AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

b 161211

S/17 2 99/46

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à

UNIVERSITE DE METZ

PAR

Makhlouf DJERMOUNE

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Mathématiques
OPTION : Mathématiques Appliquées

EXPLOSION ET EXTINCTION DE LA TEMPERATURE DANS LES MATERIAUX VISCOPLASTIQUES THERMO-ADOUCISSANTS

Soutenue le 15 Décembre 1999 devant le jury composé de:

Saïd AHZI	**Professeur à l'Université de Clemson, USA**	**Examinateur**
Bernard BRIGHI	**Maître de conférences à l'Université de Metz**	**Examinateur**
G. V. CAFFARELLI	**Professeur à l'Université La Sapienza, Italie**	**Rapporteur**
Michel CHIPOT	**Professeur à l'Université de Zürich, Suisse**	**Co-Directeur de thèse**
Yves LEROY	**L.M.S Ecole Polytechnique Palaiseaux, Paris**	**Rapporteur**
Alain MOLINARI	**Professeur à l'Université de Metz**	**Co-Directeur de thèse**

Laboratoire des Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes (LMMAS)

Unité Associée au C.N.R.S N° 399

Universi ... 01

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ

022 304784 2

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 19991345
Cote S/M3 99/46
Loc Magasin

UNIVERSITE DE METZ

PAR

Makhlouf DJERMOUNE

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Mathématiques
OPTION : Mathématiques Appliquées

EXPLOSION ET EXTINCTION DE LA TEMPERATURE DANS LES MATERIAUX VISCOPLASTIQUES THERMO–ADOUCISSANTS

Soutenue le 15 Décembre 1999 devant le jury composé de:

Saïd AHZI	**Professeur à l'Université de Clemson, USA**	**Examinateur**
Bernard BRIGHI	**Maître de conférences à l'Université de Metz**	**Examinateur**
G. V. CAFFARELLI	**Professeur à l'Université La Sapienza, Italie**	**Rapporteur**
Michel CHIPOT	**Professeur à l'Université de Zürich, Suisse**	**Co–Directeur de thèse**
Yves LEROY	**L.M.S Ecole Polytechnique Palaiseaux, Paris**	**Rapporteur**
Alain MOLINARI	**Professeur à l'Université de Metz**	**Co–Directeur de thèse**

Laboratoire des Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes (LMMAS)
Unité Associée au C.N.R.S N° 399
Université de Metz, Ile du saulcy, 57045 Metz Cedex 01

*
* *
* * *

Le travail présenté dans ce document a été réalisé au Laboratoire des Méthodes Mathématiques pour l'Analyse des Systèmes (LMMAS) et au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) de l'université de Metz.

Je remercie Michel Chipot et Alain Molinari, qui ont dirigé cette thèse et de m'avoir proposé de travailler dans des domaines aussi intéressants. Leurs encouragements, disponibilités, conseils et leurs aides très précieuses m'ont beaucoup touché. Je tiens à leur exprimer ma profonde gratitude.

Toute ma reconnaissance à Giorgio Vergara Caffarelli et Yves Leroy pour avoir accepté d'être rapporteur, ainsi que pour leurs remarques intéressantes et bien fondées qui ont contribué à améliorer ce travail.

Je suis très heureux de compter parmi les membres du jury Bernard Brighi et le professeur Saïd Ahzi.

Pour terminer, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenu et encouragé.

*
* *
* * *

Sommaire

Introduction générale 4

Chapitre 1: *Etude de la formation de bandes de cisaillemenet dans les matériaux viscoplastiques thermoadoucissants* 7

1. Introduction 7
1.1. Description de la localisation de la déformation . 8
2. Modélisation du problème, hypothèses et équations . . 12
2.1. Hypothèses du modèle 12
2.2. Equations de bases 13
2.3. Conditions aux bords 14
2.3.1. En vitesse 14
2.3.2. En contrainte 15
2.3.3. En température 15
2.4. Lois de comportements thermo-viscoplastiques . . 15
2.4.1. La loi de puissance 16
2.4.2. La loi d'Arrhénius 16
2.4.3. La loi exponentielle 17
3. Formulation du problème 17

3.1. Equations de réactions-diffusions (contrainte contrôlée) 17
3.2. Equations paraboliques nonlocales (vitesse contrôlée) 18
4. Solutions en contrainte contrôlée 20
4.1. Existence et unicité de solutions stationnaires . . 20
4.2. Explosion en temps fini des solutions non stationnaires 34
4.2.1. Conditions de Neumann 34
4.2.2. Conditions de Dirichlet 37
5. Existence globale des solutions en vitesse contrôlée . . 40
5.1. Conditions thermiques de Neumann 40
5.2. Existence de solutions stationnaires sous les conditions thermiques de Dirichlet 42
6. Solution non stationnaire en vitesse contrôlée. 52
6.1. Cas de la loi puissance 52
6.2. Cas particulier de la loi puissance 56
6.3. Cas de la loi exponentielle 58
7. Etude des solutions pour la loi d'Arrhénius 60
7.1. Introduction 60
7.2. Existence de solutions stationnaires au sens faible . 61
7.3. Cas des solutions non stationnaires 66

Chapitre 2: *Bandes de cisaillements stationnaires* . . 70

1. Introduction 70
2. Stationnarité 71
3. Formulation du problème 71
4. Analyse et comportement asymptotique de la solution . 73

Chapitre 3: *Bandes de cisaillements non stationnaires* 78

1. Introduction 78
1.2. Formulation du problème 79
1.3. Analyse dimensionnelle 80
2. Solutions stationnaires 81
3. Extinction de la température en temps fini 91

3.1. Méthode de concavité *91*
3.2. Conditions de Neumann *98*
3.3. Explosion de Θ_t en temps d'extinction *99*

Chapitre 4: *Etude d'un problème nonlocal présentant une singularité* *102*

1. Introduction *102*
2. Conditions thermiques de Neumann *104*
3. Conditions thermiques de Dirichlet *105*
4. Etude du problème dépendant du temps *115*
5. Conditions thermiques mixtes *117*

Conclusion *123*

Références Bibliographiques *125*

Introduction générale

L'écoulement plastique des matériaux paraît homogène à une échelle macroscopique dans de nombreux processus de déformation. Le régime d'écoulement homogène est susceptible de devenir instable et peut conduire à la localisation intense de la déformation plastique dans une zone très étroite. C'est le cas de l'apparition des bandes de cisaillement.

Nous nous intéressons dans ce travail aux instabilités de la déformation plastique conduisant à la formation de bandes de cisaillement dites "adiabatiques" (BCA). Ces bandes de cisaillement sont des couches étroites dans lesquelles se localise un cisaillement intense. Elles sont fréquemment rencontrées dans les matériaux thermo-viscoplastiques sollicités à de grandes vitesses de déformation. Celles-ci sont souvent à l'origine de la rupture pour certains matériaux: on cherche alors à éviter leur apparition et leur développement.

De nombreuses expériences sont menées afin de connaître le rôle joué par les paramètres microstructuraux et les propriétés mécaniques du matériau sur l'apparition et l'évolution d'une bande de cisaillement en grandes vitesses de déformation. L'une des plus connues est l'expérience de torsion en grande vitesse d'un tube à paroi mince [$CCHD$]. Ils constatent en fin d'expérience de torsion l'apparition, ou la non apparition d'une bande de cisaillement selon le matériau et les conditions d'essai. Dans le cas de l'apparition d'une bande de cisaillement, on a les interprétations suivantes:

- Aux grandes vitesses, l'instabilité "thermique" est liée à un échauffement adiabatiques ([ZH], [R], [BWT] et [C]): dès que le taux d'adoucissement dû à l'échauffement adiabatique du matériau compense puis dépasse le taux de durcissement dû à l'écrouissage, la contrainte de cisaillement que peut supporter le matériau passe par un niveau maximum et la déformation devient instable.

- Aux faibles vitesses, l'instabilité peut être liée à un écrouissage négatif isotherme. Dans un essai de cisaillement isotherme, le taux d'écrouissage d'abord supposé positif peut devenir ensuite négatif, la contrainte de cisaillement passe par un maximum.

D'après les recherches historiques menées par Johnson (1987) [*J*], c'est Tresca (1878), qui établit l'existence de bandes étroites de déformation intense (où la matière est fortement échauffée) durant la déformation plastique de nombreux matériaux. Plus tard, Massey (1921) [*Ma*] confirme le phénomène de localisation de la déformation plastique sous forme de bandes qualifiées de bandes de chaleur en raison de la forte augmentation de la température consécutive à leur formation. Par localisation de la déformation, on sous entend que la déformation plastique prend dans une zone étroite, une valeur bien plus importante qu'ailleurs. La connaissance de ces bandes de cisaillement est importante pour l'optimisation des procédés de fabrication et nécessite encore aujourd'hui des études dans le domaine du comportement dynamique des matériaux.

Le travail présenté ici est une étude théorique de la formation d'une bande de cisaillement dans un essai de cisaillement simple d'un matériau thermo-viscoplastique. Nous abordons, dans le chapitre 1, l'étude de l'écoulement thermo-viscoplastique en cisaillement simple avec conditions aux bords thermiques et la formulation du problème thermo-viscoplastique ainsi que les modèles unidimensionnels associés. On considère deux lois de comportement, la loi de puissance et la loi d'Arrhénius. De cette formulation découle une équation semi-linéaire parabolique si on impose une contrainte constante et une équation parabolique nonlocale si on est en vitesse contôlée. Ensuite, on présente des méthodes d'analyse pour l'existence de solution stationnaire pour différentes conditions aux bords thermiques. Enfin, on traite le phénomène d'explosion ainsi que l'existence globale des solutions pour les problèmes d'évolution considérés.

Au chapitre 2, nous étudions les bandes de cisaillement stationnaires pour un matériau obéissant à une loi de comportement thermo-viscoplastique linéaire en température.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des bandes de cisaillement non stationnaires. Une formulation du problème en contrainte contrôlée pour un matériau obéissant à la même loi considérée dans le chapitre 2 nous conduit à une équation semi-linéaire parabolique présentant une singularité constante. Ensuite, on étudie l'existence et l'unicité des solutions stationnaires du problème semi-linéaire parabolique et on montre aussi qu'il peut y avoir extinction en temps fini sous certaines conditions sur

le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation et sur la condition initiale. Par extinction on entend qu'on peut atteindre la constante de singularité.

Dans le chapitre 4, on se restreint à l'étude d'un problème parabolique nonlocal. Ce problème est modélisé à partir d'un cisaillement simple, en vitesse imposée, d'un matériau incompressible dont la loi de comportement se réduit à une relation linéaire en température. On détermine les solutions stationnaires exactes du problème. On montre qu'il ne peut pas y avoir extinction de la température en temps fini pour les différentes conditions aux limites considérées. En particulier, le fait que la contrainte de cisaillement atteigne un niveau maximum dans un essai adiabatique ou isotherme à vitesse constante n'implique pas forcement qu'on peut atteindre la singularité de notre problème en temps fini.

Chapitre 1

Etude de la formation de bande de cisaillement dans les matériaux viscoplastiques thermoadoucissants

1 Introduction.

La connaissance du comportement dynamique des matériaux est l'objet d'un grand intérêt dans différent domaines de l'ingénierie. Les nombreuses études déjà menées sur ce sujet ont permis de montrer l'importance de la vitesse de déformation sur la contrainte d'écoulement, la ductilité des matériaux, les mécanismes de déformation et de rupture, en particulier dans les processus à grande vitesse de déformation:

- pénétration d'un projectile dans une cible,
- procédé de mise en forme rapide (l'emboutissage rapide et l'usinage à grande vitesse),
- fragmentation par explosion,
- torsion rapide d'un tube à paroi mince ([$CCHD$]).

1.1 Description de la localisation de la déformation.

l'écoulement plastique des matériaux peut devenir instable et conduire à une localisation intense de la déformation plastique. Par localisation de la déformation, on sous entend que la déformation prend dans une zone étroite, une valeur bien plus grande qu'ailleurs ([M]). Cette localisation de la déformation est un phénomène couramment observé sous forme de bandes de cisaillements dans les matériaux. La formation de bandes de cisaillement est souvent le précurseur immédiat de la rupture ductile. Celles-ci peuvent être classées en deux catégories:

1. Les bandes de cisaillement isotherme, pour lesquelles l'adoucissement thermique joue un rôle négligeable.

2. Les bandes de cisaillement adiabatique (BCA) pour lesquelles l'adoucissement thermique est un facteur essentiel du développement de l'instabilité.

Dans ce travail, nous limiterons notre intérêt aux bandes de cisaillement adiabatiques et plus généralement aux bandes de chaleur. En thermodynamique, un processus adiabatique est défini comme un processus dans lequel aucun échange de chaleur n'est réalisé entre le système étudié et son environnement. Le terme adiabatique attaché aux bandes de cisaillements adiabatiques doit être compris dans le sens suivant: si le phénomène de déformation est rapide, l'energie calorifique créée par la déformation plastique n'a pas le temps de diffuser vers les parties froides de la structure, sauf dans un voisinage des zones déformées où la température est très élevée. Les effets de conduction pourront donc être significatifs dans le voisinage d'une BCA. Il est intéressant de noter l'analogie entre la formation d'une BCA et un processus autocatalytique: en effet, une augmentation de la vitesse de déformation dans une zone étroite entraîne un accroissement local de la température, qui a son tour,

engendre une réduction de la contrainte d'écoulement et une élévation locale de la vitesse de déformation, et donc un nouvel accroissement de la température. Les BCA peuvent être dans certains cas observées clairement en raison de leur apparence blanchâtre, voir figure ci-dessous.

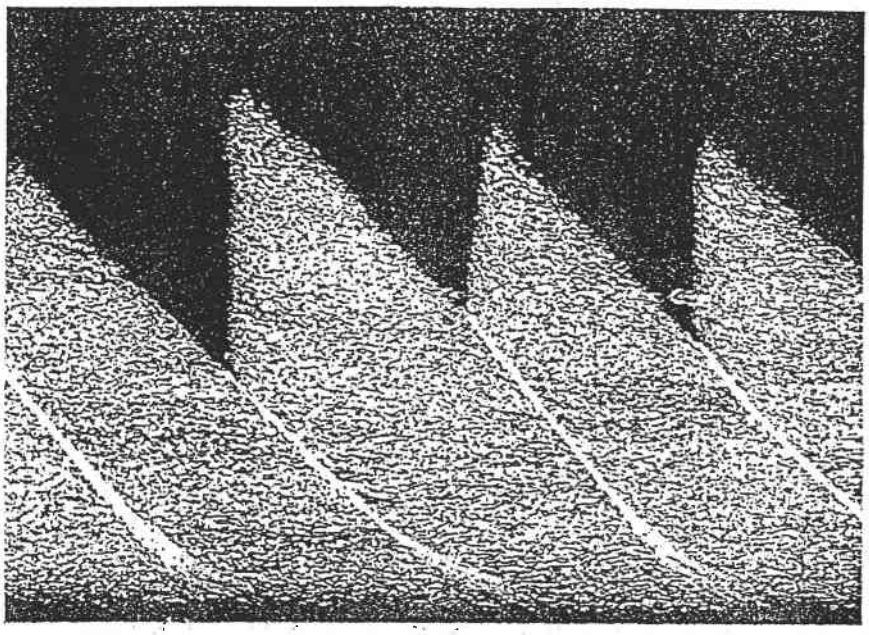

Fig. 1.1: Exemple de bande de cisaillement adiabatique dans un copeau d'acier usiné

Les premières interprétations modernes sur le mécanisme de formation des BCA pendant une déformation rapide sont attribuées à Zener et Hollomon ([ZH]): le travail de déformation plastique d'un matériau est en grande partie converti en chaleur. Si la vitesse de déformation est élevée, la chaleur n'a pas le temps de diffuser loin de la région déformée et ceci conduit à un adoucissement thermique local. Si la dimunition de la contrainte d'écoulement, dûe à l'adoucissement thermique, devient plus importante que l'accroissement de cette contrainte, dûe à l'écrouissage, l'écoulement plastique devient alors instable et bien localisée. Une condition nécessaire à la formation de BCA est la production locale suffisante de travail plastique, dans un intervalle de temps plus court que celui

nécessaire à la diffusion de la chaleur loin de la zone de déformation plastique.

Des analyses non linéaires permettent d'obtenir des solutions exactes pour des cas particuliers. Ainsi, Molinari et Clifton ([$MC83$], [$MC87$]) obtiennent des critères de localisation pour les métaux thermo-viscoplastiques en utilisant une modélisation simplifiée de la déformation en cisaillement simple. Le modèle néglige la déformation élastique, les effets d'inerties et de conduction. Ces études permettent de déterminer la localisation de la déformation. Shawki([Sha]) procède à plusieurs simulations numériques sur la formation des BCA durant la déformation en cisaillement simple pour plusieurs lois de comportement et différentes conditions aux bords. Des observations expérimentales à l'aide du dispositif des barres de Kolsky en torsion, sur la localisation de la déformation. Marchand et Duffy ([MD]) permettent de dégager 3 étapes dans le processus de déformation plastique, voir la figure 1.2.

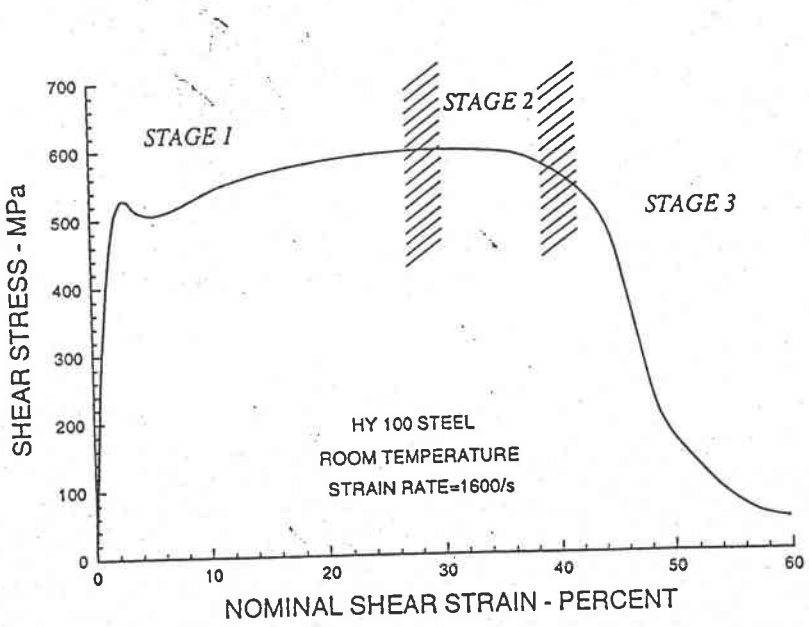

Fig. 1.2: Courbe contrainte-déformation de cisaillement

Le premier stade correspond à un état de déformation homogène. Le stade 2 débute au maximum de la contrainte. Celle-ci décroit faiblement au cours du stade 2, et une instabilité de l'écoulement se développe lentement. Le stade 3 correspond à la chute rapide de la contrainte entrainant la formation d'une BCA.

D'après Marchand et Duffy ([MD]) la courbe contrainte-déformation pour un matériau thermo-viscoplastique, l'écrouissage est plus important que l'adoucissement thermique au début de la déformation (stade 1) et l'écoulement plastique est stable. Pour des déformations plus grandes, l'écrouissage diminue et finalement, les effets stabilisants de ce dernier sont supportés par les effets déstabilisants de l'adoucissement thermique (stade 2). C'est au cours du stade 3 que la localisation se développe de façon importante. Il existe donc en permanence une compétition entre l'écrouissage et l'adoucissement thermique dans un matériau thermo-viscoplastique.

2 Modélisation du problème, hypothèses et équations.

2.1 Hypothèses du modèle.

On considère une couche d'épaisseur finie suivant l'axe $0x$ et d'extension infinie suivant l'axe $0y$. Cette couche est déformée en cisaillement simple dans la direction $0y$. Ce modèle est représenté sur la figure suivante

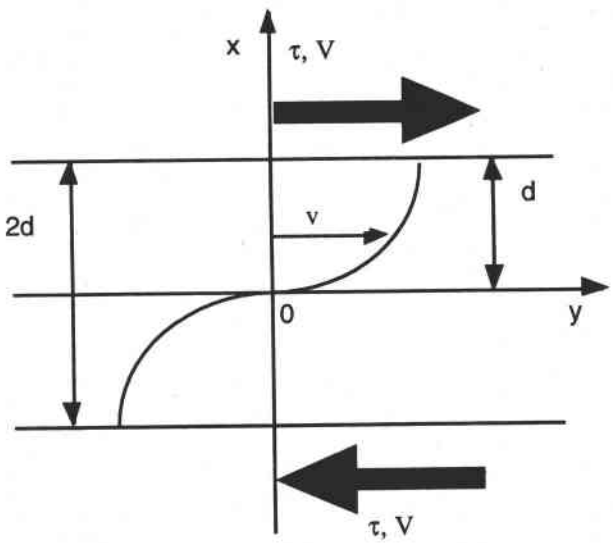

Fig.1.3: Bande de longueur infinie soumise à un mode global de déformation en cisaillement simple.

On se place au stade de la localisation de la déformation plastique, correspondant à la formation de la bande de cisaillement. Cette bande représente un matériau incompressible thermo-viscoplastique. L'axe des x, dont l'origine se situe au centre de la bande est perpendiculaire à

la zone de cisaillement, figure.1.3. Les différentes hypothèses choisies et les équations sont présentées dans un contexte unidimensionnel, les variables dépendantes sont définies uniquement en fonction de la position x et du temps t. Le processus thermomécanique est décrit par les variables suivantes: la vitesse $v(x,t)$ de la particule dans la direction du cisaillement, la température $u(x,t)$, la déformation plastique $\gamma(x,t)$ et la contrainte de cisaillement $\tau(x,t)$. L'effet de conduction est pris en compte dans la modélisation du problème, par contre on néglige les effets d'inertie. L'analyse dimensionnelle de l'étude analytique présentée par Leroy et Molinari ([*LM*]) est adoptée dans la suite.

2.2 Equations de bases.

Les équations fondamentales gouvernant le problème sont les suivantes. L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour une couche d'épaisseur constante, se réduit pour l'analyse unidimensionnelle à:

$$\tau_x = \frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho v_t, \tag{2.1}$$

où ρ dénote la densité du matériau. Comme les effets d'inertie ne sont pas pris en compte, l'équation (2.1) se réduit à $\tau_x = 0$ et montre que la contrainte de cisaillement est une fonction homogène, $\tau(x,t) = \tau(t)$. L'équation de compatibilité cinématique s'écrit;

$$\dot{\gamma} = \gamma_t = v_x, \tag{2.2}$$

La loi de comportement thermo-viscoplastique se réduit, dans le problème de cisaillement considéré, à la relation;

$$\tau = \phi(\gamma, \dot{\gamma}, u), \tag{2.3}$$

L'équation d'énergie prend la forme;

$$\rho c u_t - k u_{xx} = \varepsilon \tau \dot{\gamma}. \tag{2.4}$$

Le premier membre de (2.4) gouverne la diffusion de la chaleur (ρc est la chaleur spécifique volumique, k est le coefficient de conductivité thermique). Le second membre traduit la fraction de travail de déformation plastique transformée en chaleur. Le coefficient de Taylor-Quinney (1934) ε est compris entre 0.9 et 1.0.

2.3 Conditions aux bords.

La tranche du matériau modélisée peut être soumise à des conditions à la frontière:

2.3.1 En vitesse:

$$\begin{cases} v(0,t) = 0 \\ v(d,t) = V \end{cases} \tag{2.5}$$

où V est la vitesse constante du bord supérieur de la couche cisaillée, voir figure 1.4.

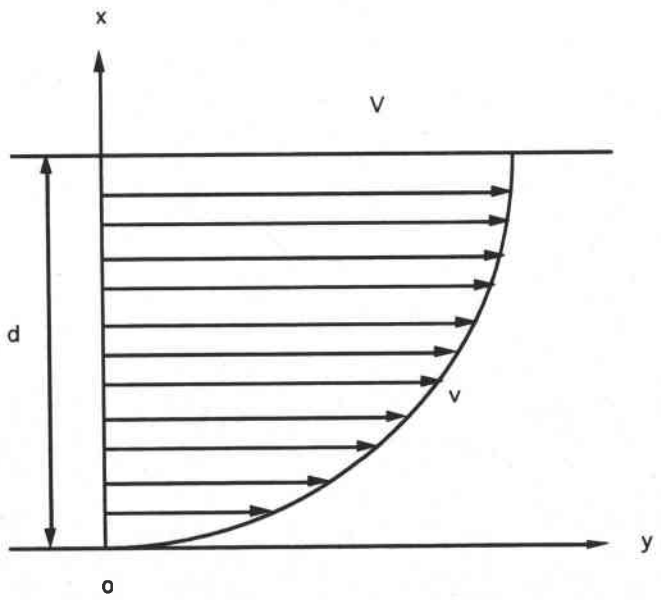

Fig.1.4: Géométrie et cinématique d'un cisaillement simple.

2.3.2 En contrainte:

$$\begin{cases} \tau(0,t) = \tau_0 \\ \tau(d,t) = \tau_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

où τ_0 est la contrainte constante appliquée aux frontières.

2.3.3 En température:

Les conditions à la limite themique se traduisent par:

$$u_x + a(u - \tilde{u}) = 0, \quad x \in \{-d, d\} \tag{2.7}$$

où a et $\tilde{u}$ sont des constantes positives. Pour $a = 0$ (resp. $a = \infty$), on obtient des conditions aux bords adiabatiques (resp. isothermiques).

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u = \tilde{u} \end{cases} \quad x \in \{-d, d\} \tag{2.8}$$

2.4 Lois de comportements thermoviscoplastiques.

On admet que le matériau est incompressible et que sa loi de comportement thermo-viscoplastique se réduit dans le problème de cisaillement simple à:

$$\tau = \phi(\gamma, \dot{\gamma}, u),$$

où $\tau, \gamma, \dot{\gamma}, u$ représentent respectivement la contrainte de cisaillement, la déformation plastique, la vitesse de la déformation plastique et la température absolue. La déformation élastique est négligée.

2.4.1 Loi de puissance:

La forme générale de cette loi est:

$$\tau = \Phi(\gamma, u)\dot{\gamma}^m, \tag{2.9}$$

où $\Phi(\gamma, u)$ est une fonction dont l'expression tient compte des mécanismes durcissant et des mécanismes adoucissant. m est le coeffecient de sensibilite à la vitesse de déformation. Les développements analytiques utilisent fréquement (2.9) sous forme de loi de puissance multiplicative;

$$\tau = \mu u^\nu \gamma^n \dot{\gamma}^m, \tag{2.10}$$

où ν, μ, n et m sont respectivement le coefficient d'adoucissement thermique, la viscosité, le coefficient d'écrouissage et le coeffecient de sensibilite à la vitesse de déformation. On se limite ici aux cas des très grandes déformations, pour les quelles l'écrouissage est négligeable. On suppose donc dorénavant que $n = 0$:

$$\tau = \mu u^\nu \dot{\gamma}^m. \tag{2.11}$$

Cette loi est élémentaire car les coefficients ν et m sont supposés indépendants de la déformation plastique et de la température. Son intérêt réside dans le fait qu'elle est assez simple pour permettre des approches analytiques et assez réaliste pour tenir compte des phénomènes majeurs.

2.4.2 Loi de comportement de type Arrhénius:

Une étude théorique à été effectuée par Leroy et Molinari (1992) pour différentes lois de comportement et conditions aux limites. Les effets d'écrouissages étant négligeables dans le stade terminal d'évolution

des bandes de cisaillements adiabatiques [M], la loi de comportement suivante, de types Arrhénius, à été utilisée:

$$\tau = exp(\beta(\frac{1}{u} - 1))\dot{\gamma}^m \tag{2.12}$$

où β est le coefficient d'adoucissement thermique.

2.4.3 Loi de comportement exponentielle:

Une approximation d'ordre 1 au voisinage de $u = 1$ de (2.12) donne une loi de type exponentielle;

$$\tau = exp(-\beta(u - 1))\dot{\gamma}^m. \tag{2.13}$$

3 Formulation du problème.

On suppose que les dérivées de toute quantité par rapport à y et z ($0z$ axe perpendiculaire au plan $x0y$) est nulle. On admet aussi que la déformation est nulle suivant l'axe z.

3.1 Equations de réaction-diffusion (contrainte contrôlée).

Le modèle mathématique des bandes de cisaillements est réduit dans certains cas à des équations de réaction-diffusion. On impose un contrôle en contrainte $\tau(t) = \tau_0$. En premier, on considère la loi de comportement en puissance (2.11), pour laquelle on a

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\tau_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{m}} u^{-\frac{\nu}{m}}. \tag{3.1}$$

On substitue l'expression (3.1) dans l'équation d'énergie (2.4), et après normalisation avec les nouvelles variables $x' = \frac{x}{d}$ et $t' = \frac{kt}{d^2\rho c}$ on obtient

l'équation semi-linéaire parabolique suivante

$$u_{t'} = u_{x'x'} + \delta u^{-\frac{\nu}{m}}, \tag{3.2}$$

où $\delta = \dfrac{\varepsilon d^2 \tau_0^{\frac{m+1}{m}}}{k\mu^{\frac{1}{m}}}$. Pour simplifier ces notations, on omet les primes et on remplace t' et x' par t and x.

