_3) + \frac{1}{12}(xy_2' - x'y_2)(x - x') \\ & - \frac{1}{24} xx'(xy_1' - x'y_1) \Big). \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_4$ de K_4 est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_5(\mathbb{R})$, constituée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & y_4 \\ 0 & 0 & x & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & x & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En notant (x, y_1, y_2, y_3, y_4) l'élément ci-dessus, l'application exp est alors l'application identique. Posons

$$U_{a,b} = [-a, a] \times [-b, b] \times \left[-\frac{ab}{2}, \frac{ab}{2} \right] \times \left[-\frac{5a^2b}{36}, \frac{5a^2b}{36} \right] \times \left[-\frac{a^3b}{36}, \frac{a^3b}{36} \right]$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

Alors $U_{a,b}$ est un voisinage compact symétrique de e dans K_4 et on montre facilement que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$U_{a,b}^n = [-an, an] \times [-bn, bn] \times \left[-\frac{ab}{2}n^2, \frac{ab}{2}n^2\right] \times \left[-\frac{5a^2b}{36}n^3, \frac{5a^2b}{36}n^3\right] \times \left[-\frac{a^3b}{36}n^4, \frac{a^3b}{36}n^4\right]$$

d'où

$$w_{U_{a,b}}(x, y_1, y_2, y_3, y_4) = 1 + \max\left\{ -E\left(-\frac{|x|}{a}\right), -E\left(-\frac{|y_1|}{b}\right), -E\left(-\sqrt{\frac{2|y_2|}{ab}}\right), -E\left(-\sqrt[3]{\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}}\right), -E\left(-\sqrt[4]{\frac{36|y_4|}{a^3b}}\right) \right\}.$$

Comme le groupe dérivé $(K_4)_1$ de K_4 est $\{0\}^2 \times \mathbb{R}^3$, l'expression de $w_{U_{a,b}}$ sur $(K_4)_1$ s'écrit

$$\begin{aligned} w_{U_{a,b}}(0, 0, y_2, y_3, y_4) &= 1 + \max\left\{ -E\left(-\sqrt{\frac{2|y_2|}{ab}}\right), -E\left(-\sqrt[3]{\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}}\right), -E\left(-\sqrt[4]{\frac{36|y_4|}{a^3b}}\right) \right\} \\ &< 2 + \max\left\{ \sqrt{\frac{2|y_2|}{ab}}, \sqrt[3]{\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}}, \sqrt[4]{\frac{36|y_4|}{a^3b}} \right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$V_{a,b} = U_{a,b} \cap (K_4)_1 .$$

Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$V_{a,b}^n = \{0\}^2 \times \left[-\frac{ab}{2}n, \frac{ab}{2}n\right] \times \left[-\frac{5a^2b}{36}n, \frac{5a^2b}{36}n\right] \times \left[-\frac{a^3b}{36}n, \frac{a^3b}{36}n\right]$$

d'où

$$\begin{aligned} w_{V_{a,b}}(0, 0, y_2, y_3, y_4) &= 1 + \max\left\{ -E\left(-\frac{2|y_2|}{ab}\right), -E\left(-\frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}\right), -E\left(-\frac{36|y_4|}{a^3b}\right) \right\} \\ &\geq 1 + \max\left\{ \frac{2|y_2|}{ab}, \frac{7{,}2|y_3|}{a^2b}, \frac{36|y_4|}{a^3b} \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on vérifie que :

$$\sup\left\{ \frac{2 + \max\{\sqrt{u}, \sqrt[3]{v}, \sqrt[4]{w}\}}{\sqrt{1 + \max\{u, v, w\}}} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{R}_+ \right\} = \sup\left\{ \frac{2 + \sqrt[4]{w}}{\sqrt{1+w}} \;\middle|\; w \geq 0 \right\}$$

et

$$2{,}44 < \sup\left\{ \frac{2 + \sqrt[4]{w}}{\sqrt{1+w}} \;\middle|\; w \geq 0 \right\} < 2{,}45 .$$

Par conséquent, il vient :

$$w_{U_{a,b}}\big|_{V_{a,b}} < 2{,}45\, w_{V_{a,b}}^{1/2} .$$

Chapitre 4

Orbites plates

Soient G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et π un élément de $\widehat{G}$. Dans ce chapitre, l'orbite de la forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$ associée à π par la bijection de Kirillov est supposée plate, c'est à dire, de la forme $\ell + V$, où V est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathfrak{g}^*$. L'un des buts de ce chapitre est de déterminer $j(\ell)$. C'est le théorème de projection du chapitre 2 qui permettra de déduire le résultat du cas où l'orbite est ponctuelle, lequel a été traité au chapitre 1. Le pas de G est supposé, encore ici, quelconque. Cependant, une difficulté survient lorsque l'espace $\mathcal{P}_w(G)$ des polynômes sur G dominés par le poids w est restreint à $\exp \mathfrak{n}$, noté N, où $\mathfrak{n}$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{g}$. Les choses se compliquent lorsque cet espace est différent de $\mathcal{P}_{w|_N}(N)$.

Dans tout ce chapitre, G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et w un poids symétrique, continu sur G, à croissance polynomiale, et valant 1 en e. Ces hypothèses sur w permettent d'appliquer tous les résultats obtenus dans le chapitre 2 ainsi que ceux du paragraphe 1.4.
L'orbite $O(\ell)$ d'une forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$ est supposée plate, c'est à dire de la forme :

$$O(\ell) = \ell + \mathfrak{n}^\circ$$

où

$$\mathfrak{n} = \operatorname{Rad} B_\ell = \left\{ X \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \forall Y \in \mathfrak{g} : \ell[X,Y] = 0 \right\} \triangleleft \mathfrak{g}.$$

Soient π_ℓ dans $\widehat{G}$ une représentation unitaire continue irréductible de G, associée à l'orbite $O(\ell)$ par la bijection de Kirillov, et

$$N = \exp \mathfrak{n} \triangleleft G.$$

4.1 Idéal minimal

La forme linéaire $\ell_{|_\mathfrak{n}}$ s'annulant sur $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$, définit un caractère unitaire $\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}$ de N comme dans 1.1.18 :

$$\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}(\exp X) = e^{i\ell(X)}, \qquad X \in \mathfrak{n}$$

et la représentation de G induite par $\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}$ a même noyau que π_ℓ.

4.1.1 Notation

La proposition 1.3.1 montre qu'il existe un plus petit idéal bilatère fermé $j(\{\operatorname{Ker}\pi_\ell\})$ – resp. $j\left(\left\{\operatorname{Ker}\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}\right\}\right)$ – de $L^1_w(G)$ – resp. $L^1_{w_{|_N}}(N)$ – d'enveloppe $\{\operatorname{Ker}\pi_\ell\}$ – resp. $\left\{\operatorname{Ker}\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}\right\}$ – que l'on convient également de noter $j(\ell)$ – resp. $j\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right)$ – pour simplifier. De façon analogue à 1.3.4, l'ensemble $\mathcal{J}(\{\operatorname{Ker}\pi_\ell\})$ – resp. $\mathcal{J}\left(\left\{\operatorname{Ker}\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}\right\}\right)$ – sera noté abusivement $\mathcal{J}(\ell)$ – resp. $\mathcal{J}\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right)$ – :

$$\mathcal{J}(\ell) = \left\{ J \triangleleft L^1_w(G) \;\middle|\; h(J) = \{\ell\} \right\}$$

et

$$\mathcal{J}\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right) = \left\{ J \triangleleft L^1_{w_{|_N}}(N) \;\middle|\; h(J) = \left\{\ell_{|_\mathfrak{n}}\right\} \right\}.$$

4.1.2 En accord avec 2.1.6 et 1.4.4, nous noterons :

$$\mathcal{P}_w(G)_{|_N} = \left\{ P_{|_N} \;\middle|\; P \in \mathcal{P}_w(G) \right\}$$

et

$$\mathcal{P}_{w_{|_N}}(N) = \left\{ P \;\middle|\; P \in \mathcal{P}(N) \text{ et } \sup_{n\in N} \frac{|P(n)|}{w(n)} < +\infty \right\}.$$

Il est clair que $\mathcal{P}_w(G)_{|_N}$ est contenu dans $\mathcal{P}_{w_{|_N}}(N)$ et l'exemple 4.2.5 montrera que cette inclusion peut être stricte.

4.1.3 Comme l'orbite $\mathrm{Ad}^*(N)\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right)$ de $\ell_{|_\mathfrak{n}}$ est ponctuelle, le THÉORÈME 1.3.9 montre que $\mathcal{J}\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right)$ est en bijection avec l'ensemble des sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathcal{P}_{w_{|_N}}(N)$ invariants par translations. En particulier, l'idéal minimal $j\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right)$ de $L^1_{w_{|_N}}(N)$ d'enveloppe $\left\{\ell_{|_\mathfrak{n}}\right\}$ est donné par :

$$j\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right) = \left\{ f \in L^1_{w_{|_N}}(N) \,\middle|\, \forall P \in \mathcal{P}_{w_{|_N}}(N) \,:\, f \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}} \right\}$$

4.1.4 Proposition

Soit W un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{P}_w(G)$ invariant par translations. Pour f dans $L^1_w(G)$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}\forall P \in W \,:\, Pf \in \operatorname{Ker}\pi_\ell &\iff \forall x,y \in G,\ \forall P \in W_{|_N} \,:\, {}_xf_y{}_{|_N} \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}} \\ &\iff \forall x \in G,\ \forall P \in W_{|_N} \,:\, {}_xf_{|_N} \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}.\end{aligned}$$

Preuve. Comme la représentation de G induite par $\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}$ a même noyau que π_ℓ, on a :

$$\begin{aligned}\forall P \in W \,:\, Pf \in \operatorname{Ker}\pi_\ell &\iff \forall P \in W,\ Pf \in \operatorname{Ker}\operatorname{ind}_N^G \chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}} \\ &\iff \forall P \in W,\ \forall x,y \in G \,:\, {}_x(Pf)_y{}_{|_N} \in \operatorname{Ker}\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}} \\ &\iff \forall P \in W_{|_N},\ \forall x,y \in G \,:\, {}_xf_y{}_{|_N} \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}\end{aligned}$$

la 2^{nde} équivalence résultant du LEMME 2.2.1 et la $3^{\text{ème}}$ étant due à l'invariance de W par translations. Comme $\chi_\ell(yny^{-1})$ est égal à $\chi_\ell(n)$, on a :

$$\begin{aligned}\forall P \in W \,:\, Pf \in \operatorname{Ker}\pi_\ell &\iff \forall P \in W_{|_N},\ \forall x,y \in G \,:\, \int_N P(n) f(x^{-1}yn)\chi_\ell(n)\,dn = 0 \\ &\iff \forall P \in W_{|_N},\ \forall x \in G \,:\, {}_xf_{|_N} \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_\mathfrak{n}}}.\end{aligned}$$

4.1.5 Proposition

L'idéal $j(\ell)$ de $L^1_w(G)$ est l'extension de $j\left(\ell_{|_\mathfrak{n}}\right)$.

Preuve.
1) Par la PROPOSITION 4.1.4, $\operatorname{Ker}\pi_\ell$ est $L^\infty(G/N)$-invariant, et par suite $\operatorname{Ker}\pi_\ell$ appartient à $\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$.

2) Soient I_1 et I_2 deux idéaux bilatères fermés de $L^1_w(G)$ qui sont $L^\infty(G/N)$-invariants. Par le THÉORÈME 2.3.1, il existe J_1 et J_2 dans $\mathcal{I}^G$ tels que I_1 soit l'extension de J_1 et I_2 celle de J_2. Alors

$$\begin{aligned}\overline{I_1 * I_2}^{L^1_w(G)} &= \overline{e(J_1) * e(J_2)}^{L^1_w(G)} \\ &= e(J_1 * J_2)\end{aligned}$$

par la PROPOSITION 2.1.13, donc $\overline{I_1 * I_2}^{L^1_w(G)}$ est $L^\infty(G/N)$-invariant.

3) Par [20], il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $j(\ell)$ soit l'adhérence dans $L^1_w(G)$ de $(\operatorname{Ker}\pi_\ell)^n$.

Comme $\operatorname{Ker}\pi_\ell$ appartient à $\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$ d'après 1), il en est de même pour $j(\ell)$ d'après 2). Par le THÉORÈME 2.3.1, il existe J dans $\mathcal{I}^G$ tel que $j(\ell)$ soit l'extension de J. Or $j(\ell)$ est le plus petit idéal bilatère fermé de $L^1_w(G)$ d'enveloppe $\{\pi_\ell\}$; comme e préserve l'inclusion, J est le plus petit idéal bilatère fermé de $L^1_{w|_N}(N)$ d'enveloppe $\left\{\pi_{\ell|_{\mathfrak{n}}}\right\}$, i.e :

$$J = j\left(\ell_{|_{\mathfrak{n}}}\right)$$

puisque l'orbite de ℓ est $\ell + \mathfrak{n}^\circ$.

