



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

b 151934 SIM3 99/24



CRAN

CNRS UPRES-A 7039

Université de Metz - UFR MIM

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Metz**  
(Spécialité Mathématiques appliquées - Automatique)

par

Woihida AGGOUNE

---

**Contribution à la stabilisation de systèmes non  
linéaires :**

**Application aux systèmes non réguliers et aux  
systèmes à retards**

---

soutenue publiquement le 11 juin 1999 devant la commission d'examen :

*Rapporteurs :* B. d'ANDRÉA-NOVEL Professeur, École des Mines de Paris  
J.-P. RICHARD Professeur, École Centrale de Lille, LAIL

*Examineurs :* M. DAROUACH Professeur, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I  
J.-M. DION Directeur de recherche, CNRS, LAG, Grenoble  
R. OUTBIB Habilité à diriger des recherches, CRAN, Nancy I  
G. SALLET Professeur, Université de Metz  
M. ZASADZINSKI Chargé de recherche, CNRS, CRAN, Nancy I

---

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE INRIA-LORRAINE & CNRS UPRES-A-7035  
et du Centre de Recherche en Automatique de Nancy CRAN & CNRS UPRES-A 7039

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 304151 2

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1999062.S
Cote	S/M <sub>3</sub> 99/24
Loc	Magasin







*à mes chers parents, ma soeur et mes frères*

*à la mémoire de Hassan,*

## Remerciements

Cette thèse a été faite au sein de l'équipe CONGÉ (INRIA-Lorraine CNRS UPRES-A-7035) et du CRAN (CNRS UPRES A 7035), sous la direction du Professeur Gauthier Sallet et sous la co-direction du Professeur Mohamed Darouach.

Je remercie les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail :

Je tiens tout d'abord à remercier les Professeurs Gauthier Sallet et Mohamed Darouach, de m'avoir accueilli dans leurs Laboratoires. Je tiens aussi à les remercier de m'avoir donné les moyens d'effectuer cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Madame Brigitte d'Andréa-Novel et à Monsieur Jean-Pierre Richard d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Jean-Michel Dion qui me fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie Rachid Outbib pour l'aide qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur ZASADZINSKI Michel, qui me fait l'honneur de participer à ce jury ainsi que pour tous les conseils qu'il a pu me prodiguer.

Pour n'oublier personne, je remercie tous les membres de l'équipe CONGÉ, du LARAL et du Département de Mathématiques de l'Université de Metz.

Enfin, je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apportés leur contribution et leur aide de près ou de loin et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail, ni surtout ma famille qui a su faire preuve de patience et m'apporter son soutien.





# Table des matières

Notations	13
<b>I Stabilisation de systèmes non linéaires non réguliers</b>	<b>21</b>
<b>1 Rappels et Généralités</b>	<b>23</b>
1.1 Notions de stabilité	23
1.1.1 Définitions	23
1.1.2 Méthode de Lyapunov	24
1.1.3 Principe d'invariance de LaSalle	25
1.2 Stabilisation	25
1.2.1 Définitions	25
<b>2 Stabilisation par retour d'état</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction	27
2.2 Lemme technique	28
2.3 Résultats principaux	33
2.3.1 Premier résultat principal	33
2.3.2 Deuxième résultat principal	37
2.4 Remarques et exemples	40
2.5 Conclusion	44
<b>3 Stabilisation par ajout d'intégrateurs</b>	<b>45</b>
3.1 Introduction	45
3.2 Lemme technique	46
3.3 Résultat principal	51
3.4 Remarques et exemples	52
3.4.1 Exemple 1	52
3.4.2 Exemple 2	53
3.5 Conclusion	55
<b>II Stabilisation de systèmes différentiels à retards</b>	<b>57</b>
<b>4 Préliminaires et résultats de base</b>	<b>59</b>
4.1 Petit rappel historique	59
4.2 Exemples	60
4.3 Rappels et Généralités	61

4.3.1	Définitions et notations . . . . .	61
4.3.2	Notions de stabilité pour les systèmes à retards . . . . .	62
4.3.3	Méthode des fonctionnelles de Lyapunov . . . . .	63
4.3.4	Méthode des fonctions de Lyapunov-Razumikhin . . . . .	64
4.4	Stabilisation . . . . .	65
4.4.1	Retour d'état . . . . .	65
4.4.2	Retour d'état basé observateur . . . . .	65
4.5	Remarque . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Stabilisation par commande par retour d'état</b>	<b>67</b>
5.1	Introduction . . . . .	67
5.2	Description des systèmes considérés . . . . .	68
5.3	Conditions de stabilisation . . . . .	69
5.4	Lois de commande pour des systèmes non linéaires à retards . . . . .	71
5.5	Généralisation au cas de retards multiples . . . . .	72
5.6	Conditions de stabilisation équivalentes . . . . .	75
5.6.1	Préliminaires . . . . .	75
5.6.1.1	Lemme borné réel strict . . . . .	75
5.6.1.2	Matrice hamiltonienne . . . . .	76
5.6.2	Conditions sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	77
5.6.2.1	Cas du système en boucle fermée . . . . .	77
5.6.2.2	Cas du système en boucle ouverte . . . . .	78
5.6.3	Conditions sur la matrice hamiltonienne . . . . .	78
5.6.3.1	Cas du système en boucle fermée . . . . .	78
5.6.3.2	Cas du système en boucle ouverte . . . . .	78
5.6.4	Remarques . . . . .	79
5.7	Exemple . . . . .	79
5.8	Conclusion . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Stabilisation par commande basée observateur</b>	<b>83</b>
6.1	Introduction . . . . .	83
6.2	Observateurs pour une classe de systèmes à retards . . . . .	84
6.2.1	Résultat principal . . . . .	84
6.2.2	Synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes à retards . . . . .	87
6.3	Stabilisation à l'aide d'observateurs . . . . .	89
6.4	Exemple . . . . .	91
6.5	Conclusion . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Stabilisation par commande par mode de glissement</b>	<b>95</b>
7.1	Introduction . . . . .	95
7.2	Description du système . . . . .	96
7.3	Synthèse de la commande . . . . .	96
7.4	Stabilité du mode de glissement . . . . .	98
7.4.1	Détermination du mode de glissement . . . . .	99
7.4.2	Conditions de stabilité du mode de glissement . . . . .	99
7.5	Remarques . . . . .	101
7.6	Exemple . . . . .	103

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>11</b>
7.7 Conclusion . . . . .	104
<b>A Lemme 1</b>	<b>107</b>
<b>B Lemme 2</b>	<b>109</b>
<b>C Complément et Lemme de Schur</b>	<b>113</b>
<b>D Quelques résultats de base sur la commande par mode de glissement</b>	<b>115</b>
D.1 Commande par mode de glissement . . . . .	115
D.1.1 Définitions . . . . .	115
D.1.2 Commande par mode de glissement . . . . .	116
<b>Bibliographie</b>	<b>126</b>

---



# Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}^n$	Espace euclidien des vecteurs de dimension $n$
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels de $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles à $n$ lignes et $m$ colonnes
$\mathbf{M}^{-1}$	Inverse de la matrice $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}^T$	Transposée de la matrice $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}^*$	Transposée conjuguée de la matrice $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}^{\frac{1}{2}}$	Racine carrée de la matrice $\mathbf{M}$
$\det(\mathbf{M})$	Déterminant de la matrice $\mathbf{M}$
$\text{tr}(\mathbf{M})$	Trace de la matrice $\mathbf{M}$

---

$\lambda_{\max}(\mathbf{M})$	Plus grande valeur propre de $\mathbf{M}$
$\lambda_{\min}(\mathbf{M})$	Plus petite valeur propre de $\mathbf{M}$
$\bar{\sigma}(\mathbf{M})$	Plus grande valeur singulière de $\mathbf{M}$
$\ \mathbf{M}\ $	Norme spectrale de $M$ : $\ \mathbf{M}\  = \bar{\sigma}(\mathbf{M})$
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité de dimension $n$
$\mathbf{v}^T$	Transposée du vecteur $\mathbf{v}$
$\mathbf{v}^*$	Transposée conjuguée du vecteur $\mathbf{v}$
$\mathbf{v}_i$	$i$ -ème composante du vecteur $\mathbf{v}$
$\operatorname{Re}(\mathbf{z})$	Partie réelle du nombre complexe $\mathbf{z}$
$\operatorname{Im}(\mathbf{z})$	Partie imaginaire du nombre complexe $\mathbf{z}$
$ \cdot $	Valeur absolue d'un réel ou norme euclidienne d'un vecteur
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire usuel
$\ \cdot\ _2$	Norme $\mathcal{L}_2$
$\ \cdot\ _\infty$	Norme $\mathcal{H}_\infty$
$\bullet \mathcal{C}_n = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$	Espace de Banach des fonctions continues de l'intervalle $[-r, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme
$\ \cdot\ _n$	Norme sur $\mathcal{C}_n$ définie par $\ \phi\ _n = \sup_{t \in [-r, 0]}  \phi(t) $ , $\forall \phi \in \mathcal{C}_n$
$\mathbf{x}_t$	Elément de $\mathcal{C}_n$ défini par $\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta)$ , $\forall \theta \in [-r, 0]$

- Pour tout  $n$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}^n$ , on pose  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .
- Pour une fonction scalaire  $h$  et un  $n$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} h = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} h$$

désignera la dérivée partielle d'ordre  $|\alpha|$  de  $h$ .

---

- Pour tout champ de vecteurs  $X$  défini sur  $\mathbb{R}^n$ , nous noterons  $X_t$  la solution (maximale) du flot associé à  $X$ . Elle vérifie

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X_t(x) = X(X_t(x)) \\ X_0(x) = x. \end{cases}$$

- Si  $f$  est une fonction scalaire différentiable,  $L_X f$  désigne la dérivée de Lie de  $f$  le long du champ de vecteurs  $X$  et est définie de la façon suivante :

$$L_X f(x) = \left. \frac{d}{dt}f(X_t(x)) \right|_{t=0} = \langle \nabla f(x), X(x) \rangle,$$

$\nabla f$  représentant le gradient de  $f$ .

Nous définissons par récurrence

$$L_X^k f(x) = L_X L_X^{k-1} f(x), \forall k \geq 1.$$

- Pour deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ , au moins de classe  $C^1$ ,  $[X, Y]$  représente le crochet de Lie. Par récurrence, nous posons

$$ad_X^0(Y) = Y \quad \text{et} \quad ad_X^k(Y) = [X, ad_X^{k-1}(Y)], \quad \forall k \geq 1.$$

Si  $X_1, \dots, X_p$  est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel alors  $\text{span}\{X_1, \dots, X_p\}$  est le sous espace vectoriel engendré par cette famille.

- Soient  $\phi$  un difféomorphisme et  $X$  un champ de vecteurs. Nous définissons le champ de vecteurs  $\phi_* X(\cdot)$  par :

$$\phi_* X(x) = (D\phi)_{\phi^{-1}(x)} \cdot X(\phi^{-1}(x))$$

où  $D(\phi)y$  représente la différentielle de  $\phi$  au point  $y$ .

- Par la suite, la fonction  $\varphi_{a,b}(\cdot)$ , ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ), sera définie par

$$\varphi_{a,b}(y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{a-y} + \frac{1}{y-b}\right) & y \in ]a, b[. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous noterons par la suite,  $\mathcal{C}$ , la classe des fonctions continues  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

1.  $h(y)y \geq 0$ ,

---



$$2. h(y) = 0 \iff y = 0,$$

$$3. \lim_{|y| \rightarrow +\infty} |h(y)| = +\infty.$$

- Pour tout  $\alpha \in [0, \infty)$  et toute fonction  $f$  telle que :

$$|f(x)| \leq C_f |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, C_f > 0$$

nous poserons :

$$\gamma_{(\alpha, f)} = \alpha + C_f^2.$$

- Pour tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$ , les fonctions “signe” et “saturation” sont définies par :

$$\text{sgn}(v) = (\text{sgn}(v_1), \dots, \text{sgn}(v_n))^T$$

avec

$$\text{sgn}(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i > 0 \\ 0 & \text{si } v_i = 0 \\ -1 & \text{si } v_i < 0 \end{cases}$$

et

$$\text{sat}(v) = (\text{sat}(v_1), \dots, \text{sat}(v_n))^T$$

où

$$\text{sat}(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i > \varepsilon \\ \frac{v_i}{\varepsilon} & \text{si } |v_i| \leq \varepsilon \\ -1 & \text{si } v_i < -\varepsilon \end{cases}$$

# Introduction générale

Le problème de la stabilisation des systèmes dynamiques constitue sans le moindre doute l'un des thèmes majeurs de l'automatique et de la théorie du contrôle. Ce problème, très largement étudié dans le cas des systèmes linéaires, reste souvent complexe lorsque des non linéarités entrent en jeu.

Dans ce mémoire, nous aborderons le problème de la stabilisation des systèmes non linéaires en articulant notre travail autour de deux axes :

- la stabilisation des systèmes non linéaires qui sont non réguliers,
- la stabilisation des systèmes non linéaires à retards.

## Première partie : stabilisation des systèmes non réguliers

Dans le **premier chapitre** de ce mémoire, nous commencerons par rappeler un ensemble de notions et de résultats de bases.

Dans le **deuxième chapitre**, nous considérerons les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

où  $X$  est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tel que  $X(0, 0) = 0$ .

La stabilisation de tels systèmes a fait l'objet de nombreuses études [BAC88, BYR91, BYR95, COR94, GAU81, JAC76, KAL84, LEE88, OUT92, RYA83, SLE78, SON89, TSI89]. Ces travaux sont consacrés, essentiellement, au cas où le champ de vecteurs  $X$  est affine en la commande, c'est-à-dire de la forme :

$$X(x) = X^0(x) + uX^1(x). \quad (2)$$

Les résultats sont basés sur le Principe d'Invariance de LaSalle et requièrent, de ce fait, un minimum de régularité du champ de vecteurs  $X$ . Ces résultats sont établis pour le cas où  $X^0$  et  $X^1$  sont réguliers (*c.-à-d.* de classe  $C^\infty$ ).

Notre travail, dans ce mémoire, consistera à affaiblir cette hypothèse de régularité en considérant le problème de la stabilisation du système (1), lorsque  $X$  est non régulier (*c.-à-d.* continu et localement lipschitzien) et à développer une méthode de stabilisation, applicable aux systèmes non réguliers.

Dans le **troisième chapitre**, nous aborderons le problème de la stabilisation de systèmes non linéaires par ajout d'intégrateurs. Cela consiste à stabiliser des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \\ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (3)$$

lorsque le système réduit

$$\dot{x} = f(x, 0) \quad (4)$$

est supposé globalement asymptotiquement stable.

Il existe actuellement des travaux traitant le cas où  $f$  est régulier [BYR89, COR91, IGG94, KOD87, KOK89, OUT91, OUT96, OUT, ROS93, TSI89]. Nous proposerons, une fois de plus, de diminuer cette hypothèse en considérant le cas où le champ de vecteurs  $f$  est non régulier.

L'objectif de l'étude de la stabilisation des systèmes (1) et (3) est de montrer que des résultats classiques concernant la stabilisation de systèmes réguliers peuvent trouver des versions dans le cas de systèmes seulement lipschitziens. L'intérêt pratique de l'étude de tels systèmes est évident. En effet, il est courant de les rencontrer en mécanique ou en robotique.

## Deuxième partie: stabilisation des systèmes à retards

Nous nous pencherons, dans cette partie, sur la stabilisation de systèmes non linéaires à états retardés. Ce problème est très important dans la mesure où l'existence d'un retard dans un système physique peut affecter les propriétés du système en boucle fermée en termes de performance et de stabilité [KOL86, MAL87].

Dans le **quatrième chapitre** de ce mémoire, nous motiverons, en premier lieu, cette étude par un bref rappel historique et poursuivrons par quelques exemples. Sans reprendre le travail bibliographique très complet donné dans [DAM94, NIC96, DUG97], nous rappellerons quelques notions de base et des résultats généraux relatifs aux systèmes à retards.

Dans le **cinquième chapitre**, nous considérerons le problème de la stabilisation par retour d'état sans mémoire, des systèmes non linéaires à retards de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_R x(t - h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - h(t))) + Bu(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-H, 0]. \end{aligned} \quad (5)$$

Nous proposerons des conditions pour garantir la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. L'approche proposée sera basée sur la méthode de Lyapunov ainsi que sur des résultats de la théorie de la commande  $\mathcal{H}_\infty$ .

Le **sixième chapitre** sera consacré à la stabilisation par commande basée observateur. La commande par retour d'état peut être inapplicable, car elle nécessite la mesure complète de l'état. En effet, certaines variables d'état sont parfois inaccessibles à la mesure, soit parce que le capteur correspondant est coûteux, ou parce que la mesure requise est trop difficile à faire de manière précise. Une solution consiste alors à développer des outils, communément appelés observateurs qui, à partir des mesures expérimentales, donnent une estimation des

variables d'états non mesurées. Nous serons ainsi amenés à considérer des problèmes de commande par retour d'état estimé.

Le septième chapitre portera sur la stabilisation par mode de glissement.

Nous développerons une méthodologie de synthèse de loi de commande par mode de glissement pour des systèmes non linéaires à retards présentant des incertitudes. Au delà de la synthèse d'une nouvelle loi de commande, nous aborderons aussi le problème d'amélioration de performances en terme de robustesse.

Les systèmes à retards considérés peuvent appartenir à la classe des systèmes non réguliers. Les problématiques des deux parties ne sont toutefois pas les mêmes. Dans la première partie nous cherchons à réduire la régularité requise par certaines méthodes de stabilisation tandis que dans la deuxième partie, nous présentons un éventail de méthodes de stabilisation pour la classe de systèmes non linéaires à retards (5).

L'essentiel du travail est traité dans [VER96, AGG97, VER98, AGGa, AGGd, AGGb, AGGc].



## Première partie

# Stabilisation de systèmes non linéaires non réguliers

---



# Chapitre 1

## Rappels et Généralités

Ce chapitre regroupe un ensemble de définitions et de résultats de base relatifs à la stabilité et à la stabilisation de systèmes non linéaires. Le concept de stabilité considéré est celui de Lyapunov.

### 1.1 Notions de stabilité

#### 1.1.1 Définitions

Considérons le système différentiel autonome

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, X(x_0) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $X$  est un champ de vecteurs au moins continu<sup>1</sup>.

La solution du système (1.1) issue de  $x$  à l'instant  $t = 0$  se note  $X_t(x)$  et vérifie :

$$\left. \frac{d}{dt} X_t(x) \right|_{t=0} = X(x) \quad \text{et} \quad X_0(x) = x.$$

#### Définition 1.1 (stabilité)

$x_0$  est un point d'équilibre stable pour l'équation (1.1) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x - x_0| \leq \delta \implies (|X_t(x) - x_0| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0).$$

#### Définition 1.2 (Instabilité)

Nous dirons qu'un point d'équilibre est instable s'il n'est pas stable.

---

. 1. Cette hypothèse garantit l'existence d'une solution



**Définition 1.3 (Attractivité)**

$x_0$  est dit attractif, s'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x_0$ , tel que, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{U}$ ,  $X_t(x)$  existe,  $\forall t \geq 0$ , et  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(x) = x_0$ .

Si  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ , alors  $x_0$  est dit globalement attractif.

**Définition 1.4 (Stabilité asymptotique)**

$x_0$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Cette notion est très utile pour la commande car elle traduit la tendance d'un système à rester proche d'un point d'équilibre et à le rejoindre asymptotiquement.

**Définition 1.5 (Stabilité asymptotique globale)**

$x_0$  est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

Analyser la stabilité du système (1.1), en utilisant l'un de ces concepts, nécessite la résolution de ce système. La méthode de Lyapunov et le Principe d'invariance de LaSalle [LAS61], que nous rappelons ci-dessous, permettent d'étudier la stabilité d'un système sans avoir besoin de chercher les solutions de celui-ci.

**1.1.2 Méthode de Lyapunov****Théorème 1.1**

S'il existe une fonction  $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x_0$  et différentiable sur  $\mathcal{U} \setminus \{x_0\}$  telle que :

1.

$$V(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \text{si } x \neq x_0,$$

2.

$$\dot{V}(x) = L_X V(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{U}$$

alors  $x_0$  est un point d'équilibre stable pour le système (1.1).

3. Si de plus, la fonction  $V$  est telle que :

$$\dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{x_0\}$$

alors  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

4. Enfin, si  $V$  est propre<sup>1</sup> (c.-à-d. l'image réciproque d'un compact est un compact) et si  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ , alors  $x_0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

**Définition 1.6 (Fonction de Lyapunov)**

Une fonction  $V$  qui vérifie les conditions (1) et (2) du théorème (1.1) est appelée fonction de Lyapunov large pour (1.1) en  $x_0$ . Si la condition (3) du théorème (1.1) est aussi satisfaite, alors  $V$  est dite de Lyapunov stricte pour (1.1) en  $x_0$ .

**1.1.3 Principe d'invariance de LaSalle**

Pour montrer la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre, il suffit d'après ce qui précède, de trouver une fonction de Lyapunov stricte. Il n'existe cependant pas de méthodes constructives permettant cela. Il est par contre plus aisé de trouver une fonction de Lyapunov large et dans ce cas, le résultat suivant nous permet de conclure.

**Théorème 1.2 ([LAS61])**

Si  $V$  une fonction de Lyapunov large de classe  $C^1$ , pour (1.1) en  $x_0$ , alors toutes les trajectoires bornées pour  $t \geq 0$  tendent vers le plus grand ensemble invariant  $I$  par  $X$ , contenu dans :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / L_X V(x) = 0\}.$$

Si de plus  $V$  est supposée propre, alors toutes les trajectoires sont bornées pour  $t \geq 0$  et donc toutes les trajectoires du système convergent vers  $I$ .

Montrer que  $x_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable revient donc à prouver que  $I = \{x_0\}$ .

**1.2 Stabilisation****1.2.1 Définitions**

Considérons le système contrôlé :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs au moins de classe  $C^1$ , avec  $X(0, 0) = 0$  et  $u$  désigne le contrôle (ou loi de commande).

**Définition 1.7**

Le système (1.2) est dit affine en la commande si le champ  $X$  est de la forme :

$$X(x) = f(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x)u_i,$$

où  $f$  est appelée la dérive et  $g_i, i = 1 \dots p$ , les champs contrôlés du système.

---

. 1. Tout au long de ce travail, pour prouver que  $V$  est propre, nous montrerons que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ .

**Définition 1.8**

*Le système (1.2) est dit stabilisable à l'origine (par retour d'état statique) s'il existe une loi de commande  $u = u(x)$ , au moins continue, vérifiant  $u(0) = 0$ , telle que le système bouclé :*

$$\dot{x} = X(x, u(x)),$$

*admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.*

---

## Chapitre 2

# Stabilisation par retour d'état

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à la stabilisation de systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $X$  est un champ de vecteurs continu, localement lipschitzien sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tel que :

$$X(0, 0) = 0.$$

Plus précisément, nous traiterons le cas où il existe une fonction de Lyapunov  $V$  au moins de classe  $C^1$  telle que :

$$\nabla V(x) = 0 \iff x = 0$$

et vérifiant l'hypothèse :

$$L_{X^0}V(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

où  $X^0(x) = X(x, 0)$ .

Le problème de la stabilisation du système (2.1), sous la condition (2.2) a été étudié dans de nombreux travaux [BAC88, BYR91, BYR95, COR94, GAU81, JAC76, JUR78, KAL84, LEE88, OUT92, RYA83, SLE78, SON89, TSI89]. Ces travaux sont essentiellement consacrés au cas où  $X$  est affine en la commande, c'est à dire :

$$X(x) = X^0(x) + uX^1(x) \quad (2.3)$$

L'approche pour stabiliser le système (2.1)(2.2) consiste à utiliser un retour d'état de la forme :

$$u(x) = -L_{X^1}V(x) \quad (2.4)$$

et des conditions suffisantes sont proposées pour assurer la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (2.1)(2.3)(2.4). Ces conditions dépendent de la régularité de  $X^0$ ,  $X^1$  et de

$V$ . En effet, lorsque ces champs de vecteurs sont analytiques, la condition suffisante de stabilité asymptotique du système en bouclé (2.1)(2.2)(2.4), proposée dans ([OUT92]), est aussi une condition nécessaire. Récemment, dans [OUT99], un contre-exemple a été donné pour montrer que si  $X^0$ ,  $X^1$  ou  $V$  n'est pas analytique alors la condition proposée dans [OUT92] n'est pas nécessaire.

Dans ce même article (c.-à-d. [OUT99]), une condition nécessaire et suffisante a été établie pour le cas des systèmes aux champs  $X^0$  et  $X^1$  au moins de classe  $C^1$ .

Dans les démonstrations basées sur le Principe d'Invariance de LaSalle, les auteurs utilisent la dérivée  $L_{X^1}V$  (ou  $L_{X^0}V$ ) le long des trajectoires de la dynamique libre du système, à savoir

$$\dot{x} = X^0(x).$$

Ceci implique que  $L_{X^1}V$  (ou  $L_{X^0}V$ ) doit être au moins continûment différentiable. Par conséquent, lorsque  $X^0$  ou  $X^1$ , ou en général  $X$  est supposé être lipschitzien mais pas de classe  $C^1$ , alors nous ne pouvons pas utiliser cette approche.

Ce travail est une contribution à l'étude de la stabilisation des systèmes de la forme (2.1) quand  $X$  est seulement continu et localement lipschitzien. Il généralise les travaux concernant le cas des systèmes réguliers au cas des systèmes où les champs de vecteurs ne sont pas de classe  $C^1$ .

Notre objectif sera d'établir des conditions suffisantes pour la stabilisation globale du système (2.1) par le biais d'un retour d'état au moins de classe  $C^1$ .

La suite du chapitre se présente comme suit : dans la deuxième section, nous établirons un lemme technique utile pour la suite du travail. La troisième section sera constituée des résultats principaux de ce chapitre. Ensuite dans la quatrième section nous présenterons des exemples et des remarques. Enfin, nous donnerons nos conclusions dans la dernière section.

## 2.2 Lemme technique

Afin d'établir et de démontrer ce lemme, nous avons besoin de la proposition suivante.

### Proposition 2.1

Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m$  un entier de  $\mathbb{N}$  et  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif. Alors, il existe une fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^m$  telle que :

$$|h(x)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

et

$$h(x) > 0 \quad \text{sur } \mathcal{U} \quad \text{et} \quad h \equiv 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}. \quad (2.6)$$

### Preuve de la proposition 2.1

• Nous montrons tout d'abord l'existence d'une fonction  $\bar{h}$  de classe  $C^m$  qui vérifie (2.6).

Considérons pour cela un recouvrement :

$$\mathcal{O} = \{B(x_k, r_k), k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{Q}^n, r_k \in ]0, +\infty)\}$$


---

de  $\mathcal{U}$  par des boules ouvertes  $B(x_k, r_k) \subset \mathcal{U}$ . Un tel recouvrement existe toujours. En effet, comme  $\mathcal{U}$  est un ensemble ouvert, alors, pour tout  $x$  de  $\mathcal{U}$ , il existe un nombre réel positif  $r_x$  tel que  $B(x, r_x) \subset \mathcal{U}$ . Ainsi :

$$\mathcal{O}_1 = \{B(x, r_x), x \in \mathcal{U}\}$$

constitue un recouvrement de  $\mathcal{U}$ .