D'une manière similaire, pour le cas de la loi de comportement exponentielle (2.13), on a

$$\dot{\gamma} = \tau_0^{\frac{1}{m}} e^{-\frac{\beta}{m}} e^{\frac{\beta}{m}u}, \tag{3.3}$$

et l'équation d'énergie (2.4) se réduit à:

$$u_t = u_{xx} + \delta e^{\alpha u}, \tag{3.4}$$

où $\delta = \dfrac{\varepsilon d^2 \tau_0^{\frac{m+1}{m}}}{k e^{\alpha}}$ et $\alpha = \frac{\beta}{m} > 0$.

3.2 Equations paraboliques nonlocales (vitesse contrôlée).

On considère les conditions aux bords en vitesse (2.5) et en utilisant l'équation de compatiblité (2.2) on obtient la relation suivante:

$$\int_0^d \dot{\gamma} dx = \int_0^d v_x dx = V. \tag{3.5}$$

Par un simple calcul on détermine la contrainte de cisaillement τ en utilisant (3.5) et la loi de comportement puissance (2.11) :

$$\int_0^d \dot{\gamma} dx = \Big(\frac{\tau(t)}{\mu}\Big)^{\frac{1}{m}} \int_0^d u^{-\frac{\nu}{m}} dx,$$

$$\tau(t) = \frac{V^m \mu}{\left(\int_0^d u^{-\frac{\nu}{m}} dx\right)^m} = \frac{V^m \mu}{d^m \left(\int_\Omega u^{-\frac{\nu}{m}} dx\right)^m}, \tag{3.6}$$

où $\Omega = [0,1]$. De même pour la loi d' Arrhénius (2.13) on a

$$\int_0^d \dot{\gamma} dx = \Big(\tau(t)\Big)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{\beta}{m}} \int_0^d e^{\frac{\beta}{m} u} dx,$$

$$\tau(t) = \frac{V^m e^{\beta}}{d^m \left(\int_\Omega e^{\frac{\beta}{m} u} dx\right)^m}. \tag{3.7}$$

Par substitution des expressions (3.6) et (3.7) dans l'équation d'énergie (2.4), donne après normalisation des variables indépendantes le problème nonlocal suivant pour la loi de comportement puissance (2.11)

$$u_t = u_{xx} + \delta \frac{u^{-\frac{\nu}{m}}}{\left(\int_\Omega u^{-\frac{\nu}{m}} dx\right)^{m+1}} \tag{3.8}$$

où $\delta = \dfrac{\varepsilon V^{m+1} \mu}{d^{m-1} k}$ et pour la loi d' Arrhénius (2.13) on a:

$$u_t = u_{xx} + \delta \frac{e^{\alpha u}}{\left(\int_\Omega e^{\alpha u} dx\right)^{m+1}} \tag{3.9}$$

où $\delta = \dfrac{\varepsilon V^{m+1} e^{\beta}}{d^{m-1} k}$ et $\alpha = \dfrac{\beta}{m} > 0.$

4 Solutions en contrainte contrôlée.

Cette section concerne la présentation des solutions stationnaires de l'écoulement plastique en contrainte imposée. Pour cette analyse, la condition du régime stationnaire implique l'absence d'effets d'inertie et par conséquent une contrainte de cisaillement homogène sur l'échantillon. Les solutions stationnaires sont symétriques par rapport au centre de la bande (cf $[GNN]$). Nous limitons l'analyse dans ce chapitre à la partie supérieure de la bande ($0 \leq x \leq 1$).
L'approche analytique des solutions stationnaires à été effectuée par Leroy et Molinari ($[LM]$). Chen et al ($[CDMM]$) ont étudié le cas particulier du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation égal à l'unité et une contrainte imposée constante. Nous considérons aussi un cas particulier, le coefficient d'écrouissage nul et une contrainte imposée constante. Pour une loi de comportement où la sensibilité à la température est exprimée par une fonction puissance, équation (2.11), et par une fonction exponentielle, équation (2.13). Les solutions au sens classique de l'écoulement stationnaire sont rares pour cette classe de problèmes.

4.1 Existence et unicité de solutions stationnaires.

D'après la formulation du problème en contrainte contrôlée, on considère l'équation parabolique semi-linéaire suivante:

$$(P) \qquad u_t = u_{xx} + \delta f(u), \quad x \in \Omega, \ t > 0.$$

A laquelle on associe l'état stationnaire:

$$(S) \qquad u_{xx} + \delta f(u) = 0, \quad x \in \Omega,$$

où $\Omega = (-1, 1)$ et $f(u) = u^{-\frac{\nu}{m}}$ ou $e^{\alpha u}$. Aux équations (P) et (S) on associe une condition de Dirichlet non homogène $u = \tilde{u}$ pour $x \in \partial\Omega$. On peut remarquer que l'équation (S) n'admet pas de solution si on lui associe une condition de Neumann homogène, excepté le cas ou $f(0) = 0$, $u = 0$ est une solution stationnaire.

Théorème 4.1 *Si $m+\nu < 0$ et $\alpha > 0$, alors il existe une unique constante δ^* (contrainte de cisaillement maximum) telle que*

(i) (S) admet deux solutions stationnaires si $\delta \in [0, \delta^*)$,
(ii) (S) admet une solution si $\delta = \delta^*$,
(iii) (S) n'admet pas de solution si $\delta > \delta^*$.

Preuve.

- Loi exponentielle $(f(s) = e^{\alpha s})$

Pour la raison de symétrie dûe à $([GNN])$ la solution de l'équation (S) vérifie le problème suivant:

$$(S1)\begin{cases} u_{xx} + \delta e^{\alpha u} = 0 & x \in (0,1) \\ u_x(0) = 0 \ , \ u(1) = \tilde{u} \end{cases}$$

Sans perte de généralité on pose $\tilde{u} = 0$, quitte à faire un changement de variable.

$$\begin{cases} u_{xx} + \delta e^{\alpha u} = 0 \\ u_x(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$u_{xx} = -\delta e^{\alpha u} \implies u_x$ est décroissante $\implies u_x < 0$ et donc u est décroissante. On multiplie l'équation ci-dessus par u_x

$$u_{xx}u_x = -\delta e^{\alpha u}u_x$$

$$\left(\frac{1}{2}u_x^2\right)_x = \left(-\frac{\delta}{\alpha}\delta e^{\alpha u}\right)_x.$$

En intégrant entre 0 et x il vient

$$\frac{1}{2}u_x^2 = \frac{\delta}{\alpha}\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u}\right), \tag{4.1}$$

où $u_c = u(0)$ représente la température au centre de la bande.
Puisque $u_x(x) < 0$ sur $(0,1)$ on en déduit de (4.1);

$$u_x = -\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}}\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{u_x}{\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}}.$$

Intégrant entre 0 et x il vient

$$\int_0^x \frac{u_x}{\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}}x. \tag{4.2}$$

Avec la substitution $u = u(x)$ dans l'intégrale de l'expression (4.2) il vient

$$\int_{u_c}^{u(x)} \frac{ds}{\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha s}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}}x. \tag{4.3}$$

u_c étant défini, $u(x)$ est défini de façon unique. On aura donc une solution chaque foi que l'on peut trouver u_c tel que $u(1) = 0$, c'est à dire

$$\int_{u_c}^{0} \frac{ds}{\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha s}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}}. \tag{4.4}$$

On pose $v^2 = e^{\alpha u_c} - e^{\alpha s} \implies 2vdv = -\alpha e^{\alpha s} ds \implies \dfrac{ds}{v} = \dfrac{2}{\alpha}\dfrac{dv}{v^2 - e^{\alpha u_c}}$.
L'équation (4.4) devient

$$\frac{2}{\alpha}\int_0^{\left(e^{\alpha u_c}-1\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv}{v^2 - e^{\alpha u_c}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}} \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{v^2 - e^{\alpha u_c}} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{v - e^{\frac{\alpha u_c}{2}}} - \frac{1}{v + e^{\frac{\alpha u_c}{2}}}\Big\} e^{-\frac{\alpha u_c}{2}}.$$

En utilisant cette décomposition, l'équation (4.5) devient

$$\ln\Big|\frac{v - e^{\alpha u_c}}{v + e^{\alpha u_c}}\Big| \Big]_0^{(e^{\alpha u_c}-1)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{2\alpha\delta}\; e^{\frac{\alpha u_c}{2}},$$

$$\ln\Big[\frac{e^{\frac{\alpha u_c}{2}} - \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}}{e^{\frac{\alpha u_c}{2}} + \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}}\Big] = -\sqrt{2\alpha\delta}\; e^{\frac{\alpha u_c}{2}},$$

$$\ln\Big[\frac{e^{\frac{\alpha u_c}{2}} - \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}}{e^{\frac{\alpha u_c}{2}} + \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}} \frac{e^{\frac{\alpha u_c}{2}} + \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}}{e^{\frac{\alpha u_c}{2}} + \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}}\Big] = -\sqrt{2\alpha\delta}\; e^{\frac{\alpha u_c}{2}},$$

$$\ln\Big[\frac{1}{\Big(e^{\frac{\alpha u_c}{2}} + \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}\Big)^2}\Big] = -\sqrt{2\alpha\delta}\; e^{\frac{\alpha u_c}{2}},$$

$$2\ln\Big(e^{\frac{\alpha u_c}{2}} + \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}\Big) = \sqrt{2\alpha\delta}\; e^{\frac{\alpha u_c}{2}},$$

$$\ln\Big(e^{\frac{\alpha u_c}{2}} + \sqrt{e^{\alpha u_c} - 1}\Big) = \sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}}\; e^{\frac{\alpha u_c}{2}}.$$

On cherche donc $z = e^{\frac{\alpha u_c}{2}} > 1$ tel que

$$\ln\Big(z + \sqrt{z^2 - 1}\Big) = \sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}}\, z.$$

Soit la fonction g définie par l'expression ci-dessous

$$g(z) = \ln\Big(z + \sqrt{z^2 - 1}\Big) - \sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}}\, z,$$

$$g'(z) = \frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\Big(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\Big) - \sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} - \sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}},$$

$$g'(z) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}} \iff z^2 = 1+\frac{2}{\alpha\delta} \iff z = \sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}.$$

$$g(1) = -\sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}} < 0, \quad \lim_{z\to+\infty} g(z) = -\infty$$

$$g'(z) > 0 \text{ si } z < \sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}, \quad g'(z) < 0 \text{ si } z > \sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}.$$

g admet donc exactement

- une racine si $g\Big(\sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}\Big) = 0$,
- deux racines si $g\Big(\sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}\Big) > 0$,
- aucune racine si $g\Big(\sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}\Big) < 0$.

$$g\Big(\sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}\Big) = \ln\Big(\sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}+\frac{2}{\alpha\delta}\Big) - \sqrt{\frac{\alpha\delta}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{\alpha\delta}}.$$

On pose $\xi = \dfrac{2}{\alpha\delta} > 0$. On a à étudier la fonction suivante

$$\ln\Big(\sqrt{1+\xi}+\xi\Big) - \frac{\sqrt{1+\xi}}{\sqrt{\xi}} = \ln\Big(\sqrt{1+\xi}+\xi\Big) - \sqrt{\frac{1}{\xi}+1}.$$

Cette fonction est croissante et ne s'annule que pour une seule valeur ξ^* $\implies g(\xi) > 0 \iff \dfrac{2}{\alpha\delta} > \xi^*$

$$\iff \delta < \frac{2}{\alpha\xi^*} = \delta^*.$$

A partir de l'expression (4.4) on exprime δ, en particulier la contrainte imposée, en fonction de la température au centre de la bande:

$$\delta = \delta(u_c) = \frac{e^{-\alpha u_c}}{2\alpha}\ln^2\Big[\frac{1+(1-e^{-\alpha u_c})^{\frac{1}{2}}}{1-(1-e^{-\alpha u_c})^{\frac{1}{2}}}\Big].$$

Les observations faites ci-dessus sont regroupées dans le diagramme de bifurcation (δ, u_c) suivant pour différentes valeurs de α:

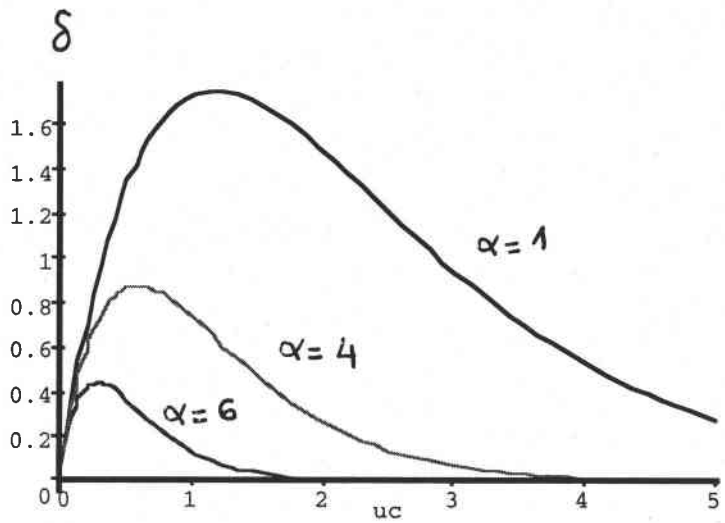

Fig.1.5: Contrainte en fonction de la température maximum

D'après la figure 1.5, il existe une température centrale $u(0) = u_c$ si $\delta = \delta^*$ et si $\delta \in [0, \delta^*)$ il existe deux températures centrales u_c. Les solutions stationnaires sont uniquement déterminées à partir de (4.3) où on exprime x en fonction de $u(x)$:

$$\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha}}x = \int_{u(x)}^{u_c} \frac{ds}{\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha s}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$x = x(u) = \sqrt{\frac{e^{-\alpha u_c}}{2\delta\alpha}} \ln\left[\frac{1 + (1 - e^{\alpha(u(x)-u_c)})^{\frac{1}{2}}}{1 - (1 - e^{\alpha(u(x)-u_c)})^{\frac{1}{2}}}\right]$$

On considère u_c comme un paramètre fixé dans l'expression précédente, la fonction $x(u)$ est continue et $x'(u) < 0$ alors $x(u)$ est bijective et la réciproque est de même sens de variation que u. Ainsi il existe une unique

solution stationnaire $u(x)$, pour une valeur de u_c donnée.

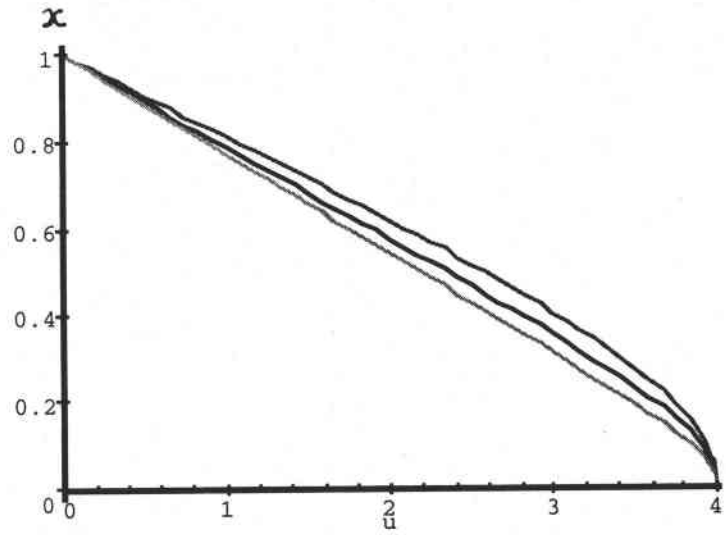

Fig.1.6: Profil de la solution $u(x)$ pour différentes valeurs de α.

- Loi de puissance ($f(s) = s^p,\ p = -\frac{\nu}{m}$)

On considère le problème stationnaire associé à la loi puissance;

$$(S2)\begin{cases} u_{xx} + \delta u^p = 0 & x \in (0,1) \\ u_x(0) = 0\ ,\ u(1) = \tilde{u} \end{cases}$$

$u_{xx} \leq 0 \implies u_x \leq 0 \implies$ est décroissante, avec $u_c > \tilde{u}$.
On multiplie l'équation aux dérivées partielles de $(S2)$ par u_x puis on intègre sur Ω,

$$\left(\frac{1}{2}u_x^2\right)_x = \left(-\frac{\delta}{p+1}u^{p+1}\right)_x$$

$$\implies \left(\frac{1}{2}u_x^2\right) = \frac{\delta}{p+1}\left({u_c}^{p+1} - u^{p+1}\right) \tag{4.6}$$

où $u_c = u(0)$ est la température au centre de la bande. Comme $u_x(x) \leq 0$ dans $(0,1)$, on en déduit de (4.6);

$$u_x = -\sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}\left({u_c}^{p+1} - u^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.7}$$

$$\frac{u_x}{\left({u_c}^{p+1} - u^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}.$$

On intègre entre 0 et x il vient

$$\int_0^x \frac{u_x}{\left({u_c}^{p+1} - u^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}\ x,$$

$$\int_{u_c}^{u(x)} \frac{ds}{\left({u_c}^{p+1} - s^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}\ x. \tag{4.8}$$

u_c étant fixé cette équation définit parfaitement u. Pour fixer u_c on doit trouver $u_c > \tilde{u}$ tel que

$$\int_{\tilde{u}}^{u_c} \frac{ds}{\left({u_c}^{p+1} - s^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2\delta}{p+1}},$$

$$u_c^{-\frac{p+1}{2}} \int_{\tilde{u}}^{u_c} \frac{ds}{\left(1 - (\frac{s}{u_c})^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}.$$

On pose $y = \dfrac{s}{u_c} \implies ds = u_c dy$

$$u_c^{1-\frac{p+1}{2}} \int_{\frac{\tilde{u}}{u_c}}^{1} \frac{dy}{\left(1 - y^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}$$

$$\iff \qquad \int_{\frac{\tilde{u}}{u_c}}^{1} \frac{dy}{\left(1 - y^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2\delta}{p+1}} {u_c}^{\frac{p-1}{2}} \tag{4.9}$$

Pour $z \geq \tilde{u}$, on considère donc la fonction suivante pour $p \neq 1$:

$$g(z) = \int_{\frac{\tilde{u}}{z}}^{1} \frac{dy}{\left(1-y^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}\, z^{\frac{p-1}{2}}. \tag{4.10}$$

$$g'(z) = \frac{\tilde{u}}{z^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\tilde{u}}{z}\right)^{p+1}}} - \frac{p-1}{2}\sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}\, z^{\frac{p-3}{2}}$$

$$= \frac{1}{z^2}\left\{\frac{\tilde{u}}{\sqrt{1-\left(\frac{\tilde{u}}{z}\right)^{p+1}}} - \frac{p-1}{2}\sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}\, z^{\frac{p+1}{2}}\right\}$$

$$g'(z) = 0 \iff \frac{\tilde{u}^2}{1-\left(\frac{\tilde{u}}{z}\right)^{p+1}} = \frac{2\delta}{p+1}\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 z^{p+1}$$

$$\tilde{u}^2 = \frac{2\delta}{p+1}\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 z^{p+1} - \frac{2\delta}{p+1}\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \tilde{u}^{p+1}$$

$$\iff \quad z^{p+1} = \tilde{u}^{p+1} + \frac{2\tilde{u}^2(p+1)}{\delta(p-1)^2}$$

$$= \tilde{u}^{p+1}\left\{1 + \frac{2(p+1)}{\delta(p-1)^2\tilde{u}^{p-1}}\right\}$$

$$\iff \quad z = \tilde{u}\left\{1 + \frac{2(p+1)}{\delta(p-1)^2\tilde{u}^{p-1}}\right\}^{\frac{1}{p+1}}. \tag{4.11}$$

Puisque $\lim_{z\to\tilde{u}} g'(z) = +\infty$, la fonction g est croissante et passe par un maximum au point z donné par l'expression (4.11).

Pour $p = 1$ on a

$$g(z) = \int_{\frac{\tilde{u}}{z}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{\delta}$$

et g est une fonction croissante de z. Dans ce cas $g(z) = 0$ admet une solution si et seulement si

$$g(+\infty) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{\delta} = \arcsin y\Big]_0^1 - \sqrt{\delta} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\delta} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \delta < \frac{\pi^2}{4}.$$

Dans ce cas l'équation (4.9) a une solution et une seule.

Revenons au cas $p \neq 1$. Si $p < 1$ on a

$$g(\tilde{u}) < 0, \qquad \lim_{z \to +\infty} g(z) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^{p+1}}} > 0.$$

Dans ce cas l'équation (4.9) a une solution et une seule.

Si maintenant $p > 1$ on a

$$\lim_{z \to +\infty} g(z) = -\infty.$$

L'équation (4.9) a alors une solution si et seulement si

$$g(z) \geq 0 \quad \text{où } z \text{ est donné par (4.11) .}$$

Plus explicitement, cela s'écrit

$$\int_{\left\{1+\frac{2(p+1)}{\delta(p-1)^2\tilde{u}^{p-1}}\right\}^{-\frac{1}{p+1}}}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^{p+1}}} -$$

$$\sqrt{\frac{2\delta}{p+1}}\tilde{u}^{\frac{p-1}{2}}\left\{1+\frac{2(p+1)}{\delta(p-1)^2\tilde{u}^{p-1}}\right\}^{\frac{p+1}{2(p+1)}} \geq 0. \tag{4.12}$$

On pose $k = \left\{1 + \frac{2(p+1)}{\delta(p-1)^2\tilde{u}^{p-1}}\right\}^{-\frac{1}{p+1}}$ avec $k \in (0,1)$

$$k^{-(p+1)} = 1 + \frac{4}{(p-1)^2\tilde{u}^{p-1}}\,\frac{p+1}{2\delta}$$

$$k^{-(p+1)} - 1 = \frac{4}{(p-1)^2\tilde{u}^{p-1}}\,\frac{p+1}{2\delta}$$

$$\sqrt{k^{-(p+1)} - 1} = \frac{2}{(p-1)\tilde{u}^{\frac{p-1}{2}}}\,\sqrt{\frac{p+1}{2\delta}}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{\frac{2\delta}{p+1}} = \frac{2}{(p-1)\tilde{u}^{\frac{p-1}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{k^{-(p+1)} - 1}}$$

D'où l'expression (4.12) s'écrit

$$\int_k^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^{p+1}}} - \frac{2}{(p-1)\tilde{u}^{\frac{p-1}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{k^{-(p+1)} - 1}}\,k^{\frac{-p-1}{2}}$$

$$= \int_k^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^{p+1}}} - \frac{2}{(p-1)\tilde{u}^{\frac{p-1}{2}}}\,\frac{kk^{\frac{-p-1}{2}}}{\sqrt{k^{-(p+1)} - 1}}$$

$$= \int_k^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^{p+1}}} - \frac{2}{(p-1)\tilde{u}^{\frac{p-1}{2}}}\,\frac{k}{\sqrt{1-k^{p+1}}}.$$

Il est facile de voir que cette fonction est décroissante en k, donc l'expression (4.12) est également décroissante en δ. Quand $\delta \longrightarrow 0$ i.e, $k \longrightarrow 0$, l'expression (4.12) $\longrightarrow \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^{p+1}}} > 0$.
Quand $\delta \longrightarrow +\infty$ i.e, $k \longrightarrow 1$, l'expression (4.12) $\longrightarrow -\infty$. Donc il existe $\delta = \delta^*$ une constante critique telle que

- si $\delta < \delta^*$ le problème admet deux solutions
- si $\delta = \delta^*$ le problème admet une solution
- si $\delta > \delta^*$ le problème n'admet pas de solutions.

A partir de l'expression (4.9) on exprime δ (contrainte) en fonction de la température u_c:

$$\delta = \delta(u_c) = \frac{(p+1)\ {u_c}^{1-p}}{2}\Big(\int_{\frac{\tilde{u}}{u_c}}^{1} \frac{dy}{(1-y^{p+1})^{\frac{1}{2}}}\Big)^2$$

$$\delta(u_c) = \frac{2}{p+1}{u_c}^{1-p}\Big(1-(\frac{\tilde{u}}{u_c})^{p+1}\Big)\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2},\frac{p}{p+1};\frac{3}{2};1-(\frac{\tilde{u}}{u_c})^{p+1}\Big)^2,$$

où $\mathcal{F}\Big(.,.;.;.\Big)$ est une fonction hypergéométrique définie par la représentation intégrale suivante;

$$\mathcal{F}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt,$$

avec $\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds$ avec $Re(z) > 0$.

Nous avons tracé sur la figure 1.7 la fonction $\delta = \delta(u_c)$; trois cas sont distingués.

a) $p > 1(\nu + m < 0)$: la fonction $\delta(u_c)$ admet un unique maximum δ^* au delà duquel il n'existe pas de solution stationnaire et au dessous de cette constante δ^*, on obtient deux valeurs de u_c.
b) $p < 1(\nu + m > 0)$: Dans ce cas $\delta(u_c)$ est une fonction croissante. Pour chaque valeur δ correspond une unique valeur u_c et une solution stationnaire.
c) $p = 1(m + \nu = 0)$: C'est le cas d'une équation linéaire; la fonction $\delta(u_c)$ est donnée par

$$\delta(u_c) = \Big[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{\tilde{u}}{u_c})\Big]^2.$$

Cependant il existe une asymptote horizontale $\delta = \frac{\pi^2}{4}$, au delà de laquelle il n'existe pas de valeurs u_c, donc pas de solution stationnaire.

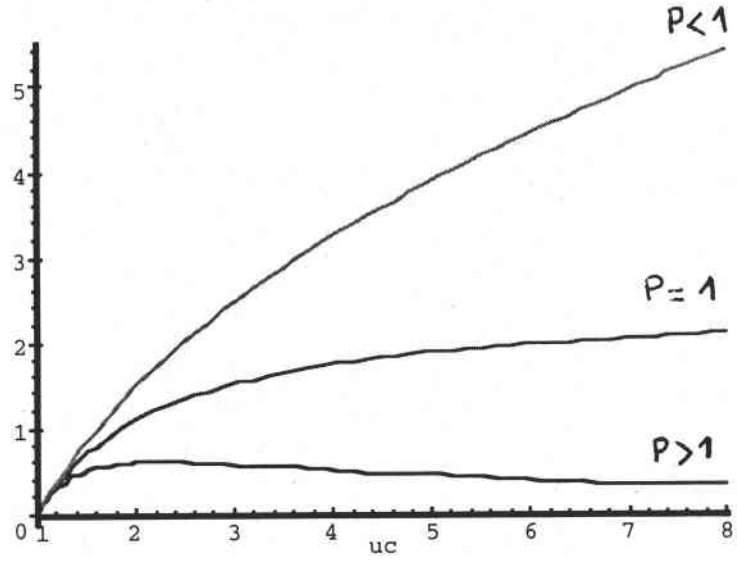

Fig.1.7 : Contrainte en fonction de la température maximum pour différentes valeurs de p données.

Il reste à discuter l'existence et l'unicité des solutions stationnaires $u(x)$. D'après la figure précédente, si $p > 1$, il existe une constante maximum (une contrainte maximale de cisaillement) δ^* pour laquelle si $\delta > \delta^*$ le problème n'admet pas de température au centre, $u(0) = u_c$, et si $\delta \in [0, \delta^*)$ il existe deux températures centrales u_c. Les solutions stationnaires sont uniquement déterminées à partir de (4.8) où on exprime x en fonction de $u(x)$:

$$x = \sqrt{\frac{p+1}{2\delta}} u_c^{-\frac{p+1}{2}} \int_{u(x)}^{uc} \frac{ds}{\left(1 - (\frac{s}{u_c})^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$x(u) = \sqrt{\frac{2{u_c}^{1-p}}{\delta(p+1)}} \left(1 - \left(\frac{u(x)}{u_c}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{p+1}; \frac{3}{2}; 1 - \left(\frac{u(x)}{u_c}\right)^{p+1}\right).$$

Dans le cas $p < 1$, le problème admet une solution stationnaire qui est donnée par l'expression précédente. Finalement, pour $p = 1$ le problème admet une unique solution stationnaire si $\delta < \frac{\pi^2}{4}$;

$$u(x) = u_c \sin\Big(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\delta}x\Big) = \frac{\tilde{u}}{\cos(\sqrt{\delta})} \cos\Big(\sqrt{\delta}x\Big).$$

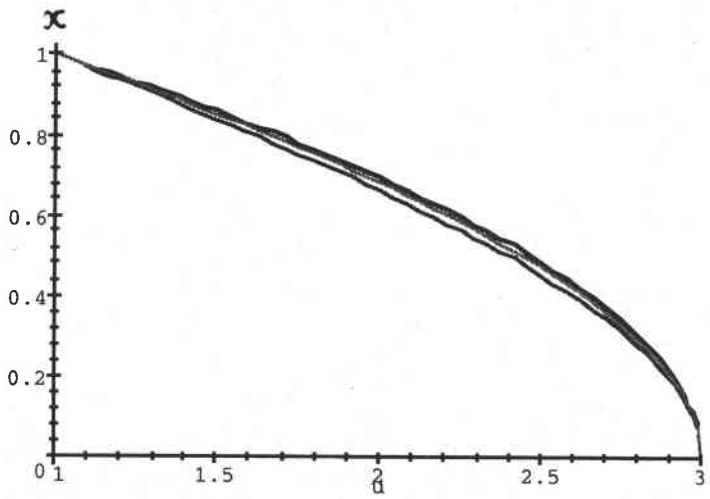

Fig.1.8: Profil de la solution stationnaire pour différentes valeurs de p.

