THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

UFR M.I.M.

SPECIALITE MATHEMATIQUES

par

A. Salma MINT ELHACEN

SUR LES REPRESENTATIONS ALGEBRIQUEMENT IRREDUCTIBLES DES GROUPES DE LIE EXPONENTIELS ET NILPOTENTS

Soutenue le 25 Juin 1999 devant la Commission d'Examen

D. Arnal	Examinateur
B. Bekka	Examinateur
G. Grélaud	Rapporteur
J. Ludwig	Directeur de recherche
D. Manchon	Rapporteur
G. Ratcliff	Rapporteur
A. Roux	Examinateur

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

UFR M.I.M.

SPECIALITE MATHEMATIQUES

par

A. Salma MINT ELHACEN

SUR LES REPRESENTATIONS ALGEBRIQUEMENT IRREDUCTIBLES DES GROUPES DE LIE EXPONENTIELS ET NILPOTENTS

Soutenue le 25 Juin 1999 devant la Commission d'Examen

D. Arnal	Examinateur
B. Bekka	Examinateur
G. Grélaud	Rapporteur
J. Ludwig	Directeur de recherche
D. Manchon	Rapporteur
G. Ratcliff	Rapporteur
A. Roux	Examinateur

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean Ludwig qui m'a dirigée dans mes recherches avec beaucoup de compétence, d'enthousiasme et de disponibilité.

Messieurs et Madame les Professeurs Dominique Manchon, Gérard Grélaud et Gail Ratcliff ont spontanément accepté de mettre leur compétence au service du jury et d'être rapporteurs de ma thèse. Leur accord m'honore et je les en remercie vivement.

Un grand merci revient aussi à Messieurs les Professeurs Didier Arnal, Bachir Bekka et André Roux, membres du Jury pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à tous ceux qui, de près comme de loin m'ont apporté leur soutien pour la réalisation de cette thèse dans d'excellentes conditions.

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne
ne sait pourquoi.

A. Einstein

A la mémoire de mon père.

0. Introduction

Une des préoccupations de l'analyse harmonique consiste à étudier differentes algèbres de fonctions, d'en caractériser certains idéaux (idéaux premiers, idéaux primitifs, idéaux maximaux) et d'en préciser les divers types de représentations (représentations algèbriquement irréductibles, topologiquement irréductibles, unitaires irréductibles). Pour les groupes de Lie nilpotents, connexes, simplement connexes, cette tâche est déjà bien avancée en ce qui concerne l'algèbre de groupe $L^1(G)$, et l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(G)$.
En 1960 la méthode des orbites de Kirillov a donné une paramétrisation concrète des représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents. En effet, étant donné un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le groupe G agit sur le dual de son algèbre de Lie au moyen de la représentation coadjointe. Kirillov ([17]) a montré qu'il existe une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence des représentations unitaires, irréductibles de G et leurs orbites dans l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Sa méthode a permis en 1965 à Bernat de déterminer le dual unitaire des groupes de Lie résolubles exponentiels ([3], [4]). Puis Pukanszky et Vergne ([30], [4]) ont résolu les problèmes concernant les polarisations qui restaient encore ouverts.
Ce travail est constitué de deux parties différentes. La première partie consiste à étudier une classe de représentations irréductibles particulièrement interéssantes, celle des représentations algébriquement irréductibles (ou simples) de l'algèbre $L^1(G)$, où G est un groupe de Lie résoluble exponentiel. Pour ceci, soit $\mathfrak{n}$ le nilradical de $\mathfrak{g}$, $N = \exp(\mathfrak{n})$ le sous-groupe associé. Soit (T, V) un $L^1(G)$-module simple. Alors $\ker(T)_{/N}$ est un idéal G-premier de $L^1(N)$. En plus il existe une

représentation unitaire topologiquement irréductible τ de N telle que

$$\ker(T)_{/N} = \ker(G \cdot \tau) \text{ ([29])}.$$

où $G \cdot \tau$ est la G-orbite de τ dans $\hat{N}$. Ici le noyau de l'orbite $G \cdot \tau$ étant par définition l'intersection des noyaux des représentations unitaires irréductibles correspondant aux points de l'orbite. Soit H un sous-groupe de G contenant N; pour étudier les représentations algébriquement irréductibles de $L^1(G)$, nous nous ramenons à une représentation unitaire topologiquement irréductible γ de H, qui est déterminée univoquement par (T, V), c'est à dire que :

$$\text{Ann } V_{L^1(H)} = \ker(T)_{/L^1(H)} = \ker(\gamma).$$

Ainsi on peut étudier les représentations algébriquement irréductibles de l'algèbre $L^1(G)/L^1(G) * \ker(\gamma)$, qui est isomorphe à l'algèbre $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$, et cela se réalisera en regardant les représentations algèbriquement irréductibles sur une algèbre $P * L^1(G/H, L^1(G)/\ker(\gamma)) * P$ plus petite, où $\gamma(P)$ est un projecteur de rang un .

Nous montrerons que cette algèbre est isomorphe à une algèbre $L^1(G/H, \omega) \cong L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ commutative avec un certain poids, et ceci nous ramène à regarder nos représentations sur cette algèbre ; elle sont alors des caractères χ_T pas nécessairement uinitaires (D'aprés le lemme de Schur). Par conséquent nous étudions les extensions possibles à l'algèbre $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$ toute entière.

Pour obtenir toutes les représentations algébriquement irréductibles de $L^1(G)$ nous ne pouvons pas nous contenter de l'induction unitaires de caractères unitaires. Nous définissons donc de nouvelles représentations $\pi^l_{\bar{p}}$, $\bar{p}$ est un multi-indice et $l \in \mathfrak{g}^*$ de la façon suivante:

Soit $q = l_{/\mathfrak{n}}$. Décomposons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la façon suivante:

$$\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$$
$$\mathfrak{g}(q) + \mathfrak{n} = \mathfrak{w} \oplus (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n})$$
$$= \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n}.$$

Donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{g}(q) + \mathfrak{n}) = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{u}.$$

Choisissons une polarisation $\mathfrak{p}^0$ en q $\mathfrak{g}(q)$-invariante, par exemple une polarisation de Vergne définie à l'aide d'une suite de Jordan-Hölder $\mathfrak{g}(q)$-invariante ([19]). Soit alors $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{w}$ un sous-espace isotrope maximal pour l dans $\mathfrak{w}$, c'est à dire que:

$$< l, [\mathcal{Y}, \mathcal{Y}] >= 0.$$

Alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{u} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^o$ est une polarisation de Pukanszky de l dans $\mathfrak{g}$ ([2]). Soit

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \supset \mathfrak{n}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{n}_k \supset \mathfrak{n}_{k+1}$$

une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{n}$. Soit $I = \{i \mid \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{n}_i \neq \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{n}_{i+1}; i = 0, \cdots, k\} = \{0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m \leq k\}$. Posons $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{n}_{i_j}$, $j = 1, \cdots, m+1$ et $\mathfrak{p}_{m+1} = \mathfrak{p}^0$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{n}$. Choisissons un espace $\mathfrak{v}_j \subset \mathfrak{p}_j$ tel que

$$\mathfrak{v}_j \oplus \mathfrak{p}_{j+1} = \mathfrak{p}_j \qquad \forall j = 1, \cdots, m.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{m} {}^{\oplus}\, \mathfrak{v}_j \oplus \mathfrak{p}^0 = \mathfrak{n}.$$

En plus

$$\phi : \sum_{j=1}^{m} {}^{\oplus}\, \mathfrak{v}_j \longrightarrow N/P^0$$
$$(\mathfrak{v}_1, \cdots, \mathfrak{v}_m) \longrightarrow \exp(\mathfrak{v}_1) \cdots \exp(\mathfrak{v}_m) \cdot \mathfrak{p}^0$$

est un difféomorphisme ([30]). Posons

$$\mathfrak{g}_j = \mathfrak{u} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_j, \quad \text{pour } j = 1, \cdots, m.$$

Alors

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{u} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{u} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{n}.$$

et

$$\mathfrak{g}_{m+1} = \mathfrak{u} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_{m+1} = \mathfrak{u} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^0 = \mathfrak{p}.$$

Pour définir nos représentations $\pi_{l,\bar{p}}$, nous allons procéder à une induction "non unitaire" (en général).
Soit $\bar{p} = (p_1, \cdots p_m) \in [1, \infty]^m$ un multi-indice. On pose

$$\triangle^{\frac{1}{\bar{p}}}(\cdot) = \prod_{j=1}^{m} \triangle_j^{\frac{1}{p_j}}(\cdot)$$

où $\triangle_j$ est la fonction module de $G_j = \exp(\mathfrak{g}_j)$. On définit les représentations $\pi_j = \mathrm{ind}_{G_{j+1}}^{G_j}(\pi_{j+1}, p_j)$, pour $j = 1, \cdots, m$. Alors $\pi_1^{\bar{p}}$ est une représentation de $G_1 = U \cdot Y \cdot N$. Soit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\bar{p}}(G, l) = \{\xi : G \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \ \xi \text{ continu à support} \\ \text{compact modulo } P \text{ tel que } \xi(gp) = \overline{\chi_l(p)} \cdot \triangle^{\frac{1}{\bar{p}}}(p)\xi(g), \\ \forall g \in G, \ p \in P \text{ et} \\ \|\xi\|_{\bar{p}}^G = (\int_{G/G_1} |(| \int_{G_1/G_2} \cdots (\int_{G_m/P^1} |\xi(g \cdot \exp(v_1) \cdots \\ \exp(v_m)|^{p_m} dv_m)^{\frac{1}{p_m}} \cdots |^{p_1} dv_1)^{\frac{1}{p_1}}|^2 \, dg)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.\end{aligned}$$

On définit la représentation $\pi_{\bar{p}}^l = \mathrm{ind}_{G_1}^G(\pi_1^{\bar{p}}, 2)$. Içi l'espace $\mathcal{H}_{\pi_{\bar{p}}^l} \equiv L^{\bar{p}}(G, l)$ de la représentation $\pi_{\bar{p}}^l$ est le completé de $\mathcal{E}_{\bar{p}}(G, l)$ pour la norme $\| \cdot \|_{\bar{p}}$.
Nous allons montrer que ces représentations décrivent toutes les représentations algébriquement de $L^1(G)$.

Les deux premiers chapitres de notre étude préparent le terrain pour l'étude des ces nouvelles représentations $\pi^l_{\bar{p}}$ qui seront introduites au chapitre 3.

Au chapitre 1, nous faisons certains rappels sur la théorie des groupes de Lie nilpotents et exponentiels.

Au chapitre 2, nous étudions quelques représentations unitaires irréductibles, ainsi que leurs noyaux. Ensuite nous construisons des sous-algèbres particulières qui seront d'une importance capitale dans le reste du travail.

Au chapitre 3, nous étudions les représentations $\pi^l_{\bar{p}}$. Nous montrons que les $\pi^l_{\bar{p}}$ sont topologiquement irréductibles. Nous vérifions l'existence d'une fonction $f \in L^1(G)$ telle que l'opérateurs $\pi^l_{\bar{p}}(f)$ soit un opérateur de rang fini. Par conséquent la représentation $\pi^l_{\bar{p}}$ contient un $L^1(G)$-module simple $V_0^{(\bar{p},l)}$ ([23]). Ensuite nous déterminons une fonction $\tilde{p} \in L^1(H)/\ker(\gamma)$ tel que l'opérateur $\gamma(\tilde{p})$ est un projecteur de rang un. Ainsi $\pi^l_{\bar{p}}(\tilde{p})V_0^{(\bar{p},l)}$ est un $\tilde{p} * L^1(G/H, L^1(G)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$-module simple. Or cette algèbre est commutative, nous calculons d'une façon explicite la restriction de $\pi^l_{\bar{p}}$ sur cette algèbre, c'est un caractère $\chi_{\pi^l_{\bar{p}}}$. Enfin, nous caractérisons nos modules simples par les $V_0^{(\bar{p},l)}$, $\bar{p} \in [1, \infty]^m$.

Le chapitre 4 est consacré à un exemple explicite, celui du groupe de Boidol.

Les raisonnements précédents s'inspireront très fortement de la détermination des représentations algébriquement irréductibles de $L^1(G)$ par Poguntke ([29]) , sauf que dans ce cas on ne travaille pas avec des représentations projectives, et des cocycles, mais plutôt avec des représentations unitaires topologiquement irréductibles, qui vont nous permettre d'obtenir γ par extensions, et inductions successives à partir de la représentation τ de $L^1(N)$, en choisissant convenablement l'ordre pour éviter les cocycles, et les répresentations projectives.

La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'étude des algèbres de type $L^1_\omega(G)$, où G est un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe, et ω est un poids polynomial sur G.

Le but du chapitre 5 consiste donc à étendre certaines propriétés de l'algèbre $L^1(G)$, qui ont joué un rôle important en analyse harmonique classique (caractérisation des idéaux maximaux, propriété de Wiener, problème de synthèse spectrale, caractérisation des idéaux premiers) à $L^1_\omega(G)$. Cette tâche est dèjà bien avancée en ce qui concerne l'algèbre de groupe $L^1(G)$et l'algèbre de Schwartz S(G).

Un tel poids ω apparait naturellement si on étudie l'appartenance des éléments du groupe G aux puissances successives d'un voisinage de l'unité (5.1.3).

Puisque $\mathcal{S}(G) \subset L^1_\omega(G) \subset L^1(G)$, chaque sous-espace étant dense dans le suivant pour la topologie respective, on peut espérer pouvoir transférer différentes propriétés de $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$ à $L^1_\omega(G)$. A cet effet, il est essentiel de pouvoir comparer les noyaux $\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$, $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ et $\ker(\pi)$ pour tout $\pi \in \hat{G}$. Or un résultat de Ludwig ([21], 2.1) montrant que $\overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \ker(\pi)$ peut être transposé afin de prouver qu'on a également $\overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1_\omega(G)} = \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$. En combinant ce résultat avec l'existence d'idéaux minimaux, d'enveloppe donnée $C \subset \hat{G}$ dans $\mathcal{S}(G)$, $L^1_\omega(G)$ et $L^1(G)$ et avec la relation entre ces différents idéaux minimaux, on obtient l'outil essentiel pour prouver les résultats suivants: Les idéaux fermés propres premiers de $L^1_\omega(G)$ sont de la forme $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$, $\pi \in \hat{G}$.

L'algèbre $\Big(\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)\Big)/\tilde{\tilde{j}}(\pi)$ est nilpotente si $\tilde{\tilde{j}}(\pi)$ désigne l'idéal minimal de $L^1_\omega(G)$ d'enveloppe $\{\pi\}$ (ce qui est un résultat de synthèse spectrale généralisée). L'algèbre $L^1_\omega(G)$ possède la propriété de Wiener c'est-à-dire pour tout idéal fermé propre I de $L^1_\omega(G)$, il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $I \subset \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$. Les idéaux fermés propres maximaux de $L^1_\omega(G)$ coïncident avec les idéaux fermés propres premiers. On en déduit également que $\mathrm{Prim}(L^1_\omega(G)) = \{\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \mid \pi \in \hat{G}\}$. Ensuite nous déterminons toutes les représentations algébriquement irréductibles de $L^1_\omega(G)$: Elles coïncident (à équivalence près) avec les représentations $(\pi \mid_{\mathcal{H}_\pi^0}, \mathcal{H}_\pi^0)$ où $\mathcal{H}_\pi^0 \ = \ \text{vect}\{ \ \pi(f)\xi \ \mid \ \xi \in \mathcal{H}_\pi, \ f \in L^1_\omega(G), \ \pi(f)$ de rang fini$\}$. $\mathcal{H}_\pi$ désignant l'espace de la représentation unitaire π. Les représentations topologiquement irréductibles de $L^1_\omega(G)$ sont alors obtenues en complétant les espaces $\mathcal{H}_\pi^0$ des représentations algébriquement irréductibles par rapport à des normes $\||\cdot\||$ appropriées.

Nous terminons notre étude en mentionnant une question ouverte.

Chapitre 1

Rappels et généralités

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions sur la théorie des groupes de Lie résolubles exponentiels et nilpotents. Les groupes exponentiels constituent la classe la plus vaste pour laquelle il existe un difféomorphisme entre le groupe et son algèbre de Lie. Cette classe de groupes se situe entre les groupes de Lie nilpotents et les groupes de Lie résolubles. Ces groupes ont été introduits par Dixmier ([9]). Pour ce qui concerne la théorie générale des groupes de Lie, nous renvoyons le lecteur à ([7]) et à ([32]).

Dans toute notre étude, G désignera un groupe de Lie connexe, simplement connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, nous désignerons par $[,]$ le crochet de Lie dans $\mathfrak{g}$.

Commençons tout d'abord par quelques notions sur les groupes de Lie nilpotents.

1.1. Groupes de Lie nilpotents

1.1.1. Définition:

Nous disons que G est nilpotent si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente;

c'est à dire que la suite centrale décroissante $(\mathfrak{g}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \text{ et } \forall m \geq 2,\ \mathfrak{g}_m = [\mathfrak{g}_{m-1}, \mathfrak{g}]$$

vérifie $\mathfrak{g}_m = \{0\}$ pour un certain m.
Soit r l'entier tel que $\mathfrak{g}_r \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_{r+1} = \{0\}$, r est appelé le pas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

1.1.2. Remarque:

Une condition nécessaire pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, est que pour chaque élément X de $\mathfrak{g}$, l'endomorphisme

$$ad\ X(Y) = [X, Y], \forall Y \in \mathfrak{g}$$

est nilpotent, puisque $adX(\mathfrak{g}_k)$ est inclus dans g_{k+1}.

1.2. Groupes de Lie résolubles exponentiels

1.2.1. Définition:
Soit G un groupe de Lie résoluble d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous disons que G est exponentiel, si l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ est un difféomorphisme. Dans ce cas, nous disons aussi que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est résoluble exponentielle.

1.2.2. Remarque :
Les sous-algèbres et les algèbres quotients d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle sont résolubles exponentielles.

Le théorème suivant est un outil considérable dans la théorie des groupes de Lie résolubles exponentiels.

1.2.3. Théorème: *Soit G un groupe de Lie résoluble connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *G est un groupe de Lie résoluble exponentiel .*

(ii) *L'application exponentielle est un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G.*

(iii) *Quel que soit $X \in \mathfrak{g}$, adX n'est pas de valeur propre non nulle imaginaire pure.*

(iv) *Les racines de $\mathfrak{g}$ (dans l'algèbre complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) sont de la forme $\phi(x)(1 + i\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathfrak{g}^*$.*

Preuve:

Cf [9]. ∎

1.2.4. Remarque:

Les groupes de Lie nilpotents sont des groupes de Lie résolubles exponentiels.

1.2.5. Proposition:

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle. Alors $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.

Preuve:

Cf [11]. ∎

1.2.6. Proposition:

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle. Alors il existe un plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ (appelé nilradical) dans $\mathfrak{g}$. On a que $\mathfrak{n} = \bigcap_{\phi=\text{racine}} \ker(\phi)$. En plus, pour toute dérivation d de $\mathfrak{g}$, on a que $d(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$.

Preuve:

Cf [11]. ∎

1.2.7. Soit G un groupe de Lie connexe, notons $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ l'application exponentielle, log son inverse dans un voisinage de l'élément neutre $e \in G$, et définissons

$$C(X,Y) = \log(\exp(X) \cdot \exp(Y)), \quad X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Cette fonction est bien définie, converge normalement dans un voisinage de $(0,0)$ et ne dépend pas du choix des groupes de Lie localement isomorphes associés à $\mathfrak{g}$.
La formule de Cambell-Baker-Haussdorff qui en résulte nous permet de reconstituer G avec sa loi multiplicative connaissant uniquement la structure de $\mathfrak{g}$. Cette formule est donnée par:

$$\begin{aligned} C(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] \\ - \frac{1}{48}[Y,[X,[X,Y]]] + \frac{1}{48}[X,[Y,[Y,X]]] + \ldots \text{cf } ([13]). \end{aligned}$$

Si G est un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'application exp est un difféomorphisme analytique et la formule de Cambell-Baker-Haussdorff est définie pour tout $X,Y \in \mathfrak{g}$.
Nous pouvons alors définir sur $\mathfrak{g}$ une structure de groupe de Lie exponentiel $(\mathfrak{g}, C)$ qui admet $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie. Dans ces conditions, l'application exp n'est autre que l'identité.

1.2.8. Théorème:
Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors il existe un sous-groupe fermé connexe H de codimension 1 de G et d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, tel que G soit isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R}_\epsilon \times H$, où ϵ désigne un groupe à un paramètre d'automorphismes de H. Pour tout $X \notin \mathfrak{h}$, l'application $\mathbb{R} \times H \longrightarrow G$; $(t,h) \longrightarrow exp(tX) \cdot h$ est un difféomorphisme.

Preuve:
Cf ([2]). ■

1.2.9. Proposition: *Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H un sous-groupe fermé connexe et simplement* *connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors H est un groupe de Lie résoluble exponentiel.*

Preuve:
Cf ([19]). ∎

1.2.10. Proposition:
Il existe des sous-algèbres nilpotentes $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{g}$ telles que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Preuve:
Cf ([19]). ∎

1.2.11. Définition:
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On appelle base coexponentielle à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ toute base $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}} = (B_1, ..., B_K)$ d'un sous-espace vectoriel supplémentaire $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que les sous-espaces $\mathfrak{p}_j = \sum_{i=1}^{j} {}^{\oplus}\mathbb{R}B_i \oplus \mathfrak{p}$, $j = 1, ..., k$ engendrés par $\mathfrak{p}$ et les B_i vérifient les propriétés suivantes:
(i) $\mathfrak{p}_{j+1} \supset \mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$, $0 \leq j \leq k-1$.
(ii) Si $\mathfrak{p}_j$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{p}_{j+1}$ et $\mathfrak{p}_{j-1}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, pour $j = 1, ..., k-1$.
(iii) L'application

$$\begin{aligned} E_{\mathfrak{p}} : \mathbb{R}^k \times \mathfrak{p} &\longrightarrow G \\ (t_1, ..., t_k, u) &\longrightarrow \exp(t_1 B_1) \cdot \exp(t_2 B_2) \cdots \exp(t_k B_k) \cdot \exp(u) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{Q}$ de $\mathfrak{g}$ est appelé sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$.

1.2.12. Proposition:
Si G est un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ il existe une base $\mathfrak{B}_{\mathfrak{p}}$ coexponentielle à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$.

Preuve:
Cf ([19]). ■

1.3. L'espace dual d'un groupe de Lie exponentiel

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler la description de l'espace dual $\hat{G}$ (G est un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$), c'est à dire l'espace des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G. L'existence d'une application bijective entre l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$ de G et $\hat{G}$ est due à P. Bernat ([4]). Pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*$, il existe en effet une polarisation $\mathfrak{p}$ en l et une représentation unitaire irréductible de G dont la classe d'équivalence ne dépend que de la G-orbite de l et tout $\pi \in \hat{G}$ est de la forme $\pi = \pi_{l,\mathfrak{p}}$.

1.3.1. Définitions:
(a) La représentation adjointe ad et Ad de $\mathfrak{g}$ respectivement de G est définie par:
Pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, $adx(y) = [x, y]$ et pour tout $g = \exp(x)$.

$$Ad(g)(y) = e^{adx}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(adx)^n(y).$$

Il en résulte que $\exp(Ad(g))(y) = g \cdot \exp(y) \cdot g^{-1}$.
(b) La représentation coadjointe Ad^* de G sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est définie par

$$< Ad^*(g)l, x > = < l, Ad(g^{-1})x >, x \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*.$$

On désigne par $G \cdot l$ l'orbite de l sous l'action coadjointe de G: ainsi $G \cdot l = \{Ad^*(g)l; g \in G\}$.

(c) Soit $\mathfrak{p}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on pose
(i) $\mathfrak{p}^{\perp}(\mathfrak{g}^*) = \{l \in \mathfrak{g}^* \ : l_{/\mathfrak{p}} = 0\}$, où $l_{/\mathfrak{p}}$ est la restriction de l à $\mathfrak{p}$;
(ii) $\mathfrak{p}(l) = \{x \in \mathfrak{g} \ : \ B_l(x, \mathfrak{p}) = 0\}$, où B_l est la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par $B_l(x, y) =< l, [x, y] >$, $x, y \in \mathfrak{g}$.
Si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}(l)$ (resp. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(l)$), on dit que $\mathfrak{p}$ est un sous-espace isotrope (resp. maximal isotrope) pour B_l.
(d) Une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est appelée polarisation en un point $l \in \mathfrak{g}^*$, si elle vérifie les conditions suivantes:
(i) $< l, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] >= 0$.
(ii) $\dim\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}(l) + \dim\mathfrak{g})$, avec $\mathfrak{g}(l) = \{x \in \mathfrak{g}; \ < l, [x, \mathfrak{g}] >= 0\}$.
Cela signifie $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre qui est en même temps un sous-espace maximal isotrope pour la forme bilinéaire $B_l(x, y) =< l, [x, y] >, x, y \in \mathfrak{g}$.
Ainsi $l_{/\mathfrak{p}}$ est un homomorphisme. On définit un caractère χ_l sur $\exp(\mathfrak{p}) = P$, c'est à dire un homomorphisme continu de Psur $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1\}$ de la façon suivante:

$$\chi_l(\exp(x)) = e^{-i<l,x>}, x \in \mathfrak{p}.$$

(e) Une polarisation $\mathfrak{p}$ en l vérifie la condition de Pukanszky, si

$$Ad^*(\exp(\mathfrak{p}))l = l + \mathfrak{p}^{\perp}.$$

Autrement dit si $f \in \mathfrak{g}^*$ avec $f_{/\mathfrak{p}} = l_{/\mathfrak{p}}$, alors il existe $h \in P = \exp(\mathfrak{p})$ tel que $f = Ad^*(h)l$. Nous allons désigner par $\mathrm{Puk}(l, \mathfrak{g})$ l'ensemble de toutes les polarisations en $l \in \mathfrak{g}^*$ qui vérifient la condition de Pukanszky.

1.3.2. Remarque:
Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors toute polarisation en l posséde la propriété de Pukanszky: En effet $Ad^*(\exp(\mathfrak{p}))l$ est alors ouvert et fermé dans $l + \mathfrak{h}^{\perp}$.

1.3.3. Théorème: (Critère de Pukanszky)
Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ isotrope pour la forme B_l, c'est à

dire que $B_l([\mathfrak{p},\mathfrak{p}]) =< l, [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] >= 0$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $Ad^*(\, exp(\mathfrak{p}))l = l + \mathfrak{p}^{\perp}$.

(ii) $\mathfrak{p}$ *est un sous-espace isotrope maximal pour la forme* B_l. *(*$\mathfrak{p}$ *est une polarisation en* l*) et* $l + \mathfrak{p}^{\perp} \subset G \cdot l$.

(iii) *Pour tout point* f *de* $\mathfrak{p}^{\perp}$, $\mathfrak{p}$ *est un sous-espace isotrope maximal pour la forme* B_{l+f} *(*$\mathfrak{p}$ *est une polarisation en* $l + f$*).*

Preuve:

Cf ([4]). ■

1.3.4. Remarque:

Si les conditions équivalentes du théorème précédent sont vérifiées, alors $\mathfrak{p}$ *vérifie la condition de Pukanszky, par (1.3.1).*

1.3.5. On connaît bien un procédé standard dû à M. Vergne pour construire une polarisation vérifiant la condition de Pukanszky . Pour cela , soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle et $S = (\mathfrak{g}_k)_{k=0}^{n}$ une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ (voir ([19]) par exemple pour la définition). Soient $l \in \mathfrak{g}$, $l_k = l_{/\mathfrak{g}_k}$ la restriction de l à $\mathfrak{g}_k$ et soit $g_k(l_k)$ le noyau de la forme B_{l_k} sur $\mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_k$. Posons $\mathfrak{p}(l, S) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{g}_k(l_k)$.

1.3.6. Proposition:

$\mathfrak{p}(l, S)$ *est une polarisation en* l *qui vérifie la condition de Pukanszky.*

Preuve:

Cf ([4]). ■

1.3.7. Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit P un sous-groupe fermé de G. Nous allons construire une "mesure" G-invariante sur l'espace quotient G/P c'est à dire une forme continue sur un espace naturel $K(G, P)$ de fonctions. Soient μ_G la mesure de Haar à gauche sur G et $\triangle_G$ la fonction module de G. Nous désignons par $C_c(G)$, l'espace des fonctions numériques continues sur G, à support compact. Pour toute fonction $f \in C_c(G)$ et pour tout $x \in G$, nous avons que

$$\int_G f(x\cdot y^{-1})d\mu_G(x) = \triangle_G(y)\int_G f(x)d\mu_G(x). \qquad \textbf{(1)}$$

$$\int_G f(y)d\mu_G(y) = \int_G f(y^{-1})\triangle_G(y)^{-1}d\mu_G(y). \qquad \textbf{(2)}$$

D'autre part, il est bien connu que $\triangle_G(y) = |\,\text{dét}\, Ad(y)|^{-1} = e^{-\operatorname{tr}ad_{\mathfrak{g}}\log y}$ pour tout $y \in G$. On désigne par $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie de P et par μ_P la mesure de Haar à gauche sur P. On note $\triangle_{P,G}$, le caractère de P à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ défini par

$$\triangle_{P,G}(h) = \frac{\triangle_P(h)}{\triangle_G(h)},\ \ h \in P.$$

Pour $x \in \mathfrak{p}$, on a

$$\triangle_{P,G}(\exp(x)) = e^{\operatorname{tr}ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}x}.$$

Nous désignons par $\triangle_{G,P}$ l'inverse de $\triangle_{P,G}$, autrement dit

$$\triangle_{G,P}(h) = \frac{\triangle_G(h)}{\triangle_P(h)},\ \ h \in P.$$

Soit $K(G,P)$ l'espace des fonctions définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned} K(G,P) = \{f:\ G \longrightarrow \mathbb{C};\, f \ &\text{continue à support compact modulo } P. \\ &(\operatorname{supp} f \subset K\cdot P,\ \text{où } K \text{ est un compact dans } G), \\ &f(x\cdot h) = \triangle_{P,G}(h)f(x),\ \forall x \in G,\ h \in P\}. \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

G agit sur $K(G,P)$ par translation à gauche. Pour tout $f \in C_c(G)$, écrivons

$$Q_P f(x) = \int_P \triangle_{G,P}(h) f(x\cdot h)d\mu_P(h),\ x \in G. \qquad \textbf{(4)}$$

Alors, d'après ([4]) on sait que l'application Q_P est continue, surjective de $C_c(G)$ dans $K(G,P)$.

D'autre part, si $f \in C_c(G)$ et $Q_P(f) = 0$, alors $\int_G f(x)dx = 0$. Ainsi on obtient sur $K(G, P)$ une forme linéaire positive G-invariante unique (à un facteur constant près), notée $\mu_{G,P}$ et définie de la manière suivante: Pour $F \in K(G, P)$,

$$\mu_{G,P}(F) = \oint_{G/P} F(x)d\mu_{G,P}(x) = \int_G f(x)d\mu_G(x)$$

où $f \in C_c(G)$ vérifie $Q_P(f) = F$. Il en résulte que

$$\oint_{G/P} (\int_P f(x \cdot h) \triangle_{G,P} (h) \ d\mu_P(h))d\mu_{G,P} = \int_G f(x)d\mu_G(x). \qquad \textbf{(5)}$$

Si $\triangle_P = \triangle_G$ sur P, alors $\mu_{G,P}$ est une mesure G-invariante sur l'espace homogène G/P. Dans la suite de notre travail nous allons utiliser les notations suivantes:
$dh = d\mu_P(h)$, $dg = d\mu_G(g)$, $d\dot{x} = d\mu_{G,P}(x)$.

1.3.8. Nous pouvons maintenant définir la représentation induite. Soit P un sous- groupe fermé du groupe localement compact G et soit $(\rho, \mathfrak{F})$ une représentation unitaire de P. On note $K_\rho(G, P)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $\xi : G \longrightarrow \mathfrak{F}$ continues à support compact modulo P telles que

$$\xi(x \cdot h) = \triangle_{P,G}(h)\rho^{-1}(h)\xi(x), \ \forall x \in G, h \in P. \qquad \textbf{(6)}$$

Cet espace est invariant par translation à gauche.
Si $\xi \in K_\rho(G, P)$, la fonction $G \ni x \longrightarrow \|\xi(x)\|_{\mathfrak{F}}^2$ appartient à $K(G, P)$: par conséquent sur $K_\rho(G, P)$ nous obtenons une norme $\|\cdot\|_2$ G-invariante définie par

$$\|\xi\|_2^2 = \oint_{G/P} \|\xi(x)\|_{\mathfrak{F}}^2 d\dot{x}.$$

Soit $\mathcal{H}_\rho$ le complété de $K_\rho(G, P)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$. La représentation induite $\pi = \pi(\rho, \mathfrak{F}) = \mathrm{ind}_P^G \rho$ se réalise sur $\mathcal{H}_\rho$ de la manière suivante

$$(\pi(x)\xi)(y) = \xi(x^{-1} \cdot y), \ \forall \xi \in \mathcal{H}_\rho, x \in G. \qquad \textbf{(7)}$$

1.3.9. Remarque:

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$. Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre subordonné à l, c'est à dire que $\mathfrak{p}$ est isotrope pour la forme B_l. Alors l'application $\chi_l(h) = e^{-i<l,\log h>}$, $h \in P$ définit un caractère unitaire abélien $(\chi_l, \mathbb{C})$ du sous-groupe analytique $P = exp(\mathfrak{p})$. Nous pouvons définir la représentation induite $\pi_{l,\mathfrak{p}} = ind_P^G \chi_l$ du groupe G par

$$(\pi_{l,\mathfrak{p}}(x)\xi)(y) = \xi(x^{-1} \cdot y) \ \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi, x \in G. \tag{8}$$

où l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ est le complété pour la norme $\|\cdot\|_2$ de l'espace $K_{\chi_l}(G, P)$ des fonctions $\xi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ continues à support compact modulo P telles que

$$\xi(x \cdot h) = \triangle_{P,G}(h)\overline{\chi}_l(h)\xi(x), \ \forall x \in G, h \in P.$$

Notons que $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ est une représentation unitaire de G.
Enfin si on choisie une base coexponentielle à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$, on peut identifier l'espace de la représentation $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ à un espace du type $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.3.10. Proposition:

Si $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ est irréductible, alors $\mathfrak{p}$ est une polarisation en l.

Preuve:

Cf ([19]). ■

1.3.11. Théorème:

Toute représentation unitaire irréductible π d'un groupe de Lie résoluble exponentiel est monomiale, c'est à dire que $\pi = ind_P^G \chi$, où χ est un caractère abélien d'un sous-groupe fermé P de G.

Preuve:

Cf ([19]). ■

1.3.12. Théorème:

Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{p}$ une polarisation en l et $\pi = \pi_{l,\mathfrak{p}} = ind_{exp(\mathfrak{p})}^G \chi_l$. Alors π est irréductible *si et seulement si* $\mathfrak{p}$ *vérifie la condition de Pukanszky, c'est à dire que* $\mathfrak{p} \in Puk(l, \mathfrak{g})$. *Dans ce cas la classe d'équivalence unitaire de la représentation* π *notée* $[\pi]$ *est indépendante du choix de la polarisation* $\mathfrak{p} \in Puk(l, \mathfrak{g})$.

Preuve:
Cf ([19]). ∎

1.3.13. Corollaire:
Soit G *un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *Soient* $\mathfrak{p}$ *une sous-algèbre subordonnée à un point* $l \in \mathfrak{g}^*$. *Soit* $\pi_{l,\mathfrak{p}} = ind_{exp(\mathfrak{p})}^{G} \chi_l$. *Alors* $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ *est irréductible si et seulement si* $\mathfrak{p}$ *est une polarisation qui vérifie la condition de Pukanszky. Dans ce cas* $[\pi] = [\pi_{l,\mathfrak{p}}]$ *est indépendante du choix de la polarisation* $\mathfrak{p} \in Puk(l, \mathfrak{g})$.

Preuve:
Par (1.3.10) et (1.3.12). ∎

1.3.14. Proposition:
Soit G *un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *Soient* l, l' *deux éléments de* $\mathfrak{g}^*$ *avec* π_l , $\pi_{l'}$ *les représentations irréductibles qui leur sont associées. Alors* π_l *et* $\pi_{l'}$ *sont équivalentes si et seulement si* l *et* l' *sont dans la même* G*-orbite.*

Preuve:
Cf ([19]). ∎

1.3.15. Soit $l \in \mathfrak{g}^*$. La proposition (1.3.6) garantit l'existence d'une polarisation $\mathfrak{p}$ en l vérifiant la condition de Pukanszky. Du corollaire (1.3.13) il résulte que la représentation $\pi_{l,\mathfrak{p}} = \mathrm{ind}_{\exp(\mathfrak{p})}^{G} \chi_l$ est irréductible et indépendante du choix de la polarisation $\mathfrak{p} \in \mathrm{Puk}(l, \mathfrak{g})$. Ceci nous permet de définir une application $l \longrightarrow \pi_l = \mathrm{ind}_{\exp(\mathfrak{p})}^{G} \chi_l$ de $\mathfrak{g}^*$ dans le dual unitaire $\hat{G}$. D'autre part, du théorème (1.3.11), il en résulte que l'application précédente est surjective. La proposition (1.3.14) montre que la classe d'équivalence de π_l dépend uniquement de l'orbite

$$G \cdot l = \{Ad^*(x)l;\ x \in G\} \subset \mathfrak{g}^*$$

de la forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$. Par conséquent

$$K:\ G \cdot l \longrightarrow \pi_l \in \hat{G}$$

définit une application de l'espace

$$\Omega(\mathfrak{g}^*) = \{G \cdot l; l \in \mathfrak{g}^*\}$$

des orbites coadjointes de G dans le dual unitaire $\hat{G}$ de G. Cette application est appelée application de Kirillov. Alors nous avons le théorème suivant:

1.3.16. Théorème:
L'application de Kirillov est une bijection de $\Omega(\mathfrak{g}^*)$ dans $\hat{G}$.

Preuve:
Cf ([31]). ■

1.3.17. Définition:
Rappelons la définition suivante d'une représentation algébriquement irréductible:
Soit A une algèbre de Banach. On dit que $(T, \mathfrak{U})$ est une représentation algébriquement irréductible de A, si $\mathfrak{U}$ est un espace vectoriel et

$$T:\ A \longrightarrow GL(\mathfrak{U})$$

une application linéaire telle que:
(1) $T(f * g) = T(f)T(g) \qquad \forall f, g \in A$
(2) Les seuls sous-espaces de $\mathfrak{U}$ A-invariants sont $\{0\}$ et $\mathfrak{U}$.
On dit encore que $(T, \mathfrak{U})$ est un A-module (algébriquement) simple. On montre que dans ce cas le noyau $\ker(T)$ de T dans A est un idéal fermé de A.