Comme  $\mathbb{Q}^n$  est dense dans  $\mathbb{R}^n$ , alors, pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , il existe un élément  $q_x \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, r_x)$ , où  $r_{q_x}$  est un nombre réel positif vérifiant  $r_{q_x} < \frac{r_x}{3}$ . Nous avons alors  $x \in B(q_x, r_{q_x}) \subset \mathcal{U}$ .

Par conséquent :

$$\mathcal{O}_2 = \{B(q_x, r_{q_x}), x \in \mathcal{U}\}$$

est aussi un recouvrement de  $\mathcal{U}$  et comme  $\mathbb{Q}^n$  est dénombrable, alors  $\mathcal{O}_2$  l'est aussi.

Soit à présent  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs telle que la série  $\sum_{k \geq 0} a_k$  soit convergente et  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $C^\infty$  pour laquelle :

$$A_k(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in B(x_k, r_k)$$

et

$$A_k(x) \equiv 0 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus B(x_k, r_k)$$

définies de sorte que :

$$\sup_{x \in B(x_k, r_k)} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} A_k(x) \right| \leq a_k, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq m. \quad (2.7)$$

Un choix possible de  $A_k$  est :

$$A_k(x) = \delta_k \varphi_{-1, r_k}(|x_k - x|)$$

où pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_k$  est un nombre réel positif suffisamment petit.

Nous introduisons à présent les fonctions  $\bar{h}_k$  et  $\bar{h}$  définies par :

$$\bar{h}_k(x) = \sum_{0 \leq j \leq k} A_j(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\bar{h}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{h}_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'après (2.7), nous avons :

$$\sum_{p \geq 0} |A_p(x)| \leq \sum_{p \geq 0} a_p, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

La série  $\sum_{p \geq 0} A_p(x)$  est donc normalement convergente. Par conséquent, la fonction  $\bar{h}$  est bien définie et continue. En fait  $\bar{h}(x)$  est de classe  $C^m$  car la série

$$\sum_{p \geq 0} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} A_p(x)$$

est uniformément convergente pour tout  $\beta \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\beta| \leq m$ .

Il en résulte que pour tout  $\beta \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\beta| \leq m$ , nous avons :

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} \bar{h}(x) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} \left( \sum_{p \geq 0} A_p(x) \right) = \sum_{p \geq 0} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} A_p(x)$$

c'est-à-dire que l'on peut intervertir les signes de sommation et de dérivation jusqu'à l'ordre  $m$ . Ceci nous permet de conclure qu'il existe bien une fonction  $\bar{h}$  de classe  $C^m$  vérifiant (2.6).

- Pour terminer la démonstration, nous définissons  $h$  par :

$$h(x) = \varepsilon \frac{\bar{h}(x)}{1 + \bar{h}^2(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Cette fonction est de classe  $C^m$  et vérifie les conditions (2.5) et (2.6).

Ceci termine la preuve de la proposition 2.1. □

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme technique.

### Lemme 2.1

Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue et  $m$  un élément de  $\mathbb{N}$ . Alors, il existe une fonction  $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^m$  telle que :

- (i)  $\langle f(x), \bar{f}(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$
- (ii)  $|f(x)| = 0 \iff |\bar{f}(x)| = 0.$
- (iii)  $|\bar{f}(x)| < |f(x)| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |f(x)| \neq 0.$

### Preuve du lemme 2.1

Nous démontrons tout d'abord le lemme pour  $p = 1$ . Une généralisation au cas où  $p \in \mathbb{N}$  sera donnée ultérieurement.

Soient  $\mathcal{U}^+$  et  $\mathcal{U}^-$  deux ensembles ouverts disjoints de  $\mathbb{R}^n$  définis par :

$$\mathcal{U}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) > 0\}$$

et

$$\mathcal{U}^- = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < 0\}.$$

Nous nous proposons de construire deux fonctions  $\bar{f}^+$  et  $\bar{f}^-$  de classe  $C^m$  telles que :

$$\bullet \quad 0 < \bar{f}^+(x) < f(x) \quad \text{sur } \mathcal{U}^+ \quad \text{et} \quad \bar{f}^+ \equiv 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}^+. \quad (2.8)$$

$$\bullet \quad 0 < \bar{f}^-(x) < -f(x) \quad \text{sur } \mathcal{U}^- \quad \text{et} \quad \bar{f}^- \equiv 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}^-. \quad (2.9)$$

L'existence de ces fonctions est assurée par la proposition 2.1.

Posons

$$\bar{f} = \bar{f}^+ - \bar{f}^-.$$

Il est facile de voir qu'un tel choix répond bien au problème.

Construisons à présent ces fonctions  $\bar{f}^+$  et  $\bar{f}^-$  afin d'obtenir une expression explicite de  $\bar{f}$ . Nous commençons par la construction de  $\bar{f}^+$ .

Soit  $(\mathcal{U}_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts de  $\mathbb{R}^n$  définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) > 1\} \\ \mathcal{U}_k^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \in ]b_k, a_k[ \}, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

où

$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+2}}$$

et

$$b_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Les suites  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont décroissantes. De plus

$$\mathcal{U}^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_k^+$$

et

$$\mathcal{U}_k^+ \cap \mathcal{U}_{k_1}^+ = \emptyset, \quad \forall k_1 \geq k + 2.$$

D'après la proposition 2.1, il existe une suite de fonctions  $(\bar{f}_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$  de classe  $C^m$ , satisfaisant :

$$0 < \bar{f}_0^+(x) < \frac{1}{2} \quad \text{sur } \mathcal{U}_0^+ \quad \text{et} \quad \bar{f}_0^+ \equiv 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}_0^+. \quad (2.10)$$

et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$0 < \bar{f}_k^+(x) < \frac{b_{k+2}}{2} \quad \text{sur } \mathcal{U}_k^+ \quad \text{et} \quad \bar{f}_k^+ \equiv 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}_k^+. \quad (2.11)$$



Posons :

$$\bar{f}^+ = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{f}_k^+.$$

Comme  $\mathcal{U}_k^+ \cap \mathcal{U}_{k_1}^+ = \emptyset$ , lorsque  $k_1 \geq k + 2$ , quel que soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe un entier  $k_x$  tel que  $\bar{f}^+(x)$  se réduise à :

$$\bar{f}^+(x) = \bar{f}_{k_x}^+(x) + \bar{f}_{k_x+1}^+(x)$$

sur un voisinage  $\vartheta$  de  $x$ .

En utilisant (2.10) et (2.11), nous avons pour tout  $x$  appartenant à  $\vartheta$  :

$$\begin{aligned} \bar{f}_{k_x}^+(x) + \bar{f}_{k_x+1}^+(x) &\leq \frac{b_{k_x+2} + b_{k_x+3}}{2} \\ &< b_{k_x} \\ &< f(x). \end{aligned}$$

Ceci entraîne que  $\bar{f}^+$  est de classe  $C^m$  et vérifie (2.8). La construction de  $f^-$  suit une démarche analogue. Ceci termine la démonstration pour le cas  $p = 1$ .

Supposons maintenant que  $p \geq 2$ . Soit  $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue. D'après le cas  $p = 1$ , il existe des fonctions  $\bar{f}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1 \dots p$ , de classe  $C^m$  pour lesquelles :

- $f_i(x)\bar{f}_i(x) \geq 0$ ,
- $f_i(x) = 0 \iff \bar{f}_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ,
- $|f_i(x)| < |\bar{f}_i(x)|$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f_i(x) \neq 0$ .

Il suffit alors de prendre  $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_p)^T$ , pour répondre au problème.

Ceci achève la preuve du lemme 2.1. □

Le résultat suivant est une application directe du lemme 2.1 et sera utilisé ultérieurement.

### Corollaire 2.1

Soit  $m > 1$  et  $F$  et  $G$  deux fonctions continues allant de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  telles que :

$$G(x) = 0 \iff x = 0. \tag{2.12}$$

Alors il existe une fonction  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^m$  qui vérifie :

1.  $\langle F(x), G(x) \rangle \langle H(x), G(x) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $\langle F(x), G(x) \rangle = 0 \iff \langle H(x), G(x) \rangle = 0$ .

**Preuve du corollaire 2.1**

D'après le lemme 2.1, il existe une fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^m$  telle que

$$(i) \quad h(x)\langle F(x), G(x) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$(ii) \quad \langle F(x), G(x) \rangle = 0 \iff h(x) = 0.$$

Comme  $G$  satisfait la condition (2.12), il existe une fonction  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^m$  pour laquelle :

$$\langle v(x), G(x) \rangle > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Par conséquent :

$$h(x)\langle F(x), G(x) \rangle \langle v(x), G(x) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En posant  $H(x) = h(x)v(x)$ , nous constatons que la fonction  $H$  vérifie les propriétés 1 et 2 du corollaire.

Ceci termine la démonstration du Corollaire 2.1 . □

## 2.3 Résultats principaux

### 2.3.1 Premier résultat principal

Nous nous intéressons aux systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $X$  est un champ de vecteurs continu et localement lipschitzien sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  avec  $X(0, 0) = 0$ .

Nous pouvons écrire  $X(x, u)$  sous la forme :

$$X(x, u) = X^0(x) + Y(x, u) \quad (2.14)$$

en prenant :

$$Y(x, u) = X(x, u) - X^0(x)$$

avec  $X^0(x) = X(x, 0)$ .

Nous considérons le cas où il existe une fonction de Lyapunov  $V$  vérifiant :

$$\nabla V(x) = 0 \iff x = 0 \quad (2.15)$$

et satisfaisant la condition :

$$L_{X^0} V(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.16)$$

D'après le corollaire 2.1, il existe un champ de vecteurs  $Z$  de classe  $C^m$ ,  $m > 1$ , tel que :

$$\left( L_Y V(x) L_Z V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right) \quad \text{et} \quad \left( L_Y V(x) = 0 \iff L_Z V(x) = 0 \right). \quad (2.17)$$

Soit  $\bar{Z}$  le champ de vecteurs défini par :

$$\bar{Z}(x, u) = Z(x, u) - Z(x, 0).$$

Ce champ de vecteurs est de classe  $C^m$ ,  $m > 1$  et vérifie  $\bar{Z}(x, 0) \equiv 0$ . De plus, nous avons :

$$\left( L_Y V(x) L_{\bar{Z}} V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right) \quad \text{et} \quad \left( L_Y V(x) = 0 \iff L_{\bar{Z}} V(x) = 0 \right). \quad (2.18)$$

En effet, comme  $Y(x, 0) \equiv 0$ , alors d'après (2.17) :

$$\langle Z(x, 0), \nabla V(x) \rangle \equiv 0.$$

Nous avons donc :

$$L_Y V(x) L_{\bar{Z}} V(x) = L_Y V(x) L_Z V(x)$$

qui entraîne, toujours d'après (2.17), que :

$$L_Y V(x) L_{\bar{Z}} V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.19)$$

Nous avons également :

$$L_Z V(x) = 0 \iff L_{\bar{Z}} V(x) = 0,$$

qui implique, en utilisant (2.17), que :

$$L_Y V(x) = 0 \iff L_{\bar{Z}} V(x) = 0,$$

Maintenant, comme  $\bar{Z}(x, 0) \equiv 0$  et que  $\bar{Z}$  est de classe  $C^m$ , nous pouvons développer  $\bar{Z}(x, u)$  sous la forme :

$$\bar{Z}(x, u) = u(Z^0(x) + uZ^1(x, u)) \quad (2.20)$$

où  $Z^0$  et  $Z^1$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^{m-1}$ .

Nous définissons à présent deux suites de fonctions  $(F_k)_{k \geq 0}$  et  $(G_k)_{k \geq 0}$ , de classe  $C^1$ , à partir desquelles sera formulé le premier résultat de cette section.

Soient  $(F_k)_{k \geq 0}$  et  $(G_k)_{k \geq 0}$ , définies par :

$$(i) \quad F_0(x) = V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(ii) \quad F_k(x) = 0 \iff L_{X^0} F_{k-1}(x) = 0, \quad \forall k \geq 1,$$

(iii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $G_0$  vérifie :

- $G_0(x)L_{Z^0}V(x) \geq 0$ .
- $G_0(x) = 0 \iff L_{Z^0}V(x) = 0$ .
- $|G_0(x)| < |L_{Z^0}V(x)|$  si  $|L_{Z^0}V(x)| \neq 0$ .

(iv)  $G_k(x) = 0 \iff L_{X^0}G_{k-1}(x) = 0, \quad \forall k \geq 1$ .

L'existence de ces suites est assurée par le lemme 2.1.

Nous pouvons à présent démontrer le résultat principal.

### Théorème 2.1

Si l'ensemble :

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / F_{k+1}(x) = G_k(x) = 0; k \in \mathbb{N}\} \quad (2.21)$$

est réduit à l'origine, alors le système (2.13) peut être rendu globalement asymptotiquement stable à l'origine par la loi de commande :

$$u(x) = -\theta(x)G_0(x)$$

où  $\theta$  est une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^n; ]0, \infty)$ .

### Preuve du théorème 2.1

Soit  $\theta$  une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^n; ]0, \infty)$  telle que

$$\theta(x) \leq \frac{1}{\sup_{|u| \leq 1} |L_{Z^1}V(x)|^2 + |G_0(x)|^2 + 2}. \quad (2.22)$$

Définissons la loi de commande  $u$  par :

$$u(x) = -\theta(x)G_0(x). \quad (2.23)$$

Nous avons :

$$u(x)L_{Z^0}V(x) \leq 0, \quad |u(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |\theta(x)L_{Z^1}V(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

D'après (2.16),

$$\dot{V}(x) \leq L_Y V(x), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Prouver que  $\dot{V}$  est négative revient, d'après l'équation (2.18), à montrer que :

$$L_Z V(x) \leq 0, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

En utilisant (2.20), (2.24) et (iii) nous obtenons :

$$L_{\bar{Z}}V(x) = u(x)L_{Z^0}V(x) + u(x)^2L_{Z^1}V(x).$$

$$L_{\bar{Z}}V(x) = -\theta(x)(G_0(x)L_{Z^0}V(x) - \theta(x)G_0^2(x)L_{Z^1}V(x))$$

$$L_{\bar{Z}}V(x) \leq -\theta(x)(G_0(x)L_{Z^0}V(x) - G_0^2(x))$$

$$L_{\bar{Z}}V(x) \leq 0.$$

Alors (2.25) est vérifiée et le système en boucle fermée (2.13)(2.23) est stable. De plus, les trajectoires du champ de vecteurs du système bouclé  $\tilde{X}$ , défini par :

$$\tilde{X}(x) = X^0(x) + Y(x, -\theta(x)G_0(x))$$

sont bornées.

Il nous reste à mettre en évidence l'attractivité de l'origine.

D'après le théorème de LaSalle [LAS61], toutes les trajectoires du système en boucle fermée convergent vers  $I$ , le plus grand ensemble invariant par  $\tilde{X}$  contenu dans :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}.$$

Il est facile de voir que cet ensemble peut se mettre sous la forme :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / L_{X^0}V(x) = L_YV(x) = 0\}$$

ou encore, par les équivalences (ii) et (iv), sous la forme :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / F_1(x) = G_0(x) = 0\}.$$

Soit  $x_0$ , un point quelconque de  $I$ . Nous avons :

$$\tilde{X}_t(x_0) = X_t^0(x_0), \quad \forall t \geq 0.$$

Par invariance de  $I$ ,

$$F_1(X_t^0(x_0)) = G_0(X_t^0(x_0)) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Nous avons alors :

$$L_{X^0}F_1(x_0) = \left. \frac{d}{dt}F_1(X_t^0(x_0)) \right|_{t=0} = 0$$

et

$$L_{X^0}G_0(x_0) = \left. \frac{d}{dt}G_0(X_t^0(x_0)) \right|_{t=0} = 0.$$

En utilisant (ii) et (iv), nous obtenons :

$$F_2(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad G_1(x_0) = 0.$$

En réitérant ce procédé, nous arrivons à :

$$L_{X^0}F_k(x_0) = \left. \frac{d}{dt}F_k(X_t^0(x_0)) \right|_{t=0} = 0 \quad \text{et} \quad L_{X^0}G_{k-1}(x_0) = \left. \frac{d}{dt}G_{k-1}(X_t^0(x_0)) \right|_{t=0} = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Ceci nous conduit, d'après (ii) et (iv), à :

$$F_{k+1}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad G_k(x_0) = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Tout élément  $x_0$  de  $I$  appartient donc à  $W$ . Comme  $W$  est supposé réduit à l'origine le système en boucle fermée (2.13)(2.23) est asymptotiquement stable.

Le Théorème 2.1 est donc démontré.  $\square$

### 2.3.2 Deuxième résultat principal

Le résultat de stabilisation que nous venons de proposer, présente une condition suffisante assurant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (2.13)(2.23). Nous allons maintenant proposer une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique, dans le cas particulier où  $V$  est une intégrale première de  $X^0$  (c.-à-d.  $L_{X^0}V(x) \equiv 0$ ).

Considérons le système (2.13) et supposons que  $X^0$  est un champ de vecteurs de classe  $C^1$  qui admet une fonction de Lyapunov  $V$  de classe  $C^2$  pour intégrale première. Le champ de vecteurs  $Y$  est supposé continu et localement lipschitzien.

Soit  $Z$  un champ de vecteurs de classe  $C^m$ ,  $m > 1$  tel que :

$$\left( L_Y V(x) L_Z V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right) \quad \text{et} \quad \left( L_Y V(x) = 0 \iff L_Z V(x) = 0 \right). \quad (2.26)$$

Selon le corollaire 2.1, un tel champ de vecteurs existe.

En procédant comme dans la section précédente, nous pouvons montrer qu'en posant :

$$\bar{Z}(x, u) = Z(x, u) - Z(x, 0).$$

nous définissons un champ de vecteurs de classe  $C^m$ ,  $m > 1$  qui vérifie :

$$\left( L_Y V(x) L_{\bar{Z}} V(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right) \quad \text{et} \quad \left( L_Y V(x) = 0 \iff L_{\bar{Z}} V(x) = 0 \right). \quad (2.27)$$

De plus  $Z(x, u)$  peut être décomposé sous la forme :

$$\bar{Z}(x, u) = u(Z^0(x) + uZ^1(x, u)) \quad (2.28)$$

où  $Z^0$  et  $Z^1$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^{m-1}$ .

Soit  $\theta$  une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^n; ]0, \infty)$  telle que :

$$\theta(x) \leq \frac{1}{\sup_{|u| \leq 1} |L_{Z^1} V(x)|^2 + 2}. \quad (2.29)$$

Considérons la loi de commande  $u$ , définie par :

$$u(x) = -\theta(x)L_{Z^0}V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.30)$$

Nous avons alors le résultat suivant :

### Proposition 2.2

Soit  $\mathcal{D}_1^*$  l'ensemble défini par :

$$\mathcal{D}_1^* = \{Z^0, (X_t^0)_*[X^0, Z^0] / t \in (-\infty, 0]\}.$$

Le système (2.13) bouclé par la loi de commande (2.29)(2.30) est globalement asymptotiquement stable à l'origine si et seulement si :

$$L_{\mathcal{D}_1^*}V(x) = 0 \iff x = 0. \quad (2.31)$$

### Remarque 2.1

Comme  $V$  est une intégrale première de  $X^0$  et que  $V$  est propre alors toutes les trajectoires de  $X^0$  sont bornées et  $X^0$  est complet.

### Remarque 2.2

Pour tout  $t \leq 0$ , nous avons :

$$L_{(X_t^0)_*[X^0, Z^0]}V(x) = L_{[X^0, Z^0]}V(X_{-t}^0(x)). \quad (2.32)$$

Cette équation, que nous utiliserons dans la preuve de la proposition 2.2, a été démontrée dans [OUT99].

### Preuve de la proposition 2.2

Montrons tout d'abord que (2.31) est une condition suffisante.

Supposons que :

$$L_{\mathcal{D}_1^*}V(x) = 0 \iff x = 0.$$

La dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (2.13) est donnée par :

$$\dot{V}(x) = L_Y V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Elle est du même signe que  $L_{\bar{Z}}V(x)$ , d'après (2.27).

En utilisant (2.28), (2.29) et (2.30), nous obtenons :

$$L_{\bar{Z}}V(x) = -\theta(x)L_{Z^0}V(x)(L_{Z^0}V(x) - \theta(x)L_{Z^0}V(x)L_{Z^1}V(x)).$$

$$L_{\bar{Z}}V(x) = -\theta(x)(L_{Z^0}V(x))^2(1 - \theta(x)L_{Z^1}V(x)).$$

$$L_{\bar{Z}}V(x) \leq 0.$$

Le système en boucle fermée (2.13) (2.30) est donc stable. De plus, les trajectoires du champ de vecteurs du système bouclé  $\tilde{X}$  où :

$$\tilde{X}(x) = X^0(x) + Y(x, -\theta(x)L_{Z^0}V(x))$$

sont bornées et  $\tilde{X}$  est complet.

Montrons à présent que l'origine est attractive.

D'après le principe d'invariance de LaSalle, toutes les solutions tendent vers  $I$ , le plus grand ensemble invariant par  $\tilde{X}$  contenu dans :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}.$$

Pour  $x_0 \in I$ , nous avons :

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}_t(x_0) = X^0(\tilde{X}_t(x_0)) + Y(\tilde{X}_t(x_0), -\theta(x)L_{Z^0}V(\tilde{X}_t(x_0))).$$

Comme  $I$  est invariant

$$L_{Z^0}V(\tilde{X}_t(x_0)) = 0$$

et par conséquent :

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}_t(x_0) = X^0(\tilde{X}_t(x_0)).$$

L'unicité de la solution de l'équation différentielle (2.13) entraîne que :

$$\tilde{X}_t(x_0) = X_t^0(x_0), \quad \forall t \geq 0$$

et

$$L_{Z^0}V(\tilde{X}_t(x_0)) = L_{Z^0}V(X_t^0(x_0)) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Par dérivation, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}L_{Z^0}V(X_t^0(x_0)) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En utilisant la formule suivante (démontrée dans l'annexe A) :

$$\frac{d^k}{dt^k}L_{Z^0}V(X_t^0(x_0)) = \text{ad}_{X^0}^k L_{Z^0}V(X_t^0(x_0))$$

nous pouvons écrire que :

$$\frac{d}{dt}L_{Z^0}V(X_t^0(x_0)) = L_{[X^0, Z^0]}V(X_t^0(x_0)) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.33)$$

D'après (2.32), nous avons :

$$L_{(X^0, Z^0)}V(x_0) = L_{[X^0, Z^0]}V(X_t^0(x_0)), \quad \forall t \geq 0$$



qui, combinée avec (2.33), entraîne que :

$$L_{(X_t^0)_* [X^0, Z^0]} V(x_0) = 0, \quad \forall t \leq 0.$$

Il en résulte que  $L_{\mathcal{D}_1^*} V(x_0) = 0$  et donc que  $x_0 = 0$ . L'ensemble  $I$  est donc réduit à l'origine. Ceci montre bien que  $\{0\}$  est attractif.

Montrons maintenant que la condition est nécessaire.

Nous supposons pour cela que la loi de commande (2.30) stabilise asymptotiquement le système (2.13). Nous voulons montrer que (2.31) est vérifiée. Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe  $x_0 \neq 0$  tel que  $L_{\mathcal{D}_1^*} V(x_0) = 0$ .

En utilisant (2.32), nous obtenons pour tout  $t_0 \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) \right|_{t=t_0} &= L_{[X^0, Z^0]} V(X_{t_0}^0(x_0)) \\ &= L_{(X_{-t_0}^0)_* [X^0, Z^0]} V(x_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction :

$$t \longrightarrow L_{Z^0} V(X_t^0(x_0))$$

est constante sur  $\mathbb{R}^+$  et donc :

$$L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) = L_{Z^0} V(x_0), \quad \forall t \geq 0.$$

Ceci implique que  $X_t^0(x_0)$  est la solution du système bouclé (2.13) (2.30), passant par  $x_0$ .

Etant donné que la solution demeure sur une surface de niveau de  $V$ , et que le système en boucle fermée (2.13)(2.30) est supposé asymptotiquement stable, alors  $x_0 = 0$ , ce qui est contradictoire.

Ceci termine la preuve de la proposition 2.2. □

## 2.4 Remarques et exemples

### Remarque 2.3

Dans le cas d'un système régulier affine en la commande de la forme :

$$\dot{x} = X^0(x) + uX^1(x),$$

nous retrouvons le résultat classique donné dans [OUT92]. Il suffit pour cela, de prendre  $F_k(x) = L_{X^0}^k V(x)$  et  $G_k(x) = L_{X^0}^k L_{X^1} V(x)$ ,  $\forall k \geq 0$ .

### Remarque 2.4

La stabilité asymptotique du système en boucle fermée ne dépend pas du choix des suites  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Toutefois, un choix judicieux de ces suites permet de montrer plus facilement que l'ensemble  $W$  est réduit ou non à  $\{0\}$ .

**Remarque 2.5**

Afin de simplifier notre étude, le résultat principal a été donné pour  $u \in \mathbb{R}$ . Ce résultat est facilement généralisable au cas où  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ .

**Exemple 1**

Les résultats précédents peuvent être utilisés pour démontrer qu'un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, X(0) = 0 \end{cases}$$

est asymptotiquement stable. Il suffit en effet, d'établir que :

$$\{x \in \mathbb{R}^n / F_k(x) = 0, k \in \mathbb{N}\} = \{0\} \quad (2.34)$$

où  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions de classe  $C^1$  telle que :

$$F_0(x) = 0 \iff L_X V(x) = 0$$

et

$$F_k(x) = 0 \iff L_X F_{k-1}(x) = 0 \quad \text{pour } k \geq 1.$$

**Exemple 2**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{\frac{5}{3}} \\ \dot{x}_2 = x_3^{\frac{5}{3}} \\ \dot{x}_3 = v \end{cases} \quad (2.35)$$

par un retour d'état préliminaire, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{\frac{5}{3}} \\ \dot{x}_2 = x_3^{\frac{5}{3}} \\ \dot{x}_3 = -x_2^{\frac{5}{3}} + v \end{cases} \quad (2.36)$$

Soit  $V$  la fonction de Lyapunov définie par :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + \frac{3}{8}x_2^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{8}x_3^{\frac{8}{3}}.$$

En posant :

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_2^{\frac{5}{3}} \\ x_3^{\frac{5}{3}} \\ -x_2^{\frac{5}{3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nous avons :

$$L_X V(x) = 0$$

et

$$L_Y V(x) = x_1 + x_3 + x_3^{\frac{5}{3}}.$$

Soit  $G_0(x) = L_Y V(x)$ ,  $G_1(x) = x_2 x_3$  et  $G_2(x) = L_X G_1(x)$ . Il est facile de voir que ces fonctions  $G_0$ ,  $G_1$  et  $G_2$  vérifient les conditions (iii) et (iv) données avant l'énoncé du théorème 2.1.

