Pierre DRIUTTI

REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES RÉSEAUX DANS LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

1[er] Octobre 1999

Jury:	Prof. Didier ARNAL	(Université de Metz)
	Prof. Martine BABILLOT	(Université d'Orléans)
	Prof. Bachir BEKKA	(Directeur de Thèse - Université de Metz)
	Prof. Michael COWLING	(Rapporteur - University of New South Wales, Sydney)
	Prof. Yves GUIVARC'H	(Université de Rennes I)
	Prof. Pierre de la HARPE	(Rapporteur - Université de Genève)
	Prof. André ROUX	(Université de Metz)

Ce mémoire est présenté en vue d'obtenir le titre de Docteur en Mathématiques de l'Université de Metz.

Table des matières

Introduction

Soit G un groupe localement compact, et soit Γ un réseau de G (c'est à dire un sous-groupe discret de G tel que l'espace homogène $\Gamma \setminus G$ possède une mesure G-invariante finie). On dénote par $\widetilde{G}$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations unitaires de G, et par $\widehat{G}$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations unitaires irréductibles de G.

Si G est un groupe de Lie semi-simple connexe, de centre fini, M. Cowling et de T.Steger (voir [CoS]) se sont intéressés à l'étude des restrictions de représentations unitaires irréductibles de G à un réseau Γ et ont montré que la plupart des éléments de $\widehat{G}$ (en fait toutes les représentations qui ne sont pas de carré intégrable) restent irréductibles lorsqu'on les restreint à Γ. Nous pouvions donc naturellement nous intéresser au même genre de problème, non-plus dans le cadre des groupes de Lie semi-simples, mais dans celui des groupes de Lie nilpotents.

Soit donc G un groupe de Lie nilpotent (par cette dénomination, nous entendrons toujours *groupe de Lie nilpotent réel, connexe et simplement connexe*), d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans son très célèbre article (voir [Kir1]), A.A. Kirillov a caractérisé le dual unitaire $\widehat{G}$ de G, en montrant que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des orbites pour l'action co-adjointe de G dans l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$.

Soit maintenant Γ un réseau de G. Le sous-groupe Γ est alors cocompact dans G, et induit ainsi une structure rationnelle sur $\mathfrak{g}$, sur G et sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ (voir par exemple [CoG2, Chapter 5]). Dans son célèbre article paru en 1965, C.C. Moore (voir [Moo]) a déterminé le spectre de la représentation quasi-régulière (droite) de G dans $L^2(\Gamma \setminus G)$, ainsi qu'une majoration des multiplicités des représentations y apparaissant, dans le cas où Γ est un réseau additif de G (c'est à dire qu'en outre, $\log(\Gamma)$ est un sous-groupe additif de $\mathfrak{g}$), et a donné une condition nécessaire pour qu'une représentation unitaire irréductible de G soit une sous-représentation de la représentation quasi-régulière dans le cas de réseaux quelconques (ces conditions d'occurence étant intimement liées à la structure rationnelle induite par le réseau Γ sur $\mathfrak{g}$). Les travaux (indépendants) de R. Howe (voir [How]), L.F. Richardson (voir [Ric]) et, plus tard, de L. Corwin et F.P. Greenleaf (voir [CoG1]) ont permis ensuite de connaître des formules de multiplicités exactes pour ces représentations. Comme nous le verrons aux chapitres 1 et 2, la connaissance de ce spectre est primordiale pour pouvoir établir un critère d'irréductibilité pour les restrictions à un réseau Γ des éléments de $\widehat{G}$ (cf Théorèmes 1.3.1 et 2.2.1).

Soit donc Γ un réseau de G et soit $\pi \in \widehat{G}$. Que peut-on alors dire de la représentation $\pi|_\Gamma$? Est-elle ou non irréductible? Si non, en connait-on une décomposition en (somme ou intégrale directe d') irréductibles? Afin de répondre à ces questions, regardons dans un premier temps un exemple. Soit G le groupe de Heisenberg (de dimension 3) et soit Γ le groupe de Heisenberg discret. Puisque Γ est un réseau de G, intéressons-nous donc aux restrictions des représentations unitaires irréductibles de G à Γ. Si $\pi \in \widehat{G}$ n'est pas de dimension 1, il est bien connu (voir par exemple [Nie]) qu'il existe $\alpha \neq 0$ tel que π se réalise dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ de la manière suivante:

$$\pi(x_1, x_2, x_3)(f)(t) = e^{2\pi i\alpha(x_1 - x_2 t)} f(t - x_3), \text{ pour tous } (x_1, x_2, x_3) \in G \text{ et tout } f \in L^2(\mathbb{R}),$$

$(\mathbb{R}, 0, 0)$ étant le centre de G. Ainsi, si E est une partie borélienne quelconque de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$-stable pour la translation, de mesure non-nulle pour la mesure de Lebesgue, alors il est facile de voir que le sous-espace (fermé) des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ nulles sur E est invariant par $\pi|_\Gamma$, et que cette restriction n'est donc pas irréductible. Comme nous le verrons, ceci est dû au fait que π puisse s'induire à partir d'un sous-groupe normal rationnel propre de G.

Soit donc un représentation unitaire irréductible π de G dont l'orbite associée possède une fonctionnelle linéaire admettant une polarisation $\mathfrak{m}$ qui soit un idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$ (nous dirons alors, pour simplifier, que π *possède la propriété [IPR]*). Comme l'a fait remarqué C.C. Moore dans [Moo], $M = \exp(\mathfrak{m})$ et Γ sont alors régulièrement reliés, et le théorème des sous-groupes de G.W. Mackey (voir [Mac2, Theorem 12.1]) montre que la restriction de π à Γ n'est pas irréductible, et se décompose en intégrale hilbertienne de représentations monomiales (irréductibles ou non) de Γ. Dans le chapitre 3, nous donnons une autre preuve de ce résultat, dont le grand intérêt est de fournir une décomposition explicite de $\pi|_\Gamma$ (cf Théorème 3.2.1). De plus, s'il existe une fonctionnelle linéaire dans l'orbite $\mathcal{O}_\pi$ de $\pi \in \widehat{G}$ admettant une polarisation *contenue* dans une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$, alors une simple application du théorème des sous-groupes de G.W. Mackey ou du théorème 3.2.1 montre que la restriction $\pi|_\Gamma$ de cette représentation à Γ ne peut être irréductible.

Inversement, que peut-on dire de $\pi \in \widehat{G}$ telle qu'aucune des fonctionnelles linéaires appartenant à son orbite $\mathcal{O}_\pi$ n'admette de polarisation contenue dans un idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$? Cette condition peut paraître difficile à vérifier, une fonctionnelle linéaire admettant en général plusieurs polarisations. Cependant, il est facile de voir qu'elle est en fait équivalente à la condition (beaucoup plus agréable) suivante: si $l \in \mathfrak{g}^*$ est un élément quelconque de $\mathcal{O}_\pi$, alors le radical $\mathfrak{r}_l$ de l n'est contenu dans aucun idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$ (nous dirons alors que l'algèbre $\mathfrak{r}_l$ est *totalement irrationnelle*), ou encore, la projection de $\mathfrak{r}_l$ sur $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ n'est contenue dans aucun sous-espace vectoriel rationnel propre de $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (cf Lemme 1.3.4). Utilisant un critère d'irréductibilité dû à M. Cowling et T.Steger (voir [CoS]), ainsi que le théorème de C.C. Moore décrivant le spectre de la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$, nous montrons (cf Théorème 1.3.1) que la représentation $\pi|_\Gamma$ est alors irréductible. En outre, si π et $\varrho \in \widehat{G}$ sont telles que leurs restrictions à Γ sont irréductibles et unitairement équivalentes, alors, bien qu'elle ne soient plus obligatoirement équivalentes (dans G), comme c'était le cas dans le cadre des groupes de Lie semi-simples, elles ne peuvent différer l'une de l'autre que d'un caractère de G, trivial sur Γ (cf Théorème 1.4.1).

Après ce critère "arithmétique" d'irréductibilité, nous donnons un critère "géométrique" portant cette fois sur l'action de Γ sur l'orbite $\mathcal{O}_\pi$. Utilisant encore une fois le théorème de C.C. Moore déterminant le spectre des nilvariétés compactes, nous montrons au chapitre 2 qu'un sous-groupe de Lie H de G agit ergodiquement sur $\Gamma \setminus G$ si et seulement si son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est totalement irrationnelle dans $\mathfrak{g}$ (voir Théorème 2.1.1). En corollaire, nous en déduisons alors que H agit ergodiquement sur $\Gamma \setminus G$ si et seulement si H agit ergodiquement sur le tore associé $\Gamma[G,G] \setminus G$ (cf Théorème 2.1.2). Ce résultat n'est pas sans rappeler le théorème de W. Parry (voir [Par, Theorem 1]), établissant l'équivalence pour une action affine d'agir ergodiquement sur une nilvariété compacte ou sur son tore associé. De l'application du théorème 2.1.1 au radical d'une fonctionnelle linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$, nous déduisons finalement que la restriction d'une représentation π à Γ est irréductible si et seulement si Γ agit ergodiquement sur l'orbite $\mathcal{O}_\pi$ de π (cf Théorème 2.2.1).

Si $\pi \in \widehat{G}$ est telle que sa restriction à Γ n'est pas irréductible, les théorèmes 1.3.1 et 3.2.1 nous fournissent donc une décomposition de $\pi|_\Gamma$ en intégrale directe de représentations induites à partir de représentations unitaires irréductibles (pas nécessairement de dimension 1) de sous-groupes de Γ (plus précisément, si $l \in \mathcal{O}_\pi$ admet une polarisation qui soit contenue dans un idéal rationnel propre $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$, alors $\pi|_\Gamma$ se décompose en intégrale directe de représentations induites à partir de restrictions de représentations irréductibles de $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$ au réseau $G_0 \cap \Gamma$. On applique alors de nouveau le critère d'irréductibilité à ces représentations de G_0). Cependant, nous ne savons pas, a priori, si ces représentations de Γ sont irréductibles ou non, les travaux effectués jusqu'à ce jour ne nous permettant pas de conclure de l'irréductibilité de représentations d'un groupe discret induites à partir d'une représentation quelconque. Bien que différents travaux aient été effectués autour cette question, nous ne sommes capables, à ce jour, que de déterminer l'irréductibilité de représentations induites à partir de représentations de dimensions finies (pour plus de détails, voir par exemple [Bin2], [Cor], [Kle] ou [Oba]). C'est la raison pour laquelle nous allons, dans la suite de ce mémoire, nous nous concentrons sur les représentations unitaires irréductibles de G possédant la propriété [IPR].

Comme le montre le théorème 3.2.1, la restriction à Γ d'une représentation π de G possédant la propriété [IPR] se décompose en une intégrale hilbertienne de représentations monomiales de Γ, que nous appelerons *première décomposition* de $\pi|_\Gamma$. Pour déterminer si ces représentations sont irréductibles ou non, nous utilisons alors le critère d'irréductibilité dû à G.W. Mackey (voir [Mac1, Theorem 6']). Cependant, le fait que certaines de ces composantes soient irréductibles n'entraine pas que toutes le soient. Dans un premier temps, nous énonçons donc un critère arithmétique sur l'orbite de π permettant de conclure de l'irréductibilité de presques toutes les composantes apparaissant dans cette première décomposition. C'est le théorème 3.3.1. Remarquons que, bien que les composantes apparaissant dans la première décomposition de $\pi|_\Gamma$ ne soient pas irréductibles, elles peuvent néanmoins posséder d'intéressantes propriétés. En particulier, on peut se demander si ces composantes peuvent être des représentations factorielles de Γ, et si oui, de quel type. Une simple application de résultats dûs à M.W. Binder (voir [Bin1]) répondra à ces questions.

Bien qu'il existe des critères nous permettant de décider de l'irréductibilité ou non des représentations apparaissant dans la première décomposition de $\pi|_\Gamma$, il n'existe pas de processus général nous permettant de décomposer ces représentations induites à partir d'un sous groupe normal de Γ, en somme ou intégrale directe de représentations unitaires irréductibles. Au chapitre 4, nous présentons donc un tel processus (dont nous nous bornons ici à ne donner qu'une idée générale). Si H est un sous-groupe normal du réseau Γ, et si χ est un caractère de H, le stabilisateur de χ dans Γ est le sous-groupe de Γ donné par

$$\mathrm{St}_H^\Gamma(\chi) = \{\gamma \in \Gamma;\ \chi(\gamma \cdot h \cdot \gamma^{-1}) = \chi(h), \text{ pour tout } h \in H\}.$$

Pour tout sous-groupe H tel que $H \setminus \Gamma$ soit sans torsion, nous construisons alors deux suites "convergentes" de sous-groupes imbriqués de Γ, l'une contenant H et croissante, l'autre contenue dans $St_H^\Gamma(\chi)$ et décroissante. Ces deux suites "convergeant" vers la même limite, elles nous permettent alors de décomposer $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi$ comme somme ou intégrale directe de représentations monomiales irréductibles de Γ (cf Théorème 4.1.1). Remarquons que l'hypothèse $H \setminus \Gamma$ sans torsion n'est utilisée que pour assurer la convergence des deux suites de sous-groupes de Γ, et que ce processus peut s'appliquer en dehors de ce cadre dès l'instant que les suites de sous-groupes considérées convergent.

Enfin, au chapitre 5, nous faisons une synthèse des résultats obtenus et donnons, dans une première partie, une décomposition en composantes irréductibles de la restriction à Γ de toute représentation unitaire irréductible de G possédant la propriété [IPR]. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous déterminons, grâce à un critère d'équivalence de représentations monomiales irréductibles d'un groupe discret dû également à G.W. Mackey (voir [Mac1, Theorem 7']), quelles sont les composantes, apparaissant dans cette décomposition finale, unitairement équivalentes entre elles. Enfin, nous exposons quelques résultats concernant l'équivalence faible des composantes apparaissant dans la première décomposition de $\pi|_\Gamma$, et dans la décomposition finale en irréductibles de $\pi|_\Gamma$ dans le cas particulier où π est induite à partir d'un caractère d'un sous-groupe normal rationnel M de G tel que $M\backslash G$ soit abélien.

Nous pourrons retrouver les principaux résultats énonçés aux chapitres 1 et 3 dans un article, cosigné par M.B. Bekka et moi-même, à paraître bientôt au *Journal of Functional Analysis* sous le titre *Restrictions of Irreducible Unitary Representations of Nilpotent Lie Groups to Lattices.*

Tout au long de ce mémoire, nous donnerons au fur et à mesure des exemples illustrant les résultats obtenus.

Chapitre 1

Critère d'irréductibilité pour des restrictions de représentations à des réseaux

Soit G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau de G. Dans ce premier chapitre, après quelques rappels d'usage, nous donnons un (premier) critère d'irréductibilité pour des restrictions de représentations unitaires irréductibles de G à Γ. Nous donnons ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que deux restrictions (irréductibles) soient unitairement équivalentes, et nous exhibons une famille d'exemples de groupes de Lie nilpotents admettant des représentations dont les restrictions à un réseau restent irréductibles.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Représentations de groupes localement compacts

Définitions

Soit G un groupe localement compact.

Définition 1.1.1 *Une* représentation unitaire *de G est un couple $(\pi, \mathcal{H})$, formé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un homomorphisme $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ du groupe G dans le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$, continu pour la topologie forte de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ s'appelle l'*espace de la représentation *π, et la dimension hilbertienne de $\mathcal{H}$ s'appelle la* *dimension* de π, *et se note* $\dim(\pi)$.

Bien sûr, nous ne considérerons que des représentations de G dans des espaces de Hilbert non-nuls.

Définition 1.1.2 *Soient $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ et $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ deux représentations unitaires de G.*

(1) *Soit T un opérateur linéaire continu de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. On dit que T* entrelace *les représentations π_1 et π_2 si $T\,\pi_1(g) = \pi_2(g)\,T$, pour tout $g \in G$.*

(2) *On dit que les représentations π_1 et π_2 sont* unitairement équivalentes *s'il existe une bijection linéaire isométrique $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ entrelaçant π_1 et π_2.*

Définition 1.1.3 *Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire de G.*

(1) *On dit qu'un sous-espace $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}_\pi$ est* invariant *si $\pi(g)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, pour tout $g \in G$.*

(2) *Soit $\mathcal{K}$ un sous-espace invariant fermé non-nul de $\mathcal{H}_\pi$. Alors les restrictions des opérateurs $\pi(g)$ à $\mathcal{K}$ définissent une représentation unitaire de G dans $\mathcal{K}$. Cette représentation est appelée* sous-représentation *de π.*

(3) *Soit $(\varrho, \mathcal{H}_\varrho)$ une représentation unitaire de G. On dira que ϱ est* contenue *dans π si elle est équivalente à une sous-représentation de π.*

(4) *Enfin, on dira que la représentation $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est* irréductible *si $\{0\}$ et $\mathcal{H}_\pi$ sont les seuls sous-espaces invariants fermés de $\mathcal{H}_\pi$.*

D'après le lemme de Schur, on sait qu'une représentation $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est irréductible si et seulement si les seuls opérateurs entrelaçant π sont les multiples de l'identité.

Représentations induites

Soit G un groupe localement compact unimodulaire (c'est à dire que toute mesure de Haar à gauche sur G est également une mesure de Haar à droite sur G), soit H un sous-groupe unimodulaire fermé de G, et soit $d\dot{g}$ une mesure quasi-invariante sur l'espace homogène $H\backslash G$. Soit enfin $(\varrho, \mathcal{H}_\varrho)$ une représentation unitaire de H. Posons

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \;=\; & \{\varphi : G \longrightarrow \mathcal{H}_\varrho \text{ mesurables vérifiant } \varphi(h \cdot g) = \varrho(h)\varphi(g), \forall (h,g) \in H \times G \\ & \qquad\qquad \text{et } \int_{H\backslash G} \|\varphi(g)\|^2_{\mathcal{H}_\varrho}\, d\dot{g} < +\infty\}.\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{H}$, muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{H\backslash G} \langle \varphi(g), \psi(g) \rangle_{\mathcal{H}_\varrho} \, d\dot{g}, \text{ pour tous } \varphi, \psi \in \mathcal{H},$$

est un espace de Hilbert séparable. Posons maintenant, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, et tous $g, g' \in G$,

$$(\pi(g)\varphi)(g') = \varphi(g' \cdot g).$$

$(\pi, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G, appelée *représentation induite* de ϱ à G, et notée

$$\pi = \mathrm{Ind}_H^G \varrho.$$

Pour plus de renseignements sur les représentations induites, on pourra consulter [Mac3, Chapter 3].

1.1.2 Généralités sur les groupes et algèbres de Lie

Dans tout ce mémoire, nous ne considérerons que des groupes et algèbres de Lie de *dimension finie.*

Actions adjointes et co-adjointes

Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour tout $x \in G$, l'application $\alpha_x : g \mapsto x \cdot g \cdot x^{-1}$ est un automorphisme intérieur de G, différentiable, dont la différentielle en e, notée $\mathrm{Ad}(x)$, est un automorphisme de $\mathfrak{g}$. L'application $x \mapsto \mathrm{Ad}(x)$ est alors un homomorphisme de G dans $GL(\mathfrak{g})$, qui définit une action de G sur $\mathfrak{g}$, appelée l'*action adjointe* de G sur $\mathfrak{g}$. Cet homomorphisme est lui-même différentiable, de différentielle en e donnée par

$$d_{(e)}\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \qquad X \longmapsto \mathrm{ad}(X).$$

Soit maintenant $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Pour $l \in \mathfrak{g}^*$ et $g \in G$, on définit un nouvel élément de $\mathfrak{g}^*$, noté $\mathrm{Ad}^*(g)l$, par

$$\langle \mathrm{Ad}^*(g)l, X \rangle = \langle l, \mathrm{Ad}(g^{-1})X \rangle, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

L'application $\mathrm{Ad}^* : G \to GL(\mathfrak{g}^*)$ est un homomorphisme différentiable, et définit une action de G sur $\mathfrak{g}^*$, appelée *action co-adjointe* de G sur $\mathfrak{g}^*$. Sa différentielle en e, qui à tout élément

X de $\mathfrak{g}$ associe un endomorphisme de $\mathfrak{g}^*$ noté $d_{(e)}\mathrm{Ad}^*(X) = \mathrm{ad}^*(X)$, est alors donnée par

$$\langle \mathrm{ad}^*(X)l, Y\rangle = \langle l, [Y,X]\rangle = -\langle l, \mathrm{ad}(X)(Y)\rangle, \text{ pour tous } X, Y \in \mathfrak{g} \text{ et tout } l \in \mathfrak{g}^*.$$

Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, soit B_l la forme bilinéaire anti-symétrique définie par

$$B_l : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (X,Y) \longmapsto \langle l, [X,Y]\rangle.$$

On appelle *radical* de l (noté $\mathfrak{r}_l$) le radical de B_l. C'est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ définie par

$$\mathfrak{r}_l = \{Y \in \mathfrak{g};\ B_l(X,Y) = 0, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}\} = \{Y \in \mathfrak{g};\ \mathrm{ad}^*(Y)l = 0\}.$$

On appelle *polarisation* (ou *algèbre polarisante*) pour l tout sous-espace isotrope maximal pour B_l, qui soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Sa dimension est alors égale à $\frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{r}_l))$.

Il est à remarquer qu'une fonctionelle linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$ n'admet pas toujours de polarisation (voir par exemple [Kir2, §15.3]).

Algèbres et groupes de Lie nilpotents

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle, et soit $(\mathfrak{g}^{(i)})_{i\geq 1}$ la *série centrale descendante* de $\mathfrak{g}$ définie par récurrence par $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$, et, pour tout $n \geq 2$,

$$\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n-1)}] = \mathbb{R}\text{-span}\{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{(n-1)}\},$$

où $\mathbb{R}\text{-span}\{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{(n-1)}\}$ désigne le sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{g}$ engendré par $\{[X,Y];\ X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{(n-1)}\}$.

Définition 1.1.4 *On dit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est* nilpotente *s'il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}^{(n+1)} = \{0\}$. Si $\mathfrak{g}^{(n)} \neq \{0\}$, alors l'entier $(n+1)$ vérifiant la propriété $\mathfrak{g}^{(n+1)} = \{0\}$ est minimal, et $\mathfrak{g}$ sera alors dite nilpotente de* pas *n.*

Soit maintenant $(\mathfrak{g}_{(j)})_{j\geq 1}$ la *série centrale ascendante* de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{g}_{(1)} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, et, pour tout $j \geq 2$,

$$\mathfrak{g}_{(j)} = \{X \in \mathfrak{g};\ X \text{ est central mod } \mathfrak{g}_{(j-1)}\} = \{X \in \mathfrak{g};\ [X,\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{(j-1)}\}.$$

Alors, $\mathfrak{g}$ est nilpotente de pas n si et seulement si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(n)} \neq \mathfrak{g}_{(n-1)}$.

Si une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors il en est de même pour toute sous-algèbre et toute algèbre quotient de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente (réelle) de dimension n, et soient $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{g}_k \subseteq \mathfrak{g}$ des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ telles que $\dim(\mathfrak{g}_j)=m_j$, pour tout $1 \leq j \leq k$. Alors, $\mathfrak{g}$ possède une base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ telle que

(i) $\mathfrak{h}_m = \mathbb{R} - \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_m\}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, pour tout $1 \leq m \leq n$,

(ii) $\mathfrak{h}_{m_j} = \mathfrak{g}_j$, pour tout $1 \leq j \leq k$.

De plus, si les $\mathfrak{g}_j$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, on peut alors choisir les éléments X_i de telle manière que

(i') $\mathfrak{h}_m = \mathbb{R} - \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_m\}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, pour tout $1 \leq m \leq n$.

Adoptant les notations de [CoG2, Chapter 1], une base de $\mathfrak{g}$ vérifiant les propriétés (i) et (ii) sera appelée une *base de Malcev faible de* $\mathfrak{g}$ *passant par* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$; et une base de $\mathfrak{g}$ vérifiant les propriétés (i') et (ii), une *base de Malcev forte de* $\mathfrak{g}$ *passant par* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$. Si $k = 0$, on dira simplement que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une *base de Malcev faible (ou forte) de* $\mathfrak{g}$.

Définition 1.1.5 *Un groupe de Lie G est dit* nilpotent *si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

> Dans tout ce mémoire, par groupe de Lie nilpotent, nous entendrons toujours groupe de Lie *nilpotent réel, connexe et simplement connexe.*

Théorème 1.1.1 ([CoG2, Theorem 1.2.1]) *Soit G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors,*

(a) $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ *est un difféomorphisme analytique,*

(b) *la formule de Campbell-Baker-Hausdorff est valable pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Ainsi, si le groupe de Lie G est nilpotent, via $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, on pourra l'identifier, le cas échéant, avec $\mathfrak{g}$. La multiplication de G sera alors donnée par le produit de Campbell-Baker-

Hausdorff, défini sur $\mathfrak{g}$ et noté $*$, $\exp(X * Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$, où

$$
\begin{aligned}
(X,Y) \longmapsto X * Y &= X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] - \frac{1}{48}[Y,[X,[X,Y]]] \\
&\quad - \frac{1}{48}[X,[Y,[X,Y]]] + \text{ (crochets de 5 termes et plus)}
\end{aligned}
$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, est une application polynomiale.

En outre, (voir par exemple [CoG2, Theorem 1.3.3]),

Théorème 1.1.2 *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, alors toute fonctionnelle linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$ admet une algèbre polarisante.*

Orbites co-adjointes

Soit G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Il est bien connu que les orbites co-adjointes de G dans $\mathfrak{g}^*$ sont des variétés algébriques affines. Ceci découle du théorème de Chevalley-Rosenlicht (voir [CoG2, Theorem 3.1.4]), qui nous fournit alors une paramétrisation de ces orbites. Plus précisément, on a

Théorème 1.1.3 (Chevalley-Rosenlicht) *Soit G un groupe connexe agissant de manière unipotente sur un espace vectoriel réel V. Si $v \in V$, alors il existe $k \geq 0$ et des éléments $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ tels que*

$$G \cdot v = \{(\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_k X_k)) \cdot v;\ t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}.$$

L'application $\psi(t_1, \dots, t_k) = (\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_k X_k)) \cdot v$ est alors un difféomorphisme de $\mathbb{R}^k$ sur l'orbite $G \cdot v$, qui est une sous-variété fermée de V. En fait, soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base de V telle que $V_j = \mathbb{R}\text{-span}\{e_{j+1}, \dots, e_m\}$ est G-stable pour tout j, et soient l'application Q et les polynômes $Q_1, \dots, Q_m$ définis par

$$(\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_k X_k)) \cdot v = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t_1, \dots, t_k) e_j = Q(t_1, \dots, t_k).$$

Alors il existe deux ensembles disjoints d'indices $S = \{j_1, \dots, j_k\}$ et T (avec $S \cup T = \{1, \dots, m\}$) tels que Q_j ne dépend que des variables t_i avec $j_i \leq j$. De plus,

$$Q_{j_i} = t_i + (\textit{un polynôme en } t_1, \dots, t_{i-1}), \quad \textit{pour tout } 1 \leq i \leq k.$$

Dans ce cas, si on pose $u_i = Q_{j_i}(t_1, \ldots, t_k)$ pour tout $1 \leq i \leq k$, on trouve alors des polynômes $P_1, \ldots, P_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tels que (voir [CoG2, Corollary 3.1.5])

- l'application $P(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{j=1}^{m} P_j(u_1, \ldots, u_k)e_j$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^k$ sur $G \cdot v$,
- $P_{j_i}(u_1, \ldots, u_k) = u_i$, pour tout $1 \leq i \leq k$,
- P_j ne dépend que des variables u_i telles que $j_i \leq j$.

Corollaire 1.1.1 *Conservons les notations du théorème 1.1.3. Pour tout $v \in V$, l'orbite $G \cdot v$ est une* variété algébrique affine.

Preuve: En effet, on a

$$\begin{cases} P_1(u_1, \ldots, u_k) = c_1, & \text{pour une certaine constante } c_1 \\ \vdots & \\ P_{j_1-1}(u_1, \ldots, u_k) = c_{j_1-1}, & \text{pour une certaine constante } c_{j_1-1} \\ P_{j_1}(u_1, \ldots, u_k) = u_1 & \\ P_{j_1+1}(u_1, \ldots, u_k) = R_{j_1+1}(u_1), & \text{pour un certain polynôme } R_{j_1+1} \\ \vdots & \\ P_{j_2-1}(u_1, \ldots, u_k) = R_{j_2-1}(u_1), & \text{pour un certain polynôme } R_{j_2-1} \\ P_{j_2}(u_1, \ldots, u_k) = u_2 & \\ P_{j_2+1}(u_1, \ldots, u_k) = R_{j_2+1}(u_1, u_2), & \text{pour un certain polynôme } R_{j_2+1} \\ \vdots & \end{cases}$$

Posons donc

$$\begin{cases} P'_1(X_1, \ldots, X_m) = X_1 - c_1 \\ \vdots \\ P'_{j_1-1}(X_1, \ldots, X_m) = X_{j_1-1} - c_{j_1-1} \\ P'_{j_1+1}(X_1, \ldots, X_m) = X_{j_1+1} - R_{j_1+1}(X_{j_1}) \\ P'_{j_2-1}(X_1, \ldots, X_m) = X_{j_2-1} - R_{j_2-1}(X_{j_1}) \\ P'_{j_2+1}(X_1, \ldots, X_m) = X_{j_2+1} - R_{j_2+1}(X_{j_1}, X_{j_2}) \\ \vdots \end{cases}$$

Ainsi

$$G \cdot v = \{x \in \mathbb{R}^m;\ P'_j(x) = 0, \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, m\} - \{j_1, \ldots, j_k\}\},$$

et $G \cdot v$ est donc bien une variété algébrique affine. □

Pour plus de renseignements sur les algèbres et les groupes de Lie nilpotents, on pourra lire [CoG2, Chapter 1], ou encore [Puk, Chapitre 1].

Comme nous allons le voir maintenant, l'action co-adjointe est d'une importance capitale en théorie des représentations des groupes de Lie nilpotents, toute classe d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G pouvant alors être associée à une orbite de l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

1.1.3 Dual unitaire des groupes de Lie nilpotents

Soit G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. On va construire des représentations unitaires irréductibles de G de la façon suivante. Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ fixée, et soit $\mathfrak{m}$ une polarisation pour l. On définit un caractère χ_l sur $M = \exp(\mathfrak{m})$ en posant

$$\chi_l(\exp(X)) = e^{2\pi i \langle l, X\rangle}, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{m}.$$

La représentation induite $\pi = \mathrm{Ind}_M^G \chi_l$ de ce caractère au groupe G est alors *irréductible* et, inversement, *toute* représentation unitaire irréductible de G s'obtient de cette manière. De plus, (la classe d'équivalence de) cette représentation $\pi = \mathrm{Ind}_M^G \chi_l$ ne dépend que de l'orbite $\mathcal{O}_\pi = \mathrm{Ad}^*(G)l$ dans $\mathfrak{g}^*$. En d'autres termes, si l' est un autre élément de l'orbite $\mathrm{Ad}^*(G)l$ et si $\mathfrak{m}'$ est une polarisation pour l', alors

$$\pi \cong \mathrm{Ind}_{M'}^G \chi_{l'}.$$

On pourra donc dénoter, le cas échéant, par π_l la représentation de G associée à l'orbite $\mathcal{O}_G(l) := \mathrm{Ad}^*(G)l$.

La correspondance, entre le dual unitaire $\widehat{G}$ de G et l'espace des orbites pour l'action co-adjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, a été établie en 1962 par A.A. Kirillov dans [Kir1]. Plus tard (en 1973), I.D. Brown a alors prouvé que cette correspondance est en fait un homéomorphisme, lorsqu'on munit l'espace des orbites de la topologie quotient et $\widehat{G}$ de la topologie de Fell (voir

[Bro]), ce résultat restant valable dans le cadre des groupes de Lie résolubles exponentiels connexes et simplement connexes (voir [LeL, Chapter 3, Theorem 1]).

Dans ce mémoire, nous allons principalement nous intéresser à l'étude des restrictions de représentations unitaires irréductibles de groupes de Lie nilpotents à des réseaux.

1.1.4 Réseaux et sous-groupes uniformes

Soit G un groupe localement compact.

Définition 1.1.6 *Soit Γ un sous-groupe discret de G. On dit que Γ est un* réseau *de G si l'espace quotient $\Gamma \setminus G$ possède une mesure invariante finie, et que Γ est* uniforme *dans G si $\Gamma \setminus G$ est compact.*

Il est clair que si Γ est uniforme dans G, alors Γ est un réseau de G. L'inverse, par contre, n'est pas toujours vrai.

Exemples: - $\mathbb{Z}^n$ est un sous-groupe cocompact de $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 1$.
- Le groupe de Heisenberg discret est uniforme dans le groupe de Heisenberg réel (voir §1.1.6).
- Pour $n \geq 2$, SL(n,$\mathbb{Z}$) est un réseau de SL(n,$\mathbb{R}$), mais n'est pas cocompact dans SL(n,$\mathbb{R}$) (voir [Bor, Lemme 1.11]).

1.1.5 Structures rationnelles

Structures rationnelles sur les groupes et algèbres de Lie

Définition 1.1.7 (1) *Soit V un espace vectoriel réel. On dit que V possède une* structure rationnelle *s'il existe un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V_{\mathbb{Q}}$ tel que $V \cong V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$.*
(2) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie. On dit que $\mathfrak{g}$ possède une* structure rationnelle *s'il existe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ telle que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$.*

Il est clair qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension n possède une structure rationnelle si et seulement si, $\mathfrak{g}$ possède une $\mathbb{R}$-base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ dont les constantes de structures sont rationnelles, et qu'alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\text{-span}\{X_1, \ldots, X_n\}$ définit une structure rationnelle sur $\mathfrak{g}$ vérifiant $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$. Dans ce cas, $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, et toute $\mathbb{Q}$-base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{g}$ (voir [CoG2, Lemma 5.1.1]).

Les espaces vectoriels réels admettent toujours (au moins) une structure rationnelle. Par contre, ceci n'est plus vrai dans le cas des algèbres de Lie (voir [CoG2, Example 5.1.13]).

Soit maintenant G un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède une structure rationnelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$, et soit $\mathfrak{h}$ un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. On pose $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$.

Définition 1.1.8 *On dit que $\mathfrak{h}$ est* rationnel *si $\mathfrak{h} = \mathbb{R}\text{-span}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}})$, et qu'un sous-groupe connexe fermé H de G est* rationnel *si son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est rationnelle.*

En particulier, si $\mathfrak{h}$ est un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$, il existe alors une structure rationnelle naturelle sur $\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{g}$.

Exemples: (1) Si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ sont deux sous-algèbres rationnelles de $\mathfrak{g}$ (de structure rationnelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$) telles que $\mathfrak{k}$ soit un idéal dans $\mathfrak{h}$. Alors l'algèbre de Lie

$$\mathbb{R} - \text{span}([\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]) = \mathbb{R} - \text{span}\{[X, Y];\ X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{k}\}$$

est également rationnelle (voir [CoG2, preuve de la Proposition 5.2.1]).
(2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soit $(\mathfrak{g}^{(i)})_{i \geq 1}$ sa série centrale descendante. Si $\mathfrak{g}$ possède une structure rationnelle, alors une simple application de (1) montre que tous les idéaux de la série centrale descendante sont rationnels.
(3) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soit $(\mathfrak{g}_{(j)})_{j \geq 1}$ sa série centrale ascendante. Si $\mathfrak{g}$ possède une structure rationnelle, alors les idéaux de la série centrale ascendante sont également rationnels (voir [CoG2, preuve du Théorème 5.2.3]).

Les éléments de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ (resp. $G_{\mathbb{Q}} = \exp(\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}})$) sont appelés les *éléments rationnels* (ou *points rationnels*) de $\mathfrak{g}$ (resp. G).

Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Il existe un plongement naturel de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ dans $\mathfrak{g}^*$. Si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ (et donc une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{g}$), alors $f \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$ s'étend en une fonctionnelle linéaire $\tilde{f} \in \mathfrak{g}^*$ donnée par

$$\langle \tilde{f}, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle f, X_i \rangle,$$

pour tout $a_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$). Avec ce plongement, il est clair que $l \in \mathfrak{g}^*$ est un élément de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$ si et seulement si, $\langle l, \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \rangle \subseteq \mathbb{Q}$. Maintenant, si $\{l_1, \ldots, l_n\}$ est la base duale de $\mathfrak{g}^*$ (avec $\langle l_i, X_j \rangle = \delta_{i,j}$), alors ces fonctionnelles appartiennent à $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$ et sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes. De plus, si $l \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$, alors $\langle l, X_i \rangle \in \mathbb{Q}$ et $l = \sum_{i=1}^{n} \langle l, X_i \rangle l_i$. Ainsi, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^* = \mathbb{Q} - \mathrm{span}\{l_1, \ldots, l_n\}$, et ces éléments forment donc une $\mathbb{Q}$-base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$. Ainsi, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^* \otimes \mathbb{R}$, et on peut alors considérer que $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$ est la structure rationnelle naturelle de $\mathfrak{g}^*$.

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède une structure rationnelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$, alors tout élément l de $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$ a alors son noyau et son radical rationnels. Si $\mathfrak{g}$ est en plus nilpotente, alors $l \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$ admet en outre une polarisation rationnelle (la polarisation de Vergne (voir [CoG2, Theorem 1.3.5]) fournit une telle sous-algèbre polarisante).

Pour plus de détails sur les structures rationnelles sur les espaces vectoriels ou sur les algèbres de Lie, voir par exemple [Boul, Chapitre 2, §8] ou [CoG2, Chapter 5].

Structures rationnelles et réseaux dans les groupes de Lie nilpotents

Si G est un groupe localement compact, et si Γ est un sous-groupe discret de G, nous avons vu que le fait que Γ soit uniforme dans G implique que Γ est un réseau de G; et que l'inverse, par contre, n'est pas vrai en général. Cependant, si G est un groupe de Lie nilpotent, ces deux notions sont en fait équivalentes, et Γ est un réseau de G si et seulement si Γ est uniforme dans G. En outre, Γ est alors *Zariski-dense* dans G, c'est à dire que pour toute représentation unipotente $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\varrho(\Gamma)$ et $\varrho(G)$ ont la même fermeture de Zariski dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (voir [Rag, Theorem 2.1]).

A.I. Malcev a démontré en 1949 (voir [Mal, Theorem 6]) qu'un groupe Γ est isomorphe à un réseau d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe si et seulement si Γ est nilpotent, de type fini et sans torsion.

Soit dorénavant G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'existence de réseaux dans G est intimement liée à l'existence d'une structure rationnelle sur G, car si G admet un réseau Γ, alors $\mathfrak{g}$ (et G) possède une structure rationnelle donnée par $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\text{-span}(\log(\Gamma))$; et inversement, si $\mathfrak{g}$ possède une structure rationnelle provenant d'une $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathfrak{g}$, alors G possède un réseau Γ tel que $\log(\Gamma) \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ (voir [CoG2, Theorem 5.1.8]).

Exemple: Toute algèbre de Lie nilpotente réelle $\mathfrak{g}$ de dimension inférieure ou égale à 6 possède une structure rationelle (voir par exemple [GoY, Chapter 8, II.4, Proposition 1]). Ainsi, si G est un groupe de Lie nilpotent de dimension ≤ 6, alors G admet un réseau Γ.