4.1.6 Corollaire

Si les espaces $\mathcal{P}_w(G)_{|_N}$ et $\mathcal{P}_{w|_N}(N)$ sont égaux, alors :

$$j(\ell) = \{\, f \in L^1_w(G) \mid \forall P \in \mathcal{P}_w(G) \,:\, Pf \in \operatorname{Ker}\pi_\ell \,\}.$$

Preuve. Par le LEMME 2.2.3 3),

$$\begin{aligned} j(\ell) &= \left\{ f \in L^1_w(G) \mid \forall x \in G : {}_xf_{|_N} \in r(j(\ell)) \right\} \\ &= \left\{ f \in L^1_w(G) \mid \forall x \in G : {}_xf_{|_N} \in j\left(\ell_{|_{\mathfrak{n}}}\right) \right\} \\ &= \left\{ f \in L^1_w(G) \mid \forall x \in G, \forall P \in \mathcal{P}_{w|_N}(N) : {}_xf_{|_N} \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_{\mathfrak{n}}}} \right\} \end{aligned}$$

la 2^{nde} égalité étant due à la PROPOSITION 4.1.5 et au THÉORÈME 2.3.1, la dernière à 4.1.3. Le corollaire résulte alors de la PROPOSITION 4.1.4 vu l'hypothèse.

4.1.7 Notation

A un sous-espace vectoriel non nul W de $\mathcal{P}_w(G)$ invariant par translations, on associe le sous-espace vectoriel fermé $I(W)$ de $L^1_w(G)$ défini par :

$$I(W) = \{\, f \in L^1_w(G) \mid \forall P \in W \,:\, Pf \in \operatorname{Ker}\pi_\ell \,\}.$$

4.1.8 Théorème

Soit W un sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{P}_w(G)$ invariant par translations. Alors $I(W)$ appartient à $\mathcal{J}(\ell)$.

Preuve. Comme W est supposé invariant par translations, il en est de même pour le sous-espace vectoriel fermé $I(W)$ de $L^1_w(G)$ d'après la PROPOSITION 4.1.4. Par la PROPOSITION 2.1.5, $I(W)$ est un idéal bilatère fermé de $L^1_w(G)$. La PROPOSITION 4.1.4. montre également que $I(W)$ est $L^\infty(G/N)$-invariant, et par suite $I(W)$ appartient à $\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$. D'autre part, d'après la PROPOSITION 4.1.5, on a :

$$\begin{aligned} j(\ell) &= e\left(j\left(\ell_{|_{\mathfrak{n}}}\right)\right) \\ &= e\left(\left\{ f \in L^1_{w|_N}(N) \;\middle|\; \forall P \in \mathcal{P}_{w|_N}(N) \,:\, f \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_{\mathfrak{n}}}} \right\}\right) \\ &= \left\{ f \in L^1_w(G) \mid \forall P \in \mathcal{P}_{w|_N}(N), \forall x \in G \,:\, {}_xf_{|_N} \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_{\mathfrak{n}}}} \right\} \\ &\subset \left\{ f \in L^1_w(G) \mid \forall P \in \mathcal{P}_w(G)_{|_N}, \forall x \in G \,:\, {}_xf_{|_N} \in \operatorname{Ker} P\chi_{\ell_{|_{\mathfrak{n}}}} \right\} \\ &\subset I(W) \end{aligned}$$

la 2nde égalité étant due à 4.1.3, la 3ème à 2.2.3 3), et la dernière inclusion à la PROPOSITION 4.1.4. Donc

$$h\big(I(W)\big) \subset h\big(j(\ell)\big) = \{\,\ell\,\}$$

et comme 1 appartient à W d'après la preuve de la PROPOSITION 1.2.8, alors $I(W)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}\pi_\ell$, i.e, ℓ appartient à $h\big(I(W)\big)$ et par suite $h\big(I(W)\big)$ est réduit à $\{\,\ell\,\}$, ce qui prouve finalement que $I(W)$ appartient à $\mathcal{J}(\ell)$.

4.1.9 Notation

Réciproquement, à un idéal bilatère fermé J de $L^1_w(G)$, on associe le sous-espace vectoriel $V(J)$ de $\mathcal{P}_w(G)$ défini par :

$$V(J) = \big\{\, P \in \mathcal{P}_w(G) \;\big|\; \forall f \in J \,:\, Pf \in \operatorname{Ker}\pi_\ell \,\big\}.$$

On montrerait de façon analogue à 1.3.6 que $V(J)$ est invariant par translations. D'après les notations 4.1.7 et 4.1.9, il est clair que J est contenu dans $I\big(V(J)\big)$ et le but de ce qui suit est de voir sous quelle(s) condition(s) l'autre inclusion est vraie.

4.1.10 Théorème

Soit π un élément de $\widehat{G}$. Il existe f dans $\mathcal{S}(G)$, tel que $\pi(f)$ soit non nul et tel que pour tout P dans $\mathcal{P}(G)$, $\pi(Pf)$ soit de rang fini.

Preuve. On raisonne par récurrence sur la dimension de G. Si G est de dimension 1, il n'y a rien à prouver. Soit maintenant $\mathfrak{a}$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans le stabilisateur $\mathfrak{g}(\ell)$ de ℓ. Soit $\mathfrak{a}_0$ le noyau de ℓ dans $\mathfrak{a}$ et soit $A_0 = \exp\mathfrak{a}_0$. Supposons d'abord que $A_0 \neq \{\,e\,\}$. Soit $\widetilde{G} = G/A_0$, soit $p : G \to G/A_0$ la projection canonique et soit $\widetilde{\pi}$ la représentation de $\widetilde{G}$ définie par $\widetilde{\pi}\circ p = \pi$.
D'après l'hypothèse de récurrence il existe $\widetilde{f}$ dans $\mathcal{S}(G/A_0)$, tel que $\widetilde{\pi}(\widetilde{f})$ soit non nul et tel que $\widetilde{\pi}(\widetilde{P}\,\widetilde{f})$ soit de rang fini pour tout $\widetilde{P}$ dans $\mathcal{P}(\widetilde{G})$. Prenons maintenant un sous-espace $\mathfrak{v}$ de $\mathfrak{g}$, tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{v}\oplus\mathfrak{a}_0$. Le groupe G est alors homéomorphe au produit $V = \exp\mathfrak{v}$ avec A_0 et donc nous pouvons définir sur V un produit $\cdot$, tel que $\widetilde{G}$ soit isomorphe à $(V,\cdot)$. Prenons une fonction a dans $\mathcal{S}(G)$, telle que $\widehat{a}(0) = 1$ et telle que $\partial^\alpha a(0) = 0$ pour tout multi-indice α non nul. Soit f la fonction sur G définie par

$$f(vu) = \widetilde{f}(v)\,a(u), \quad v \in V,\ u \in A_0.$$

Alors f appartient à $\mathcal{S}(G)$ et pour un monôme de la forme $P(vu) = \widetilde{P}(v)\,u^\beta$, pour un $\widetilde{P}$ dans $\mathcal{P}(V)$, où β est un multi-indice, nous avons que

$$\begin{aligned}
\pi(Pf) &= \int_V\int_{A_0} \widetilde{P}(v)\,\widetilde{f}(v)\,a(u)\,u^\beta\pi(vu)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \partial^\beta\widehat{a}(0)\int_V \widetilde{P}(v)\,\widetilde{f}(v)\,\widetilde{\pi}(v)\,\mathrm{d}v\\
&= \partial^\beta\widehat{a}(0)\,\widetilde{\pi}(\widetilde{P}\widetilde{f}).
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\pi(f) = \widetilde{\pi}(\widetilde{f}) \neq 0$$

et $\pi(Pf)$ est de rang fini pour tout P.

Nous pouvons donc supposer que A_0 est réduit à $\{e\}$. Donc le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 et $\ell(\mathfrak{z}) \neq \{0\}$. Prenons Z dans $\mathfrak{z}$ tel que $\ell(Z) = 1$. D'après le lemme de Kirillov, il existe Y dans $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}$ tel que $[\mathfrak{g}, Y] \subset \mathfrak{z}$. Soit $\mathfrak{h} = \{u \in \mathfrak{g} \mid [u, Y] = 0\}$. Alors pour un X dans $\mathfrak{g}$ tel que $[X, Y] = Z$ nous obtenons

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{h}$$

et $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1. Quitte à changer X et Y en y ajoutant un multiple de Z, nous pouvons supposer que $\ell(X)$ et $\ell(Y)$ sont nuls. Soit $H = \exp \mathfrak{h}$ et soit ρ dans $\widehat{H}$ tel que $\pi = \mathrm{ind}_H^G \rho$. Nous pouvons prendre par exemple $\rho = \pi_{\ell_0}$, où $\ell_0 = \ell_{|_{\mathfrak{h}}}$. Ecrivons $G = \mathbb{R} \cdot H$ et décrivons les éléments $x = \exp(tX)h$ de $G = \exp(\mathbb{R}X)H$ par th. De même soit ${}^t h = tht^{-1}$, où t appartient à $\mathbb{R}$ et h à H. Calculons $\pi(f)\xi$ pour ξ dans $\mathcal{H}_\pi^\infty \simeq \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}(H))$ et f dans $\mathcal{S}(G)$. Nous obtenons pour $x = sh$ dans G

$$\begin{aligned}
\pi(f)\xi(x) &= \int_G f(u)\xi(u^{-1}x)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_H f(th)\xi\Big((s-t)\,{}^{t-s}(h^{-1})\Big)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_H f(th)\,\rho\big({}^{t-s}h\big)\xi(s-t)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_H f\big(t\,{}^{s-t}h\big)\,\rho(h)\xi(s-t)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \rho^t\big(f(s-t)\big)\xi(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ici la représentation ρ^t de H est définie par

$$\rho^t(h) = \rho({}^t h), \quad t \in \mathbb{R},\ h \in H.$$

En outre nous considérons l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ comme l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{S}(H))$. Ainsi $f(s)$ désigne la fonction $f(s)(h) = f(sh)$, où h appartient à H et $\rho^t(f(s-t))$ est un opérateur C^∞ sur l'espace $\mathcal{H}_\rho$ de ρ, où s et t appartiennent à $\mathbb{R}$. Soit f_1 dans $\mathcal{S}(H)$ tel que $\rho(f_1)$ soit non nul et tel que $\rho(P_1 f_1)$ soit de rang fini pour tout P_1 dans $\mathcal{P}(H)$. Soit en outre U dans $\mathfrak{u}(\mathfrak{h})$. Alors $U * (P_1 f_1)$ est aussi de rang fini, car si nous écrivons $\rho(P_1 f_1)$ comme $\sum_{j=1}^m Q_{\xi_j,\eta_j}$, avec ξ_j et η_j dans $\mathcal{H}_\rho^\infty$, on voit que $\rho\big(U*(P_1 f_1)\big) = \sum_{j=1}^m Q_{d\rho(U)\xi_j,\eta_j}$. Nous essayerons de trouver f dans $\mathcal{S}(G)$ tel que $\pi(f) = Q_{\lambda,\lambda} \otimes \rho(f_1)$ pour un certain λ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ici, pour deux éléments λ et η dans un espace hilbertien $\mathcal{H}$, nous notons $Q_{\lambda,\eta}$ l'opérateur de rang 1 défini par $Q_{\lambda,\eta}(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle \lambda$ où ξ appartient à $\mathcal{H}$. Ecrivons $\mathfrak{b} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$, $B = \exp \mathfrak{b}$ et notons un élément $b = \exp(uY + zZ)$ de B par (u, z). Cherchons une fonction f dans $\mathcal{S}(G)$, telle que

$$\int_B f(s-t)\big({}^t(hb)\big)\chi(b)\,\mathrm{d}b = \lambda(s)\lambda(t) \int_B f_1(hb)\chi(b)\,\mathrm{d}b, \quad s,t \in \mathbb{R},\ h \in H.$$

Cette égalité est équivalente à

$$\begin{aligned}
\int_B f(s)\big({}^t h(u, z+tu)\big)e^{-iz}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z &= \int_B f(s)\big({}^t h(u,z)\big)e^{-iz}e^{iut}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z \\
&= \lambda(s+t)\,\lambda(t) \int_B f_1(hb)\chi(b)\,\mathrm{d}b, \quad s,t \in \mathbb{R},\ h \in H.
\end{aligned}$$

Remplaçons h par ${}^{-t}h$. Alors l'équation devient

$$\int_B f(s)\big(h(u,z)\big)e^{-iz}e^{iut}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z = \lambda(s+t)\lambda(t)\int_B f_1\big({}^{-t}hb\big)\chi(b)\,\mathrm{d}b, \quad s,t\in\mathbb{R},\ h\in H.$$

