



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ
PAR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19980185
Cote	SM3 98/8
Loc	Magasin

Hamid ZAHROUNI

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de l'UNIVERSITE de METZ

SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur

OPTION : Mécanique

Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations

Soutenue le 08 Janvier 1998 devant le jury composé de

M. Fafard	Université Laval - Québec	Rapporteur
A. Ibrahimbegović	U.T.C. - Compiègne	Rapporteur
B. Cochelin	E.S.M2 - Marseille	Examineur
G. Ferron	L.P.M.M. - Metz	Examineur
J.C. Paumier	Université J. Fourier - Grenoble	Président
M. Potier-Ferry	L.P.M.M. - Metz	Directeur de thèse

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
U.R.A. C.N.R.S. 1215
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01.

Les hommes
ne peuvent vivre
en harmonie tant qu'ils
ne sont pas **compatibles** les
uns avec les autres en respectant
le **comportement** de chaque individu.
C'est ainsi qu'ils tendront vers **l'équilibre** parfait.

H. ZAHROUNI

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (L.P.M.M.) de l'Université de Metz sous la direction du professeur Michel Potier-Ferry.

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma gratitude au professeur M. Potier-Ferry pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et surtout pour m'avoir initié au travail de la recherche.

Par ailleurs, je remercie les professeurs Mario Fafard de l'Université Laval du Québec (Canada) et Adnan Ibrahimbegović de l'Université de Technologie de Compiègne pour avoir pris la charge de rapporter mon travail de thèse et pour toutes leurs remarques et observations pertinentes.

J'adresse également mes remerciements aux professeurs Bruno Cochelin de l'E.S.M2 de Marseille, Gérard Ferron du L.P.M.M. de l'Université de Metz et Jean Claude Paumier de l'Université Joseph Fourier de Grenoble (président du jury) pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury de ma thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté au présent travail.

D'autre part, je suis reconnaissant aux professeurs Noureddine Damil de L'Université Hassan II de Casablanca (Maroc) et Bruno Cochelin pour leur précieuse aide à l'élaboration de cette thèse.

Enfin, toute mon amitié va à mes amis et collègues du L.P.M.M. pour leur soutien permanent et leur chaleur humaine.

Notations et symboles utilisés

MAN	Méthode Asymptotique Numérique
$L(\bullet)$	Opérateur linéaire
$Q(\bullet, \bullet)$	Opérateur quadratique
U	Vecteur mixte contenant les inconnues élémentaires ($u, S...$)
(U_0, λ_0)	Solution initiale, point régulier
" a "	Paramètre de développement
$L_t(\bullet)$	Opérateur tangent défini en un point régulier
$\langle \bullet, \bullet \rangle$	Produit scalaire
λ	Paramètre de charge
$\theta^1, \theta^2, \theta^3$	Les coordonnées curvilignes convectives
$(\bar{\quad})$	La barre signifie que la variable considérée est exprimée dans la configuration actuelle
$x(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$	Vecteur position d'un point de la coque
$u(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$	Vecteur déplacement
$g_i = \frac{\partial x}{\partial \theta^i}$	Vecteurs de la base covariante
$g^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x}$	Vecteurs de la base contravariante
$g_{ij} = g_i g_j$	Composantes du tenseur métrique covariant
$g^{ij} = g^i g^j$	Composantes du tenseur métrique contravariant
$\gamma = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij})g^i \otimes g^j$	Déformation de Green-Lagrange
$\tilde{\gamma}$	Déformation incompatible
Π	Fonctionnelle d'énergie potentielle en déplacement
HR	Fonctionnelle d'Hellinger-Reissner
Π_{HW}	Fonctionnelle de Hu-Washizu
Π_{EAS}	Fonctionnelle basée sur le concept EAS
P_e	Puissance des efforts extérieurs
D	Matrice des constantes élastiques de comportement
$[N]$	Matrice des fonctions de forme
$[G]$	Matrice des dérivées des fonctions de forme
$[R]$	Matrice des composantes de la base covariante
$[A]$	Matrice des gradients de déplacement
$[B_\alpha]$	Matrice d'interpolation de la déformation ajoutée
$[M]$	Matrice des contraintes initiales
$[K_{uu}] [K_{\alpha u}] [K_{\alpha\alpha}]$	Matrices élémentaires de rigidité
$[K_t]$	Matrice globale de rigidité tangente
F^{nl}	Vecteur second membre
$[R(U, \lambda)]$	Vecteur résidu
q	Variable nodale de déplacement
α	Variable élémentaire de déformation

$S = S^{ij} g_i \otimes g_j$	Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
F	Vecteur des forces appliquées
σ_y	Contrainte limite d'élasticité
S_{eq}	Contrainte équivalente
S^d	Déviateur des contraintes
ν	Coefficient de Poisson
E	Module d'Young
h	Module d'écroutissage
D_t	Matrice des modules tangents de comportement
ϵ	Paramètre de précision
η	Paramètre de régularisation

Sommaire

Introduction générale	6
I Rappel bibliographique et position du problème	10
I.1 Rappel bibliographique des méthodes asymptotiques numériques . . .	10
I.2 Intérêt et coût d'une formulation quadratique	18
I.3 Représentation des grandes rotations et algorithmes asymptotiques .	22
I.4 Une formulation tridimensionnelle de coque basée sur le concept EAS	26
I.4.1 Introduction	26
I.4.2 Description géométrique et cinématique de la coque	27
I.4.3 Importance de la déformation β_{33}	29
I.4.4 Une méthode mixte basée sur le concept EAS	30
I.4.5 Introduction de β_{33} par le concept EAS	31
I.4.6 Discrétisation par éléments finis et écriture matricielle	33
I.4.7 Matrice de rigidité tangente, vecteur résidu et procédure itérative	35
I.4.8 Applications	36
I.4.9 Conclusion	42
II Algorithmes Asymptotiques Numériques pour les coques élastiques en grandes rotations	44
II.1 Introduction	44
II.2 Une formulation tridimensionnelle à trois champs	44
II.3 Un algorithme asymptotique numérique	48

II.3.1	Technique de perturbation	48
II.3.2	Condensation du champ des contraintes	50
II.3.3	Discrétisation par éléments finis	51
II.4	Procédure de continuation	53
II.5	Discussion et remarques	54
II.6	Applications	56
II.6.1	Flambage élastique d'une coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires	57
II.6.2	Poutre en flexion	61
II.6.3	Flambage latéral d'une poutre encastree	63
II.6.4	Coque hémisphérique pincée	66
II.6.5	Flambage d'un arc circulaire profond	69
II.6.6	Cylindre pincé	72
II.7	Conclusion	76
III	Extension de la MAN pour la résolution des problèmes de coques en plasticité	78
III.1	Introduction	78
III.2	Trois lois de comportement et leurs régularisations	80
III.2.1	Loi de comportement élastique parfaitement plastique	80
III.2.2	Loi de comportement de type puissance	84
III.2.3	Loi de comportement élastoplastique avec écrouissage linéaire	86
III.3	L'algorithme asymptotique numérique	89
III.3.1	Principe de la technique de perturbation	89
III.3.2	Développement des lois de comportement	91
III.3.3	Développement des équations variationnelles	92
III.3.4	Condensation et discrétisation	93
III.4	Applications numériques	94

III.4.1 Plaque en traction simple	95
III.4.2 Plaque en flexion	102
III.4.3 Toit sous charge ponctuelle	107
III.4.4 Flambage plastique d'une coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires: analyse du temps de calcul	113
III.5 Discussion	118
Conclusion générale	120
ANNEXES	121
A Matrices servant à la discrétisation de l'élément de coque étudié dans le chapitre I	122
B Matrice D_t des modules tangents de comportement et les contraintes résiduelles S^{res}	124
B.1 Loi élastique parfaitement plastique régularisée	124
B.2 Loi de type puissance régularisée	125
B.3 Loi élasto-plastique avec écrouissage linéaire régularisée	126
C Tableaux de valeurs: analyse du temps de calcul et de la taille mémoire	127
Références bibliographiques	128

Introduction générale

La modélisation numérique des problèmes de structures est devenue un outil indispensable depuis le développement de la méthode des éléments finis. Elle doit répondre à un besoin industriel car, pour des raisons de coût et de compétitivité, on est amené à utiliser des matériaux nouveaux particulièrement légers et résistants. Dans le cadre des structures minces employées en génie civil, aérospatiale ou dans la construction automobile, les phénomènes d'instabilité doivent être contrôlés pour assurer la fiabilité de ces structures. De plus, grâce aux moyens informatiques accessibles de nos jours, on peut concevoir des structures de plus en plus complexes. Cependant, un obstacle majeur vient se greffer à cette évolution : le temps de calcul. Ce dernier dépend de la méthode de résolution utilisée ainsi que de la stratégie de pilotage employée. De plus, il devient d'autant plus important que le problème à résoudre est compliqué. Une des questions que nous pouvons alors poser est la suivante : peut-on améliorer les algorithmes de résolution afin d'obtenir un gain de temps de calcul appréciable avec une bonne fiabilité de l'algorithme ?

Les méthodes de résolution les plus connues actuellement et les plus largement implémentées dans les codes de calcul par éléments finis sont les méthodes itératives basées sur le processus de prédiction-correction. Ces méthodes procèdent en deux étapes ; la première consiste à linéariser le problème non linéaire de départ et donc à prédire une nouvelle solution tandis que la deuxième étape consiste à corriger le résidu d'équilibre global de la structure par itérations successives. Une bibliographie importante sur ces méthodes est disponible dans tous les livres d'éléments finis traitant les problèmes non linéaires (voir par exemple [85] [10] [31]). Ces méthodes sont

bien adaptées pour résoudre les problèmes avec toutes les non-linéarités possibles, comme la plasticité ou le contact, à titre d'exemple. En revanche, elles n'exploitent pas les particularités de chaque type de non-linéarité, et le choix des paramètres de contrôle des calculs demande un utilisateur averti. Cependant, plusieurs articles ont été consacrés à l'amélioration de la convergence de ces méthodes et à l'adaptation du pas de calcul [30][29][63]... L'équipe de Ladevèze travaille sur la résolution des problèmes non linéaires en utilisant des méthodes de calcul non incrémentales [48][49]. Notons au passage que pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté, c'est la décomposition de la matrice de rigidité qui consomme le plus de temps CPU, et que c'est sur ce point que les efforts des chercheurs sont particulièrement déployés.

En parallèle à ces méthodes, nous avons celles de perturbation qui existent depuis fort longtemps. Ces dernières n'avaient pas trouvé une adhésion unanime de la part des numériciens car elles sont basées sur des développements analytiques de la solution et leurs applications étaient limitées aux problèmes à géométrie simple. Il a fallu attendre 1968 pour que Thompson et Walker [77] présentent, dans un article, une première association des méthodes de perturbation et des méthodes d'éléments finis mais les conclusions quant à l'efficacité de ces méthodes n'étaient pas probantes. En 1990, dans un article consacré aux problèmes de bifurcations perturbées, Damil et Potier-Ferry [33] ont repris ces méthodes et, grâce à un choix judicieux de la formulation de base (quadratique), ils ont pu obtenir des développements jusqu'à des ordres élevés, ce qui a permis d'améliorer la solution asymptotique en exigeant un temps de calcul raisonnable. Ainsi, est née la méthode asymptotique numérique (M.A.N.) qui a été fiabilisée quelques années plus tard par Cochelin et ses collaborateurs (1994) en présentant un algorithme permettant de suivre complètement les branches de solution en appliquant la M.A.N. pas à pas. Cette nouvelle méthode consiste à chercher la solution d'un problème non linéaire sous forme de série entière. Elle permet de transformer le problème de départ en une succession de problèmes linéaires admettant le même opérateur de rigidité tangente. A chaque ordre, les termes non linéaires sont reportés

sur un second membre obtenu de façon optimale. La M.A.N. est alors appliquée aux problèmes présentant des non-linéarités quadratiques telles que les coques élastiques en rotations modérées, ou aux indicateurs de bifurcations pour les problèmes à géométrie non linéaire pour ne citer que quelques exemples. A partir de cette avancée considérable, la M.A.N. s'est avérée une solution alternative aux méthodes itératives classiques. De plus, pour une classe de problèmes, il est montré que cette méthode est rapide (moins de matrices de rigidité à décomposer), fiable (automatique avec des pas adaptatifs) et facile à utiliser. A noter que plusieurs articles ont été publiés sur ce sujet [7] [15] [26] [27] [79] [22].

Contenu de la thèse

La motivation principale de cette thèse se résume en deux parties. La première consiste à présenter des algorithmes asymptotiques numériques pour résoudre des problèmes de coques élastiques en grandes rotations. La deuxième partie, quant à elle, consiste à étendre ces mêmes algorithmes aux coques utilisant une loi de comportement non linéaire.

Après avoir établi, dans le premier chapitre, une revue bibliographique des méthodes asymptotiques numériques et la représentation des grandes rotations pour les problèmes de structures, nous présenterons une formulation de coque ayant attiré notre attention. En effet, c'est une formulation simple et bien adaptée aux coques en grandes rotations. Toutes les variables de ce modèle sont de type déplacement, ce qui permet d'éviter l'utilisation des matrices des grandes rotations ; de plus, une loi de comportement 3-D sans modification est employée, ce qui est favorable à l'utilisation des lois de comportement non linéaire.

Le deuxième chapitre est consacré aux coques élastiques; le modèle considéré dans notre étude s'écrit facilement sous une forme quadratique permettant ainsi d'utiliser les mêmes algorithmes que ceux qui traitent les coques en rotations modérées. Plusieurs exemples montreront l'efficacité de la MAN par rapport aux méthodes classiques itératives, ce qu'il faudra retenir étant surtout la rapidité et l'aspect auto-

matique de la MAN. Une extension de ces algorithmes pour les coques ayant un comportement plastique est introduite au troisième chapitre. Nous utiliserons des lois de comportement non linéaire en déformation totale. Pour ce faire, nous procéderons en deux étapes :

- 1- une régularisation de ces lois pour permettre leur développement asymptotique car ces dernières présentent des singularités;
- 2- un changement de variables pour réduire le degré de non-linéarité du problème global et utiliser une formulation quadratique permettant de donner à l'algorithme son efficacité numérique.

Plusieurs exemples montreront la validité de ces procédures ainsi que leur efficacité pour le traitement des coques avec une loi de comportement non linéaire.

CHAPITRE I

Rappel bibliographique et position du problème

I.1 Rappel bibliographique des méthodes asymptotiques numériques

La Méthode asymptotique numérique (M.A.N.) est une famille d'algorithmes qui résoud des problèmes non linéaires grâce à l'association des développements asymptotiques et des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis. En effet, la M.A.N. permet de chercher les branches solutions sous la forme de séries entières par rapport à un paramètre " a " que nous préciserons plus tard. De cette manière, nous transformons le problème non linéaire de départ en une suite récurrente de problèmes linéaires, bien posés, admettant tous le même opérateur tangent. Ensuite, ces problèmes linéaires sont résolus numériquement, généralement par la méthode des éléments finis. Comme le rayon de convergence des séries est fini, une procédure de continuation a été proposée [27] permettant de définir la longueur de chaque pas asymptotique de sorte que le résidu reste très faible. Chaque fin de pas servira alors comme point de démarrage pour le pas suivant. La longueur de pas est par conséquent déterminée a posteriori ; ceci n'est pas toujours le cas des méthodes itératives habituelles. Ainsi, nous avons une longueur de pas adaptative et déterminée de façon simple et optimale : c'est le point clé de l'efficacité et la robustesse de la méthode asymptotique numérique.

La méthode asymptotique numérique trouve ses origines dans les méthodes de perturbation qui existent depuis déjà plus d'un siècle. Ces méthodes représentaient un moyen de résolution des problèmes non linéaires. Notons par exemple qu'en 1883, Linstedt les a appliquées pour l'analyse des problèmes en astronomie.

En partant de la formulation en déplacement d'un problème tridimensionnel d'élasticité en non linéaire géométrique avec une loi de comportement linéaire, l'énergie potentielle Π est stationnaire pour tout champ de déplacement δu cinématiquement admissible et s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta \Pi = \int_v {}^t\gamma(u) : D : \delta\gamma(u) dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \quad (\text{I.1})$$

où D est la matrice de comportement, u est le champ des déplacements, λ est un paramètre de chargement et λP_e est le travail des efforts extérieurs. γ est la déformation de Green-Lagrange que nous pouvons décomposer en une partie linéaire et une autre partie non linéaire :

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \gamma^l(u) + \gamma^{nl}(u, u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u) + \frac{1}{2}({}^t\nabla u \nabla u) \\ \delta\gamma(u) &= \gamma^l(\delta u) + 2 \gamma^{nl}(u, \delta u) \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

La méthode de perturbation permet de chercher une partie de la branche solution du problème (I.1) en développant u et λ en séries par rapport à un paramètre "a" qui représente une inconnue supplémentaire et qui peut être défini de la même manière que les paramètres de contrôle pour les algorithmes itératifs classiques (charge imposée, déplacement imposé ou longueur d'arc imposée). Ainsi, nous pouvons écrire :

$$u(a) = \sum_{i=0}^p a^i u_i \quad \lambda(a) = \sum_{i=0}^p a^i \lambda_i \quad (\text{I.3})$$

En injectant (I.3) dans l'équation (I.1) et en identifiant les termes suivant la puissance de "a", nous obtenons une suite de problèmes linéaires que nous pouvons écrire à l'ordre p quelconque sous la forme suivante :

$$L_t(u_p) = \lambda_p F + F_p^{nl} \quad (\text{I.4})$$

où L_t représente un opérateur tangent de rigidité qui dépend uniquement de la solution initiale u_0 , F est le vecteur des forces appliquées, F_p^{nl} est un vecteur résidu qui contient des termes dépendant des ordres inférieurs à p .

$$\langle L_t(u_p), \delta u \rangle = \int_v {}^t(\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p)) : D : \gamma_l(\delta u) dv + \int_v {}^t(\gamma_l(u_0) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_0)) : D : \gamma_{nl}(u_p, \delta u) dv + \int_v {}^t(\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p)) : D : 2\gamma_{nl}(u_0, \delta u) dv \quad (I.5)$$

$$\langle F, \delta u \rangle = P_e(\delta u) \quad (I.6)$$

$$\langle F_p^{nl}, \delta u \rangle = - \int_v \sum_{r=1}^{p-1} \left({}^t\gamma_l(u_r) + \sum_{m=0}^r {}^t\gamma_{nl}(u_m, u_{r-m}) \right) : D : 2\gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) dv - \int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^t\gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) : D : (\gamma_l(\delta u) + 2\gamma_{nl}(u_0, \delta u)) dv \quad (I.7)$$

Remarquons que l'expression du vecteur F_p^{nl} fait intervenir une double sommation due à la formulation de départ qui est cubique. Cela peut avoir une influence importante sur le temps de calcul comme nous le verrons en détail un peu plus loin.

Après avoir établi la condition d'équilibre à l'ordre p , nous procédons à la discrétisation du problème pour le résoudre par la méthode des éléments finis de type déplacement. Le problème global discrétisé s'écrit sous la forme suivante :

$$[Kt]\{u_p\} = \lambda_p\{F\} + \{F_p^{nl}\} \quad (I.8)$$

où $[Kt]$ désigne la matrice de rigidité tangent écrite au point représentant la solution initiale, $\{u_p\}$ est le vecteur déplacement discrétisé à l'ordre p .

Le but de cette méthode est donc de parcourir une grande partie de la branche solution en n'inversant qu'une seule matrice $[Kt]$, commune à tous les problèmes linéaires (I.8), et de reporter tous les termes non linéaires sur le vecteur $\{F_p^{nl}\}$ qui dépend des ordres précédant l'ordre p . Toute la difficulté à présent réside dans le calcul de ce vecteur résidu qui peut être coûteux pour des ordres élevés.

Parmi les premiers travaux les plus cités dans la littérature sur l'application des méthodes de perturbation, on trouve celui de Signorini [67] qui a explicité les relations

entre l'élasticité non linéaire et l'élasticité linéarisée en écrivant le problème non linéaire sous forme d'une suite de problèmes d'élasticité linéaire [67]. Vient ensuite Koiter qui a écrit en 1945 sa thèse sur la théorie des bifurcations en élasticité non linéaire dans laquelle, pour caractériser la sensibilité aux imperfections des structures élastiques, il a utilisé une méthode de perturbation tronquée à l'ordre 2 [47]. Ces travaux ont été repris plus tard par Budiansky (1974) [20] puis par Potier-Ferry (1987) [61]. A noter que la majorité des travaux sur les méthodes de perturbation pour le calcul de structure trouve ses origines dans la théorie de Koiter. Jusqu'ici, les méthodes de perturbation, de part leur aspect analytique, ne résolvaient que des problèmes à géométrie simple.

Thompson et Walker, dans un article paru en 1968 [77], ont présenté la première contribution qui associe les techniques de perturbation aux éléments finis. Ils ont élaboré une théorie générale pour résoudre un problème non linéaire discret par une méthode de perturbation qu'ils ont appliquée ensuite au problème d'équilibre de poutre élastique. Ils ont obtenu alors une succession de problèmes linéaires par dérivations successives des équations de départ par rapport au paramètre de développement " a ". Ils ont ensuite déterminé les sept premiers termes de la série pour une poutre en flexion avec une non-linéarité géométrique, et ils ont comparé les résultats obtenus avec la solution analytique exacte. Ils ont montré que plus l'ordre de troncature augmente, meilleure est la précision asymptotique. En revanche, les auteurs de cet article ont conclu que ces méthodes ne peuvent traiter que des problèmes avec des non-linéarités modérées. Plus tard, Walker (1969) [81] a publié un article dans lequel il a étudié la stabilité et le comportement d'un arc circulaire en grands déplacements. Il a utilisé les méthodes de perturbation comme moyen de prédiction de la solution qu'il corrigeait systématiquement à la fin de chaque pas par les procédures itératives de Newton-Raphson. Pour ses développements, Walker est parti d'une formulation cubique en déplacement du même type que (I.1) avec une troncature de la série à un petit ordre. Un certain nombre de travaux sur les applications de ces algorithmes sont

résumés par Gallagher en 1975 [38]. Toutefois, l'auteur a conclu que ces méthodes ne sont pas amenées à se développer dans le cadre des éléments finis.

Les années 80 ont connu une relance de l'intérêt des méthodes de perturbation. Ainsi, Noor et ses collaborateurs ont associé ces dernières à la méthode de réduction de Rayleigh-Ritz [55][54][56]. Partant du principe que la réponse d'un problème en statique est décrite par un système d'équations algébriques, cette méthode consiste à remplacer ces équations par un système réduit d'équations avec beaucoup moins d'inconnues. Ces auteurs ont utilisé la méthode de perturbation pour générer la base de Ritz. Quelques avantages peuvent se dégager de ces nouveaux algorithmes, par exemple la réduction de la taille du problème à résoudre et l'amélioration du rayon de convergence de la solution asymptotique, permettant ainsi d'optimiser le nombre de décompositions de la matrice de rigidité. Plusieurs articles montrent l'efficacité de cette méthode. Cependant, le temps de calcul n'est pas discuté sérieusement dans ces articles alors que le but recherché est, justement, d'allier l'efficacité à l'économie du temps de calcul; voir l'article de synthèse sur ces méthodes, présenté par Riks en 1984 [64].

En 1990, Damil et Potier-Ferry [33] ont écrit le premier article original qui traite des bifurcations perturbées à l'aide des méthodes asymptotiques numériques. En effet, pour obtenir une efficacité numérique et une écriture simple du second membre $\{F^{nl}\}$ jusqu'à des ordres élevés, ces auteurs ont proposé une formulation de départ quadratique. Au lieu de partir de la formulation en déplacement (I.1) qui est cubique, Azrar et al. [7] ont proposé de réduire le degré de non-linéarité de u en introduisant le champ des contraintes comme variable indépendante. Si nous considérons l'élasticité 3D, cette formulation de base correspond à la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner qui est stationnaire pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible δu et un champ δS quelconque :

$$\delta HR(u, S) = \int_v \{ {}^t S : \delta \gamma(u) + {}^t \delta S : \gamma(u) - {}^t S : D^{-1} : \delta S \} dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \quad (I.9)$$

Les variables développées en série sont donc le paramètre de charge λ ainsi que le champ de déplacement u et le champ des contraintes S que nous pouvons rassembler dans un vecteur mixte $U = \begin{pmatrix} u \\ S \end{pmatrix}$. L'avantage de cette écriture est que le problème à résoudre est écrit dans un cadre quadratique que nous pouvons mettre sous la forme suivante en fonction du vecteur mixte :

$$R(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - \lambda F = 0 \quad (\text{I.10})$$

où R est le vecteur résidu, L est un opérateur linéaire et Q est un opérateur quadratique.

Nous avons les relations suivantes :

$$\langle L(U), \delta U \rangle = \int_v \{ {}^t S : \gamma_l(\delta u) + {}^t \delta S : (\gamma_l(u) - D^{-1} : S) \} dv \quad (\text{I.11})$$

$$\langle Q(U, U), \delta U \rangle = \int_v \{ {}^t S : 2\gamma_{nl}(u, \delta u) + {}^t \delta S : \gamma_{nl}(u, u) \} dv \quad (\text{I.12})$$

Si nous appliquons maintenant la méthode de perturbation, nous obtenons à l'ordre p un problème linéaire qui s'écrit sous la forme suivante :

$$L_t(U_p) = \lambda_p F + F_p^{nl} \quad (\text{I.13})$$

où L_t correspond au même opérateur de rigidité explicité dans le cas de la formulation cubique. Le nouveau vecteur non linéaire F_p^{nl} s'écrit quant à lui comme suit :

$$F_p^{nl} = - \sum_{r=1}^p Q(U_r, U_{p-r}) \quad (\text{I.14})$$

avec

$$\langle Q(U_r, U_{p-r}), \delta U \rangle = \int_v \{ {}^t S_r : \gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) + {}^t S_{p-r} : \gamma_{nl}(u_r, \delta u) + {}^t \delta S : \gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) \} dv \quad (\text{I.15})$$

Contrairement à la formulation cubique (I.1) qui fait intervenir une double sommation dans l'expression du second membre F_p^{nl} , la formulation quadratique n'a besoin que d'une simple sommation. Le temps de calcul de $\{F^{nl}\}$ reste petit par rapport à celui nécessaire pour le calcul de la matrice de rigidité tangente et par conséquent un

pas asymptotique exige un temps CPU du même ordre que celui correspondant à la méthode de Newton-Raphson modifiée; une étude sur le coût de cette méthode sera présentée plus loin. Rappelons que la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner est utilisée uniquement pour réduire le degré de non-linéarité du problème et que les auteurs n'avaient pas l'intention d'utiliser des éléments finis mixtes avec les champs de déplacements et de contraintes comme variables indépendantes. A l'ordre p , nous procédons à une condensation des contraintes en remplaçant la variable de contraintes par la loi de comportement qui sera donc respectée exactement en chaque point d'intégration. Nous utiliserons par la suite une discrétisation habituelle par éléments finis en déplacement. Cette idée fut vite généralisée et son champ d'application élargi pour résoudre des problèmes de coques en non linéaire géométrique dans le cadre des rotations modérées [7], mais aussi pour le calcul des points de bifurcation [14] et la recherche des branches post-critiques de flambage [15][80], ainsi que pour la résolution des équations de Navier-Stokes [79] [78] [22] [21] [42]...

Comme la représentation en série est limitée par son rayon de convergence (propriété intrinsèque), quelques algorithmes ont été développés pour améliorer la représentation de la solution par série entière [28] [8]. Nous pouvons remplacer l'approximation polynomiale par des fractions rationnelles et ainsi écrire :

$$u(a) - u(0) = \sum_{i=1}^p f_i(a)u_i \quad (\text{I.16})$$

où $f_i(a)$ sont des fractions rationnelles appelées aussi approximants de Padé. C'est une façon simple d'améliorer le rayon de validité des séries; toutefois une fraction rationnelle présente malheureusement des pôles (des zéros au dénominateur) et des défauts (facteurs communs entre le numérateur et le dénominateur). A noter qu'un travail sur le contrôle des pôles et sur l'automatisation de la représentation des solutions par les approximants de Padé est maintenant disponible dans [45].

Récemment, Najah et al. [53] ont présenté une revue critique des méthodes asymptotiques numériques (techniques de bases réduites, représentation polynomiale et ap-

proximants de Padé). Il en ressort qu'une efficacité de ces algorithmes est obtenue avec un ordre élevé de troncature des séries. Quant aux conclusions, elles prônent la représentation polynomiale en raison de sa fiabilité et sa rapidité, ou les approximants de Padé à condition d'améliorer la fiabilité de cette technique (voir aussi [52]).

A la fin de l'année 1994, lorsque débutèrent mes travaux de thèse, notre équipe de recherche savait résoudre, par exemple, les problèmes d'élasticité linéaire, ceux des coques de Von Karman (écrits dans un cadre quadratique). Pour cette classe de problèmes, la Méthode Asymptotique Numérique s'est montrée efficace non seulement grâce à sa robustesse pour le suivi des courbes en comportement non linéaire géométrique et cela en présence de points singuliers, mais également grâce à l'adaptation automatique de la longueur du pas. Dès lors, l'équipe s'est fixé quelques objectifs pour élargir les applications de la MAN à des modèles physiques tels que : mécanique des fluides [21], plasticité, viscoplasticité [35], contact unilatéral [45] et coques en grandes rotations [84].

La présente thèse a pour objectif de proposer des algorithmes asymptotiques numériques pour résoudre des problèmes de coques en grandes rotations en considérant, dans un premier temps, une loi de comportement linéaire, ce qui restreint les applications aux problèmes en petites déformations mais autorise de grands déplacements et des grandes rotations. Ensuite, nous étendrons ces algorithmes pour la résolution des coques en plasticité. A ce sujet, une thèse a été soutenue en décembre 1995 [16] dans laquelle Braikat a présenté des algorithmes asymptotiques numériques pour traiter des problèmes de plasticité en déformation totale dans le cadre 2-D.

Concernant le choix de l'élément de coque en grandes rotations, nous pouvons nous interroger sur l'existence, dans la littérature, d'une formulation de coque en grandes rotations qui soit simple, c'est-à-dire une formulation pour laquelle les développements asymptotiques soient faciles à mettre en oeuvre et qui, par ailleurs, ne présente pas de difficulté pour l'introduction de la plasticité. Pour situer le cadre de notre travail,

nous allons brièvement passer en revue la représentation des grandes rotations pour les coques et quelques essais d'extension des méthodes asymptotiques numériques pour résoudre des problèmes de coque dans ce cadre; mais nous allons tout d'abord montrer l'intérêt d'une formulation quadratique.

I.2 Intérêt et coût d'une formulation quadratique

Dans ce paragraphe, nous présentons un travail original qui nous permettra d'évaluer le coût d'une formulation quadratique et nous montrera l'intérêt de cette dernière par rapport à une formulation cubique. Nous avons vu dans la section précédente que le second membre exige une double sommation dans le cas d'une formulation cubique (I.1) mais ne demande qu'une simple sommation si le problème est formulé dans un cadre quadratique (I.9). En revanche, cette dernière formulation exige en plus du stockage en mémoire du champ de déplacement u et du paramètre de charge λ , celui du champ de contraintes S à tous les ordres de la série. Certes, cette formulation permet d'optimiser le temps de calcul d'un pas asymptotique par rapport à la formulation cubique (I.1) mais à quel prix?

Nous allons essayer de répondre à la question suivante: que gagne-t-on en temps de calcul et que perd-t-on en taille mémoire avec une formulation quadratique?

Pour répondre à ces questions, nous effectuons plusieurs calculs en considérant une structure de plaque maillée à l'aide de l'élément de coque DKT18 [11] avec plusieurs largeurs de bande comme le montre la figure (I.1). Nous avons adopté un stockage en ligne de ciel de la matrice de rigidité tangente.

Tout d'abord, nous analysons le rapport de la taille mémoire nécessaire pour un calcul de la MAN sur celle nécessaire pour un calcul de Newton-Raphson en fonction de la largeur de bande. Cette étude est effectuée pour différents ordres de troncature des séries. Les résultats de cette étude sont reportés sur la figure (I.2). Ils montrent que plus la largeur de bande de la matrice de rigidité tangente est grande plus la taille mémoire qu'exige un calcul asymptotique tend vers celle nécessaire pour une

prédiction de Newton-Raphson. Cela veut dire que pour des problèmes de grandes tailles, c'est le stockage de la matrice de rigidité qui est le plus coûteux. La taille mémoire augmente naturellement avec l'ordre de troncature des séries mais cette augmentation est relativement petite pour les problèmes à grande largeur de bande.