4.2 Explosion en temps fini des solutions non stationnaires.

4.2.1 Conditions de Neumann.

On sait que dans le cas d'une contrainte imposée, le problème est modélisé par une équation semi-linéaire parabolique. On considère dans cette section le problème suivant

$$(P)\begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta f(u) & x \in \Omega, t > 0 \\ u_x = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

On suppose que le problème (P) admet une solution régulière. Puisque $f \geq 0$ alors le terme source est non négatif, i.e., le système est fourni en chaleur. D'autre part la condition aux bords $u_x = 0$ empêche la fuite de chaleur, dans une telle situation la solution du problème (P) explose si la source de chaleur apportée au système est suffisante.

En vue d'étudier le comportement des solutions du problème (P), on rappelle quelques résultats sur les équations différentielles ordinaires autonomes ($[Ch]$).

Théorème 4.2 *On considère l'équation différentielle ordinaire suivante:*

$$(1') \qquad \begin{cases} v_t = f(v) & t \geq 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

on suppose que f est une fonction continue positive sur $[v_0, +\infty)$ *telle que*

$$t^* = \int_{v_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty.$$

Alors il existe une unique solution pour $(1')$ *qui admet un intervalle maximal d'existence* $[0, t^*)$, *i.e., qui explose en temps* t^* .

Corollaire 4.1 *On suppose que f est une fonction continue positive sur* $[v_0, +\infty)$ *telle que*

$$t^* = \int_{v_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty.$$

Alors si une fonction v vérifie

$$(2') \qquad \begin{cases} v_t \geq f(v) & t \geq 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

v est défini jusqu'au temps t^*.

Le résultat principal concernant notre problème est le suivant.

Théorème 4.3 *On définit* $\bar{u}_0 = \frac{1}{2}\int_\Omega u_0(x)dx$ *et on suppose que f est une fonction convexe, continue et positive sur* $[\bar{u}_0, +\infty)$ *telle que*

$$t^* = \frac{1}{\delta}\int_{\bar{u}_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty, \qquad (*)$$

alors la solution du problème (P) *ne peut exister après le temps* t^*.

Preuve. Soit $\bar{u}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u(x,t)dx$. On remarque pour les conditions aux bords considérées on a $\int_\Omega u_{xx}\, dx = 0$. Alors, on intégre l'équation aux dérivées partielles du problème (P) on obtient

$$\bar{u}_t = \frac{\delta}{2}\int_\Omega f(u)dx \geq \delta f\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u dx\Big) = \delta f(\bar{u})$$

ceci est dû à l'inégalité de Jensen car f est convexe. Le résultat suit à partir du corollaire 4.1.

On remarque qu'on peut obtenir une solution globale pour le problème (P) si $f(u) \equiv C$, où C est une constante et dans ce cas on a $u(x,t) = \delta C t$.

Remarque 4.1 Le résultat précédant peut être retrouvé par la méthode suivante.
Soit $\eta(t) := \min_{x\in\Omega} u(.,t)$. On a $u_{xx} \geq 0$ en tout point où u prend la valeur η, alors

$$\frac{d\eta}{dt} \geq \delta f(\eta), \qquad (**)$$

alors

$$t^* \leq \frac{1}{\delta}\int^{\eta} \frac{ds}{f(s)},$$

ainsi on obtient explosion en temps fini si

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty.$$

En effet, Soient $\eta(t_i) = u(x_i, t_i)$ $(i = 1, 2)$ et $h = t_2 - t_1$. Alors

$$\eta(t_2) - \eta(t_1) = u(x_2, t_2) - u(x_1, t_1),$$

$$= u(x_2, t_2) - u(x_2, t_1) + u(x_2, t_1) - u(x_1, t_1),$$

$$\geq h u_t(x_2, t_2).$$

De plus, si $t_2 > t_1$

$$\frac{\eta(t_2) - \eta(t_1)}{t_2 - t_1} \geq u_t(x_2, t_2),$$

comme $u_{xx}(x_2, t_2) \geq 0$, (ceci suppose que le minimum de $u(., t_2)$ est atteint à l'intérieur de Ω), $u_t(x_2, t_2) \geq \delta f(u(x_2, t_2)) = \delta f(\eta(t_2))$. Par Conséquent, en tout point où $\eta(t)$ est différentiable on obtient

$$\frac{d\eta}{dt} \geq \delta f(\eta).$$

De la même façon, si $M(t) := \max_{x\in\Omega} u(.,t)$ alors on a

$$\frac{dM}{dt} \leq \delta f(M),$$

ainsi

$$t \geq \frac{1}{\delta}\int^{M} \frac{ds}{f(s)},$$

dans ce cas on obtient l'existence globale de la solution si

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{f(s)} = \infty.$$

On remarquer dans notre cas, $f(u) = u^{-\frac{\nu}{m}}$ ou $e^{\alpha u}$, la condition suffisante $(*)$ du théorème 4.3 pour obtenir l'explosion de la solution est équivalente a:

$$(i) \quad \nu + m < 0 \quad \text{(loi puissance)}$$

$$(ii) \quad \alpha = \frac{\beta}{m} > 0 \quad \text{(loi exponentielle)}$$

4.2.2 Conditions de Dirichlet.

On associe à l'équation aux dérivées partielles du problème (P) des Conditions de Dirichlet non homogènes et sans perte de généralité on peut se ramener à un intervalle $\Omega = [0,1]$.

$$(P') \begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta f(u) & x \in \Omega, t \in (0,T) \\ u(x,t) = \tilde{u} & x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

Comme $u_0(x) \geq 0$ d'après le principe du maximum on a $u \geq 0$. Dans ce cas on peut également montrer l'explosion de la solution du problème (P') sous une certaine condition sur la valeur initiale $u_0(x)$.

Théorème 4.4 *Sous les hypothèses* (i), (ii) *et si* u_0 *est assez grand alors toute solution du problème* (P') *explose en temps fini pour tout* $\delta > 0$.

Preuve. Notre argument de démonstration est une technique de fonction propre, introduite par Kaplan ([K]), combinée avec l'inégalité de Jensen.
Soit $\lambda > 0$ la première valeur propre du laplacien dans $\Omega = [0,1]$ avec des conditions aux bords de Dirichlet. Soit ψ la fonction propre positive normalisée correspondant à λ, alors: $-\psi_{xx} = \lambda\psi$, $\psi > 0$ dans Ω, $\int_\Omega \psi(x)dx = 1$ et $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$, alors on a la fonction propre suivante

$$\psi(x) = \frac{\pi}{2}\sin \pi x, \qquad \lambda = \pi^2.$$

Soit le changement de variable $v = u - \tilde{u}$, alors le problème (P') est équivalent à,

$$(P'') \begin{cases} v_t = v_{xx} + \delta f(v + \tilde{u}) & x \in \Omega, t \in (0,T) \\ v(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t \in (0,T) \\ v(x,0) = v_0 = u_0 - \tilde{u} & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

On multiplie l'équation aux dérivées partielles du problème (P'') par ψ puis on intégre sur Ω, on a

$$\Big(\int_\Omega v\psi dx\Big)_t = \int_\Omega v_{xx}\psi dx + \delta \int_\Omega f(v+\tilde{u})\psi dx,$$

$$= \int_\Omega v\psi_{xx} dx + \delta \int_\Omega f(v+\tilde{u})\psi dx,$$

d'après l'inégalité de Jensen et le fait que ψdx est une mesure de probabilité, on obtient

$$\Big(\int_\Omega v\psi dx\Big)_t \geq -\lambda \int_\Omega v\psi dx + \delta\Big(f\Big(\int_\Omega v\psi dx + \tilde{u}\Big)\Big).$$

Soit $w = \int_\Omega v\psi dx$, alors w vérifie l'inéquation différentielle suivante

$$w_t \geq \delta f(w + \tilde{u}) - \lambda w.$$

Il est clair que, la fonction $w \mapsto \delta f(w+\tilde{u}) - \lambda w$ est positive pour w assez grand et vérifie les conditions de notre corollaire, alors on a explosion en temps fini pourvue que $\int_\Omega v_0\psi dx$ soit assez grand.

Pour conclure cette partie, on étudie un cas particulier du problème de Dirichlet (P') où $f(u) = u^{-\frac{\nu}{m}}$ avec $\nu + m > 0$. Le problème avec conditions aux bords de Neumann peut être traité d'une façon similaire. D'après le théorème 4.1, il est clair que le problème stationnaire associé à (P') admet une unique solution pour tout $\delta > 0$. Alors dans ce cas la solution du problème (P') n'explose pas en un temps fini si $\nu + m > 0$. En effet, soit $M(t) := \max_{x\in\Omega} u(.,t)$ et supposons que u explose en un temps fini $t = t^* < \infty$, alors $M(t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow t^*$. La solution $u = u\Big(M(t), t\Big)$ vérifie:

$$u_t\Big(M(t),t\Big) = u_{xx}\Big(M(t),t\Big) + \delta f\Big(u\Big(M(t),t\Big)\Big) \leq \delta f\Big(u\Big(M(t),t\Big)\Big),$$

puisque $u_{xx} \leq 0$ en chaque point où u atteint la valeur de M. D'autre part on a

$$\Big(u\Big(M(t),t\Big)\Big)' = u_t\Big(M(t),t\Big) + u_x\Big(M(t),t\Big)M'(t) = u_t\Big(M(t),t\Big)$$

car u admet un maximum. Alors on obtient l'inéquation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{d}{dt}u\Big(M(t),t\Big) \leq \delta f\Big(u\Big(M(t),t\Big)\Big).$$

On intégre cette inéquation différentielle sur $(0, t^*)$, sachant que $\nu + m > 0$, on a $t^* = +\infty$. Ce qui contredit l'hypothèse et montre que $M(t)$ est

défini pour tout $t \in [0, \infty)$. De plus à partir de l'inégalité $(**)$ on a $u(x,t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$.

5 Existence globale des solutions en vitesse contrôlée.

5.1 Conditions thermiques de Neumann.

On sait que d'après la formulation en vitesse contrôlée, le problème est modélisé par une équation parabolique nonlocale:

$$u_t - u_{xx} = \delta \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}}. \qquad (Q)$$

A laquelle on associe l'état stationnaire suivant

$$-u_{xx} = \delta \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}}, \qquad (QS)$$

où $f(s) = s^p$ ou $e^{\alpha s}$, $p > 0$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ et $m > 0$. La condition initiale $u_0(x)$ est supposée positive. Alors en utilisant le principe du maximum on en déduit que $u(x,t) \geq 0$ dans $\Omega \times [0,T)$.
En premier lieu on associe aux équations paraboliques nonlocales (Q) et (QS) une condition de Neumann homogène, $u_x = 0$ pour $x \in \partial\Omega$.

$$(QS) \begin{cases} -u_{xx} = \delta \dfrac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega \\ u_x = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

On peut remarquer que si on a une solution stationnaire en vitesse contrôlée c'est équivalent de dire qu'on a une solution stationnaire en contrainte contrôlée.

En effet, soit w la solution stationnaire en contrainte contrôlée, alors w satisfie l'équation différentielle (S):

$$-w_{xx} = \delta_1 f(w) = \delta_1 \Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^{m+1} \frac{f(w)}{\Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^{m+1}}.$$

Avec $\delta = \delta_1 \Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^{m+1}$, il est clair que w vérifie une équation du type (QS). L'inverse est évident. On sait (section 4) qu'il n'existe pas de solutions stationnaires en contrainte contrôlée, sous des conditions de Neumann homogènes. Alors pour le même type de conditions aux bords, Le problème en vitesse contrôlée (QS) n'admet pas de solutions stationnaires. Ainsi toute solution du problème (Q) est non bornée, soit elle existe pour tout $t \geq 0$ et $u(x,t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$ ou bien elle explose en un temps fini.

Théorème 5.1 *Supposons,* $\int_\Omega u_0(x)dx < +\infty$, *soit* u *la solution de l'équation* (Q) *sous les conditions aux bords de Neumann , si* $\|u(x,t)\|_1 \longrightarrow \infty$ *quand* $t \longrightarrow T$, *alors* $T = \infty$, *où* $\|u(.,t)\|_1 = \int_\Omega |u(x,t)|dx$.

Preuve. Soit $u(x,t)$ une solution de l'équation (Q) sur $\Omega \times [0,T)$. Supposons que $T < \infty$, alors $\|u(.,t)\|_1$ explose en un temps fini, T. La solution $u(x,t)$ vérifie

$$u_t - u_{xx} = \frac{\delta}{K^{m+1}} f(u), \tag{5.1}$$

où $K = \int_\Omega f(u)dx$. Intégrons directement l'équation (5.1), on a

$$\Big(\int_\Omega u(x,t)dx\Big)_t = \frac{\delta}{K^m} \geq 0, \quad \text{d'où} \quad \|u(.,t)\|_1 \geq \|u_0\|_1. \tag{5.2}$$

D'autre part en utilisant l'inégalité de Jensen on obtient

$$\Big(\int_\Omega u(x,t)dx\Big)_t = \frac{\delta}{K^m} \leq \frac{\delta}{\Big[f\Big(\int_\Omega u(x,t)dx\Big)\Big]^m} \leq \frac{\delta}{\Big[f\Big(\int_\Omega u_0(x)dx\Big)\Big]^m},$$

car f est croissante. Alors si on intégre entre 0 et t on aura

$$\|u(.,t)\|_1 \leq \frac{\delta}{\left[f\left(\|u_0\|_1\right)\right]^m} t + \|u_0\|_1. \tag{5.3}$$

Ainsi, quand $t \longrightarrow T$ à partir de (5.3) on a

$$+\infty \leq \frac{\delta}{\left[f\left(\|u_0\|_1\right)\right]^m} T + \|u_0\|_1 < +\infty. \tag{5.4}$$

Ceci contredit notre hypothèse, donc on a $T = \infty$.

5.2 Existence de solutions stationnaires sous les conditions thermiques de Dirichlet.

Dans ce qui suit, on associe à l'équation parabolique nonlocale (Q) une condition de Dirichlet non homogène.

$$(Q)\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta \dfrac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega,\ t \in [0,T) \\ u = \tilde{u} & x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Auquel on associe le problème stationnaire suivant

$$(QS)\begin{cases} -u_{xx} = \delta \dfrac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega \\ u = \tilde{u} & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

D'après la théorie classique des équations aux dérivées partielles ([BT]) on a:

1. Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $\sup u_0 < +\infty$, le problème non local (Q) admet une unique solution classique, non prolongeable, sur $\Omega \times [0,T)$ où $T = +\infty$ ou $T < +\infty$ et $\lim_{t \to T} u(x,t) = +\infty$.

2. Toute solution de (Q) ou de (QS) est positive pour $x \in \Omega$ $(t > 0)$
3. Pour $\Omega = \{x : -a < x < a\}$,
   (a). Toute solution de (QS) est symétrique et décroissante,
   (b). Si $u_0(x)$ est symétrique et radialement décroissante, alors la solution du problème (Q) l'est aussi.

Soit $\Omega = (-1, 1)$, sans perte de généralité et pour des raisons simple de calculs on suppose $\tilde{u} = 0$, dans le cas de la nonlinéarité exponentielle.

Alors toute solution de (QS) est symétrique et $u = u(x)$ vérifie

$$(QS)\begin{cases} u_{xx} + \delta \dfrac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}} = 0 & x \in (0,1) \\ u_x(0) = 0 \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

Théorème 5.2 *Soit $f(u) = e^{\alpha u}$, alors le problème (QS) admet une unique solution pour tout $\delta > 0$.*

Preuve. le problème (QS) peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} u_{xx} + \delta \dfrac{e^{\alpha u}}{K^{m+1}} = 0 \\ u_x(0) = 0 \ , \ u(1) = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

où $K = 2\displaystyle\int_0^1 e^{\alpha u} dx$. On multiplie (5.5) par $2u_x$ puis on intégre entre 0, avec $u_x(0) = 0$ et x, on obtient

$$u_x^2(x) + 2\delta \frac{e^{\alpha u(x)}}{K^{m+1}} = 2\delta \frac{e^{\alpha u_c}}{K^{m+1}}$$

$$u_x^2(x) = \frac{2\delta}{K^{m+1}}[e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u(x)}] \tag{5.6}$$

où $u(0) = u_c$ est la température au centre de la bande. Par intégration de l'équation différentielle (5.5) sur l'intervalle $[0, 1]$, on a

$$u_x(1) = -\frac{\delta}{2K^m} \tag{5.7}$$

Pour $x = 1$ on peut résoudre les équations précédentes pour K inconnu, donc on a

$$K^{1-m} = \frac{8}{\delta\alpha}(e^{\alpha u_c} - 1) \tag{5.8}$$

Puisque $u_x(x) < 0$ sur $(0,1)$, de (5.6) on a

$$\sqrt{\frac{2\delta}{\alpha K^{m+1}}}x = -\int_0^x \frac{du}{\left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.9}$$

En posant $v = \left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u}\right)^{\frac{1}{2}}$, le membre de droite de (5.9) peut être calculé facilement:

$$I = -\int_0^x \left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha u}\right)^{-\frac{1}{2}} du = \int_{u(x)}^{u_c} \left(e^{\alpha u_c} - e^{\alpha s}\right)^{-\frac{1}{2}} ds$$

$$= \frac{e^{\frac{-\alpha u_c}{2}}}{\alpha} \ln\left[\frac{1 + (1 - e^{\alpha(u(x)-u_c)})^{\frac{1}{2}}}{1 - (1 - e^{\alpha(u(x)-u_c)})^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Une évaluation de l'expression (5.9) en $x = 1$ donne

$$\delta = \frac{K^{m+1}e^{-\alpha u_c}}{2\alpha}\left(\ln\left[\frac{1 + (1 - e^{-\alpha u_c})^{\frac{1}{2}}}{1 - (1 - e^{-\alpha u_c})^{\frac{1}{2}}}\right]\right)^2. \tag{5.10}$$

En utilisant (5.8), l'expression (5.10) devient

$$\delta = \delta(u_c) = \frac{2^{2m+1}}{\alpha} e^{\beta u_c}(1 - e^{-\alpha u_c})^{\frac{m+1}{2}}\left(\ln\left[\frac{1 + (1 - e^{-\alpha u_c})^{\frac{1}{2}}}{1 - (1 - e^{-\alpha u_c})^{\frac{1}{2}}}\right]\right)^{1-m} \tag{5.11}$$

Pour étudier le sens de variation de la fonction δ, on pose $z = \sqrt{1 - e^{-\alpha u_c}}$ avec $u_c \in [0, +\infty)$ et dans ce cas δ est définie par

$$\delta = \delta(z) = \frac{2^{2m+1}}{\alpha}\frac{z^{m+1}}{(1 - z^2)^m} \ln^{1-m}\left[\frac{1+z}{1-z}\right], \quad \text{où } z \in [0,1)$$

On remarque que la fonction $\delta = \delta(z)$ vérifie $\lim_{z\to 0} \delta(z) = 0$, $\lim_{z\to 1} \delta(z) = +\infty$ pour tout $m > 0$ et $\delta(z) > 0 \ \forall\, z \in (0,1)$. D'autre part on a

$$\delta'(z) = \frac{2^{2m+1}}{\alpha} \frac{z^{m+1}}{(1-z^2)^{m+1}} \ln^{-m}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$$

$$\left\{2(1-m) + \left((m+1)\frac{(1-z^2)}{z} + 2mz\right) \ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right]\right\}$$

pour $m > 0$ on a $\delta'(z) > 0$ pour tout $z \in (0,1)$ donc δ est fonction strictement croissante. Les observations faites ci-dessus sont regroupées dans le diagramme de (δ, u_c) suivant:

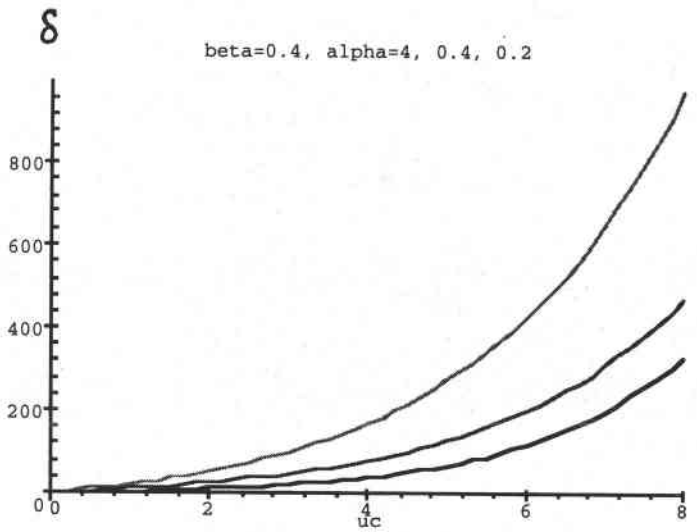

Fig.1.9: Vitesse fonction de la température au centre da la bande.

Il reste à discuter l'existence et l'unicité des solutions stationnaires $u(x)$. D'après la figure précédente, Pour chaque constante δ fixée (contrainte de cisaillement) le problème admet une unique température maximale, $u(0) = u_c$. Les solutions stationnaires sont uniquement détérminées à partir de (5.9) où on exprime x en fonction de $u(x)$:

$$x = \sqrt{\frac{\alpha K^{m+1}}{2\delta}} \int_{u(x)}^{u_c} \frac{ds}{\left[e^{\alpha u_c} - e^{\alpha s}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$x = x(u) = \sqrt{\frac{e^{-\alpha u_c} K^{m+1}}{2\delta\alpha}} \ln\left[\frac{1 + (1 - e^{\alpha(u(x)-u_c)})^{\frac{1}{2}}}{1 - (1 - e^{\alpha(u(x)-u_c)})^{\frac{1}{2}}}\right].$$

La dérivée,

$$x'(u) = -\sqrt{\frac{\alpha e^{-\alpha u_c} K^{m+1}}{2\delta}} \frac{1}{\left(1 - e^{\alpha(u(x)-u_c)}\right)^{\frac{1}{2}}} < 0.$$

Comme $x = x(u)$ est une fonction continue et dérivable avec $x'(u) < 0$, alors $x(u)$ est bijective, la fonction réciproque $x^{-1}(u)$ existe et de même sens de variation que $x(u)$. Ainsi il existe une unique solution stationnaire $u(x)$. Comparons nos resultats avec ceux de Leroy et Molinari (cf $[LM]$) on obtient les mêmes profiles de température pour différentes valeurs de la température centrale:

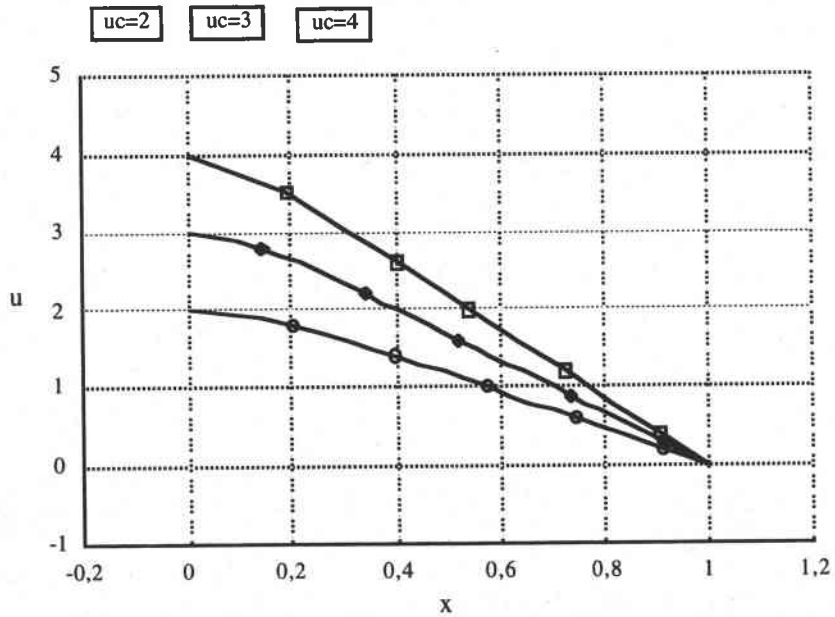

Fig.1.10: Distribution de la température pour différentes valeurs u_c.

Théorème 5.3 *Soit $f(u) = u^p$ avec $p > 0$, alors le problème (QS) admet une unique solution pour tout $\delta > 0$.*

Preuve. le problème (QS) peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} u_{xx} + \delta \frac{u^p}{K^{m+1}} = 0 \\ u_x(0) = 0, \quad u(1) = \tilde{u} \end{cases} \tag{5.12}$$

En faisant le même raisonnement que le précédent on a;

$$u_x(1) = -\frac{\delta}{2K^m}$$

où $K = 2\int_0^1 u^p dx$. On multiplie (5.12) par $2u_x$ puis on intégre entre 0 et x, alors

$$u_x^2(x) + 2\delta \frac{u^{p+1}(x)}{(p+1)K^{m+1}} = 2\delta \frac{u_c^{p+1}}{(p+1)K^{m+1}},$$

$$u_x^2(x) = \frac{2\delta}{K^{m+1}}[{u_c}^{p+1} - u^{p+1}(x)] \tag{5.13}$$

où $u(0) = u_c$. Pour $x = 1$ on résout les équation précédentes pour K inconnu, donc

$$K^{1-m} = \frac{8}{\delta(p+1)}\left[u_c^{p+1} - \tilde{u}^{p+1}\right] \tag{5.14}$$

Puisque $u_x(x) < 0$ sur $(0,1)$, de (5.13) on a

$$\sqrt{\frac{2\delta}{(p+1)K^{m+1}}}x = -\int_0^x \frac{du}{[u_c^{p+1} - u^{p+1}]^{\frac{1}{2}}} \tag{5.15}$$

L'intégrale du membre de droite de (5.15) peut être calculé pour $y := \frac{u}{u_c}$, alors on a

$$I = -\int_0^x \frac{du}{[u_c^{p+1} - u^{p+1}]^{\frac{1}{2}}} = -{u_c}^{\frac{1-p}{2}} \int_1^{\frac{u(x)}{u_c}} \frac{dy}{[1 - y^{p+1}]^{\frac{1}{2}}}. \tag{5.16}$$

Soit le changement de variables suivant $v := [1-y^{p+1}]^{\frac{1}{2}}$, donc (5.16) devient

$$I = \frac{2}{p+1} u_c{}^{\frac{1-p}{2}} \int_0^{[1-y^{p+1}]^{\frac{1}{2}}} \frac{dv}{[1-v^2]^{\frac{p}{p+1}}}. \tag{5.17}$$

Ainsi en $x = 1$ on btient

$$\delta = \frac{2}{p+1} K^{m+1} u_c{}^{1-p} \Big(\int_0^{[1-(\frac{\tilde{u}}{u_c})^{p+1}]^{\frac{1}{2}}} \frac{dv}{[1-v^2]^{\frac{p}{p+1}}} \Big)^2 \tag{5.18}$$

En utilisant (5.14), l'expression (5.18) prend la forme suivante

$$\delta = \delta(z) = \frac{2^{m+2}}{p+1} \tilde{u}^{1-\nu} \frac{z^{m+1}}{(1-z^2)^{\frac{1-\nu}{p+1}}} \Big(\int_0^z \frac{dv}{[1-v^2]^{\frac{p}{p+1}}} \Big)^{1-m}, \tag{5.19}$$

où $z = [1-(\frac{\tilde{u}}{u_c})^{p+1}]^{\frac{1}{2}}$ et pour $u_c \in [\tilde{u}, \infty)$ on a $z \in [0,1)$. La fonction $\delta = \delta(z)$ défine par (5.19) vérifie $\lim\limits_{z \to 0} \delta(z) = 0$, $\lim\limits_{z \to 1} \delta(z) = +\infty$ pour tout $m > 0$ et $\delta(z) > 0 \ \ \forall\, z \in (0,1)$. De plus on a

$$\delta'(z) = \frac{2^{m+2}}{p+1} \tilde{u}^{1-\nu} \frac{z^{m+1}}{(1-z^2)^{1-\frac{\nu}{p+1}}} \Big(\int_0^z \frac{dv}{[1-v^2]^{\frac{p}{p+1}}} \Big)^{-m} g(z),$$

$$g(z) = 1 - m + \Big[(m+1) \frac{(1-z^2)^{\frac{p}{p+1}}}{z} + 2 \frac{1-\nu}{p+1} \frac{z}{(1-z^2)^{\frac{1}{p+1}}} \Big] \int_0^z \frac{dv}{[1-v^2]^{\frac{p}{p+1}}}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{z \to 0} g(z) = 2$, $\lim\limits_{z \to 1} g(z) = +\infty$ pour tout $m > 0$ et $g'(z) > 0 \ \ \forall\, z \in (0,1)$. Donc $g(z) > 0$ et par conséquent $\delta'(z) > 0$.