Soit Γ un réseau de G. Si on munit G de la structure rationnelle induite par Γ, un sous-groupe de Lie H de G sera rationnel si et seulement si $H \cap \Gamma$ est uniforme dans H (voir[CoG2, Theorem 5.1.11]).

Si Γ_1 et Γ_2 sont deux réseaux de G, alors Γ_1 et Γ_2 vont induire la même structure rationnelle sur G si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont *commensurables*, c'est à dire si et seulement si $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est d'indice fini dans Γ_1 et dans Γ_2 (voir [CoG2, Theorem 5.1.12]).

Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de Malcev (forte ou faible) de $\mathfrak{g}$. On dit que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est *fortement basée* sur un sous-groupe discret Γ de G si

$$\Gamma = \left\{ \exp(m_1 X_1) \cdots \exp(m_n X_n);\ m_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Un sous-groupe discret Γ de G sera alors un réseau de G si et seulement s'il existe une base de Malcev (forte ou faible) de $\mathfrak{g}$ fortement basée sur Γ (voir [CoG2, Theorem 5.1.6]).
Si $H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_k \subseteq G$ sont des sous-groupes (resp. des sous-groupes normaux) de Lie rationnels de G, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{h}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{h}_k \subseteq \mathfrak{g}$, alors il existe une base de Malcev faible (resp. forte) de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_k$.

Enfin, si G possède une structure rationnelle, il existe des réseaux Γ de G possèdant la propriété (supplémentaire)

$$\log(\Gamma) \text{ est un sous-groupe additif de } \mathfrak{g}.$$

De tels réseaux seront alors appelés *additifs.* Comme le montre le théorème suivant, il existe bon nombre de tels réseaux.

Théorème 1.1.4 ([CoG2, Theorem 5.4.2]) *Soit Γ un réseau dans un groupe de Lie nilpotent G. Alors,*

(a) Γ contient un réseau additif Γ_0 d'indice fini dans Γ.

(b) Il existe un réseau additif Γ_1 de G contenant Γ tel que Γ soit d'indice fini dans Γ_1.

Nous verrons au paragraphe 1.2 qu' il est possible de décrire explicitement et simplement le spectre de nilvariétés compactes $\Gamma \setminus G$, si Γ est un réseau additif de G.

Pour plus de détails sur les structures rationnelles et sur les réseaux des groupes de Lie nilpotents, on pourra par exemple se reporter à [CoG2, Chapter 5] ou [Rag, Chapter 2].

1.1.6 Premier exemple: le groupe de Heisenberg

Soit $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ l'algèbre de Heisenberg, munie du crochet $[X_3, X_2] = X_1$ (voir par exemple [Nie]), et soit $G = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant, muni du produit

$$(x_1, x_2, x_3).(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1 + x_3y_2, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

pour tous $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tous $a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\exp(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) = (a_1 + \frac{1}{2}a_2a_3, a_2, a_3)$$
$$\log(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - \frac{1}{2}x_2x_3)X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$$
$$\mathrm{Ad}(x_1, x_2, x_3)(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) = (a_1 + x_3a_2 - x_2a_3)X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

Si $\{X_1^*, X_2^*, X_3^*\}$ est la base duale de $\mathfrak{g}^*$ associée à $\{X_1, X_2, X_3\}$, on a alors également, pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ad}^*(x_1, x_2, x_3)(\alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^*) = \alpha_1 X_1^* + (\alpha_2 - x_3\alpha_1)X_2^* + (\alpha_3 + x_2\alpha_1)X_3^*$$

Ainsi, si $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* \in \mathfrak{g}^*$, son orbite (pour l'action co-adjointe) est égale à

$$\mathcal{O}_G(l) = \begin{cases} \alpha_1 X_1^* + \mathbb{R}X_2^* + \mathbb{R}X_3^*, & \text{si } \alpha_1 \neq 0 \\ \{\alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^*\}, & \text{si } \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

la représentation unitaire irréductible π_l de G associée pouvant alors se réaliser comme suit:

$$\begin{cases} \pi_l(x_1, x_2, x_3)(f)(t) = e^{2\pi i\alpha(x_1 - x_2 t)} f(t - x_3), \text{ pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}), & \text{si } \alpha_1 \neq 0 \\ \pi_l(x_1, x_2, x_3) = e^{2\pi i(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)}, & \text{si } \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in G$.

Considérons maintenant les trois réseaux Γ, Γ_1 et Γ_2 de G définis par

$$\begin{aligned} \Gamma &= (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \{(p_1, p_2, p_3);\ p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Gamma_1 &= (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}) = \{(p_1, p_2, 2p_3);\ p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}\}, \\ \Gamma_2 &= (a_1\mathbb{Z}, a_2\mathbb{Z}, a_3\mathbb{Z}) = \{(a_1p_1, a_2p_2, a_3p_3);\ p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

avec $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tels que le système $\{a_1, a_2, a_3\}$ soit $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant et $a_1 = a_2 a_3$ (par exemple $a_1 = \sqrt{6}$, $a_2 = \sqrt{3}$ et $a_3 = \sqrt{2}$). Alors:

- Γ_1 est un réseau additif de G,
- Γ et Γ_1 sont commensurables, alors que Γ (ou Γ_1) et Γ_2 ne le sont pas.

De ce fait, Γ (ou Γ_1) et Γ_2 induisent donc deux structures rationnelles distinctes sur $\mathfrak{g}$, égales à $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\text{-span}\{X_1, X_2, X_3\}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^2 = \mathbb{Q}\text{-span}\{a_1X_1, a_2X_2, a_3X_3\}$ respectivement. En particulier, il existe alors des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ rationnelles pour la première structure, qui ne le sont pas pour la seconde (par exemple, $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(X_1 + X_2)$).

Remarque: Le réseau Γ de G est communément appelé *groupe de Heisenberg discret.*

1.2 Spectre des nilvariétés compactes

1.2.1 L'algèbre $L^1(G)$

Soit G un groupe localement compact, et soit dg une mesure de Haar sur G. Soit $C_c(G)$ l'espace des fonctions continues sur G à support compact, et soit $L^1(G)$ l'espace des fonctions définies sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$, intégrables par rapport à la mesure dg. Pour $\varphi, \psi \in L^1(G)$, on définit la convolution $\varphi \star \psi$ des fonctions φ et ψ par

$$(\varphi \star \psi)(h) = \int_G \varphi(g)\psi(g^{-1} \cdot h)\, dg,$$

pour tout $h \in G$. Ainsi, $\varphi \star \psi \in L^1(G)$, et $L^1(G)$, muni du produit de convolution, est une algèbre de Banach.

Soit maintenant $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire de G. On pose, pour tout $\varphi \in C_c(G)$ et tout $\xi \in \mathcal{H}_\pi$,

$$\tilde{\pi}(\varphi)\xi = \int_G \varphi(g)\pi(g)\xi\, dg.$$

Cette intégrale est bien définie. Puisque $\|\tilde{\pi}(\varphi)\|_1 \leq \|\varphi\|_1 \cdot \|\xi\|$, cette définition peut être étendue à tout élément de $L^1(G)$, et $(\tilde{\pi}, \mathcal{H}_\pi)$ est alors une représentation de $L^1(G)$.

1.2.2 Théorème de Moore

Soit G un groupe de Lie nilpotent réel, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau *additif* de G. Dans ce paragraphe, nous allons donner une preuve du théorème de C.C. Moore (voir [Moo, Theorem 1]) permettant de caractériser le spectre de la représentation quasi-régulière (droite) $\lambda = \mathrm{Ind}_\Gamma^G 1_\Gamma$ de G dans $L^2(\Gamma \setminus G)$. Pour ce faire, nous allons reproduire la preuve (de type Selberg) donnée par L. Corwin et F.P. Greenleaf dans [CoG1].

Soit $\psi \in C_c(G)$. Si F est un domaine fondamental relativement à Γ tel que $\overline{F}$ est compact et ∂F est de mesure nulle, alors l'opérateur intégral $\tilde{\lambda}(\psi)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, de noyau défini sur $\overline{F} \times \overline{F}$ par

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(g_1^{-1} \cdot \gamma \cdot g_2),$$

cette somme ne portant que sur un nombre fini de termes (pour plus de détails, voir par exemple [Gel, Chapter 1, §2.2]). Soit maintenant $\varphi = \psi^* \star \psi$, où $\psi^*(g) = \overline{\psi(g^{-1})}$, pour tout $g \in G$. L'opérateur $\tilde{\lambda}(\varphi)$ possède alors une trace (indépendante de la normalisation de dg) donnée par

$$\mathrm{Trace}(\tilde{\lambda}(\varphi)) = \int_F \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g)\, dg.$$

Posons $\Lambda = \log(\Gamma)$ et $\Lambda^\perp = \{f \in \mathfrak{g}^*;\ \langle f, \Lambda \rangle \subseteq \mathbb{Z}\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(\tilde{\lambda}(\varphi)) &= \int_F \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(g^{-1} \cdot \gamma \cdot g)\, dg \\
&= \int_F \sum_{X \in \Lambda} \varphi(\mathrm{Ad}(g^{-1})X)\, dg \qquad \text{(on identifie } \varphi \text{ et } \varphi \circ \exp) \\
&= \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \int_F \sum_{f \in \Lambda^\perp} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f)\, dg
\end{aligned}$$

où $|\Gamma \setminus G|$ désigne le volume de F. [En effet, si on pose

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathfrak{g}} \varphi(X) e^{2\pi i \langle \xi, X \rangle}\, dX$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$, où dX est la mesure (euclidienne) image de dg par log sur $\mathfrak{g}$, alors, d'après la formule sommatoire de Poisson, on obtient

$$\sum_{X \in \Lambda} \varphi(\mathrm{Ad}(g^{-1})X) = \frac{1}{|\Lambda \setminus \mathfrak{g}|} \sum_{f \in \Lambda^\perp} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f).$$

Γ étant en outre un réseau additif de G, il existe donc un domaine fondamental additif Σ (dans $\mathfrak{g}$) relativement à Λ tel que $F = \exp(\Sigma)$ soit un domaine fondamental multiplicatif (dans G) relativement à Γ (voir [CoG1, Lemma 3.11]). D'où

$$|\Lambda \setminus \mathfrak{g}| = \int_\Sigma dX = \int_{\exp(\Sigma)} dg = \int_F dg = |\Gamma \setminus G|.]$$

Soit maintenant $f \in \mathfrak{g}^*$. Son stabilisateur $R_f = \{g \in G;\ \mathrm{Ad}^*(g)f = f\}$ est connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_f = \{X \in \mathfrak{g};\ \langle f, [X, \mathfrak{g}] \rangle = 0\}$. Posons $\Gamma_f = R_f \cap \Gamma$. L'ensemble $\Lambda^\perp$ étant

$\mathrm{Ad}^*(\Gamma)$-invariant, soit S un ensemble de représentants des $\mathrm{Ad}^*(\Gamma)$-orbites dans $\Lambda^\perp$; et pour tout $f \in S$, soit $\Delta(f)$ un ensemble de représentants de $\Gamma_f \setminus \Gamma$. On a alors

$$\Lambda^\perp = \bigsqcup_{f \in S} \bigsqcup_{\gamma \in \Delta(f)} \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})f$$

et, puisque $\Delta(f) \cdot F$ est un domaine fondamental relativement à Γ_f (dans G), on obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(\tilde{\lambda}(\varphi)) &= \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \int_F \sum_{f \in \Lambda^\perp} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f)\, dg \\
&= \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \sum_{f \in S} \int_F \sum_{\gamma \in \Delta(f)} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})\mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})f)\, dg \\
&= \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \sum_{f \in S} \int_F \sum_{\gamma \in \Delta(f)} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*((\gamma \cdot g)^{-1})f)\, dg \\
&= \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \sum_{f \in S} \int_{\Delta(f) \cdot F} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f)\, dg \\
&= \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \sum_{f \in S} \int_{\Gamma_f \setminus G} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f)\, d\dot{g}
\end{aligned}$$

où $d\dot{g}$ est la mesure sur $\Gamma_f \setminus G$ vérifiant

$$\int_G \psi(g)\, dg = \int_{\Gamma_f \setminus G} (\sum_{\gamma \in \Gamma_f} \psi(\gamma \cdot g))\, d\dot{g}, \text{ pour toute fonction } \psi \in C_c(G).$$

Via l'application $R_f \cdot g \mapsto \mathrm{Ad}^*(g^{-1})f$, on peut naturellement identifier $R_f \setminus G$ avec l'orbite $\mathcal{O}_G(f) = \mathrm{Ad}^*(G)f$, ainsi que la mesure canonique μ_f sur $\mathcal{O}_G(f)$ avec la mesure sur $R_f \setminus G$. Soit donc $d\nu$ une mesure de Haar sur R_f, et soit $d\eta$ la mesure induite correspondante sur $R_f \setminus G$. Puisque $\widetilde{\varphi}(\mathrm{Ad}^*((xg)^{-1})f) = \widetilde{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f)$, pour tout $x \in R_f$ et tout $g \in G$, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Trace}(\tilde{\lambda}(\varphi)) &= \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \sum_{f \in S} \int_{\Gamma_f \setminus G} \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f)\, d\dot{g} \\
&= \sum_{f \in S} \frac{1}{|\Gamma \setminus G|} \int_{R_f \setminus G} |\Gamma_f \setminus R_f|\, \widehat{\varphi}(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})f)\, d\eta(R_f \cdot g) \\
&= \sum_{f \in \Lambda^\perp / Ad^*(\Gamma)} \frac{|\Gamma_f \setminus R_f|}{|\Gamma \setminus G|} \frac{d\eta}{d\mu_f} \int_{\mathfrak{g}^*} \widehat{\varphi}(\xi)\, d\mu_f(\xi) \\
&= \sum_{f \in \Lambda^\perp / Ad^*(\Gamma)} \frac{|\Gamma_f \setminus R_f|}{|\Gamma \setminus G|} \frac{d\eta}{d\mu_f} \mathrm{Trace}(\widetilde{\pi}_f(\varphi))
\end{aligned}$$

où π_f est la représentation unitaire irréductible de G associée à l'orbite $\mathcal{O}_G(f)$ (voir [CoG2, Theorem 4.2.4]). Mais, d'un autre côté, puisque $\Gamma \setminus G$ est compact, la représentation λ se décompose en une somme discrète de représentations unitaires irréductibles de G, chacune étant de multiplicité finie dans λ (voir [Gel, §2.3, Theorem]). Ainsi, si on pose

$$\lambda = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Sp}(\lambda)} m(\pi, \lambda)\, \pi,$$

où $m(\pi, \lambda)$ dénote la multiplicité de la représentation π dans λ, on obtient alors également

$$\mathrm{Trace}(\widetilde{\lambda}(\varphi)) = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Sp}(\lambda)} m(\pi, \lambda) \mathrm{Trace}(\widetilde{\pi}(\varphi)).$$

Ainsi, en comparant les deux expressions de $\mathrm{Trace}(\widetilde{\lambda}(\varphi))$, on remarque que, pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $m(\pi_\xi, \lambda) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{O}_G(\xi) \cap \Lambda^\perp \neq \emptyset$, et alors

$$m(\pi_\xi, \lambda) = \sum_{f \in \mathcal{O}_G(\xi) \cap \Lambda^\perp / \mathrm{Ad}^*(\Gamma)} \frac{|\Gamma_f \setminus R_f|}{|\Gamma \setminus G|} \frac{d\eta}{d\mu_f}$$

Ainsi, on a donc montré que:

Théorème 1.2.1 **([Moo, Theorem 1])** *Soit G un groupe de Lie nilpotent, et soit Γ un réseau* additif *de G. Alors la représentation $\pi \in \widehat{G}$ est une sous-représentation de la représentation quasi-régulière (droite) λ de G dans $L^2(\Gamma \setminus G)$ si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_\pi$ rencontre* $(\log(\Gamma))^\perp$.

Maintenant, si Γ est un réseau quelconque de G, ce résultat n'est en général plus valable. Néanmoins, il existe quand même une condition nécessaire pour qu'un élément du dual unitaire de G soit dans le spectre de la nilvariété compacte $\Gamma \setminus G$.

Proposition 1.2.1 **([Moo, Corollary 2])** *Si Γ est un réseau de G, et si $\pi \in \widehat{G}$ est telle que $m(\pi, \lambda) \neq 0$, alors son orbite $\mathcal{O}_\pi$ contient un élément rationnel de $\mathfrak{g}^*$.*

Pour notre propos, nous ne nous intéressons qu'au spectre de la représentation quasi-régulière (droite) de G sur $L^2(\Gamma \setminus G)$. Aussi, pour une détermination plus précise des multiplicités $m(\pi, \lambda)$ des représentations $\pi \in \mathrm{Sp}(\lambda)$, nous renvoyons au travaux de R. Howe (voir [How]), de L.F. Richardson (voir [Ric]) ou à l'article de L. Corwin et F.P. Greenleaf (voir [CoG1]).

Exemple 1: Revenons à l'exemple du groupe de Heisenberg G. Le réseau Γ_1 étant additif, une simple application du théorème de C.C. Moore nous permet de voir que le spectre de la nilvariété $\Gamma_1 \setminus G$ est composé des représentations unitaires irréductibles de G associées aux orbites

$$\alpha_1 X_1^* + \mathbb{R}X_2^* + \mathbb{R}X_3^* \qquad \text{et} \qquad \left\{\alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^*\right\}$$

pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_3 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

Maintenant que nous avons rappelé les définitions et les propriétés générales des groupes (et algèbres) de Lie nilpotents, de leurs réseaux et de leurs représentations, nous pouvons entrer dans le vif du sujet et énoncer un critère d'irréductibilité pour les restrictions de représentations $\pi \in \widehat{G}$ d'un groupe de Lie nilpotent G à un réseau Γ.

1.3 Critère d'irréductibilité

Soit donc G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau de G. On dénote par $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$, et on munit $\mathfrak{g}$, G et $\mathfrak{g}^*$ des structures rationnelles induites par Γ.

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux orbites co-adjointes de $\mathfrak{g}^*$, et soient $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ telles que $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_G(f_1)$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_G(f_2)$. D'après le Théorème de Chevalley-Rosenlicht, il existe $k, m \geq 0$, $X_1, \dots, X_k$, $Y_1, \dots Y_m \in \mathfrak{g}$ tels que les applications

$$\Psi_{f_1} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{O}_1, \qquad (x_1, \dots, x_k) \longmapsto \mathrm{Ad}^*(\exp(x_1X_1)\cdots\exp(x_kX_k))f_1$$

et

$$\Psi_{f_2} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{O}_2, \qquad (y_1, \dots, y_m) \longmapsto \mathrm{Ad}^*(\exp(y_1Y_1)\cdots\exp(y_mY_m))f_2$$

soient des difféomorphismes. Soit alors

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{f_1,f_2} : & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ & (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) & \longmapsto & \mathrm{Ad}^*(\exp(x_1X_1)\cdots\exp(x_kX_k))f_1 \\ & & & +\mathrm{Ad}^*(\exp(y_1Y_1)\cdots\exp(y_mY_m))f_2. \end{array}$$

Ψ_{f_1,f_2} est une application polynomiale de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathfrak{g}^*$, d'image égale à $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$. Soit ν_1 (resp. ν_2) l'image de la mesure de Lebesgue λ_k (resp. λ_m) sur $\mathbb{R}^k$ (resp. $\mathbb{R}^m$) par l'application Ψ_{f_1} (resp. Ψ_{f_2}). Alors ν_1 et ν_2 sont deux mesures G-invariantes sur $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ respectivement. Soient maintenant d_1 et d_2 deux fonctions strictement positives sur $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ respectivement telles que $\int_{\mathcal{O}_1} d_1\, d\nu_1 = \int_{\mathcal{O}_2} d_2\, d\nu_2 = 1$. Alors $\mu_1 = d_1 \cdot \nu_1$ et $\mu_2 = d_2 \cdot \nu_2$ sont deux mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, équivalentes à ν_1 et ν_2 respectivement. Etendons trivialement ces mesures à $\mathfrak{g}^*$. Leur produit de convolution $\mu_1 \star \mu_2$ est équivalent à la mesure μ définie sur $\mathfrak{g}^*$ par

$$\mu(B) = (d_1 \cdot d_2)(\lambda_k \otimes \lambda_m)(\Psi_{f_1,f_2}^{-1}(B)),$$

pour toute partie borélienne B de $\mathfrak{g}^*$.

Lemme 1.3.1 *Soient $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ et μ_1, μ_2 définies comme ci-dessus. Si $\mathcal{O}$ est une orbite co-adjointe dans $\mathfrak{g}^*$ telle que $(\mu_1 \star \mu_2)(\mathcal{O}) \neq 0$, alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$.*

Preuve: $\mathcal{O}$ étant une variété algébrique affine, il existe des applications polynomiales $P_1, \ldots, P_j \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ telles que

$$\mathcal{O} = \{z \in \mathfrak{g}^*;\ P_1(z) = \cdots = P_j(z) = 0\}.$$

Si l'on pose $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, alors

$$\begin{aligned}
\Psi_{f_1,f_2}^{-1}(\mathcal{O}) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m;\ \Psi_{f_1,f_2}(x,y) \in \mathcal{O}\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m;\ P_1(\Psi_{f_1,f_2}(x,y)) = 0\} \cap \ldots \\
&\qquad \ldots \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m;\ P_j(\Psi_{f_1,f_2}(x,y)) = 0\}
\end{aligned}$$

Maintenant, s'il existe $i \in \{1, \ldots, j\}$ tel que le polynôme P_i ne soit pas identiquement nul sur l'image de Ψ_{f_1,f_2}, alors l'application polynomiale $P_i \circ \Psi_{f_1,f_2}$ est à son tour non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, et l'ensemble de ses zéros

$$\mathcal{Z}(P_i \circ \Psi_{f_1,f_2}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m;\ P_i(\Psi_{f_1,f_2}(x,y)) = 0\}$$

est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue) dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ (pour une preuve de ce fait bien connu, voir [ArL, Lemma 2.3]). Mais alors, puisque $\Psi_{f_1,f_2}^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{Z}(P_i \circ \Psi_{f_1,f_2})$, il en est de même pour $\Psi^{-1}_{f_1,f_2}(\mathcal{O})$. D'où $\mu(\mathcal{O}) = 0$, et $\mathcal{O}$ est de mesure nulle pour la mesure $\mu_1 \star \mu_2$, ce qui contredit notre hypothèse sur $\mathcal{O}$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$, le polynôme P_i est identiquement nul sur l'image de Ψ_{f_1,f_2}, et $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$ est par conséquent contenu dans $\mathcal{O}$. $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$ étant G-invariant, l'inclusion réciproque est alors trivialement vérifiée. □

Comme le montre l'exemple suivant, la somme de deux orbites co-adjointes *peut* être encore une orbite co-adjointe lorsque, *entre autres*, l'une de ces orbites est plate.

Exemple : Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Heisenberg. Conservons les notations du §1.1.6, et posons $l_1 = \alpha X_1^*$ et $l_2 = \beta X_1^* \in \mathfrak{g}^*$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{O}_G(l_1) = \alpha X_1^* + \mathbb{R}X_2^* + \mathbb{R}X_3^*$, $\mathcal{O}_G(l_2) = \beta X_1^* + \mathbb{R}X_2^* + \mathbb{R}X_3^*$, et

$$\mathcal{O}_G(l_1) + \mathcal{O}_G(l_2) = (\alpha + \beta)X_1^* + \mathbb{R}X_2^* + \mathbb{R}X_3^*$$

est encore une orbite pour l'action co-adjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

Lemme 1.3.2 *Soient $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ trois orbites co-adjointes dans $\mathfrak{g}^*$ telles que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$. Alors, pour tout $f = f_1 + f_2 \in \mathcal{O}$ (avec $f_1 \in \mathcal{O}_1$ et $f_2 \in \mathcal{O}_2$), on a $\mathfrak{r}_f \subseteq \mathfrak{r}_{f_1} \cap \mathfrak{r}_{f_2}$.*

Preuve: Puisque $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}$ est donc une sous-variété fermée de $\mathfrak{g}^*$. Soit $f \in \mathcal{O}$, $f_1 \in \mathcal{O}_1$ et $f_2 \in \mathcal{O}_2$ telles que $f = f_1 + f_2$. L'application

$$\psi : G \times G \longrightarrow \mathfrak{g}^* \qquad (g, h) \longmapsto \mathrm{Ad}^*(g)f_1 + \mathrm{Ad}^*(h)f_2$$

est différentiable, de différentielle en (e, e) égale à

$$d_{(e,e)}\psi : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \to T_{f_1+f_2}(\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2), \qquad (X, Y) \mapsto \mathrm{ad}^*(X)f_1 + \mathrm{ad}^*(Y)f_2$$

Ainsi,

$$\{\mathrm{ad}^*(X)f + \mathrm{ad}^*(Y)l;\ X, Y \in \mathfrak{g}\} \subseteq T_{f_1+f_2}(\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2) = T_f(\mathcal{O})$$

c'est à dire,

$$\{\mathrm{ad}^*(X)f_1 + \mathrm{ad}^*(Y)f_2;\ X, Y \in \mathfrak{g}\} \subseteq \{\mathrm{ad}^*(Z)f;\ Z \in \mathfrak{g}\}.$$

D'où, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, il existe $Z_X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}^*(X)f_1 = \mathrm{ad}^*(Z_X)f$. Pour tout $U \in \mathfrak{g}$, on a alors $\langle f_1, [U, X]\rangle = \langle f, [U, Z_X]\rangle$, et $\mathfrak{r}_f$ est par conséquent inclus dans $\mathfrak{r}_{f_1}$. De la même manière, on montre que l'on a également $\mathfrak{r}_f \subseteq \mathfrak{r}_{f_2}$, ce qui termine la preuve de ce lemme. □

Lemme 1.3.3 *Soit $l \in \mathfrak{g}^*$. On suppose qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Ad}^*(g)l - l$ est identiquement nulle sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Posons $X = \log(g)$. Alors, $\mathrm{ad}^*(X)l = 0$ sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, et donc $\mathrm{Ad}^*(g)l - l = \mathrm{ad}^*(X)l$.*

Preuve: Soit l_1 la restriction de l à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Si on étend trivialement l_1 à $\mathfrak{g}$ (après avoir effectué le choix d'un supplémentaire de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ dans $\mathfrak{g}$), on obtient $\mathrm{Ad}^*(g)l_1 = l_1$. Considérons maintenant l'application

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \qquad t \longmapsto \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))l_1 - l_1.$$

Ainsi, F est une application polynomiale telle que $F(n) = 0$, pour tout entier $n \geq 1$. L'application F est donc identiquement nulle, et

$$\mathrm{ad}^*(X)l_1 = \lim_{t\to 0}[\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))l_1 - l_1] = 0.$$

D'où $\mathrm{ad}^*(X)l = 0$ sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, et du même coup, $\mathrm{Ad}^*(g)l - l = \mathrm{ad}^*(X)l$. □

Nous rappelons maintenant un critère d'irréductibilité (et d'équivalence), dû à M. Cowling et T. Steger (voir [CoS, corollaires 1.2 et 1.3]), pour des restrictions de représentations unitaires irréductibles à des réseaux.

Proposition 1.3.1 ([CoS]) *Soit G un groupe localement compact, et soit Γ un réseau de G. On dénote par λ la représentation quasi-régulière de G sur $L^2(\Gamma \setminus G)$, et par λ_0 sa restriction au complément orthogonal à $\mathbb{C}\,1$ dans $L^2(\Gamma \setminus G)$. Soient $\pi, \varrho \in \widehat{G}$.*

(1) *Si π n'est pas contenue dans $\lambda_0 \otimes \pi$, alors $\pi\big|_\Gamma$ est irréductible.*

(2) *Si π n'est pas contenue dans $\varrho \otimes \lambda$, alors $\pi\big|_\Gamma$ et $\varrho\big|_\Gamma$ ne sont pas équivalentes.*

Preuve: Soient $\mathcal{H}_\pi$ et $\mathcal{H}_\varrho$ les espaces des représentations π et ϱ respectivement. On réalise le produit tensoriel de la représentation $\pi \otimes \lambda$ dans $L^2(\Gamma \setminus G, \mathcal{H}_\pi)$ de la manière suivante:

$$(\pi \otimes \lambda)(g)f(\Gamma h) = \pi(g)f(\Gamma hg), \text{ pour tous } g \in G,\ \Gamma h \in \Gamma \setminus G \text{ et tout } f \in L^2(\Gamma \setminus G, \mathcal{H}_\pi).$$

Soit alors $\Phi : \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\varrho) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}_\pi, L^2(\Gamma \setminus G, \mathcal{H}_\varrho))$ l'application définie par

$$\Phi(T)\xi(\Gamma g) = \varrho(g^{-1})T\pi(g)\xi, \text{ pour tout } \Gamma g \in \Gamma \setminus G \text{ et tout } \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

Il est facile de voir que Φ est injective. Remarquons que $\varrho \otimes \lambda = \varrho \oplus \varrho \otimes \lambda_0$. Ainsi, si π n'est pas une sous-représentation de $\pi \otimes \lambda_0$, alors

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}_\pi, L^2(\Gamma \setminus G, \mathcal{H}_\pi))) = 1,$$

$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathcal{H}_\pi, \mathcal{H}_\varrho) = \mathbb{C}\ I$, et la restriction de π à Γ est irréductible. Maintenant, si π n'est pas une sous-représentation de $\varrho \otimes \lambda$, alors

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}_\pi, L^2(\Gamma \setminus G, \mathcal{H}_\varrho))) = 0,$$

et les représentations $\pi\big|_\Gamma$ et $\varrho\big|_\Gamma$ ne sont pas équivalentes. Ceci qui achève la preuve de cette proposition. □

Introduisons maintenant une définition.

Définition 1.3.1 *Soit G un groupe de Lie nilpotent, et soit Γ un réseau de G. On munit $\mathfrak{g}$ (et G) de la structure rationnelle induite par Γ.*

(1) *Une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est dite* totalement irrationnelle *(par rapport à la structure induite par Γ) si $\mathfrak{h}$ n'est contenue dans aucune sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$.*

(2) *Un groupe de Lie H est dit* totalement irrationnel *si son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est totalement irrationnelle.*

Nous nous trouvons ainsi en mesure d'énoncer le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 1.3.1 *Soit G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau de G. Soit $l \in \mathfrak{g}^*$. Alors la restriction $\pi_l\big|_\Gamma$ de π_l à Γ est irréductible si et seulement si le radical $\mathfrak{r}_l$ de l est totalement irrationnel pour la structure rationnelle induite par Γ.*

Remarque: Si l est un élément de $\mathfrak{g}^*$, dire que son radical $\mathfrak{r}_l$ n'est contenu dans aucun idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$ est équivalent à dire qu'aucun des conjugués $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{r}_l = \mathfrak{r}_{\mathrm{Ad}^*(g^{-1})l}$ (pour $g \in G$) n'est contenu dans un idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$. Ainsi, le critère énoncé ci-dessus est un critère sur l'orbite de l dans $\mathfrak{g}^*$, et non sur un quelconque de ses éléments, ainsi que l'on pouvait s'y attendre.

Preuve du Théorème 1.3.1: Supposons donc que $l \in \mathfrak{g}^*$ est telle que son radical $\mathfrak{r}_l$ n'est contenu dans aucun idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$, et montrons que la restriction à Γ de la représentation π_l est irréductible. Pour se faire, nous allons utiliser le critère d'irréductibilié de M. Cowling et T. Steger cité précédemment. Supposons donc que la représentation π soit contenue dans $\lambda_0 \otimes \pi$. La représentation quasi-régulière λ de G sur $l^2(\Gamma \setminus G)$ se décomposant en somme directe de représentations unitaires irréductibles π dont l'orbite $\mathcal{O}_\pi$ intersecte $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{Q}}$ (voir Proposition 1.2.1), il existe donc $f \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$ (que l'on peut bien sûr supposer être un élément de $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{Q}}$) telle que $\pi_l \subseteq \pi_f \otimes \pi_l$. D'après [Kirl, Theorem 6.1] ou [Fel, 1.4, Corollaire], ceci est possible (si et) seulement si la mesure de l'orbite $\mathcal{O}_G(l)$ est non-nulle dans $\mathcal{O}_G(f) + \mathcal{O}_G(l)$. Ainsi, d'après le lemme 1.3.1, $\mathcal{O}_G(l) = \mathcal{O}_G(f) + \mathcal{O}_G(l)$. Soit $g \in G$ tel que $\mathrm{Ad}^*(g)l = f + l$. On a alors $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{r}_l \subseteq \mathfrak{r}_f$, par le lemme 1.3.2. Mais puisque $f \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{Q}}$, son radical $\mathfrak{r}_f$ est une sous-algèbre rationnelle de $\mathfrak{g}$, et donc, par hypothèse sur l, $\mathfrak{r}_f = \mathfrak{g}$. Ainsi,

$$\langle f, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\rangle = \langle \mathrm{Ad}^*(g)l - l, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\rangle = 0,$$

et, par le lemme 1.3.3, $f = \mathrm{ad}^*(X)l$ (où $X = \log(g)$). On en déduit alors que le radical $\mathfrak{r}_l$ est contenu dans le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f, qui est un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)= \mathfrak{g}$, ce qui contredit alors l'hypothèse faite au départ sur la fonctionelle linéaire f. Ainsi, la représentation π n'est pas contenue dans $\lambda_0 \otimes \pi$, et la restriction de π au réseau Γ est donc irréductible. Pour la preuve de la réciproque, voir Corollaire 3.2.1 . □

Soit $p : G \longrightarrow [G,G]\setminus G$ et $\tilde{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\setminus \mathfrak{g}$ les projections canoniques. Puisque le sous-groupe $[G,G]$ est rationnel, $p(\Gamma)$ est un sous-groupe cocompact de $p(G)$ (voir [CoG2, Lemma 5.1.4]) et induit donc une structure rationnelle sur $\tilde{p}(\mathfrak{g})$ et sur $p(G)$.

Lemme 1.3.4 *Soient p et $\tilde{p}$ définies comme ci-dessus, et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{h}$ est contenue dans une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$ si et seulement si $\tilde{p}(\mathfrak{h})$ est contenue dans un espace vectoriel propre de $\tilde{p}(\mathfrak{g})$ (pour la structure rationnelle induite par $p(\Gamma)$).*

Preuve: Supposons que $\mathfrak{h}$ soit contenue dans une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$. Il existe alors un idéal rationnel $\mathfrak{g}_0$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Il est clair qu'en outre, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_0$. Puisque il existe une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ et passant par $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{g}_0$, $\tilde{p}(\mathfrak{g}_0)$ est un sous-espace vectoriel rationnel propre de $\tilde{p}(\mathfrak{g})$, contenant $\tilde{p}(\mathfrak{h})$. L'inverse est clair. □

Comme l'a aimablement fait remarquer Pierre de la Harpe, nous avons alors:

Corollaire 1.3.1 *On conserve les notations du lemme 1.3.4. Alors $\mathfrak{h}$ est rationnelle dans $\mathfrak{g}$ si et seulement si $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \setminus \mathfrak{h}$ est rationnelle dans l'algèbre abélienne $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \setminus \mathfrak{g}$.*

Lemme 1.3.5 *Soit $n \geq 1$ et soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^n$, qui qoit également une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}^n$. Alors V n'est contenu dans aucun sous-espace vectoriel rationnel propre de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe (en fait, pour presque-tout) $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i \in V$ tel que le système $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.*

Preuve: Supposons que V ne soit pas contenu dans un sous-espace vectoriel rationnel propre de $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in (\mathbb{Q}^n)^* - \{0\}$, posons $V_f = V \cap \operatorname{Ker}(f)$. Par hypothèse sur V, on a $V_f \subsetneq V$. Ainsi, le sous-espace vectoriel V_f est de mesure zéro dans V, et il en est alors de même pour $\Omega = \bigcup_{f\in(\mathbb{Q}^n)^*-\{0\}} V_f$, qui est réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. Ainsi, l'ensemble

$$V - \Omega = \{X = \sum_{i=1}^n x_i X_i;\ \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ est } \mathbb{Q}\text{-linéairement indépendant}\}$$

est non-vide. La réciproque est claire. □

Proposition 1.3.2 *Soit $\tilde{p} : \mathfrak{g} \to [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \setminus \mathfrak{g}$ la projection canonique, soit $\{X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ et passant par $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ($\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = m$), et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathfrak{h}$ n'est contenue dans aucun idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$.*

(ii) *$\tilde{p}(\mathfrak{h})$ n'est contenu dans aucun sous-espace vectoriel rationnel propre de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \setminus \mathfrak{g}$.*

(iii) *Il existe $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i \in \mathfrak{h}$ tel que $\{x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.*

Preuve: La preuve de cette proposition découle des lemmes 1.3.4 et 1.3.5. □

Au chapitre suivant, nous verrons que les conditions de la proposition 1.3.2 sont équivalentes à l'ergodicité de l'action (par translations à droite) de $H = \exp(\mathfrak{h})$ sur la nilvariété $\Gamma \setminus G$.

Cette proposition nous permet donc maintenant de déterminer facilement si la restriction d'une représentation au réseau Γ est irréductible ou non.

Corollaire 1.3.2 *Soit $\tilde{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\setminus\mathfrak{g}$ la projection canonique, et soit $\{X_1, \dots, X_m, \dots X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ et passant par $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (de dimension m). Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, la représentation $\pi_l|_\Gamma$ est irréductible si et seulement si il existe $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i \in \mathfrak{r}_l$ tel que le système $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.*

Exemple 2: Soit $\mathfrak{g}_{6,15} = \mathbb{R}X_1 + \cdots + \mathbb{R}X_6$ l'algèbre de Lie nilpotente définie par les crochets (voir [Nie])

$$[X_6, X_5] = X_3 \qquad [X_6, X_4] = X_1 \qquad [X_5, X_4] = X_2$$

et soit $G_{6,15} = \mathbb{R}^6$ le groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe correspondant, muni de la multiplication

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_6)\cdot(y_1, \dots, y_6) &= (x_1 + y_1 + x_6y_4, x_2 + y_2 + x_5y_4, x_3 + y_3 + x_6y_5, x_4 + y_4,\\ &\quad x_5 + y_5, x_6 + y_6)\end{aligned}$$

pour tous $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6 \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tous $x_1, \dots, x_6, a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_6)^{-1} = (-x_1 + x_4x_6, -x_2 + x_4x_5, -x_3 + x_5x_6, -x_4, -x_5, -x_6)$$

$$\exp(a_1X_1 + \cdots + a_6X_6) = (a_1 + \frac{1}{2}a_4a_6, a_2 + \frac{1}{2}a_4a_5, a_3 + \frac{1}{2}a_5a_6, a_4, a_5, a_6)$$

$$\begin{aligned}\log(x_1, \dots, x_6) &= (x_1 - \frac{1}{2}x_4x_6)X_1 + (x_2 - \frac{1}{2}x_4x_5)X_2 + (x_3 - \frac{1}{2}x_5x_6)X_3\\ &\quad x_4X_4 + x_5X_5 + x_6X_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(x_1, \dots, x_6)(a_1X_1 + \cdots + a_6X_6) &= (a_1 + x_6a_4 - x_4a_6)X_1 + (a_2 + x_5a_4 - x_4a_5)X_2\\ &\quad +(a_3 + x_6a_5 - x_5a_6)X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 + a_6X_6\end{aligned}$$

Soit maintenant $\{X_1^*, \dots, X_6^*\}$ la base duale de $\mathfrak{g}_{6,15}^*$ associée à $\{X_1, \dots, X_6\}$. Pour tous $x_1, \dots, x_6, \alpha_1, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(x_1, \dots, x_6)(\alpha_1 X_1^* + \cdots \alpha_6 X_6^*) &= \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + (\alpha_4 - x_5\alpha_2 - x_6\alpha_1) X_4^* \\ &\quad +(\alpha_5 - x_6\alpha_3 + x_4\alpha_2) X_5^* + (\alpha_6 + x_5\alpha_3 + x_4\alpha_1) X_6^*\end{aligned}$$

Soit maintenant le sous-groupe Γ de $G_{6,15}$ défini par $\Gamma = \{(p_1, \dots, p_6);\, p_1, \dots, p_6 \in \mathbb{Z}\}$ (que l'on dénote aussi par $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$). C'est de manière évidente un réseau de $G_{6,15}$; et la base $\{X_1, \dots, X_6\}$ est une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}_{6,15}$, fortement basée sur Γ et passant par $[\mathfrak{g}_{6,15}, \mathfrak{g}_{6,15}]$. Enfin, soit $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* \in \mathfrak{g}_{6,15}^*$ avec $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors,

$$\mathfrak{r}_l = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}(\alpha_3 X_4 - \alpha_1 X_5 + \alpha_2 X_6),$$

et, d'après le corollaire 1.3.2, la représentation $\pi_l\big|_\Gamma$ est donc irréductible.