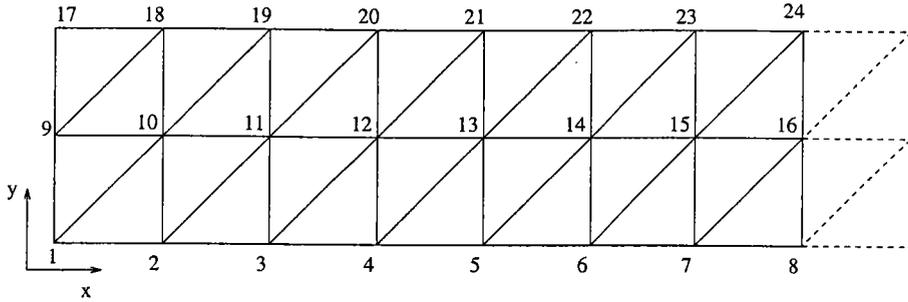


FIG. I.1 – Maillage de plaque avec l'élément DKT18. La numérotation des noeuds est effectuée suivant l'axe x pour faire varier la largeur de bande en fonction du nombre d'éléments suivant x . Deux éléments seulement sont considérés selon l'axe y

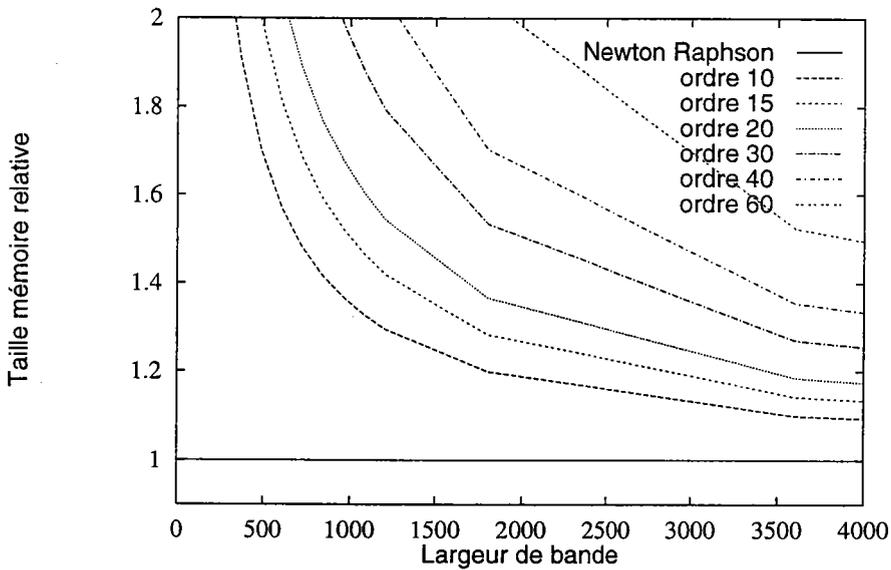


FIG. I.2 – Courbes représentant l'évolution du rapport de la taille mémoire MAN sur celle de la méthode itérative en fonction de la largeur de bande et pour différents ordres de troncature des séries

En ce qui concerne la question relative au temps de calcul, nous y répondons en deux parties. La première concerne une comparaison entre le temps de calcul d'un

pas asymptotique de la formulation quadratique et une simple prédiction de Newton-Raphson et dans la deuxième partie, nous comparerons ce temps à celui d'un pas asymptotique lorsqu'une formulation cubique est utilisée. Ces différents calculs sont effectués pour différentes largeurs de bande et pour différents ordres de troncature des séries. La décomposition de la matrice de rigidité tangente est effectuée par l'algorithme classique de montée-descente. En effet, la figure (I.3) décrit l'évolution du rapport de temps d'un pas asymptotique sur celui d'une simple prédiction de Newton-Raphson. Nous remarquons que ce rapport augmente avec l'ordre de troncature des séries, ce qui est tout à fait logique car plus l'ordre est grand plus nombreux sont les termes à calculer dans le second membre F^{nl} . Nous constatons aussi que ce rapport de temps baisse lorsque la largeur de bande augmente; cela signifie simplement que dans ce cas, le temps de décomposition de la matrice de rigidité tangente devient prépondérant. Pour chiffrer le coût d'un pas asymptotique, nous considérons l'exemple d'un maillage avec une largeur de bande de 612 (100 éléments suivant l'axe x). A l'ordre 20 par exemple, la méthode asymptotique demande deux fois plus de mémoire que la méthode itérative classique (Taille mémoire relative = 2.05); en ce qui concerne le temps de calcul relatif, ce problème demande un temps $T1=1.30$, c'est-à-dire qu'un pas de la MAN exige 30% de temps de plus qu'une simple prédiction de la méthode itérative. Notons que nous avons comparé un pas asymptotique à une simple prédiction de Newton-Raphson à laquelle il faut ajouter un certain nombre d'itérations pour atteindre l'équilibre; de plus, plusieurs pas itératifs peuvent être exigés pour couvrir toute la portion de la branche solution obtenue par un seul pas de la MAN.

En analysant les figures (I.2) et (I.3), nous pouvons conclure simplement que plus la taille du problème est importante, moins la méthode asymptotique est pénalisante en temps de calcul et en taille mémoire par rapport à un calcul itératif.

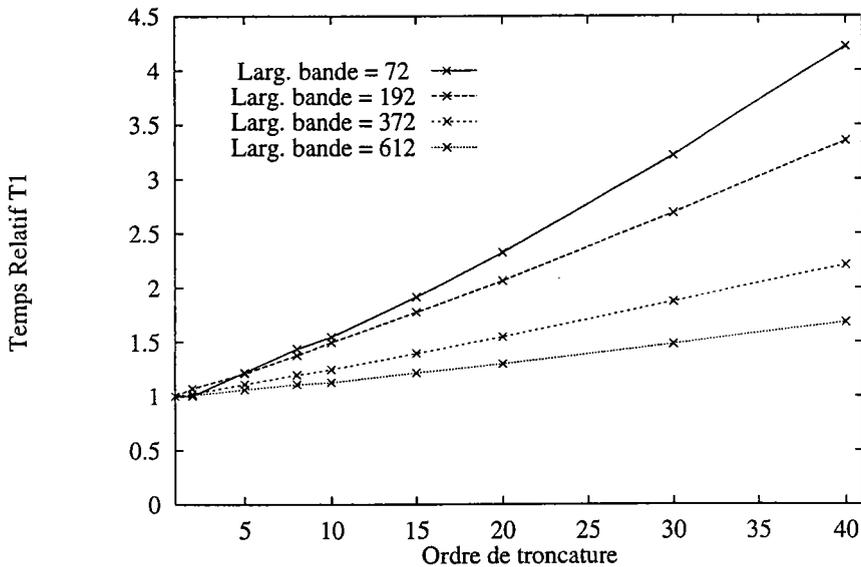


FIG. I.3 – Courbes représentant l'évolution du temps relatif $T1$ en fonction de l'ordre de troncature des séries et pour différentes largeurs de bande. $T1$ correspond au rapport entre le temps d'un pas asymptotique et celui d'une simple prédiction de Newton-Raphson

Nous complétons cette étude par une comparaison en temps de calcul entre la formulation quadratique et la formulation cubique. Nous avons repris les calculs effectués précédemment, cette fois-ci avec la méthode asymptotique formulée dans un cadre cubique. En effet, les résultats de cette étude sont reportés sur la figure (I.4). Le temps relatif $T2$ représente le rapport de temps entre celui d'un pas asymptotique avec une formulation cubique et celui d'un pas asymptotique avec une formulation quadratique. Nous constatons que ce rapport augmente avec l'ordre de troncature, ce qui est évident car la double sommation exigée par le second membre dans le cas de la formulation cubique devient beaucoup plus pénalisante pour de grands ordres. Ce même rapport $T2$ baisse quand la largeur de bande augmente, cette baisse est liée au temps de décomposition de la matrice de rigidité tangente qui devient important. Si nous considérons le maillage avec la largeur de bande de 612, le rapport $T2$ est égal à 1.87 à l'ordre 20, ce qui signifie que la formulation cubique consomme dans ce cas 87% plus de temps que la formulation quadratique en économisant 15% uniquement

de la taille mémoire totale, ce chiffre correspond au coût du stockage en mémoire des contraintes à tous les ordres. Cet exemple montre que la formulation quadratique permet un gain en temps de calcul considérable avec une petite augmentation de la taille mémoire (dans l'annexe (C), nous avons une présentation des graphiques de cette section sous forme de tableaux).

Dans les chapitres suivants, nous chercherons l'ordre de troncature optimal qui permet de minimiser le temps de calcul de la MAN en adoptant une formulation quadratique.

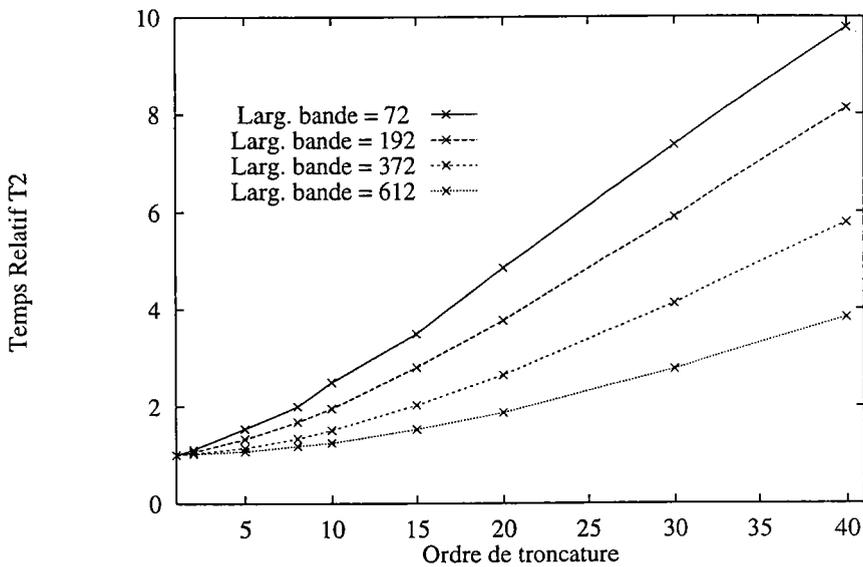


FIG. I.4 – Courbes représentant l'évolution du temps relatif d'un pas asymptotique basé sur une formulation cubique par rapport à celui basé sur une formulation quadratique en fonction de l'ordre de troncature et pour différentes largeurs de bande

I.3 Représentation des grandes rotations et algorithmes asymptotiques

Les grandes rotations concernent surtout les systèmes de corps rigides articulés et les structures minces ou élancées telles que les poutres, les plaques et les coques. Un nombre important d'articles a été consacré ces dernières décennies au traitement des grandes rotations tridimensionnelles dont la principale difficulté provient de la

nature non-vectorielle de celles-ci. La représentation des rotations par trois angles est théoriquement intéressante mais elle n'est pas exempte de singularités numériques. Par ailleurs dans le cadre des éléments finis, la matrice de rigidité tangente n'est pas toujours symétrique, ce qui est pénalisant.

Géométriquement, les grandes rotations arbitraires peuvent être exprimées en termes de rotations élémentaires autour d'axes fixes bien définis. Cette approche a été utilisée pour la première fois par Euler en dynamique et les angles de rotation portent le nom de ce dernier. Une autre paramétrisation possible utilise, quant à elle, les angles de Bryant en décrivant les rotations en termes de quantités angulaires. Cette approche géométrique qui est largement utilisée en robotique présente des singularités numériques et la solution n'est pas unique lorsque les angles de rotation atteignent une certaine valeur [18].

Algébriquement, la représentation des grandes rotations est basée sur le mouvement sphérique qui conserve la longueur du vecteur position de tous les points subissant la rotation. Cette propriété permet d'exprimer les grandes rotations par un ensemble minimal de paramètres que nous pouvons choisir de différentes façons. Nous renvoyons, sur ce sujet, aux remarquables contributions d'Argyris [5] et celles d'Atluri [6], sans oublier la récente synthèse sur la paramétrisation des grandes rotations en dynamique présentée par Gérardin et Rixen [39].

La conservation de la longueur des vecteurs subissant la rotation implique que la matrice de rotation doit être orthogonale, ce qui permet d'exprimer celle-ci en termes d'invariants décrits généralement par les paramètres d'Euler ou ceux de Rodrigues.

Dans le contexte du calcul des structures, plusieurs auteurs ont présenté des méthodes permettant une implémentation simple des grandes rotations en éléments finis tout en conservant une matrice de rigidité symétrique [60] [65] [13] [50]. Notons dans le même contexte une série d'articles proposée par Simo et ses collaborateurs pour la résolution des problèmes non linéaires de poutres et de coques à géométrie exacte [69] [70] [71] [73].

Nous avons vu que les développements asymptotiques sont efficaces et simples à mettre en oeuvre lorsque les équations du problème sont écrites dans un cadre quadratique. Une question se pose, cependant, pour adapter ces algorithmes asymptotiques aux traitements des grandes rotations. A cause des matrices de grandes rotations, la non-linéarité du problème n'est plus quadratique. Ce champ de recherche a été récemment exploré par quelques chercheurs dont nous exposons ici les principes d'investigations.

Boer et al. [12] ont fait une tentative d'extension des algorithmes asymptotiques numériques à la résolution des problèmes de coques en grandes rotations. Confrontés à la forte non-linéarité du problème due à la représentation des grandes rotations, ils ont simplifié la relation qui lie les déplacements au champ de déformation en faisant un développement limité à l'ordre deux, cette restriction revient à peu près à l'approximation des rotations modérées, ce qui s'oppose à l'idée de la représentation en série défendue par Cochelin et ses collaborateurs dans les nombreux articles publiés sur ces méthodes. Les résultats numériques obtenus n'étaient pas très éloquents au moins pour la prise en compte des grandes rotations.

Cochelin avait montré que le calcul du second membre à l'ordre p revient à annuler les résidus successifs jusqu'à cet ordre:

$$[R(u(a), \lambda(a))] = \sum_{i=0}^p a^i [R_i] + 0(a^{p+1}) \quad (\text{I.17})$$

Partant de cette idée, Ammar a présenté dans ses travaux de thèse (1996) [3] une technique permettant de résoudre les problèmes de coques dans le cadre des grandes rotations. En effet, en raison de la présence des matrices de rotation, la méthode asymptotique numérique n'est plus applicable car on ne peut obtenir des systèmes linéaires avec le même opérateur tangent de rigidité. C'est pourquoi, l'auteur a été amené à calculer les vecteurs $\{F^{nl}\}$ numériquement à l'aide du vecteur résidu. Ainsi, en considérant le développement de Taylor au voisinage de "a" pour le vecteur résidu

R , nous obtenons l'expression suivante:

$$R = \sum_{i=0}^p \frac{a^i}{i!} \frac{\partial^i R}{\partial a^i} \Big|_{a=0} \quad (\text{I.18})$$

Le second membre $\{F^{nl}\}$ découle du vecteur résidu à l'ordre p après discrétisation et condensation des contraintes sous la forme suivante:

$$R_p = \frac{1}{p!} \frac{\partial^p R}{\partial a^p} \quad (\text{I.19})$$

Pour le calcul des différentes dérivées de R , Ammar propose divers schémas de différences finies qui permettent d'évaluer la p ème dérivée à partir de quelques calculs de résidus.

Cette méthode présente donc une variante pour les méthodes asymptotiques numériques, elle permet de s'affranchir du cadre quadratique et a priori elle peut être applicable à toute sorte de non-linéarité.

La bibliographie sur les formulations de coque ou de poutre utilisant des matrices de rotation est très importante. Ce type de formulation entre dans la catégorie des éléments utilisés par Ammar dans ses travaux.

Il existe d'autres formulations de coques adaptées pour les grands déplacements et les grandes rotations sans utiliser de matrice de rotation, c'est-à-dire que ces éléments n'emploient que des variables nodales en déplacement. Quelques auteurs comme Graf et al. [40], Pian et al. [59], Büchter et al. [19], Parish [57] se sont intéressés à la modélisation des structures minces en utilisant des éléments tridimensionnels dégénérés sans degrés de liberté de rotations. Nous pouvons également citer la récente thèse de Domissy (1997) [36] qui a présenté une formulation de nouveaux modèles d'éléments finis de type solide pour l'analyse des coques. Ces modèles ne possèdent que des degrés de liberté de type translation et sont adaptés pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques minces et épaisses. Domissy a passé en revue une bibliographie des différents travaux sur le même sujet.

Parmi les articles qui étaient disponibles au début de mes travaux, celui publié par Büchter et al. en 1994 sur les coques en grandes rotations avec une loi de compor-

tement 3-D sans modification a attiré notre attention pour au moins deux raisons. La première est que ce modèle de coque n'utilise pas de matrice de rotation, ce qui est très avantageux pour l'application des développements asymptotiques. La deuxième raison se situe au niveau de l'emploi d'une loi de comportement 3-D sans condensation, ce qui nous permet d'introduire naturellement des algorithmes asymptotiques numériques pour les coques plastiques dans un chapitre du présent travail.

Nous allons maintenant donner quelques détails concernant la formulation de coque proposée par Büchter et al. avant d'introduire les développements asymptotiques numériques qui y sont associés.

I.4 Une formulation tridimensionnelle de coque basée sur le concept EAS

I.4.1 Introduction

Nous présentons dans cette section le travail publié par Büchter et al. en 1994 sur une formulation de coque dont les variables cinématiques sont toutes de type déplacement et qui utilise une loi de comportement 3-D. Il s'agit d'une formulation de coque tridimensionnelle sans condensation de la loi de comportement naturellement introduite dans les formulations classiques de coque. En effet, pour éviter l'erreur due aux hypothèses sur le champ de déplacement, les formulations classiques de coque condensent la loi de comportement en considérant une contrainte normale nulle dans l'épaisseur $S^{33} = 0$.

L'objectif est d'utiliser la loi de comportement 3-D sans aucune modification. Pour ce faire, la théorie de coque habituelle à six paramètres est enrichie par un paramètre supplémentaire permettant une variation linéaire de la déformation à travers l'épaisseur. Pour préserver la formulation de base en déplacement, ce nouveau paramètre sera introduit par le concept E.A.S. (Enhanced Assumed Strain) et sera ensuite éliminé au niveau élémentaire par condensation des équations d'équilibre et de compatibilité. Ce concept a été proposé par Simo et Rifai en 1990 [72] pour amé-

liorer la performance des éléments finis en déplacement. C'est en fait une méthode mixte dont la formulation est écrite en fonction du champ de déplacement et d'une déformation incompatible que l'on introduit moyennant certaines conditions [72] [68]. Plusieurs auteurs ont utilisé ce principe pour éviter les problèmes de verrouillage dans les formulations de coques basées sur le concept des coques dégénérées [4] [82].

I.4.2 Description géométrique et cinématique de la coque

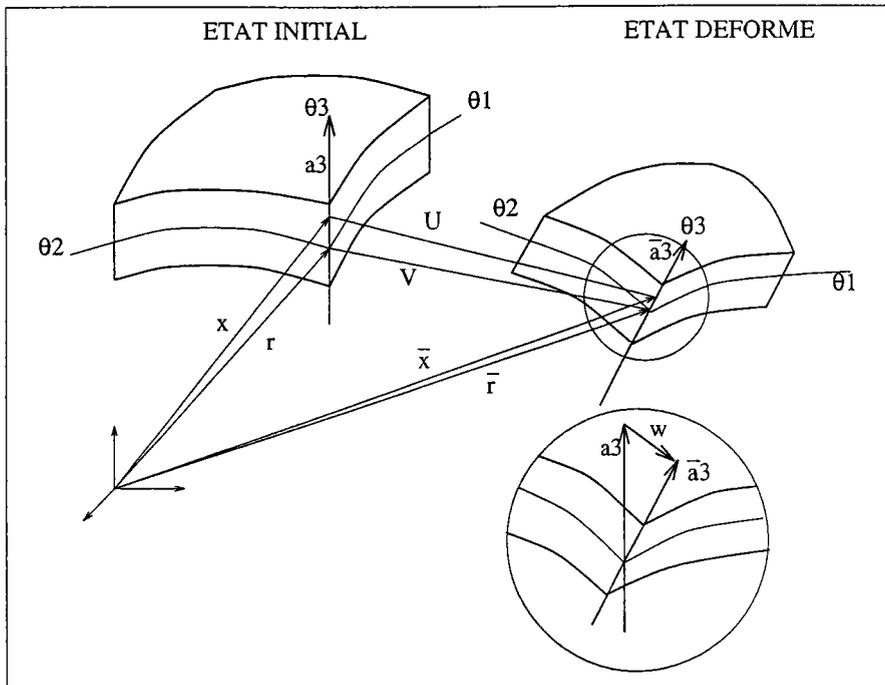


FIG. I.5 – *Description géométrique de la coque*

La cinématique de base utilisée dans le cadre de la présente formulation est très simple; elle repose sur les théories classiques de plaque et coque. Ainsi, la position d'un point quelconque de la géométrie décrite sur la figure (I.5) est repérée, sur la configuration initiale, par un vecteur x exprimé sous la forme suivante :

$$x(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = r(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 a_3(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{I.20})$$

où r est un vecteur qui repère la position de la surface moyenne, a_3 est le vecteur directeur de la coque au point considéré et $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ désignent les coordonnées cur-

vilignes convectives.

En supposant une variation linéaire du champ de déplacement dans la direction de l'épaisseur, ce dernier peut s'écrire comme suit :

$$u(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 w(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{I.21})$$

avec v et w représentant respectivement le déplacement d'un point de la surface moyenne et la différence entre les vecteurs directeurs de la coque entre la configuration de référence et celle déformée.

Nous pouvons définir le vecteur \bar{x} de la configuration déformée par :

$$\bar{x} = (r + v) + \theta^3(a_3 + w) = \bar{r} + \theta^3 \bar{a}_3 \quad (\text{I.22})$$

La déformation de Green-Lagrange exprimée dans une base contravariante s'écrit comme suit :

$$\gamma = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij}) g^i \otimes g^j \quad (\text{I.23})$$

où g_{ij} et \bar{g}_{ij} sont respectivement les composantes covariantes des tenseurs métriques de la configuration initiale et la configuration déformée et où g^i désignent les vecteurs de la base contravariante.

A partir des équations (I.20) et (I.21), nous pouvons écrire les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} g_\alpha &= \frac{\partial x}{\partial \theta^\alpha} = r_{,\alpha} + \theta^3 a_{3,\alpha} = a_\alpha + \theta^3 a_{3,\alpha} & \bar{g}_\alpha &= \bar{a}_\alpha + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha} \\ g_3 &= \frac{\partial x}{\partial \theta^3} = a_3 & \bar{g}_3 &= \bar{a}_3 \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

Ainsi nous pouvons écrire les composantes de la déformation de Green-Lagrange sous la forme suivante :

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{ij} + (\theta^3)^2 Q_{ij} \quad (\text{I.25})$$

avec

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{a}_i \bar{a}_j - a_i a_j) \quad (\text{I.26})$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{3,\alpha} \bar{a}_\beta + \bar{a}_{3,\beta} \bar{a}_\alpha - a_{3,\alpha} a_\beta - a_{3,\beta} a_\alpha)$$

$$\beta_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{3,\alpha} \bar{a}_3 - a_{3,\alpha} a_3) \quad (\text{I.27})$$

$$\beta_{33} = 0$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{3,\alpha} \bar{a}_{3,\beta} - a_{3,\alpha} a_{3,\beta})$$

$$Q_{\alpha 3} = 0 \quad (\text{I.28})$$

$$Q_{33} = 0$$

Remarques :

- Nous remarquons d'après l'équation (I.25) que la déformation γ_{ij} est quadratique par rapport à θ^3 .
- β_{33} est nul à cause de l'hypothèse (I.21) sur le champ de déplacement.

Si les gradients de la déformation transverse et la variation de l'épaisseur sont petits, Büchter [17] a montré qu'en négligeant les termes quadratiques en θ^3 dans l'équation (I.25), une erreur relative sur les déformations de Green-Lagrange de l'ordre de $\max\{\frac{h}{2R}, \frac{1+2\eta_\gamma}{2}[\frac{\bar{h}}{R} + (\frac{\bar{h}}{R})^2]\}$ est induite, où R est le plus petit rayon de courbure et $\eta_\gamma = \|\gamma\|$ est la norme spectrale du tenseur de déformation de Green-Lagrange. Pour la clarté des écritures, nous négligeons dans ce qui suit les termes quadratiques de déformation en θ^3 .

I.4.3 Importance de la déformation β_{33}

Pour répondre à la question de l'importance de la variation linéaire de la dilatation β_{33} à travers l'épaisseur, nous considérons l'élasticité linéaire.

La contrainte S^{33} est obtenue à partir de l'expression suivante :

$$S^{33} = D^{33ij} \gamma_{ij} + D^{3333} \gamma_{33} \quad (i, j) \neq (3, 3) \quad (\text{I.29})$$

Pour les coques minces S^{33} est très petite. Cependant, il est évident que γ_{33} doit être au moins linéaire dans l'épaisseur :

$$\begin{aligned} \gamma_{33} &\simeq -\frac{D^{33ij}}{D^{3333}} \gamma_{ij} \\ \alpha_{33} + \theta^3 \beta_{33} &= -\frac{D^{33ij}}{D^{3333}} (\alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{ij}) \quad (i, j) \neq (3, 3) \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

Dans le cas des théories de coques à 5 ou 6 paramètres, l'équation (I.30) est utilisée pour modifier la loi de comportement linéaire. Cependant, pour les lois de comportement non linéaires, une expression similaire, simple et explicite n'est pas évidente. Comme γ_{33} et $\theta^3 \beta_{33}$ sont du même ordre, Büchter et al. ont montré que si β_{33} est nul, ceci implique une erreur relative de l'ordre de ν^2 pour les problèmes dominés par la flexion [17] [9].

I.4.4 Une méthode mixte basée sur le concept EAS

Les formulations de coque en déplacement peuvent présenter dans certaines situations des problèmes numériques connus sous le nom de verrouillage. En effet, ce dernier se présente sous forme d'un verrouillage de cisaillement, de membrane ou encore volumétrique. Le verrouillage de cisaillement apparaît dans les structures minces en flexion pure; il se traduit par une sur-estimation de l'énergie de cisaillement transverse lorsque la discrétisation ne permet pas de satisfaire les conditions cinématiques de Kirchhoff. Le verrouillage de membrane intervient dans ces structures si les effets de flexion et ceux de membrane ne sont pas découplés. Le verrouillage volumétrique, quant à lui, peut survenir lorsque le matériau est presque incompressible [75] [76] [46]. Pour éviter ces problèmes numériques qui traduisent le désaccord entre la théorie de coque utilisée et les fonctions de forme qui servent à l'interpolation nodale, plusieurs chercheurs ont présenté des techniques basées, pour la plupart, sur les formulations mixtes. En effet, une ou plusieurs variables supplémentaires (contraintes, déformations incompatibles...) sont ajoutées au champ de déplacement. Généralement, ces variables n'assurent pas de continuité inter-éléments, ce qui permet de les éliminer au niveau élémentaire par condensation des équations du problème [58] [59] [4].

Parmi ces méthodes, nous pouvons citer la formulation d’Hellinger-Reissner (H.R.) basée sur l’approximation à la fois du champ de déplacement et celui des contraintes. Notons aussi le concept ANS (Assumed Natural Strain), proposé par Dvorkin et Bathe en 1984 [37]. Cette méthode suggère de calculer les déformations de cisaillement transverse en des points particuliers de l’élément afin d’éviter le verrouillage en cisaillement; elle permet de ne pas ajouter de variables supplémentaires dans le modèle. Vient ensuite la méthode EAS (Enhanced Assumed Strain) proposée par Simo et Rifai en 1990 [72]. Cette dernière est basée sur la formulation de Hu-Washizu; son principe est simple, il s’agit d’ajouter une variable supplémentaire de déformation incompatible avec le déplacement. Le champ de déformation γ s’écrit alors sous la forme suivante :

$$\gamma = Bu + \tilde{\gamma} \tag{I.31}$$

où $Bu = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)$ et $\tilde{\gamma}$ désignent respectivement la partie compatible de la déformation et celle ajoutée (incompatible). Une équation supplémentaire introduit une condition d’orthogonalité entre le champ de contraintes S et celui de la déformation additionnelle. Cette condition se traduit par la relation suivante :

$$\int_v {}^t S : \tilde{\gamma} \, dv = 0 \tag{I.32}$$

Les auteurs ont montré que ce principe englobe la méthode basée sur les modes de déplacement incompatible. Dans Andelfinger et Ramm [4] et Yeo et Lee [83] nous trouvons quelques éléments mixtes avec une étude sur l’équivalence entre les formulations E.A.S. et H.R.

I.4.5 Introduction de β_{33} par le concept EAS

Si la condensation de la loi de comportement n’est pas faisable (exemple : loi de comportement non linéaire), il est nécessaire d’introduire un paramètre supplémentaire dans la formulation. Dans le but de choisir une procédure numérique, Büchter et al. [19] ont proposé d’introduire une variable additionnelle de déformation. Comme

le gradient de cette dernière n'apparaît pas dans la formulation, elle pourra être éliminée au niveau élémentaire, c'est-à-dire que la taille des équations globales d'origine restera inchangée.

Le point de départ de cette formulation est la fonctionnelle de Hu-Washizu qui s'écrit, pour un problème 3-D, en fonction du champ de déplacement u , de la déformation totale γ et du champ de contraintes S :

$$\Pi_{HW}(u, \gamma, S) = \int_v \frac{1}{2} {}^t\gamma : D : \gamma \, dv - \int_v {}^tS : (\gamma - Bu) \, dv - \lambda P_e(u) \quad (\text{I.33})$$

Si nous introduisons une déformation $\tilde{\gamma}$ à l'aide du concept E.A.S., c'est-à-dire une déformation incompatible avec le champ de déplacement et que nous choisissons, par construction, orthogonale au champ des contraintes S :

$$\tilde{\gamma} = \gamma - Bu \quad (\text{I.34})$$

$$\int_v {}^tS : \tilde{\gamma} \, dv = 0 \quad (\text{I.35})$$

alors la fonctionnelle (I.33) se réduit à :

$$\Pi_{EAS}(u, \tilde{\gamma}) = \int_v \frac{1}{2} {}^t(Bu + \tilde{\gamma}) : D : (Bu + \tilde{\gamma}) \, dv - \lambda P_e(u) \quad (\text{I.36})$$

Le champ des contraintes n'apparaît plus explicitement dans la nouvelle formulation. Le terme de déformation β_{33} , qui était nul à cause des hypothèses cinématiques, est maintenant remplacé par $\tilde{\beta}_{33}$ non nul et il est incorporé dans la déformation additionnelle $\tilde{\gamma}$, ce qui permet d'obtenir une variation linéaire du champ de déformation à travers l'épaisseur :

$$\tilde{\gamma} = \theta^3 \tilde{\beta}_{33} g^3 \otimes g^3 \quad \text{avec} \quad \tilde{\beta}_{33} = \tilde{\beta}_{33}(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{I.37})$$

La condition d'orthogonalité sera respectée si S^{33} est constant à travers l'épaisseur [19] :

$$\int_A \left[\int_{-\frac{h_0}{2}}^{+\frac{h_0}{2}} \mu S^{33} \theta^3 \tilde{\beta}_{33} \, d\theta^3 \right] dA = 0 \quad (\text{I.38})$$

La forme variationnelle de l'équation (I.36) permet d'écrire les conditions d'équilibre et de compatibilité sous la forme suivante :

$$\int_v {}^t \delta B u : D : (B u + \tilde{\gamma}) dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \quad (I.39)$$

$$\int_v {}^t \delta \tilde{\gamma} : D : (B u + \tilde{\gamma}) dv = 0$$

I.4.6 Discrétisation par éléments finis et écriture matricielle

Dans la section précédente, nous avons rappelé une formulation de coque basée sur le concept des éléments dégénérés qui a été proposé pour la première fois par Ahmad et al. en 1971 [2]. Ce concept permet de partir d'une formulation tridimensionnelle quelconque et d'appliquer les hypothèses de coque au niveau de la discrétisation. Nous utilisons une discrétisation usuelle d'un élément quadrilatéral isoparamétrique à huit noeuds avec intégration réduite.

$$x = \sum_{k=1}^n N^k r^k + \theta^3 N^k a_3^k \quad (I.40)$$

$$u = \sum_{k=1}^n N^k v^k + \theta^3 N^k w^k \quad (I.41)$$

où N^k désignent les fonctions de forme; r^k , a_3^k , v^k et w^k sont des variables nodales interpolées via les fonctions de forme classiques des éléments quadrilatéraux à huit noeuds; k indique le numéro du noeud et n désigne le nombre de noeuds de l'élément qui vaut 8 pour la formulation considérée dans cette étude. En représentant les valeurs aux noeuds de v et w par le vecteur q , le vecteur déplacement u , sa partie virtuelle δu et son gradient $\theta(u)$ se trouvent liés à q et δq comme suit :

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad \{\delta u\} = [N]\{\delta q\} \quad \{\theta(u)\} = [G]\{q\} \quad (I.42)$$

où $[N]$ est la matrice des fonctions de forme et $[G]$ est la matrice des gradients de ces fonctions.

La déformation de Green-Lagrange qui représente la partie compatible non linéaire de la déformation totale est exprimée dans la base covariante sous la forme suivante :

$$\gamma_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta^i} g_j + \frac{\partial u}{\partial \theta^j} g_i + \frac{\partial u}{\partial \theta^i} \frac{\partial u}{\partial \theta^j} \right) \quad (\text{I.43})$$

avec g_i représentant les vecteurs de la base covariante. On peut séparer le tenseur de déformation en une partie linéaire $\gamma^l(u)$ et une autre partie non linéaire $\gamma^{nl}(u, u)$ que nous pouvons écrire sous forme matricielle suivante :

$$\gamma^l = [R]\{\theta\} = [R][G]\{q\} \quad (\text{I.44})$$

$$\gamma^{nl} = \frac{1}{2}[A]\{\theta\} = \frac{1}{2}[A][G]\{q\} \quad (\text{I.45})$$

La déformation virtuelle s'écrit de la manière suivante :

$$\delta\gamma = [R] \delta\{\theta\} + \frac{1}{2} \delta[A] \{\theta\} + \frac{1}{2}[A] \delta\{\theta\} \quad (\text{I.46})$$

Nous pouvons vérifier que : $\delta[A] \{\theta\} = [A] \delta\{\theta\}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\delta\gamma = ([R] + [A]) \delta\{\theta\} = ([R] + [A]) [G] \delta\{q\} = [\bar{B}] \delta\{q\} \quad (\text{I.47})$$

où $[R]$, $[A(q)]$, $[G]$, $\{q\}$ représentent respectivement la matrice des composantes de la base covariante, la matrice du gradient de déplacement, la matrice du gradient des fonctions de forme et le vecteur des déplacements nodaux. Nous retrouvons les mêmes écritures dans (Zienkiewicz and Taylor [85], Cochelin et al. [27]), sauf pour la matrice $[R]$ qui est due à la non orthogonalité de la base considérée dans cette formulation.