Si  $x$  appartient à l'ensemble  $W$ , donné par ce théorème, alors :

$$\begin{cases} G_0(x) = x_1 + x_2 + x_3^{\frac{5}{3}} = 0 \\ G_1(x) = x_2 x_3 = 0 \\ G_2(x) = x_3^{\frac{8}{3}} - x_2^{\frac{8}{3}} = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Ces équations entraînent directement que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . D'après le théorème 2.1, le système (2.36) est stabilisable par une loi de commande de la forme :

$$u(x) = -\theta(x)(x_1 + x_2 + x_3^{\frac{5}{3}}) \quad (2.38)$$

où  $\theta$  une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^n; ]0, \infty)$ . Le système (2.35) est donc stabilisable par la loi de commande :

$$u(x) = -x_2^{\frac{5}{3}} - \theta(x)(x_1 + x_2 + x_3^{\frac{5}{3}}). \quad (2.39)$$

### Exemple 3

Considérons le système :

$$\dot{x} = X(x, u) \quad (2.40)$$

pour lequel nous supposons que  $X$  est de classe  $C^\infty$ . Sous cette hypothèse, nous pouvons développer  $Y(x, u) = X(x, u) - X^0(x)$  sous la forme :

$$Y(x, u) = \sum_{i=1}^k u^i Y^i(x) + u^{k+1} \bar{Y}(x, u)$$

avec  $k \in \mathbb{N}$  et où  $Y^i$ ,  $i = 1 \dots k$  et  $\bar{Y}$  sont des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$ .

L'idée développée par Coron dans [COR94] consiste à utiliser une loi de commande du type

$$u(x) = \lambda(x) L_{Y^1} V(x) \quad (2.41)$$

où  $\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$  et  $V$  est telle que  $L_{X^0} V(x) \leq 0$ , pour montrer que :

$$L_Y V(x) \leq 0.$$

D'autres types de retour d'état peuvent être utilisés pour obtenir cette dernière inégalité. En effet, nous pouvons considérer une classe de retour d'état dépendant de  $L_{Y^1}V(x)$ ,  $L_{Y^2}V(x)$  jusqu'à  $L_{Y^k}V(x)$ . La loi de commande (2.41) en est un cas particulier. L'intérêt de cette approche est d'exploiter la "richesse" de la non linéarité  $X(x, u)$  et de pouvoir ainsi apporter des réponses au problème de la stabilisation par retour d'état, là où certaines lois de commandes seraient inefficaces.

Pour illustrer notre propos, considérons le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - \varphi_{1,4}(|x|)x + \varphi_{3,+\infty}(|x|)b_1u + \varphi_{0,2}(|x|)b_3u^3 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.42)$$

où  $A$  est une matrice telle que  $x^T Ax \equiv 0$  et  $b_1$  et  $b_3$ , des vecteurs constants tels que les paires  $(A, b_1)$  et  $(A, b_3)$  soient commandables. Les fonctions  $\varphi_{a,b}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , sont définies dans la partie notations.

Soit  $V$  la fonction de Lyapunov définie par :

$$V(x) = \frac{1}{2}|x|^2.$$

Le long des trajectoires de la dynamique libre :

$$\dot{V}(x) = -\varphi_{1,4}(|x|)|x|^2 \leq 0.$$

Un retour d'état de la forme (2.41) ne peut pas rendre le système (2.42) asymptotiquement stable à l'origine. En effet, pour  $|x| \leq 1$ , cette loi de commande s'annule et le système est réduit à :

$$\dot{x} = Ax.$$

Comme

$$x^T Ax \equiv 0$$

l'origine du système en boucle fermée (2.41)(2.42), n'est pas attractive.

En revanche, le système (2.42) est stabilisable par la loi de commande

$$u(x) = -L_{Y^1}V(x) - L_{Y^3}V(x), \quad (2.43)$$

où  $Y^1(x) = \varphi_{3,+\infty}(|x|)b_1$  et  $Y^3(x) = \varphi_{0,2}(|x|)b_3$ .

En effet, le long des trajectoires du système (2.42)(2.43) nous avons :

- pour  $|x| \leq 1$ ,  $\dot{V}(x) = -(L_{Y^3}V(x))^4$
- pour  $|x| \in ]1, 2[$ ,  $\dot{V}(x) = -\varphi_{1,4}(|x|)|x|^2 - (L_{Y^3}V(x))^4$
- pour  $|x| \in [2, 3]$ ,  $\dot{V}(x) = -\varphi_{1,4}(|x|)|x|^2$
- pour  $|x| \in ]3, 4[$ ,  $\dot{V}(x) = -\varphi_{1,4}(|x|)|x|^2 - (L_{Y^1}V(x))^2$

- pour  $|x| \in [4, \infty)$ ,  $\dot{V}(x) = -(L_{Y^1}V(x))^2$ .

Ainsi :

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Le système est donc stable.

Par le Principe d'Invariance de LaSalle, toutes les trajectoires du système convergent vers le plus grand ensemble invariant  $I$  contenu dans :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}.$$

Soit  $x_0$  un point de  $I$ . Comme  $\dot{V}(x) < 0$  sur :

$$\{x \in \mathbb{R}^n / 1 \leq |x| \leq 4\}$$

alors  $x_0$  est nécessairement en dehors de cet ensemble.

Si  $|x_0| \geq 4$  alors :

$$\dot{V}(x_0) = -(L_{Y^1}V(x_0))^2 = -(\varphi_{3,+\infty}(|x_0|)\langle b_1, x_0 \rangle)^2 = 0$$

et le système en boucle fermée se réduit à :

$$\dot{x} = Ax.$$

Des dérivations successives, prises en  $x_0$ , de  $\langle b_1, x \rangle$  le long des trajectoires de ce dernier système, nous conduisent à la condition :

$$[b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1]x_0 = 0.$$

Comme  $(A, b_1)$  est commandable alors  $x_0 = 0$ , ce qui est contradictoire.

Maintenant, si  $|x_0| \leq 1$  alors

$$\dot{V}(x_0) = -(L_{Y^3}V(x_0))^4 = -(\varphi_{0,2}(|x_0|)\langle b_3, x_0 \rangle)^4 = 0$$

et le système se réduit encore à :

$$\dot{x} = Ax.$$

En dérivant successivement  $\langle b_3, x \rangle$ , en  $x_0$  par rapport à ce système, nous obtenons :

$$[b_3, Ab_3, \dots, A^{n-1}b_3]x_0 = 0.$$

Comme la paire  $(A, b_3)$  est commandable alors  $x_0 = 0$ . L'origine est donc attractive et le système (2.42)(2.43) est asymptotiquement stable.

## 2.5 Conclusion

Nous avons abordé, dans ce chapitre, le problème de la stabilisation, par retour d'état, d'une classe de systèmes non linéaires et non réguliers. Les résultats obtenus généralisent les travaux portant sur le cas où les champs de vecteurs sont réguliers. Des conditions suffisantes de stabilisation globale ont été établies. Nous avons également proposé des conditions nécessaires et suffisantes dans un cas particulier.

Nous avons ainsi montré que des résultats classiques concernant la stabilisation par retour d'état de systèmes réguliers pouvaient trouver des versions dans le cas où les systèmes seraient seulement continus et localement lipschitziens.

Dans le chapitre suivant, nous poursuivons dans ce sens, en considérant le problème de la stabilisation de systèmes non linéaires et non réguliers, par ajout d'intégrateurs.

## Chapitre 3

# Stabilisation par ajout d'intégrateurs

### 3.1 Introduction

Cette partie du mémoire sera consacrée à l'étude de la stabilisation globale de systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y, u \in \mathbb{R}^m$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue et localement lipschitzienne.

Dans [BYR89], [KOD87] et [TSI89], il est démontré que lorsque  $f$  est de classe  $C^\infty$ , si le système :

$$\dot{x} = f(x, 0) \quad (3.2)$$

est globalement asymptotiquement stable à l'origine, alors (3.1) est globalement asymptotiquement stabilisable.

Lorsque  $f$  est linéaire (c.-à-d.  $f(x, y) = Ax + By$ ), la preuve de ce résultat est directe. Il suffit pour cela de prendre  $u(x, y) = Dy$  où  $D$  est une matrice de Hurwitz (c.-à-d. toutes ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative).

Si  $f$  n'est pas linéaire, la démonstration est plus subtile. Elle est basée sur le fait que  $f(x, y)$  peut se mettre sous la forme :

$$f(x, y) = f(x, 0) + F(x, y)y \quad (3.3)$$

où

$$F(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, sy) ds.$$

Malheureusement, cette démarche n'est plus valable lorsque  $f$  n'est pas au moins de classe  $C^1$ .

Dans ce travail nous montrerons que si  $f$  est continue et localement lipschitzien, et que le système (3.2) est globalement asymptotiquement stable à l'origine, alors le système (3.1) est

stabilisable par le biais d'une loi de commande continue. Ceci constituera le résultat principal de ce chapitre.

Sa démonstration reposera sur une décomposition de la fonction  $f$  de la forme :

$$f(x, y) = G(x, y) H(y) \quad (3.4)$$

où  $H$  est une fonction continue qui permettra la construction d'une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée. Cette décomposition fera l'objet d'un lemme technique.

Le problème de la stabilisation globale par retour d'état du système (3.1) est à l'origine de nombreuses études [BYR89, COR91, IGG94, KOD87, KOK89, OUT91, OUT96, OUT, ROS93, TSI89]. Dans ces travaux,  $f$  est supposée être au moins de classe  $C^1$  et le système réduit  $\dot{x} = f(x, 0)$  est stabilisable.

Ce chapitre traite de la stabilisation de (3.1) lorsque  $f$  est seulement continue et l'objectif est légèrement différent de celui des travaux précédents. Nous voulons montrer ici, que l'hypothèse sur  $f$  peut être affaiblie.

Dans la section suivante, nous démontrerons le lemme technique. Dans la section 3, nous présenterons et démontrerons notre résultat principal. Dans la section 4, nous illustrerons ce résultat par des exemples et énoncerons quelques remarques. Enfin, dans la section 5, nous donnerons nos conclusions.

## 3.2 Lemme technique

Démontrons tout d'abord le lemme suivant :

### Lemme 3.1

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\varphi(x, 0) \equiv 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Supposons que  $\varphi$  soit bornée pour tout  $y$  borné. Alors, il existe  $h \in \mathcal{C}$  telle que :

$$|h(y)| \geq |\varphi(x, y)| \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

### Preuve du lemme 3.1

Considérons deux suites de nombres réels  $(a_k)_{k \geq 1}$  et  $(b_k)_{k \geq 1}$  définies par :

$$\begin{cases} a_1 = \sup \left( 1, \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [-2,2]} |\varphi(x, y)| \right) \\ a_k = \sup \left( \frac{a_{k-1}}{2}, \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]} |\varphi(x, y)| \right) \quad \text{pour } k \geq 2, \end{cases}$$

et

$$b_k = \sup \left( k, \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [-k-1, k+1]} |\varphi(x, y)| \right) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Nous construisons la fonction  $h$  de la façon suivante :

- $h(0) = 0$ ,
- $h(y) = -h(-y)$  quand  $y < 0$ ,
- Pour  $y \in \left] 0, \frac{5}{12} \right]$

$$h(y) = \begin{cases} a_k & \text{pour } y \in \left[ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k+1)} \right] \\ \alpha_k y + \beta_k & \text{pour } y \in \left[ \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}, \frac{1}{k+1} \right] \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \alpha_k = 2(k+1)(k+2)(a_k - a_{k+1}) \\ \beta_k = (-3 - 2k)a_k + 2(k+2)a_{k+1}, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

- Pour  $y \in \left] \frac{5}{12}, \frac{1}{2} \right]$

$$h(y) = 12(a_1 - a_2)y + 6a_2 - 5a_1.$$

- Pour  $y \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$

$$h(y) = a_1.$$

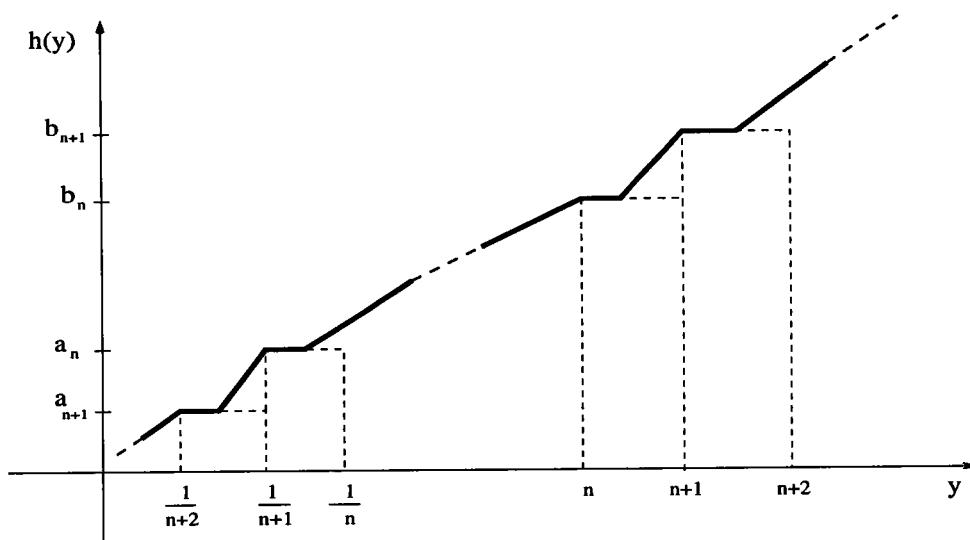
- Pour  $y \in ]1, +\infty[$

$$h(y) = \begin{cases} b_k & \text{pour } y \in [k, k + \frac{1}{2}] \\ \gamma_k y + \delta_k & \text{pour } y \in [k + \frac{1}{2}, k + 1[ \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \gamma_k = 2(b_{k+1} - b_k) \\ \delta_k = 2(k+1)b_k - (2k+1)b_{k+1}, \quad k \geq 1. \end{cases}$$



FIG. 3.1: Représentation de la fonction  $h$ 

Cette fonction  $h$  est par construction continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , satisfait la condition (3.5) et vérifie :

$$h(y)y > 0 \text{ pour } y \neq 0$$

et

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} |h(y)| = +\infty.$$

De plus, avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$ , nous avons  $\lim_{|y| \rightarrow 0} h(y) = 0$ . Ce qui entraîne que  $h$  est aussi continue en zéro.  $h$  fait donc bien partie de l'ensemble  $\mathcal{C}$  et satisfait la condition du lemme.

Nous pouvons à présent démontrer le lemme principal de cette section.

### Lemme 3.2

Soit  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue telle que  $f(x, 0) \equiv 0$ . Alors, il existe  $H = (H_1, \dots, H_m)^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  continues vérifiant :

(L1)  $H_i(y) = h_i(y_i)$  où  $h_i \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1 \dots m$ .

(L2)  $f(x, y) = G(x, y)H(y)$ .

### Preuve du lemme 3.2

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $f$  est bornée. En effet, la fonction  $f$  peut toujours se mettre sous la forme :

$$f = f^1 (1 + |f|^2)$$

où :

$$f^1 = \frac{f}{1 + |f|^2}.$$

Si  $f^1$  est décomposable sous la forme  $f^1 = G^1 H$ , où  $G^1$  et  $H$  sont des fonctions vérifiant le lemme, alors  $f$  peut se décomposer sous la forme  $f = GH$  avec  $G = G^1 (1 + |f|^2)$  qui satisfait le lemme.

Nous démontrons d'abord le lemme dans le cas où  $m = 1$ .  
D'après le lemme 3.1, il existe des fonctions  $h_i \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1 \dots n$ , telles que :

$$|h_i(y)| \geq \left| f_i^{\frac{1}{3}}(x, y) \right|, \quad i = 1 \dots n. \quad (3.6)$$

Nous pouvons écrire que :

$$f_i(x, y) = f_i^{\frac{2}{3}}(x, y) h_i(y) h_i^{-1}(y) f_i^{\frac{1}{3}}(x, y), \quad i = 1 \dots n.$$

Si nous posons :

$$\hat{f}_i = h_i^{-1} f_i^{\frac{1}{3}}, \quad i = 1 \dots n.$$

alors la fonction  $\hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_n)^T$  est continue pour tout  $y \neq 0$ . De plus, l'inégalité (3.6) entraîne que  $\hat{f}$  est bornée.

Posons :

$$\tilde{f}_i = f_i^{\frac{2}{3}} \hat{f}_i, \quad i = 1 \dots n.$$

Comme  $f(x, 0) \equiv 0$ ,  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)^T$  est continue. Par conséquent, pour tout  $i = 1 \dots n$ , les fonctions  $f_i$  s'expriment sous la forme :

$$f_i(x, y) = h_i(y) g_i(x, y)$$

où  $g_i$  est continue et définie par :

$$g_i(x, y) = f_i(x, y) h_i^{-1}(y), \quad i = 1 \dots n.$$

En posant :

$$h(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2(y)} \quad \text{si } y \geq 0$$

et

$$h(y) = -h(-y) \quad \text{si } y < 0,$$

il apparaît clairement que  $h \in \mathcal{C}$  et que :

$$|h(y)| \geq |h_i(y)|, \quad i = 1 \dots n.$$

Nous réécrivons alors  $f$  sous la forme :

$$f(x, y) = h(y) \hat{g}(x, y)$$

où  $\hat{g}$  désigne le vecteur de composantes :

$$\hat{g}_i(x, y) = g_i(x, y) h_i(y) h^{-1}(y), \quad i = 1 \dots n.$$

Nous pouvons remarquer que  $\tilde{h}_i = h_i h^{-1}$ ,  $i = 1 \dots n$ , est une fonction continue pour  $y \neq 0$  et qu'elle est bornée.

Comme  $g(x, 0) \equiv 0$ , la fonction  $\hat{g}$  est continue. Cela nous permet de conclure que les fonctions  $h$  et  $\hat{g}$ , dans le rôle respectif de  $H$  et de  $G$ , répondent bien aux conditions du lemme. Ceci termine la preuve pour le cas  $m = 1$ .

Regardons à présent le cas où  $m > 1$ . L'idée est de montrer, par récurrence sur  $m$ , qu'il existe des fonctions continues  $\bar{G}_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1 \dots n$ , telles que :

$$f_i(x, y) = \langle H(y), \bar{G}_i(x, y) \rangle, \quad i = 1 \dots n \quad (3.7)$$

où  $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une certaine fonction satisfaisant la condition (L1).

Supposons que (3.7) est vérifiée pour tout entier  $k < m$  et montrons que cela reste vrai au rang  $k + 1$ .

Soit donc  $y = (y_1, \bar{y})$  où  $y_1 \in \mathbb{R}$  et  $\bar{y} \in \mathbb{R}^k$ . Nous avons alors :

$$f(x, y) = f(x, y_1, 0) + \bar{f}(x, y_1, \bar{y})$$

avec :

$$\bar{f}(x, y_1, \bar{y}) = f(x, y_1, \bar{y}) - f(x, y_1, 0).$$

Comme  $f(x, 0) \equiv 0$ , il résulte du cas  $m = 1$  que :

$$f(x, y_1, 0) = H^1(y_1)G^1(x, y_1), \quad (3.8)$$

où  $H^1 \in \mathcal{C}$  et  $G^1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue.

D'après l'hypothèse de récurrence et dans la mesure où  $\bar{f}(x, y_1, 0) \equiv 0$ , nous savons qu'il existe des fonctions continues  $\bar{H} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  qui vérifient (L1) et  $\bar{G}_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $i = 1 \dots n$ , telles que :

$$\bar{f}_i(x, y_1, \bar{y}) = \langle \bar{H}(\bar{y}), \bar{G}_i(x, \bar{y}) \rangle, \quad i = 1 \dots n. \quad (3.9)$$

En utilisant (3.8) et (3.9) nous obtenons, pour tout  $i = 1 \dots n$ ,

$$\begin{aligned} f_i(x, y) &= f_i(x, y_1, 0) + \bar{f}_i(x, y_1, \bar{y}) \\ &= H^1(y_1)G_i^1(x, y_1) + \langle \bar{H}(\bar{y}), \bar{G}_i(x, \bar{y}) \rangle \\ &= \langle H(y), G_i(x, y) \rangle \end{aligned}$$

avec  $H = (H^1, \bar{H})$  et  $G_i = (G_i^1, \bar{G}_i)$ .

Posons  $G = [G_1 G_2 \dots G_n]^T$ . Alors  $f(x, y)$  peut se mettre sous la forme :

$$f(x, y) = G(x, y)H(y)$$

où les fonctions  $H$  et  $G$  vérifient bien les conditions du lemme.

Ceci achève la démonstration du lemme 3.2. □

### 3.3 Résultat principal

#### Théorème 3.1

Si  $f$  est continue et si le système (3.2) est globalement asymptotiquement stable, alors le système (3.1) est stabilisable par un retour d'état continu.

#### Preuve du théorème 3.1

Nous commençons tout d'abord par décomposer  $f$  sous la forme :

$$f(x, y) = f(x, 0) + \bar{f}(x, y) \quad (3.10)$$

où :

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y) - f(x, 0).$$

Le système (3.2) étant globalement asymptotiquement stable, il existe une fonction  $V$  propre et définie positive telle que :

$$\dot{V}_{(3.2)}(x)^1 = \langle f(x, 0), \nabla V(x) \rangle < 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Comme  $\bar{f}$  est continue et qu'elle vérifie  $\bar{f}(x, 0) \equiv 0$  alors d'après le lemme 3.2, il existe des fonctions continues  $H = (H_1, H_2, \dots, H_m)^T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  telles que :

$$\bar{f}(x, y) = G(x, y)H(y). \quad (3.11)$$

Nous introduisons la fonction  $W$  de la forme :

$$W(x, y) = V(x) + \sum_{i=1}^m \int_0^y H_i(s) ds.$$

$W$  est une fonction propre définie positive.

Soit  $u$  la loi de commande définie par :

$$u(x, y) = -\nabla V(x)G(x, y) - y. \quad (3.12)$$

La dérivée de  $W$  le long des trajectoires du système en boucle fermée (3.1)(3.12), est donnée par :

$$\dot{W}(x, y) = \dot{V}_{(3.2)}(x) - \langle y, H(y) \rangle.$$

Nous avons alors :

$$\dot{W}(x, y) < 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Le système (3.1)(3.12) est donc globalement asymptotiquement stable.

Ceci achève la preuve du Théorème 3.1. □

---

. 1.  $\dot{V}_{(3.2)}$  représente la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (3.2).

## 3.4 Remarques et exemples

### Remarque 3.1

Lorsque le système est régulier nous retrouvons les résultats classiques rappelés dans l'introduction. Il suffit pour cela de reprendre la décomposition (3.10)(3.11) de  $f$  sous la forme :

$$f(x, y) = f(x, 0) + G(x, y)H(y)$$

en posant :

$$G(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, sy) ds \quad \text{et} \quad H(y) = y.$$

### 3.4.1 Exemple 1

Considérons le cas particulier où  $n = m = 1$  et où  $f$  est de la forme :

$$f(x, y) = f_0(x) + \theta(x)g(y) \tag{3.13}$$

avec :

- $f_0, \theta \in C^0(\mathbb{R})$  de sorte que  $\dot{x} = f_0(x)$  soit globalement asymptotiquement stable.
- $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  est telle que  $g(0) = 0$  et  $\frac{dg}{dy}$  est bornée au voisinage de  $y = 0$ .

D'après le Théorème 3.1, le système (3.13) est stabilisable.

Nous voulons donner l'expression explicite de la loi de commande stabilisante. Pour cela, déterminons les fonctions  $G$  et  $H$  de la décomposition :

$$f(x, y) = f_0(x) + G(x, y)H(y).$$

Nous montrons d'abord qu'il existe une fonction  $\bar{g} \in C^0(\mathbb{R})$  telle que :

$$g(y) = y^{\frac{5}{7}} \bar{g}(y) \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Commençons par prouver que  $g^{\frac{7}{5}} \in C^1(\mathbb{R})$ .

Comme  $g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  alors  $g^{\frac{7}{5}} \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . Il reste à établir que  $g^{\frac{7}{5}}$  est de classe  $C^1$  en  $y = 0$ .

Nous avons :

$$\frac{dg^{\frac{7}{5}}}{dy}(y) = \frac{7}{5} g^{\frac{2}{5}}(y) \frac{dg}{dy}(y).$$

Comme  $g$  est continue, qu'elle s'annule en  $y = 0$  et que  $\frac{dg}{dy}$  est bornée au voisinage de  $y = 0$ , alors :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{dg^{\frac{7}{5}}}{dy}(y) = 0.$$

Ainsi,  $g^{\frac{7}{5}} \in C^1(\mathbb{R})$ .

Il en résulte l'existence d'une fonction  $g_1 \in C^0(\mathbb{R})$  telle que :

$$g^{\frac{7}{5}}(y) = yg_1(y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R},$$

qui équivaut à :

$$g(y) = y^{\frac{5}{7}} g_1^{\frac{5}{7}}(y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

La relation (3.14) est donc établie avec  $\bar{g} = g_1^{\frac{5}{7}}$ .

Posons alors :

$$G(x, y) = \theta(x)\bar{g}(y) \quad \text{et} \quad H(y) = y^{\frac{5}{7}}.$$

Ces fonctions sont bien continues et  $H \in \mathcal{C}$ . En utilisant la méthodologie développée dans ce chapitre, nous pouvons conclure que la commande par retour d'état :

$$u(x, y) = -x\theta(x)\bar{g}(y) - y \tag{3.15}$$

stabilise le système (3.1)(3.13) et que la fonction définie par :

$$W(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}y^{\frac{12}{7}}$$

est une fonction de Lyapunov stricte pour le système en boucle fermée (3.1)(3.13)(3.15).

### Remarque 3.2

*La décomposition (3.14) proposée dans l'exemple 1 n'est pas toujours réalisable. De façon plus générale, si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue s'annulant en zéro alors elle n'est pas nécessairement décomposable sous la forme :*

$$g(y) = y^{\frac{p}{q}} k(y), \tag{3.16}$$

avec  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $k \in C^0(\mathbb{R})$ . Ceci est démontré dans l'annexe B.

### 3.4.2 Exemple 2

Dans ce chapitre, nous avons démontré un résultat de stabilisation d'un système continu par ajout d'intégrateurs. Le retour d'état stabilisant proposé est continu. Toutefois, même si le système est continu, nous observons que ce retour d'état peut être choisi régulier. Pour illustrer notre propos, nous montrons que le système (3.1)(3.13) est stabilisable par ce type de retour d'état.

Nous introduisons pour cela une fonction  $k$  de classe  $C^\infty$  telle que :

$$k^2(x, y) \geq (\bar{g}^2(y) + 1) (\theta^2(x) + 1) \delta(x) \tag{3.17}$$

où  $\delta$  est une fonction régulière vérifiant :

$$\delta(x) \geq 1 \quad \text{si } x \in [-1, 1] \quad \text{et} \quad \delta(x) \geq \frac{|f_0(1)| + |f_0(-1)|}{f_0(x)} \quad \text{si } |x| \geq 1. \quad (3.18)$$

Le système en boucle fermée, défini à partir de (3.1)(3.13) avec :

$$u(x, y) = -(y + y^3)k^2(x, y) - y \quad (3.19)$$

est globalement asymptotiquement stable. En effet, considérons :

$$W_1(x, y) = \int_0^x l(s)ds + \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}$$

où  $l$  est une fonction continue définie par :

$$l(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}f_0(1) & \text{si } x > 1, \\ -\frac{1}{2}f_0(x) & \text{si } |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{2}f_0(-1) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.20)$$

La dérivée de  $W_1$  le long des trajectoires du système en boucle fermée (3.1)(3.13)(3.19) est donnée par :

$$\dot{W}_1(x, y) = l(x)f_0(x) + y^{\frac{5}{7}}l(x)\theta(x)\bar{g}(y) - \left(y^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{10}{3}}\right)k^2(x, y) - y^{\frac{4}{3}}.$$

Comme :

$$y^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{10}{3}} \geq y^{\frac{10}{7}} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R},$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(x, y) &\leq l(x)f_0(x) + y^{\frac{5}{7}}l(x)\theta(x)\bar{g}(y) - y^{\frac{10}{7}}k^2(x, y) - y^{\frac{4}{3}} \\ &= -\left(y^{\frac{5}{7}}k(x, y) - \frac{l(x)\theta(x)\bar{g}(y)}{2k(x, y)}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{l(x)\theta(x)\bar{g}(y)}{2k(x, y)}\right)^2 + l(x)f_0(x) - y^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.17), nous obtenons :

$$\dot{W}_1(x, y) \leq l(x) \left( \frac{l(x)}{\delta(x)} + f_0(x) \right) - y^{\frac{4}{3}}.$$

D'après (3.18)(3.20),

$$l(x) \left( \frac{l(x)}{\delta(x)} + f_0(x) \right) < 0 \quad \text{pour } x \neq 0.$$

Ceci implique que  $\dot{W}_1(x, y) < 0$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Le système en boucle fermée(3.1)(3.13)(3.19) est donc globalement asymptotiquement stable.