1.4 Critère d'équivalence

Soient maintenant π et ϱ deux représentations unitaires irréductibles de G dont les restrictions à Γ sont irréductibles. On peut alors se demander sous quelle(s) condition(s) ces deux représentations sont unitairement équivalentes.

Théorème 1.4.1 *Soit Γ un réseau de G, et soient $\pi, \varrho \in \widehat{G}$ telles que $\pi\big|_\Gamma$ et $\varrho\big|_\Gamma$ soient irréductibles. Alors $\pi\big|_\Gamma \cong \varrho\big|_\Gamma$ si et seulement s'il existe un caractère χ de G tel que $\pi \cong \chi \otimes \varrho$ et $\chi\big|_\Gamma \equiv 1$.*

Preuve: Si $\pi \cong \chi \otimes \varrho$ avec $\chi\big|_\Gamma \equiv 1$, alors il est clair que $\pi\big|_\Gamma \cong \varrho\big|_\Gamma$. Supposons donc $\pi\big|_\Gamma$ et $\varrho\big|_\Gamma$ soient irréductibles et unitairement équivalentes. Il existe $l, f \in \mathfrak{g}^*$ telles que $\pi \cong \pi_l$ et $\varrho \cong \pi_f$.

Etape 1: Supposons que Γ soit un réseau *additif* de G. C.C. Moore a montré que la représentation quasi-régulière λ de G sur $L^2(\Gamma\backslash G)$ ne se décompose alors qu'en somme directe de représentations $\sigma \in \widehat{G}$ dont l'orbite intersecte $(\log(\Gamma))^\perp$ (voir Théorème 1.2.1). Ainsi, puisque d'après la proposition 1.3.1, on doit avoir $\pi_l \subseteq \lambda \otimes \pi_f$, il existe donc $\eta \in (\log(\Gamma))^\perp$

telle que $\pi_l \subseteq \pi_\eta \otimes \pi_f$. D'après [Kirl, Theorem 6.1] (ou [Fel, 1.4, Corollary]) et le lemme 1.3.1, on a alors $\mathcal{O}_l = \mathcal{O}_\eta + \mathcal{O}_f$. Soit $g \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{Ad}^*(g)l - f = \eta \in (\log(\Gamma))^\perp$. D'après le lemme 1.3.2, $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{r}_l$ est contenu dans la sous-algèbre rationnelle $\mathfrak{r}_\eta$. Mais, $\pi\big|_\Gamma$ étant irréductible, $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{r}_l$ ne peut pas être contenu dans une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$ (d'après le Théorème 1.3.1). D'où $\mathfrak{r}_\eta = \mathfrak{g}$, et π_η est un caractère de G, trivial sur Γ. Ainsi, π_l est équivalente à la représentation $\pi_\eta \otimes \pi_f$.

Etape 2: Maintenant, si Γ est un réseau quelconque de G, il existe un opérateur unitaire $T : \mathcal{H}(\pi_l) \to \mathcal{H}(\pi_f)$ tel que

$$T\,\pi_l(\gamma) = \pi_f(\gamma)\,T, \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Soit alors Γ_0 un réseau additif de G, contenu dans Γ, et d'indice fini dans Γ. Γ et Γ_0 étant commensurables, ces deux réseaux induisent la même structure rationnelle sur G (voir [CoG2, Theorem 5.1.12]), et les représentations $\pi_l\big|_{\Gamma_0}$ et $\pi_f\big|_{\Gamma_0}$ sont donc irréductibles. Puisque $\pi_l\big|_{\Gamma_0} \cong \pi_f\big|_{\Gamma_0}$, il existe, d'après l'étape 1, $\eta \in (\log(\Gamma_0))^\perp$ tel que $\mathfrak{r}_\eta = \mathfrak{g}$ et $\pi_l \cong \chi_\eta \otimes \pi_f$. Soit T_1 un opérateur d'entrelacement vérifiant

$$\chi_\eta(g)\pi_f(g) = T_1\,\pi_l(g)\,T_1^{-1}$$

pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $g \in G$. On a donc, pour tout $\gamma_0 \in \Gamma_0$,

$$T\,\pi_l(\gamma_0)\,T^{-1} = \pi_f(\gamma_0) = \chi_\eta(\gamma_0)\pi_f(\gamma_0) = T_1\,\pi_l(\gamma_0)\,T_1^{-1}$$

c'est à dire

$$\pi_l(\gamma_0) = T^{-1}\,T_1\,\pi_l(\gamma_0)\,T_1^{-1}\,T.$$

La représentation $\pi_l\big|_{\Gamma_0}$ étant irréductible, on en déduit donc, d'après le lemme de Schur que T est un multiple de T_1. Ainsi, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a:

$$\chi_\eta(\gamma)\pi_f(\gamma) = T_1\,\pi_l(\gamma)\,T_1^{-1} = T\,\pi_l(\gamma)\,T^{-1} = \pi_f(\gamma)$$

et donc $\chi_\eta \equiv 1$ sur Γ. Ceci achève la preuve du théorème 1.4.1. □

Exemple 2: Revenons à l'exemple du groupe de Lie nilpotent $G_{6,15}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{6,15}$. Si $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* \in \mathfrak{g}_{6,15}^*$, nous savons que la restriction au réseau $\Gamma = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ de la représentation $\pi_l \in \widehat{G}_{6,15}$ est irréductible. En outre, une représentation $\varrho \in \widehat{G}_{6,15}$ est telle que $\varrho\big|_\Gamma \cong \pi_l\big|_\Gamma$ si et seulement si, en vertu du théorème 1.4.1, $\varrho = \pi_f$, pour

$$f \in \mathcal{O}_G(\alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + q_4 X_4^* + q_5 X_5^* + q_6 X_6^*),$$

avec $q_4, q_5, q_6 \in \mathbb{Z}$.

1.5 Exemples

Dans cette section, nous allons exhiber une famille de groupes de Lie nilpotents dont un grand nombre de représentations restent irréductibles lorqu'on les restreint à un réseau.

Soit $n \geq 1$ et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente réelle. Posons $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}$, munie du crochet

$$[(x,t),(y,s)]_1 = (tAy - sAx, 0)$$

pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et tous $t, s \in \mathbb{R}$. Il est facile de voir que $(\mathfrak{g}_1, [,]_1)$ est une algèbre de Lie, et qu'elle est nilpotente car la matrice A est nilpotente. Puisque la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \lambda_{n-2} & 0 \\ \vdots & & & & 0 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les λ_i sont égaux à 0 ou 1, on peut donc supposer que la matrice A ne possède que des coefficients rationnels. Soit $\{X_1, \dots, X_n, X_{n+1}\}$ la base de $\mathfrak{g}_1$ vérifiant $(x,t) = \sum_{i=1}^n x_i X_i + tX_{n+1}$, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ est une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}_1$, dont les constantes de structures sont rationnelles. Le groupe de Lie $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$ admet ainsi des réseaux. Soit donc Γ_1 un réseau de G_1 tel que $\log(\Gamma_1) \subseteq \mathfrak{g}_{1,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} - \mathrm{span}\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$. Dénotons enfin par $\{X_1^*, \dots, X_{n+1}^*\}$ la base duale de $\mathfrak{g}_1^*$ associée à la base $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$.

Proposition 1.5.1 *Soit $l \in \mathfrak{g}_1^*$. Si $\mathfrak{r}_l \neq \mathfrak{g}_1$, alors $\mathfrak{r}_l$ est contenue dans un idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}_1$, et la restriction à Γ_1 de la représentation π_l de G_1 associée à $\mathcal{O}_{G_1}(l)$ n'est pas irréductible.*

Preuve: Soit $l \in \mathfrak{g}_1^*$. On a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_l &= \{(x,t) \in \mathfrak{g}_1;\ \langle l, [(x,t),(y,s)]_1\rangle = 0, \text{ pour tout } (y,s) \in \mathfrak{g}_1\} \\
&= \{(x,t) \in \mathfrak{g}_1;\ \langle l, (tAy - sAx, 0)\rangle = 0, \text{ pour tout } (y,s) \in \mathfrak{g}_1\} \\
&= \{(x,t) \in \mathfrak{g}_1;\ t\langle l, Ay\rangle = 0 \text{ et } \langle l, Ax\rangle = 0, \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}$$

Mais si $\langle l, Ay\rangle = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, alors $\mathfrak{r}_l = \mathfrak{g}_1$. Ainsi, si ce n'est pas le cas, il existe donc $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle l, Ay\rangle = 0$, et ainsi

$$\mathfrak{r}_l \subseteq \mathbb{R}X_1 + \cdots + \mathbb{R}X_n,$$

qui est bien sûr un idéal rationnel de $\mathfrak{g}_1$. □

Ainsi, on voit donc que $\mathfrak{g}_1$ n'est pas un bon candidat. Par contre, on peut regarder $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \rtimes \mathbb{R} = (\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$.

Soit $B \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ un matrice nilpotente de la forme

$$B = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \tilde{B} & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice $\tilde{B} \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente, à coefficients rationnels, telle que $\tilde{B}A = A\tilde{B}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$B \cdot (x,t) = (\tilde{B}x, 0) + ((\underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1)\text{ fois}}, t), 0).$$

Soit maintenant, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_u : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,t) \longmapsto uB(x,t) = u(\tilde{B}x, 0) + u((0, \ldots, 0, t), 0).$$

L'application φ_u est à valeurs dans l'espace des dérivations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$.

[En effet, soient $(x,t),(y,s) \in \mathfrak{g}_1$. On a:

$$\begin{aligned}
\varphi_u([(x,t),(y,s)]_1) &= \varphi_u(tAy - sAx, 0) \\
&= uB(tAy,0) - uB(sAx,0) \\
&= ut(\tilde{B}Ay,0) + 0 - us(\tilde{B}Ax,0) - 0 \\
&= ut(\tilde{B}Ay,0) - us(\tilde{B}Ax,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\varphi_u(x,t),(y,s)]_1 &= [(u\tilde{B}x,0) + ((0,\dots,0,ut),0),(y,s)]_1 \\
&= -us(A\tilde{B}x,0) - uts(A\cdot(0,\dots,0,1),0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(x,t),\varphi_u(y,s)]_1 &= [(x,t),(u\tilde{B}y,0) + ((0,\dots,0,s),0)]_1 \\
&= tu(A\tilde{B}y,0) + tus(A\cdot(0,\dots,0,1),0).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[\varphi_u(x,t),(y,s)]_1 + [(x,t),\varphi_u(y,s)]_1 = \varphi_u([(x,t),(y,s)]_1).$$

et φ_u est donc bien une dérivation de $\mathfrak{g}_1$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.]

Posons alors pour tous $((x,t_1),t_2),((y,s_1),s_2) \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
[((x,t_1),t_2),((y,s_1),s_2)] &= ([(x,t_1),(y,s_1)]_1 + t_2B(y,s_1) - s_2B(x,t_1),0) \\
&= ((t_1Ay - s_1Ax,0) + t_2B(y,s_1) - s_2B(x,t_1),0)
\end{aligned}$$

Alors $(\mathfrak{g},[,])$ est une algèbre de Lie (voir par exemple [Bou2, §1, n8]) nilpotente, car les matrices A et B sont nilpotentes.

Soit $\{X_1,\dots,X_n,X_{n+1},X_{n+2}\}$ la base de $\mathfrak{g}$ telle que l'on ait, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, et tous $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$,

$$((x,t_1),t_2) = \sum_{i=1}^{n} x_iX_i + t_1X_{n+1} + t_2X_{n+2}.$$

Puisque les coefficients des matrices A et B sont rationnels, cette base est une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, dont les constantes de structures sont rationnelles. Ainsi, $G = \exp(\mathfrak{g})$ admet donc des réseaux. Soit alors Γ un réseau de G tel que $\log(\Gamma) \subseteq \mathbb{Q} - \text{span}\{X_1, \dots, X_{n+2}\}$. On dénote par $\{X_1^*, \dots, X_{n+2}^*\}$ la base duale de $\mathfrak{g}^*$ associée à $\{X_1, \dots, X_{n+2}\}$.

Théorème 1.5.1 *Pour des matrices A et B bien choisies, il existe un nombre (non-dénombrable) de représentations unitaires irréductibles du groupe de Lie nilpotent $G = G_{A,B}$ correspondant à $\mathfrak{g}$, dont les restrictions à Γ sont irréductibles.*

Preuve: Il suffit d'exhiber un couple de matrices A et B pour lequel cette assertion soit vraie. Soit $l = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^* \in \mathfrak{g}^*$, avec les α_i non tous nuls. On a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_l &= \{((x,t_1),t_2) \in \mathfrak{g};\ \langle l, [((x,t_1),t_2),((y,s_1),s_2)]\rangle = 0,\ \text{pour tout } ((y,s_1),s_2) \in \mathfrak{g}\} \\
&= \{((x,t_1),t_2) \in \mathfrak{g};\ \langle l, ((t_1Ay,0),0) - ((s_1Ax,0),0) + ((t_2\tilde{B}y,0),0) \\
&\qquad +((0,\dots,0,t_2s_1,0),0) - ((s_2\tilde{B}x,0),0) - ((0,\dots,0,s_2t_1,0),0)\rangle = 0, \\
&\qquad\qquad \text{pour tout } ((y,s_1),s_2) \in \mathfrak{g}\} \\
&= \left\{ ((x,t_1),t_2) \in \mathfrak{g};\ \begin{cases} t_1\langle l,((Ay,0),0)\rangle + t_2\langle(\tilde{B}y,0),0)\rangle = 0, & \forall y \in \mathbb{R}^n \\ -\langle l,((Ax,0),0)\rangle + \langle l,((0,\dots,0,t_2,0),0)\rangle = 0 & \\ -\langle l,((\tilde{B}x,0),0)\rangle - \langle l,((0,\dots,0,t_1,0),0)\rangle = 0 & \end{cases} \right\}
\end{aligned}$$

Soient $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq p \leq n-2$ fixés tels que $k \neq p$. On pose alors $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$ avec

$$\begin{cases} a_{k,n} = 1 & \\ a_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_{p,n-1} = b_{n-1,n} = 1 & \\ b_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les matrices A et $\tilde{B}$ sont nilpotentes et commutent. On choisit alors $l \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\alpha_n = 0$ et $\{\alpha_k, \alpha_p\}$ soit $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant. On a

$$\mathfrak{r}_l = \left\{ ((x,t_1),t_2) \in \mathfrak{g};\ \begin{cases} t_1\langle l,((Ay,0),0)\rangle + t_2\langle(\tilde{B}y,0),0)\rangle = 0, & \forall y \in \mathbb{R}^n \\ \langle l,((Ax,0),0)\rangle = \langle l,((\tilde{B}x,0),0)\rangle = 0 & \end{cases} \right\}$$

Ainsi, $\mathbb{R}X_1 + \cdots + \mathbb{R}X_{n-1} \subseteq \mathfrak{r}_l$. De plus, pour $y = (0,\dots,0,1)$, on obtient $t_1\alpha_k + t_2\alpha_p = 0$. D'où $t_2 = \frac{-t_1\alpha_k}{\alpha_p}$ et $\mathbb{R}(\alpha_p X_{n+1} - \alpha_k X_{n+2}) \subseteq \mathfrak{r}_l$. Enfin, puisque $\mathfrak{r}_l$ est de codimension paire > 0 dans $\mathfrak{g}$, et puisque $\text{codim}(\mathbb{R}X_1 + \ldots + \mathbb{R}X_{n-1} + \mathbb{R}(\alpha_p X_{n+1} - \alpha_k X_{n+2})) \leq 2$, on a

$$\mathfrak{r}_l = \mathbb{R}X_1 + \ldots + \mathbb{R}X_{n-1} + \mathbb{R}(\alpha_p X_{n+1} - \alpha_k X_{n+2})$$

et, en vertu de la proposition 1.3.2, $\mathfrak{r}_l$ n'est contenu dans aucun idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$. Par conséquent, la restriction à Γ de la représentation π_l de G associée à l'orbite $\mathcal{O}_G(l)$ est irréductible. $\square$

Chapitre 2

Actions ergodiques sur les nilvariétés compactes

Soit G un groupe de Lie nilpotent, et soit Γ un réseau de G. Nous donnons dans un premier temps une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-groupe de Lie de G agisse ergodiquement par translation à droite sur la nilvariété compacte $\Gamma \backslash G$, pour revenir ensuite à l'étude des restrictions à Γ des représentations $\pi \in \widehat{G}$ et établir un nouveau critère d'irréductibilité pour ces restrictions.

Soit G un groupe localement compact séparable, et soit (X, μ) un espace mesuré sur lequel agit le groupe G. On suppose que la mesure μ est G-invariante.

Définition 2.0.1 *La mesure μ est dite* ergodique *si tout ensemble mesurable G-invariant est de mesure nulle ou co-nulle.*

2.1 Actions ergodiques sur les nilvariétés compactes

Soit maintenant G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau de G. G agit sur $\Gamma \backslash G$ par translations à droite

$$G \times \Gamma \backslash G \longrightarrow \Gamma \backslash G, \qquad (h, \Gamma g) \longmapsto \Gamma g \cdot h = \Gamma(gh).$$

$\Gamma \backslash G$ possède une mesure G-invariante $\mu \neq 0$ finie. Si on munit $\mathfrak{g}$ (et G) de la structure rationnelle induite par Γ, on va pouvoir établir une correspondance entre les sous-groupes de Lie de G qui agissent ergodiquement (par translations à droite) sur la nilvariété $\Gamma \setminus G$ et les sous-groupes de Lie de G totalement irrationnels.

Théorème 2.1.1 *On conserve les notations introduites ci-dessus. Soit H un sous-groupe de Lie de G. Alors H agit ergodiquement (par translations à droite) sur $\Gamma \setminus G$ si et seulement si son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est totalement irrationnel dans $\mathfrak{g}$.*

Preuve: Supposons dans un premier temps que H soit un sous-groupe de Lie de G totalement irrationnel. Par définition, son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ n'est donc contenue dans aucun idéal rationnel de $\mathfrak{g}$. Afin de montrer que l'action de H sur $\Gamma \setminus G$ est ergodique, nous allons montrer qu'il n'existe pas de vecteur H-invariant non-trivial dans $L^2(\Gamma \setminus G) \ominus \mathbb{C}$ (voir [Zim, Corollary 2.2.17]).

Nous avons déjà vu précédemment (voir Proposition 1.2.1) que la représentation quasi-régulière (droite) λ de G sur $L^2(\Gamma \setminus G)$ se décompose (au plus) en somme directe de représentations unitaires irréductibles de G dont l'orbite intersecte $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{Q}}$. Ainsi, dire qu'il existe un vecteur H-invariant dans $L^2(\Gamma \setminus G) \ominus \mathbb{C}$ revient à dire qu'il existe $f \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$ telle que $\mathcal{O}_G(f) \cap \mathfrak{g}^*_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$ et $1_H \subseteq \pi_f\big|_H$. Supposons alors que cela soit le cas. On peut bien évidemment supposer que $f \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{Q}}$. Si $\mathcal{O}_G(f) = \{f\}$, puisque $1_H \subseteq \chi_f\big|_H$, on a alors $\langle f, \mathfrak{h} \rangle = 0$, et $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ totalement irrationnelle. D'où, $\mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{g}$ (i.e. $f = 0$), ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, on doit avoir $\mathcal{O}_G(f) \neq \{f\}$ (c'est à dire $\mathfrak{r}_f \subsetneq \mathfrak{g}$), et il existe alors, d'après le théorème de Chevalley-Rosenlicht, $k \geq 0$ et $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ tels que l'application

$$\begin{array}{cccc} \psi_f : & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathcal{O}_G(f) \\ & (x_1, \dots, x_k) & \longmapsto & \mathrm{Ad}^*(\exp(x_1 X_1) \cdots \exp(x_k X_k)) f \end{array}$$

soit un difféomorphisme. Soit ν la mesure image de la mesure de Lebesgue λ_k sur $\mathbb{R}^k$ par l'application ψ_f. ν est une mesure G-invariante sur $\mathcal{O}_G(f)$. Soit d une fonction continue strictement positive définie sur $\mathcal{O}_G(f)$ telle que $\int_{\mathcal{O}_G(f)} d\, d\nu = 1$. Alors $\mu = d \cdot \nu$ est une mesure de probabilité quasi-invariante. Etendons maintenant trivialement cette mesure à $\mathfrak{g}^*$. Si l'on dénote par $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ la projection canonique de $\mathfrak{g}^*$ sur le dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$, alors, par [Kir, Theorem 6.1] ou [Fel, 1.3, Lemma], on a

$$\begin{aligned} 1_H \subseteq \pi_f\big|_H &\iff \mu(p^{-1}(\{0\})) \neq 0 \\ &\iff \lambda_k(\psi_f^{-1}(p^{-1}(\{0\}))) \neq 0 \\ &\iff \lambda_k((p \circ \psi_f)^{-1}(\{0\})) \neq 0. \end{aligned}$$

Les applications p et ψ_f étant polynomiales, il en est donc de même de $p \circ \psi_f$. Ainsi, la seule possibilité pour que l'ensemble de ses zéros soit de mesure non-nulle dans $\mathbb{R}^k$ (pour la mesure de Lebesgue λ_k) est que cette application soit identiquement nulle. En d'autres termes, $p \circ \psi_f \equiv 0$ et $\mathcal{O}_G(f) \subseteq \mathfrak{h}^\perp$. Soit maintenant l'application

$$\varphi_f : G \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \qquad g \longmapsto \mathrm{Ad}^*(g)f.$$

$p \circ \varphi_f$ étant identiquement nulle, il en est donc de même de sa différentielle en e. Or,

$$\begin{aligned} d_{(e)}(p \circ \varphi_f) \equiv 0 &\iff d_{(\varphi_f(e))}p \circ d_{(e)}\varphi_f \equiv 0 \\ &\iff p \circ d_{(e)}\varphi_f \equiv 0 \\ &\iff p \circ \mathrm{ad}^*(X)f = 0, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\langle \mathrm{ad}^*(X)f, Y\rangle = -\langle f, [X,Y]\rangle = 0, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g} \text{ et tout } Y \in \mathfrak{h},$$

et $\mathfrak{h}$ est par conséquent inclus dans $\mathfrak{r}_f$. Mais f étant rationnelle, son radical $\mathfrak{r}_f$ est une sous-algèbre rationnelle de $\mathfrak{g}$. Par hypthèse sur $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{r}_f$ est donc nécessairement égal à $\mathfrak{g}$, ce qui contredit notre hypothèse sur f. Ainsi, H agit ergodiquement sur $\Gamma \setminus G$.
Inversement, si $\mathfrak{h}$ est contenue dans une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$, alors il existe un idéal rationnel $\mathfrak{g}_0$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ la contenant également. Soit $\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par $\mathfrak{g}_0$, et soit $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ la base duale correspondante. Si on pose $f = X_n^*$, alors $f \in (\log(\Gamma))^\perp - \{0\}$ et $\langle f, \mathfrak{h}\rangle \equiv 0$. Ainsi, π_f est un caractère de G, $1_H \subseteq \pi_f\big|_H$, et l'action de H sur $\Gamma \setminus G$ n'est donc pas ergodique. □

Nous allons maintenant établir un théorème montrant qu'il est équivalent pour un sous-groupe de G d'agir ergodiquement sur une nilvariété $\Gamma \setminus G$ ou sur son tore associé $\Gamma[G,G] \setminus G$.

Ceci est à comparer au théorème de W. Parry (voir [Par, Theorem 1]), prouvant le même résultat pour l'action d'*une* transformation affine sur $\Gamma \setminus G$.

Théorème 2.1.2 *Soient G un groupe de Lie nilpotent, H un sous-groupe de Lie de G, et soit Γ un réseau de G. Alors H agit ergodiquement par translations sur $\Gamma \setminus G$ si et seulement si H agit ergodiquement sur le tore $\Gamma[G,G] \setminus G$.*

Preuve: Soit H un sous-groupe de Lie de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On munit $\mathfrak{g}$ (et G) de la structure rationnelle induite par Γ. Soient $p : G \to [G,G] \setminus G$ et $\tilde{p} : \mathfrak{g} \to [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \setminus \mathfrak{g}$ les projections canoniques. On a alors

$$\begin{aligned}
&H \text{ agit ergodiquement sur } \Gamma \setminus G \\
&\iff \quad \mathfrak{h} \text{ est totalement irrationnelle (par le théorème 2.1.1)} \\
&\iff \quad \tilde{p}(\mathfrak{h}) \text{ est totalement irrationnelle (par le lemme 1.3.4)} \\
&\iff \quad p(H) \text{ agit ergodiquement sur } p(\Gamma) \setminus p(G) \text{ (par le théorème 2.1.1)} \\
&\iff \quad H \text{ agit ergodiquement sur } \Gamma[G,G] \setminus G,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de ce théorème. □

Corollaire 2.1.1 *Soient G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau de G. On munit $\mathfrak{g}$ (et G) de la structure rationnelle induite par Γ. Soit $\{X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ et passant par $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ($\dim([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = m$). Soit enfin H un sous-groupe de Lie de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors H agit ergodiquement sur $\Gamma \setminus G$ si et seulement s'il existe $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i \in \mathfrak{h}$ tel que le système $\{x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.*

Preuve: Utiliser le théorème 2.1.2 et le lemme 1.3.5. □

2.2 Application à la théorie des représentations

Revenons maintenant aux restrictions de représentations unitaires irréductibles de G à Γ. En rassemblant tous les résultats précédents, on obtient le théorème récapitulatif suivant:

Théorème 2.2.1 *Soit G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau de G. Munissons $\mathfrak{g}$ (et G) de la structure rationnelle induite par Γ, dénotons par m la dimension de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, et par $\tilde{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\backslash\mathfrak{g}$ la projection canonique. Soit $\{X_1,\dots,X_m\dots,X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Enfin, soit $l \in \mathfrak{g}^*$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\pi_l\big|_\Gamma$ *est irréductible.*

(2) *Le radical $\mathfrak{r}_l$ de l est totalement irrationnel dans $\mathfrak{g}$.*

(3) $\tilde{p}(\mathfrak{r}_l)$ *est totalement irrationnel dans* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\setminus\mathfrak{g}$.

(4) *Il existe $X = \sum_{i=1}^n x_iX_i \in \mathfrak{r}_l$ tel que $\{x_{m+1},\dots,x_n\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.*

(5) $R_l = \exp(\mathfrak{r}_l)$ *agit ergodiquement sur* $\Gamma\setminus G$.

(6) $R_l = \exp(\mathfrak{r}_l)$ *agit ergodiquement sur* $\Gamma[G,G]\setminus G$.

(7) Γ *agit ergodiquement sur* $\mathcal{O}_G(l) \cong R_l\setminus G$.

Exemple 3: Soit $\mathfrak{g}_{5,4} = \mathbb{R}X_1 + \dots + \mathbb{R}X_5$ (voir [Nie]) l'algèbre de Lie de dimension 5 munie des crochets

$$[X_5,X_4] = 2X_3 \qquad [X_5,X_3] = 2X_2 \qquad [X_4,X_3] = X_1$$

et soit $G_{5,4} = \mathbb{R}^5$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant, muni de la loi de multiplication

$$\begin{aligned}(x_1,\dots,x_5)\cdot(y_1,\dots,y_5) &= (x_1+y_1+x_4y_3+2x_4x_5y_4+x_5y_4^2, x_2+y_2+2x_5y_3+2x_5^2y_4,\\ &\qquad x_3+y_3+2x_5y_4, x_4+y_4, x_5+y_5)\end{aligned}$$

pour tous $(x_1,\dots,x_5),(y_1,\dots,y_5) \in G_{5,4}$. Soit maintenant $\Gamma = \{(p_1,\dots,p_5); p_1,\dots,p_5 \in \mathbb{Z}\}$. Γ est un réseau de $G_{5,4}$, et $\{X_1,\dots,X_5\}$ est une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}_{5,4}$, fortement basée sur Γ, et passant par $[\mathfrak{g}_{5,4},\mathfrak{g}_{5,4}]$. Soit $\{X_1^*,\dots,X_5^*\}$ la base duale de $\mathfrak{g}_{5,4}^*$ associée. Si $l = \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* \in \mathfrak{g}^*$ est telle que le système $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant, alors

$$\mathfrak{r}_l = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}(-2\alpha_2X_4 + \alpha_1X_5),$$

et $\mathfrak{r}_l$ n'est contenu dans aucun idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}_{5,4}$. Ainsi, $R_l = \exp(\mathfrak{r}_l)$ agit ergodiquement sur la nivariété $\Gamma\setminus G$ et la restriction de la représentation π_l à Γ est irréductible.

Chapitre 3

Premiers pas vers une décomposition intégrale de $\pi_l|_\Gamma$

Dans ce chapitre, nous allons donner une (première) décomposition en intégrale hilbertienne de la restriction à un réseau Γ d'une représentation unitaire irréductible de G dont l'orbite possède un élément admettant une polarisation qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$. Nous énoncerons ensuite un critère permettant d'attester, dans certains cas, de l'irréductibilité de presque toutes les représentations apparaissant dans cette décomposition. Enfin, nous cherchons à savoir sous quelle(s) condition(s) cette décomposition peut faire intervenir plus généralement des représentations factorielles.

3.1 Rappels sur la théorie des intégrales directes

3.1.1 Rappels sur les espaces boréliens

Nous rappelons ici quelques définitions et résultats concernant les espaces boréliens et les mesures boréliennes (pour plus de détails, voir par exemple [Dix2, Chapitre II, §1] et [Mac3, §2.2]).

Un espace borélien E est dit *standard* si sa structure borélienne est sous-jacente à une topologie d'espace polonais (par exemple, d'espace localement compact à base dénombrable). Il est bien connu (voir par exemple [Mac3, p.71, Theorem]) que tout espace borélien standard est isomorphe à,

(a) soit à l'espace borélien sous-jacent à l'espace topologique $[0,1]$,

(b) soit à un ensemble dénombrable C, dont les boréliens sont les sous-ensembles de C .

Un espace borélien E est maintenant dit *analytique* s'il est séparé, admet une famille génératrice dénombrable d'ensembles boréliens, et s'il existe un espace borélien standard E' et une application borélienne ϕ appliquant E' *sur* E.

Un mesure positive ν sur un espace borélien E est dite *standard* s'il existe une partie borélienne N de E de mesure nulle (pour ν) telle que l'espace borélien $E - N$ soit standard. On a alors le résultat suivant:

Théorème 3.1.1 ([Mac3, p.74, Theorem]) *Toute mesure borélienne sur un espace borélien analytique est standard.*

3.1.2 Champs d'espaces hilbertiens

Soient Z un espace borélien, et ν une mesure positive sur Z. On appelle *champ d'espaces hilbertiens complexes* sur Z une application $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$, définie sur Z, telle que $\mathcal{H}(\xi)$ soit un espace hilbertien complexe, pour tout $\xi \in Z$; et *champ de vecteurs* sur Z toute application $x : \xi \mapsto x(\xi)$ définie sur Z telle que $x(\xi) \in \mathcal{H}(\xi)$, pour tout $\xi \in Z$. Soit $\mathcal{F} = \prod_{\xi \in Z} \mathcal{H}(\xi)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur Z (à tout élément $x \in \mathcal{F}$ on fait correspondre l'application définie sur Z, qui à $\xi \in Z$ associe $x(\xi) \in \mathcal{H}(\xi)$). On dit que les $\mathcal{H}(\xi)$ forment un *champ ν-mesurable d'espaces hilbertiens complexes* s'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ possédant les propriétés suivantes:

(i) pour tout $x \in \mathcal{G}$, la fonction $\xi \mapsto \|x(\xi)\|$ est ν-mesurable,

(ii) si $y \in \mathcal{F}$ est tel que, pour tout $x \in \mathcal{G}$ la fonction numérique complexe $\xi \mapsto \langle x(\xi), y(\xi)\rangle$ est ν-mesurable, alors $y \in \mathcal{G}$,

(iii) il existe une suite $(x_1, x_2, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{G}$ tels que, pour tout $\xi \in Z$, $(x_1(\xi), x_2(\xi), \dots)$ forme une suite totale dans $\mathcal{H}(\xi)$.

Les champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{G}$ sont alors appelés *champs ν-mesurables de vecteurs* ($\mathcal{G}$ fait partie de cette donnée).

Si ν_1 est une mesure positive sur Z équivalente à ν, le champ $\mathcal{H}(\xi)$, muni de l'espace vectoriel $\mathcal{G}$, est un champ ν_1-mesurable d'espaces hilbertiens complexes. En d'autres termes, la notion de champs ν-mesurable d'espaces hilbertiens ne fait intervenir que la classe de la mesure ν.

Soit $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ un champ ν-mesurable d'espaces hilbertiens complexes sur Z. Un champ de vecteurs x sur Z est dit de *carré intégrable* s'il est ν-mesurable et si

$$\int_Z \|x(\xi)\|^2 \, d\nu(\xi) < +\infty.$$

L'ensemble des champs de carré intégrable est un espace vectoriel complexe, noté $\mathcal{K}$. De plus, pour tous $x, y \in \mathcal{K}$, la fonction $\xi \mapsto \langle x(\xi), y(\xi) \rangle$ est intégrable. Posons donc

$$\langle x, y \rangle = \int_Z \langle x(\xi), y(\xi) \rangle \, d\nu(\xi).$$

$\mathcal{K}$ est ainsi muni d'une structure d'espace préhilbertien complexe, et, pour tout $x \in \mathcal{K}$,

$$\|x\|^2 = \int_Z \|x(\xi)\|^2 \, d\nu(\xi).$$

Soit maintenant $\mathcal{N}$ l'ensemble des champs de carré intégrable nuls ν-presque partout (c'est à dire, des champs de norme nulle), et soit $\mathcal{H}$ l'espace quotient de $\mathcal{K}$ par $\mathcal{N}$.

Théorème 3.1.2 ([Dix2, p.147, Proposition 5 et p.149, Corollaire]) *$\mathcal{H}$ est alors un espace de Hilbert, appelé* intégrale hilbertienne *des $\mathcal{H}(\xi)$, et noté $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\xi) \, d\nu(\xi)$. De plus, si la mesure ν est standard, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est à base dénombrable.*

Remarque: L'espace $\mathcal{H}$ dépend en réalité du choix de l'espace des champs de vecteurs ν-mesurables $\mathcal{G}$.

Si x est un champ de vecteurs de carré intégrable, nous noterons aussi, par analogie avec la notation précédente, $\int_Z^{\oplus} x(\xi) \, d\nu(\xi)$ l'élément correspondant de $\mathcal{H}$.

Si Y est une partie mesurable de Z, l'ensemble des champs de vecteurs de carré intégrable nuls hors de Y forment un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, noté $\int_Y^{\oplus} \mathcal{H}(\xi) \, d\nu(\xi)$, qui s'identifie canoniquement à l'intégrale hilbertienne du champ mesurable induit $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$, $\xi \in Y$.

Enfin, soit ν_1 une mesure positive équivalente à ν, et soit ϱ une fonction ν-mesurable sur Z vérifiant $0 < \varrho(\xi) < +\infty$ pour tout $\xi \in Z$, telle que $\nu_1 = \varrho \cdot \nu$. Alors l'application qui, au champ de vecteurs ν-mesurable x fait correspondre le champ de vecteurs $\xi \mapsto \varrho(\xi)^{\frac{-1}{2}} x(\xi)$ est un isomorphisme (appelé isomorphisme canonique) de $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\xi)\, d\nu(\xi)$ sur $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\xi)\, d\nu_1(\xi)$, ne dépendant pas du choix de ϱ.

3.1.3 Champs d'opérateurs

Soient Z un espace borélien, ν une mesure positive sur Z, $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ et $\xi \mapsto \mathcal{H}'(\xi)$ deux champs ν-mesurables d'espaces hilbertiens complexes sur Z. Pour tout $\xi \in Z$, soit $T(\xi)$ un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\xi), \mathcal{H}'(\xi))$, c'est à dire une application linéaire continue de $\mathcal{H}(\xi)$ dans $\mathcal{H}'(\xi)$. L'application $\xi \mapsto T(\xi)$ est appelée *champ d'applications linéaires continues* sur Z. Si les champs $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ et $\xi \mapsto \mathcal{H}'(\xi)$ sont identiques, on parlera alors de *champ d'opérateurs.*
Le champ d'applications linéaires continues $\xi \mapsto T(\xi)$ est dit *ν-mesurable* si, pour tout champ ν-mesurable de vecteurs $\xi \mapsto x(\xi) \in \mathcal{H}(\xi)$, le champ de vecteurs $\xi \mapsto T(\xi)x(\xi) \in \mathcal{H}'(\xi)$ est ν-mesurable.
Si $\xi \mapsto T(\xi)$ et $\xi \mapsto T'(\xi)$ sont deux champs ν-mesurables d'opérateurs, les champs $\xi \mapsto T(\xi) + T'(\xi)$, $\xi \mapsto T(\xi)T'(\xi)$ et $\xi \mapsto T(\xi)^*$ sont alors également ν-mesurables. On a, bien sur, des propriétés analogues avec les champs ν-mesurables d'applications linéaires continues.
Soit Y une partie mesurable de Z. Un champ d'applications linéaires continues $\xi \mapsto T(\xi)$ sur Y est dit *mesurable* s'il se prolonge en un champ mesurable sur Z, ou, ce qui revient au même, si, pour tout champ mesurable de vecteurs x sur Y, le champ de vecteurs $\xi \mapsto T(\xi)x(\xi)$ sur Y est mesurable.

Soient maintenant $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ et $\xi \mapsto \mathcal{H}'(\xi)$ deux champs ν-mesurables d'espaces hilbertiens complexes sur Z. On pose

$$\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\xi)\, d\nu(\xi) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}' = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}'(\xi)\, d\nu(\xi).$$

Un champ ν-mesurable $\xi \mapsto T(\xi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\xi), \mathcal{H}'(\xi))$ est dit *essentiellement borné* si la borne supérieure essentielle de la fonction $\xi \mapsto \|T(\xi)\|$ est finie.
Une application $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ est dite *décomposable* si elle est définie par un champ

mesurable $\xi \mapsto T(\xi)$ essentiellement borné. On écrira alors

$$T = \int_Z^{\oplus} T(\xi)\, d\nu(\xi).$$

Si les champs $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ et $\xi \mapsto \mathcal{H}'(\xi)$ sont identiques, on parlera alors d'*opérateurs décomposables.*

Les $T(\xi)$ sont définis aux ensembles négligeables près. En particulier, sur toute partie de mesure nulle de Z, les $T(\xi)$ peuvent être choisis arbitrairement.