La déformation $\tilde{\beta}_{33}$ n'exige aucune continuité inter-éléments. Il n'y a donc aucun intérêt à l'exprimer en termes de variables nodales; on la discrétise sous forme d'un polynôme bilinéaire :

$$\tilde{\beta}_{33} = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \quad (\text{I.48})$$

avec ξ et η qui représentent les coordonnées isoparamétriques. Les paramètres additionnels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ seront éliminés au niveau élémentaire par condensation des

équations d'équilibre et de compatibilité. Ainsi la déformation additionnelle s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\gamma_{33}^{total} = \gamma_{33} + \tilde{\gamma}_{33} \quad \tilde{\gamma}_{33} = \theta^3 \tilde{\beta}_{33} \quad (I.49)$$

$$\{\tilde{\gamma}\} = [B_\alpha] \{\alpha\}$$

Toutes les matrices introduites dans cette section sont explicitées dans l'annexe (A).

I.4.7 Matrice de rigidité tangente, vecteur résidu et procédure itérative

L'approximation par éléments finis mixtes relative à la formulation variationnelle (I.39) nous permet d'écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \bigwedge_{e=1}^{NbElm} [f_{int}^e(u_e, \alpha_e) + f_{ext}^e] = 0 \\ R_\alpha^e(u_e, \alpha_e) = 0 \end{cases} \quad (I.50)$$

où \bigwedge est l'opérateur d'assemblage des éléments finis, f_{int}^e et f_{ext}^e désignent respectivement les vecteurs élémentaires des forces intérieures et extérieures. L'indice 'e' représente le numéro de l'élément, il varie de 1 au nombre total des éléments de la structure (NbElm). Le système (I.50) représente la forme discrétisée de la condition d'équilibre global de la structure et le résidu relatif à la compatibilité des déformations à respecter au niveau élémentaire. Les vecteurs f_{int}^e et R_α^e s'écrivent sous la forme suivante (voir [85]) :

$$\begin{cases} f_{int}^e(u, \alpha) = \int_v {}^t[\overline{B}] \{S\} dv \\ R_\alpha^e(u, \alpha) = \int_v {}^t[B_\alpha] \{S\} dv \end{cases} \quad (I.51)$$

où $\{S\} = [D] (([R] + \frac{1}{2}[A])[G]\{q\} + [B_\alpha]\{\alpha\})$ est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

On se propose de résoudre le problème non linéaire (I.50) par rapport aux variables nodales de déplacement q et aux paramètres de la déformation ajoutée α en utilisant une procédure itérative habituelle. Pour ce faire, nous linéarisons le problème (I.50) et à l'itération (i) , ce dernier s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bigwedge_{e=1}^{NbElm} [f_{int}^{e(i)} + [K_{uu}^{(i)}]\Delta q_e + {}^t[K_{\alpha u}^{(i)}]\Delta \alpha_e + f_{ext}^{e(i)} + \Delta f_{ext}^e] = 0 \\ R_e^{(i)} + [K_{\alpha u}^{(i)}]\Delta q_e + [K_{\alpha \alpha}^{(i)}]\Delta \alpha_e = 0 \end{cases} \quad (I.52)$$

Dans le but d'obtenir un problème formulé uniquement en déplacement q , nous allons condenser les équations du système (I.52). Pour cela, l'équation linéarisée (I.52)₂ peut être résolue au niveau élémentaire :

$$\Delta\alpha_e = -[K_{\alpha\alpha}^{(i)}]^{-1}(R_e^{(i)} + [K_{\alpha u}^{(i)}]\Delta q_e) \quad (\text{I.53})$$

Si nous injectons l'équation (I.53) dans (I.52)₁, nous obtenons après assemblage le système suivant :

$$K_T^{(i)} \Delta q = R^{(i)} \quad (\text{I.54})$$

avec

$$K_T^{(i)} = \bigwedge_{e=1}^{NbElm} [K_{uu} - {}^t K_{\alpha u} K_{\alpha\alpha}^{-1} K_{\alpha u}]_e^{(i)} \quad (\text{I.55})$$

$$R^{(i)} = \bigwedge_{e=1}^{NbElm} [-f_{ext} - f_{int} + {}^t K_{\alpha u} K_{\alpha\alpha}^{-1} R_\alpha]_e^{(i)}$$

où R est le vecteur résidu global et K_t est la matrice globale de rigidité tangente.

Une fois le système (I.54) résolu, nous actualisons les déplacements nodaux $q_e^{(i+1)} = q_e^{(i)} + \Delta q_e$ et les paramètres de déformation additionnelle $\alpha_e^{(i+1)} = \alpha_e^{(i)} + \Delta\alpha_e$.

Les matrices élémentaires intervenant dans la rigidité tangente s'écrivent comme suit :

$$K_{uu} = \int_v {}^t [\bar{B}][D][\bar{B}] dv + \int_v {}^t [G][M][G] dv \quad (\text{I.56})$$

$$K_{\alpha u} = \int_v {}^t [B_\alpha][D][\bar{B}] dv \quad (\text{I.57})$$

$$K_{\alpha\alpha} = \int_v {}^t [B_\alpha][D][B_\alpha] dv \quad (\text{I.58})$$

avec $\int_v {}^t [G][M][G] dv$ représentant la matrice de rigidité géométrique, $[G]$ la matrice des dérivées des fonctions de forme et $[M]$ la matrice des contraintes initiales (voir annexe (A)).

I.4.8 Applications

Nous présentons dans cette section quelques exemples de validation de l'élément étudié précédemment. Dans le cadre d'une formulation lagrangienne totale, nous comparons les courbes de réponse en comportement non linéaire géométrique de cet élément avec celles de l'élément DKT18. Les procédures de résolution utilisées sont

basées sur le processus itératif de Newton-Raphson avec un pilotage en longueur d'arc.

Les deux premiers exemples concernent un toit mince et un autre épais soumis à l'action d'une charge ponctuelle. Ces exemples sont souvent cités dans la littérature. Le troisième exemple présente une poutre en grandes rotations. Le but de ce test est de mettre en valeur la prise en compte des grandes rotations par l'élément de Büchter en utilisant une formulation lagrangienne totale, mais ne remettant pas en cause les qualités de l'élément DKT18.

Toit mince et toit épais sous charge ponctuelle

Cet exemple est un cas classique de flambage de coque. Il couple les effets de résistance de flexion et de membrane et présente des points limites, un claquage et éventuellement des points de bifurcations [71][23]. Les calculs sont effectués pour deux épaisseurs différentes $h_1 = 6.35 \text{ mm}$ et $h_2 = 12.7 \text{ mm}$.

La structure de la coque présente un toit peu profond dont les caractéristiques géométriques et du matériau sont données sur la figure (I.6). Comme le problème est symétrique, seul un quart de la structure est discrétisé.

Pour valider l'implémentation de l'élément présenté dans ce chapitre, nous comparons les réponses charge / déplacement du centre de la coque avec celles obtenues en utilisant l'élément DKT18 qui a été proposé par Batoz et al. [11] et qui est largement implémenté dans les codes de calcul par éléments finis. Il s'agit d'un élément triangulaire à facette plane à 3 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud. Sa formulation est basée sur la combinaison de l'élément CST (Constant Strain Triangle) pour la partie membrane, de l'élément DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) pour la partie flexion et de termes fictifs pour l'énergie de rotation autour de θ_z .

Nous utilisons un maillage régulier de 200 éléments triangulaires pour l'élément DKT18 (726 ddl) et deux maillages de 9 et 36 éléments de Büchter (240 ddl, 798 ddl).

La figure (I.7) décrit le déplacement vertical du centre M du toit mince et celui

du point B situé au milieu du bord libre en fonction de la charge appliquée.

Sur les figures (I.8) et (I.9), nous avons une comparaison de la réponse donnant la charge en fonction du déplacement entre l'élément étudié dans ce chapitre et l'élément DKT18. Nous obtenons des résultats satisfaisants, et nous pouvons remarquer que pour le cas de la coque épaisse, les résultats de l'élément DKT18 se dégradent car on atteint les limites du modèle des coques minces qui néglige les déformations de cisaillement transverse. Voir sur le même sujet le travail de Carrive-Bédouani et al. [23].

Poutre en grandes rotations

Cet exemple concerne les grandes rotations d'une poutre droite dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes : longueur $L = 10. mm$, largeur $l = 1. mm$ et épaisseur $h = 0.1 mm$. Le module d'Young $E = 10^5 Mpa$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0$. La structure est encastree sur un bout et soumise à la charge uniforme $P = 1. N$ (voir la figure I.11).

Pour la validation numérique de l'implémentation de l'élément proposé dans ce chapitre, nous faisons un même calcul avec trois éléments différents : celui détaillé dans ce chapitre, le DKT18 et un élément de coque à huit noeuds utilisant des matrices de rotation (proposé par Abaqus). En ce qui concerne les deux premiers éléments, une formulation lagrangienne totale est utilisée, par contre le troisième élément est basé sur une formulation lagrangienne réactualisée à chaque pas. La structure est discrétisée avec 40 éléments DKT18 et 5 éléments dans les autres cas.

La figure (I.12) présente les courbes de réponse charge/déplacement d'un point du bord où la force est appliquée. Nous constatons que les éléments à huit noeuds décrivent la même courbe, ce qui permet simplement de confirmer la validité de l'élément de Büchter. La courbe de DKT18 suit la bonne branche pour les petits déplacements et s'éloigne démesurément de la bonne solution lorsque le déplacement devient important. Les résultats de cet élément DKT auraient pu être corrects si ce dernier avait

été appliqué avec une formulation adoptant une réactualisation de la géométrie.

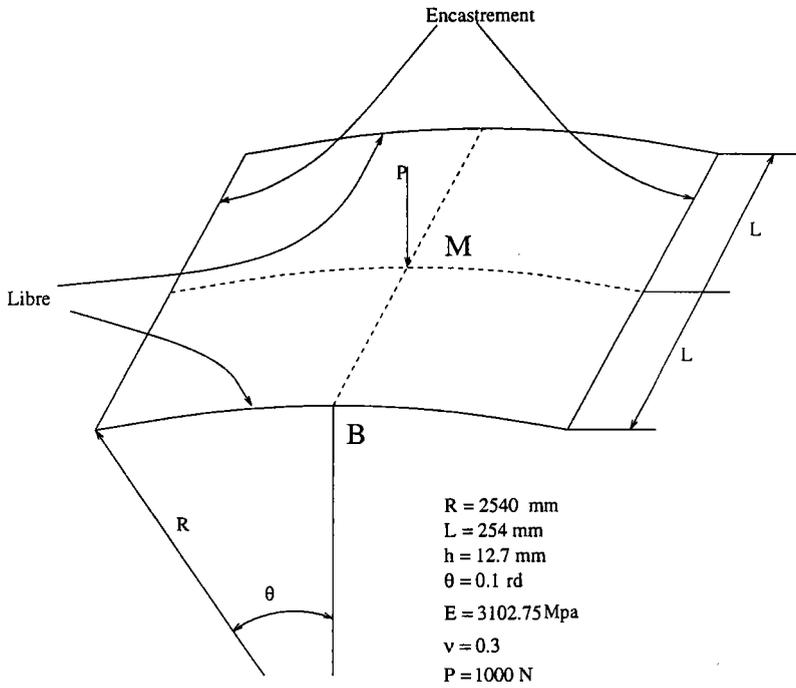


FIG. I.6 – Toit : description géométrique

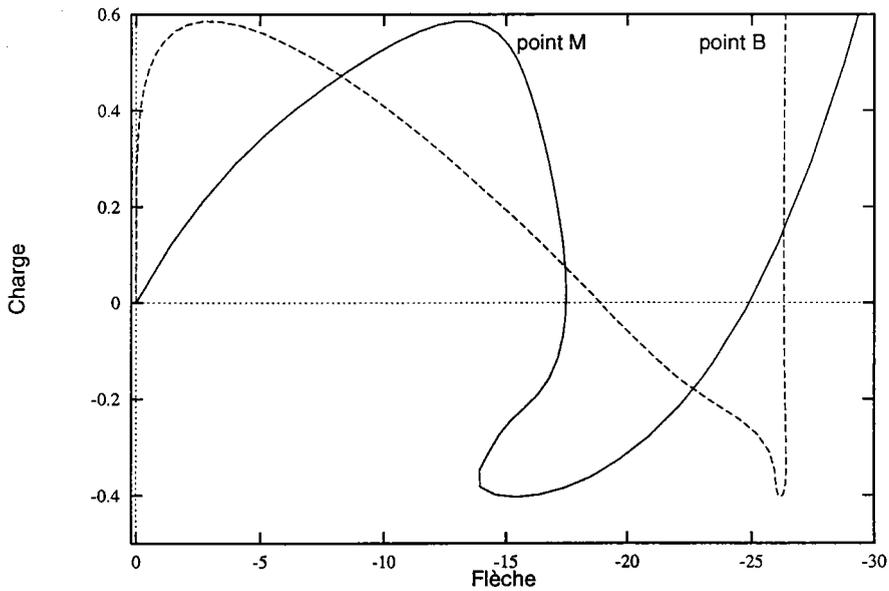


FIG. I.7 – Toit : courbes charge / déplacement du point central M et du point B situé au milieu du bord libre (toit mince $h=6.35$)

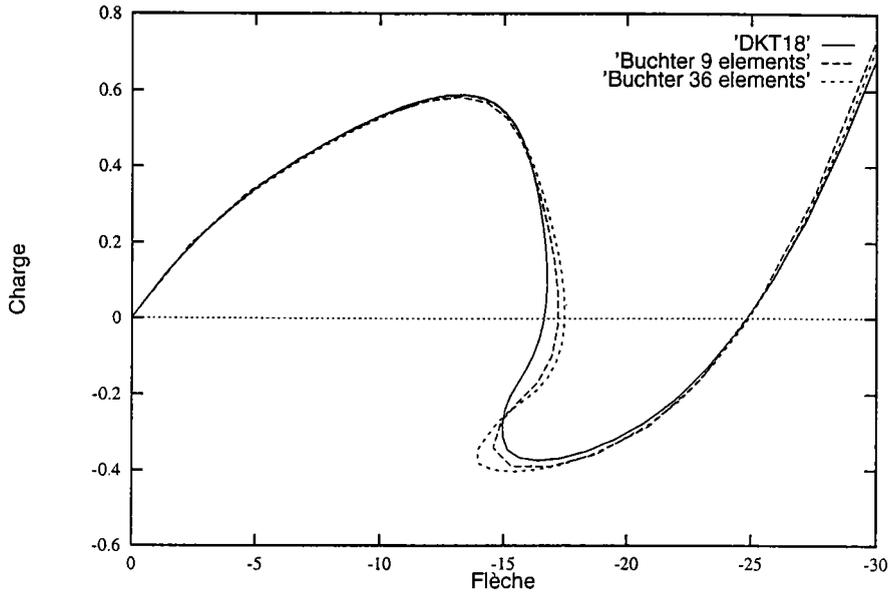


FIG. I.8 – Toit : courbes charge/déplacement du point central M , comparaison entre l'élément DKT18 et celui proposé par Büchter (toit mince $h=6.35$)

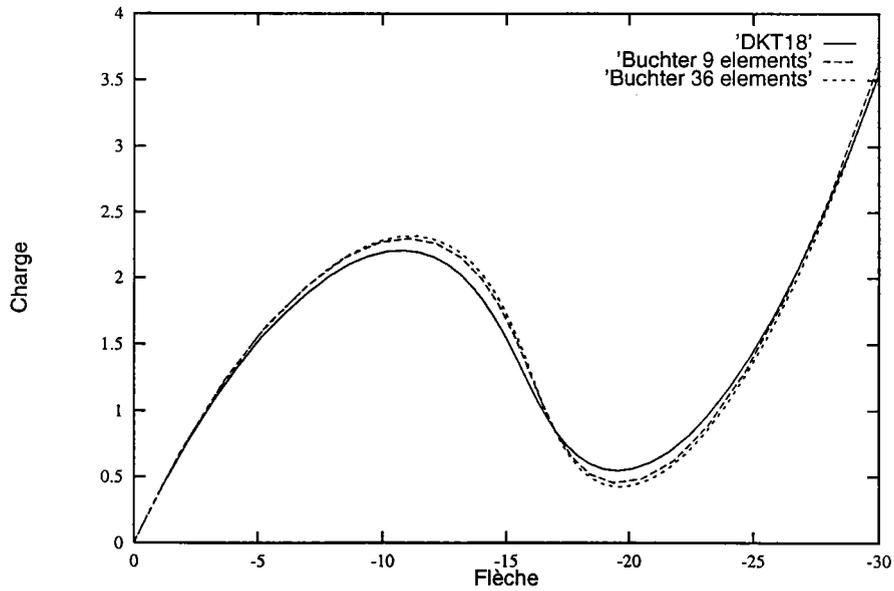


FIG. I.9 – Toit : courbes charge/déplacement, du point central M , comparaison entre l'élément DKT18 et celui proposé par Büchter (toit épais $h=12.7$)

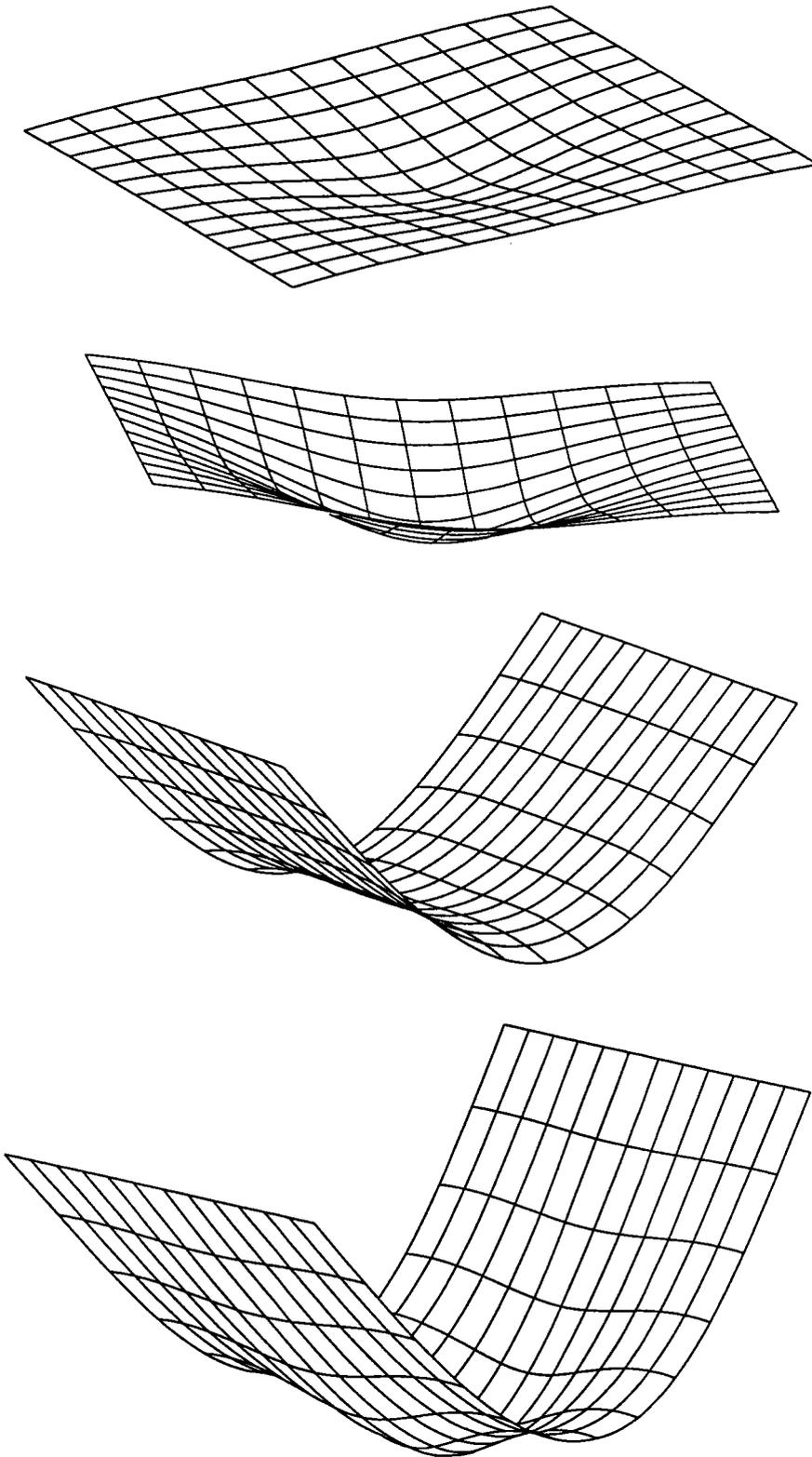


FIG. I.10 - Toit en configuration déformée pour différents niveaux de chargement ($h = 6.35$ mm). Les images sont tournées dans l'espace pour mieux percevoir la déformée

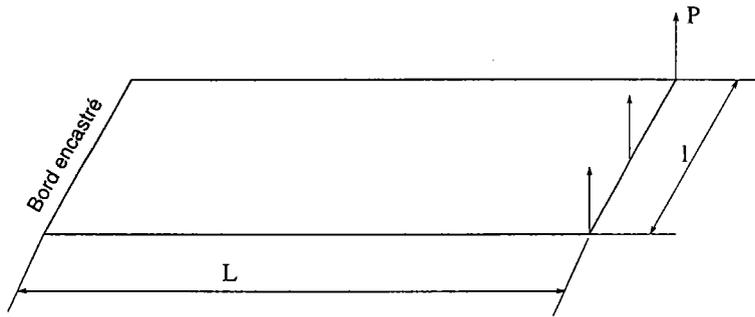


FIG. I.11 – Description géométrique de la poutre

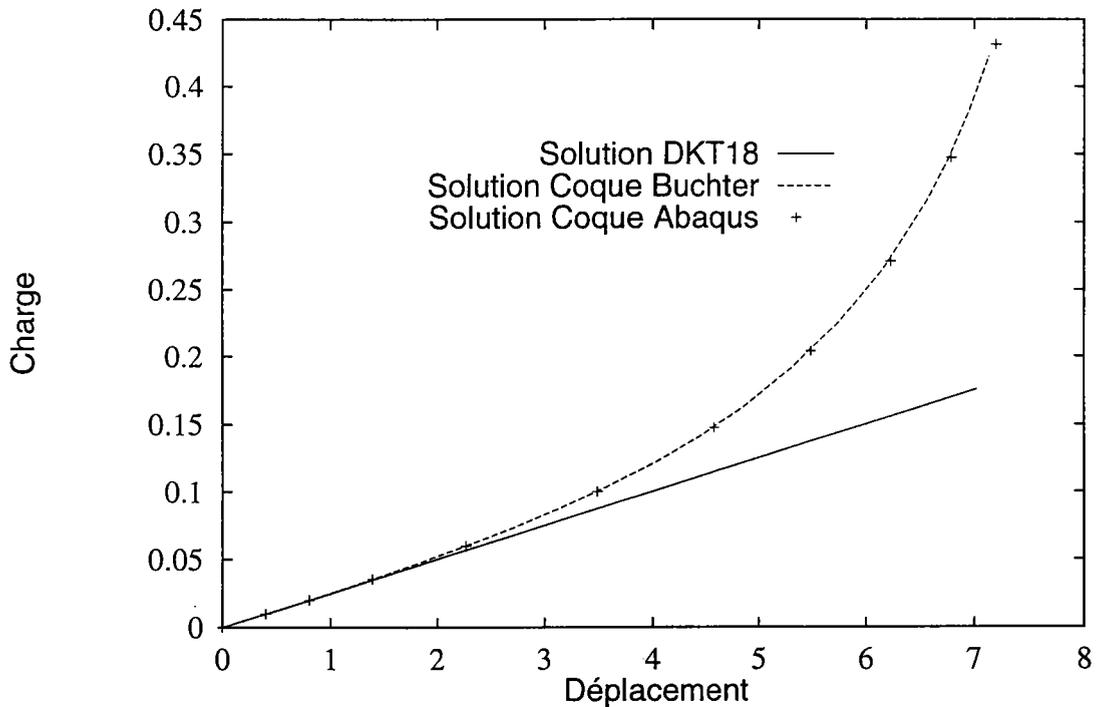


FIG. I.12 – Courbe charge/déplacement vertical d'un point situé au bord chargé

I.4.9 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons introduit une formulation de coque à géométrie exacte et bien adaptée aux problèmes exigeant des grandes rotations.

Quelques exemples ont permis de valider l'implémentation de l'élément de coque étudié dans ce chapitre ainsi que ses qualités dans le cadre des grandes rotations.

En outre, nous avons noté que ce modèle n'utilise pas de matrice de rotation et que toutes ses variables nodales sont de type déplacement. Cette propriété permettra d'introduire les algorithmes asymptotiques numériques de façon simple et optimale. Ce sera le sujet du chapitre suivant qui traitera en détail ces algorithmes asymptotiques adaptés à notre formulation de coque. Plusieurs tests seront présentés, ils renforceront la validation numérique effectuée dans la section précédente consacrée aux applications.

CHAPITRE II

Algorithmes Asymptotiques Numériques pour les coques élastiques en grandes rotations

II.1 Introduction

Dans le présent chapitre nous présenterons une adaptation des développements asymptotiques numériques pour la formulation de coque que nous avons rappelée dans le chapitre précédent. Nous avons vu que cette formulation n'utilise pas de matrice de rotation et que toutes ses variables sont de type déplacement. Ceci nous évite le problème de la réactualisation des grandes rotations. De plus, grâce au degré réduit de la non-linéarité, nous pouvons appliquer les mêmes algorithmes que ceux développés pour les formulations de coques de Von Karman [7]. Nous nous limitons, dans ce chapitre, au cas d'une loi de comportement linéaire, ce qui restreint nos applications aux problèmes en petites déformations sachant qu'ils englobent les problèmes en grands déplacements et grandes rotations.

II.2 Une formulation tridimensionnelle à trois champs

La formulation de coque considérée dans la présente étude est basée sur une formulation tridimensionnelle. Les inconnues sont le champ de déplacement u , la déformation de Green-Lagrange γ et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff S . Les équations du problème sont équivalentes à la stationnarité de la fonctionnelle

de Hu-Washizu qui s'écrit comme suit:

$$\Pi_{HW}(u, \gamma, S) = \int_v \left\{ \frac{1}{2} ({}^t\gamma : D : \gamma) - {}^tS : (\gamma - Bu) \right\} dv - \lambda P_e(u) \quad (\text{II.1})$$

où D est le tenseur d'élasticité du matériau, $\lambda P_e(u)$ est le travail des forces extérieures, le scalaire λ est un paramètre de charge et Bu est la partie compatible de la déformation, elle est quadratique par rapport au champ de déplacement. La stationnarité de la fonctionnelle par rapport aux trois champs indépendants donne respectivement l'équation des travaux virtuels, l'équation de comportement ainsi que la relation de compatibilité liant le champ des déformations à celui des déplacements $\gamma = Bu$.

Dans la présente étude, nous nous intéressons à l'élément de coque proposé par Büchter et al.(1994) [19] avec une variation linéaire du déplacement dans l'épaisseur comme dans le cas des formulations conventionnelles de coque. En revanche, il inclut une variable supplémentaire qui représente une variation linéaire de la déformation γ_{33} dans l'épaisseur. Cette variable permet, en effet, d'utiliser une loi de comportement tridimensionnelle sans condensation mais aussi de prendre en compte les effets des grandes déformations. Elle est introduite au moyen du concept EAS de Simo et Rifai [72]. Le principe consiste à introduire une déformation additionnelle $\tilde{\gamma}$ qui ne dépend pas du déplacement et qui doit être orthogonale au champ des contraintes:

$$\gamma - Bu = \tilde{\gamma} \quad , \quad \int_v ({}^tS : \tilde{\gamma}) dv = 0 \quad (\text{II.2})$$

De ce fait, le champ des contraintes est éliminé, permettant de réduire la fonctionnelle à trois champs à une nouvelle formulation avec deux champs seulement, à savoir le champ de déplacement et celui de la déformation additionnelle. La fonctionnelle peut s'écrire alors sous la forme suivante:

$$\Pi_{EAS}(u, \tilde{\gamma}) = \int_v \left\{ \frac{1}{2} ({}^t(Bu + \tilde{\gamma}) : D : (Bu + \tilde{\gamma})) \right\} dv - \lambda P_e(u) \quad (\text{II.3})$$

Les conditions de stationnarité associées à l'équation (II.3) nous donnent l'équation d'équilibre et l'équation de compatibilité qui est équivalente à la condition d'or-

thogonalité:

$$\delta \Pi_{EAS}(u, \tilde{\gamma}) = \int_v {}^t(\delta B u + \delta \tilde{\gamma}) : D : (B u + \tilde{\gamma}) dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \quad (\text{II.4})$$

La présente formulation tridimensionnelle n'est pas différente du problème initial, car la solution exacte correspond à $\tilde{\gamma} = 0$. L'intérêt de la formulation (II.4) apparaît lorsqu'on introduit l'approximation (I.21) du champ de déplacement, comme c'est le cas avec les modèles habituels de coque. Comme nous le savons bien, un tel champ de déplacement est en contradiction avec l'hypothèse de contrainte normale nulle dans l'épaisseur, car il annule la dilatation de l'épaisseur. C'est pourquoi les formulations classiques de coque condensent la loi de comportement 3-D et calculent la dilatation de l'épaisseur à partir de la relation de comportement en utilisant l'hypothèse de contrainte nulle à travers l'épaisseur. Avec l'élément de coque choisi pour notre étude, la déformation additionnelle $\tilde{\gamma}$ est introduite de manière à pouvoir annuler approximativement cette contrainte normale, ce qui nous permet d'éviter la condensation de la loi de comportement 3-D.

L'équation (II.4) est celle habituellement utilisée pour les modèles d'éléments finis en déplacement. Cependant, elle ne représente pas la meilleure formulation pour appliquer la technique de perturbation parce que l'équation d'équilibre est cubique par rapport au champ de déplacement u . La meilleure efficacité numérique est obtenue en utilisant une formulation variationnelle écrite dans un cadre quadratique, ce qui est facilement réalisable en réintroduisant le champ des contraintes et la loi de comportement comme dans les articles [7] [27].

Nous introduisons une nouvelle fonctionnelle qui s'écrit en fonction des trois inconnues $(u, S, \tilde{\gamma})$ comme suit:

$$\int_v \{ {}^t S : (B u + \tilde{\gamma}) - \frac{1}{2} {}^t S : D^{-1} : S \} dv - \lambda P_e(u) \quad (\text{II.5})$$

De cette façon, le problème variationnel s'écrit sous la forme suivante:

$$\int_v \{ {}^t \delta S : [(B u + \tilde{\gamma}) - D^{-1} : S] + {}^t S : (\delta(B u) + \delta \tilde{\gamma}) \} dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \quad (\text{II.6})$$

Dans l'équation (II.6), nous pouvons distinguer l'équation du travail virtuel et celle de compatibilité comme dans (II.4), ainsi que la relation de comportement:

$$S = D : (Bu + \tilde{\gamma})$$

où la déformation ($Bu = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)$) est complétée par un terme non compatible avec le champ de déplacement.

Nous pouvons, maintenant, écrire l'équation (II.6) sous la forme simple suivante:

$$R(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - \lambda F = 0 \quad (\text{II.7})$$

où:

$U = \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\gamma} \\ S \end{pmatrix}$ est une inconnue mixte, $L(\cdot)$ est un opérateur linéaire symétrique, $Q(\cdot, \cdot)$ est un opérateur quadratique, F est le vecteur des forces extérieures et R le vecteur résidu.

$$\langle L(U), \delta U \rangle = \int_v \{ {}^t \delta S : [(\gamma_l(u) + \tilde{\gamma}) - D^{-1} : S] + {}^t S : (\gamma_l(\delta u) + \delta \tilde{\gamma}) \} dv$$

$$\langle Q(U, U), \delta U \rangle = \int_v \{ {}^t \delta S : \gamma_{nl}(u, u) + {}^t S : 2\gamma_{nl}(u, \delta u) \} dv$$

$$\langle F, \delta U \rangle = P_e(\delta u)$$

L'opérateur bilinéaire $Q(U_1, U_2)$ associé à l'opérateur quadratique $Q(U, U)$ est donné par la forme suivante:

$$\langle Q(U_1, U_2), \delta U \rangle = \int_v \{ {}^t S_1 : \gamma_{nl}(u_2, \delta u) + {}^t S_2 : \gamma_{nl}(u_1, \delta u) + {}^t \delta S : \gamma_{nl}(u_1, u_2) \} dv$$

Nous voulons insister sur le fait que la motivation principale d'introduire dans la formulation le champ des contraintes et la relation de comportement se justifie par la transformation du problème variationnel en une forme quadratique simple (II.7); celle-

ci est souhaitable pour les développements asymptotiques. Nous n'avons nullement l'intention d'utiliser des éléments finis de type mixte dans l'étape de discrétisation.