## 3.5 Conclusion

Nous avons considéré, dans ce chapitre, le problème de la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires et non réguliers par ajout d'intégrateurs. Les résultats afférents à ce problème nécessitent généralement que les systèmes soient réguliers. Nous avons ici affaibli cette hypothèse, généralisant ainsi les résultats existant dans la littérature. L'intérêt théorique d'établir des résultats dans le cas des systèmes non linéaires et non réguliers a été surencheri par l'intérêt pratique de la question. Des systèmes de la physique par exemple sont non réguliers. Il était donc intéressant de pouvoir développer de nouvelles méthodes de stabilisation répondant à ces cas de figures.

---





## Deuxième partie

# Stabilisation de systèmes différentiels à retards

---



# Chapitre 4

## Préliminaires et résultats de base

### 4.1 Petit rappel historique

Depuis le début du siècle, la description mathématique d'un grand nombre de processus physiques a conduit à l'introduction de systèmes à retards. L'une des premières considérations de cet ordre a été réalisée par Boltzman [BOL09]. L'auteur s'intéressait aux effets retardés en élasticité mais n'a cependant pas souligné clairement l'utilité d'états "passés" pour obtenir un modèle plus réaliste. Dans les années 1900, est apparue la nécessité de spécifier l'état passé du système en vue de prédire son évolution future. Ce point de vue, allait en contradiction avec la tradition Newtonienne pour laquelle, les valeurs "présentes" des états suffisent à la prédiction.

Il faudra attendre les travaux de Volterra [VOL27] et ceux de Lotka [SHA23], qui indépendamment l'un de l'autre (le premier en Italie et le second aux Etats-Unis), ont souligné qu'afin d'atteindre un certain degré de réalisme, les effets retardés devaient être explicitement pris en compte. Volterra a, entre autre, travaillé sur la viscoélasticité et sur les modèles proie-prédateur ([VOL09], [VOL27], [VOL28], [VOL31]). Ses premiers centres d'intérêts portaient essentiellement sur les phénomènes irréversibles et l'élasticité dans le domaine de la mécanique. Ce sont ses études sur l'élasticité, qui l'ont d'ailleurs conduit à développer la théorie des équations fonctionnelles et des équations intégro-différentielles (voir [VOL28], [VOL31]), pour laquelle il devint connu. Dans [SHA23], Lotka a mis en avant l'utilité des retards à travers des discussions portant sur les retards discrets dus au temps d'incubation dans le modèle épidémiologique de la malaria de Ross. Tout comme son homologue Italien, Lotka s'est intéressé à différents problèmes de variations et de fluctuations dans le nombre d'individus et d'espèces. Dans ses travaux sur la stabilisation d'un bateau et de direction automatique, Minorsky [MIN42] a présenté clairement l'importance de considérations des phénomènes de retard dans la commande par rétroaction.

Aux environs des années cinquantes, le grand intérêt porté à la théorie du contrôle a contribué de façon significative au développement de la théorie des équations différentielles dépendant des états "passés". L'article de Myshkis [MYS49] a d'ailleurs joué un rôle important dans ce sens puisqu'on y donnait, pour la première fois, une formulation correcte du problème de la valeur initiale.

Depuis, une littérature abondante est parue : Myshkis [MYS55], Bellman and Cooke [BEL63], Krasovskii [KRA63], El'sgolt [EL'66], Hale [HAL77], Kolmanovskii [?]. Cette liste, non

exhaustive, représente quelques ouvrages qui ont marqué l'étude des systèmes à retards et sont à la base de développements récents.

## 4.2 Exemples

Dans cette section, nous présentons quelques exemples de systèmes à retards, destinés à illustrer le rôle de ces systèmes, dans la modélisation de processus rencontrés en pratique.

### Industrie chimique

Dans [LEH91, LEH94], les auteurs ont considéré une réaction chimique du premier ordre, exotherme et irréversible du composant  $A$  en un produit  $B$ . Cette réaction se déroule dans un réacteur infiniment mélangé avec recirculation. La transformation du composant  $A$  en un produit de réaction  $B$  n'est pas instantanée, il existe donc une quantité de  $A$  qui se transforme *plus tard* en  $B$ .

Les bilans de matière et d'énergie sont donnés par des équations différentielles à états retardés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{q}{V} \left( \lambda A_0 + (1 - \lambda) A(t - \tau) - A(t) \right) - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t) \\ \dot{T}(t) = \frac{1}{V} \left( \lambda T_0 + (1 - \lambda) T(t - \tau) - T(t) \right) - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t) - \frac{1}{VC\rho} U(T(t) - T_w) \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $A(t)$  est la concentration du composant  $A$ ,  $T(t)$  est la température et  $\lambda \in [0, 1]$  est le coefficient qui caractérise la recirculation. Les autres coefficients sont constants.

### Modèle biologique

Les équations à retards peuvent être utilisées pour modéliser des phénomènes biologiques comme les processus immunologiques ou épidémiques. L'exemple ci-dessous, présente l'évolution d'un virus [MAR82], [MAR85]. Le modèle est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = (\beta - \gamma F(t)) V(t) \\ \dot{C}(t) = \alpha \xi(m(t)) F(t - h) V(t - h) - \mu_c(C(t) - C_0) \\ \dot{F}(t) = \rho C(t) - \eta \gamma F(t) V(t) - \mu_f F(t) \\ \dot{m}(t) = \delta V(t) - \mu_m m(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $V(t)$  représente le nombre d'antigènes,  $C(t)$  le nombre de plasmacytes produisant les anticorps,  $m(t)$  le taux relatif de tissu endommagé et  $F(t)$  le taux d'anticorps.  $C_0$  est un niveau constant de plasmacytes, le retard  $h$  est le temps qui s'écoule entre le début de la stimulation des lymphocytes et le début de la production de la masse d'anticorps et  $m(t)$  est une fonction croissante. Tous les autres coefficients sont supposés constants.

### Modèle physique

De nombreux systèmes physiques sont représentés sous forme de systèmes à retards. A titre d'exemple, les équations introduites dans [STA65] ont servi à modéliser les propriétés dynamiques du laser :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = v x_1(t) (x_2(t) - 1 - m - \alpha m x_1(t - h)) + v U_0 \\ \dot{x}_2(t) = K_0 - K(t) (x_1(t) + 1). \end{cases} \quad (4.3)$$

La variable  $x_1(t)$  représente la densité de radiation et  $x_2(t)$  est le coefficient d'amplification. Les autres paramètres sont constants et dépendent des propriétés du laser.

## 4.3 Rappels et Généralités

Dans cette section, nous exposons quelques notions de base sur les systèmes à retards allant de la définition d'un système à retards à celles relatives à sa stabilité. Nous rappelons également quelques critères de stabilité basés sur les fonctions ou les fonctionnelles de Lyapunov.

### 4.3.1 Définitions et notations

Soit  $\mathbb{R}$  le corps des réels et  $\mathbb{R}^n$  l'espace euclidien des vecteurs de dimension  $n$ .

Soit  $r \geq 0$  un nombre réel donné et  $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , l'espace de Banach des fonctions continues de l'intervalle  $[-r, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la topologie de la convergence uniforme.

Nous utilisons  $\|\cdot\|_n$  pour désigner la norme sur  $\mathcal{C}_n$  définie par :

$$\|\phi\|_n = \sup_{t \in [-r, 0]} |\phi(t)|, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_n$$

la norme  $|\cdot|$  étant la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $A$  un nombre réel positif,  $\sigma$  un réel et  $x$  un élément de  $C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ . Alors pour tout  $t \in [\sigma, \sigma + A)$ , nous définissons la fonction  $x_t$ , élément de  $\mathcal{C}_n$  par :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \forall \theta \in [-r, 0]$$

[Notation de Shimanov [SHI60]].

#### Définition 4.1 (Système à retards)

Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_n$  et  $f$  une application de  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Nous appelons système à retards, une équation fonctionnelle différentielle de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (4.4)$$

L'écriture générale (4.4) regroupe des classes plus particulières de systèmes tels que :

1. les systèmes différentiels ordinaires :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

2. les systèmes différentiels aux différences :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t)))$$

avec les retards  $\tau_i$ ,  $0 \leq \tau_i(t) \leq r$ ,  $i = 1 \dots p$ .

3. les équations différentielles intégrales :

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 f(t + \theta, x(t + \theta)) d\theta.$$

L'état du système est la fonction  $x_t$  définie sur  $[-r, 0]$  et  $x(t)$  est appelé état instantané du système à l'instant  $t$ . Pour simplifier, nous parlerons par la suite d'état du système en faisant référence à  $x(t)$ . Mais, il faut bien voir qu'il s'agit en fait de l'état instantané du système pris à l'instant  $t$ . L'espace d'état est ici un espace fonctionnel constitué des fonctions définies sur  $[-r, 0]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Les équations à retards s'inscrivent donc dans la catégorie des systèmes de dimension infinie.

### Définition 4.2 (Solution d'un système à retards)

1. Une fonction  $x$  est une solution de l'équation (4.4) sur  $[\sigma - r, \sigma + A)$ , s'il existe un nombre réel  $A$  strictement positif et un réel  $\sigma$  tels que  $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ ,  $(t, x_t) \in X$  et  $x(t)$  vérifie l'équation (4.4), pour tout  $t \in [\sigma, \sigma + A)$ .
2. Pour un réel  $\sigma$  et un élément  $\phi$  de  $C_n$ ,  $x(\sigma, \phi)$  est une solution de (4.4) de condition initiale  $\phi$  à l'instant  $\sigma$ , si pour un réel  $A > 0$ ,  $x(\sigma, \phi)$  est solution de (4.4) sur  $[\sigma - r, \sigma + A)$  et

$$x_\sigma(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-r, 0].$$

### Existence et unicité d'une solution

#### Théorème 4.1

Si  $f(t, \phi)$  est continue sur  $\mathbb{R} \times C_n$  alors pour tout élément  $(\sigma, \phi)$  de  $\mathbb{R} \times C_n$ , il existe une solution de (4.4) admettant la valeur initiale  $\phi$  au temps  $t = \sigma$ . Si de plus  $f$  est localement lipschitzienne en  $\phi$  sur  $\mathbb{R} \times C_n$ , alors la solution est unique et dépend continûment de la fonctionnelle  $f$ , de l'instant initial  $\sigma$  et de la valeur initiale  $\phi$ .

Dans la suite de ce mémoire, nous supposerons que ces conditions d'existence et d'unicité sont satisfaites.

### 4.3.2 Notions de stabilité pour les systèmes à retards

Nous supposons que  $f(t, 0) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Ceci ramène l'étude de la stabilité du système (4.4) à celle de la solution d'équilibre  $x = 0$ . Pour tout réel positif  $\delta$ , nous noterons  $B_n(0, \delta) = \{\phi \in C_n : \|\phi\|_n \leq \delta\}$ .

#### Définition 4.3 (Stabilité)

La solution d'équilibre  $x = 0$  de l'équation différentielle (4.4) est dite stable si

$$\forall \epsilon > 0, \sigma > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, \sigma), \text{ tel que } \phi \in B_n(0, \delta) \implies x_t(\sigma, \phi) \in B_n(0, \epsilon), \forall t \geq \sigma.$$

**Définition 4.4 (Stabilité asymptotique)**

La solution  $x = 0$  de l'équation (4.4) est asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe un réel  $a = a(\sigma) > 0$  tel que :

$$\phi \in \mathcal{B}_n(0, a) \implies (x(\sigma, \phi)(t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty).$$

**Définition 4.5 (Instabilité)**

La solution nulle est instable si elle n'est pas stable.

**Définition 4.6 (Stabilité robuste)**

Nous dirons qu'un système est  $\mathcal{N}$ -robustement stable ou stable par rapport à  $\mathcal{N}$ , si son équilibre est asymptotiquement stable pour tout retard de l'ensemble  $\mathcal{N}$ .

**4.3.3 Méthode des fonctionnelles de Lyapunov**

Il s'agit d'une généralisation de la seconde méthode de Lyapunov au cas des systèmes à retards.

Nous considérons de nouveau le système (4.4), c'est-à-dire :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{4.5}$$

Soit  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $x(\sigma, \phi)$  la solution de cette équation de condition initiale  $\phi$  au temps  $\sigma$ .

Nous définissons la dérivée  $\dot{V}$ , de  $V$ , le long des trajectoires du système (4.5) par :

$$\dot{V}(t, \phi) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x_{t+h}(t, \phi)) - V(t, \phi)].$$

Soit  $\mathcal{A}$  la classe des fonctions scalaires décroissantes  $\alpha \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R})$  telles que

$$\alpha(s) > 0 \text{ pour } s > 0 \text{ et } \alpha(0) = 0.$$

**Définition 4.7**

Soit  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{B}_n(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle continue telle que  $V(t, 0) = 0$ .

Nous dirons que la fonctionnelle  $(t, \phi) \rightarrow V(t, \phi)$

1. est définie positive, s'il existe une fonction  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $V(t, \phi) \geq \alpha(|\phi(0)|)$ , pour tout réel  $t$  et tout élément  $\phi$  de  $\mathcal{B}_n(0, \delta)$ .
2. est définie négative, s'il existe une fonction  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $V(t, \phi) \leq -\alpha(|\phi(0)|)$ , pour tout réel  $t$  et tout élément  $\phi$  de  $\mathcal{B}_n(0, \delta)$ .
3. admet une borne supérieure infinitésimale, s'il existe une fonction  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$  telle que :

$$V(t, \phi) \leq \alpha(\|\phi\|_n), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall \phi \in \mathcal{B}_n(0, \delta).$$



Pour conclure la stabilité d'une équation différentielle fonctionnelle à retards nous utilisons en pratique les critères suivants :

**Théorème 4.2 (Kolmanovskii et Myshkis, [KOL92])**

*S'il existe une fonctionnelle continue et définie positive  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{B}_n(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  de dérivée  $\dot{V} \leq 0$ , alors la solution triviale de (4.5) est stable.*

**Théorème 4.3 (Kolmanovskii et Myshkis, [KOL92])**

*Supposons que pour une certaine constante positive  $H$ , il existe une fonctionnelle continue et définie positive,  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{B}_n(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  qui admette une borne supérieure et dont la dérivée soit négative sur  $\mathbb{R} \times \mathcal{B}_n(0, \delta)$ . Alors la solution triviale de (4.5) est asymptotiquement stable.*

### 4.3.4 Méthode des fonctions de Lyapunov-Razumikhin

La difficulté de construire des fonctionnelles de Lyapunov est à l'origine de l'utilisation de fonction de Lyapunov. Les résultats obtenus ont été développés par Razumikhin. Nous les rappelons ci-dessous.

Soit  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $x(\sigma, \phi)$  la solution de l'équation (4.5) de condition initiale  $\phi$  au temps  $\sigma$ .

Nous définissons la dérivée,  $\dot{V}(t, \phi(0))$ , de  $V$  le long des trajectoires du système (4.5) par :

$$\dot{V}(t, \phi(0)) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x(t, \phi)(t+h)) - V(t, \phi(0))].$$

Les résultats suivants donnent des conditions suffisantes de stabilité du système (4.5).

**Théorème 4.4 (Razumikhin, [RAZ56])**

*Soient  $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  des fonctions continues, croissantes où  $u$  et  $v$  sont définies positives et  $v$  est strictement croissante. S'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\dot{V}(t, \phi(0)) \leq -w(|\phi(0)|), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_n \quad \text{telle que} \quad \|V(t, \phi)\|_n = V(t, \phi(0))$$

*alors la solution  $x = 0$  de l'équation (4.5) est stable .*

*Si nous avons en plus,  $w(s) > 0$ , pour  $s > 0$  et qu'il existe une fonction continue croissante  $p$  vérifiant  $p(s) > 0$  pour  $s > 0$  telle que*

$$\dot{V}(t, \phi(0)) \leq -w(|\phi(0)|), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_n \quad \text{telle que} \quad \|V(t, \phi)\|_n = p(V(t, \phi(0)))$$

*alors la solution est asymptotiquement stable.*

## 4.4 Stabilisation

Dans cette section, nous rappelons quelques techniques de stabilisation nécessaires pour la suite de notre travail.

### 4.4.1 Retour d'état

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(t)) \quad (4.6)$$

de condition initiale

$$x(t) = \phi(t), t \in [-H, 0]. \quad (4.7)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\forall \theta \in [-H, 0]$ .

Nous supposons que  $f : \mathcal{C}([-H, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lipschitzienne par rapport à chacune de ses composantes et qu'elle vérifie  $f(0, 0) = 0$ .

#### Définition 4.8

*Le système (4.6)(4.7) est dit stabilisable par retour d'état statique sans mémoire, s'il existe une loi de commande  $u(t) = u(x(t))$ , telle que :*

$$\dot{x}(t) = f(x_t, u(x(t))) \quad (4.8)$$

*soit asymptotiquement stable à l'origine.*

### 4.4.2 Retour d'état basé observateur

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t, u(t)) \\ y(t) = h(x_t) \end{cases} \quad (4.9)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur de sortie.

En supposant qu'il existe un retour d'état sans mémoire stabilisant  $u(t) = u(x(t))$ , nous pouvons nous demander si le système bouclé par le retour d'état estimé  $u(t) = u(\hat{x}(t))$ , où  $\hat{x}(t)$  est une estimation du vecteur d'état  $x(t)$ , est aussi asymptotiquement stable à l'origine.

## 4.5 Remarque

Les systèmes à retards considérés, seront mis sous la forme d'équations différentielles fonctionnelles [HAL93]. D'autres représentations existent : les systèmes à retards peuvent être interprétés comme des équations différentielles sur un anneau ou sur un module [MOR76, FLI94], ou encore comme des évolutions dans des espaces abstraits [CUR78]. Bien que les systèmes à retards ne soient pas des systèmes de dimension finie, ce choix de représentation, permet l'utilisation des concepts classiques de commandabilité, d'observabilité et de stabilisabilité définis à l'origine pour des systèmes de dimension finie. Elle offre par conséquent la possibilité d'obtenir des conditions de stabilisation en dimension finie relativement simples à tester comme nous allons le voir dans l'étude qui va suivre.

---

# Chapitre 5

## Stabilisation par commande par retour d'état

### 5.1 Introduction

De nombreux systèmes dynamiques tels que les réseaux neuronaux, les systèmes physiques, biologiques, chimiques ou technologiques présentent des retards [KOL86, MAL87]. Le problème de la stabilisation de ces systèmes est très important car la présence d'un retard peut affecter les propriétés du système en boucle fermée en termes de performance et de stabilité. Cette question a fait l'objet de nombreuses études [THO83, KAM85, WAN87, SHE91, VER93, VER94, VER95, MOH95, RIC98, KOL99, KOL]. Les résultats de stabilisation obtenus peuvent être regroupés en trois catégories :

- la stabilisation indépendante de la taille du retard : les conditions établies ne contiennent aucune information sur le retard [FEL81, MOR83, DAM94].
- la stabilisation dépendante de la taille du retard : les conditions obtenues contiennent l'information sur la taille du retard [SU91, NIC94a, NIC94b].
- la stabilisation basée sur la connaissance des bornes supérieure et inférieure du retard : l'existence d'une loi de commande stabilisante n'est assurée que lorsque le retard se trouve dans une fenêtre temporelle [ABD93].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la stabilisation par retour d'état, d'une classe de systèmes non linéaires qui sera décrite dans la section suivante. Le retard, variable dans le temps, apparaissant dans ce système est une fonction différentiable. Il est supposé borné mais l'allure et/ou la borne de ce retard peuvent être inconnues. C'est une hypothèse réaliste, car dans la pratique, les retards sont parfois difficiles à estimer.

Nous proposerons dans ce chapitre, une synthèse de loi de commande par retour d'état sans mémoire et indépendante de la taille du retard. La technique de stabilisation par retour d'état sans mémoire est en effet, la plus simple et la mieux adaptée lorsque le retard n'est pas bien connu. De plus, sous cette dernière hypothèse, il est clair que les conditions de stabilité asymptotique du système en boucle fermée, que nous proposerons par la suite, seront indépendantes du retard.

En se basant sur la méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, nous présenterons, dans un premier temps, des conditions suffisantes pour garantir la stabilité asymptotique du

système en boucle fermée, exprimées en termes d'existence d'une solution à une équation de Riccati.

Dans un second temps, ces conditions seront utilisées pour obtenir une classe de gains de retours d'état stabilisants. Afin de simplifier la présentation, nous traiterons, d'abord le cas d'un seul retard, puis nous généraliserons les résultats au cas de retards multiples.

En utilisant la théorie de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , nous présenterons une réécriture des résultats obtenus dans le domaine fréquentiel et en terme de spectre d'une matrice hamiltonienne associée à l'équation de Riccati. Nous énoncerons un ensemble de remarques relatives aux résultats obtenus avant de clore le chapitre par nos conclusions.

## 5.2 Description des systèmes considérés

Nous considérons dans ce chapitre les systèmes de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_R x(t - h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - h(t))) + Bu(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-H, 0]\end{aligned}\tag{5.1}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système et  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée du système. Les matrices  $A$  et  $A_R$  appartiennent à  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B$  appartient à  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . Nous supposons que la paire  $(A, B)$  est stabilisable.

La fonction scalaire  $h(\cdot)$  qui représente le retard, est une fonction différentiable. Elle est supposée vérifier  $0 \leq h(t) \leq H$  pour tout  $t > 0$ . L'allure et/ou la borne  $H$  du retard peuvent être inconnues. Les fonctions  $f$  et  $g$  sont non linéaires, continues, respectivement  $k_f$  et  $k_g$ -lipschitzienne par rapport à leur seconde composante, c'est-à-dire que :

$$|f(t, \phi) - f(t, \psi)| \leq k_f \|\phi - \psi\|_n$$

et

$$|g(t, \phi) - g(t, \psi)| \leq k_g \|\phi - \psi\|_n,$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \phi, \psi \in \mathcal{C}([-H, 0], \mathbb{R}^n)$ .

Nous supposons aussi que :

$$f(t, 0) = g(t, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous nous intéressons à la synthèse de lois de commande par retour d'état linéaire et sans mémoire, de la forme :

$$u(t) = Kx(t)\tag{5.2}$$

où  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice de gain du retour d'état.

## 5.3 Conditions de stabilisation

Dans cette section, nous développons des conditions garantissant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (5.1)(5.2). En posant

$$A_K = A + BK$$

nous pouvons réécrire ce système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_K x(t) + A_R x(t - h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - h(t))) \quad (5.3)$$

Nous avons le résultat suivant :

### Théorème 5.1

Considérons le système (5.1) avec  $\dot{h}(t) < 1$ . S'il existe un triplet de matrices symétriques définies positives  $P$ ,  $Q$  et  $S$  telles que :

$$A_K^T P + P A_K + Q + \gamma_{(1,g)} I_n + P \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right) P + S = 0 \quad (5.4)$$

avec  $\beta \leq 1 - \dot{h}(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_{(1,g)} = 1 + k_g^2$  et  $\gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} = \frac{1}{\beta} + k_f^2$ , alors le système en boucle fermée (5.1)(5.2) est asymptotiquement stable.

### Preuve du théorème 5.1

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $V : C(t, [-H, 0], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}$ , définie par :

$$V(t, \psi) = \psi(0)^T P \psi(0) + \int_{-h(t)}^0 \psi(\theta)^T (Q + k_g^2 I_n) \psi(\theta) d\theta. \quad (5.5)$$

Cette fonctionnelle est définie positive car :

$$V(t, \psi) \geq \lambda_{\min}(P) |\psi(0)|^2, \quad \forall \psi \in C([-H, 0], \mathbb{R}^n).$$

De plus, elle admet une borne supérieure infinitésimale, c'est-à-dire que :

$$V(t, \psi) \leq \zeta \|\psi\|_n^2$$

pour une certaine constante positive  $\zeta$ . En effet, pour tout  $\psi \in C([-H, 0], \mathbb{R}^n)$

$$V(t, \psi) \leq |\psi(0)|^2 \lambda_{\max}(P) + \max_{s \in [-H, 0]} |\psi(s)|^2 H (\lambda_{\max}(Q) + k_g^2).$$

Il suffit alors de prendre :

$$\zeta \geq \lambda_{\max}(P) + H (\lambda_{\max}(Q) + k_g^2).$$

La dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système en boucle fermée (5.1)(5.2) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) &= x(t)^T (A_K^T P + P A_K + Q + k_g^2 I_n) x(t) + 2x(t)^T P A_R x(t - h(t)) \\
&+ 2x(t)^T P f(t, x(t)) + 2x(t)^T P g(t, x(t - h(t))) \\
&- (1 - \dot{h}(t)) x(t - h(t))^T (Q + k_g^2 I_n) x(t - h(t)).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Les termes faisant intervenir les non linéarités  $f$  et  $g$  peuvent être majorés en utilisant l'inégalité de Young suivante :

$$2u^T v \leq \varepsilon u^T u + \frac{1}{\varepsilon} v^T v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0. \tag{5.7}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
2f(t, x(t))^T P x(t) &\leq \frac{1}{k_f^2} |f(t, x(t))|^2 + k_f^2 x(t)^T P P x(t) \\
&\leq |x(t)|^2 + k_f^2 x(t)^T P P x(t)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

et

$$\begin{aligned}
2g(t, x(t - h(t)))^T P x(t) &\leq \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} |P x(t)|^2 + (1 - \dot{h}(t)) |g(t, x(t - h(t)))|^2 \\
&\leq \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} x(t)^T P P x(t) + (1 - \dot{h}(t)) k_g^2 |x(t - h(t))|^2.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

En utilisant (5.8)(5.9) ainsi que la convention de notation sur  $\gamma_{(\dots)}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) &\leq x(t)^T \left( A_K^T P + P A_K + Q + \gamma_{(1,g)} I_n + \gamma_{(\frac{1}{1-\dot{h}(t)}, f)} P^2 \right) x(t) \\
&+ 2x(t)^T P A_R x(t - h(t)) - (1 - \dot{h}(t)) x(t - h(t))^T Q x(t - h(t)).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

En complétant les "carrés", nous avons :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) &\leq x(t)^T (A_K^T P + P A_K + Q + \gamma_{(1,g)} I_n \\
&+ P \left( \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{1-\dot{h}(t)}, f)} I_n \right) P) x(t) \\
&- (1 - \dot{h}(t)) \left( Q^{\frac{1}{2}} x(t - h(t)) - \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} Q^{-\frac{T}{2}} A_R^T P x(t) \right)^T \\
&\quad \left( Q^{\frac{1}{2}} x(t - h(t)) - \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} Q^{-\frac{T}{2}} A_R^T P x(t) \right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Comme  $\dot{h}(t) < 1$ , le dernier terme est négatif. De plus, il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :

$$\beta \leq 1 - \dot{h}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Grâce à (5.4), nous obtenons finalement :

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -x(t)^T S x(t)$$

Ainsi le système (5.1)(5.2) est asymptotiquement stable.