3.1.4 Intégrales directes de représentations

Soit G un groupe localement compact séparable, et soient Z un espace borélien, ν une mesure positive sur Z, et $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ un champ ν-mesurable d'espaces hilbertiens sur Z. Pour tout $\xi \in Z$, soit $\pi(\xi)$ une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}(\xi)$. L'application $\xi \mapsto \pi(\xi)$ est appelé *champ de représentations unitaires* de G. Un tel champ de représentations est dit *mesurable* si, pour tout $g \in G$, le champ d'opérateurs $\xi \mapsto \pi(\xi)(g)$ est mesurable. Dans ce cas, on peut former, pour tout $g \in G$, l'opérateur continu $\pi(g) = \int_Z^{\oplus} \pi(\xi)(g)\, d\nu(\xi)$ dans l'espace hilbertien $\mathcal{H} = \int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\xi)\, d\nu(\xi)$, et $g \mapsto \pi(g)$ est alors une représentation de G dans $\mathcal{H}$, appelée *intégrale hilbertienne* des $\pi(\xi)$ et notée $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi(\xi)\, d\nu(\xi)$. On a alors le résultat suivant:

Théorème 3.1.3 ([Dix1, Théorème 8.5.2]) *Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien séparable, et soit π une représentation unitaire d'un groupe localement compact séparable G dans $\mathcal{H}$. Il existe alors un espace borélien standard Z, une mesure positive bornée ν sur Z, un champ mesurable $\xi \mapsto \mathcal{H}(\xi)$ d'espaces hilbertiens sur Z, un champ mesurable $\xi \mapsto \pi(\xi)$ de représentations unitaires irréductibles de G dans les espaces $\mathcal{H}(\xi)$, et un isomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\int_Z^{\oplus} \mathcal{H}(\xi)\, d\nu(\xi)$ qui transforme π en $\int_Z^{\oplus} \pi(\xi)\, d\nu(\xi)$.*

3.2 Première décomposition de $\pi_l\big|_\Gamma$

Jusqu'à la fin de ce chapitre, sauf mention explicite, G désignera un groupe de Lie nilpotent (d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$), et Γ un réseau de G. $\mathfrak{g}$ (et G) sera alors muni de la structure rationnelle induite par Γ.

Lemme 3.2.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. L'espace hilbertien $L^2(\mathbb{R},\mathcal{H})$ est isomorphe à l'intégrale hilbertienne $\int_{[0,1)}^{\oplus} l^2(\mathbb{Z}+s,\mathcal{H})\,ds$, où $\mathbb{Z}+s=\{p+s;\, p\in\mathbb{Z}\}$ pour tout $s\in[0,1)$, et où ds désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1)$.*

Preuve: Soit

$$T : L^2(\mathbb{R},\mathcal{H}) \longrightarrow \int_{[0,1)}^{\oplus} l^2(\mathbb{Z}+s,\mathcal{H})\,ds, \qquad f \longmapsto \int_{[0,1)}^{\oplus} f\big|_{\mathbb{Z}+s}\,ds.$$

T est alors linéaire et bijectif, d'inverse T^{-1} donné par

$$\begin{aligned} T^{-1} : \int_{[0,1)}^{\oplus} l^2(\mathbb{Z}+s,\mathcal{H})\,ds &\longrightarrow L^2(\mathbb{R},\mathcal{H}) \\ \int_{[0,1)}^{\oplus} f_s\,ds &\longmapsto f : t=s+p \longrightarrow f(t)=f_s(p+s). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $f,g\in L^2(\mathbb{R},\mathcal{H})$,

$$\begin{aligned} \langle T(f),T(g)\rangle &= \int_{[0,1)} \langle f\big|_{\mathbb{Z}+s}, g\big|_{\mathbb{Z}+s}\rangle\,ds = \int_{[0,1)} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \langle f(p+s), g(p+s)\rangle_{\mathcal{H}}\,ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle f(t),g(t)\rangle_{\mathcal{H}}\,dt = \langle f,g\rangle \end{aligned}$$

et T est donc un isomorphisme d'espaces de Hilbert. □

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre, permettant de décomposer explicitement en intégrale directe la restriction à Γ de toute représentation $\pi\in\widehat{G}$ dont l'orbite possède une fonctionnelle linéaire admettant une polarisation qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$.

Théorème 3.2.1 *Soit $l\in\mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation $\mathfrak{m}$ de dimension m qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$, et soit $\{X_1,\ldots,X_m,\ldots,X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par $\mathfrak{m}$. Posons $M=\exp(\mathfrak{m})$. La représentation $\pi_l\big|_\Gamma$ se décompose alors en l'intégrale directe*

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)^{n-m}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\ldots,t_n}}\big|_{M\cap\Gamma})\,dt_{m+1}\ldots dt_n \tag{3.1}$$

où

$$l_{t_{m+1},\ldots,t_n} := \mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1})\cdots\exp(-t_nX_n))l$$

pour tous $t_{m+1},\ldots,t_n\in[0,1)$, et où $dt_{m+1}\ldots dt_n$ est le mesure de Lebesgue sur $[0,1)^{n-m}$.

Preuve: On va prouver ce résultat par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est de dimension 1, $\mathfrak{g}$ est alors abélienne, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ et il n'y a rien à montrer. Supposons donc que le résultat est vrai pour tout groupe de Lie nilpotent de dimension inférieure ou égale à n, et supposons que $\mathfrak{g}$ soit de dimension $n+1$. Soit alors $\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par $\mathfrak{m}$. On peut, bien sûr, supposer que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{g}$. Si on pose $\mathfrak{g}_n = \mathbb{R}X_1 + \cdots + \mathbb{R}X_n$, alors, par construction, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}_n$. De même, $\mathfrak{r}_l \subseteq \mathfrak{g}_n$, et si l'on dénote par l_n la restriction de l à $\mathfrak{g}_n$, $\mathfrak{m}$ est alors également une polarisation pour l_n. Ainsi,

$$\pi_l \cong \mathrm{Ind}_M^G \chi_l \cong \mathrm{Ind}_{G_n}^G (\mathrm{Ind}_M^{G_n} \chi_{l_n}),$$

où $G_n = \exp(\mathfrak{g}_n)$. Posons maintenant $\pi_n = \mathrm{Ind}_M^{G_n} \chi_{l_n}$. On peut alors réaliser la représentation π_l comme suit (voir [Kirl, Preuve du Théorème 7.1]): $\mathcal{H}(\pi_l)$ est l'espace de Hilbert donné par

$$\mathcal{H}(\pi_l) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}(\pi_n) \text{ mesurable telle que } \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^2_{\mathcal{H}(\pi_n)}\, dt < +\infty\}.$$

et, pour tous $g = g_n \cdot \exp(aX_{n+1}) \in G$ (avec $g_n \in G_n$ et $a \in \mathbb{R}$), $f \in \mathcal{H}(\pi_l)$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$(\pi_l(g)f)(t) = \pi_n(\exp(tX_{n+1}) \cdot g_n \cdot \exp(-tX_{n+1}))(f(t+a)).$$

Pour un élément $s \in [0,1)$ fixé, considèrons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_s$ de fonctions sur $\mathbb{Z} + s = \{p + s\,;\, p \in \mathbb{Z}\}$ donné par

$$\mathcal{H}_s = \{f : \mathbb{Z} + s \longrightarrow \mathcal{H}(\pi_n)\,;\, \sum_{p \in \mathbb{Z}} \|f(p+s)\|^2_{\mathcal{H}(\pi_n)} < +\infty\}.$$

ainsi que la représentation ϱ_s de Γ dans $\mathcal{H}_s$ définie par

$$\varrho_s(\gamma)f(p+s) = \pi_n(\exp((p+s)X_{n+1}) \cdot \gamma_n \cdot \exp(-(p+s)X_{n+1}))(f(p+q+s)),$$

pour tous $\gamma = \gamma_n \cdot \exp(qX_{n+1}) \in \Gamma$ (avec $\gamma_n \in G_n \cap \Gamma$ et $q \in \mathbb{Z}$), $f \in \mathcal{H}_s$ et $p \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 3.2.1, si ds désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1)$, l'application

$$T : \mathcal{H}(\pi_l) \longrightarrow \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathcal{H}_s\, ds, \qquad f \longmapsto \int_{[0,1)}^{\oplus} f\big|_{\mathbb{Z}+s}\, ds$$

est un isomorphisme, et entrelace les représentations $\pi_l\big|_{\Gamma}$ et $\int_{[0,1)}^{\oplus} \varrho_s\, ds$.

[En effet, on sait d'après le lemme 3.2.1 que T est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

De plus, pour tous $\gamma = \gamma_n \cdot \exp(qX_{n+1}) \in \Gamma$ (avec $\gamma_n \in G_n \cap \Gamma$ et $q \in \mathbb{Z}$), $f \in \mathcal{H}(\pi_l)$ et $t = p + s \in \mathbb{R}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $s \in [0,1)$), on a

$$\begin{aligned}
(T^{-1}(\int_{[0,1)}^{\oplus} \varrho_s(\gamma)\, ds)\, T)(f)(t) &= (T^{-1}(\int_{[0,1)}^{\oplus} \varrho_s(\gamma)\, ds(\int_{[0,1)}^{\oplus} f\big|_{\mathbb{Z}+s}\, ds)))(t) \\
&= (T^{-1}(\int_{[0,1)}^{\oplus} \varrho_s(\gamma)(f\big|_{\mathbb{Z}+s})\, ds))(t) \\
&= \varrho_s(\gamma)(f\big|_{\mathbb{Z}+s})(p+s) \\
&= \pi_n(\exp((p+s)X_{n+1}) \cdot \gamma_n \cdot \exp(-(p+s)X_{n+1})) \\
&\qquad\qquad (f(p+q+s)) \\
&= \pi_n(\exp(tX_{n+1}) \cdot \gamma_n \cdot \exp(-tX_{n+1}))(f(t+q)) \\
&= (\pi_l(\gamma)f)(t).
\end{aligned}$$

]

Soit $\Phi_s : \mathcal{H}_s \longrightarrow \mathcal{H}_0 = l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{H}(\pi_n))$ l'opérateur unitaire défini par $\Phi_s(f)(p) = f(p+s)$, pour tous $f \in \mathcal{H}_s$ et $p \in \mathbb{Z}$, et soit π_s la représentation de Γ définie par

$$\pi_s(\gamma) = \Phi_s\, \varrho_s(\gamma)\, \Phi_s^{-1}, \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

On a alors, pour tous $\gamma = \gamma_n \cdot \exp(qX_{n+1}) \in \Gamma$ (avec $\gamma_n \in G_n \cap \Gamma$ et $q \in \mathbb{Z}$), $f \in \mathcal{H}_0$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
(\pi_s(\gamma)f)(p) &= \Phi_s(\varrho_s(\gamma)(\Phi_s^{-1}(f)))(p) = \varrho_s(\gamma)(\Phi_s^{-1}(f))(p+s) \\
&= \pi_n(\exp((p+s)X_{n+1}) \cdot \gamma_n \cdot \exp(-(p+s)X_{n+1}))(\Phi_s^{-1}(f)(p+q+s)) \\
&= \pi_n^s(\exp(pX_{n+1}) \cdot \gamma_n \cdot \exp(-pX_{n+1}))(f(p+q))
\end{aligned}$$

où π_n^s est la représentation de G_n définie par

$$\pi_n^s(g_n') = \pi_n(\exp(sX_{n+1}) \cdot g_n' \cdot \exp(-sX_{n+1})),$$

pour tout $g_n' \in G_n$. Il s'en suit que la représentation π_s de Γ dans $\mathcal{H}_0$ est induite par la restriction à $G_n \cap \Gamma$ de la représentation π_n^s. Ainsi,

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \varrho_s\, ds \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \pi_s\, ds \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{G_n\cap\Gamma}^{\Gamma}(\pi_n^s\big|_{G_n\cap\Gamma})\, ds \cong \mathrm{Ind}_{G_n\cap\Gamma}^{\Gamma}(\int_{[0,1)}^{\oplus} \pi_n^s\big|_{G_n\cap\Gamma}\, ds).$$

Or, la représentation $\pi_n^s \cong \mathrm{Ind}_M^{G_n}(\chi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(-sX_{n+1}))l_n})$ est irréductible, $G_n \cap \Gamma$ est un réseau de G_n, et $\mathfrak{m}$ est une polarisation pour $\mathrm{Ad}^*(\exp(-sX_{n+1}))l_n$ qui est un idéal rationnel de $\mathfrak{g}_n$

(pour la structure rationelle induite par $G_n \cap \Gamma$). D'après l'hypothèse de récurrence, il vient donc que la représentation $\pi_n^s\big|_{G_n\cap\Gamma}$ est unitairement équivalente à la représentation

$$\int_{[0,1)^{n-m}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{G_n\cap\Gamma}(\chi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1}))\cdots\mathrm{Ad}^*(\exp(-t_nX_n))(\mathrm{Ad}^*(\exp(-sX_{n+1}))l_n)}\big|_{M\cap\Gamma})dt_{m+1}\dots dt_n$$

où $dt_{m+1}\dots dt_n$ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1)^{n-m}$. Puisque

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1})\cdots\exp(-t_nX_n))(\mathrm{Ad}^*(\exp(-sX_{n+1}))l_n)\big|_{\mathfrak{m}} \\ &= \mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1}\cdots\exp(-sX_{n+1}))l\big|_{\mathfrak{m}} \end{aligned}$$

on obtient, finalement,

$$\begin{aligned} \pi_l\big|_{\Gamma} &\cong \mathrm{Ind}_{G_n\cap\Gamma}^{\Gamma}\Big(\int_{[0,1)}^{\oplus}\Big(\int_{[0,1)^{n-m}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{G_n\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n,s}}\big|_{M\cap\Gamma})\,dt_{m+1}\dots dt_n\Big)\,ds \\ &\cong \int_{[0,1)^{n+1-m}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n,s}}\big|_{M\cap\Gamma})\,dt_{m+1}\dots dt_n ds \end{aligned}$$

où $l_{t_{m+1},\dots,t_n,s} = \mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1})\cdots\exp(-t_nX_n)\exp(-sX_{n+1}))l$ et où $dt_{m+1}\dots dt_n ds$ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1)^{n+1-m}$. □

Corollaire 3.2.1 *Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ telle que son radical $\mathfrak{r}_l$ soit contenu dans une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$. Alors $\pi_l\big|_{\Gamma}$ n'est pas irréductible.*

Preuve: Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{r}_l$. Il existe alors un idéal rationnel $\mathfrak{g}_0$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Ainsi, il existe donc une polarisation $\mathfrak{m}$ pour l telle que $\mathfrak{r}_l \subseteq \mathfrak{m}$. Soit $M = \exp(\mathfrak{m})$ et soit l_0 la restriction de l à $\mathfrak{g}_0$. D'après la preuve du théorème précédent,

$$\pi_l\big|_{\Gamma} \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{G_0\cap\Gamma}^{\Gamma}(\pi_{l_0}^t\big|_{G_0\cap\Gamma})\,dt$$

et la représentation $\pi_l\big|_{\Gamma}$ n'est donc pas irréductible. □

Remarque: Ce corollaire achève la preuve du théorème 1.3.1.

Corollaire 3.2.2 *Si $l \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}^*$ est telle que $\mathfrak{r}_l \neq \mathfrak{g}$, alors $\pi_l\big|_{\Gamma}$ n'est pas irréductible.*

Exemple 1: Soit G le groupe de Heisenberg, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ le réseau de G défini par

$$\Gamma = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \big\{(p_1,p_2,p_3);\ p_1,p_2,p_3 \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Soit π une représentation unitaire irréductible de G. Si la représentation π n'est pas de dimension 1, nous avons vu qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tel que $\pi \cong \mathrm{Ind}_M^G \chi_l$, avec $l = \alpha X_1^*$, $\mathfrak{m} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2$ (polarisation pour l) et $M = \exp(\mathfrak{m}) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, 0)$. La base $\{X_1, X_2, X_3\}$ est alors une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par l'idéal rationnel $\mathfrak{m}$. D'après le théorème 3.2.1, on a donc

$$\pi\big|_\Gamma \cong \pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^\Gamma (\chi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(-tX_3))l}\big|_{M\cap\Gamma})dt \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^\Gamma (\chi_{\alpha X_1^* + \alpha t X_2^*}\big|_{M\cap\Gamma})dt \quad (3.2)$$

Ainsi, si $l \in \mathfrak{g}^*$ admet un idéal polarisant rationnel, nous avons franchi une première étape vers la décomposition de $\pi_l\big|_\Gamma$ en intégrale hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de Γ. Pour déterminer si celles-ci sont irréductibles ou non, nous allons utiliser le critère, bien connu, de Mackey (voir [Macl, Theorem 6']).

Soit Γ un groupe discret et soit H un sous-groupe de Γ. On dénote par Q_H^Γ le *quasinormalisateur* (ou *commensurateur*) de H dans Γ. C'est le sous-groupe de Γ (voir [Cor, Theorem 1]) défini par

$$Q_H^\Gamma = \{\gamma \in \Gamma; \gamma^{-1}H\gamma \cap H \text{ est d'indice fini dans } \gamma^{-1}H\gamma \text{ et dans } H\}.$$

Soit maintenant χ un caractère de H, et formons la représentation induite $\pi = \mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi$ de Γ. On peut réaliser cette représentation comme suit:

$$\mathcal{H}_\pi = \left\{ f : \Gamma \to \mathbb{C} \; ; \; f(h\gamma) = \chi(h) f(\gamma) \text{ pour tout } (h,\gamma) \in H \times \Gamma \text{ et } \sum_{\dot\gamma \in H\backslash\Gamma} |f(\gamma)|^2 < +\infty \right\}$$

et, pour tout $f \in \mathcal{H}_\pi$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$,

$$(\pi(\gamma)f)(\gamma') = f(\gamma'\gamma).$$

On a alors:

Lemme 3.2.2 **([Macl])** $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ *est irréductible si et seulement si, pour tout* $\gamma \in Q_H^\Gamma - H$, *il existe* $h \in \gamma^{-1}H\gamma \cap H$ *tel que* $\chi(\gamma h \gamma^{-1}) \neq \chi(h)$.

Si H est un sous-groupe *normal* de Γ, alors on peut définir le *stabilisateur* de χ dans Γ comme étant le sous-groupe de Γ donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_H^\Gamma(\chi) &= \{\gamma \in \Gamma;\ \chi(\gamma h \gamma^{-1}) = \chi(h),\ \text{pour tout } h \in H\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma;\ \chi([\gamma, h]) = 1,\ \text{pour tout } h \in H\}\end{aligned}$$

Dans ce cas, le critère de G.W. Mackey devient

La représentation $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{St}_H^\Gamma(\chi) = H$.

Exemple 1: Revenons à l'exemple du groupe de Heisenberg G, muni du réseau $\Gamma = \{(p_1, p_2, p_3)\, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}\}$. Nous avons vu que, si $l = \alpha X_1^*$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$), alors

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^\Gamma(\chi_{l_t}\big|_{M\cap\Gamma})\, dt,$$

avec $l_t = \alpha X_1^* + t\alpha X_2^*$, pour tout $t \in [0,1)$. Fixons donc $t \in [0,1)$, et regardons le stabilisateur de χ_{l_t} dans Γ. On a,

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^\Gamma(\chi_{l_t}) &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma;\ \chi_{l_t}([(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, 0)]) = 1, \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma;\ \chi_{l_t}(p_3 q_2, 0, 0) = 1, \forall q_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma;\ \alpha p_3 \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

et donc,

$$\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^\Gamma(\chi_{l_t}) = \begin{cases} (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0) & \text{si } \alpha \notin \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, q\mathbb{Z}) & \text{si } \alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \{0\} \end{cases}$$

Ainsi, on voit que pour tout $t \in [0,1)$, la représentation $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^\Gamma(\chi_{l_t})$ est irréductible si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dans ce cas, (3.1) est alors une décomposition en composantes irréductibles.

Remarque: Si $l \in \mathfrak{g}^*$ admet un idéal polarisant rationnel, alors le théorème 3.2.1 nous fournit une décomposition de $\pi_l\big|_\Gamma$ en intégrale directe de représentations unitaires de Γ. Cette décomposition n'est cependant pas unique, car le choix d'une autre polarisation pour l vérifiant les mêmes conditions peut entraîner une décomposition totalement différente, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1: Soit G le groupe de Heisenberg, muni du réseau $\Gamma = \{(p_1, p_2, p_3);\ p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}\}$. Soit $l = \alpha X_1^*$, avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Alors le décomposition (3.2) est une décomposition de $\pi_l\big|_\Gamma$ en composantes irréductibles.

Soit maintenant $\mathfrak{m}' = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_3$. $\mathfrak{m}'$ est également une polarisation pour l, qui est un idéal rationnel propre de $\mathfrak{g}$. Ainsi,

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},0,\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\chi_{l_s})\, ds \tag{3.3}$$

avec $l_s = \mathrm{Ad}^*(\exp(-sX_2))l = \alpha X_1^* + s\alpha X_3^*$, pour tout $s \in [0,1)$.

Supposons alors qu'il existe $s, t \in [0,1)$ tels que $\mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},0,\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\chi_{l_s}) \cong \mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},,\mathbb{Z},0)}^{\Gamma}(\chi_{l_t})$. Ces deux représentations étant irréductibles, il doit donc exister, d'après [Mac1, Theorem 7'], $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma^{-1} \cdot (\mathbb{Z},\mathbb{Z},0) \cdot \gamma \cap (\mathbb{Z},0,\mathbb{Z})$ soit d'indice fini dans les deux sous-groupes s'intersectant, ce qui est manifestement impossible, puisque $\gamma^{-1} \cdot (\mathbb{Z},\mathbb{Z},0) \cdot \gamma \cap (\mathbb{Z},0,\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z},0,0)$. Ainsi, (3.2) et (3.3) sont deux décompositions de $\pi_l\big|_\Gamma$; et aucune composante apparaissant dans la première décomposition n'est équivalente à une composante apparaissant dans la seconde.

Exemple 4: Soit $\mathfrak{g}_{6,19} = \mathbb{R}X_1 + \ldots + \mathbb{R}X_6$ (voir [Nie]) l'algèbre de Lie nilpotente, munie des crochets suivants:

$$[X_6, X_5] = 2X_4 \qquad [X_6, X_3] = 2X_1 \qquad [X_5, X_4] = X_2$$

et soit $G_{6,19} = \mathbb{R}^6$ le groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe correspondant. La multiplication sur $G_{6,19}$ est donnée par

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_6) \cdot (y_1, \ldots, y_6) \;=\;& (x_1 + y_1 + 2x_6y_3, x_2 + y_2 + x_5y_4 + 2x_5x_6y_5 + x_6y_5^2, x_3 + y_3, \\ & x_4 + y_4 + 2x_6y_5, x_5 + y_5, x_6 + y_6)\end{aligned}$$

pour tous $(x_1, \ldots, x_6), (y_1, \ldots, y_6) \in G_{6,19}$. On a alors

$$(x_1, \ldots, x_6)^{-1} = (-x_1 + 2x_3x_6, -x_2 + x_4x_5 - x_5^2x_6, -x_3, -x_4 + 2x_5x_6, -x_5, -x_6).$$

En outre, pour tous $x_1, \dots, x_6, a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R}$,

$$\exp(a_1X_1 + \dots + a_6X_6) = (a_1 + \frac{1}{2}a_3a_6, a_2 + \frac{1}{2}a_4a_5 + \frac{1}{3}a_5^2a_6, a_3, a_4 + \frac{1}{2}a_5a_6, a_5, \frac{1}{2}a_6)$$

$$\begin{aligned}\log(x_1, \dots, x_6) = \ & (x_1 - x_3x_6)X_1 + (x_2 - \tfrac{1}{2}x_4x_5 - \tfrac{1}{6}x_5^2x_6)X_2 + x_3X_3 + (x_4 - x_5x_6)X_4 \\ & + x_5X_5 + 2x_6X_6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(x_1, \dots, x_6)(a_1X_1 + \dots + a_6X_6) = \ & (a_1 + 2x_6a_3 - x_3a_6)X_1 \\ & + (a_2 + x_5a_4 - x_4a_5 - \tfrac{1}{2}x_5^2a_6 + 2x_5x_6a_5)X_2 \\ & + a_3X_3 + (a_4 + 2x_6a_5 - x_5a_6)X_4 + a_5X_5 + a_6X_6\end{aligned}$$

Dénotons par $\{X_1^*, \dots, X_6^*\}$ la base duale de $\mathfrak{g}_{6,19}^*$ correspondante. Pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(x_1, \dots, x_6)(\alpha_1X_1^* + \dots + \alpha_6X_6^*) = \ & \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* + (\alpha_3 - 2x_6\alpha_1)X_3^* \\ & + (\alpha_4 - x_5\alpha_2)X_4^* + (\alpha_5 - 2x_6\alpha_4 + x_4\alpha_2)X_5^* \\ & + (\alpha_6 + x_5\alpha_4 - \frac{1}{2}x_5^2\alpha_2 + x_3\alpha_1)X_6^*\end{aligned}$$

Soit maintenant $\Gamma = \{(p_1, \dots, p_6);\ p_1, \dots, p_6 \in \mathbb{Z}\}$ le réseau de $G_{6,19}$ que l'on dénote aussi par $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, et soit $l = \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* \in \mathfrak{g}_{6,19}^*$, avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$. Alors $\mathfrak{r}_l = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2$, et $\mathfrak{m} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4$ est un idéal rationnel de $\mathfrak{g}_{6,19}$ polarisant l. En outre, $\{X_1, \dots, X_6\}$ est une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}_{6,19}$, fortement basée sur Γ, et passant par $\mathfrak{m}$. Soit $M = \exp(\mathfrak{m}) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, 0, 0)$, et dénotons par $\pi_{l,M}$ la représentation $\mathrm{Ind}_M^G \chi_l$. D'après le théorème 3.2.1, on a

$$\pi_{l,M}\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)^2}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}\big|_{M\cap\Gamma})\, dt_5dt_6$$

où $l_{t_5,t_6} = \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* + 2t_6\alpha_1X_3^* + t_5\alpha_2X_4^* - \frac{1}{2}t_5^2\alpha_2X_6^*$, pour tous $t_5, t_6 \in [0,1)$.

Fixons $t_5, t_6 \in [0,1)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}) &= \Big\{(p_1, \dots, p_6) \in \Gamma;\ \chi_{l_{t_5,t_6}}([(p_1, \dots, p_6), (q_1, \dots, q_4, 0, 0)]) = 1, \\ &\qquad\qquad \text{pour tout } (q_1, \dots, q_4, 0, 0) \in M \cap \Gamma\Big\} \\ &= \Big\{(p_1, \dots, p_6) \in \Gamma;\ e^{2\pi i \langle l_{t_5,t_6}, \log(2p_6q_3, p_5q_4, 0,0,0,0)\rangle} = 1, \text{ pour tous } q_3, q_4 \in \mathbb{Z}\Big\} \\ &= \Big\{(p_1, \dots, p_6) \in \Gamma;\ 2\alpha_1p_6 \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha_2p_5 \in \mathbb{Z}\Big\}\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}) = \begin{cases} (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,0) & \text{si } \alpha_1 \notin \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 \notin \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,Q_1\mathbb{Z}) & \text{si } \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 \notin \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},0) & \text{si } \alpha_1 \notin \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},Q_1\mathbb{Z}) & \text{si } \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

avec $Q_1 = q_1$ si q_1 est impair et $Q_1 = \frac{q_1}{2}$ si q_1 est pair. Ainsi

$\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}}$ est irréductible pour tous $t_5, t_6 \in [0,1)$ si et seulement si $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$.

Les deux exemples précédents ont ceci de particulier que, soit toutes les représentations apparaissant dans la décomposition de $\pi_l\big|_{\Gamma}$ sont irréductibles, soit elles sont toutes réductibles. Cependant, la situation n'est en général pas toujours aussi claire, car ces deux cas de figures peuvent coexister. Afin de pouvoir lever dans certains cas cette ambiguité, nous allons énoncer un critère sur l'orbite de la représentation π (et plus précisement sur les composantes polynomiales décrivant cette orbite) nous permettant de conclure immédiatement à l'irréductibilité de presque toutes les composantes (pour la mesure de Lebesgue) apparaissant dans la décomposition (3.1) de $\pi_l\big|_{\Gamma}$ en intégrale directe.

3.3 Critère d'irréductibilité presque-sûre des composantes de $\pi_l\big|_{\Gamma}$

Définition 3.3.1 *Soit $\{X_1^*, \ldots, X_2^*\}$ une base de $\mathfrak{g}^*$, et soit $l = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^* \in \mathfrak{g}^*$. Soit $J_l = \{j \in \{1, \ldots, n\}; \alpha_j \neq 0\}$. On dit que l est* fortement irrationnelle par rapport à la base $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ *si le système $\{1; \alpha_j, j \in J_l\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant.*

Proposition 3.3.1 *Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ une fonctionnelle linéaire admettant une polarisation $\mathfrak{m}$ qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$, et soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de Malcev forte de G, fortement basée sur Γ et passant par $\mathfrak{m}$. Si l est fortement irrationnelle par rapport à $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$, alors $\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_l) = M \cap \Gamma$ et la représentation $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}\chi_l$ est irréductible.*

Preuve: Soit $l = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i^* \in \mathfrak{g}^*$ telle que le système $\{1; \alpha_j, j \in J_l\}$ soit $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant. Pour prouver cette proposition, il suffit de montrer que $\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_l) \subseteq M \cap \Gamma$.

Soit donc $\gamma \in \mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_l)$. On a alors $\langle \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})l - l, \log(\xi)\rangle \in \mathbb{Z}$, pour tout $\xi \in M \cap \Gamma$. Mais, d'un côté on a

$$\langle \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})l - l, \log(\xi)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\gamma, \xi)\alpha_i,$$

où les polynomes β_i sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$ (ceci est dû à la rationalité des constantes de structures et des composantes de $\log(\gamma)$ et de $\log(\xi)$ dans la base $\{X_1, \ldots, X_n\}$). Puisque la fonctionnelle l est fortement irrationnelle, on en déduit donc que $\beta_i(\gamma, \xi) = 0$, pour tout $i \in J_l$, et donc que

$$\langle \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})l - l, \log(\xi)\rangle = 0, \text{ pour tout } \xi \in M \cap \Gamma.$$

La polarisation $\mathfrak{m}$ étant rationnelle dans $\mathfrak{g}$, $M \cap \Gamma$ est un réseau de M. Ainsi, l'application

$$\Phi : (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \langle \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})l - l, \log(\exp(x_1 X_1) \cdots \exp(x_m X_m))\rangle,$$

polynomiale en $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, est nulle sur $\mathbb{Z}^m$, et donc sur $\mathbb{R}^m$. D'où,

$$\langle \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})l - l, \log(\xi)\rangle = 0, \text{ pour tout } \xi \in M,$$

c'est à dire, $\mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})l - l \in M^{\perp}$. La représentation $\mathrm{Ind}_M^G \chi_l$ étant irréductible, γ est donc un élément de M (voir [Puk, p.157, Théorème 2]). L'irréductibilité de $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}\chi_l$ découle maintenant du lemme 3.2.2. □

Soit donc $l \in \mathfrak{g}^*$ une fonctionnelle linéaire admettant une polarisation $\mathfrak{m}$ qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$, et soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par $\mathfrak{m}$. Soit $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ la base duale associée. Dans cette base, l s'écrit $l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i^*$, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, pour tout $1 \le i \le n$. Maintenant, si $(t_{m+1}, \ldots, t_n) \in [0, 1)^{n-m}$, posons

$$l_{t_{m+1},\ldots,t_n} := \mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1}) \cdots \exp(-t_n X_n))l = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t_{m+1}, \ldots, t_n) X_j^*,$$

et dénotons par K_l l'ensemble des indices i pour lesquels les applications (polynomiales)

$$[0, 1)^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (t_{m+1}, \ldots, t_n) \longmapsto \alpha_i(t_{m+1}, \ldots, t_n)$$

ne sont pas identiquement nulles.

Théorème 3.3.1 *On conserve les notations introduites ci-dessus. Si la famille d'applications polynomiales $\{1;\alpha_j, j\in K_l\}$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{Q}$, alors dans la décomposition (3.1), $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}|_{M\cap\Gamma})$ est irréductible pour presque tous $(t_{m+1},\dots,t_n)$ appartenant à $[0,1)^{n-m}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).*

Preuve: On suppose que le système $\{1;\alpha_j, j\in K_l\}$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant. Posons N=Card(K_l)+1, et dénotons par $\mathcal{R}$ l'ensemble des $(n-m)$-uplets $(t_{m+1},\dots,t_n)\in[0,1)^{n-m}$ pour lesquels la fonctionnelle linéaire $l_{t_{m+1},\dots,t_n}$ n'est pas fortement irrationnelle par rapport à la base $\{X_1^*,\dots,X_n^*\}$. D'après la proposition 3.3.1, il suffit donc de prouver que $\mathcal{R}$ est contenu dans un ensemble de mesure nulle de $[0,1)^{n-m}$ (pour la mesure de Lebesgue). Pour tout $(t_{m+1},\dots,t_n)\in\mathcal{R}$, il existe $q=(q_0,(q_j)_{j\in K_l})\in\mathbb{Q}^N-\{(0,\dots,0)\}$ tel que

$$q_0+\sum_{j\in K_l} q_j\alpha_j(t_{m+1},\dots,t_n)=0.$$

Les applications $(t_{m+1},\dots,t_n)\mapsto\alpha_i(t_{m+1},\dots,t_n)$ étant polynomiales, il en est donc de même de l'application $Q_q=q_0+\sum_{j\in K_l}\alpha_j$, et

$$\mathcal{R}\subseteq\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^N-\{(0,\dots,0)\}}\mathcal{Z}(Q_q),$$

où $\mathcal{Z}(Q_q)$ désigne l'ensemble des zéros du polynomes Q_q, pour tout $q\in\mathbb{Q}^N-\{(0,\dots,0)\}$. L'ensemble $\{1;\alpha_j, j\in K_l\}$ étant, par hypothèse, $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant, aucun des polynomes Q_q n'est identiquement nul, et pour tout $q\in\mathbb{Q}^N-\{(0,\dots,0)\}$, $\mathcal{Z}(Q_q)$ est par conséquent de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1)^{n-m}$. Il en est donc de même de l'ensemble $\mathcal{R}$, ce qui achève ainsi la preuve du théorème 3.3.1. □

Remarques: (i) Ce résultat est encore vrai au cas où $K_l=\emptyset$.
(ii) Cette condition (suffisante) n'est pas nécessaire en général (voir en annexe l'exemple du groupe $G_{5,5}$).

3.4 Décomposition de $\pi_l|_\Gamma$ en représentations factorielles

Même si les représentations apparaissant dans la décomposition (3.1) ne sont pas irréductibles, elles peuvent néanmoins posséder d'intéressantes propriétés. En particulier, on peut se demander sous quelle(s) condition(s) ces représentations vont être factorielles, et si oui, de quel type. Les travaux de M.W. Binder (voir [Bin1]) vont permettre de répondre à ces questions.

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien complexe, et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'ensemble des applications linéaires continues de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ (cet ensemble est muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{C}$). Si M est un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, on appelle alors *commutant* de M l'ensemble, dénoté par M', des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui commutent avec tous les éléments de M, et *bicommutant* de M l'ensemble $M'' = (M')'$.

Définition 3.4.1 *On appelle* algèbre de von Neumann *toute sous-algèbre involutive A de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant $A = A''$. On appelle* facteur *toute algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux opérateurs scalaires.*

Soit G un groupe localement compact, et soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de G. Soit $(\pi(G))''$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$. Si $(\pi(G))''$ est un facteur, on dira alors que la représentation $(\pi, \mathcal{H})$ est *factorielle.* Dans ce cas, il sera impossible d'écrire π comme somme directe de deux sous-représentations disjointes dans des espaces non-nuls. Pour plus d'informations sur les facteurs et les représentations factorielles, on pourra consulter [Dix1] et [Dix2].

Soit donc $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$ (pour $(t_{m+1}, \dots, t_n) \in [0,1)^{n-m}$) une représentation apparaissant dans la décomposition (3.1) de $\pi_l|_{\Gamma}$, et soit $\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$ le stabilisateur du caractère $\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}$ de $M \cap \Gamma$ dans Γ. Pour $\gamma \in \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$, on définit la *classe de conjugaison* $[M \cap \Gamma\gamma]$ comme étant le sous-ensemble de $M \cap \Gamma \setminus \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$ défini par

$$[M \cap \Gamma\gamma] = \left\{ M \cap \Gamma s\gamma s^{-1}; s \in \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}) \right\}.$$

On a alors

Proposition 3.4.1 ([Bin1, Corollary 2.4]) $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$ *est une représentation factorielle de Γ si et seulement si, pour tout $\gamma \in \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}) - (M \cap \Gamma)$ tel que la classe de conjugaison $[M \cap \Gamma\gamma]$ soit finie, il existe $s \in \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$ tel que $[\gamma, s] \in M \cap \Gamma$ et $\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}([\gamma, s]) \neq 1$.*

Remarque: Si $M \cap \Gamma \setminus \mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$ est abélien, alors $[M \cap \Gamma\gamma] = \{M \cap \Gamma\gamma\}$, pour tout $\gamma \in \mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$.

Corollaire 3.4.1 *Si $M \cap \Gamma \setminus (\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}}))$ est un groupe cyclique, alors la représentation $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$ n'est pas factorielle.*

Preuve: Dénotons par S le stabilisateur de $\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}}$ dans Γ, et par t le $(n-m)$-uplet $(t_{m+1},\cdots,t_n) \in [0,1)^{n-m}$. Puisque $M \cap \Gamma \setminus S$ est cyclique, il existe $X \in \log(S)$ tel que

$$S = \langle M \cap \Gamma, \exp(X)\rangle = M \cap \Gamma \cdot \exp(\mathbb{Z}X).$$

Ainsi, pour tous $\gamma, s \in S$, il existe $m_1, m_2 \in M \cap \Gamma$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $\gamma = m_1 \cdot \exp(p_1 X)$ et $s = m_2 \cdot \exp(p_2 X)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\chi_{l_t}([\gamma, s]) &= \chi_{l_t}(m_1 \exp(p_1 X) m_2 \exp(p_2 X) \exp(-p_1 X) m_1^{-1} \exp(-p_2 X) m_2^{-1}) \\
&= \chi_{l_t}(m_1 \exp(p_1 X) m_2 \exp(-p_1 X) \exp(p_2 X) m_1^{-1} \exp(-p_2 X) m_2^{-1}) \\
&= \chi_{l_t}(m_1)\chi_{l_t}(m_2)\chi_{l_t}(m_1^{-1})\chi_{l_t}(m_2^{-1}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

et la représentation $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$ ne peut donc pas être factorielle. □

Supposons maintenant que la représentation $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$ soit factorielle. On peut alors chercher à savoir de quel type elle est. Deux cas peuvent alors apparaitre:

Cas 1: $\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}}) = M \cap \Gamma$, et l'ensemble $M \cap \Gamma \setminus \mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$ est alors trivial,

Cas 2: $\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}}) \supsetneq M \cap \Gamma$, et l'ensemble $M \cap \Gamma \setminus \mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$ est infini.