II.3 Un algorithme asymptotique numérique

Nous proposons dans cette section de résoudre le problème non linéaire (II.7) par une méthode similaire à celle utilisée pour les coques en rotations modérées (voir les articles [26][27]). Nous commençons par l'application des techniques de perturbation qui nous permettent de transformer le problème non linéaire en une séquence de problèmes linéaires. Ces derniers peuvent être établis jusqu'à un ordre p quelconque où nous procédons à une condensation du champ des contraintes afin d'utiliser des éléments finis classiques en déplacement. Puis, les problèmes résultants sont discrétisés et résolus par la méthode des éléments finis. Comme tous ces problèmes ont le même opérateur tangent, nous obtenons alors une partie de la branche solution en n'inversant qu'une seule matrice de rigidité tangente. Une procédure de continuation est proposée pour décrire toute la branche solution.

II.3.1 Technique de perturbation

Cette méthode consiste à chercher la courbe solution du problème sous forme d'un développement asymptotique au voisinage d'une solution initialement connue (U_0, λ_0) . Si nous injectons ces développements dans les équations du problème (II.7), nous obtenons une suite récurrente de problèmes linéaires qui admettent tous le même opérateur tangent. Dans la présente formulation, le vecteur mixte U et le paramètre de charge λ sont écrits sous forme de séries entières par rapport au paramètre "a" que nous pouvons choisir comme la projection de $(u - u_0, \lambda - \lambda_0)$ sur la direction

tangente (u_1, λ_1) :

$$\begin{aligned}
 U(a) &= U_0 + aU_1 + a^2U_2 + \dots = \begin{pmatrix} u_0 \\ \tilde{\gamma}_0 \\ S_0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} u_1 \\ \tilde{\gamma}_1 \\ S_1 \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ \tilde{\gamma}_2 \\ S_2 \end{pmatrix} + \dots \\
 \lambda(a) &= \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + a^3\lambda_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{II.8}$$

$$a = \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 \tag{II.9}$$

Le choix du paramètre "a" est basé sur la même stratégie que celle adoptée dans les méthodes itératives. La forme (II.9) correspond à une combinaison de déplacement et de charge comme la longueur d'arc imposée dans le cas des algorithmes itératifs. Nous aurions pu aussi identifier ce paramètre à un incrément de charge ou de déplacement [27]. Maintenant, si nous injectons les équations (II.8) dans (II.7) et (II.9), et si nous identifions les termes obtenus suivant la puissance de "a", nous obtenons une séquence de problèmes linéaires pour différents ordres:

ordre 1:

$$\begin{cases} L_t(U_1) = \lambda_1 F \\ \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1 \end{cases} \tag{II.10}$$

ordre 2:

$$\begin{cases} L_t(U_2) = \lambda_2 F - Q(U_1, U_1) \\ \langle u_2, u_1 \rangle + \lambda_2 \lambda_1 = 0 \end{cases} \tag{II.11}$$

ordre p:

$$\begin{cases} L_t(U_p) = \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) \\ \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \tag{II.12}$$

L'opérateur tangent ne dépendant que de la solution initiale est désigné par $L_t(\cdot) = L(\cdot) + 2Q(U_0, \cdot)$. C'est un opérateur symétrique puisque la formulation variationnelle

(II.6) dérive d'une fonctionnelle.

A l'ordre p , le problème est formulé comme suit:

Trouver le paramètre λ_p et le vecteur mixte $U_p \begin{pmatrix} u_p \\ \tilde{\gamma}_p \\ S_p \end{pmatrix}$

vérifiant:

$$L_t(U_p) = \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r})$$

$$\langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0$$

II.3.2 Condensation du champ des contraintes

Nous allons maintenant réécrire en détail le problème à l'ordre p en termes de $u_p, \tilde{\gamma}_p, S_p$. En utilisant la notation introduite au début de ce chapitre, nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \int_v \{ {}^t \delta S : [(\gamma_l(u_p) + \tilde{\gamma}_p) - D^{-1} : S_p] + {}^t S_p : (\delta \tilde{\gamma} + \gamma_l(\delta u)) \} dv + \\ & \int_v \{ {}^t \delta S : 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + {}^t S_0 : 2\gamma_{nl}(u_p, \delta u) + {}^t S_p : 2\gamma_{nl}(u_0, \delta u) \} dv = \quad (II.13) \\ & \langle \lambda_p F, \delta u \rangle - \int_v \left\{ \sum_{r=1}^{p-1} {}^t \delta S : \gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) + \sum_{r=1}^{p-1} {}^t S_r : 2\gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) \right\} dv \end{aligned}$$

L'équation (II.13) est équivalente aux équations suivantes, c'est-à-dire l'équation d'équilibre (II.14), la relation de comportement (II.15) et l'équation de compatibilité (II.16):

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \int_v \{ {}^t S_p : [\gamma_l(\delta u) + 2\gamma_{nl}(u_0, \delta u)] + {}^t S_0 : 2\gamma_{nl}(u_p, \delta u) \} dv = \langle \lambda_p F, \delta u \rangle \\ & - \int_v \left\{ \sum_{r=1}^{p-1} {}^t S_r : 2\gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) \right\} dv \quad (II.14) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad S_p = D : [\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + \tilde{\gamma}_p + \sum_{r=1}^{p-1} \gamma_{nl}(u_r, u_{p-r})] \quad (II.15)$$

$$\bullet \quad \int_v {}^t S_p : \delta \tilde{\gamma} dv = 0 \quad (II.16)$$

Dans le but d'appliquer une méthode d'éléments finis où seulement u et $\tilde{\gamma}$ sont inter-

polés, nous remplaçons l'équation (II.15) dans les équations (II.14) et (II.16). Nous obtenons alors deux équations représentant respectivement les conditions d'équilibre et de compatibilité en termes de $u_p, \tilde{\gamma}_p$:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_v \{ {}^t[\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + \tilde{\gamma}_p] : D : [\gamma_l(\delta u) + 2\gamma_{nl}(u_0, \delta u)] \\
 & + {}^tS_0 : 2\gamma_{nl}(u_p, \delta u) \} dv = \langle \lambda_p F, \delta u \rangle - \int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^tS_r : 2\gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) dv \\
 & + \int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^t\gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) : D : [\gamma_l(\delta u) + 2\gamma_{nl}(u_0, \delta u)] dv \quad (II.17)
 \end{aligned}$$

$$\bullet \int_v {}^t[\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + \tilde{\gamma}_p] : D : \delta \tilde{\gamma} dv = - \int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^t\gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) : D : \delta \tilde{\gamma} dv \quad (II.18)$$

Les équations (II.17),(II.18) et (II.15) sont équivalentes à (II.13). Le fait d'utiliser une formulation quadratique permet de simplifier les second membres où une simple sommation apparaît. Si cette formulation était cubique, nous aurions obtenu des doubles sommations aux seconds membres et donc au bout du compte des temps de calcul beaucoup plus importants pour les évaluer. Nous allons maintenant nous intéresser à la présentation de l'élément de coque et à la discrétisation de (II.17) et (II.18).

II.3.3 Discrétisation par éléments finis

Dans la présente section, les équations (II.17) et (II.18) sont discrétisées en utilisant l'élément de coque à géométrie exacte proposé par Büchter et al.(1994) [19]. Les inconnues sont le déplacement de la surface moyenne et celui de son vecteur directeur. Comme la géométrie de la coque est traitée de manière exacte, cette formulation prend en compte les termes quadratiques des déformations de membrane et de flexion. De plus, elle est basée sur les théories classiques de coque en considérant une variation

linéaire du champ de déplacement dans la direction de l'épaisseur ; en revanche, ce modèle enrichit sa théorie à six paramètres par le concept EAS rappelé dans le chapitre I.

L'aspect discrétisation a été détaillé dans la section (I.4.6). Nous rappelons dans la présente section que la déformation additionnelle $\tilde{\gamma}$ est choisie de manière à ce que sa variation soit linéaire dans l'épaisseur et qu'elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{\gamma} = \theta^3 \tilde{\beta}_{33}(\theta^1, \theta^2) g^3 \otimes g^3 \quad (\text{II.19})$$

Cette déformation n'exige aucune continuité inter-élément et elle est discrétisée par un polynôme bilinéaire comme suit :

$$\tilde{\beta}_{33} = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \quad (\text{II.20})$$

$$\{\tilde{\gamma}_{33}\} = [B_\alpha][\alpha] \quad (\text{II.21})$$

où ξ, η sont coordonnées isoparamétriques standards. Les paramètres supplémentaires inconnus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 peuvent être éliminés au niveau élémentaire (voir Büchter et al. 1994).

Nous pouvons réécrire la relation de comportement (II.15) en fonction des variables nodales à l'ordre p sous la forme ci-dessous :

$$\{S_p\} = [D]\{[\bar{B}(q_0)]\{q_p\} + [B_\alpha]\{\alpha_p\} + \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2}[A(q_r)]\{\theta(q_{p-r})\}\} \quad (\text{II.22})$$

L'équation (II.18) est résolue au niveau élémentaire après discrétisation, donnant ainsi les paramètres α_p en fonction des variables nodales q_p :

$$\alpha_p = K_{\alpha\alpha}^{-1}(R_p^\alpha - K_{\alpha u} q_p) \quad (\text{II.23})$$

L'expression de α_p est injectée dans l'équation (II.17) pour obtenir, après discrétisation et assemblage, la forme globale du problème qui s'écrit sous la forme suivante :

$$[K_T]\{q_p\} = \lambda_p F + \bigwedge_{e=1}^{NbElm} (F_p^{nl} - K_{u\alpha} K_{\alpha\alpha}^{-1} R_p^\alpha) \quad (\text{II.24})$$

où K_T est la matrice de rigidité tangente, \wedge désigne l'opérateur d'assemblage des éléments finis, $NbElm$ est le nombre d'éléments de la structure étudiée, F est le vecteur des forces extérieures et le scalaire λ_p désigne le paramètre de charge à l'ordre p . Les seconds membres classiques que nous retrouvons à l'aide des développements asymptotiques sont notés par F_p^{nl} et R_p^α . Ils dépendent des solutions jusqu'à l'ordre $p - 1$ et sont exprimés comme suit:

$$[F_p^{nl}] = - \int_v {}^t[G] \sum_{r=1}^{p-1} {}^t[A(q_{p-r})][S_r] + {}^t[\bar{B}(q_0)][D] \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2} [A(q_{p-r})][\theta(q_r)] dv \quad (II.25)$$

$$[R_p^\alpha] = - \int_v {}^t[B_\alpha][D] \sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2} [A(q_{p-r})][\theta(q_r)] dv \quad (II.26)$$

Notons que la matrice K_T qui nous a permis de construire la rigidité tangente est exactement la même que celle proposée par Büchter et al. (voir section I.4.6) et que les termes nouveaux dans cette écriture sont les vecteurs $[F_p^{nl}]$ et $[R_p^\alpha]$ seulement.

II.4 Procédure de continuation

La méthode que nous avons présentée auparavant nous permet de calculer un grand nombre de termes des séries (II.8), ce qui nous donne une description quantitative de la courbe solution dans un grand voisinage du point de départ. Dans le cas des rotations modérées (Azrar et al.1993 [7], Cochelin et al.1994 [27]), il est établi que le coût de calcul d'un développement asymptotique est équivalent à celui d'un pas de l'algorithme itératif de Newton-Raphson modifié, c'est-à-dire que pour toutes les itérations, on utilise une même matrice de rigidité tangente. Cependant, les séries ont généralement un rayon de convergence fini. Par conséquent, pour décrire toute la branche solution du problème en question, cette méthode doit être appliquée de manière pas à pas. A chaque fin de pas, la valeur maximale du paramètre "a" doit être définie automatiquement en analysant la convergence des séries. Cochelin [25] a proposé deux façons de définir le rayon de validité de ces séries. La première est basée sur la différence de déplacement entre deux ordres successifs qui doit rester petite par

rapport à une valeur donnée ϵ_1 .

$$\text{Domaine de validité: } a_{max} = \left(\epsilon_1 \frac{\|u_1\|}{\|u_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (\text{II.27})$$

Cette façon d'évaluer le rayon de validité est très simple, mais ne garantit pas forcément un bon résidu à la fin de chaque pas considéré. Une deuxième définition de ce rayon a été proposée. Elle est basée, quant à elle, directement sur le vecteur résidu dont l'incrément doit rester inférieur à une valeur ϵ_2 donnée par l'utilisateur. Il est plus convenable de considérer un résidu relatif au lieu du résidu absolu (Vannucci et al. 1996 [80]), ce qui nous permet d'écrire:

$$\text{Domaine de validité: } a_{max} = \left(\epsilon_2 \frac{\lambda \|F\|}{\|F_{p+1}^{nl}\|} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (\text{II.28})$$

Une des originalités de cette méthode est que la longueur du pas est déterminée a posteriori, c'est-à-dire, qu'elle dépend des caractéristiques intrinsèques de la série calculée. De cette manière, en utilisant cette procédure de continuation, l'algorithme asymptotique devient automatique et facile à utiliser par l'opérateur. Le rayon de validité nous permet de limiter la solution asymptotique pour chaque pas de calcul à la fin duquel subsiste un petit résidu qui peut devenir important après un certain nombre de pas. Pour éviter que ce résidu ne devienne significatif, une procédure de correction itérative est déclenchée en utilisant le processus standard de Newton-Raphson chaque fois que le résidu relatif dépasse une valeur ϵ_3 .

Nous avons alors deux critères (II.27) et (II.28) pour définir la longueur du pas et la procédure de continuation dépend de deux paramètres de précision ϵ_1 (ou ϵ_2) et de ϵ_3 . De plus, le calcul de la série dépend évidemment de l'ordre de troncature. Dans la section consacrée aux applications, nous allons voir comment choisir ces paramètres pour optimiser l'efficacité de l'algorithme.

II.5 Discussion et remarques

Dans le cadre de cette étude, la branche solution du problème non linéaire est obtenue pas à pas. A chaque pas, nous déterminons une expression analytique de

la branche sous forme des séries (II.8). Plus précisément, c'est une forme discrète de (II.8) qui est calculée à l'aide de la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes continus. En effet, les variables de sortie pour ce programme sont : les vecteurs q_p et α_p , c'est-à-dire la forme discrète du champ de déplacement u , de la déformation ajoutée $\tilde{\gamma}$ et du champ de contrainte S_p à chaque point de Gauss. En d'autres termes, nous calculons une représentation analytique de la branche solution du modèle éléments finis.

Pour obtenir la meilleure efficacité de l'algorithme, nous avons utilisé différentes formulations et une question évidente se pose alors : tous ces choix de variables et de formulations ont-ils une influence sur le résultat final des calculs ? La réponse est non, et les motifs sont les suivants :

- Dès que le paramètre de développement "a" est défini (ici, équation (II.9)), la représentation en séries (II.8) de la branche solution est unique.
- Si de plus, la discrétisation de la structure est fixée (c'est-à-dire le maillage et le type de l'élément), alors, la forme discrète de (II.8) est aussi unique.

Par conséquent, le choix des variables et de la formulation à tout niveau a été uniquement guidé par des considérations de simplicité et d'efficacité de la méthode. Nous avons débuté par le principe variationnel à trois champs de Hu-Washizu dans le but d'appliquer le concept E.A.S. et d'arriver à la formulation (II.4) avec comme variables u et $\tilde{\gamma}$. Ensuite, nous avons réintroduit les contraintes pour obtenir des non-linéarités quadratiques permettant ainsi une procédure de développement asymptotique très simple (section II.3.1). Après cela, le problème linéaire à trois champs (II.13) écrit à l'ordre p est transformé en une équation d'équilibre (II.17) et une équation de compatibilité (II.18) en fonction des variables u_p et $\tilde{\gamma}_p$ seulement, les contraintes S_p étant données par la relation de comportement (II.15). Finalement, une méthode d'éléments finis classique avec condensation, au niveau élémentaire, de la déformation ajoutée est utilisée.

Cette approche est la façon la plus efficace de calculer les séries pour des ordres de troncature élevés. Le lecteur qui aurait des doutes, est invité à essayer une autre manière de faire, comme par exemple :

- 1- partir des équations locales du problème.
- 2- appliquer la procédure des développements asymptotiques et écrire le problème linéaire à l'ordre p .
- 3- appliquer au problème à l'ordre p la formulation faible de Hu-Washizu.
- 4- appliquer le concept E.A.S. pour conserver uniquement u et $\tilde{\gamma}$ comme variables.
- 5- appliquer la méthode des éléments finis pour résoudre le problème.

Nous retrouvons exactement les équations discrètes (II.24) et (II.22).

Une autre façon de procéder serait :

- 1- partir de la formulation de Hu-Washizu et appliquer le concept E.A.S. pour obtenir (II.4).
- 2- appliquer la méthode des éléments finis pour obtenir un système algébrique d'équations non linéaires par rapport aux vecteurs q et α .
- 3- développer en séries entières q et α par rapport au paramètre de développement "a", et former l'ensemble de problèmes linéaires à chaque ordre en fonction de u_p et $\tilde{\gamma}_p$.

Une fois encore, nous retrouvons (II.24), avec cependant un second membre complexe du fait de la non-linéarité cubique en q .

II.6 Applications

Dans la présente section, nous examinons la validité de l'algorithme précédemment étudié et nous discutons de l'efficacité de la Méthode Asymptotique Numérique en comparaison avec les algorithmes itératifs incrémentaux.

La méthode itérative est considérée comme la référence numérique pour notre présente étude; elle est généralement exécutée par le code d'éléments finis Abaqus. Ce dernier

propose une formulation lagrangienne réactualisée, un algorithme itératif de Newton-Raphson utilisant un paramètre de contrôle de type longueur d'arc à pas adaptatif et un élément quadrilatéral à huit noeuds dont la précision est similaire à celle de l'élément étudié dans le chapitre précédent.

Les six problèmes suivants seront analysés:

- (1) flambage élastique d'une coque cylindrique présentant deux ouvertures rectangulaires,
- (2) poutre encastrée à une extrémité et chargée à l'autre par une force verticale constante,
- (3) flambage latéral d'une poutre encastrée,
- (4) coque hémisphérique pincée,
- (5) flambage d'un arc circulaire profond,
- (6) analyse non linéaire d'un cylindre pincé.

Parmi ces exemples nous retrouvons des tests classiques qui ont été étudiés par bon nombre d'auteurs. Ces six problèmes ont été choisis pour convaincre de l'efficacité de l'algorithme dans le cadre des grandes rotations et de l'analyse des problèmes de bifurcation.

II.6.1 Flambage élastique d'une coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires

Nous considérons une coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires opposées et placées au milieu entre les deux extrémités du cylindre (figure II.1). La structure est soumise à l'action d'une pression axiale uniforme [54][64]. Grâce à la symétrie du problème, un huitième seulement de la structure sera considéré dans la présente analyse. La discrétisation est réalisée à l'aide de trois maillages réguliers exigeant respectivement 504, 1830 et 10416 degrés de liberté et utilisant l'élément de coque étudié dans le chapitre I.

Cet exemple est étudié pour définir la meilleure stratégie pour l'algorithme asympto-

tique numérique, mais aucune comparaison avec les méthodes itératives ne sera présentée pour l'instant. Le paramètre principal considéré dans cette étude est l'ordre de troncature de la série. La courbe de réponse type est décrite dans la figure (II.2) dont chaque pas asymptotique est indiqué par un numéro. Nous avons analysé une partie de cette courbe jusqu'à ce que la flèche du noeud situé au milieu du bord vertical (point M) de l'ouverture atteigne une valeur de 10 mm, peu après la charge maximale. Lors de cette première analyse, nous avons défini la longueur du pas à l'aide du critère déplacement (II.27) et des paramètres de précision $\epsilon_1 = 10^{-5}$ (voir II.27) et $\epsilon_3 = 10^{-3}$ (maximum du résidu relatif), mais nous n'avons eu besoin d'aucune phase de correction pour obtenir un résidu relatif inférieur à ϵ_3 .

Dans le tableau (II.1), nous présentons en premier lieu le nombre de pas nécessaire à l'exécution du calcul, deuxièmement, le rapport entre le temps nécessaire à l'évaluation du second membre F^{nl} et le temps t_1 demandé par l'évaluation et la décomposition de la matrice de rigidité tangente Kt , troisièmement le temps total relatif qui correspond au rapport entre le temps total CPU et le temps t_1 . En résumé, t_1 est le temps nécessaire à la résolution du problème élastique linéaire correspondant. Par exemple, en considérant le problème avec 1830 d.d.l. à l'ordre 10, presque la moitié du temps de décomposition de Kt est nécessaire à l'évaluation des vecteurs F^{nl} . Ainsi pour cet exemple, le temps de calcul exigé est équivalent à celui du calcul et de la décomposition d'environ 20 matrices de rigidité tangente.

Comme prévu, le nombre de pas diminue au fur et à mesure que l'ordre de troncature augmente. Ce phénomène est significatif, car nous avons besoin d'un nombre double de pas à l'ordre 10 par rapport à l'ordre 40. A l'ordre 10, la plus grande partie du temps de calcul est utilisée pour le traitement de la matrice de rigidité tangente sachant que celui du second membre exige 45% du temps de traitement de la matrice de rigidité tangente pour le problème utilisant 1830 d.d.l. et 39% dans celui à 10416 d.d.l. Cependant, de plus grands ordres demandent de calculer beaucoup de seconds membres, ce qui s'avère relativement onéreux. Dans le cadre de ce problème,

le meilleur compromis est obtenu en utilisant 15 termes de la série quelle que soit la taille du problème. Nous obtenons des résultats satisfaisant grâce à l'ordre 20 qui avait été jugé optimal dans des travaux précédents [27].

Les résultats du tableau (II.1) établissent également que la MAN est plus efficace pour les problèmes de grande taille. En effet, le coût relatif du calcul des seconds membres à l'ordre 15 diminue d'environ 25% entre le maillage à 504 d.d.l. et celui à 10416 d.d.l. $((0.84-0.64)/0.84 \simeq 0.25)$.

Remarquons que le nombre de pas est exactement le même avec les deux maillages les plus fins. Ceci est relativement normal, car ce nombre est représentatif de la non-linéarité de la courbe de réponse, qui change très peu avec le maillage. Dans le cas du maillage le plus grossier, ceci est très différent car celui-ci n'est pas suffisamment dense pour représenter correctement le problème physique et parce que la structure réagit alors de manière plus rigide que les deux autres. Notons également que le temps CPU total à l'ordre 20 avec 1830 et 10416 d.d.l. se situe respectivement aux alentours de 12 mn et 90 mn.

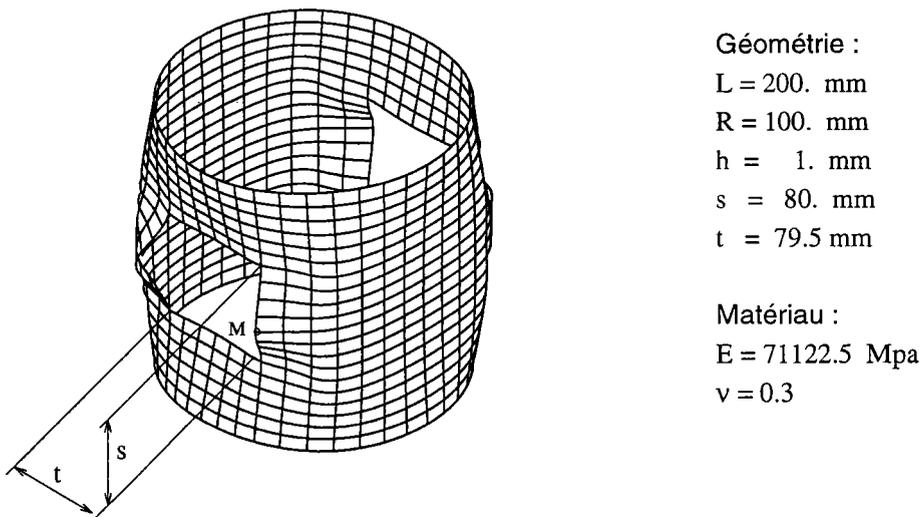


FIG. II.1 – Configuration déformée de la coque cylindrique soumise à l'action d'une pression axiale uniforme $P=981. \text{ N/mm}$

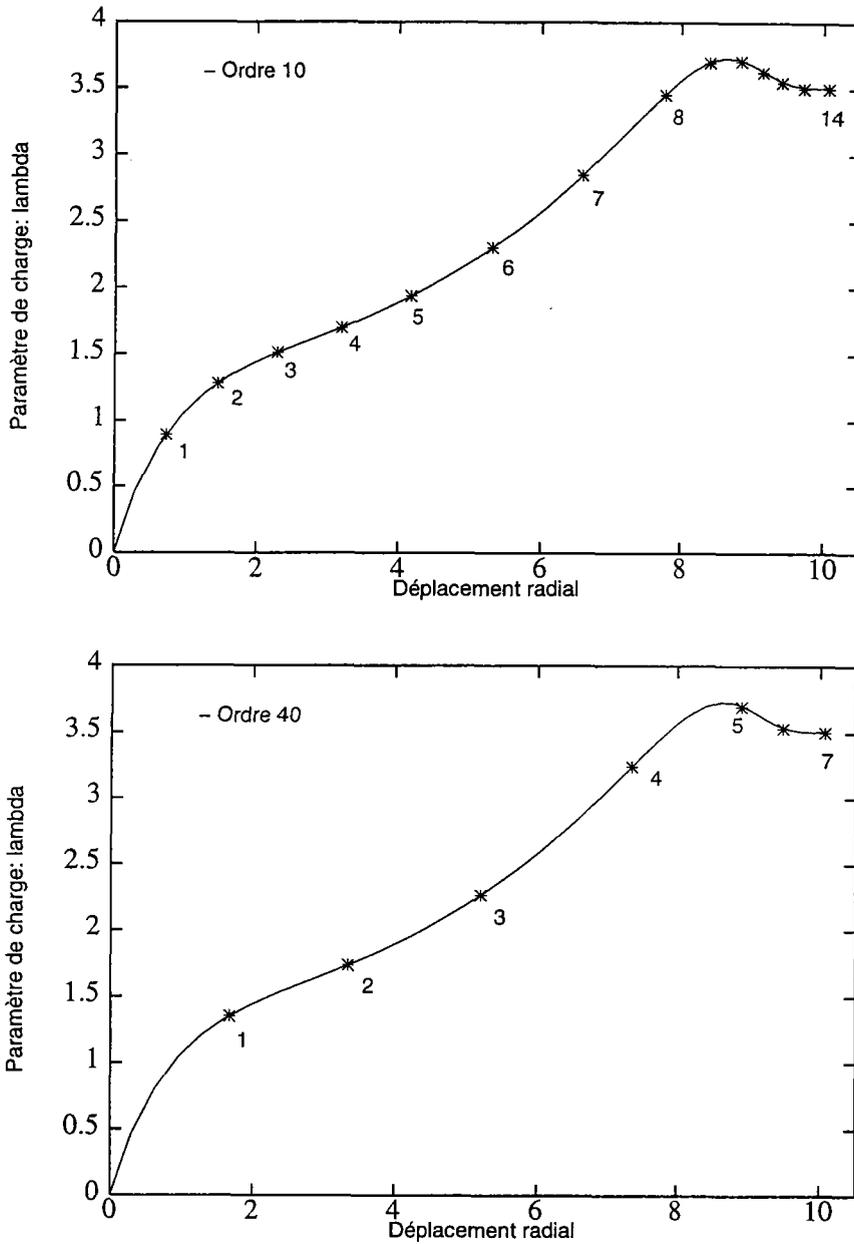


FIG. II.2 – Processus de continuation avec la Méthode Asymptotique Numérique pour différents ordres de troncature. Courbe charge/déplacement radial du point milieu du bord vertical de l'ouverture

TAB. II.1 – Flambage de la coque cylindrique avec deux ouvertures. Temps de calcul pour la MAN (machine utilisée : HP 9000 K 200).

	Ordre 10	Ordre 15	Ordre 20	Ordre 30	Ordre 40	
504 ddl	Nombre de pas	8	6	6	5	5
	$\frac{\text{évaluation de Fnl}}{\text{décomposition Kt}}$	0.50	0.84	1.24	2.23	3.46
	Temps total relatif	12.	11.04	13.44	16.15	22.30
1830 ddl	Nombre de pas	14	10	9	8	7
	$\frac{\text{évaluation de Fnl}}{\text{décomposition Kt}}$	0.45	0.76	1.12	1.98	3.05
	Temps total relatif	20.30	17.60	19.08	23.84	28.35
10416 ddl	Nombre de pas	14	10	9	8	7
	$\frac{\text{évaluation de Fnl}}{\text{décomposition Kt}}$	0.39	0.64	0.94	1.68	2.58
	Temps total relatif	19.46	16.40	17.46	21.44	25.06

II.6.2 Poutre en flexion

L'analyse non linéaire géométrique d'une poutre en flexion est abordée dans cet exemple qui concerne les grandes rotations. La poutre décrite dans la figure (II.3) est encastree à une extrémité et chargée à l'autre par une force verticale constante.

Ce problème a été analysé par l'algorithme de Newton-Raphson en utilisant différentes stratégies. Pour obtenir une flèche de 9 mm au point chargé, le code Abaqus exige 26 pas et un total de 94 décompositions de la matrice de rigidité lorsqu'il est utilisé avec une longueur d'arc adaptative et un résidu maximum de $5 \cdot 10^{-3}$ permis pour chaque pas. En utilisant une longueur d'arc constante "s" avec différentes valeurs, cet algorithme exige 110 décompositions pour $s = 1$ et 26 décompositions lorsque $s = 10$. Cependant, dans ce dernier cas nous n'obtenons que 5 points pour décrire toute la courbe solution.

Ce problème, lorsqu'il est résolu par la MAN, donne des résultats spectaculaires. En effet, avec seulement une seule décomposition de la matrice de rigidité, nous obtenons la branche de solution exacte au-delà d'une flèche de 8 mm (voir figure II.3). Une analyse plus précise peut être obtenue à partir de la courbe donnant le résidu en fonction du déplacement dans la figure (II.4). Par exemple, si nous exigeons une précision $\epsilon_3 = 10^{-3}$, le premier pas nous permet d'atteindre une flèche d'environ respectivement 6,7 ou 8 mm pour un ordre de troncature de 20, 30 ou 100.

On peut également remarquer que la longueur du pas est 2.5 fois plus grande à l'ordre 20 qu'à l'ordre 8, ce qui explique l'intérêt de choisir un ordre de troncature de la série suffisamment grand. Lorsque la procédure de continuation est utilisée à l'ordre 20 et avec $\epsilon_1 = 10^{-5}$ et $\epsilon_3 = 10^{-3}$, deux pas sont nécessaires pour décrire toute la branche solution jusqu'à ($\lambda = 20$) sans qu'aucune phase de correction ne soit nécessaire.

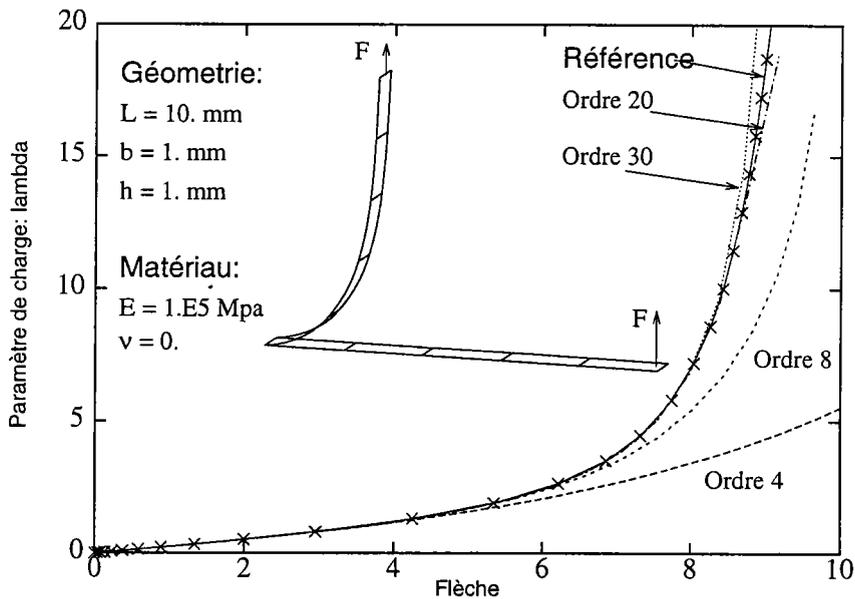


FIG. II.3 – Poutre en grandes rotations: diagramme charge/déplacement du point d'application de la force F . Un seul pas de calcul est présenté avec différents ordres de troncature

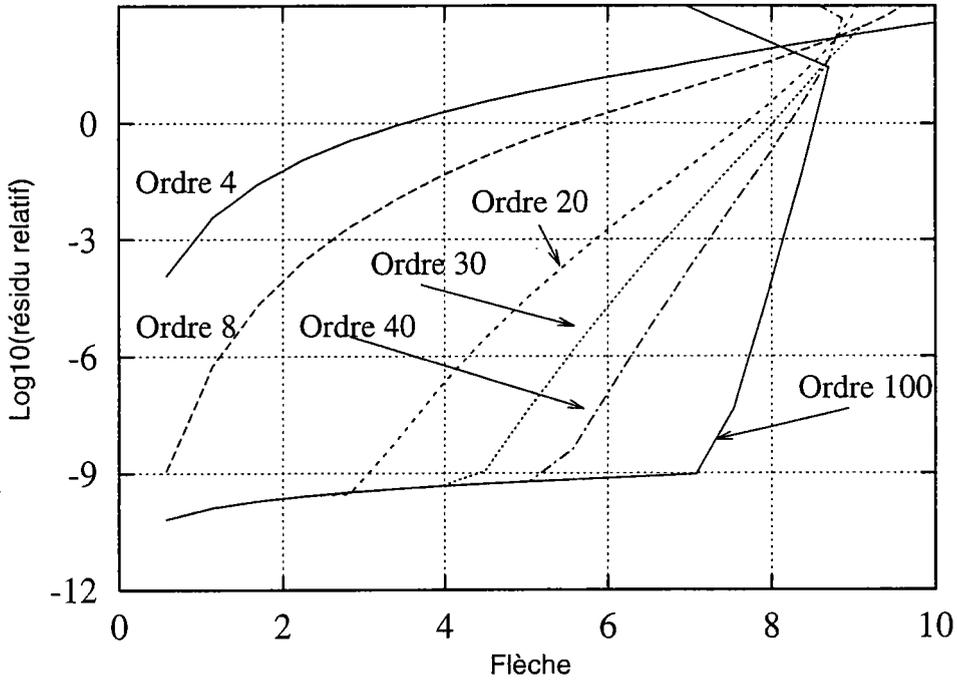


FIG. II.4 – Poutre en grandes rotations: diagramme du résidu relatif/flèche pour différents ordres de troncature

II.6.3 Flambage latéral d'une poutre encastree

Dans cet exemple, nous considérons le flambage latéral d'une poutre encastree décrite dans la figure (II.5). Pour la discrétisation, nous utilisons un maillage régulier avec 510 degrés de liberté et 20 éléments. La géométrie de la structure est légèrement perturbée afin d'éviter le cas d'une bifurcation pure et pour obtenir un chemin d'équilibre continu avec une quasi-bifurcation.