1.3.18. Remarque: *Nous savons qu'une représentation bornée (ou un module borné) $(T, \mathfrak{U})$ de G sur un espace de Banach $\mathfrak{U}$ peut être écrite comme une représentation bornée de $L^1(G)$:*

$$T(f) = \int_G f(s)T(s)ds, \qquad f \in L^1(G).$$

où ds désigne la mesure de Haar de G. Alors

$$\|T(f)u\|_{\mathfrak{U}} \leq C\|f\|_1\|u\|_{\mathfrak{U}}, \quad u \in \mathfrak{U}, f \in L^1(G).$$

Réciproquement toute représentation bornée $(T, \mathfrak{U})$ de $L^1(G)$ non dégénérée, c'est à dire tel que $T(L^1(G))\mathfrak{U}$ soit dense dans $\mathfrak{U}$ provient d'une représentation bornée, notée aussi T, de G dans $\mathfrak{U}$ (voir ([10])). En particulier un module borné $(T, \mathfrak{U})$ de G est topologiquement irréductible (algébriquement irréductible) si et seulement si le module correspondant de $L^1(G)$ l'est (voir ([10]) pour plus de détail).

1.4. L'espace de fonctions ES

Nous supposons toujours que G est un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{n}$ le nilradical de $\mathfrak{g}$, $N = \exp(\mathfrak{n})$ et $l \in \mathfrak{g}^*$. Nous allons définir l'espace de fonctions ES(), ingredient essentiel pour théorème de rétracte (1.4.7). Dans le chapitre 3, nous choisirons des fonctions particulères de $L^1()$ dans ES() afin de pouvoir appliquer ce théorème.

La lettre S suggère qu'il s'agira d'espaces anologues de l'espace des fonctions de Schwartz, et la lettre E indique qu'il faudra exiger une décroissance exponentielle dans certaines directions.

1.4.1. Définition:

Soit $\mathfrak{p}$ une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$ telle que $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n})$ est une polarisation en $l_{/\mathfrak{n}}$ et $\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$-invariante ($\mathfrak{p}$ est une polarisation fortement adaptée à $\mathfrak{n}$). Alors

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{p}^1$$

où $\mathfrak{p}^0 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p}^1 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$ est une polarisation en $l_{/\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})}$. En plus $\mathfrak{p}$ est une polarisation de Pukanszky en l ([2]).

1.4.2. Soit $\mathfrak{p}$ comme précédement. Soient

- $\mathfrak{w}_1$ un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{v}_1$ un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$.
- $\mathfrak{v}_2$ un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{p}^1 \cap \mathfrak{v}_1$ dans $\mathfrak{v}_1$.
- $\mathfrak{w}_0$ un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{p}^0$ dans $\mathfrak{n}$.

On remarque que $\mathfrak{v}_2$ est aussi un sous-espace contenu dans $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$ et exponentiel à $\mathfrak{p}^1 + \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$. D'autre part, on constate que $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}^0$ ce qui implique que $\mathfrak{v}_2 \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) + \mathfrak{p}$.

Ainsi, des conditions précédentes on obtient les égalités suivantes:

- $\mathfrak{w}_1 \oplus \big(\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n}\big) = \mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$.
- $\mathfrak{v}_2 \oplus (\mathfrak{p}^1 \cap \mathfrak{v}_1) = \mathfrak{v}_1$;
- $\mathfrak{v}_2 \oplus \big(\mathfrak{p}^1 + \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n})\big) = \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$;
- $\mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{p}^0 = \mathfrak{n}$.

Alors on la proposition suivante:

1.4.3. Proposition :

$\big(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{/\mathfrak{n}})\big) \cap \ker(l)$ est un idéal de $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$. D'autre part , l'un ou l'autre des cas suivants se présente:

(i) $[\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}), \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})] \subset \big((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{/\mathfrak{n}})) \cap \ker(l)\big)$, *par conséquent* $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})/\big((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{/\mathfrak{n}})) \cap \ker(l)\big)$ *est abélienne et* $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) \subset \mathfrak{p}$.

(ii) $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$ *est une algèbre de Lie nilpotente de pas 2 modulo* $\big((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{/\mathfrak{n}})) \cap \ker(l)\big)$ *et* $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})/\big((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{/\mathfrak{n}})) \cap \ker(l)\big)$ *est une algèbre de Heisenberg.*

Preuve:
Cf ([2]). ■

1.4.4. Des égalités précédentes, on en déduit que $\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{v}_2$ est un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{v}_2 \oplus \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}.$$

Soit $\mathfrak{B} = (A_1, ..., A_q, B_1, ..., B_d, C_1, ...C_t)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ avec
- $\{A_1, ..., A_q\}$ qui est une base de $\mathfrak{w}_1$, coexponentielle à $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$.
- $\{B_1, ..., B_d\}$ qui est une base de $\mathfrak{w}_0$ coxponentielle à $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{n}$.
- $\{C_1, ..., C_t\}$ qui est une base de $\mathfrak{v}_2$ coexponentielle à $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$ dans $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}})$, avec $\mathfrak{v}_2 \subset \mathfrak{v}_1$, où $\mathfrak{v}_1$ est un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$. Alors on peut écrire G sous la forme

$$G = W_0 \cdot W_1 \cdot V_2 \cdot P = W_0 \cdot \tilde{W} \cdot P \text{ et } \tilde{W} = W_1 \cdot V_2.$$

où $W_1 = \exp(\mathfrak{w}_1)$, $W_0 = E_{\mathfrak{w}_0}(\mathbb{R}^d)$, $V_2 = \exp(\mathfrak{v}_2)$, avec

$$\exp(w) = \exp(w_1 A_1 + ... + w_q A_q), \forall w = (w_1, ..., w_q) \in \mathbb{R}^q.$$

$E_{\mathfrak{w}_0}(n) = E_{\mathfrak{w}_0}(n_1, ..., n_d) = \exp(n_1 B_1) \cdots \exp(n_d B_d), \forall (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{R}^s$.
$\exp(v) = \exp(v_1 C_1 + ... + v_t C_t), \forall v = (v_1, ..., v_t) \in \mathbb{R}^t$.
L'application de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^d$ dans G/P définie par

$$(w_1, ..., w_q, v_1, ..., v_t, n_1, ..., n_d) \longrightarrow \exp(w)\exp(v) \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot P$$

est un homéomorphisme car $\mathfrak{B}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors par $\mathrm{ES}(G/P \times G/P, P, \chi_l)$, nous désignons l'espace des fonctions $F : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ qui appartiennent à $C^\infty(G \times G)$ et qui vérifient les conditions suivantes:

(1)

$$F(\exp(x)\cdot\exp(h).\exp(y)\cdot\exp(h')) = \triangle^{\frac{1}{2}}(\exp(h))\overline{\chi}_l(\exp(h))$$
$$\triangle^{\frac{1}{2}}(\exp(h'))\overline{\chi}_l(\exp(h'))F(\exp(x).\exp(y)).$$

pour tout $h, h' \in \mathfrak{p}$ et $x, y \in \mathfrak{g}$ avec $\chi_l(\exp(h)) = e^{-i<l,h>}$

(2)

$$\|F\|_{\partial,\alpha,R} = \sup_{, s,\ s' \in \mathbb{R}^{q+t}, n,\ n' \in \mathbb{R}^d} \Big(e^{\alpha|s|}\cdot e^{\alpha|s'|}\cdot R(n)\cdot R(n')$$
$$\cdot|\partial_s\partial_n\partial_{s'}\partial_{n'}F(sn.s'n')|\Big) < \infty.$$

pour tout $\alpha \geq 0$ et pour tout polynôme R. Pour plus de détail nous renvoyons le lecteur à ([23]).

1.4.5. Proposition:
L'espace $ES(G/P \times G/P, P, \chi_l)$ est indépendant de la base coexponentielle $\mathfrak{B}$ choisie.

Preuve:
Par ([2]). ■

1.4.6. Définition:
Soit $\mathfrak{B}$ une base coexponentielle à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{Q}$ le sous-espace qu'elle engendre. (D'après (1.2.10), nous pouvons même prendre $\mathfrak{Q}$ contenu dans une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ telle que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{Q} \oplus \mathfrak{n} \quad \text{(somme directe d'espaces vectoriels).)}$$

Ainsi l'application $E_{\mathfrak{n}}$ définie par $\mathfrak{B}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{r_0} \times \mathbb{R}^{s_0}$ avec $s_0 = \dim \mathfrak{n}$ et $r_0 = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Nous désignons par $\mathrm{ES}(G)$ l'espace des fonctions $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ appartenant à $C^\infty(G)$ et qui vérifient ainsi que toutes leurs dérivées partielles la condition

$$\sup_{r \in \mathfrak{Q}, s \in \mathfrak{n}} |F(\exp(r))(1 + |s|^2)^k (u * f)(\exp(r) \cdot \exp(s))| < \infty$$

ceci pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, pour tout $u \in \mathfrak{U}(G)$ qui désigne l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, et pour toute fonction $F \in C^\infty(G)$ exponentiellement bornée dans la direction $\mathfrak{Q}$, c'est à dire qu'il existe une constante $c(F)$ telle que $|F(\exp(v))| \leq e^{c|v|}$, $\forall v \in \mathfrak{Q}$. Cette définition ne dépend pas de la base $\mathfrak{B}$ choisie ([2]).
On constate aussi que $\mathrm{ES}(G)$ est invariante par translation sur G et $\mathrm{ES}(G)$ contient toutes les fonctions C^∞ à support compact sur G. D'où $\mathrm{ES}(G)$ est un sous-espace dense de $L^1(G)$. Les fonctions de $\mathrm{ES}(G)$ sont à décroissance polynomiale dans la direction N et exponentielle dans la direction $Q = \mathfrak{Q}$. Celà signifie qu'elles décroissent plus rapidement que l'inverse de tout polynôme dans la direction $\mathfrak{n}$, et plus rapidement que tout terme de la forme $e^{-c|v|}$ dans la direction de $\mathfrak{Q}$.
Enonçons maintenant le théorème de rétracte:

1.4.7. Théorème: (Théorème de rétracte)
Soit G un groupe de Lie connexe simplement connexe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{p}$ une polarisation fortement adaptée à $\mathfrak{n}$. Soient $P = exp(\mathfrak{p})$ et $\pi = \pi_{l,\mathfrak{p}} = ind_P^G \chi_{l,\mathfrak{p}}$ la représentation unitaire irréductible induite par le caractère unitaire $\chi_{l,\mathfrak{p}}$ de P . Alors , il existe une application linéaire continue

$$R : \; ES(GP \times G, P/P.\chi_l) \longrightarrow ES(G)$$
$$F \longrightarrow R(F) = f,$$

telle que le noyau f_π de l'opérateur $\pi(f)$ soit égal à F.
L'application R est appellée rétracte.

Preuve:
Cf ([2]). ■

Chapitre 2

Quelques représentations unitaires irréductibles et sous-algèbres particulières

Dans ce chapitre nous préparerons le terrain afin de pouvoir caractériser les représentations algébriquement irréductibles par des nouvelles représentations qui seront définies un peu plus tard. Pour celà, étant donné un groupe de Lie résoluble exponentiel G, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous noterons par (T, V) la représentation algébriquement irréductible de $L^1(G)$ dans l'espace de Banach V, et nous appelerons (T, V) un $L^1(G)$-module simple. Nous nous baserons sur les travaux de Ludwig et Molitor [27]. En effet, tout d'abord nous allons étudier les noyaux des différentes représentations unitaires topologiquement irréductibles de G. Ensuite, nous allons construire des sous-algèbres particulières pour pouvoir réduire le problème à une algèbre plus petite que $L^1(G)$. Enfin nous analyserons certaines propriétés de ces algèbres, qui vont jouer un rôle essentiel dans le reste de ce travail.

2.1. Certaines polarisations

2.1.1. Soit π une représentation unitaire topologiquement irréductible de G, alors d'après la théorie de Kirillov ([17]), et celle de Pukanszky ([30]), il existe une forme linéaire $l \in \mathfrak{g}*$, et une polarisation $\mathfrak{p}$ en l, telle que π est unitairement équivalente à la représentation induite $\mathrm{ind}_P^G \chi_l$, où $\chi(\exp(x)) = e^{-il(x)}$, $\forall x \in \mathfrak{p}$ et $P = \exp(\mathfrak{p})$.

2.1.2. Soit $\mathfrak{n}$ le nilradical de $\mathfrak{g}$, et $N = \exp(\mathfrak{n})$ le sous groupe correspondant. Le groupe G agit sur $\hat{N}$, N, $L^1(N)$ par conjugaison. Alors on a la définition suivante:

Définition:

Un idéal propre G-invariant I de $L^1(N)$, est appelé G-premier si et seulement si, quels que soient les idéaux G-invariants I_1 et I_2 de $L^1(N)$,

$$I_1 \cdot I_2 \subset I \Longrightarrow I_1 \subset I \text{ ou } I_2 \subset I.$$

Soit (T, V) un $L^1(G)$-module simple. Alors, on voit facilement que $\ker(T)_{/L^1(N)} = \mathrm{Ann}_{L^1(N)} V$ est un ideal G-premier de $L^1(N)$. En plus, il existe $\tau \in \hat{N}$ telle que

$$\ker(T)_{/L^1(N)} = \ker(G.\tau) = \cap_{g \in G} \ker(\tau^g)$$

où τ^g désigne l'action de G sur $\hat{N}$ ([29]).

Puisque $\tau \in \hat{N}$, alors il existe $q \in \mathfrak{n}^*$, et une polarisation $\mathfrak{p}^\circ$ de Pukanszky en q telle que

$$\tau = \mathrm{ind}_{P^0}^N \chi_q$$

où $P^0 = \exp(\mathfrak{p}^\circ)$, et $\chi(\exp(x)) = e^{-iq(x)}$, $\forall x \in \mathfrak{n}$.

2.1.3. Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que $l_{/\mathfrak{n}} = q$. On pose $r = l_{/\mathfrak{h}}$. Considérons les sous-algèbres suivantes:

$$\mathfrak{n}(q) = \{X \in \mathfrak{n} / < q, [X, \mathfrak{n}] >= 0\}$$

$$\mathfrak{g}(q) = \{X \in \mathfrak{g} / < q, [X, \mathfrak{n}] >= 0\}$$

$$\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g} / < l, [X, \mathfrak{g}] >=< q, [X, \mathfrak{g}] >= 0\}.$$

Ces algèbres dépendent uniquement de q.
Nous décomposons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n} &= \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n} \\ \mathfrak{g}(q) + \mathfrak{n} &= \mathfrak{w} \oplus (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}) \\ &= \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{g}(q) + \mathfrak{n}) = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{u}.$$

On pose $\mathfrak{h} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n}$, il est clair que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre, car $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}$, et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$. On peut remarquer que dans la définition de $\mathfrak{h}$ on a juste supprimé le morceau de $\mathfrak{g}(l)$ qui n'est pas dans $\mathfrak{n}$.

2.1.4. Par construction la polarisation $\mathfrak{p}^{\circ}$ peut être choisie $\mathfrak{g}(q)$-invariante, par exemple une polarisation de Vergne, définie a l'aide d'une suite de Jordan-Hölder $\mathfrak{g}(q)$ -invariante ([19]).
Soit alors $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{w}$ un sous-espace isotrope maximal pour l dans $\mathfrak{w}$, c'est à dire que:

$$< l, [\mathcal{Y}, \mathcal{Y}] >= 0.$$

et $\mathcal{Y}$ maximal parmi ceux qui vérifient cette relation.
Alors $\mathfrak{p}^1 = \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^{\circ}$ est une polarisation de Pukanszky de $l_{/\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n}}$ ([2]), de même pour $l_{/\mathfrak{h}} = r$.
De plus $\mathfrak{p} = \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^{\circ} \oplus \mathfrak{u}$, est une polarisation de Pukanszky en $l_{/\mathfrak{g}(q)+\mathfrak{n}}$ dans $\mathfrak{g}(q) + \mathfrak{n}$, et elle est aussi de Pukanszky en l dans $\mathfrak{g}$ ([2]).
2.1.5. L'application:

$$\begin{aligned} \Phi :& \mathfrak{w} \times \mathfrak{w} \longrightarrow \mathfrak{w} \\ & (x, y) \longrightarrow \Phi(x, y) =< l, [x, y] >=< q, [x, y] > \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathfrak{w}$, non identiquement nulle (si $\mathfrak{w} \neq \{0\}$) de radical:

$$\mathfrak{z} = \{z \in \mathfrak{w} / \ (l, [z, \mathfrak{w}]) \equiv 0\} = \{0\}.$$

En effet $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n}(q)$ modulo le noyau de $q_{/\mathfrak{n}(q)}$ est une algèbre de Heisenberg ([2]).

Alors puisque $\mathcal{Y}$ est isotrope maximal, il existe un sous-espace $\mathcal{X}$ tel que:

$$\mathfrak{w} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}.$$

De plus il existe une base $\{Y_1, ..., Y_c\}$ de $\mathcal{Y}$, est une base $\{X_1, ..., X_c\}$ de $\mathcal{X}$ tel que:

$$(l, [Y_i, Y_j]) = 0$$
$$(l, [X_i, X_j] = 0$$
$$(l, [Y_i, X_j] = \delta_{ij};$$

quel que soient $i, j \in \{1, ..., c\}$; c'est à dire que $\mathcal{X}$ est en dualité avec $\mathcal{Y}$. Dans toute la suite on utilisera ces polarisations et ces bases.

2.2. Etude de quelques représentations unitaires irréductibles et leurs noyaux

2.2.1. Rappelons que $\tau = \mathrm{ind}_{P^0}^N \chi_q \in \hat{N}$. Soient $W = \exp(\mathfrak{w})$, $Y = \exp(\mathcal{Y}), P^0 = \exp(\mathfrak{p}^0), P^1 = \exp(\mathfrak{p}^1), P = \exp(\mathfrak{p}), H = \exp(\mathfrak{h}), N = \exp(\mathfrak{n})$. Alors on peut définir une extension de τ la représentation définie en (2.1.2) au sous-groupe distingué $YN = \exp(\mathcal{Y} + \mathfrak{n})$, appelons la τ'. Elle est définie de la façon suivante:

Y agit sur N et sur N/P^0 par conjugaison, car la polarisation $\mathfrak{p}^0$ est $\mathfrak{g}(q)$-invariante et $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{g}(q)$. Soit $\triangle$ la fonction modulaire telle que

$$\int_{N/P^0} f(wnw^{-1})\, d\dot{n} = \triangle^{-1}(w) \int_{N/P^0} f(n)\, d\dot{n}.$$

pour tout $f \in C_c(N/P^0)$, $w \in Y$.
L'espace de τ' est le même que celui de τ. On définit τ' de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
(\tau'(w)\xi)(n_0) &= \triangle^{\frac{-1}{2}}(w) \cdot \chi_r(w) \cdot \xi(w^{-1}n_0w), \ \forall w \in Y \\
(\tau'(n)\xi)(n_0) &= (\tau(n)\xi)(n_0) = \xi(n^{-1}n_0), \ \forall n \in N \\
(\tau'(wn)\xi)(n_0) &= \tau'(w)(\tau(n)\xi)(n_0) \\
&= \triangle^{\frac{-1}{2}}(w) \cdot \chi_r(w)\xi(n^{-1}w^{-1}n_0w), \ \forall wn \in YN.
\end{aligned}$$

et $\xi \in \mathcal{H}_\tau$.
Alors on a la proposition suivante:

2.2.2. Proposition:

L'extension τ' est une représentation unitaire irréductible. En plus elle est unitairement équivalente à la représentation induite $ind_{YP^0}^{YN}\ \chi_r$.

Preuve: Par ([19]). ■

2.2.3. Nous avons que $\mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^0$ est une polarisation de Pukanszky en $l_{/\mathfrak{w}\oplus\mathfrak{n}}$ dans $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n}$ et en r dans $\mathfrak{h}$. On définit une représentation induite τ'', telle que $\tau'' = ind_{YN}^{WN}\tau'$. Alors la représentation τ'' est unitairement équivalente à la représentation induite $\mathrm{ind}_{YP^0}^{WN}\ \chi_r$, d'après (2.2.2). Donc τ'' est une représentation unitaire irréductible de WN.
De même on définit une représentation $\gamma = \mathrm{ind}_{WN}^{H}\tau''$; ainsi γ est unitairement équivalente à la représentation induite $\mathrm{ind}_{YP^0}^{H}\ \chi_r$. Donc γ est une représentation unitaire irréductible de H. Dans la suite nous identifierons la représentaion γ avec la représentation induite $\mathrm{ind}_{YP^0}^{H}\ \chi_r$, ainsi nous désignerons par $\mathcal{H}_\gamma$ l'espace de la représentation unitaire topologiquement irréductible γ.

2.2.4. D'après la décomposition de $\mathfrak{g}$ dans (2.1.3), nous avons que:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{h}, \ \text{ où } \mathfrak{u} \cap \mathfrak{n} = \{0\}, \ \text{ et } \mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}(l).$$

On pose $U = \exp(\mathfrak{u})$. Donc $G = U \cdot H$. Comme précédement on construit une extension $\tilde{\gamma}$ de γ à G tout entier:

G agit par conjugaison sur H, car H est un sous-groupe normal dans G. En plus $YP^0 = \exp(\mathcal{Y} + \mathfrak{p}^0)$ est U-invariant et $[\mathfrak{u}, \mathcal{Y}] \subset [\mathfrak{g}(q), \mathfrak{g}(q)] \subset \mathfrak{n}(q) \subset \mathfrak{p}^0$.
Soit $\tilde{\Delta}$ la fonction modulaire telle que:

$$\int_{H/YP^0} f(vhv^{-1})dh = \tilde{\Delta}^{-1}(v) \int_{H/YP^0} f(h)dh.$$

pour tout $f \in C_c(H/YP^0)$, $v \in U$.
On définit l'espace de la représentation $\tilde{\gamma}$ comme l'espace de la représentation γ. Alors $\tilde{\gamma}$ est définie par:

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}(h)\xi)(h_0) &= (\gamma(h)\xi)(h_0), \forall h \in H \\ (\tilde{\gamma}(v)\xi)(h_0) &= \tilde{\Delta}^{\frac{-1}{2}}(v) \cdot \chi_l(v) \cdot \xi(v^{-1}h_0v); \ \forall v \in U \\ (\tilde{\gamma}(vh)\xi)(h_0) &= (\tilde{\gamma}(v)(\gamma(h)\xi))(h_0), \forall h \in H, \forall v \in U. \end{aligned}$$

avec $\chi_l(v) = e^{-i<l, \log v>}$, $\xi \in \mathcal{H}_\gamma$. Alors $\tilde{\gamma}$ est une représentation irréductible, unitairement équivalente à la représentation $\pi_2 = \mathrm{ind}_{UYP^0}^{G} \chi_l$, où $UYP^0 = \exp(\mathfrak{u} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^0)$ ([19]).

2.2.5. Soit $\gamma = \mathrm{ind}_{YP^0}^{H} \chi_r$, et soient λ, $\mu \in C_c^\infty(H/YP^0)$. On sait par ([19]) qu'il existe une fonction à décroissance exponentielle $p_{\lambda,\mu}$ sur H tel que l'opérateur $\gamma(p_{\lambda,\mu})$ admette comme noyau la fonction $F_{\lambda,\mu} = \lambda \bigotimes \mu$, c'est à dire que:

$$\begin{aligned} (\gamma(p_{\lambda,\mu})\xi)(x) &= \int_{H/YP^0} \lambda(x)\overline{\mu}(y)\xi(y)dy \\ &= < \xi, \mu >_{L^2} \lambda(x) \\ &= (P_{\lambda,\mu}(\xi))(x) \ ; \forall \xi \in \mathcal{H}_\gamma. \end{aligned}$$

Nous Supposerons dans la suite que $\lambda = \mu$ et que $< \lambda, \lambda > = 1$ et nous noterons $p_\lambda = p_{\lambda,\lambda}$. Donc $\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda}$, où $P_{\lambda,\lambda}$ est un projecteur de rang un.

2.2.6. Definition : On pose

$$J_0 = \{f \in L^1(H) \mid \gamma(f) \text{ soit un opérateur de rang fini}\}$$

et J sa fermeture $J = \bar{J_0}^{L^1(H)}$. Il est clair que J, J_0 sont des idéaux de $L^1(H)$.
Alors on a le lemme suivant:

2.2.7. Lemme :
Soit $f \in J_0$, alors il existe λ_i, μ_i dans $\mathcal{H}_\gamma$ et $f_i \in J_0$, $(i = 1, \cdots, c)$ tels que $f = \sum_{i=1}^{c} f_i \, mod \ker(\gamma)$ et en plus $\gamma(f_i) = P_{\lambda_i \mu_i}$, pour $i = 1, \cdots, c$.

Preuve:
Par Dixmier ([8, the 2]). ■

2.2.8. Proposition :
Soit λ comme précédement (2.2.5). Soit $p_\lambda \in J_0$ tel que

$$\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda}.$$

Alors $(J_0/\ker(\gamma)) * p_\lambda * (J_0/\ker(\gamma)) = J_0/\ker(\gamma)$.

Preuve :
L'inclusion $J_0/\ker(\gamma) * p_\lambda * J_0/\ker(\gamma) \subset J_0/\ker(\gamma)$ est claire, car J_0 est un idéal dans $L^1(H)$. Vérifions l'autre inclusion:

$$J_0/\ker(\gamma) * p_\lambda * J_0/\ker(\gamma) \supset J_0/\ker(\gamma).$$

Pour montrer cette inclusion, prenons $f \in J_0$. D'après le lemme précédent on peut supposer que $\gamma(f) = P_{\alpha,\beta}$, avec $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\gamma$.
Alors

$$\gamma(f * p_\lambda * f) = <\alpha, \lambda> \cdot <\lambda, \beta> \gamma(f) .$$

Si $<\alpha, \lambda> \cdot <\lambda, \beta> \neq 0$, alors

$$f = \frac{1}{<\alpha, \lambda> \cdot <\lambda, \beta>} \cdot (f * p_\lambda * f) \mod \ker(\gamma).$$

D'où le fait que $f \in J_0/\ker(\gamma) * p_\lambda * J_0/\ker(\gamma)$.

Si non, c'est à dire $< \alpha, \lambda >= 0$, ou $< \lambda, \beta >= 0$. Soient alors $\alpha', \beta' \in C_c^\infty(H/YP^0)$ tels que

$$< \alpha', \lambda > \neq 0, \quad \text{et} \quad < \lambda, \beta' > \neq 0.$$

En modifiant convenablement α', β' si nécessaire, on peut également supposer que

$$< \alpha, \beta' > \cdot < \alpha', \beta > \neq 0.$$

Soit $P_1 \in J_0$ tel que $\gamma(P_1) = P_{\alpha',\beta'}$, on a

$$\begin{aligned}\gamma(f * P_1 * p_\lambda * P_1 * f) &= P_{\alpha,\beta} \circ P_{\alpha',\beta} \circ P_{\alpha',\beta'} \circ P_{\lambda,\lambda} \circ P_{\alpha'\beta'} \circ P_{\alpha,\beta} \\ &=< \alpha', \beta > \cdot < \alpha', \beta' > \cdot < \alpha', \lambda > \\ &\cdot < \lambda, \beta' > \cdot < \alpha, \beta' > \cdot P_{\alpha.\beta} \\ &= C \cdot \gamma(f),\end{aligned}$$

où $C =< \alpha', \beta > \cdot < \alpha', \beta' > \cdot < \alpha', \lambda > \cdot < \lambda, \beta' > \cdot < \alpha, \beta' >$ est une constante différente de zero. Alors $f = \frac{1}{C}(f * P_1 * p_\lambda * P_1 * f) \mod \ker(\gamma)$. On en déduit que $J_0/\ker(\gamma) \subset (J_0/\ker(\gamma)) * p_\lambda * (J_0/\ker(\gamma))$. ■

2.2.9. Nous savons que H est un sous-groupe normal de G. Alors le groupe G agit sur H et sur $L^1(H)$ par conjugaison. En particulier

$$f^g(h) = \triangle_G(g^{-1}) f(ghg^{-1}), \ \forall f \in L^1(H).$$

La fonction modulaire $\triangle_G(\cdot)$ est définie de telle sorte que

$$\int_H f^g(h)\, dh = \int_H f(h)\, dh,$$

pour tout $g \in G$, $f \in L^1(H)$.

Puisque $\tilde{\gamma}$ est une extension de la représentation γ, on en déduit que

$$\gamma(ghg^{-1}) = \tilde{\gamma}(g) \cdot \gamma(h)\tilde{\gamma}(g)^{-1}$$

et

$$\gamma(f^g) = \tilde{\gamma}(g^{-1})\gamma(f)\tilde{\gamma}(g), \ \forall g \in G, f \in L^1(G).$$

On désigne par ${}_hf$ et f_h les fonctions de $L^1(H)$ obtenues par translation à gauche, respectivement à droite. Pour $g \in L^1(G)$, $a \in L^1(H)$ on définit la convolution suivante:

$$g * a(u'h') = \int_H g(u'h'h)a(h^{-1})dh$$

et

$$a * g(u'h') = \int_H a(h)g(h^{-1}u'h')dh.$$

Nous avons la proposition suivante:

2.2.10. Proposition:

Soit τ et γ les deux représentations définies précédemment. Alors nous avons que

$$\ker(\gamma) = (L^1(H) * (\ker(G \cdot \tau)))^- = \ker(T)/L^1(H),$$

où (T, V) est le $L^1(G)$-module simple défini en (2.1.2).

Preuve:

Par ([27]). ■

2.2.11. Corollaire:

Sous les même hypothèses que précédemment nous avons que

$$(L^1(G) * \ker(\gamma)) \subset Ann_{L^1(G)}V = \ker(T).$$

En particulier (T, V) peut être considéré comme un $L^1(H)/\ker(\gamma)$-module.

Preuve: Par (2.1.2) et (2.2.10). ■

2.2.12. Proposition:

Soient H, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$, r comme précédemment. Alors nous avons l'inclusion suivante:

$$r + \mathfrak{n}^{\perp} \subset (\,Ad^{*}H)(r),$$

où $\perp$ désigne l'orthogonal dans $\mathfrak{h}^*$.

Preuve:

Utilisons la base de $\mathfrak{w}$ construite en (2.1.4).

Soit $r + g \in r + \mathfrak{n}^{\perp}$, avec $g \in \mathfrak{n}^{\perp}$. Supposons que $< g, Y_i >= a_i$ pour $i \in \{1, \cdots, c\}$. Posons

$$\begin{aligned} g' &= \sum_{i=1}^{c} a_i(\,\mathrm{ad}^* X_i)(r) \\ &= (\sum_{i=1}^{c} a_i\,\mathrm{ad}^* X_i)(r) \\ &= \mathrm{ad}^*(\,\log w)(r), \end{aligned}$$

avec

$$\log w = \sum_{i=1}^{c} a_i X_i \in \mathcal{X} \subset \mathfrak{w} \subset \mathfrak{g}(q).$$

Alors

$$g'(\log n) = - < r, [\log w, \log n] >= 0, \ \forall n \in N, \ \text{car} \ \log w \in \mathfrak{g}(q)$$

$$g'(Y_j) = -\sum_{i=1}^{c} a_i < r, [X_i, Y_j] >= a_j.$$

Donc

$$g'_{/(\mathfrak{p}^0+\mathcal{Y})} = g_{/(\mathfrak{p}^0+\mathcal{Y})},$$

c'est à dire que

$$g - g' \in (\mathfrak{p}^0 + \mathcal{Y})^{\perp}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
r + g &\in g' + r + (\mathfrak{p}^0 + \mathcal{Y})^{\perp} \\
&= g' + \mathrm{Ad}^*(YP^0)(r). \\
&\text{(car } \mathfrak{p}^0 + \mathcal{Y} \text{ est une polarisation de Pukanszky en } r) \\
&\subset \mathrm{ad}^*(\log w)(r) + \mathrm{Ad}^*(H)(r) \\
&\subset \mathrm{Ad}^*(H)(r),
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}^*(\log w)(r) + \mathrm{Ad}^*(h)(r) &= \mathrm{Ad}^*(h)(\mathrm{Ad}^* w)(r) \\
&= \mathrm{Ad}^*(hw)(r).
\end{aligned}$$

pour tout $h \in H$. ■

2.2.13. Remarques:

1) *La représentation γ ne depend pas (à équivalence unitaire près) du prolongement l de q choisi. Car, si r_1 et r sont deux prolongements distincts, de q, alors r_1 et r sont dans la même orbite (2.2.12).*

2) *Des représentations $\tilde{\gamma}_l$ obtenues pour des prolongements l distincts de q diffèrent par un caractère unitaire sur U, car les orbites correspondantes sont différentes.*

2.2.14. Proposition:

Soit $\gamma = ind_{YP^0}^{H} \chi_r$. Soit χ un caractère sur H tel que $\chi_{/N} \equiv 1$. Alors γ et $\gamma \otimes \chi$ sont deux représentations unitairement équivalentes.

Preuve:

Par définition, γ et $\gamma \otimes \chi$ agissent sur le même espace $\mathcal{H}_\gamma$. Comme γ est irréductible, il en est de même de $\gamma \otimes \chi$. Posons

$$\chi(h) = e^{-i<g, \log h>} = \chi_g(h),$$

avec $g \in \mathfrak{n}^{\perp}$. Donc $r + g \in r + \mathfrak{n}^{\perp} \subset (\mathrm{Ad}^* H)(r)$ par (2.2.12) et $r + g = \mathrm{Ad}^*(h)(r)$ avec $h \in H$.

On vérifie facilement que les représentations $\gamma\otimes\chi$ et $\gamma_1 = \mathrm{ind}_{Y\cdot P^0}^{H}\chi_{r-g}$ sont unitairement équivalentes. En effet, si $\mathcal{H}_\gamma$ et $\mathcal{H}_1$ désignent les espaces des représentations $\gamma\otimes\chi$ et γ_1 respectivement, alors l'équivalence unitaire est donnée par:

$$\begin{aligned} \Phi : \ \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \ \mathcal{H}_\gamma \\ \xi &\longmapsto \ (\Phi\xi)(y) = \chi(y)\xi(y). \end{aligned}$$

Par conséquent, γ_1 est irréductible et γ_1 est unitairement équivalente à γ, puisque $r+g = \mathrm{Ad}^*(h)(r)$ appartient à l'orbite de r. Finalement, $\gamma\otimes\chi$ et γ sont également unitairement équivalentes. ■

2.2.15. Corollaire:
Soit p_λ un élément de $L^1(H)$ tel que

$$\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda}.$$

Alors $T(p_\lambda)V \neq 0$.