Ceci termine la preuve du Théorème 5.1. □

### Remarque 5.1

*D'après la notion de robustesse introduite dans le chapitre précédent, nous pouvons conclure que sous les hypothèses du Théorème 5.1, le système (5.1)(5.2) est  $\mathcal{N}$ -robustement asymptotiquement stable.*

## 5.4 Lois de commande pour des systèmes non linéaires à retards

Dans cette section, nous caractérisons un ensemble de lois de commande stabilisantes pour les systèmes à retard (5.1)(5.2).

### Théorème 5.2

*Considérons le système (5.1). Soient  $Q$  et  $S$  des matrices symétriques définies positives. Supposons qu'il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive telle que :*

$$A^T P + P A + Q + \gamma_{(1,g)} I_n + P \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n - B S^{-1} B^T \right) P + S = 0 \quad (5.12)$$

et soit  $K$  donnée par :

$$K = -\frac{1}{2} S^{-1} B^T P. \quad (5.13)$$

Alors le système (5.1)(5.2)(5.13) est asymptotiquement stable.

### Preuve du théorème 5.2

En substituant  $K = -\frac{1}{2} S^{-1} B^T P$  dans (5.12), nous obtenons :

$$(A + BK)^T P + P (A + BK) + Q + \gamma_{(1,g)} I_n + P \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right) P + S = 0. \quad (5.14)$$

Donc d'après le Théorème 5.1, le système en boucle fermée (5.1)(5.2) est asymptotiquement stable et le théorème 5.2 est démontré. □



## 5.5 Généralisation au cas de retards multiples

Nous étendons à présent les résultats précédents au cas de systèmes à plusieurs retards décrits par les équations :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) + Bu(t) + \sum_{j=1}^p (A_j(t)x(t - h_j(t)) + g_j(t, x(t - h_j(t)))) \quad (5.15)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0],$$

pour lesquels  $A$  et  $A_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , sont des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B$  une matrice de  $\mathbb{R}^{n \times m}$ . Les retards  $h_j(\cdot)$  sont différentiables et vérifient :

$$0 \leq h_1(t) \leq h_2(t) \leq \dots \leq h_p(t) \leq H.$$

Les fonctions  $f$  et  $g_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , sont continues, respectivement  $k_f$  et  $k_{g_j}$  lipschitzienne par rapport à leur seconde composante et vérifient :

$$f(t, 0) = g_j(t, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall j = 1 \dots p.$$

Le résultat qui suit présente des conditions suffisantes pour que le système (5.15) bouclé par la loi de commande :

$$u(x) = Kx(t) \quad (5.16)$$

soit asymptotiquement stable.

### Théorème 5.3

Considérons le système (5.15) pour lequel  $0 \leq h_1(t) \leq h_2(t) \leq \dots \leq h_p(t) \leq H$  et  $\dot{h}_j(t) < 1, \forall j, 1 \leq j \leq p$ . S'il existe un réel  $\beta > 0$  ainsi que des matrices symétriques définies positives  $P$ ,  $S$  et  $W_j$ ,  $j = 1 \dots p$ , telles que :

$$A_K^T P + P A_K + \sum_{j=1}^p \left( W_j + \gamma_{(\frac{1}{p}, g_j)} I_n + P \left( \frac{1}{\beta} A_j W_j^{-1} A_j^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, \frac{f}{\sqrt{p}})} I_n \right) P \right) + S = 0 \quad (5.17)$$

alors le système (5.15)(5.16) est asymptotiquement stable.

### Preuve du théorème 5.3

Pour chaque retard  $h_j$ , il existe un réel  $\beta_j$  vérifiant :

$$0 < \beta_j \leq 1 - \dot{h}_j(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Posons

$$\beta = \min_{1 \leq j \leq p} \beta_j.$$

Considérons à présent la fonctionnelle de Lyapunov :

$$\begin{aligned}
V_m(t, \psi) &= \psi(0)^T P \psi(0) + \int_{-h_1(t)}^0 \psi(\theta)^T \left( Q_1 + \sum_{j=1}^p k_{g_j}^2 I_n \right) \psi(\theta) d\theta \\
&+ \int_{-h_2(t)}^{-h_1(t)} \psi(\theta)^T \left( Q_2 + \sum_{j=2}^p k_{g_j}^2 I_n \right) \psi(\theta) d\theta + \dots + \int_{-h_p(t)}^{-h_{p-1}(t)} \psi(\theta)^T \left( Q_p + k_{g_p}^2 I_n \right) \psi(\theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

où  $Q_1 = W_0$ ,  $Q_p = W_p$ , et  $Q_j = Q_{j+1} + W_j$ ,  $\forall j, 1 \leq j \leq p-1$ . Notons que  $\sum_{j=1}^p W_j = Q_1$ .

Cette fonctionnelle est définie positive et admet une borne supérieure infinitésimale.

Sa dérivée le long des trajectoires de (5.15)(5.16) est de la forme :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_m(t, x_t) &= x(t)^T \left( (A + BK)^T P + P(A + BK) + Q_1 + \sum_{j=1}^p k_{g_j}^2 I_n \right) x(t) \\
&+ 2 \sum_{j=1}^p x(t)' P A_j x(t - h_j(t)) + 2x(t)^T P f(t, x(t)) \\
&+ 2 \sum_{j=1}^p x(t)^T P g_j(t, x(t - h_j(t))) \\
&- (1 - \dot{h}_1(t)) x(t - h_1(t))^T (Q_1 + \sum_{j=1}^p k_{g_j}^2 I_n) x(t - h_1(t)) \\
&+ (1 - \dot{h}_1(t)) x(t - h_1(t))^T (Q_2 + \sum_{j=2}^p k_{g_j}^2 I_n) x(t - h_1(t)) \\
&- (1 - \dot{h}_2(t)) x(t - h_2(t))^T (Q_2 + \sum_{j=2}^p k_{g_j}^2 I_n) x(t - h_2(t)) \\
&+ (1 - \dot{h}_2(t)) x(t - h_2(t))^T (Q_3 + \sum_{j=3}^p k_{g_j}^2 I_n) x(t - h_2(t)) + \dots + \\
&- (1 - \dot{h}_{p-1}(t)) x(t - h_{p-1}(t))^T (Q_{p-1} + \sum_{j=p-1}^p k_{g_j}^2 I_n) x(t - h_{p-1}(t)) \\
&+ (1 - \dot{h}_{p-1}(t)) x(t - h_{p-1}(t))^T (Q_p + k_{g_p}^2 I_n) x(t - h_{p-1}(t)) \\
&- (1 - \dot{h}_p(t)) x(t - h_p(t))^T (Q_p + k_{g_p}^2 I_n) x(t - h_p(t)).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

L'expression précédente se simplifie sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_m(t, x_t) &= x(t)^T \left( (A + BK)^T P + P(A + BK) + Q_1 + \sum_{j=1}^p k_{g_j}^2 I_n \right) x(t) \\
 &+ 2 \sum_{j=1}^p x(t)^T P A_j x(t - h_j(t)) + 2x(t)^T P f(t, x(t)) \\
 &+ 2 \sum_{j=1}^p x(t)^T P g_j(t, x(t - h_j(t))) \\
 &- \sum_{j=1}^p (1 - \dot{h}_j(t)) x(t - h_j(t))^T (W_j + k_{g_j}^2 I_n) x(t - h_j(t)).
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

D'après l'inégalité de Young (5.7), nous avons :

$$2f(t, x(t))^T P x(t) \leq k_f^2 x(t)^T P P x(t) + |x(t)|^2 \tag{5.21}$$

et

$$2g_j(t, x(t - h_j(t)))^T P x(t) \leq \frac{1}{1 - \dot{h}_j(t)} x(t)^T P P x(t) + (1 - \dot{h}_j(t)) k_{g_j}^2 |x(t - h_j(t))|^2. \tag{5.22}$$

En utilisant (5.21) et (5.22), puis complétant les carrés, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_m(t, x_t) &\leq x(t)^T \left( (A + BK)^T P + P(A + BK) + Q_1 + (1 + \sum_{j=1}^p k_{g_j}^2) I_n \right. \\
 &+ P \left( \sum_{j=1}^p \frac{1}{1 - \dot{h}_j(t)} A_j W_j^{-1} A_j^T + \left( \sum_{j=1}^p \frac{1}{1 - \dot{h}_j(t)} + k_f^2 \right) I_n \right) P \left. \right) x(t) \\
 &- \sum_{j=1}^p (1 - \dot{h}_j) \left( W_j^{\frac{1}{2}} x(t - h_j) - \frac{1}{1 - \dot{h}_j(t)} W_j^{-\frac{T}{2}} A_j^T P x(t) \right)^T \\
 &\quad \left( W_j^{\frac{1}{2}} x(t - h_j) - \frac{1}{1 - \dot{h}_j(t)} W_j^{-\frac{T}{2}} A_j^T P x(t) \right) \\
 &\leq -x(t)^T S x(t).
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 5.3. □

Le résultat suivant présente explicitement des lois de commande stabilisantes pour le système (5.15).

**Théorème 5.4**

S'il existe des matrices  $P, S, W_j, 1 \leq j \leq p$ , symétriques définies positives, telles que

$$A^T P + PA + \sum_{j=1}^p \left( W_j + \gamma_{\left(\frac{1}{p}, g_j\right)} I_n \right) + P \left( \sum_{j=1}^p \left( A_j W_j^{-1} A_j^T + \gamma_{\left(\frac{1}{\beta}, \frac{t}{\sqrt{\beta}}\right)} I_n \right) - BS^{-1}B^T \right) P + S = 0 \quad (5.24)$$

alors la loi de commande

$$u(t) = -\frac{1}{2} S^{-1} B^T P x(t) \quad (5.25)$$

rend le système (5.15)(5.25) asymptotiquement stable.

**Preuve du théorème 5.4**

La preuve de ce résultat s'obtient directement en remplaçant  $K = -\frac{1}{2} S^{-1} B^T P$  dans l'équation (5.24). Nous retrouvons ainsi l'équation de Riccati (5.17) permettant de déduire, via le théorème 5.3, la stabilité asymptotique du système (5.15)(5.25).  $\square$

**5.6 Conditions de stabilisation équivalentes**

Dans cette section nous présentons des conditions de stabilité du système (5.1) exprimées dans le domaine fréquentiel puis en terme de spectre d'une matrice hamiltonienne. Elles seront données pour le système en boucle fermée et pour le système en boucle ouverte. Ces conditions seront établies à partir de résultats classiques de la Théorie  $\mathcal{H}_\infty$  que nous rappelons ci-dessous.

**5.6.1 Préliminaires****5.6.1.1 Lemme borné réel strict****Définition 5.1**

Considérons l'équation algébrique de Riccati

$$A^T X + XA - XMX + N = 0 \quad (5.26)$$

Une matrice symétrique  $X$  qui vérifie l'équation de Riccati est une solution stabilisante, si  $A - MX$  est stable.

**Lemme 5.1 (Lemme borné réel strict, [PET91])**

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est stable et  $\|\mathcal{H}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \|\mathcal{H}(j\omega)\|_2 < 1$ , où  $\mathcal{H}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ .

2. L'équation de Riccati

$$A^T P + PA + PBB^T P + C^T C = 0$$

admet une solution stabilisante  $P \geq 0$  (c.-à-d.  $A + BB^T P$  est stable ).

3. Il existe une matrice  $\bar{P} > 0$  telle que

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A + \bar{P} B B^T \bar{P} + C^T C < 0.$$

De plus, si ces propriétés sont vérifiées alors  $P < \bar{P}$ .

### 5.6.1.2 Matrice hamiltonienne

Nous venons de présenter des conditions de stabilité, basées sur un lien existant entre équation de Riccati et norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert. Il existe également un lien entre cette norme et le spectre d'une matrice hamiltonienne associée à l'équation de Riccati [WIL71, GRE95, ZHO96], que nous présentons ci-dessous.

#### Définition 5.2

Une matrice réelle  $H$  de dimension  $2n \times 2n$  est hamiltonienne si et seulement si :

$$SH = H^T S^T$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

#### Propriété 5.1

A une équation de Riccati de la forme :

$$A^T P + P A + P M P + Q = 0 \quad (5.27)$$

est associée une matrice hamiltonienne de dimension  $2n \times 2n$ , définie par :

$$H = \begin{pmatrix} A & M \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$$

de sorte que si  $P$  est solution de (5.27) alors :

$$(P \quad -I_n) H \begin{pmatrix} I_n \\ P \end{pmatrix} = 0$$

En se basant sur les propriétés de la matrice hamiltonienne (symétrique par rapport à l'axe imaginaire) et la propriété 5.1, des auteurs tels que Boyd, Balakrishnan et Kabamba ont démontrés le résultat suivant. Il s'agit d'un théorème présentant un lien entre les valeurs

singulières de la matrice de transfert  $\mathcal{H}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$  et le spectre de la matrice hamiltonienne suivante :

$$H(\mu) = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{\mu^2}BB^T \\ -C^TC & -A^T \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

**Théorème 5.5** (voir [BOY89])

*Supposons que la matrice  $A$  est stable. La norme*

$$\|\mathcal{H}(s)\|_\infty < \mu$$

*si et seulement si  $H(\mu)$  n'admet pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.*

Nous pouvons maintenant établir nos conditions de stabilité.

## 5.6.2 Conditions sur la norme $\mathcal{H}_\infty$

### 5.6.2.1 Cas du système en boucle fermée

**Théorème 5.6**

*Si la paire  $(A, B)$  est stabilisable et si le gain  $K$ , est tel que la matrice  $A_K$  est stable et :*

$$\left\| (Q + \gamma_{(1,g)}I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A_K)^{-1} \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty < 1 \quad (5.29)$$

*alors le système (5.1)(5.2) est asymptotiquement stable.*

**Preuve du théorème 5.6**

Nous commençons par noter que la condition du théorème 5.1 est équivalente à l'existence de matrices  $P$  et  $Q$  vérifiant :

$$A_K^T P + P A_K + Q + \gamma_{(1,g)} I_n + P \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right) P < 0. \quad (5.30)$$

En identifiant le Lemme 5.1 et l'inégalité (5.30), nous avons :

$$BB^T := \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \quad \text{et} \quad C^T C := Q + \gamma_{(1,g)} I_n.$$

La matrice de transfert associée est alors de la forme :

$$\mathcal{H}(s) = (Q + \gamma_{(1,g)} I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A_K)^{-1} \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le Lemme 5.1, si la condition (5.29) est satisfaite alors il existe une matrice  $P$  solution de (5.30) et l'équation de Riccati (5.4) admet une solution. Le système (5.1)(5.2) est donc asymptotiquement stable. Ceci complète la démonstration du théorème 5.6.  $\square$

### 5.6.2.2 Cas du système en boucle ouverte

En utilisant la même approche, nous pouvons donner des conditions garantissant la stabilité du système (5.1)(5.2)(5.13).

#### Théorème 5.7

Supposons que la matrice  $A$  soit stable. Si :

$$\left\| (Q + \gamma_{(1,g)} I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A)^{-1} \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\infty} < 1 \quad (5.31)$$

alors le système (5.1)(5.2)(5.13) est asymptotiquement stable.

### 5.6.3 Conditions sur la matrice hamiltonienne

#### 5.6.3.1 Cas du système en boucle fermée

La matrice hamiltonienne, associée à l'équation de Riccati (5.4) est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} A_K & \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \\ - (Q + \gamma_{(1,g)} I_n) & - A_K^T \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Nous avons alors le résultat suivant :

#### Théorème 5.8

Si  $(A, B)$  est stabilisable et si le gain  $K$  est tel que :

1.  $A_K$  est stable,

2. la matrice hamiltonienne (5.32) n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire,

alors le système (5.1)(5.2) est asymptotiquement stable.

#### 5.6.3.2 Cas du système en boucle ouverte

#### Théorème 5.9

Soit  $A$  une matrice stable. Si la matrice hamiltonienne suivante :

$$H_1 = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \\ - (Q + \gamma_{(1,g)} I_n) & - A^T \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, alors le système (5.1)(5.2)(5.13) est asymptotiquement stable.

Nous donnons à présent un ensemble de remarques relatives aux conditions de stabilité établies.

### 5.6.4 Remarques

#### Remarque 5.2

Les résultats que nous venons d'établir dans le domaine fréquentiel et en terme de spectre d'une matrice hamiltonienne présentent l'intérêt de fournir des conditions de stabilité faciles à tester, permettant de réajuster le choix du gain  $K$ .

#### Remarque 5.3

Les hypothèses du théorème 5.1 peuvent être relaxées en utilisant directement le lemme 5.1. En effet, la recherche de solutions  $P > 0$  vérifiant (5.4) revient à trouver des solutions  $P > 0$  de l'équation (5.30). D'après le lemme 5.1, cela équivaut à chercher des solutions  $P_1 \geq 0$  de l'équation :

$$A_K^T P_1 + P_1 A_K + Q + \gamma_{(1,g)} I_n + P_1 \left( \frac{1}{\beta} A_R Q^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta},f)} I_n \right) P_1 = 0.$$

#### Remarque 5.4

En utilisant la propriété du complément de Schur (cf. Annexe C), il est possible de transformer l'inégalité (5.30), (cf. [BOY94]), sous la forme d'une LMI (Inégalités matricielles affines) donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A_K^T P + P A_K + \gamma_{(1,g)} I_n + Q & \beta^{\frac{1}{2}} P A_R & \sqrt{\gamma_{(\frac{1}{\beta},f)}} P \\ \beta^{\frac{1}{2}} A_R^T P & Q & 0 \\ \sqrt{\gamma_{(\frac{1}{\beta},f)}} P & 0 & -I_n \end{pmatrix} < 0 \\ P > 0, \quad Q > 0 \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Le problème de l'existence de matrices  $P$  et  $Q$  satisfaisant l'inégalité (5.30) se ramène alors à un problème de faisabilité d'une LMI, c'est à dire à la recherche de matrices  $P$  et  $Q$  vérifiant les contraintes (5.34). L'intérêt d'une telle technique est l'existence d'algorithmes de résolution des LMI très performants. Cette approche a été utilisée par Niculescu [NIC96] pour convertir des problèmes de stabilité et de stabilisation de systèmes linéaires incertains à retards, sous forme de problèmes d'optimisation convexe.

## 5.7 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple numérique d'application de nos résultats.



Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_R x(t-0.1) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-0.1)) + Bu(t) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-0.1) \\ x_2(t-0.1) \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_2(t)}{\sqrt{1+x_2^2(t)}} \end{pmatrix} \\ &+ 0.7 \begin{pmatrix} \frac{x_1(t-0.1)}{\sqrt{1+x_1^2(t-0.1)}} \\ x_2(t-0.1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Nous avons

$$|f(t, x(t))| \leq 0.5 \sqrt{\frac{x_2^2(t)}{1+x_2^2(t)}} \leq 0.5 \sqrt{x_2^2(t)}.$$

$f$  est donc lipschitzienne de constante  $k_f \geq 0.5$ . Nous avons également

$$|g(t, x(t))| \leq 0.7 \sqrt{\frac{x_1^2(t)}{1+x_1^2(t)} + x_2^2} \leq 0.7 \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}.$$

La fonction  $g$  est donc lipschitzienne de constante  $k_g \geq 0.7$ .

Nous choisissons de prendre  $k_f = 0.5$ ,  $k_g = 0.7$  et  $S = Q = I_2$ .

La matrice hamiltonienne associée à l'équation de Riccati donnée par le théorème 5.2 est de la forme :

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0.54 \\ -3.49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.49 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son spectre est :  $\{-1 + 2.1630i; -1 - 2.1630i; -1 + 0.5489i; -1 - 0.5489i\}$ .

Comme  $H$  n'admet pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire alors l'équation de Riccati a une solution.

En utilisant le théorème 5.2, nous obtenons :

$$P = \begin{pmatrix} 0.6912 & 0.1266 \\ 0.1266 & 0.8413 \end{pmatrix} \quad K = (-0.0633 \quad -0.42065).$$

La figure 5.1 représente le comportement du système en boucle fermée où  $x_0 = (3 \ 1)^T$ . La courbe en trait plein représente l'état  $x_1$  du système et la courbe en pointillés, l'état  $x_2$ .

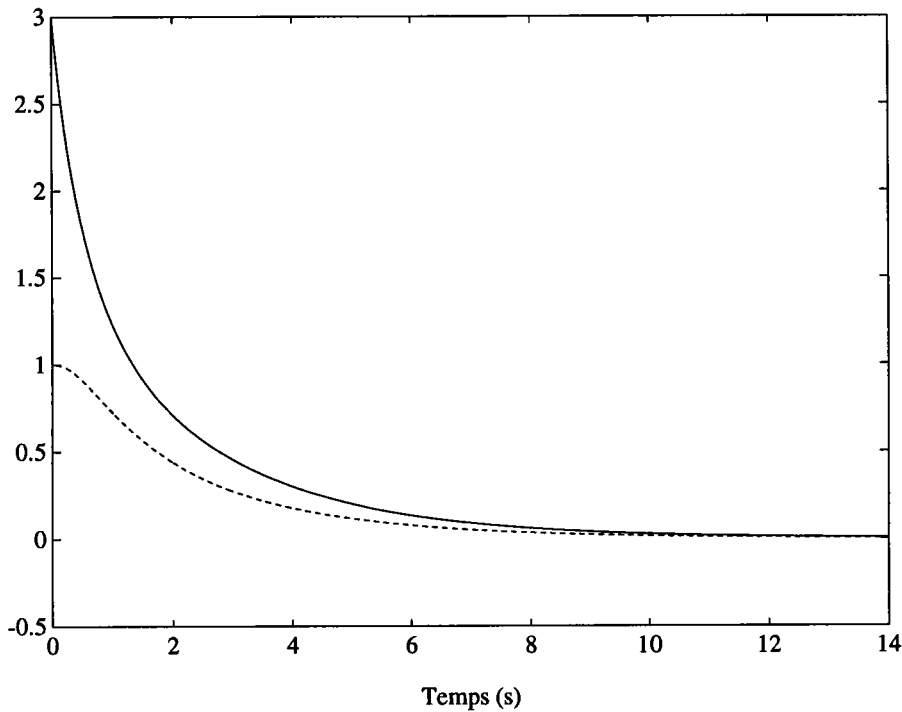


FIG. 5.1: *Représentation des états  $x_1$  et  $x_2$  en boucle fermée*

## 5.8 Conclusion

Nous avons considéré dans ce chapitre le problème de la stabilisation de systèmes à retards par retour d'état sans mémoire. Une étude de la stabilité du système en boucle fermée a été réalisée. Nous avons obtenu des conditions simples de stabilité, exprimées sous forme d'équation de Riccati. La démarche employée nous a permis de définir explicitement toute une classe de lois de commande stabilisantes. Nous avons également établi des conditions de stabilité sous la forme d'un critère fréquentiel ou en fonction du spectre d'une matrice hamiltonienne, simple à tester.

L'étude réalisée dans ce chapitre, suppose un accès à toutes les variables d'états. Or, dans la plupart des cas, cette hypothèse n'est pas vérifiée. Une solution consiste alors à reconstruire l'état en utilisant un observateur. La reconstruction de l'état ainsi que la commande basée observateur seront les thèmes principaux du chapitre suivant.



## Chapitre 6

# Stabilisation par commande basée observateur

### 6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons traité le problème de la stabilisation de systèmes non linéaires à retards par retour d'état. Cette approche nécessite la mesure complète de l'état. Or, certaines variables d'état sont parfois inaccessibles à la mesure, soit parce que le capteur correspondant est coûteux, soit parce que la mesure requise est trop difficile à faire de manière précise. Nous sommes donc amenés à considérer des problèmes de commande utilisant un observateur devant estimer asymptotiquement les variables d'état du système, à partir des mesures entrées/sorties de celui-ci.

Durant les trente dernières années, le problème de l'estimation des variables d'état des systèmes à retards a été traité dans de nombreux travaux [BHA76, FAI86, GRE75, SAL80, TRI95, WAT84]. Ces derniers sont essentiellement consacrés au cas linéaire.

Dans ce travail, nous nous proposons de développer une méthode de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires à états retardés. Dans le cas des systèmes non linéaires lipschitziens et sans retards, de récents développements ont été réalisés dans l'objectif de trouver des conditions peu restrictives pour assurer la convergence asymptotique de l'observateur [RAG94, RAJ98].

L'étude qui suit va dans ce sens et généralise les résultats de ces travaux. L'observateur proposé est une extension de l'observateur de Thau [THA73] à une classe de systèmes non linéaires à retards pouvant être non stationnaires.

Nous traiterons ensuite le problème de la commande basée observateur. Nous considérerons le système composite, regroupant l'équation d'état où la loi de commande dépend de l'état estimé, et l'équation de l'erreur d'estimation. Nous analyserons la stabilité asymptotique de ce système pour une commande basée observateur.

Au même titre que la stabilité asymptotique du système composite, l'analyse de la convergence asymptotique de l'observateur se fera en utilisant la théorie de Lyapunov-Krasovskii.

Ce chapitre sera décomposé comme suit :

Dans la deuxième section, nous développerons une méthode de synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires à retards. Nous présenterons une forme générale d'observateurs, ainsi que des conditions suffisantes pour en garantir la convergence. Nous

déduirons alors explicitement toute une classe de matrices de gains de ces observateurs. Un algorithme de synthèse sera aussi proposé.

Dans la troisième section, nous traiterons le problème de la stabilisation par une commande basée observateur. Nous proposerons des conditions suffisantes pour assurer la stabilité asymptotique du système "composite" en boucle fermée. Enfin, dans la quatrième section, nous donnerons nos conclusions.

## 6.2 Observateurs pour une classe de systèmes à retards

Le système étudié dans ce chapitre est le suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_R x(t - h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t - h(t))) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [\sigma - H, \sigma].\end{aligned}\tag{6.1}$$

où  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}(\mathbb{R})$  et le vecteur de sortie  $y \in \mathbb{R}^q$ .

Ce système est quasiment identique à celui étudié dans le chapitre précédent. Les seules différences résident dans l'introduction de l'équation de mesure et dans le fait de supposer le retard connu.

### 6.2.1 Résultat principal

Nous proposons de reconstruire l'état du système (6.1) à l'aide du système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_R \hat{x}(t - h(t)) + f(t, \hat{x}(t)) + g(t, \hat{x}(t - h(t))) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))\tag{6.2}$$

où  $\hat{x}(t)$  est une estimation du vecteur d'état  $x(t)$  et  $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$  est le gain de l'observateur. La dynamique de l'erreur d'estimation,  $e = x - \hat{x}$ , est alors décrite par l'équation :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + A_R e(t - h(t)) + F(t, e(t)) + G(t, e(t - h(t)))\tag{6.3}$$

avec :

$$F(t, e(t)) = f(t, x(t)) - f(t, x(t) - e(t))$$

et

$$G(t, e(t - h(t))) = g(t, x(t - h(t))) - g(t, x(t - h(t)) - e(t - h(t))).$$

Nous pouvons remarquer que  $F$  et  $G$  sont respectivement  $k_f$  et  $k_g$  lipschitziennes par rapport à leur deuxième composante, et que  $F(t, 0) = G(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Dans le théorème suivant, nous proposons une condition suffisante assurant la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (6.3).