Le calcul effectué avec le code Abaqus utilisant un pas adaptatif de la méthode de Riks et un résidu maximum permis de $5 \cdot 10^{-3}$ exige 50 pas et un total de 223 décompositions de la matrice de rigidité tangente, ceci afin d'atteindre un déplacement U_2 de 70 mm au point d'application de la charge.

Le même calcul a été réalisé par la MAN à l'ordre 20 avec le critère déplacement (II.27). En exigeant une tolérance $\epsilon_1 = 10^{-5}$, 12 pas seulement sont nécessaires pour

décrire toute la courbe de solution.

Les figures (II.6) et (II.7) décrivent le chemin d'équilibre : les courbes continues représentent la solution de référence d'Abaqus et les croix marquent la fin de chaque pas de la méthode asymptotique numérique. Nous pouvons distinguer trois zones : une branche linéaire de pré-flambage, le passage du point de bifurcation et la zone du post-flambage où apparaissent les grandes rotations.

Le code Abaqus demande 32 pas pour décrire le changement brutal de la branche solution au point de bifurcation, c'est-à-dire que u_2 atteint 5 mm après 32 pas, et 18 pas supplémentaires sont nécessaires pour parcourir la branche de post-flambage jusqu'à ce que le déplacement atteigne 70 mm. Le même calcul effectué par la MAN avec un critère déplacement (II.27), $\epsilon_1 = 10^{-5}$ et $\epsilon_3 = 10^{-3}$ ne demande que 8 pas pour la première partie de la branche et 4 pas pour décrire la branche non linéaire restante.

En outre, nous avons effectué une étude comparative en utilisant le critère déplacement (II.27) et celui basé sur le résidu (II.28). Nous avons limité l'ordre de troncature des séries à 15 (ordre optimal de l'exemple II.6.1). Les résultats de cette étude sont reportés sur le tableau (II.2) : pour chaque critère, nous avons le logarithme à base 10 du résidu relatif et le nombre de pas de calcul en fonction de la précision imposée. Nous constatons que ces deux critères peuvent être considérés comme plus ou moins équivalents si les paramètres ϵ_1 ou ϵ_2 sont correctement choisis. Plus précisément, le paramètre ϵ_1 doit être suffisamment petit (c.à.d. inférieur à 10^{-4}) et au contraire le paramètre ϵ_2 doit être suffisamment grand (c.à.d. inférieur à 10^{-1}) afin de limiter le nombre de pas tout en garantissant un résidu relatif acceptable en fin de calcul. Nous remarquons aussi que dans les deux cas, pour obtenir un résidu relatif de l'ordre de 10^{-4} , 12 pas sont nécessaires; et pour obtenir un résidu relatif de l'ordre de 10^{-6} , il faut environ 18 pas de calcul.

Cet exemple nous permet de confirmer la grande qualité de la MAN et sa capacité à traiter des problèmes aussi bien avec grandes rotations qu'avec les points de

bifurcation. De plus, elle est capable de définir automatiquement une longueur de pas adaptative en évaluant la non-linéarité locale de la courbe de réponse.

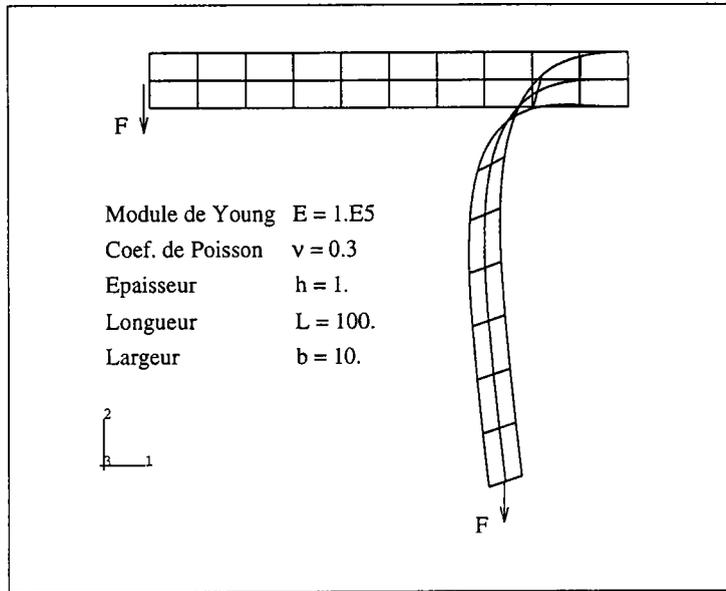


FIG. II.5 – Flambage latéral de poutre: configurations initiale et déformée. La géométrie initiale est perturbée par une imperfection initiale avec une valeur maximale de $h/10$ dont la forme est donnée par le premier mode de bifurcation.

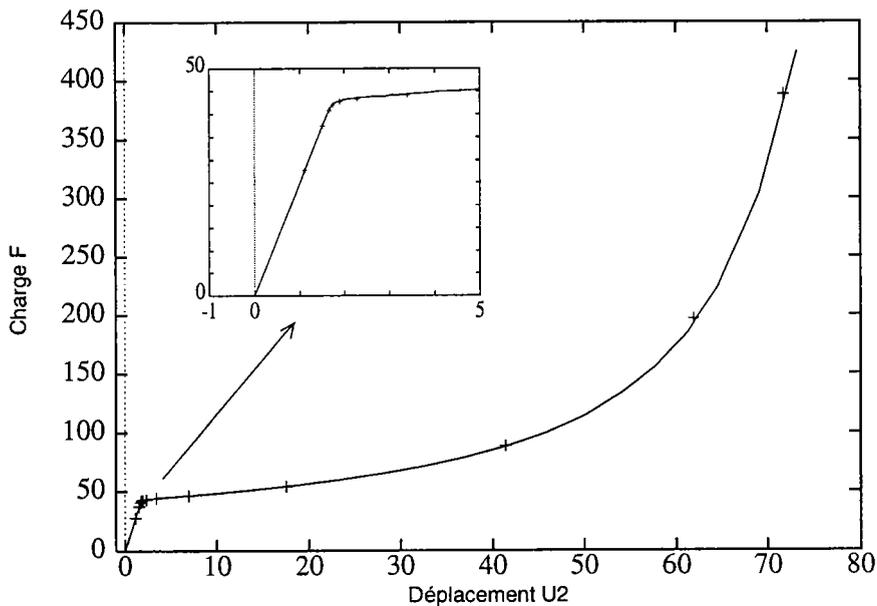


FIG. II.6 – Flambage latéral de poutre: diagramme charge/déplacement U_2 du noeud d'application de la force

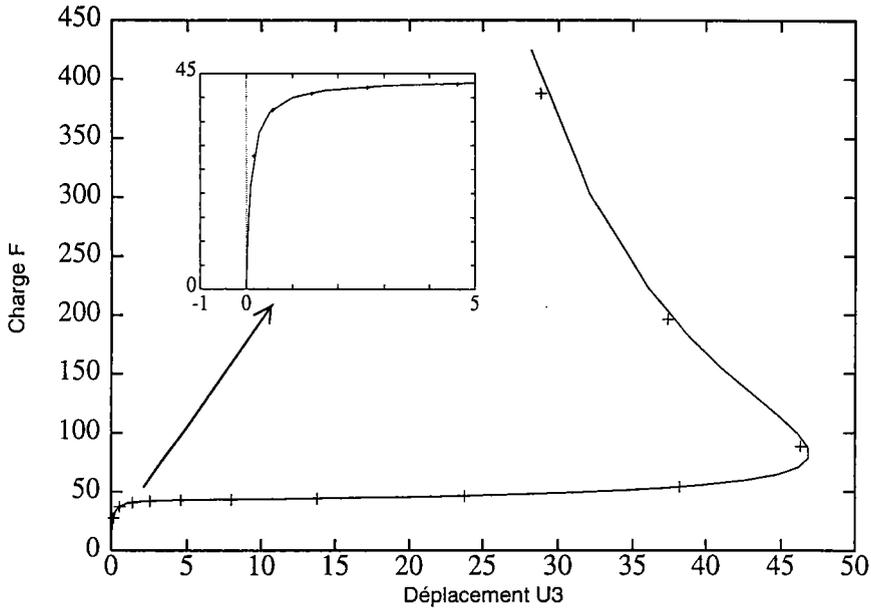


FIG. II.7 – Flambage latéral de poutre: diagramme charge/déplacement U_3 du noeud d'application de la force

Critère déplacement	Précision	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
	Résidu final (log10)	-5.9	-5.9	-5.0	-3.9	-2.8
	Nombre de pas	19	17	14	12	10
Critère résidu	Précision	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
	Résidu final (log10)	-5.5	-5.4	-4.8	-3.7	-2.8
	Nombre de pas	18	16	14	12	10

TAB. II.2 – Flambage latéral de poutre encastée: comparaison entre le paramètre de précision basé sur le critère déplacement et celui basé sur le critère résidu

II.6.4 Coque hémisphérique pincée

Dans cet exemple, nous présentons un test bien connu et largement cité dans la littérature. Il s'agit d'une coque hémisphérique avec une ouverture de 18° . La structure est soumise à l'action de forces ponctuelles ($F=1.$) sur quatre points comme le montre la figure (II.8). Grâce à la symétrie du problème, nous discrétisons seulement un quart de la structure avec un maillage régulier de 2166 degrés de liberté et 108 éléments. Ce problème est déjà étudié par Saleeb et al. [65], Büchter et al. [18], Ammar [3].

La courbe charge/déplacement est décrite dans la figure (II.10). En utilisant l'algorithme asymptotique numérique avec un critère déplacement, $\epsilon_1 = 10^{-6}$ et $\epsilon_3 = 10^{-3}$, quatre pas seulement sont nécessaires pour atteindre un déplacement de plus de 6 mm sans aucune phase de correction. Cependant, le même calcul exige 104 décompositions de la matrice de rigidité tangente lorsque nous utilisons le code Abaqus avec la méthode de Riks et une longueur de pas adaptative ($\epsilon_3 = 5.10^{-3}$).

Ammar [3] avait étudié cet exemple en utilisant la méthode asymptotique perturbée à l'ordre 7. Cette méthode est rappelée au chapitre I du présent travail. Les calculs des différents résidus jusqu'à l'ordre 7 sont effectués avec un schéma de différences finies. Pour obtenir une flèche de 10 mm, le calcul a demandé 24 pas asymptotiques. Autrement dit, 24 décompositions de la matrice de rigidité tangente ont été nécessaires. La même étude effectuée dans le cadre de la méthode présentée dans ce chapitre a exigé, quant à elle, seulement 7 pas de calcul. Ces résultats sont justifiés par notre formulation de base qui nous a permis de pousser l'ordre de troncature jusqu'à l'ordre 20 de manière simple et peu coûteuse en temps de calcul. Ceci n'est pas encore le cas de la formulation présentée par Ammar dans laquelle une troncature à l'ordre 7 limite forcément le domaine de validité de la solution et par conséquent augmente le nombre de pas.

Les conclusions concernant cet exemple sont similaires à celles des exemples précédents, avec une fois de plus un grand avantage pour la MAN dans ce cas précis.

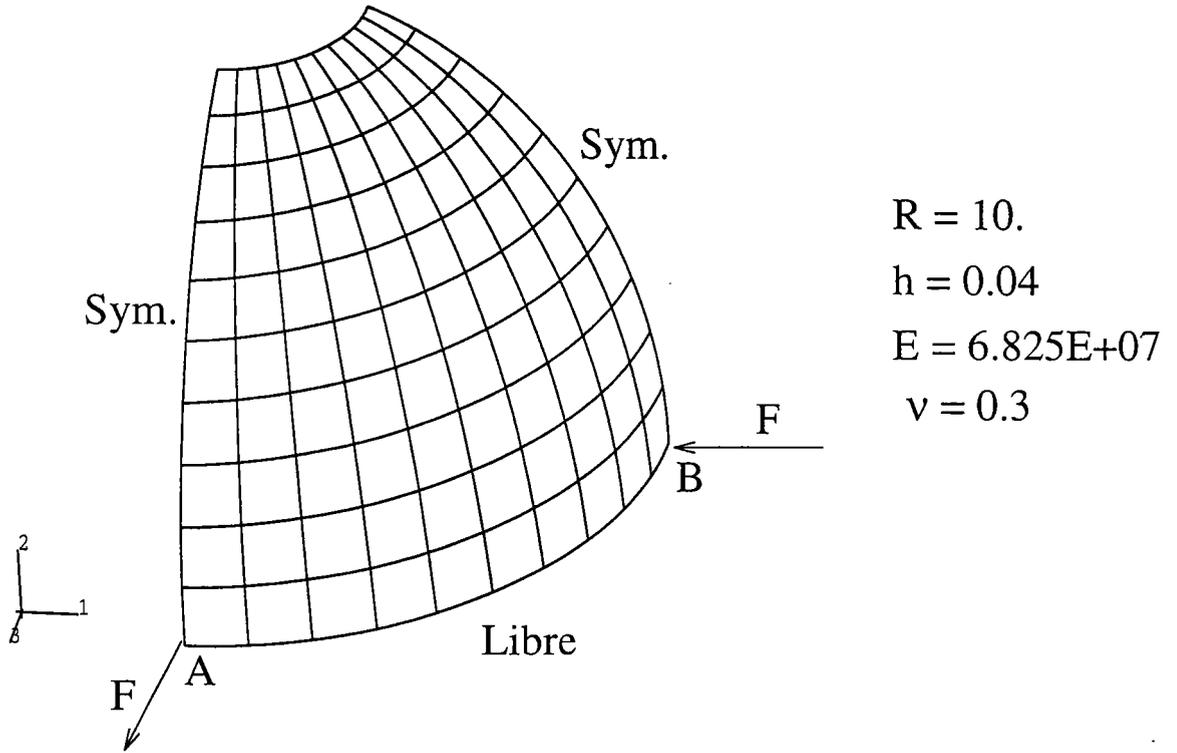


FIG. II.8 – Description géométrique de l'hémisphère pincé

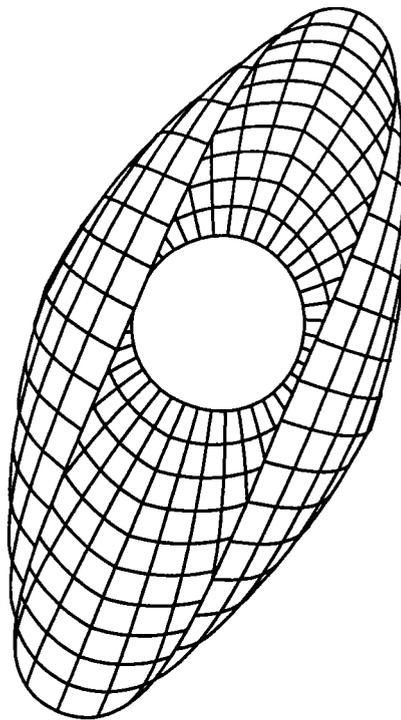


FIG. II.9 – Configuration déformée de l'hémisphère

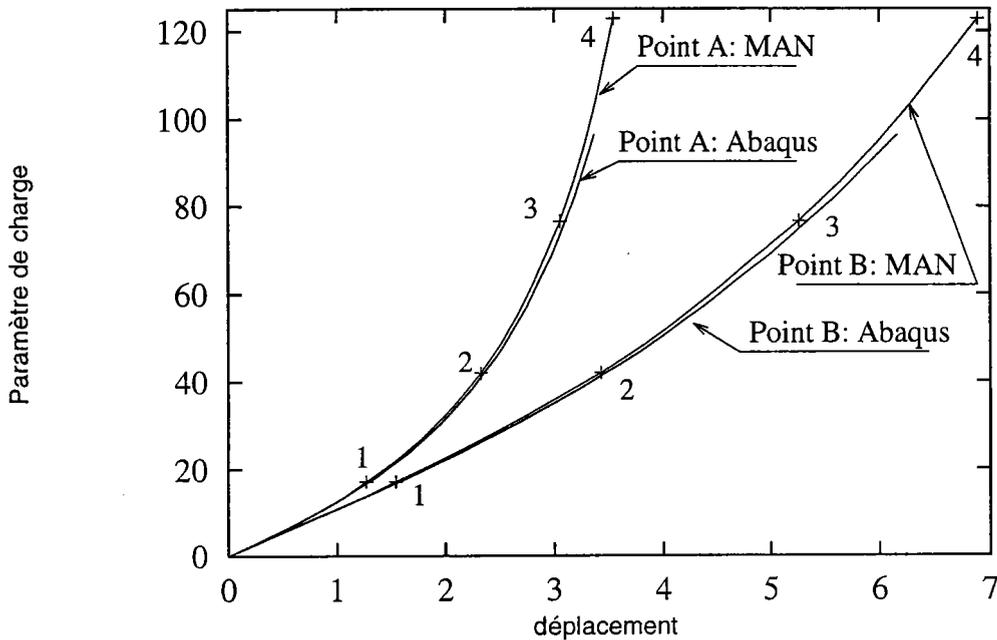


FIG. II.10 – Hémisphère pincé : courbe charge/déplacement

II.6.5 Flambage d'un arc circulaire profond

Cet exemple concerne le flambage d'un arc circulaire de rayon $R = 100$, d'épaisseur $h = .34641$ et de largeur $l = 10$. Son module d'Young $E = 0.2886751346 \cdot 10^8$ et son coefficient de Poisson est nul. Il présente une ouverture d'un angle $\alpha = 145^\circ$ et il est encastré sur une extrémité et simplement appuyé sur l'autre (liaison pivot) (II.11). Les caractéristiques géométriques sont telles que $EA = 100EI$ et $EI = 10^6$ où A est la section de l'arc et I représente son moment quadratique. Cet exemple a déjà été étudié dans le cadre des structures poutres par Dadeppo et Schmidt [32], Simo et Vu-Quoc [74] ainsi que par Al Mikdad et Ibrahimbegović [50]. La structure est discrétisée avec un maillage régulier de 20 éléments correspondant à 618 d.d.l. La figure (II.13) montre la courbe représentant la charge en fonction des déplacements vertical et horizontal du point d'application de la force. Ce problème, lorsqu'il a été analysé par Simo et Vu-Quoc, a demandé 155 pas, sans oublier le nombre d'itérations pour annuler le résidu à chaque pas. Pour parcourir la première branche de la courbe

jusqu'à une charge de 800, ces auteurs ont utilisé une stratégie en force imposée avec un incrément de 100 à chaque pas, ce qui a demandé au moins six itérations par pas de calcul. Pour le reste de la branche, ils ont choisi une longueur d'arc imposée pour pouvoir passer les points limites et parcourir la courbe jusqu'à obtenir un déplacement vertical de près de 220 mm.

Nous avons effectué le calcul à l'aide des procédures MAN avec un ordre de troncature de 20 et un critère déplacement pour définir le rayon de validité ($\epsilon_1 = 10^{-8}$). Pour atteindre un déplacement vertical de 220 mm du point considéré dans cette étude, nous avons eu besoin seulement de 30 pas asymptotiques avec un résidu relatif en fin de calcul inférieur à 10^{-4} .

Pour atteindre une charge de 860 depuis le début de la courbe, la MAN exige 5 pas de calcul, c'est-à-dire 5 décompositions de la matrice de rigidité tangente. En terme de temps, cela correspond selon l'analyse de l'exemple (II.6.1) à l'équivalent d'environ 9 simples prédictions de Newton-Raphson.

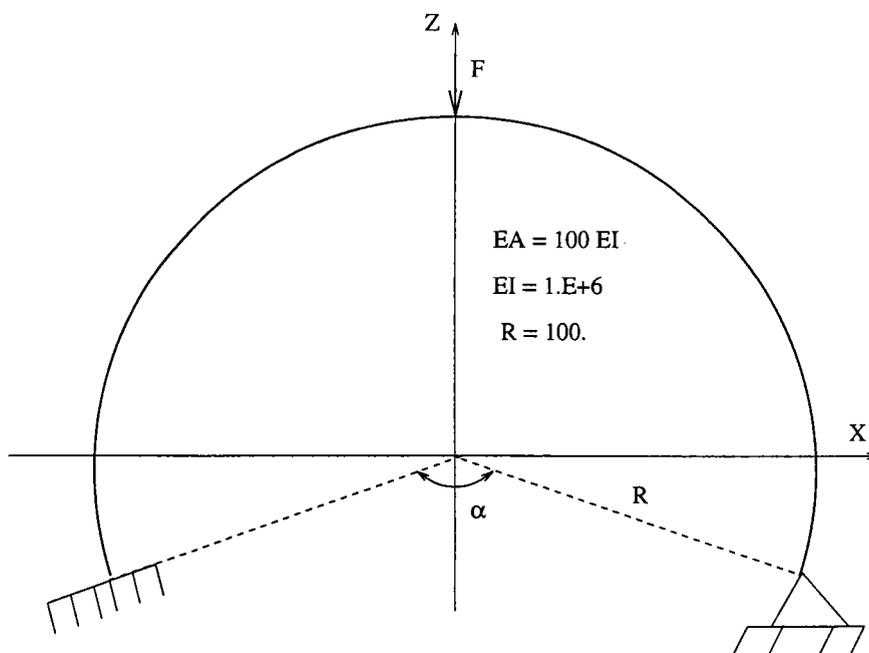


FIG. II.11 - Description géométrique de l'arc circulaire profond

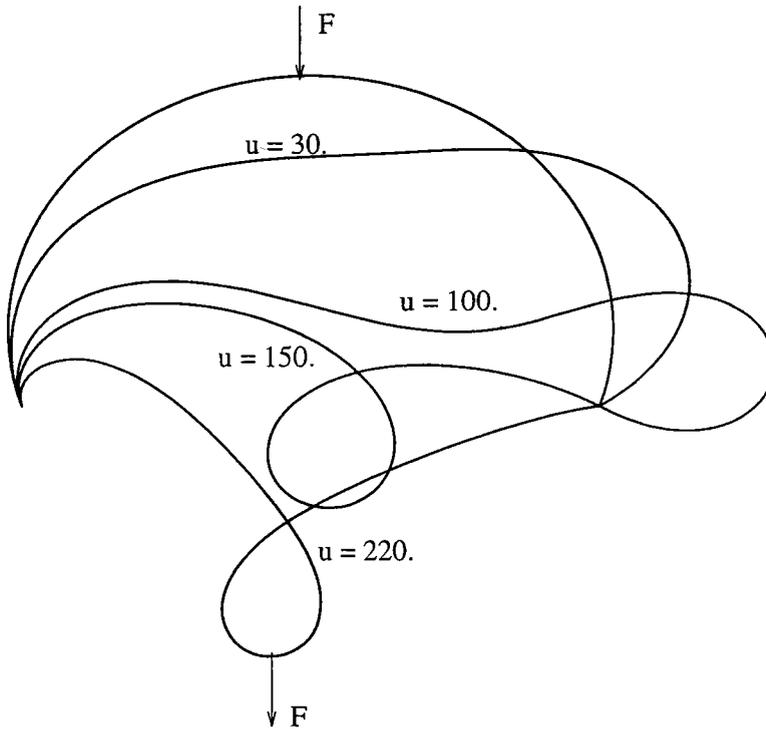


FIG. II.12 – Configurations déformées de l'arc pour différents niveaux de chargement. u est le déplacement vertical du point d'application de la force F

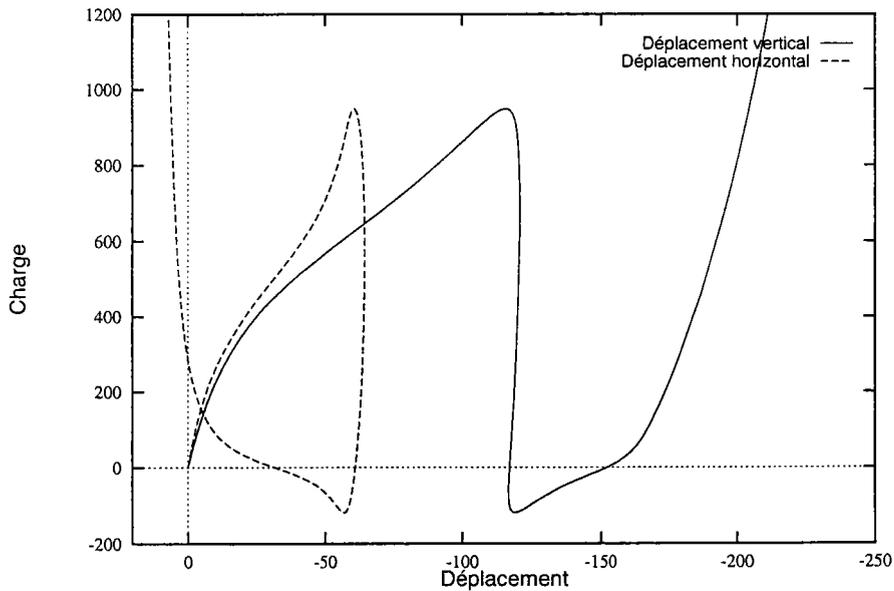


FIG. II.13 – Flambage de l'arc profond: courbe charge/déplacement du point d'application de la force F

11.975 en utilisant un maillage raffiné et deux types d'éléments de coque adaptés aux grandes rotations. En ce qui concerne la stratégie itérative, ils ont appliqué 16 pas de calcul avec une force imposée, ce qui leur a demandé 36 décompositions de la matrice de rigidité tangente.

En utilisant la Méthode Asymptotique Numérique pour la résolution de ce problème, nous obtenons des résultats qui confortent nos remarques sur la rapidité de cette méthode. En effet, pour atteindre le même niveau de chargement que celui étudié par Saleeb, il nous a fallu seulement 8 pas de calcul en utilisant une série à l'ordre 20 avec un critère déplacement ($\epsilon_1 = 10^{-5}$). Le résidu relatif en fin du calcul est resté inférieur à 10^{-4} . Avec un maillage 10×10 , nous avons obtenu un déplacement de 11.82 du point d'application de la force.

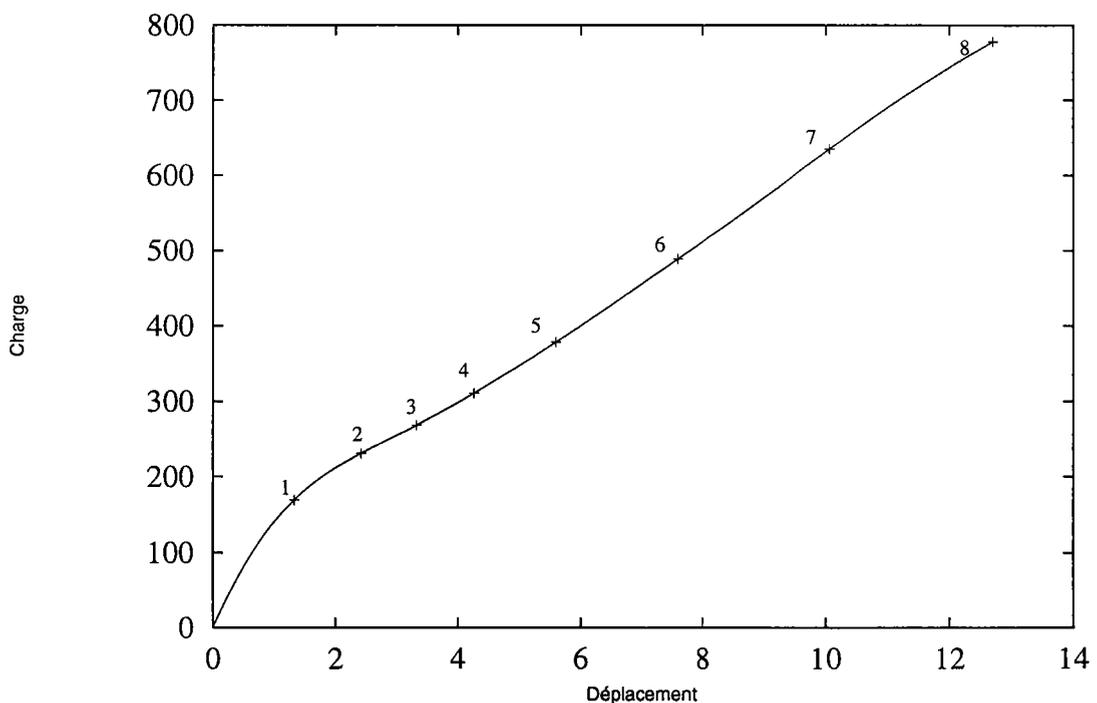
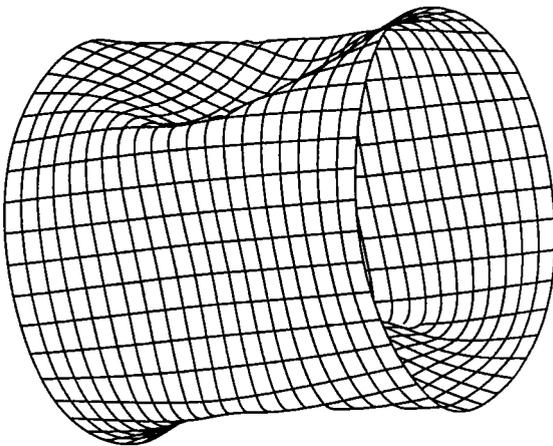
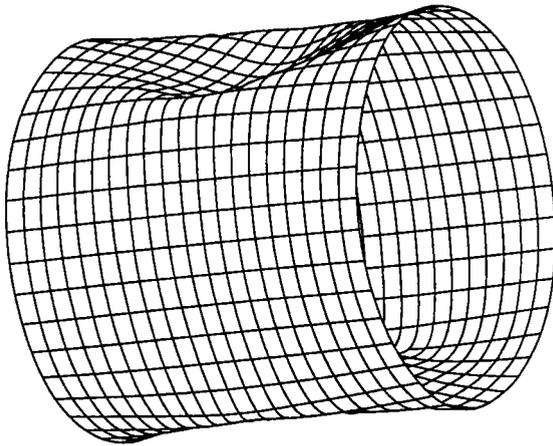
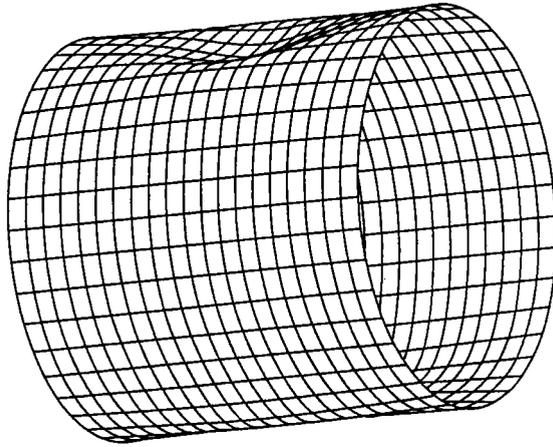


FIG. II.14 – Courbe charge/déplacement radial du point d'application de la force, les points sur la courbe désignent les fins de pas de la MAN



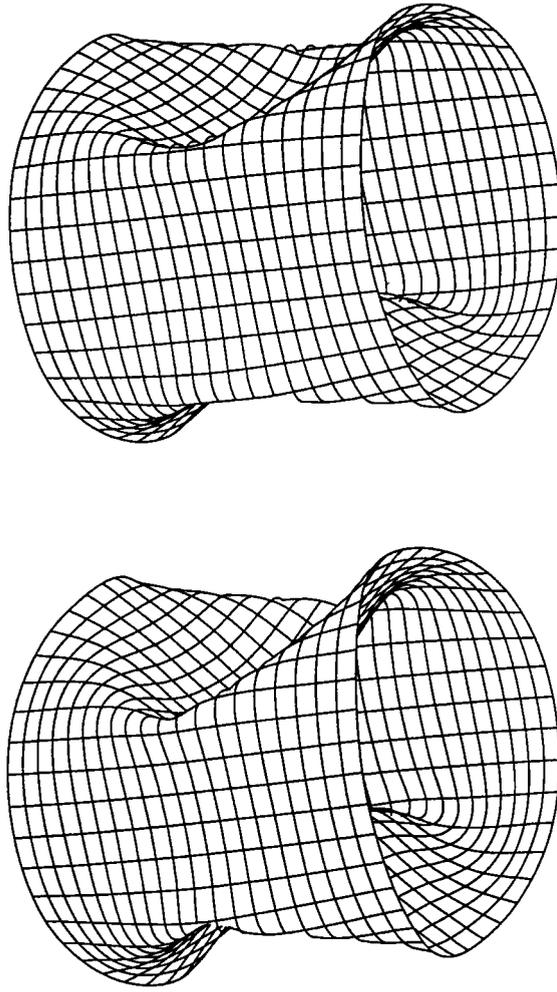


FIG. II.15 – *Etats déformés du cylindre pincé pour différents niveaux de chargement (charges : 378, 634, 1105, 1622, 2738), soit un déplacement final de 40 suivant la direction radiale du point chargé*

II.7 Conclusion

Dans le présent chapitre, la Méthode Asymptotique Numérique a été développée pour l'analyse des coques élastiques en grandes rotations. La formulation théorique de départ et la discrétisation par éléments finis ont été choisies de façon à pouvoir utiliser les mêmes algorithmes simples que ceux développés dans le cadre des rotations modérées. Dans certains cas, nous avons trouvé des longueurs de pas très grandes. Ce résultat n'est pas vraiment étonnant car le développement des grands déplacements

est généralement considéré comme faisant partie des non-linéarités beaucoup moins pénalisantes par comparaison au contact unilatéral, au frottement ou au comportement plastique.