Les observations faites ci-dessus sont regroupées dans le diagramme

(δ, u_c) suivant:

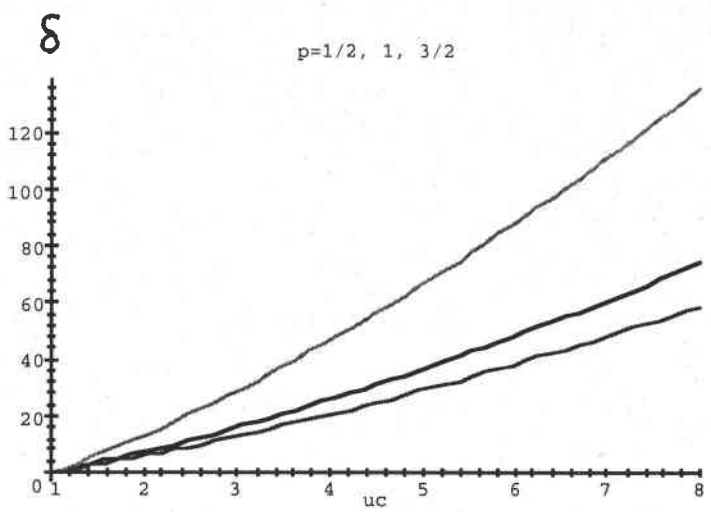

Fig.1.11: Profil de la courbe (δ, u_c)

Comme pour le cas de la fonction exponentielle, pour une valeur fixée du paramètre δ correspond une unique valeur de la température centrale, u_c (Fig 1.11). Alors la solution stationnaire correspondante $u(x)$ est déterminée à partir de (5.15), ce qui exprime x en fonction de u :

$$x = -\sqrt{\frac{(p+1)K^{m+1}}{2\delta}}\, u_c{}^{\frac{1-p}{2}} \int_1^{\frac{u(x)}{u_c}} \frac{dy}{[1-y^{p+1}]^{\frac{1}{2}}},$$

alors

$$x = x(u) = \sqrt{\frac{2K^{m+1}u_c{}^{1-p}}{(p+1)\delta}} \left[1-\left(\frac{u(x)}{u_c}\right)^{p+1}\right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{p+1}; \frac{3}{2}; 1-\left(\frac{u(x)}{u_c}\right)^{p+1}\right).$$

En utilisant la température maximum u_c comme un paramètre fixé et comme la fonction $x(u)$ définie par l'expression précédente est bijective, alors on en déduit qu'il existe une unique solution stationnaire $u(x)$.

Examinons brièvement le cas $m = 1$. On considère le problème général (QS) avec $f(s) = s^{-\nu}$ ou $e^{\beta s}$. Alors les solutions stationaires u vérifient

$$u_{xx} + \delta \frac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^2} = 0 \quad \forall\, x \in \Omega, \quad u = \tilde{u} \;\; x \in \partial\Omega. \qquad (QS)$$

La solution du problème (QS) peut s'écrire sous forme $u(x;\lambda)$ avec

$$u_{xx} + \lambda f(u) = 0 \quad -1 < x < 1, \quad u(\pm 1) = \tilde{u} \qquad (5.20)$$

où δ vérifie;

$$\delta = \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^2 \lambda.$$

En premier, intégrons (5.20) entre -1 et 1 et en utilisant le fait que $u_x(1) = -u_x(-1)$, on a

$$\delta = \frac{4}{\lambda} u_x(1)^2. \qquad (5.21)$$

Finalement, intégrons (5.20) $\times\, u_x$ entre 0, où $u_x(0) = 0$, et 1; on a

$$\delta = 8 \int_{\tilde{u}}^{M} f(s)ds, \qquad (5.22)$$

où $M(\lambda) = u(0;\lambda) = \max_{x\in\Omega} u(.;\lambda)$. Comme $\int_{\tilde{u}}^{\infty} f(s)ds = \infty$, la figure ci-dessous montre l'existence et l'unicité de la solution maximale M pour

tout $\delta > 0$.

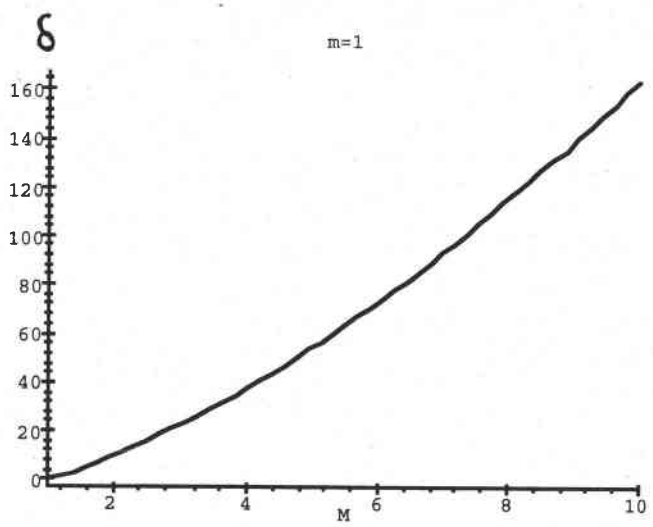

Fig.1.12: Solutions stationnaires pour $m = 1$.

Par conséquent il existe une unique solution stationaire $u(x)$ pour tout $\delta > 0$. De plus $u \longrightarrow \infty$, uniformement sur tout compact de Ω, quand $\delta \longrightarrow \infty$.

6 Solution non stationnaire en vitesse contrôlée.

6.1 Cas de la loi puissance.

Théorème 6.1 *Soit* $f(s) = s^p$, $p > 1$. *Pour toute condition initiale* $u_0(x) \geq 0$, *le problème* (Q) *admet une unique solution bornée sur* $\Omega \times [0, \infty)$ *pourvue que* $m > 0$.

Preuve. Supposons $\tilde{u} = 0$, en utilisant une idée de Bei Hu et de Hong-Ming Yin ([HY]), le cas dépendant du temps, admet une unique solution globale. En effet, soit $q \geq 1$ tel que;

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on a les estimations suivantes;

$$\int_\Omega u^{p+1} dx = \int_\Omega u^{p-1} u^2 dx \leq \Big(\int_\Omega u^{2q} dx \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_\Omega u^{(p-1)q^*} dx \Big)^{\frac{1}{q^*}} \qquad (6.1)$$

Si on choisit $q > p$, alors on a;

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q^*} > 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^*} \quad \Rightarrow q^* < p^*$$

$$\Longrightarrow \left\| u^{p-1} \right\|_{q^*}^{q^*} = \int_\Omega u^{(p-1)q^*} dx \qquad (6.2)$$

Ceci implique que

$$\int_\Omega u^{(p-1)q^*} dx \leq \Big(\int_\Omega u^{(p-1)p^*} dx \Big)^{\frac{q^*}{p^*}} \qquad (6.3)$$

$$\Longrightarrow \left\| u^{p-1} \right\|_{q^*} \leq \Big(\int_\Omega u^p dx \Big)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (6.4)$$

alors l'inégalité (6.1) est donnée par;

$$\int_\Omega u^{p+1}dx \leq \Big(\int_\Omega u^{2q}dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega u^p dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{6.5}$$

En multipliant l'équation aux dérivées partielles par u puis on intégre sur Ω on a:

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx\Big)_t + \int_\Omega u_x^2 dx \leq \delta\frac{\int_\Omega u^{p+1}dx}{\Big(\int_\Omega u^p dx\Big)^{m+1}} \tag{6.6}$$

Par l'inégalité (6.5) on a;

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx\Big)_t + \int_\Omega u_x^2 dx \leq \delta\frac{\Big(\int_\Omega u^{2q}dx\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int_\Omega u^p dx\Big)^{m+\frac{1}{p}}} \tag{6.7}$$

On choisit $p > 2$, alors par l'inégalité de Jensen on a;

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx\Big)_t + \int_\Omega u_x^2 dx \leq \delta\frac{\Big(\int_\Omega u^{2q}dx\Big)^{\frac{1}{q}}}{\Big(\int_\Omega u^2 dx\Big)^{\frac{pm+1}{2}}} \tag{6.8}$$

Maintenant, on donne une estimation du membre de droite de l'inégalité (6.8).

$$|u(x)|^{2q} = (|u(x)|^2)^q = \Big(2\int_0^x u(\xi)u_\xi(\xi)d\xi\Big)^q \tag{6.9}$$

$$\leq \Big(2\int_\Omega |u|\,|u_x|\,dx\Big)^q$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on a;

$$|u(x)|^{2q} \leq \Big[2\Big(\int_\Omega u^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega u_x^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^q \tag{6.10}$$

de l'inégalité (6.10) on a;

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx\Big)_t+\int_\Omega u_x^2dx\leq 2\delta\Big(\int_\Omega u_x^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega u^2dx\Big)^{-\frac{pm}{2}}. \tag{6.11}$$

En utilisant l'inégalité de Young suivante,

$$ab\leq \nu a^2+\frac{1}{4\nu}b^2$$

avec un choix convenable $\nu=\frac{1}{4}$ alors;

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx\Big)_t+\int_\Omega u_x^2dx\leq \int_\Omega u_x^2dx+\delta^2\Big(\int_\Omega u^2dx\Big)^{-pm},$$

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx\Big)_t\leq \delta^2\Big(\int_\Omega u^2dx\Big)^{\nu}. \tag{6.12}$$

Intégrer (6.12) entre 0 et t on a ;

$$\|u(.,t)\|_2\leq\Big[2\delta^2(1-\nu)t+\|u_0\|_2^{2(1-\nu)}\Big]^{\frac{1}{4(1-\nu)}} \tag{6.13}$$

Alors pour tout $0\leq t<T<+\infty$ et $u_0\in L^2(\Omega)$ on a une solution globale à partir de l'expression (6.13).

Pour étudier le comportement asymptotique de la solution, on introduit le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases}-\psi_{xx}=\lambda\psi, & x\in\Omega\\ \psi(0)=\psi(1)=0.\end{cases}$$

Sans perte de généralité, on suppose que $\int_\Omega\psi(x)dx=1$. Alors

$$\psi(x)=\frac{\pi}{2}\sin(\pi x), \quad \text{et } \lambda=\pi^2.$$

L'étude du comportement asymptotique de la solution du problème (Q) se réduit à résoudre une équation différentielle nonlinéaire ordinaire dans $\mathbb{R}$. Plus explicitement on a:
Soit u une solution du problème (Q) dans $\Omega\times[0,T)$. Multiplier l'équation aux dérivée partielle du problème (Q) par ψ et intégrer sur Ω on obtient

$$\Big(\int_\Omega u\psi dx\Big)_t = -\lambda\int_\Omega u\psi dx + \delta\frac{\int_\Omega f(u)\psi dx}{\Big(\int_\Omega f(u)dx\Big)^{m+1}},$$

comme $\psi(x)\leq\frac{\pi}{2}$, on a $\int_\Omega f(u)dx \geq \frac{2}{\pi}\int_\Omega f(u)\psi dx$. Puisque f est convexe et ψdx est une mesure de probabilité, alors par l'inégalité de Jensen on obtient la formulation suivante

$$\Big(\int_\Omega u\psi dx\Big)_t \leq -\lambda\int_\Omega u\psi dx + \frac{\delta^*}{\Big[f\Big(\int_\Omega u\psi dx\Big)\Big]^m}$$

où $\delta^* = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{m+1}\delta$. Il est clair que si on pose

$$Y(t) = \int_\Omega u(x,t)\psi(x)dx,$$

alors $Y(t)$ satisfie l'inéquation différentielle suivante

$$Y'(t) \leq -\lambda Y(t) + \delta^* Y^\nu(t).$$

S'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $Y(t_0) = Y_0 \not\equiv \Big(\frac{\delta^*}{\lambda}\Big)^{\frac{1}{1-\nu}}$, alors si on intégre l'inégalité précédente sur (t_0,t) on a

$$Y^{1-\nu}(t) \leq \frac{\delta^*}{\lambda} + \Big(Y_0^{1-\nu} - \frac{\delta^*}{\lambda}\Big)e^{-\lambda(1-\nu)t}.$$

Comme le coefficient d'adoucissement thermique $\nu < 0$ alors la solution est globale et y bornée.

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega u(x,t)\psi(x)dx \leq \left(\frac{\delta^*}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\nu}} < \infty.$$

6.2 Cas particulier de la loi puissance $(0 < p < 1)$.

Soit $0 < p < 1$ (i.e., $m + \nu > 0$). On considère l'équation (Q) à laquelle on associe une condition aux bords de Dirichlet ou de Neumann et une condition initiale appropriée,

$$(PN)\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta \dfrac{f(u)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}} & ,x \in \Omega, t > 0 \\ u_x = 0 & ,x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & ,x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

avec $f(u) = u^{-\frac{\nu}{m}}$ et $m + \nu > 0$. D'abord, supposons que l'équation (Q) ne présente pas de terme de diffusion, alors la solution $u(x,t) = u(t)$ vérifie

$$u(t)^{1-\nu} = \frac{(1-\nu)\delta}{2^{m+1}}t + u_0^{1-\nu},$$

donc, si $\nu > 1$ on a explosion en temps fini, sinon ($\nu < 1$) alors la solution existe pour tout $t > 0$ et on a $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$.

Soit $u = u(x,t)$ la solution du problème (PN) et supposons dans un premier ordre $\nu > 0$, dans ce cas f est une fonction décroissante. Soit $\eta(t) := \min_{x\in\Omega} u(.,t)$, alors η vérifie l'inéquation différentielle suivante

$$\frac{d\eta}{dt} \geq \delta \frac{f(\eta)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^{m+1}},$$

comme f est décroissante, on a $f(\eta) \geq f(u)$ d'où

$$\frac{d\eta}{dt} \geq \frac{\delta}{2^{m+1}} \frac{1}{\Big(f(\eta)\Big)^m},$$

d'où;

$$t \leq \frac{2^{m+1}}{\delta} \int_{\eta_0}^{\eta(t)} \Big(f(s)\Big)^m ds,$$

où $\eta_0 = \eta(0)$. Si $0 < \nu < 1$, alors $\eta(t)^{1-\nu} \geq \frac{(1-\nu)\delta}{2^{m+1}} t + \eta_0^{1-\nu}$, et la fonction η est définit pour tout $t \in [0, \infty)$ et $\lim\limits_{t \to \infty} u(x,t) = +\infty$. Si $\nu > 1$ alors dans ce cas on a explosion en temps fini,

$$t^* = \frac{2^{m+1}}{\delta} \int_{\eta_0}^{+\infty} \Big(f(s)\Big)^m ds < +\infty.$$

Supposons maintenant $\nu < 0$ et $m + \nu > 0$. Comme $p = -\frac{\nu}{m} < 1$ on a

$$\int_\Omega u^p dx < |\Omega|^{1-p} \Big(\int_\Omega u dx\Big)^p = 2^{1-p} \Big(\int_\Omega u dx\Big)^p.$$

D'où

$$\Big(\int_\Omega u dx\Big)_t = \frac{\delta}{\Big(\int_\Omega f(u) dx\Big)^m} > \frac{\delta}{2^{(1-p)m} \Big(\int_\Omega u dx\Big)^{pm}} = \frac{\delta}{2^{m+\nu}} \Big(\int_\Omega u dx\Big)^\nu.$$

Alors $\bar{u}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u(x,t) dx$ vérifie $\bar{u}_t > \frac{\delta}{2^{m+\nu}} \bar{u}^\nu$ et on a

$$\bar{u}(t) > \Big[\frac{(1-\nu)\delta}{2^{m+\nu}} t + \bar{u}_0^{1-\nu}\Big]^{\frac{1}{1-\nu}},$$

il suit que la solution est globale et explose en temps infini.

6.3 Cas de la loi exponentielle.

Théorème 6.2 *Soit* $f(s) = e^{\alpha s}$ *avec* $\alpha = \frac{\beta}{m} > 0$. *Alors pour toute condition initiale* $u_0(x) \geq 0$ *telle que* $\|(u_0)_x\|_2 < +\infty$ *et* $m > 0$, *le problème* (Q) *admet une unique solution bornée dans* $\Omega \times [0, \infty)$, *où* $\|(u_0)_x\|_2^{\,2} = \int_\Omega (u_0)_x^2 dx$.

Preuve. Soit $u(x,t)$ la solution du problème (Q) qui existe dans $\Omega \times [0,T)$.

$$(Q)\begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta \dfrac{e^{\alpha u}}{\left(\int_\Omega e^{\alpha u} dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega, t \in [0,T) \\ u(x,t) = \tilde{u} & x \in \partial\Omega, t \in [0,T) \\ u(0) = u_0 & x \in \Omega \end{cases}$$

On peut se ramener à une condition aux bords homogène ($u(x,t) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$) quitte à faire un chagement de variable $v = u - \tilde{u}$.
On multiplie l'équation aux dérivées partielles du problème (Q) par u_t puis on intégre sur Ω, sachant que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a

$$\int_\Omega u_t^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_x^2 dx - \frac{\delta}{\beta}\frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega e^{\alpha u} dx\Big)^{-m}.$$

Soit $E[u](t)$ la fonctionnelle de Lyapunov définie par:

$$E[u](t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_x^2 dx + \frac{\delta}{\beta}\Big(\int_\Omega e^{\alpha u} dx\Big)^{-m}.$$

Alors $\dfrac{d}{dt}E[u](t) = -\displaystyle\int_\Omega u_t^2 dx \leq 0$, la fonctionnelle $E[u](t)$ est décroissante le long de la trajectoire de temps et on a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_x^2 dx + \frac{\delta}{\beta}\Big(\int_\Omega e^{\alpha u} dx\Big)^{-m} \leq E[u_0] \equiv E_0.$$

on en déduit que

$$\int_\Omega u_x^2 dx \leq 2E_0.$$

D'autre part on a

$$E_0 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(u_0\Big)_x^2 dx + 2^{-m}\frac{\delta}{\beta},$$

d'après l'inégalité de Jensen. Alors on en déduit que

$$\int_\Omega u_x^2 dx \leq \int_\Omega \Big(u_0\Big)_x^2 dx + 2^{1-m}\frac{\delta}{\beta}.$$

$u(x,t) = -\int_x^1 u_\xi(\xi,t)d\xi$, puisque $u(1,t) = 0$. Alors

$$|u(x,t)| \leq \int_x^1 |u_\xi| d\xi \leq (1-x)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_x^1 u_x^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où

$$|u(x,t)| \leq (1-x)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega u_x^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq (1-x)^{\frac{1}{2}}\Big[\int_\Omega \Big(u_0\Big)_x^2 dx + 2^{1-m}\frac{\delta}{\beta}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

ainsi pour tout $t \in [0,+\infty)$

$$\|u(.,t)\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|u(x,t)| \leq \Big[2\|(u_0)_x\|_2^{\,2} + 2^{2-m}\frac{\delta}{\beta}\Big]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Par conséquent $u(x,t)$ existe globalement et y bornée.

7 Etude des solutions pour la loi d'Arrhénius.

7.1 Introduction.

On considère les problèmes paraboliques ci-dessous, déduit à partir du premier principe de la thermodynamique (2.4), appliqué pour un matériau obéissant à une loi de comportement de type Arrhénius (2.12). Après formulation du problème en contrainte contrôlée (respectivement en vitesse contrôlée) on obtient le problème (P) (respectivement le problème (P')):

$$(P)\begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta\phi(u) & x \in \Omega,\ \ t > 0 \\ u(x,t) = 1 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

$$(P')\begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta\dfrac{\phi(u)}{\left(\int_\Omega \phi(u)dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega,\ \ t > 0 \\ u(x,t) = 1 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

où u représente la tempérarture absolue, $\Omega = (-1,1)$. δ, m sont des constantes positives et ϕ est une fonction positive continue croissante qui est définie par

$$\phi(s) = \exp\left(-\frac{\alpha}{s}\right) \quad \text{pour tout} \quad s \in (0,\infty)$$

où α désigne une constante strictement positive. En premier temps, on va discuter l'existence de solutions stationnaires associées aux problèmes (P) et $(P)'$. On remarque qu'il est difficile d'obtenir des solutions stationnaires classiques, pour cela on cherche à démontrer l'existence de ces solutions au sens faible et par des théorèmes de régularités ([B]) on

montre que celles-ci sont classiques. Dans la seconde partie on étudie les problèmes d'évolution (P) et $(P)'$.

7.2 Existence de solutions stationnaires au sens faible.

Dans cette section on s'intéresse aux solutions du problème suivant:

$$\begin{cases} -u_{xx} = \delta e^{-\dfrac{\alpha}{u+1}} & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On désigne par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, avec $H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \exists g \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u v_x dx = -\int_\Omega g v dx \ \forall\, v \in C_c^1(\Omega) \right\}$.

Théorème 7.1 *Soit ϕ telle que $0 < \phi(u) \leq 1$ $\forall u \in \mathbb{R}$ Alors il existe u solution au sens faible de*

$$(P_f) \begin{cases} -u_{xx} = \delta e^{-\dfrac{\alpha}{u+1}} & \textit{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

En vue de démonter ce théorème, nous avons besoin du théorème du point fixe de Schauder:

Théorème (Schauder) *Soit K un convexe fermé d'un espace de Banach et T une application définie de K dans K. Si T est continue et compacte sur K, alors T admet un point fixe.*

Pour la démonstration de ce théorème on se référe à $[GT]$ ou $[H]$.

Preuve du théorème 7.1. Pour tout $v \in L^2(\Omega)$ positif, $\phi(v) \in L^\infty(\Omega)$ et d'après le théorème de Lax- Milgram, il existe u unique telle que

$$\begin{cases} -u_{xx} = \delta e^{-\dfrac{\alpha}{v+1}} \text{ dans } \Omega\,. \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On peut donc considérer l'application T qui à tout $v \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution u du problème. Montrer l'existence d'une solution au problème (P_f) revient donc à montrer que T admet un point fixe. Vérifions à cet effet, les conditions du théorème de Schauder:

1- Montrons qu'il existe $R > 0$ tel que $T\Big(B(0,R)\Big) \subset B(0,R) \subset H^1(\Omega)$.

Soit $v \in L^2(\Omega)$, $T(v) = u$.

$$\int_\Omega u_x w_x dx = \delta \int_\Omega e^{-\frac{\alpha}{v+1}} w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

On prend $w = u$, alors

$$\int_\Omega u_x^2 dx = \delta \int_\Omega e^{-\frac{\alpha}{v+1}} u dx$$

$$\leq \delta \int_\Omega |u| dx \leq \sqrt{2}\delta \Big(\int_\Omega u^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2\delta \Big(\int_\Omega u_x^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

par l'inégalité de Poincaré. Ainsi on a $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq R = 2\delta$, alors $u \in B(0,R) \subset H^1(\Omega)$. Donc $\forall\, v \in L^2(\Omega)$, $T(v) = u \in B(0,R) \subset H^1(\Omega)$;

$$T\Big(B(0,R)\Big) \subset B(0,R) \subset H^1(\Omega).$$

2- Montrons que l'application $T : B(0,R) \longrightarrow B(0,R)$ est compacte.

On sait que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection continue et compacte, on en déduit que $T\Big(B(0,R)\Big)$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$, donc T est compacte.

3- Montrons que T est continue.

Soit une suite $w_n \in L^2(\Omega)$ telle que $w_n \longrightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$. On pose $T(w_n) = u_n$ et $T(w) = u$, on montre que $T(w_n) \longrightarrow T(w)$.

$$\int_\Omega \Big(u_n\Big)_x v_x dx = \delta \int_\Omega e^{-\frac{\alpha}{w_n+1}} v dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

D'après le point (1) on a $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq R$, comme $H^1(\Omega)$est réflexif, on peut extraire une sous suite $\Big(u_{n_k}\Big)$ qui converge vers u^* dans $H^1(\Omega)$ faible. Comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, alors $u_{n_k} \longrightarrow u^*$ dans $L^2(\Omega)$ fort; il existe une sous suite extraite notée encore $\Big(u_{n_k}\Big)$ telle que $u_{n_k} \longrightarrow u^*$ p.p. D'autre part $w_n \longrightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$, il existe une sous suite extraite $\Big(w_{n_k}\Big)$ telle que $w_{n_k} \longrightarrow w$ p.p dans Ω. D'après le théorème de la convergence dominée on a:

$$e^{-\frac{\alpha}{w_n+1}} v \longrightarrow e^{-\frac{\alpha}{w+1}} v \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Par ailleurs $(u_{n_k})_x \longrightarrow u_x^*$ dans $L^2(\Omega)$;

$$\int_\Omega (u_{n_k})_x v_x dx \longrightarrow \int_\Omega u_x^* v_x dx.$$

Donc u^* vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} u^* \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega u_x^* v_x dx = \delta \int_\Omega e^{-\frac{\alpha}{w+1}} v dx \end{cases}$$

par unicité de la solution on en déduit que $u^* = u$.

$$\begin{cases} u_{n_k} \longrightarrow u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \\ u_{n_k} \longrightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \end{cases}$$

de plus par unicité de la valeur d'adhérence de (u_n) on a

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \\ u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \end{cases}$$

T vérifie les conditions du théorème du point fixe de Schauder, le problème (P_f) admet une solution au sens faible.

Théorème 7.2 *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.1 sont vérifiées et que ϕ est lipschitzienne. Alors la solution du problème (P_f) est unique si $\delta < \dfrac{\alpha\, e^2}{8}$.*

Preuve. C'est une démonstration par l'absurde, pour cela Supposons que u et v sont deux solutions de (P_f), alors $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u_x w_x dx = \delta \int_\Omega \phi(u) w dx,$$

$$\int_\Omega v_x w_x dx = \delta \int_\Omega \phi(v) w dx,$$

où $\phi(s) = e^{-\dfrac{\alpha}{s+1}}$. En faisant la différence de ces deux équations et prenons $w = u - v$ on aura:

$$\int_\Omega (u-v)_x^2 dx = \delta \int_\Omega \Big(\phi(u) - \phi(v)\Big)(u-v) dx,$$

en utilisant le théorème des accroissements fini, il existe $\xi \in (u, v)$ tel que $\phi(u) - \phi(v) = \phi'(\xi)(u - v)$,

$$\int_\Omega (u-v)_x^2 dx = \delta \int_\Omega \phi'(\xi)(u-v)^2 dx,$$

avec $\phi'(\xi) \leq \sup_{\xi} |\phi'| = \phi'(\frac{\alpha}{2} - 1) = \frac{4}{\alpha e^2}$. D'où

$$\int_\Omega (u-v)_x^2 dx \leq \frac{4\delta}{\alpha e^2} \int_\Omega (u-v)^2 dx.$$

Alors de l'inégalité de Poincaré on en déduit

$$\int_\Omega (u-v)_x^2 dx \leq \frac{4\delta}{\alpha e^2} \int_\Omega (u-v)^2 dx \leq \frac{8\delta}{\alpha e^2} \int_\Omega (u-v)_x^2 dx,$$

à partir de notre hypothèse on a $(u-v)_x = 0$ p.p dans Ω et comme $u, v \in H_0^1(\Omega)$ on a $u = v$ p.p, de plus comme $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ alors $u = v$ partout.

Remarque 7.1 Retour aux solutions classiques de (P_f). On montre qu'une solution faible de classe C^2 sur Ω est une solution classique.
En effet, supposons que $u \in C^2\Big([-1,1]\Big)$, $u(-1) = u(1) = 0$ et vérifie

$$\int_\Omega u_x w_x dx = \delta \int_\Omega e^{-\frac{\alpha}{u+1}} w dx, \quad \forall\, w \in C_c^1\Big(]-1,1[\Big).$$

En intégrant l'expression précédente par partie on obtient

$$\int_\Omega \Big(u_{xx} + \delta e^{-\frac{\alpha}{u+1}}\Big) w dx = 0, \quad \forall\, w \in C_c^1\Big(]-1,1[\Big)$$

comme $C_c^1\Big(]-1,1[\Big)$ est dense dans $L^2(-1,1)$ alors on a

$$u_{xx} + \delta e^{-\frac{\alpha}{u+1}} = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

enfin partout puisque $u \in C^2$.

Remarque 7.2 Si u est solution stationnaire du problème (P), alors u est solution stationnaire du problème nonlocal (P'), et inversement.