Donc en faisant une transformation de Fourier inverse nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\big(h(u,z)\big)e^{-iz}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \lambda(s+t)\lambda(t)\int_B f_1\big({}^{-t}hb\big)\chi(b)\,\mathrm{d}b\, e^{-iut}\,\mathrm{d}t, \quad s,u\in\mathbb{R},\ h\in H.$$

Posons

$$\widetilde{f}_1(h) = \int_B f_1(hb)\chi(b)\,\mathrm{d}b, \quad h\in H.$$

Prenons une fonction δ de classe C^∞ sur G, bornée sur G, ainsi que toutes ses dérivées, et à support compact dans la direction Z, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta\big(h\exp(zZ)\big)z^l\,\mathrm{d}z = \delta_{l,0}, \quad h\in H.$$

Posons

$$f(rh) = \delta(h)\int_{\mathbb{R}}\lambda(r+t)\lambda(t)\widetilde{f}_1\big({}^{-t}h\big)\,\mathrm{d}t, \quad r\in\mathbb{R}, h\in H.$$

Ici λ est une fonction de Schwartz de norme L^2 égale à 1. On vérifie que f appartient à $\mathcal{S}(G)$, car si nous prenons des coordonnées $G=\mathbb{R}\times(W=\exp\mathfrak{w})\times\mathfrak{y}$, où $\mathfrak{w}\simeq\mathfrak{h}/\mathfrak{y}$, alors

$$f\big(r\,w(u,z)\big) = \delta\big(w(u,z)\big)\int_{\mathbb{R}}\lambda(r+t)\lambda(t)\widetilde{f}_1\big({}^{-t}(\exp w)\big)e^{-itu}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons le noyau de $\pi(f)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\pi_1\big({}^t f(s-t)\big)\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_B \chi(b)f(s-t)\big({}^t(hb)\big)\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_B \chi(b)\,\delta(hb)\int_{\mathbb{R}}\lambda(s-t+r)\lambda(r)\widetilde{f}_1\big({}^{-r+t}(hb)\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_B \chi(0,z)\delta\big(h(u,z)\big)\int_{\mathbb{R}}\lambda(s-t+r)\lambda(r)\widetilde{f}_1\big({}^{t-r}h\big)e^{iut-iru}e^{iz}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\lambda(s-t+r)\lambda(r)\widetilde{f}_1\big({}^{-r}h\big)e^{iut-iru}\left(\int_{\mathbb{R}}\delta\big(h(u,z)\big)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\lambda(s-t+r)\lambda(r)\widetilde{f}_1\big({}^{-r}h\big)e^{iut-iru}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_{\mathbb{R}}\lambda(s)\lambda(t)\widetilde{f}_1(h)\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\lambda(s)\,\lambda(t)\,\pi_1(f_1).
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $\pi(f)$ agit sur $L^2(\mathbb{R})\otimes\mathcal{H}_{\pi_1}$ par $P_\lambda\otimes\pi_1(f_1)$. En particulier $\pi(f)$ est non nul et de rang fini. Montrons que $\pi(Pf)$ est aussi de rang fini pour tout P dans $\mathcal{P}(G)$. Il suffit de prendre P de la forme

$$P(rh) = r^i P_1(h), \quad r\in\mathbb{R},\ h\in W,$$

où i appartient à $\mathbb{N}$ et P_1 désigne un polynôme sur H. Calculons

$$\begin{aligned}
&\pi_1\big({}^t(Pf)(s-t)\big)\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_B\chi(b)P\big((s-t)^t(hb)\big)f(s-t)\big({}^t(hb)\big)\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\int_{H/B}\pi_1(h)\int_B\chi(b)P\big((s-t)^t(hb)\big)f(s-t)\big({}^t(hb)\big)\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\dot{h}\\
&=\int_W\pi_1(h)\int_B\chi(b)(s-t)^iQ\big(t,h,(u,z)\big)\delta\big(w(u,z)\big)f(s-t)\Big({}^t\big(w(u,z)\big)\Big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{w}
\end{aligned}$$

où Q est un certain polynôme en t,w,u,z. Ecrivons

$$Q(t,w,u,z)=\sum_{j,k,l}t^ju^kz^lP_{j,k,l}(w).$$

Ainsi

$$\pi_1\big({}^t(Pf)(s-t)\big)=\sum_{j,k,l}t^j(s-t)^i\int_W\pi_1(w)Q_{j,k,l}(w)\int_B\chi(b)u^kz^l\delta\big(w(u,z)\big)$$
$$\int_{\mathbb{R}}\lambda(s-t+r)\lambda(r)\widetilde{f_1}\Big({}^{-r+t}\big(w(u,z)\big)\Big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{w}.$$

Si l est non nul, alors $\int_{\mathbb{R}}\delta\big(w(u,z)\big)z^l\,\mathrm{d}z$ est nul et donc tout devient 0 pour ce terme. Donc

$$\begin{aligned}
&\pi_1\big({}^t(Pf)(s-t)\big)\\
&=\sum_{j,k}t^j(s-t)^i\int_W\pi_1(w)Q_{j,k,0}(w)\int_{\mathbb{R}}u^k\int_{\mathbb{R}}\lambda(s-t+r)\lambda(r)\widetilde{f_1}({}^{t-r}w)e^{-iru}\,\mathrm{d}r\,e^{iut}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\dot{w}\\
&=\sum_{j,k}t^j(s-t)^i\int_W\pi_1(w)Q_{j,k,0}(w)\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{i^k}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)^k\Big(\lambda(s-t+r)\lambda(r)\widetilde{f_1}({}^{t-r}w)\Big)e^{iu(t-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}u\mathrm{d}\dot{w}
\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{f_1}({}^{-r+t}w)=\sum_m D_m*\big(P_m(t,{}^{-r+t}w)\widetilde{f_1}\big)({}^{-r+t}w)$$

pour certains éléments D_m de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$ et certains polynômes P_m sur W, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\pi_1\big({}^t(Pf)(s-t)\big)\\
&=\sum_{m,j,k}t^k(s-t)^i\int_W\pi_1(w)Q_{j,k,0}(w)\\
&\qquad\int_{\mathbb{R}^2}\lambda_m(s-t+r)\lambda_m(r)D_m*P_m(t,{}^{t-r}w)\widetilde{f_1}({}^{t-r}w)e^{iu(t-r)}\mathrm{d}r\mathrm{d}u\mathrm{d}\dot{w}\\
&=\sum_{m,j,k}\lambda_m(s)\lambda_m(t)t^k(s-t)^i\int_W\pi_1(w)Q_{j,k,0}(w)D_m*(P_m(t,w)\widetilde{f_1})(w)\,\mathrm{d}\dot{w}.
\end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que

$$\pi_1\big({}^t(Pf)(s-t)\big)=\sum_{m,j,k}\lambda_m(s)\lambda_m(t)t^k(s-t)^i\pi_1(Q_{j,k,0}(-)D_m*(P_m(t,-)f_1)).$$

Comme pour tout polynôme R sur H et tout D dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$ on a $R(D * f_1) = \sum_n T_n * (R_n f_1)$ pour certains autres polynômes R_n et certains T_n dans $\mathfrak{u}(\mathfrak{h})$, on peut conclure, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $\pi(Pf)$ est de rang fini.

4.1.11 Notation

Notons

$$F = \left\{ f \in L^1_w(G) \;\middle|\; \forall P \in \mathcal{P}_w(G) \;:\; \pi_\ell(Pf) \text{ est de rang fini} \right\}.$$

Il est clair que F est un idéal bilatère de $L^1_w(G)$.

4.1.12 Corollaire

Soit J un élément de $\mathcal{J}(\ell)$. Alors $J \cap F$ est dense dans J.

Preuve. Montrons que l'enveloppe de $\overline{F}^{L^1_w(G)}$ est vide.
Il est clair que

$$I(\mathcal{P}_w(G)) \subset F \subset \overline{F}^{L^1_w(G)}$$

d'où

$$h\left(\overline{F}^{L^1_w(G)}\right) \subset h\Big(I(\mathcal{P}_w(G))\Big)$$

i.e, d'après le THÉORÈME 4.1.8

$$h\left(\overline{F}^{L^1_w(G)}\right) \subset \{\pi_\ell\}.$$

Or, par le THÉORÈME 4.1.10, il existe f dans F tel que $\pi_\ell(f)$ soit non nul, donc π_ℓ n'appartient pas à $h(F)$ et a fortiori

$$\pi_\ell \notin h\left(\overline{F}^{L^1_w(G)}\right).$$

Ainsi

$$h\left(\overline{F}^{L^1_w(G)}\right) = \emptyset.$$

Donc

$$j(\emptyset) \subset \overline{F}^{L^1_w(G)}.$$

Comme il existe une approximation de l'unité de $L^1_w(G)$ formée d'éléments de $j(\emptyset)$, donc de $\overline{F}^{L^1_w(G)}$, la première des inclusions suivantes est justifiée :

$$J \subset J * \overline{F}^{L^1_w(G)} \subset \overline{J * F}^{L^1_w(G)} \subset \overline{J \cap F}^{L^1_w(G)} \subset \overline{J}^{L^1_w(G)} = J$$

les autres étant évidentes. Donc $J \cap F$ est dense dans J.

4.1.13 Proposition

Soient J dans $\mathcal{J}(\ell)$ et $(P_1, \ldots, P_k)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathcal{P}_w(G)$ telle que $P_1, \ldots, P_{i_0}$ n'appartiennent pas à $V(J)$ et $P_{i_0+1}, \ldots, P_k$ appartiennent à $V(J)$. Soient f dans $I\big(V(J)\big) \cap F$. Notons pour tout i dans $\{1, \ldots, i_0\}$

$$J_i = \left\{ g \in J \;\middle|\; \forall j = i, \ldots, i_0 \;:\; \pi_\ell(P_j g) = 0 \right\}.$$

Si pour tout i dans $\{2, \ldots, i_0\}$, $\pi_\ell(P_{i-1} J_i)$ est non nul, il existe f' dans J tel que pour tout i dans $\{1, \ldots, k\}$, $\pi_\ell(P_i f')$ et $\pi_\ell(P_i f)$ soient égaux.

Preuve. Si $\pi_\ell(P_{i_0}f)$ est nul, on prend 0 pour f'.
Si $\pi_\ell(P_{i_0}f)$ est non nul, alors $\pi_\ell(P_{i_0}f)$ est de rang fini par hypothèse :

$$\pi_\ell(P_{i_0}f) = \sum_{i=1}^{p} P_{\alpha_i,\beta_i}$$

où chaque P_{α_i,β_i} est un opérateur de rang 1 de $\mathcal{H}(\pi_\ell)$ défini par :

$$P_{\alpha_i,\beta_i}(\xi) = <\xi, \beta_i> \alpha_i .$$

Comme P_{i_0} n'appartient pas à $V(J)$, par le COROLLAIRE 4.1.12, il existe f_1' dans $J \cap F$ tel que $\pi_\ell(P_{i_0}f_1')$ soit non nul, par définition de $V(J)$. Soient g_1 et h_1 deux fonctions quelconques de $C_c^\infty(G)$. Posons

$$f_2' = g_1 * f_1' * h_1 .$$

Alors f_2' appartient à $J \cap F$ et

$$\begin{aligned}\pi_\ell(P_{i_0}f_2') &= \pi_\ell(g_1) \circ \pi_\ell(P_{i_0}f_1') \circ \pi_\ell(h_1)\\ &= \sum_{i=1}^{q} P_{\gamma_i,\delta_i}\end{aligned}$$

où chaque P_{γ_i,δ_i} est un opérateur de rang 1 de $\mathcal{H}(\pi_\ell)$ qui est C^∞ ; et on peut supposer les γ_i linéairement indépendants. Montrons que l'on peut supposer aussi les δ_i linéairement indépendants. Supposons $\delta_1, \dots, \delta_r$ linéairement indépendants et

$$\delta_i = \sum_{l=1}^{r} c_{li}\, \delta_l, \qquad i = r+1, \dots, q.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q} P_{\gamma_i,\delta_i} &= \sum_{i=1}^{r} P_{\gamma_i,\delta_i} + \sum_{i=r+1}^{q} P_{\gamma_i, \sum_{l=1}^{r} c_{li}\delta_l}\\ &= \sum_{i=1}^{r} P_{\gamma_i,\delta_i} + \sum_{i=r+1}^{q} \sum_{l=1}^{r} c_{li} P_{\gamma_i,\delta_l}\\ &= \sum_{i=1}^{r} P_{\gamma_i,\delta_i} + \sum_{l=r+1}^{q} \sum_{i=1}^{r} c_{il} P_{\gamma_l,\delta_i}\\ &= \sum_{i=1}^{r} P_{\gamma_i + \sum_{l=r+1}^{q} c_{il}\gamma_l\, ,\, \delta_i} .\end{aligned}$$