Si nous analysons les résultats de cette étude, la MAN apparaît beaucoup plus efficace que les méthodes classiques itératives pour l'application des grandes rotations dans le cadre des coques élastiques.

Une fois de plus, la MAN s'est avérée très robuste, ce qui nous a permis d'obtenir des branches solutions très proches d'un point de bifurcation (voir [79] pour d'autres illustrations). Il serait simple d'inclure dans notre code quelques algorithmes pour détecter les points de bifurcation [15] ou pour suivre les branches bifurquées [80].

Nous avons également parlé dans cette étude des caractéristiques optimales de la MAN. Comme dans le cas des rotations modérées, l'ordre optimal de troncature est pratiquement égal à 20, ce qui contribue à l'efficacité de notre algorithme. Ainsi, ce point intéressant est fortement lié à notre choix d'une formulation théorique simple et de l'élément fini qui lui est associé.

Après avoir étudié les coques élastiques en grandes rotations grâce aux algorithmes de la MAN, nous allons présenter dans le chapitre suivant des procédures asymptotiques numériques permettant d'étendre cette étude au cas des structures de coques plastiques.

CHAPITRE III

Extension de la MAN pour la résolution des problèmes de coques en plasticité

III.1 Introduction

A partir d'un certain niveau de chargement, les matériaux et en particulier les métaux ne se comportent plus de manière purement élastique. Ils subissent des déformations permanentes dont il faut tenir compte pour dimensionner les ouvrages soumis à des charges importantes. Grâce à la théorie de la plasticité, nous étudions le comportement des matériaux en présence de ces déformations plastiques qui dépendent généralement de l'histoire du chargement. Pour cette raison, le problème de plasticité est de nature incrémentale [44] [43].

Lorsque l'on se situe dans le domaine plastique, au moins deux difficultés interviennent dans l'analyse numérique du problème. La première est liée à la relation non linéaire de comportement; la deuxième difficulté concerne le caractère irréversible de la déformation plastique.

Braikat [16] a présenté une application de la méthode asymptotique numérique aux problèmes élastoplastiques; il a utilisé des lois de comportement non linéaire sans prendre en compte la décharge élastique. Ainsi, dans un premier temps, Braikat a traité un problème de poutre en considérant une loi de comportement régularisée de type puissance en déformation totale. En raison de la non-linéarité de la relation

de comportement, la troncature des séries a été limitée à l'ordre 6, ce qui restreint le rayon de validité de ces dernières. L'auteur a présenté, dans un deuxième temps, une application de la MAN pour un problème élastique parfaitement plastique. Cette loi de comportement est singulière à la limite d'élasticité, c'est pourquoi elle a été remplacée par une loi régularisée de type hyperbolique. Dans ce cas, l'auteur a pu obtenir des développements jusqu'à des ordres élevés.

Cao et Descamps-Brunelot [35] travaillent actuellement sur l'application de la MAN à la résolution des problèmes viscoplastiques en grandes déformations dans le but de simuler des problèmes de mise en forme des métaux à chaud.

Notons aussi que des projets sont menés aujourd'hui pour prendre en compte une vraie loi élastoplastique en considérant la décharge élastique, mais que cette étude n'entre pas dans les objectifs des travaux de la présente thèse.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à l'application des méthodes de perturbation aux problèmes des structures de coques en plasticité utilisant une théorie basée sur la déformation totale. Dans ce cas, la difficulté se situe, bien sûr, au niveau de la loi de comportement qui est non linéaire, ce qui implique inévitablement une formulation non quadratique. Nous avons vu cependant, dans le chapitre précédent, qu'une écriture quadratique de la formulation contribue à l'efficacité de l'algorithme asymptotique. Néanmoins, par des techniques appropriées, nous allons pouvoir résoudre des problèmes de plasticité en utilisant quelques lois de comportement, moyennant certaines conditions précises. En effet, nous présentons dans ce chapitre trois types de lois de comportement représentatives de la réponse non linéaire des métaux, à savoir une loi élastique parfaitement plastique, une loi de type puissance basée sur la relation de Ramberg-Osgood et enfin une loi élastoplastique avec un écrouissage linéaire. Pour obtenir une représentation analytique de ces lois et pour que le problème soit bien posé, deux étapes sont nécessaires [62]. La première consiste à régulariser les lois de comportement car ces dernières ne sont pas analytiques et ne se prêtent donc pas aux développements asymptotiques. La deuxième étape doit

conduire, grâce à un changement de variables, à réduire le degré de non-linéarité du problème en introduisant des variables intermédiaires. Ce qui permet d'obtenir une écriture quadratique des équations du problème et par conséquent d'améliorer l'efficacité numérique de l'algorithme asymptotique en réduisant de manière significative le temps de calcul. La taille mémoire nécessaire pour le stockage des variables intermédiaires reste négligeable devant celle du problème global.

Le problème général sera donc écrit dans un cadre quadratique nous permettant ainsi d'utiliser les algorithmes asymptotiques développés dans le cas de l'élasticité et de pousser la troncature des séries à des ordres élevés. En outre, les variables intermédiaires servant uniquement à réduire le degré de non-linéarité du problème, seront substituées dans les équations principales. Ainsi, à un ordre p quelconque, nous obtenons après condensation un système de deux équations représentant l'équilibre et la compatibilité des déformations et dont les variables sont représentées par le champ de déplacement et celui de la déformation ajoutée. A ce niveau, l'écriture des équations est identique à celle rencontrée dans le cas élastique, mais avec un second membre qui prend en compte les effets des non-linéarités géométriques ainsi que matérielles; de plus, dans la matrice de rigidité tangente, nous voyons apparaître les modules tangents de comportement propre à chaque loi.

Nous allons à présent expliciter pour chaque loi de comportement, la matrice des modules tangents que nous noterons D_t , ainsi que les termes résiduels de contraintes dus à la non-linéarité de la relation de comportement à l'ordre p que nous noterons S_p^{res} .

III.2 Trois lois de comportement et leurs régularisations

III.2.1 Loi de comportement élastique parfaitement plastique

Dans cette section, nous présentons une loi de comportement élastique parfaitement plastique. C'est une représentation idéalisée du comportement pour certaines

applications pratiques car nous négligeons dans ce cas les effets d'écroutissement du matériau étudié, ainsi bien sûr que la décharge élastique. En considérant le cas unidimensionnel, cette loi est traduite par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma}{E} & |\sigma| < \sigma_y \\ \epsilon &= \frac{\sigma}{E} + \hat{\epsilon} & |\sigma| = \sigma_y \end{aligned} \tag{III.1}$$

où $\epsilon, \sigma, \hat{\epsilon}, E$ et σ_y représentent respectivement le champ de déformation, celui des contraintes, la déformation permanente, le module d'Young et la contrainte limite d'écoulement en traction.

Cette relation qui lie les déformations aux contraintes présente une discontinuité de pente, ce qui rend impossible son développement en série entière. Pour cette raison, nous proposons d'approcher cette loi par une autre loi qui est régulière et qui se prête bien aux développements asymptotiques [16]. Nous allons donc remplacer la loi (III.1) par une relation hyperbolique qui s'écrit sous la forme suivante:

$$E \epsilon = \sigma + \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - \sigma^2} \sigma \tag{III.2}$$

Notons que mathématiquement la relation (III.2) présente deux branches de solutions comme le montre la figure (III.1) qui décrit les courbes contraintes / déformations. La première branche correspond à une contrainte σ qui tend asymptotiquement vers la contrainte limite d'élasticité σ_y sans jamais la dépasser; elle est physiquement admissible car elle reflète le comportement réel du matériau. Dans la deuxième branche, σ dépasse la limite d'élasticité; elle est physiquement inadmissible et présente une solution parasite qui est systématiquement induite si certaines précautions ne sont pas prises comme nous le verrons plus loin dans la section (III.4) consacrée aux applications. Dans cette nouvelle loi de comportement, η représente un paramètre de régularisation. Comme le montre la figure (III.1), ce paramètre agit sur la pente de la courbe de comportement permettant ainsi d'obtenir une courbure plus ou moins

forte; l'influence de ce paramètre sur le nombre de pas de calcul sera étudiée en détail dans la section (III.4). Pour une valeur petite de η , nous nous approchons de la courbe représentative de la loi de comportement initiale sans régularisation.

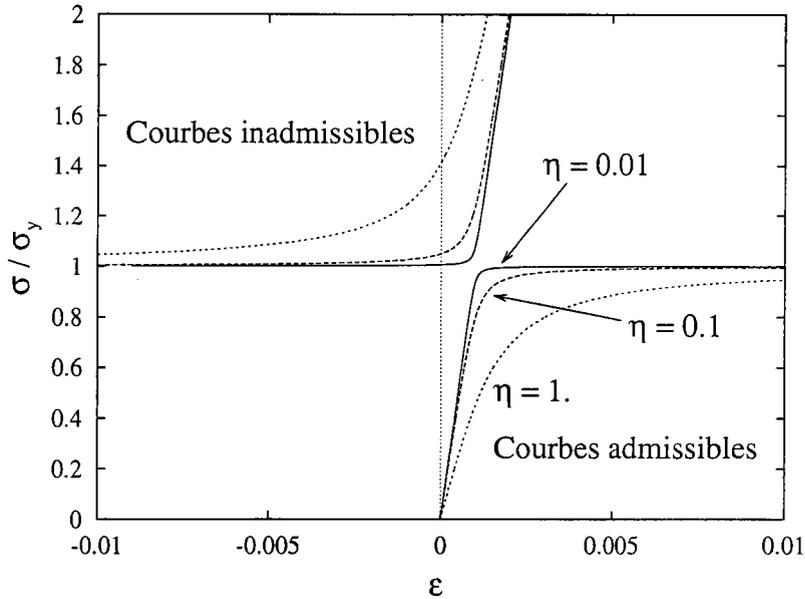


FIG. III.1 – Courbe de traction uniaxiale : loi élastique parfaitement plastique régularisée avec différentes valeurs de η

Pour appliquer ce modèle de comportement à notre formulation de coque, nous généralisons la loi de comportement au cas tridimensionnel en utilisant le champ de déformation de Green-Lagrange et le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff car notre formulation est basée sur une écriture lagrangienne totale. En considérant les grands déplacements et les grandes rotations mais de petites déformations, nous adoptons une décomposition additive du champ de déformation en une partie élastique et une autre plastique $\gamma = \gamma^e + \gamma^p$ [41] [34]. Ainsi, notre nouveau modèle de comportement tridimensionnel s'écrit sous la forme suivante:

$$E\gamma = (1 + \nu)S^d - (1 - 2\nu)P I + \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - S_{eq}^2} S^d \quad (\text{III.3})$$

où S est le champ des contraintes de Piola-Kirchhoff et γ est le champ des déformations de Green-Lagrange. E , ν et σ_y représentent respectivement le module d'Young,

le coefficient de Poisson et la contrainte limite d'élasticité.

$P = -\frac{1}{3}S : I$ est la trace du tenseur des contraintes, $S_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}S^d : S^d}$ est la contrainte équivalente de Mises, $S^d = S + PI$ est le tenseur déviateur des contraintes.

Après avoir déterminé la loi de comportement pour ce modèle, nous nous intéressons à présent à la formulation du problème général. En effet, le point de départ de cette formulation est l'écriture faible de la condition d'équilibre qui se traduit par l'équation suivante:

$$\int_v {}^t S : \delta \gamma \, dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \quad (\text{III.4})$$

où $\delta \gamma$ est la partie virtuelle du champ des déformations de Green-Lagrange, λ désigne un paramètre de charge et $\lambda P_e(\delta u)$ est le travail virtuel des efforts extérieurs.

Nous avons vu dans le deuxième chapitre de ce travail que la déformation totale peut être enrichie par une déformation incompatible que l'on écrit sous la forme suivante:

$$\gamma = Bu + \tilde{\gamma} \quad (\text{III.5})$$

où $Bu = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)$ est la partie compatible de la déformation et $\tilde{\gamma}$ représente la déformation ajoutée.

La formulation du problème s'appuie sur le respect de l'équilibre global de la structure, de la compatibilité des déformations au niveau élémentaire ainsi que du comportement en tout point. Ce problème est donc formulé comme suit:

$$\begin{aligned} & \bullet \int_v {}^t S : \delta Bu \, dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \\ & \bullet \int_v {}^t S : \delta \tilde{\gamma} \, dv = 0 \\ & \bullet E(Bu + \tilde{\gamma}) = (1 + \nu) S^d - (1 - 2\nu) P I + \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - S_{eq}^2} S^d \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Pour obtenir une efficacité numérique de la méthode asymptotique, il faut que la formulation du problème soit écrite dans un cadre quadratique [26]. Ainsi, comme la loi de comportement a une non-linéarité supérieure à 2, nous proposons de réduire

ce degré de non-linéarité en introduisant deux nouvelles variables: $s^{eq} = S_{eq}^2$ et $\zeta = \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - s^{eq}}$. Le problème résultant s'écrit alors sous la forme quadratique suivante:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_{\nu} {}^t S : \delta B u \, dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \\
 & \bullet \int_{\nu} {}^t S : \delta \tilde{\gamma} \, dv = 0 \\
 & \bullet E \gamma = (1 + \nu) S^d - (1 - 2\nu) P I + \zeta S^d \\
 & \bullet \zeta (\sigma_y^2 - s^{eq}) = \eta \sigma_y^2 \\
 & \bullet s^{eq} = S_{eq}^2 = \frac{3}{2} S^d : S^d
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

avec

$$\gamma = B u + \tilde{\gamma} = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u) + \tilde{\gamma} \tag{III.8}$$

III.2.2 Loi de comportement de type puissance

Nous présentons dans cette section une loi de comportement basée sur la relation de Ramberg-Osgood [24] [1]. C'est une loi de type puissance qui n'est pas analytique pour des contraintes nulles si l'exposant n'est pas entier. C'est pourquoi une procédure de régularisation est introduite dans ce modèle. En outre, à cause des termes en puissance de cette loi, nous introduisons un changement de variables nous permettant ainsi d'obtenir une écriture quadratique du problème qui sera ensuite développé de la même manière que celui déjà étudié dans le cadre de la loi de type hyperbolique. Dans le cas tridimensionnel, cette loi s'écrit sous la forme suivante:

$$E \gamma = (1 + \nu) S^d - (1 - 2\nu) P I + \frac{3}{2} \alpha \left[\frac{S_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} S^d \tag{III.9}$$

où E, ν, α, n et σ_y sont des paramètres intrinsèques du matériau considéré et représentent respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson, un coefficient scalaire, l'exposant réel d'écrouissage et la contrainte limite d'élasticité.

Comme cette loi de comportement n'est analytique que pour des contraintes S_{eq} non nulles, nous procédons à sa régularisation pour l'adapter aux développements asymptotiques. Pour ce faire, nous pouvons redéfinir la contrainte équivalente de la manière

suivante:

$$S_{eq}^2 = \frac{3}{2} S^d : S^d + \eta^2 \sigma_y^2 \quad (\text{III.10})$$

où η est un paramètre de régularisation. Lorsque $\eta = 0$, nous retrouvons la loi de comportement initiale.

Nous introduisons une nouvelle variable sous la forme suivante:

$$\kappa(S_{eq}) = \frac{3}{2} \alpha \left[\frac{S_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} = \frac{3}{2} \alpha \left[\frac{3}{2 \sigma_y^2} S^d : S^d + \eta^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{III.11})$$

A ce niveau, l'écriture en série de cette loi est possible, mais il subsiste une difficulté supplémentaire due au terme en puissance (n est un réel). Braikat a utilisé dans sa thèse un exposant entier et a limité la troncature des séries à l'ordre 6. Pour éviter cette limitation et obtenir une écriture de la loi de comportement dans un cadre quadratique, nous proposons de travailler avec une équation différentielle en introduisant la variable suivante:

$$\zeta^2 = \frac{S_{eq}^2}{\sigma_y^2} = \frac{3}{2 \sigma_y^2} S^d : S^d + \eta^2 \quad (\text{III.12})$$

ce qui permet d'écrire la relation ci-dessous:

$$\kappa = \frac{3}{2} \alpha \zeta^{n-1} \quad (\text{III.13})$$

Si maintenant nous effectuons une différenciation de cette dernière équation, nous obtenons la relation suivante qui nous servira dans les développements asymptotiques:

$$\zeta d\kappa = (n-1) \kappa d\zeta \quad (\text{III.14})$$

Cette relation nous permet de réduire le degré de non-linéarité du problème général. De cette façon, nous pouvons utiliser un algorithme similaire à celui utilisé dans le cadre de l'étude élastique considérée dans le chapitre II. En outre, pour obtenir la même pente au démarrage que celle de la loi de comportement non régularisée, nous pouvons montrer facilement que le premier membre de l'équation (III.9) doit être multiplié par $(1 + \alpha\eta^n)$.

Nous pouvons alors formuler le problème global de structure qui se traduira par les trois équations représentant l'équilibre, la compatibilité et la relation de comportement ainsi que par deux équations supplémentaires qui résultent des variables intermédiaires κ et ζ :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_v {}^t S : \delta B u \, dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \\
 & \bullet \int_v {}^t S : \delta \tilde{\gamma} \, dv = 0 \\
 & \bullet E(1 + \alpha \eta^n) \gamma = (1 + \nu) S^d - (1 - 2\nu) P I + \kappa S^d \quad (\text{III.15}) \\
 & \bullet \zeta^2 = \frac{3}{2 \sigma_y^2} S^d : S^d + \eta^2 \\
 & \bullet \zeta \, d\kappa = (n - 1) \kappa \, d\zeta
 \end{aligned}$$

avec

$$\gamma = B u + \tilde{\gamma} = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u) + \tilde{\gamma} \quad (\text{III.16})$$

III.2.3 Loi de comportement élastoplastique avec écrouissage linéaire

Nous avons présenté au début de ce chapitre une loi de comportement élastique parfaitement plastique. Cette loi représente une idéalisation du comportement des matériaux car en réalité, au-delà de la limite d'élasticité, il y a apparition du phénomène d'écrouissage qui entraîne le durcissement du matériau étudié. Dans le présent travail, nous proposons une loi de comportement plus réaliste en considérant un effet linéaire d'écrouissage à partir de la contrainte limite d'élasticité. Tout comme pour les lois de comportement déjà étudiées dans ce chapitre, nous effectuons une régularisation de la présente loi ainsi que les changements de variables nécessaires afin d'obtenir un problème écrit dans un cadre quadratique facile à développer par la méthode asymptotique numérique. L'implémentation de ce modèle sera facile à mettre en oeuvre car à l'aide d'un changement judicieux des variables, nous pouvons appliquer la même régularisation que dans le cas de la loi hyperbolique; et à une équation près, nous retrouvons la même formulation du problème global.

Dans le cas unidimensionnel, cette loi de comportement peut être représentée schématiquement par la figure suivante:

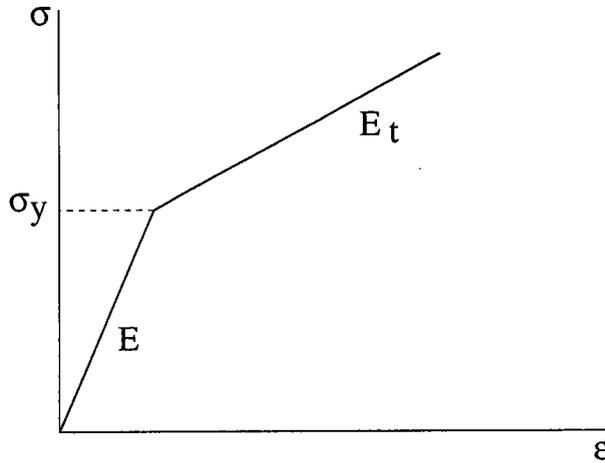


FIG. III.2 – Loi élasto-plastique avec écrouissage linéaire. La courbe contraintes / déformations présente deux pentes correspondant au module d'Young élastique E ainsi qu'au module tangent E_t

Nous distinguons deux branches sur cette courbe. La première décrit le comportement élastique du matériau lorsque la contrainte est inférieure à la limite d'écoulement σ_y . La deuxième branche se situe au delà de cette limite, elle prend en compte l'écrouissage du matériau occasionnant ainsi des déformations plastiques.

Nous définissons la déformation plastique ϵ^p et la force thermodynamique généralisée notée A comme suit [51]:

$$\epsilon^p = \epsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (\text{III.17})$$

$$A = \sigma - h \epsilon^p$$

où E et h désignent respectivement le module d'Young et celui d'écrouissage. La condition de charge vérifie la relation suivante $|A| = |\sigma - h \epsilon^p| \leq \sigma_y$.

Nous pouvons compléter ces relations par les conditions ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^p &= 0 & \text{si} & \quad |A| < \sigma_y \\
 A &= \sigma_y & \text{si} & \quad \epsilon^p > 0 \\
 A &= -\sigma_y & \text{si} & \quad \epsilon^p < 0
 \end{aligned} \tag{III.18}$$

Notons qu'à ce niveau nous retrouvons les équations déjà rencontrées dans le cas de la loi élastique parfaitement plastique. Nous proposons donc une régularisation de type hyperbolique liant la déformation plastique ϵ^p à la force thermodynamique A . Cette dernière s'écrit sous la forme suivante:

$$E \epsilon^p = \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - A^2} A \tag{III.19}$$

Lorsque A est déterminée, nous pouvons en déduire la contrainte σ en utilisant la relation $\sigma = A + h \epsilon^p$. De cette façon, nous avons une équation supplémentaire par rapport à celles rencontrées dans le cas de la loi hyperbolique. Ainsi, nous pouvons écrire les relations suivantes:

$$E \epsilon = A + \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - A^2} A \tag{III.20}$$

$$\sigma = A + \frac{h \eta \sigma_y^2}{E (\sigma_y^2 - A^2)} A \tag{III.21}$$

Nous généralisons à présent cette loi de comportement au cas tridimensionnel en utilisant le champ de déformation de Green-Lagrange γ et le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff S . Ainsi nous pouvons écrire:

$$E \gamma = (1 + \nu) A^d - (1 - 2\nu) P_A I + \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - A_{eq}^2} A^d \tag{III.22}$$

$$S = A + \frac{h \eta \sigma_y^2}{E (\sigma_y^2 - A_{eq}^2)} A^d \tag{III.23}$$

où ν désigne le coefficient de Poisson, $P_A = -\frac{1}{3}A : I$ est la trace du tenseur A , $A_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}A^d : A^d}$ est la contrainte équivalente de A et $A^d = A + P_A I$ est le tenseur déviateur des contraintes de A .

Pour obtenir une écriture quadratique du problème, nous proposons un changement de variables identique à celui effectué dans le cas de la loi hyperbolique; nous pouvons alors écrire $s^{eq} = A_{eq}^2$ et $\zeta = \frac{\eta \sigma_y^2}{\sigma_y^2 - s^{eq}}$. Finalement, le problème général peut être formulé par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_v {}^t S : \delta B u \, dv - \lambda P_e(\delta u) = 0 \\
 & \bullet \int_v {}^t S : \delta \tilde{\gamma} \, dv = 0 \\
 & \bullet E \gamma = (1 + \nu) A^d - (1 - 2\nu) P_A I + \zeta A^d \\
 & \bullet \zeta (\sigma_y^2 - s^{eq}) = \eta \sigma_y^2 \\
 & \bullet s^{eq} = A_{eq}^2 = \frac{3}{2} A^d : A^d \\
 & \bullet S = A + \frac{h}{E} \zeta A^d
 \end{aligned} \tag{III.24}$$

avec

$$\gamma = B u + \tilde{\gamma} = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u) + \tilde{\gamma} \tag{III.25}$$

III.3 L'algorithme asymptotique numérique

III.3.1 Principe de la technique de perturbation

Nous procédons dans cette section à l'application de l'algorithme asymptotique numérique pour résoudre les problèmes (III.7, III.15, III.24). Grâce à la technique de régularisation et aux changements de variables, ces problèmes sont écrits dans un cadre quadratique qui est favorable à l'application de l'algorithme asymptotique numérique étudié dans le chapitre précédent. Ces derniers sont formulés en fonction du vecteur mixte U et du paramètre de charge λ . Le vecteur U contient les variables élémentaires du problème global et correspond respectivement à $U = (u, \tilde{\gamma}, S, \zeta, s^{eq})$, $U = (u, \tilde{\gamma}, S, \zeta, \kappa)$ et $U = (u, \tilde{\gamma}, S, A, \zeta, s^{eq})$ selon que la loi de comportement considérée dans le problème est élastique parfaitement plastique, de type puissance ou encore élasto-plastique avec un écrouissage linéaire.

Pour tous ces problèmes les vecteurs U et le paramètre de charge λ sont développés de manière identique en séries entières par rapport à un paramètre "a". Nous injectons ensuite ces développements dans les équations du problème (III.7, III.15 ou III.24). En identifiant terme à terme suivant la puissance de "a", nous obtenons une suite récurrente de problèmes linéaires à résoudre numériquement par éléments finis jusqu'à un certain ordre p . Tous ces problèmes admettent le même opérateur de rigidité tangente. A chaque ordre, nous condensons analytiquement les équations du problème par substitution pour obtenir un problème variationnel avec un nombre réduit d'inconnues, en l'occurrence le champ de déplacement u et celui de la déformation ajoutée $\tilde{\gamma}$. Ce sont ces deux champs qui seront discrétisés par la suite; ils sont exactement les mêmes que ceux traités dans le cas élastique.

Cette technique nous permet donc d'obtenir une partie de la courbe solution sous forme d'un développement asymptotique au voisinage d'un point de départ noté (U_0, λ_0) . Le paramètre de développement "a" qui intervient dans ces équations est considéré comme une inconnue supplémentaire que nous choisissons de la même façon que celle envisagée dans le cas élastique. Nous cherchons donc la solution sous la forme suivante:

$$U(a) = U_0 + a U_1 + a^2 U_2 + a^3 U_3 \dots \tag{III.26}$$

$$\lambda(a) = \lambda_0 + a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + a^3 \lambda_3 \dots$$

A chacune des lois étudiées dans ce chapitre correspond une matrice des modules tangents, que nous noterons D_t , et des seconds membres F^{nl} et R^α qu'il faut définir. Pour ce faire, nous procédons en deux étapes: la première consiste à développer les équations concernant le comportement et à écrire une relation à l'ordre p de la forme: $S_p = D_t : \gamma_p + S_p^{res}$; où S_p^{res} est un vecteur qui dépend des contraintes calculées jusqu'à l'ordre $(p - 1)$ et S_p et γ_p désignent le champ des contraintes et celui des déformations à l'ordre p . La deuxième étape consiste, quant à elle, à développer les

équations d'équilibre et de compatibilité afin d'obtenir les expressions des seconds membres F_p^{nl} et R_p^α .

III.3.2 Développement des lois de comportement

Dans cette section, nous ne développerons qu'une des lois étudiées dans le présent travail, la démarche restant la même pour les autres lois de comportement qui sont détaillées en annexe (B). Si nous considérons la loi de type hyperbolique, nous pouvons écrire à l'ordre 1:

$$\begin{aligned}
 E \gamma_1 &= (1 + \nu + \zeta_0) S_1^d - (1 - 2\nu) P_1 I + \zeta_1 S_0^d \\
 \zeta_1 &= \frac{\zeta_0}{\sigma_y^2 - s_0^{eq}} s_1^{eq} \\
 s_1^{eq} &= 3 S_0^d : S_1^d \\
 \gamma_1 &= \gamma_l(u_1) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_1) + \tilde{\gamma}_1
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

Après substitution des équations (III.27₂ et III.27₃) dans (III.27₁), nous inversons analytiquement la relation de comportement afin d'explicitier la matrice des modules tangents D_t . Ainsi nous pouvons écrire la relation liant le tenseur des contraintes S_1 à celui des déformations γ_1 sous la forme simple suivante:

$$S_1 = C_1 \gamma_1 + C_2 (\gamma_1 : I) I + C_3 (\gamma_1 : S_0^d) S_0^d = D_t : \gamma_1 \tag{III.28}$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes (voir annexe (B)).

A l'ordre p , les équations de comportement prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 E \gamma_p &= (1 + \nu + \zeta_0) S_p^d - (1 - 2\nu) P_p I + \zeta_p S_0^d + \sum_{i=1}^{p-1} \zeta_i S_{p-i}^d \\
 \zeta_p &= \frac{1}{2(\sigma_y^2 - s_0^{eq})} \left(6 \zeta_0 S_0^d : S_p^d + 3 \zeta_0 \sum_{i=1}^{p-1} S_i^d : S_{p-i}^d + \sum_{i=1}^{p-1} \zeta_i s_{p-i}^{eq} \right) \\
 s_p^{eq} &= 3 S_0^d : S_p^d + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^d : S_{p-i}^d \\
 \gamma_p &= \gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + \tilde{\gamma}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_{nl}(u_i, u_{p-i})
 \end{aligned} \tag{III.29}$$

Nous procédons maintenant à la substitution des équations (III.29₂ et III.29₃) dans (III.29₁) qui s'écrira alors sous la forme suivante:

$$S_p = D_t \gamma_p + S_p^{res} \quad (\text{III.30})$$

où la matrice D_t est exactement celle déterminée à l'ordre 1, et où S_p^{res} est un vecteur contenant les termes non linéaires provenant de la relation de comportement et qui sont calculés jusqu'à l'ordre $p-1$. L'expression de ce vecteur est détaillée dans l'annexe (B).

La même démarche est valable pour les deux autres lois de comportement. Notre but est de déterminer la relation de comportement écrite sous la forme (III.30) et de l'injecter ensuite dans les équations d'équilibre et de compatibilité afin d'explicitier les expressions des seconds membres pour chaque loi. Notons que, par rapport à un problème d'élasticité linéaire, le problème de plasticité fait intervenir une matrice des modules tangents à la place de la matrice de comportement rencontrée dans le chapitre d'élasticité. De plus, S_p^{res} de l'équation (III.30) fait intervenir un terme supplémentaire qui s'ajoutera aux seconds membres F_p^{nl} et R_p^α déjà explicités dans le chapitre II.