En effet, soit w la solution stationnaire du problème semi-linéaire (P), alors w satisfie l'équation différentielle suivante:

$$-w_{xx} = \delta_1 \phi(w) = \delta_1 \Big(\int_\Omega \phi(w) dx \Big)^{m+1} \frac{\phi(w)}{\Big(\int_\Omega \phi(w) dx \Big)^{m+1}}$$

Avec $\delta = \delta_1 \Big(\int_\Omega \phi(w) dx \Big)^{m+1}$, il est clair que w est solution stationnaire du problème nonlocal (P'). L'inverse est evident.

Remarque 7.3 On sait qu'il n'existe pas de solutions stationnaires pour le problème semi-linéaire parabolique (P) si on impose des conditions de Neumann homogènes aux bords, $u_x = 0$ pour $x \in \partial\Omega$. Alors pour les mêmes types de conditions aux bords, Le problème parabolique nonlocal (P') n'admet pas de solutions stationnaires. Ainsi toute solution du problème (P) et (P') est non bornée, soit elle existe pour tout $t \geq 0$ et $u(x,t) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \infty$ ou bien elle explose en un temps fini.

7.3 Cas des solutions non stationnaires.

Considérons d'abord le problème (P)

$$(P) \begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta\phi(u) & x \in \Omega, \ t > 0 \\ u(x,t) = 1 & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

On peut ramener le problème (P) à un problème équivalent avec conditions aux bords homogènes, soit

$$(P1) \begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta e^{-\frac{\alpha}{u+1}} & x \in \Omega, \ t > 0 \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) - 1 = u_0'(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Théorème 7.3 *Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors le problème (P) admet une unique solution bornée dans $\Omega \times [0,\infty)$, $\forall\ \delta > 0$.*

Preuve. On multiplie l'équation aux dérivées partielles de $(P1)$ par u puis on intègre sur Ω:

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx\Big)_t + \int_\Omega u_x^2 dx = \delta \int_\Omega e^{-\frac{\alpha}{u+1}} u dx.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré,

$$\int_\Omega u^2 dx \leq 2\int_\Omega u_x^2 dx,$$

alors, on a

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx\Big)_t + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx \leq \delta \int_\Omega e^{-\frac{\alpha}{u+1}} |u| dx \leq \delta \int_\Omega |u| dx \leq \delta\sqrt{2}\Big(\int_\Omega u^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

par l'inégalité de Cauchy- Schwarz. Alors on a

$$\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx\Big)_t + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx \leq \sqrt{2}\delta\Big(\int_\Omega u^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

De l'inégalité de Young, $a\ b \leq \nu a^2 + \frac{1}{4\nu} b^2$, on en déduit pour un choix, $\nu = \frac{1}{4}$,

$$\Big(\int_\Omega u^2 dx\Big)_t + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx \leq 4\delta^2.$$

En utilisant le lemme de Gronwall on obtient l'estimation suivante

$$\int_\Omega u^2(x,t) dx \leq e^{-\frac{1}{2}t}\int_\Omega u_0'^2(x) dx + 8\delta^2\Big(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\Big).$$

Par conséquent, toute solution du problème (P) est globale et y bornée, de plus

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_2 \leq 2\sqrt{2}\delta < \infty.$$

Le problème nonlocal (P') est équivalent au problème suivant

$$(P2)\begin{cases} u_t = u_{xx} + \delta \dfrac{\phi(u)}{\left(\int_\Omega \phi(u)dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) - 1 = u_0'(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

avec $\phi(u) = e^{-\dfrac{\alpha}{u+1}}$.

Théorème 7.4 *Soit $u_0'(x) \geq 0$, alors le problème nonlocal (P') admet une unique solution bornée dans $\Omega \times [0,\infty)$, pour tout $m > 0$ et $\delta > 0$.*

Preuve. Soit $u(x,t)$ la solution du problème $(P2)$ qui existe sur $\Omega \times [0,T)$. Alors $u(x,t)$ satisfie l'équation suivante

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in \Omega, \quad t \in [0,T)$$

où $\int_\Omega f(x,t)dx = \dfrac{\delta}{K^m}$ et $K = \int_\Omega \phi(u)dx$. Alors la solution $u(x,t)$ peut s'exprimer par la formulation intégrale suivante

$$u(x,t) = \int_\Omega E(x-y,t)u_0'(y)dy + \int_0^t \int_\Omega E(x-y,s)f(y,s)dyds,$$

où $E(x-y,s) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi s}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4s}}$. On pose $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, avec $u_1(x,t) = \int_\Omega E(x-y,t)u_0'(y)dy$ et $u_2(x,t) = \int_0^t \int_\Omega E(x-y,s)f(y,s)dyds$. Alors on en déduit que

$$\|u_1(.,t)\|_\infty \leq \|u_0'\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + 1.$$

Ainsi, $u_2(x,t) \leq \frac{\delta}{K^m} \int_0^t \sup_y E(x-y,s)ds$. Puisque $\sup_y E(x-y,s)$ est intégrable sur $[0,\infty)$ pour tout $x \in \Omega$, on obtient

$$\|u(.,t)\|_\infty \leq \|u_0'\|_\infty + \frac{\delta}{K^m} \sup_x \int_0^\infty \sup_y E(x-y,s)ds$$

Chapitre 2

Bandes de cisaillement stationnaires

1 Introduction.

On rencontre ces bandes de cisaillement "adiabatiques" dans le cas où on a une faible croissance de la contrainte de cisaillement τ, aucun changement de la déformation plastique γ et lorsque le coefficient de conduction themique varie (situation adiabatique). Pour un temps caractéristique (longueur de l'expérience) on distingue deux zones: une zone locale où les effets de conductions thermiques sont importants pendant un certain interval de temps. une zone extérieure non affectée par la diffusion de la chaleur pendant le temps caractéristique. On pourra supposer l'adiabaticité notamment aux limites.

2 Stationnarité.

On suppose que la longueur de la bande de cisaillement tend à devenir stationnaire au cours du temps caractéristique (Chapitre 1, figure1.2 stade 2). Dans ce cas la vitesse de déformation plastique $\dot{\gamma}$ peut être supposée indépendante du temps:

$$\dot{\gamma}(x,t) = \dot{\gamma}(x).$$

3 Formulation du problème.

On néglige les effets d'inerties, cependant l'accélération est nulle dans la zone de localisation donc $\tilde{\tau}_x = 0 \Longrightarrow \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(t)$. La loi de comportement du matériau, si on néglige le durcissement est donnée par une loi linéaire en température qui est définie par:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 \Big(1 - a\frac{\tilde{\Theta}}{\tilde{\Theta}_0}\Big)\Big(\frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{\dot{\tilde{\gamma}}_0}\Big)^m \tag{2.1}$$

où a est le coefficient d'adoucissement thermique ($0 < a \ll 1$) et m est la sensibilité à la vitesse de déformation. La contrainte n'est définie que pour $1 - a\dfrac{\tilde{\Theta}}{\tilde{\Theta}_0} > 0$, ce qui conduit à une limite sur le domaine de variation en température,

$$\tilde{\Theta} < \frac{\tilde{\Theta}_0}{a}.$$

$\tilde{\tau}_0, \tilde{\Theta}_0, \dot{\tilde{\gamma}}_0$ représente respectivement une contrainte de référence, une température de référence et une vitesse de déformation de référence.

On considère l'équation de conservation d'énergie déduite du premier principe de la thermodynamique:

$$\rho c\tilde{\Theta}_{\tilde{t}} = k\tilde{\Theta}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \beta\tilde{\tau}\dot{\tilde{\gamma}} \qquad x \in (-d,d), \quad t > 0 \tag{2.2}$$

On procéde alors à une analyse dimensionnelle du problème en introduisant les nouvelles variables suivantes:

$$t = \frac{\tilde{t}}{t_c}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{d}, \quad \Theta = \frac{\tilde{\Theta}}{\tilde{\Theta}_0}, \quad \tau = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}_R} \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = \tilde{\dot{\gamma}}\, t_c.$$

Le temps a pour facteur d'adimensionnalisation le temps caractéristique de conduction thermique

$$t_c = \frac{\rho c d^2}{k},$$

t_c est temps pour lequel les effets de conductions sont significatifs sur toute l'épaisseur de la bande. La contrainte est normalisée par la constante de référence $\tilde{\tau}_R$:

$$\tilde{\tau}_R = \tilde{\tau}_0 \left(\tilde{\dot{\gamma}}_0\, t_c\right)^m.$$

Le système d'équations gouvernant le processus de localisation de la déformation plastique s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante

$$\begin{cases} \tau_x = 0, \\ \Theta_t = \Theta_{xx} + \delta\tau\dot{\gamma}, \end{cases} \tag{2.3}$$

où l'on a introduit la constante adimensionnelle δ qui est définie par

$$\delta = \frac{\beta\tilde{\tau}_R}{\rho c\tilde{\Theta}_0}.$$

La forme adimensionnalisée de la loi de comportement (2.1) s'écrit

$$\tau = \left(1 - a\Theta\right)\dot{\gamma}^m \tag{2.4}$$

D'où

$$\Theta = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\tau}{\dot{\gamma}^m}\right). \tag{2.5}$$

4 Analyse et comportement asymptotique de la solution.

On introduit une nouvelle variable $u(x) = \dfrac{\dot{\gamma}^m(0)}{\dot{\gamma}^m(x)}$, où $\dot{\gamma}(0)$ est la vitesse de déformation au centre de la bande de cisaillement, qui est inconnue, à déterminé plus loin et on a la condition $u(0) = 1$. Donc l'expression (2.5) devient;

$$\Theta = \frac{1}{a}\Big(1 - \frac{\tau u}{\dot{\gamma}^m(0)}\Big). \tag{2.6}$$

On dérive (2.6) une fois par rapport à t et deux fois par rapport à x , alors on a;

$$\begin{cases} \Theta_t = -\dfrac{u}{a\dot{\gamma}^m(0)}\tau_t, \quad (u_t = 0) \\ \Theta_{xx} = -\dfrac{\tau}{a\dot{\gamma}^m(0)}u_{xx} \end{cases} \tag{2.7}$$

En substituant les expressions (2.7) dans l'équation d'énergie adimensionnelle (2.3) on obtient une équation à variables séparées:

$$-\frac{\tau_t}{\tau} = -\frac{u_{xx}}{u} + a\delta\dot{\gamma}^{m+1}(0)\, u^{-\frac{1}{m}-1}. \tag{2.8}$$

Donc les deux membre de l'égalité (2.8) sont égaux à une constante ξ que l'on déterminera plus loin.

$$-\frac{\tau_t}{\tau} = \xi \implies \tau(t) = \tau_0 e^{-\xi t}. \tag{2.9}$$

Pour le deuxième membre de (2.8) on a;

$$-u_{xx} + a\delta\dot{\gamma}^{m+1}(0)u^{-\frac{1}{m}} = \xi u. \tag{2.10}$$

Introduisons deux nouvelles variables u_1 et u_2 (variables de phase) telles que:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = u_x \end{cases}$$

Donc l'équation (2.10) prend la forme suivante:

$$(u_2)_x = -\xi u_1 + \alpha u_1^{-\frac{1}{m}}, \tag{2.11}$$

où $\alpha = a\delta\dot{\gamma}^{m+1}(0)$. D'où le système suivant;

$$\begin{cases} (u_1)_x = u_2 \\ (u_2)_x = -\xi\ u_1 + \alpha u_1^{-\frac{1}{m}} \end{cases}$$

Alors on a;

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{du_2}{du_1}\frac{du_1}{dx} = u_2\frac{du_2}{du_1} = -\xi\ u_1 + \alpha u_1^{-\frac{1}{m}}, \tag{2.12}$$

puis par intégration de (2.12) on obtient;

$$\frac{1}{2}u_2^2 = -\frac{1}{2}\xi u_1^2 + \frac{\alpha m}{m-1}u_1^{-\frac{1}{m}+1} + c^{te} \tag{2.13}$$

On sait que pour $x = 0$, on a $u_1 = u = 1$ et $u_2 = 0$ par symétrie du profil de $\dot{\gamma}(x)$.

$$\Longrightarrow c^{te} = \frac{1}{2}\xi - \frac{\alpha m}{m-1}.$$

D'où (2.13) s'écrit:

$$u_2^2 + \xi u_1^2 = \xi + \frac{2\alpha m}{1-m}(1 - u_1^{-\frac{1}{m}+1}) \tag{2.14}$$

On suppose pour $x > 0$ on a $u_1 = \frac{\dot{\gamma}^m(0)}{\dot{\gamma}^m(x)} > 1$, $\Longrightarrow u_1^{-\frac{1}{m}+1} \simeq u_1^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{u_1^{\frac{1}{m}}} \ll 1$, si $0 < m < 1$. Alors on obtient une équation approchée, dont la trajectoire associée dans le plan de phase $(\sqrt{\xi}u_1, u_2)$ est un arc de cercle centré en 0 et de rayon $R = \sqrt{\xi + \lambda}$.

$$u_2^2 + \xi u_1^2 = \xi + \lambda, \tag{2.15}$$

où $\lambda = \dfrac{2\alpha m}{1-m}$. On peut définir (2.15) par la représentation paramétrique suivante:

$$\begin{cases} \sqrt{\xi}\, u_1 = \sqrt{\xi+\lambda}\cos\phi \\ u_2 \quad\quad = \sqrt{\xi+\lambda}\sin\phi \end{cases}$$

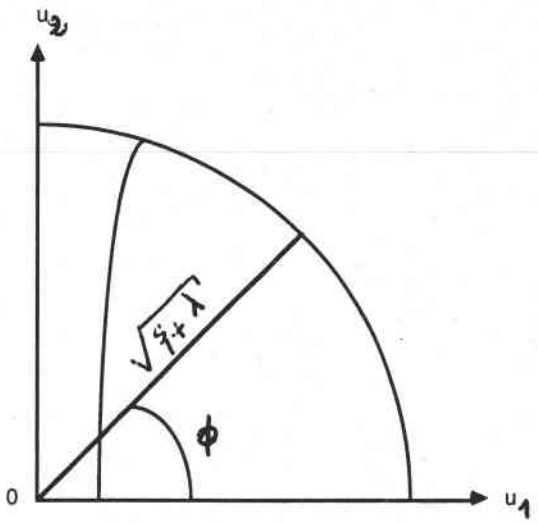

Fig.2.1: Trajectoires de phase.

Alors;

$$\sqrt{\xi}(u_1)_x = \sqrt{\xi+\lambda}(-\sin\phi\cdot\phi_x) = \sqrt{\xi}u_2$$

$$= \sqrt{\xi}\sqrt{\xi+\lambda}\sin\phi$$

$\Longrightarrow \quad \phi_x = -\sqrt{\xi} \quad \Longrightarrow \quad \phi = -\sqrt{\xi}x + c^{te}$. Pour $x = 1$ on a $u_2(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin\phi = 0$, d'où $c^{te} = \sqrt{\xi}$, donc $\phi(x) = \sqrt{\xi}(1-x)$, alors;

$$u(x) = u_1(x) = \sqrt{1+\frac{\lambda}{\xi}}\cos\sqrt{\xi}(1-x) \tag{2.16}$$

On procéde maintenant à la détermination de la constante d'intégration ξ.

Notons que la solution exacte passe par le point $(u_1 = 1, u_2 = 0)$ pour $x = 0$. On suppose que ξ est suffisamment faible pour que la solution

u_2, obtenue pour $x = 0$, soit proche de $\sqrt{\xi + \lambda}$. La valeur prise par la solution en $x = 0$ vérifie:

$$\frac{du_1}{dx} = u_2 = \sqrt{\xi + \lambda} \sin \sqrt{\xi}.$$

On a u_2 est donc très proche de $\sqrt{\xi + \lambda}$ au voisinage de $x = 0$ si $\xi = \frac{\pi^2}{4}$. D'où;

$$u(x) = \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\pi^2}} \cos \frac{\pi}{2}(1 - x). \tag{2.17}$$

Il reste à déterminer la vitesse de déformation $\dot{\gamma}(0)$ au centre de la bande de cisaillement, pour cela on exprime la condition à la limite en vitesse, $v = V$ pour $x = 1$, sous la forme de l'équation intégrale suivante

$$\int_0^1 \dot{\gamma}(x)dx = V,$$

d'où;

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{V}{\int_0^1 u^{-\frac{1}{m}} dx}.$$

Ainsi on obtient une solution approchée pour l'équation (2.5) qui est donnée par:

$$\Theta(t, x) = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{\tau_0 e^{-\frac{\pi^2}{4}t}}{\dot{\gamma}^m(0)} \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\pi^2}} \cos \frac{\pi}{2}(1 - x)\right] \tag{2.18}$$

Alors pour le comportement asymptotique on a;

$$\lim_{t \to \infty} \Theta(t, x) = \frac{1}{a} \tag{2.19}$$

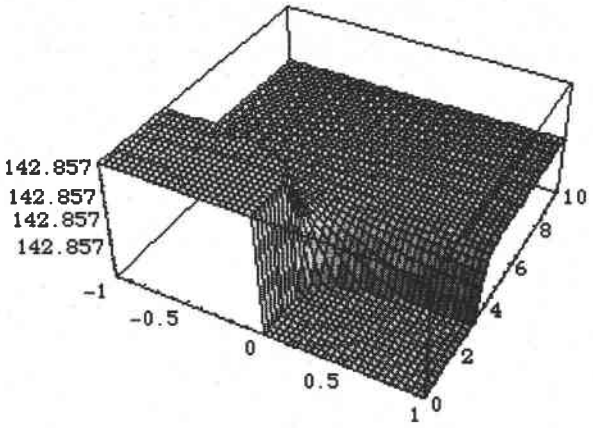

Fig.2.2: Profil de la température.

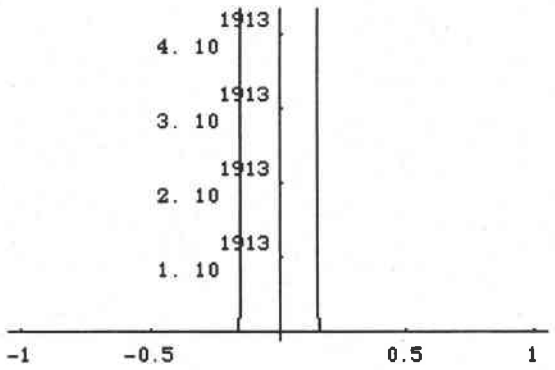

Fig.2.3: Profil de la vitesse de déformation.

Chapitre 3

BCA non stationnaires

1 Introduction.

On suppose dans la suite que la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$ dépend en plus de la variable t. Dans ce cas à partir du premier principe de la thermodynamique ((2.2), Chapitre 2) on obtient une équation aux dérivées partielles semi-linéaire parabolique en température, où toutes les variables sont sous formes adimensionnelles:

$$\Theta_t - \Theta_{xx} = \delta(1 - a\Theta)^{-\frac{1}{m}} \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

où $\Omega = [-1, 1]$ et δ, a, m sont des constantes positives. Θ représente la température absolue dont le domaine de validité est restreint à: $0 \leq \Theta < \frac{1}{a}$. Si $\Theta(x,t)$ existe pour tout $t > 0$, alors on dit qu'on a une solution globale. Sinon, s'il existe un temps, $t^* < +\infty$ tel que $\max\{\ \Theta(t,x) : x \in \Omega\} \to \frac{1}{a}$ quand $t \to t^*$, dans ce cas on dit qu'on a une extinction de la température en temps fini ([Ka]).

Le phénomène d'explosion en temps fini, montre que la solution est infinie quand t approche le temps d'explosion t^*, qui est fini. Le phénomène d'extinction est relatif et proche de celui d'explosion, seulement la solu-

tion reste bornée, mais ses dérivées explosent. Naturellement la raison de ce comportement de la solution est dû en effet, à la singularité du terme non linéaire dans l'équation (3.1).

On associe à l'équation (3.1) des conditions aux bords thermiques de type Dirichlet: $\Theta = 1$ pour $x \in \partial\Omega$ et une condition initiale appropriée $\Theta(x,0) = \Theta_0(x)$ telle que $0 \leq \Theta_0(x) < \frac{1}{a}$. On étudie l'existence et l'unicité de solution stationnaire de l'équation (3.1). Une question se pose, peut-on atteindre la constante de singularité en temps fini ? Alors pour examiner ce comportement on va transformer ce problème en un problème d'explosion ([*AK*]).

1.2 Formulation du problème.

On considère (Fig.1.3, Chapitre 1) le cisaillement simple d'un matériau thermoviscoplastique d'épaisseur constante $2d$ suivant l'axe $0\bar{x}$ et d'extention infinie suivant l'axe $0\bar{y}$. Cette couche occupe la région entre les plans $\bar{x} = -d$ et $\bar{x} = d$ dans le domaine $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ et le cisaillement est effectué suivant la direction $0\bar{y}$, uniformement en $\bar{y}$ et $\bar{z}$ de façons que tous les champs gouvernant notre système ne dépendent que de $\bar{x}$ et $\bar{t}$ seulement. On suppose que les effets d'inerties sont négligeables, cependant l'accélération est nulle dans la zone de localisation de la déformation plastique, donc à partir de l'équation de la quantité de mouvement on a

$$\tilde{\tau}_{\tilde{x}} = \rho\tilde{v}_{\tilde{t}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\tau}(\tilde{x},\tilde{t}) = \tilde{\tau}(\tilde{t}).$$

On considère le cas d'un matériau sans écrouissage dans la loi de comportement est décrite par une fonction linéaire en température, définie par l'expression ((2.1), Chapitre 2).

1.3 Analyse dimensionnelle.

On procéde à une analyse dimensionnelle des variables dépendantes et indépendantes: soient les changements de variables suivant; $\Theta = \dfrac{\tilde{\Theta}}{\Theta_0}$, $\tau = \dfrac{\tilde{\tau}}{\tau_0}$, $\dot{\gamma} = \tilde{\dot{\gamma}} t_c$, $x = \dfrac{\tilde{x}}{d}$ et $t = \dfrac{\tilde{t}}{d}$.
En remplaçons toutes ces nouvelles variables dans l'équation (2.2) du Chapitre 2, on obtient l'équation semi-linéaire parabolique suivante:

$$\Theta_t - \Theta_{xx} = \delta(1 - a\Theta)^{-\frac{1}{m}} \qquad (P)$$

où $\delta = \dfrac{\tau_0^{2+\frac{1}{m}}}{\rho c \Theta_0}$, si on impose un contrôle en contrainte $\tau(t) = \tau_0$.
Dans un premier temps on va étudier l'existence de solutions stationnaires classiques. Soit la fonction ϕ définie par

$$\phi(\Theta) = (1 - a\Theta)^{-\frac{1}{m}} \qquad \text{pour } \Theta \in [0, \frac{1}{a})$$

Soit $f(x)$ $(< \frac{1}{a})$ une solution stationnaire de l'équation (P) qui est $C^2(\Omega)$. Alors f vérifie

$$0 = f''(x) + \delta\phi\Big(f(x)\Big) \qquad -1 < x < 1 \qquad (S)$$

On remarque que l'équation (S) n'admet pas de solutions si on impose des conditions de types Neumann homogènes, $u_x = 0$ sur $\partial\Omega$.
On associe à l'équation (S) des conditions de types Dirichlet $f(\pm 1) = 1$. Alors, comme $\phi > 0$, on a $f'' < 0$, $f > 0$ sur Ω et f admet un unique maximum en $\bar{x} \in (-1, 1)$. Soit $\Psi'(\Theta) = \phi(\Theta)$. Alors f est solution de

$$\frac{1}{2}\Big[f'(x)\Big]^2 + \delta\Psi\Big(f(x)\Big) = \delta\Psi(f_0)$$

où $f_0 = f(\bar{x})$. On remarque aussi que $g(x) = f(-x)$ est solution de l'équation (S) et de

$$\frac{1}{2}\Big[f'(-x)\Big]^2 + \delta\Psi\Big(f(-x)\Big) = \delta\Psi(f_0)$$

Alors on a

$$\bar{x} + 1 = 1 - \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \int_1^{f_0} \Big[\Psi(f_0) - \Psi(\eta)\Big]^{-\frac{1}{2}} d\eta = 0,$$

de plus, on a $f(x) \equiv f(-x)$,(cf $[GNN]$), par conséquent, il existe exactement une seule solution pour (S) vérifiant $f(0) = f_0$. Ainsi, pour $0 \leq x \leq 1$, $f(x)$ est donnée par

$$\sqrt{2\delta}x = \int_1^{f(x)} \Big[\Psi(f_0) - \Psi(\eta)\Big]^{-\frac{1}{2}} d\eta$$

et $f(x) = f(-x)$ si $-1 < x < 0$.

2 Solutions stationnaires.

Dans cette section, on présente des résultat d'existence et d'unicité de solutions stationnaires. On commence par étudier l'existence de solutions stationnaires classiques. certains résultat sont probablement connus. ($[JL]$ ont étudié le problème pour une dimension $n > 1$). Soit

$$\phi(\Theta) = (1 - a\Theta)^{-\frac{1}{m}}, \qquad 0 \leq \Theta < \frac{1}{a}.$$

Soit $f(x)$ $(< \frac{1}{a})$ la solution stationnaire de (S), qui est C^2 on $(-1, 1)$. Alors f vérifie

$$\begin{cases} f''(x) + \delta\phi(f(x)) = 0, & -1 < x < 1 \\ f(\pm 1) = 1. \end{cases}$$

On multiplie l'équation différentielle par $f'(x)$ puis on intégre sur $(0,x)$ on obtient l'expression suivante:

$$\frac{1}{2}f'(x)^2+\frac{\delta m}{a(1-m)}(1-af(x))^{-\frac{1}{m}+1}=\frac{\delta m}{a(1-m)}(1-af_0)^{-\frac{1}{m}+1} \quad (3.0)$$

Théorème 3.1 *(i) Si* $0<m<1$, *il existe une constante* $\delta(m)$ *telle que* (S) *admet deux solutions stationnires pour* $0<\delta<\delta(m)$, *une solution si* $\delta=\delta(m)$ *et pas de solution pour* $\delta>\delta(m)$.
(ii) Si $m>1$, *il existe deux constantes* $\delta^*(m)$ *et* $\delta(m)$ *avec* $0<\delta^*(m)<\delta(m)$ *telles que* (S) *admet exactement une solution si* $0<\delta<\delta^*(m)$ *ou* $\delta=\delta(m)$, *deux solutions si* $\delta^*(m)<\delta<\delta(m)$ *pas de solutions si* $\delta>\delta(m)$.
(iii) Si $m=1$, *il existe une constante* δ_0 *telle que* (S) *admet deux solutions stationnires si* $\delta=\delta_0$ *et pas de solutions si* $\delta>\delta_0$.

Preuve. Pour démontrer ce théorème, on distinguera trois cas: $0<m<1$, $m>1$ et $m=1$.