Comme les γ_i sont linéairement indépendants, il en est de même des $\gamma_i + \sum_{l=r+1}^{q} c_{il}\gamma_l$, pour i dans $\{1, \dots, r\}$. On peut ainsi écrire :

$$\pi_\ell(P_{i_0}f_2') = \sum_{i=1}^{r} P_{\mu_i,\delta_i}$$

où les μ_i – resp. δ_i – sont linéairement indépendants. Fixons η non nul dans $\mathcal{H}(\pi_\ell)$. Soient g_2 et h_2 dans $C_c^\infty(G)$. Posons

$$f_3' = g_2 * f_2' * h_2 .$$

Alors f'_3 appartient à $J \cap F$ et

$$\begin{aligned}\pi_\ell(P_{i_0} f'_3) &= \pi_\ell(g_2) \circ \pi_\ell(P_{i_0} f'_2) \circ \pi_\ell(h_2)\\ &= \sum_{i=1}^{r} P_{\pi_\ell(g_2)\mu_i, \pi_\ell(h_2)\delta_i}.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{S}(G)$ agit de façon algébriquement irréductible sur les vecteurs C^∞ de π_ℓ, on peut choisir g_2 et h_2 de sorte que

$$\begin{cases}\pi_\ell(g_2)\mu_1 = \eta\\ \pi_\ell(g_2)\mu_i = 0, \quad i = 2, \ldots, r\\ \pi_\ell(h_2)\delta_1 = \eta\end{cases}$$

Alors par construction

$$\pi_\ell(P_{i_0} f'_3) = P_{\eta,\eta}.$$

Pour tout i dans $\{1, \ldots, p\}$, soient $g_{3,i}$ et $h_{3,i}$ dans $\mathcal{S}(G)$ tels que

$$\begin{cases}\pi_\ell(g_{3,i})\eta = \alpha_i\\ \pi_\ell(h_{3,i})\eta = \beta_i\end{cases}$$

Posons

$$f' = \sum_{i=1}^{p} g_{3,i} * f'_3 * h_{3,i}.$$

Alors f' appartient à $J \cap F$ et

$$\begin{aligned}\pi_\ell(P_{i_0} f') &= \sum_{i=1}^{p} \pi_\ell(g_{3,i}) \circ P_{\eta,\eta} \circ \pi_\ell(h_{3,i})\\ &= \sum_{i=1}^{p} P_{\alpha_i,\beta_i}\\ &= \pi_\ell(P_{i_0} f)\end{aligned}$$

Finalement $f - f'$ appartient à $I\big(V(J)\big) \cap F$ et $\pi_\ell\big(P_{i_0}(f - f')\big)$ est nul.
On démontre alors le résultat de proche en proche, en remplaçant f par $f - f'$ et i_0 par $i_0 - 1$, et en utilisant l'hypothèse sur les J_i.

4.1.14 Proposition

Soient C une partie fermée de $\widehat{G}$ et π_ℓ dans $\widehat{G}$. Alors tout élément de $j(C)$ est une fonction f de $L^1_w(G)$ telle que $\pi_\ell(f)$ soit de rang fini.

Preuve. Par [19], $j(C)$ est l'idéal de $L^1_w(G)$ engendré par les fonctions de la forme $\varphi\{f\}$ où f est un élément autoadjoint de $L^1_w(G)$ possédant certaines propriétés et φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nulle sur un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}$. Soient f et φ deux telles fonctions. Par le théorème spectral, on a :

$$\pi_\ell(f) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n P_n$$

où les P_n sont des projecteurs de rang fini et $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels convergeant vers 0.

Alors

$$\begin{aligned}\pi_\ell(\varphi\{f\}) &= \varphi(\pi_\ell(f))\\ &= \sum_{n\geq 0} \varphi(\lambda_n)P_n.\end{aligned}$$

Vu les hypothèses sur φ et les λ_n, la somme précédente est finie et l'opérateur $\pi_\ell(\varphi\{f\})$ est donc de rang fini. Comme l'ensemble des opérateurs de rang fini est un idéal bilatère de $\mathrm{End}(\mathcal{H}(\pi_\ell))$, $\pi_\ell(\varphi\{f\})$ est de rang fini pour tout f dans $j(C)$.

4.2 Exemples et contre-exemples

Soient G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et W un sous-espace vectoriel non nul de dimension finie de $\mathcal{P}(G)$ qui est invariant par translations.

4.2.1 Notation

Soient $\|\ \|$ une norme quelconque sur l'espace vectoriel de dimension finie W et $\|\ \|$ une norme matricielle sur $\mathrm{End}(W)$. Posons, pour tout x dans G :

$$\omega(x) = \|R_x\|.$$

4.2.2 Proposition

L'application ω associée à W est un poids sur G, et W est inclus dans $\mathcal{P}_\omega(G)$.

Preuve. Par la notation 1.1.19 :

$$R_xP(y) = P(yx), \qquad P \in W,\ x, y \in G.$$

Comme W est invariant par translations, R_x est un endomorphisme de l'espace vectoriel W et il est clair que

$$R_{xy} = R_x \circ R_y, \qquad x, y \in G.$$

Comme de plus R_e est l'application identique de W, l'application

$$\begin{aligned} R : G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(W)\\ x &\longmapsto R_x \end{aligned}$$

est une représentation de dimension finie de G. Donc

$$\omega(xy) = \|R_{xy}\| \leq \|R_x\|\,\|R_y\| = \omega(x)\,\omega(y),$$

la norme $\|\ \|$ sur $\mathrm{End}(W)$ étant matricielle. L'application ω est d'autre part continue donc borélienne, à valeurs dans $[1, +\infty[$ car W contient les polynômes constants, et par suite, est un poids sur G.

Toutes les normes sur W – resp. $\mathrm{End}(W)$ – étant équivalentes, prenons par exemple :

$$\|P\| = \sup_{\|X\|\leq 1} |P(\exp X)|, \qquad P \in W$$

et

$$\|u\| = \sup_{\substack{\|P\|\leq 1\\ P\in W}} \|uP\|, \qquad u \in \mathrm{End}(W)$$

la norme matricielle sur $\mathrm{End}(W)$ subordonnée à la précédente.

Soit P dans W. Pour tout x dans G :

$$\begin{aligned} |P(x)| &= |R_xP(e)| \\ &= |R_xP(\exp 0)| \\ &\le \|R_xP\| \\ &\le \|R_x\|\,\|P\| = \|P\|\,\omega(x) \end{aligned}$$

donc P appartient à $\mathcal{P}_\omega(G)$, ce qui montre que W est contenu dans $\mathcal{P}_\omega(G)$.

4.2.3 Remarque

Pour une norme matricielle $\|\ \|$ sur $\operatorname{End}(W)$

$$\omega_l(x) = \|L_x\|$$

où

$$L_xP(y) = P\big(x^{-1}y\big), \qquad x, y \in G$$

définit de la même façon un poids ω_l et il est facile de vérifier que si W est stable par inversion, alors pour tout P dans W et tout x dans G, $\|R_xP\|$ et $\|L_x\check{P}\|$ sont égaux, donc ω et ω_l le sont également.

4.2.4 Proposition

Si w est un poids à croissance polynomiale sur G, alors le poids ω associé à $\mathcal{P}_w(G)$ est tel que :

$$\mathcal{P}_w(G) = \mathcal{P}_\omega(G).$$

Preuve. Par la PROPOSITION 4.2.2, il suffit de montrer que $\mathcal{P}_\omega(G)$ est contenu dans $\mathcal{P}_w(G)$. Soient $(P_1, \dots, P_n)$ une base fixée de $\mathcal{P}_w(G)$ et P un élément de $\mathcal{P}_w(G)$ de norme inférieure à 1. Alors P s'écrit :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

et pour tout x dans G :

$$\begin{aligned} |P(x)| &\le \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,|P_i(x)| \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, c_{P_i}\right) w(x) \\ &\le c_1\, c_2\, w(x) \end{aligned}$$

où

$$c_{P_i} = \sup_{y\in G} \frac{|P_i(y)|}{w(y)},$$

$$c_1 = \max\big\{\, c_{P_i} \;\big|\; i = 1, \dots, n \,\big\}$$

et

$$c_2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

D'autre part, d'après le théorème d'équivalence des normes, il existe un nombre réel strictement positif c_3, dépendant de la norme choisie sur $\mathcal{P}_w(G)$, indépendant de P, tel que

$$c_2 \leq c_3 \,\|P\| \leq c_3 .$$

Ceci prouve finalement que, une norme étant fixée sur $\mathcal{P}_w(G)$, il existe un nombre réel strictement positif c, en fait $c_1 c_3$, tel que :

$$\sup_{\substack{P \in \mathcal{P}_w(G) \\ \|P\| \leq 1}} \sup_{x \in G} \frac{|P(x)|}{w(x)} \leq c.$$

Soit maintenant x dans G. Par définition de $\omega(x)$, il existe P dans $\mathcal{P}_w(G)$, dépendant de x, de norme 1, et vérifiant

$$\|R_x P\| \geq \frac{1}{2}\,\omega(x).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\omega(x) \leq 2\,\|R_x P\| &= 2 \sup_{\|Y\| \leq 1} |R_x P(\exp Y)| \\
&= 2 \sup_{\|Y\| \leq 1} \big|P\big((\exp Y)x\big)\big| \\
&\leq 2 \sup_{\|Y\| \leq 1} c_P\, w\big((\exp Y)x\big) \\
&\leq 2 \sup_{\|Y\| \leq 1} c_P\, w(\exp Y)\, w(x)
\end{aligned}$$

où

$$c_P = \sup_{z \in G} \frac{|P(z)|}{w(z)} \leq c.$$

D'où

$$\omega(x) \leq 2\,c\,c_4\, w(x)$$

où

$$c_4 = \sup_{\|Y\| \leq 1} w(\exp Y)$$

ce qui montre que $\mathcal{P}_\omega(G)$ est contenu dans $\mathcal{P}_w(G)$.

4.2.5 Soient G le groupe additif $\mathbb{R}^3$ et w la fonction sur G définie par :

$$w(x,y,z) = 1 + 2|x| + 2|y| + 2|z| + |x^2 + y^2 - z^2|.$$

Il est facile de vérifier que w est un poids sur G. Posons

$$N = \{\, (x,y,0) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}.$$

L'expression de w sur le sous-groupe N de G s'écrit :

$$w(x,y,0) = 1 + 2|x| + 2|y| + x^2 + y^2$$

et donc

$$\mathcal{P}_{w_{|_N}}(N) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 .$$

Montrons que $\mathcal{P}_w(G)_{|_N}$ est strictement contenu dans $\mathcal{P}_{w_{|_N}}(N)$. Pour cela, déterminons d'abord $\mathcal{P}_w(G)$: l'espace $\mathcal{P}_w(G)$ est constitué de polynômes en x, y, z qui sont de degré au plus 2. Comme il est clair que $1, x, y, z$ appartiennent à $\mathcal{P}_w(G)$, cherchons à quelle condition le polynôme

$$P(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

appartient à $\mathcal{P}_w(G)$. Il doit exister un nombre réel strictement positif k tel que pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$:

$$|P(x,y,z)| \leq k\, w(x,y,z).$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \left|P\left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)\right| &= \left|(a+c)x^2 + (b+c)y^2 + dxy + ex\sqrt{x^2+y^2} + fy\sqrt{x^2+y^2}\right| \\ &\leq k\left(1 + 2|x| + 2|y| + 2\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ &\leq 4k\,(1 + |x| + |y|) \end{aligned} \tag{1}$$

En prenant 0 pour y, l'inégalité (1) s'écrit :

$$\left|(a+c)x^2 + ex|x|\right| \leq 4k\,(1 + |x|).$$

En faisant tendre successivement x vers $+\infty$ et $-\infty$, il vient :

$$\begin{cases} a + c + e = 0 \\ a + c - e = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} e = 0 \\ c = -a. \end{cases}$$

En prenant 0 pour x dans (1), on obtiendrait de la même façon :

$$\begin{cases} f = 0 \\ b = a. \end{cases}$$

Ainsi

$$P(x,y,z) = a(x^2 + y^2 - z^2) + dxy$$

et il résulte de (1) l'inégalité

$$\left|P\left(x, x, \sqrt{2}\,|x|\right)\right| = |d|x^2 \leq 4k\,(1 + 2|x|)$$

qui ne peut être vérifiée pour tout x dans $\mathbb{R}$ que si d est nul. Donc

$$P(x,y,z) = a(x^2 + y^2 - z^2),$$

ce qui montre que :

$$\mathcal{P}_w(G) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}(x^2 + y^2 - z^2)$$

et donc

$$\mathcal{P}_w(G)_{|_N} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(x^2 + y^2).$$

Il est bien établi dans cet exemple que $\mathcal{P}_w(G)_{|_N}$ est strictement contenu dans $\mathcal{P}_{w_{|_N}}(N)$.