Ainsi, on déduit de [Bin1, Corollary 3.5] le résultat suivant:

Proposition 3.4.2 *Si la représentation $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}})$ est factorielle alors, soit elle est irréductible, soit elle est de type II_1.*

Nous allons maintenant donner un exemple de représentation dont la restriction à un réseau se décompose en intégrale hilbertienne de représentations factorielles.

Exemple 4: Soient $G = G_{6,19}$ et $\Gamma = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Si $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^*$, avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, nous avons vu que

$$\pi_{l,M}\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)^2}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}\big|_{M\cap\Gamma})\, dt_5 dt_6$$

où $l_{t_5,t_6} = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + 2t_6\alpha_1 X_3^* + t_5\alpha_2 X_4^* - \frac{1}{2}t_5^2\alpha_2 X_6^*$, pour tous $t_5, t_6 \in [0,1)$. En outre,

$$\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}) = \begin{cases} (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,0) & \text{si } \alpha_1 \notin \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 \notin \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,Q_1\mathbb{Z}) & \text{si } \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 \notin \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},0) & \text{si } \alpha_1 \notin \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},Q_1\mathbb{Z}) & \text{si } \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

où $Q_1 = q_1$ si q_1 est impair et $Q_1 = \frac{q_1}{2}$ si q_1 est pair. Ainsi,

$\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}}$ est irréductible, pour tous $t_5, t_6 \in [0,1)$ si et seulement si $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$.

Supposons donc que $\alpha_1 \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha_2 \in \mathbb{Q}$ et fixons $t_5, t_6 \in [0,1)$. Si $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ ou $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$ alors $M \cap \Gamma \setminus \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}})$ est un groupe cyclique, et $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}}$ n'est pas une représentation factorielle. Mais, si $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ sont tels que pgcd(p_1,q_1)=pgcd(p_2,q_2) =1, alors pour tous $u_5, u_6, v_1, \ldots, v_6 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}[(0,0,0,0,q_2u_5,Q_1u_6),(v_1,v_2,v_3,v_4,q_2v_5,Q_1v_6)] &= (2Q_1u_6v_3, q_2u_5v_4 + 2Q_1q_2^2u_5u_6v_5 \\ &\quad +Q_1q_2^2u_6v_5^2 - Q_1q_2^2u_5^2v_6 - 2Q_1q_2^2u_5v_5v_6, \\ &\quad 0, 2Q_1q_2u_6v_5 - 2Q_1q_2u_5v_6, 0, 0).\end{aligned}$$

et

$$\chi_{l_{t_5,t_6}}([(0,0,0,0,q_2u_5,Q_1u_6),(v_1,v_2,v_3,v_4,q_2v_5,Q_1v_6)]) = e^{4\pi i t_5 Q_1 p_2 (u_6v_5 - u_5v_6)}.$$

En particulier, si $t_5 \notin \mathbb{Q}$ alors, pour tout $\gamma \in \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}) - (M \cap \Gamma)$, il existe $s \in \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}})$ tel que $\chi_{l_{t_5,t_6}}([\gamma, s]) \neq 1$ et $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}}$ est une représentation factorielle de type II_1.

Chapitre 4

Décomposition des représentations monomiales d'un réseau induites à partir d'un sous-groupe normal

Soit Γ un groupe nilpotent discret de type fini et sans torsion, soit H un sous-groupe *normal* de Γ tel que $H \setminus \Gamma$ soit *sans torsion*, et soit χ un caractère de H. Nous allons ici donner une décomposition explicite en composantes irréductibles de la représentation monomiale $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi$. Ceci nous permettra alors de donner, entre autres, une décomposition de la représentation régulière (droite) de Γ.

4.1 Décomposition explicite

Nous introduisons dans un premier temps la notion de rang pour groupe nilpotent discret, de type fini, et sans torsion.

Proposition 4.1.1 ([Rag, Proposition 2.8]) *Soit Γ un groupe nilpotent discret, de type fini, et sans torsion, et soient $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_k = \{e\}$ et $\Gamma = \Gamma'_0 \supseteq \Gamma'_1 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma'_l = \{e\}$ deux filtrations de Γ telles que Γ_i (resp. Γ'_i) soit un sous-groupe normal de Γ_{i-1} (resp. Γ'_{i-1}) et $\Gamma_i \setminus \Gamma_{i-1}$ (resp. $\Gamma'_i \setminus \Gamma'_{i-1}$) soit abélien. Alors $\Gamma_i \setminus \Gamma_{i-1}$ (resp. $\Gamma'_i \setminus \Gamma'_{i-1}$) est de type fini, et*

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \mathrm{rang}(\Gamma_i \setminus \Gamma_{i-1}) = \sum_{1 \leq i \leq l} \mathrm{rang}(\Gamma'_i \setminus \Gamma'_{i-1}).$$

Définition 4.1.1 *L'entier* $\sum_{1\leq i\leq k} \operatorname{rang}(\Gamma_i \setminus \Gamma_{i-1})$, *indépendant de la filtration* $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_k = \{e\}$ *choisie, est appelé le* rang *du groupe nilpotent discret, de type fini, et sans torsion* Γ.

Lemme 4.1.1 *Soit* Γ *un groupe nilpotent discret de type fini sans torsion. Alors il existe* $\gamma \in \mathcal{Z}(\Gamma)$ *tel que, si on dénote par* H *le sous-groupe de* Γ *engendré par* γ, *le groupe* $H \setminus \Gamma$ *soit nilpotent discret de type fini sans torsion, et* $\operatorname{rang}(H \setminus \Gamma) = \operatorname{rang}(\Gamma) - 1$.

Preuve: Soit donc Γ un groupe nilpotent discret de type fini sans torsion. Par le théorème de Malcev (voir [Mal, Theorem 6]), Γ se plonge comme réseau dans un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ (pour un certain $n \geq 0$) une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ. Posons $\gamma = \exp(X_1)$. Alors $H = \langle\gamma\rangle = \exp(\mathbb{Z}X_1) \subseteq \mathcal{Z}(\Gamma)$, et $H \setminus \Gamma$ est nilpotent discret de type fini et sans torsion. De plus, $\operatorname{rang}(H \setminus \Gamma) = \operatorname{rang}(\Gamma) - 1$. □

Revenons maintenant à l'étude des représentations.

Lemme 4.1.2 *Soit* Γ *un groupe discret,* H *un sous-groupe de* Γ *et soit* χ *un caractère de* H. *On suppose qu'il existe* $\gamma \in \Gamma$ *tel que* γ *normalise* H *et vérifie*

$$\chi(\gamma h \gamma^{-1}) = \chi(h), \quad \textit{pour tout } h \in H.$$

Soit $L = \langle H, \gamma\rangle$ *le sous-groupe de* Γ *engendré par* H *et par* γ, *et soit* $p : L \to H \setminus L$ *la projection canonique. Alors,* χ *s'étend en un caractère de* L *et* $\operatorname{Ind}_H^L \chi$ *se décompose en*

$$\operatorname{Ind}_H^L \chi \cong \int_{(H\setminus L)^\wedge}^{\oplus} (\widetilde{\chi} \cdot \eta)\, d\eta,$$

où $\widetilde{\chi}$ *est une extension quelconque du caractère* χ *au sous-groupe* L, $(\widetilde{\chi} \cdot \eta)(l) = \widetilde{\chi}(l)(\eta \circ p)(l)$, *pour tout* $l \in L$, *et* $d\eta$ *est la mesure de Haar sur* $(H \setminus L)^\wedge$, *le groupe des caractères du groupe (abélien)* $H \setminus L$, *normalisée de manière à rendre valide le théorème d'inversion de Fourier.*

Preuve: H étant un sous-groupe normal de L, tout élément de l de L peut s'écrire sous la forme $l = h \cdot \gamma^n$, pour un certain $h \in H$ et un certain $n \in \mathbb{Z}$. Dénotons par ϱ la représentation $\operatorname{Ind}_H^L \chi$. Il y a alors deux cas à distinguer:

Cas 1: $[L : H] = n < +\infty$. Alors n est le premier entier strictement positif vérifiant $\gamma^n \in H$. Dans ce cas, on va réaliser la représentation ϱ comme suit:

$$\mathcal{H}_\varrho = \{f : L \to \mathbb{C} \ , \ f(hl) = \chi(h)f(l), \text{ pour tout } (h,l) \in H \times L\}$$

et, pour tout $f \in \mathcal{H}_\varrho$, $l, l' \in L$,

$$(\varrho(l)f)(l') = f(l' \cdot l).$$

Puisque $\gamma^n \in H$, $\chi(\gamma^n)$ est bien défini. Soit $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ l'ensemble des racines n^{ieme} de $\chi(\gamma^n)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose alors

$$\chi_i(l) = \chi(h)\xi_i^m, \text{ pour tout } l = h \cdot \gamma^m \text{ (avec } h \in H \text{ et } m \in \mathbb{Z}).$$

Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, χ_i est un caractère de L, dont la restriction à H est égale à χ. [En effet, soit $1 \leq i \leq n$ fixé, et soient $h_1, h_2 \in H$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $h_1 \cdot \gamma^{m_1} = h_2 \cdot \gamma^{m_2}$. Alors, $h_2^{-1} \cdot h_1 = \gamma^{m_2 - m_1} \in H$ et il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m_2 - m_1 = np$. D'où

$$\begin{aligned}
\chi_i(h_2 \cdot \gamma^{m_2}) &= \chi(h_2)\xi_i^{m_2} = \chi(h_2)\xi_i^{m_1+np} = \chi(h_2)\xi_i^{m_1}\xi_i^{np} \\
&= \chi(h_2)\xi_i^{m_1}(\chi(\gamma^n))^p = \chi(h_2)\xi_i^{m_1}\chi(\gamma^{np}) = \chi(h_2)\xi_i^{m_1}\chi(\gamma^{m_2-m_1}) \\
&= \chi(h_2)\xi_i^{m_1}\chi(h_2^{-1} \cdot h_1) = \chi(h_1)\xi_i^{m_1} = \chi_i(h_1 \cdot \gamma^{m_1}),
\end{aligned}$$

et l'application χ_i est bien définie. Soient maintenant $l_1 = h_1 \cdot \gamma^{m_1}$ et $l_2 = h_2 \cdot \gamma^{m_2}$ deux éléments de L (avec $h_1, h_2 \in H$ et $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$). On a

$$\begin{aligned}
\chi_i(l_1 \cdot l_2) &= \chi_i(h_1 \cdot \gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{m_2}) = \chi_i(h_1 \cdot \gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{-m_1} \cdot \gamma^{m_1+m_2}) \\
&= \chi(h_1 \cdot \gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{-m_1})\xi_i^{m_1+m_2} = \chi(h_1)\chi(\gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{-m_1})\xi_i^{m_1}\xi_i^{m_2} \\
&= \chi(h_1)\xi_i^{m_1}\chi(h_2)\xi_i^{m_2} = \chi_i(l_1)\chi_i(l_2).
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $|\chi_i(l)| = 1$, pour tout $l \in L$, χ_i est donc un caractère de L.]

Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $f_i(l) = \chi_i(l)$, pour tout $l \in L$. Alors $f_i \in \mathcal{H}_\varrho$. De plus, $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{H}_\varrho$, et donc une base de $\mathcal{H}_\varrho$, puisque $\dim(\mathcal{H}_\varrho) = n$. Mais, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varrho(l)(f_i) = \chi_i(l)f_i$, pour tout $l \in L$, et donc

$$\mathcal{H}_\varrho = \mathbb{C}\ f_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\ f_n, \text{ avec } \varrho(L)f_i \subseteq \mathbb{C}\ f_i, \text{ pour tout i},$$

c'est à dire,

$$\varrho = \mathrm{Ind}_H^L \chi \cong \bigoplus_{i=1}^n \chi_i.$$

Maintenant, pour $1 \leq i, j \leq n$, $\chi_i \cdot \chi_j^{-1}$ est un caractère de L, identiquement égal à 1 sur H. Il existe donc $\eta \in (H \setminus L)^\wedge$ tel que

$$\chi_i \cdot \chi_j^{-1} = \eta \circ p.$$

D'un autre côté, si $\widetilde{\chi}$ est une extension quelconque du caractère χ à L, et si η est un élément de $(H \setminus L)^\wedge$, on peut poser

$$(\widetilde{\chi} \cdot \eta)(l) = \widetilde{\chi}(l)\eta(p(l)), \text{ pour tout } l \in L.$$

$(\widetilde{\chi} \cdot \eta)$ est alors un caractère de L, et

$$((\widetilde{\chi} \cdot \eta)(\gamma))^n = (\widetilde{\chi} \cdot \eta)(\gamma^n) = \widetilde{\chi}(\gamma^n)\eta(p(\gamma^n)) = \chi(\gamma^n).$$

Ainsi, $(\widetilde{\chi} \cdot \eta)(\gamma)$ est une racine n^{ieme} de $\chi(\gamma^n)$, et il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $(\widetilde{\chi} \cdot \eta)(\gamma) = \xi_i$. D'où, pour tout $l = h \cdot \gamma^m \in L$ (avec $h \in H$ et $m \in \mathbb{Z}$),

$$(\widetilde{\chi} \cdot \eta)(l) = (\widetilde{\chi} \cdot \eta)(h)(\widetilde{\chi} \cdot \eta)(\gamma^m) = \chi(h)((\widetilde{\chi} \cdot \eta)(\gamma))^m = \chi(h)\xi_i^m = \chi_i(l).$$

Puisque $[L : H] = n$, on a Card($(H \setminus L)^\wedge$)$=n$, et donc, finalement,

$$\varrho = \mathrm{Ind}_H^L \chi \cong \bigoplus_{\eta \in (H \setminus L)^\wedge} (\widetilde{\chi} \cdot \eta).$$

Cas 2: $[L : H] = +\infty$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $\gamma^n \notin \mathbb{Z}$ et $H \setminus L$ est un groupe abélien infini sans torsion. Pour tout $l \in L$, il existe donc des éléments $h \in H$ et $m \in \mathbb{Z}$ uniques tels que $l = h \cdot \gamma^m$. Soit

$$\widetilde{\chi} : L \longrightarrow \mathbb{C}\ , \qquad l = h \cdot \gamma^m \longmapsto \widetilde{\chi}(l) = \chi(h).$$

$\widetilde{\chi}$ est un caractère de L, qui étend le caractère χ à L.
[En effet, puisque la décomposition $l = h \cdot \gamma^m$ (pour $h \in H$ et $m \in \mathbb{Z}$) est unique, l'application est évidemment bien définie. De plus, pour tout $l \in L$, $|\widetilde{\chi}(l)| = 1$. Soient maintenant $l_1 = h_1 \cdot \gamma^{m_1}$ et $l_2 = h_2 \cdot \gamma^{m_2}$ deux éléments de L (avec $h_1, h_2 \in H$ et $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$).On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}(l_1 \cdot l_2) &= \widetilde{\chi}(h_1 \cdot \gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{m_2}) = \widetilde{\chi}(h_1 \cdot \gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{-m_1} \cdot \gamma^{m_1+m_2}) \\
&= \chi(h_1 \cdot \gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{-m_1}) = \chi(h_1)\chi(\gamma^{m_1} \cdot h_2 \cdot \gamma^{-m_1}) \\
&= \chi(h_1)\chi(h_2) = \widetilde{\chi}(l_1)\widetilde{\chi}(l_2)
\end{aligned}$$

et $\widetilde{\chi}$ est donc un caractère de L, dont la restriction à H est égale à χ.]

On va maintenant réaliser la représentation ϱ comme suit (voir, par exemple, [Kir1, Preuve du Théorème 7.1]),

$$\mathcal{H}_\varrho = l^2(H \setminus L)$$

et, pour tout $f \in \mathcal{H}_\varrho$, $l = h \cdot \gamma^m \in L$ (avec $h \in H$ et $m \in \mathbb{Z}$), et $p(\gamma^n) \in H \setminus L$ (avec $n \in \mathbb{Z}$)

$$(\varrho(l)f)(p(\gamma^n)) = \chi(\gamma^n \cdot h \cdot \gamma^{-n})f(p(\gamma^n) \cdot \gamma^m) = \chi(h)f(p(\gamma^{n+m})).$$

Soit $\mathcal{F} : l^2(H \setminus L) \to L^2((H \setminus L)^\wedge)$ la transformée de Fourier. C'est une isométrie de $l^2(H \setminus L)$ sur $L^2((H \setminus L)^\wedge)$. Soit alors $\tilde{\varrho}$ la représentation de L définie par

$$\tilde{\varrho}(l) = \mathcal{F} \circ \varrho(l) \circ \mathcal{F}^{-1}, \text{ pour tout } l \in L.$$

$\tilde{\varrho}$ est bien évidemment équivalente à la représentation ϱ, et pour tout $l = h \cdot \gamma^m \in L$ (avec $h \in H$ et $m \in \mathbb{Z}$), tout $f \in L^2((H \setminus L)^\wedge)$, et tout $\eta \in (H \setminus L)^\wedge$, on a

$$\begin{aligned}
(\tilde{\varrho}(l)f)(\eta) &= \mathcal{F}(\varrho(l)(\mathcal{F}^{-1}(f)))(\eta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\varrho(l)(\mathcal{F}^{-1}(f))(p(\gamma^n))\overline{\eta(p(\gamma^n))} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(h)\mathcal{F}^{-1}(f)(p(\gamma^{n+m}))\overline{\eta(p(\gamma^n))} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(h)\mathcal{F}^{-1}(f)(p(\gamma^n)\cdot p(\gamma^m))\overline{\eta(p(\gamma^n))} \\
&= \chi(h) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{-1}(f)(p(\gamma^n))\overline{\eta(p(\gamma^n)\cdot p(\gamma^{-m}))} \\
&= \chi(h)\eta(p(\gamma^m)) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{-1}(f)(p(\gamma^n))\overline{\eta(p(\gamma^n))} \\
&= \chi(h)\eta(p(\gamma^m))\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(\eta) \\
&= \widetilde{\chi}(l)\eta(p(l))f(\eta) = (\widetilde{\chi}\cdot\eta)(l)f(\eta)
\end{aligned}$$

où $(\widetilde{\chi}\cdot\eta)$ est le caractère de L défini par

$$(\widetilde{\chi}\cdot\eta)(l) = \widetilde{\chi}(l)(\eta \circ p)(l), \text{ pour tout } l \in L,$$

pour tout $\eta \in (H \setminus L)^\wedge$. D'où,

$$\varrho \cong \int_{(H\setminus L)^\wedge} (\widetilde{\chi}\cdot\eta)\, d\eta, \tag{4.1}$$

où $d\eta$ est la mesure de Haar sur $(H \setminus L)^\wedge$, normalisée de telle manière à rendre valide le théorème d'inversion. Maintenant, si $\widetilde{\chi_1}$ et $\widetilde{\chi_2}$ sont deux extensions du caractère χ à L, alors $\widetilde{\chi_i}^{-1} \cdot \widetilde{\chi_2}$ est un caractère de L, identiquement égal à 1 sur H, et il existe donc $\eta \in (H \setminus L)^\wedge$ tel que l'on ait

$$(\widetilde{\chi_1}^{-1} \cdot \widetilde{\chi_2})(l) = \eta(p(l)), \text{ pour tou } l \in L,$$

c'est à dire, $\widetilde{\chi_2} = (\widetilde{\chi_1} \cdot \eta)$, et la décomposition (4.1) est indépendante du choix de l'extension $\widetilde{\chi}$ de χ. Ceci achève la preuve du lemme 4.1.2. □

Remarque: En pratique, lorsque $[L : H]$ est infini, sauf mention contraire, nous étendrons toujours trivialement le caractère χ de H à L, c'est à dire que, l'extension $\widetilde{\chi}$ de χ à L sera définie par:

$$\widetilde{\chi}(l) = \chi(h), \text{ pour tout } l = h \cdot \gamma^n \in L.$$

Soit maintenant Γ un groupe nilpotent discret de type fini sans torsion, H un sous-groupe normal de Γ tel que $H \setminus \Gamma$ soit sans torsion, et soit χ un caractère de H. A la représentation $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi$, on va *associer* deux suites (stationnaires) de sous-groupes de Γ, $(S^i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2}))_{(i \geq 0)}$ et $(S_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}))_{(i \geq -1)}$ (pour les détails, voir plus loin), possédant pour tout $i \geq 1$ les proriétés suivantes:

(a) $S^{i+1}(\chi_1, \dots, \chi_{i-1})$ est un sous-groupe normal de $S_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-1})$ contenant le sous-groupe $S^i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2})$,

(b) $[S_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}), S^{i+1}(\chi_1, \dots, \chi_{i-1})] \subseteq S^i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2})$.

Ces suites vont nous permettre de décomposer, par récurrence, $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi$ en intégrale hilbertienne de représentations monomiales de Γ, et à terme, en intégrale hilbertienne de représentations monomiales irréductibles de Γ.

Posons donc

$$S_{-1} = \Gamma \qquad S^0 = H \qquad S_0 = \mathrm{St}_H^\Gamma(\chi).$$

Si $S^0 = S_0$, alors on définit, pour tout $i \geq 1$,

$$\begin{cases} S^i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2}) = S^0 \\ S_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}) = S_0 \\ r_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2}) = 0 \end{cases}$$

pour tout caractère $\chi_k \in (S^{k-1}(\chi_1, \dots, \chi_{k-3}) \setminus S^k(\chi_1, \dots, \chi_{k-2}))^\wedge$, et tout $1 \leq k \leq i-1$.

Remarque: Si $-2 \leq k \leq 0$, on convient alors que $S^{k+2}(\chi_1, \dots, \chi_k) = S^{k+2}$ et que $S_{k+1}(\chi_1, \dots, \chi_k) = S_{k+1}$.

Dans le cas contraire, le groupe discret $S^0 \setminus S_0$ est nilpotent de type fini, et sans torsion. Soit $p_0 : S_0 \to S^0 \setminus S_0$ la projection canonique. D'après le lemme 4.1.1, il existe $\gamma_1 \in S_0 - S^0$ tel que $p_0(\gamma_1) \in \mathcal{Z}(S^0 \setminus S_0)$ et $\langle p_0(\gamma_1) \rangle \setminus (S^0 \setminus S_0)$ soit nilpotent discret de type fini sans torsion, de rang égal à $\mathrm{rang}(S^0 \setminus S_0) - 1$. Soit alors $S^1 = \langle S^0, \gamma_1 \rangle$ le sous-groupe de S_0 engendré par S^0 et par γ_1. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $[S_0, \gamma_1^n] \in S^0$ et donc, de ce fait, $[S_0, S^1] \subseteq S^0$.
[Ceci provient du fait que S^0 est un sous-groupe normal de S_0 et que $p_0(\gamma_1) \in \mathcal{Z}(S^0 \setminus S_0)$.]
De plus, $S^1 \setminus S_0$ est nilpotent discret de type fini et sans torsion. Posons alors

$$S_1 = \{ s_0 \in S_0;\ \chi([s_0, s_1]) = 1, \text{ pour tout } s_1 \in S^1 \}.$$

S_1 est un sous-groupe de S_0, contenant S^1.
[En effet, $e \in S_1$ et S_1 est donc non-vide. Soit $s, t \in S_1$. Pour tout $s_1 \in S^1$, on a

$$\begin{aligned} \chi([s^{-1}, s_1]) &= \chi(s[s^{-1}, s_1]s^{-1}) \text{ (car } s \in S_1 \subseteq S_0 \text{ et } [s^{-1}, s_1] \in S^0) \\ &= \chi(s_1 s s_1^{-1} s^{-1}) = \chi([s, s_1])^{-1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi([st, s_1]) &= \chi(st s_1 t^{-1} s^{-1} s_1^{-1}) = \chi(s[t, s_1]s^{-1}[s, s_1]) = \chi(s[t, s_1]s^{-1})\chi([s, s_1]) \\ &= \chi([t, s_1])\chi([s, s_1]) = 1 \end{aligned}$$

et S_1 est bien un sous-groupe de S_0. Soient maintenant $s_1 = s_0 \cdot \gamma_1^n$ et $t_1 = t_0 \cdot \gamma_1^m$ (avec $s_0, t_0 \in S^0$ et $n, m \in \mathbb{Z}$) deux éléments quelconques de S^1. On a,

$$\begin{aligned} \chi([s_1, t_1]) &= \chi(s_0 \gamma_1^n t_0 \gamma_1^m \gamma_1^{-n} s_0^{-1} \gamma_1^{-m} t_0^{-1}) = \chi(s_0 \gamma_1^n t_0 \gamma_1^{-n} \gamma_1^m s_0^{-1} \gamma_1^{-m} t_0^{-1}) \\ &= \chi(s_0)\chi(\gamma_1^n t_0 \gamma_1^{-n})\chi(\gamma_1^m s_0^{-1} \gamma_1^{-m})\chi(t_0^{-1}) = \chi(s_0)\chi(t_0)\chi(s_0^{-1})\chi(t_0^{-1}) = 1 \end{aligned}$$

d'où $S^1 \subseteq S_1$.]

Si $S^1 = S_1$, on définit alors, pour tout $i \geq 2$ et tout caractère $\chi_k \in (S^{k-1}(\chi_1, \dots, \chi_{k-3}) \setminus S^k(\chi_1, \dots, \chi_{k-2}))^\wedge$ (avec $2 \leq k \leq i-1$)

$$\begin{cases} S^i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2}) = S^1 \\ S_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}) = S_1 \\ r_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2}) = 0 \end{cases}$$

Au contraire, si $S^1 \subsetneq S_1$, alors $S^1 \setminus S_1$ est sans torsion. Soit $p_1 : S_1 \to S^1 \setminus S_1$ la projection canonique. Il existe alors $\gamma_2 \in S_1 - S^1$ tel que $p_1(\gamma_2) \in \mathcal{Z}(S^1 \setminus S_1)$ et $\langle p_1(\gamma_2) \rangle \setminus (S^1 \setminus S_1)$ soit sans torsion. Posons alors $S^2 = \langle S^1, \gamma_2 \rangle$. S^2 est un sous-groupe normal de S_1, contenant S^1 et vérifiant $[S_1, S^2] \subseteq S^1$. En outre, $S^2 \setminus S_1$ est sans torsion, et

$$\operatorname{rang}(S^2 \setminus S_1) = \operatorname{rang}(S^1 \setminus S_1) - 1 \leq \operatorname{rang}(S^1 \setminus S_0) - 1 \leq \operatorname{rang}(S^0 \setminus S_0) - 2.$$

Soit maintenant $\widetilde{\chi}$ une extension du caractère χ au groupe S^1 (on a vu plus haut qu'une telle extension existe bel et bien), et soit $\chi_1 \in (S^0 \setminus S^1)^\wedge$ un caractère du groupe abélien $S^0 \setminus S^1$. L'application

$$(\widetilde{\chi} \cdot \chi_1)(s_1) = \widetilde{\chi}(s_1)\chi_1(p_1(s_1)), \text{ pour tout } s_1 \in S^1,$$

est bien définie et est un caractère de S^1. Posons

$$S_2(\chi_1) = \left\{ s_1 \in S_1;\ (\widetilde{\chi} \cdot \chi_1)([s_1, s_2]) = 1, \text{ pour tout } s_2 \in S^2 \right\}.$$

$S_2(\chi_1)$ est un sous-groupe de S_1 contenant S^2.

Supposons maintenant que l'on ait défini les sous-groupes $S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2})$ et $S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ (pour $\chi_1 \in (S^0 \setminus S^1)^\wedge$, $\chi_2 \in (S^1 \setminus S^2)^\wedge$, $\chi_3 \in (S^2 \setminus S^3(\chi_1))^\wedge$, et $\chi_j \in (S^{j-1}(\chi_1, \dots, \chi_{j-3}) \setminus S^j(\chi_1, \dots, \chi_{j-2}))^\wedge$, avec $4 \leq j \leq n-1$). Si $S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) = S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2})$, on pose alors, pour tout $i \geq n+1$ et tout caractère $\chi_j \in (S^{j-1}(\chi_1, \dots, \chi_{j-3}) \setminus S^j(\chi_1, \dots, \chi_{j-2}))^\wedge$

(avec $n+1 \leq j \leq i-1$),

$$\begin{cases} S^i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2}) = S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}) \\ S_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}) = S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) \\ r_i(\chi_1, \dots, \chi_{i-2}) = 0 \end{cases}$$

Autrement, soit $p_n : S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) \to S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}) \setminus S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ la projection canonique. $S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}) \setminus S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ étant sans torsion, il existe alors $\gamma_{n+1} \in S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) - S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2})$ tel que $p_n(\gamma_{n+1}) \in \mathcal{Z}(S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}) \setminus S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}))$, et $\langle p_n(\gamma_{n+1}) \rangle \setminus ((S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}) \setminus S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}))$ soit sans torsion. On pose alors

$$S^{n+1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) = \langle S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}), \gamma_{n+1} \rangle.$$

$S^{n+1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ est un sous-groupe normal de $S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ contenant $S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2})$ et vérifiant

$$[S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}), S^{n+1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})] \subseteq S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}).$$

En outre, $S^{n+1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) \setminus S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ est un groupe nilpotent discret de type fini sans torsion, et

$$\operatorname{rang}((S^{n+1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) \setminus S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})) \leq \operatorname{rang}(S^0 \setminus S_0) - n.$$

Soit maintenant $(\cdots((\widetilde{\chi} \cdot \chi_1)^\sim \cdot \chi_2)^\sim \cdots)^\sim \cdot \chi_{n-1})^\sim$ une extension du caractère $(\cdots((\widetilde{\chi} \cdot \chi_1)^\sim \cdot \chi_2)^\sim \cdots)^\sim \cdot \chi_{n-1})$ au groupe $S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2})$, et soit $\chi_n \in (S^{n-1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-3}) \setminus S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}))^\wedge$. Afin d'alléger les notations, pour tout $i \geq 1$, on dénotera dorénavant simplement par $\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_i$ le caractère $(\cdots((\widetilde{\chi} \cdot \chi_1)^\sim \cdot \chi_2)^\sim \cdots)^\sim \cdot \chi_{i-1})^\sim \cdot \chi_i$.
Soit $\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_n$ le caractère de $S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2})$ défini par

$$(\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_n)(s_n) = (\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_{n-1})^\sim(s_n)\chi_n(p_n(s_n)), \text{ pour tout } s_n \in S^n(\chi_1, \dots, \chi_{n-2}).$$

On pose alors

$$\begin{aligned} S_{n+1}(\chi_1, \dots, \chi_n) \quad = \quad & \big\{ s_n \in S_n(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}); (\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_n)([s_n, s_{n+1}]) = 1, \\ & \qquad \text{pour tout } s_{n+1} \in S^{n+1}(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) \big\}. \end{aligned}$$

$S_{n+1}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ est un sous-groupe de $S_n(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1})$, contenant $S_{n+1}(\chi_1, \ldots, \chi_{n-1})$.

Par construction des suites $(S^i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2}))_{i \geq 0}$ et $(S_i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}))_{i \geq -1}$, il existe $j_0 \geq 0$ tel que l'on ait

$$S^j(\chi_1, \ldots, \chi_{j-2}) = S_j(\chi_1, \ldots, \chi_{j-1}),$$

pour tout $j \geq j_0$ et tout caractères $\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}$ (on voit que ceci est vrai au moins pour tout $j_0 > \operatorname{rang}(S^0 \setminus S_0)$).

Lemme 4.1.3 *Pour tout $i \geq 0$ et tout caractère $\chi_1, \ldots, \chi_i$, on a*

$$\mathrm{St}_{S^i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2})}^{S_{i-1}(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2})}(\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_i) = S_i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}).$$

Preuve: Soit $i \geq 0$ et $\chi_1, \ldots, \chi$ fixés. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{St}_{S^i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2})}^{S_{i-1}(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2})}(\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_i) &= \{s_{i-1} \in S_{i-1}(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2});\ (\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_i)([s_{i-1}, s_i]) = 1 \\ &\qquad \text{pour tout } s_i \in S^i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2})\} \\ &= \{s_{i-1} \in S_{i-1}(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2});\ (\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_{i-1})([s_{i-1}, s_i]) = 1 \\ &\qquad \text{pour tout } s_i \in S^i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2})\} \\ &= S_i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de ce lemme. □

Lemme 4.1.4 *Pour tout $i \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi \cong & \int_{(S^0 \setminus S^1)^\wedge}^{\oplus} (\ldots (\int_{(S^{i-1}(\chi_1, \ldots, \chi_{i-3}^{1, \ldots, i-5}) \setminus S^i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2}^{1, \ldots, i-4}))^\wedge}^{\oplus} \\ & \mathrm{Ind}_{S^i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-2}^{1, \ldots, i-4})}^\Gamma (\chi \cdot \chi_1 \cdots \chi_i^{1, \ldots, i-2})\, d\chi_i^{1, \ldots, i-2}) \ldots) d\chi_1 \end{aligned}$$

où $d\chi_j^{1, \ldots, j-2}$ est la mesure de Haar sur $(S^{j-1}(\chi_1, \ldots, \chi_{j-3}^{1, \ldots, j-5}) \setminus S^j(\chi_1, \ldots, \chi_{j-2}^{1, \ldots, j-4}))^\wedge$, normalisée de manière à rendre valide la formule d'inversion, pour tout $1 \leq j \leq i$.

Preuve: On va prouver ce résultat par récurrence sur l'entier i. Si $i = 0$, alors $S^0 = H$ et $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi \cong \mathrm{Ind}_{S^0}^\Gamma \chi$. Supposons donc le résultat vrai pour $i \leq n$. On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence et le lemme 4.1.2,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi &\cong \int_{(S^0\backslash S^1)^\wedge}^{\oplus} (\dots(\int_{(S^{n-1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-3}^{1,\dots,n-5})\backslash S^n(\chi_1,\dots,\chi_{n-2}^{1,\dots,n-4}))^\wedge}^{\oplus} \\
&\qquad \mathrm{Ind}_{S^n(\chi_1,\dots,\chi_{n-2}^{1,\dots,n-4})}^\Gamma(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_n^{1,\dots,n-2})\, d\chi_n^{1,\dots,n-2})\dots)d\chi_1 \\
&\cong \int_{(S^0\backslash S^1)^\wedge}^{\oplus} (\dots(\int_{(S^{n-1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-3}^{1,\dots,n-5})\backslash S^n(\chi_1,\dots,\chi_{n-2}^{1,\dots,n-4}))^\wedge}^{\oplus} \\
&\quad \mathrm{Ind}_{S^{n+1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-1}^{1,\dots,n-1})}^\Gamma \mathrm{Ind}_{S^n(\chi_1,\dots,\chi_{n-2}^{1,\dots,n-4})}^{S^{n+1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-1}^{1,\dots,n-1})}(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_n^{1,\dots,n-2}) \\
&\qquad d\chi_n^{1,\dots,n-2})\dots)d\chi_1 \\
&\cong \int_{(S^0\backslash S^1)^\wedge}^{\oplus} (\dots(\int_{(S^{n-1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-3}^{1,\dots,n-5})\backslash S^n(\chi_1,\dots,\chi_{n-2}^{1,\dots,n-4}))^\wedge}^{\oplus} \\
&\quad \mathrm{Ind}_{S^{n+1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-1}^{1,\dots,n-1})}^\Gamma \int_{S^n(\chi_1,\dots,\chi_{n-2}^{1,\dots,n-4})\backslash S^{n+1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-1}^{1,\dots,n-3}))^\wedge}^{\oplus} \\
&\quad (\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{n+1}^{1,\dots,n-1})d\chi_{n+1}^{1,\dots,n-1})\, d\chi_n^{1,\dots,n-2})\dots)\, d\chi_1 \\
&\cong \int_{(S^0\backslash S^1)^\wedge}^{\oplus} (\dots(\int_{S^n(\chi_1,\dots,\chi_{n-2}^{1,\dots,n-4})\backslash S^{n+1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-1}^{1,\dots,n-3}))^\wedge}^{\oplus} \\
&\quad \mathrm{Ind}_{S^{n+1}(\chi_1,\dots,\chi_{n-1}^{1,\dots,n-1})}^\Gamma(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{n+1}^{1,\dots,n-1}) \\
&\qquad d\chi_{n+1}^{1,\dots,n-1})\, d\chi_n^{1,\dots,n-2})\dots)\, d\chi_1
\end{aligned}
$$

et le résultat est donc vrai à l'ordre $n+1$. □

Remarque: On écrit $\chi_i^{1,\dots,i-2}$ afin de garder en mémoire que ce caractère peut dépendre, éventuellement, des $(i-2)$ caractères précédents $\chi_1, \chi_2, \chi_3^1, \dots, \chi_{i-2}^{1,\dots,i-4}$.

Théorème 4.1.1 *On conserve les notations introduites antérieurement. Soit $j_0 \geq 0$ le plus petit entier vérifiant*

$$S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2}) = S_{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-1}),$$

pour tout caractère $\chi_1,\dots\chi_{j_0-1}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi &\cong \int_{(S^0\backslash S^1)^\wedge}^{\oplus} (\dots(\int_{(S^{j_0-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-3}^{1,\dots,j_0-5})\backslash S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2}^{1,\dots,j_0-4}))^\wedge}^{\oplus} \\
&\quad \mathrm{Ind}_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2}^{1,\dots,j_0-4})}^\Gamma(\chi\cdot\chi_1\cdot\chi_2\cdot\chi_{j_0-1}^{1,\dots,j_0-3}\cdot\chi_{j_0}^{1,\dots,j_0-2}) \\
&\qquad d\chi_{j_0}^{1,\dots,j_0-2})\dots)d\chi_1
\end{aligned}
$$

où $d\chi_j^{1,\dots,j-2}$ est la mesure de Haar sur $(S^{j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-3}^{1,\dots,j-5})\setminus S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2}^{1,\dots,j-4}))^\wedge$ (normalisée de telle manière à rendre valide la formule d'inversion), pour tout $0\le j\le j_0$, est une décomposition en composantes irréductibles de la représentation $\mathrm{Ind}_H^\Gamma\chi$.

Preuve: D'après le lemme précédent, il suffit de prouver que chaque composante apparaissant dans le décomposition de $\mathrm{Ind}_H^\Gamma\chi$ est irréductible. Fixons donc des caractères $\chi_j^{1,\dots,j-2}\in(S^{j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-3}^{1,\dots,j-5})\setminus S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2}^{1,\dots,j-4}))^\wedge$, pour tout $1\le j\le j_0$ (que l'on dénote simplement par $\chi_1,\dots,\chi_{j_0}$) et montrons que la représentation $\mathrm{Ind}^\Gamma_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{j_0})$ est irréductible. D'après le critère d'irréductibilité de G.W. Mackey, il suffit de montrer que pour tout $\gamma\in Q_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}-S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})$, il existe

$$s_{j_0}\in\gamma^{-1}\cdot S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})\cdot\gamma\cap S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})\qquad(\star)$$

tel que $(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{j_0})(\gamma s_{j_0}\gamma^{-1})\neq(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{j_0})(s_{j_0})$. Fixons $0\le j\le j_0$ et

$$\gamma\in(Q_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}\cap S_{j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-2}))-(Q_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}\cap S_j(\chi_1,\dots,\chi_{j-1})).$$

Puisque $\gamma\in S_{j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-2})$, on a

$$\begin{aligned}S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2}) &= \gamma^{-1}\cdot S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2})\cdot\gamma\cap S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2})\\ &\subseteq \gamma^{-1}\cdot S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})\cdot\gamma\cap S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2}).\end{aligned}$$

Par contre, $\gamma\notin S_j(\chi_1,\dots,\chi_{j-1})=\mathrm{St}^{S_{j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-2})}_{S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2})}(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_j)$ (d'après le lemme 4.1.3). Il existe ainsi $s_j\in S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2})$ tel que

$$\begin{aligned}(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{j_0})(\gamma s_j\gamma^{-1}) &= (\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_j)(\gamma s_j\gamma^{-1})\\ &\neq (\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_j)(s_j)=(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{j_0})(s_j)\end{aligned}$$

et la condition $(\star)$ est vérifiée. Mais, par définition de l'entier j_0, on a

$$S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})=S_{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-1}).$$

D'où,

$$\begin{aligned}Q_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}-S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2}) &= \bigcup_{j=0}^{j_0}((Q_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}\cap S_{j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-2}))\\ &\quad-(Q_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}\cap S_j(\chi_1,\dots,\chi_{j-1}))),\end{aligned}$$

et la représentation $\mathrm{Ind}_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}^{\Gamma}(\chi\cdot\chi_1\cdots\chi_{j_0})$ est irréductible. $\square$

Remarque 1: Si $H\setminus\Gamma$ est abélien, alors les suites de sous-groupes $(S^i(\chi_1,\dots,\chi_{i-2}))_{(i\geq 0)}$ et $(S_i(\chi_1,\dots,\chi_{i-1}))_{(i\geq -1)}$ ne dépendent plus des caractères $\chi_1,\dots,\chi_{i-1}$ et peuvent donc se noter simplement $(S^i)_{(i\geq 0)}$ et $(S_i)_{(i\geq -1)}$.