(i) **cas** $0<m<1$:

De l'équation (3.0) on a,

$$\Big[\big(f(x)\big)^2\Big]'=\frac{2\delta m}{a(1-m)}\Big[(1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}-(1-af(x))^{\frac{m-1}{m}}\Big] \quad (3.1)$$

où $f_0=f(0)$ dénote la température au centre de la bande de cisaillement. Comme $f'(x)<0$ sur $(0,1)$, à partir de l'expression (3.1) on a

$$-f'(x)=\sqrt{\frac{2\delta m}{a(1-m)}}\Big[(1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}-(1-af(x))^{\frac{m-1}{m}}\Big]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante;

$$\sqrt{\frac{2\delta m}{a(1-m)}}\,x=-\int_0^x\frac{df}{\Big[(1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}-(1-af)^{\frac{m-1}{m}}\Big]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.3)$$

L'intégrale du membre de droit de l'expression (3.3) peut être calculé en posant $g = \dfrac{1-af}{1-af_0}$: alors si $I = -\displaystyle\int_0^x \frac{df}{\left[(1-af_0)^{\frac{m-1}{m}} - (1-af)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}}$, on a

$$I = (1-af_0)^{\frac{m+1}{2m}} \int_1^{\frac{1-af(x)}{1-af_0}} \frac{dg}{\left(1-g^{\frac{m-1}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.4}$$

Soit $u = \left(1-g^{\frac{m-1}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}$, alors (3.4) devient

$$I = \frac{2m}{(1-m)a}(1-af_0)^{\frac{m+1}{2m}} \int_0^{\left(1-(\frac{1-af(x)}{1-af_0})^{\frac{m-1}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{du}{\left(1-u^2\right)^{\frac{1}{1-m}}}. \tag{3.5}$$

En particulier pour $x = 1$, $f(1) = 1$ et à partir des expressions (3.3) et (3.5) on a

$$\delta = \delta(\tilde{u}) = \frac{2m(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}{(1-m)a}(1-\tilde{u}^2)^{\frac{m+1}{1-m}}\left(\int_0^{\tilde{u}} \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{1-m}}}\right)^2, \tag{3.6}$$

où $\tilde{u} := \sqrt{1-\left(\frac{1-a}{1-af_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}}$ et si $f_0 \in [1, \frac{1}{a})$, on a $\tilde{u} \in [0,1)$. On remarque que la fonction $\delta = \delta(\tilde{u})$ définie par (3.6) vérifie $\delta(0) = 0$, $\lim\limits_{\tilde{u}\to 1} \delta(\tilde{u}) = 0$ et $\delta(\tilde{u}) > 0$ pour $\tilde{u} \in (0,1)$. Les dérivées montrent qu'il existe un unique maximum pour lequel la fonction δ prend la valeur $\delta(m)$. En effet,

$$\delta'(\tilde{u}) = 2C(1-\tilde{u}^2)^{\frac{2m}{1-m}} g(\tilde{u}) \int_0^{\tilde{u}} \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{1-m}}}$$

où $g(\tilde{u}) = (1-\tilde{u}^2)^{-\frac{m}{1-m}} - \frac{m+1}{1-m}\tilde{u}\int_0^{\tilde{u}} \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{1-m}}}$ et $C = \dfrac{2m(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}{(1-m)a}$.
Pour déterminer quelles valeurs de $\tilde{u}$ (autres que 0 et 1) qui annulent la dérivée, on étudie le sens de variation de la fonction g:

on a $g(0) = 1, \lim_{\tilde{u}\to 1} g(\tilde{u}) = -\infty$ et

$$g'(\tilde{u}) = -\tilde{u}(1-\tilde{u}^2)^{\frac{-1}{1-m}} - \frac{m+1}{1-m}\int_0^{\tilde{u}} \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{1-m}}} < 0,$$

donc il existe un unique $\tilde{u}_0 \in (0,1)$ tel que $g(\tilde{u}_0) = 0$. On en déduit que $\delta'(\tilde{u}) \geq 0$ si $\tilde{u} \in [0, \tilde{u}_0]$ et $\delta'(\tilde{u}) \leq 0$ si $\tilde{u} \in [\tilde{u}_0, 1)$, par conséquent le point $(\tilde{u}_0, \delta(\tilde{u}_0))$ est l'unique point maximum de la fonction δ. Les observations faites ci-dessus sont regroupées dans le digramme de bifurcation $(\delta, \tilde{u})$ ci dessous, où δ est définie par

$$\delta = \delta(\tilde{u}) = \frac{2m(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}{(1-m)a}\tilde{u}^2(1-\tilde{u}^2)^{\frac{m+1}{1-m}}\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; \tilde{u}^2\Big)^2,$$

où $\mathcal{F}\Big(.,.;.;.\Big)$ est une fonction Hypergéométrique de deuxième espèce définie par la représentation intégrale suivante:

$$\mathcal{F}\Big(a,b;c;z\Big) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt,$$

et $\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds$ avec $Re(z) > 0$.

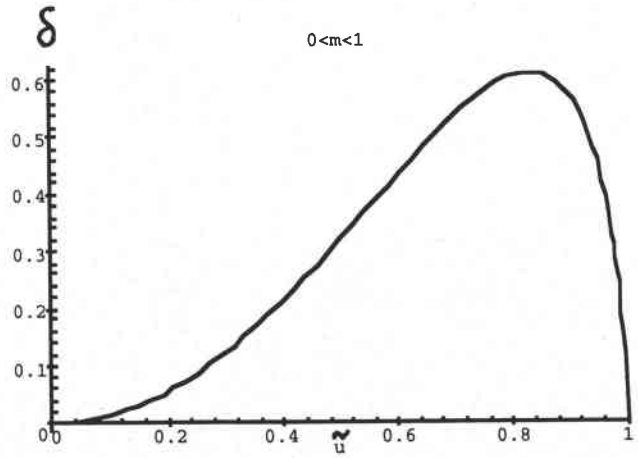

Fig.3.1: Contrainte fonction de la température maximum.

Il reste à montrer l'existence des solutions stationnaires $f(x)$. D'après la Fig.3.1, on sait que pour une valeur donnée du paramètre $0 < \delta < \delta(\tilde{u}_0) = \delta(m)$ correspond deux températures centrales $f(0) = f_0$, et pour $\delta = \delta(m)$ il existe une unique température centrale. Les solutions stationnaires sont uniquement déterminées par (3.3), pour lesquelles on exprime x en fonction de $f(x)$ pour un f_0 donné par (3.6). Explicitement on a:

$$x = \sqrt{\frac{a(1-m)}{2\delta m}} \int_{f(x)}^{f_0} \frac{df}{\left[(1-af_0)^{\frac{m-1}{m}} - (1-af)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$x = x(u) = \sqrt{\frac{2m}{a\delta(1-m)}}(1-af_0)^{\frac{m+1}{2m}}\ u\ \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; u^2\Big),$$

où $u(x) = \sqrt{1 - \Big(\frac{1-af_0}{1-af(x)}\Big)^{\frac{1-m}{m}}}$.

(ii) **cas** $m > 1$:

De la même façon que le point (i) on a;

$$\Big[\big(f(x)\big)'\Big]^2 = \frac{2\delta m}{a(m-1)}\Big[(1-af(x))^{\frac{m-1}{m}} - (1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}\Big] \qquad (3.7)$$

Comme $f'(x) < 0$ sur $(0,1)$, de (3.7) on obtient l' expression suivante:

$$-f'(x) = \sqrt{\frac{2\delta m}{a(m-1)}}\Big[(1-af)^{\frac{m-1}{m}} - (1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}\Big]^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.8)$$

qu'on peut écrire sous une autre forme:

$$\sqrt{\frac{2\delta m}{a(m-1)}}\ x = -\int_0^x \frac{df}{\left[(1-af)^{\frac{m-1}{m}} - (1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.9)$$

L'intégrale du membre de droite de (3.9) peut être calculé en posant $g = \dfrac{1-af}{1-af_0}$ et soit $I = -\displaystyle\int_0^x \frac{df}{\left[(1-af)^{\frac{m-1}{m}} - (1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}}$, alors on a

$$I = (1-af_0)^{\frac{m+1}{2m}} \int_1^{\frac{1-af(x)}{1-af_0}} \frac{dg}{\left(g^{\frac{m-1}{m}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.10}$$

Soit $v = \left(g^{\frac{m-1}{m}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$, alors l'expression (3.10) donne

$$I = \frac{2m}{(m-1)a}(1-af_0)^{\frac{m+1}{2m}} \int_0^{[(\frac{1-af(x)}{1-af_0})^{\frac{m-1}{m}}-1]^{\frac{1}{2}}} (1+v^2)^{\frac{1}{m-1}} dv.$$

Donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $I = \sqrt{\dfrac{2\delta m}{a(m-1)}}x$, en particulier pour $x = 1$ on peut exprimer δ (contrainte) en fonction de la température centrale f_0, c'est à dire en fonction de $\tilde{v} = \sqrt{\left(\frac{1-a}{1-af_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} - 1}$:

$$\delta = \delta(\tilde{v}) = \frac{2m(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}{(m-1)a}(1+\tilde{v}^2)^{-\frac{m+1}{m-1}} \left(\int_0^{\tilde{v}} (1+v^2)^{\frac{1}{m-1}} dv\right)^2, \tag{3.11}$$

pour $f_0 \in [1, \frac{1}{a})$, $\tilde{v} \in [0, \infty)$ et la fonction $\delta = \delta(\tilde{v})$ définie par (3.11) vérifie $\delta(0) = 0$, $\delta(\tilde{v}) > 0$ pour $\tilde{v} \in (0, \infty)$. En utilisant la règle de l'Hopital on a $\lim\limits_{\tilde{v}\to+\infty} \delta(\tilde{v}) = \dfrac{2m(m-1)(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}{(m+1)^2 a} = \delta^*(m)$. La dérivée est donnée par;

$$\delta'(\tilde{v}) = 2C(1+\tilde{v}^2)^{-\frac{2m}{m-1}} g(\tilde{v}) \int_0^{\tilde{v}} (1+v^2)^{\frac{1}{m-1}} dv,$$

où $C = \dfrac{2m(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}{(m-1)a}$ et $g(\tilde{v}) = (1+\tilde{v}^2)^{\frac{m}{m-1}} - \frac{m+1}{m-1}\,\tilde{v} \displaystyle\int_0^{\tilde{v}} (1+v^2)^{\frac{1}{m-1}} dv$.
La fonction g vérifie $g(0) = 1$, $\lim\limits_{\tilde{v}\to+\infty} g(\tilde{v}) = -\infty$,

$g'(\tilde{v}) = \tilde{v}(1+\tilde{v}^2)^{\frac{1}{m-1}} - \frac{m+1}{m-1}\int_0^{\tilde{v}} (1+v^2)^{\frac{1}{m-1}} dv$ et $g''(\tilde{v}) = -\frac{2}{m-1}(1+\tilde{v}^2)^{\frac{1}{m-1}-1} < 0$. Donc g' est stictemement décroissante et comme $g'(0) = 0$ alors $g'(\tilde{v}) < 0$ pour tout $\tilde{v} \in (0, +\infty)$ et on en déduit que g est décroissante, par conséquent il existe un unique $\tilde{v}_0 \in (0, +\infty)$ tel que $g(\tilde{v}_0) = 0$. De plus, $\delta'(\tilde{v}) > 0$ si $\tilde{v} \in (0, \tilde{v}_0)$ et $\delta'(\tilde{v}) < 0$ si $\tilde{v} \in (\tilde{v}_0, +\infty)$. Donc $\delta(\tilde{v}_0) = \delta(m)$ est l'unique maximum de la foction δ. A partir de (3.11) la fonction δ est donnée par l'expression suivante

$$\delta = \delta(\tilde{v}) = \frac{2m(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}{(m-1)a} \frac{\tilde{v}^2}{(1+\tilde{v}^2)^{\frac{m+1}{m-1}}} \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; -\tilde{v}^2\Big)^2, \quad (3.12)$$

Les observations faites ci-dessus sont regroupées sur la figure de bifurcation suivante:

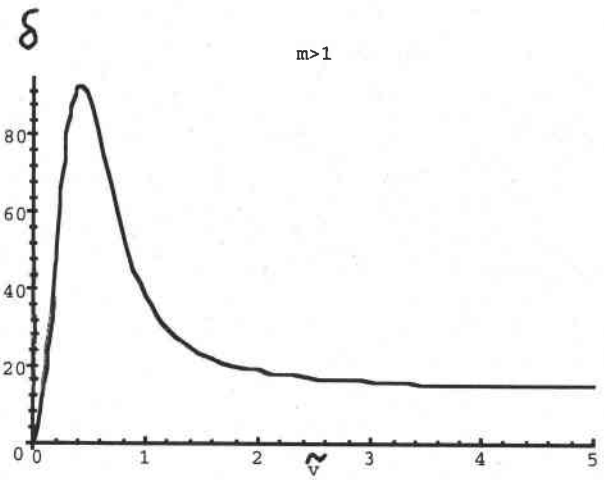

Fig.3.2: Solutions maximales pour $m > 1$.

Comme pour le point (i), il reste à discuter l'**existence** de ces solutions stationnaires $f(x)$. On a montré ci-dessus (Fig.3.2), pour une valeur donnée du paramètre $\delta \in \Big(\delta^*(m), \delta(m)\Big)$ correspond deux températures centrales $f(0) = f_0$, et pour $\delta = \delta(m)$ ou $\delta \in \Big(0, \delta^*(m)\Big]$ il existe une unique température centrale. Les solutions stationnaires classiques

$f(x)$ sont uniquement données par (3.9), ce qui nous permet d'exprimer x en fonction de $f(x)$ pour une valeur de f_0 laquelle est déterminée par (3.12). Alors il suit que:

$$x = \sqrt{\frac{a(m-1)}{2\delta m}} \int_{f(x)}^{f_0} \frac{df}{\left[(1-af)^{\frac{m-1}{m}} - (1-af_0)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$x = x(v) = \sqrt{\frac{2m}{a\delta(m-1)}}(1-af_0)^{\frac{m+1}{2m}}\ v\ \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; -v^2\Big),$$

où $v(x) = \sqrt{-1 + \Big(\frac{1-af(x)}{1-af_0}\Big)^{\frac{m-1}{m}}}$.

(*iii*) **cas** $m = 1$:

Alors f satisfait l'équation différentielle suivante

$$f''(x) + \delta(1-af(x))^{-1} = 0 \qquad 0 < x < 1,$$

$$f'(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

On multiplie l'équation différentielle par f' puis on intégre entre 0 et x :

$$\frac{1}{2}\Big[\Big(f(x)\Big)'\Big]^2 - \frac{\delta}{a}\ln(1-af(x)) = -\frac{\delta}{a}\ln(1-af_0), \tag{3.13}$$

$$\Big[\Big(f(x)\Big)'\Big]^2 = \frac{2\delta}{a}\ln\frac{1-af(x)}{1-af_0}. \tag{3.14}$$

Comme $f'(x) < 0$ sur $(0,1)$, on en déduit de (3.14) l'expression suivante:

$$-f'(x) = \sqrt{\frac{2\delta}{a}}\sqrt{\ln\frac{1-af(x)}{1-af_0}}, \tag{3.15}$$

qu'on peut écrire aussi;

$$\sqrt{\frac{2\delta}{a}}x = -\int_0^x \frac{df}{\sqrt{\ln\dfrac{1-af}{1-af_0}}}. \tag{3.16}$$

Le membre de droite de (3.16) peut être intégré en posant $u = \dfrac{1-af}{1-af_0}$, alors

$$\sqrt{\frac{2\delta}{a}}x = \frac{1}{a}(1-af_0)\int_1^{\frac{1-af(x)}{1-af_0}} \frac{du}{\sqrt{\ln u}}, \tag{3.17}$$

ainsi, si on pose $v = \sqrt{\ln u}$ on a

$$\sqrt{\frac{2\delta}{a}}x = \frac{2}{a}(1-af_0)\int_0^{\sqrt{\ln\frac{1-af(x)}{1-af_0}}} e^{v^2}dv, \quad \forall\, x \in [0,1] \tag{3.18}$$

en particulier pour $x = 1$, $f = 1$ on exprime δ comme fonction de $\tilde{v} = \sqrt{\ln\dfrac{1-a}{1-af_0}}$, soit

$$\delta = \delta(\tilde{v}) = \frac{2}{a}(1-a)^2 e^{-2\tilde{v}^2}\Big(\int_0^{\tilde{v}} e^{v^2}dv\Big)^2, \quad \tilde{v} \in [0,+\infty). \tag{3.19}$$

On remarque que la fonction δ définie par (3.19) vérifie $\delta(0) = 0$, $\lim\limits_{\tilde{v}\to+\infty}\delta(\tilde{v}) = 0$, $\delta(\tilde{v}) > 0$ pour tout $\tilde{v} \in (0,\infty)$ et ayant pour dérivée;

$$\delta'(\tilde{v}) = \frac{4}{a}(1-a)^2 e^{-2\tilde{v}^2} g(\tilde{v}) \int_0^{\tilde{v}} e^{v^2}dv,$$

où $g(\tilde{v}) = e^{\tilde{v}^2} - 2\tilde{v}\displaystyle\int_0^{\tilde{v}} e^{v^2}dv$, vérifiant $g(0) = 1$, $\lim\limits_{\tilde{v}\to+\infty} g(\tilde{v}) = -\infty$ et de dérivée $g'(\tilde{v}) = -2\displaystyle\int_0^{\tilde{v}} e^{v^2}dv \leq 0$. Donc $\exists\,!\ \tilde{v}_0 \in (0,+\infty)$ tel que

$g(\tilde{v}_0) = 0$, ainsi $\delta'(\tilde{v}) > 0$ si $\tilde{v} \in (0, \tilde{v}_0)$ et $\delta'(\tilde{v}) < 0$ si $\tilde{v} \in (\tilde{v}_0, +\infty)$ alors le point $(\tilde{v}_0, \delta_0)$, où $\delta(\tilde{v}_0) = \delta_0$, est l'unique point maximum de la courbe représentative de δ, voir la figure 3.3. Après intégration du membre de droite de (3.18) et une évaluation en $x = 1$ on a

$$\delta = \delta(f_0) = \frac{\pi}{2}(1 - af_0)^2 \left[Erf\left(i\sqrt{\ln \frac{1-a}{(1-af_0)}} \right) \right]^2, \tag{3.20}$$

où i représente le nombre complexe usuel et Erf est la fonction erreur qui est définie par

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

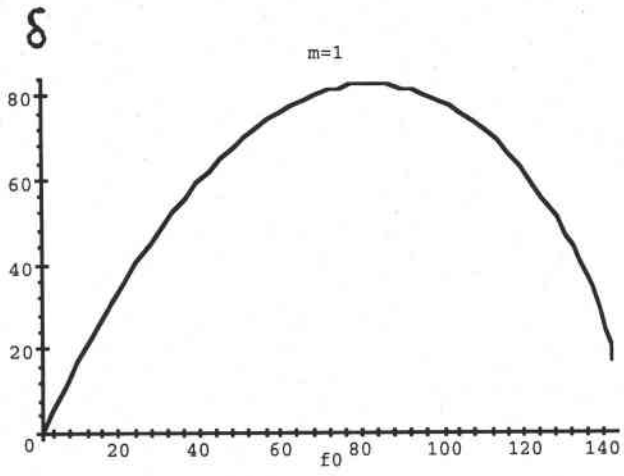

Fig.3.3: Solutions maximales pour m=1.

Pour conclure cette démonstration, la solution stationnaire $f(x)$ est donnée par (3.18), qui exprime x en fonction de $f(x)$ pour une température centrale f_0 calculée à partir de (3.20):

$$x = x(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2\delta a}}\,(1 - af_0)\; Erf\left(i\,\sqrt{\ln \frac{1 - af(x)}{1 - af_0}} \right).$$

3 Extinction de la température en temps fini.

On considère le problème suivant

$$(P)\begin{cases}\Theta_t - \Theta_{xx} = \delta(1-a\Theta)^{-\frac{1}{m}} & x\in\Omega, \quad t\in[0,T),\\ \Theta(x,t)=1 & x\in\partial\Omega, \quad t\in[0,T),\\ \Theta(x,0)=\Theta_0(x)\geq 0 & x\in\Omega.\end{cases}$$

Soit le changement de variable $u = 1 - a\Theta$, donc $0 < u \leq 1$ et vérifie le problème $(P1)$ suivant:

$$(P1)\begin{cases}u_t - u_{xx} = -\delta a u^{-p} & x\in\Omega, \quad t\in[0,T),\\ u(x,t)=1-a & x\in\partial\Omega, \quad t\in[0,T),\\ u(x,0)=1-a\Theta_0(x) & x\in\Omega,\end{cases}$$

où $p = \frac{1}{m} > 1$. Dans ce cas $(P1)$ développe une singularité quand u approche la valeur zéro. Alors $\Theta(x,t)$ est solution du problème (P) si et seulement si $u(x,t)$ vérifie $(P1)$.

Théorème 3.2 *Soit $u(x,t)$ solution $(u_t \leq 0)$ du problème $(P1)$. Alors u tend vers zéro en temps fini si $m < 1$ (i.e, $\Theta \longrightarrow \frac{1}{a}$).*

La condition de décroissance de la fonction $u(x,t)$ peut être vérifiée si on suppose que u_0 satisfait; $(u_0)_{xx} - \delta a u_0^{-p} \leq 0$, alors on déduit à partir du principe du maximum que $u_t \leq 0$. En vue de démontrer ce théorème, on transforme ce problème $(P1)$ en un problème d'explosion ($[AB]$), à partir de là on applique la méthode de concavité pour le nouveau problème d'explosion.

3.1 Méthode de concavité ($[Ch]$).

Soit λ un réel positif et $L = L(t)$ une fonction positive . Supposons que

$$\left(L^{-\lambda}\right)'' \leq 0, \quad L'(0) > 0,$$

i.e., la fonction $L^{-\lambda}$ est concave et de dérivée initiale positive, alors la courbe d'équation $L^{-\lambda}$ coupe l'axe des abscisses et donc L explose. Plus précisement en utilisant la propiété des fonctions concaves on a:

$$L^{-\lambda}(t) \leq L^{-\lambda}(0) + \left(L^{-\lambda}\right)'(0)t = L^{-\lambda}(0) - \lambda L^{-\lambda-1}(0)L'(0)\ t.$$

Alors le temps d'explosion de L est borné par

$$T = \frac{L^{-\lambda}(0)}{\lambda L^{-\lambda-1}(0)L'(0)} = \frac{L(0)}{\lambda L'(0)}.$$

Maintenant, on cherche une condition suffisante pour que la fonction $L^{-\lambda}$ soit concave:

$$\left(L^{-\lambda}\right)' = -\lambda L^{-\lambda-1}L',$$

$$\left(L^{-\lambda}\right)'' = -\lambda(-\lambda-1)L^{-\lambda-2}L'^2 - \lambda L^{-\lambda-1}L'',$$

$$= -\lambda L^{-\lambda-2}\left[LL'' - (\lambda+1)L'^2\right].$$

Alors on a la condition nécessaire suivante

$$LL'' - (\lambda+1)L'^2 \geq 0.$$

Preuve du théorème 3.2 Soit $v(x,t) := h(u(x,t))$, où h est une fonction de u à définir plus loin. Alors,

$$v_t = h'(u)u_t = h'(u)u_{xx} - \delta a h'(u)u^{-p}, \tag{3.21}$$

$$v_x = h'(u)u_x \tag{3.22}$$

et

$$v_{xx} = h'(u)u_{xx} + h''(u)u_x^2. \tag{3.23}$$

Alors;

$$v_t = v_{xx} - h''(u)u_x^2 - \delta a h'(u)u^{-p}. \tag{3.24}$$

Ainsi pour transformer le problème $(P1)$ en un problème d'explosion, on choisira la fonction h de telle manière que $h(u)$ tend vers l'infini quand u tend vers zéro. Soit par exemple $v = h(u) = u^{-\beta}$ avec $\beta > 0$ à restreindre plus tard. Alors;

$$h'(u) = -\beta u^{-(\beta+1)} \text{ et } h''(u) = \beta(\beta+1)u^{-(\beta+2)} \tag{3.25}$$

Donc v vérifie le problème (P') suivant:

$$(P') \begin{cases} v_t = v_{xx} - \frac{(\beta+1)}{\beta}\frac{v_x^2}{v} + \delta a\beta u^{\frac{p+\beta+1}{\beta}} & x \in \Omega, t > 0 \\ v(x,t) = \tilde{v} = \tilde{u}^{-\beta} & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x,0) = v_0(x) = u_0(x)^{-\beta} & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \tag{3.26}$$

Remarquer quand u est décroissante et approche la singularité zéro, alors v est croissante et devient non bornée (explose).

Lemme 3.1 *Soit la fonctionnelle d'énergie suivante:*

$$E[w] = \frac{1}{2}\int_\Omega w_x^2 dx - \frac{\delta a\beta^2}{p+2\beta+1}\int_\Omega w^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx. \tag{3.27}$$

Alors E est décroissante le long de la trajectore de v, de plus on a

$$E[v(x,t)] \leq E[v_0(x)]$$

Preuve. Il est clair, comme v est croissante, la fonctionnelle d'énergie E est décroissante, en effet;

$$\frac{d}{dt}E[v] = \int_\Omega \left\{ v_x v_{xt} - \delta a\beta v^{\frac{p+\beta+1}{\beta}} v_t \right\} dx$$

$$= -\int_\Omega v_t^2 dx - \frac{\beta+1}{\beta}\int_\Omega \frac{v_x^2}{v} v_t dx \leq -\int_\Omega v_t^2 dx \leq 0.$$

De plus on a:

$$\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dx dt + E[v(x,t)] \leq E[v_0(x)]. \tag{3.28}$$

On revient à la démonstration de notre théorème et supposons en plus que;

$$E[v_0] = \frac{1}{2}\int_\Omega (v_0)_x^2 dx - \frac{\delta a \beta^2}{p+2\beta+1}\int_\Omega v_0^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx \leq 0. \tag{3.29}$$

Soit F une fonction définit par:

$$F(t) = \int_0^t \int_\Omega v^2(x,t) dx dt \tag{3.30}$$

alors;

$$F'(t) = \int_\Omega v^2(x,t) dx \tag{3.31}$$

$$= \int_0^t \left(\int_\Omega v^2 dx\right)_t dt + \int_\Omega v_0^2 dx \tag{3.32}$$

$$= 2\int_0^t \int_\Omega v v_t dx dt + \int_\Omega v_0^2 dx \tag{3.33}$$

et

$$F''(t) = 2\int_\Omega v v_t dx. \tag{3.34}$$

On remplace v_t par son expression de l'équation aux dérivées partielles du problème (P'), alors on obtient:

$$F''(t) = 2\int_\Omega v v_{xx} dx - 2\frac{(\beta+1)}{\beta}\int_\Omega v_x^2 dx + 2\delta a\beta \int_\Omega v^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx, \tag{3.35}$$

$$F''(t) = 2\tilde{v}\int_{\partial\Omega} v_x dx - 2\frac{(2\beta+1)}{\beta}\int_\Omega v_x^2 dx + 2\delta a\beta\int_\Omega v^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx \quad (3.36)$$

$$= -4\frac{(2\beta+1)}{\beta}E[v]$$

$$+2\delta a\Big(\beta - 2\beta\frac{2\beta+1}{p+2\beta+1}\Big)\int_\Omega v^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx + 2\tilde{v}\int_{\partial\Omega} v_x dx, \quad (3.37)$$

on sait que par (3.28) et (3.29) on a:

$$E[v] \leq -\int_0^t\int_\Omega v_t^2 dxdt$$

$$F''(t) \geq 4\frac{(2\beta+1)}{\beta}\int_0^t\int_\Omega v_t^2 dxdt + 2\delta a\varepsilon\int_\Omega v^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx + 2\tilde{v}\int_{\partial\Omega} v_x \quad (3.38)$$

où ε est une constante positive. En effet,
$\varepsilon = \beta - 2\beta\frac{2\beta+1}{p+2\beta+1} > 0 \Longleftrightarrow p+2\beta+1 > 2(2\beta+1) \Longleftrightarrow \beta < \frac{p-1}{2}$ avec $p > 1$. En utilisant l'inégalité (3.38) on a;

$$F(t)\cdot F''(t) = 4\frac{(2\beta+1)}{\beta}\int_0^t\int_\Omega v_t^2 dxdt\int_0^t\int_\Omega v^2 dxdt$$

$$+2F\Big\{\delta a\varepsilon\int_\Omega v^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx + \tilde{v}\int_{\partial\Omega} v_x\Big\} \quad (3.39)$$

et

$$(F'(t))^2 = \Big[2\int_0^t\int_\Omega vv_t dxdt + \int_\Omega v_0^2 dx\Big]^2 \quad (3.40)$$

$$= 4\Big(\int_0^t\int_\Omega vv_t dxdt\Big)^2$$

$$+4\Big(\int_0^t\int_\Omega vv_t dxdt\Big)\Big(\int_\Omega v_0^2 dx\Big) + \Big(\int_\Omega v_0^2 dx\Big)^2. \quad (3.41)$$

On sait que pour tout a et b positifs ou nuls on a l'inégalité suivante: $2ab \leq a^2 + b^2$. Donc en utilisant cette inégalité on a

$$(F'(t))^2 \leq 6\Big(\int_0^t \int_\Omega v v_t dx dt\Big)^2 + 3\Big(\int_\Omega v_0^2 dx\Big)^2, \tag{3.42}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schawrz on a:

$$(F'(t))^2 \leq 6\Big(\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dx dt\Big)\Big(\int_0^t \int_\Omega v^2 dx dt\Big) + 3\Big(\int_\Omega v_0^2 dx\Big)^2. \tag{3.43}$$

Alors;

$$F(t)\ F''(t) - \frac{2(2\beta+1)}{3\beta}(F')^2 \geq 2F\Big\{\delta a\varepsilon \int_\Omega v^{\frac{p+2\beta+1}{\beta}} dx + \tilde{v}\int_{\partial\Omega} v_x\Big\}$$

$$- \frac{2(2\beta+1)}{\beta}\Big(\int_\Omega v_0^2 dx\Big)^2. \tag{3.44}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen on obtient:

$$F(t)\cdot F''(t) - \frac{2(2\beta+1)}{3\beta}(F')^2 \geq 2\delta a\varepsilon F\cdot (F')^\eta + 2\tilde{v}\Big(\int_{\partial\Omega} v_x\Big)\ F$$

$$- \frac{2(2\beta+1)}{\beta}\Big(\int_\Omega v_0^2 dx\Big)^2, \tag{3.45}$$

où $\eta = \frac{p+2\beta+1}{2\beta} > 1$.
On suppose de plus que $\int_{\partial\Omega} v_x \leq C$ où C est une constante et $\int_\Omega v_0^2 dx < \infty$. Alors pour v suffisamment grand F vérifie l'inégalité suivante

$$F(t)\cdot F''(t) - (1+\alpha)(F')^2 \geq 0 \tag{3.46}$$

où $\alpha = \frac{\beta+2}{3\beta}$, donc $\Big(F^{-\alpha}(t)\Big)'' \leq 0 \implies F^{-\alpha}(t)$ est concave. La courbe d'équation $F^{-\alpha}(t)$ est en dessous de sa tangente en tout point. Alors on

a explosion en temps fini par la méthode de concavité. Par conséquent Θ atteint la singularité $\frac{1}{a}$ en temps fini.