4.2.6 Prenons pour G le groupe de Heisenberg H_1, de dimension 3, dont la multiplication est donnée par

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = \left(x+x', y+y', z+z'+\frac{1}{2}(xy'-yx')\right).$$

L'algèbre de Lie de H_1 est définie par une base (X,Y,Z) telle que $[X,Y]$ soit égal à Z.
En notant L la représentation régulière gauche de H_1 dans $C^\infty(H_1)$, on vérifie que :

$$\begin{cases} \mathrm{d}L(X) = -\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{d}L(Y) = -\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{d}L(Z) = -\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Pour simplifier, notons d_1, d_2, d_3 les opérateurs $\mathrm{d}L(X)$, $\mathrm{d}L(Y)$, $\mathrm{d}L(Z)$.
Soient P le polynôme

$$P = -x^2 + y^2 + z^2$$

et V l'espace vectoriel engendré par P et ses dérivées $d_{i_1}\dots d_{i_n}P$, où n appartient à $\mathbb{N}^*$ et $i_1,\dots,i_n$ à $\{1,2,3\}$. Avec les notations ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} d_1P &= 2x - yz \\ d_2P &= -2y + xz \\ d_3P &= -2z \\ d_1d_1P &= -2 + \frac{y^2}{2} \\ d_2d_1P &= z - \frac{xy}{2} \\ d_3d_1P &= y \\ d_2d_2P &= 2 + \frac{x^2}{2} \\ d_3d_2P &= -x \\ d_3d_3P &= 2 \end{aligned}$$

Donc l'espace vectoriel V est de dimension 10 et $(1,x,y,z,x^2,y^2,xy,xz,yz,z^2)$ en est une base, que l'on notera $\mathcal{B}$ dans la suite. Soit (u,v,w) dans H_1. Pour tout (x,y,z) dans H_1, on a :

$$\begin{aligned} L_{(u,v,w)}(x,y,z) &= (u,v,w)^{-1}\cdot(x,y,z) \\ &= (-u,-v,-w)\cdot(x,y,z) \\ &= \left(x-u, y-v, z-w+\frac{1}{2}(vx-uy)\right). \end{aligned}$$

Calculons par exemple l'action de $L_{(u,v,w)}$ sur l'élément xz de V :

$$\begin{aligned} L_{(u,v,w)}(xz) &= (x-u)\left(z-w+\frac{1}{2}(vx-uy)\right) \\ &= uw - \left(\frac{uv}{2}+w\right)x + \frac{u^2}{2}y - uz + \frac{v}{2}x^2 - \frac{u}{2}xy + xz. \end{aligned}$$

Le calcul de l'action de $L_{(u,v,w)}$ sur les 9 autres éléments de $\mathcal{B}$ montre alors que la matrice de $L_{(u,v,w)}$ dans $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix}
1 & -u & -v & -w & u^2 & v^2 & uv & uw & vw & w^2 \\
0 & 1 & 0 & v/2 & -2u & 0 & -v & -uv/2-w & -v^2/2 & -vw \\
\vdots & \ddots & 1 & -u/2 & 0 & -2v & -u & u^2/2 & uv/2-w & uw \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 & -u & -v & -2w \\
\vdots & & & \ddots & 1 & 0 & 0 & v/2 & 0 & v^2/4 \\
\vdots & & & & \ddots & 1 & 0 & 0 & -u/2 & u^2/4 \\
\vdots & & & & & \ddots & 1 & -u/2 & v/2 & -uv/2 \\
\vdots & & & & & & \ddots & 1 & 0 & v \\
\vdots & & & & & & & \ddots & 1 & -u \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Pour un élément $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 10}$, noté A, appartenant à $\mathrm{End}(V)$, notons $\|A\|_{H.S}$ la norme de Hilbert-Schmidt de A :

$$\|A\|_{H.S} = \left(\sum_{1\leq i,j\leq 10} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Il est bien connu que $\| \ \|_{H.S}$ est une norme matricielle, et en notant

$$\omega(u,v,w) = \|L_{(u,v,w)}\|_{H.S}$$

on a :

$$\omega(u,v,w)^2 = 10 + \frac{35}{4}(u^2+v^2) + 7w^2 + \frac{7}{4}u^2v^2 + 2(u^2w^2+v^2w^2) + \frac{21}{16}(u^4+v^4) + w^4$$

d'où

$$\sqrt{\frac{7}{8}}\,(1+u^2+v^2+w^2) \leq \omega(u,v,w) \leq \sqrt{10}\,(1+u^2+v^2+w^2)$$

donc

$$\mathcal{P}_\omega(H_1) = \mathcal{P}_w(H_1)$$

où

$$\begin{array}{rccc} w: & H_1 & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & (x,y,z) & \mapsto & 1+x^2+y^2+z^2 \end{array}$$

et où l'on a noté abusivement, car w n'est pas un poids sur H_1, $\mathcal{P}_w(H_1)$ l'espace vectoriel des polynômes sur H_1 essentiellement bornés par w. Comme il est clair que $\mathcal{P}_w(H_1)$ est égal à V, dans cet exemple, V et $\mathcal{P}_\omega(H_1)$ sont égaux.

4.2.7 En gardant les mêmes hypothèses et notations que dans 4.2.6, considérons plus généralement un polynôme

$$P = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz$$

de degré 2, de sorte que a, b, …, f soient non tous nuls. En notant R la représentation régulière droite de H_1 dans $C^\infty(H_1)$, on vérifie que :

$$\begin{cases} \mathrm{d}R(X) = \dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{y}{2}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{d}R(Y) = \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{x}{2}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{d}R(Z) = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Pour simplifier, notons d_4 et d_5 les opérateurs $\mathrm{d}R(X)$ et $\mathrm{d}R(Y)$. Alors

$$\begin{aligned}
d_1P &= -\frac{f}{2}y^2 - \frac{e}{2}xy - cyz - 2ax - \left(d + \frac{i}{2}\right) y - ez - g \\
d_2P &= \frac{e}{2}x^2 + \frac{f}{2}xy + cxz - \left(d - \frac{i}{2}\right) x - 2by - fz - h \\
d_3P &= -ex - fy - 2cz - i \\
d_4P &= -\frac{f}{2}y^2 - \frac{e}{2}xy - cyz + 2ax + \left(d - \frac{i}{2}\right) y + ez + g \\
d_5P &= \frac{e}{2}x^2 + \frac{f}{2}xy + cxz + \left(d + \frac{i}{2}\right) x + 2by + fz + h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1d_1P &= \frac{c}{2}y^2 + ey + 2a \\
d_2d_1P &= -\frac{c}{2}xy + fy + cz + d + \frac{i}{2} \\
d_3d_1P &= cy + e \\
d_4d_1P &= \frac{c}{2}y^2 - 2a \\
d_5d_1P &= -\frac{c}{2}xy - ex - fy - cz - d - \frac{i}{2} \\
d_1d_2P &= -\frac{c}{2}xy - ex - cz + d - \frac{i}{2} \\
d_2d_2P &= \frac{c}{2}x^2 - fx + 2b \\
d_3d_2P &= -cx + f \\
d_4d_2P &= -\frac{c}{2}xy + ex + fy + cz - d + \frac{i}{2} \\
d_5d_2P &= \frac{c}{2}x^2 - 2b \\
d_3d_3P &= 2c \\
d_4d_3P &= cy - e \\
d_5d_3P &= -cx - f \\
d_4d_4P &= \frac{c}{2}y^2 - ey + 2a \\
d_5d_4P &= -\frac{c}{2}xy - fy - cz + d - \frac{i}{2} \\
d_4d_5P &= -\frac{c}{2}xy + ex + cz + d + \frac{i}{2} \\
d_5d_5P &= \frac{c}{2}x^2 + fx + 2b
\end{aligned}$$

Si $c \neq 0$: alors

$$V = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}xz \oplus \mathbb{R}yz \oplus \mathbb{R}z^2$$

et donc $\dim V = 10$.

Si $c = 0$: alors
$V = \mathrm{Vec}(1, ex, fx, ey, fy, 2ax + dy + ez, dx + 2by + fz, ix + fxy + ex^2, iy + exy + fy^2, gx + hy + iz + dxy + exz + fyz + ax^2 + by^2)$.
D'où les deux cas :

— si $(e, f) \neq (0, 0)$: alors

$$V = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}(ex^2 + fxy) \oplus \mathbb{R}(exy + fy^2) \oplus \mathbb{R}(ax^2 + by^2 + dxy + exz + fyz)$$

et donc $\dim V = 7$.

— si $(e, f) = (0, 0)$: alors

$$V = \mathrm{Vec}(1, ix, iy, 2ax + dy, dx + 2by, gx + hy + iz + ax^2 + by^2 + dxy)$$

d'où les deux cas :

— si $(i, 4ab - d^2) \neq (0, 0)$: alors

$$V = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(iz + ax^2 + by^2 + dxy)$$

et donc $\dim V = 4$.

— si $(i, 4ab - d^2) = (0, 0)$: alors

$$V = \mathrm{Vec}(1, 2ax + dy, dx + 2by, gx + hy + ax^2 + by^2 + dxy)$$

et les deux vecteurs $2ax + dy$ et $dx + 2by$ (dont l'un au moins n'est pas nul) sont linéairement dépendants, donc $\dim V = 3$.

4.2.8 L'étude menée en 4.2.7 permet de trouver tous les sous-espaces vectoriels de

$$V = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}xz \oplus \mathbb{R}yz \oplus \mathbb{R}z^2$$

qui sont invariants par translations. Soit W un sous-espace de V contenant au moins un terme de degré 2.

— si W contient un terme de la forme $z^2 + \cdots$, alors $W = V$.

— si W ne contient pas de terme de la forme $z^2 + \cdots$:

— si W contient un seul terme de la forme $xz + \cdots$: alors

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}(x^2 + fxy) \oplus \mathbb{R}(xy + fy^2) \oplus \mathbb{R}(xz + ax^2 + by^2 + dxy + fyz)$$

où $a, b, d, f \in \mathbb{R}$.

— si W contient au moins 2 termes de la forme $xz + \cdots$, i.e : $xz + fyz + \cdots$ et $xz + f'yz + \cdots$: alors

— si $f' \neq f$: $W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}xz \oplus \mathbb{R}yz$

— si $f' = f$: alors le seul sous-espace non déjà trouvé est

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}(xz + fyz)$$

où $f \in \mathbb{R}$.

— si W ne contient aucun terme de la forme $xz + \cdots$: alors

— si W contient un seul terme de la forme $yz + \cdots$: alors

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}(yz + ax^2)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

— si W contient au moins 2 termes de la forme $yz + \cdots$, i.e : $yz + ax^2 + \cdots$ et $yz + a'x^2 + \cdots$, avec $a' \neq a$: alors

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}yz$$

— si W ne contient aucun terme de la forme $yz + \cdots$: alors

— si W contient au moins un terme de la forme $z + \cdots$: alors

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(z + ax^2 + by^2 + dxy)$$

où $(a, b, d) \neq (0, 0, 0)$

ou

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(z + ax^2 + by^2 + dxy) \oplus \mathbb{R}(z + a'x^2 + b'y^2 + d'xy)$$

où $(a, b, d) \neq (a', b', d')$

ou

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(z + ax^2 + by^2 + dxy) \oplus \mathbb{R}(z + a'x^2 + b'y^2 + d'xy) \oplus \mathbb{R}(z + a''x^2 + b''y^2 + d''xy)$$

où les vecteurs $(a' - a, b' - b, d' - d)$ et $(a'' - a, b'' - b, d'' - d)$ sont linéairement indépendants.

ou

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy.$$

— si W ne contient aucun terme de la forme $z + \cdots$: alors

— si W contient au moins un terme de la forme $ax^2 + by^2 + dxy + \cdots$ où $4ab - d^2 \neq 0$: alors

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(ax^2 + by^2 + dxy)$$

où $(a, b, d) \neq (0, 0, 0)$

ou

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(ax^2 + by^2 + dxy) \oplus \mathbb{R}(a'x^2 + b'y^2 + d'xy)$$

où (a, b, d) et (a', b', d') sont linéairement indépendants.

ou

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy.$$

— si tous les termes $ax^2 + by^2 + dxy + \cdots$ de W vérifient $4ab - d^2 = 0$: alors

— si W contient au moins un terme de la forme $x^2 + \cdots$: alors

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(x + dy) \oplus \mathbb{R}(x^2 + d^2y^2 + 2dxy + gx + hy)$$

où $d, g, h \in \mathbb{R}$

ou W est un espace déjà trouvé précédemment.

— si W ne contient aucun terme de la forme $x^2 + \cdots$: alors

$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(y^2 + gx)$

où $g \in \mathbb{R}$

ou

$W = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}y^2$.

Enfin, les sous-espaces vectoriels non nuls de V ne contenant aucun terme de degré 2 sont : $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y$; $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(ax + by)$ où $(a, b) \neq (0, 0)$; $\mathbb{R}$.