**Théorème 6.1**

Soit le système (6.1), avec  $\dot{h}(t) < 1$ , et l'observateur associé (6.2). S'il existe des matrices symétriques, définies positives  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{S}$  telles que :

$$(A - LC)^T \tilde{P} + \tilde{P}(A - LC) + \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n + \tilde{P} \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right) \tilde{P} + \tilde{S} = 0 \quad (6.4)$$

avec  $\gamma_{(1,g)} = 1 + k_g^2$  et  $\gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} = \frac{1}{\beta} + k_f^2$ , alors l'observateur (6.2) est asymptotiquement convergent.

**Preuve du théorème 6.1**

Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $\tilde{V} : C(t, [-H, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$\tilde{V}(t, \psi) = \psi(0)^T \tilde{P} \psi(0) + \int_{-h(t)}^0 \psi(\theta)^T (\tilde{Q} + k_g^2 I_n) \psi(\theta) d\theta. \quad (6.5)$$

Nous avons montré, au chapitre précédent, qu'une telle fonctionnelle était définie positive, et admettait une borne supérieure infinitésimale.

Sa dérivée le long des trajectoires de (6.3) est :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(t, e_t) &= e(t)^T \left( (A - LC)^T \tilde{P} + \tilde{P}(A - LC) + \tilde{Q} + k_g^2 I_n \right) e(t) \\ &+ 2e(t)^T \tilde{P} A_R e(t - h(t)) + 2e(t)^T \tilde{P} F(t, e(t)) + 2e(t)^T \tilde{P} G(t, e(t - h(t))) \\ &- (1 - \dot{h}(t)) e(t - h(t))^T (\tilde{Q} + k_g^2 I_n) e(t - h(t)). \end{aligned}$$

Par analogie, les fonctions  $F$  et  $G$  jouent respectivement les rôles des fonctions  $f$  et  $g$ . En utilisant, l'inégalité de Young, introduite au chapitre précédent, nous obtenons les majorations :

$$2F(t, e(t))^T \tilde{P} e(t) \leq k_f^2 e(t)^T \tilde{P} e(t) + |e(t)|^2 \quad (6.6)$$

et

$$2G(t, e(t - h(t)))^T \tilde{P} e(t) \leq \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} e(t)^T \tilde{P} e(t) + (1 - \dot{h}(t)) k_g^2 |e(t - h(t))|^2. \quad (6.7)$$

D'après (6.6) et (6.7), nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(t, e_t) &\leq e(t)^T \left( (A - LC)^T \tilde{P} + \tilde{P}(A - LC) + \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n \right. \\ &+ \tilde{P} \left( \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{1 - \dot{h}(t)}, f)} I_n \right) \tilde{P} \left. \right) e(t) \\ &- (1 - \dot{h}(t)) \left( \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} e(t - h(t)) - \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} \tilde{Q}^{-\frac{T}{2}} A_R^T \tilde{P} e(t) \right)^T \\ &\quad \left( \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} e(t - h(t)) - \frac{1}{1 - \dot{h}(t)} \tilde{Q}^{-\frac{T}{2}} A_R^T \tilde{P} e(t) \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Si l'équation algébrique de Riccati (6.4) est satisfaite, alors :

$$\dot{\tilde{V}}(t, e_t) \leq -e(t)^T \tilde{S}e(t). \quad (6.9)$$

L'observateur (6.2) est donc asymptotiquement convergent.

Ceci termine la preuve du théorème 6.1.  $\square$

Le résultat suivant présente une condition suffisante de convergence de l'observateur dans le domaine fréquentiel.

### Théorème 6.2

Si la paire  $(C, A)$  est observable, et si le gain de l'observateur  $L$  est tel que  $(A - LC)$  est stable et :

$$\left\| \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n \right)^{\frac{1}{2}} (sI_n - (A - LC))^{-1} \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\infty} < 1 \quad (6.10)$$

alors l'observateur (6.2) est asymptotiquement convergent.

### Preuve du théorème 6.2

La démonstration est analogue à celle du théorème (5.6) en utilisant le lemme 5.1; la matrice de transfert considérée étant cette fois-ci de la forme :

$$\tilde{\mathcal{H}}(s) = \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n \right)^{\frac{1}{2}} (sI_n - (A - LC))^{-1} \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Cette condition peut se traduire de façon équivalente sous la forme suivante :

### Théorème 6.3

Si  $(C, A)$  est observable et si le gain de l'observateur  $L$  est tel que :

1.  $(A - LC)$  est stable
2. la matrice hamiltonienne (6.11) n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire :

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} (A - LC) & \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \\ - \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n \right) & -(A - LC)^T \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

alors l'observateur (6.2) est asymptotiquement convergent.

### 6.2.2 Synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes à retards

Il est question ici de reformuler les conditions de convergence de l'observateur et de donner une expression explicite de la matrice de gain associée.

#### Théorème 6.4

*S'il existe un triplet de matrices symétriques et définies positives,  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  et  $\tilde{S}$ , telles que :*

$$A\tilde{P} + \tilde{P}A^T + \tilde{P} \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n - C^T \tilde{S}^{-1} C \right) \tilde{P} + \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right) + \tilde{S} = 0 \quad (6.12)$$

*alors le gain de l'observateur  $L$  donné par :*

$$L = \frac{1}{2} \tilde{P} C^T \tilde{S}^{-1} \quad (6.13)$$

*stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'observation (6.3).*

#### Preuve du théorème 6.4

Supposons tout d'abord, qu'il existe une matrice  $\tilde{S} > 0$  telle que l'équation (6.12) soit vérifiée, et remplaçons le gain  $L$  par l'expression (6.13), alors l'équation (6.12) devient :

$$(A - LC) \tilde{P} + \tilde{P} (A - LC)^T + \tilde{P} \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n \right) \tilde{P} + \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right) + \tilde{S} = 0 \quad (6.14)$$

En multipliant à droite et à gauche par  $\tilde{P}^{-1}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{-1} (A - LC) + (A - LC)^T \tilde{P}^{-1} + \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n \right) \\ + \tilde{P}^{-1} \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_{(\frac{1}{\beta}, f)} I_n \right) \tilde{P}^{-1} + \tilde{P}^{-1} \tilde{S} \tilde{P}^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Nous choisissons maintenant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii de la forme :

$$V_1(t, \psi) = \psi(0)^T \tilde{P}^{-1} \psi(0) + \int_{-h(t)}^0 \psi(\theta)^T \left( \tilde{Q} + k_g^2 I_n \right) \psi(\theta) d\theta. \quad (6.16)$$

La propriété de bornitude infinitésimale de  $V_1$  est clairement vérifiée. De plus,  $V_1$  est définie positive et sa dérivée le long des trajectoires de (6.3) est définie comme suit :



$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t, e_t) &= e(t)^T \left( (A - LC)^T \tilde{P}^{-1} + \tilde{P}^{-1} (A - LC) + \tilde{Q} + k_g^2 I_n \right) e(t) \\
&+ 2e(t)^T \tilde{P}^{-1} A_R e(t - h(t)) + 2e(t)^T \tilde{P}^{-1} F(t, e(t)) + 2e(t)^T P^{-1} G(t, e(t - h(t))) \\
&- \left( 1 - \dot{h}(t) \right) e(t - h(t))^T \left( \tilde{Q} + k_g^2 I_n \right) e(t - h(t)).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

En utilisant une méthodologie semblable à celle du théorème 5.1, c'est à dire en majorant les termes contenant les non linéarités et en complétant par la suite les carrés, nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t, e_t) &\leq e(t)^T \left( (A - LC)^T \tilde{P}^{-1} + \tilde{P}^{-1} (A - LC) + \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n \right) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{P}^{-1} \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_f I_n \right) \tilde{P}^{-1} \right) e(t).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

D'après (6.15), nous avons :

$$\dot{V}_1(t, e_t) \leq -e(t)^T \left( \tilde{P}^{-1} \tilde{S} \tilde{P}^{-1} \right) e(t). \tag{6.19}$$

L'observateur (6.2) est donc asymptotiquement convergent.

Ceci termine la démonstration du théorème 6.4.  $\square$

### Remarque 6.1

Si nous nous intéressons plus particulièrement aux matrices  $\tilde{S}$  de l'ensemble

$$\{ \varepsilon I_n : \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$$

alors l'équation algébrique de Riccati (6.12) prend la forme :

$$A\tilde{P} + \tilde{P}A^T + \tilde{P} \left( \tilde{Q} + \gamma_{(1,g)} I_n - \frac{1}{\varepsilon} C^T C \right) \tilde{P} + \left( \frac{1}{\beta} A_R \tilde{Q}^{-1} A_R^T + \gamma_f I_n \right) + \varepsilon I_n = 0 \tag{6.20}$$

et la matrice de gain de l'observateur est donnée par :

$$L = \frac{1}{2\varepsilon} \tilde{P} C^T. \tag{6.21}$$

En utilisant les développements précédents, la synthèse de l'observateur (6.2) est résumée dans l'algorithme suivant :

- Étape 1 : Fixer un  $\varepsilon > 0$ .
- Étape 2 : Résoudre l'équation de Riccati (6.20).

- *Étape 3* : Si  $\tilde{P}$  est symétrique et définie positive, alors  $L = \frac{1}{2\varepsilon} \tilde{P}C^T$ .
- *Étape 4* : Sinon, poser  $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$  et aller à l'étape 2. Si  $\varepsilon$  est en dessous d'une certaine valeur de précision, abandonner la procédure.

## 6.3 Stabilisation à l'aide d'observateurs

Nous nous intéressons à la stabilité du système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_Rx(t-h(t)) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-h(t))) + BK(x(t) - e(t)) \\ \dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + A_Re(t-h(t)) + F(t, e(t)) + G(t, e(t-h(t))) \end{cases} \quad (6.22)$$

composé de l'équation d'état du système (5.1) et de l'équation d'erreur (6.3). Dans la commande, l'état est remplacé par son estimée, donné par (6.2). Tout ceci est schématisé par la figure ci-dessous :

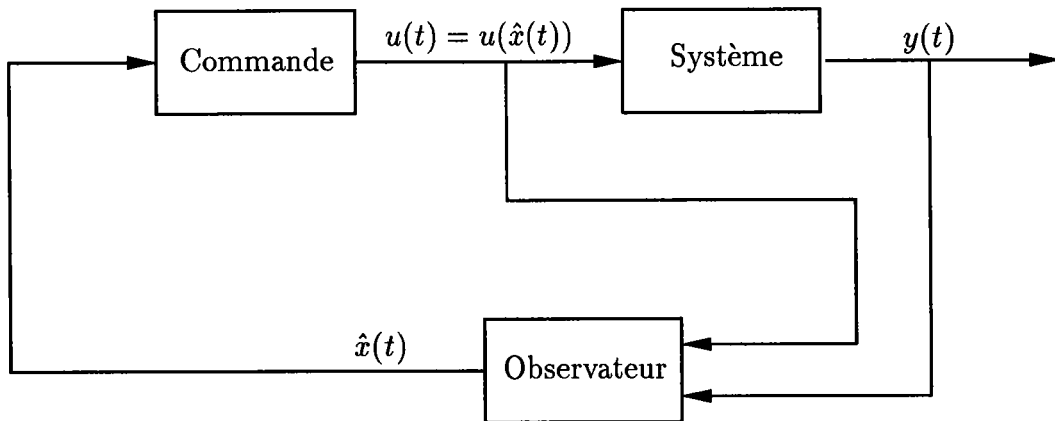


FIG. 6.1: *Commande par retour d'état estimé*

Nous avons alors le résultat suivant :

### Théorème 6.5

Considérons le système (6.22) pour lequel le gain  $K$  du retour d'état est donné par (5.12)(5.13), alors le système (6.22) est globalement asymptotiquement stable.

### Preuve du Théorème 6.5

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov composite :

$$W(t, \phi, \psi) = \alpha V(t, \phi) + V_1(t, \psi) \quad (6.23)$$

où

- $V(t, \phi)$  est définie par (5.5),

- $V_1(t, \psi)$  est définie par (6.16),
- $\alpha$  est un paramètre positif qui sera choisi ultérieurement.

La dérivée de  $W$  le long des trajectoires du système (6.22) donne :

$$\dot{W}(t, x_t, e_t) = \alpha \dot{V}_{(5.1)}(t, x_t) + \dot{V}_{(6.3)}(t, e_t) - 2\alpha x(t)^T P B K e(t)$$

Il a été établi précédemment que :

$$\dot{V}_{(5.1)}(t, x_t) \leq -x(t)^T S x(t)$$

et

$$\dot{V}_{(6.3)}(t, e_t) \leq -e(t)^T (\tilde{P}^{-1} \tilde{S} \tilde{P}^{-1}) e(t).$$

avec  $S$  et  $\tilde{S}$  vérifiant respectivement (5.12) et (6.12).

Posons :

$$C_1 = \lambda_{\min}(S) \quad \text{et} \quad C_2 = \lambda_{\min}(\tilde{P}^{-1} \tilde{S} \tilde{P}^{-1}).$$

Sachant que  $K = -\frac{1}{2} S^{-1} B^T P$ , nous avons :

$$\dot{W}(t, x_t, e_t) \leq - \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha C_1 I_n & -\frac{\alpha}{2} P B S^{-1} B^T P \\ -\frac{\alpha}{2} P B S^{-1} B^T P & C_2 I_n \end{pmatrix}.$$

En utilisant le lemme de Schur (cf. Annexe C), la matrice  $M$  est définie négative si et seulement si la matrice :

$$\alpha C_1 I_n - \frac{\alpha^2}{4C_2} (P B S^{-1} B^T P)^2 \quad (6.25)$$

est définie positive.

Cette condition est vérifiée si :

$$\alpha < \frac{4C_1 C_2}{\lambda_{\max}[(P B S^{-1} B^T P)^2]}. \quad (6.26)$$

Ceci termine la preuve du Théorème 6.5. □

### Remarque 6.2

*En utilisant une méthodologie analogue à celle développée dans la section 5.5, il est possible de généraliser l'ensemble des résultats de ce chapitre au cas de retards multiples.*

---

$\dot{V}_{(i)}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  représente la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (i).

## 6.4 Exemple

Dans cette section, nous proposons un exemple numérique illustrant l'approche présentée dans ce chapitre.

Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_R x(t-0.1) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-0.1)) + Bu(t) \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-0.1) \\ x_2(t-0.1) \\ x_3(t-0.1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$+ 0.5 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_2(t)}{\sqrt{1+x_2^2(t)}} \\ x_3(t) \end{pmatrix} + 0.7 \begin{pmatrix} \frac{x_1(t-0.1)}{\sqrt{1+x_1^2(t-0.1)}} \\ x_2(t-0.1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y = Cx(t) \quad (6.28)$$

Nous avons :

$$|f(t, x(t))| \leq 0.5 \sqrt{\frac{x_2^2(t)}{1+x_2^2(t)} + x_3^2(t)} \leq 0.5 \sqrt{x_2^2(t) + x_3^2(t)}$$

et  $f$  est donc lipschitzienne de constante  $k_f \geq 0.5$ . De même, nous avons :

$$|g(t, x(t))| \leq 0.7 \sqrt{\frac{x_1^2(t)}{1+x_1^2(t)} + x_2^2(t)} \leq 0.7 \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}.$$

La fonction  $g$  est donc lipschitzienne de constante  $k_g \geq 0.7$ .

Nous choisissons  $k_f = 0.5$ ,  $k_g = 0.7$  et  $S = \tilde{S} = Q = \tilde{Q} = I_2$ .

En utilisant les théorèmes 5.2 et 6.4, les solutions des équations algébriques de Riccati (5.12) et (6.12) sont données par :

$$P = \begin{pmatrix} 0.4548 & 0.1278 & 0.0129 \\ 0.1278 & 0.5675 & 0.1681 \\ 0.0129 & 0.1681 & 0.5438 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0.5322 & 0.2605 & 0.1175 \\ 0.2605 & 0.5615 & 0.2230 \\ 0.1175 & 0.2230 & 0.3627 \end{pmatrix}.$$

La figure 6.2 représente le comportement du système en boucle fermée. Les conditions initiales sont  $x_0 = (3 \ 4 \ 5)^T$  et  $\hat{x}_0 = (2 \ 2 \ 2)^T$ . La figure 6.3 représente l'erreur d'estimation. Pour la figure 6.2, la courbe en trait plein représente l'état  $x_1$  du système, la courbe en pointillés, l'état  $x_2$ , et la dernière courbe représente l'état  $x_3$ . Pour la figure 6.3, la courbe en trait plein

représente l'erreur d'observation  $e_1$ , la courbe en pointillés, l'erreur d'observation  $e_2$  et la dernière courbe représente l'erreur d'observation  $e_3$ .

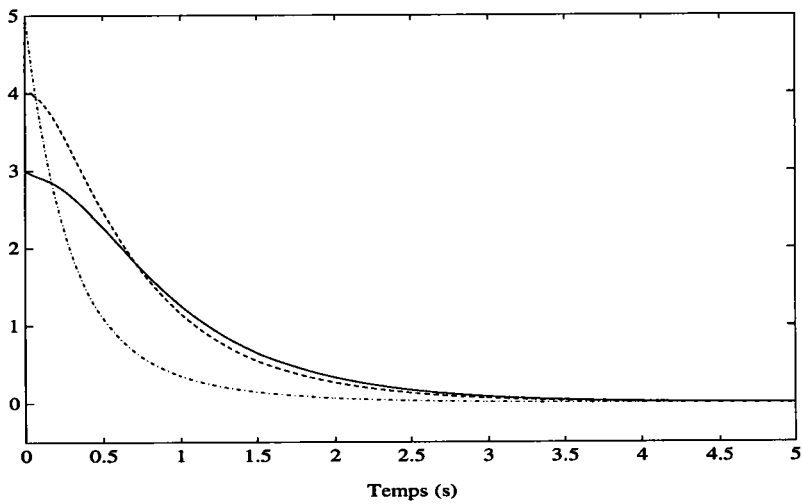


FIG. 6.2: *Comportement du système en boucle fermée*

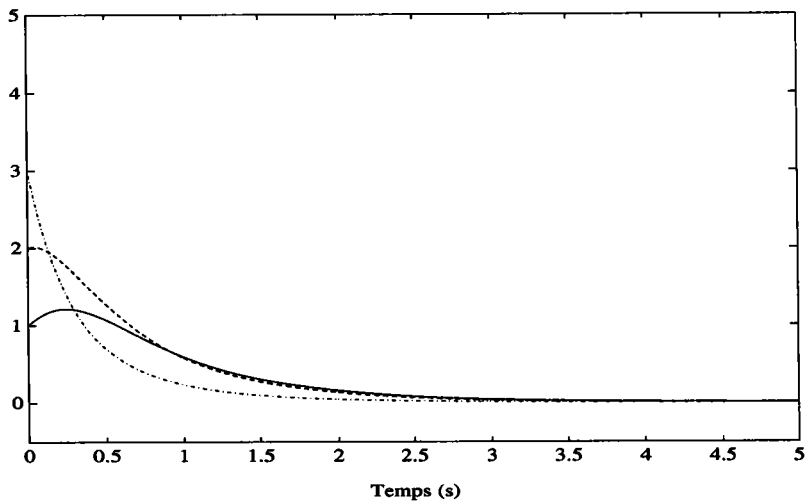


FIG. 6.3: *trajectoire de l'erreur d'estimation*

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la stabilisation d'une classe de systèmes à retards par commande basée observateur. Nous avons tout d'abord présenté une classe d'observateurs non linéaires à retards dont l'analyse de convergence a été réalisée par la méthode de Lyapunov-Krasovskii. Des conditions suffisantes de convergence ont alors été formulées. Nous avons ainsi pu dégager une méthode simple de synthèse d'observateurs, complétée par un algorithme.

Nous avons ensuite étudié le problème de la stabilisation par commande basée observateur en considérant le système formé de l'équation d'état augmentée de l'erreur d'estimation. Des conditions de stabilité du système en boucle fermée ont été présentées.



---

# Chapitre 7

## Stabilisation par commande par mode de glissement

### 7.1 Introduction

Depuis une vingtaine d'années, les systèmes à structure variable ont intéressé aussi bien les théoriciens du contrôle que les ingénieurs praticiens [UTK78, UTK92, FIL64, SLO84, BüH86, WAL88, ZIN90, FLI90, SPU91, YOU93, SIR93]. Cet intérêt est plus particulièrement attribué aux travaux consacrés à la commande par mode de glissement. C'est une loi de commande effectivement très attractive en raison de sa rapidité de réponse, ses bonnes performances en régime transitoire et surtout pour sa robustesse par rapport aux variations des paramètres du modèle, aux perturbations non modélisées et aux perturbations externes.

Ce n'est que très récemment que des travaux ont été développés dans le cadre des systèmes linéaires à états retardés [SHY93, FRI93a, FRI93b, SU94, FRI96, NIC96, LUO97, DAM98, HU98, GOU]. Les résultats y sont consacrés à des classes de systèmes linéaires avec ou sans incertitudes. Le cas de systèmes non linéaires demeure encore un problème ouvert.

Dans cette partie du mémoire, nous proposerons une méthodologie de synthèse de commandes par mode de glissement pour une classe de systèmes non linéaires à retards.

Nous procéderons en deux étapes. Dans un premier temps, nous proposerons une loi de commande discontinue ainsi qu'une surface de commutation pour qu'apparaisse le mode de glissement. Des conditions portant sur le choix de cette surface et sur le choix de la loi de commande seront établies afin d'assurer l'existence du mode de glissement, c'est-à-dire l'attractivité de la surface de commutation.

Dans un second temps, nous chercherons à nous assurer que, sur cette surface, nous "glissons" bien vers le point d'équilibre de l'équation en mode de glissement. Nous commencerons tout d'abord par déterminer cette équation, puis nous formulerons des conditions pour garantir la stabilité asymptotique de ce système.

Dans la seconde section, nous décrirons la classe de systèmes considérés. Dans une troisième section, nous proposerons une méthode de synthèse de loi de commande par mode de glissement pour ces systèmes. Ensuite, dans une quatrième section, nous analyserons la stabilité de l'équation en mode de glissement. Dans la cinquième section nous donnerons un ensemble de remarques avant de conclure ce chapitre. Il est à noter que quelques résultats de base sur la commande par mode de glissement sont rappelés dans l'annexe D.

---



## 7.2 Description du système

Nous considérons les systèmes d'équations :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_R x(t-h) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-h)) + Bu(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0]\end{aligned}\tag{7.1}$$

où  $A$  et  $A_R$  sont des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . La paire  $(A, B)$  est supposée stabilisable. La commande  $u$  appartient à  $\mathbb{R}^m$ . Le retard  $h > 0$  est supposé constant.  $\phi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  représente la condition initiale.

Les fonctions non linéaires  $f$  et  $g$  sont des perturbations additives de la forme :

$$f(t, x(t)) = C_f + \tilde{f}(t, x(t)) \quad \text{et} \quad g(t, x(t-h)) = C_g + \tilde{g}(t, x(t-h)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

où  $C_f = [C_f^1, \dots, C_f^n]^T$  et  $C_g = [C_g^1, \dots, C_g^n]^T$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $C_f^i \geq 0$  et  $C_g^i \geq 0, \forall i = 1 \dots n$ .

Les fonctions non linéaires  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  vérifient :

$$|\tilde{f}(t, \phi)| \leq k_f \|\phi\|_n \quad \text{et} \quad |\tilde{g}(t, \phi)| \leq k_g \|\phi\|_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n). \tag{7.3}$$

ainsi que la condition :

$$\tilde{f}(t, 0) = \tilde{g}(t, 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous supposons par la suite qu'il existe des vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  de  $\mathbb{R}^m$  tels que :

$$C_f = Bv_1 \quad \text{et} \quad C_g = Bv_2 \tag{7.4}$$

c'est à dire que ces parties des perturbations  $f$  et  $g$  sont dans le champ commandé.

Il apparaît dans le système, à la fois une non linéarité fonction de l'état instantané  $x(t)$  et une non linéarité fonction de l'état retardé  $x(t-h)$ . Ceci nous permet de prendre en compte une large classe de systèmes à retards non linéairement perturbés.

## 7.3 Synthèse de la commande

Dans cette section, nous définissons une surface de commutation ainsi qu'une loi de commande paramétrées. Le choix des paramètres est réalisé de telle sorte que soit généré, pour le système (7.1), un mode de glissement.

### Définition de la surface de commutation

Puisque  $(A, B)$  est commandable, il existe une matrice  $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $A - BK_1$  soit asymptotiquement stable.  $K_2$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  choisie de sorte que :

$\|A_R - BK_2\| \leq \|A_R\|$ , c'est-à-dire, que nous diminuons, d'une certaine façon, l'effet du retard. Notons qu'un tel gain existe toujours.

Posons :

$$\sigma(t, x) = Cx(t) - \int_0^t C(A - BK_1)x(s)ds - \int_0^t C(A_R - BK_2)x(s - h)ds = 0 \quad (7.5)$$

où  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  doit être choisie de sorte que le système (7.1) soit en mode de glissement, asymptotiquement stable.

### Définition de la loi de commande

Nous cherchons à présent à déterminer la loi de commande. Elle se présente sous la forme de la somme d'une partie continue et d'une partie discontinue :

$$u = u_c + u_{disc} \quad (7.6)$$

Elle doit assurer l'attractivité de la surface de commutation (7.5).

Pour définir  $u_c$ , nous considérons le système nominal :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_R x(t - h) + Bu(t) \quad (7.7)$$

associé à (7.1) (*c.-à-d.* lorsqu'il n'y a pas de perturbations  $f$  et  $g$ ). Notons  $\sigma_n = 0$  la surface de commutation évaluée pour ce système (7.7).

Nous choisissons alors  $u_c$  comme étant la loi de commande équivalente sur cette surface, c'est à dire la loi de commande qui rend  $\sigma_n = 0$  invariante. Autrement dit, telle que :

$$\dot{\sigma}_n = 0. \quad (7.8)$$

D'un point de vue géométrique, il s'agit de la commande qui permettrait de maintenir l'état du système sur la surface de discontinuité  $\sigma = 0$ , s'il n'était pas soumis aux perturbations  $f$  et  $g$ .

En utilisant (7.7), nous avons :

$$\dot{\sigma}_n = (CB) \left( K_1 x(t) + K_2 x(t - h) + u_c \right)$$

Si  $(CB)$  est non singulière, alors la condition (7.8) entraîne que :

$$u_c = -K_1 x(t) - K_2 x(t - h). \quad (7.9)$$

Concernant la partie discontinue de la loi de commande, nous posons :

$$u_{disc} = -(CB)^{-1} (W_1 |x(t)| + W_2 |x(t - h)| + W_3 \operatorname{sgn}(\sigma(t, x))) \quad (7.10)$$

où les gains  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$  sont strictement positifs et sont choisis assez grands pour garantir l'attractivité de la surface de commutation.

Nous avons alors le résultat suivant.