Remarque 2: Ce genre de procédure (pour décomposer une représentation monomiale en irréductibles) reste valide dès l'instant qu'il existe un indice $j_0\geq 0$ tel que, pour tout $i\geq j_0$ et tout caractères $\chi_1,\dots,\chi_{i-1}$,

$$S^i(\chi_1,\dots,\chi_{i-2})=S_i(\chi_1,\dots,\chi_{i-1}).$$

En particulier, elle reste donc vrai dans le cas des groupes nilpotents finis.

4.2 Applications et exemples.

Si Γ est, soit un groupe discret nilpotent de type fini sans torsion, soit un groupe nilpotent fini, alors le Théorème 4.1.1 nous donne une décomposition en irréductibles de sa représentation régulière (droite) λ, puisque $\lambda\cong\mathrm{Ind}_{\{e\}}^{\Gamma}1$ et $\{e\}$ est normal dans Γ.

Corollaire 4.2.1 *Soit Γ un groupe nilpotent discret de type fini sans torsion (ou fini), et soit λ la représentation régulière (droite) de Γ. Formons les deux suites de sous-groupes de Γ, $(S^i(\chi_1,\dots,\chi_{i-2}))_{(i\geq 0)}$ et $(S_i(\chi_1,\dots,\chi_{i-1}))_{(i\geq -1)}$, associées à la représentation $\lambda=\mathrm{Ind}_{\{e\}}^{\Gamma}1$. Si j_0 est le premier entier tel que*

$$S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})=S_{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-1})$$

pour tous caractères $\chi_1,\dots,\chi_{j_0-1}$, alors λ se décompose en irréductibles de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\lambda\ \cong\ &\int_{(S^0\setminus S^1)^\wedge}^{\oplus}(\dots(\int_{(S^{j_0-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-3}^{1,\dots,j_0-5})\setminus S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2}^{1,\dots,j_0-4}))^\wedge}^{\oplus}\\ &\mathrm{Ind}_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2}^{1,\dots,j_0-4})}^{\Gamma}(((\dots((1\cdot\chi_1)^\sim\cdot\chi_2)^\sim\dots)^\sim\cdot\chi_{j_0-1}^{1,\dots,j_0-3})^\sim\cdot\chi_{j_0}^{1,\dots,j_0-2}))\\ &\qquad d\chi_{j_0}^{1,\dots,j_0-2})\dots)d\chi_1\end{aligned}$$

où $d\chi_j^{1,\dots,j-2}$ est la mesure de Haar sur $(S^{j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-3}^{1,\dots,j-5})\setminus S^j(\chi_1,\dots,\chi_{j-2}^{1,\dots,j-4}))^\wedge$ normalisée de telle manière à rendre valide la formule d'inversion, pour tout $0\leq j\leq j_0$.

Exemple 5: Soit le groupe diédral $\Gamma = D_8$ (voir, par exemple, [Ser, §5.3]). C'est le groupe des rotations et des symétries du plan qui conservent un polygone régulier à 8 sommets. Il contient 8 rotations et 8 symétries, et est d'ordre 16. Si on dénote par r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, et par s une symétrie quelconque, on a alors les relations:

$$r^8 = 1 \qquad\qquad s^2 = 1 \qquad\qquad srs = r^{-1}$$

Puisque D_8 est un 2-groupe fini, D_8 est donc nilpotent. Soit C_8 le sous-groupe de D_8 composé des 8 rotations. Alors, tout élément de D_8 s'écrit de manière unique, soit sous la forme r^k (avec $0\leq k\leq 7$) s'il appartient à C_8, soit sr^k (avec $0\leq k\leq 7$) si ce n'est pas le cas. Soit $\lambda = \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{D_8} 1$ la représentation régulière droite de D_8. On pose $S^0 = \{e\}$. On a donc $S_0 = D_8$. On a $S_0 = \langle r, r^2, r^4, s\rangle$, et $r^4 \in \mathcal{Z}(D_8)$. Soit donc $S^1 = \langle r^4\rangle = \{1, r^4\}$. On a alors $S_1 = D_8$. Soit 1_{S^1} l'extension triviale de 1 à S^1. On a

$$\{(1_{S^1}\cdot\eta_1);\, \eta_1 \in (S^0\setminus S^1)^\wedge\} = \{1_{S_1}, \chi_1\},$$

où χ_1 est le caractère de S^1 défini par $\chi_1(r^4) = -1$. Puisque $S_1 = \langle S^1, r^2, r, s\rangle$ et $S^1r^2 \in \mathcal{Z}(S^1\setminus S_1)$, posons donc $S^2 = \langle S^1, r^2\rangle = \langle r^2\rangle$. On a alors

$$S_2(1_{S^1}) = D_8 \qquad \text{et} \qquad S_2(\chi_1) = C_8.$$

Soient 1_{S^2} et $\widetilde{\chi_1}$ les extensions à S^2 de 1_{S^1} et de χ_1. On a

$$\{(1_{S^2}\cdot\eta_2);\, \eta_2\in(S^1\setminus S^2)^\wedge\} = \{1_{S^2},\chi_2\} \text{ et } \{(\widetilde{\chi_1}\cdot\eta_2);\, \eta_2\in(S^1\setminus S^2)^\wedge\} = \{\chi_{1,1},\chi_{1,2}\},$$

où χ_2, $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,2}$ sont les caractères de S^2 définis par

$$\chi_2(r^2) = -1 \qquad \chi_{1,1}(r^2) = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \chi_{1,2}(r^2) = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Puisque $S_2(1_{S^1}) = \langle S^2, r, s\rangle$ et que $S^2r \in \mathcal{Z}(S^2\setminus S_2(1_{S^1}))$, posons donc $S^3(1_{S^1}) = \langle S^2, r\rangle = \langle r\rangle = C_8$. De même, $S_2(\chi_1) = \langle S^2, r\rangle$ et $S^2r\in\mathcal{Z}(S^2\setminus S_2(\chi_1))$. Posons $S^3(\chi_1) = C_8$. Il vient que

$$S_3(1_{S^2}) = D_8 \qquad \text{et} \qquad S_3(\chi_2) = S_3(\chi_{1,1}) = S_3(\chi_{1,2}) = C_8 = S^3(\chi_1).$$

Soient 1_{C_8}, $\widetilde{\chi_2}$, $\widetilde{\chi_{1,1}}$ et $\widetilde{\chi_{1,2}}$ les extensions à C_8 des caractères 1_{S^2}, χ_2, $\chi_{1,1}$ et $\chi_{1,2}$. On a

$$\begin{aligned}
\{(1_{C_8} \cdot \eta_3);\ \eta_3 \in (S^2 \setminus C_8)^\wedge\} &= \{1_{C_8}, \chi_3\}, \\
\{(\widetilde{\chi_2} \cdot \eta_3);\ \eta_3 \in (S^2 \setminus C_8)^\wedge\} &= \{\chi_{2,1}, \chi_{2,2}\}, \\
\{(\widetilde{\chi_{1,1}} \cdot \eta_3);\ \eta_3 \in (S^2 \setminus C_8)^\wedge\} &= \{\chi_{1,1,1}, \chi_{1,1,2}\}, \\
\{(\widetilde{\chi_{1,2}} \cdot \eta_3);\ \eta_3 \in (S^2 \setminus C_8)^\wedge\} &= \{\chi_{1,2,1}, \chi_{1,2,2}\},
\end{aligned}$$

où les caractères χ_3, $\chi_{2,1}$, $\chi_{2,2}$, $\chi_{1,1,1}$, $\chi_{1,1,2}$, $\chi_{1,2,1}$ et $\chi_{1,2,2}$ de C_8 sont définis par

$$\chi_3(r) = -1 \qquad \chi_{2,1}(r) = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \chi_{2,2}(r) = e^{i\frac{3\pi}{2}} \qquad \chi_{1,1,1}(r) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\chi_{1,1,2}(r) = e^{i\frac{5\pi}{4}} \qquad \chi_{1,2,1}(r) = e^{i\frac{7\pi}{4}} \qquad \chi_{1,2,2}(r) = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

On a $S_3(1_{S^2}) = D_8$, posons donc $S^4(1_{S^2}) = D_8$. On a alors $S_4(1_{C_8}) = S_4(\chi_3) = D_8 = S^4(1_{S^2})$, et, si 1_{D_8}, $\widetilde{\chi_3}$ sont des extensions à D_8 des caractères 1_{C_8} et χ_3, alors

$$\begin{aligned}
\{(1_{D_8} \cdot \eta_4);\ \eta_4 \in (C_8 \setminus D_8)^\wedge\} &= \{1_{D_8}, \chi_4\} \\
\{(\widetilde{\chi_3} \cdot \eta_4);\ \eta_4 \in (C_8 \setminus D_8)^\wedge\} &= \{\chi_{3,1}, \chi_{3,2}\}
\end{aligned}$$

où les caractères χ_4, $\chi_{3,1}$ et $\chi_{3,2}$ sont définis par

$$\begin{aligned}
\chi_4(r) &= 1, & \chi_4(s) &= -1, \\
\chi_{3,1}(r) &= -1, & \chi_{3,1}(s) &= 1 \\
\chi_{3,2}(r) &= -1, & \chi_{3,2}(s) &= -1
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théorème 4.1.1, la représentation régulière (droite) λ de D_8 se décompose en irréductibles de la façon suivante:

$$\lambda \cong 1_{D_8} \oplus \chi_4 \oplus \chi_{3,1} \oplus \chi_{3,2} \oplus \bigoplus_{i,j=1}^{2} \mathrm{Ind}_{C_8}^{D_8} \chi_{1,i,j} \oplus \bigoplus_{k=1}^{2} \mathrm{Ind}_{C_8}^{D_8} \chi_{2,k}.$$

Voici maintenant un exemple où H est un sous-groupe normal de Γ tel que $H \setminus \Gamma$ admette des éléments de torsion, auquel s'applique la méthode de décomposition présentée ci-dessus.

Exemple 6: Soit $\Gamma = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ le groupe de Heisenberg discret, muni du produit

$$(p_1, p_2, p_3) \cdot (q_1, q_2, q_3) = (p_1 + q_1 + p_3 q_2, p_2 + q_2, p_3 + q_3),$$

pour tous $(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3) \in \Gamma$. On a alors

$$\begin{aligned} (p_1, p_2, p_3)^{-1} &= (-p_1 + p_2 p_3, -p_2, -p_3) \\ [(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3)] &= (p_3 q_2 - p_2 q_3, 0, 0) \end{aligned}$$

Soit n un nombre premier, et soit $H = \{(np_1, 0, 0);\ p_1 \in \mathbb{Z}\}$. H est un sous-groupe normal de Γ. Soit $\sigma = \mathrm{Ind}_H^\Gamma 1_H$. On cherche à décomposer cette représentation en composantes irréductibles.

Soit donc $S^0 = H$. On a $S_0 = \Gamma = \langle S^0, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\rangle$. Posons $S^1 = \langle S^0, (1,0,0)\rangle$. $[S^1 : S^0] = n$ et, si on dénote par 1_{S^1} l'extension triviale de 1_H à S^1, on a alors

$$\{(1_{S^1} \cdot \eta_1);\ \eta_1 \in (S^0 \setminus S^1)^\wedge\} = \{\chi_j;\ 0 \le j \le n-1\},$$

où χ_j est le caractère de S^1 défini par

$$\chi_j(p_1, 0, 0) = e^{2\pi i \frac{jp_1}{n}}, \text{ pour tout } (p_1, 0, 0) \in S^1,$$

pour tout $0 \le j \le n-1$. On pose alors $S^2 = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$. On a, pour $0 \le j \le n-1$,

$$\begin{aligned} S_2(\chi_j) &= \{(q_1, q_2, q_3) \in \Gamma;\ \chi_j([(q_1, q_2, q_3), (p_1, p_2, 0)]) = 1, \forall (p_1, p_2, 0) \in S^2\} \\ &= \{(q_1, q_2, q_3) \in \Gamma;\ \chi_j(q_3 p_2, 0, 0) = 1, \forall p_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(q_1, q_2, q_3) \in \Gamma;\ \frac{jq_3}{n} \in \mathbb{Z}\} \\ &= \begin{cases} \Gamma & \text{si } j = 0 \\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, n\mathbb{Z}) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $\widetilde{\chi_j}$ une extension de χ_j à S^2, pour tout $0 \le j \le n-1$. On a

$$\{(\widetilde{\chi_j} \cdot \eta_2);\ \eta_2 \in (S^1 \setminus S^2)^\wedge\} = \{\chi_{j,t};\ t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\},$$

avec $\chi_{j,t}(p_1, p_2, 0) = e^{2\pi i (\frac{jp_1}{n} + tp_2)}$, pour tout $(p_1, p_2, 0) \in S^2$. On pose maintenant

$$S^3(\chi_j) = \begin{cases} \Gamma & \text{si } j = 0 \\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, n\mathbb{Z}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $S_3(\chi_{j,t}) = S^3(\chi_j)$, pour tout j, t. Puisque

$$\begin{aligned}\{(\widetilde{\chi_{0,t}} \cdot \eta_3);\ \eta_3 \in (S^2 \setminus \Gamma)^\wedge\} &= \{\chi_{0,t,s};\ s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\} \\ \{(\widetilde{\chi_{j,t}} \cdot \eta_3);\ \eta_3 \in (S^2 \setminus S^3(\chi_j))^\wedge\} &= \{\chi_{j,t,s};\ s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\} \text{ si } 1 \leq j \leq n-1\end{aligned}$$

avec

$$\chi_{0,t,s}(p_1, p_2, p_3) = e^{2\pi i(tp_2+sp_3)} \text{ et } \chi_{j,t,s}(p_1, p_2, np_3) = e^{2\pi i(\frac{jp_1}{n}+tp_2+sp_3)},$$

pour $(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma$ et $(p_1, p_2, np_3) \in S^3(\chi_j)$ $(0 \leq j \leq n-1)$ respectivement. Ainsi, $\sigma = \mathrm{Ind}_H^\Gamma 1_H$ se décompose donc de la manière suivante:

$$\sigma \cong \int_{\mathrm{R}/\mathbb{Z}}^{\oplus} \int_{\mathrm{R}/\mathbb{Z}}^{\oplus} \chi_{0,t,s}\, d\dot{t}d\dot{s} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} \int_{\mathrm{R}/\mathbb{Z}}^{\oplus} \int_{\mathrm{R}/\mathbb{Z}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},\mathbb{Z},n\mathbb{Z})}{}^{\Gamma} \chi_{j,t,s}\, d\dot{t}d\dot{s}.$$

Remarquons que toutes les composantes apparaissant dans cette décomposition sont des représentations unitaires irréductibles de dimension finie.

Chapitre 5

Décomposition de $\pi_l\big|_\Gamma$ en intégrale hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de Γ

Utilisant les résultats des chapitres 3 et 4, nous donnons dans un premier temps une décomposition en composantes irréductibles de la restriction à Γ de toute représentation $\pi \in \widehat{G}$ dont l'orbite possède un élément admettant un idéal rationnel polarisant. Ceci étant fait, nous déterminons quelles sont les composantes de cette décomposition unitairement équivalentes entre elles.

5.1 Décomposition de $\pi_l\big|_\Gamma$ en composantes irréductibles

Soit donc $l \in \mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation $\mathfrak{m}$ qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$. En combinant les résultats des théorèmes 3.2.1 et 4.1.1, on peut alors donner une décomposition explicite de $\pi_l\big|_\Gamma$ en intégrale directes de représentations unitaires irréductibles de Γ.

Théorème 5.1.1 *Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation $\mathfrak{m}$ (de dimension m) qui soit un* idéal rationnel *de $\mathfrak{g}$. Soit $\{X_1, \dots, X_n\}$ une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}$, fortement basée sur Γ, et passant par $\mathfrak{m}$. Soit $M = \exp(\mathfrak{m})$. Pour tout $(t_{m+1}, \dots, t_n) \in [0,1)^{n-m}$, posons*

$$l_{t_{m+1},\dots,t_n} = \mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1}) \cdots \exp(-t_nX_n))l.$$

et définissons les suites $(S^{t_{m+1},\dots,t_n;i}(\chi_1,\dots,\chi_{i-2}))_{i\geq 0}$ *et* $(S_i^{t_{m+1},\dots,t_n}(\chi_1,\dots,\chi_{i-1}))_{i\geq -1}$ *associées à la représentation* $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$. *Soit* $j_{t_{m+1},\dots,t_n}$ *le premier entier* ≥ 0 *tel que*

$$S^{t_{m+1},\dots,t_n;j_{t_{m+1},\dots,t_n}}(\chi_1,\dots,\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}-2}) = S^{t_{m+1},\dots,t_n}_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}}(\chi_1,\dots,\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}-1}),$$

pour tous caractères $\chi_1,\dots,\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}}$. *Alors, la représentation* $\pi_l\big|_\Gamma$ *se décompose en l'intégrale hilbertienne de représentations irréductibles*

$$\begin{aligned}\pi_l\big|_\Gamma \ \cong\ & \int_{[0,1)^{n-m}}^{\oplus} \int_{(S^{t_{m+1},\dots,t_n;0}\backslash S^{t_{m+1},\dots,t_n;1})^\wedge}^{\oplus} (\dots(\\ & \int_{(S^{t_{m+1},\dots,t_n;j_{t_{m+1},\dots,t_n}-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}-3}^{1,\dots,j_{t_{m+1},\dots,t_n}-5})\backslash S^{t_{m+1},\dots,t_n;j_{t_{m+1},\dots,t_n}}(\chi_1,\dots,\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}-2}^{1,\dots,j_{t_{m+1},\dots,t_n}-4}))^\wedge}^{\oplus}\\ & \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{S^{t_{m+1},\dots,t_n;j_{t_{m+1},\dots,t_n}}(\chi_1,\dots,\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}-2}^{1,\dots,j_{t_{m+1},\dots,t_n}-4})}\\ & \qquad ((\dots((\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}\cdot\chi_1)^\sim\cdot\chi_2)^\sim\dots)^\sim\cdot\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}-1}^{1,\dots,j_{t_{m+1},\dots,t_n}-3})^\sim\cdot\chi_{j_{t_{m+1},\dots,t_n}}^{1,\dots,j_{t_{m+1},\dots,t_n}-2}))\\ & \qquad\qquad d\chi^{1,\dots,j_{t_{m+1},\dots,t_n}-2}_{t_{m+1},\dots,t_n;j_{t_{m+1},\dots,t_n}})\dots)d\chi_{t_{m+1},\dots,t_n;1}\end{aligned}$$

où $d\chi_{t_{m+1},\dots,t_n;j^{1,\dots,j-2}}$ *est la mesure de Haar sur*

$$(S^{t_{m+1},\dots,t_n;j-1}(\chi_1,\dots,\chi_{j-3}^{1,\dots,j-5})\setminus S^{t_{m+1},\dots,t_n;j}(\chi_1,\dots,\chi_{j-2}^{1,\dots,j-4}))^\wedge,$$

normalisée de manière à rendre valide la formule d'inversion, pour tout $0\leq j\leq j_{t_{m+1},\dots,t_n}$, *et tout* $(t_{m+1},\dots,t_n)\in[0,1)^{n-m}$.

Remarque: Si $\mathfrak{m}$ est telle que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{m}$, alors le groupe $M\setminus G$ est abélien, et les suites $(S^{t_{m+1},\dots,t_n;i}(\chi_1,\dots,\chi_{i-2}))_{i\geq 0}$ et $(S_i^{t_{m+1},\dots,t_n}(\chi_1,\dots,\chi_{i-1}))_{i\geq -1}$ associées aux représentations $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$ sont indépendantes des caractères χ_i. De plus, les sous-groupes $S_i^{t_{m+1},\dots,t_n}$ et $S^{t_{m+1},\dots,t_n;i}$ sont des sous-groupes *normaux* de Γ.

Exemple 1: Regardons à nouveau l'exemple du groupe de Heisenberg. Si $l=\alpha X_1^*$, avec $\alpha\neq 0$, alors

$$\pi_{l,M}\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}\big|_{M\cap\Gamma})\,dt$$

où, pour tout $t\in[0,1)$, $l_t=\alpha X_1^*+t\alpha X_2^*$ et

$$\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}) = \begin{cases} (\mathbb{Z},\mathbb{Z},0) & \text{if } \alpha\notin\mathbb{Q}\\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},q\mathbb{Z}) & \text{if } \alpha=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^* \end{cases}$$

D'où, $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_t}$ est irréductible pour tout $t \in [0,1)$ si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Supposons maintenant que $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec pgcd(p,q)=1. Pour $t \in [0,1)$ fixé, on a $\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}) = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},q\mathbb{Z})$. Posons alors $S^0 = M \cap \Gamma = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},0)$ et $S_0 = \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}) = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},q\mathbb{Z})$. On a $S^0 \subsetneq S_0$. Soit $S^1 = S^0 \cdot \exp(q\mathbb{Z}X_3)$ (ici $\gamma_1 = \exp(qX_3)$) et soit $S_1 = \{\gamma \in \Gamma;\ \chi_{l_t}([\gamma, s_1]) = 1, \text{ pour tout } s_1 \in S^1\}$. On a alors $S_0 = S^1 \subseteq S_1 \subseteq S_0$, d'où $S^1 = S_1$ et $j_0 = 1$. Ainsi, $\pi_{l,M}\big|_\Gamma$ se décompose en irréductibles de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\pi_{l,M}\big|_\Gamma &\cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}\big|_{M\cap\Gamma})\, dt \\ &\cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \Big(\int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{l_t}\cdot\chi_1)\, d\chi_1\Big)\, dt\end{aligned}$$

Remarquons que $S^1 \setminus \Gamma$ est fini. Ainsi, toute représentation $\mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{l_t}\cdot\chi_1)$ apparaissant dans cette décomposition est de dimension finie.

Exemple 4: Soit $G = G_{6,19}$ et $\Gamma = \{(p_1,\dots,p_6);\ p_1,\dots,p_6 \in \mathbb{Z}\}$. Nous avons vu au chapitre 3 que si $l = \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^*$, avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)^2}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}\big|_{M\cap\Gamma})\, dt_5dt_6$$

avec $M = (\mathbb{R},\mathbb{R},\mathbb{R},\mathbb{R},0,0)$ et $l_{t_5,t_6} = \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* + 2t_6\alpha_1X_3^* + t_5\alpha_2X_4^* - \frac{1}{2}t_5^2\alpha_2X_6^*$, pour tous $t_5,t_6 \in [0,1)$. De plus,

$$\mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_5,t_6}}) = \begin{cases} (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,0) & \text{si } \alpha_1 \notin \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 \notin \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,Q_1\mathbb{Z}) & \text{si } \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 \notin \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},0) & \text{si } \alpha_1 \notin \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \\ (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},Q_1\mathbb{Z}) & \text{si } \alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q} \text{ et } \alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

où $Q_1 = q_1$ si q_1 est impair et $Q_1 = \frac{q_1}{2}$ si q_1 est pair. Ainsi, $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}}$ est irréductible, pour tout $t_5,t_6 \in [0,1)$ si et seulement si $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$.

Supposons donc que $\alpha_1 \in \mathbb{Q}$ ou $\alpha_2 \in \mathbb{Q}$, et fixons $t_5,t_6 \in [0,1)$. Plusieurs cas peuvent apparaitre:

Cas 1: $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ (avec pgcd(p_1,q_1)=1) et $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$:
Alors $S_0 = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,Q_1\mathbb{Z})$ et $S^0 = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,0)$. Soit $S^1 = \langle S^0, \exp(Q_1X_6)\rangle = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,Q_1\mathbb{Z})$ et soit

$$S_1 = \{\gamma \in \Gamma;\ \chi_{l_{t_5,t_6}}([\gamma, s_1]) = 1;\ \text{pour tout } s_1 \in S^1\}.$$

On a alors $S_0 = S^1 \subseteq S_1 \subseteq S_0$. D'où $S^1 = S_1$ et $j_0 = 1$. Ainsi,

$$\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}} \cong \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{l_{t_5,t_6}}\cdot\chi_1)\,d\chi_1$$

et $\pi_{l,M}\big|_{\Gamma}$ se décompose en composantes irréductibles comme suit:

$$\pi_{l,M}\big|_{\Gamma} \cong \int_{[0,1)^2}^{\oplus}\Big(\int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{l_{t_5,t_6}}\cdot\chi_1)\,d\chi_1\Big)\,dt_5dt_6$$

Cas 2: $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ (avec pgcd(p_2,q_2)=1):
Alors, $S^0 = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0,0) \subsetneq (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},0) = S_0$. Posons $S^1 = S_0$. Alors $S^1 = S_1$ et $j_0 = 1$. Ainsi,

$$\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}} \cong \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{l_{t_5,t_6}}\cdot\chi_1)\,d\chi_1$$

et $\pi_{l,M}\big|_{\Gamma}$ se décompose en

$$\pi_{l,M}\big|_{\Gamma} \cong \int_{[0,1)^2}^{\oplus}\Big(\int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{l_{t_5,t_6}}\cdot\chi_1)\,d\chi_1\Big)\,dt_5dt_6$$

Cas 3: $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ (avec pgcd(p_1,q_1)=pgcd(p_2,q_2)=1):
On a $S_0 = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},Q_1\mathbb{Z}) = \langle S^0, \exp(q_2X_5), \exp(Q_1X_6)\rangle$. Posons alors $S^1 = \langle S^0, \exp(q_2X_5)\rangle = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q_2\mathbb{Z},0)$. On a

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\gamma \in \Gamma;\ \chi_{l_{t_5,t_6}}([\gamma, s_1]) = 1,\ \text{pour tout } s_1 \in S^1\} \\ &= \{\gamma = (x_1,\ldots,x_6) \in \Gamma;\ x_5 \in q_2\mathbb{Z} \text{ et } x_6 \in Q_1\mathbb{Z} \cap \frac{1}{t_5p_2}\mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Ainsi, si $t_5 \notin \mathbb{Q}$, alors $Q_1\mathbb{Z} \cap \frac{1}{t_5p_2}\mathbb{Z} = \{0\}$ et $S^1 = S_1$, $j_0 = 1$. Sinon, si $t_5 \in \mathbb{Q}^*$, alors il existe $Q_{t_5} \in \mathbb{Z}$ tel que $S_1 = \langle S^1, \exp(Q_{t_5}X_6)\rangle$ et $S^1 \subsetneq S_1$. Soit $S^2 = S_1$. On a alors $S^2 = S_2$ et $j_0 = 2$. D'où

$$\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_5,t_6}} \cong \begin{cases} \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{l_{t_5,t_6}}\cdot\chi_1)\,d\chi_1 & \text{si } t_5 \notin \mathbb{Q} \\ \\ \int_{\mathbb{T}^2}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^2}^{\Gamma}((\widetilde{\chi}_{l_{t_5,t_6}}\cdot\chi_1)^{\sim}\cdot\chi_2)\,d\chi_1d\chi_2 & \text{si } t_5 \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

Remarquons que l'on peut ignorer le cas $t_5 = 0$, puisque $\{0\} \times [0,1)$ est de mesure nulle dans $[0,1)^2$. Bien sûr, c'est également le cas de $([0,1) \cap \mathbb{Q}^*) \times [0,1)$, mais l'étude de ce cas était intéressante. Ainsi, $\pi_{l,M}\big|_\Gamma$ se décompose comme suit:

$$\pi_{l,M}\big|_\Gamma \cong \int^{\oplus}_{([0,1)\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times[0,1)} \Big(\int^{\oplus}_{\mathbb{T}} \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{S^1}(\widetilde{\chi}_{l_{t_5,t_6}} \cdot \chi_1)\, d\chi_1\Big)\, dt_5 dt_6$$

5.2 Equivalence unitaire des composantes de $\pi_l\big|_\Gamma$

Si $l \in \mathfrak{g}^*$ admet une polarisation $\mathfrak{m}$ qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$, nous venons de voir qu'il était possible de décomposer $\pi_l\big|_\Gamma$ en intégrale hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de Γ. Le problème que l'on se propose donc de résoudre maintenant est de trouver, si σ est une représentation apparaissant dans cette intégrale, toutes les représentations de cette décomposition qui lui sont unitairement équivalentes. Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème suivant, dû à G.W. Mackey:

Théorème 5.2.1 ([Mac1, Theorem 7']) *Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe discret Γ, et soient χ_1 et χ_2 deux caractères de H_1 et H_2 respectivement. Supposons que les représentations $\varrho_1 = \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{H_1}\chi_1$ et $\varrho_2 = \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{H_2}\chi_2$ soient irréductibles. Alors les représentations ϱ_1 et ϱ_2 sont unitairement équivalentes si et seulement s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que*

(1) $\gamma^{-1}H_1\gamma$ et H_2 sont commensurables,

(2) $\chi_1(\gamma h \gamma^{-1}) = \chi_2(h)$, pour tout $h \in \gamma^{-1}H_1\gamma \cap H_2$.

Remarque: Soit H un sous-groupe normal de Γ, χ un caractère de H, et $\gamma \in \Gamma$. Soit $\chi^{(\gamma)}$ le caractère de H défini par

$$\chi^{(\gamma)}(h) = \chi(\gamma h \gamma^{-1}), \text{ pour tout } h \in H.$$

Considérons alors les suites $(S^i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-2}))_{i\geq 0}$ et $(S_i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-1}))_{i\geq -1}$ (respectivement $(T^j(\chi'_1, \cdots, \chi'_{j-2}))_{j\geq 0}$ et $(T_j(\chi'_1, \cdots, \chi'_{j-1}))_{j\geq -1}$) associées à la représentation $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{H}\chi$ (respectivement $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \chi^{(\gamma)}$). On a

$$\begin{array}{ccccccc} T_{-1} & = & \Gamma & = & S_{-1} & = & \gamma^{-1}\cdot S_{-1}\cdot\gamma \\ T^0 & = & H & = & S^0 & = & \gamma^{-1}\cdot S^0\cdot\gamma \\ T_0 & = & \mathrm{St}_H^\Gamma(\chi^{(\gamma)}) & = & \gamma^{-1}\cdot\mathrm{St}_H^\Gamma(\chi)\cdot\gamma & = & \gamma^{-1}\cdot S_0\cdot\gamma \end{array}$$

Posons maintenant $\tilde{T}^1 = \gamma^{-1}\cdot S^1\cdot\gamma$. $\tilde{T}^1$ est un sous-groupe de T_0, contenant T^0 et vérifiant $[T_0, \tilde{T}] \subseteq T^0$.

[En effet, soient $t_0 \in T_0$ et $t_1 \in \tilde{T}^1$. Par définition, il existe $s_0 \in S_0$ et $s_1 \in S^1$ tels que $t_0 = \gamma^{-1}s_0\gamma$ et $t_1 = \gamma^{-1}s_1\gamma$, et alors $[t_0, t_1] = [\gamma^{-1}s_0\gamma, \gamma^{-1}s_1\gamma] = \gamma^{-1}[s_0, s_1]\gamma \in T^0$.]

Ainsi, on peut supposer que l'on a $T^1 = \tilde{T}^1$. D'où

$$\begin{aligned} T_1 &= \{t_0 \in T_0;\ \chi^{(\gamma)}([t_0, t_1]) = 1, \text{ pour tout } t_1 \in T^1\} \\ &= \{\gamma^{-1}s_0\gamma;\ s_0 \in S_0 \text{ et } \chi^{(\gamma)}([\gamma^{-1}s_0\gamma, \gamma^{-1}s_1\gamma]) = 1, \text{ pour tout } s_1 \in S^1\} \\ &= \{\gamma^{-1}s_0\gamma;\ s_0 \in S_0 \text{ et } \chi([s_0, s_1]) = 1, \text{ pour tout } s_1 \in S^1\} \\ &= \gamma^{-1}\cdot S_1\cdot\gamma \end{aligned}$$

De même, soit $\tilde{T}^2 = \gamma^{-1}\cdot S^2\cdot\gamma$. Comme précédemment, $\tilde{T}^2$ est un sous-groupe de T_1 contenant T^1 et satisfaisant la relation $[T_1, \tilde{T}^2] \subseteq T^1$. Ainsi, on peut également supposer que $T^2 = \tilde{T}^2$.

Soit donc σ une représentation unitaire irréductible de Γ apparaissant dans la décomposition (3.1) de $\pi_l|_\Gamma$ en intégrale hilbertienne (voir théorème 3.2.1). Il y a deux cas à étudier:

Cas 1: $\sigma = \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^\Gamma(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})$, pour un certain $(n-m)$-uplet $(t_{m+1},\dots,t_n) \in [0,1)^{n-m}$.

Soit $\varrho = \mathrm{Ind}_K^\Gamma\widetilde{\chi}$ une autre composante de $\pi_l|_\Gamma$, unitairement équivalente à σ. D'après le théorème 5.2.1, on a

$$\sigma \cong \varrho \iff \text{il existe } \gamma\in\Gamma \text{ tel que } \chi^{(\gamma)}_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}} = \widetilde{\chi} \text{ sur } K\cap(M\cap\Gamma) \text{ et } K\cap(M\cap\Gamma)$$
$$\text{est d'indice fini dans les deux sous-groupes s'intersectant.}$$

Or, si $M\cap\Gamma \subsetneq K$, alors, vu la forme que peut avoir le sous-groupe K, $K\cap(M\cap\Gamma)$ est obligatoirement d'indice infini dans K. Ainsi, nécessairement, K est égal à $M\cap\Gamma$, et alors

$\widetilde{\chi} = \chi_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}}$, pour un certain $(n-m)$-uplet $(s_{m+1},\cdots,s_n) \in [0,1)^{n-m}$. D'où

$$\begin{aligned}
\sigma \cong \varrho \iff & \text{ il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \chi^{(\gamma)}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} = \chi_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}} \text{ sur } M \cap \Gamma \\
\iff & \text{ il existe } \gamma \in \Gamma / l_{s_{m+1},\cdots,s_n} \in \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1}) l_{t_{m+1},\cdots,t_n} + (M \cap \Gamma)^{\perp} \\
\iff & \; l_{s_{m+1},\cdots,s_n} \in \mathrm{Ad}^*(\Gamma) l_{t_{m+1},\cdots,t_n} + (M \cap \Gamma)^{\perp}.
\end{aligned}$$

Cas 2: Il existe $(t_{m+1},\cdots,t_n) \in [0,1)^{n-m}$, $j_0 = j_{t_{m+1},\cdots,t_n} \geq 0$ et des caractères $\chi_j \in (S^{j-1}(\chi_1,\cdots,\chi_{j-3}) \setminus S^j(\chi_1,\cdots,\chi_{j-2}))^\wedge$ (pour $1 \leq j \leq j_0$) tels que

$$\sigma = \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{S^{j_0}(\chi_1,\cdots,\chi_{j_0-2})}(\cdots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim} \cdots)^{\sim} \cdot \chi_{j_0}).$$

Bien sûr, nous pouvons supposer que $j_0 \geq 0$ est le premier entier vérifiant

$$S^{j_0}(\chi_1,\cdots,\chi_{j_0-2}) = S_{j_0}(\chi_1,\cdots,\chi_{j_0-1}),$$

pour tous caractères $\chi_1,\cdots,\chi_{j_0}$. On a alors $M \cap \Gamma \subsetneq S^{j_0}(\chi_1,\cdots,\chi_{j_0-2})$. Soit maintenant $\varrho = \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{K}\widetilde{\chi}$ une autre représentation apparaissant dans la décomposition de $\pi_l\big|_{\Gamma}$, unitairement équivalente à σ. D'après le théorème 5.2.1, on a

$$\begin{aligned}
\sigma \cong \varrho \iff & \text{ il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } (\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim} \cdots)^{\sim} \cdot \chi_{j_0})^{(\gamma)} = \widetilde{\chi} \text{ sur} \\
& K \cap (\gamma^{-1} \cdot S^{j_0}(\chi_1,\cdots,\chi_{j_0-2}) \cdot \gamma) \text{ et } K \cap (\gamma^{-1} \cap S^{j_0}(\chi_1,\cdots,\chi_{j_0-2}) \cdot \gamma) \text{ est} \\
& \text{d'indice fini dans les deux sous-groupes s'intersectant.}
\end{aligned}$$

Dénotons cette condition par $(\star)$. On doit donc avoir $M \cap \Gamma \subsetneq K$, et il existe alors $(s_{m+1},\cdots,s_n) \in [0,1)^{n-m}$, $i_0 = i_{s_{m+1},\cdots,s_n} \geq 0$, et des caractères $\chi'_i \in (T^{i-1}(\chi'_1,\cdots,\chi'_{i-3}) \setminus T^i(\chi'_1,\cdots,\chi'_{i-2}))^\wedge$, pour $1 \leq i \leq i_0$ (les suites $(T^i(\chi'_1,\cdots,\chi'_{i-2}))_{i \geq 0}$ et $(T_i(\chi'_1,\cdots,\chi'_{i-1}))_{i \geq -1}$ étant les suites associées à la représentation $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}}))$ tels que

$$K = T^{i_0}(\chi'_1,\cdots,\chi'_{i_0-2}) \text{ et } \tilde{\chi} = (\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}} \cdot \chi'_1)^{\sim} \cdots)^{\sim} \cdot \chi'_{i_0}).$$

Bien sûr, on peut également supposer que i_0 est le premier entier vérifiant

$$T^{i_0}(\chi'_1,\cdots,\chi'_{i_0-2}) = T_{i_0}(\chi'_1,\cdots,\chi_{i_0-1}).$$

pour tous caractères $\chi'_1,\cdots,\chi'_{i_0}$. $(\star)$ entraîne alors qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\chi^{(g)}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} = \chi_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}}$ sur $M \cap \Gamma$, c'est à dire

$$l_{s_{m+1},\cdots,s_n} \in \mathrm{Ad}^*(\Gamma) l_{t_{m+1},\cdots,t_n} + (M \cap \Gamma)^{\perp}.$$

D'après la remarque faite précédemment, on peut donc supposer que $T^i = \gamma^{-1} \cdot S^i \cdot \gamma$ et $T_j = \gamma^{-1} \cdot S_j \cdot \gamma$, pour tout $0 \leq i \leq 2$ et $-1 \leq j \leq 1$. D'après $(\star)$, on a alors

$$(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\ldots,t_n}} \cdot \chi_1)(\gamma t_1 \gamma^{-1}) = (\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\ldots,s_n}} \cdot \chi_1')(t_1), \text{ for all } t_1 \in T^1,$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} T_2(\chi_1') &= \{t_1 \in T_1;\ (\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\ldots,s_n}} \cdot \chi_1')([t_1,t_2]) = 1, \text{ pour tout } t_2 \in T^2\} \\ &= \{\gamma^{-1}s_1\gamma;\ s_1 \in S_1 \text{ et } (\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\ldots,s_n}} \cdot \chi_1')(\gamma^{-1}[s_1,s_2]\gamma) = 1, \text{ pour tout } s_2 \in S^2\} \\ &= \{\gamma^{-1}s_1\gamma;\ s_1 \in S_1 \text{ et } (\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\ldots,t_n}} \cdot \chi_1)([s_1,s_2]) = 1, \text{ pour tout } s_2 \in S^2\} \\ &= \gamma^{-1} \cdot S_2(\chi_1) \cdot \gamma \end{aligned}$$

Lemme 5.2.1 *Soit $k_0 = \min(i_0, j_0)$. Alors, pour tout $1 \leq k \leq k_0$, on peut prendre*

(1) $T^k(\chi_1', \ldots, \chi_{k-2}') = \gamma^{-1} \cdot S^k(\chi_1, \ldots, \chi_{k-2}) \cdot \gamma$,

(2) $T_k(\chi_1', \ldots, \chi_{k-1}') = \gamma^{-1} \cdot S_k(\chi_1, \ldots, \chi_{k-1}) \cdot \gamma$.