Preuve:
Par (2.2.10). ■

2.3. Construction des sous-algèbres particulières

2.3.1. Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de la forme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{h}, \quad \text{où } \mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}(l), \ \mathfrak{u}\cap\mathfrak{n} = \{0\}.$$

Nous identifions G/H et $U = \exp(\mathfrak{u})$. Alors les éléments de G se décomposent de manière unique en

$$g = u\cdot h \ \text{ avec } u\in U, h\in H.$$

Munissons G/H de la mesure de Lebegue et H d'une mesure de Haar. Alors nous obtenons une mesure de Haar définie sur G par

$$\int_G f(g)\ dg = \int_U \int_H f(\exp(u)\cdot h)\ dh\ du.$$

Construisons l'algèbre $A' = L^1(G/H, L^1(H))$ constituée des toutes les fonctions integrables de G/H dans $L^1(H)$. On verra plus loin que A' est isomorphe à $L^1(G)$ par l'application qui à tout $f \in L^1(G)$ associe $\tilde{f} \in A'$ telle que

$$\tilde{f}(u)(h) = f(u\cdot h),\ u \in U, h \in H.$$

Notons par $\triangle_H$ et $\triangle_G$ les fonctions modulaires sur H et sur G. Puisque U agit sur H par conjugaison, il existe une fonction modulaire δ telle que

$$d(\exp(u_0)\cdot h\cdot \exp(-u_0)) = \delta(\exp(u_0))^{-1}dh.$$

Alors on a

$$\triangle_G(\exp(u_0)\cdot h_0) = \delta(\exp(u_0))\cdot \triangle_H(h_0).$$

c'est à dire que $\delta = \triangle_{G/U}$ et $\triangle_H = \triangle_G/H$ En effet

$$\begin{aligned}
\triangle_G(\exp(u_0)\cdot h_0) & \int_{\mathfrak{u}}\int_H f(\exp(u)\cdot h)dhdu \\
& = \int_{\mathfrak{u}}\int_H f(\exp(u)\cdot h\cdot h_0^{-1}\cdot \exp(-u_0))dh\ du \\
& = \triangle_H(h_0)\int_{\mathfrak{u}}\int_H f(\exp(u)\cdot h\cdot \exp(-u_0))dh\ du \\
& \text{(vu la fonction modulaire sur } H) \\
& = \triangle_H(h_0)\int_{\mathfrak{u}}\int_H f(\exp(u-u_0)\cdot[\exp(u_0)\cdot h\cdot \exp(-u_0)]) \\
& \cdot \delta(\exp(u_0))d(\exp(u_0)\cdot h\cdot \exp(-u_0))\ du \\
& = \triangle_H(h_0)\delta(\exp(u_0))\int_{\mathfrak{u}}\int_H f(\exp(u)\cdot h)dh\ du \\
& \text{(vu la mesure de Lebegue sur } \mathfrak{u}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\triangle_G(\exp(u_0)\cdot h_0) = \delta(\exp(u_0))\,\triangle_H\,(h_0).$$

Alors l'involution dans $L^1(G)$ est donnée par

$$f^*(g) = \triangle_G^{-1}(g)\overline{f(g^{-1})},\ \forall g \in G, f \in L^1(G).$$

et celle dans $L^1(H)$ est donnée par

$$f^{*_{L^1(H)}}(h) = \triangle_{G/H}^{-1}(h)\overline{f(h^{-1})},\ \forall h \in H, f \in L^1(H).$$

Alors on a les définitions suivantes:

Définitions:

i) Pour l'algèbre $A = L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$ la convolution et involution sont définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned} &f \operatorname{mod}(L^1(G) * \ker(\gamma))^- * g \operatorname{mod}(L^1(G) * \ker(\gamma))^- \\ =&(f * g) \operatorname{mod}(L^1(G) * \ker(\gamma))^-, \end{aligned}$$

et

$$[f \operatorname{mod}\ (L^1(G) * \ker(\gamma))^-]^* = f^* \operatorname{mod}\ (L^1(G) * \ker(\gamma))^-,$$

pour toute $f, g \in A$.

ii) Puisque $U = \exp(\mathfrak{u})$ n'est pas un sous-groupe. Poguntke ([29]) a du introduire la convolution suivante dans $L^1(G/H, L^1(H))$:

Quels que soient $x, y \in U$, on définit

$$\begin{aligned} P_{x,y} :&L^1(H) \longrightarrow L^1(H) \\ &f \longmapsto (P_{x,y}f)(h) = f(\exp(-y)\exp(-x)\exp(x+y)h). \end{aligned}$$

Alors le produit de convolution dans $L^1(G/H, L^1(H))$ est défini par

$$\begin{aligned} (\tilde{f} *_{A'} \tilde{g})(\exp(u_0)) = \int_{\mathfrak{u}} &[P_{u_0+u,-u}(\tilde{f}(\exp(u_0+u))^{\exp(-u)})] \\ &*_{L^1(H)} \tilde{g}(\exp(-u))du \quad \forall \tilde{f}, \tilde{g} \in L^1(G/H, L^1(H)). \end{aligned}$$

Finalement Poguntke ([29]) a introduit dans $L^1(G/H.L^1(H))$ l'involution suivante:

$$(\tilde{f})^*(\exp(u)) = \left[\left(\tilde{f}(\exp(-u))\right)^{\exp(u)}\right]^{*L^1(H)}.$$

pour tout $\tilde{f} \in L^1(G/H, L^1(H))$. Ainsi on peut en déduire le produit de convolution et l'involution dans $\tilde{A} = L^1(G/H. L^1(H)/\ker(\gamma))$:

iii) On se base sur le fait que $\ker(\gamma)$ est G-invariant:

Dans $L^1(H)/\ker(\gamma)$:

$$\begin{aligned}
&(f \mod \ker(\gamma)) *_{L^1(H)/\ker(\gamma)} (g \mod \ker(\gamma)) \\
&\overset{\text{déf}}{=} (f *_H g) \mod \ker(\gamma).
\end{aligned}$$

Dans $L^1(G/H. L^1(H)/\ker(\gamma))$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{f} * \tilde{g}(\exp(u_0)) \mod \ker(\gamma) \\
&= \int_{\mathrm{u}} \left[P_{u_0+u,-u}\left(\tilde{f}(\exp(u_0+u))\right)^{\exp(-\mathrm{u})}\right] *_H \\
&\tilde{g}(\exp(-u))\, du \mod \ker(\gamma) \\
&= \int_{\mathrm{u}} \left[P_{u_0+u,-u}\left(\tilde{f}(\exp(u_0+u))\right)^{\exp(-\mathrm{u})} \mod \ker(\gamma)\right] *_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&[\tilde{g}(\exp(-u)) \mod \ker(\gamma)]\, du.
\end{aligned}$$

De même pour l'involution:

En effet $\ker(\gamma)$ est *-invariant comme γ est unitaires. Alors

$$\begin{aligned}
(\tilde{f})^*(\exp(u)) \mod \ker(\gamma) &= \left[\left(\tilde{f}(\exp(-u))\right)^{\exp(\mathrm{u})}\right]^{*L^1(H)} \mod \ker(\gamma) \\
&= \left[\left(\tilde{f}(\exp(-u))\right)^{\exp(\mathrm{u})} \mod \ker(\gamma)\right]^{*L^1(H)}.
\end{aligned}$$

Alors on la proposition suivante:

2.3.2. Proposition:

Les deux algèbres

$$A = L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$$

et

$$\tilde{A} = L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\tilde{\ }))$$

*sont *-isomorphes et isométriques.*

Preuve:

On définit l'application suivante:

$$\begin{aligned} \phi :\ L^1(G) &\longrightarrow L^1(G/H, L^1(H)) \cong L^1(U, L^1(H)) \\ f &\longrightarrow \tilde{f}, \end{aligned}$$

où $\tilde{f}(\exp(u))(h) = f(\exp(u) \cdot h)$, pour tout $u \in \mathfrak{u}, h \in H$. Il est clair que ϕ est une bijection. En plus ϕ est une isométrie. En effet:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{L^1(G/H,L^1(H))} &= \int_{\mathfrak{u}} \|\tilde{f}(\exp(u))\|_{L^1(H)}\, du \\ &= \int_{\mathfrak{u}} \int_H |\tilde{f}(\exp(u))(h)|\, dhdu \\ &= \int_{\mathfrak{u}} \int_H |f(\exp(u) \cdot h)|\, dhdu \\ &= \|f\|_{L^1(G)}. \end{aligned}$$

En plus ϕ est *-isomorphisme, car nous avons

- $(f * g)\tilde{\ }(\exp(u_0)) = (\tilde{f} *_{A'} \tilde{g})(\exp(u_0))$, et

•• $(\tilde{f})^* = (\tilde{f^*})$.

En effet:

Montrons tout d'abord ($\bullet$). Soient $f, g \in L^1(G)$, alors

$$\begin{aligned}
f * g(\exp(u_0)\cdot h_0) = &\int_{\mathfrak{u}}\int_H f(\exp(u_0)\cdot h_0\cdot \exp(u)\cdot h)\\
&g(h^{-1}\exp(-u))\ dhdu\\
&= \int_{\mathfrak{u}}\int_H f\Big(\exp(u_0+u)\big[\exp(-u_0-u)\exp(u_0)\exp(u)\\
&\big[\exp(-u)h_0\exp(u)]h\big]\Big)\\
&g\Big(\exp(-u)[\exp(u)h^{-1}\exp(-u)]\Big)\ dhdu\\
&= \int_{\mathfrak{u}}\int_H \tilde{f}(\exp(u_0+u))\Big([\exp(-u_0-u)\exp(u_0)\exp(u)]\\
&[\exp(-u)h_0\exp(u)]h\Big)\\
&\tilde{g}(\exp(-u))\Big([\exp(u)h^{-1}\exp(-u)]\Big)\ dhdu.
\end{aligned}$$

En remplaçant dh par $\triangle_{G/U}(\exp(u))d(\exp(u)\cdot h\cdot\exp(-u))$, nous avons

$$\begin{aligned}
f * g(\exp(u_0)\cdot h_0) = &\int_{\mathfrak{u}}\int_H \triangle_{G/U}(\exp(u))\tilde{f}(\exp(u_0+u))\\
&\Big([\exp(-u_0-u)\exp(u_0)\exp(u)][\exp(-u)h_0\exp(u)]h\Big)\\
&\tilde{g}(\exp(-u))\Big([\exp(u)h^{-1}\exp(-u)]\Big)\\
&d(\exp(u)h\exp(-u))du\\
&= \int_{\mathfrak{u}}\int_H \triangle_{G/U}(\exp(u))\tilde{f}(\exp(u_0+u))\\
&\Big(\exp(-u_0-u)\exp(u_0)h_0h\exp(u)\Big)\\
&\tilde{g}(\exp(-u))(h^{-1})\ dhdu\\
&= \int_{\mathfrak{u}}\int_H \triangle_{G/U}(\exp(u))\tilde{f}(\exp(u_0+u))\\
&\Big(\exp(-u)[(\exp(u)\exp(-u_0-u)\exp(u_0)\cdot h_0\cdot h)]\exp(u)\Big)\\
&\tilde{g}(\exp(-u))(h^{-1})\ dhdu.
\end{aligned}$$

Or l'action de G (resp G/H) sur $L^1(H)$ est définie par:

$$f^x(h) = \triangle_G(x)^{-1} f(xhx^{-1})$$

et

$$f^{\exp(u)}(h) = \triangle_{G/U}(\exp(u))^{-1} f(\exp(u)\ h\ \exp(-u)).$$
$$\forall f \in L^1(H),\ x \in G,\ u \in \mathfrak{u}.$$

Alors

$$f * g(\exp(u_0) \cdot h_0) = \int_{\mathfrak{u}} \int_H \left([\tilde{f}(\exp(u_0 + u))\right]^{\exp(-u)}$$
$$\Big(\exp(u)\exp(-u_0 - u)\exp(u_0) \cdot h_0 \cdot h\Big)$$
$$\tilde{g}(\exp(-u))(h^{-1})\ dhdu$$

$$= \int_{\mathfrak{u}} \int_H P_{u_0+u,-u}\big(\big[\tilde{f}(\exp(u_0 + u))\big]^{\exp(-u)}\big)$$
$$(h_0 \cdot h)$$
$$\tilde{g}(\exp(-u))(h^{-1})\ dhdu$$
$$= \int_{\mathfrak{u}} \big[P_{u_0+u,-u}\big(\tilde{f}(\exp(u_0 + u))\big)^{\exp(-u)}\big] *_H$$
$$\big[\tilde{g}(\exp(-u))\big](h_0)\ du.$$

C'est à dire que

$$(f *_G g)\tilde{}\ (\exp(u_0)) = \int_{\mathfrak{u}} \big[P_{u_0+u,-u}$$
$$\big(\tilde{f}(\exp(u_0 + u))\big)^{\exp(-u)}\big] *_H \tilde{g}(\exp(-u))\ du$$
$$\overset{\text{déf}}{=} \tilde{f} *_{A'} \tilde{g}(\exp(u_0)).$$

Donc ϕ est un isomorphisme.

Montrons maintenant ($\bullet\bullet$):

Rappelons que l'involution dans $L^1(G)$ est donnée par

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\ \triangle_G\ (x^{-1}),\ \forall f \in L^1(G).$$

et $\triangle_G$ est la fonction modulaire pour la mesure de Haar sur $L^1(G)$. Alors

$$\begin{aligned}
(f^*)\tilde{}(\exp(u))(h) &= f^*(\exp(u)\cdot h) \\
&= \overline{f(h^{-1}\exp(-u))}\,\triangle_{G/H}(h^{-1})\triangle_{G/U}(\exp(-u)) \\
&= \overline{f\Big(\exp(-u)\cdot[\exp(u)\cdot h\cdot\exp(-u)]^{-1}\Big)} \\
&\cdot \triangle_{G/H}(h^{-1})\triangle_{G/U}(\exp(-u)) \\
&= \overline{\tilde{f}(\exp(-u))\Big([\exp(u)\cdot h\cdot\exp(-u)]^{-1}\Big)} \\
&\cdot \triangle_{G/H}(h^{-1})\triangle_{G/U}(\exp(-u)) \\
&= \overline{\tilde{f}(\exp(-u))\Big(\exp(u)\cdot h^{-1}\cdot\exp(-u)\Big)} \\
&\cdot \triangle_{G/H}(h^{-1})\triangle_{G/U}(\exp(-u)) \\
&= \overline{\tilde{f}(\exp(-u))^{\exp u}(h^{-1})}\,\triangle_{G/H}\,(h^{-1}) \\
&= (\tilde{f}(\exp(-u))^{\exp u})^{*_H}(h) \\
&\overset{\text{déf}}{=} (\tilde{f})^*(\exp(u)))(h).
\end{aligned}$$

De ce qui précéde on en déduit que ϕ est un *-isomorphisme.
Définissons maintenant la projection suivante:

$$\begin{aligned}
P: &L^1(G/H, L^1(H)) \longrightarrow L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) \\
&f \longrightarrow P(f)/\ (P(f))(\exp(u)) = f(\exp(u)) \bmod \ker(\gamma).
\end{aligned}$$

Alors P est un *-homomorphisme. par définition du produit de convolution dans $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$.
Considérons alors le *-homomorphisme

$$\Phi = P\circ\phi : L^1(G) \longrightarrow L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)).$$

Calculons le noyau de Φ

$$\begin{aligned}
\ker(\Phi) &= \{f\in L^1(G)\mid \quad h\longrightarrow f(gh)\in\ker(\gamma),\ \forall g\in G\} \\
&= \{f\in L^1(G)\mid \quad (\,_g f)/H\in\ker(\gamma),\ \forall g\in G\} \\
&= (L^1(G)*\ker(\gamma))^-\ ([12]) \quad (*).
\end{aligned}$$

Donc les deux algèbres $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$ et $L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$ sont *-isomorphes. De plus, si on munit $L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$ et $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$ respectivement des normes

$$\|f\|_{L^1(G)/(L^1(G)*\ker(\gamma))^-} = \inf\{\|f+g\|_1 \mid \quad g \in (L^1(G) * \ker(\gamma))^-\}$$

et

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))} &= \int_{\mathrm{u}} \|\tilde{f}(\exp(u)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)}\, du \\ &= \int_{\mathrm{u}} \inf_{g \in \ker(\gamma)} .\|\tilde{f}(\exp(u)) + g\|_{L^1(H)}\, du. \end{aligned}$$

ces deux espaces sont isométriques. En effet, soit $f \in L^1(G)$. Alors

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(G)/(L^1(G)* \ker(\gamma))^-} &= \inf\{\|f+g\|_1 \mid \quad g \in (L^1(G) * \ker(\gamma))^-\} \\ &= \inf_{g \in (L^1(G)* \ker(\gamma))^-} \int_{G/H} \|\tilde{f}(x) + g(x)\|_{L^1(H)} \\ & d\dot{x}. \end{aligned}$$

Nous avons que

$$g \in (L^1(G) * \ker(\gamma))^- \Longleftrightarrow g \text{ est approché par des fonctions de la forme } \sum_i g_i * a_i \text{ avec } g_i \in L^1(G), a_i \in \ker(\gamma).$$

Or, pour $u' \cdot h' \in G/H \cdot H$, pour $g \in L^1(G)$, $a \in \ker(\gamma)$:

$$\begin{aligned} g * a(u'h') &= \int_H g(u'h'h)a(h^{-1})dh \\ &= \int_H \tilde{g}(u')(h'h)a(h^{-1})dh \\ &= (\tilde{g}(u') *_H a)(h'), \end{aligned}$$

c'est à dire que

$$\underbrace{(g * a)\tilde{}(u')}_{\in L^1(H)} = g(u') *_H a.$$

Donc

$$\begin{aligned}a \in \ker(\gamma) &\Longrightarrow g(u') *_H a \in \ker(\gamma)\\ &\Longrightarrow (g * a)(u') \in \ker(\gamma),\ \forall u' \in U.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\forall u \in U \equiv G/H,\ \forall g \in (L^1(G) * \ker(\gamma))^-,\\ &g(u) = \sum_i (g_i * a_i)\tilde{}(u) \in \ker(\gamma),\ \forall u \in U.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(G)|(L^1(G)* \ker(\gamma))^-} &= \inf\{\|f+g\|_1 \mid \quad g \in (L^1(G) * \ker(\gamma))^-\}\\ &= \inf_{g\in(L^1(G)* \ker(\gamma))^-} \int_{G/H} \|\tilde{f}(u) + \tilde{g}(u)\|_{L^1(H)}\\ &d\dot{u}.\\ &\geq \int_{G/H} \inf_{g\in(L^1(G)* \ker(\gamma))^-} \|\tilde{f}(u) + \tilde{g}(u)\|_{L^1(H)}\\ &d\dot{u}\\ &\geq \int_{G/H} \inf_{\tilde{g}\in \ker(\gamma)} \|\tilde{f}(u) + \tilde{g}\|_{L^1(H)}\\ &d\dot{u}\\ &= \int_{G/H} \|\tilde{f}(u)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)}\ d\dot{u}\\ &= \|\tilde{f}\|_{L^1(G/H,L^1(H)/\ker(\gamma))}.\end{aligned}$$

Pour l'autre inégalité:
L'identification de $L^1(G)$ et $L^1(G/H, L^1(H))$ nous permet d'identifier

$$L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^- \text{ et } L^1(G/H, L^1(H))/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-.$$

Or

$$\begin{aligned}(L^1(G) * \ker(\gamma))^- &= \{f \in L^1(G/H, L^1(H))/\tilde{f}(x) \in \ker(\gamma)\\ &\quad, \forall x \in G/H \equiv U\}\\ &= L^1(G/H, \ker(\gamma)),\ \text{voir}((2.3.2), (*)).\end{aligned}$$

Donc on peut aussi identifier les espaces de Banach

$$L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^- \text{ et } L^1(G/H, L^1(H))/L^1(G/H, \ker(\gamma)).$$

Soit

$$\begin{aligned} i : L^1(G/H, L^1(H))/L^1(G/H, \ker(\gamma)) &\longrightarrow L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) \\ f &\longmapsto \tilde{f} \mid \tilde{f}(x) \in L^1(H)/\ker(\gamma). \end{aligned}$$

Alors i est bien définie. De plus

$$\|f\|_{L^1(G/H, L^1(H))/L^1(G/H, \ker(\gamma))} \leq \|i(f)\|_{L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))},$$

car les fonctions étagées vérifient cette inégalitée. Donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(G)/(L^1(G)*\ker(\gamma))^-} &= \|f\|_{L^1(G/H, L^1(H))/L^1(G/H, \ker(\gamma))} \\ &\leq \|i(f)\|_{L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))} \\ &= \|\tilde{f}(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\ &= \|f\|_{L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))}. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'isométrie.
On en déduit que les deux algèbres $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$ et $L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$ sont *-isomorphes (isométriques). ∎

Nous commençons maintenant la construction d'une sous-algèbre de $L^(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$ qui jouera un rôle essentiel dans la suite.
2.3.3. Soit p_λ la fonction définie précédement (2.2.5), telle que $\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda}$. Alors un calcul facile nous permet de dire que

$$(p_\lambda * f * p_\lambda)\tilde{}(x) = p_\lambda^x *_H (\tilde{f}(x)) *_H p_\lambda,$$

pour tout $f \in L^1(G)$ et $x \in G$. Ici la définition de $\tilde{f}(x)$ en (2.3.1) a été étendue à tout $x \in G$.

2.3.4. Revenons à la représentation γ et à son extension $\tilde{\gamma}$. On a les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
\gamma(p_\lambda^x) &= P_{\tilde{\gamma}(x)^*\lambda,\tilde{\gamma}(x)^*\lambda} \\
&= P_{\tilde{\gamma}(x^{-1})\lambda,\tilde{\gamma}(x^{-1})\lambda} \\
\gamma(p_\lambda^x * f * p_\lambda) &=< \gamma(f)\lambda, \tilde{\gamma}(x)^*\lambda > P_{\tilde{\gamma}(x)^*\lambda,\lambda} \quad \text{pour } f \in L^1(H), x \in G \\
&= c(x,f) < \cdot,\ \lambda > \tilde{\gamma}(x)^*\lambda.
\end{aligned}$$

où $c(x,f)$ est une constante dépendante de x et de f. Puisque $\lambda \in C_c^\infty(H/P^1)$, il en est de même de $\tilde{\gamma}(x)^*\lambda$. Alors d'après ([19]), il existe une fonction $v_\lambda(x) \in L^1(H)$ tel que

$$\gamma(v_\lambda(x)) = P_{\tilde{\gamma}(x^{-1})\lambda,\lambda} =< \cdot,\ \lambda > \tilde{\gamma}(x^{-1})\lambda.$$

Donc, pour tout $f \in L^1(H)/\ker(\gamma)$ et tout $x \in G$, il existe une constante $c(x,f)$ telle que

$$p_\lambda^x * f * p_\lambda = c(x,f) \cdot v_\lambda(x) \mod \ker(\gamma).$$

De plus

$$p_\lambda^x * v_\lambda(x) * p_\lambda = v_\lambda(x) \mod \ker(\gamma).$$

Notons

$$\tilde{p} = p_\lambda \mod \ker(\gamma), \qquad v(x) = v_\lambda(x) \mod \ker(\gamma)$$

pour les fonctions correspondantes dans l'espace quotient. Alors

$$\tilde{p}^x * (L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p} = (p_\lambda^x * L^1(H) * p_\lambda)/\ker(\gamma)$$

est de dimension 1 pour un $x \in G$ fixé et admet $v(x)$ comme base.

2.3.5. Définition:

On appelle poids ω sur G toute application

$$\omega : G \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

mesurable, localement bornée, continue en 0, vérifiant

$$\begin{aligned}
&\omega(x) \ \geq 1, \quad \forall, \ x \in G \\
&\omega(x \cdot y) \ \leq \omega(x)\omega(y), \quad \forall \ x, y \in G \\
&\omega(x^{-1}) = \omega(x), \ \forall x \in G.
\end{aligned}$$

Alors on a la proposition suivante:

Proposition:
La fonction ω, où $\omega(x) = \|v(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)}$ est un poids symétrique sur G constant sur les classes modulo H.

Preuve:
Nous avons les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
\textbf{a)} \quad \gamma(v_\lambda(x)) &= < \cdot, \lambda > \tilde{\gamma}(x)^* \lambda \\
&= \tilde{\gamma}(x)^{-1} \circ P_{\lambda,\lambda} \\
&= \tilde{\gamma}(x) \circ \gamma(p_\lambda).
\end{aligned}$$

et

$$\textbf{b)} \qquad \gamma(v_\lambda(xy)) = \gamma(v_\lambda(x)^y *_H v_\lambda(y)).$$

En effet:

$$\begin{aligned}
\gamma(v_\lambda(xy)) &= \tilde{\gamma}(y^{-1}x^{-1}) \circ P_{\lambda,\lambda} \\
&= \tilde{\gamma}(y^{-1})(\tilde{\gamma}(x^{-1}) \circ P_{\lambda,\lambda}) \\
&= (\tilde{\gamma}(y)^{-1} \circ (\gamma(v_\lambda(x))P_{\lambda,\lambda} \\
&= [\tilde{\gamma}(y)^{-1} \circ \gamma((v_\lambda(x)) \circ \tilde{\gamma}(y)]\tilde{\gamma}(y)^{-1}P_{\lambda,\lambda} \\
&= \gamma\big(v_\lambda(x)^y *_H v_\lambda(y)\big).
\end{aligned}$$

Donc on a bien que:

$$v_\lambda(xy) = v_\lambda(x)^y * v_\lambda(y) \mod \ker(\gamma).$$

D'où le fait que

$$\begin{aligned}\omega(xy) &= \|v(x)^y * v(y)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\ &\leq \|v(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \cdot \|v(y)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\ &= \omega(x) \cdot \omega(y).\end{aligned}$$

c) $\|\gamma(v_\lambda(x))\|_{\text{op}} = 1$, en effet:

$$\begin{aligned}\|\gamma(v_\lambda(x))\xi\| &= |<\xi,\lambda>| \cdot \|\tilde{\gamma}(x)^{-1}\lambda\|. \forall \xi \in \mathcal{H}_\gamma \\ &= |<\xi,\lambda>| \cdot \|\lambda\|, \quad \text{car } \tilde{\gamma} \quad \text{est unitaire} \\ &\leq \|\xi\| \cdot \|\lambda\|^2 \\ &= \|\xi\|.\end{aligned}$$

Donc $\|\gamma(v_\lambda(x))\|_{\text{op}} \leq 1$. D'autre part, nous avons que

$$\|\gamma(v_\lambda(x))\lambda\| = |<\lambda,\lambda>| \cdot \|\tilde{\gamma}(x)^{-1}\lambda\| = 1.$$

Donc nous obtenons que $\|\gamma(v_\lambda(x))\|_{\text{op}} = 1$. Alors

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \inf_{r\in\ker(\gamma)} \|v_\lambda(x) + r\|_{L^1(H)} \\ &\geq \inf_{r\in\ker(\gamma)} \|\gamma\big(v_\lambda(x) + r\big)\|_{\text{op}} \\ &= \|\gamma(v_\lambda(x))\|_{\text{op}}. \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\omega(x) \geq 1$. Montrons maintenant que $\omega(x) = \omega(x^{-1})$. Pour ceci on utilise le fait que

$$\gamma\big((v_\lambda(x^{-1})^x)^*\big) = \gamma(v_\lambda(x)).$$

car

$$\begin{aligned}\gamma\big((v_\lambda(x^{-1})^x)^*\big) &= \big(\gamma(v_\lambda(x^{-1})^x)\big)^* \\ &= \big(\tilde{\gamma}(x)^*[\gamma(v_\lambda(x^{-1}))]^*\tilde{\gamma}(x)\big) \\ &= \big(\tilde{\gamma}(x)^*[\tilde{\gamma}(x)P_{\lambda,\lambda}]^*\tilde{\gamma}(x)\big) \\ &= \big(\tilde{\gamma}(x)^*P_{\lambda,\lambda}\tilde{\gamma}(x)^*\tilde{\gamma}(x)\big) \\ &= \tilde{\gamma}(x)^*P_{\lambda,\lambda} \\ &= \gamma(v_\lambda(x)).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \|v(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} = \|(v(x^{-1})^x)^*\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&= \|v(x^{-1})^x\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&= \|v(x^{-1})\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&= \omega(x^{-1}).
\end{aligned}$$

Montrons que ω est constant sur H. En effet

$$\gamma(v_\lambda(h)) = \tilde{\gamma}(h^{-1})\gamma(p_\lambda) = \gamma({}_{h^{-1}}p_\lambda).$$

Alors $v(h) = {}_{h^{-1}}p_\lambda \mod \ker(\gamma)$, et

$$\omega(h) = \|v(h)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} = \|{}_{h^{-1}}\tilde{p}\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} = C.$$

où C est une constante indépendante de h. En plus ω est constant sur les classes modulo H. En effet

$$\begin{aligned}
\gamma(v_\lambda(xh)) &= \tilde{\gamma}(h^{-1}x^{-1})\gamma(p_\lambda) \\
&= \gamma(h^{-1})\tilde{\gamma}(x^{-1})\gamma(p_\lambda) \\
&= \gamma(h^{-1})\gamma(v_\lambda(x)) \\
&= \gamma({}_{h^{-1}}v_\lambda(x)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\omega(xh) &= \|v(xh)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&= \|{}_{h^{-1}}v(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&= \|v(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&= \omega(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que ω est un poids symétrique sur G, constant sur les classes modulo H. Cette preuve a eté déja faite dans ([27]). ■

2.3.6. Considérons donc l'algèbre $L^1(G/H,\omega) \cong L^1(U,\omega)$, formée des toutes les fonctions mésurables f de $G/H \equiv U = \exp(\mathfrak{u}) \equiv \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ vérifiants

$$\|f\|_\omega = \int_{G/H} f(x)\omega(x)\ dx < \infty.$$

où ω est le poids défini précédement. Alors on a la définition suivante:

Définition:

On définit la convolution suivante dans $L^1(G/H,\omega) \cong L^1(\mathbb{R}^n,\omega)$:

$$h * h_1(\exp(u)) = \int_{\mathfrak{u}} h(\exp(u-u'))h_1(\exp(u'))\ du',$$
$$\forall h, h_1 \in L^1(G/H,\omega),$$

ainsi que l'involution

$$h^*(\exp(u)) = \overline{h(\exp(-u))}, \forall h \in L^1(G/H,\omega).$$

Le résultat suivant a été décrit dans ([29]).

2.3.7. Proposition:

Les deux algèbres

$$L^1(G/H,\omega) \cong L^1(\mathbb{R}^n,\omega)$$

et

$$\tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$$

*sont *-isomorphes et isométriques.*

Preuve:

On définit l'application:

$$\Lambda:\ L^1(G/H,\omega) \longrightarrow \tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$$
$$h \longrightarrow h' /\ h'(x) = h(x)\cdot v(x),\ \forall x \in U.$$

Il est clair que $h' \in \tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$, car

$$\begin{aligned}(\tilde{p} * h' * \tilde{p})(x) &= \tilde{p}^x *_{\tilde{H}} h'(x) *_{\tilde{H}} \tilde{p} \\ &= \tilde{p}^x *_{\tilde{H}} (h(x) \cdot v(x)) *_{\tilde{H}} \tilde{p} \\ &= h(x) \cdot \tilde{p}^x *_{\tilde{H}} (v(x)) *_{\tilde{H}} \tilde{p} \\ &= h(x) \cdot v(x),\end{aligned}$$

où $\tilde{H} = L^1(H)/\ker(\gamma)$. En plus

$$\|h'\|_{\tilde{p}*L^1(G/H,L^1(H)/\ker(\gamma))*\tilde{p}} = \|h\|_{L^1(G/H,\omega)}.$$

en effet

$$\begin{aligned}\|h'\|_{\tilde{p}*L^1(G/H,L^1(H)/\ker(\gamma))*\tilde{p}} &= \int_{G/H} \|h'(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} d\dot{x} \\ &= \int_{G/H} |h(x)|\omega(x) d\dot{x} \\ &= \|h\|_{L^1(G/H,\omega)}.\end{aligned}$$

c'est à dire que Λ est une isométrie. Montrons que Λ est un $*$-isomorphisme:

• Λ est surjective:

Soit $f \in L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$. Donc

$$\begin{aligned}(\tilde{p} * f * \tilde{p})(x) &= \tilde{p}^x *_{\tilde{H}} f(x) *_{\tilde{H}} \tilde{p} \\ &\in \tilde{p}^x * \left(L^1(H)/\ker(\gamma)\right) * \tilde{p} = \mathbb{C} \cdot v(x).\end{aligned}$$

Alors il existe $h(x) \in \mathbb{C}$ telle que

$$(\tilde{p} * f * \tilde{p})(x) = h(x) \cdot v(x).$$

Montrons maintenant que $h \in L^1(G/H, \omega)$, en effet:

Par hypothèse, x parcourt G/H. En plus

$$\begin{aligned}
\int_{G/H} |h(x)|\omega(x)d\dot{x} &= \int_{G/H} |h(x)| \; \|v(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \; d\dot{x} \\
&= \int_{G/H} \|\tilde{p}^x *_{\tilde{H}} f(x) *_{\tilde{H}} \tilde{p}\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \; d\dot{x} \\
&\leq \int_{G/H} \|\tilde{p}^x\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \|f(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\
&\|\tilde{p}\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \; d\dot{x} \\
&\leq \|\tilde{p}\|^2_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \int_{G/H} \|f(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \; d\dot{x} \\
&\leq \|\tilde{p}\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)}{}^2 \|f\|_{L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

•• Λ est injective:

Supposons que $h(x)v(x) = 0$ dans $L^1(H)/\ker(\gamma)$, presque partout en x. Alors

$$\begin{aligned}
&\|h(x)v(x)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} = 0 \qquad \text{p.p } x \\
&\Longrightarrow |h(x)| \underbrace{\omega(x)}_{\geq 1} = 0 \qquad \text{p.p } x \\
&\Longrightarrow h(x) = 0 \qquad \text{p.p } x \\
&\Longrightarrow h = 0 \qquad \text{dans } L^1(G/H, \omega).
\end{aligned}$$

Par linéarité on en déduit l'injectivité.

••• Λ est *-homomorphisme:

Soient à présent $f = (h \cdot v)$ et $g = (h_1 \cdot v)$ deux fonctions dans $\tilde{p} *$

$L^1(G/H.L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$. Alors

$$
\begin{aligned}
& f * g(\exp(u_0)\cdot h_0) \\
&= \int_{G/H}\int_H \triangle_{G/U}(\exp(u))h(\exp(u_0+u))v(\exp(u_0+u)) \\
& \Big(\exp(-u)\big[\exp(u)\exp(-u_0-u)\exp(u_0)h_0h\big]\exp(u)\Big) \\
& h_1(\exp(-u))v(\exp(-u))(h^{-1})\, dhdv \\
&= \int_{G/H}\int_H h(\exp(u_0+u))h_1(\exp(-u)) \\
& v(\exp(u_0+u))^{\exp(-u)}\Big(\exp(u)\exp(-u_0-u)\exp(u_0)h_0h\Big) \\
& v(\exp(-u))(h^{-1})\, dhdu \\
&= \int_{G/H} h(\exp(u_0+u))h_1(\exp(-u))\int_H \\
& v(\exp(u_0+u))^{\exp(-u)}\Big(\exp(u)\exp(-u_0-u)\exp(u_0)h_0h\Big) \\
& v(\exp(-u))(h^{-1})\, dhdu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{G/H} h(\exp(u_0+u))h_1(\exp(-u))\int_H \\
& {}_{(\exp(-u_0)\exp(u_0+u)\exp(-u))}\Big[v(\exp(u_0+u))^{\exp-u}\Big](h_0h) \\
& v(\exp(-u))(h^{-1})\, dhdu \\
&= \int_{G/H} h(\exp(u_0+u))h_1(\exp(-u)) \\
& \Big[{}_{(\exp(-u_0)\exp(u_0+u)\exp(-u))}\big[v(\exp(u_0+u))^{\exp(-u)}\big]\Big] \\
& *_{\tilde{H}}\big[v(\exp(-u))\big](h_0)\, du.
\end{aligned}
$$

Or on travaille seulement modulo $\ker(\gamma)$ et

$$
\begin{aligned}
& \gamma\Big(\Big[{}_{(\exp(-u_0)\exp(u_0+u)\exp(-u))}\Big[v(\exp(u_0+u)))^{\exp(-u)}\Big]\Big) \\
& *_{\tilde{H}}\big[v(\exp(-u))\big] \\
&= \gamma\Big(\exp(-u_0)\exp(u_0+u)\exp(-u)\Big)\tilde{\gamma}(\exp(u))\gamma\big(v(\exp(u_0+u))\big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\gamma}(\exp(-u))\gamma(v(\exp(-u)))\\
&= \tilde{\gamma}(\exp(-u_0))\tilde{\gamma}(\exp(u_0+u))\tilde{\gamma}(\exp(-u_0-u))\gamma(p_\lambda)\\
&\tilde{\gamma}(\exp(-u))\tilde{\gamma}(\exp(u))\gamma(p_\lambda)\\
&= \tilde{\gamma}(\exp(-u_0))\gamma(p_\lambda)\\
&= \gamma(v_\lambda(\exp(u_0))).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\Big[{}_{(\exp(-u_0)\exp(u_0+u)\exp(-u))}\big[v(\exp(u_0+u))^{\exp(-u)}\big]\Big]\\
&*_{\tilde{H}}\ [v(\exp(-u))]\\
&= v_\lambda(\exp(u_0)) \mod \ker(\gamma).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f*g(\exp(u_0)\cdot h_0) = \int_{G/H} & h(\exp(u_0+u))h_1(\exp(-u))\\
& v_\lambda(\exp(u_0))(h_0)\, du \mod \ker(\gamma)\\
& = h*h_1(\exp(u_0))v(\exp(u_0))(h_0).
\end{aligned}$$

Alors $\Lambda(h*h_1) = \Lambda(h)*\Lambda(h_1)$. Donc Λ est un isomorphisme.
Montrons que Λ est un $*$-isomorphisme.
Soit $f \in \tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$. Alors

$$\begin{aligned}
&(f)^{*_{\tilde{A}}}(\exp(u)\cdot h)\\
&= \big(f(\exp(-u))^{\exp(u)}\big)^{*_{\tilde{H}}}(h).
\end{aligned}$$

Pour $f = (h\cdot v) \in \tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$, nous avons:

$$\begin{aligned}
&(h\cdot v)^{*_{\tilde{A}}}(\exp(u_0)\cdot h_0)\\
&= \Big[h(\exp(-u_0))f(\exp(-u_0))^{\exp(u_0)}\Big]^{*_{\tilde{H}}}(h_0)\\
&= \triangle_{G/H}(h_0)^{-1}\ \overline{h(\exp(-u_0))}\ \ \overline{v(\exp(-u_0))^{\exp(u_0)}(h_0^{-1})}\\
&= \overline{h(\exp(-u_0))}\big(v(\exp(-u_0))^{\exp(u_0)}\big)^{*_{\tilde{H}}}(h_0).
\end{aligned}$$

Or on travaille modulo $\ker(\gamma)$. Alors

$$
\begin{aligned}
&\gamma\Big(\big(v(\exp(-u_0))^{\exp(u_0)}\big)^{*\tilde{H}}\Big)\\
&= \Big[\gamma\big((v(\exp(-u_0))^{\exp(u_0)}\big)\Big]^{*\tilde{H}}\\
&= \big[\tilde{\gamma}(\exp(-u_0))\gamma\big(v(\exp(-u_0)\big)\tilde{\gamma}(\exp(u_0))\big]^{*\tilde{H}}\\
&= \big[\tilde{\gamma}(\exp(-u_0))\tilde{\gamma}(\exp(u_0)\gamma(p_\lambda)\tilde{\gamma}(\exp(u_0))\big]^{*\tilde{H}}\\
&= \tilde{\gamma}(\exp(-u_0))\gamma(p_\lambda)\\
&= \gamma(v_\lambda(\exp(u_0))).
\end{aligned}
$$

D'où le fait que

$$
\begin{aligned}
&(h \cdot u)^{*\tilde{A}}(\exp(u_0))\\
&= \overline{h(\exp(-u_0))}v_\lambda(\exp(u_0)) \quad \mathrm{mod}\,\ker(\gamma)\\
&= h^*(\exp(u_0))v(\exp(u_0)).
\end{aligned}
$$

c'est à dire que l'application Λ est un $*$-isomorphisme. Alors les deux algèbres $L^1(G/H.\omega)$ et $\tilde{p} * L^1(G/H.L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$ sont $*$-isomorphes(isométriques). ■

2.3.8. Remarques:

1) *Deux prolongements l, l' de q distincts conduisent au même poids. car des prolongements distincts donnent des représentations qui diffèrent par un caractère.*

2) *Rappelons que $p_\lambda \in L^1(H)$ tel que*

$$\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda.\lambda} \;\; avec \; \lambda \in C_c^\infty(H/P^1) \;\; et < \lambda. \lambda >= 1.$$

Soit $p_\nu \in L^1(H)$ tel que

$$\gamma(p_\nu) = P_{\nu.\nu} \;\; avec \; \nu \in C_c^\infty(H/P^1) \;\; et < \nu. \nu >= 1.$$

Alors les algèbres

$$(p_\lambda \;\; mod \;\ker(\gamma)) * L^1(G/H.L^1(H)/\ker(\gamma)) * (p_\lambda \;\; mod \;\ker(\gamma))$$

et

$$((p_\nu \ \ mod\ \ker(\gamma)) * L^1(G/H. L^1(H)/\ker(\gamma)) * (p_\nu \ \ mod\ \ker(\gamma))$$

*sont *-isomorphes et homéomorphes. En effet puisque* $\lambda.\nu \in C_c^\infty(H/P^1)$, *il existe* $r \in L^1(H)$ *tel que* $\gamma(r) = P_{\lambda.\nu}$. *On en déduit que l'application*

$$(p_\lambda \ \ mod\ \ker(\gamma)) * f * (p_\lambda \ \ mod\ \ker(\gamma)) \longrightarrow$$
$$(r^* * p_\lambda \ \ mod \ker(\gamma)) * f * (p_\lambda * r \ \ mod\ \ker(\gamma))$$

*est un *-isomorphisme et un homéomorphisme pour ces deux algèbres. Il suffit donc de faire l'étude pour une seule telle fonction* $\tilde{p}$. *le sous groupe* H *étant fixé.*

Chapitre 3

Représentations algébriquement irréductibles des groupes de Lie résolubles exponentiels

Dans ce chapitre nous étudions les modules simples pour un groupe de Lie résoluble exponentiel G. Pour cela, étant donné un A-module simple V, où A est une algèbre de Banach, P est un opérateur linéaire idempotent agissant à gauche et à droite d'une manière continue sur A, nous allons montrer que $P \cdot V$ est un PAP-module simple si $P \cdot V \neq 0$. Ainsi que $P \cdot V$ est isomorphe à un sous-module d'un A-module simple de la forme A/M, où M est un idéal à gauche de A. Ensuite nous montrons que notre module simple du départ est isomorphe à A/M. Dans l'autre sens, si W est un PAP-module simple, nous allons vérifier l'existence d'un A-module simple V tel que $PV \neq 0$ et W est isomorphe à PV. Donc pour caractériser les $L^1(G)$-modules simples, nous introduisons des nouvelles représentations $\pi_{\bar{p}}^l$ où $\bar{p}$ est un multi-indice et $l \in \mathfrak{g}^*$, qui seront d'une importance capitale dans la suite de ce chapitre. Nous montrons que les représentations $\pi_{\bar{p}}^l$ sont topologiquement irréductibles. Ensuite nous vérifions qu'il existe une fonction $f \in L^1(G)$ tel que l'opérateur $\pi_{\bar{p}}^l(f)$ est de rang un. Ainsi la représentation $\pi_{\bar{p}}^l$ contient un $L^1(G)$-module simple $V_0^{(\bar{p},l)}$ ([23]). Enfin nous essayons de caractériser nos modules simples par les $L^1(G)$-modules simples $V_0^{(\bar{p},l)}$.