### Théorème 7.1

*Soit le système (7.1) dont les perturbations vérifient les conditions de bornitude (7.2). Alors il apparaît un mode de glissement, si la loi de commande (7.6) vérifie :*

$$k_f \|C\| < W_1, \quad k_g \|C\| < W_2 \quad \text{et} \quad (|C_f| + |C_g|) \|C\| < W_3. \quad (7.11)$$

**Preuve du théorème 7.1**

La condition d'existence du mode de glissement est l'attractivité de la surface de commutation  $\sigma(t, x) = 0$ . Pour cela, il suffit que :

$$\sigma^T \dot{\sigma} < 0. \quad (7.12)$$

Étant donné le système (7.1), nous avons :

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \left( CBK_1 x(t) + CBK_2 x(t-h) + Cf(t, x(t)) + Cg(t, x(t-h)) + CBu(t) \right).$$

En substituant (7.6) dans l'expression précédente et en prenant en compte (7.9) et (7.10), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma^T \dot{\sigma} &= \sigma^T \left( Cf(t, x(t)) + Cg(t, x(t-h)) + (CB)u_{disc} \right) \\ &= \sigma^T \left( Cf(t, x(t)) + Cg(t, x(t-h)) \right) - |\sigma| \left( W_1 |x(t)| + W_2 |x(t-h)| + W_3 \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Ceci entraîne que, sous les conditions (7.11), nous avons :

$$\sigma^T \dot{\sigma} < 0$$

pour tout  $x$  tel que  $\sigma(t, x) \neq 0$ .

Ceci termine la démonstration du Théorème 7.1.  $\square$

**Remarque 7.1**

*La commande à appliquer au système perturbé (7.1) est la somme de la commande nominale  $u_c$  et d'un terme de robustesse  $u_{disc}$  dont le rôle est d'assurer l'attractivité de la surface. La commande  $u_c$  annule l'action du modèle nominal. Sous l'influence de cette commande, le système est soit attiré soit repoussé par la surface de commutation. Quant à la commande discontinue  $u_{disc}$ , elle contrecarre les effets des perturbations et conduit les trajectoires du système vers la surface de glissement. Tout ceci montre l'avantage structurel de la loi de commande choisie, à savoir l'action combinée du retour d'état continu renforcé par la commutation.*

**Remarque 7.2**

*Nous avons vu dans le théorème précédent qu'il fallait choisir les gains de commutation  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$  assez grands pour assurer l'existence du mode de glissement. Notons toutefois, qu'il ne faut pas les choisir trop grands, pour éviter de saturer la loi de commande (7.6) et de faire chahuter l'état du système d'une manière brutale.*

## 7.4 Stabilité du mode de glissement

Les conditions précédentes assurent que les trajectoires, initialement sur la surface de glissement, demeurent sur celle-ci. Ceci ne donne aucune information sur la nature du glissement. Nous devons nous assurer qu'à la dynamique de glissement corresponde un point d'équilibre asymptotiquement stable. Dans la section suivante nous proposons des conditions suffisantes pour que cela ait lieu.

### 7.4.1 Détermination du mode de glissement

Quand la surface de glissement est atteinte, le membre de droite de l'équation (7.1) n'est plus défini. Le système évolue avec l'équation en mode de glissement. Nous ne pouvons pas la déterminer avec les méthodes classiques d'analyse des équations différentielles fonctionnelles, parce que nous sommes en présence d'un second membre discontinu. Pour déterminer l'équation du mode de glissement, nous utilisons la méthode de la commande équivalente [UTK78, UTK92].

Cette méthode consiste à admettre qu'en mode de glissement tout se passe comme si le système était piloté par une commande équivalente, que nous noterons  $u_{eq}$ . Elle est définie comme étant la commande qui rend la surface  $\sigma(t, x)$  invariante dans le temps, c'est-à-dire telle que :

$$\dot{\sigma}(t, x) = 0.$$

C'est donc la commande qui permet de maintenir l'état du système sur la surface de discontinuité  $\sigma(t, x) = 0$ . Sa substitution dans l'équation (7.1), nous donnera l'équation en mode de glissement.

Si nous dérivons  $\sigma(t, x)$  en imposant  $\dot{\sigma}(t, x) = 0$ , nous obtenons :

$$u_{eq} = -(K_1 x(t) + K_2 x(t-h)) - (CB)^{-1} (Cf(t, x(t)) + Cg(t, x(t-h))) \quad (7.14)$$

En remplaçant (7.14) dans (7.1), nous obtenons l'équation du mode de glissement :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A - BK_1)x(t) + (A_R - BK_2)x(t-h) \\ & + [I_n - B(CB)^{-1}C] (f(t, x(t)) + g(t, x(t-h))) \end{aligned} \quad (7.15)$$

pour la surface de glissement (7.5).

Compte tenu des hypothèses sur les perturbations  $f$  et  $g$ , cette équation se réduit à :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (A - BK_1)x(t) + (A_R - BK_2)x(t-h) \\ & + [I_n - B(CB)^{-1}C] (\tilde{f}(t, x(t)) + \tilde{g}(t, x(t-h))) \end{aligned} \quad (7.16)$$

### 7.4.2 Conditions de stabilité du mode de glissement

Nous donnons à présent des conditions suffisantes pour qu'en mode de glissement, le point d'équilibre de (7.1) soit asymptotiquement stable.

#### Théorème 7.2

Considérons le système (7.5)(7.16). S'il existe un triplet de matrices symétriques définies positives  $P$ ,  $Q$  et  $S$ , telles que :

$$A_{K_1}^T P + P A_{K_1} + Q + \gamma_{(1, \|M\| \bar{\delta})} I_n + P (A_{R, K_2} Q^{-1} A_{R, K_2}^T + \gamma_{(1, \|M\| \bar{f})} I_n) P + S = 0 \quad (7.17)$$

où  $A_{K_1} = A - BK_1$ ,  $A_{R, K_2} = A_R - BK_2$ ,  $M = I_n - B(CB)^{-1}C$ ,  $\gamma_{(1, \|M\| \bar{\delta})} = 1 + \|M\|^2 k_f^2$  et  $\gamma_{(1, \|M\| \bar{f})} = 1 + \|M\|^2 k_f^2$ , alors le système (7.16) est asymptotiquement stable.

**Preuve du théorème 7.2**

Considérons la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii  $V : C(t, [-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$V(t, \psi) = \psi(0)^T P \psi(0) + \int_{-h}^0 \psi(\theta)^T (Q + k_g^2 \|M\|^2 I_n) \psi(\theta) d\theta. \quad (7.18)$$

Elle est clairement définie positive et possède une borne supérieure infinitésimale.

La dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (7.5)(7.16) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) &= x(t)^T (A_{K_1}^T P + P A_{K_1} + Q + k_g^2 \|M\|^2 I_n) x(t) + 2x(t)^T P A_{R, K_2} x(t-h) \\ &+ 2x(t)^T P M \tilde{f}(t, x(t)) + 2x(t)^T P M \tilde{g}(t, x(t-h)) \\ &- x(t-h)^T (Q + k_g^2 \|M\|^2 I_n) x(t-h). \end{aligned} \quad (7.19)$$

D'après l'inégalité de Young (5.7) et les hypothèses sur  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  nous avons :

$$\begin{aligned} 2\tilde{f}(t, x(t))^T M^T P x(t) &\leq \frac{1}{k_f^2} |\tilde{f}(t, x(t))|^2 + k_f^2 x(t)^T P M M^T P x(t) \\ &\leq |x(t)|^2 + k_f^2 \|M\|^2 x(t)^T P P x(t) \end{aligned} \quad (7.20)$$

et

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(t, x(t-h))^T M^T P x(t) &\leq |P x(t)|^2 + |M \tilde{g}(t, x(t-h))|^2 \\ &\leq x(t)^T P P x(t) + \|M\|^2 k_g^2 |x(t-h)|^2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

En complétant les carrés et en utilisant (7.20) et (7.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) &\leq x(t)^T (A_{K_1}^T P + P A_{K_1} + Q + \gamma_{(1, \|M\| \bar{\gamma})} I_n \\ &+ P (A_{R, K_2} Q^{-1} A_{R, K_2}^T + \gamma_{(1, \|M\| \bar{f})} I_n) P) x(t) \\ &- \left( Q^{\frac{1}{2}} x(t-h) - Q^{-\frac{T}{2}} A_{R, K_2}^T P x(t) \right)^T \left( Q^{\frac{1}{2}} x(t-h) - Q^{-\frac{T}{2}} A_{R, K_2}^T P x(t) \right) \end{aligned} \quad (7.22)$$

De (7.17), nous pouvons déduire que :

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -x(t)^T S x(t)$$

et donc que le système (7.5)(7.16) est asymptotiquement stable.

Ceci achève la démonstration du théorème 7.2. □

Le résultat suivant est une condition suffisante de stabilité asymptotique du système (7.5)(7.16) dans le domaine fréquentiel.

### Théorème 7.3

Si :

$$\left\| (Q + \gamma_{(1, \|M\|_{\bar{g}})} I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A_{K_1})^{-1} (A_{R, K_2} Q^{-1} A_{R, K_2}^T + \gamma_{(1, \|M\|_{\bar{f}})} I_n)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\infty} < 1 \quad (7.23)$$

alors le système (7.5)(7.16) est asymptotiquement stable.

### Preuve du théorème 7.3

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme 5.1 avec la matrice de transfert suivante :

$$\mathcal{H}(s) = (Q + \gamma_{(1, \|M\|_{\bar{g}})} I_n)^{\frac{1}{2}} (sI_n - A_{K_1})^{-1} (A_{R, K_2} Q^{-1} A_{R, K_2}^T + \gamma_{(1, \|M\|_{\bar{f}})} I_n)^{\frac{1}{2}} .$$

□

En utilisant les résultats de Boyd, Balakrishnan et Kabamba [BOY89], (cf. Théorème 5.5), la condition (7.23) peut être reformulée comme suit :

### Théorème 7.4

Si la matrice hamiltonienne (7.24) n'admet pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} (A - BK_1) & A_{R, K_2} Q^{-1} A_{R, K_2}^T + \gamma_{(1, \|M\|_{\bar{f}})} I_n \\ - (Q + \gamma_{(1, \|M\|_{\bar{g}})} I_n) & - (A - BK_1)^T \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

alors le système (7.5)(7.16) est asymptotiquement stable.

## 7.5 Remarques

### Remarque 7.3 (Choix de la surface de commutation)

Nous pourrions choisir une surface de commutation linéaire de la forme :

$$\sigma(t, x) = Cx(t) = 0 \quad (7.25)$$

ou encore une surface de commutation avec terme intégral de type :

$$\sigma(t, x) = Cx(t) - \int_0^t C(A - BK_1)x(s)ds = 0. \quad (7.26)$$

Dans ce cas, l'expression de la loi de commande discontinue et les conditions d'attractivité de la surface auraient été identiques. En revanche, il n'en est pas de même pour l'équation en mode de glissement (7.5)(7.16) ainsi que pour les conditions de stabilité (7.17) du point d'équilibre de cette équation.

L'intérêt de choisir la surface (7.5), plutôt que (7.25) ou (7.26), réside dans l'introduction des matrices  $K_1$  et  $K_2$ , qui nous permettent de placer judicieusement les dynamiques du système en boucle fermé.

**Remarque 7.4**

Considérons le cas particulier où les perturbations  $f$  et  $g$  peuvent s'écrire sous la forme

$$f(t, x) = Bf_1(t, x) \quad \text{et} \quad g(t, x) = Bg_1(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (7.27)$$

où  $f_1$  et  $g_1$  sont des fonctions de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Les perturbations  $f$  et  $g$  sont donc complètement dans le champ commandé. En anglais, ces conditions sont connues sous le nom de "matching conditions".

Dans ce cas, la dynamique en mode de glissement est réduite à l'équation :

$$\dot{x}(t) = (A - BK_1)x(t) + (A_R - BK_2)x(t - h) \quad (7.28)$$

Cette dernière est donc identique à la dynamique du système nominal. Cela signifie simplement que la dynamique de l'état est insensible aux perturbations dès lors que la surface de commutation est atteinte.

Si les conditions du théorème 7.2 sont satisfaites, nous pouvons montrer aisément que le système en mode de glissement (7.28) est asymptotiquement stable. Des conditions moins restrictives peuvent être obtenues en reprenant la démonstration du théorème 7.2 (où nous posons  $f \equiv g \equiv 0$ ). Elles se formulent de la façon suivante :

**Corollaire 7.1**

S'il existe un triplet de matrices symétriques définies positives  $P$ ,  $Q$  et  $S$ , telles que :

$$A_{K_1}^T P + P A_{K_1} + Q + P A_{R, K_2} Q^{-1} A_{R, K_2}^T P + S = 0 \quad (7.29)$$

alors le système (7.28) est asymptotiquement stable.

**Remarque 7.5 (Adoucissement de la commutation)**

Afin d'éviter de trop exciter le système, le terme de commutation  $\text{sgn}(\cdot)$  n'est pas utilisé directement en pratique. Il est généralement remplacé par une fonction plus lisse comme :

$$\text{sat} \left( \frac{\sigma}{\varepsilon} \right) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon} & \text{si } |\sigma| \leq \varepsilon \\ \text{sgn}(\sigma) & \text{si } |\sigma| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (7.30)$$

Cela introduit une zone d'épaisseur  $2\varepsilon$  autour de la surface de discontinuité, que nous appelons "couche limite". Dans ce cas, le mode de glissement n'a pas lieu exactement sur la surface de discontinuité mais plutôt sur la couche limite.

**Remarque 7.6**

Dans la pratique, nous cherchons à limiter les commutations persistantes de la commande, qui peuvent provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande ou qui pourraient exciter des dynamiques hautes fréquences non modélisées. L'introduction d'une couche limite permet de résoudre ce problème.

**Remarque 7.7**

Les résultats présentés précédemment peuvent être étendus au cas de retards multiples.

## 7.6 Exemple

Nous donnons à présent un exemple pour illustrer nos résultats.  
Considérons le système :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_R x(t-0.1) + f(t, x(t)) + g(t, x(t-0.1)) + Bu(t) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-0.1) \\ x_2(t-0.1) \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} x_1(t) \sin(x_1(t) + x_2(t)) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\
 &+ 0.1 \begin{pmatrix} \frac{x_1(t-0.1)}{\sqrt{1+x_1^2(t-0.1)}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

La fonction  $f$  est lipschitzienne de constante  $k_f \geq 0.2$  et  $g$  est lipschitzienne de constante  $k_g \geq 0.1$ .

Nous choisissons  $K_1 = (0.3 \ 0.15)$ ,  $K_2 = (0 \ -0.1)$ ,  $C = (0.1 \ 0.1)$ ,  $C_f = 0$ ,  $C_g = 0$ ,  $k_f = 0.2$  et  $k_g = 0.1$ .

D'après le théorème 7.1, pour qu'apparaisse le mode de glissement, nous avons choisi  $W_1 = 0,004$ ,  $W_2 = 0.002$  et  $W_3 = 0$ .

La figure 7.1 représente le comportement du système en boucle fermée. Les conditions initiales sont  $x_0 = (1 \ 3)^T$ . La courbe en trait plein représente l'état  $x_1$  du système, et la courbe en pointillés, l'état  $x_2$ .

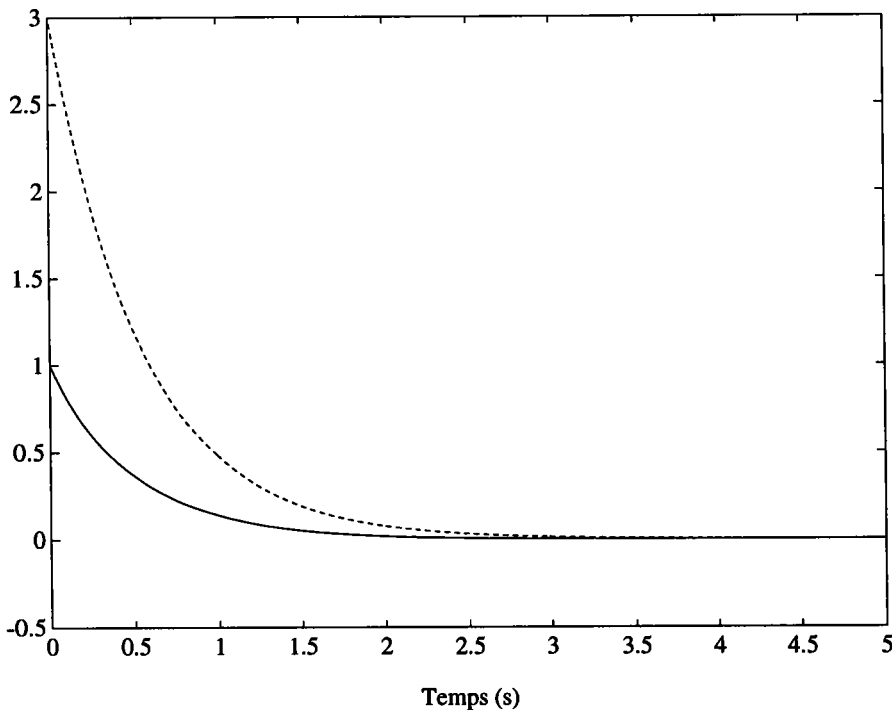


FIG. 7.1: Représentation des états  $x_1$  et  $x_2$  en boucle fermée



## 7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la stabilisation par mode de glissement d'une classe de systèmes non linéaires à retards. Une méthode de synthèse de commande par mode de glissement a été présentée. Des conditions suffisantes ont été proposées pour assurer l'existence du mode de glissement. Une analyse de la stabilité du système en boucle fermée, basée sur la théorie de Lyapunov-Krasovskii a été réalisée. Nous avons obtenu des conditions suffisantes de stabilité asymptotique sans imposer de conditions restrictives, de type "matching conditions", sur toute la structure des non linéarités du système. Enfin, nous avons présenté un exemple numérique de simulation illustrant nos résultats.

---

## Conclusion générale

Dans ce mémoire, plusieurs techniques de stabilisation de systèmes non linéaires ont été proposées. Notre travail s'est articulé autour de deux thèmes : la stabilisation des systèmes non linéaires non réguliers et la stabilisation des systèmes non linéaires à retards.

La première partie a été consacrée au problème de la stabilisation des systèmes non linéaires non réguliers. Nous nous sommes intéressés à des résultats classiques de stabilisation des systèmes non linéaires présentant des champs de vecteurs réguliers. Nous avons affaibli l'hypothèse de régularité, en développant des résultats applicables aux systèmes non réguliers.

Le premier problème considéré concerne la stabilisation par retour d'état. Dans le cas de systèmes réguliers, les approches classiques, auxquelles nous avons fait référence, reposent sur le Principe d'Invariance de LaSalle : il faut pouvoir dériver, de ce fait, les champs de vecteurs, au moins une fois, le long des trajectoires de la dynamique libre du système. Nous avons démontré qu'il était possible d'étendre ces méthodes lorsque le système est seulement continu, localement lipschitzien (et non de classe  $C^1$ ). Par une démonstration constructive, nous avons établi des conditions suffisantes de stabilité du système en boucle fermée. Des conditions nécessaires et suffisantes ont également été proposées pour un cas particulier.

Dans un second temps, nous avons abordé le problème de la stabilisation par ajout d'intégrateurs avec la même volonté d'affaiblir les hypothèses requises dans le cas des systèmes réguliers. Ces hypothèses justifient une décomposition du champ de vecteurs, dont l'existence est remise en cause, lorsque les systèmes ne sont pas au moins de classe  $C^1$ . Nous avons donc proposé une nouvelle façon de décomposer ce terme et démontré, en se basant sur cette décomposition, que la stabilité asymptotique globale du système réduit, entraîne la stabilité du système augmenté.

Dans la seconde partie du mémoire, nous nous sommes intéressés à la stabilisation de systèmes non linéaires à retards. Nous avons tout d'abord présenté une méthode de synthèse de commande par retour d'état. Des conditions simples de stabilité asymptotique du système en boucle fermée ont été établies, et une classe de lois de commandes stabilisantes a été proposée. Ces résultats ont été établis en utilisant la théorie de Lyapunov-Krasovskii. Nous avons également proposé des conditions de stabilité en utilisant des résultats de la théorie  $\mathcal{H}_\infty$ .

La commande par retour d'état peut être, dans certains cas, inapplicable lorsque certaines variables d'états sont inaccessibles à la mesure. Nous avons donc été amenés à considérer les problèmes de commande basée observateur. Une classe d'observateurs à grand gain a été proposée et une analyse de la stabilité du système bouclé, formé de l'équation d'état du système dont la commande est fonction de l'état estimé et de l'équation de l'erreur d'estimation, a été réalisée.

Les non linéarités du système, pour le problème de la commande par retour d'état et la commande basée observateur, étaient supposées analytiquement connues. Nous avons abordé au problème de la stabilisation des systèmes non linéaires à retards, dans le cas où ces non linéarités seraient mal-connues. Nous avons alors présenté une méthode de synthèse de lois de commande par mode de glissement, bien adaptée à ce type de problème. Des conditions suffisantes pour générer le mode de glissement ont été proposées. La stabilité de la dynamique en mode de glissement a été analysée en utilisant la méthode de Lyapunov-Krasovskii.

Dans la continuité de ce travail, différentes perspectives s'offrent à nous. Il serait, par exemple, intéressant d'élaborer de nouvelles méthodes de stabilisation des systèmes non linéaires à retards de la forme :

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

en généralisant les résultats obtenus dans la première partie, au cas de systèmes à états retardés. Il serait également intéressant de considérer le problème de la synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires à retards de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x_t) \\ y(t) = H(t, x_t). \end{cases}$$

Dans le cadre de la stabilisation des systèmes à retards, nous pourrions également établir des conditions de stabilisation par retour d'état, dépendantes des retards en vue de considérer, par la suite, des systèmes à entrées retardées.

---

# Annexe A

## Lemme 1

**Lemme (utilisé dans la démonstration de la proposition 2.2 du chapitre 2)**

Soient  $X^0$  et  $Z^0$  deux champs de vecteurs et  $V$  une intégrale première de  $X^0$ . Alors nous avons la formule suivante :

$$\frac{d^k}{dt^k} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) = \text{ad}_{X^0}^k L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)). \quad (\text{A.1})$$

### Preuve du lemme

La démonstration se fait par récurrence. Au rang  $k = 0$  c'est évident. Supposons que (A.1) soit vérifiée au rang  $k$  et démontrons que cela reste vrai au rang  $k + 1$ .

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) &= L_{X^0} \frac{d^k}{dt^k} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) \\ &= L_{X^0} \text{ad}_{X^0}^k L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \text{ad}_{X^0}^{k+1} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) &= [X^0, \text{ad}_{X^0}^k L_{Z^0}] V(X_t^0(x_0)) \\ &= L_{X^0} \text{ad}_{X^0}^k L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) - \text{ad}_{X^0}^k L_{Z^0} L_{X^0} V(X_t^0(x_0)). \end{aligned}$$

Comme  $V$  est une intégrale première de  $X^0$ , il reste :

$$\text{ad}_{X^0}^{k+1} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) = L_{X^0} \text{ad}_{X^0}^k L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)).$$

Nous avons donc :

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)) = \text{ad}_{X^0}^{k+1} L_{Z^0} V(X_t^0(x_0)).$$

Ceci termine la démonstration du lemme.



# Annexe B

## Lemme 2

**Lemme (énoncé dans la remarque 3.2 du chapitre 3)**

Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue qui s'annule en zéro alors elle n'est pas nécessairement décomposable sous la forme :

$$g(y) = y^{\frac{p}{q}} k(y), \quad (\text{B.1})$$

avec  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $k \in C^0(\mathbb{R})$ .

### Remarque

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $p = 1$  et que  $q$  est impair. En effet,  $y^{\frac{p}{q}}$  peut toujours se mettre sous la forme :

$$y^{\frac{p}{q}} = y^{\frac{p(2q+1)}{q(2q+1)}} = y^{\frac{1}{2q+1}} y^{\frac{p(2q+1)}{q}}.$$

Ainsi si l'écriture (B.1) est justifiée, alors  $g$  peut aussi se mettre sous la forme :

$$g(y) = y^{\frac{1}{2q+1}} \tilde{g}(y) \quad (\text{B.2})$$

où  $\tilde{g}(y) = y^{\frac{p(2q+1)}{q}} k(y)$ .

### Preuve du lemme

D'après la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que  $g$  n'est pas toujours décomposable sous la forme (B.2).

Soit  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définie par :

$$\varphi_p(y) = y^{\frac{1}{2p+1}}$$

et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} x_{2n+1} = (x_{2n})^{\frac{2n+1}{2n-1}} \\ x_{2(n+1)} = \left(\frac{x_{2n}}{2n^2}\right)^{\frac{2n+1}{2n-1}}. \end{cases}$$

Posons :

$$g(y) = \varphi_0(x_1) \quad \text{pour } y \in [x_0, x_1]$$

et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$g(y) = \begin{cases} \varphi_{n-1}(y) & \text{pour } y \in [x_{2n-1}, x_{2n}] \\ \varphi_{n-1}(x_{2n}) & \text{pour } y \in [x_{2n}, x_{2n+1}]. \end{cases}$$

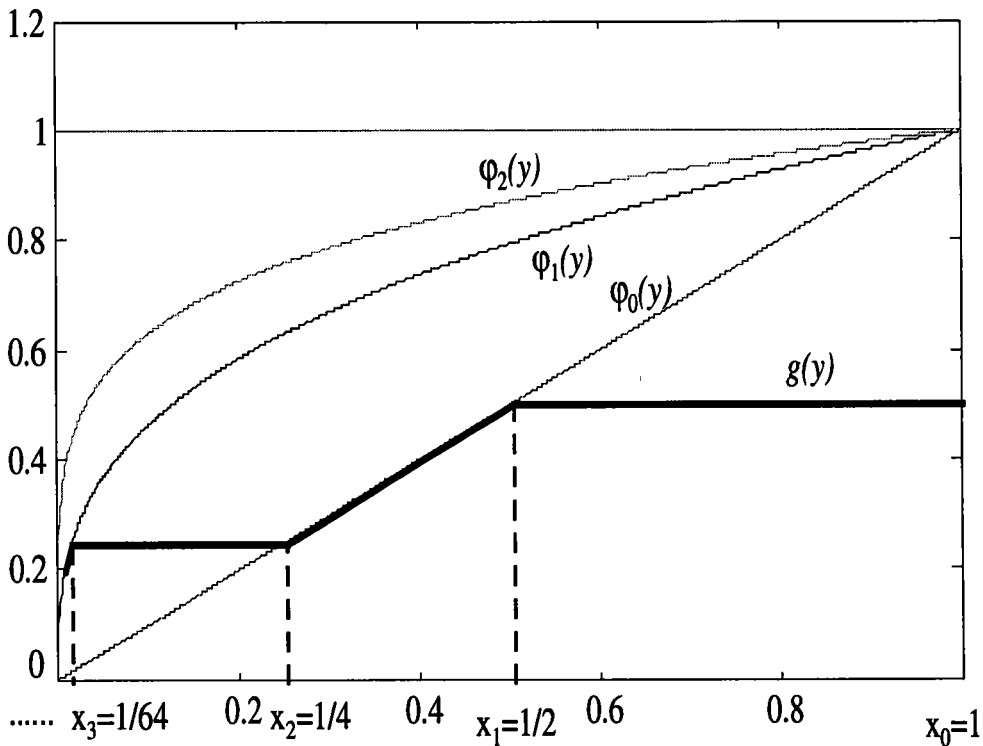


FIG. B.1: Représentation de la fonction  $g$

Cette fonction est par construction continue et croissante. De plus  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$ .