Preuve: On va prouver ce résultat par récurrence sur $i \leq k_0$. On a vu que ceci était vrai pour $i = 1$. Supposons donc que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre i et montrons qu'il est vrai à l'ordre $(i+1)$. On a, par hypothèse,

$$T_i(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}') = \gamma^{-1} \cdot S_i(\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}) \cdot \gamma.$$

Posons $\tilde{T}^{i+1}(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}') = \gamma^{-1} \cdot S^{i+1}(\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}) \cdot \gamma$. $\tilde{T}^{i+1}(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}')$ est alors un sous-groupe de $T_i(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}')$ contenant $T^i(\chi_1', \ldots, \chi_{i-2}')$ et satisfaisant la relation

$$[T_i(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}'), \tilde{T}^{i+1}(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}')] \subseteq T^i(\chi_1', \ldots, \chi_{i-2}').$$

Ainsi, il est clair que l'on peut supposer que $T^{i+1}(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}') = \tilde{T}^{i+1}(\chi_1', \ldots, \chi_{i-1}')$. Maintenant, la relation $(\star)$ implique que

$$(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\ldots,t_n}} \cdot \chi_1)^\sim \cdots)^\sim \cdot \chi_i)(\gamma t_i \gamma^{-1}) = (\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\ldots,s_n}} \cdot \chi_1')^\sim \cdots)^\sim \cdot \chi_i')(t_i)$$

for all $t_i \in T^i(\chi'_1, \cdots, \chi'_{i-2})$, d'où

$$\begin{aligned}
T_{i+1}(\chi'_1, \cdots, \chi'_i) &= \{t_i \in T_i(\chi'_1, \cdots, \chi'_{i-1}); (\cdots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1}, \cdots, s_n}} \cdot \chi'_1)^{\sim} \cdots)^{\sim} \cdot \chi'_i)([t_i, t_{i+1}]) = 1, \\
&\qquad\qquad \text{pour tout } t_{i+1} \in T^{i+1}(\chi'_1, \cdots, \chi'_{i-1})\} \\
&= \{\gamma^{-1} s_i \gamma;\ s_i \in S_i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-1}) \text{ et} \\
&\qquad\qquad (\cdots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1}, \cdots, s_n}} \cdot \chi'_1)^{\sim} \cdots)^{\sim} \cdot \chi'_i)(\gamma^{-1}[s_i, s_{i+1}]\gamma) = 1, \\
&\qquad\qquad \text{pour tout } s_{i+1} \in S^{i+1}(\chi_1, \cdots, \chi_{i-1})\} \\
&= \{\gamma^{-1} s_i \gamma;\ s_i \in S_i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-1}) \text{ et} \\
&\qquad\qquad (\cdots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1}, \cdots, t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim} \cdots)^{\sim} \cdot \chi_i)([s_i, s_{i+1}]) = 1, \\
&\qquad\qquad \text{pour tout } s_{i+1} \in S^{i+1}(\chi_1, \cdots, \chi_{i-1})\} \\
&= \gamma^{-1} \cdot S_{i+1}(\chi_1, \cdots, \chi_i) \cdot \gamma.
\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de ce lemme. □

Comme $(\star)$ entraîne que $\gamma^{-1} S^{j_0}(\chi_1, \cdots, \chi_{j_0-2})\gamma$ et $T^{i_0}(\chi'_1 \cdots, \chi'_{i_0-2})$ sont commensurables, d'après le lemme précédent, on a donc obligatoirement $i_0 = j_0$.

Remarque: Pour tout $1 \leq i \leq j_0$, on a $T^{i+1}(\chi'_1, \cdots, \chi'_{i-1}) = \langle T^i(\chi'_1, \cdots, \chi'_{i-2}), \gamma^{-1} \cdot \gamma_{i+1} \cdot \gamma \rangle$, et l'extension $(\chi_{l_{s_{m+1}, \cdots, s_n}} \cdot \chi'_1 \cdot \chi'_i)^{\sim}$ à $T^{i+1}(\chi'_1, \cdots, \chi'_{i-1})$ du caractère $\chi_{l_{s_{m+1}, \cdots, s_n}} \cdot \chi'_1 \cdot \chi'_i$ est alors donnée par:

$$\begin{aligned}
(\chi_{l_{s_{m+1}, \cdots, s_n}} \cdot \chi'_1 \cdot \chi'_i)^{\sim}(\gamma^{-1} \cdot s_{i+1} \cdot \gamma) &= (\chi_{l_{s_{m+1}, \cdots, s_n}} \cdot \chi'_1 \cdot \chi'_i)^{\sim}(\gamma^{-1} \cdot s_i \cdot \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \gamma_{i+1}^n \cdot \gamma) \\
&= (\chi_{l_{s_{m+1}, \cdots, s_n}} \cdot \chi'_1 \cdot \chi'_i)(\gamma^{-1} \cdot s_i \cdot \gamma)
\end{aligned}$$

pour tout $s_{i+1} = s_i \cdot \gamma_i^n \in S^{i+1}(\chi_1, \cdots, \chi_{i-1})$ (avec $s_i \in S^i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-2})$ et $n \in \mathbb{Z}$).

Soit maintenant, pour tout $1 \leq i \leq i_0 = j_0$,

$$p_i^{1, \cdots, i-2} : S^i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-2}) \longrightarrow S^{i-1}(\chi_1, \cdots, \chi_{i-3}) \setminus S^i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-2})$$

et

$$p_{i,\gamma}^{1, \cdots, i-2} : \gamma^{-1} \cdot S^i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-2}) \cdot \gamma \to (\gamma^{-1} \cdot S^{i-1}(\chi_1, \cdots, \chi_{i-3}) \cdot \gamma) \setminus (\gamma^{-1} \cdot S^i(\chi_1, \cdots, \chi_{i-2}) \cdot \gamma)$$

les projections canoniques.

Lemme 5.2.2 *On conserve les notations introduites ci-dessus. Pour tout $1 \leq i \leq i_0$, on a*

$$\chi_i'(p_{i,\gamma}^{1,\cdots,i-2}(\gamma^{-1}s_i\gamma)) = \chi_i(p_i^{1,\cdots,i-2}(s_i)), \text{ for all } s_i \in S^i(\chi_1,\cdots,\chi_{i-2}).$$

Preuve: On fait une preuve par récurrence sur $i \leq i_0$. Supposons que le résultat soit vrai jusqu'à l'ordre $(i-1)$. Pour tout $s_i = s_{i-1} \cdot \gamma_i^n \in S^i(\chi_1,\cdots,\chi_{i-2})$ (avec $s_{i-1} \in S^{i-1}(\chi_1,\cdots,\chi_{i-3})$ et $n \in \mathbb{Z}$), on a

$$\begin{aligned}
&(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}} \cdot \chi_1')^{\sim}\cdots)^{\sim} \cdot \chi_i')(\gamma^{-1}s_i\gamma)\\
= \ &(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}} \cdot \chi_1')^{\sim}\cdots)^{\sim} \cdot \chi_{i-1}')^{\sim}(\gamma^{-1}s_i\gamma)\chi_i'(p_{i,\gamma}^{1,\cdots,i-2}(\gamma^{-1}s_i\gamma))\\
= \ &(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}} \cdot \chi_1')^{\sim}\cdots)^{\sim} \cdot \chi_{i-1}')(\gamma^{-1}s_{i-1}\gamma)\chi_i'(p_{i,\gamma}^{1,\cdots,i-2}(\gamma^{-1}s_i\gamma))\\
= \ &(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim}\cdots)^{\sim} \cdot \chi_{i-1})(s_{i-1})\chi_i'(p_{i,\gamma}^{1,\cdots,i-2}(\gamma^{-1}s_i\gamma))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim}\cdots)^{\sim} \cdot \chi_i)(s_i)\\
= \ &(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim}\cdots)^{\sim} \cdot \chi_{i-1})^{\sim}(s_i)\chi_i(p_i^{1,\cdots,i-2}(s_i))\\
= \ &(\ldots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim}\cdots)^{\sim} \cdot \chi_{i-1})(s_{i-1})\chi_i(p_i^{1,\cdots,i-2}(s_i))
\end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_i'(p_{i,\gamma}^{1,\cdots,i-2}(\gamma^{-1}s_i\gamma)) = \chi_i(p_i^{1,\cdots,i-2}(s_i))$, pour tout $s_i \in S^i(\chi_1,\cdots,\chi_{i-2})$. Maintenant, puisque cette relation est bien évidemment vraie pour $i=1$, le lemme est donc prouvé. □

On a donc démontré le théorème suivant:

Théorème 5.2.2 *On conserve les notations du théorème 5.1.1. Soit σ une représentation de Γ apparaissant dans la décomposition de $\pi_l|_\Gamma$ en intégrale hilbertienne de représentations unitaires irréductibles, et soit $\mathcal{C}_\sigma$ l'ensemble de toutes les composantes irréductibles de $\pi_l|_\Gamma$ équivalentes à σ. Deux cas peuvent se produire:*

Cas 1: *Il existe $t_{m+1},\cdots,t_n \in [0,1)$ tel que $\sigma = \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_{m+1},\cdots,t_n}}$. Alors*

$$\mathcal{C}_\sigma = \{\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{s_{m+1},\cdots,s_n}};\ (s_{m+1},\cdots,s_n) \in [0,1)^{n-m} \text{ tel que } l_{s_{m+1},\cdots,s_n} \in \mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_{t_{m+1},\cdots,t_n} + (M\cap\Gamma)^{\perp}\}.$$

Cas 2: *Il existe* $t_{m+1},\dots,t_n \in [0,1)$ *et* $j_0 = j_{t_{m+1},\dots,t_n} \geq 0$ *tels que*

$$\sigma = \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{S^{j_0}(\chi_1,\dots,\chi_{j_0-2})}(\dots(\widetilde{\chi}_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}} \cdot \chi_1)^{\sim}\cdots)^{\sim}\cdot\chi_{j_0}).$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\sigma \;=\; & \{\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{\gamma^{-1}\cdot S^{j_0}(\chi'_1,\dots,\chi'_{j_0-2})\cdot\gamma}(\dots(\widetilde{\chi}_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}} \cdot \chi'_1)^{\sim}\cdots)^{\sim}\cdot\chi'_{j_0});\ \textit{avec}\\ & (s_{m+1},\dots,s_n) \in [0,1)^{n-m}\ \textit{et}\ \gamma\in\Gamma\ \textit{tel que}\ l_{s_{m+1},\dots,s_n} \in \mathrm{Ad}^*(\gamma^{-1})l_{t_{m+1},\dots,t_n} + (M\cap\Gamma)^{\perp},\\ & \textit{les caractères}\ \chi'_i \in ((\gamma^{-1}\cdot S^{i-1}(\chi'_1,\dots,\chi'_{i-3})\cdot\gamma)\setminus(\gamma^{-1}\cdot S^{i}(\chi'_1,\dots,\chi'_{i-2})\cdot\gamma))^{\wedge}\\ & \textit{étant définis par}\ \chi'_i(p^{1,\dots,i-2}_{i,\gamma}(\gamma^{-1}s_i\gamma)) = \chi_i(p^{1,\dots,i-2}_i(s_i)),\ \textit{pour tout}\\ & s_i \in S^i(\chi_1,\dots,\chi_{i-2})\}\end{aligned}$$

Remarque: Si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{m}$, on puisque les sous-groupes S^i sont normaux, on peut prendre $T^{i+1} = \langle T^i, \gamma_{i+1}\rangle$, et avoir

$$(\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)^{\sim}(s_{i+1}) = (\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)^{\sim}(s_i)$$

pour tout $s_{i+1} = s_i\cdot\gamma^n_{i+1} \in S^{i+1}$. Mais alors

$$\begin{aligned}(\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)^{\sim}(\gamma^{-1}s_{i+1}\gamma) &= (\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)^{\sim}(\gamma^{-1}s_i\gamma^n_{i+1}\gamma)\\ &= (\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)^{\sim}(\gamma^{-1}s_i\gamma[\gamma^{-1},\gamma^n_{i+1}]\gamma^n_{i+1})\\ &= (\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)(\gamma^{-1}s_i\gamma[\gamma^{-1},\gamma^n_{i+1}])\\ &= (\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)(\gamma^{-1}s_i\gamma)\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}([\gamma^{-1},\gamma^n_{i+1}])\\ &= (\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}\cdot\chi'_1\cdots\chi'_i)(\gamma^{-1}s_i\gamma)\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}([\gamma^n_{i+1},\gamma])\end{aligned}$$

et d'après la preuve du lemme 5.2.2, puisque $p_i(\gamma^{-1}\cdot s_i\cdot\gamma) = p_i([\gamma^{-1},s_i]s_i) = p_i(s_i)$, pour tout $s_i \in S^i$, on doit alors avoir $\chi'_i = \tau^i_\gamma\chi_i$, le caractère τ^i_γ de S^i étant défini par

$$\tau^i_\gamma(s_i) = \tau^i_\gamma(s_{i-1}\cdot\gamma^n_i) = \chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}([\gamma,\gamma^n_i]),\ \text{pour tout}\ s_i = s_{i-1}\cdot\gamma^n_i \in S^i.$$

Exemple 1: Soit G le groupe de Heisenberg, et $l = \alpha X_1^*$ avec $\alpha \neq 0$. Pour tout $t \in [0,1)$ et tout $(p_1,p_2,p_3)\in\Gamma$, on a

$$\mathrm{Ad}^*(p_1,p_2,p_3)l_t = \alpha X_1^* + \alpha(t-p_3)X_2^* + \alpha p_2 X_3^*.$$

En outre, on a $(M\cap\Gamma)^{\perp} = \mathbb{Z}X_1^* + \mathbb{Z}X_2^* + \mathbb{R}X_3^*$. Ainsi, si σ est une représentation apparaissant dans la décomposition de $\pi_l|_{\Gamma}$, on a:

Cas 1: $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Il existe alors $t \in [0,1)$ tel que $\sigma = \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{\alpha X_1^*+t\alpha X_2^*})$, et

$$\mathcal{C}_\sigma = \{\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{\alpha X_1^*+\alpha(t-p_3+\frac{r}{\alpha})X_2^*});\ p_3, r \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t-p_3+\frac{r}{\alpha} \in [0,1)\}.$$

Cas 2: $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec pgcd(p,q)=1. Alors il existe $t \in [0,1)$ et $\chi_1 \in \mathbb{T}$ tels que $\sigma = \mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, q\,\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{\alpha X_1^*+t\alpha X_2^*}\cdot\chi_1)$. D'où,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\sigma &= \{\mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, q\,\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{\alpha X_1^*+\alpha(t-p_3+\frac{r}{\alpha})X_2^*}\cdot(\tau^1_{(0,0,p_3)}\cdot\chi_1));\\ &\qquad p_3, r \in \mathbb{Z} \text{ tels que } t-p_3+\frac{r}{\alpha} \in [0,1)\}.\end{aligned}$$

Exemple 4: Revenons au groupe $G_{6,19}$. Soit $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^*$, avec $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. Pour tous $t_5, t_6 \in [0,1))$ et tout $(p_1, \ldots, p_6) \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(p_1,\ldots,p_6)l_{t_5,t_6} &= \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + 2\alpha_1(t_6-p_6)X_3^* + \alpha_2(t_5-p_5)X_4^*\\ &\quad +\alpha_2(p_4-2t_5p_6)X_5^* + (-\frac{1}{2}\alpha_2 t_5^2 + \alpha_2 t_5 p_5 - \frac{1}{2}\alpha_2 p_5^2 + \alpha_1 p_3)X_6^*\end{aligned}$$

Puisque $(M\cap\Gamma)^\perp = \mathbb{Z}X_1^* + \mathbb{Z}X_2^* + \mathbb{Z}X_3^* + \mathbb{Z}X_4^* + \mathbb{R}X_5^* + \mathbb{R}X_6^*$, si σ est une composante de $\pi_l|_\Gamma$, alors

Cas 1: $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$. Alors il existe $t_5, t_6 \in [0,1)$ tels que

$$\sigma = \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{\alpha_1 X_1^*+\alpha_2 X_2^*+2t_6\alpha_1 X_3^*+t_5\alpha_2 X_4^*-\frac{1}{2}t_5^2\alpha_2 X_6^*}).$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\sigma &= \{\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{\alpha_1 X_1^*+\alpha_2 X_2^*+2\alpha_1(t_6-p_6+\frac{q_1}{2\alpha_1})X_3^*+\alpha_2(t_5-p_5+\frac{q_2}{\alpha_2})X_4^*-\frac{1}{2}\alpha_2(t_5-p_5+\frac{q_2}{\alpha_2})^2X_6^*});\\ &\qquad p_5, p_6, r_1, r_2 \in \mathbb{Z} \text{ tels que } (t_5-p_5+\frac{r_2}{\alpha_2}, t_6-p_6+\frac{r_1}{2\alpha_1}) \in [0,1)^2\}\end{aligned}$$

Cas 2: $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ avec pgcd(p_1,q_1)=1, et $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$. Alors il existe $t_5, t_6 \in [0,1)$ et $\chi_1 \in \mathbb{T}$ tels que

$$\sigma = \mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, 0\,,\, Q_1\,\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{\alpha_1 X_1^*+\alpha_2 X_2^*+2t_6\alpha_1 X_3^*+t_5\alpha_2 X_4^*-\frac{1}{2}t_5^2\alpha_2 X_6^*}\cdot\chi_1)$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\sigma &= \{\mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, \mathbb{Z},\, 0\,,\, Q_1\,\mathbb{Z})}^{\Gamma}(\widetilde{\chi}_{\alpha_1 X_1^*+\alpha_2 X_2^*+2\alpha_1(t_6-p_6+\frac{r_1}{2\alpha_1})X_3^*+\alpha_2(t_5-p_5+\frac{r_2}{\alpha_2})X_4^*}\\ &\qquad {}_{-\frac{1}{2}\alpha_2(t_5-p_5+\frac{r_2}{\alpha_2})^2X_6^*}\cdot(\tau^1_{(0,0,0,0,p_5,p_6)}\cdot\chi_1));\\ &\qquad p_5, p_6, r_1, r_2 \in \mathbb{Z} \text{ tels que } (t_5-p_5+\frac{r_2}{\alpha_2}, t_6-p_6+\frac{r_1}{2\alpha_1}) \in [0,1)^2\}.\end{aligned}$$

Cas 3: $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ avec pgcd(p_2,q_2)=1. Il existe alors $t_5, t_6 \in [0,1)$ et $\chi_1 \in \mathbb{T}$ tels que

$$\sigma = \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{(\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,q_2\,\mathbb{Z},\,0)} \left(\widetilde{\chi}_{\alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + 2t_6\alpha_1 X_3^* + t_5\alpha_2 X_4^* - \frac{1}{2}t_5^2\alpha_2 X_6^*} \cdot \chi_1\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\sigma \;=\; \Big\{ & \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{(\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,q_2\,\mathbb{Z},0)} \big(\widetilde{\chi}_{\alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + 2\alpha_1(t_6 - p_6 + \frac{r_1}{2\alpha_1})X_3^* + \alpha_2(t_5 - p_5 + \frac{r_2}{\alpha_2})X_4^*} \\ & \qquad {}_{-\frac{1}{2}\alpha_2(t_5 - p_5 + \frac{r_2}{\alpha_2})^2 X_6^*} \cdot (\tau^1_{(0,0,0,0,p_5,p_6)} \cdot \chi_1)\big); \\ & p_5, p_6, r_1, r_2 \in \mathbb{Z} \text{ tels que } (t_5 - p_5 + \frac{r_2}{\alpha_2}, t_6 - p_6 + \frac{r_1}{2\alpha_1}) \in [0,1)^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Cas 4: $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ et $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}$ avec pgcd(p_1,q_1)=pgcd(p_2,q_2)=1. Il existe alors $t_5 \in [0,1) \setminus ([0,1) \cap \mathbb{Q})$, $t_6 \in [0,1)$ et $\chi_1 \in \mathbb{T}$ tels que

$$\sigma = \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{(\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,q_2\,\mathbb{Z},\,0)} \left(\widetilde{\chi}_{\alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + 2t_6\alpha_1 X_3^* + t_5\alpha_2 X_4^* - \frac{1}{2}t_5^2\alpha_2 X_6^*} \cdot \chi_1\right)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\sigma \;=\; \Big\{ & \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{(\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,\mathbb{Z},\,q_2\,\mathbb{Z},0)} \big(\widetilde{\chi}_{\alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + 2\alpha_1(t_6 - p_6 + \frac{r_1}{2\alpha_1})X_3^* + \alpha_2(t_5 - p_5 + \frac{r_2}{\alpha_2})X_4^*} \\ & \qquad {}_{-\frac{1}{2}\alpha_2(t_5 - p_5 + \frac{r_2}{\alpha_2})^2 X_6^*} \cdot (\tau^1_{(0,0,0,0,p_5,p_6)} \cdot \chi_1)\big); \\ & p_5, p_6, r_1, r_2 \in \mathbb{Z} \text{ tels que } (t_5 - p_5 + \frac{r_2}{\alpha_2}, t_6 - p_6 + \frac{r_1}{2\alpha_1}) \in [0,1)^2 \Big\}. \end{aligned}$$

5.3 Concernant l'équivalence faible des composantes de $\pi_l|_\Gamma$

Soit G un groupe de Lie nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit Γ un réseau de G. On munit $\mathfrak{g}$ (et G) de la structure rationnelle induite par Γ.

Si $\pi \in \widehat{G}$ possède la propriété [IPR], alors le théorème 5.1.1 nous fournit une décomposition de $\pi|_\Gamma$ en intégrale hilbertienne de représentations monomiales irréductibles de Γ, et le théorème 5.2.2 nous permet de savoir quelles sont les composantes de cette décomposition unitairement équivalentes entre elles. On peut alors maintenant se demander s'il est possible de caractériser les composantes faiblement équivalentes entre elles.

5.3.1 Rappels sur l'équivalence faible

Soit G un groupe localement compact, et soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire de G. On appelle *fonction de type positif associée à la représentation* π toute fonction sur G définie par $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi\rangle$, pour un certain $\xi \in \mathcal{H}_\pi$.

Définition 5.3.1 *Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de représentations unitaires de G. On dit que π est* faiblement contenue *dans $\mathcal{S}$ ($\pi \prec \mathcal{S}$) si toute fonction de type positif associée à π est limite uniforme sur tout compact de G de sommes de fonctions de type positif associées à des représentations appartenant à $\mathcal{S}$.*

Remarquons que si $\pi \in \widehat{G}$ et $\mathcal{S} \subseteq \widehat{G}$, alors en vertu de la proposition [Dix1, Proposition 18.1.5], π est faiblement contenue dans $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe un fonction de type positif non-nulle associée à π qui soit limite uniforme sur tout compact de fonctions de type positif associées à des éléments de $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{T}$ est une autre famille de représentations unitaires de G, on dira que $\mathcal{T}$ est *faiblement contenue* dans $\mathcal{S}$ ($\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$) si toute représentation de $\mathcal{T}$ est faiblement contenue dans $\mathcal{S}$, et que $\mathcal{T}$ est *faiblement équivalente* à $\mathcal{S}$ ($\mathcal{T} \sim \mathcal{S}$) si $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}$.

La notion de contenance faible se traduit également au niveau de la C^*-algèbre $C^*(G)$ du groupe G de la façon suivante. Si l'on dénote par $\tilde{\pi}$ l'extension de la représentation π à la C^*-algèbre $C^*(G)$, alors il est bien connu que

$$\pi \prec \mathcal{S} \text{ si et seulement si } \bigcap_{\varrho \in \mathcal{S}} \mathrm{Ker}_{C^*(G)}(\tilde{\varrho}) \subseteq \mathrm{Ker}_{C^*(G)}(\tilde{\pi}).$$

Pour plus de renseignements sur les notions de contenance et d'équivalence faible de représentations, voir par exemple [Dix1, §18] ou [Fell].

5.3.2 Equivalence faible de deux composantes de $\pi_l|_\Gamma$

Soient donc $l \in \mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation $\mathfrak{m}$ qui soit un idéal rationnel de $\mathfrak{g}$, et soit $\{X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n\}$ une base Malcev forte de $\mathfrak{g}$ fortement basée sur Γ et passant par $\mathfrak{m}$.

Nous avons alors vu (cf. théorème 3.2.1) que

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)^{n-m}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}})\, dt_{m+1}\dots dt_n$$

où $l_{t_{m+1},\dots,t_n} = \mathrm{Ad}^*(\exp(-t_{m+1}X_{m+1})\cdots\exp(-t_nX_n))l$ et où $dt_{m+1}\dots dt_n$ dénote la mesure de Lebesgue sur $[0,1)^{n-m}$, ces représentations n'étant pas obligatoirement irréductibles. Soient donc $\varrho = \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}}$ et $\sigma = \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}}$ deux composantes apparaissant dans cette décomposition (avec $(t_{m+1},\dots,t_n)$ et $(s_{m+1},\dots,s_n) \in [0,1)^{n-m}$). D'après [Fel2, Theorem 4.4], on a alors

$$\varrho \sim \sigma \Longleftrightarrow \{\chi^{(\gamma)}_{l_{t_{m+1},\dots,t_n}};\ \gamma\in\Gamma\} \sim \{\chi^{(\gamma)}_{l_{s_{m+1},\dots,s_n}};\ \gamma\in\Gamma\}$$

$\{X_1,\dots,X_m\}$ étant une base de Malcev forte de $\mathfrak{m}$, fortement basée sur $M\cap\Gamma$, pour tout $\zeta = \exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_mX_m) \in M$, on a (voir par exemple [CoG2, Proposition 1.2.7])

$$\log(\zeta) = \sum_{j=1}^{m}(t_j + P_j(t_{j+1},\dots,t_m))X_j,$$

les polynômes P_j's ayant des coefficients *rationnels.*

Proposition 5.3.1 *On conserve les notations introduites ci-dessus. Une condition suffisante pour que ϱ soit faiblement équivalente à σ est*

$$\overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_{t_{m+1},\dots,t_n} + (M\cap\Gamma)^{\perp}} = \overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_{s_{m+1},\dots,s_n} + (M\cap\Gamma)^{\perp}}.$$

En outre, si les coefficients des polynômes P_j's ($1\le j\le m$) sont entiers, *alors cette condition est également nécessaire.*

Preuve: Dénotons $(t_{m+1},\dots,t_n)$ par t et $(s_{m+1},\dots,s_n)$ par s, et supposons que

$$\overline{Ad^*(\Gamma)l_t + (M\cap\Gamma)^{\perp}} = \overline{Ad^*(\Gamma)l_s + (M\cap\Gamma)^{\perp}}.$$

Fixons alors $\eta\in\Gamma$. Nous allons montrer que pour tout $\epsilon>0$, K compact de $M\cap\Gamma$ et $u\in\mathbb{C}$, il existe $\xi\in\Gamma$ et $v\in\mathbb{C}$ tel que

$$|\langle\chi^{(\eta)}_{l_s}(k)u,u\rangle - \langle\chi^{(\xi)}_{l_t}(k)v,v\rangle| < \epsilon, \text{ pour tout } k\in K.$$

Fixons donc $\epsilon>0$, K compact de $M\cap\Gamma$ et $u\in\mathbb{C}$, et soient

$$c_K = \max\{\sum_{i=1}^{n}|m_i(k)|;\ \text{avec } \log(k) = \sum_{i=1}^{n}m_i(k)X_i,\ \text{pour tout } k\in K\} < \infty$$

et $0 < \delta < \frac{1}{2c_K}$ tel que $|e^{2\pi i\delta c_K} - 1| \cdot |u|^2 < \epsilon$. Puisque $\mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s \in \overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^\perp}$, il existe $\xi \in \Gamma$ et $f \in (M \cap \Gamma)^\perp$ tels que

$$\mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s = \sum_{i=1}^n \alpha_i(s,\eta)X_i^*, \qquad \mathrm{Ad}^*(\xi^{-1})l_t = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t,\xi)X_i^*, \qquad f = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^*$$

et

$$|\alpha_i(s,\eta) - \alpha_i(t,\xi) - \beta_i| < \delta, \text{ pour tout } 1 \le i \le n.$$

Posons $v = u$. On a alors, pour tout $k \in K$,

$$\begin{aligned}
&|\langle \chi_{l_s}^{(\eta)}(k)u, u\rangle - \langle \chi_{l_t}^{(\xi)}(k)v, v\rangle| \\
= \;& |\chi_{l_s}^{(\eta)}(k) - \chi_{l_t}^{(\xi)}(k)| \cdot |u|^2 = |e^{2\pi i\langle \mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s - \mathrm{Ad}^*(\xi^{-1})l_t, \log(k)\rangle} - 1| \cdot |u|^2 \\
= \;& |e^{2\pi i\langle \mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s - \mathrm{Ad}^*(\xi^{-1})l_t - f, \log(k)\rangle} - 1| \cdot |u|^2 \\
= \;& |e^{2\pi i\sum_{j=1}^n(\alpha_j(s,\eta) - \alpha_j(t,\xi) - \beta_j)\cdot m_j(k)} - 1| \cdot |u|^2 \text{ (si } \log(k) = \sum_{j=1}^n m_j(k)X_j) \\
\le \;& |e^{2\pi i\delta c_K} - 1| \cdot |u|^2 \le \epsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, $\chi_{l_s}^{(\eta)} \prec \{\chi_{l_t}^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$ et $\{\chi_{l_s}^{(\eta)}; \eta \in \Gamma\} \prec \{\chi_{l_t}^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$. L'inclusion inverse se prouve de manière similaire.

Supposons maintenant que les polynômes P_j's aient des coefficients entiers, et que $\{\chi_{l_t}^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \sim \{\chi_{l_s}^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$. Pour $\epsilon > 0$, $\eta \in \Gamma$ et $f_0 \in (M \cap \Gamma)^\perp$ fixés, on va montrer qu'il existe $\xi \in \Gamma$ et $f \in (M \cap \Gamma)^\perp$ tels que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s &= \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i(s,\eta)X_i^*, \quad f_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i^0 X_i^* \\
\mathrm{Ad}^*(\xi^{-1})l_t &= \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i(t,\xi)X_i^*, \quad f = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^*
\end{aligned}$$

vérifiant

$$|\alpha_i(s,\eta) + \beta_i^0 - \alpha_i(t,\xi) - \beta_i| < \epsilon, \text{ pour tout } 1 \le i \le n.$$

Soit $\delta > 0$ tel que $|e^{2\pi ix} - 1| < \delta$ implique qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ vérifiant $|x + q| < \epsilon$, et soit $m_j = \exp(X_j) \in M \cap \Gamma$, pour tout $1 \le j \le m$. Par hypothèse, il existe $\xi \in \Gamma$ tel que, pour tout $1 \le j \le m$,

$$\begin{aligned}
|\chi_{l_s}^{(\eta)}(m_j) - \chi_{l_t}^{(\xi)}(m_j)| < \delta \iff\;& |e^{2\pi i\langle \mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s - \mathrm{Ad}^*(\xi^{-1})l_t, \log(m_j)\rangle} - 1| < \delta \\
\iff\;& |e^{2\pi i\langle \mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s + f_0 - \mathrm{Ad}^*(\xi^{-1})l_t, X_j\rangle} - 1| < \delta \\
\iff\;& |e^{2\pi i(\alpha_j(s,\eta) + \beta_j^0 - \alpha_j(t,\xi))} - 1| < \delta \\
\iff\;& \exists \beta_j \in \mathbb{Z} \,/\, |\alpha_j(s,\eta) + \beta_j^0 - \alpha_j(t,\xi) - \beta_j| < \epsilon
\end{aligned}$$

Pour $m+1 \leq j \leq n$, posons $\beta_j = \alpha_j(s,\eta) + \beta_j^0 - \alpha_j(t,\xi)$ et $f = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i^*$. Puisque les P_j ont des coefficients entiers, f un élément de $(M \cap \Gamma)^\perp$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq n$, $|\alpha_i(s,\eta) + \beta_i^0 - \alpha_i(t,\xi) - \beta_i| < \epsilon$. Ainsi, $\mathrm{Ad}^*(\eta^{-1})l_s + (M \cap \Gamma)^\perp \subseteq \overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^\perp}$ et $\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_s + (M \cap \Gamma)^\perp \subseteq \overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^\perp}$.L'inclusion réciproque se prouve de manière identique. □

Exemple 1: Soit G le groupe de Heisenberg, muni du réseau $\Gamma = \{(p_1,p_2,p_3);\ p_1,p_2,p_3 \in \mathbb{Z}\}$. Si $l = \alpha X_1^*$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma} \chi_{l_t}\, dt$$

(avec $l_t = \alpha X_1^* + t\alpha X_2^*$, pour tout $t \in [0,1)$) est une décomposition de $\pi_l\big|_\Gamma$ en composantes irréductibles. Soit $t \in [0,1)$. On a alors

$$\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^\perp = (\alpha + \mathbb{Z})X_1^* + (t\alpha + \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z})X_2^* + \mathbb{R}X_3^*.$$

Puisque α est irrationnel, $\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et

$$\overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^\perp} = (\alpha + \mathbb{Z})X_1^* + \mathbb{R}X_2^* + \mathbb{R}X_3^*.$$

Ainsi, $\mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_t} \sim \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}\chi_{l_s}$ pour tout $t,s \in [0,1)$.

5.3.3 Cas particulier: $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{m}$

Nous avons vu que dans le cas où $M \setminus G$ est abélien, les groupes S^i sont normaux. Ainsi, l'utilisation de résultats dûs à J.M.G. Fell (voir par exemple [Fel2]) nous permet d'énoncer un critère exprimant à quelles conditions deux représentations unitaires irréductibles apparaissant dans la décomposition hilbertienne de $\pi_l\big|_\Gamma$ sont unitairement équivalentes.

Lemme 5.3.1 *Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes normaux d'un groupe discret Γ tel que $H_1 \cap H_2 \setminus \Gamma$ soit abélien, et soient χ_1 et χ_2 deux caractères de H_1 et H_2 respectivement. Si les représentations $\varrho_1 = \mathrm{Ind}_{H_1}^{\Gamma}\chi_1$ et $\varrho_2 = \mathrm{Ind}_{H_2}^{\Gamma}\chi_2$ sont irréductibles, alors,*

$$\varrho_1 \sim \varrho_2 \Longleftrightarrow H_1 = H_2 \text{ et } \{\chi_1^{(\gamma)};\ \gamma \in \Gamma\} \sim \{\chi_2^{(\gamma)};\ \gamma \in \Gamma\}.$$

Preuve: Supposons que $\varrho_1 \sim \varrho_2$. Si $H_1 = H_2$, on doit alors avoir, d'après [Fel2, Theorem 4.4], $\chi_1 \prec \{\chi_2^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$ et $\chi_2 \prec \{\chi_1^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$, c'est à dire $\{\chi_1^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \sim \{\chi_2^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$. Sinon, si $H_1 \neq H_2$ alors, soit $H_1 \cap H_2 \subsetneq H_1$, soit $H_1 \cap H_2 \subsetneq H_2$. Supposons, par exemple, que l'on ait $H_1 \cap H_2 \subsetneq H_1$. D'après le théorème des sous-groupes de Mackey, puisque H_1 et H_2 sont discrètement reliés, on a

$$\varrho_1\big|_{H_1} \cong \bigoplus_{\dot\gamma \in \Gamma/H_1} \chi_1^{(\gamma)} \qquad \text{et} \qquad \varrho_2\big|_{H_1} \cong \bigoplus_{\dot\gamma \in H_2\backslash\Gamma/H_1} \mathrm{Ind}_{H_1\cap H_2}^{H_1}(\chi_2\big|_{H_1\cap H_2})^{(\gamma)},$$

et alors, puisque $\varrho_1\big|_{H_1} \sim \varrho_2\big|_{H_1}$,

$$\{\chi_1^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \sim \{\mathrm{Ind}_{H_1\cap H_2}^{H_1}(\chi_2\big|_{H_1\cap H_2})^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}.$$

Posons $\sigma_2 = \mathrm{Ind}_{H_1\cap H_2}^{H_1}\chi_2\big|_{H_1\cap H_2}$. On peut réaliser cette représentation de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\sigma_2} = \{ f : H_1 \to \mathbb{C} \; ; \; & f(h_2 \cdot h_1) = \chi_2(h_2) f(h_1), \; \forall h_1 \in H_1, h_2 \in H_1 \cap H_2 \\ & \text{et} \sum_{\dot h_1 \in H_1\cap H_2\backslash H_1} \|f(h_1)\|^2 < +\infty \}\end{aligned}$$

et pour tous $h_1, h_1' \in H_1$ et tout $f \in \mathcal{H}_{\sigma_2}$,

$$\sigma_2(h_1) f(h_1') = f(h_1' \cdot h_1).$$

Si la représentation σ_2 est irréductible, alors soit $h \in H_1 - H_1 \cap H_2$, et soit $f \in \mathcal{H}_{\sigma_2}$ définie par

$$f(h_1) = \begin{cases} \chi_2(h_2) & \text{si } h_1 = h_2 \cdot h \text{ (pour un certain } h_2 \in H_1 \cap H_2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après la proposition [Dix1, Proposition 18.1.5], pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $K = \{e, h\}$, il existe donc $\gamma \in \Gamma$ et $u \in \mathbb{C}$ tels que

$$|\langle \sigma_2(k) f, f\rangle - \langle \chi_1^{(\gamma)}(k) u, u\rangle| < \frac{1}{2}; \text{ pour tout } k \in K. \tag{5.1}$$

Pour $k = e$, on obtient $\langle \sigma_2(k) f, f\rangle = \langle f, f\rangle = 1$. D'où, par (5.1), $|1 - |u|^2| < \frac{1}{2}$, ou encore, $\frac{1}{2} < |u|^2 < \frac{3}{2}$. Maintenant, pour $k = h$, on a

$$\langle \sigma_2(k) f, f\rangle = \sum_{\dot h_1 \in H_1\cap H_2\backslash H_1} f(h_1 \cdot h)\overline{f(h_1)} = 0$$

et (5.1) implique alors que $|u|^2 < \frac{1}{2}$, ce qui est manifestement impossible. Ainsi, si la représentation σ_2 est irréductible, alors $\sigma_2 \not\prec \{\chi_1^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$ et $\varrho_1\big|_{H_1} \not\sim \varrho_2\big|_{H_1}$.