3.1. Soit (T, V) un $L^1(G)$-module simple tel que:

$$\mathrm{Ann}_{L^1(N)}V = \ker(T)/L^1(N) = \ker(G \cdot \tau) \text{ ([29])}.$$

où $\tau \in \hat{N}$. Puisque nous avons que :

$$(L^1(G) * \ker(\gamma))^- \subset \ker(T) \text{ (2.2.11)};$$

où γ est la représentation de H décrite en (2.2.3) . Alors V peut être considéré comme un $L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$-module simple. L'algèbre $L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$ est isomorphe à l'algèbre $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$. Donc pour étudier les représentations algébriquement irréductibles de $L^1(G)$, il suffit de regarder les modules simples de l'algèbre

$$L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) \cong L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-;$$

cela se fera en étudiant les représentations algébriquement irréductibles d'une sous-algèbre de la forme

$$\tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p},$$

où $\tilde{p} = p_\lambda \bmod \ker(\gamma)$ est une fonction de $L^1(H)/\ker(\gamma)$, et $\gamma(p_\lambda)$ est un projecteur de rang un.
Nous avons vu dans (2.3.7) que $\tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$ est $*$-isomorphe à $L^1(G/H, \omega)$. Alors il nous reste plus qu'a étudier les représentations algèbriquement irréductibles de $L^1(G/H, \omega)$, et les étendre à l'algèbre $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$ toute entière. D'abord commençons par quelques généralités sur les modules simples, (ou sur les représentations algébriquement irréductibles).

3.2. Soit A une algèbre de Banach. On suppose que A admet une unité approchée bornée. Soit P un opérateur linéaire agissant à gauche et à droite d'une manière continue sur A. Supposons que $P \cdot A \not\equiv 0$, $A \cdot P \not\equiv 0$, que P est idempotent, c'est à dire que $P^2 = P$ et que $a \cdot (P \cdot b) = (a \cdot P) \cdot b$. Alors, vu l'existence d'une unité approchée, on a

$$P(ab) = (Pa)b, \ (ab)P = a(bP); \qquad \forall a, b \in A.$$

Alors on la remarque suivante:

3.3. Remarque:
Soit (T, V) un A-module simple. Fixons $v \in V$ non nul. Alors P agit sur V tout entier par:

$$P \cdot (T(a)v) = T(P \cdot a)v, \ v \in V \ \text{ et } v \neq 0$$

et

$$T(a)(P \cdot v) = T(a \cdot P)v$$

car $V = T(A)v$. Cette action est bien définie vu l'existence d'une unité approchée bornée.

La proposition suivante est un outil considérable dans la construction et la classification des modules simples:

3.4. Proposition:
(1) *Soit (T, V) un A-module simple. Soit P défini comme précédement tel que $P \cdot V \neq 0$. Alors $P \cdot V$ est un PAP-module simple.*
(2) *Soient (T, V), (T', V') deux A-modules simples. Supposons qu'il existe une application ϕ telle que*

$$\phi : PV \longrightarrow PV'$$

Soit un isomorphisme PAP-linéaire. Alors ϕ admet une unique extension en un isomorphisme A-linéaire entre V et V'.

Preuve:

(1) Ecrivons $T(a)v = a \cdot v$ pour $v \in V$. Soit $\xi \in V$ telle que $P \cdot \xi \neq 0$. Alors $A \cdot (P\xi) = V$ car V est un A- module simple . Donc

$$P(A(P\xi)) = (PAP)(P\xi) = PV.$$

D'où le fait que PV est un PAP-module simple .
(2) Soit $w \in PV$, alors $Pw = w \neq 0$. De même soit $w' \in PV'$ tel que $w' = \phi(w)$, alors $Pw' = w' \neq 0$. Alors si une extension Φ de ϕ existe, il faut avoir

$$\Phi(a \cdot w) = a \cdot \Phi(w) = a\phi(w) = a \cdot w'.$$

(a) Montrons maintenant que Φ donnée par

$$\Phi(aw) = aw', \forall a \in A.$$

est bien définie, c'est à dire que

$$aw = 0 \Longleftrightarrow aw' = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} aw \neq 0 &\Longleftrightarrow aPw \neq 0, \;\text{ car } w = Pw \\ &\Longleftrightarrow AaPw = V \;(\text{ car } \; V \; \text{ est } \; A- \text{ module simple}) \\ &\Longleftrightarrow PAaPw = PV \\ &\Longleftrightarrow \phi(PAaPw) = \phi(Pv) \\ &\Longleftrightarrow (PAaP)w' = PV' \\ &\Longleftrightarrow AaPw' = V' \\ &(\text{car } \; AaPw' \neq 0 \; \text{ est un sous-espace invariant de } \; V') \\ &\Longleftrightarrow aPw' \neq 0 \\ &(\text{car } V' \text{ est } \; A\text{- module simple}) \\ &\Longleftrightarrow aw' \neq 0. \end{aligned}$$

D'où le fait que Φ est bien définie sur V tout entier car $A \cdot w = V$. De plus Φ est injective.

(b) Φ est A-linéaire par construction.

(c) Φ est surjective, car tout élément v' de V' peut s'écrire comme $v' = aw'$ puisque $w' \neq 0$ et V' est un A-module simple. Donc v' est l'image de aw par Φ.

(d) La restriction de Φ sur $PV =$ est égale a ϕ. En effet, soit $v \in V$, alors

$$\begin{aligned}\Phi(Pv) = \Phi(Paw) = \Phi((Pa)w) &= Paw' = PaPw' \\ &= PaP\phi(w) \\ &= \phi((PaP)w) \\ &= \phi(Paw) \\ &= \phi(Pv).\end{aligned}$$

Ceci démontre (2). ■

3.5. Proposition:

Tout A-module simple (T, V) peut être identifié à un A-module de la forme A/M où M est un idéal à gauche. Plus précisément, M est maximal modulaire (voir ([6]) pour la définition).

Preuve:

Par ([6]). ■

3.6. Corollaire:

Soient (T, V), (T', V') deux A-modules simples. Soient $0 \neq w \in V$, $0 \neq w' \in V'$. On définit M_w comme

$$M_w = \{a \in A \mid T(a)w = 0\},$$

de même on définit $M_{w'}$ comme

$$M_{w'} = \{a \in A \mid T'(a)w' = 0\}.$$

Alors si $M_w = M_{w'}$, nous avons que les deux modules (T, V), (T, V') sont équivalents.

Preuve:
Par (3.5). ■

3.7. Soit (S, W) un PAP- module simple. Soit (T, V) une extension simple de (S, W) telle que $PV \not\equiv 0$. Soit M_w l'idéal précédent

$$M_w = \{a \in A \mid T(a)w = 0\}$$

où $w \in W$, et $w \neq 0$. Comme W est un PAP-module simple: alors $S(PAP)w = W$.

Proposition:
Sous les hypotèses précédentes, l'idéal M_w est donné par

$$M_w = \{x \in A \mid S(PAxP)w = 0\}.$$

Preuve:
Soit $x \in A$. Alors

$$\begin{aligned} x \in M_w \Longleftrightarrow T(x)w = 0 &\Longleftrightarrow T(x \cdot P)w = 0 \\ &\Longleftrightarrow T(A \cdot x \cdot P)w \equiv 0 \\ &\Longleftrightarrow S(P \cdot AxP)w \equiv T(P \cdot A \cdot xP)w \equiv 0. \end{aligned}$$

car si $T(AxP)w \not\equiv 0$, alors $T(AxP)w = V$ (par simplicité de (T, V)). Donc

$$\begin{aligned} P \cdot T(AxP)w &= T(PAxP)w \\ &= P \cdot V \not\equiv 0 \\ &= W \not\equiv 0. \end{aligned}$$

D'où le fait que $M_w = \{x \in A \mid S(PAxP)w = 0\}$. On peut remarquer que $M_wP \subset M_w$, et que $\forall a \in A,\ a - aP \in M_w$. ■

3.8. Proposition: *Soit*

$$M_w = \{x \in A \mid S(PAxP)w = 0\}.$$

l'idéal précédent. Alors le A-module A/M_w est un A-module simple.

Preuve:
Soient $a_1, a_2 \in A$ tel que $a_1 \notin M_w$. Alors

$$a_1 \notin M_w \Longleftrightarrow \exists a_0 \in A \ \text{ tel que } S(Pa_0a_1P)w \neq 0.$$

Comme W est PAP-module simple, il existe $b_0 \in PAP$ tel que

$$S(b_0(Pa_0a_1P))w = w;$$

on pose $b_1 = b_0Pa_0 \in PA$, car $b_0 \in PAP$. Donc par choix de b_1 nous avons que

$$S((b_1a_1P))w = w = Pw \quad \cdots\cdots (*):$$

car $Pw = w$. On montre maintenant que

$$\begin{aligned}(a_2b_1)a_1 &= a_2 \mod M_w\\ &\Longleftrightarrow (a_2b_1)a_1 - a_2 \in M_w\\ &\Longleftrightarrow 0 = S([Pa(a_2 - (a_2b_1)a_1)P])w, \ \forall a \in A;\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}S(Pa(a_2 - (a_2b_1)a_1)P)w &= S(Paa_2P)w - S(Paa_2b_1a_1P)w\\ &= S(Paa_2P)w - S(Paa_2P)w = 0.\\ &\forall w \in W \ \text{ d'après } (*).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(a_1b_1)a_1 &= a_2 \,\mathrm{mod} M_w\\ &\Longrightarrow a_2 = (a_2b_1)a_1 \mod M_w\end{aligned}$$

c'est à dire $A \cdot a_1/M_w = A/M_w$. D'où le fait que A/M_w est un A-module simple. ■

3.9. Proposition:

Le PAP-module simple (S, W) est isomorphe à un sous-module de A/M_w.

Preuve:

On pose $N = M_w \cap PAP$. Alors on définit:

$$\begin{aligned} \phi : PAP/N &\longrightarrow W \\ \dot{a} &\longrightarrow \phi(\dot{a}) = S(a)w. \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'image de ϕ parcourt W tout entier car W est un PAP-module simple. Par construction ϕ est PAP-linéaire. De plus ϕ est un isomorphisme de PAP-module simple. car W est un PAP-module simple. ■

3.10. Remarques:

1) *Les deux A- modules A/M_w et AP/M_wP peuvent être identifiés par l'isomorphisme Φ*

$$\begin{aligned} \Phi : AP/M_wP &\longrightarrow A/M_w \\ x + M_wP = xP + M_wP &\longrightarrow x + M_w. \end{aligned}$$

2) *On peut déduire que l'extension (T, V) de (S, W) considérée en (3.7.) est isomorphe à A/M_w où*

$$M_w = \{x \in A \mid S(PAxP)w = 0\}$$

d'après (3.4.).

Dans la suite nous identifierons donc les deux modules A/M_w et AP/M_wP. Pour raison de simplicité nous travaillons essentiellement avec le A-module A/M_w.

3.11. Revenons à notre algèbre $L^1(G/H. L^1(H)/\ker(\gamma))$. On pose $A = L^1(G/H. L^1(H)/\ker(\gamma))$. Soit $\tilde{p} = p_\lambda \mod \ker(\gamma)$ telle que $p_\lambda \in L^1(H)$. $\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda.\lambda}$. Alors $\tilde{p}$ agit à gauche et à droite sur A par convolution. Soit $(T. V)$ un $L^1(G)$-module simple tel que $\mathrm{Ann}_{L^1(G)} V = \ker(G \cdot \tau)$. et τ. γ sont les représentations définies en (2.1.2) et (2.2.3). Alors $(T. V)$ est un $L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma))$-module simple par (2.2.11) et (2.3.2). En plus nous avons que $T(\tilde{p})V \neq 0$ (2.2.10). Alors $T(\tilde{p})V$ est un $\tilde{p} * A * \tilde{p}$-module simple (3.4). Or

$$\begin{aligned} \tilde{p} * L^1(G/H. L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p} &\cong L^1(G/H, \omega) \\ &\cong L^1(U. \omega) \equiv L^1(\mathbb{R}^n. \omega) \ (2.3.7). \end{aligned}$$

Donc $T(\tilde{p})V$ est un $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$-module simple. Soit S la restriction de T sur $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$. puisque cette algèbre est commutative. alors S est un caractère χ_T. Donc on en déduit d'après (3.5) et (3.7) que notre module $(T. V)$ est isomorphe au module simple A/M_w. où $M_w = \{f \in A \mid \chi_T(\tilde{p} * A * f * \tilde{p}) \cdot w = 0\}$, et $0 \neq w \in T(\tilde{p})V$.

3.12. Soit $(\pi. V)$ un module topologiquement simple sur un espace de Banach tel que $\pi(L^1(G))$ contienne un opérateur de rang fini. Soit

$$\begin{aligned} V_0 = \{\xi \in V \mid \exists f \in L^1(G) \text{ tel que } \pi(f) \text{ soit un} \\ \text{opérateur de rang fini et } \xi \in \operatorname{im} \pi(f)\}. \end{aligned}$$

Alors V_0 est un sous-module simple de V. en plus V_0 est unique ([23]).

3.13. Nous allons maintenant construire des représentations induites $\gamma_{\bar{p}}$ sur des espaces $L^{\bar{p}}(\cdot)$. où $\bar{p}$ est un multi-indice.

Soit $q \in \mathfrak{n}^*$. et $l \in \mathfrak{g}^*$ tel que $l/\mathfrak{n} = q$ et $l/\mathfrak{h} = r$. Dans la suite nous utiliserons la décomposition de $\mathfrak{g}$. ainsi que le sous-groupe $H = \exp(\mathfrak{h})$ et les représentations $\gamma \in \hat{H}$ et $\tilde{\gamma} \cong \pi_2 \in \hat{G}$ introduites au chapitre précédent. Rappelons la décompositon de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{u}.$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(q) &= (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{w} \\ &= \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{w} \\ &= \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}.\end{aligned}$$

où $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont les sous-espaces définis en (2.1.4). Donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{v} \oplus (\mathfrak{g}(q) + \mathfrak{n}) \\ &= \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}.\end{aligned}$$

et $\mathfrak{h} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. On pose $\mathfrak{k} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n}$. Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$. et

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{h} \\ &= \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}.\end{aligned}$$

Soient

$$K = \exp(\mathfrak{k}),\ X = \exp(\mathcal{X}),\ Y = \exp(\mathcal{Y}).$$

Soit $\mathfrak{p}^0$ la polarisation de q dans $\mathfrak{n}$ définie précédement(2.1.4). Rappelons que $\mathfrak{p}^1 = (\mathfrak{p}^0 \oplus \mathcal{Y})$ est une polarisation de Pukanszky de $l/\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{n}$, ainsi que de $r = l/\mathfrak{h}$ (2.1.4). En plus $\mathfrak{p} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{p}^0 \oplus \mathcal{Y}$ est une polarisation de Pukanszky de l dans $\mathfrak{g}$ (2.1.4). Soit

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \supset \mathfrak{n}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{n}_k \supset \mathfrak{n}_{k+1} = \{0\},$$

une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$ -module $\mathfrak{n}$. Soit $I = \{i \mid \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{n}_i \neq \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{n}_{i+1}; i = 0, \cdots, k\} = \{0 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m \leq k\}$. Posons $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}^0 + \mathfrak{n}_{i_j}$, $j = 1, \cdots, m$ et $\mathfrak{p}_{m+1} = \mathfrak{p}^0$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{n}$. Choisissons un espace $\mathfrak{v}_j \subset \mathfrak{p}_j$ tel que

$$\mathfrak{v}_j \oplus \mathfrak{p}_{j+1} = \mathfrak{p}_j \qquad \forall j = 1, \cdots, m.$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{m \oplus} \mathfrak{v}_j \oplus \mathfrak{p}^0 = \mathfrak{n}.$$

En plus

$$\begin{aligned} \phi : \sum_{j=1}^{m \oplus} \mathfrak{v}_j &\longrightarrow N/P^0 \\ (\mathfrak{v}_1, \cdots, \mathfrak{v}_m) &\longrightarrow \exp(\mathfrak{v}_1) \cdots \exp(\mathfrak{v}_m) \cdot \mathfrak{p}^0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme ([31]). Posons

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_j &= \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_j, \quad \text{pour } j = 1, \cdots, m; \\ \mathfrak{g}_j &= U \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_j, \quad \text{pour } j = 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1 &= \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{n}, \\ \mathfrak{g}_1 &= U \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_1 = U \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\mathrm{m}+1} &= \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_{\mathrm{m}+1} = \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^0 = \mathfrak{p}^1. \\ \mathfrak{g}_{m+1} &= U \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}_{\mathrm{m}+1} = U \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathfrak{p}^0 = \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Nous avons que $\mathfrak{p}_j/\mathfrak{p}_{j+1}$ est un $\mathfrak{h}_{j+1}$-module. Appellons cette action λ_j. Soit $H_j = \exp(\mathfrak{h}_j)$, $G_j = \exp(\mathfrak{g}_j)$ pour $j = 1, \cdots, m$. Alors on définit

$$\begin{aligned} \triangle_j : H_{j+1} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ h_{j+1} &\longrightarrow \triangle_j(h_{j+1}) = e^{\mathrm{tr}\lambda_j(\log h_{j+1})}. \end{aligned}$$

$\triangle_j$ est un homomorphisme continue de H_{j+1}. En plus $\mathfrak{p}_j/\mathfrak{p}_{j+1}$ est un $G(l)$-module. Donc on peut définir une extension à G tout entier pour $\triangle_j$.

Soit $\bar{p} = (p_1, \cdots, p_m) \in [1, \infty]^m$ un multi-indice. Alors on pose

$$\triangle^{\frac{1}{\bar{p}}}(\cdot) = \prod_{j=1}^{m} \triangle_j^{\frac{1}{p_j}}(\cdot).$$

On définit les représentations $\gamma_j = \operatorname{ind}_{H_{j+1}}^{H_j}(\gamma_{j+1}, p_j)$, pour $j = 1, \cdots, m$, $\gamma_{m+1} = \chi_r$ et $\pi_j = \operatorname{ind}_{G_{j+1}}^{G_j}(\pi_{j+1}, p_j)$, pour $j = 1, \cdots, m$ et $\pi_{m+1} = \chi_l$. Alors $\gamma_1^{\bar{p}} = \operatorname{ind}_{H_2}^{H_1}(\gamma_2, p_1)$ est une représentation de $H_1 = Y \cdot X$. De même $\pi_1^{\bar{p}}$ est une représentation de $G_1 = U \cdot Y \cdot X$.

On définit la représentation $\gamma_{\bar{p}} = \operatorname{ind}_{H_1}^{H}(\gamma_1^{\bar{p}}, 2)$, ainsi que $\pi_{\bar{p}}^l = \operatorname{ind}_{G_1}^{G}(\gamma_1^{\bar{p}}, 2)$. Les groupes H et G agissent sur $\mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}}$ et $\mathcal{H}_{\pi_{\bar{p}}^l}$ respectivement par translation à gauche.

D'autre part on peut remarquer que

$$\begin{aligned}\gamma_{\bar{p}} &= \operatorname{ind}_{H_1}^{H}((\operatorname{ind}_{H_2}^{H_1}(\gamma_2, p_1)), 2)\\ &= \operatorname{ind}_{H_1}^{H}((\operatorname{ind}_{H_2}^{H_1}(\cdots(\operatorname{ind}_{P^1}^{H_m}(\chi_r, p_m))\cdots, p_1)), 2).\end{aligned}$$

Nous définissons les espaces

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p_j}(H_j/H_{j+1}, \gamma_{j+1}) = \{\xi : H_j \longrightarrow \mathcal{E}_{p_{j+1}},\ & \\ \xi \text{ continue à support compact modulo } & H_{j+1} \\ \mid \xi(h_j h_{j+1}) = \gamma_{j+1}(h_{j+1})^{-1} & \\ \cdot \Delta_j^{\frac{1}{p_j}}(h_{j+1}) \cdot \xi(h_j), & \\ \text{et} \oint_{H_j/H_{j+1}} \|\xi(h)\|^{p_j} d\dot{h} = \|\xi\|_{p_j}^{p_j}, & \\ \forall h_j \in H_j, h_{j+1} \in H_{j+1}\}, \text{ pour } p_j \neq \infty; &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\infty}(H_j/H_{j+1}, \gamma_{j+1}) = \{\xi : H_j \longrightarrow \mathcal{E}_{p_{j+1}},\ & \\ \xi \text{ continue à support compact modulo } & H_{j+1} \\ \mid \xi(h_j h_{j+1}) = \gamma_{j+1}(h_{j+1})^{-1} \cdot \xi(h_j), & \\ \forall h_j \in H_j, h_{j+1} \in H_{j+1}, \text{ et } \|\xi\|_{\infty} < \infty\} &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\bar{p}}(H,r) = \{\xi : H \longrightarrow \mathbb{C} : \xi & \text{ continue a support compact} \\ & \text{modulo } P^1 \text{ tel que } \xi(hp) = \overline{\chi_r(p)} \cdot \triangle^{\frac{1}{p}}(p)\xi(h), \\ & \forall h \in H,\ p \in P^1 \text{ et} \\ & \|\xi\|_{\bar{p}}^H = (\int_{H/H_1} |(|\int_{H_1/H_2} \cdots (\int_{H_m,P^1} \\ & |\xi(h \cdot \exp(v_1) \cdots \\ & \exp(v_m)|^{p_m} dv_m)^{\frac{1}{p_m}} \cdots |^{p_1} dv_1)^{\frac{1}{p_1}}|^2\, dh)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p_j}(G_j/G_{j+1}, \pi_{j+1}) =\{\xi : G_j \longrightarrow \mathcal{E}_{p_{j+1}}, & \\ & \xi \text{ continue à support compact modulo } G_{j+1} \\ & |\ \xi(g_j g_{j+1}) = \pi_{j+1}(g_{j+1})^{-1} \cdot \triangle_j^{\frac{1}{p_j}}(g_{j+1}) \cdot \xi(g_j), \\ & \forall g_j \in G_j, g_{j+1} \in G_{j+1} \text{ et} \\ & \oint_{G_j/G_{j+1}} \|\xi(g)\|^{p_j} d\dot{g} = \|\xi\|_{p_j}^{p_j}\}, \\ & \text{pour } p_j \neq \infty;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\infty}(G_j/G_{j+1}, \pi_{j+1}) =\{\xi : G_j \longrightarrow \mathcal{E}_{p_{j+1}}, & \\ & \xi \text{ continue à support compact modulo } G_{j+1} \\ & |\xi(g_j g_{j+1}) = \pi_{j+1}(g_{j+1})^{-1}\xi(g_j), \\ & \forall g_j \in G_j, g_{j+1} \in G_{j+1} \text{ et } \|\xi\|_\infty < \infty\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\bar{p}}(G,l) = \{\xi : G \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ \xi & \text{ continue a support} \\ & \text{compact modulo } P \text{ tel que } \xi(gp) = \overline{\chi_l(p)} \cdot \triangle^{\frac{1}{\bar{p}}}(p)\xi(g), \\ & \forall g \in G,\ p \in P \text{ et} \\ & \|\xi\|_{\bar{p}}^G = (\int_{G/G_1} |(|\int_{G_1/G_2} \cdots (\int_{G_m/P^1} |\xi(g \cdot \exp(v_1) \cdots \\ & \exp(v_m)|^{p_m} dv_m)^{\frac{1}{p_m}} \cdots |^{p_1} dv_1)^{\frac{1}{p_1}}|^2\, dg)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.\end{aligned}$$

Nous écrivons $\mathcal{H}_{\gamma_j} \equiv L^{p_j}(H_j/H_{j+1})$, $\mathcal{H}_{\pi_j} \equiv L^{p_j}(G_j/G_{j+1})$ pour le complétés de $\mathcal{E}_{p_j}(H_j/H_{j+1}, \gamma_{j+1})$ et $\mathcal{E}_{p_j}(G_j/G_{j+1}, \pi_{j+1})$ respectivement pour la norme $\|\cdot\|_{p_j}$, et $L^\infty(H_j/H_{j+1})$, $L^\infty(G_j/G_{j+1})$ pour les completés de $\mathcal{E}_\infty(H_j/H_{j+1}, \gamma_{j+1})$ et $\mathcal{E}_\infty(G_j/G_{j+1}, \pi_{j+1})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ici

les espaces $\mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}} \equiv L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r)$, $\mathcal{H}_{\pi^l_{\bar{p}}} \equiv L^{\bar{p}}(G/P, \chi_l)$ des représentations $\gamma_{\bar{p}}$, $\pi^l_{\bar{p}}$ respectivement sont les completés des $\mathcal{E}_{\bar{p}}(H, r)$, $\mathcal{E}_{\bar{p}}(G, l)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\bar{p}}$.
Alors on a le théorème suivant:

3.14. Théorème: *La représentation $\gamma_{\bar{p}}$ est topologiquement irréductible. De plus il existe $f \in L^1(H)$ tel que l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(f)$ soit un opérateur de rang fini.*

Preuve:
Nous avons que $\gamma_{\bar{2}} = \gamma = \mathrm{ind}_{P^1}^G \chi_r$ et $\bar{2} = \underbrace{(2, \cdots, 2)}_{m \text{ fois}}$, ainsi que $\triangle^{\frac{1}{2}}(\cdot) = \prod_{j=1}^m \triangle_j^{\frac{1}{2}}(\cdot) = \triangle^{\frac{1}{2}}(\cdot) = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{p}^1}(\cdot)}$.
Calculons le noyau de l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(f)$ où $f \in L^1(H)$:
Soient $\xi \in ES(H/P^1, \chi_r)$, alors

$$
\begin{aligned}
(\gamma_{\bar{p}}(f)\xi)(x) &= \int_H f(y)(\gamma_{\bar{p}}(y)\xi)(x)\,dy \\
&= \int_H f(y)\xi(y^{-1}x)\,dy \\
&= \int_H f(xy)\xi(y^{-1})\,dy \\
&= \int_H f(xy^{-1}) \cdot \triangle_H^{-1}(y)\xi(y)\,dy \quad (1.3.7, (2)) \\
&= \oint_{H/P^1} \int_{P^1} f(xh^{-1}y^{-1}) \cdot \triangle_H^{-1}(y \cdot h)) \frac{\triangle_H(h)}{\triangle_{P^1}(h)} \\
&\quad \xi(y \cdot h)\,dh\,d\dot{y} \quad (1.3.7, (5)) \\
&= \oint_{H/P^1} \int_{P^1} f(xh^{-1}y^{-1}) \cdot \triangle_H^{-1}(y \cdot h) \\
&\quad \frac{\triangle_H(h)}{\triangle_{P^1}(h)} \overline{\chi_r(h)} \cdot \left(\frac{\triangle_{P^1}(h)}{\triangle_H(h)}\right)^{\frac{1}{\bar{p}}} \xi(y)\,dh\,d\dot{y} \\
&= \oint_{H/P^1} \int_{P^1} f(xhy^{-1}) \cdot \triangle_H^{-1}(y) \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(h)\chi_r(h)\xi(y)\,dh\,d\dot{y} \\
&= \oint_{H/P^1} f_{\gamma_{\bar{p}}}(x, y)\xi(y)\,d\dot{y},
\end{aligned}
$$

où

$$f_{\gamma_{\bar{p}}}(x,y) = \int_{P^1} f(xhy^{-1}) \cdot \triangle_H^{-1}(y) \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(h)\chi_r(h)\, dh.$$

En plus $f_{\gamma_{\bar{p}}}$ vérifie:

$$f_{\gamma_{\bar{p}}}(xh,yh') = \triangle^{\frac{1}{\bar{p}}}(h) \cdot \triangle^{1-\frac{1}{\bar{p}}}(h') \cdot \overline{\chi_r(h)} \cdot \chi_r(h') f_{\gamma_{\bar{p}}}(x,y).$$

$\forall h, h' \in P^1$ et $1 - \frac{1}{\bar{p}} = \sum_{j=1}^{m}(1 - \frac{1}{p_j})$.
Ainsi on peut déduire le noyau de l'opérateur $\gamma(f)$:

$$f_\gamma(x,y) = \int_{P^1} f(xhy^{-1}) \cdot \triangle_H^{-1}(y)\triangle^{\frac{-1}{2}}(h)\chi_r(h)\, dh.$$

De même f_γ vérifie

$$f_\gamma(xh,yh') = \triangle^{\frac{1}{2}}(h) \cdot \triangle^{\frac{1}{2}}(h') \cdot \overline{\chi_r(h)} \cdot \chi_r(h') f_\gamma(x,y),\ \forall h, h' \in P^1.$$

Soit $F \in ES(H/P^1 \times H/P^1, \chi_r)$ tel que

$$F(xh,yh') = \triangle^{\frac{1}{\bar{p}}}(h) \cdot \triangle^{1-\frac{1}{\bar{p}}}(h')\overline{\chi_r}(h)\chi_r(h') \cdot F(x,y).$$

On montre qu'il existe $g \in ES(H)$ telle que l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(g)$ admette comme noyau la fonction F , c'est à dire

$$(\gamma_{\bar{p}}(g)\xi)(x) = \oint_{H/P^1} F(x,y)\xi(y)\, d\dot{y}.$$

où

$$F(x,y) = \int_{P^1} g(xhy^{-1}) \cdot \triangle_H^{-1}(y) \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(h)\chi_r(h)\, dh.$$

Soit

$$F_2(x,y) = \triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(x) \cdot \triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}}(y) \cdot F(x,y).$$

où $\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}} = \sum_{j=1}^{m}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_j})$. Il est clair que $F_2 \in ES(H/P^1 \times H/P^1, \chi_r)$. En plus

$$\begin{aligned}
F_2(xp, yp') &= \triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(xp) \cdot \triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}}(yp')F(xp, yp') \\
&= \triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(xp)\triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}}(yp') \cdot \triangle^{\frac{1}{\bar{p}}}(p)\triangle^{1-\frac{1}{\bar{p}}}(p') \cdot \\
&\overline{\chi_r}(p) \cdot \chi_r(p') \cdot F(x, y) \\
&= \triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(x)\triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}}(y) \cdot \triangle^{\frac{1}{2}}(p)\triangle^{\frac{1}{2}}(p') \cdot \\
&\overline{\chi_r}(p) \cdot \chi_r(p') \cdot F(x, y) \\
&= \triangle^{\frac{1}{2}}(p)\triangle^{\frac{1}{2}}(p') \cdot \overline{\chi_r}(p) \cdot \chi_r(p') \cdot F_2(x, y).
\end{aligned}$$

Alors d'après ([23]) il existe $f_2 \in ES(H)$ telle que l'opérateur $\gamma(f_2)$ admette comme noyau la fonction F_2. Donc

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}}(x)\triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(y) \cdot F_2(x, y) \\
&= \triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}}(x)\triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(y) \cdot \triangle_H^{-1}(y) \\
&\cdot \int_{P^1} f_2(xhy^{-1})\triangle^{\frac{-1}{2}}(h) \cdot \chi_r(h)\, dh \\
&= \triangle_H^{-1}(y) \int_{P^1} (\triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}} \cdot f_2)(xhy^{-1}) \cdot \triangle^{-\frac{1}{\bar{p}}}(h) \cdot \overline{\chi_r(h)}\, dh.
\end{aligned}$$

D'où l'existence d'une fonction $g = (\triangle^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{\bar{p}}} \cdot f_2) \in ES(H)$ telle que l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(g)$ admette comme noyau la fonction F.

Montrons que $\gamma_{\bar{p}}$ est topologiquement irréductible. Soit $\eta \in \mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}} \cong L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r)$ un élément non nul et on veut montrer que η est cyclique, c'est à dire que

$$\overline{\gamma_{\bar{p}}(L^1(H))\eta} = L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r).$$

Soit $\xi \in ES(H/P^1, \chi_r)$. Alors pour $F = \xi \bigotimes \bar{\xi}$ c'est à dire que

$$F(x, y) = \xi(x) \cdot \bar{\xi}(y).$$

il existe $f \in ES(H)$ telle que

$$\begin{aligned}(\gamma_{\bar{p}}(f)\eta)(x) &= \oint_{H/P^1} F(x,y)\cdot \eta(y)\, d\dot{y}\\ &= \oint_{H/P^1} \xi(x)\cdot \bar{\xi}(y)\cdot \eta(y)\, d\dot{y}\\ &= \xi(x)\cdot \oint_{H/P^1} \eta(y)\cdot \bar{\xi}(y)\, d\dot{y}\\ &= \xi(x)\cdot < \eta, \xi >_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}}.\end{aligned}$$

où $\bar{q} = (q_1, \cdots, q_m)$ et $\frac{1}{q_j} + \frac{1}{p_j} = 1$, $\forall j = 1, \cdots, m$. D'où l'existence d'une fonction dans $ES(H)$ telle que $\gamma_{\bar{p}}(f) = P_{\xi,\xi}$. Nous avons deux cas:

1) $< \eta, \xi >_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}} \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\gamma_{\bar{p}}(f)\eta = P_{\xi,\xi}(\eta) &= < \eta, \xi >_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}} \xi\\ &\Longrightarrow \xi = \gamma_{\bar{p}}\left(\frac{1}{< \eta, \xi >_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}}}\cdot f\right)\eta.\end{aligned}$$

D'où le fait que

$$\xi \in \gamma_{\bar{p}}(L^1(H))\eta \subset \mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}} \cong L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r).$$

2) $< \eta, \xi >_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}} = 0$. Alors choisissons une fonction $\xi_1 \in ES(H/P^1, \chi_r)$ telle que

$$< \xi_1, \xi > \neq 0, \quad \text{et} \quad < \eta, \xi_1 >_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}} \neq 0.$$

Alors il existe une fonction $f' \in ES(H)$ telle que $\gamma_{\bar{p}}(f') = P_{\xi_1,\xi_1}$. De plus

$$\gamma_{\bar{p}}(f * f')\eta = < \eta, \xi_1 >_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}} \cdot < \xi_1, \xi > \cdot \xi.$$

Donc $\xi = \gamma_{\bar{p}}\left(\frac{1}{<\xi_1,\eta>_{L^{\bar{p}},L^{\bar{q}}}\cdot<\xi_1,\xi>}\cdot (f * f')\right)\eta$. Alors

$$\xi \in \gamma_{\bar{p}}(L^1(H)\eta \subset \mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}}.$$

Du 1), 2) nous avons

$$ES(H/P^1, \chi_r) \subset \gamma_{\bar{p}}(L^1(H))\eta \subset \mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}} \cong L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r).$$

Alors η est cyclique. Il en resulte que $\gamma_{\bar{p}}$ est une représentation topologiquement irréductible. En plus il existe une fonction $f \in L^1(H)$ telle que l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(f)$ soit de rang un . ■

3.15. Remarque: *On peut remarquer que la représentation $\pi^l_{\bar{p}}$ est aussi irréductible par une manière analogue à celle de la proposition précédente.*

3.16. Nous allons maintenant étendre la représentation $\gamma_{\bar{p}}$ de H à G tout entier. On définit une extension $\tilde{\gamma}_{\bar{p}}$ de $\gamma_{\bar{p}}$ de la façon suivante:

(1) $\mathcal{H}_{\tilde{\gamma}_{\bar{p}}} = \mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}}$;

(2)$\tilde{\gamma}_{\bar{p}}(h) = \gamma_{\bar{p}}(h), \quad \forall h \in H,$

(3) $(\tilde{\gamma}_{\bar{p}}(t)\xi)(h) = \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(t)\chi_l(t)\xi(t^{-1} \cdot h \cdot t),$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{\gamma_{\bar{p}}}$ et $t \in U$. Alors $\tilde{\gamma}_{\bar{p}}$ est bien définie. En plus c'est une représentation topologiquement irréductible, car c'est une extension d'une représentation topologiquement irréductible. D'autre part elle est équivalente à la représentation $\pi^l_{\bar{p}}$ définie en (3.13)(par une démonstration anolgue à celle de ([19]), dans le cas où $\bar{p} = \bar{2} = \underbrace{(2, \cdots, 2)}_{m \text{ fois}})$.