Théorème 3.3 *Supposons $m \geq 1$, si $\delta > \delta(m)$, il existe des valeurs initiales $\Theta_0(x) < \frac{1}{a}$ (régulières) pour lesquelles Θ s'etteint en temps fini ($\Theta(x,t) \longrightarrow \frac{1}{a}$ quand $t \longrightarrow T < \infty$).*

Preuve. Les changements de variables: $w = \frac{a}{1-a}(\Theta - 1)$ et $x \to \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ transforment le problème (P) en un problème équivalent (Q) :

$$(Q)\begin{cases} w_t - w_{xx} = \delta_1\Big(1-w\Big)^{-\frac{1}{m}} & x \in (0,1),\ t \in (0,T), \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 & t \in (0,T) \\ w(x,0) = w_0(x) = \frac{a}{1-a}\Big(\Theta_0(x) - 1\Big) & x \in [0,1], \end{cases}$$

où $\delta_1 = \dfrac{4\delta a}{(1-a)^{\frac{m+1}{m}}}$. Soit Y la fonction définie par

$$Y(t) = \int_0^1 w(x,t)\psi(x)dx$$

où ψ est la première fonction propre normalisée (Dirichlet) de $-\dfrac{d^2}{dx^2}$. On multiplie l'équation aux dérivées partielles de (Q) par ψ puis on intégre sur $(0,1)$ et en utilisant l'inégalité de Jensen on a

$$Y'(t) \geq -\pi^2 Y + \delta_1\Big(1-Y\Big)^{-\frac{1}{m}} \equiv G(Y).$$

On choisit $w_0(x)$ voisin de 1 $\Big(\Theta_0(x) \approx \frac{1}{a}\Big)$ tel que $G(0) > r$, où r est la plus grande racine de G. Alors $Y'(t) > 0$ et $G(Y(t))$ garde un signe constant, ainsi

$$t \leq \int_0^t \frac{dY}{G(Y)} \leq \int_{Y(0)}^{Y(t)} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} \leq \int_{Y(0)}^{1} \frac{d\sigma}{G(\sigma)} < \infty$$

pour tout t dans l'intervalle d'existence. Alors w atteint la singularité 1 en temps fini.

3.2 Conditions de Neumann.

Un autre cas qu'on peut discuter brièvement est le problème de Neumann. On associe maintenant à l'équation (3.1) une condition de Neumann homogène $\Theta_x(x,t) = 0$, pour $x = \pm 1$ et une condition initiale, alors Θ vérifie

$$(N)\begin{cases} \Theta_t = \Theta_{xx} + \delta(1-a\Theta)^{-\frac{1}{m}} & x \in \Omega, t > 0 \\ \Theta_x(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \Theta(x,0) = \Theta_0(x) & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

On remarque que ce problème n'admet pas de solutions stationnaires, alors toute solution peut atteindre la singularité $\frac{1}{a}$ soit en temps fini ou en un temps infini. En effet, si on intégre l'équation aux dérivées partielles de (N) sur $\Omega = (-1,1)$ et en utilisant l'inégalité de Jensen on a

$$\bar{\Theta}_t \geq \delta\Big(1 - a\bar{\Theta}\Big)^{-\frac{1}{m}},$$

où $\bar{\Theta}(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Theta(x,t)dx$. On intégre l'inéquation différentielle précédente entre 0 et t on obtient:

$$\Big(1 - a\bar{\Theta}\Big)^{\frac{m+1}{m}} \leq \Big(1 - a\bar{\Theta}_0\Big)^{\frac{m+1}{m}} - \frac{m}{a\delta(m+1)}t,$$

ainsi on atteint cette singularité pourvue que

$$t \geq T = \frac{m}{a\delta(m+1)}\Big(1 - a\bar{\Theta}_0\Big)^{\frac{m+1}{m}}.$$

3.3 Explosion de Θ_t en temps d'extinction.

Comme application des théorèmes cités ci-dessus, on montre que si Θ atteint la singularité $\frac{1}{a}$ alors Θ_t explose. On utilise une modification de l'argument donné par Friedman ([FM]).

Définition 3.1 On dit q'un point $x \in \Omega$ est un point d'extinction s' il existe une suite $(t_n, x_n) \in (0,T) \times \Omega$ telle que $t_n \longrightarrow T$, $x_n \longrightarrow x$ et $\Theta(t_n, x_n) \longrightarrow \dfrac{1}{a}$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Lemme 3.2 *$\Omega = [-1,1]$ est convexe. Alors l'ensemble des points d'extinction est un sous ensemble compact de Ω.*

Pour la démonstration on se référe à [L].

Théorème 3.3 *Soit $\Theta(t,x)$ solution du problème (P), alors*

(a) $\min\limits_{x\in\Omega} \Theta(t,x) \leq \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{(m+1)a\delta}{m}(T-t)\right]^{\frac{m}{m+1}}$

(b) si Θ_0 vérifie $(\Theta_0)_{xx} + \delta(1-a\Theta_0)^{-\frac{1}{m}} \geq 0$ dans Ω, alors il existe une constante

$\lambda > 0$ telle que

$$\Theta_t \geq \lambda\phi(\Theta) \qquad \text{dans } \Omega^\eta \times (\eta, T)$$

où $\phi(\Theta) = \delta(1-a\Theta)^{-\frac{1}{m}}$ et $\Omega^\eta = \{x \in \Omega : |x-y| > \eta,\ y \in \partial\Omega\}$.

Preuve. $\tilde{\Theta}(t) := \min\limits_{x\in\Omega} \Theta(t,x)$ est localement lipschitzienne. En effet si on pose $\tilde{\Theta}(t_i) = \Theta(t_i, x_i)$ pour $i = 1,2$ et $h = t_2 - t_1$ on a:

$$\tilde{\Theta}(t_2) - \tilde{\Theta}(t_1) \leq h\Theta_t(t_1, x_1) + o(h)$$

il suit que $\tilde{\Theta}(t)$ est lipschitz continue. De plus on a:

$$\tilde{\Theta}(t_2) - \tilde{\Theta}(t_1) \geq h\Theta_t(t_2, x_2) + o(h)$$

puisque $\Theta_{xx}(t_2, x_2) \geq 0$, alors

$$\Theta_t(t_2, x_2) \geq \phi(\Theta(t_2, x_2))$$

par conséquent on chaque point de Ω on obtient $\bar{\Theta}_t(t) \geq \phi(\tilde{\Theta}(t))$ i.e.,

$$\tilde{\Theta}(t) \geq \delta(1 - a\tilde{\Theta})^{-\frac{1}{m}}$$

Si on intégre entre t et T on obtient;

$$1 - a\tilde{\Theta}(t) \geq \left[\frac{(m+1)a\delta}{m}(T-t)\right]^{\frac{m}{m+1}}$$

d'où le résultat.

Pour le point (b), on remarque ϕ est continue et différentiable pour tout $0 \leq \Theta < \frac{1}{a}$, on a aussi $\phi'(\Theta) > 0$ et $\phi''(\Theta) > 0$. En effet, si on pose:

$$G(t, x) = \Theta_t - \lambda\phi(\Theta),$$

$$G_t = \Theta_{tt} - \lambda\phi'(\Theta)\Theta_t,$$

$$G_{xx} = \Theta_{xxt} - \lambda\phi''(\Theta)\Theta_x^2 - \lambda\phi'(\Theta)\Theta_{xx}.$$

Donc G vérifie l'équation suivante:

$$G_t - G_{xx} - \phi'(\Theta)G = \lambda\phi''(\Theta)\Theta_x^2 \geq 0.$$

Il suit du principe du maximum, que G n'admet pas de minimum négatif dans Ω_T et d'après le Lemme 3.2 $\exists\ \eta > 0$ telle que Ω^η contient tout les points d'extinction. Si on choisit η assez petit alors on a;

$$\phi(\Theta) \leq C_0 < \infty \quad \text{si } x \in \partial\Omega^\eta,\ 0 < t < T.$$

Comme $\Theta_t > 0$ dans $\Omega \times (0,T)$ il existe une constante $C > 0$ telle que $\Theta_t \geq C > 0$ sur la frontière de $\Omega^\eta \times (\eta, T)$, donc pour λ assez petit, $\lambda < \frac{C}{C_0}$, on a;

$$G > 0 \qquad \text{dans } \Omega^\eta \times (\eta, T).$$

Remarque 3.1

(1) D'après le théorème 3.3 (a) on obtient une estimation du temps d'extinction, qui est donnée par:

$$T \leq \frac{m}{a\delta(m+1)}\left(1 - a \min_{x\in\Omega} \Theta_0(x)\right)^{\frac{m+1}{m}}$$

(2) D'après le théorème 3.3 (b) on en déduit que Θ_t explose pour le temps d'extinction de Θ.

Chapitre 4

Etude d'un problème nonlocal présentant une singularité

1 Introduction.

A partir de l'équation du premier principe de la thermodynamique ((2.4) Chapitre 1), on définit une équation aux dérivées partielles parabolique nonlocale dont on étudiera l'existence et l'unicité de solutions stationnaires ainsi que le phénomène d'extinction. Soit $\Theta = \Theta(x,t)$ une fonction qui modélise la température dans l'équation adimensionnelle suivante:

$$\Theta_t - \Theta_{xx} = \lambda\tau\dot{\gamma} \qquad x \in (-1,1),\ t > 0 \tag{4.1}$$

où $\lambda = \dfrac{\tilde{\tau}_R\ \beta}{\rho c\tilde{\Theta}_0}$ et toutes ces constantes sont définies au chapitre 2. La loi de comportement est donnée par une contrainte fonction linéaire de la température:

$$\tau(t) = (1 - a\Theta)\dot{\gamma}^m,$$

A partir des conditions aux bords en vitesse et de l'équation de compatibilité cinématique ((2.5),(2.2) Chapitre 1), on obtient l'équation intégrale suivante;

$$\int_\Omega \dot{\gamma} dx = 2V,$$

où $\Omega = [-1, 1]$. On en déduit à partir de la relation précédente l'expression de la contrainte de cisaillement $\tau(t)$:

$$\tau(t) = \frac{2^m V^m}{\left(\int_\Omega (1 - a\Theta)^{-\frac{1}{m}} dx\right)^m}.$$

On substitue cette expression dans l'équation d'énergie (4.1) on obtient l'équation parabolique nonlocale suivante:

$$\Theta_t - \Theta_{xx} = \delta \frac{(1 - a\Theta)^{-\frac{1}{m}}}{\left(\int_\Omega (1 - a\Theta)^{-\frac{1}{m}} dx\right)^{m+1}}, \tag{4.2}$$

où $\delta = \lambda\Big(2V\Big)^{m+1}$. On remarque que le second membre l'équation (4.2) développe une singularité quand $\Theta(x,t)$ approche la constante $\frac{1}{a}$. Supposons que l'équation (4.2) admet une solution homogène, $\Theta(t,x) = \Theta(t)$, alors Θ vérifie:

$$\Theta_t = \delta(1 - a\Theta),$$

d'où si on intégre entre 0 et t on a

$$1 - a\Theta(t) = (1 - a\Theta_0)e^{-\frac{a\delta}{2^{m+1}}t}.$$

Donc Θ tend vers la singularité $\frac{1}{a}$ en temps infini.

2 Conditions thermiques de Neumann.

Dans un premier temps on associe à l'équation (4.2) une condition de Neumann homogène $\Theta_x(x,t) = 0$ pour $x \in \partial\Omega$ et une condition initiale régulière $\Theta(x,0) = \Theta_0(x)$ telle que $0 \leq \Theta_0(x) < \frac{1}{a}$.
On considère alors le problème parabolique nonlocal suivant:

$$(P)\begin{cases} \Theta_t - \Theta_{xx} = \delta \dfrac{f(\Theta)}{\left(\int_\Omega f(\Theta)dx\right)^{m+1}} & (x,t) \in \Omega \times [0,T) \\ \Theta_x(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T) \\ \Theta(x,0) = \Theta_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

où δ est une constante positive, f est une fonction positive, croissante définie par $f(s) = (1-as)^{-\frac{1}{m}} \quad \forall\, s \in [0, \frac{1}{a})$, $m > 0$ et $0 < a \ll 1$.

Remarquer en premier que si on a une solution stationnaire en contrainte contrôlée (Chapitre 3) c'est équivlent de dire qu'on a une solution stationnaire en vitesse contrôlée. En effet, soit w la solution stationnaire en contrainte contrôlée, alors w satisfie l'équation suivante:

$$-w_{xx} = \delta_1 f(w) = \delta_1 \Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^{m+1} \frac{f(w)}{\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^{m+1}}$$

Avec $\delta = \delta_1 \Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^{m+1}$, il est clair que w est solution stationnaire de l'équation (4.2). La réciproque est évidente. On a remarqué (Chapitre 3) qu'il n'existe pas de solutions stationnaires en contrainte contrôlée, sous des conditions de Neumann homogènes. Alors pour le même type de conditions thermiques, le problème en vitesse contrôlée, n'admet pas de solutions stationnaires. Ainsi toute solution de (4.2) atteind la singularité $\dfrac{1}{a}$, soit elle existe pour tout $t \geq 0$ et $\Theta \longrightarrow \dfrac{1}{a}$ quand $t \longrightarrow \infty$ ou bien elle s'eteind en temps fini.

Théorème 4.1 *Soient* $\Theta_0(x)$ *telle que* $0 \leq \Theta_0(x) < \frac{1}{a}$ *et* $\Theta(x,t)$ *la solution du problème* (P), *alors* $\lim_{t\to\infty} \Theta(x,t) = \frac{1}{a}$.

Preuve. Soit $\Theta(x,t)$ la solution du problème (P) dans $\Omega \times [0,t^*)$ et supposons que $\Theta(x,t) \longrightarrow \frac{1}{a}$ quand $t \longrightarrow t^*$, avec $t^* < \infty$.
Intégrer directement l'équation du problème (P) on a

$$\Big(\int_\Omega \Theta(x,t)dx\Big)_t = \delta\Big(\int_\Omega f(\Theta(x,t))dx\Big)^{-m}. \tag{4.3}$$

D'autre part, comme f est positive et convexe on en déduit à partir de l'inégalité de Jensen la relation suivante:

$$\Big(\int_\Omega \Theta(x,t)dx\Big)_t \leq \frac{\delta}{2^{m+1}} \int_\Omega (1 - a\Theta(x,t))dx, \tag{4.4}$$

alors en intégrant (4.4) entre 0 et t on obtient

$$\int_\Omega (1 - a\Theta(x,t))dx \geq e^{-\frac{a\delta}{2^{m+1}}t} \int_\Omega (1 - a\Theta_0(x))dx. \tag{4.5}$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée quand $t \longrightarrow t^*$ on a

$$\int_\Omega (1 - a\Theta_0(x))dx \leq 0, \implies \Theta_0(x) = \frac{1}{a} \text{ p.p. } x \in \Omega$$

ceci contredit notre hypothèse et montre qu'on ne peut pas avoir extinction de la température en temps fini.

3 Conditions thermiques de Dirichlet.

Soit le problème de Dirichlet suivant

$$(P') \begin{cases} \Theta_t - \Theta_{xx} = \delta \dfrac{f(\Theta)}{\Big(\int_\Omega f(\Theta)dx\Big)^{m+1}} & (x,t) \in \Omega \times [0,T) \\ \Theta(x,t) = 1 & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T) \\ \Theta(x,0) = \Theta_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

On s'intéresse dans la suite à l'existence de solutions stationnaires classiques associées aux problème (P'). On note $\Theta = \Theta(x)$ la solution du problème stationnaire (S) associée à (P'):

$$(S)\begin{cases} \Theta_{xx} + \delta\frac{f(\Theta)}{K^{m+1}} = 0 & -1 < x < 1 \\ \Theta(\pm 1) = 1 \end{cases}$$

avec $K = \int_\Omega (1-a\Theta)^{-\frac{1}{m}}dx = 2\int_0^1 (1-a\Theta)^{-\frac{1}{m}}dx$. Comme $\Theta_{xx} < 0$ et $\Theta > 0$ sur $(-1,1)$ donc il existe un unique maximum pour Θ. D'après ([GNN]) la solution du problème (S) est symétrie par rapport au centre de la bande, $\Theta_x(0) = 0$.

Théorème 4.2

(a) Si $0 < m \leq 1$, Le problème (S) admet une unique solution pour tout $\delta > 0$.

(b) Si $m > 1$, il existe une constante $C(m,a)$ telle que (S) admet une unique solution si $\delta < C(m,a)$.

Preuve. Pour la raison de symétrie, le problème (S) peut s'écrire de la façon suivante

$$\begin{cases} \Theta_{xx} + \delta\dfrac{(1-a\Theta)^{-\frac{1}{m}}}{K^{m+1}} = 0 \\ \Theta_x(0) = 0 \ , \ \Theta(1) = 1 \end{cases},$$

On intégre l'équation aux dérivées partielles de (S) entre 0 et 1, sachant que $\Theta_x(0) = 0$, on a:

$$\Theta_x(1) = -\frac{\delta}{2K^m}. \tag{4.6}$$

D'autre part si on multiplie l'équation aux dérivées partielles de (S) par $2\Theta_x$ puis on intégre entre 0 et x on aura;

$$\Theta_x^2(x) = \frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}(1-a\Theta(x))^{\frac{m-1}{m}} - \frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}(1-aM)^{\frac{m-1}{m}},$$

$$\Theta_x^2(x) = \frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}\left[(1-aM)^{\frac{m-1}{m}} - (1-a\Theta(x))^{\frac{m-1}{m}}\right], \quad (4.7)$$

où $M = \Theta(0) = \max_{x\in\Omega}\Theta(x)$ représente la température au centre de la bande cisaillée et $m \neq 1$. On distingue trois cas dans la suite: $0 < m < 1$, $m > 1$ et $m = 1$.

1er cas : $0 < m < 1$.

A partir de l'expression (4.7) pour $x = 1$, on a;

$$\frac{\delta^2}{4K^{2m}} = \frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}\left[(1-aM)^{\frac{m-1}{m}} - (1-a)^{\frac{m-1}{m}}\right], \quad (4.8)$$

ceci nous permet de résoudre l'expression (4.8) pour K inconnue:

$$K^{1-m} = \frac{8m}{a(1-m)\delta}(1-aM)^{\frac{m-1}{m}}\left[1-\left(\frac{1-aM}{1-a}\right)^{\frac{1-m}{m}}\right], \quad (4.9)$$

d'où

$$K = \left[\frac{8m}{a(1-m)\delta}\right]^{\frac{1}{1-m}}(1-aM)^{-\frac{1}{m}}\left[1-\left(\frac{1-aM}{1-a}\right)^{\frac{1-m}{m}}\right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (4.10)$$

Puisque $\Theta_x(x) < 0$ sur $(0,1)$, à partir de (4.7) on obtient l'expression suivante:

$$-\Theta_x(x) = \sqrt{\frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}}\left[(1-aM)^{\frac{m-1}{m}} - (1-a\Theta(x))^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.11)$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante;

$$\sqrt{\frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}}\; x = -\int_0^x \frac{d\Theta}{\left[(1-aM)^{\frac{m-1}{m}} - (1-a\Theta)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.12)$$

Pour calculer le terme de droite de l'expression (4.12), on pose $y = \frac{1-a\Theta}{1-aM}$, alors $-\int_0^x \frac{d\Theta}{\left[(1-aM)^{\frac{m-1}{m}} - (1-a\Theta)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{1}{a}(1-aM)^{\frac{m+1}{2m}} \int_1^{\frac{1-a\Theta(x)}{1-aM}} \frac{dy}{(1-y^{\frac{m-1}{m}})^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.13}$$

soit $z = \sqrt{1-y^{\frac{m-1}{m}}}$, alors on a; $\sqrt{\frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}}x$

$$= \frac{2m}{a(1-m)}(1-aM)^{\frac{m+1}{2m}} \int_0^{\sqrt{1-y^{\frac{m-1}{m}}}} (1-z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz. \tag{4.14}$$

En particulier pour $x = 1$, $\Theta = 1$ on a

$$\sqrt{\frac{2\delta m}{a(1-m)K^{m+1}}} = \frac{2m(1-aM)^{\frac{m+1}{2m}}}{a(1-m)} \int_0^r (1-z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz \tag{4.15}$$

où $r = \sqrt{1-(\frac{1-aM}{1-a})^{\frac{1-m}{m}}}$. En remplaçant K par son expression (4.10) dans (4.15) , on peut exprimer δ en fonction de r;

$$\delta = \delta(r) = \frac{2^{m+2}m}{a(1-m)} r^{m+1} \Big(\int_0^r (1-z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz \Big)^{1-m}. \tag{4.16}$$

Pour $M \in [1, \frac{1}{a})$, on a $r \in [0,1)$ et la fonction $\delta = \delta(r)$ définie par (4.16) vérifie $\delta(0) = 0$, $\lim_{r \to 1} \delta(r) = +\infty$ et elle est positive pour tout $r \in (0,1)$. D'autre part on a; $\delta'(r) = C_{m,a} \Big(\frac{r}{\int_0^r (1-z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz} \Big)^m$

$$\Big\{ (m+1) \int_0^r (1-z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz + (1-m) r (1-r^2)^{\frac{1}{m-1}} \Big\} > 0$$

pour tout r et m dans $(0,1)$ avec $C_{m,a} = \dfrac{2^{m+2}m}{a(1-m)}$. D'après les observations faites ci-dessus on en déduit le diagramme (δ, r) suivant, où δ est définie par

$$\delta = \delta(r) = \frac{2^{m+2}m}{a(1-m)} r^2 \, \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; r^2\Big)^{1-m} \tag{4.17}$$

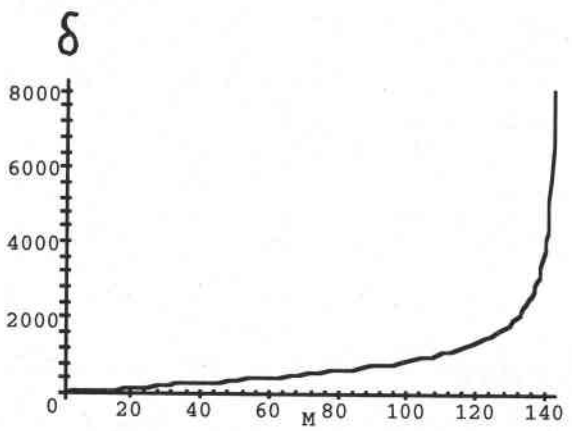

Fig 4.1: Solution maximale pour $0 < m < 1$.

Par conséquent, $\forall\ \delta > 0$ le problème (S) admet une unique solution maximale pour tout $m \in (0,1)$.

Il reste à montrer l'existence des solutions stationnaires $\Theta(x)$. D'après la Figure 4.1, on sait que pour une valeur donnée du paramètre δ correspond une unique température centrales $\Theta(0) = M$. Les solutions stationnaires sont uniquement déterminées à partir de (4.12), pour lesquelles on exprime x en fonction de $\Theta(x)$ pour une valeur de $r = r(M)$ donné par (4.17). Explicitement on a:

$$x = \sqrt{\frac{(1-m)K^{m+1}}{2\delta a m}} \Big(1 - aM\Big)^{\frac{m+1}{2m}} \int_1^{\frac{1-a\Theta(x)}{1-aM}} \frac{dy}{\Big(1 - y^{\frac{m-1}{m}}\Big)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$x = x(u) = \sqrt{\frac{2mK^{m+1}\left(1-aM\right)^{\frac{m+1}{m}}}{a\delta(1-m)}}\; u(x)\; \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; u^2(x)\Big),$$

où $u(x) = \sqrt{1 - \Big[\dfrac{1-aM}{1-a\Theta(x)}\Big]^{\frac{1-m}{m}}}$.

2e cas : $m > 1$

On procéde d'une manière similaire que pour le premier cas;

$$\Theta_x^2(x) = \frac{2\delta m}{a(m-1)K^{m+1}}\Big[(1-a\Theta)^{\frac{m-1}{m}} - (1-aM)^{\frac{m-1}{m}}\Big]. \qquad (4.18)$$

A partir des expressions (4.6) et (4.18) on déduit que:

$$K^{1-m} = \frac{8m}{a(m-1)\delta}(1-aM)^{\frac{m-1}{m}}\Big[\Big(\frac{1-a}{1-aM}\Big)^{\frac{m-1}{m}} - 1\Big], \qquad (4.19)$$

d'où

$$K = \Big[\frac{8m}{a(m-1)\delta}\Big]^{\frac{1}{1-m}}(1-aM)^{-\frac{1}{m}}\Big[\Big(\frac{1-a}{1-aM}\Big)^{\frac{m-1}{m}} - 1\Big]^{\frac{1}{1-m}}. \qquad (4.20)$$

Comme $\Theta_x(x) < 0$ pour $x \in (0,1)$ on a;

$$-\Theta_x(x) = \sqrt{\frac{2\delta m}{a(m-1)K^{m+1}}}\Big[(1-a\Theta)^{\frac{m-1}{m}} - (1-aM)^{\frac{m-1}{m}}\Big]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.21)$$

ou bien,

$$\sqrt{\frac{2\delta m}{a(m-1)K^{m+1}}}\; x = -\int_0^x \frac{d\Theta}{\Big[(1-a\Theta)^{\frac{m-1}{m}} - (1-aM)^{\frac{m-1}{m}}\Big]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (4.22)$$

On considère le même changement de variables que le précédent, c'est à dire $y = \dfrac{1-a\Theta}{1-aM}$, alors $-\displaystyle\int_0^x \frac{d\Theta}{\left[(1-a\Theta)^{\frac{m-1}{m}} - (1-aM)^{\frac{m-1}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{1}{a}(1-aM)^{\frac{m+1}{2m}} \int_1^{\frac{1-a\Theta(x)}{1-aM}} \frac{dy}{(y^{\frac{m-1}{m}} - 1)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.23}$$

Dans ce cas si on pose $z = \sqrt{y^{\frac{m-1}{m}} - 1}$, alors $\sqrt{\dfrac{2\delta m}{a(m-1)K^{m+1}}}\, x$

$$= \frac{2m}{a(m-1)}(1-aM)^{\frac{m+1}{2m}} \int_0^{\sqrt{y^{\frac{m-1}{m}}-1}} (1+z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz, \tag{4.24}$$

pour tout $x \in [0,1]$. En particularisant $x = 1$, $\Theta = 1$ on a

$$\sqrt{\frac{2\delta m}{a(m-1)K^{m+1}}} = \frac{2m}{a(m-1)}(1-aM)^{\frac{m+1}{2m}} \int_0^r (1+z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz, \tag{4.25}$$

où $r = \sqrt{(\frac{1-a}{1-aM})^{\frac{m-1}{m}} - 1}$. En remplaçant K par son expression (4.20) dans (4.25) , on peut définir δ comme fonction de r;

$$\delta = \delta(r) = C'_{m,a} r^{m+1} \Big(\int_0^r (1+z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz \Big)^{1-m}, \tag{4.26}$$

où $C'_{m,a} = \dfrac{2^{m+2}m}{a(m-1)}$. Pour $M \in [1, \frac{1}{a})$, on a $r \in [0, +\infty)$, on remarque que la fonction $\delta = \delta(r)$ définie par (4.26) vérifie $\dfrac{C'_{m,a} r^2}{1+r^2} \leq \delta(r) \leq C'_{m,a} r^2$, donc $\delta(0) = 0$. Pour la limite en $+\infty$, on calcule d'abord l'intégrale du membre de droite de (4.26): $\displaystyle\int_0^r (1+z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz =$

$r\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; -r^2\Big)$, alors $\delta(r) = \dfrac{C'_{m,a} r^2}{\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; -r^2\Big)^{m-1}}$. En utilisant quelques transformations sur la fonction hypergéométrique ([$AK1$]) on a

$$\delta(r) = \frac{r^2}{1+r^2} \frac{C'_{m,a}}{\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1-m}, 1; \frac{3}{2}; \frac{r^2}{1+r^2}\Big)^{m-1}},$$

$$\lim_{r \to +\infty} \delta(r) = \frac{C'_{m,a}}{\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1-m}, 1; \frac{3}{2}; 1\Big)^{m-1}} = C'_{m,a}\Big(\frac{m+1}{m-1}\Big)^{m-1} = C(m,a),$$

donc cette constante est une asymptote horizontale pour la courbe d'équation $\delta = \delta(r)$. Etudions le sens de variation de la fonction δ;

$$\delta'(r) = C'_{m,a}\Big(\frac{r}{\int_0^r (1+z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz}\Big)^m g(r),$$

où $g(r) = (m+1)\displaystyle\int_0^r (1+z^2)^{\frac{1}{m-1}} dz + (1-m) r (1+r^2)^{\frac{1}{m-1}}$ et ayant pour dérivée $g'(r) = 2(1+r^2)^{\frac{1}{m-1}-1} > 0$, donc $g(r) > g(0) = 0$, il suit que $\delta'(r) > 0 \ \forall r \in (0, +\infty)$. Par conséquent pour tout $\delta < C(m,a)$ il existe une unique solution pour le problème (S) si $m > 1$ et pas de solution si $\delta \geq C(m,a)$.