En résumé, voici la liste complète des sous-espaces vectoriels non nuls de V qui sont invariants par translations : les lettres qui apparaissent désignent des nombres réels quelconques, sauf précision du contraire.

sous-espace de dimension 10 : V

sous-espace de dimension 9 : $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xz \oplus \mathbb{R}yz$

sous-espaces de dimension 8 :
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}(exz + fyz)$ où $(e, f) \neq (0, 0)$

sous-espaces de dimension 7 :
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}(x^2 + fxy) \oplus \mathbb{R}(xy + fy^2) \oplus \mathbb{R}(xz + ax^2 + by^2 + dxy + fyz)$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy \oplus \mathbb{R}(yz + ax^2)$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}z \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy$

sous-espaces de dimension 6 :
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(z + ax^2 + by^2 + dxy) \oplus \mathbb{R}(z + a'x^2 + b'y^2 + d'xy) \oplus \mathbb{R}(z + a''x^2 + b''y^2 + d''xy)$
où $(a' - a, b' - b, d' - d)$ et $(a'' - a, b'' - b, d'' - d)$ sont linéairement indépendants
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}x^2 \oplus \mathbb{R}y^2 \oplus \mathbb{R}xy$

sous-espaces de dimension 5 :
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(z + ax^2 + by^2 + dxy) \oplus \mathbb{R}(z + a'x^2 + b'y^2 + d'xy)$
où $(a, b, d) \neq (a', b', d')$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(ax^2 + by^2 + dxy) \oplus \mathbb{R}(a'x^2 + b'y^2 + d'xy)$ où (a, b, d) et (a', b', d') sont linéairement indépendants.

sous-espaces de dimension 4 :
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(z + ax^2 + by^2 + dxy)$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(ax^2 + by^2 + dxy)$ où $(a, b, d) \neq (0, 0, 0)$

sous-espaces de dimension 3 :
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(x + dy) \oplus \mathbb{R}(x^2 + d^2y^2 + 2dxy + gx + hy)$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}(y^2 + gx)$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y$

sous-espaces de dimension 2 : $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(ax + by)$ où $(a, b) \neq (0, 0)$

sous-espace de dimension 1 : $\mathbb{R}$

Annexe

Représentations indécomposables de dimension finie des groupes de Lie résolubles

Dans toute cette partie, G est un groupe de Lie résoluble connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$, notée $\mathcal{X}$, telle que :

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}X_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}X_n.$$

Notons

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{X}} : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow G \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto \exp(t_1 X_1) \dots \exp(t_n X_n). \end{aligned}$$

On note $\mathcal{XP}$ l'espace vectoriel des fonctions f de G dans $\mathbb{C}$ telles que $f \circ E_{\mathcal{X}}$ s'écrive $(\chi \circ E_{\mathcal{X}})p$ où p est un polynôme à n indéterminées à coefficients complexes, et χ un caractère de G.

Proposition 1

Soit L la représentation régulière gauche de G dans un sous-espace vectoriel de dimension finie V de $C^\infty(G)$. Alors V est contenu dans $\mathcal{XP}$.

Preuve. Notons pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$

$$u_j = \mathrm{d}L(X_j)$$

et soit $s_j + n_j$ la décomposition de Jordan de u_j, où s_j est diagonalisable et n_j est nilpotent. Comme les endomorphismes s_j et n_j commutent, il vient

$$\begin{aligned} L\big(\exp(t_j X_j)\big) &= \exp\big(t_j\, \mathrm{d}L(X_j)\big) \\ &= \exp(t_j u_j) \\ &= \exp(t_j s_j) \exp(t_j n_j) \end{aligned}$$

On choisit pour chaque j dans $\{1, \dots, n\}$, une base de Jordan pour u_j. Alors la matrice $M_j(t_j)$ de $L\big(\exp(t_j X_j)\big)$ dans cette base a des coefficients de la forme

$$a^j_{k,l}(s) = e^{\alpha^j_k t_j}\, p^j_{k,l}(t_j)$$

où

$$s = \exp(t_1 X_1) \dots \exp(t_n X_n)$$

et où $p^j_{k,l}$ est un polynôme et α^j_k une constante complexe qui est nulle pour j strictement supérieur à r, puisque $\mathrm{d}L(X)$ est nilpotent pour X dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ par le théorème de Lie. Finalement, pour toute base $(v_1, \dots, v_n)$ de V, chaque coefficient $a_{k,l}(s)$ de la matrice de $L(s)$ dans cette base est une somme finie de fonctions de la forme $e^{\alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r}\, p_{k,l}(t_1, \dots, t_n)$ où $p_{k,l}$ est une fonction polynôme. Donc $a_{k,l}$ appartient à $\mathcal{XP}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} v_j(s) &= L\big(s^{-1}\big) v_j(e) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\big(s^{-1}\big) v_k(e) \end{aligned}$$

et par conséquent v_j appartient à $\mathcal{XP}$.

Remarque

Si G est nilpotent, l'application exp est un difféomorphisme de G sur son algèbre de Lie. On a

$$\log\left(\prod_{j=1}^{n}\exp(t_jX_j)\right) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t_1,\dots,t_n)X_k$$

où chaque p_k est une fonction polynôme vérifiant

$$p_k(t_1,\dots,t_n) = \begin{cases} t_k + p'_k(t_1,\dots,t_{k-1}) & \text{si } k > r \\ t_k & \text{si } k \leq r \end{cases}$$

et réciproquement

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} s_kX_k\right) = \prod_{j=1}^{n}\exp\bigl(q_j(s_1,\dots,s_n)X_j\bigr)$$

où chaque q_j est une fonction polynôme vérifiant

$$q_j(s_1,\dots,s_n) = \begin{cases} s_j + q'_j(s_1,\dots,s_{j-1}) & \text{si } j > r \\ s_j & \text{si } j \leq r. \end{cases}$$

Ainsi

$$v_j\bigl(\exp(X)\bigr) = \sum_{k=1}^{n} e^{<l_k,X>}P_{k,j}(X), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Décomposition des racines

Soit (π, V) un G-module de dimension finie. On note

$$R_V = \left\{ \lambda \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \mid \exists v \in V\setminus\{0\} : \forall X \in \mathfrak{g} \; : \; \mathrm{d}\pi(X)v = \lambda(X)v \right\}.$$

Comme G est résoluble, R_V n'est pas vide par le théorème de Lie. Un élément de R_V s'appelle une *racine* de (π, V). On note

$$R = \left\{ \mu \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \mid \exists \mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\, \exists Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{a} \; : \; \forall X \in \mathfrak{g} \; : \; [X,Y] = \mu(X)\,Y \bmod \mathfrak{a}\right\}$$

l'ensemble des racines de $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{g})$. A une racine λ de (π, V) est associé le sous-espace propre de V, défini par

$$E_\lambda = \left\{ v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{g} \; : \; \mathrm{d}\pi(X)v = \lambda(X)v \right\}.$$

On fixe enfin

$$T \in \mathfrak{g} \setminus \bigcup_{\substack{\mu,\mu' \in R_V \cup R \\ \mu \neq \mu'}} \mathrm{Ker}(\mu - \mu').$$

Notons

$$V_\lambda = \left\{ v \in V \;\middle|\; \bigl(\mathrm{d}\pi(T) - \lambda(T)\,\mathrm{id}_V\bigr)^m(v) = 0 \right\}, \qquad \lambda \in R_V$$

et

$$\mathfrak{g}_\mu = \left\{ X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \;\middle|\; \bigl(\mathrm{ad}_T - \mu(T)\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}\bigr)^n(X) = 0 \right\}, \qquad \mu \in R$$

où m est la dimension de V et n celle de $\mathfrak{g}$. On obtient la décomposition de Jordan de V :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in R_V} V_\lambda.$$

Proposition 2

Soit (π, V) un G-module de dimension finie. Pour tout λ dans R_V et tout μ dans R, on a

$$\mathrm{d}\pi(\mathfrak{g}_\mu)(V_\lambda) \subset V_{\lambda+\mu}.$$

Preuve. Soient v dans V_λ et X dans $\mathfrak{g}_\mu$. On a

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{d}\pi(T) - (\lambda+\mu)(T)\,\mathrm{id}_V\big)\big(\mathrm{d}\pi(X)v\big)\\
&= \mathrm{d}\pi(T)\mathrm{d}\pi(X)v - (\lambda+\mu)(T)\mathrm{d}\pi(X)v\\
&= \mathrm{d}\pi\,[T, X\,]\,v + \mathrm{d}\pi(X)\mathrm{d}\pi(T)v - \lambda(T)\mathrm{d}\pi(X)v - \mu(T)\mathrm{d}\pi(X)v\\
&= \mathrm{d}\pi\Big(\big(\mathrm{ad}_T - \lambda(T)\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)X\Big)v + \mathrm{d}\pi(X)\big(\mathrm{d}\pi(T) - \mu(T)\,\mathrm{id}_V\big)v
\end{aligned}$$

et on démontre alors par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{d}\pi(T) - (\lambda+\mu)(T)\,\mathrm{id}_V\big)^k \mathrm{d}\pi(X)v\\
&= k! \sum_{p+q=k} \frac{1}{p!\,q!}\,\mathrm{d}\pi\Big(\big(\mathrm{ad}_T - \lambda(T)\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\big)^p X\Big)\big(\mathrm{d}\pi(T) - \mu(T)\,\mathrm{id}_V\big)^q v.
\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\big(\mathrm{d}\pi(T) - (\lambda+\mu)(T)\,\mathrm{id}_V\big)^{m+n}\mathrm{d}\pi(X)v = 0$$

puisque tous les termes de la somme précédente sont nuls. Par conséquent, $\mathrm{d}\pi(X)v$ appartient à $V_{\lambda+\mu}$.

Définition

Soit (π, V) un G-module de dimension finie. On dit que (π, V) est *indécomposable* si V ne peut pas s'écrire comme somme directe de deux sous-modules propres.

Exemple

Soit G le groupe "$e^{-a}x + b$" des bijections affines croissantes de $\mathbb{R}$. On identifie G à $\mathbb{R}^2$ muni de la loi de composition interne définie par :

$$(a, b)\cdot(a', b') = (a + a', e^{-a'}b + b').$$

L'algèbre de Lie de G est engendrée par deux vecteurs A et B tels que $[A, B]$ soit égal à B et en notant L la représentation régulière gauche de G dans $C^\infty(G)$, on vérifie que

$$\mathrm{d}L(A) = -\frac{\partial}{\partial a} \;\; ; \;\; \mathrm{d}L(B) = -e^{-a}\frac{\partial}{\partial b}.$$

Soit

$$V = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2$$

où v_1 et v_2 sont les fonctions C^∞ sur G définies par

$$v_1(a, b) = e^{-2a} \;\; ; \;\; v_2(a, b) = e^{-a}b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que

$$\mathrm{d}L(A)v_1 = 2v_1 \;\; ; \;\; \mathrm{d}L(A)v_2 = v_2 \;\; ; \;\; \mathrm{d}L(B)v_1 = 0 \;\; ; \;\; \mathrm{d}L(B)v_2 = -v_1$$

d'où l'on déduit que la forme linéaire qui à $xA + yB$ associe $2x$ est l'unique élément de R_V, et comme V est de dimension 2, le G-module (L, V) est indécomposable.

Corollaire 3

On suppose G nilpotent. Soit (π, V) un G-module indécomposable de dimension finie. Alors R_V est un singleton.

Preuve. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant nilpotente, $\mathfrak{g}_0$ est égal à $\mathfrak{g}$. Par la PROPOSITION 2, pour tout λ dans R_V, $\mathrm{d}\pi(\mathfrak{g})V_\lambda$ est alors contenu dans V_λ, c'est à dire que V_λ est un sous G-module de V. Comme (π, V) est indécomposable par hypothèse, R_V est un singleton d'après la décomposition de Jordan de V.

Proposition 4

Soient (π, V) un G-module de dimension finie et v un élément non nul de V. On identifie tout élément de $\mathfrak{g}$ à son image canonique dans l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Il existe un monôme $(X-\mu)^\alpha$ dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathrm{d}\pi(X-\mu)^\alpha v$ soit un vecteur propre commun. Ici

$$(X-\mu)^\alpha = \prod_j (X_j - \mu_j)^{\alpha_j}$$

pour certains X_j dans $\mathfrak{g}$, α_j dans $\mathbb{N}$ et μ_j dans $\mathbb{C}$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur la dimension de G. Supposons d'abord G de dimension 1. Soient T un élément non nul de $\mathfrak{g}$,

$$V = \bigoplus_{\lambda \in R_V} V_\lambda$$

la décomposition de Jordan de V, et

$$v = \sum_{\lambda \in R_V} v_\lambda$$

la décomposition de v suivant les V_λ. Comme v est non nul par hypothèse, il existe une racine λ_0 dans R_V telle que v_{λ_0} soit non nul. Soit

$$u = \prod_{\substack{\lambda \neq \lambda_0 \\ \lambda \in R_V}} \big(\mathrm{d}\pi(T) - \lambda\big)^m \big(\mathrm{d}\pi(T) - \lambda_0\big)^k \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$$

où m désigne la dimension de V et k un certain entier. Alors

$$\mathrm{d}\pi(u)v = \prod_{\substack{\lambda \neq \lambda_0 \\ \lambda \in R_V}} \big(\mathrm{d}\pi(T) - \lambda\big)^m \big(\mathrm{d}\pi(T) - \lambda_0\big)^k v_{\lambda_0}$$

est un vecteur propre pour un certain k.