Dans la suite nous identifierons donc les représentations $\tilde{\gamma}_{\bar{p}}$ et $\pi^l_{\bar{p}}$, ainsi nous travaillerons seulement avec la représentation $\pi^l_{\bar{p}}$.

La proposition suivante jouera un rôle essentiel dans la suite de ce chapitre:

3.17. Proposition:
Il existe une fonction $f \in L^1(G)$ telle que l'opérateur $\pi^l_{\bar{p}}(f)$ soit un opérateur de rang fini.

Preuve:

Soit $\xi \in \mathrm{ES}(H/P^1, \chi_r)$. On pose $F_t(x, y) = \triangle^{\frac{1}{p}}(t) \cdot \overline{\chi_l(t)} \cdot \xi(txt^{-1}) \cdot \overline{\xi}(y) = (\pi_{\bar{p}}^l(t^{-1})\xi)(x) \cdot \overline{\xi}(y)$. Il est clair que $F_t \in \mathrm{ES}(H/P^1 \times H/P^1, \chi_r)$. Donc d'après (3.14), il existe une fonction g_t dans $\mathrm{ES}(H)$ telle que l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(g_t)$ soit le projecteur $P_{\pi_{\bar{p}}^l(t^{-1})\xi,\xi}$. Choisissons une fonction $a > 0$ dans $C_c^{\infty}(U)$ et posons $f(t \cdot h) = a(t) \cdot g_t(h)$, pour $t \in U$ et $h \in H$. Alors $f \in L^1(G)$. De plus

$$
\begin{aligned}
\pi_{\bar{p}}^l(f) &= \int_U \int_H f(t \cdot h) \cdot \pi_{\bar{p}}^l(t \cdot h) \, dh \, dt \\
&= \int_U \int_H a(t) \cdot g_t(h) \pi_{\bar{p}}^l(t) \pi_{\bar{p}}^l(h) \, dh \, dt \\
&= \int_U a(t) \pi_{\bar{p}}^l(t) \gamma_{\bar{p}}(g_t) \, dt \\
&= P_{\xi,\xi} \cdot \int_U a(t) \, dt \\
&= C \cdot P_{\xi,\xi},
\end{aligned}
$$

d'où l'existence d'une fonction f dans $L^1(G)$ telle que l'opérateur $\pi_{\bar{p}}^l(f)$ soit un opérateur de rang fini. ■

3.18. Corollaire:
le sous-espace

$$
\begin{aligned}
V_0^{(\bar{p},l)} = \{\xi \in \mathcal{H}_{\pi_{\bar{p}}^l},\ \exists f \in L^1(G) \ \ \textit{telle que l'opérateur}\ \pi_{\bar{p}}^l(f) \\
\textit{soit de rang fini et} \ \ \xi \in \mathit{im}\ \pi_{\bar{p}}^l(f)\}
\end{aligned}
$$

est un $L^1(G)$-module simple.

Preuve:
Par (3.16) et (3.12). ■

3.19. Nous aurons besoin de formules plus précises pour les noyaux. C'est pour cela qu'on utilise une décomposition plus fine. Rappelons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{w} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X} = \mathfrak{k} \oplus \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$. Alors $L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r) \cong L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r) \cong L^{\bar{p}}(K/P^0, \chi_r) \bigotimes L^2(X)$.

Calculons pour $\xi \in L^{\bar{p}}(H/P^1, \chi_r)$, $f \in ES(H)$ l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(f)$:

$$
\begin{aligned}
(\gamma_{\bar{p}}(f)\xi)(k' \cdot x') &= \int_W \int_K f(w \cdot k) \cdot \xi(k^{-1} \cdot w^{-1} k' x') \, dk \, dw \\
&= \int_W \int_K f(w \cdot k) \\
&\cdot \xi(k^{-1} \cdot w^{-1} k' \cdot w \cdot w^{-1} \cdot x') \, dk \, dw \\
&= \int_W \int_K f(w \cdot ({}^{w^{-1}} k') \cdot k) \xi(k^{-1} w^{-1} x') \, dk \, dw \\
&= \int_W \int_K f(w \cdot ({}^{w^{-1}} k') \cdot k^{-1}) \cdot \triangle_H(k)^{-1} \\
&\cdot \xi(k \cdot w^{-1} x') \, dk \, dw \\
&= \int_Y \int_X \int_K f((x \cdot y) \cdot ({}^{(x \cdot y)^{-1}} k') \cdot k^{-1}) \cdot \triangle_H(k)^{-1} \\
&\cdot \xi(k \cdot (x \cdot y)^{-1} x') \, dk \, dx \, dy \\
&= \int_Y \int_X \int_K f((x \cdot y) \cdot ({}^{(x \cdot y)^{-1}} k') \cdot k^{-1}) \cdot \triangle_H(k)^{-1} \\
&\cdot \xi(k \cdot (x^{-1} x') \cdot (x'^{-1} x) \cdot y^{-1} \cdot (x^{-1} x')) \, dk \, dx \, dy \\
&= \int_Y \int_X \int_K f((x \cdot y) \cdot ({}^{(x \cdot y)^{-1}} k') \cdot k^{-1}) \\
&\cdot \triangle_H(k)^{-1} \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y) \cdot e^{-i<r, \log(y)>} \\
&\cdot e^{-i<r, [\log(y), \log(x^{-1} \cdot x')]>} \xi(k \cdot x^{-1} \cdot x') \, dk \, dx \, dy \\
&= \int_Y \int_X \int_K f(((x' \cdot x) \cdot y) \cdot ({}^{((x' \cdot x) \cdot y)^{-1}} k') \cdot k^{-1}) \\
&\cdot \triangle_H(k)^{-1} \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y) \cdot e^{-i<r, \log(\mathrm{y})>} \\
&\cdot e^{-i<r, [\log(y), \log(x^{-1})]>} \xi(k \cdot x^{-1}) \, dk \, dx \, dy \\
&= \int_Y \int_X \int_K f(((x' \cdot x^{-1}) \cdot y) \cdot ({}^{((x' \cdot x^{-1}) \cdot y)^{-1}} k') \cdot k^{-1}) \\
&\cdot \triangle_H(k)^{-1} \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y) \cdot e^{-i<r, \log\mathrm{y}>} \\
&\cdot e^{-i<r, [\log(\mathrm{y}), \log(\mathrm{x})]} \xi(k \cdot x) \, dk \, dx \, dy \\
&= \int_Y \int_X \int_{K/P_0} \int_{P_0} f(((x' \cdot x^{-1}) \cdot y) \cdot
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&({}^{((x'\cdot x^{-1})\cdot y)^{-1}}k')\cdot p_0\cdot k^{-1})\\ &\cdot \triangle_H(k)^{-1}\cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar p}}(y)\cdot e^{-i<r.\log(p_0)>}\cdot e^{-i<r.\log(y)>]>}\\ &\cdot e^{-i<r.[\log(y).\log(x)]}\xi(k\cdot x)\ dp_0\ d\dot{k}\ dx\ dy.\end{aligned}$$

Soient $\rho_{\bar p} = \mathrm{ind}_{P^0}^{K}(\chi_q\cdot\bar p)$, et $\rho_2 = \mathrm{ind}_{P^0}^{K}\chi_q$. Ecrivons $f(x,y)(k) = f(x\cdot y\cdot k)$, $k\in K$. Alors le noyau de l'opérateur $\gamma_{\bar p}(f)$ considéré comme une fonction en $K/P^0\times X$ est donné par

$$(*)\ f((k',x'),(k,x))_{\gamma_{\bar p}} = \int_Y f(((x'\cdot x^{-1}),y))_{\rho_{\bar p}}({}^{((x'\cdot x^{-1})\cdot y)^{-1}}k',k)$$
$$\cdot\triangle^{\frac{-1}{\bar p}}(y)\cdot e^{-i<r,\log y>}\cdot e^{-i<r.[\log(y).\log(x)]>}dy;$$

où

$$f(((x'\cdot x^{-1}),y))_{\rho_{\bar p}}({}^{((x'\cdot x^{-1})\cdot y)^{-1}}k',k) = \int_{P_0} f(((x'\cdot x^{-1})\cdot y)$$
$$\cdot({}^{((x'\cdot x^{-1})\cdot y)^{-1}}k')\cdot p_0\cdot k^{-1})$$
$$\cdot\triangle_H(k)^{-1}\cdot e^{-i<r.\log(p_0)>}\ dp_0.$$

Ainsi on peut conclure le noyau de l'opérateur $\gamma(f)$:

$$(**)\ f((k',x'),(k,x))_\gamma = \int_Y f(((x'\cdot x^{-1}),y))_{\rho_2}(((x'\cdot x^{-1})\cdot y)^{-1}k',k)$$
$$\cdot\triangle^{\frac{-1}{2}}(y)\cdot e^{-i<r,\log y>}\cdot e^{-i<r.[\log(y).\log(x)]>}dy.\blacksquare$$

3.20. Choisissons une fonction $\mu\in \mathrm{ES}(K/P^0,q)$ telle que $|\mu|_2 = 1$. Prenons pour tout $(x,y)\in X\times Y$ une fonction $g(x,y)\in ES(K)$ telle que

$$g(x,y)_{\rho_2}(k',k) = \mu({}^{(x\cdot y)}k')\cdot\bar{\mu}(k).$$

Alors les noyaux $g(x,y)_{\rho_{\bar p}}$, $g(x,y)_{\rho_2}$ coïncident, car $\triangle^{\frac{1}{\bar p}}_{/P^0} = \triangle^{\frac{1}{2}}_{/P^0} = 1$, donc les formules pour $\rho_{\bar p}$ et ρ_2 sont les mêmes.
En outre soit $\lambda\in \mathrm{ES}(W,\chi_r)$ telle que $|\lambda|_2 = 1$. On définit une fonction a comme

$$a(x,y) = \int_X \lambda(x\cdot u)\overline{\lambda(u)}\cdot e^{i<r,[\log y,\log u]>}\cdot e^{i<r.\log y>}\cdot\triangle^{\frac{1}{2}}(y)\ du.$$

Alors a est une fonction à décroissance exponentielle en x, y, par définition de l'espace $\mathrm{ES}(W, \chi_r)$. On pose $p_\lambda(x, y)(k) = p_\lambda(x \cdot y \cdot k) = a(x, y) \cdot g(x, y)(k)$. Il est clair que p_λ est dans $ES(H)$ car p_λ est à décroissance exponentielle en x, y.

3.21. Proposition:
Pour tout $\bar{p} \in [1, \infty]^m$ l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(p_\lambda)$ est un opérateur de rang un. Ainsi que l'opérateur $\gamma(p_\lambda)$.

Preuve: Regardons le noyau de l'opérateur $\gamma_{\bar{p}}(p_\lambda)$. Alors nous avons que

$$\begin{aligned}
p_\lambda(k'x', kx)_{\gamma_{\bar{p}}} &= \int_Y p_\lambda(((x' \cdot x^{-1}), y))_{\rho_{\bar{p}}}(^{((x' \cdot x^{-1}) \cdot y)^{-1}}k', k) \\
&\cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y) \cdot e^{-i<r, \log y>} \cdot e^{-i<r, [\log(y), \log(x)]>} dy \\
&= \int_Y a((x' \cdot x^{-1}) \cdot y) \cdot g((x' \cdot x^{-1}), y)_{\rho_{\bar{p}}}(^{((x' x^{-1}) \cdot y)^{-1}}k', k) \\
&\cdot e^{-i<r, [\log, y \log x]>} \cdot e^{-i<r, \log y>} \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y)\, dy \\
&= \int_Y a((x' \cdot x^{-1}) \cdot y) \cdot \mu(^{(x' x^{-1}) \cdot y)((x' x^{-1}) \cdot y)^{-1}}k', k) \cdot \bar{\mu}(k) \\
&\cdot e^{-i<r, [\log, y \log x]>} \cdot e^{i<r, \log y>} \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y)\, dy \\
&= \mu(k') \cdot \bar{\mu(k)} \cdot \int_Y \int_X \lambda((x' \cdot x^{-1}) \cdot u)\overline{\lambda(u)} \\
&\cdot e^{-i<r, [\log y, \log x]>} \\
&\cdot e^{i<r, [\log y, \log u]>} \cdot \triangle^{\frac{1}{2}}(y) \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y)\, du\, dy.
\end{aligned}$$

Pour $\bar{p} = \bar{2} = 2$, nous avons que

$$p_\lambda(k'x', kx)_\gamma = \mu(k')\lambda(x') \cdot \bar{\mu}(k)\bar{\lambda}(x).$$

et pour $\bar{p} \neq \bar{2}$ nous avons que

$$\begin{aligned}
p_\lambda(k'x', kx)_{\gamma_{\bar{p}}} = \mu(k') \cdot \bar{\mu(k)} \cdot \int_Y \int_X \lambda((x' \cdot x^{-1}) \cdot u) \cdot \bar{\lambda}(u) \cdot \\
e^{i<r, [\log y, \log u]>} \cdot e^{-i<r, [\log y, \log x]>} \\
\cdot \triangle^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}}(y)\, du\, dy.
\end{aligned}$$

Ecrivons $\triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(y)$ à l'aide des racines. Alors

$$\triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(y) = e^{\sum_{j=1}^{l}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_j})\mathrm{tr}\lambda_j \log y}.$$

On désigne par $(\frac{1}{\bar{p}}-\frac{1}{2})(\cdot)$ le vecteur $\sum_{j=1}^{m}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2})\,\mathrm{tr}\lambda_j(\cdot)$, considéré comme un élément de X en identifiant X à l'espace dual de Y par r, c'est à dire que

$$r[\frac{1}{\bar{p}}-\frac{1}{2}(\cdot).\ \log(y)] = \sum_{j=1}^{m}(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2})\,\mathrm{tr}\lambda_j(\log(y)),\ \forall y \in Y.$$

La fonction λ est à priori dans $\mathrm{ES}(W, \chi_r)$. Or cet espace peut être identifié avec un espace des fonctions analytiques sur X qui admettent des extensions complexes ([2]). Alors

$$\begin{aligned} p_\lambda(k'x'.kx)_{\gamma_{\bar{p}}} &= \mu(k')\cdot\bar{\mu(k)}\cdot\int_Y\int_X \lambda((x'\cdot x^{-1})\cdot u)\cdot\bar{\lambda}(u) \\ &\cdot e^{i<r,[\log y,\log u]>}\cdot e^{-i<r,[\log y,\log(x)-i(\frac{1}{\bar{p}}-\frac{1}{2}]>}\,du\,dy. \\ &= \mu(k')\cdot\bar{\mu(k)}\cdot\lambda(x'-i(\frac{1}{\bar{p}}-\frac{1}{2}))\overline{\lambda}(x-i(\frac{1}{\bar{p}}-\frac{1}{2})). \end{aligned}$$

Donc

$$p_\lambda(k'x', kx)_{\gamma_{\bar{p}}} = \mu(k')\cdot\lambda_{\bar{p}}(x')\cdot\bar{\mu}(k)\cdot\overline{\lambda}_{\bar{p}}(x).$$

De ce qui précéde il en resulte que

$$\begin{aligned} \gamma(p_\lambda)\xi(k'x') &= \int_{K/P_0}\int_X f_\gamma(kx, k'x')\cdot\xi(kx)\,dx\,dk \\ &= \int_{K/P_0}\int_X \mu(k')\cdot\lambda(x')\cdot\bar{\mu}(k)\cdot\overline{\lambda(x)}\cdot\xi(kx)\,dx\,dk \\ &= (P_{\mu\bigotimes\lambda,\mu\bigotimes\lambda}(\xi))(k'x'). \end{aligned}$$

Donc $\gamma(p_\lambda)$ est un projecteur de rang un. De même on peut déduire que $\gamma_{\bar{p}}(p_\lambda)$ est un projecteur de rang un, car $\gamma_{\bar{p}}(p_\lambda) = P_{\mu\bigotimes\lambda_{\bar{p}},\mu\bigotimes\lambda_{\bar{p}}}$. ■

3.22. Rappelons que pour $t \in G(l)$, nous avons

$$(\pi^l_{\bar{p}}(t)\xi)(k', x') = \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(t) \cdot \chi_l(t) \cdot \xi({}^{t^{-1}}k \cdot x').$$

Soit $g(t, x, y) \in ES(K)$ telle que:

$$g(t, x, y)_{\rho_{\bar{p}}}(k', k) = \triangle^{\frac{1}{2}}(t) \cdot \chi_l(t)^{-1} \cdot \mu({}^{t}({}^{(x \cdot y)}k'))\overline{\mu}(k).$$

On pose $v^l(t)(x, y, k) = g(t, x, y)(k) \cdot a(x, y)$. Alors $v^l(t) \in \mathrm{ES}(H)$. En plus

$$\begin{aligned}
v^l(t)_{\gamma_{\bar{p}}}(k'x', kx) &= \int_Y v^l(t)(((x' \cdot x^{-1}), y))_{\rho_{\bar{p}}}({}^{((x' \cdot x^{-1}) \cdot y)^{-1}}k', k) \\
&\cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y) \cdot e^{-i<r, \log y>} \cdot e^{-i<r, [\log(y), \log(x)]>} dy \\
&= \int_Y a((x' \cdot x^{-1}) \cdot y) \\
&\cdot g(t, (x' \cdot x^{-1}), y)_{\rho_{\bar{p}}}({}^{((x' \cdot x^{-1}) \cdot y)^{-1}}k', k) \\
&\cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y) \cdot e^{-i<r, \log y>} \cdot e^{-i<r, [\log y, \log x]>} dy \\
&= \int_Y \triangle^{\frac{1}{2}}(t) \cdot \chi_l(t)^{-1} \\
&\cdot \mu\left({}^{t}\left({}^{(x' \cdot x^{-1} \cdot y)}({}^{(x' \cdot x^{-1} \cdot y)^{-1}}k')\right)\right) \cdot \overline{\mu}(k) \\
&a((x' \cdot x^{-1}) \cdot y) \cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(y) \\
&\cdot e^{-i<r, \log y>} \cdot e^{-i<r, [\log y, \log x]>} dy \\
&= \triangle^{\frac{1}{2}}(t)\chi_l(t)^{-1} \cdot \mu({}^{t}k')\overline{\mu(k)} \\
&\cdot \lambda_{\bar{p}}(x') \cdot \overline{\lambda_{\bar{p}}(x)} \\
&= \left((\pi^l_2(t)^{-1}\mu)(k')\lambda_{\bar{p}}(x')\right) \cdot \left(\overline{\mu}(k)\overline{\lambda_{\bar{p}}}(x)\right).
\end{aligned}$$

De ceci on peut déduire que

$$\gamma_{\bar{p}}(v^l(t)) = \pi^l_2(t)^{-1} \circ P_{\mu \bigotimes \lambda_{\bar{p}}, \mu \bigotimes \lambda_{\bar{p}}}.$$

ainsi que

$$\gamma(v^l(t)) = \pi_2^l(t)^{-1} \circ P_{\mu \bigotimes \lambda, \mu \bigotimes \lambda}.$$

Remarque:
Soit $l' \in \mathfrak{g}$ un autre prolongement de q à G. Choisissons une fonction $v^{l'}$ de la même façon précédente en remplaçant l par l'. Alors

$$v^{l'}(t) = \chi_{l-l'}(t) \cdot v^l(t) \;\; mod \ker(\gamma), \;\; \forall t \in U$$

car les représentations $\pi_2^{l'} = ind_P^G \chi_{l'}$ et $\pi_2^l = ind_P^G \chi_l$ différent par le caractère $\chi_{l-l'}$ (2.2.13). Autrement dit, si l' et l sont dans la même orbite, alors forcément $l'_{/\mathfrak{u}} = l_{/\mathfrak{u}}$ et donc

$$v^{l'}(t) = v^l(t) \;\; mod \;\; \ker(\gamma).$$

3.23. Fixons un prolongement $l_0 \in \mathfrak{g}^*$ de r tel que $l_0/\mathfrak{u} = 0$. Alors

$$v^{l_0}(t) = \chi_l(t) \cdot v^l(t) \;\; \mathrm{mod} \ker(\gamma), \;\; \forall t \in U.$$

On pose

$$v(t) = v^{l_0}(t) = \chi_l(t) \cdot v^l(t) \;\; \mathrm{mod} \ker(\gamma)$$

et

$$\omega(t) = \|v^l(t)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} = \|v(t)\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)}.$$

Alors ω est un poids de $G(l)$ (2.3.5).

Rappelons les resultats suivants:

(a) $\mathrm{Ann}_{L^1(N)} V_0^{(\bar{p},l)} = \ker(\pi_{\bar{p}}^l)_{/L^1(N)} = \ker(G \cdot \tau)$, où τ comme précédement, comme $\ker(\pi_{\bar{p}}^l)_{/N} = \ker(\pi_2^l)_{/N}$ (car l'opérateur $\pi_{\bar{p}}^l(n)$ a les mêmes formules que $\pi_2^l(n)$).

(b) $\ker(\pi_{\bar{p}}^l)_{/L^1(H)} = \ker(\gamma)$; par (2.2.10).

(c) $L^1(G) * \ker(\gamma) \subset \ker(\pi_{\bar{p}}^l)$; en particulier $(\pi_{\bar{p}}^l, V_0^{(\bar{p},l)})$ peut être considéré comme un $L^1(H)/\ker(\gamma)$- module, par (2.2.11).

(d) Soit $p_\lambda \in ES(H) \subset L^1(H)$ la fonction définie en (3.20). Alors $p_\lambda \cdot V_0^{(\bar{p},l)} = \pi^l_{\bar{p}}(p_\lambda)V_0^{(\bar{p},l)} \neq 0$, par (2.2.15).

3.24. Nous allons garder les sous- algèbres particulières qu'on a construit en (2.3); ainsi que leurs proprietés. On pose $\tilde{p} = p_\lambda \operatorname{mod} \ker(\gamma)$. Alors nous avons que

$$\textbf{(1)}\ A = L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^- \cong L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)), \quad \text{par}(2.3.2)$$

$$\textbf{(2)}\ \tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p} \cong L^1(G/H, \omega). \ \text{par } (2.3.7).$$

où ω est le poids défini en (3.22)

3.25. Revenons à notre module simple $V_0^{(\bar{p},l)}$. Puisque $L^1(G) * \ker(\gamma) \subset \ker(\pi^l_{\bar{p}})$ (2.2.11); alors $V_0^{(\bar{p},l)}$ peut être considéré comme un $L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\gamma))^-$-module simple. Alors $\pi^l_{\bar{p}}(\tilde{p})V_0^{\bar{p}}$ est un $\tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$- module simple. Par conséquent $\pi^l_{\bar{p}}(\tilde{p})V_0^{\bar{p}}$ est un $L^1(G/H, \omega)$-module simple. Donc $\pi^l_{\bar{p}}(\tilde{p})V_0^{(\bar{p},l)}$ est un $L^1(U, \omega) \cong L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$-module simple. Puisque $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ est commutatif, alors la restriction de $\pi^l_{\bar{p}}$ sur $B = L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ est un caractère $\chi_{\pi^l_{\bar{p}}}$ (Lemme de schur). Calculons la restriction de $\pi^l_{\bar{p}/B}$. Nous avons que

$$\begin{aligned}
\gamma_{\bar{p}}(v^l(t)) &= \pi^l_2(t)^{-1} \circ P_\mu \bigotimes \lambda_{\bar{p},\mu} \bigotimes \lambda_{\bar{p}} \\
&= \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(t) \cdot \triangle^{\frac{1}{2}}(t) \cdot \left(\pi^l_{\bar{p}}(t)^{-1} \circ P_\mu \bigotimes \lambda_{\bar{p},\mu} \bigotimes \lambda_{\bar{p}}\right) \\
&= \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(t) \cdot \triangle^{\frac{1}{2}}(t) \cdot \left(\pi^l_{\bar{p}}(t)^{-1} \circ \pi^l_{\bar{p}}(p_\lambda)\right) \ \text{voir } (3.22).
\end{aligned}$$

L'isomorphisme **(2)** est défini de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
L^1(U, \omega) &\longrightarrow \tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p} \\
h &\longrightarrow h'(t \cdot s) = h(t) \cdot v(t)(s), \ \forall t \in U, \ s \in H
\end{aligned}$$

où $v(t)$ est la fonction définie en (3.23).

Soit $\xi \in V_0^{\bar{p}}$. et $h' \in \tilde{p} * L^1(G/H. L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p}$.Alors

$$
\begin{aligned}
(\pi_{\bar{p}}^l(h')(\tilde{p}\cdot\xi))(y) &= \int_U \int_H h'(t\cdot s)\cdot \pi_{\bar{p}}^l(t\cdot s)(\pi_{\bar{p}}^l(p_\lambda)\xi)(y)\ ds\ dt \\
&= \int_U \int_H h(t)\cdot v(t)(s)\pi_{\bar{p}}^l(t)\pi_{\bar{p}}^l(s)(\pi_{\bar{p}}^l(p_\lambda)\xi)(y)\ ds\ dt \\
&= \int_U \int_H h(t)\cdot \chi_l(t)\cdot v^l(t)\cdot \pi_{\bar{p}}^l(t) \\
&\pi_{\bar{p}}^l(s)(\pi_{\bar{p}}^l(p_\lambda)\xi)(y)\ ds\ dt \\
&= \int_U h(t)\cdot \chi_l(t)\cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(t)\cdot \chi_l(t)\Big((\pi_{\bar{p}}^l(v^l(t)) \\
&(\pi_{\bar{p}}^l(p_\lambda)\xi)\Big)(t^{-1}yt)\ dt \\
&= \int_U h(t)\cdot \chi_l(t)\cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(t)\cdot \chi_l(t)\cdot (\pi_2^l(t)^{-1} \\
&\circ \pi_{\bar{p}}^l(p_\lambda)\circ \pi_{\bar{p}}^l(p_\lambda)\xi)(t^{-1}yt)\ dt \\
&= \int_U h(t)\cdot \chi_l(t)\cdot \triangle^{\frac{-1}{\bar{p}}}(t)\cdot \triangle^{\frac{1}{2}}(t)\cdot (\pi_{\bar{p}}^l(p_\lambda)\xi)(y)\ dt \\
&= \int_U h(t)\cdot \chi_{\pi_{\bar{p}}^l}(t)\cdot (p_\lambda\cdot\xi)(y)\ dt \\
&= (\chi_{\pi_{\bar{p}}^l}(h)(\tilde{p}\cdot\xi))(y).
\end{aligned}
$$

où $\chi_{\pi_{\bar{p}}^l}(t) = \triangle^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}}(t)\cdot\chi_l(t)$.

Remarque:
Pour un autre prolongement l' de q, nous avons

$$\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}}(t) = \chi_{l'-l}(t)\cdot\chi_{\pi_{\bar{p}}^l}(t).$$

Alors si l' et l sont dans la même orbite, nous avons

$$\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}}(t) = \chi_{\pi_{\bar{p}}^l}(t).$$

Alors nous avons la proposition suivante:

3.26. Proposition:
Le poids ω défini en (3.22) vérifie

$$e^{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2}-\frac{1}{p_j}\mathrm{tr}\lambda_j(t)} \leq \omega(t),\ \forall t \in G(l).$$

Preuve: Le caractère $\chi_{\pi^l_{\tilde{p}}}$ est une forme linéaire continue de $\tilde{p} * L^1(G/H, L^1(H)/\ker(\gamma)) * \tilde{p} \cong L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$. Alors

$$|\chi_{\pi^l_{\tilde{p}}}| \leq \|f\|_\omega,\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$$

$\Longleftrightarrow$

$$|\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\chi_{\pi^l_{\tilde{p}}}(t)\ dt| \ \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\omega(t)\ dt.$$
$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n, \omega).$$

Donc

$$\begin{aligned}|\chi_{\pi^l_{\tilde{p}}}(t)| &= \triangle^{\frac{-1}{\tilde{p}}}(t)\ \triangle^{\frac{1}{2}}\ (t)\\ &= e^{\sum_{j=1}^{m}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_j})\mathrm{tr}\lambda_j(t)}\\ &\leq \omega(t).\blacksquare\end{aligned}$$

3.27. Corollaire:
Le module $V_0^{(\tilde{p},l)}$ peut être identifié avec un A-module simple de la forme $A/M_{\chi_{\pi^l_{\tilde{p}}}}$, où

$$M_{\chi_{\pi^l_{\tilde{p}}}} = \{f \in A \mid \ \chi_{\pi^l_{\tilde{p}}}(\tilde{p} * A * f) = 0,\ \xi \in V_0^{(\tilde{p},l)}\}.$$

Preuve :

Par (3.8). $\blacksquare$

3.28. Nous allons prouver maintenant que pour tout caractère χ continu sur $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$, nous avons que

$$|\chi(g)| \leq \sigma(g), \ \forall g \in G(l),$$

ou $\sigma(g) = e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} | \operatorname{tr}\lambda_j(\log g)|}$. Rappelons que ce raisonnement s'inspire de la détermination du poids qui a eté faite par Poguntke ([29]).
Soit $x \in \mathfrak{u}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $D = \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ la dérivation associée de $\mathfrak{h}$. Soit $D = D_s + D_n$ la décomposition additive de Jordan-Hölder de D telle que D_s soit la partie semi-simple et D_n la partie nilpotente, telle que $[D_s, D_n] = 0$. D_s et D_n sont des dérivations ([33]). Soient $\exp(tD_s)$ et $\exp(tD_n)$ les automorphismes de H tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\mathrm{Exp}(tD_s)} & \mathfrak{h} \\ \exp\downarrow & & \downarrow\exp \\ H & \xrightarrow{\exp(tD_s)} & H \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\mathrm{Exp}(tD_n)} & \mathfrak{h} \\ \exp\downarrow & & \downarrow\exp \\ H & \xrightarrow{\exp(tD_n)} & H \end{array}$$

commutent. Alors

$$\exp(tD_s) \cdot \exp(tD_n) = \exp(tD_n) \cdot \exp(tD_s) = \operatorname{Ad}(\exp(tx)).$$

La polarisation $\mathfrak{p}^1$ est $\mathfrak{u}$-invariante. Alors elle est donc invariante par D_s et $\mathrm{Exp}(tD_s)$.
Décomposons la représentation π_2 en deux parties π_2^s et π_2^n correspondantes aux $\exp(tD_s)$ et $\exp(tD_n)$ respectivement. Rappelons que

$$(\pi_2(\exp(tx))\varphi)(y) = \triangle^{\frac{-1}{2}}(\exp(tx)) \cdot \chi_l(\exp(tx)) \cdot \varphi(\operatorname{Ad} \exp(-tx)(y));$$

pour toute $\varphi \in L^2(H/P^1)$ où $P^1 = \exp(\mathfrak{p}^1)$. On considére les groupes $H^n = \mathbb{R} \times H$, $H^s = \mathbb{R} \times H$ sur lequels le produit semi-direct est défini respectivement de la façon suivante:

$$(t, h) \cdot (t', h') = (t + t', \exp(-tD_n)h \cdot h')$$
$$(t, h) \cdot (t', h') = (t + t', \exp(-tD_s)h \cdot h').$$

Ainsi on définit les représentations ${\pi_2}^n$, ${\pi_2}^s$:

$$({\pi_2}^n(t))\varphi)(y) = \varphi(\exp(-tD_n)(y))$$
$$\text{et}$$
$$({\pi_2}^s(t))\varphi)(y) = \triangle^{\frac{-1}{2}}(\exp(tx)) \cdot \chi_l(\exp(tx)) \cdot \varphi(\exp(-tD_s)(y)).$$

Alors

$$\begin{aligned}\pi_2(\exp(tx))\varphi)(y) &= \triangle^{\frac{-1}{2}}(\exp(tx)) \cdot \chi_l(\exp(tx)) \\ &\cdot \varphi(\exp(-tD_s) \cdot (\exp(-tD_n)(y))) \\ &= ((\pi_2^s(t) \circ \pi_2^n(t))\varphi)(y) = ((\pi_2^n(t) \circ \pi_2^s(t))\varphi)(y).\end{aligned}$$

3.29. Soit $f \in L^1(H)$. On définit la fonction $f^{\exp(tD_n)}$ par

$$f^{\exp(tD_n)} = f(\exp(tD_n))(h)), \; h \in H.$$

Il est clair que ceci induit une action isométrique sur $L^1(H)/\ker(\gamma)$. Choisissons deux fonctions b_t, $c_t \in L^1(H)/\ker(\gamma)$ telles que

$$\gamma(b_t) =< \cdot, \nu > \pi_2^s(t)^{-1}\nu, \; t \in \mathbb{R}$$
$$\text{et}$$
$$\gamma(c_t) =< \cdot, \nu > \pi_2^n(t)^{-1}\nu, \; t \in \mathbb{R}.$$

avec $\nu = \mu \otimes \lambda$ et μ, λ sont les fonctions définies en (3.20). Alors on a la proposition suivante:

3.30. Proposition:

Soit v^l la fonction définie comme précédement (3.22). Alors

$$v^l(\,exp(tx)) = b_t^{exp(tD_n)} \cdot c_t \; mod \; \ker(\gamma).$$

Preuve:
Nous avons que

$$\begin{aligned}\gamma(v^l(\,\exp(tx))) &=< \cdot, \nu > \pi_2^l(\,\exp(tx))^{-1}\nu \\ &= \pi_2^l \exp(tx)^{-1} \circ P_{\nu,\nu} \\ &= \pi_2^n(t)^{-1} \circ \pi_2^s(t)^{-1} \circ P_{\nu,\nu}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\gamma(b_t^{\exp(tD_n)} \cdot c_t) &= \gamma(b_t^{\exp(tD_n)}) \circ \gamma(c_t) \\ &= \pi_2^n(t)^{-1} \circ \gamma(b_t) \circ \pi_2^n(t) \circ \gamma(c_t) \\ &= \pi_2^n(t)^{-1} \circ \pi_2^s(t)^{-1} \circ P_{\nu,\nu} \circ \pi_2^n(t) \circ \pi_2^n(t)^{-1} \circ P_{\nu,\nu} \\ &= \pi_2^n(t)^{-1} \circ \pi_2^s(t)^{-1} \circ P_{\nu,\nu} \circ P_{\nu,\nu} \\ &= \pi_2^n(t)^{-1} \circ \pi_2^s(t)^{-1} \circ P_{\nu,\nu}.\end{aligned}$$

On conclut que $v^l(\,\exp(tx)) = b_t^{\exp(tD_n)} \cdot c_t \mod \ker(\gamma)$. ■

Démontrons maintenant deux lemmes dont nous aurons besoin pour le reste de ce chapitre.

3.31. Lemme:
La fonction b_t définie en (3.29) vérifie

$$\|b_t\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \leq \beta \cdot \sigma(\,exp(tx));$$

où β est une constante independante de t.