Pour le prouver il suffit de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{2n}) = 0$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 g(x_{2n}) &= \varphi_{n-1}(x_{2n}) \\
 &= (x_{2n})^{\frac{1}{2n-1}} \\
 &= \left( \left( \frac{x_{2(n-1)}}{2^{(n-1)^2}} \right)^{\frac{2n-1}{2n-3}} \right)^{\frac{1}{2n-1}} \\
 &= \left( \frac{x_{2(n-1)}}{2^{(n-1)^2}} \right)^{\frac{1}{2n-3}} \\
 &\leq \frac{1}{2^{\frac{(n-1)^2}{2n-3}}}.
 \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\frac{(n-1)^2}{2n-3}}} = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{2n}) = 0$ .

Raisonnons à présent par l'absurde, en supposant que la décomposition (B.2) est réalisable. Alors sur n'importe quel ensemble compact

$$g(y) \leq C y^{\frac{1}{2q+1}}.$$

Or pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe au moins un  $y$  pour lequel

$$g(y) > \varphi_p(y)$$

ce qui est contradictoire.

Ceci termine la démonstration du lemme. □





## Annexe C

# Complément et Lemme de Schur

Complément et lemme de Schur [BOY94]

**Définition** [Complément de Schur]

Pour une matrice  $A$  inversible, le complément de Schur de  $A$ , dans la matrice  $M$  donnée par :

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la matrice  $D - CA^{-1}B$ .

**Lemme** [Lemme de Schur]

Pour  $A = A^T$  et  $C = C^T$ ,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} > 0 \tag{C.1}$$

si et seulement si

$$C - B^T A^{-1} B > 0 \quad \text{si} \quad A > 0$$

ou de façon équivalente, si et seulement si

$$A - BC^{-1}B^T > 0 \quad \text{si} \quad C > 0.$$



## Annexe D

# Quelques résultats de base sur la commande par mode de glissement

## D.1 Commande par mode de glissement

### D.1.1 Définitions

Considérons le système non linéaire mono-entrée suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) = \begin{cases} f^+(t, x, u) & \text{si } \sigma(t, x) > 0 \\ f^-(t, x, u) & \text{si } \sigma(t, x) < 0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où :

- $x$  est l'état du système évoluant dans une variété  $\mathcal{V}$  isomorphe à  $\mathbb{R}^n$  caractérisant le domaine physique de fonctionnement du système ;
- $f^+(t, x, u)$  et  $f^-(t, x, u)$  sont des champs de vecteurs complets dans  $\mathbb{R}^n$  ;
- $u \in \mathbb{R}$ , est la commande du système ;
- $\sigma(t, x)$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ , divisant l'espace en deux parties disjointes

$$\Sigma^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(t, x) > 0\} \quad \text{et} \quad \Sigma^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(t, x) < 0\}.$$

Le système (D.1) est un **système à structure variable** [UTK78] commutant entre deux structures. Un système peut être rendu discontinu par le choix d'une structure discontinue du retour d'état de la forme :

$$u(t, x) = \begin{cases} u^+(t, x) & \text{si } \sigma(t, x) > 0 \\ u^-(t, x) & \text{si } \sigma(t, x) < 0 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Le système (D.1) se ramène alors à l'écriture suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) = \begin{cases} f^+(t, x) & \text{si } \sigma(t, x) > 0 \\ f^-(t, x) & \text{si } \sigma(t, x) < 0 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Lorsque les vecteurs  $f^+$  et  $f^-$  sont pointés vers la surface  $\sigma = 0$ , cette surface est dite attractive. Que nous soyons d'un côté ou de l'autre de cette surface, l'état du système est poussé à la rejoindre. Il apparaît ce que nous appelons le **mode de glissement**. La surface de discontinuité  $\sigma = 0$  est la **surface de glissement** et la dynamique du système sur cette surface est donnée par l'équation du mode de glissement.

### D.1.2 Commande par mode de glissement

Etant donnée une surface de commutation  $\sigma = 0$ , le problème de la synthèse d'une commande par mode de glissement revient à chercher une commande discontinue de la forme (D.2). Cette dernière doit rendre la surface  $\sigma = 0$  attractive pour assurer l'apparition du mode de glissement.

#### Conditions d'existence du mode de glissement

Le problème de l'existence du mode de glissement ressemble fortement à un problème de stabilité d'un point d'équilibre dans la mesure où, pour montrer l'attractivité de la surface  $\sigma = 0$ , nous cherchons une fonction de Lyapunov définie positive, dont la dérivée le long des trajectoires du système en boucle fermée est négative.

C'est ce que présente le Théorème de Utkin [UTK78], donné ci-dessous. Notons au préalable, que dans certains cas, le glissement n'a pas lieu sur n'importe quel point de la surface de commutation parce que, l'attractivité de cette dernière n'est assurée que dans un domaine restreint  $\mathcal{D}_g$  appelé domaine de glissement.

#### Définition D.1 (Domaine de glissement)

Un domaine  $\mathcal{D}_g$  dans la variété  $\sigma(t, x) = 0$  est un domaine de glissement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$ , tel que tout mouvement commençant dans le  $\delta$ -voisinage de  $\mathcal{D}_g$  ne peut quitter le  $\varepsilon$ -voisinage de  $\mathcal{D}_g$  qu'à travers le  $\varepsilon$ -voisinage de la frontière extrême de  $\mathcal{D}_g$ . Ce domaine est de dimension  $n - 1$ .

#### Théorème D.1 (Conditions d'existence du mode de glissement, [UTK78])

Pour que le domaine  $\mathcal{D}_g$  soit un domaine de glissement, il suffit que dans un domaine  $\Omega \in \mathcal{V}$  contenu dans  $\mathcal{D}_g$ , il existe une fonction de Lyapunov  $V(t, x, \sigma)$  continûment différentiable par rapport à tous ses arguments et satisfaisant les conditions suivantes:

1.  $V(t, x, \sigma)$  est définie positive par rapport à  $\sigma$ .
2. sur la sphère  $|\sigma| = \rho, \forall x \in \Omega, \forall t > 0$ , les relations suivantes sont vérifiées :

$$(a) \quad \inf_{|\sigma|=\rho} V(t, x, \sigma) = h_\rho, \quad h_\rho > 0$$

$$(b) \quad \sup_{|\sigma|=\rho} V(t, x, \sigma) = H_\rho, \quad H_\rho > 0$$

avec  $h_\rho$  et  $H_\rho$  dépendant de  $\rho$  et  $h_\rho \neq 0$  si  $\rho \neq 0$ .

3. la dérivée totale de  $V(t, x, \sigma)$  le long des trajectoires du système a un maximum négatif pour tout  $x \in \Omega$  excluant la surface de commutation pour laquelle la commande  $u$  n'est pas définie et la dérivée de  $V(t, x, \sigma)$  n'existe pas.

La fonction généralement utilisée est :

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

La surface  $\sigma = 0$  est alors attractive sur tout le domaine de fonctionnement  $\mathcal{V}$  si :

$$\sigma\dot{\sigma} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

### Stabilité du mode de glissement

La surface de glissement étant atteinte, le vecteur  $f$  du système (D.1) n'est plus défini. L'évolution du système est décrite par l'équation du mode de glissement que nous ne pouvons pas déterminer par les méthodes classiques d'analyse des équations différentielles, en raison de la présence d'un second membre discontinu. La méthode de la commande équivalente (cf. [UTK78, UTK92]) répond à ce problème. Elle consiste à admettre qu'en mode de glissement tout se passe comme si le système était piloté par une commande dite "équivalente", notée  $u_{eq}$ . Elle est définie comme étant la commande qui rend la surface  $\sigma$  invariante dans le temps, c'est à dire telle que :

$$\dot{\sigma} = 0.$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir  $u_{eq}$  qui, reinjectée dans l'équation d'état du système, donne l'équation du mode de glissement :

$$\dot{x} = f_{eq} = f(t, x, u_{eq}). \quad (D.4)$$



# Bibliographie

- [ABD93] C. ABDALLAH, P. DORATO, J. BENITEZ-READ, et R. BYRNE. « Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems ». Dans *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pp. 3106–3107, 1993. San Fransisco, CA.
- [AGGa] W. AGGOUNE et M. DAROUACH. « Nonlinear observers for a class of differential delay systems ». Accépté au Méditerranéan Conference , Haifa, Juin 1999.
- [AGGb] W. AGGOUNE et R. OUTBIB. « On Stabilization by adding integrator ». A paraître dans *Journal of Applied mathematics and Computer Sciences*.
- [AGGc] W. AGGOUNE et R. OUTBIB. « On Stabilization of nonsmooth systems ». Soumis à *Journal of Nonlinear Analysis*.
- [AGGd] W. AGGOUNE, R. OUTBIB, et M. DAROUACH. « A remark on stabilization of nonsmooth systems ». Accépté au 5th European Control Conference (ECC'99), Karlsruhe, Germany, 1999.
- [AGG97] W. AGGOUNE et E.I. VERRIEST. « Extension of Robust Stability for Time-Varying Delay Systems with Nonlinear Perturbations ». Dans *Proceedings IFAC-CIS'97*, Mai 1997. Belfort.
- [BAC88] A. BACCIOTI. « The local stabilizability for nonlinear systems ». *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, 5, pp. 27–39, 1988.
- [BEL63] R. BELLMAN et K.L. COOKE. *Differential Difference Equations*. Academic Press, New-York, 1963.
- [BüH86] H. BÜHLER. *Réglage par mode de Glissement*. Presse Polytechnique Romande, Lausanne, 1986.
- [BHA76] K.P.M. BHAT et H.N. KOIVO. « An observer theory for time-delay systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21, pp. 266–269, 1976.
- [BOL09] L. BOLTZMANN. *Zur Theorie der elastischen Nachwirkungen*. Leipzig: Verlag Johann Ambrosius Barth, 1909. Wissenschaftliche Abhandlung von Ludwig Boltzmann, I.Band (1865-1874).
- [BOY89] S.P. BOYD, V. BALAKRISHNAN, et P. KABAMBA. « Bisection methods for computing the  $\infty$ -norm of a transfer matrix and related problems ». *Math. Control Signals Systems*, 2, pp. 207–219, 1989.
-



- [BOY94] S. BOYD, L.EL. GHAOUI, E. FERON, et V. BALAKRISHNAN. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.
- [BYR89] C.I. BYRNES et A. ISIDORI. « New results and examples in nonlinear feedback stabilization ». *Systems & Control Letters*, **12**, pp. 437–442, 1989.
- [BYR91] C.I. BYRNES, A. ISIDORI, et J.C. WILLEMS. « Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, pp. 1228–1240, Novembre 1991.
- [BYR95] C.I. BYRNES et C.F. MARTIN. « An Integral-Invariance Principle for Nonlinear Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(6), pp. 983–994, June 1995.
- [COR91] J.M. CORON et L. PRALY. « Adding an integrator for the stabilization problem ». *Systems & Control Letters*, **17**, pp. 89–104, 1991.
- [COR94] J.M. CORON. « Linearized control systems and application to smooth stabilization ». *SIAM Journal of Control and Optimization*, **32**, pp. 358–386, 1994.
- [CUR78] R.F. CURTAIN et A.J. PRITCHARD. Infinite-dimensional linear systems theory. Dans *Lecture Notes in Contr. and Inf. Sciences*, volume 8. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [DAM94] M. DAMBRINE. « Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards ». PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1994.
- [DAM98] M. DAMBRINE, F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI, et J.P. RICHARD. « Robustness of a sliding control under delays effects: a case study ». Dans *Proceedings CESA'98, multiconference "computational Engineering in Systems Applications"*, volume 1, pp. 817–821, April 1998. Nabeul, Tunisia.
- [DUG97] L. DUGARD et E.I. VERRIEST. *Stability and Control of Time-Delay Systems*. Springer Verlag, New-York, 1997.
- [EL'66] L.E. EL'SGOL'TS. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Holden-Day, San Fransisco, 1966.
- [FAI86] F.W. FAIRMAN et A. KUMAR. « Delayless Observers for Systems with Delay ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**(3), pp. 258–259, 86.
- [FEL81] A. FELIACHI et A. THOWSEN. « Memoryless stabilization of linear delay-differential systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**, pp. 586–587, 1981.
- [FIL64] A.V. FILIPPOV. « Differential equations with discontinuous right-hand side ». *American Mathematical Society Translations*, **42**, pp. 199–232, 1964.
- [FLI90] M. FLIESS et F. MESSEGER. *Vers une stabilisation non linéaire discontinue*. Springer Verlag, New York, 1990.
-

- [FLI94] M. FLIESS. « Une interprétation algébrique de la transformation de Laplace et des matrices de transfert ». *Linear Alg. Appl.*, **203/204**, pp. 429–442, 1994.
- [FRI93a] L.M. FRIDMAN, E.M. FRIDMAN, et E.I. SHUSTIN. « Steady modes in a discontinuous control relay with time delay ». *Pure Mathematics and Applications*, **4(1)**, 1993.
- [FRI93b] L.M. FRIDMAN, E.M. FRIDMAN, et E.I. SHUSTIN. « Steady modes in an autonomous system with break and delay ». *Differential Equations*, **29(8)**, 1993.
- [FRI96] L.M. FRIDMAN, E.M. FRIDMAN, et E.I. SHUSTIN. « Steady modes and sliding modes in the relay control systems with time delay ». Dans *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1996. Kobe, Japan.
- [GAU81] J.P. GAUTHIER et G. BORNARD. *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique et l'Analyse des systèmes*, volume 1 de *Stabilisation des systèmes non linéaires*. Editions du CNRS, Paris, i.d.landau édition, 1981.
- [GOU] F. GOUAISBAUT, W. PERRUQUETTI, Y. ORLOV, et J.P. RICHARD. « A sliding mode controller for linear time delay systems ». Accepté au 5th European Control Conference (ECC'99), Karlsruhe, Germany, 1999.
- [GRE75] R.V. GRESSANG et G.B. LAMONT. « Observers for systems characterized by semigroups ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **20**, pp. 523–528, 1975.
- [GRE95] M. GREEN et D.J.N. LIMEBEER. *Linear Robust Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [HAL77] J.K. HALE. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [HAL93] Jack K. HALE et S.M. Verduyn LUNEL. *Introduction to functional differential equations*. Springer Verlag, New York, 1993.
- [HU98] K.J. HU, V.R. BASKER, et O.D. CRISALLE. « Sliding Mode Control of Uncertain Input-Delay Systems ». Dans *Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia*, June 1998.
- [IGG94] A. IGGIDR et G. SALLET. « Nonlinear stabilization by Adding an integrators ». *Kybernetika*, **30(5)**, pp. 499–506, 1994.
- [JAC76] D.H. JACOBSON. « Stabilization and optimal control nonlinear homogeneous-in-input ». Dans *Proceedings of the Conference on Directions in Decentralized Control, Many-Person Optimazation and Large-Scale Systems, (Boston, Massachusetts, September 1-3, 1976*.
- [JUR78] V. JURDJEVIC et J.P. QUINN. « Controllability and stability ». *Journal of Differential Equations*, **28**, pp. 381–389, 1978.
- [KAL84] N. KALOUPTSIDIS et J. TSINIAS. « Stability improvement of nonlinear systems by feedback ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **29(4)**, pp. 364–367, 1984.
-

- [KAM85] E. KAMEN, P. KHARGONEKAR, et A. TANNENBAUM. « Stabilization of time-delay systems using finite-dimensional compensators ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**(1), pp. 75–78, 1985.
- [KOD87] D.E. KODITSCHER. « Adaptive techniques for mechanical systems ». Dans *5th Yale Workshop on Adaptive Syst. Yale University, New Haven, CT*, pp. 259–265, 1987.
- [KOK89] P.V. KOKOTOVIC et H. SUSSMANN. « A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **13**, pp. 125–133, 1989.
- [KOL] V. KOLMANOVSKII et J.P. RICHARD. « Stability of Some Linear Systems with Delays ». A paraître dans *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [KOL86] V.B. KOLMANOVSKII et V.R. NOSOV. *Stability of Functional Differential Equations*. New-York, Academic Press, 1986.
- [KOL92] V. KOLMANOVSKII et A. MYSHKIS. *Applied theory of functional differential equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [KOL99] V. KOLMANOVSKII, S.I. NICULESCU, et J.P. RICHARD. « On the liapunov-krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems ». *International Journal of Control*, **72**(4), pp. 374–384, 1999.
- [KRA63] N.N. KRASOVSKII. *Stability of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*. Stanford University Press, 1963. Stanford, CA.
- [LAS61] J.P. LASALLE et S. LEFSCHETZ. *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press, New-York, 1961.
- [LEE88] K.K. LEE et A. ARAPOSTATHIS. « Remarks on smooth feedback stabilisation of nonlinear systems. ». *Systems & Control Letters*, **10**, pp. 41–44, 1988.
- [LEH91] B. LEHMAN et E.I. VERRIEST. « Stability of a continuous stirred reactor with delay in the recycle streams ». Dans *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1875–1876, 1991. Brighton, England.
- [LEH94] B. LEHMAN. « Stability of chemical reactions in a CSTR with delayed recycle stream ». Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3521–3522, 1994. Baltimore, Maryland.
- [LUO97] N. LUO, M.D. SEN, et J. RODELLAR. « Robust Stabilization of a class of uncertain time delay systems in sliding mode ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **7**, pp. 59–74, 1997.
- [MAL87] M. MALEK-ZAVAREI et M. JAMSHIDI. *Time Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*. North-Holland, 1987.
- [MAR82] G.I. MARCHUK et L.N. BELYKH. « On the treatment of chronic forms of disease according to a mathematical model », volume 38, pp. 77–87. Springer Verlag, 1982.
-

- [MAR85] G.I. MARCHUK. *Mathematical Models in Immunology*. Nauka, Moscow, 1985.
- [MIN42] N. MINORSKY. « Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions ». *Journal of Applied Mechanics*, **9**(1), pp. 65–71, 1942.
- [MOH95] S. MOHEIMANI et I. PETERSEN. « Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems ». Dans *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1513–1518, December 1995. New Orleans, LA.
- [MOR76] A.S. MORSE. « Ring models for delay differential systems ». *Automatica*, **12**, pp. 529–531, 1976.
- [MOR83] T. MORI, E. NOLDUS, et M. KUWAHARA. « A way to stabilize linear systems with delayed state ». *Automatica*, **19**, pp. 571–573, 1983.
- [MYS49] A.D. MYSHKIS. « General theory of differential equations with delay ». *Traduit en anglais dans Trans. American Mathematical Society*, 1951, **55**, pp. 1–62, 1949. En russe : *Uspechi matematicheskich, Nauk*, Vol. 4, No. 33, pp.99-141, Année 1949.
- [MYS55] A.D. MYSHKIS. *Lineare Differentialgleichungen mit nacheilenden Argumentom*. Deutscher Verlag. Wiss. Berlin, 1955.
- [NIC94a] S.I. NICULESCU, C.E. de SOUZA, J.M. DION, et L. DUGARD. « Robust stability and sqtabilization of uncertain linear systems with state delay : Single delay case (i) ». Dans *Proceedings IFAC Workshop on Robust Control Design*, pp. 469–474, 1994. Rio de Janeiro, Brazil.
- [NIC94b] S.I. NICULESCU, C.E. de SOUZA, J.M. DION, et L. DUGARD. « Robust stability and sqtabilization of uncertain linear systems with state delay : Multiple delays case (ii) ». Dans *Proceedings IFAC Workshop on Robust Control Design*, pp. 475–480, 1994. Rio de Janeiro, Brazil.
- [NIC96] S.I. NICULESCU. « *Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes à états retardés* ». PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [OUT] R. OUTBIB et G. SALLET. « A Reduction Principle for Global Stabilization of Nonlinear Systems ». A paraitre.
- [OUT91] R. OUTBIB. « Stabilisation d'une classe de systèmes affines en contrôles ». Dans *Proceedings of European Control Conference*, pp. 480–484, 1991.
- [OUT92] R. OUTBIB et G. SALLET. « Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited ». *Systems & Control Letters*, **18**, pp. 93–98, 1992.
- [OUT96] R. OUTBIB et G. JGHIMA. « Comments on the stabilization of nonlinear systems by adding an integrator. ». *IEEE transactions on Automatic control*, **41**(12), pp. 1804–1807, 1996.
- [OUT99] R. OUTBIB et J.C. VIVALDA. « On Feedback Stabilization of Smooth Nonlinear Systems ». *IEEE transactions on Automatic control*, **44**(1), pp. 200–203, 1999.
-

- [PET91] I.R. PETERSEN, B.D.O. ANDERSON, et E.A. JONCKHEERE. « A first principles solution to the non-singular  $h^\infty$  control problem ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **1**(3), pp. 171–185, 1991.
- [RAG94] S. RAGHAVAN et J.K. HEDRICK. « Observer design for a class of nonlinear systems ». *International Journal of Control*, **59**(2), pp. 515–528, 1994.
- [RAJ98] R. RAJAMANI. « Observers for Lipschitz Nonlinear Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(3), pp. 397–401, 1998.
- [RAZ56] B.S. RAZUMIKHIN. « On the stability of systems with a delay ». *Sovjet Journal Prikladnaja Matematika Mechanika*, **20**(4), pp. 500–512, 1956.
- [RIC98] J.P. RICHARD. « Some Trends and Tools for the Study of Time Delay Systems ». Dans *Proceedings CESA'98, multiconference "computational Engineering in Systems Applications"*, Nabeul, Tunisia, April 1998. Plenary paper.
- [ROS93] L. ROSIER. « Etude de quelques problemes de stabilisation ». PhD thesis, Université Paris XI, 1993.
- [RYA83] E. RYAN et J. BUCKINGHAM. « On asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear Systems ». *IEEE Transaction on Automatic Control*, **28**(8), pp. 863–864, August 1983.
- [SAL80] D. SALOMON. « Observers and duality between observation and state feedback for time delay systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **25**, pp. 1187–1192, 1980.
- [SHA23] F.R. SHARPE et A.J. LOTKA. « Contribution to the analysis of malaria epidemiology iv: Incubation lag ». *Supplement to the American Journal of Hygiene*, **3**, pp. 96–112, 1923.
- [SHE91] J.C. SHEN, B.S. CHEN, et F.C. KUNG. « Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**(5), pp. 638–640, 1991.
- [SHI60] S.N. SHIMANOV. « On stability in the critical case of a zero root for systems with time lag ». *Journal of Appl.Math.Mech*, **24**, pp. 653–668, 1960.
- [SHY93] K.K. SHYU et J.J. YAN. « Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control ». *International Journal of Control*, **57**(1), pp. 237–246, 1993.
- [SIR93] H. SIRA-RAMIREZ. « On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems ». *International Journal of Control*, **57**, pp. 1039–1061, 1993.
- [SLE78] M. SLEMROD. « Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity ». *SIAM Journal of Control and Optimization*, **16**(81), pp. 131–141, January 1978.
- [SLO84] I.J. SLOTINE. « Sliding controller design for nonlinear systems ». *International Journal of Control*, **40**, pp. 421–434, 1984.
-

- [SON89] E.D. SONTAG. *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite Dimensional System*. Springer Verlag, New-York, 1989.
- [SPU91] S.K. SPURGEON. « Choice of discontinuous control component for robust sliding mode performance ». *International Journal of Control*, **53**, pp. 163–179, 1991.
- [STA65] H. STATS, G.A. de MARS, D.T. WILSON, et C.L. TANG. « Problem of spike elimination in lasers ». *Journal of applied Physics*, **36**(1), pp. 1510, 1965.
- [SU91] T. SU, P.L. LIU, et J.T. TSAY. « Stabilization of delay-dependence for saturating actuator systems ». Dans *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2891–2892, 1991. Brighton, UK.
- [SU94] W.C. SU, S.V. DRAKUNOV, et Ü. ÖZGÜNER. « Constructing Discontinuity Planes for Variable Structure Systems - A Lyapunov Approach ». Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1169–1173, 1994. Baltimore, Maryland, U.S.A.
- [THA73] F.E. THAU. « Observing the state of nonlinear dynamic systems ». *International Journal of Control*, **17**, pp. 471–479, 1973.
- [THO83] A. THOWSEN. « Uniform ultimate boundedness of the solutions of uncertain dynamic delay systems with state-dependent and memoryless feedback control ». *International Journal of Control*, **37**(5), pp. 1135–1143, 1983.
- [TRI95] H. TRINH et M. ALDEEN. « A Comment on "Decentralized Stabilization of Large Scale Interconnected Systems with Delays" ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(2), pp. 914–916, 1995.
- [TSI89] J. TSINIAS. « Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization ». *Math. Contr. Signals Syst.*, **2**, pp. 343–357, 1989.
- [UTK78] V.I. UTKIN. *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems*. Moscow, MIR Publishers, 1978.
- [UTK92] V.I. UTKIN. *Sliding modes in control optimization*. Springer Verlag, 1992.
- [VER93] E.I. VERRIEST, M.K.H. FAN, et J. KULLSTAM. « Frequency domain robust stability criteria for linear delay systems ». Dans *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pp. 3473–3478, December 1993. San Antonio, TX.
- [VER94] E.I. VERRIEST et A.F. IVANOV. « Robust Stability of systems with delayed feedback ». *Circuits, Systems and Signal Processing*, **13**(2/3), pp. 213–222, March 1994.
- [VER95] E.I. VERRIEST et A.F. IVANOV. « Robust Stability of Delay-Difference Equations ». Dans *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 386–391, December 1995. Orlando, FL.
- [VER96] E.I. VERRIEST et W. AGGOUNE. « Stability of Nonlinear Differential Delay Systems ». Dans *Proceedings CESA'96, multiconference "computational Engineering in Systems Applications"*, 1996. Lille.
-

- [VER98] E.I. VERRIEST et W. AGGOUNE. « Stability of Nonlinear Differential Delay Systems ». *Mathematics and Computers in Simulation*, **45**(3-4), pp. 257-267, 1998.
- [VOL09] V. VOLTERRA. « *Sulle equazioni integrodifferenziali della teorie dell'elasticita* ». *Atti Reale Accad. Lincei*, 1909. 18, 295.
- [VOL27] V. VOLTERRA. Variazioni et fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. Dans *Cornitato Talassografico Memoria*, volume 131, pp. 1-142. 1927.
- [VOL28] V. VOLTERRA. « Sur la théorie Mathématique des phénomènes héréditaires ». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **7**, pp. 249-298, 1928.
- [VOL31] V. VOLTERRA. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthiers-Villars, 1931. Paris.
- [WAL88] B. WALCOTT et S.H. ZAK. « Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications ». *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **18**, pp. 88-104, 1988.
- [WAN87] S.S. WANG, B.S. CHEN, et T.P. LIN. « Robust stability of uncertain time-delay systems ». *International Journal of Control*, **46**(3), pp. 963-976, 1987.
- [WAT84] K. WATANABE, M. ITO, et M. KANEKO. « Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in states and control ». *International Journal of Control*, **29**, pp. 1073-1087, 1984.
- [WIL71] J.C. WILLEMS. « Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation ». *IEEE Transaction on Automatic Control*, **16**(6), pp. 621-634, 1971.
- [YOU93] K.K.D. YOUNG. *Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applications*. Elsevier Science, Amsterdam, 1993.
- [ZHO96] K. ZHOU, J.C. DOYLE, et K. GLOVER. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [ZIN90] A.S.I. ZINOBER. *Deterministic Control of Uncertain Systems*. Peter Peregrinus, London, 1990.
-