Si la dimension de G est strictement supérieure à 1, comme $\mathfrak{g}$ est résoluble, il existe un hyperplan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ qui est alors automatiquement un idéal de $\mathfrak{g}$. L'hypothèse de récurrence fournit un élément

$$a = (A - \mu_1)^p \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$$

tel que

$$v_1 = \mathrm{d}\pi(a)v$$

soit un vecteur propre pour une certaine racine ν de $\mathfrak{a}$.

Soit Y un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{a}$. Il est montré dans [8] que pour tout élément B appartenant à $\mathfrak{a}$, $\nu[B,Y]$ est nul. Ainsi V_ν est $\mathrm{d}\pi(Y)$-invariant et donc l'élément $\mathrm{d}\pi\big((Y-\mu)^\alpha\big)(v_1)$, noté v_2, est un vecteur propre de $\mathrm{d}\pi(Y)$ pour un certain α et un certain μ. Par suite, v_2 est un vecteur propre de $\mathrm{d}\pi(\mathfrak{g})$.

Proposition 5

Soit (π, V) un G-module de dimension finie. On note

$$E_V = \sum_{\lambda \in R_V} E_\lambda$$

et d la dimension de E_V. Il existe une application linéaire injective équivariante de V dans $\sum_{j=1}^{d} C^\infty(G)$.

Preuve. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ une base de E_V^*. On prolonge ces formes linéaires à V. Soit i l'application de V dans $\sum_{j=1}^{d} C^\infty(G)$ définie par

$$i(v)(s_1, \ldots, s_d) = \big(<\varphi_1, \pi\big(s_1^{-1}\big)v>, \ldots, <\varphi_d, \pi\big(s_d^{-1}\big)v>\big).$$

Alors i est linéaire et équivariante. Soit v dans $\mathrm{Ker}\, i$. Alors pour tout j dans $\{1\ldots, d\}$ et tout s dans G, $<\varphi_j, \pi(s)v>$ est nul, donc pour tout u dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$

$$<\varphi_j, \mathrm{d}\pi(u)v> = 0. \tag{1}$$

Supposons v non nul. Par la PROPOSITION 4, il existe un élément u dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathrm{d}\pi(u)v$ soit non nul et appartienne à E_V. Comme $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ est une base de E_V^*, la relation (1) montre alors que $\mathrm{d}\pi(u)v$ est nul, ce qui est absurde. Donc v est nul et i est injectif.

Proposition 6

Soit (π, V) un G-module de dimension finie.

1) *Si E_V est de dimension 1, alors (π, V) est indécomposable.*

2) *Le module (π, V) est indécomposable ssi (π^*, V^*) l'est, où*

$$\pi^*(s) = \pi\big(s^{-1}\big)^t.$$

Preuve.

1) Soit $V_1 + V_2$ une décomposition de V en somme de deux sous G-modules non nuls. Comme G est résoluble, pour tout i dans $\{1, 2\}$ il existe une racine λ_i dans R_{V_i} donc E_{λ_i} est au moins de dimension 1, et E_{V_i} également a fortiori. Or E_V est de dimension 1 par hypothèse et E_{V_i} est un sous-espace vectoriel de E_V, par suite E_{V_i} et E_V sont égaux. Donc $E_{V_1} \cap E_{V_2}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Comme $E_{V_1} \cap E_{V_2}$ est contenu dans $V_1 \cap V_2$, le sous-espace $V_1 \cap V_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et la somme $V_1 + V_2$ n'est pas directe.

2) Supposons (π, V) indécomposable et soit $V_1^* \oplus V_2^*$ une décomposition de V^* en somme directe de deux sous G-modules. Pour i dans $\{1, 2\}$, soit

$$V_i = \bigcap_{\varphi \in V_i^*} \mathrm{Ker}\, \varphi.$$

Alors V_i est un sous G-module de V et V est somme directe de V_1 et V_2. Comme (π, V) est indécomposable, il en résulte que V_1 ou V_2 est réduit à $\{0\}$. Si V_1 est réduit à $\{0\}$ alors V_2^* l'est aussi, et de même, si V_2 est réduit à $\{0\}$ alors V_1^* l'est également. On a ainsi prouvé que (π^*, V^*) est indécomposable.

Proposition 7

On suppose G nilpotent.

1) *Soit χ un caractère de G. Alors tout sous-module de dimension finie de*

$$\chi\mathcal{P}(G) = \{\, \chi P : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid P \in \mathcal{P}(G)\,\}$$

est un G-module indécomposable.

2) *Tout sous-module indécomposable de dimension finie de $C^\infty(G)$ est contenu dans $\chi\mathcal{P}(G)$ pour un certain χ.*

Preuve.
1) Il existe une fonction *degré* deg de $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ dans $\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$ vérifiant pour tous p dans $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ et X dans $\mathfrak{g}$:

$$\deg\big(\mathrm{d}\pi(X)p\big) < \deg(p).$$

Alors pour tout p dans $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$:

$$\big(\mathrm{d}\pi(X) - \mathrm{d}\chi(X)\,\mathrm{id}_V\big)\big(\chi(p\circ\log)\big) = \chi\big(\mathrm{d}\pi(X)\big)(p\circ\log)$$

donc l'opérateur $\mathrm{d}\pi(X) - \mathrm{d}\chi(X)\,\mathrm{id}_V$ est localement nilpotent. Ainsi, tout sous-module V de dimension finie de $\chi\mathcal{P}(G)$ admet le vecteur propre χ.

2) Soit V un sous-module indécomposable de dimension finie de $C^\infty(G)$. Par la PROPOSITION 1, V est contenu dans $\chi\mathcal{P}(G)$ et par le COROLLAIRE 3, R_V contient un unique point χ. Soit $\sum_j \chi_j q_j$ un élément de V, noté v, où les χ_j sont des caractères distincts de G et les q_j des éléments de $\mathcal{P}(G)$. Pour chaque j, on peut trouver un élément u_j dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tel que $\mathrm{d}\pi(u_j)v$ soit égal à χ_j. Ainsi, pour tout j, le caractère χ_j appartient à $\chi\mathcal{P}(G)$ et nécessairement, χ_j et χ sont égaux.

Exemple

Prenons pour G le groupe de Heisenberg H_1 défini en 4.2.6 et gardons les notations introduites dans ce point. Soit V le module cyclique engendré par l'élément (z, xy), noté w, dans $C^\infty(H_1)\oplus C^\infty(H_1)$. On a :

$$d_1 w = \left(-\frac{y}{2}, -y\right) \;;\; d_2 w = \left(\frac{x}{2}, -x\right) \;;\; d_3 w = (-1, 0)\;;$$

$$d_1 d_2 w = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

En notant w_1, w_2, w_3, w_4 ces éléments, on a alors

$$V = \mathrm{Vec}\,(w, w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Ainsi (L, V) est indécomposable et E_V est engendré par w_3 et w_4, donc est de dimension 2.

Bibliographie

[1] B. BEKKA : "The projection theorem for spectral sets". Monatshefte für Mathematik 101, 1–10 (1986)

[2] R. BLATTNER : "On induced representations". Amer. J. Math. 83, 79–98 (1961)

[3] J. BOIDOL & H. LEPTIN & J. SCHÜRMAN & D. VAHLE : "Raüme primitiver Ideale von Gruppenalgebren". Math. Ann. 236, 1–13 (1978)

[4] L. CORWIN & F.P. GREENLEAF : "Representations of nilpotent Lie groups and their applications. Part 1 : Basic theory and examples". Cambridge studies in advanced mathematics p.19 (1990)

[5] S. DHIEB & J. LUDWIG : "Caractérisation des convoluteurs de Schwartz des groupes de Lie nilpotents". Journal of functional analysis No. 1, Vol. 144 p.50 (1997)

[6] J. DIXMIER : "Opérateurs de rang finis dans les représentations unitaires". Inst. hautes études scientifiques, Public. Maths 6, (1960)

[7] J. DIXMIER : "Les C^*-algèbres et leurs représentations". Cahiers Scientifiques, Fasc.XXIX, p.18 (1964)

[8] J. DIXMIER : "Algèbres enveloppantes". Cahiers Scientifiques, Fasc.XXXVII, (1974)

[9] W. HAUENSCHILD & J. LUDWIG : "The injection and the projection theorem for spectral sets". Monatshefte für Mathematik 92, 167–177 (1981)

[10] E. HEWITT & K. ROSS : "Abstract harmonic analysis". Vol. 1&2 (1970)

[11] E. HILLE & R.S PHILLIPS : "Functional analysis and semi-groups". American Mathematical Society, Providence (1957)

[12] A. HULANICKI : "A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups". Stud. Math. 78, 253–266 (1984)

[13] A. HULANICKI : "Subalgebra of $L^1(G)$ associated with Laplacian on a Lie group". Colloq. Math. 31, 259–287 (1974)

[14] I. KAPLANSKY : "Primary ideals in group algebras", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, t. XXXV, 133–136 (1949)

[15] A. KARRASS & W. MAGNUS & D. SOLITAR : "Combinatorial group theory". Theorem 5.19, (1966)

[16] A. KIRILLOV : "Unitary representations of nilpotent Lie groups", Russ. Math. Surveys 17 (1962), 53–104, Uspekhi Math. Nauk 17, 57–110 p.36, 37, 77, 191 (1962)

[17] H. LEPTIN : "Ideal theory in group algebras of locally compact groups". Inventiones maths 31, 259–278 (1976)

[18] H. LEPTIN & J. LUDWIG : "Unitary representation theory of exponential Lie groups". De Gruyter expositions in mathematics 18, p.2 Berlin (1994)

[19] J. LUDWIG : "Polynomial growth and ideals in group algebras". Manuscripta Math 30, 215–221 (1980)

[20] J. LUDWIG : "On primary ideals in the group algebra of a nilpotent Lie group" Math. Ann. 262, 287–304 (1983)

[21] J. LUDWIG : "On the spectral synthesis problem for points in the dual of a nilpotent Lie group". Arkiv för mathematik Vol 21, No. 1,127–144 (1983)

[22] J. LUDWIG : "Minimal C^*-dense ideals and algebraically irreducible representations in the Schwartz algebra of a nilpotent Lie group". LNM 1359, 209–217 Berlin - Heidelberg - New-York (1988)

[23] J. LUDWIG : "Toplologically irreducible representations of the Schwartz algebra of a nilpotent Lie group". Arch. Math. Vol. 54, 284–292, p.289 (1990)

[24] J. LUDWIG : "Hull-minimal ideals in the Schwartz algebra of the Heisenberg group". Studia Mathematica 130 (1), 77–98 (1998)

[25] J. LUDWIG & C. MOLITOR-BRAUN : "A restriction theorem for ideals in the Schwartz algebra of a nilpotent Lie group". Arch. Math, Vol. 67, 199–210 (1996)

[26] J. LUDWIG & G. ROSENBAUM & J. SAMUEL : "The elements of bounded trace in the C^*-algebra of a nilpotent Lie group". Inventiones Math. 83, 167–190 (1986)

[27] H. REITER : "Classical harmonic analysis and locally compact groups" (1968)

[28] I. SEGAL : "The group algebra of a locally compact group". Trans. Amer. Math. Soc, t. LXI, 69–105 (1947)

[29] N. VAROPOULOS : "Analysis and geometry on groups". Cambridge University Press, Lemma IV.5.1 p.51 (1992)