Preuve:

Nous avons que

$$\mathfrak{h}/\mathfrak{p}^1 \cong \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1/\mathfrak{p}^1 \cong \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}/\mathfrak{p}'' \quad (3.13).$$

Or $\mathfrak{h}_1$ est un idéal de $\mathfrak{h}$ (car elle contient $\mathfrak{n}$). Soit $B = (\mathfrak{w}_1, \cdots, \mathfrak{w}_k)$ des vecteurs D_s-invariants de $\mathfrak{h}$ telles que $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{R}\mathfrak{w}_i \oplus \mathfrak{h}_1$. D'autre part comme D_s est un opérateur semi-simple, on peut choisir les espaces $(\mathfrak{v}_1, \cdots, \mathfrak{v}_m)$ définis en (3.13) de telle sorte qui soient D_s-invariants. Alors $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{m\oplus} \mathbb{R}\mathfrak{v}_i \oplus \sum_{i=1}^{k\oplus} \mathbb{R}\mathfrak{w}_i \oplus \mathfrak{p}^1$. Ainsi on peut identifier les espaces $L^2(B)$ et $L^2(H/P^1)$, où $B = \sum_{i=1}^{m\oplus} \mathbb{R}\mathfrak{v}_i \oplus \sum_{i=1}^{k\oplus} \mathbb{R}\mathfrak{w}_i$. Choisissons ν comme la fonction de Gauss, c'est à dire que

$$\nu\Big(\exp(t_1\mathfrak{v}_1)\cdots\exp(t_m\mathfrak{v}_m) \cdot \exp(t'_1\mathfrak{w}_1)\cdots\exp(t'_k\mathfrak{w}_k)\Big) = e^{-\sum_{i=1}^{m}|t_i\mathfrak{v}_i|^2 - \sum_{i=1}^{k}|t'_i\mathfrak{w}_i|^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} < \pi_2^s(t)\nu, \nu > &= \triangle^{\frac{-1}{2}}(\exp(tx))\chi_l(\exp(tx)) \cdot \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k} \\ &\nu\Big(\prod_{i=1}^{m}\exp(\mathrm{Exp}(-tD_s)(t_i\mathfrak{v}_i))\prod_{i=1}^{k}\exp(\mathrm{Exp}(-tD_s)(t'_i\mathfrak{w}_i))\Big) \\ &\cdot \nu\Big(\prod_{i=1}^{m}\exp(t_i\mathfrak{v}_i)\cdot\prod_{i=1}^{k}\exp(t'_i\mathfrak{w}_i)\Big)\, dt'_1\cdots dt_k{}'\cdot dt_1\cdots dt_m \\ &= \triangle^{\frac{-1}{2}}(\exp(tx))\chi_l(\exp(tx)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\sum_{i=1}^m |\operatorname{Exp}(-tD_s)(t_i\mathfrak{v}_i)|^2-\sum_{i=1}^m |t_i\mathfrak{v}_i|^2}\\
&\cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^k} e^{-\sum_{i=1}^k |\operatorname{Exp}(-tD_s)(t_i'\mathfrak{w}_i)|^2-\sum_{i=1}^k |t_i'\mathfrak{w}_i|^2}\\
&dt_1'\cdots dt_k'\Big)dt_1\cdots dt_m\\
&= \triangle^{\frac{-1}{2}}(\exp(tx))\chi_l(\exp(tx))\\
&\cdot \prod_{i=0}^{m}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-|\operatorname{Exp}(-tD_s)(t_i\mathfrak{v}_i)|^2-|t_i\mathfrak{v}_i|^2}\\
&\cdot \Big(\prod_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} e^{-|\operatorname{Exp}(-tD_s)(t_i'\mathfrak{w}_i)|^2-|t_i'\mathfrak{w}_i|^2}\ dt_i'\Big)\ dt_i\Big)\\
&= \triangle^{\frac{-1}{2}}(\exp(tx))\chi_l(\exp(tx))\\
&\cdot \prod_{i=0}^{m}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-<(AA^*+I)(t_i\mathfrak{v}_i).(t_i\mathfrak{v}_i)>}\\
&\cdot \Big(\prod_{i=0}^{k}\int_{\mathbb{R}} e^{-<(EE^*+I)(t_i'\mathfrak{w}_i).(t_i'\mathfrak{w}_i)>}\ dt_i'\Big)\ dt_i\Big):
\end{aligned}
$$

où $E = \operatorname{Exp}(-tD_s)$. Par ([14]), nous avons que

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{k}\int_{\mathbb{R}} e^{-<(EE^*+I)(t_i'\mathfrak{w}_i),(t_i'\mathfrak{w}_i)>}\ dt_i' &= \prod_{i=1}^{k}\frac{2\pi}{(\det_{\mathfrak{w}_i}(EE^*+I))^{\frac{1}{2}}}\\
&= \Big(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\Big)^k .
\end{aligned}
$$

De même nous avons

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{m}\int_{\mathbb{R}} e^{-<(EE^*+I)(t_i\mathfrak{v}_i),(t_i\mathfrak{v}_i>}\ dt_i &= \prod_{i=1}^{m}\frac{2\pi}{(\det_{\mathfrak{v}_i}(EE^*+I))^{\frac{1}{2}}}\\
&= \prod_{i=1}^{m}\frac{2\pi}{(e^{-2t\operatorname{tr}\lambda_i(x)}+1)^{\frac{1}{2}}}:
\end{aligned}
$$

où λ_i est la restriction de $\mathrm{ad}(x)$ sur $\mathfrak{v}_i$. Donc

$$\begin{aligned}
< \pi_2^s(t)\nu, \nu > &= \chi_l(\exp(tx))(\frac{2\pi}{\sqrt{2}})^k \\
&\frac{\cdot \prod_{i=1}^m 2\pi \cdot e^{\frac{-t}{2}\mathrm{tr}\lambda_i(x)}}{(e^{-2t\mathrm{tr}\lambda_i(x)}+1)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \chi_l(\exp(tx)) \cdot (\frac{2\pi}{\sqrt{2}})^k \cdot \prod_{i=1}^m \frac{2\pi}{(e^{\frac{-t}{2}\mathrm{tr}\lambda_i(x)} + e^{\frac{t}{2}\mathrm{tr}\lambda_i(x)})^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|< \pi_2^s(t)\nu, \nu >^{-1}| &\leq C \cdot e^{\sum_{i=1}^m |\frac{t}{2}| \, |\mathrm{tr}\lambda_i(x)|} \\
&= C \cdot \sigma(\exp(tx)).
\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de x et de t.
Rappelons que notre but est estimer $\|b_t\|$ où $b_t \in L^1(H)/\ker(\gamma)$ et $\gamma(b_t) =< \cdot, \nu > \pi_2^s(t)^{-1}\nu$. On définit une action de $\mathbb{R} \times L^1(H) \longrightarrow L^1(H)$ par $f^t(h) = \det \mathrm{Exp}(tD_s) f(\exp(tD_s)(h))$. Cette action est isométrique et

$$\gamma(f^t) = \pi_2^s(t)^{-1} \circ \gamma(f) \circ \pi_2^s(t);$$

en plus elle induit un automorphisme sur $L^1(H)/\ker(\gamma)$. Alors

$$b_t =< \pi_2(t)^s\nu, \nu >^{-1} p_\lambda^{(t)} * p_\lambda \mod \ker(\gamma).$$

En effet

$$\begin{aligned}
\gamma(< \pi_2^s(t)\nu, \nu >^{-1} p_\lambda^{(t)} * p_\lambda) &= < \pi_2^s(t)\nu, \nu >^{-1} \cdot \gamma(p_\lambda^{(t)}) \circ \gamma(p_\lambda) \\
&= < \pi_2^s(t)\nu, \nu >^{-1} \cdot < \pi_2^s(t)\nu, \nu > \\
&\cdot < \cdot, \nu > \pi_2^s(t)^{-1}\nu \\
&= \gamma(b_t).
\end{aligned}$$

Donc $b_t =< \pi_2^s(t)\nu, \nu >^{-1} p_\lambda^t * p_\lambda \mod \ker(\gamma)$. D'où le fait que

$$\begin{aligned}
\|b_t\| &\leq C \cdot \|p_\lambda\|^2 \cdot \sigma(\exp(tx)) \\
&= \beta \cdot \sigma(\exp(tx));
\end{aligned}$$

où $\beta = C \cdot \|p_\lambda\|^2$. ■

3.32. Lemme:
La fonction c_t définie en (3.29) vérifie

$$\|c_t\|_1 \leq C \cdot (1 + |t|^2)^c;$$

où C est une constante.

Preuve:
Nous avons que

$$\begin{aligned}\gamma(c_t) &= \pi_2^n(t)^{-1} \circ P_{\nu,\nu} \\ &= P_{\pi_2^n(t)^{-1}\nu,\nu}.\end{aligned}$$

Regardons le noyau de l'opérateur $P_{\pi_2^n(t)^{-1}\nu,\nu}$. Alors

$$\begin{aligned}(P_{\pi_2^n(t)^{-1}\nu,\nu}\xi)(x) &=< \xi, \nu > (\pi_2^n(t)^{-1}\nu)(x) \\ &=< \xi, \nu > \nu(\exp(tD_n)(x)) \\ &= \int_{H/P^1} \xi(y)\bar{\nu}(y)\nu(\exp(tD_n)(x))\, dy \\ &= \int_{H/P^1} \bar{\nu}(y)\nu(\exp(tD_n)(x))\xi(y)\, dy \\ &= \int_{H/P^1} F_t(x,y)\xi(y)\, dy.\end{aligned}$$

où $F_t(x,y) = \nu(\exp(tD_n)) \cdot \bar{\nu}(y)$. Alors $R(F_t) = c_t$ où R est le retracte définie en (1.4.7). Puisque R est une application linéaire continue. nous avons

$$\|R(F_t)\|_1 \leq C" \|F_t\|_{\partial,\alpha,R} \leq \infty,$$

pour la norme $\|\cdot\|_{\partial,\alpha,R}$ définie en (1.4.4). Rappelons l'expression de cette norme:

Décomposons $\mathfrak{h}$ comme précédement (1.4.4). Alors, soient $s = \exp(s_1)$, $s' = \exp(s'_1) \in \tilde{W} = W_1 \cdot V_2$, et $n = \exp(n_1)$, $n' = \exp(n'_1) \in W_0$. Alors

$$\begin{aligned}||F_t||_{\partial,\alpha,R} = & \sup_{s,\ s',\ n,\ n'} e^{\alpha|s|} \cdot e^{\alpha|s'|} \cdot R(n) \cdot R(n') \\ & \cdot |\partial_s \partial_n \partial_{s'} \partial_{n'} F_t(sn, s'n')| \leq \infty.\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \geq 0$ et P est un polynôme. Donc

$$\begin{aligned}||F_t||_{\partial,\alpha,R} = & \sup_{s,\ s',\ n,\ n'} e^{\alpha|s|} \cdot e^{\alpha|s'|} \cdot R(n) \cdot R(n') \\ & \cdot |\partial_s \partial_n \partial_{s'} \partial_{n'} F_t(sn, s'n')|). \\ = & \sup_{s,\ s',\ n,\ n'} (e^{\alpha|s|} \cdot e^{\alpha|s'|} \cdot R(n) \cdot R(n') \\ & \cdot |\partial_s \partial_n \nu(\exp(tD_n)(s \cdot n)) \partial_{s'} \partial_{n'} \bar{\nu}(s'n')|.\end{aligned}$$

Calculons $\exp(tD_n)(s \cdot n)$:
Nous avons que $\exp(tD_n)(s \cdot n) = \exp(tD_n)(s) \cdot \exp(tD_n)(n)$. Or

$$\begin{aligned}\exp(tD_n)(s) &= \exp(tD_n)(\exp(s_1)) = \exp(\exp(tD_n(s_1))) \\ &= \exp(s_1 + tD_n(s_1) + \cdots + \frac{tD_n^r(s_1)}{r!}), \text{ où } r \leq \dim \mathfrak{n} \\ &= \exp(s) \cdot \exp(q(s_1, t)),\end{aligned}$$

où q est un polynôme en t et analytique en s_1 ([19]).
D'autre part on considère l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_1 = \mathbb{R} + \mathfrak{n}$ sur laquelle le crochet de Lie est défini de la façon suivante:

$$[(t,\ n), (t',\ n')] = [0,\ tD_n(n') + [n,\ n'] - t'D_n(n)].$$

Choisissons une base de Jordan-Hölder $B = (b_1, \cdots, b_m)$ pour l'action de $\mathfrak{n}_1$ sur $\mathfrak{n}$. Alors

$$\exp(tD_n)(s \cdot n) = s \cdot \prod_{i=1}^{m} (\exp(n_i + r_i(n_1, \cdots, n_{i-1}, t, s))).$$

où r_i est un polyôme en $(n_1, \cdots, n_{i-1}, t)$ et analytique en s ([31]). Donc

$$\|F_t\|_{\partial,\alpha,R} = \sup_{s,\ s',\ n,\ n'} (e^{\alpha|s|} \cdot e^{\alpha|s'|} \cdot R(n) \cdot R(n')$$
$$\cdot |\partial_s \partial_n \nu(s \cdot \prod_{i=1}^{m} (\exp(n_i + r_i(n_1, \cdots, n_{i-1}, t, s))) \partial_{s'} \partial_{n'} \bar{\nu}(s'n')|.$$

On fait un changement de variable en posant

$$a_i = n_i + r_i(n_1, \cdots, n_{i-1}, t, s).$$

ainsi que

$$a = \prod_{i=1}^{m} (\exp(n_i + r_i(n_1, \cdots, n_{i-1}, t, s))).$$

Donc $n_i = (a_i + q_i(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, s))$ et q_i admet les mêmes proprietés que r_i. Alors

$$\begin{aligned}
\|F_t\|_{\partial,\alpha,R} = & \sup_{s,\ s',\ a,\ n'} (e^{\alpha|s|} \cdot e^{\alpha|s'|} \\
& \cdot R(\prod_{i=1}^{m} (\exp(a_i + q_i(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, s))) \\
& \cdot R(n') \cdot |\partial_s \partial_n \nu(s \cdot a) \partial_{s'} \partial_{n'} \bar{\nu}(s'n')| \\
& \leq C" \cdot (1 + |t|)^r \cdot \sup_{s,\ s',\ a,\ n'} (e^{\alpha|s|} \cdot e^{\alpha|s'|} \cdot R''(s, a) \\
& \cdot P(n') \cdot |\partial_s (\sum_{j=1}^{m} \partial_{a_j} \nu(s \cdot a)) \partial_{s'} \partial_{n'} \bar{\nu}(s'n')| \\
& = C \cdot (1 + |t|)^r,
\end{aligned}$$

où

$$C = C" \cdot \sup_{s,\ s',\ a,\ n'} (e^{\alpha|s|} \cdot e^{\alpha|s'|} \cdot R''(s, a) \cdot R(n')$$
$$\cdot |\partial_s (\sum_{j=1}^{m} \partial_{a_j} \nu(s \cdot a)) \partial_{s'} \partial_{n'} \bar{\nu}(s'n')|,$$

où R'' est un polynomial en a et analytique en s, et ∂_{a_j} est la dérivée dans la direction a_j. ∎

Alors on a la proposition suivante:

3.33. Proposition:
le poids ω défini comme précédement vérifie

$$\omega(t) \leq C' \cdot (1+|t|)^c \cdot \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{|\mathrm{tr}\lambda_i t|}{2}}.$$

Preuve:
Nous avons que $\omega(t) = \|v^l(\exp(tx))\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)}$. Alors

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \|v^l(\exp(tx))\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\ &\leq \|b_t\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \cdot \|c_t\|_{L^1(H)/\ker(\gamma)} \\ &\leq \beta \cdot C \cdot (1+|t|)^c \cdot \sigma(\exp(tx)) \\ &\leq C' \cdot (1+|t|)^c \cdot \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{|\mathrm{tr}\lambda_i(x)t|}{2}}. \blacksquare\end{aligned}$$

3.34. Corollaire:
Soit χ un caractère de $L^1(U,\omega) \cong L^1(\mathbb{R}^n,\omega)$. Alors

$$|\chi(\, exp(tx))| \leq \prod_{i=1}^{m} e^{|\frac{t}{2}|\cdot|\, tr\lambda_i(x)|}.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathfrak{u}$, où $\lambda_i(x)$ est la restriction de $ad(x)$ sur $\mathfrak{v}_i$.

Preuve:
Le caractère χ de $L^1(U,\omega) \cong L^1(\mathbb{R}^n,\omega)$ vérifie:

$$|\chi(\exp(tx))| \leq \omega(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

On pose $|\chi(\exp(t.x))| = |e^{\varrho(t.x)}|$. où $\varrho \in \mathbb{C}^{n*}$. Rappelons qu'on va montrer que

$$|\chi(\exp(t.x))| = |e^{\varrho(t.x)}| = e^{\mathrm{Re}\ \varrho(tx)} \leq \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{t}{2}\cdot \mathrm{tr}\lambda_i(x)}.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathfrak{u}$ tel que

$$e^{\mathrm{Re}\ x_0} = |\chi(\exp(x_0))| \leq \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{1}{2}\cdot|\mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|}.$$

Alors

$$e^{|\ \mathrm{Re}\ \varrho(x_0)|} > \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{1}{2}\cdot|\mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|}.$$

Donc

$$e^{|t||\mathrm{Re}\ \varrho(x_0)|} > \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{|t|}{2}\cdot|\mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On obtient alors que

$$\prod_{i=1}^{m}(e^{\frac{|t|}{2}\cdot|\mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|}) < e^{|t\ \mathrm{Re}\ \varrho(x_0)|} \leq C'\cdot(1+|t|)^r \cdot \prod_{i=1}^{m} e^{|\mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|\frac{|t|}{2}}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \text{d'après (3.33)}$$

$$\Longleftrightarrow 1 < e^{\frac{|t|}{2}|\ \mathrm{Re}\ \varrho(x_0)|}\cdot \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{-|t|}{2}\cdot|\mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|} \leq C'\cdot(1+|t|)^r.$$

$$\Longleftrightarrow 1 < e^{|t|(|\ \mathrm{Re}\ \varrho(x_0)| - \sum_{i=1}^{m}\frac{|\mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|}{2})} \leq C'\cdot(1+|t|)^r.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}.$$

ce qui est impossible. Ainsi

$$|\ \mathrm{Re}\varrho(x_0)| \leq \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}|\ \mathrm{tr}\lambda_i(x_0)|.\ \forall x_0 \in \mathfrak{u}$$

Donc nous avons bien que

$$|\chi(\exp(tx_0))| = |e^{\varrho(tx_0)}| \leq \prod_{i=1}^{m} e^{\frac{|t|}{2}\cdot|\mathrm{tr}\lambda_i(x)|}.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. $\forall x_0 \in \mathfrak{u}$. ∎

3.35. Proposition:
On considére les deux sous-ensembles S_1, S_2 de $\mathbb{R}^{n*}$ telles que

$$S_1 = \{\sum_{i=1}^{m}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i})(\, tr\lambda_i(\cdot));\ 1 \leq p_i \leq \infty\}$$
$$=\{\sum_{i=1}^{m} C_i(\, tr\lambda_i(\cdot));\ |C_i| \leq \frac{1}{2}\}$$

et

$$S_2 = \{\varrho \in \mathbb{R}^{n*}; |\varrho(x)| \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}|\, tr\lambda_i(x)|\}.$$

Alors $S_1 = S_2$.

Preuve:
Il est clair que $S_1 \subset S_2$. En plus S_1, S_2 sont deux parties convexes de $\mathbb{R}^{n*}$. Supposons qu'il existe $\varrho \in S_2$ et $\varrho \notin S_1$. Par Hahn-Banach . il existe α, $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$s_1(x) \leq \alpha < \beta < \varrho(x),$$

pour tout $s_1 \in S_1$. On pose $s_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}|\,\mathrm{tr}\lambda_i(x)|$. Alors nous obtenons

$$\varrho(x) > \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}|\mathrm{tr}\lambda_i(x)|,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $\varrho \in S_2$. Donc $S_1 = S_2$. ∎

Ainsi nous arrivons a conclure le corollaire suivant:

Soit χ un caractère sur $L^1(\mathbb{R}^n,\omega)$. Alors il existe un multi-indice $\bar{p} = (p_1,\cdots,p_m)$ tel que $|\chi(\ exp(x))| = e^{\sum_{i=1}^{m}((\frac{1}{2}-\frac{1}{p_i})\mathrm{tr}\lambda_i(x))}$. $\forall x \in \mathfrak{u}$.

Preuve:
On pose $\chi(\exp(x)) = e^{(-i\varrho_1-\varrho_2)(x)}$, où $\varrho_1,\varrho_2 \in \mathbb{R}^{n*}$. Alors $\varrho_2 \in S_2$ car χ est un caractère sur $L^1(\mathbb{R}^n,\omega)$ (voir (3.34.)). Nous avons dèja vu que $S_1 = S_2$, donc forcément il existe $\frac{-1}{2} \leq C_i = \frac{1}{2}-\frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{2}$; $p_i \in [1,\ \infty]$ tel que $\sum_{i=1}^{m} C_i(\ \mathrm{tr}\lambda_i(x)) = \varrho_2(x)$. Ainsi qu'il existe un $\bar{p}$ telle que

$$e^{\sum_{i=1}^{m}((\frac{1}{2}-\frac{1}{p_i})\mathrm{tr}\lambda_i(x))} = e^{\varrho_2(x)} = |\chi(\ \exp(x)|,\ \forall x \in \mathfrak{u}.$$

D'autre part $\chi(\exp(x)) = e^{-i\varrho_1(x)}\ .\ e^{\sum_{i=1}^{m}((\frac{1}{2}-\frac{1}{p_i})\mathrm{tr}\lambda_i(x))}$ avec $\varrho_1 \in \mathbb{R}^{n*}$.
■

3.37. Proposition:
Soit l' un autre prolongement de q à G. Soit $(\pi_{\bar{p}}^{l'}, V_0^{(\bar{p},l')})$ le $L^1(G)$-module simple correspondant. Alors

$$(\pi_{\bar{p}}^{l'}, V_0^{(\bar{p},l')}) \cong (\pi_{\bar{p}}^{l}, V_0^{(\bar{p},l)})$$

si et seulement si les orbites correspondantes $O_{l'}$ et O_l sont les mêmes.

Preuve:
Supposons tout d'abord que $O_{l'} = O_l$. Alors

$$\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}} = \chi_{\pi_{\bar{p}}^{l}};$$

d'après (3.25). Alors les idéaux

$$M_{\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}}} = \{f \in A \mid \chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}}(\tilde{p} * A * f)(\tilde{p}\cdot\xi) = 0;\ \xi \in V_0^{(\bar{p},l')}\}$$

et

$$M_{\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l}}} = \{f \in A \mid \chi_{\pi_{\bar{p}}^{l}}(\tilde{p} * A * f)(\tilde{p}\xi) = 0,\ \xi \in V_0^{(\bar{p},l)}\}$$

coïncident. Donc

$$A/M_{\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}}} = A/M_{\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l}}}.$$

D'où le fait que

$$(\pi_{\bar{p}}^{l'}, V_0^{(\bar{p},l')}) \cong (\pi_{\bar{p}}^{l}, V_0^{(\bar{p},l)}),$$

d'après (3.5).

Dans l'autre sens, supposons que

$$(\pi_{\bar{p}}^{l'}, V_0^{(\bar{p},l')}) \cong (\pi_{\bar{p}}^{l}, V_0^{(\bar{p},l)}).$$

Alors

$$(\pi_{\bar{p}\,/L^1(\mathbb{R}^n,\omega)}^{l'}, \tilde{p}V_0^{(\bar{p},l')}) \cong (\pi_{\bar{p}/L^1(\mathbb{R}^n,\omega)}^{l}, \tilde{p}V_0^{(\bar{p},l)}) \qquad (*).$$

Donc

$$\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}} = \chi_{\pi_{\bar{p}}^{l}}.$$

Or $\chi_{\pi_{\bar{p}}^{l'}} = \chi_{l'-l} \cdot \chi_{\pi_{\bar{p}}^{l}}$, d'après (3.25). De (*) on en déduit le fait que $\chi_{l'-l} = 1$, c'est à dire que $l' = l$. ■

3.38. Proposition:

Soit $\bar{q} = (q_1, \cdots, q_m)$ un autre multi-indice. Soit $(\pi_{\bar{q}}^{l}, V_0^{(\bar{q},l)})$ le $L^1(G)$-module simple correspondant. Alors

$$(\pi_{\bar{q}}^{l}, V_0^{(\bar{q},l)}) \cong (\pi_{\bar{p}}^{l}, V_0^{(\bar{p},l)})$$

si et seulement si $\sum_{i=1}^{m}(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_i})\mathrm{tr}\lambda_i = \sum_{i=1}^{m}((\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i})\mathrm{tr}\lambda_i$.

Preuve:

Evidente d'après (3.4) et (3.5). ■

3.39. Conclusion:

Soit (T, V) un $L^1(G)$-module simple tel que $\mathrm{Ann}_{L^1(N)} = \ker(G\cdot\tau)$ ([29]). Alors $(T, V) \cong A/M_{\chi_T}$, tel que

$$M_{\chi_T} = \{f \in A \mid \chi_T(\tilde{p} * A * f)(\tilde{p} \cdot \xi) = 0,\ \xi \in V\},$$

où A est l'algèbre définie en (3.24.) et χ_T est un caractère sur l'algèbre $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ (par (3.11) et (3.8)).

Alors il existe $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\bar{p} = (p_1, \cdots, p_m)$, $p_i \in [1, \infty]$ tel que $\chi_T = \chi_{\pi^l_{\bar{p}}}$. Donc $M_{\chi_T} = M_{\chi_{\pi^l_{\bar{p}}}}$, où $M_{\chi_{\pi^l_{\bar{p}}}}$ est l'idéal défini en (3.27.). D'où le fait que

$$(T, V) \cong (\pi^l_{\bar{p}}, V_0^{(\bar{p}, l)}).$$

(voir (3.27.)).
Ainsi on peut conclure que les modules simples pour le groupe de Lie résoluble exponentiel G sont caractérisés par les représentations topologiquement irréductibles $\pi^l_{\bar{p}}$.

Chapitre 4

Cas du groupe de Boidol

Le but de ce chapitre est d'étudier les $L^1(G)$-modules simples (T, V), où G est le groupe de Boidol, et T n'est pas trivial sur le centre , c'est à dire que $T(z) = \chi_z I_V = e^{-i\alpha z} I_V$ où z est un élément du centre de G noté $Z(G)$. et $\alpha \neq 0$. Pour simplifier le calcul, on peut prendre $\alpha = 1$.

4.1. Soit G le groupe de Boidol. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie dont la base (X, Y, Z, T) vérifie:

$$[X, Y] = Z \ , \ [T, Y] = -Y \ ; \ [T, X] = X.$$

Soit l une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie:

$$l(Z) = 1 \ , \ l(T) = \theta \ ; \ l(X) = l(Y) = 0.$$

Soit $\mathfrak{n} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ le nilradical de $\mathfrak{g}$. Posons $q = l/\mathfrak{n} \in \mathfrak{n}^*$. Alors

$$\mathfrak{g}(l) = \mathfrak{g}(q) = \mathbb{R}T + \mathbb{R}Z, \ \mathfrak{u} = \mathbb{R}T, \ H = N = \exp(\mathfrak{n}).$$

Il est clair que $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg. De plus G est un produit semi direct de $\exp(\mathbb{R}T)$ avec $N = \exp(\mathfrak{n})$ défini de la manière suivante:
a) Si (x, y, z), (x', y', z') sont deux éléments de N, alors leur produit est défini par:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)).$$

Soit $\delta(t) = \exp(t \cdot \mathrm{ad}T)$ l'automorphisme de $\mathfrak{n}$ défini par:

$$\begin{aligned} \delta(t)X &= e^t X \\ \delta(t)Y &= e^{-t} Y \\ \delta(t)Z &= Z. \end{aligned}$$

b) Pour tout (t, n), (t', n') dans $G = \exp(\mathfrak{g}) = \exp(\mathbb{R}T).N$. nous avons:

$$(t, n) \cdot (t', n') = (t + t', \delta(t)^{-1}(n) \cdot n').$$

4.2. Soit $\mathfrak{p}^0 = \mathbb{R}Z + \mathbb{R}X$. Il est évident que $\mathfrak{p}^0$ est une polarisation de Vergne en q. De même $\mathfrak{p}^1 = \mathbb{R}Z + \mathbb{R}X + \mathbb{R}T$ est une polarisation de Vergne en l. Donc $\mathfrak{p}^1$ vérifie la condition de Pukanszky. Si nous posons $P^0 = \exp(\mathfrak{p}^0)$, $P^1 = \exp(\mathfrak{p}^1)$ et nous désignons par $\chi_q = \chi_{q, \mathfrak{p}^0}$ et $\chi_l = \chi_{l, \mathfrak{p}^1}$ les caractères unitaires de P^0 (resp P^1) définies par:

$$\chi_{q, \mathfrak{p}^0}(\exp(a)) = e^{-iq(a)}, \quad \forall a \in \mathfrak{p}^0$$
$$\chi_{l, \mathfrak{p}^1}(\exp(b)) = e^{-il(b)}, \quad \forall b \in \mathfrak{p}^1 .$$

Alors $\pi_2 = \mathrm{ind}_{P^1}^G \chi_l$, et $\tau = \mathrm{ind}_{P^0}^N \chi_q$ sont des représentations unitaires irréductibles de G, et de N respectivement.
Déterminons maintenant la représentation induite $\pi_2 = \mathrm{ind}_{P^1}^G \chi_l$. Notre algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, est égale à $\mathbb{R}T \bigoplus \mathrm{vec}(X, Z, Y)$, où $(X, Y, Z) = \mathfrak{n}$ est l'algèbre de Heisenberg. Il est clair que $G/P^1 \cong \exp(\mathbb{R}Y)$. L'espace $\mathcal{H}_{\pi_2}$ est isomorphe à $L^2(G/P_1) \cong L^2(\exp(\mathbb{R}Y)) \equiv L^2(\mathbb{R})$.
Soit $\xi \in L^2(\exp(\mathbb{R}Y)) \cong L^2(\mathbb{R})$. Calculons le caractère $\triangle_{P^1, G}$:

$$\triangle_{P^1, G}(\exp(tT)) = e^{\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}^1}(tT)} = e^{-t}, \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned} (\pi_2(\exp(tX))\xi)(\exp(yY)) &= \xi(\exp(-tX) \cdot \exp(yY)) \\ &= \xi\Big(\exp(yY) \cdot \big(\exp(-yY) \cdot \exp(-tX) \cdot \exp(yY)\big)\Big). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$\exp(-yY)\cdot\exp(-tX)\cdot\exp(yY)=\exp(\exp(\mathrm{ad}(-yY)(-tX))).$$

nous avons que:

$$\begin{aligned}\big(\pi_2(\exp(tX))\xi\big)(\exp(yY)) &= \xi(\exp(yY))\cdot\\ &\overline{\chi_l\big(\exp(\exp(\ \mathrm{ad}(-yY)(-tX)))\big)}\\ &= \xi(\exp(yY))\cdot\\ &\overline{\chi_l\big(\exp(-tX+[-yY.-tX])\big)}\\ &= \xi(\exp(yY))\cdot e^{-ity}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\pi_2(\exp(tT))\xi)(\exp(yY)) &= \xi(\exp(-tT)\cdot\exp(yY))\\ &= \xi\Big(\big(\exp(-tT)\cdot\exp(yY)\cdot\exp(tT)\big)\\ &\cdot\exp(-tT)\Big)\\ &= \triangle^{\frac{1}{2}}_{P^1,G}(\exp(-tT))\cdot\overline{\chi_l(\exp(-tT))}\cdot\\ &\xi\big(\exp\big(\exp(\ \mathrm{ad}(-tT)(yY))\big)\big)\\ &= e^{\frac{t}{2}}\cdot e^{-it\theta}\cdot\xi(\exp(e^t yY)).\end{aligned}$$

De la même manière on trouve:

$$\begin{aligned}\pi_2(\exp(y_1Y)\xi(\exp(yY)) &= \xi(\exp((y-y_1)Y))\\ \pi_2(\exp(zZ))\xi(\exp(yY)) &= e^{-iz}.\xi(\exp(yY)).\end{aligned}$$

De même, on peut déduire la représentation $\pi_p=\ \mathrm{ind}_{P^1}^G\chi_l$ réalisée dans l'espace $L^p(G/P^1)\ \cong L^p(\exp(\mathbb{R}Y))\cong L^p(\mathbb{R})$, pour $1\leq p\leq\infty$.
Donc nous avons que:

$$\begin{aligned}\big(\pi_p(\exp(tX))\xi\big)(\exp(yY)) &= \big(\pi_2(\exp(tX))\xi\big)(\exp(yY))\\ \big(\pi_p(\exp(y'Y))\xi\big)(\exp(yY)) &= \big(\pi_2(\exp(y'Y))\xi\big)(\exp(yY))\\ \big(\pi_p(\exp(zZ))\xi\big)(\exp(yY)) &= \big(\pi_2(\exp(zZ))\xi\big)(\exp(yY))\\ \big(\pi_p(\exp(tT))\xi\big)(\exp(yY)) &= e^{\frac{-t}{p}}\cdot\xi(\exp(e^{-t}yY))\cdot e^{-i\theta t}.\end{aligned}$$

On peut remarquer que si $\xi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Alors

$$\pi_{p/N}(n)\xi = \pi_{2/N}(n)\xi = \tau(n)\xi, \ \forall n \in N.$$

Donc $\ker(\pi_{p/N}) = \ker(\pi_{2/N}) = \ker(G \cdot \tau)$. Or $\ker(G \cdot \tau) = \ker(\tau)$ car l'orbite $G \cdot \tau$ est réduite à τ, en effet:
Soit $x \in G_\tau$, où G_τ est le stabilisateur de τ dans G. Alors

$$\tau^x \cong \tau, \quad \text{où } \tau^x(n) = \tau(x^{-1}nx), \ n \in N.$$

Donc

$$\tau^x \cong \tau \Longleftrightarrow G \cdot \tau^x = G_\tau \Longleftrightarrow \ \mathrm{Ad}^*(x)(G \cdot \tau) = G \cdot \tau,$$

où $G \cdot \tau$ est l'orbite correspondante à τ. De plus

$$\mathrm{Ad}^*(x)(G \cdot \tau) = G \cdot \tau \Longleftrightarrow \mathrm{Ad}^*(x)O_q = O_q$$

où O_q désigne l'orbite en q, et q la forme linéaire sur $\mathfrak{n}$ correspondante à τ par la bijection de Kirillov. Alors

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}^*(x)O_q = O_q \\
&\qquad \Longleftrightarrow \forall q' \in O_q, \ \exists \ n \in N \mid \quad \mathrm{Ad}^*(x)q' = \ \mathrm{Ad}^*(n)q \\
&\qquad \Longrightarrow \exists \ n \in N \mid \mathrm{Ad}^*(x)q = \mathrm{Ad}^*(n)q \\
&\qquad \Longrightarrow \ \mathrm{Ad}^*(n^{-1} \cdot x) \ q = q \\
&\qquad \Longrightarrow n^{-1} \cdot x \in G_q \\
&\qquad \Longrightarrow x \in G_q \cdot N = N \cdot G_q.
\end{aligned}$$

Donc $G_\tau \subset (G_q \cdot N) \cdots\cdots\cdots (1)$.
Réciproquement, nous avons

$$\mathrm{Ad}^*(N)O_q = O_q, \qquad \text{(par définition de } O_q\text{)},$$

et $\mathrm{Ad}^*(G_q)O_q = O_q$ car si $x \in G_q$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(x)q = q \Longrightarrow \mathrm{Ad}^*(x)(\,\mathrm{Ad}^*(n))q &= \mathrm{Ad}^*(xnx^{-1})\ \mathrm{Ad}^*(x)q\\ &= \mathrm{Ad}^*(n')q \subset O_q.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(G_q \cdot N)O_q &= \mathrm{Ad}^*(N \cdot G_q)O_q\\ &= \mathrm{Ad}^*(N)\ \mathrm{Ad}^*(G_q)O_q.\\ &= O_q\end{aligned}$$

Donc $G_q \cdot N = N \cdot G_q \subset G_\tau \quad \cdots\cdot(2).$

De (1), (2) nous avons que

$$G_{\tau}.= G_q \cdot N = N \cdot G_q.$$

Il est clair que $\exp(\mathbb{R}T) \subset G_q$, ce qui aura comme conséquence que $G_\tau = G$. Donc l'orbite $G \cdot \tau$ est réduite à τ.

Puisque que dans notre cas on a $H = N$, alors $\tau = \gamma$.

4.3. Déterminons maintenant les $L^1(G)$-modules simples pour la représentation π_p avec $1 \leq p \leq \infty$.

4.3.1. Par (3.17) nous avons l'existence d'une fonction $f \in L^1(G)$ telle que $\pi_p(f)$ soit un opérateur de rang fini. Considérons le sous-espace

$$\begin{aligned}V_0^p = \mathrm{vect} < \{\pi_p(f)\xi,\ f \in L^1(G), \xi \in L^p(\mathbb{R}) \mid\\ \pi_p(f)\,\text{est de rang fini}\} > .\end{aligned}$$

Alors V_0^p est un $L^1(G)$-module simple pour la représentation π_p pour $1 \leq p \leq \infty$ cf ([23]). De plus

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(V_0^p) &= \ker(\pi_p)_{/L^1(N)} = \ker(\pi_2)_{/L^1(N)}\\ &= \ker(G \cdot \tau) = \ker(\tau).\end{aligned}$$

4.3.2. Calculons le noyau de l'opérateur $\pi(f)$ pour $f \in L^1(N)$ pour pouvoir estimer le poids ω plus tard.
Soit $\xi \in L^p(\mathbb{R})$. On pose $y = \exp(yY)$, $a = \exp(aX)$, $b = \exp(bY)$, $c = \exp(cZ)$. Alors

$$\begin{aligned}
(\pi_p(f)\xi)(y) &= \int_N f(a,b,c)(\pi_p(a,b,c))\xi)(y)\ da\ db\ dc \\
&= \int_N f(a,b,c)(\pi_p(a)\cdot\pi_P(b)\pi_p(c)\xi)(y)\ da\ db\ dc \\
&= \int_N f(a,b,c)\cdot e^{-iay}\cdot e^{-ic}\cdot\xi(y-b)\ da\ db\ dc \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}^3(a,b,1)\cdot e^{-iay}\xi(y-b)\ da\ db \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}^3(a,y-b,1)e^{-iay}\xi(b)\ da\ db \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^{1,3}(y,y-b,1)\xi(b)db \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(y,b,1)\xi(b)\ db.
\end{aligned}$$

4.3.3. Soit $p_\lambda \in S(N) \subset L^1(N)$ telle que $\tau(p_\lambda)$ soit un projecteur de rang un , où τ est la représentation induite définie précédement (4.2) . Alors $\tau(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda}$, et $\lambda \in S(\mathbb{R})$. Une telle fonction existe toujours ([23]). Pour simplifier le calcul, on suppose que $< \lambda, \lambda >_{L^2} = 1$ et $\operatorname{supp}\lambda = [-1,1]$.
On définit la fonction v_λ par

$$v_\lambda :\ G \longrightarrow L^1(N)$$

tel que $\tau(v_\lambda(t)) =< \cdot, \lambda > \pi_2{}^{-1}(t)\lambda$. On pose $v(t) = v_\lambda(t) \bmod \ker(\tau)$ et $\tilde{p} = p_\lambda \bmod \ker(\tau)$. Alors la fonction

$$\omega(t) = \|v(t)\|_{L^1(N)/\ker(\tau)}$$

est un poids sur G/N (2.3.5). D'après (2.3.2) et (2.3.7). nous avons que

$$L^1(G/N, L^1(N)/\ker(\tau)) \cong L^1(G)/(L^1(G) * \ker(\tau))^- \cdots\cdots \cdots(\mathbf{i}).$$

et

$$\tilde{p} * (L^1(G/N, L^1(N)/\ker(\tau)) * \tilde{p} \cong L^1(G/N, \omega) \cong L^1(\mathbb{R}, \omega) \cdots\cdots(\mathbf{ii}).$$

Revenons à notre module simple V_0^p défini précédement (4.3.1). D'après (2.2.15), nous avons

$$\tilde{p} \cdot V_0^p = \pi_p(\tilde{p})V_0^p \neq 0.$$

Alors par (3.4) $\tilde{p} \cdot V_0^p$ est un $\tilde{p} * (L^1(G/N, L^1(N)/\ker(\tau)) * \tilde{p}$- module simple. De ceci on peut déduire que $\tilde{p} \cdot V_0^p$ est un $L^1(G/N, \omega)$-module simple en tenant compte de l'homéomorphisme défini en **(ii)**.
Comme l'algèbre $B = L^1(G/N, \omega) \cong L^1(\mathbb{R}, \omega)$ est abélienne. la restriction $(S, \tilde{p}V_0^p)$ de (π_p, V_0^p) sur B est un caractère χ_p.