Supposons maintenant que σ_2 ne soit pas irréductible. Puisque $H_1 \cap H_2 \setminus \Gamma$ est abélien, $H_1 \cap H_2 \setminus H_1$ l'est donc également et, d'après les théorèmes 4.1.1 et [Fell, Theorem 1.7], il existe donc $j \geq 1$ et une famille de sous-groupes normaux $(S^i)_{i \leq j}$ de H_1, contenant strictement $H_1 \cap H_2$, tels que

$$\sigma_2 \sim \left\{\mathrm{Ind}_{S^j}^{H_1}((\chi_2\big|_{H_1 \cap H_2}) \cdot \chi_1' \cdots \chi_j');\ \chi_i' \in (S^{i-1} \setminus S^i)^\wedge\right\}.$$

Si $S^j \subsetneq H_1$, on peut alors montrer, en utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, que

$$\mathrm{Ind}_{S^j}^{H_1}((\chi_2\big|_{H_1\cap H_2}) \cdot \chi_1' \cdots \chi_j') \not\prec \{\chi_1^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \text{ pour tout } \chi_1', \ldots, \chi_j' \in \mathbb{T}\ ,$$

et donc que $\varrho_1\big|_{H_1} \not\sim \varrho_2\big|_{H_1}$.

Maintenant, si $S^j = H_1$, alors $S^j \subseteq \mathrm{St}_{H_1\cap H_2}^{H_1}(\chi_2\big|_{H_1\cap H_2}) \subseteq H_1$. Ainsi,

$$H_1 = \mathrm{St}_{H_1\cap H_2}^{\Gamma}(\chi_2\big|_{H_1\cap H_2}) \cap H_1 \subseteq H_2 \cap H_1,$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ. □

Ceci nous conduit alors au résultat suivant:

Proposition 5.3.2 *Reprenons les hypothèses et les notations du théorème 5.1.1. Si* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{m}$, *alors deux représentations apparaissant dans la décomposition de* $\pi_l\big|_\Gamma$ *en irréductibles,* $\mathrm{Ind}_{S^{j_{t_{m+1},\ldots,t_n}}}^{\Gamma}(\chi_{l_{t_{m+1},\ldots,t_n}} \cdot \chi_1 \cdots \chi_{j_{t_{m+1},\ldots,t_n}})$ *et* $\mathrm{Ind}_{S^{j_{s_{m+1},\ldots,s_n}}}^{\Gamma}(\chi_{l_{s_{m+1},\ldots,s_n}} \cdot \chi_1' \cdots \chi_{j_{s_{m+1},\ldots,s_n}}')$, *seront faiblement équivalentes si et seulement si* $S^{j_{t_{m+1},\ldots,t_n}} = S^{j_{s_{m+1},\ldots,s_n}}$ *et*

$$\{((\chi_{l_{t_{m+1},\ldots,t_n}} \cdot \chi_1 \cdots \chi_{j_{t_{m+1},\ldots,t_n}})^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \sim \{((\chi_{l_{s_{m+1},\ldots,s_n}} \cdot \chi_1' \cdots \chi_{j_{s_{m+1},\ldots,s_n}}')^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$$

Exemple 1: Revenons à l'exemple du groupe de Heisenberg. Si $l = \alpha X_1^*$, avec $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ (avec pgcd(p,q)=1), alors $\pi_l\big|_\Gamma$ se décompose en irréductibles de la façon suivante:

$$\pi_l\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\chi_{l_t} \cdot \chi_1)\, d\chi_1\, dt$$

où $S^1 = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, q\mathbb{Z})$. Soient donc $s, t \in [0,1)$ et $\chi_1, \chi_1' \in \mathbb{T}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\chi_{l_t} \cdot \chi_1) \sim \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}(\chi_{l_s} \cdot \chi_1') &\iff \{(\chi_{l_t} \cdot \chi_1)^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \sim \{(\chi_{l_s} \cdot \chi_1')^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \\
&\iff \{\chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1; \gamma \in \Gamma\} \sim \{\chi_{l_s}^{(\gamma)} \cdot \chi_1'; \gamma \in \Gamma\} \\
&\iff \{\chi_{l_t}^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \sim \{\chi_{l_s}^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\} \text{ et } \chi_1 = \chi_1'
\end{aligned}$$

[En effet, soit $p_1 : S^1 \to M \cap \Gamma \setminus S^1$ la projection canonique. Pour tout $\gamma = (p_1, p_2, p_3) \in \Gamma$ et tout $(u_1, u_2, qu_3) \in S^1$, on a

$$\begin{aligned}
(\chi_{l_t} \cdot \chi_1)^{(\gamma)}(u_1, u_2, qu_3) &= \widetilde{\chi}_{l_t}(\gamma \cdot (u_1, u_2, qu_3) \cdot \gamma^{-1})\chi_1(p_1(\gamma \cdot (u_1, u_2, qu_3) \cdot \gamma^{-1})) \\
&= \widetilde{\chi}_{l_t}(\gamma \cdot (u_1, u_2, 0) \cdot (0, 0, qu_3) \cdot \gamma^{-1})\chi_1(p_1(u_1, u_2, qu_3)) \\
&= \chi_{l_t}(\gamma \cdot (u_1, u_2, 0) \cdot \gamma^{-1})\widetilde{\chi}_{l_t}(-qu_3p_2, 0, qu_3)\chi_1(p_1(u_1, u_2, qu_3)) \\
&= \chi_{l_t}^{(\gamma)}(u_1, u_2, 0)\chi_{l_t}(-qu_3p_2, 0, 0)\chi_1(p_1(u_1, u_2, qu_3)) \\
&= \chi_{l_t}^{(\gamma)}(u_1, u_2, 0)\chi_1(p_1(u_1, u_2, qu_3)) \\
&= (\chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1)(u_1, u_2, qu_3)
\end{aligned}$$

d'où, $(\chi_{l_t} \cdot \chi_1)^{(\gamma)} = \chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Soient maintenant $\eta, \gamma \in \Gamma$ fixés. Pour tout $(u_1, u_2, qu_3) \in S^1$, posons

$$c(\eta, \gamma, u_1, u_2, qu_3) = |(\chi_{l_s}^{(\eta)} \cdot \chi_1)(u_1, u_2, qu_3) - (\chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1')(u_1, u_2, qu_3)|.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
c(\eta, \gamma, u_1, u_2, qu_3) &= |(\chi_{l_s}^{(\eta)} \cdot \chi_1)(u_1, u_2, qu_3) - (\chi_{l_s}^{(\eta)} \cdot \chi_1')(u_1, u_2, qu_3) \\
&\quad + (\chi_{l_s}^{(\eta)} \cdot \chi_1')(u_1, u_2, qu_3) - (\chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1')(u_1, u_2, qu_3)|
\end{aligned}$$

on a alors

$$c(\eta, \gamma, u_1, u_2, qu_3) \leq |\chi_1(p_1(0, 0, qu_3)) - \chi_1'(p_1(0, 0, qu_3))| + |\chi_{l_s}^{(\eta)}(u_1, u_2, 0) - \chi_{l_s}^{(\gamma)}(u_1, u_2, 0)|$$

et l'implication $\Longleftarrow$ est maintenant évidente. Supposons donc que l'on ait $\{\chi_{l_s}^{(\eta)} \cdot \chi_1' ;\, \eta \in \Gamma\} \sim \{(\chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1 ;\, \gamma \in \Gamma\}$. Puisque $\chi_{l_s}^{(\eta)} \cdot \chi_1'|_{M \cap \Gamma} = \chi_{l_s}^{(\eta)}$ et $\chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1|_{M \cap \Gamma} = \chi_{l_t}^{(\gamma)}$, il est clair que l'on a alors $\{\chi_{l_s}^{(\eta)} ;\, \eta \in \Gamma\} \sim \{\chi_{l_t}^{(\gamma)} ;\, \gamma \in \Gamma\}$. Ensuite, soit $u_3 \in \mathbb{Z}$ fixé. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$|(\chi_{l_t}^{(\gamma)} \cdot \chi_1)(0, 0, qu_3) - (\chi_{l_s}^{(\eta)} \cdot \chi_1')(0, 0, qu_3)| < \epsilon.$$

c'est à dire tel que $|\chi_1'(p_1(0, 0, qu_3)) - \chi_1(p_1(0, 0, qu_3))| < \epsilon$. D'où $\chi_1'(p_1(0, 0, qu_3)) = \chi_1(p_1(0, 0, qu_3))$, et les caractères χ_1 et χ_1' sont donc égaux.]

Ainsi, il suffit de déterminer sous quelle condition $\{\chi_{l_t}^{(\gamma)};\ \gamma \in \Gamma\}$ est faiblement équivalent à $\{\chi_{l_s}^{(\gamma)}; \gamma \in \Gamma\}$. Pour résoudre ce problème, nous utilisons la proposition 5.3.1. Puisque

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^{\perp} &= (\frac{p}{q} + \mathbb{Z})X_1^* + (t\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\mathbb{Z} + \mathbb{Z})X_2^* + \mathbb{R}X_3^* \\
&= (\frac{p}{q} + \mathbb{Z})X_1^* + \frac{1}{q}(tp + p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z})X_2^* + \mathbb{R}X_3^* \\
&= (\frac{p}{q} + \mathbb{Z})X_1^* + \frac{1}{q}(tp + \mathbb{Z})X_2^* + \mathbb{R}X_3^*
\end{aligned}$$

on a

$$\overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^{\perp}} = (\frac{p}{q} + \mathbb{Z})X_1^* + \frac{1}{q}(tp + \mathbb{Z})X_2^* + \mathbb{R}X_3^*$$

et $\overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_t + (M \cap \Gamma)^{\perp}}$ est égal à $\overline{\mathrm{Ad}^*(\Gamma)l_s + (M \cap \Gamma)^{\perp}}$ si et seulement si $t - s \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$. Finalement,

$$\mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}\chi_{l_t} \cdot \chi_1 \sim \mathrm{Ind}_{S^1}^{\Gamma}\chi_{l_s} \cdot \chi_1' \Longleftrightarrow t - s \in \frac{1}{p}\mathbb{Z} \text{ et } \chi_1 = \chi_1'.$$

Annexes

Nous allons ici donner quelques exemples de décomposition en intégrale hilbertienne de restrictions de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie nilpotent G à un réseau Γ.

A.1 Groupes de Ratcliff

Soit $\mathfrak{h}_n$ l'algèbre de Heisenberg de dimension $2n+1$, munie des coordonnées (z, y, x) (avec $z \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$) et du crochet

$$[(z, y, x), (z', y', x')] = (x \cdot y' - x' \cdot y, 0, 0).$$

Soit $\mathcal{W}$ le sous-espace de $\mathfrak{h}_n$ défini par $\mathcal{W} = \{(0, y, x);\ x, y \in \mathbb{R}^n\}$, et soit Sp_{2n} le groupe formé des éléments $A \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$ tels que

$$[A(0, y, x), A(0, y', x')] = [(0, y, x), (0, y', x')], \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si on pose maintenant $\mathcal{Y} = \{(0, y, 0);\ y \in \mathbb{R}^n\}$, alors le sous-groupe S_n de Sp_{2n} fixant point par point les éléments de $\mathcal{Y}$ est canoniquement isomorphe au groupe (abélien) des matrices $(n \times n)$ symétriques, d'algèbre de Lie $\mathcal{S}_n$.

Formons le produit semi-direct $\mathcal{SH}_n$ de $\mathfrak{h}_n$ par $\mathcal{S}_n$. On obtient une algèbre de Lie nilpotente de degré 3, qui a pour coordonnées (z, y, x, S), avec $S \in \mathcal{S}_n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}$, et dont le crochet de Lie est défini par:

$$[(z, y, x, S), (z', y', x', S')] = (x \cdot y' - x' \cdot y, Sx' - S'x, 0, 0).$$

L'intêret de ces algèbres est dû au résultat suivant (voir [Rat, Theorem 1]).

Théorème A.1.1 ([Rat]) *Toute algèbre de Lie nilpotente de pas 3 dont le centre est de dimension 1 est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{SH}_n$, pour un certain $n \geq 1$.*

Via le produit de Campbell-Baker-Hausdorff, on définit sur $\mathcal{SH}_n$ une loi de multiplication (de groupe): pour tous $(z, y, x, S), (z', y', x', S') \in \mathcal{SH}_n$,

$$\begin{aligned}
(z, y, x, S) * (z', y', x', S') &= (z, y, x, S) + (z', y', x', S') + \frac{1}{2}[(z, y, x, S), (z', y', x', S')] \\
&\quad + \frac{1}{12}[(z, y, x, S), [(z, y, x, S), (z', y', x', S')]] \\
&\quad - \frac{1}{12}[(z', y', x', S'), [(z, y, x, S), (z', y', x', S')]] \\
&= (z + z' + \frac{1}{2}(x \cdot y' - x' \cdot y) + \frac{1}{12}(x - x') \cdot (Sx' - S'x), \\
&\quad y + y' + \frac{1}{2}(Sx' - S'x), x + x', S + S')
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{SH}_n$ devient un groupe de Lie nilpotent. Soit

$$\Gamma = \{(z, y, x, S); z \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}^n, x \in (12\mathbb{Z})^n, S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Z})\},$$

où $\mathcal{S}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{S}_n$ à coefficients entiers. Il est clair que Γ est un réseau de $\mathcal{SH}_n$. Soit maintenant $\mathcal{SH}_n^*$ l'espace dual de $\mathcal{SH}_n$, de coordonnées (λ, ν, μ, Ξ) (avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}^n$ et $\Xi \in \mathcal{S}_n$). On a, pour tout $(z, y, x, S) \in \mathcal{SH}_n$,

$$\langle(\lambda, \nu, \mu, \Xi), (z, y, x, S)\rangle = \lambda z + \nu \cdot y + \mu \cdot x + \Xi \cdot S,$$

où $\Xi \cdot S = \sum_{i \leq j} \Xi_{i,j} S_{i,j}$ (si $\Xi = (\Xi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $S = (S_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$), et où $\nu \cdot y$ (resp. $\mu \cdot x$) dénote le produit scalaire de ν et y (resp. μ et x). Soit maintenant $(A, 0, 0, \lambda) \in \mathcal{SH}_n^*$, avec $\lambda \neq 0$. Son orbite sous l'action co-adjointe de $\mathcal{SH}_n$ est donnée par:

Proposition A.1.1 ([Rat, Proposition 4.1]) *Soit $\xi_0 = (A, 0, 0, \lambda) \in \mathcal{SH}_n^*$ avec $\lambda \neq 0$. Alors l'orbite co-adjointe $\mathcal{O}_{\lambda,A}$ dans $\mathcal{SH}_n^*$ contenant ξ_0 est*

$$\mathcal{O}_{\lambda,A} = \{(\lambda, \nu, \mu, A - \frac{1}{2\lambda}\nu\nu^T); \mu, \nu \in \mathbb{R}^n\}.$$

Soit donc $\pi_{\lambda,A}$ la représentation unitaire irréductible de $\mathcal{SH}_n$ associée à cette orbite. On va étudier sa restriction au réseau Γ. Puisque

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}_{(\lambda,0,0,A)} &= \big\{(z,y,x,S) \in \mathcal{SH}_n;\ \langle(\lambda,0,0,A),[(z,y,x,S),(z',y',x',S')]\rangle = 0, \\
&\qquad\qquad \forall (z',y',x',S') \in \mathcal{SH}_n\big\} \\
&= \big\{(z,y,x,S) \in \mathcal{SH}_n;\ \langle(\lambda,0,0,A),(x\cdot y' - x'\cdot y, Sx' - S'x, 0,0)\rangle = 0, \\
&\qquad\qquad \forall x',y' \in \mathbb{R}^n\big\} \\
&= \big\{(z,y,x,S) \in \mathcal{SH}_n;\ \lambda(x\cdot y' - x'\cdot y) = 0,\ \forall x',y' \in \mathbb{R}^n\big\} \\
&= \big\{(z,0,0,S);\ z \in \mathbb{R} \text{ et } S \in \mathcal{S}_n\big\},
\end{aligned}$$

$\mathfrak{r}_{(\lambda,0,0,A)}$ est donc une sous-algèbre rationnelle propre de $\mathcal{SH}_n$, et la restriction de $\pi_{\lambda,A}$ à Γ n'est donc pas irréductible. Soit

$$\mathfrak{m} = \big\{(z,y,0,S);\ z \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } S \in \mathcal{S}_n\big\}.$$

$\mathfrak{m}$ est un idéal rationnel de $\mathcal{SH}_n$ subordonné à $(\lambda,0,0,A)$, de dimension

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{1}{2}(\dim(\mathcal{SH}_n) + \dim(\mathfrak{r}_{(\lambda,0,0,A)})).$$

Ainsi, $\mathfrak{m}$ est donc une polarisation en $(\lambda,0,0,A)$, et on a, d'après le théorème 3.2.1,

$$\pi_{\lambda,A}\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)^n}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{m}\cap\Gamma}^{\Gamma} \chi_{\mathrm{Ad}^*(0,0,-t,0)(\lambda,0,0,A)}\, dt \tag{A.2}$$

où $t = (t_1,\dots,t_n) \in [0,1)^n$ et $dt = dt_1 \dots dt_n$ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1)^n$. Or, pour tout $(z,y,x,S) \in \mathcal{SH}_n$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Ad}^*(0,0,-t,0)(\lambda,0,0,A),(z,y,x,S)\rangle &= \langle(\lambda,0,0,A),\mathrm{Ad}(0,0,t,0)(z,y,x,S)\rangle \\
&= \langle(\lambda,0,0,A),(z + t\cdot y - \frac{1}{2}t\cdot St, y - St, x, S)\rangle \\
&= \lambda z + \lambda t\cdot y - \lambda(tt^T)\cdot S + A\cdot S \\
&= \langle(\lambda,\lambda t,0,A - \lambda tt^T),(z,y,x,S)\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ad}^*(0,0,-t,0)(\lambda,0,0,A) = (\lambda,\lambda t,0,A-\lambda tt^T)$ pour tout $t \in [0,1)^n$.

Nous allons maintenant voir si les représentations apparaissant dans (A.2) sont irréductibles ou non. Pour tout $t \in [0,1)^n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{St}^{\Gamma}_{\mathfrak{m}\cap\Gamma}(\chi_{(\lambda,\lambda t,0,A-\lambda tt^T)}) &= \{(z,y,x,S)\in\Gamma;\ \chi_{(\lambda,\lambda t,0,A-\lambda tt^T)}([(z,y,x,S),(z',y',0,S')]) = 1, \\
&\qquad\qquad \text{pour tout } (z',y',0,S')\in\mathfrak{m}\cap\Gamma\} \\
&= \{(z,y,x,S)\in\Gamma; \\
&\qquad \langle(\lambda,\lambda t,0,A-\lambda tt^T),(x\cdot y'-(xx^T)\cdot S',-S'x,0,0)\rangle\in\mathbb{Z}, \\
&\qquad\qquad \text{pour tous } y'\in\mathbb{Z}^n \text{ et } S'\in\mathcal{S}_n(\mathbb{Z})\} \\
&= \{(z,y,x,S)\in\Gamma;\ \lambda x\cdot y'-\lambda(xx^T)\cdot S'-\lambda t\cdot S'x\in\mathbb{Z}, \\
&\qquad\qquad \text{pour tous } y'\in\mathbb{Z}^n \text{ et } S'\in\mathcal{S}_n(\mathbb{Z})\} \\
&= \{(z,y,x,S)\in\Gamma;\ \lambda x\cdot y'\in\mathbb{Z} \text{ et } \lambda((xx^T)\cdot S'+t\cdot S'x)\in\mathbb{Z}, \\
&\qquad\qquad \text{pour tous } y'\in\mathbb{Z}^n \text{ et } S'\in\mathcal{S}_n(\mathbb{Z})\} \\
&= \mathfrak{m}\cap\Gamma,\ \text{si } \lambda\notin\mathbb{Q} \text{ ou si } \lambda\in\mathbb{Q}-\{0\} \text{ et } t\in[0,1)^n-([0,1)^n\cap\mathbb{Q}^n)
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $[0,1)^n\cap\mathbb{Q}^n$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1)^n$, on en déduit donc que $\pi_{\lambda,A}\big|_\Gamma$ se décompose en irréductibles de la manière suivante:

$$\pi_{\lambda,A}\big|_\Gamma \cong \int_{[0,1)^n}^{\oplus} \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{\mathfrak{m}\cap\Gamma}\chi_{(\lambda,\lambda t,0,A-\lambda tt^T)}\,dt.$$

A.2 Groupe $G_{5,2}$

Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{5,2}=\mathbb{R}X_1+\ldots+\mathbb{R}X_5$ (voir [Nie]) l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 5 définie par les crochets (non-triviaux) suivants:

$$[X_5,X_4]=X_2 \qquad\qquad [X_5,X_3]=X_1.$$

Soit $G=G_{5,2}$ le groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe correspondant. On identifie alors $G_{5,2}$ à $\mathbb{R}^5$ grâce à l'application suivante

$$(x_1,\ldots,x_5)\mapsto\exp(x_1X_1)\cdots\exp(x_5X_5).$$

La multiplication sur $G_{5,2}$ est alors donnée par

$$(x_1,\ldots,x_5)\cdot(y_1,\ldots,y_5)=(x_1+y_1+x_5y_3,x_2+y_2+x_5y_4,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)$$

pour tous $(x_1, \dots, x_5), (y_1, \dots, y_5) \in G_{5,2}$.

Pour tout $(x_1, \dots, x_5) \in G_{5,2}$ et tous $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R}$, on a également

$$(x_1, \dots, x_5)^{-1} = (-x_1 + x_3x_5, -x_2 + x_4x_5, -x_3, -x_4, -x_5)$$

$$\exp(a_1X_1 + \dots + a_5X_5) = (a_1 + \frac{1}{2}a_3a_5, a_2 + \frac{1}{2}a_4a_5, a_3, a_4, a_5)$$

$$\log(x_1, \dots, x_5) = (x_1 - \frac{1}{2}x_3x_5)X_1 + (x_2 - \frac{1}{2}x_4x_5)X_2 + x_3X_3 + x_4X_4 + x_5X_5$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(x_1, \dots, x_5)(a_1X_1 + \dots + a_5X_5) &= (a_1 + x_5a_3 - x_3a_5)X_1 \\ &\quad +(a_2 + x_5a_4 - x_4a_5)X_2 \\ &\quad +a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 \end{aligned}$$

Soit $\{X_1^*, \dots, X_5^*\}$ la base duale associée à $\{X_1, \dots, X_5\}$. Pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}^*(x_1, \dots, x_5)(\alpha_1X_1^* + \dots + \alpha_5X_5^*) &= \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* + (\alpha_3 - \alpha_1x_5)X_3^* \\ &\quad +(\alpha_4 - \alpha_2x_5)X_4^* + (\alpha_5 + \alpha_1x_3 + \alpha_2x_4)X_5^* \end{aligned}$$

Soit Γ le sous-groupe de $G_{5,2}$ défini par $\Gamma = \{(p_1, \dots, p_5); p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{Z}\}$ (que l'on dénote également par $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Γ est un réseau de $G_{5,2}$ et $\{X_1, \dots, X_5\}$ est alors une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}_{5,2}$ fortement basée sur Γ.

Soit $l = \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* \in \mathfrak{g}_{5,2}^*$, avec $\alpha_1 \neq 0$ et $\alpha_2 \neq 0$. On a alors

$$\mathfrak{r}_l = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}(\alpha_2X_3 - \alpha_1X_4).$$

L'idéal rationnel $\mathfrak{m} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4$ est alors une polarisation en l, par laquelle passe la base de Malcev forte $\{X_1, \dots, X_5\}$ considérée. Soit $M = \exp(\mathfrak{m}) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, 0)$. On a $M \cap \Gamma = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$. Dénotons par π_l la représentation $\mathrm{Ind}_M^G \chi_l$. On a alors

$$\pi_l \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}|_{M\cap\Gamma})\, dt \tag{A.3}$$

avec $l_t = \alpha_1X_1^* + \alpha_2X_2^* - \alpha_1tX_3^* - \alpha_2tX_4^* + (\alpha_1x_3 + \alpha_2x_4)X_5^*$, pour tout $t \in [0, 1)$.

Fixons maintenant $t \in [0,1)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_t}) &= \{\gamma = (p_1,\dots,p_5) \in \Gamma;\ \chi_{l_t}(\gamma\xi\gamma^{-1}) = \chi_{l_t}(\xi),\ \forall \xi \in M\cap\Gamma\} \\
&= \{\gamma = (p_1,\dots,p_5) \in \Gamma;\ \langle l_t, p_5q_3X_1 + p_5q_4X_2\rangle \in \mathbb{Z},\ \forall q_3,q_4 \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\gamma = (p_1,\dots,p_5) \in \Gamma;\ \alpha_1p_5q_3 + \alpha_2p_5q_4 \in \mathbb{Z},\ \forall q_3,q_4 \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\gamma = (p_1,\dots,p_5) \in \Gamma;\ \alpha_1p_5 \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha_2p_5 \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Cas 1: Si $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ ou si $\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$, alors $\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_t}) = M\cap\Gamma$, pour tout $t\in[0,1)$ et (A.3) est une décomposition de $\pi_l|_\Gamma$ en composantes irréductibles.

Cas 2: Si $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ et si $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2}$ avec pgcd(p_1,q_1) = pgcd $(p_2, q_2) = 1$, on pose $q =$ ppcm (q_1,q_2). On a alors

$$\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_t}) = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q\mathbb{Z})$$

et aucune des représentations apparaissant dans (A.3) n'est irréductible.
Soit $S^0 = M\cap\Gamma = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},0)$ et $S_0 = (\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},\mathbb{Z},q\mathbb{Z})$. Soit maintenant $S^1 = \langle S^0, \exp(qX_5)\rangle = S_0$. Alors, $S_1 = S^1$ et

$$\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}\chi_{l_t} \cong \int^{\oplus}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{S^1}\chi_{l_t,s}\, d\dot{s}$$

avec, pour tout $(q_1,q_2,q_3,q_4,qq_5) \in S^1$,

$$\chi_{l_t,s}(q_1,q_2,q_3,q_4,qq_5) = e^{2\pi i(\alpha_1q_1+\alpha_2q_2-\alpha_1tq_3-\alpha_2tq_4+sq_5)}.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [0,1)$, $\pi_l|_\Gamma$ se décompose finalement (en représentations irréductibles de dimensions finies de Γ) de la manière suivante:

$$\pi_l \cong \int^{\oplus}_{[0,1)}\int^{\oplus}_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{S^1}\chi_{l_t,s}\, d\dot{s}\, dt.$$

A.3 Groupe $G_{5,5}$

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,5} = \mathbb{R}X_1 + \ldots + \mathbb{R}X_5$ (voir [Nie]) l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 5 définie par les crochets (non-triviaux) suivants:

$$[X_5,X_4] = 6X_3 \qquad [X_5,X_3] = 2X_2 \qquad [X_5,X_2] = 2X_1.$$

Soit $G = G_{5,5}$ le groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe correspondant. On identifie alors $G_{5,5}$ à $\mathbb{R}^5$ grâce à l'application suivante

$$(x_1, \ldots, x_5) \mapsto \exp(x_1X_1) \cdots \exp(x_5X_5).$$

La multiplication sur $G_{5,5}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_5) \cdot (y_1, \ldots, y_5) &= (x_1 + y_1 + 2x_5y_2 + 2x_5^2y_3 + 4x_5^3y_4, x_2 + y_2 + 2x_5y_3 + 6x_5^2y_4, \\ &\quad x_3 + y_3 + 6x_5y_4, x_4 + y_4, x_5 + y_5)\end{aligned}$$

pour tous $(x_1, \ldots, x_5), (y_1, \ldots, y_5) \in G_{5,5}$.

Pour tout $(x_1, \ldots, x_5) \in G_{5,5}$ et tous $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{R}$, on a également

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_5)^{-1} &= (-x_1 + 2x_2x_5 - 2x_3x_5^2 + 4x_4x_5^3, -x_2 + 2x_3x_5 - 6x_4x_5^2, \\ &\quad -x_3 + 6x_4x_5, -x_4, -x_5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exp(a_1X_1 + \ldots + a_5X_5) &= (a_1 + a_2a_5 + \frac{2}{3}a_3a_5^2 + a_4a_5^3, a_2 + a_3a_5 + 2a_4a_5^2, \\ &\quad a_3 + 3a_4a_5, a_4, a_5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(x_1, \ldots, x_5) &= (x_1 - x_2x_5 + \frac{1}{3}x_3x_5^2)X_1 + (x_2 - x_3x_5 + x_4x_5^2)X_2 \\ &\quad +(x_3 - 3x_4x_5)X_3 + x_4X_4 + x_5X_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(x_1, \ldots, x_5)(a_1X_1 + \ldots + a_5X_5) &= (a_1 + 2x_5a_2 - 2x_2a_5 + 2x_5^2a_3 + 4x_5^3a_4)X_1 \\ &\quad +(a_2 + 2x_5a_3 - 2x_3a_5 + 6x_5^2a_4)X_2 \\ &\quad +(a_3 + 6x_5a_4 - 6x_4a_5)X_3 + a_4X_4 + a_5X_5\end{aligned}$$

Soit $\{X_1^*, \ldots, X_5^*\}$ la base duale associée à $\{X_1, \ldots, X_5\}$. Pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}^*(x_1, \ldots, x_5)(\alpha_1X_1^* + \ldots + \alpha_5X_5^*) &= \alpha_1X_1^* + (\alpha_2 - 2\alpha_1x_5)X_2^* \\ &\quad +(\alpha_3 - 2\alpha_2x_5 + 2\alpha_1x_5^2)X_3^* \\ &\quad +(\alpha_4 - 2\alpha_3x_5 + 2\alpha_2x_5^2 - \frac{4}{3}\alpha_1x_5^3)X_4^* \\ &\quad +(\alpha_5 + 3\alpha_3x_4 + \alpha_2(x_3 - 6x_4x_5) \\ &\quad +\alpha_1(x_2 - 2x_3x_5 + 6x_4x_5^2))X_5^*\end{aligned}$$

Soit Γ le sous-groupe de $G_{5,5}$ défini par $\Gamma = \{(p_1, \dots, p_5); p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{Z}\}$ (que l'on dénote également par $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Γ est un réseau de $G_{5,5}$ et $\{X_1, \dots, X_5\}$ est alors une base de Malcev forte de $\mathfrak{g}_{5,5}$ fortement basée sur Γ.

Soit $l = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* \in \mathfrak{g}_{5,5}^*$, avec $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ et $\alpha_3 \neq 0$. On a alors

$$\mathfrak{r}_l = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}(\alpha_2 X_2 - \alpha_1 X_3) + \mathbb{R}(3\alpha_3 X_2 - \alpha_1 X_4).$$

L'idéal rationnel $\mathfrak{m} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}X_4$ est alors une polarisation en l, par laquelle passe la base de Malcev forte $\{X_1, \dots, X_5\}$ considérée. Soit $M = \exp(\mathfrak{m}) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, 0)$. On a $M \cap \Gamma = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0)$. Dénotons par π_l la représentation $\mathrm{Ind}_M^G \chi_l$. On a alors

$$\pi_l \cong \int_{[0,1)}^{\oplus} \mathrm{Ind}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}|_{M\cap\Gamma})\, dt \tag{A.4}$$

avec

$$\begin{aligned} l_t &= \mathrm{Ad}^*(\exp(-tX_5))(\alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^*) \\ &= \alpha_1 X_1^* + (\alpha_2 - 2\alpha_1 t)X_2^* + (\alpha_3 - 2\alpha_2 t + 2\alpha_1 t^2)X_3^* + (-2\alpha_3 t + 2\alpha_2 t^2 - \frac{4}{3}\alpha_1 t^3)X_4^* \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1)$.

Fixons maintenant $t \in [0,1)$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{St}_{M\cap\Gamma}^{\Gamma}(\chi_{l_t}) &= \{\gamma = (p_1, \dots, p_5) \in \Gamma;\ \chi_{l_t}(\gamma\xi\gamma^{-1}) = \chi_{l_t}(\xi),\ \forall \xi \in M \cap \Gamma\} \\ &= \{\gamma = (p_1, \dots, p_5) \in \Gamma; \\ &\qquad \langle l_t, (2p_5q_2 + 2p_5^2q_3 + 4p_5^3q_4)X_1 + (2p_5q_3 + 6p_5^2q_4)X_2 + 6p_5q_4X_3\rangle \in \mathbb{Z}, \\ &\qquad\qquad \forall q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\gamma = (p_1, \dots, p_5) \in \Gamma; \alpha_1(2p_5q_2 + 2p_5^2q_3 + 4p_5^3q_4) \\ &\qquad + (\alpha_2 - 2\alpha_1 t)(2p_5q_3 + 6p_5^2q_4) + 6(\alpha_3 - 2\alpha_2 t + 2\alpha_1 t^2)p_5q_4 \in \mathbb{Z}, \\ &\qquad\qquad \forall q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\gamma = (p_1, \dots, p_5) \in \Gamma;\ 2\alpha_1 p_5 \in \mathbb{Z},\ 2(\alpha_2 - 2\alpha_1 t)p_5 \in \mathbb{Z} \\ &\qquad \text{et } 6(\alpha_3 - 2\alpha_2 t + 2\alpha_1 t^2)p_5 \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Cas 1: Si $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ alors $\mathrm{St}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}(\chi_{l_t}) = M \cap \Gamma$, pour tout $t \in [0,1)$ et (A.4) est une décomposition de $\pi_l\big|_{\Gamma}$ en composantes irréductibles.

Cas 2: Si $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p_1,q_1) = 1$, alors la condition $2(\alpha_2 - 2\alpha_1 t)p_5 \in \mathbb{Z}$ implique que $t \in \frac{\mathbb{Q}+\alpha_2}{2\alpha_1} \cap [0,1)$, qui est dénombrable, et donc de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1)$. Ainsi, $\pi_l\big|_{\Gamma}$ se décompose en composantes irréductibles de la manière suivante:

$$\pi_l \cong \int^{\oplus}_{[0,1)-\frac{\mathbb{Q}+\alpha_2}{2\alpha_1}\cap[0,1)} \mathrm{Ind}^{\Gamma}_{M\cap\Gamma}\chi_{l_t}\,dt.$$

Remarque: Quelles que soient les valeurs de α_1, α_2 et α_3, on remarque que dans la décomposition (A.4) presque toutes les composantes sont irréductibles. Ceci reste donc vrai en particulier pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q} - \{0\}$.

Références bibliographiques

[ArL] D. Arnal and J. Ludwig, *Q.U.P. and Paley-Wiener properties of unimodular, especially nilpotent, Lie groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1071-1080.

[Bin1] M.W. Binder, *Induced factor representations of discrete groups and their types*, J. Funct. Anal. 115 (1993), 294-312.

[Bin2] M.W. Binder, *On induced representations of discrete groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 301-309.

[Bor] A. Borel, "Introduction aux groupes arithmétiques", Hermann (1969).

[Bou1] N. Bourbaki, "Algèbre, chapitres 1 à 3", Éléments de Mathématiques, Hermann (1970).

[Bou2] N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie, chapitre I", Éléments de Mathématiques, diffusion C.C.L.S. (1971).

[Bro] I.D. Brown, *Dual topology of a nilpotent Lie group*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 6 (1973), 407-411.

[Cor] L. Corwin, *Induced representations of discrete groups*, Proc. Am. Math. Soc. 47 (1975), 279-287.

[CoG1] L. Corwin and F. P. Greenleaf, *Character formulas and spectra of compact nilmanifolds*, J. Funct. Anal. 21 (1976), 123-154.

[CoG2] L. Corwin and F. P. Greenleaf, "Representations of nilpotent Lie groups and their applications, Part I: Basic theory and examples", Cambridge University Press (1990).

[CoS] M. Cowling and T. Steger, *The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices*, J. Reine Angew. Math. 420 (1991), 85-98.

[Dix1] J. Dixmier, "Les C^*-algèbres et leurs représentations", deuxième édition, Gauthier-Villars (1969).

[Dix2] J. Dixmier, "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)", deuxième édition, Gauthier-Villars (1969).

[Fel] R. Felix, *Über Integralzerlegungen von Darstellungen nilpotenter Liegruppen*, Manuscripta Math. 27 (1979), 279-290.

[Fel1] J.M.G. Fell, *The dual spaces of C^*-algebras*, Trans. AMS 94 (1960), 365-403.

[Fel2] J.M.G. Fell, *Weak containment and induced representations of groups*, Can. J. Math. 14 (1962), 237-268.

[Gel] I.M. Gel'fand, M.I. Graev and I.I. Pyatetskii-Shapiro, "Representation theory and automorphic functions", W.B. Saunders Compagny (1969).

[GoY] M. Goze and Y. Khakimdjanov, "Nilpotent Lie algebras", Kluwer Academic Publishers.

[How] R.E. Howe, *On representations of discrete, finitely generated, torsion-free, nilpotent groups*, Pac. J. Math. 73 (1977), 281-305.

[Kir1] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russ. Math. Surveys 17 (1962), 53-104, Uspekhi Mat. Nauk 17 (1962), 57-110.

[Kir2] A. A. Kirillov, "Elements of the theory of representations", Springer-Verlag (1976).

[Kle] A. Kleppner, *On the intertwining number theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 731-733.

[LeL] H. Leptin and J. Ludwig, "Unitary representation theory of exponential Lie groups", Walter de Gruyter (1994).

[Mac1] G. W. Mackey, *On induced representations of groups*, Amer. J. Math. 73 (1951), 576-592.

[Mac2] G. W. Mackey, *Induced representations of locally compact groups I*, Ann. Math. 55 (1952), 101-139.

[Mac3] G. W. Mackey, "The theory of unitary group representations", University of Chicago Press (1976).

[Mal] A.I. Malcev, *On a class of homogeneous spaces*, Am. Math. Soc. Translation 39 (1951), 2-33.

[Moo] C. C. Moore, *Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups*, Ann. Math. 82 (1965), 146-182.

[Nie] O. A. Nielsen, *Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics 63 (1983).

[Oba] N. Obata, *Some remarks on induced representations of infinite discrete groups*, Math. Ann. 284 (1989), 91-102.

[Par] W. Parry, *Ergodic properties of affine transformations and flows on nilmanifolds*, Amer. J. Math. Vol. XCI n3 (1969), 757-771.

[Rag] M. S. Raghunathan, "Discrete subgroups of Lie groups", Springer-Verlag (1972).

[Rat] G. Ratcliff, *Symbols and orbits for 3-step nilpotent Lie groups*, J. Funct. Anal. 62 (1985), 38-64.

[Ric] L.F. Richardson, *Decomposition of the L^2-space of a general compact nilmanifold*, Amer. J. Math. 93 (1971), 173-190.

[Ser] J.-P. Serre, "Représentations linéaires des groupes finis", Hermann (1967).

[Ver] M. Vergne, *Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble*, C.R. Acad. Sci. (Paris) A-B 270 (1970), A 173-175, B 704-707.

[Zim] R.J. Zimmer, "Ergodic theory and semisimple groups", Birkhäuser (1984).