Notations

A	sous algèbre de Banach de $L^1(G)$, 1.1.16
A'	dual topologique de l'espace de Banach A, 1.3.2
ad	représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, 3.3.2
Ad*	représentation coadjointe du groupe de Lie nilpotent G, i
$A_i(X,Y)$	élément de $\mathfrak{g}$ défini par récurrence à partir de $A_1(X,Y)$, 3.2.5
$A'_i(X,Y)$	élément de $\mathfrak{g}$ défini par récurrence à partir de $A_1(X,Y)$, 3.2.5
B	boule unité de $\mathfrak{g}$, une norme euclidienne sur $\mathfrak{g}$ étant fixée, 3.3.6
$\mathcal{B}$	ensemble des voisinages compacts symétriques de l'élément neutre d'un groupe localement compact G, 2.1.4
B_ℓ	forme bilinéaire antisymétrique associée à la forme linéaire ℓ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, i
$\mathcal{C}(G)$	espace vectoriel des fonctions continues d'un groupe topologique G dans $\mathbb{C}$, 2.1.2
$\mathcal{C}^b(G)$	espace vectoriel des fonctions continues bornées d'un groupe topologique G dans $\mathbb{C}$, 2.1.2
$\mathcal{C}_c^\infty(G)$	espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur le groupe de Lie G, 4.1.13
$\mathcal{C}_\rho(G)$	produit de convolution de $\mathcal{K}(G)$ par $\operatorname{Ker}\operatorname{ind}_H^G \rho$, 2.2.1
χ_ℓ	caractère unitaire du groupe de Lie G défini par une forme $\mathbb{R}$-linéaire réelle ℓ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'annulant sur les commutateurs de $\mathfrak{g}$, 1.1.18
$\chi_{\ell,M}$	caractère unitaire de M associé à une polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ, i
deg	fonction degré sur l'espace des polynômes sur un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, 1.2.6
δ	quotient de $\overline{w}$ par $\underline{w}$, 3.1.7
Δ	fonction module de G – resp. de N –, 2.1.9
$\mathcal{D}(G)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur le groupe de Lie G, 1.1.15
∂P	dérivée suivant le polynôme P, 1.2.10
d_U	distance sur un groupe localement compact associée à un voisinage compact symétrique U de l'élément neutre, 1.1.2
e	élément neutre de G, iii
e	application extension, 2.1.10
$e(J)$	adhérence dans $L^1_w(G)$ du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{K}(G) * J$, 2.1.10
E	ensemble des noyaux des $*$-représentations topologiquement irréductibles de $L^1_w(G)$ dont la restriction à N annule $k(F)$, 2.3.4
e_F	restriction de l'application extension e à $\mathcal{J}^G(F)$, 2.3.2
ε_U	approximation de l'unité dans $L^1_w(G)$, 2.1.4
F	partie fermée G-invariante de $\operatorname{Prim}^* L^1_{w_{\vert N}}(N)$, 2.3.2
F	idéal bilatère de $L^1_w(G)$, 4.1.11
$\check{f}$	fonction sur un groupe G qui à s associe $f(s^{-1})$, 1.1.7
$\widehat{f}$	transformée de Fourier de f, 1.2.9

$f * X$	dérivée de la fonction f à droite dans la direction X, 1.1.15
$f * X^\alpha$	dérivée de la fonction f à droite dans la direction X^α, 1.1.15
$f_{\vert N}$	restriction d'une fonction f à une partie N, 2.1.2
${}_sf$	translatée de la fonction f à gauche par l'élément s d'un groupe G, 1.1.19
f_s	translatée de la fonction f à droite par l'élément s d'un groupe G, 1.1.19
$\widehat{G}$	ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires continues irréductibles de G, i
G_1	groupe dérivé de G, 3.3.11
$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$	algèbre des commutateurs de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, 1.1.18
$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$	algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$, A
$\mathfrak{g}^*$	espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$, i
$\mathfrak{g}^\circ$	orthogonal de $\mathfrak{g}$ pour la forme bilinéaire B_ℓ, i
$\mathfrak{g}_0$	algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, 3.2
$\mathfrak{g}_m$	espace vectoriel réel engendré par l'ensemble des $[X,Y]$ où X appartient à $\mathfrak{g}$ et Y à $\mathfrak{g}_{m-1}$, 3.2
$g * P\chi_\ell$	forme linéaire continue sur A définie par un élément P de $\mathcal{P}_\ell$ et une fonction g de A, 1.1.25
H_n	groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$, 3.4.1
$\mathfrak{h}_n$	algèbre de Heisenberg de dimension $2n+1$, 3.4.1
$\mathcal{H}(\rho)$	espace de Hilbert complexe, espace de la représentation ρ, 2.2.1
$h(S)$	enveloppe d'une partie S d'une algèbre de Banach A, dense dans une $*$-algèbre de Banach B, 1.2.2
I_c	espace vectoriel engendré par $I * \mathcal{K}(G)$, 2.1.2
$\mathcal{I}^G$	ensemble des idéaux bilatères fermés G-invariants de $L^1_{w_{\vert N}}(N)$, 2.1.10
$\mathcal{I}^{L^\infty(G/N)}$	ensemble des idéaux bilatères fermés $L^\infty(G/N)$-invariants de $L^1_w(G)$, 2.1.12
$\mathrm{ind}_H^G\,\rho$	représentation de G induite par la représentation ρ de H, 2.2.1
I°	espace vectoriel des formes linéaires continues sur $L^1_{w_{\vert N}}(N)$ qui annulent l'idéal bilatère fermé I de $L^1_{w_{\vert N}}(N)$, 2.2.2
$I(W)$	sous-espace vectoriel de A – resp. $L^1_w(G)$ – formé des fonctions annulées par $W\chi_\ell$, – resp. $W\pi_\ell$ – 1.1.23, 4.1.7
$\mathcal{J}(C)$	ensemble des idéaux bilatères fermés d'une algèbre de Banach A, dense dans une $*$-algèbre de Banach B dont l'enveloppe est une partie fermée C de $\mathrm{Prim}^*(A)$, 1.3.4
$j(C)$	plus petit idéal d'une algèbre de groupe d'enveloppe C, 1.3.1
$\mathcal{J}(\ell)$	ensemble des idéaux bilatères fermés de A – resp. $L^1_w(G)$ – dont l'enveloppe est $\{\mathrm{Ker}\,\chi_\ell\}$ – resp. $\{\mathrm{Ker}\,\pi_\ell\}$ –, 1.3.4 – resp. 4.1.1 –
$j(\ell)$	idéal minimal de A – resp. $L^1_w(G)$ – d'enveloppe $\{\mathrm{Ker}\,\chi_\ell\}$ – resp. $\{\mathrm{Ker}\,\pi_\ell\}$ –, 1.3.1, – resp. 4.1.1 –
$\mathcal{J}^G(F)$	ensemble des idéaux bilatères fermés G-invariants de $L^1_{w_{\vert N}}(N)$ dont l'enveloppe est une partie fermée G-invariante F de $\mathrm{Prim}^*\,L^1_{w_{\vert N}}(N)$, 2.3.2
$\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$	ensemble des idéaux bilatères fermés $L^\infty(G/N)$-invariants de $L^1_w(G)$ dont l'enveloppe est une partie fermée $L^\infty(G/N)$-invariante E de $\mathrm{Prim}^*\,L^1_w(G)$, 2.3.3

K_3	groupe de Lie nilpotent de pas 3 défini en 3.4.2
K_4	groupe de Lie nilpotent de pas 4 défini en 3.4.4
$\mathfrak{k}_3$	algèbre de Lie nilpotente de pas 3 définie en 3.4.2
$\mathfrak{k}_4$	algèbre de Lie nilpotente de pas 4 définie en 3.4.4
$k(C)$	noyau d'une partie C de $\mathrm{Prim}^*(A)$, 1.2.2
$\mathcal{K}(G)$	espace vectoriel des fonctions continues à support compact sur un groupe localement compact G, 2.1.2
$\mathcal{K}_U(G)_+$	ensemble des fonctions positives continues sur le groupe localement compact G à support compact inclus dans U, 2.1.4
ℓ	forme $\mathbb{R}$-linéaire réelle sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'annulant sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, 1.1.18, 4.1
λ	mesure de Haar à gauche positive non nulle sur le groupe localement compact G, 2
$L_s f$	translatée de la fonction f à gauche par l'élément s d'un groupe G, 1.1.19
$L^1_w(G)$	algèbre des fonctions intégrables pour le poids w, 1.1.10
$L^1_w(G)'$	dual topologique de $L^1_w(G)$, 1.4.3
$L^\infty_w(G)$	espace vectoriel des fonctions sur G essentiellement bornées par w, 1.4.2
M	exponentielle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$, i
$\mathfrak{m}$	polarisation de $\mathfrak{g}$ en ℓ, i
n	pas de nilpotence de $\mathfrak{g}$, 3.2
$\mathfrak{n}$	radical de la forme bilinéaire B_ℓ, 4.1
N_3	groupe de Lie nilpotent de pas 3 constitué des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients réels, unipotentes, 3.4.3
$\mathfrak{n}_3$	algèbre de Lie nilpotente de pas 3 constituée des matrices carrées d'ordre 4, à coefficients réels, strictement triangulaires supérieures, 3.4.3
$\Vert\ \Vert_w$	norme dans l'algèbre $L^1_w(G)$, 1.1.10
$\Vert\ \Vert$	norme dans l'algèbre A ou $L^\infty_w(G)$, 1.1.16, 1.4.2
$O(\ell)$	orbite de ℓ sous l'action coadjointe du groupe de Lie nilpotent simplement connexe G, 4.1
ω	poids associé à un sous-espace vectoriel non nul de dimension finie de $\mathcal{P}(G)$, invariant par translations, 4.2.1
$\pi_{\ell,M}$, π_ℓ	représentation unitaire continue irréductible de G associée à ℓ par la bijection de Kirillov, i
$P\chi_\ell * g$	forme linéaire continue sur A définie par un élément P de $\mathcal{P}_\ell$ et une fonction g de A, 1.1.25
$\mathcal{P}(G)$	algèbre des polynômes sur G, 1.1.14
$\mathcal{P}_\ell$	espace de polynômes, 1.1.18
p_N	semi-norme sur l'espace de Schwartz, 1.1.15
$\mathcal{P}_N$	espace de polynômes, 1.1.20 2)
$\mathcal{P}_w(G)$	espace vectoriel des polynômes essentiellement bornés par un poids w, 1.4.4
$\mathrm{Prim}(A)$	ensemble des idéaux primitifs de l'algèbre de Banach A, 1.2.1
$\mathrm{Prim}^*(A)$	ensemble des restrictions à une algèbre de Banach A des noyaux des $*$-représentations topologiquement irréductibles de B dans des espaces de Hilbert, 1.2.2
ψ_g	fonction continue sur le groupe localement compact G attachée à une fonction g de $\mathcal{K}(G)$ et une fonction continue ψ de $L^\infty_{w\vert_N}(N)$, 2.2.2

r	application restriction, 2.1.12
r_E	restriction de l'application r à $\mathcal{J}^{L^\infty(G/N)}(E)$, 2.3.3
$\mathrm{Rad}\, B_\ell$	radical de la forme bilinéaire B_ℓ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, 4.1
$R(I)$	adhérence de $I_{c\|_N}$ dans $L^1_{w\|_N}(N)$, 2.1.7
$R_s f$	translatée de la fonction f à droite par l'élément s d'un groupe G, 1.1.19
$\mathcal{S}(G)$	espace de Schwartz sur le groupe de Lie G, 1.1.15
$\mathcal{T}\mathcal{P}_\ell$	ensemble des sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathcal{P}_\ell$ invariants par translations, 1.3.7
τ_U	fonction sur un groupe localement compact connexe associée à un voisinage compact U de l'élément neutre, 1.1.2
U	exponentielle de la boule unité de $\mathfrak{g}$, une norme euclidienne sur $\mathfrak{g}$ étant fixée, 3.3.6
u^x	conjuguée de la fonction u sur un sous-groupe normal N d'un groupe G par l'élément x de G, 2.1.2
$\|\alpha\|$	longueur du multi-indice α, 1.1.15
V_i	sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{g}_i$ dans $\mathfrak{g}_{i-1}$, 3.3.1
$V(J)$	sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_\ell$ – resp. $\mathcal{P}_w(G)$ – associé à un idéal bilatère fermé J de A – resp. $L^1_w(G)$ –, 1.3.5, 4.1.9
$\mathfrak{V}_G(s)$	ensemble des voisinages compacts de s dans G, 1.1.1
W	sous-espace vectoriel non nul de $\mathcal{P}_\ell$ invariant par translations, 1.1.23
W_ℓ	produit ponctuel de W par χ_ℓ, 1.1.23
w	poids, 1.1.6
$\overline{w}$	limite supérieure du poids w, 3.1.7
$\underline{w}$	limite inférieure du poids w, 3.1.7
w_G	poids sur un groupe localement compact connexe G attaché à un voisinage compact fixé de l'élément neutre dans G, 3.3.6
w_{G_1}	poids sur le groupe localement compact connexe G_1 attaché à un voisinage compact fixé de l'élément neutre dans G_1, 3.3.11
w_U	poids sur un groupe localement compact connexe G attaché à un voisinage compact U de e dans G, 1.1.9
$X * f$	dérivée de la fonction f à gauche dans la direction X, 1.1.15
$X^\alpha * f$	dérivée de la fonction f à gauche dans la direction X^α, 1.1.15
$\{X, Y\}$	commutateur $X \cdot Y \cdot (-X) \cdot (-Y)$ dans $\mathfrak{g}$, 3.3.1

Index terminologique

P

R

S

T

V