III.3.3 Développement des équations variationnelles

Les deux équations variationnelles représentant l'équilibre de la structure et la compatibilité des déformations s'écrivent de manière identique au problème d'élasticité. Ainsi, pour un ordre p quelconque nous pouvons écrire:

$$\bullet \int_v {}^t S_0 : 2\gamma_{nl}(u_p, \delta u) + {}^t S_p : [\gamma_l(\delta u) + \gamma_{nl}(u_0, \delta u)] + \quad (\text{III.31})$$

$$\int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^t S_r : 2\gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) dv = \lambda_p P_e(\delta u)$$

$$\bullet \int_v {}^t S_p : \delta \tilde{\gamma} dv = 0 \quad (\text{III.32})$$

Si nous substituons dans les équations III.31 et III.32, la contrainte à l'ordre p qui s'écrit sous la forme suivante:

$$S_p = D_t : (\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + \tilde{\gamma}_p) + D_t : \left(\sum_{r=1}^{p-1} \gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) \right) + S_p^{res} \quad (\text{III.33})$$

nous obtenons ainsi un problème avec comme seules inconnues le champ de déplacement et la déformation additionnelle. Nous pouvons alors écrire l'équation d'équilibre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \int_v {}^t S_0 : 2\gamma_{nl}(u_p, \delta u) \, dv + \\ & \int_v {}^t [\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + \tilde{\gamma}_p] : D_t : [\gamma_l(\delta u) + 2\gamma_{nl}(u_0, \delta u)] \, dv = \\ & \lambda_p \langle F, \delta u \rangle + \langle F_p^{nl}, \delta u \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

L'équation de compatibilité s'écrit, quant à elle, comme suit:

$$\int_v {}^t [\gamma_l(u_p) + 2\gamma_{nl}(u_0, u_p) + \tilde{\gamma}_p] : D_t : \delta \tilde{\gamma} \, dv = \langle R_p^\alpha, \delta \tilde{\gamma} \rangle \quad (\text{III.35})$$

Les seconds membres F_p^{nl} et R_p^α correspondent évidemment aux termes résiduels qui apparaissent naturellement aux seconds membres des équations (III.34) et (III.35):

$$\begin{aligned} \langle F_p^{nl}, \delta u \rangle = & - \int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^t \gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) : D_t : [\gamma_l(\delta u) + \gamma_{nl}(u_0, \delta u)] \, dv \\ & - \int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^t S_r : 2\gamma_{nl}(u_{p-r}, \delta u) \, dv + \int_v {}^t S_p^{res} : [\gamma_l(\delta u) + \gamma_{nl}(u_0, \delta u)] \, dv \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$\langle R_p^\alpha, \delta \tilde{\gamma} \rangle = - \int_v \sum_{r=1}^{p-1} {}^t \gamma_{nl}(u_r, u_{p-r}) : D_t : \delta \tilde{\gamma} \, dv + \int_v {}^t S_p^{res} : \delta \tilde{\gamma} \, dv \quad (\text{III.37})$$

III.3.4 Condensation et discrétisation

Nous rappelons que, par rapport au cas élastique, seule la loi de comportement a changé dans la formulation proposée dans ce chapitre. Nous utilisons donc la même discrétisation que celle présentée dans le chapitre II. Seuls le champ de déplacement et la déformation additionnelle sont discrétisés pour obtenir, au niveau élémentaire, deux

équations traduisant l'équilibre et la compatibilité. Ces dernières seront condensées à ce niveau et nous obtenons alors, après assemblage, un problème formulé uniquement en déplacement.

III.4 Applications numériques

Nous procédons dans cette section à la validation numérique de l'algorithme asymptotique pour le traitement des problèmes de coques plastiques. La méthode de Newton-Raphson sera considérée comme la référence numérique pour tous les exemples étudiés ici. Cette méthode est implémentée dans notre code. Elle utilise les lois de comportement régularisées que nous avons détaillées dans le présent chapitre. Comme nous ne disposons pas d'un algorithme itératif utilisant un pas adaptatif qui permette d'optimiser le nombre de décompositions des matrices de rigidité, nous proposons d'effectuer plusieurs calculs itératifs pour différentes valeurs de longueurs d'arc imposées.

Pour tous les exemples de cette section, nous discrétisons les structures par l'élément de coque à huit noeuds étudié dans le chapitre I en utilisant 5 points d'intégration de Gauss dans l'épaisseur. Nous présentons quelques exemples simples mais significatifs mettant en valeur la non-linéarité de la loi de comportement. Le premier exemple concerne la traction simple d'une plaque; puis nous étudions le problème d'une plaque en flexion dans la direction normale à la surface moyenne; nous traitons ensuite l'exemple du toit, déjà étudié en élasticité, nous permettant ainsi de combiner les effets de membrane et ceux de flexion. Nous reprenons, enfin, l'exemple du cylindre troué pour chercher l'ordre optimal qui minimise le temps de calcul asymptotique dans le cas des lois de comportement non linéaire. Pour les trois premiers problèmes, nous choisissons une troncature des séries à l'ordre 15.

Le but de ces tests est de valider numériquement la méthode asymptotique, mais aussi de montrer que cette dernière, lorsque les variables du problème sont choisies de manière judicieuse, reste efficace et fiable pour le traitement de certains problèmes

de plasticité en déformation totale. Le temps de calcul demeure faible comparé à une méthode classique de résolution; et la taille mémoire nécessaire pour le stockage des variables supplémentaires n'augmente pas considérablement la taille totale du problème à résoudre.

III.4.1 Plaque en traction simple

Dans ce premier exemple, nous considérons la traction simple d'une plaque de longueur $L = 10.$, de largeur $l = 1.$ et d'épaisseur $h = 1.$

Lorsque nous considérons la loi de comportement régularisée de type hyperbolique, les caractéristiques du matériau sont les suivantes: $E = 10^5$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 200$. Nous analysons tout d'abord l'influence du paramètre η sur le nombre de pas de calcul. Ainsi, sur la figure (III.3) nous reportons les courbes charge / déplacement pour différentes valeurs de η . Nous remarquons que plus les valeurs de η sont grandes, moins rapide est la variation de courbure de la réponse charge / déplacement. Cette tendance a une influence directe sur le nombre de pas asymptotiques. En effet, nous avons reporté sur le tableau (III.1) différents résultats concernant l'influence de η ainsi que celle du paramètre ϵ_1 sur le nombre de pas asymptotiques. Ce dernier paramètre que nous avons déjà étudié dans le chapitre II est basé sur le critère de déplacement.

Les renseignements que nous pouvons déduire de cette étude sont les suivants:

- pour un ϵ_1 fixé, le nombre de pas asymptotiques augmente lorsque la valeur de η diminue. Cette tendance est logique car la non-linéarité de la loi de comportement devient plus forte en s'approchant de la singularité qui se situe à la limite d'élasticité.
- pour un η fixé, le nombre de pas augmente lorsque la valeur de ϵ_1 diminue. Ce résultat est conforme à ceux rencontrés dans le cas de l'élasticité.
- pour $\epsilon_1 = 10^{-2}$ et $\eta = 10^{-2}$, nous obtenons la bonne courbe de réponse jusqu'à la limite d'élasticité à partir de laquelle nous passons sur la deuxième branche de l'hyperbole qui est une solution de la loi de comportement élastique parfaitement plastique régularisée (voir la figure III.5). Cette solution est physiquement inadmis-

sible car la contrainte équivalente dépasse σ_y . Pour éviter cette solution parasite, il faut imposer un paramètre de précision ϵ plus petit que 10^{-2} soit de l'ordre de 10^{-4} . Notons que plus les valeurs du paramètre de régularisation η sont grandes plus on s'éloigne de la singularité ce qui évite alors de se brancher sur la mauvaise solution. Remarquons sur la figure (III.6) que le résidu correspondant à cette solution reste correcte. Ce résultat est évident puisqu'on suit la deuxième branche de l'hyperbole pour laquelle toutes les équations d'équilibre de la structure sont toujours respectées. Cet exemple présente un cas simple pour la résolution avec la MAN. Il suffit de prendre $\epsilon = 10^{-3}$ pour obtenir une bonne solution de la courbe en garantissant un résidu relatif de l'ordre de 10^{-5} . Ainsi, pour obtenir un déplacement de 5% de la longueur de la plaque, 3 pas sont nécessaires lorsque $\eta = 10$ et 9 pas lorsque $\eta = 10^{-2}$. Nous obtenons une branche continue où le résidu est faible en tout point.

Si nous considérons à présent les calculs menés par la méthode de Newton-Raphson, nous remarquons que le nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente reste largement supérieur à celui exigé par la MAN. En effet, nous avons effectué 3 calculs avec différentes valeurs de la longueur d'arc notée "s" en exigeant un résidu relatif de 10^{-3} ; ce dernier correspond au rapport de la valeur maximale du vecteur résidu sur la norme de la charge actuelle. Pour obtenir un nombre de points suffisant sur la courbe, il faut prendre $s = 2$ ce qui implique 34 décompositions de la matrice de rigidité tangente. Lorsque $s = 10$, nous n'obtenons que 4 points sur toute la courbe: trois points sur la première branche linéaire et un seul point sur tout le reste de la courbe ($\eta = 10^{-2}$). Notons que pour tous les calculs menés par la méthode de Newton-Raphson, il faut ajouter au nombre d'itérations la résolution locale au niveau des points de Gauss de l'équation de comportement pour déterminer les contraintes à partir de l'état de déformation.

Sur la figure (III.4) nous représentons la solution asymptotique en utilisant un seul pas pour différents ordres de troncature et pour un paramètre $\eta = 10^{-2}$. Nous remarquons qu'avec un seul pas nous arrivons à décrire la branche solution jusqu'à des valeurs

proches de la limite d'élasticité et qu'une procédure de continuation asymptotique est donc nécessaire pour couvrir toute la courbe solution.

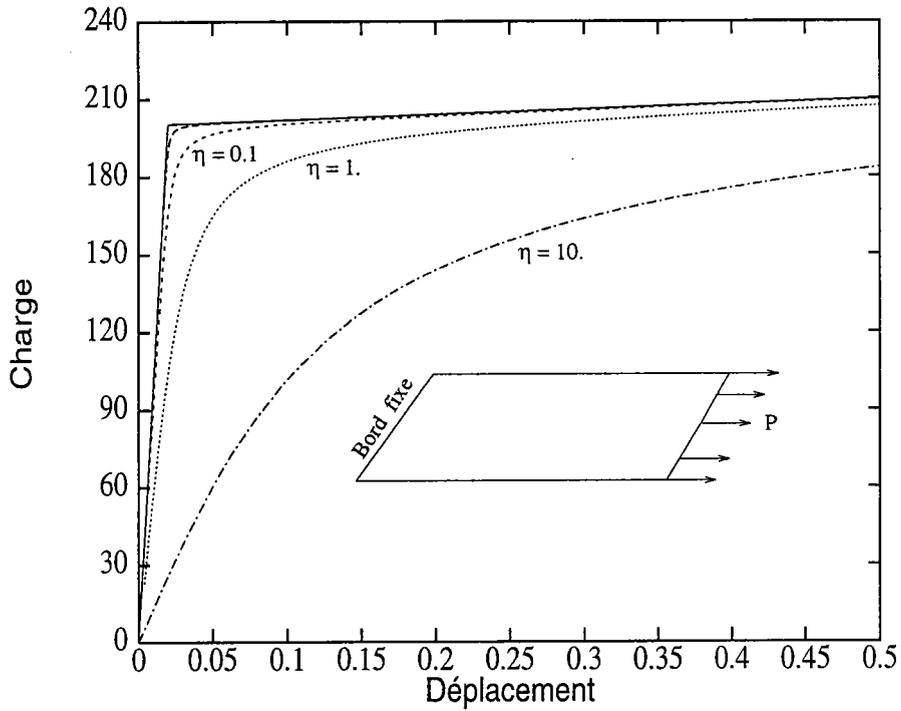


FIG. III.3 – Courbe charge / déplacement d'une poutre en traction uniaxiale avec la loi régularisée (hyperbolique) pour différentes valeurs de η

ϵ_1	η	10.	1.	0.1	0.01
Méthode Asymptotique Numérique					
10^{-2}	Nombre de pas	2	4	6	**
	Résidu	-3.9	-4.3	-3.9	**
10^{-3}	Nombre de pas	3	5	7	9
	Résidu	-5.6	-5.4	-6.9	-5.7
10^{-4}	Nombre de pas	3	6	9	11
	Résidu	-7.1	-6.4	-7.6	-6.6
10^{-5}	Nombre de pas	4	7	11	14
	Résidu	-7.2	-7.3	-7.4	-7.2
10^{-6}	Nombre de pas	4	9	13	17
	Résidu	-8.1	-7.4	-8.0	-7.6
Méthode de Newton Raphson					
$s = 2.$	Nombre de pas	16	18	18	18
	Nb décomp. Kt	58	58	47	34
$s = 5.$	Nombre de pas	7	7	7	7
	Nb décomp. Kt	27	27	23	16
$s = 10.$	Nombre de pas	4	4	4	4
	Nb décomp. Kt	19	18	16	14

TAB. III.1 – Loi de type hyperbolique: étude de l'influence du paramètre η sur le nombre de décompositions de matrices de rigidité tangente

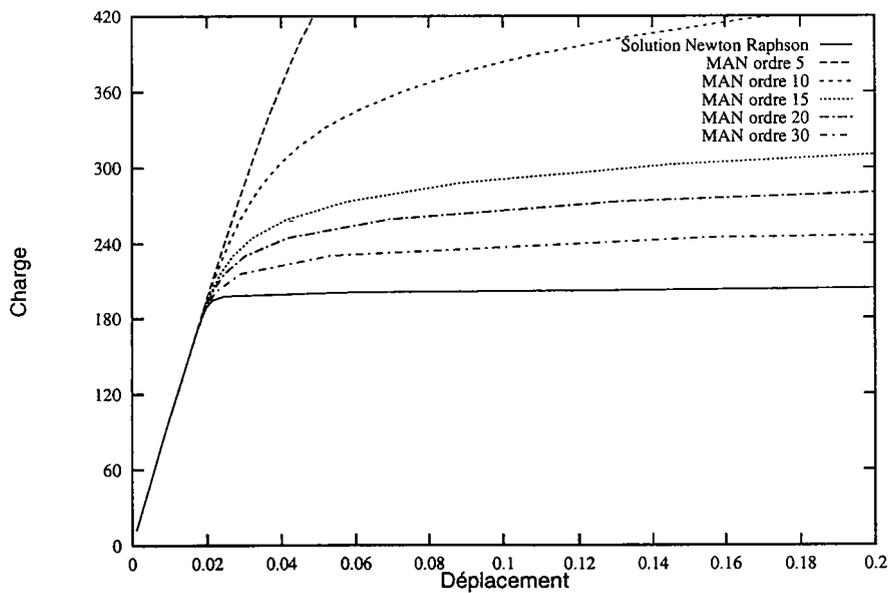


FIG. III.4 – Courbe représentative d'un pas asymptotique pour différents ordres de troncature des séries

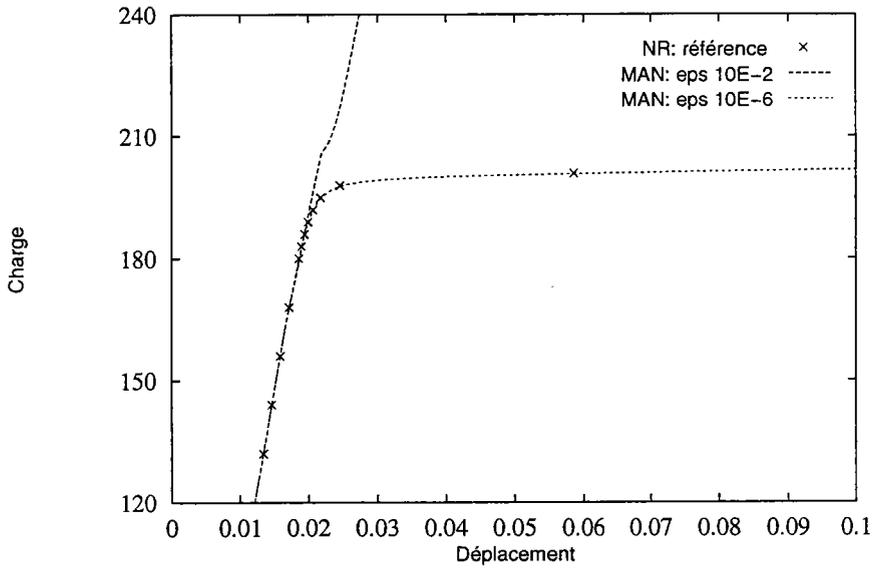


FIG. III.5 – Courbes charge / déplacement d'une poutre en traction uniaxiale avec la loi élastique parfaitement plastique régularisée: comparaison entre la solution itérative et celle de la MAN

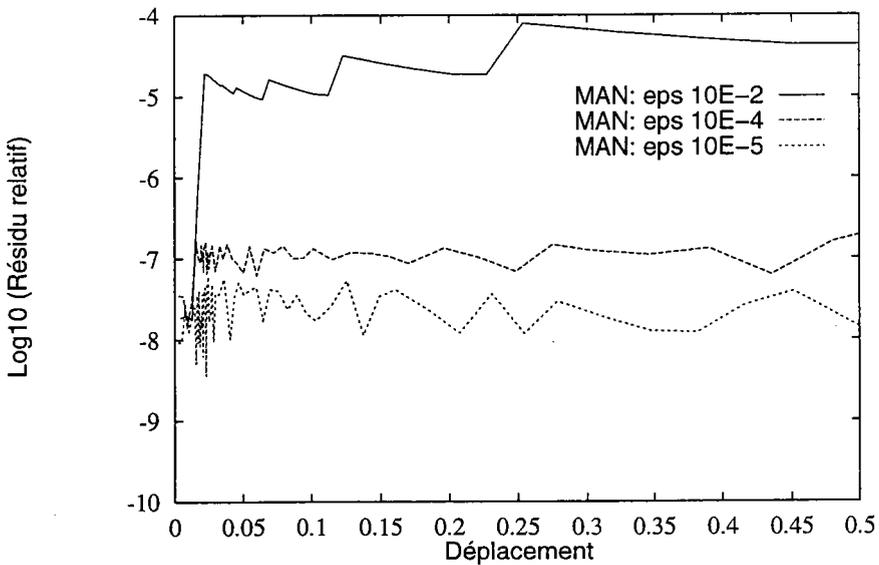


FIG. III.6 – Courbes représentant la qualité de la solution asymptotique dans le cas de la plaque en traction uniaxiale avec la loi élastique parfaitement plastique régularisée

Passons à présent à l'application de la loi de comportement de type puissance

pour traiter le même problème avec la même géométrie mais dont les constantes du matériau sont les suivantes: ($E = 10^5$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$ et $\sigma_y = 200$). En ce qui concerne le paramètre η , il intervient dans cette loi uniquement pour éviter une division par zéro au démarrage de la solution asymptotique; dans cet exemple, nous prenons $\eta = 10^{-2}$.

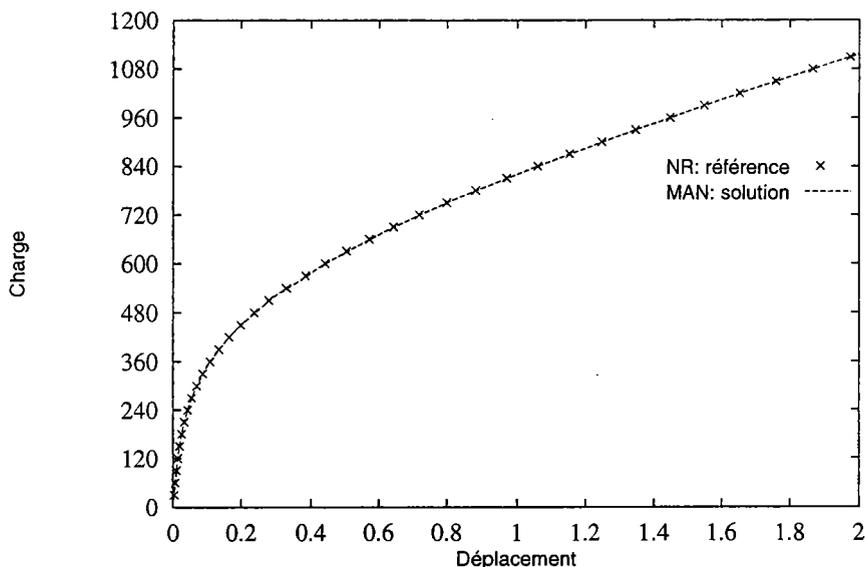


FIG. III.7 – Courbes charge / déplacement d'une poutre en traction uniaxiale avec la loi de type puissance régularisée: comparaison entre la solution itérative et celle de la MAN

Newton-Raphson			
	s = 1.	s = 5.	s = 10.
Nombre de pas	187	38	19
Nombre de décomp. Kt	320	87	43

TAB. III.2 – Traction simple, loi puissance : analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (le résidu relatif admissible est de 10^{-3})

Pour la comparaison entre la solution de la MAN et celle obtenue par l'algorithme de Newton-Raphson, nous avons effectué 3 calculs itératifs pour différentes longueurs d'arc avec un critère sur le résidu relatif de 10^{-3} et un calcul asymptotique à l'ordre 15 avec $\epsilon_1 = 10^{-4}$. Sur le tableau (III.2), nous avons reporté le nombre de pas ainsi

que le nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente K_t pour les 3 calculs itératifs. Ainsi, pour obtenir 19 points sur la courbe, l'algorithme itératif exige 43 décompositions de K_t alors que la solution de la MAN qui est continue, n'a besoin que de 8 décompositions en assurant un résidu relatif de l'ordre de 10^{-5} en tout point de la courbe.

Lorsque nous considérons maintenant la loi élasto-plastique avec un écrouissage linéaire dont les constantes du matériau sont ($E = 10^5$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 200$ et le paramètre d'écrouissage $h = 10^4$), nous pouvons faire les mêmes remarques que précédemment. En effet, sur la figure (III.8) et le tableau (III.3), nous avons la réponse charge / déplacement ainsi que le nombre de décompositions de K_t lorsque l'algorithme de Newton-Raphson est utilisé. Pour obtenir un minimum de points sur la courbe, il faut décomposer 41 matrices K_t dans le cas de l'algorithme itératif et seulement 10 lorsque la MAN est utilisée avec $\epsilon_1 = 10^{-4}$ et $\eta = 10^{-2}$.

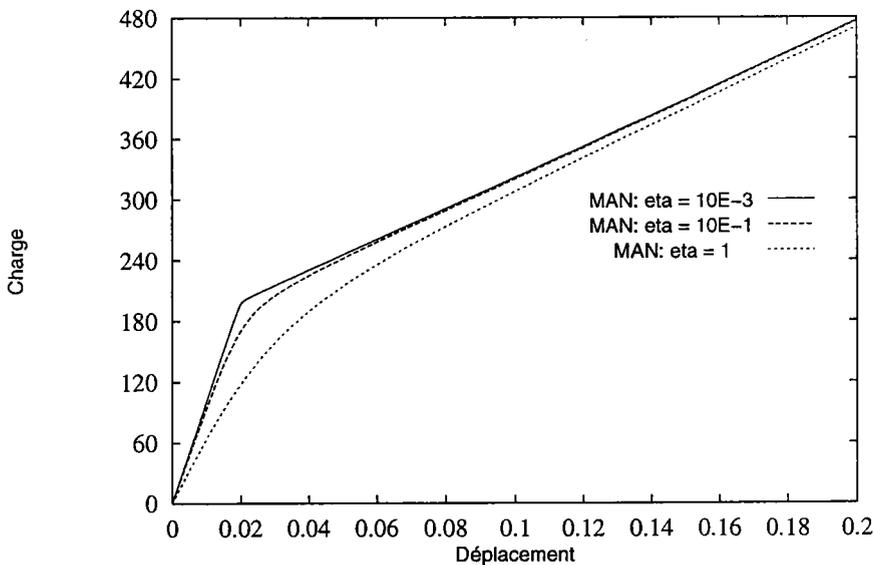


FIG. III.8 – Courbes charge / déplacement pour différentes valeurs de η d'une poutre en traction uniaxiale: loi régularisée de type élasto-plastique avec un écrouissage linéaire

Newton-Raphson			
	s = 1.	s = 5.	s = 10.
Nombre de pas	80	16	8
Nombre de décomp. Kt	241	72	41

TAB. III.3 – *Traction simple, loi élastique parfaitement plastique : analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (le résidu relatif admissible est de 10^{-3})*

III.4.2 Plaque en flexion

Dans le présent exemple, nous considérons la plaque étudiée dans le premier test mais sollicitée en flexion. La charge P est maintenant appliquée suivant la troisième direction, c'est à dire la direction normale à la surface moyenne. La structure est encadrée sur le bord fixe. Le but de ce test est d'analyser le comportement en flexion de cette plaque en utilisant les trois lois de comportement proposées dans ce chapitre et de comparer les résultats obtenus avec la solution de référence calculée par l'algorithme de Newton-Raphson.

Nous reprenons dans cette étude, l'analyse effectuée dans l'exemple de traction avec les mêmes données physiques et géométriques. Les conclusions restent toujours en faveur de la MAN. En effet, les calculs de la méthode asymptotique exigent un nombre réduit de pas, soit 20, 10 ou 21 pas selon que la loi considérée est respectivement la loi élastique parfaitement plastique, la loi de type puissance ou bien encore la loi élasto-plastique avec écrouissage linéaire. Dans les trois cas, l'ordre de troncature est 15, le paramètre de précision $\epsilon_1 = 10^{-4}$ et celui de régularisation $\eta = 10^{-2}$, ce qui permet d'obtenir un résidu relatif en fin de calcul qui soit inférieur à 10^{-3} .

Dans le cas de la loi élastique parfaitement plastique, nous montrons sur le tableau (III.4) que pour obtenir 10 points sur la courbe solution, ce qui représente un minimum d'information, il faut inverser 55 matrices de rigidité tangente lorsque nous utilisons l'algorithme de Newton-Raphson. Avec la méthode asymptotique, seulement 20 pas sont nécessaires pour obtenir une branche de solution continue et pour atteindre le

même déplacement. Cette différence de nombre de décompositions de K_t peut induire de grosses différences en temps de calcul lorsque le problème à traiter est de grande taille, car le temps nécessaire pour la décomposition de la matrice de rigidité tangente devient prépondérant par rapport à celui qui concerne le calcul des seconds membres. Pour étayer notre raisonnement sur la courbe de traction que nous avons étudiée dans l'exemple précédent avec $\epsilon = 10^{-2}$ et $\eta = 10^{-2}$, nous reprenons la même étude pour le cas de la flexion; ainsi nous reportons sur la figure (III.10) l'évolution de la contrainte équivalente d'un point de la structure en fonction du déplacement (ou du chargement) du point d'application de la force pour deux valeurs du paramètre de précision $\epsilon = 10^{-4}$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

Dans le premier cas, la contrainte équivalente reste inférieure à la limite d'élasticité σ_y durant toute la phase de chargement, c'est à dire qu'elle suit la bonne branche de solution. Dans le deuxième cas, à l'approche de σ_y , la solution passe sur la deuxième branche de l'hyperbole, la contrainte équivalente dépasse σ_y et devient physiquement inadmissible. Ce deuxième exemple montre qu'il faut bien choisir le paramètre de précision ϵ afin de pouvoir suivre la bonne branche solution du problème physique.

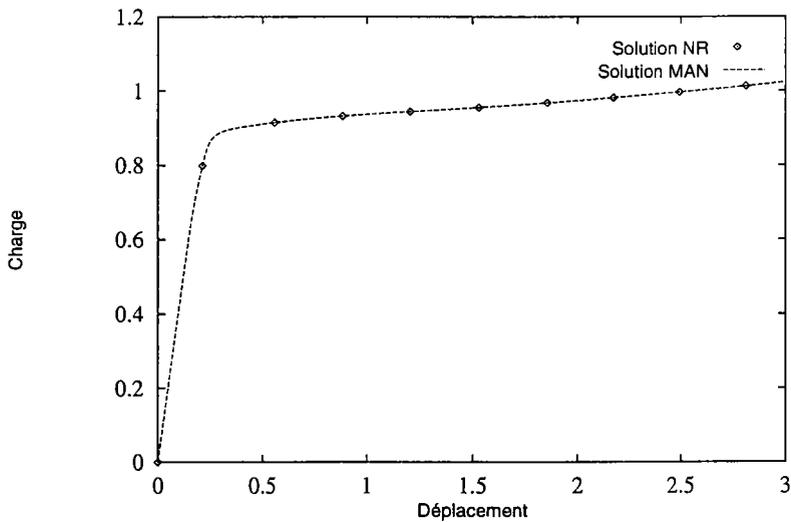


FIG. III.9 – *Courbe charge / déplacement de la plaque en flexion avec une loi de comportement élastique parfaitement plastique régularisée*

Newton-Raphson			
	s = 0.1	s = 0.5	s = 1.
Nombre de pas	98	20	10
Nombre de décomp. Kt	279	86	55

TAB. III.4 – Flexion, loi élastique parfaitement plastique : analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson

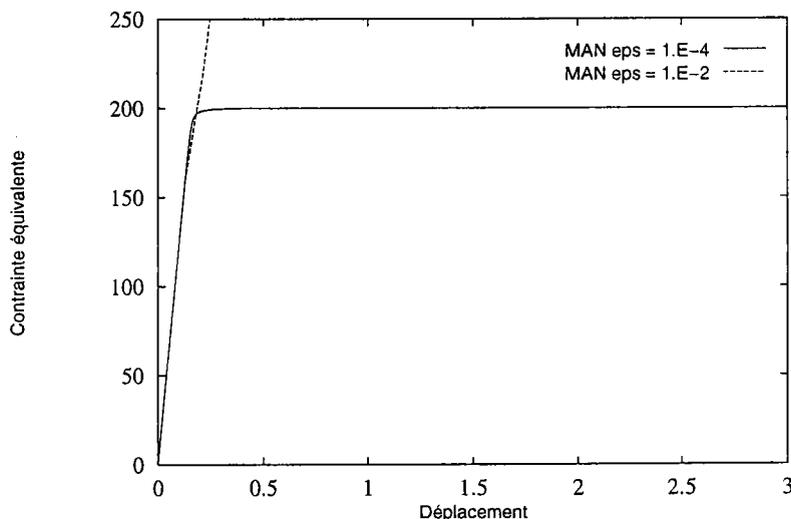


FIG. III.10 – Courbes montrant l'évolution de la contrainte équivalente au cours du chargement pour différentes valeurs de ϵ

Dans le cas de la loi de type puissance, nous voyons sur le tableau (III.5) que pour atteindre une flèche de 3 mm, l'algorithme de Newton-Raphson nécessite 83 décompositions de la matrice de rigidité tangente Kt durant 10 pas de calcul alors que le même résultat est obtenu avec 10 pas asymptotiques, c'est à dire 10 décompositions de Kt. Notons au passage, sur la figure (III.12) où nous représentons les courbes solutions de la MAN en utilisant la loi puissance, que la solution asymptotique avec $\epsilon = 10^{-2}$ diverge à partir d'un déplacement supérieur à 1. Nous observons en même temps, sur la figure (III.13) où l'évolution du résidu est suivie de manière continue, que ce dernier n'est pas assez précis à partir du point de divergence de la courbe charge / déplacement. Ce phénomène n'est pas surprenant car pour obtenir une so-

lution correcte du problème il faut choisir un ϵ assez précis. Cette remarque rejoint celle exprimée dans le cas de l'exemple de traction avec la loi élastique parfaitement plastique.

Lorsque ce test de flexion est traité en utilisant la loi élasto-plastique avec un écrouissage linéaire, les tendances restent les mêmes. En effet, 7 pas de Newton-Raphson avec une longueur d'arc $s = 1$ demandent 76 décompositions de K_t , alors que pour atteindre le même niveau de chargement, la MAN n'exige que 21 pas.