4.3.4. Le caractère χ_p est défini de la façon suivante:
Fixons un prolongement l_0 de q tel que

$$l_0(T) = 0.$$

Alors

$$\chi_p(t) = e^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})t} \cdot e^{-i\theta t}, \ (3.25).$$

Nous avons que

$$|\chi_p(t)| \leq \omega(t) \quad (3.26) \cdots\cdot(1)$$

Rappelons que

$$\begin{aligned}\tau(v(t)) = \pi_2(t)^{-1} \circ P_{\lambda,\lambda} &= < \cdot, \lambda > \pi_2(t)^{-1}\lambda \\ &= P_{\pi_2(t)^{-1}\lambda,\lambda}.\end{aligned}$$

Le projecteur $P_{\pi_2(t)^{-1}\lambda,\lambda}$ admet comme noyau la fonction:

$$x, y \longrightarrow e^{-it} \cdot e^{\frac{-t}{2}} \cdot \lambda(e^{-t}x) \cdot \overline{\lambda}(y) \cdots\cdots (\mathbf{A})$$

En effet:
Soit $\eta \in S(\mathbb{R})$: alors

$$\begin{aligned}(\tau(v(t))\eta)(x) &= (\pi_2(t)^{-1} \circ P_{\lambda,\lambda}(\eta))(x) \\ &=< \eta, \lambda > (\pi_2(t)^{-1}\lambda)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{it} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \lambda(e^{-t}x)\overline{\lambda}(y)\eta(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\eta(y)dy.\end{aligned}$$

D'autre part l'opérateur $\tau(v(t))$ admet comme noyau la fonction:

$$x, y \longrightarrow \hat{v}^{1,3}(t)(x, x-y, 1) \cdots\cdots (\mathbf{B}),$$

par (4.3.2.). Alors en comparant **(A)** et **(B)** et en remplaçant $x, x-y$ par a, b respectivement nous obtenons

$$\hat{v}^{1,3}(a,b,1) = e^{\frac{-t}{2}} \cdot e^{it} \cdot \lambda(e^{-t}a) \cdot \overline{\lambda}(a-b).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\hat{v}^3(t)(x,b,1) &= e^{\frac{-t}{2}} \cdot e^{it} \cdot \\ &\int_{\mathbb{R}} \lambda(e^{-t}a)\overline{\lambda}(a-b)e^{iax}da \\ &= e^{\frac{-t}{2}} \cdot e^{it} \cdot \left((\lambda_{-t}) \cdot (\overline{{}_b\lambda})(a)\right)\hat{} \\ &= e^{\frac{-t}{2}} \cdot e^{it} \cdot (\hat{\lambda_{-t}}) * (\hat{\overline{{}_b\lambda}})(a).\end{aligned}$$

où $\lambda_{-t}(x) = \lambda(e^{-t}x)$ et $\overline{{}_b\lambda}(x) = \overline{\lambda}(x-b)$. Or nous avons

$$\begin{aligned}(\overline{{}_b\lambda})\hat{}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{{}_b\lambda}(y) \cdot e^{-ixy}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(y-b) \cdot e^{-ixy}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\lambda}(y) \cdot e^{-ix(y+b)}\, dy \\ &= e^{-ibx} \cdot \hat{\overline{\lambda}}(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\hat{v}^3(t)(x,b,1) = e^{\frac{-t}{2}} \cdot e^{it} \cdot ((\lambda_{-t})\hat{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\overline{\lambda}}))(x).$$

Alors

$$\begin{aligned}\|\hat{v}^3(t)\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{v}^3(t)(x,b,1)|\, dx\, db \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-t}{2}} |((\lambda_{-t})\hat{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\overline{\lambda}}))(x)|\, dx\, db.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que:

$$\begin{aligned}((\lambda_{-t})\hat{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\overline{\lambda}})) \not\equiv 0 &\iff ((\lambda_{-t})\hat{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\overline{\lambda}}))\hat{} \not\equiv 0 \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R} \mid ((\lambda_{-t})\hat{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\overline{\lambda}}))\hat{}(y) \neq 0 \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R} \mid (((\lambda_{-t})\hat{})\hat{} \cdot (e^{-ib(\cdot)}\hat{\overline{\lambda}})\hat{})(y) \neq 0 \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R} \mid \check{\lambda}_{-t}(y) \cdot \check{\overline{\lambda}}_{-b}(y) \neq 0.\end{aligned}$$

où $\check{\lambda}_{-t}(y) = \lambda(-e^{-t}y)$ et $\check{\overline{\lambda}}_{-b} = \overline{\lambda}(-y-b)$. Donc nous avons

$$\begin{aligned}((\lambda_{-t})\hat{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\overline{\lambda}})) \not\equiv 0 &\iff \exists y \in \mathbb{R} \mid \lambda(-e^{-t}y) \cdot \lambda(-y-b) \neq 0 \\ &\iff \exists y \in \mathbb{R} \mid -e^{-t}y \in [-1,1] \\ &\quad \text{et } -y-b \in [-1,1] \\ &\iff [-e^t, e^t] \cap [-1-b, 1-b] \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Pour que cette intersection soit non vide il faut et il suffit que l'un de cès cas suivants soit réalisé:

(1) $-1-b \leq -e^t$. et $e^t \leq 1-b$.
(2) $-e^t \leq -1-b$. et $1-b \leq e^t$.
(3) $-1-b \leq -e^t \leq 1-b \leq e^t$.
(4) $-e^t \leq -1-b \leq e^t \leq 1-b$.
Remarquons que dans les quatre cas on a toujours $|b| \leq 1+e^t$ en effet:
(1) Si $-1-b \leq -e^t$, et $e^t \leq 1-b$. Alors

$$\begin{aligned}
& -1-b \leq -e^t \leq e^t \leq 1-b \\
& \Longrightarrow -1+e^t \leq b \text{ et } b \leq 1-e^t \leq 1+e^t \\
& \Longrightarrow -b \leq 1-e^t \text{ et } b \leq 1-e^t \\
& \Longrightarrow |b| \leq 1-e^t \leq 1+e^t.
\end{aligned}$$

(2) Si $-e^t \leq -1-b$ et $1-b \leq e^t$. Alors

$$\begin{aligned}
& b \leq -1+e^t \text{ et } -b \leq -1+e^t \\
& \Longrightarrow |b| \leq -1+e^t \leq 1+e^t.
\end{aligned}$$

(3) Si $-1-b \leq -e^t \leq 1-b \leq e^t$. Alors

$$-b \leq 1-e^t \leq 1+e^t \quad \text{et } b \leq -1+e^t \leq 1+e^t.$$

Donc $|b| \leq 1+e^t$.
(4) Si $-e^t \leq -1-b \leq e^t \leq 1-b$. Alors

$$\begin{aligned}
& b \leq -1+e^t \text{ et } b \leq 1-e^t \text{ et } -1-b \leq e^t \\
& \Longrightarrow b \leq |1-e^t| \leq 1+e^t \text{ et } -b \leq 1+e^t
\end{aligned}$$

Donc $|b| \leq 1+e^t$.
De ce qui précéde on en déduit que

$$((\lambda_{-t})\check{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\check{\lambda}})) \not\equiv 0 \Longrightarrow |b| \leq 1+e^t.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\|\hat{v}^3(t)\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-t}{2}} \cdot |((\lambda_{-t})\check{} * (e^{-ib(\cdot)}\hat{\tilde{\lambda}}))(x)|\, dx\, db \\
&\leq \int_{|b|\leq 1+e^t} e^{\frac{-t}{2}} \cdot |(\hat{\lambda}_{-t})|_1 \cdot |\hat{\tilde{\lambda}}|_1\, db \\
&\leq C' \cdot (1+e^t) e^{\frac{-t}{2}} \\
&\leq C \cdot e^{\frac{|t|}{2}}.
\end{aligned}
$$

Car $|(\lambda_{-t})\check{}|_1 = |\hat{\lambda}|_1$, du fait que

$$(\lambda_{-t})\check{}(a) = e^t \cdot \check{\lambda}(e^t a).$$

Donc

$$\|\hat{v}^3(t)\|_1 \leq C \cdot e^{\frac{|t|}{2}} \cdots\cdots \textbf{(II)}$$

4.3.5. Posons $v(t)(x,y,z) = \hat{v}^3(t)(x,y,1) \cdot r(z) \bmod \ker(\tau)$, où $r \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, et $\hat{r}(1) = 1$. Nous allons montrer que les deux normes sont équivalentes, afin de déduire que

$$\omega(t) = \|v(t)\|_{L(N)/\ker(\tau)} \cong \|\hat{v}^3(t)(1)\|_1 \leq C \cdot e^{\frac{|t|}{2}}.$$

On définit l'espace

$$L^1(N,\chi) = \{\tilde{f} : N \longrightarrow \mathbb{C} \;/\; \tilde{f}(n \cdot \exp(zZ)) = e^{iz} \cdot \tilde{f}(n);$$

$$n \in N, \exp(zZ) \in Z(N) \text{ et } \int_{N/Z(N)} |\tilde{f}(\dot{n})|\, d\dot{n} < \infty\}.$$

Soit

$$
\begin{aligned}
\Phi :& L^1(N) \longrightarrow L^1(N,\chi) \\
& f \longrightarrow \Phi(f) = \int_{Z(N)} f(n \cdot \exp(zZ)) \cdot e^{-iz} dz.
\end{aligned}
$$

Il est clair que $\Phi(f) \in L^1(N,\chi)$. En effet:

(a) $$(\Phi(f))(n\cdot\exp(zZ)) = \int_Z (\Phi(f))(n\cdot \exp(zZ)\cdot\exp(z'Z))\cdot e^{-iz'}dz'$$
$$= \int_Z (\Phi(f))(n\cdot\exp((z+z')Z))\cdot e^{-iz'}\,dz'$$
$$= \int_Z \Phi(f)(n\cdot\exp(z'Z))\cdot e^{-iz'}\cdot e^{-iz}dz$$
$$= e^{iz}\cdot\Phi(f)(n).$$

(b) $$\int_{N|Z} |\Phi(f)(n)|\,d\dot{n} = \int_{N/Z} |\int_Z f(n\cdot\exp(zZ))\cdot e^{-iz}\,dz|\,d\dot{n}$$
$$\leq \int_{N|Z}\int_Z |f(n\cdot\exp(zZ))|dz\,d\dot{n}$$
$$= \|f\|_1 < \infty.$$

Donc $\|\Phi(f)\|_1 \leq \infty$.

Il est évident que Φ est linéaire. De plus Φ est une application surjective. En effet:

Soit $\tilde{f} \in L^1(N,\chi)$. Soit $f(n\cdot\exp(zZ)) = \tilde{f}(n)\cdot\lambda'(z)$, où $\lambda' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\hat{\lambda}'(1) = 1$. Alors on a bien $f \in L^1(N)$ et $\Phi(f) = \tilde{f}$, car

$$\Phi(f)(n) = \int_Z f(n\cdot\exp(zZ))\cdot e^{-iz}\,dz$$
$$= \int_z \tilde{f}(n)\cdot\lambda'(z)\cdot e^{-iz}\,dz$$
$$= \tilde{f}(n).$$

D'où le fait que Φ est surjective.

Remarquons que Φ est continue; car

$$\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_1.$$

D'autre part nous avons

$$\ker(\Phi) = \ker(\tau).$$

En effet Soit $f \in \ker(\Phi)$. Alors

$$f \in \ker(\Phi) \iff \int_Z f(n \cdot \exp(zZ)e^{-izZ}\ dz = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \int_N \tau(n) \cdot f(n)\ dn \\
&= \int_{N|Z} \tau(n) \int_z \tau(\exp(zZ)) \cdot f(n \cdot \exp(zZ))\ dz\ d\dot{n} \\
&= \int_{N|Z} \tau(n)\Big(\int_z e^{-iz} \cdot f(n \cdot \exp(zZ))\ dz\Big)\ d\dot{n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\ker(\Phi) \subset \ker(\tau)$. Réciproquement, soit $f \in \ker(\tau)$. Alors

$$\begin{aligned}
\tau(f) = 0 &\iff \tau({}_{m^{-1}}f_m) = 0, \forall m \in N \\
&\iff \int_N \tau(n)({}_{m^{-1}}f_m)(n)\ dn \\
&\implies \int_{N/Z} \tau(mnm^{-1}) \\
&\cdot \Big[\int_Z \tau(\exp(zZ)) \cdot f(n \cdot \exp(zZ))\ dz\ \Big] d\dot{n} = 0, \forall m \in N \\
&\implies \int_Z e^{-iz} f(n \cdot \exp(zZ))\ dz = 0
\end{aligned}$$

Donc $\ker(\Phi) \subset \ker(\tau)$. On en déduit que $\ker(\Phi) = \ker(\tau)$. Le théorème d'application ouverte nous permet de dire que

$$\|\Phi(f)\|_1 \cong \|f\|_{L^1(N)/\ker(\tau)}.$$

Donc

$$\|\Phi(v(t))\|_1 \cong \|v(t)\|_{L^1(N)/\ker(\tau)} = \omega(t);$$

de plus

$$\begin{aligned}\Phi(v(t))(x,y,z) &= \hat{v}^3(t)(x.y.1)\cdot\hat{\lambda}(1)\\ &= \hat{v}^3(t)(x.y.1).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_{L^1(N)/\ker(\tau)} &\cong \|\Phi(f(t))\|_1\\ &= \|\hat{v}(^3(t)(1)\|_1.\end{aligned}$$

D'où

$$\omega(t) = \|v(t)\|_{L^1(N)/\ker(\tau)} \leq C\cdot e^{|t|/2};\ \text{ par } \mathbf{(II)}$$

4.3.6. Conclusion: De ce qui précéde on peut conclure que

$$e^{\frac{t}{2}-\frac{t}{p}} \leq \omega(t) \leq C\cdot e^{|t|/2} \text{ pour tout } 1\leq p\leq\infty.$$

Donc

$$\omega(t) \simeq e^{|t|/2}.$$

4.3.7. Prenons pour $\lambda \in S(\mathbb{R})$ la fonction de Gausse $\lambda(x) = e^{-\pi x^2/2}$. Nous pouvons donc utiliser la fonction

$$p_\lambda(\exp(xX+yY+zZ)) = e^{-\pi x^2/4}e^{-\pi y^2}\nu(z)$$

dans $S(N) = S(\mathbb{R}^3)$, où $\nu \in S(\mathbb{R})$ avec $\hat{\nu}(1) = 1$. En outre on trouve que

$$\begin{aligned}&v(\exp(tT))(\exp(xX+yY+zZ))\\ &= \frac{e^{t/2}\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2t}+1}}e^{-\pi x^2/[2(1+e^{2t})]}\\ &e^{-2\pi y^2/[2(1+e^{-2t})]}e^{-i\pi xy(1-e^{-2t})/(1+e^{-2t})}e^{-2\pi z}\end{aligned}$$

dans l'espace $L^1(N, \chi)$ qui est défini en (4.3.5). Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a que

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \|v(\exp(tT))\|_{L^1(N)/\ker(\chi)} \\
&= \|v(\exp(tT))\|_{L^1(N, \chi)} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{e^t + e^{-t}} \\
&\simeq e^{|t|/2} \quad . \ ([27]).
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Etude de l'algèbre $L^1_\omega(G)$ avec G groupe de Lie nilpotent et ω poids polynomial

Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe nilpotent. Soit ω un poids polynomial sur G. Dans ce chapitre nous allons essayer de caractériser les idéaux premiers et les idéaux maximaux de l'algèbre $L^1_\omega(G)$. Nous allons prouver la propriété de Wiener pour l'algèbre $L^1_\omega(G)$. Ensuite nous déterminerons Prim $(L^1_\omega(G))$. Enfin, nous caractériserons toutes les représentations algébriquement irréductibles et topologiquement irréductibles de $L^1_\omega(G)$ ([28]).

5.1. L'algèbre $L^1_\omega(G)$

5.1.1. Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans ce cas l'application

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

est un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G. Par conséquent, on peut définir l'algèbre de Schwartz de G notée $\mathcal{S}(G)$, par

$$\mathcal{S}(G) = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \circ \exp \in S(\mathfrak{g}) \}$$

où $S(\mathfrak{g})$ désigne l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathfrak{g}$. Muni du produit de convolution, $\mathcal{S}(G)$ devient une algèbre de Fréchet. Soit $\{ X_0, X_1, ..., X_n \}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Alors les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow G \\ (t_0, t_1, ...t_n) &\longrightarrow \exp(t_0X_0)\cdot\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow G \\ (\tilde{t_0}, \tilde{t_1}, ..., \tilde{t_n}) &\longrightarrow \exp(\tilde{t_0}X_0 + \tilde{t_1}X_1 + ... + \tilde{t_n}X_n) \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes. Les passages entre les "coordonnées" $(t_0, t_1, ..., t_n)$ et $(\tilde{t_0}, \tilde{t_1}, ..., \tilde{t_n})$ se fait à l'aide de fonctions polynomiales. Donc la définiton de $\mathcal{S}(G)$ peut également se baser sur la paramétrisation

$$(t_0, t_1, ...t_n) \longrightarrow \exp(t_0X_0)\cdot\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n)$$

(voir [25] pour plus de details).

5.1.2. Définition:
Le poids ω est dit polynomial s'il existe un polynôme P en $n+1$ variables, à coefficients réels positifs, tel que

$$\omega\Big(\exp(\tilde{t_0}X_0 + \tilde{t_1}X_1 + ... + \tilde{t_n}X_n)\Big) \leq P(\tilde{t_0}, \tilde{t_1}, ..., \tilde{t_n})$$

quel que soit $(\tilde{t_0}, \tilde{t_1}, ..., \tilde{t_n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. D'ailleurs, dans cette définition on peut également utiliser la paramétrisation

$$(t_0, t_1, ..., t_n) \longrightarrow \exp(t_0X_0)\cdot\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n).$$

De plus. la définition d'un poids polynomial est indépendante de la base de Jordan-Hölder choisie.

5.1.3. Exemple ([24]. [25]):
Pour $x = \exp(\tilde{t_0}X_0 + \tilde{t_1}X_1 + ... + \tilde{t_n}X_n)$. définissons

$$\|x\| = \sup_{i=0,\dots,n} |\tilde{t_i}|.$$

Soit U le voisinage compact symetrique de l'unité de G défini par

$$U = \{ x \in G \mid \|x\| \leq 1 \}.$$

Définissons pour tout $x \in G$,

$$\tau(x) = \min\{ n \in \mathbb{N}^* \mid x \in U^n \}$$
$$\omega(x) = 1 + \tau(x).$$

Alors ω est un poids polynomial sur G.

5.1.4. Tout poids ω permet de définir une nouvelle algèbre de fonctions par:

Définition:
L'ensemble $L^1_\omega(G)$ est formé de toutes les classes d'équivalence de fonctions mesurables f de G dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\|f\|_\omega = \int_G |f(x)|\omega(x)dx < \infty,$$

dx désignant la mesure de Haar sur G. Evidemment

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\omega \quad \forall f \in L^1_\omega(G).$$

et $L^1_\omega(G) \subset L^1(G)$. Muni de la convolution et de l'involution de $L^1(G)$. $L^1_\omega(G)$ devient une $*$-algèbre de Banach.

5.1.5. Le dual de l'espace $L^1_\omega(G)$ est obtenu de la manière suivante:

Définition:
L'ensemble $L^\infty_\omega(G)$ est formé de toutes les classes d'équivalence de fonctions mesurables f de G dans $\mathbb{C}$ vérifiant $f \mid \omega \in L^\infty(G)$.
On peut alors identifier l'espace dual de $L^1_\omega(G)$ à $L^\infty_\omega(G)$, les formes linéaires continues sur $L^1_\omega(G)$ étant toutes de la forme

$$< \Phi, f > = \int_G f(x)\Phi(x)dx, \quad \Phi \in L^\infty_\omega(G).$$

Une telle fonction Φ peut évidemment s'écrire $\Phi = \phi \cdot \omega$ avec $\phi \in L^\infty(G)$.

5.1.6. Dans la suite de ce chapitre nous supposerons que le poids ω est polynomial. Par conséquent

$$\mathcal{S}(G) \subset L^1_\omega(G) \subset L^1(G).$$

De plus $\mathcal{S}(G)$ est dense dans $(L^1_\omega(G)\ ,\ \|\cdot\|_\omega)$ et dans $(L^1(G)\ .\ \|\cdot\|_1)$. La restriction de $\|\cdot\|_\omega$ à $\mathcal{S}(G)$ est une norme continue pour la topologie de l'espace de Schwartz.

5.2. Noyaux de représentations irréductibles

5.2.1. Définition:
Soit A une algèbre de Banach. Soit

$$\text{Prim}(A) = \{J \triangleleft A / J \text{ idéal primitif }\}$$

l'espace des idéaux primitifs de A. Nous munissons $\text{Prim}(A)$ de la topologie d'envelope-noyau et nous disons qu'une Partie C de $\text{Prim}(A)$

est fermée si $C = \{J/J \supset \ker(C)\}$ où $\ker(C) = \cap_{J\in C}J$. Notons par $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$ l'espace des idéaux primitifs de $L^1(G)$ c'est à dire l'espace de tous les idéaux primitifs de $L^1(G)$ de la forme $J = \ker(\pi)$ où π est une représentation unitaire irréductible de G. Nous noterons

$\ker(\pi) = \{ f \in L^1(G) \mid \pi(f) = 0 \}$, $\pi \in \hat{G}$.

$\mathrm{Prim}_*(L^1(G)) = \{ \ker(\pi) \mid \pi \in \hat{G} \}$.

$\mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G)) = \{ \ker(\rho) \mid \rho$ représentation algébriquement irréductible de $\mathcal{S}(G)\}$.

$\mathrm{Prim}(L^1_\omega(G)) = \{ \ker(\rho) \mid \rho$ représentation algébriquement irréductible de $L^1_\omega(G) \}$.

$\mathfrak{K} = \{ \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \mid \pi \in \hat{G} \}$.

Les ensembles $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$, $\mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G))$, $\mathrm{Prim}(L^1_\omega(G))$ et $\mathfrak{K}$ sont munis de la topologie enveloppe-noyau. $\mathrm{Prim}(L^1_\omega(G))$ et $\mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G))$ sont appelés espace des idéaux primitifs de $\mathcal{S}(G)$, respectivement $L^1_\omega(G)$. Nous allons montrer que $\mathfrak{K} = \mathrm{Prim}(L^1_\omega(G))$. Remarquons encore que les noyaux $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ sont fermés dans $L^1_\omega(G)$.

5.2.2. Rappels:

a) Etant donnée une représentation unitaire π d'un groupe de Lie G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, un élément v de $\mathcal{H}_\pi$ est dit un vecteur de classe C^k pour la représentation π, si la fonction f_v, définie par

$$f_v(x) = \pi(x)v, \quad x \in G,$$

est de classe C^k. On note $\mathcal{H}^k_\pi$ l'espace des vecteurs de classe C^k pour la représentation π. On dit que $v \in \mathcal{H}_\pi$ est de classe C^∞, si

$$v \in \cap_{k=0}^\infty \mathcal{H}^k_\pi = \mathcal{H}^\infty_\pi.$$

b) Soit π une représentation unitaire irréductible de G sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. Alors la restriction de π à l'espace $\mathcal{H}^\infty_\pi$ des vecteurs C^∞ dans $\mathcal{H}_\pi$ est une représentation algébriquement irréductible de $\mathcal{S}(G)$ ([15]). On définit de cette manière une bijection entre $\hat{G}$ et entre l'ensemble des classes d'équivalence des représentations algébriquement irréductibles de $\mathcal{S}(G)$. Pour tout $\pi \in \hat{G}$, notons $\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) = \ker(\pi\mid_{\mathcal{H}_\pi^\infty}) \cap \mathcal{S}(G)$ le noyau de la représentation algébriquement irréductible correspondante de $\mathcal{S}(G)$. On sait alors que l'application

$$\begin{aligned} \hat{G} &\longrightarrow \mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G)) \\ \pi &\longrightarrow \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme entre $\hat{G}$ (muni de la topologie de Fell) et $\mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G))$ (muni de la topologie enveloppe-noyau) ([24]).

c) Puisque tout groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe est $*$-régulier ([5]), l'application

$$\begin{aligned} \hat{G} &\longrightarrow \mathrm{Prim}_*(L^1(G)) \\ \pi &\longrightarrow \ker(\pi) \end{aligned}$$

est également un homéomorphisme. On en déduit le résultat suivant:

5.2.3. Proposition :

Soit $\pi \in \hat{G}$. Alors les applications

$$\begin{aligned} \phi_1 : Prim_*(L^1(G)) &\longrightarrow \mathfrak{K} \\ \ker(\pi) &\longrightarrow \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_2 : \mathfrak{K} &\longrightarrow Prim(S(G)) \\ \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) &\longrightarrow \ker(\pi) \cap S(G) \end{aligned}$$

sont des homéomorphismes.

Preuve:

Nous avons que $\phi_3 = \phi_2 \circ \phi_1$ est un homéomorphisme. Supposons que $\ker(\pi_1) \cap S(G) = \ker(\pi_2) \cap S(G)$. Alors $\ker(\pi_1) = \ker(\pi_2)$ car ϕ_3 est un isomorphisme. Donc

$$\ker(\pi_1) \cap L^1_\omega(G) = \ker(\pi_2) \cap L^1_\omega(G).$$

D'où l'injectivité de ϕ_2. Pour ϕ_1 , supposons que $\ker(\pi_1) \cap L^1_\omega(G) = \ker(\pi_2) \cap L^1_\omega(G)$. Alors

$$\ker(\pi_1) \cap S(G) = \ker(\pi_2) \cap S(G).$$

Donc $\ker(\pi_1) = \ker(\pi_2)$ car ϕ_3 est un isomorphisme.
Montrons que ϕ_1 et ϕ_2 sont surjectives. Soit $I \in \mathrm{Prim}(S(G))$. Alors il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $I = \ker(\pi) \cap S(G)$. Donc I est l'image de $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ par ϕ_2. D'où la surjectivité de ϕ_2.
Pour ϕ_1, soit $I \in \mathfrak{K}$. Alors

$$\begin{aligned} & I \cap S(G) \in \mathrm{Prim}(S(G)) \\ \Rightarrow\ & \exists \pi \in \hat{G} : I \cap S(G) = \ker(\pi) \cap S(G) = \phi_2(I) \\ \Rightarrow\ & I = \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G). \end{aligned}$$

D'où la surjectivité de ϕ_2.
Soit maintenant $C = \{\ker(\pi_i)/i \in I, \pi_i \in \hat{G}\}$ une partie fermée de $\mathfrak{K}$, c'est à dire que si $\cap_{i\in I}(\ker(\pi_i) \cap L^1_\omega(G)) \subset \ker(\rho) \cap L^1_\omega(G)$ avec $\rho \in \hat{G}$; alors il existe $i \in I$ tel que

$$\ker(\pi_i) \cap L^1_\omega(G) = \ker(\rho) \cap L^1_\omega(G).$$

Donc π_i et ρ sont équivalentes.
Soient C_1 et C_2 les ensembles correspondants dans $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$, (resp. dans $\mathrm{Prim}(S(G))$) obtenus par les bijections ϕ_1, (resp.ϕ_2). Nous allons montrer que C_1, (resp. C_2) est fermé dans $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$, (resp. dans $\mathrm{Prim}(S(G))$). Pour $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$, nous avons que

$$C_1 = {\phi_1}^{-1}(C) = \{\ker(\pi_i)/i \in I\}$$

est fermé dans $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$. En effet

$$\begin{aligned} \cap_{i\in I}\ker(\pi_i) \subset \ker(\rho) &\Rightarrow \cap_{i\in I}(\ker(\pi_i) \cap L^1_\omega(G)) \subset \ker(\rho) \cap L^1_\omega(G) \\ &\Rightarrow \exists i \in I,\ /\ \ker(\pi_i) \cap L^1_\omega(G) = \ker(\rho) \cap L^1_\omega(G) \\ &\Rightarrow \exists i \in I / \ker(\pi_i) = \ker(\rho). \end{aligned}$$

D'où le fait que C_1 est fermée dans $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$.
Pour $\mathrm{Prim}(S(G))$, $C_2 = \{\ker(\pi_i) \cap S(G)/i \in I\} = \phi_2(C)$. Supposons que $\cap_{i\in I}(\ker(\pi_i) \cap S(G)) \subset \ker(\rho) \cap S(G)$. Alors

$$\begin{aligned} \cap_{i\in I}(\ker(\pi_i)) &\subset \ker(\rho), \text{ car } \phi_3 \text{ est un homéomorphisme} \\ \cap_{i\in I}(\ker(\pi_i) \cap L^1_\omega(G)) &\subset \ker(\rho) \cap L^1_\omega(G) \\ &\Rightarrow \exists i \in I;\ \rho \cong \pi_i, \text{ car } C \text{ fermée} \\ &\Rightarrow \ker(\rho) \cap S(G) = \ker(\pi_i) \cap S(G). \end{aligned}$$

Donc C_2 est fermée dans $\mathrm{Prim}(S(G))$. De même si on suppose que C_1 (ou C_2) est fermé . ■

Dans la suite nous identifierons $\hat{G}$, $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$, $\mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G))$ et $\mathfrak{K}$.

5.2.4. La relation suivante entre les noyaux dans $\mathcal{S}(G)$, $L^1_\omega(G)$ et $L^1(G)$ est essentielle, si nous voulons transférer des résultats de $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$ vers $L^1_\omega(G)$:

Théorème:
Pour tout $\pi \in \hat{G}$, on a:

$$(1)\ \ker(\pi) = \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \overline{\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)}^{L^1(G)}$$
$$(2)\ \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) = \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1_\omega(G)}$$

Preuve:
(1) a été démontré par Ludwig en ([21]). D'ailleurs la même démonstration permet de prouver (2). En effet, dans ([21]) Ludwig montre que, pour toute distribution tempérée Ω sur $\mathcal{S}(G)$ qui annule $\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$ et quels que soient f_1, f_2 dans $\mathcal{S}(G)$, il existe une constante $c > 0$ (dépendante de f_1 et f_2) telle que

$$| < \Omega,\ f_1 * f * f_2 > | \leq c\ \|\pi(f)\|_{op},\quad \forall f \in \mathcal{S}(G).$$

Soit alors $\Phi \in L^1_\omega(G)' = L^\infty_\omega(G)$ tel que

$$< \Phi, \ \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) > \equiv 0.$$

On peut écrire $\Phi = \varphi \cdot \omega$ avec $\varphi \in L^\infty(G)$ et, puisque ω est un poids polynomial, Φ est une distribution tempérée sur $\mathcal{S}(G)$. Ainsi

$$| < \Phi, \ f_1 * f * f_2 > | \leq c \|\pi(f)\|_{op}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(G)$ et même pour tout $f \in L^1_\omega(G)$ par continuité. Donc $< \Phi, \ f_1 * f * f_2 >= 0$, de même que $< \Phi, \ f >= 0$ pour tout $f \in \ker(\pi) L^1_\omega(G)$. Le théorème de Hahn-Banach permet de conclure. ■

5.3. Idéaux minimaux

5.3.1. Les définitions et les notations suivantes sont bien connues:

Définition:

a) Pour tout $C \subset \hat{G}$, notons $\mathcal{K}(C)$ et appelons noyau de C dans $L^1_\omega(G)$ [resp. $\mathcal{S}(G)$ ou $L^1(G)$] l'ensemble

$$\mathcal{K}(C) = \ker(C) = \bigcap_{\pi \in C} \Big(\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \Big)$$

[resp. $\mathcal{K}(C) = \bigcap_{\pi \in C} \Big(\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \Big)$ ou $\mathcal{K}(C) = \bigcap_{\pi \in C} \ker(\pi)$].

b) Pour tout idéal I de $L^1_\omega(G)$ [resp. $\mathcal{S}(G)$ ou $L^1(G)$], notons par $h(I)$ et appelons enveloppe de I l'ensemble

$$h(I) = \{ \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \ | \ \pi \in \hat{G} \text{ et } I \subset \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \}$$

[resp.$h(I) = \{ \ \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \ | \ \pi \in \hat{G}$ et $I \subset \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \ \}$ ou

$h(I) = \{ \ker(\pi) \mid \pi \in \hat{G}$ et $I \subset \ker(\pi) \}$]. Puisque $\hat{G}$, $\mathrm{Prim}_*(L^1(G))$, $\mathfrak{K}$ et $\mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G))$ sont homéomorphes, nous identifierons dans la suite les enveloppes dans $L^1_\omega(G)$, $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$ avec le sous-ensemble correspondant de $\hat{G}$.

Les résultats ci-dessous sur les idéaux minimaux dans $\mathcal{S}(G)$ et $L^1(G)$ sont dus à Ludwig ([24], [20]) qui utilise à cet effet le calcul fonctionnel de Dixmier ([8]) et Hulanicki ([16]).

5.3.2. Théorème:
Soit C un fermé de $\hat{G}$. Il existe un idéal minimal bilatère unique $j(C)$ dans $\mathcal{S}(G)$ tel que $h(j(C)) = C$, c'est-à-dire que tout idéal bilatère I de $\mathcal{S}(G)$ tel que $h(I) \subset C$ contient $j(C)$. De plus, cet idéal est engendré par les fonctions de la forme $\varphi\{f\}$, $f = f^* \in \ker(C)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ nulle dans un voisinage de 0. La notation $\varphi\{f\}$ désigne le calcul fonctionnel de Dixmier.

Preuve:
Voir ([24]). ∎

5.3.3. Notation:
Soit C un fermé de $\hat{G}$. Posons

$$\tilde{j}(C) = \overline{j(C)}^{L^1(G)} \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{j}}(C) = \overline{j(C)}^{L^1_\omega(G)}.$$

Donc

$$j(C) \subset \tilde{\tilde{j}}(C) \subset \tilde{j}(C).$$

De plus $\tilde{\tilde{j}}(C)$ et $\tilde{j}(C)$ sont des idéaux bilatères fermés de $L^1_\omega(G)$ et $L^1(G)$ respectivement.

5.3.4. Le théorème suivant est bien connu pour $L^1(G)$ ([20]). Il reste valable pour $L^1_\omega(G)$, comme nous le montrons en esquissant une démonstration connue dans le cas de $L^1(G)$:

Théorème:
Soit C un fermé de $\hat{G}$. Alors $\tilde{\tilde{j}}\,(C) = \overline{j(C)}^{L^1_\omega(G)}$ [resp. $\tilde{j}(C) = \overline{j(C)}^{L^1(G)}$] est l'idéal bilatère fermé minimal unique de $L^1_\omega(G)$ [resp. $L^1(G)$] tel que $h\Big(\tilde{\tilde{j}}\,(C)\Big) = C$ [resp. $h\Big(\tilde{j}(C)\Big) = C$]. Il est contenu dans tout idéal bilatère fermé de $L^1_\omega(G)$ [resp. $L^1(G)$] tel que $h(I) \subset C$.