D'après les observations faites ci-dessus, on en déduit le le diagramme (δ, r) suivant, où δ est donnée par

$$\delta = \delta(r) = C'_{m,a} r^2 \ \mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{1-m}; \frac{3}{2}; -r^2\Big)^{1-m} \tag{4.27}$$

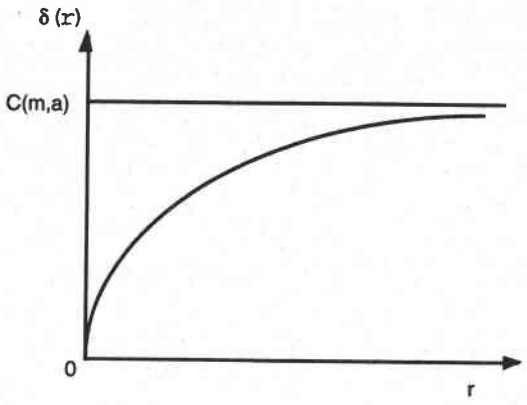

Fig 4.2: Solution maximale si $m > 1$.

D'après la Figure 4.2, on sait que pour une valeur donnée du paramètre $\delta < C(m,a)$ correspond une unique valeur de r ($\Theta(0) = M$). La solution stationnaire est uniquement déterminée à partir de (4.24), pour laquelle on exprime x en fonction de $\Theta(x)$ pour une valeur de $r = r(M)$ donné par (4.27). Explicitement on a:

$$x = \sqrt{\frac{2mK^{m+1}}{a\delta(1-m)}}\left(1-aM\right)^{\frac{m+1}{2m}} \int_0^{\sqrt{\left(\frac{1-a\Theta(x)}{1-aM}\right)^{\frac{m-1}{m}}-1}} (1+z^2)^{\frac{1}{m-1}}dz,$$

3e cas : $m = 1$.

On associe au problème (P') le problème stationnaire suivant:

$$(S)\begin{cases} \Theta_{xx} + \delta\frac{f(\Theta)}{K^2} = 0, & -1 < x < 1 \\ \Theta(\pm 1) = 1. \end{cases}$$

La solution de (S), qu'on dénote par $\Theta = \Theta(x,\eta)$ vérifie:

$$\Theta_{xx} + \eta f(\Theta) = 0 \quad -1 < x < 1, \quad \Theta(\pm 1) = 1$$

où $\delta = \left(\int_{-1}^{1} f(\Theta)dx\right)^2 \eta$ et $f(\Theta) = (1-a\Theta)^{-1}$. On intégre l'équation aux dérivée partielle de (S) entre -1 et 1, on a; $\Theta_x(1) - \Theta_x(-1) =$

$-\eta \int_{-1}^{1} f(\Theta)dx$. Sachant que $\Theta_x(1) = -\Theta_x(-1)$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} f(\Theta)dx = -\frac{2}{\eta}\Theta_x(1).$$

D'autre part on a aussi:

$$2\int_0^1 \Theta_x \Theta_{xx} dx + 2\eta \int_0^1 f(\Theta)d\Theta = 0$$

$$\Theta_x^2(1) = 2\eta \int_1^{\Theta(0,\eta)} f(s)ds$$

avec $\Theta_x(0) = 0 \implies \dfrac{4\Theta_x^2(1)}{\eta} = 8\displaystyle\int_1^{M(\eta)} f(s)ds$, où $M(\eta) = \Theta(0,\eta) = \max_{x\in[-1,1]} \Theta(.,\eta)$. D'où;

$$\delta(M) = 8\int_1^M f(s)ds = 8\int_1^M \frac{ds}{1-as} = \frac{8}{a}\ln\Big(\frac{1-a}{1-aM}\Big)$$

$$M(\delta) = \frac{1}{a} - \Big(1 - \frac{1}{a}\Big)e^{-\frac{a\delta}{8}}.$$

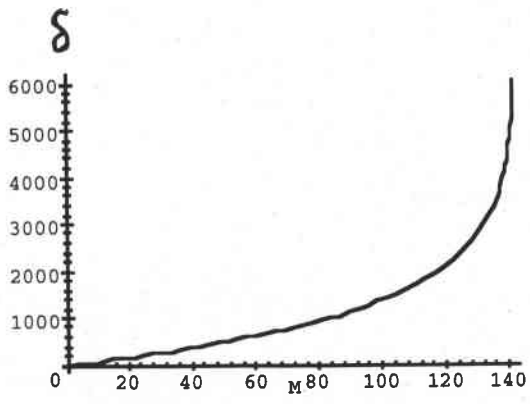

Fig 4.3: Solution maximale si $m = 1$.

Comme $\int_1^{\frac{1}{a}} f(s)ds = +\infty$, alors il existe une unique solution Θ pour le problème (S) $\forall\ \delta > 0$. De plus on remarque que $\Theta \longrightarrow \frac{1}{a}$, quand $\delta \longrightarrow +\infty$, uniformement sur tout compact de $\Omega = (-1, 1)$.

4 Etude du problème dépendant du temps.

On peut utiliser les résultats d'invariances de Bebernes et Ely ($[BE]$) pour montrer que le problème (P') admet des solutions $\forall \delta > 0$.

Soit $H : \bar{\Omega}_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x, t, \Theta, p) \longrightarrow H(x, t, \Theta, p)$ une fonction hölder continue d'exposants $d, \frac{d}{2}, d, d$ respectivement pour les variables x, t, Θ, p.
Soit Φ un opérateur définie sur $C^0(\bar{\Omega}_T)$ tel que $\Phi : C^k(\bar{\Omega}_T) \longrightarrow C^k(\bar{\Omega}_T)$ est bornée $\forall\ k \in [0, 1]$ et $\Phi : C^0(\bar{\Omega}_T) \longrightarrow C^0(\bar{\Omega}_T)$ est continue.

Définition 4.1 Pour v respectivement $w \in C^0(\bar{\Omega}_T)$, $v(x,t) \leq w(x,t)$ $(x,t) \in \Omega_T$. On définie $\forall\ (x,t) \in \Omega_T$ les ensembles suivants:

$S_v(x,t) =$
$\{\Theta \in C^0(\bar{\Omega}_T) : v(y,s) \leq \Theta(y,s) \leq w(y,s), (y,s) \in \Omega_T, \Theta(x,t) = v(x,t)\}$,
$S_w(x,t) =$
$\{\Theta \in C^0(\bar{\Omega}_T) : v(y,s) \leq \Theta(y,s) \leq w(y,s), (y,s) \in \Omega_T, \Theta(x,t) = w(x,t)\}$.

Pour le problème nonlocal suivant:

$$(P1)\begin{cases} \Theta_t - \Delta\Theta = H(x,t,\Theta,\phi\Theta) & (x,t) \in \Omega_T \\ \Theta(x,t) = \Psi(x,t) & (x,t) \in B_T \end{cases}$$

où $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ et $B_T = \Big(\partial\Omega \times [0,T)\Big) U \Big(\Omega \times \{0\}\Big)$.

Alors on a,

Définition 4.2 Une paire de fonctions $v, w \in C^{2,1}(\Omega_T)$ est sous-sur solution pour le problème $(P1)$ si $\forall\ (x,t) \in B_T\ v(x,t) \leq \Psi(x,t) \leq w(x,t)$, $v(x,t) \leq w(x,t)$ pour $(x,t) \in \bar{\Omega}_T$ et $\forall\ (x,t) \in \Omega_T\ v, w$ vérifient;

$$v_t - \Delta v \leq H(x,t,\Theta,\phi\Theta) \qquad \forall\ \Theta \in S_v(x,t),$$

$$w_t - \Delta w \geq H(x,t,\Theta,\phi\Theta) \qquad \forall\ \Theta \in S_w(x,t).$$

Soient $v(x,t) \equiv 0$ sur Ω_T et $w(x)$ la solution du problème auxiliaire suivant:

$$(S1)\begin{cases} -w_{xx} = \eta \dfrac{f(w)}{\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega \\ w = 1 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Théorème 4.3 *Si le problème $(S1)$ admet une solution w, avec δ vérifiant la condition $\delta < \dfrac{2^{m+1}\eta}{\left(\int_\Omega f(w)dx\right)^{m+1}}$ et $\Theta_0(x) < w(x)$ pour $x \in \Omega$, alors $v \equiv 0$ et w forment une paire de sous-sur solution pour le problème (P').*

Preuve. Soient $(x,t) \in \Omega_T$ et $\Theta \in S_v(x,t)$, on a; $v \equiv 0 \leq \Theta(y,s) \leq w(y)\ \forall\ (y,s) \in \bar{\Omega}_T$. Ainsi

$$\frac{1}{\left(\int_\Omega f(w)dy\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{\left(\int_\Omega f(\Theta)dy\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{2^{m+1}}$$

et

$$v_t - v_{xx} \equiv 0 \leq \frac{\delta}{\left(\int_\Omega f(\Theta)dy\right)^{m+1}} \leq \delta \frac{f(\Theta)}{\left(\int_\Omega f(\Theta)dy\right)^{m+1}},$$

Soient $(x,t) \in \Omega_T$ et $\Theta \in S_w(x,t)$, on a; $v \equiv 0 \leq \Theta(y,s) \leq w(y)$ $\forall\,(y,s) \in \bar{\Omega}_T$.

$$\frac{1}{\left(\int_\Omega f(w)dy\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{\left(\int_\Omega f(\Theta)dy\right)^{m+1}} \leq \frac{1}{2^{m+1}}$$

Ainsi

$$w_t - w_{xx} = \frac{\eta f(w)}{\left(\int_\Omega f(w)dy\right)^{m+1}} \geq \eta \frac{f(\Theta)}{\left(\int_\Omega f(w)dy\right)^{m+1}}$$

$$\geq \frac{\delta}{2^{m+1}} f(\Theta) \geq \frac{\delta f(\Theta)}{\left(\int_\Omega f(\Theta)dy\right)^{m+1}}.$$

Alors v, w forment une paire de sous-sur solution pour le problème (P').

Corollaire 4.1 *Si $\Theta_0(x) \leq w(x)$, $x \in \Omega$, où w est solution du problème auxiliaire $(S1)$, alors le problème (P') admet une solution Θ sur $\Omega \times [0,\infty)$ de plus $\Theta(x,t) \leq w(x)$ sur $\Omega \times [0,\infty)$.*

Preuve. On se réfère à l'existence de solutions stationnaires du problème (S) et au théorème précédent.

5 Conditions thermiques mixtes.

On associe à l'équation parabolique nonlocale (4.2) des conditions aux bords de type Robin:

$$\Theta_x(\pm 1) + \alpha\Big(\Theta(\pm 1) - 1\Big) = 0, \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega.$$

où α une constante. Ainsi, on considère le problème suivant

$$(P'') \begin{cases} \Theta_t = \Theta_{xx} + \delta \dfrac{f(\Theta)}{\left(\int_\Omega f(\Theta)dx\right)^{m+1}} & x \in \Omega, t \in [0,T) \\ \Theta_x(x,t) + \alpha\Big(\Theta(x,t) - 1\Big) = 0 & x \in \partial\Omega, t \in [0,T) \\ \Theta(x,0) = \Theta_0(x) & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

où $f(s)$ est une fonction non linéaire, croissante, positive pour $s \geq 0$ qui est définie par $f(s) = \Big(1 - as\Big)^{-\frac{1}{m}}$, $\forall\ s \in [0, \frac{1}{a})$. où $0 < a \ll 1$ et $m > 0$ sont des constantes. De plus on a; $f(s) \longrightarrow +\infty$ quand $s \longrightarrow \dfrac{1}{a}$.
On s'intéresse à la question d'existence de solutions stationnaires classiques ainsi qu' au problème d'extinction des solutions d'évolutions.
On propose d'étudier en premier lieu l'existence de solutions stationnaires du problème (P''). On dénote par $u(x)$ la solution du problème suivant:

$$(S)\begin{cases} u_{xx} + \delta \dfrac{f(u)}{\Big(\int_\Omega f(u)dx\Big)^{m+1}} = 0 & x \in \Omega \\ u_x + \alpha(u-1) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Cette solution $u(x)$ vérifie aussi le problème (S) qui s'écrit de la façon suivante

$$u_{xx} + \mu f(u) = 0 \quad -1 < x < 1,\ \ u_x(\pm 1) + \alpha\Big(u(\pm) - 1\Big) = 0, \quad (5.1)$$

avec $\delta = \Big(\int_\Omega f(u)dx\Big)^{m+1}\ \mu$. Intégrer l'équation différentielle ordinaire précédente sur Ω on obtient

$$\delta = \Big(u_x(-1) - u_x(1)\Big)^{m+1}\ \mu^{-m} = 2^{m+1}\alpha^{m+1}\ (\eta - 1)^{m+1}\ \mu^{-m}, \quad (5.2)$$

où $\eta = u(\pm 1) := \min\limits_{x\in\Omega} u(x)$. D'autre part, si on multiplie l'équation (5.1) par $2u_x$ puis on intégre sur $[0,1]$,sachant que le problème présente une symétrie en 0, $(u_x(0) = 0)$, alors on obtient

$$u_x^2(1) = 2\ \mu\ \int_\eta^M f(s)ds, \quad (5.3)$$

où $M := u(0) = \max\limits_{x\in\Omega} u(x)$ et $\eta = u(\pm 1) := \min\limits_{x\in\Omega} u(x) < M$, qui est positif. Donc

$$\delta = 2^{2m+1}\ \alpha^{1-m}\ (\eta - 1)^{1-m}\ \Big(\int_\eta^M f(s)ds\Big)^m. \quad (5.4)$$

Comme $u_{xx} < 0$ on a; $u(x) < \eta + \alpha(\eta - 1)(1 - |x|)$, alors, $M < (\alpha+1)\eta - \alpha$. Explicitement si on calcule l'intégrale du membre de droite de (5.4), on aura;

$$\delta(M) = \frac{2^{2m+1}\ \alpha^{1-m}\ (\eta-1)^{1-m}}{(1-a\eta)^{1-m}} \Big[\frac{m}{a(1-m)}\Big]^m \Big[\Big(\frac{1-a\eta}{1-aM}\Big)^{\frac{1-m}{m}} - 1\Big]^m.$$

On remarque que la fonction $\delta = \delta(M)$ vérifie $\delta(M) > 0\ \forall M \in [\eta, \frac{1}{a})$, $\lim\limits_{M \to \frac{1}{a}} \delta(M) = \infty$, $\lim\limits_{M \to \eta} \delta(M) = 0$ et on a aussi $\delta'(M) > 0\ \forall M \in [\eta, \frac{1}{a})$.

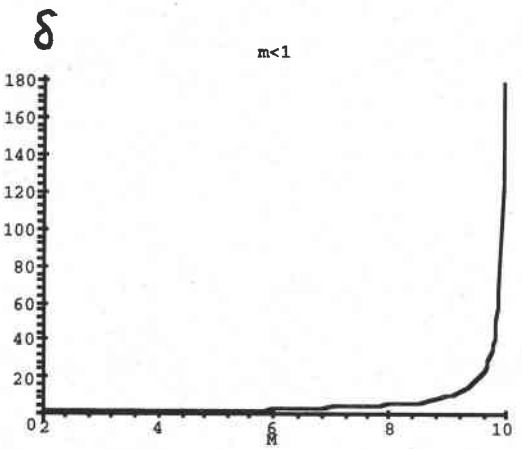

Fig 4.4: Fonction de la température centrale $(m < 1)$**.**

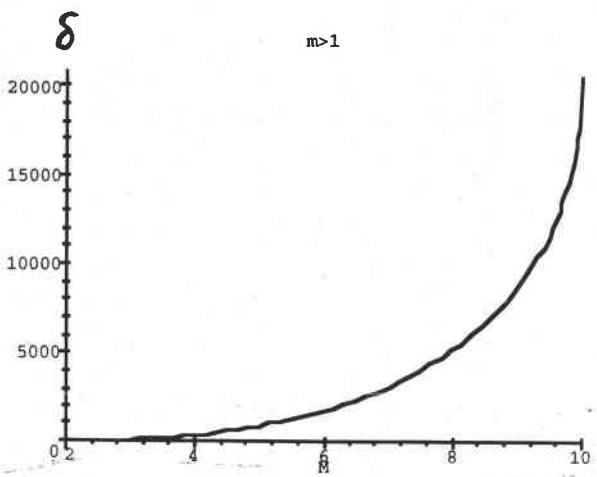

Fig 4.5: Fonction de la température centrale $(m > 1)$**.**

Supposons que $m = 1$, alors $f(s) = \dfrac{1}{1 - as}$ et dans ce cas on a;

$$\delta = 8 \int_{\eta}^{M} f(s)ds, \tag{5.6}$$

ainsi on en déduit que

$$M = M(\delta) = \frac{1}{a} - \Big(\frac{1}{a} - \eta\Big)e^{-\frac{a\delta}{8}}. \tag{5.7}$$

On remarque que la fonction $M(\delta)$ définie par (5.7) vérifie $M(\delta) > 0$ $\forall\ \delta > 0$, $M(\delta) \longrightarrow \frac{1}{a}$ quand $\delta \longrightarrow \infty$ et $M(\delta) \longrightarrow \eta$ quand $\delta \longrightarrow 0$.
Les observations faites ci-dessus sont regroupées sur la figure suivante:

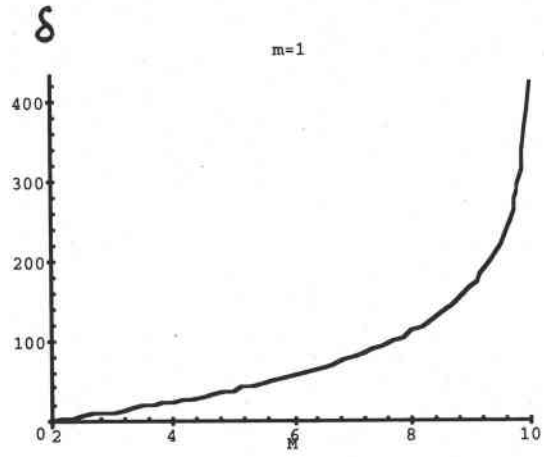

Fig 4.6: Fonction de la température centrale $(m = 1)$.

Par conséquent pour tout $m > 0$ et $\delta > 0$, il existe une unique solution stationnaire maximale, $u(0) = M$ pour le problème (S).

Il reste à discuter l'existence et l'unicité des solutions stationnaires $u(x)$; pour cela, on multiplie l'équation différentielle de (S) par $2u_x$ puis on intégre entre 0 et x on obtient

$$u_x^2(x) = 2\ \mu \int_{u(x)}^{M} f(s)ds.$$

Comme $u_x(x) < 0$ pour $x \in (0,1)$ alors on en déduit

$$-u_x(x) = \sqrt{2\,\mu}\Big(\int_{u(x)}^{M} f(s)ds\Big)^{\frac{1}{2}},$$

alors, la solution stationnaire $u(x)$ est uniquement déterminée à partir de l'expression précédente, ce qui nous permet d'exprimer x en fonction de u. Plus précisement on a

$$x = x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\,\mu}} \int_{u(x)}^{M} \frac{d\xi}{\Big(\int_{\xi}^{M} f(s)ds\Big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant on revient au problème d'évolution (P'') qui est donné par:

$$(P'') \begin{cases} \Theta_t = \Theta_{xx} + \delta \dfrac{f(\Theta)}{\Big(\int_\Omega f(\Theta)dx\Big)^{m+1}} & x \in \Omega, t \in [0,T) \\ \Theta_x + \alpha(\Theta - 1) = 0 & x \in \partial\Omega, t \in [0,T) \\ \Theta(x,0) = \Theta_0(x) & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

Soit le changement de variable suivant:

$$w := \frac{a}{1-a}\Big(\Theta - 1\Big),$$

donc $w \in [-\frac{a}{1-a}, 1)$ et le problème (P'') est équivalent au problème suivant

$$(PM) \begin{cases} w_t = w_{xx} + \delta a \dfrac{f(w)}{\Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^{m+1}} & x \in \Omega, t \in [0,T) \\ w_x + \alpha w = 0 & x \in \partial\Omega, t \in [0,T) \\ w(x,0) = w_0(x) & x \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

où $f(w) = \Big(1-w\Big)^{-\frac{1}{m}}$. Intégrer directement l'équation de (PM) on obtient

$$\Big(\int_\Omega w dx\Big)_t = w_x(1,t) - w_x(-1,t) + \frac{\delta a}{\Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^m}.$$

En utilisant les conditions aux bords l'expression précédente devient:

$$\Big(\int_\Omega w dx\Big)_t = -\alpha \int_{\partial\Omega} w + \frac{\delta a}{\Big(\int_\Omega f(w)dx\Big)^m},$$

comme la fonction f est convexe, par l'inégalité de Jensen on en déduit l'expression suivante

$$\Big(\int_\Omega w dx\Big)_t < \frac{\delta a}{2^m\Big[f\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega w dx\Big)\Big]^m} = \frac{\delta a}{2^m\Big(1-\frac{1}{2}\int_\Omega w dx\Big)^{-1}}.$$

On pose $\bar{w}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega w(x,t)dx$, alors $\bar{w}(t)$ vérifie l'inéquation différentielle ordinaire suivante

$$\bar{w}_t < \frac{\delta a}{2^{m+1}}\Big(1-\bar{w}\Big),$$

cette inéquation peut s'écrire comme suit

$$\frac{\bar{w}_t}{1-\bar{w}} < \frac{\delta a}{2^{m+1}},$$

on intégre entre 0 et t on a

$$\bar{w}(t) < 1 - \Big(1-\bar{w}_0\Big)e^{-\frac{\delta a t}{2^{m+1}}} < 1.$$

Conclusion

Nous avons montré dans cette étude théorique qu'une analyse unidimensionnelle sur le cisaillement simple d'un matériau permet d'obtenir des informations significatifs sur le rôle joué par le coefficient de la sensibilité à la vitesse de déformation, l'adoucissement thermique, la conduction, les conditions aux bords et le comportement du matériau sur la formation des bandes de cisaillement.

Deux types de problèmes ont été étudiés: l'analyse non linéaire du régime stationnaire, explosion de la température en temps fini et l'étude de l'extinction de la température dans un matériau obéissant à une loi de comportement linéaire en température.

Pour le premier problème, le rôle de la condition à la limite thermique et l'influence des coefficients; sensibilité à la vitesse de déformation, l'adoucissement thermique sont analysés à partir de l'état stationnaire. Pour des conditions aux bords thermiques (Dirichlet ou Neumann) avec un contrôle en force, l'instabilité engendre des température et des vitesses de déformations très élevées conduisant généralement à la rupture ductile du matériau ce qui ne permet pas de rejoindre un état stationnaire stable. Dans cette configuration, la température dans le problème d'évolution explose en temps fini sous la condition thermique de Neumann. Egalement, on a explosion en temps fini de la température sous la condition thermique de Dirichlet pour une condition initiale assez grande. Par contre, si on impose des conditions de chargement en vitesse le résultat obtenu, évolution de la localisation vers des états stationnaires stables, définis en négligeant les propriétés d'écrouissage du matériau.

Concernant la loi de comportement d'Arrhénius, on avait remarqué qu'on ne peut obtenir des solutions stationnaires analytiques. Pour cela on montre l'existence de ces solutions au sens faible et par la théorie de régularité on montre que celles-ci sont classiques si elles sont de classe C^2. Finalement, l'analyse du problème d'évolution montre que toute solution existe globalement.

Dans le second problème, la formulation nous conduit à un problème semi-linéaire parabolique (resp un problème parabolique nonlocal) si on impose un contrôle en force (resp un chargement en vitesse). Dans cette configuration, les problèmes modélisés présentent une constante de singularité dépendant de l'adoucissement thermique du matériau. On montre l'existence de certaines solutions stationnaires instables en contrainte contrôlée et stable en vitesse imposée. Cette analyse dépend essentiellement du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformations et des conditions aux bords thermiques. Concernant, les problèmes d'évolutions, le résultat obtenu, on peut atteindre cette singularité en un temps fini.

Références Bibliographiques

[AK] - **A. Acker et B. Kawohl**: Remarks on quenching. Nonlinear Analysis. TMA (to appear).

[$AK1$] - **P. Appell et J. Kampé de Fériet**: Fonctions hypergéométriques et hypershpériques (Gauthiers-Villars, Paris, France, 1926).

[B] - **H. Bresis**: Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson (1987).

[BE] - **J. Bebernes et R. Ely**: Existence and invariance for parabolic functional equations. Nonlinear Analysis-TMA, 7 (1983), 1225-1235.

[BL] - **J.W. Bebernes et A.A. Lacey** : Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems. To appear.

[BWT] - **A.J. Bedford, A.L. Wingrove et K.R.L. Thomson**: J. Aust. Inst. Metals. vol. 19. (1974) p. 61-73.

[C] - **R.S. Culver** : Metallurgical Effects at High Strain Rates. Rohde ed. Pllpum Press. New York. (1973) p. 519.

[$CCHD$] - **L.S. Costin, E.E. Crismon, R.H. Hawley et J. Duffy**: Inst. Pys. Conf. Serie n ° 47, (1979) p. 90-100.

[Ch]- **M. Chipot**: Note sur les méthodes d'explosion de solutions.

[FM] - **A. Friedman et B. McLeod**: Blow-up of positive solutions of semi-linear heat equation. Indiana. Univ. Math. J. 34 (1985), 425-447.

[GNN] - **B.Gidas, W.M. Ni et L. Nirenberg**: Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68 (1979).

[*GT*] - **D. Gilbarg et N.S. Trudinger**: Elliptic partial differential equations of second order. Springer (1977).

[*H*] - **J.K. Hale**: Ordinary differential equations. Wiley (1969). Revised edition, Krieger (1980).

[*HY*] - **B. Hu et H-M. Yin**: Semilinear parabolic equations with prescribed energy. IMA Preprint Series. (1993), 1183.

[*J*] - **W. Johnson** : Henri Tresca as the originator of adiabatic heat lines. Inst. J. Mech. Sci. vol 29. n ° 5. (1987) p. 301.

[*JL*] - **D.D. Joseph et T.S. Lundgren**: Quasilinear Dirichlet problem driven by positive sources. Arch. Rat. Mech. Anal. 49 (1973), pp. 241-269.

[*K*] - **S. Kaplan**: On the growth of solutions quasilinear parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 327-347.

[*Ka*] - **H. Kawarada**: On solutions of initial boundary value problem for $u_t = u_{xx} + \frac{1}{(1-u)}$. RIMS Kyoto Univ. 10 (1975), 729-736.

[*L*] - **H. A. Levine**: Quenching, Nonquenching, and Beyond Quenching for Solutions of Some Parabolic Equations. Annal di Matematica pura ed applicata (1989). pp. 243-260.

[*LM*] - **Y. Leroy et A. Molinari**: Stability of steady state in shear zones. J. Mech. Phys. Solids. 40, N ° 1 (1992), 181-212.

[*Ma*] - **H.F. Massey** : The flow of metal during forging. Proc. Monchester. Asso. Engineers. (1921) p. 21.

[*M*] - **A. Molinari** : Themoviscoplastic instability in simple shear. J. Theoretical and Applied Mechanics. 40, N, (1985), 659-684.

[*MC*] - **A. Molinari et R.J. Clifton**: Localisation de la déformation visco- plastique en cisaillement simple: résultats théorie non linéaire. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. vol. 296, (1983), pp. 1-4.

[*MC*] - **A. Molinari et R.J. Clifton**: Analytical characterization of shear localization in thermoviscoplastic materials. J. Appl. Mech., vol. 54, (1987), pp. 806-812.

[*MD*] - **A. Marchand et J. Duffy**: An experimental study of formation of adiabatic shear bands in a structurel steel. J. Mech. Phys. Solids. 36 (1988), 251-283.

[*R*] - **H.C. Rogers** : Am. Rev. Mater. Sc. vol. 9. (1979) p. 283-311.

[*S*] - **M.R. Staker** : Acta Met. vol. 29. (1981) p. 683-689.

[*Sha*] - **T.G. Shawki**: Analysis of shear band formation at high strain rates and visco-plastic response of polycristals. Ph.d. thesis, Division of Engineering, Brown University, (1985).

[*ZH*] - **C. Zener et J.H. Hollomon**: J. Appl. Phys. vol. 15. (1944) p. 22-32.