Preuve:
(Pour $L^1_\omega(G)$): Si $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \in h\Big(\tilde{\tilde{j}}\,(C)\Big)$, alors

$$\overline{j(C)}^{L^1_\omega(G)} = \tilde{\tilde{j}}\,(C) \subset \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \,\text{et}\, \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \in h\Big(j(C)\Big).$$

Donc $\pi \in C$. Réciproquement, soit $\pi \in C$. Donc

$$j(C) \subset \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$$

et

$$\tilde{\tilde{j}}\,(C) = \overline{j(C)}^{L^1_\omega(G)} \subset \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1_\omega(G)} = \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G).$$

Par conséquent, $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \in h\Big(\tilde{\tilde{j}}\,(C)\Big)$ et $h\Big(\tilde{\tilde{j}}\,(C)\Big) = C$. De plus, $\tilde{\tilde{j}}\,(C)$ est engendré par les mêmes fonctions que $j(C)$ (voir (5.3.2)). Soit $\varphi\{f\}$ un tel générateur. Choisissons $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, nulle dans un voisinage de 0 et identiqement 1 sur le support de φ. Alors
$\psi \cdot \varphi = \varphi \cdot \psi = \varphi$, $\psi\{f\} * \varphi\{f\} = \varphi\{f\} * \psi\{f\} = \varphi\{f\}$ et l'enveloppe de l'ensemble des générateurs de $\tilde{\tilde{j}}\,(C)$ est contenue dans $h(\psi\{f\})$, puisque $\psi\{f\}$ est également un tel générateur. Par ([20], lemma 2), $\tilde{\tilde{j}}\,(C)$ est contenu dans tout idéal bilatère fermé I tel que $h(I) \subset h\Big(\tilde{\tilde{j}}\,(C)\Big) = C$.
■

5.3.5. Exemple:
Dans ([1]) Alexander et Ludwig déterminent l'idéal minimal suivant de $L^1_\omega(G)$:

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ tel que $< l, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \equiv 0 >$. Soit χ_l le caractère unitaire de G défini par

$$\chi_l(x) = e^{-i<l, \log x>}.$$

Soit P_ω l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur G contenues dans $L^\infty_\omega(G)$. Alors

$$\tilde{\tilde{j}}\left(\ker(\chi_l)\right) = \bigcap_{P \in P_\omega} \ker(P\chi_l)$$

où

$$\ker(P\chi_l) = \{f \in L^1_\omega(G) \mid \int_G f(x)P(x)\chi_l(x)dx = 0\}.$$

5.4. Applications

5.4.1. Définitions:

Soit $X_1, ..., X_n$ une base de Jordan-Hölder Pour $\mathfrak{g}$. Pour un multi-indice $(i_1, ..., i_n) = I$, nous écrivons

$$X^I = X^{i_1} \cdots X^{i_n}.$$

Soit $|I| = i_1 + ... + i_n$. Si $f \in C^\infty(G)$ et si $X \in \mathfrak{g}$, écrivons Xf pour la fonction C^∞

$$Xf(y) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tX) \cdot y)|_{t=0}; \; y \in G.$$

Pour une fonction $g \in S(G)$, on définit pour $M \in \mathbb{N}^*$ la norme

$$\|g\|_{M,M} = \sum_{\|I\| \leq M} \int_G \|X^I g(x)\| \omega(x)^M dx.$$

Dans ([24]) Ludwig a prouvé que cette norme vérifie

$$\|f\|_\omega \leq \|f\|_{M,M} \qquad \forall f \in \mathcal{S}(G).$$

Il a montré que pour tout fermé C de $\hat{G}$ et tout $M \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\Big(\ker(C) \cap \mathcal{S}(G)\Big)^N \subset \overline{j(C)}^M$$

où $\overline{A}^M$ désigne l'adhérence de A dans l'ensemble des fonctions C^∞ bornées pour la norme $\|\cdot\|_{M,M}$. Comme $\overline{j(C)}^M \subset \overline{j(C)}^{L^1_\omega(G)} = \tilde{\tilde{j}}\,(C)$, on a donc que, pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big(\ker(C) \cap \mathcal{S}(G)\Big)^N \subset \overline{J(C)}^{L^1_\omega(G)} \subset \tilde{\tilde{j}}\,(C).$$

On en déduit:

5.4.2. Théorème:
Pour tout $\pi \in \hat{G}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\Big(\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \;\big|\; \tilde{\tilde{j}}\,(\pi)\Big)^N = \{0\}.$$

Cela signifie que l'algèbre $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \;|\; \tilde{\tilde{j}}\,(\pi)$ *est nilpotente .*

Preuve:
Par (5.2.4.) et (5.4.1.). ∎

5.4.3. Remarque:
Pour l'algèbre $L^1(G)$, le résultat (5.4.2.) est dû à Ludwig ([22]). C'est en fait un cas de "synthèse spectrale généralisée" (Si N=1 était possible, ce qui n'est pas le cas en général, on aurait un vrai résultat de syntèse spectrale).

5.4.4. Lemme: *Grâce aux identifications de $\mathfrak{K}$,* $\mathrm{Prim}(\mathcal{S}(G))$, *et $\hat{G}$, l'enveloppe de tout idéal fermé I de $L^1_\omega(G)$ vérifie*

$$h(I) = h\Big(I \cap \mathcal{S}(G)\Big).$$

Preuve:
L'identification de $\mathfrak{R}$ et $\mathrm{Prim}(S(G))$ se fait par $\ker(\pi)\cap L^1_\omega(G) \longrightarrow \ker(\pi)\cap S(G)$. D'où

$$\begin{aligned}\ker(\pi)\cap L^1_\omega(G)\in h(I) &\Rightarrow I\subset \ker(\pi)\cap L^1_\omega(G)\\ &\Rightarrow I\cap S(G)\subset \ker(\pi)\cap S(G)\\ &\Rightarrow \ker(\pi)\cap S(G)\in h(I\cap S(G))\end{aligned}$$

et $h(I)\subset h(I\cap S(G))$.
Réciproquement, soient $j(h(I))$ et $\tilde{\tilde{j}}\,(h(I))$ les idéaux minimaux précédents (5.3.3.). Nous avons que $\overline{j(h(I))}^{\|\cdot\|_\omega} = \tilde{\tilde{j}}\,(h(I))$. Puisque $\tilde{\tilde{j}}\,(h(I))\subset I$, alors $j(h(I))\subset I\cap S(G)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\ker(\pi)\cap S(G)\in h(I\cap S(G)) &\Rightarrow I\cap S(G)\subset \ker(\pi)\cap S(G)\\ &\Rightarrow j(h(I))\subset \ker(\pi)\cap S(G)\\ &\Rightarrow \tilde{\tilde{j}}\,(h(I))\subset \ker(\pi)\cap L^1_\omega(G),\ \text{par}(5.2.4)\\ &\Rightarrow \ker(\pi)\cap L^1_\omega(G)\in h(I)\end{aligned}$$

et $h(I\cap S(G))\subset h(I)$. ■

5.4.5. Corollaire:
Soit $I\neq\{0\}$ un idéal fermé de $L^1_\omega(G)$. Alors $I\cap S(G)\neq\{0\}$. De plus, $I\cap S(G)$ est fermé dans la topologie de $S(G)$.

Preuve:
Si $I\neq\{0\}$, $h\Big(I\cap S(G)\Big) = h(I)$ est distinct de $\hat{G}$. Donc $I\cap S(G)\neq\{0\}$.
■

5.4.6. Le résultat suivant est dû à Ludwig ([24]) pour $S(G)$ et à Leptin ([18]) pour $L^1(G)$:

Théorème:

L'algèbre $L^1_\omega(G)$ possède la propriété de Wiener: Pour tout idéal fermé propre I de $L^1_\omega(G)$, il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que

$$I \subset \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G).$$

Preuve:

Considérons l'idéal fermé propre $I_1 = I \cap \mathcal{S}(G)$ de $\mathcal{S}(G)$. Par ([24]) il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $I \cap \mathcal{S}(G) \subset \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$. Donc $\ker(\pi) \cap S(G) \in h\Big(I \cap \mathcal{S}(G)\Big) = h(I)$ et $I \subset \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$.

■

5.4.7. Définition:

Un idéal I de $L^1_\omega(G)$ [resp . $\mathcal{S}(G)$] est dit premier si et seulement si quels que soient les idéaux I_1, I_2 de $L^1_\omega(G)$ [resp. $\mathcal{S}(G)$] tel que $I_1 * I_2 \subset I$, $I_1 \subset I$, ou $I_2 \subset I$.

5.4.8. Le théorème suivant a été démontré par Ludwig pour l'algèbre $L^1(G)$ ([22]):

Théorème:

Les idéaux fermés propres premiers de $L^1_\omega(G)$ coïncident avec les $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$, $\pi \in \hat{G}$.

Preuve:

Puisque $\pi \in \hat{G}$ est topologiquement irréductible , tous les $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ sont premiers. Réciproquement, soit I un idéal fermé propre de $L^1_\omega(G)$. Alors $I \cap \mathcal{S}(G)$ est un idéal propre de $\mathcal{S}(G)$ fermé pour la norme $\|\cdot\|_\omega$ de $\mathcal{S}(G)$. Montrons que $I \cap \mathcal{S}(G)$ est premier. Soient I_1, I_2 des idéaux de $\mathcal{S}(G)$ tels que $I_1 * I_2 \subset I \cap \mathcal{S}(G)$. Posons $J_1 = \overline{I_1}^{L^1_\omega(G)}$ et $J_2 = \overline{I_2}^{L^1_\omega(G)}$. Alors J_1 et J_2 sont des idéaux de $L^1_\omega(G)$ tels que

$$J_1 * J_2 \subset \overline{I_1 * I_2}^{L^1_\omega(G)} \subset \overline{I \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1_\omega(G)} \subset I.$$

Donc, puisque I est premier, $J_1 \subset I$ ou $J_2 \subset I$. On en déduit que $I_1 \subset I \cap \mathcal{S}(G)$ ou $I_2 \subset I \cap \mathcal{S}(G)$. Par ([22], lemma 9 et [25]) il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $I \cap \mathcal{S}(G) = \ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)$. Donc

$$h(I) = h\Big(I \cap \mathcal{S}(G)\Big) = h\Big(\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)\Big) = h\Big(\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)\Big)$$

et $I \subset \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$. Réciproquement,par (5.2.4.)

$$\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) = \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1_\omega(G)} \subset \overline{I \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1_\omega(G)} \subset I.$$

■

5.4.9. Théorème:
Les idéaux fermés propres maximaux de $L^1_\omega(G)$ coïncident avec les noyaux $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$, $\pi \in \hat{G}$, c'est-à-dire avec les idéaux fermés propres premiers.

Preuve:
Soit M un idéal fermé propre maximal. Par (5.4.6.) il existe $\pi \in \hat{G}$ tel que $M \subset \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$. Donc $M = \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ par maximalité. Réciproquement, supposons $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ non maximal. Alors il existe un idéal fermé propre M et $\pi_1 \in \hat{G}$ tels que

$$\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \subset M \subset \ker(\pi_1) \cap L^1_\omega(G) \quad \text{et} \quad \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \neq M \qquad (*).$$

On en déduit que

$$\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G) \subset \ker(\pi_1) \cap \mathcal{S}(G)$$

et que

$$\ker(\pi) = \overline{\ker(\pi) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} \subset \overline{\ker(\pi_1) \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \ker(\pi)_1.$$

Donc $\pi_1 \in \overline{\{\pi\}} = \{\pi\}$, puisque G est nilpotent, $\pi = \pi_1$ et $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) = \ker(\pi_1) \cap L^1_\omega(G)$, ce qui contredit $(*)$. ■

5.5. Représentations algèbriquement irréductibles de L'algèbre $L^1_\omega(G)$

5.5.1. Soit $\pi \in \hat{G}$ agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. Alors π définit une représentation topologiquement irréductible, unitaire de $L^1_\omega(G)$, par densité de $L^1_\omega(G)$ dans $L^1(G)$. Soit

$$\mathcal{H}^0_\pi = \text{vect}\{\pi(f)\xi \ \mid \ \xi \in \mathcal{H}_\pi,\ f \in L^1_\omega(G),\ \pi(f) \text{ de rang fini}\}.$$

Puisque π est irréductible, $\mathcal{H}^0_\pi$ est dense dans $\mathcal{H}_\pi$. Par ([23],) la restriction de π à $\mathcal{H}^0_\pi$ est une représentation algébriquement irréductible de $L^1_\omega(G)$. Notons ρ cette restriction. Puisque $\ker(\rho) = \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$, on a donc que

$$\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \in \text{Prim}(L^1_\omega(G))$$

pour tout $\pi \in \hat{G}$.

5.5.2. Corollaire:
L'ensemble des idéaux Primitifs de $L^1_\omega(G)$ est donné par

$$\text{Prim}(L^1_\omega(G)) = \mathfrak{K} = \{\ \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) \ \mid \ \pi \in \hat{G}\ \}.$$

Preuve:

Par (5.5.1). $\mathfrak{K} \subset \mathrm{Prim}(L^1_\omega(G))$. D'autre part. puisque le noyau de toute représentation algèbriquement irréductible est premier et fermé. (5.4.8.) entraîne que

$$\mathrm{Prim}(L^1_\omega(G)) \subset \mathfrak{K}.$$

■

5.5.3. Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire irréductible de G. Soit λ un vecteur unitaire C^∞ de $\mathcal{H}_\pi^\infty$. Prenons $p \in \mathcal{S}(G) \subset L^1_\omega(G)$ tel que $\pi(p) = P_{\lambda,\lambda}$. où $P_{\lambda,\lambda}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{C}\lambda$. Donc $p * p = p \mod \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ Définissons l'espace

$$\mathcal{H}_\lambda^0 = \{ \ \pi(f)\lambda \mid \ f \in L^1_\omega(G) \ \}.$$

Alors $\mathcal{H}_\lambda^0$ est égal à $\mathcal{H}_\pi^0$; car $\mathcal{H}_\lambda^0$ est un sous-espace π-invariant de $\mathcal{H}_\pi^0$. On a le lemme suivant:

5.5.4. Lemme:
Soit $(T, \mathfrak{U})$ une représentation algèbriquement irréductible de $L^1_\omega(G)$. Soit $\pi \in \hat{G}$ tel que $\ker(T) = \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$. Soient $\lambda \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et $p \in L^1_\omega(G)$ choisis comme en (5.5.3.). Définissons l'idéal M_λ par $M_\lambda = \{ \ f \in L^1_\omega(G) \ \mid \ \pi(f)\lambda = 0 \ \}$. Soit ensuite $\eta \neq 0$ dans l'image de $T(p)$, donc en particulier $T(p)\eta = \eta$. Définissons $M_\eta = \{ \ f \in L^1_\omega(G) \ \mid \ T(f)\eta = 0 \ \}$. Alors M_λ est un idéal maximal modulaire de $L^1_\omega(G)$ et $M_\lambda = M_\eta$ pour tout choix de $\eta \neq 0$ dans l'image de $T(p)$.

Preuve:
Il est clair que M_λ est un idéal maximal modulaire de $L^1_\omega(G)$ ([6].p.120. prop.4). Montrons maintenant que $M_\lambda = M_\eta$. Or puisque T est simple

$$\begin{aligned} M_\eta &= \{ \ g \in L^1_\omega(G) \mid T(g)\eta = 0 \ \} \\ &= \{ \ g \in L^1_\omega(G) \mid \ T(h) \circ T(g)\eta = 0, \forall h \in L^1_\omega(G) \} \\ &= \{ \ g \in L^1_\omega(G) \ \mid T(p) \circ T(h) \circ T(g) \circ T(p)\eta = 0 \ \ \forall h \in L^1_\omega(G) \ \} \\ &= \{ \ g \in L^1_\omega(G) \mid \ T(p * h * g * p)\eta = 0, \ \ \forall h \in L^1_\omega(G) \ \} \\ &= \{ \ g \in L^1_\omega(G) \mid < \pi(h) \circ \pi(g)\lambda, \lambda > \eta = 0, \ \ \forall f \in L^1_\omega(G) \ \} \end{aligned}$$

car $p*h*g*p- < \pi(h)\circ\pi(g)\lambda, \lambda > p \in \ker(\pi)\cap L^1_\omega(G) = \ker(T)$. Donc

$$M_\eta = \{g \in L^1_\omega(G); \pi(g)\lambda = 0\} = M_\lambda.$$

■

5.5.5. Théorème:
Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe simplement connexe. Soit ω un poids polynomial sur G. Soit $(T, \mathfrak{U})$ une représentation algébriquement irrédutible de $L^1_\omega(G)$. Alors il existe, à équivalence près une et une seule représentation unitaire topologiquement irréductible π de G telle que $(T, \mathfrak{U})$ soit équivalente à $(\pi_{/\mathcal{H}^0_\pi}, \mathcal{H}^0_\pi)$.

Preuve:
Puisque $\ker(T)$ est un idéal propre fermé premier dans $L^1_\omega(G)$, il existe une représentation unitaire irréductible π de G tel que

$$\ker(T) = \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G),$$

(voir (5.4.8.)). Prenons $p \in \mathcal{S}(G) \subset L^1_\omega(G)$ tel que $\pi(p) = P_{\lambda,\lambda}$, où $P_{\lambda,\lambda}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{C}\lambda$. Alors $T(p) = T(p*p)$ est un projecteur non nul de l'espace de Banach $\mathfrak{U}$, car $p \notin \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G) = \ker(T)$ et $p*p-p \in \ker(\pi)\cap L^1_\omega(G) = \ker(T)$. Définissons M_λ et M_η comme précédemment(5.5.4). Alors nous avons que $(T, \mathfrak{U})$ est équivalent à $(\pi_{\mathcal{H}^0_\pi}, \mathcal{H}^0_\pi)$, car ces deux modules sont équivalents à $L^1_\omega(G) \mid M_\eta$ et $L^1_\omega(G) \mid M_\lambda$ respectivement et que $M_\lambda = M_\eta$ (voir (5.5.4.)). L'unicité. à équivalence près est évidente. ■

5.6. Représentations Topologiquement irréductibles de L'algèbre $L^1_\omega(G)$

5.6.1. Rappelons la définition suivante d'une représentation topologiquement irréductible.

Définition:
Nous apellons représentation topologiquement irréductible (bornée) $(T, \mathfrak{U})$ de $L^1_\omega(G)$ sur un espace de Banach toute application linéaire

$$T: \ L^1_\omega(G) \longrightarrow GL(\mathfrak{U})$$

vérifiant:
(1) $T(f * g) = T(f)T(g) \qquad \forall f, g \in L^1_\omega(G)$
(2) $\|T(f)u\|_{\mathfrak{U}} \leq C_T \|f\|_\omega \|g\|_{\mathfrak{U}}, \forall f \in L^1_\omega(G), \forall u \in \mathfrak{U}$, où C_T est une constante positive.
(3) Les sous-espaces de $\mathfrak{U}$ fermés invariants sous l'action de T sont triviaux.
On dit encore que $(T, \mathfrak{U})$ est un $L^1_\omega(G)$-module topologiquement simple (ou T est une représentation topologiquement irréductible à croissance polynomiale) .
Exemple:
Soit $l \in \mathfrak{g}^*$. Soit $\mathfrak{p}$ une polarisation en l, $P = \exp(\mathfrak{p})$. Alors

$$(\pi = \operatorname{ind}_P^G \chi_l, \mathcal{H}_\pi)$$

est une représentation unitaire topologiquement irréductible de G (voir (1.3.12)).
Conservons la définition (5.4.1). Pour $M \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace

$$\mathcal{H}_M = \{\xi \in \mathcal{H}_\pi; \Big(\sum_{|\alpha| \leq M} \|X^\alpha \xi\|^2_{\mathcal{H}_\pi}\Big)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_M < \infty\},$$

pour $X \in \mathfrak{g}$.
La représentation π agit sur $\mathcal{H}_M$ par translation à gauche. D'autre part nous avons que

$$S(G/P, \chi_l) \subset \mathcal{H}_M.$$

Alors $\pi_{/\mathcal{H}_M}$ est topologiquement irréductible.
Soit $\xi \in \mathcal{H}_M$. Alors, pour $s \in G$

$$\begin{aligned}\|\pi(s)\xi\|_M^2 &= \sum_{|\alpha| \leq M} \|X^\alpha(\pi(s)\xi)\|_{\mathcal{H}_\pi}^2 \\ &= \sum_{|\alpha| \leq M} \|(\operatorname{Ad}(s)X)^\alpha \xi\|_{\mathcal{H}_\pi}^2.\end{aligned}$$

Donc $(\pi, \mathcal{H}_M)$ est une représentation topologiquement irréductible à croissance polynomiale.

Le but de ce paragraphe est de déterminer les représentations topologiquement irréductible de $L^1_\omega(G)$, à équivalence près . La proposition suivante est une première étape:

5.6.2. Proposition:
Pour tout module de Banach topologiquement simple $(T, \mathfrak{U})$ de $L^1_\omega(G)$, il existe une représentation $\pi_T \in \hat{G}$ unique (à équivalence près) telle que

$$\ker(T) = \ker(\pi_T) \cap L^1_\omega(G).$$

Preuve: L'idéal $\ker(T)$ est un idéal bilatère fermé premier de $L^1_\omega(G)$ et on peut donc appliquer (5.4.8.). ■

5.6.3. Pour cette représentation $\pi_T \in \hat{G}$, choisissons alors λ et p comme en (5.5.4.). Puisque $\ker(T) = \ker(\pi_T) \cap L^1_\omega(G)$ on a

$$T(p * f * p) =< \pi_T(f)\lambda, \lambda > T(p), \qquad \forall f \in L^1_\omega(G),$$

avec $T(p) \neq 0$. Par construction de p, $T(p * p) = T(p)$. Choisissons alors $0 \neq u = T(p)u \in T(p)\mathfrak{U}$. Puisque $(T, \mathfrak{U})$ est topologiquement irréductible. $T\Big(L^1_\omega(G)\Big)u = T\Big(L^1_\omega(G) * p\Big)u$ est dense dans $\mathfrak{U}$. Pour tout $f \in L^1_\omega(G)$, on a alors les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} T(f)u = 0 &\Longleftrightarrow T\Big(p * L^1_\omega(G) * f * p\Big)u \equiv 0 \\ &\Longleftrightarrow < \pi_T\Big(L^1_\omega(G)\Big)\pi_T(f)\lambda, \lambda > T(p)u \equiv 0 \\ &\Longleftrightarrow < \pi_T(f)\lambda, \pi_T\Big(L^1_\omega(G)\Big)\lambda > \equiv 0 \\ &\Longleftrightarrow f * p \in \ker(\pi)_T \cap L^1_\omega(G) = \ker(T). \end{aligned}$$

La dernière équivalence est due au fait que

$$\pi_T(f * p)\xi = < \xi, \lambda > \pi_T(f)\lambda, \forall \xi \in \mathcal{H}_{\pi_T}.$$

5.6.4. Lemme:
Soit $\mathcal{H}^0_{\pi_T}$ en (5.5.1.,5.5.3.). L'application

$$\begin{aligned} \Phi : T\Big(L^1_\omega(G) * p\Big) &\longrightarrow \mathcal{H}^0_{\pi_T} \\ T(f)u = T(f * p)u &\longrightarrow \pi_T(f * p)\lambda = \pi_T(f)\lambda \end{aligned}$$

est une bijection linéaire qui vérifie

$$\pi(g) \circ \Phi = \Phi \circ T(g), \quad \forall g \in L^1_\omega(G).$$

Preuve:
Puisque, par (5.6.3.),

$$T(f * p)u = 0 \Longleftrightarrow \pi_T(f * p)\lambda = 0.$$

Φ est bien définie et c'est une bijection. La linéarité et la relation $\pi_T \circ \Phi = \Phi \circ T$ se vérifient facilement. ∎

5.6.5. Proposition:
Toute représentation topologiquement irréductible $(T, \mathfrak{U})$ de $L^1_\omega(G)$ est équivalente à une représentation $(\pi_T, \overline{\mathcal{H}^0_{\pi_T}}^{\|\cdot\|_T})$, où $\pi_T \in \hat{G}$ et où $\|\cdot\|_T$ est une norme appropriée sur $\mathcal{H}^0_{\pi_T}$. De plus

$$\|\pi_T(g)\xi\|_T \leq C_T \cdot \|g\|_\omega \cdot \|\xi\|_T, \ \forall g \in L^1_\omega(G), \ \forall \xi \in \overline{\mathcal{H}^0_{\pi_T}}^{\|\cdot\|_T}$$

pour une certaine constante $C_T > 0$. Les espaces $\mathfrak{U}$ et $\overline{\mathcal{H}^0_{\pi_T}}^{\|\cdot\|_T}$ sont isométriques.

Preuve:
Par (5.6.4.), il suffit de poser

$$\|\pi_T(f)\lambda\|_T = \|T(f)u\|_\mathfrak{U}, \ \forall f \in L^1_\omega(G).$$

et de completer $\mathcal{H}^0_{\pi_T}$ pour cette norme. Alors les opérateurs $\pi_T(g)$, $g \in L^1_\omega(G)$, peuvent se prolongés en des opérateurs bornés sur $\overline{\mathcal{H}^0_{\pi_T}}^{\|\cdot\|_T}$, puisque

$$\begin{aligned}\|\pi_T(g)\pi_T(f)\lambda\|_T &= \|T(g * f)u\|_\mathfrak{U}\\ &\leq C_T\|g\|_\omega\|T(f)u\|_\mathfrak{U}\\ &= C_T\|g\|_\omega\|\pi_T(f)\lambda\|_T\end{aligned}$$

est une relation qui peut être étendue à tout $\xi \in \overline{\mathcal{H}^0_{\pi_T}}^{\|\cdot\|_T}$. ■

5.6.6. Afin de caractériser toutes les représentations topologiquement irréductibles de noyau $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ donné, il suffit donc de déterminer toutes les normes $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{H}^0_\pi$ pour lesquelles la représentation π est bornée et telle que $(\pi, \overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|||\cdot|||})$ soit topologiquement irréductible. D'où la définition suivante:

Définition:
On appelle norme d'extension sur $\mathcal{H}^0_\pi$, toute norme $|||\cdot|||$ qui vérifie

$$|||\pi(g)\xi||| \leq C\|g\|_\omega|||\xi|||, \ \ \forall g \in L^1_\omega(G), \ \forall \xi \in \mathcal{H}^0_\pi.$$

où C est une constante strictement positive.
Par continuité on peut alors étendre l'action des opérateurs $\pi(g)$ au complété $\overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{\|\cdot\|}$ pour cette norme.

5.6.7. Exemples:
1) La norme $\|\cdot\|_T$ définie (5.6.5.) est une norme d'extension.
2) La norme $\|\cdot\|_\pi$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une norme d'extension car

$$\|\pi(g)\xi\|_\pi \leq \|g\|_1\|\xi\|_\pi \leq \|g\|_\omega\|\xi\|_\pi$$

quels que soient $g \in L^1_\omega(G)$ et $\xi \in \mathcal{H}_\pi$.
3) La norme $\|\cdot\|_{\min}$ définie par

$$\|\xi\|_{\min} = \sup_{\|a\|_\omega \leq 1} | < \xi, \pi(a)\lambda > | \quad , \forall \xi \in \mathcal{H}^0_\pi.$$

est une norme d'extension, car

$$\begin{aligned}
\|\pi(g)\xi\|_{\min} &= \sup_{\|a\|_\omega \leq 1} | < \pi(g)\xi, \pi(a)\lambda > | \\
&= \|g\|_\omega \sup_{\|a\|_\omega \leq 1} | < \xi, \pi(\frac{g^*}{\|g\|^*_\omega} * a)\lambda > | \\
&\leq \|g\|_\omega \sup_{\|a\|_\omega \leq 1} | < \xi, \pi(a)\lambda > | \\
&= \|g\|_\omega \|\xi\|_{\min}
\end{aligned}$$

pour tout $g \in L^1_\omega(G)$, puisque $\|g\|_\omega = \|g^*\|_\omega$. le poids ω étant symértrique.
4) Soit $M_\lambda = \{f \in L^1_\omega(G) \mid \pi(f)\lambda = 0\}$ comme en (5.5.4). Alors la norme $\|\cdot\|_{\max}$ définie sur $\mathcal{H}^0_\pi$ par

$$\|\pi(f)\lambda\|_{\max} = \inf_{m \in M_\lambda} \|f + m\|_\omega = \|\dot{f}\|_{L^1_\omega(G)/M_\lambda}$$

est une norme d'extension, car

$$\begin{aligned}\|\pi(g)\pi(f)\lambda\|\max &= \inf_{m\in M_\lambda}\|g*f+m\|_\omega\\ &\le \inf_{m\in M_\lambda}\|g*(f+m)\|_\omega\\ &\le \|g\|_\omega \inf_{m\in M_\lambda}\|f+m\|_\omega\\ &= \|g\|_\omega\|\pi(f)\lambda\|\max.\end{aligned}$$

5.6.8. Proposition:
Soit $|||\cdot|||$ une norme d'extension quelconque sur $\mathcal{H}^0_\pi$. Alors il existe des constantes C' et C'' strictement positives telles que

$$C'\|\xi\|_{min} \le |||\xi||| \le C''\|\xi\|_{max},\ \forall\xi\in\mathcal{H}^0_\pi.$$

Preuve:
Pour $\pi(f)\lambda \in \mathcal{H}^0_\pi$ quelconque,

$$\begin{aligned}|||\pi(f)\lambda||| &= |||\pi(f+m)\lambda|||\\ &\le C\cdot\|f+m\|_\omega\cdot|||\lambda|||,\quad \forall m\in M_\lambda.\end{aligned}$$

Donc

$$|||\pi(f)\lambda||| \le (C\cdot|||\lambda|||)\cdot\|\pi(f)\lambda\|\max.$$

D'autre part, pour $\|a\|_\omega \le 1$,

$$\begin{aligned}|<\pi(f)\lambda,\pi(a)\lambda>| &= \frac{1}{|||\lambda|||}|||<\pi(a^**f)\lambda,\lambda>\lambda|||\\ &= \frac{1}{|||\lambda|||}|||\pi(p*a^**f*p)\lambda|||\\ &\le \frac{1}{|||\lambda|||}\|p\|_\omega\|a^*\|_\omega|||\pi(f)\lambda|||\end{aligned}$$

et

$$\|\pi(f)\lambda\|_{\min} \leq \frac{1}{\|\lambda\|} \|p\|_\omega \; \|\pi(f)\lambda\|.$$

puisque $\|a^*\|_\omega = \|a\|_\omega \leq 1$. ■

5.6.9. Corollaire:
Des normes $\|\cdot\|_{min}$ définies à partir de vecteurs $\lambda \in \mathcal{H}^\infty_\pi$ distincts sont équivalentes. De même pour les normes $\|\cdot\|_{max}$.

5.6.10. Proposition:
Soit $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ une norme d'extension quelconque sur $\mathcal{H}^0_\pi$. Alors le module $(\pi, \overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|\!|\!|\cdot|\!|\!|})$ est topologiquement simple.

Preuve:
Remarquons d'abord que l'idéal

$$L^1_\omega(G) * p * L^1_\omega(G) + \ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$$

est dense dans $L^1_\omega(G)$, par maximalité de $\ker(\pi) \cap L^1_\omega(G)$ (5.4.9.). Donc, si W est un sous-espace fermé π-invariant de $\overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|\!|\!|\cdot|\!|\!|}$, alors

$$\begin{aligned} \pi(p)W \equiv 0 &\Longleftrightarrow \pi\Big(L^1_\omega(G) * p * L^1_\omega(G)\Big)W \equiv 0 \\ &\Longleftrightarrow \pi(L^1_\omega(G))W \equiv 0 \\ &\Longleftrightarrow W \equiv 0, \end{aligned}$$

puisque $L^1_\omega(G)$ possède des unités approchées bornées. D'autre part, comme

$$\pi(p)\pi(f)\lambda = <\pi(f)\lambda, \lambda> \lambda \;\in \mathbb{C}\cdot\lambda, \quad \forall f \in L^1_\omega(G),$$

$\pi(p)\mathcal{H}^0_\pi = \mathbb{C}\cdot\lambda = \pi(p)\cdot\overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|\!|\!|\cdot|\!|\!|}$. Ainsi, si $W \neq 0$ est un sous-espace fermé π-invariant de $\overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|\!|\!|\cdot|\!|\!|}$, $0 \neq \pi(p)W \subset \mathbb{C}\lambda$ et $\pi(p)W = \mathbb{C}\cdot\lambda$, puisque W est un sous-espace. Finalement,

$$W \supset \pi\Big(L^1_\omega(G) * p\Big)W \supset \pi(L^1_\omega(G))\lambda = \mathcal{H}^0_\pi$$

et $W = \overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{\|\cdot\|}$. ■

5.6.11. Nous pouvons résumer les résultats de ce paragraphe dans le théorème suivant:

Théorème:
Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, nilpotent muni d'un poids polynomial ω. Les représentations toplogiquement irréductibles de $L^1_\omega(G)$ coïncident à équivalences près avec les représentations $(\pi, \overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|||\cdot|||})$ où π est une représentation unitaire irréductible de G et où $|||\cdot|||$ est une norme d'extension sur $\mathcal{H}^0_\pi$. Les représentations $(\pi, \overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|||\cdot|||})$ et $(\pi_1, \overline{\mathcal{H}^0_{\pi_1}}^{|||\cdot|||_1})$ sont équivalentes si et seulement si π et π_1 sont des représentations unitairement équivalentes de G et $|||\cdot|||$ et $|||\cdot|||_1$ des normes d'extension équivalentes.

5.6.12. Remarques finales:
1) *La norme $\|\cdot\|_\pi$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ est une norme d'extension, ce qui correspond au fait que $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est une représentation topologiquement irréductible.*
2) *Puisque*

$$C'\|\cdot\|_{min} \leq |||\cdot||| \leq C'' \cdot \|\cdot\|_{max}$$

pour toute norme d'extension $|||\cdot|||$, tous les modules topologiquement simples $(\pi, \overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{|||\cdot|||})$ peuvent se réaliser comme des sous-modules de Banach du module $(\pi, \overline{\mathcal{H}^0_\pi}^{\|\cdot\|_{min}})$.
3) *En posant $\omega \equiv 1$ nous obtenons toutes les représentations topologiquement irréductibles de $L^1(G)$, si G est un groupe de Lie connexe, simplement connexe, nilpotent.*

5.6.13. Questions ouvertes:
Nous terminons notre étude par des problèmes ouverts :
1) Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe et ω un poids exponentiel. Pourrait-on établir des résultats anologues pour l'algèbre $L^1_\omega(G)$?

2) Supposons que G est un groupe de Lie résoluble exponentiel. Est ce que on peut obtenir les mêmes résultats précédents dans le cas où ω est un poids exponentiel?

Références bibliographiques

[1] D. Alexandre, J. Ludwig, *Expression explicite d'idéaux minimaux d'algèbres de convolution*, preprint.

[2] J. Andele, *Thèse*, Metz (1997).

[3] P. Bernat, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles*, Ann. Ec. Norm. Sup. **82** (1965), 37-99.

[4] P. Bernat, N. Conze, M. Lévy-nahas, M. Rais, P. Renouard, M. Vergne, *Représentations des groupes de Lie résolubles* (Dunod, Paris,1972).

[5] J. Boidol, H. Leptin, J. Schürman, D. Vahle, *Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren*, Math. Ann. **236** (1978), 1-13.

[6] F. F. Bonsall, I. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Ergebnisse der Mathematik 80, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).

[7] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques: Groupes et algèbres de Lie.* (Herman, 1972).

[8] J. Dixmier, *Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires*. Ins. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **6** (1960), 305-317.

[9] J. Dixmier, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie*

résolubles. Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 113-121.

[10] J. Dixmier. *Les C^*-algèbres et leurs représentations unitaires*. Gauthier-Villars. (Paris 1969).

[11] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Guthier-Villars, Paris (1974).

[12] W. Hauenschild, J. Ludwig, *The injection and the projection theorem for spectral sets*. Monatsh. Math. **92**(1981), 167-177.

[13] G. Hochschild, *The structure of Lie Groups*. Holden-Day Inc., San Francisco, London, Amsterdam(1965).

[14] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, (Berlin, Heidelberg, New York. Tokyo, 1983).

[15] R. Howe, *On a connection between nilpotent groups and oscillary integrals associated to singularities*, Pac. J. Math. **73** n.2 (1977), 329-363.

[16] A. Hulanicki, *A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups*, Stud. Math. **78** (1984), 253-266.

[17] A.A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*. Uspekhi Mat. Nauk. **17** (1962), 53-104.

[18] H. Leptin, *Ideal Theory in Group Algebras of Locally Compact Groups*, Inventiones math. **31** (1976), 259-278.

[19] H. Leptin, J. Ludwig, *Unitary Representations Theory of Exponential Lie Groups*, De Gruyter Expositions in Mathematics **18** (De Gruyter.

Berlin, New York, 1994).

[20] J. Ludwig, *Polynomial growth and ideals in group algebras*, manuscripta math. **30** (1980), 215-221.

[21] J. Ludwig, *On the spectral synthesis problem for points in the dual of a nilpotent Lie group*, Ark. Math. **21** (1983), 127-144.

[22] J. Ludwig, *On Primary Ideals in the Group Algebra of a Nilpotent Lie group*, Math. Ann. **262** (1983), 287-304.

[23] J. Ludwig, *Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels*, J. Reine Angew. Math. **339** (1983), 1-26.

[24] J. Ludwig, Minimal C^*-Dense Ideals and Algebraically Irreducible Representations of the Schwartz-Algebra of a Nilpotent Lie Group, in *Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Math. **1359**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1987), 209-217.

[25] J. Ludwig, C. Molitor-Braun, *Algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent*, Publ. Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques **VII** (1995), 25-67.

[26] J. Ludwig, C. Molitor-Braun, *Exponential actions, orbits and their kernels*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. **57** (1998), 497-513.

[27] J. Ludwig, C. Molitor-Braun,*Représentations irréductibles bornées des groupes de Lie exponentiels* (à paraître).

[28] S. Mint Elhacen, C. Molitor-Braun, *Etude de l'algèbre $L^1_\omega(G)$ avec G*

groupe de Lie nilpotent et ω est un poids polynomial. Publ. Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques **X** (1998), 77-94.

[29] D. Poguntke, *Algebraically irreducible representations of L^1-algebras of exponential Lie groups*, Duke Math. J. **50** (1983), 1077-1106.

[30] L. Pukanszky, *On the Unitary Representations of Exponential groups*. J. Funct. Anal. **2**(1968) 73-113.

[31] L. Pukanszky, *On the theory of exponential groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1967), 487-507.

[32] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras and there representations*. Prentice-Hall Series in modern analysis,(1974).

[33] D.J. Winter, *Abstract Lie Algebras*, The MIT press, Cambridge, Massachusetts, London (1972).

Table des matières