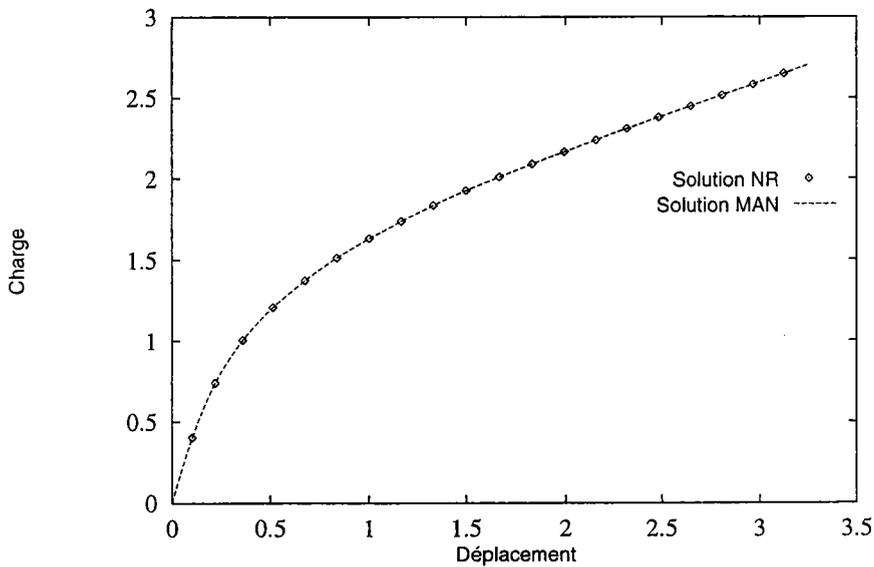


FIG. III.11 – Courbe charge / déplacement de la plaque en flexion pour le cas de la loi de type puissance

Newton-Raphson			
	$s = 0.1$	$s = 0.5$	$s = 1.$
Nombre de pas	96	20	10
Nombre de décomp. K_t	507	150	83

TAB. III.5 – Flexion, loi puissance : analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson

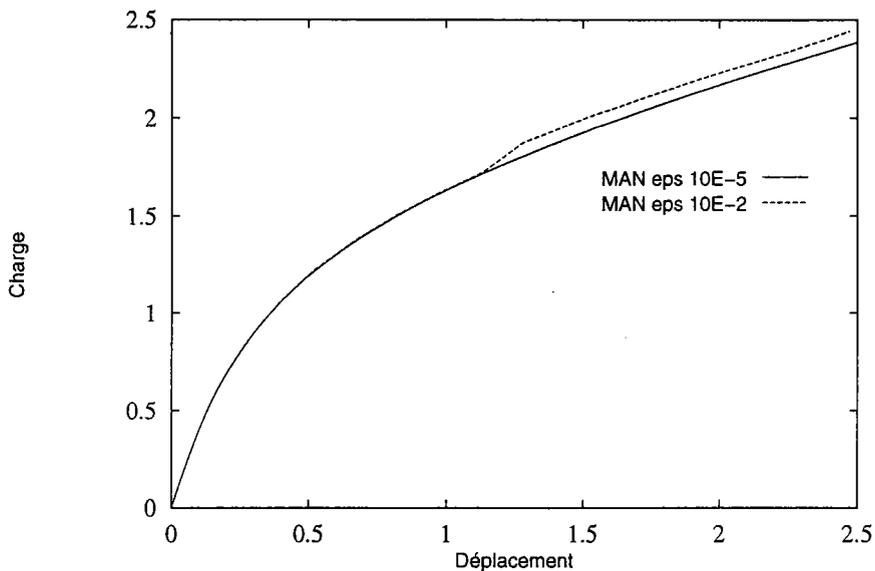


FIG. III.12 – Courbe charge / déplacement de la poutre en flexion avec la loi de type puissance: comparaison entre deux solutions utilisant respectivement $\epsilon = 10^{-5}$ et $\epsilon = 10^{-2}$

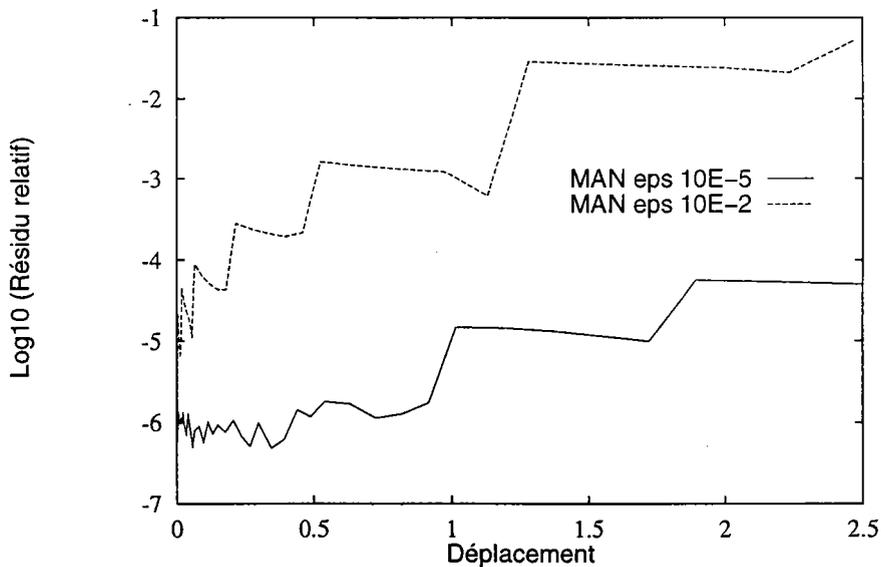


FIG. III.13 – Courbe donnant l'évolution du résidu relatif en fonction du déplacement pour deux solutions utilisant différents paramètres de précision $\epsilon = 10^{-5}$ et $\epsilon = 10^{-2}$ (plaque en flexion, loi de comportement de type puissance)

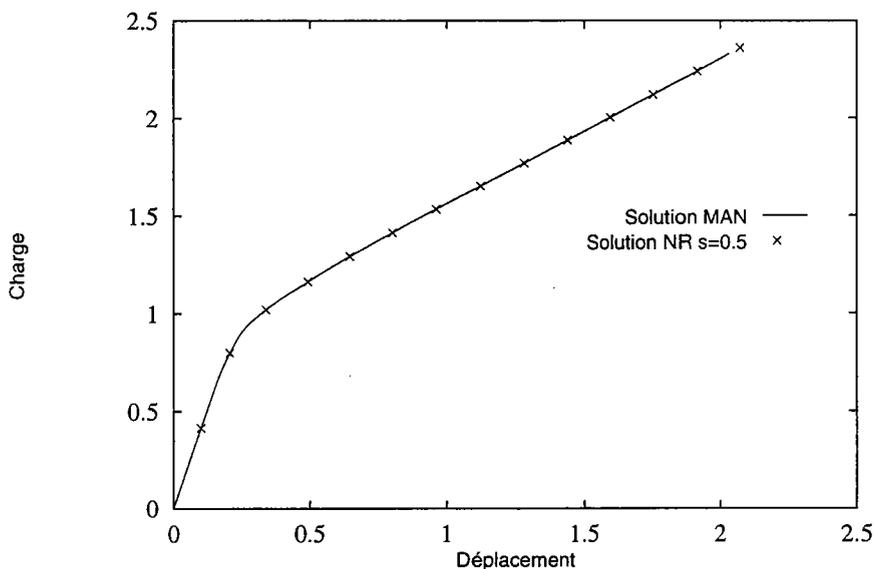


FIG. III.14 – Courbe charge / déplacement de la poutre en flexion (la loi élasto-plastique avec écrouissage linéaire)

Newton-Raphson			
	s = 0.1	s = 0.5	s = 1.
Nombre de pas	96	14	7
Nombre de décomp. Kt	372	118	76

TAB. III.6 – Flexion, loi élastoplastique avec écrouissage linéaire : analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d’arc imposée dans le cas de l’algorithme de Newton-Raphson

III.4.3 Toit sous charge ponctuelle

Dans cette section, nous reprenons l’exemple du toit qui a fait l’objet d’une étude élastique dans le chapitre I. Nous analysons ici le comportement de cette structure en considérant les trois lois de comportement présentées dans ce chapitre. Ce test permet de coupler les effets de membrane et ceux de flexion. La courbe charge / déplacement présente des points limites et elle fait apparaître le phénomène de claquage. Sur la figure (III.15) nous avons les caractéristiques géométriques de la structure du toit ainsi que le module de Young et le coefficient de Poisson; les caractéristiques du matériau sont complétées par la contrainte limite d’élasticité $\sigma_y = E/200$ pour la loi élastique

parfaitement plastique, par les coefficients $\alpha = 0.5$ et $n = 3.5$ pour la loi puissance et par le coefficient d'écroûissage $h = E/10$ pour la loi élasto-plastique avec écroûissage linéaire.

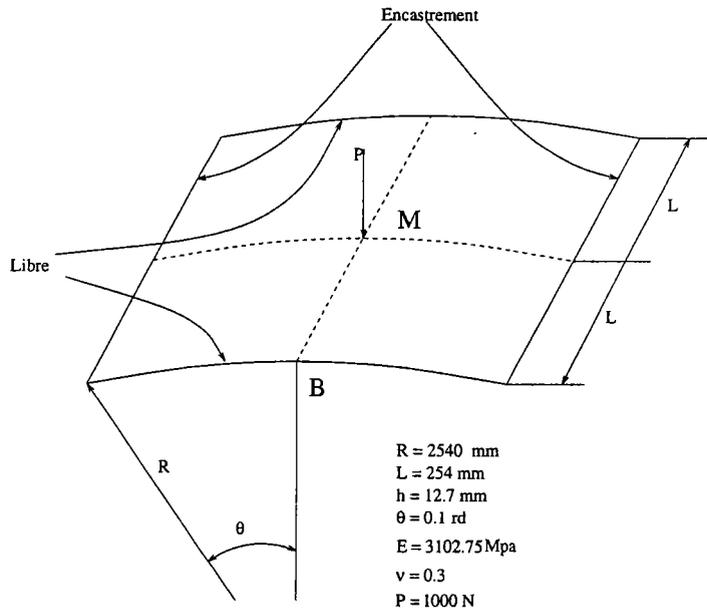


FIG. III.15 – Description géométrique du toit

Dans tous ces exemples, nous prenons un paramètre de régularisation $\eta = 10^{-2}$. Dans un premier temps, nous analysons le calcul mené dans le cas de la loi élastique parfaitement plastique. Sur la figure (III.16), nous avons la réponse de la charge en fonction du déplacement; nous avons choisi la contrainte limite d'élasticité de façon à ce que la structure plastifie avant son claquage. Comme le montre la figure (III.17), la contrainte équivalente a bien atteint son maximum durant le chargement; au cours du phénomène de claquage, il y a eu décharge de la contrainte, mais cette dernière se fait sur le même chemin de chargement. Nous expliciterons ce phénomène dans le cas de la loi puissance. En ce qui concerne le nombre de pas de calcul, nous avons reporté sur le tableau (III.7) le nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente pour différentes valeurs de longueur d'arc imposée lorsque la méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée. Ainsi, pour atteindre une flèche de 30mm , cet algorithme exige au moins 67 décompositions de Kt pour obtenir seulement 13 points

sur la courbe de réponse. En utilisant l'algorithme de la MAN à l'ordre 15 avec un $\epsilon = 10^{-4}$, 23 pas seulement sont nécessaires pour obtenir une courbe continue avec un résidu relatif inférieur à 10^{-3} .

En ce qui concerne le calcul mené dans le cas de la loi de comportement de type puissance, 119 décompositions de Kt sont exigées par l'algorithme itératif pour obtenir un minimum d'information (13 points sur la courbe) et seulement 12 décompositions de Kt permettent de décrire toute la branche solution lorsque la MAN est utilisée (voir tableau III.8).

Pour illustrer le phénomène de décharge, nous montrons sur la figure (III.19) qu'au moment du claquage de la structure, il y a eu une baisse de la contrainte impliquant automatiquement une décharge qui se manifeste clairement sur la figure (III.20). En effet, au sixième pas, juste après le passage du point limite de la réponse charge déplacement, commence la décharge. Cette dernière correspond à une décomposition de sens sur la courbe de la figure (III.20) jusqu'au huitième pas à partir duquel la contrainte recommence à augmenter.

Nous pouvons observer le même phénomène lorsque la loi élastoplastique avec un écrouissage linéaire est utilisée. Nous indiquons ici uniquement le nombre de décompositions de Kt qui s'élève à 76 dans le cas des calculs itératifs et seulement à 26 lorsque la MAN est utilisée (III.9).

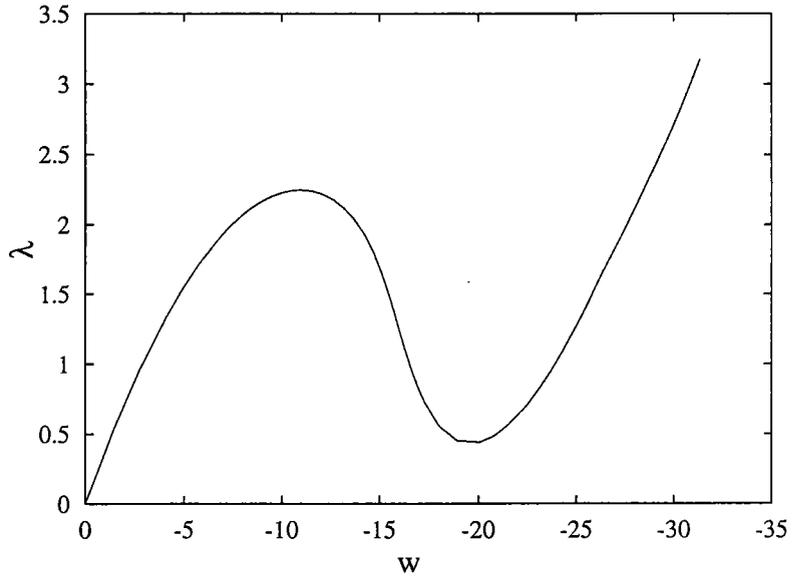


FIG. III.16 – Courbe charge / déplacement vertical du point d'application de la force: loi élastique parfaitement plastique régularisée

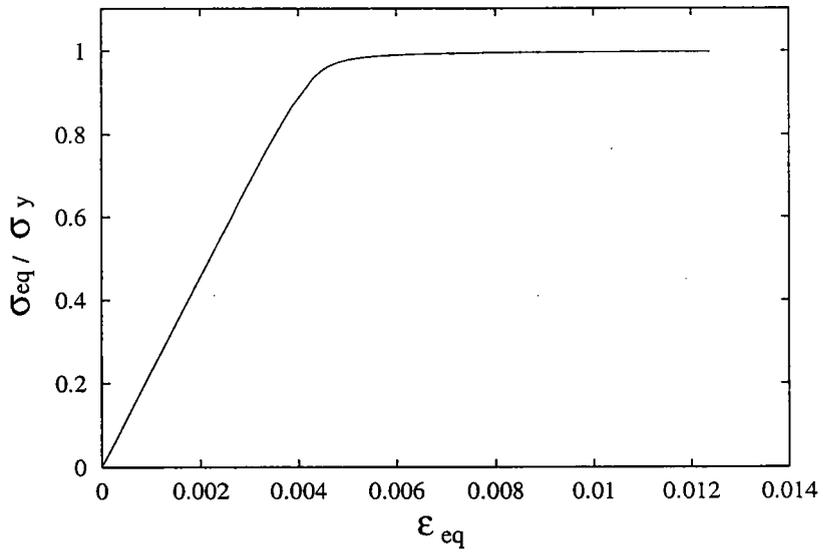


FIG. III.17 – Courbe représentant l'évolution de la réponse contraintes équivalente en fonction de la déformation équivalente en un point situé au centre de la coque: loi élastique parfaitement plastique régularisée

Newton-Raphson			
	s = 2.	s = 5.	s = 10.
Nombre de pas	62	25	13
Nombre de décomp. Kt	243	115	67

TAB. III.7 – Toit, loi élastique parfaitement plastique : analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (résidu relatif max admissible est de 10^{-3})

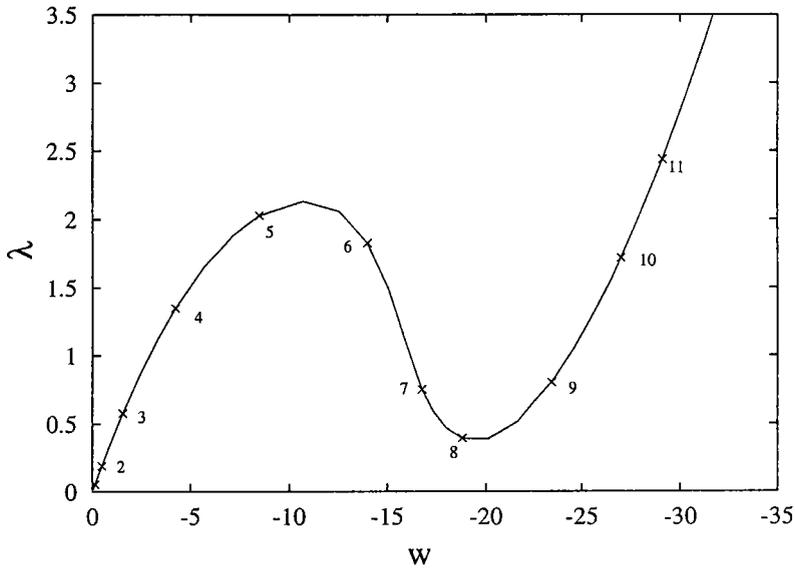


FIG. III.18 – Courbe charge / déplacement vertical du point d'application de la force: loi puissance régularisée

Newton-Raphson			
	s = 2.	s = 5.	s = 10.
Nombre de pas	63	25	13
Nombre de décomp. Kt	451	206	119

TAB. III.8 – Toit, loi puissance : analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (résidu relatif max admissible est de 10^{-3})

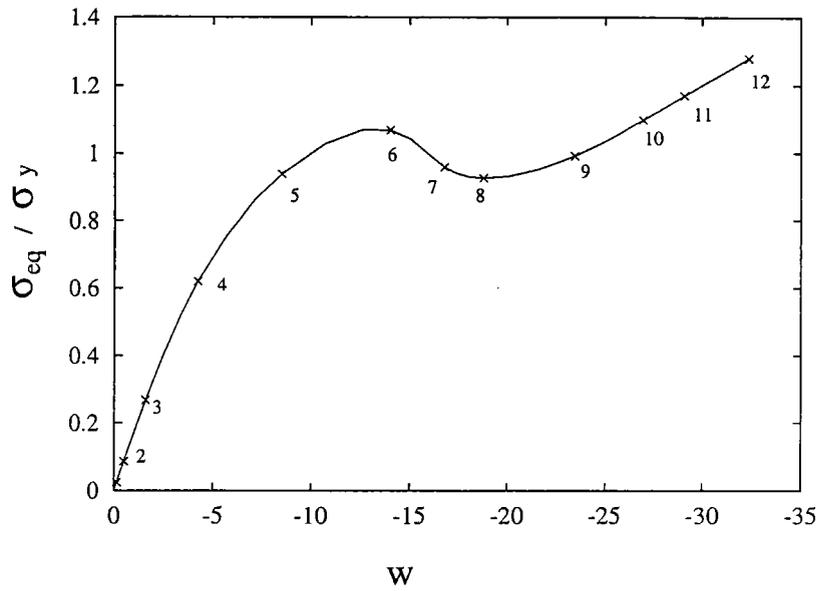


FIG. III.19 – Courbe donnant l'évolution, au point central de la coque, de la contrainte équivalente en fonction de la flèche: loi puissance

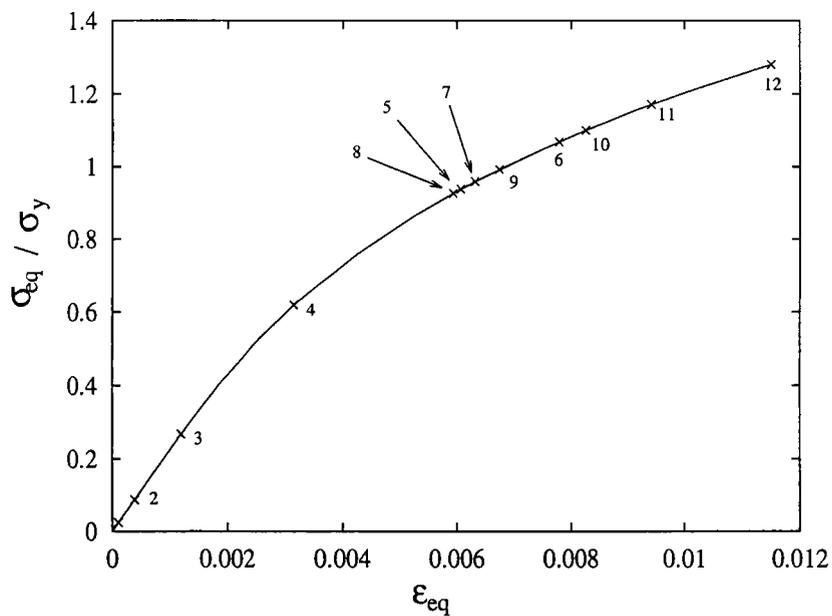


FIG. III.20 – Courbe contrainte équivalente en fonction de la déformation équivalente dans le cas de la loi puissance: les points représentent les fins de pas asymptotiques

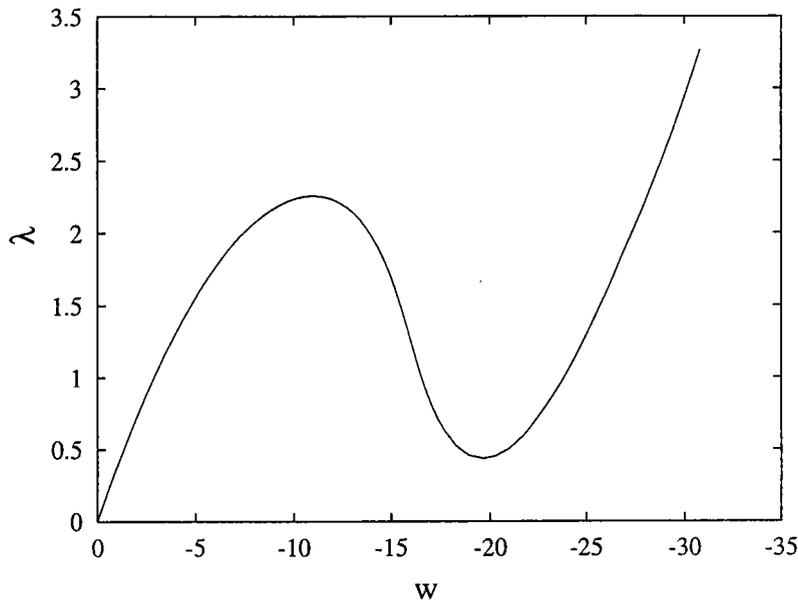


FIG. III.21 – Courbe charge / déplacement vertical du point d'application de la force: loi régularisée de type élasto-plastique avec un écrouissage linéaire

Newton-Raphson			
	s = 2.	s = 5.	s = 10.
Nombre de pas	62	25	13
Nombre de décomp. Kt	262	124	76

TAB. III.9 – Analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (résidu relatif max admissible est de 10^{-3})

III.4.4 Flambage plastique d'une coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires: analyse du temps de calcul

Dans le présent exemple, nous nous intéressons particulièrement au temps de calcul lorsque la MAN est utilisée avec une loi de comportement non linéaire. Pour ce faire, nous reprenons l'exemple du cylindre du paragraphe (II.6.1) avec un seul maillage à 1830 degrés de liberté. Dans le cadre de cette étude, nous considérons dans un premier temps la loi de type puissance avec les caractéristiques suivantes du matériau ($E = 71122.5$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $n = 3.5$, $\sigma_y = 71.1225$ et $\eta = 10^{-2}$) et dans un deuxième temps, la loi élastique parfaitement plastique régularisée dont les

caractéristiques du matériau sont les suivantes ($E = 71122.5$, $\nu = 0.3$, $\sigma_y = 100$ et $\eta = 10^{-1}$).

Sur les tableaux (III.10) et (III.11), nous reportons, en fonction de l'ordre de troncature des séries, le nombre de pas de calcul, le rapport entre le temps nécessaire à l'évaluation des seconds membres et celui exigé pour l'évaluation et la décomposition de la matrice de rigidité tangente. Nous reportons également le temps total relatif qui correspond au temps total CPU divisé par celui nécessaire pour une simple prédiction de Newton-Raphson. Cette étude nous permet d'établir l'ordre optimal de troncature des séries, c'est-à-dire celui qui minimise le temps total de calcul. Nous avons utilisé un paramètre de précision basé sur le critère déplacement ($\epsilon_1 = 10^{-4}$). Le calcul, quant à lui, s'arrête lorsque la flèche atteint 10 mm pour la loi puissance et 8 mm pour la loi hyperbolique, ce qui correspond à un déplacement au delà du point limite de chargement (voir les figures III.23 et III.24).

Nous constatons que pour les deux lois de comportement, l'ordre optimal de troncature se situe vers 10; rappelons que ce dernier a été établi à l'ordre 15 pour le cas élastique. Cette tendance à la baisse de l'ordre optimal est logique car nous décomposons dans tous les cas une matrice de rigidité tangente de même dimension. Par contre, dans le cas plastique, les seconds membres prennent en compte la non-linéarité du matériau et cela se manifeste par les variables supplémentaires que nous avons introduites dans le problème.

Une autre constatation intéressante concerne le nombre de pas de calcul. En effet, ce dernier décroît avec l'ordre de troncature dans le cas de la loi hyperbolique, ce qui est normal car l'ordre de troncature doit améliorer le domaine de validité de la solution asymptotique; mais pour la loi de type puissance le nombre de pas tend à augmenter à partir de l'ordre 15, ce qui est dû à la nature de la loi de comportement que nous avons régularisée pour éviter une division par zéro. Pour des ordres élevés, cette division induit une croissance indésirable des termes calculés ce qui affecte l'efficacité de la méthode. Sur plusieurs calculs, nous avons observé qu'au départ de la courbe,

les petits ordres ont un domaine de validité plus important que les grands, mais ces derniers prennent le relais après quelques pas de calcul et leurs domaines de validité retrouvent une valeur correcte.

Le rapport F^{nl}/Kt est pratiquement le même entre la loi puissance et la loi hyperbolique car dans les deux cas nous décomposons une matrice de rigidité tangente de même taille et nous calculons des seconds membres ayant le même niveau de complexité. Pour les deux lois, nous avons introduit deux variables scalaires supplémentaires. En comparant ce rapport à celui du calcul élastique étudié dans l'exemple (II.6.1) à l'ordre 10 par exemple (0.45 en élasticité et 0.61 en plasticité), nous pouvons conclure que le calcul plastique d'un pas mené par la MAN demande une augmentation de seulement 16% par rapport au calcul d'un pas dans le cas élastique.

Pour compléter notre étude, au risque de nous répéter, nous avons repris l'exemple du toit épais (240 d.d.l), étudié dans le section (III.4.3), pour retrouver les mêmes tendances à savoir un ordre de troncature optimal de 10 et, pour les raisons citées précédemment, une augmentation du nombre de pas en fonction de l'ordre de troncature lorsque la loi puissance est utilisée. (voir les figures III.12 et III.13).

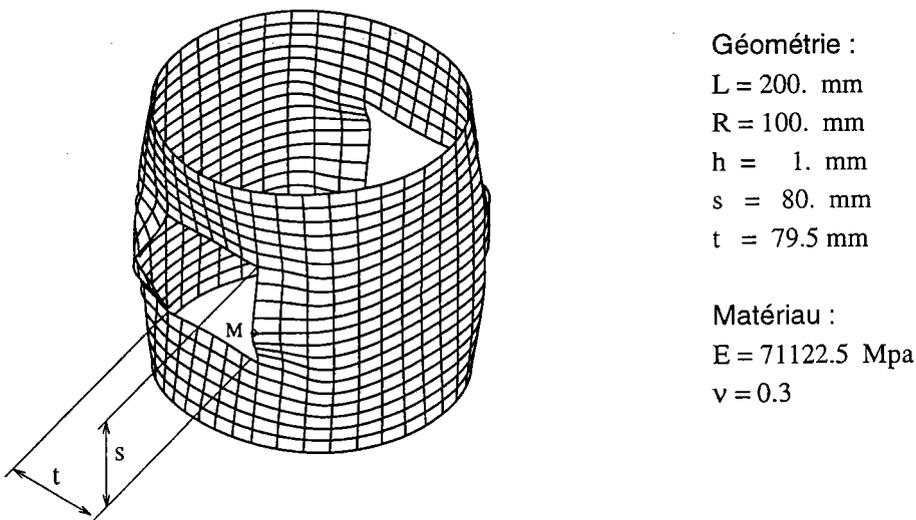


FIG. III.22 - Configuration déformée de la coque cylindrique soumise à l'action d'une pression axiale uniforme $P=981. \text{ N/mm}$

TAB. III.10 – Flambage de la coque cylindrique avec deux ouvertures. Temps de calcul MAN: loi de type puissance (machine utilisée : HP 9000 K 200).

	Ordre 5	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 15	Ordre 20	Ordre 30
Nombre de pas	44	24	21	20	20	22
évaluation de F_{nl} décomposition Kt	0.24	0.45	0.61	1.09	1.70	3.25
Temps total relatif	54.56	34.80	33.81	41.80	54.00	93.50

TAB. III.11 – Flambage de la coque cylindrique avec deux ouvertures. Temps de calcul MAN: loi élastique parfaitement plastique (machine utilisée : HP 9000 K 200).

	Ordre 5	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 15	Ordre 20	Ordre 30
Nombre de pas	56	32	27	23	22	21
évaluation de F_{nl} décomposition Kt	0.24	0.45	0.61	1.09	1.71	3.26
Temps total relatif	69.44	46.40	43.47	48.07	59.62	89.46

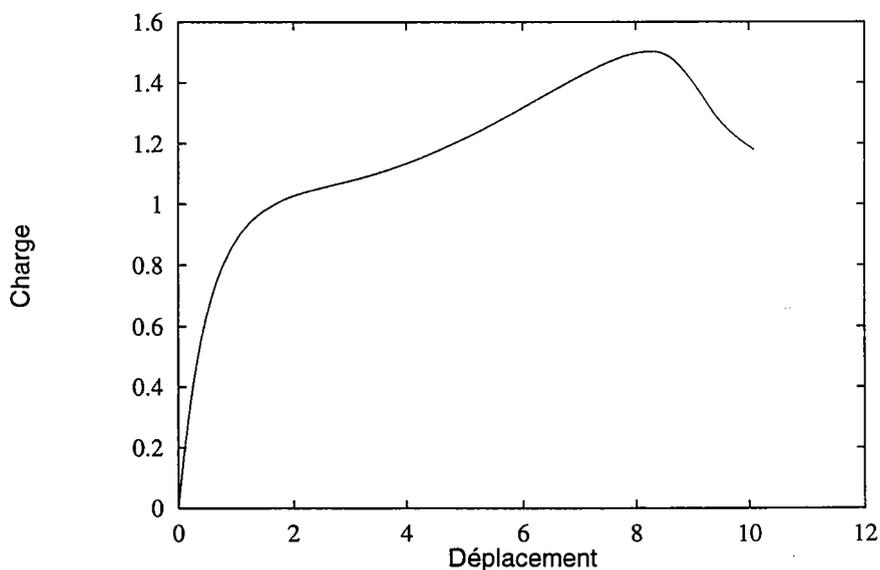


FIG. III.23 – Cylindre troué, loi puissance. Courbe charge / déplacement radial du point milieu du bord vertical de l'ouverture limité à 10

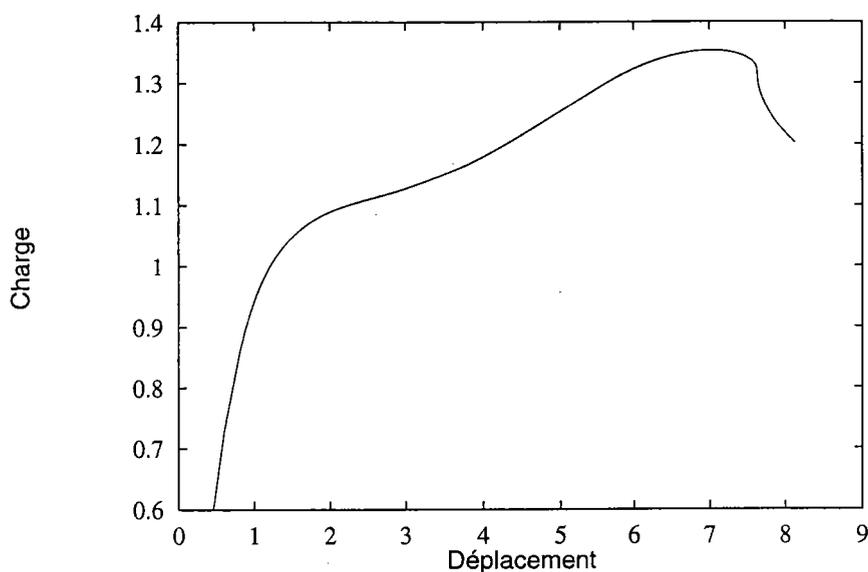


FIG. III.24 – Cylindre troué, loi élastique parfaitement plastique. Courbe charge / déplacement radial du point milieu du bord vertical de l'ouverture limité à 8

TAB. III.12 – Flambage de la structure de toit épais. Temps de calcul MAN: loi de type puissance (machine utilisée : HP 9000 K 200).

	Ordre 5	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 15	Ordre 20	Ordre 30
Nombre de pas	17	10	10	12	12	15
évaluation de F_{nl} décomposition Kt	0.25	0.46	0.63	1.14	1.78	3.42
Temps total relatif	21.25	14.60	16.30	25.68	33.36	66.30

TAB. III.13 – Flambage de la structure de toit épais. Temps de calcul MAN: loi élastique parfaitement plastique (machine utilisée : HP 9000 K 200).

	Ordre 5	Ordre 8	Ordre 10	Ordre 15	Ordre 20	Ordre 30
Nombre de pas	50	30	26	23	21	20
évaluation de F_{nl} décomposition Kt	0.25	0.47	0.63	1.14	1.78	3.45
Temps total relatif	62.50	44.10	42.38	49.22	58.80	89.00

III.5 Discussion

Nous avons présenté dans ce chapitre une extension de la M.A.N. pour la résolution de problèmes plastiques en utilisant une théorie basée sur la déformation totale. C'est un premier pas qui nous ouvre des portes pour inclure plus tard des lois plastiques prenant en compte la décharge élastique. Néanmoins, dans le cadre de l'étude que nous avons menée ici, nous montrons clairement que l'utilisation d'une loi de comportement non linéaire est possible et que son implémentation est facile. De plus, en procédant à un changement de variables judicieusement choisi, l'algorithme asymptotique est pratiquement identique à celui présenté dans le cas élastique avec une formulation quadratique. Cet algorithme reste fiable et optimisé car il applique les mêmes procédures de continuation asymptotique que nous avons présentées dans le chapitre II. Nous avons, en outre, apprécié le temps de calcul en analysant le nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente et cela en comparant les calculs menés par la MAN et ceux effectués par l'algorithme itératif de Newton Raphson. Rappelons que contrairement aux procédures itératives qui cherchent la solution sous forme discrète, la MAN permet d'obtenir une solution continue avec un résidu d'équilibre et un résidu de comportement faibles en tout point.

Les exemples que nous avons choisis pour valider l'implémentation des trois lois de comportement présentées dans ce travail, montrent que nous devons choisir un paramètre de précision ϵ_1 petit de l'ordre de 10^{-4} (ou plus petit) selon le problème traité. Ce choix doit nous permettre d'éviter d'obtenir un mauvais résidu en fin de calcul comme dans le cas du test de flexion avec une loi de type puissance (figure III.12) et en même temps cela nous permet de ne pas attraper la deuxième branche de l'hyperbole qui est physiquement inadmissible lorsque les deux autres lois sont utilisées (c'est-à-dire la loi élastique parfaitement plastique et la loi élastoplastique avec un écrouissage linéaire).

En nous inspirant de l'étude sur le temps de calcul de la formulation quadratique

de la section (I.2), nous avons choisi de formuler les problèmes de ce chapitre dans un cadre quadratique pour toutes les lois de comportement moyennant un stockage supplémentaire qui correspond pour la plupart de ces lois, par rapport au cas élastique, à deux simples variables scalaires à chaque point de Gauss et à tout ordre de la série. Ceci représente une faible augmentation de la taille mémoire totale par comparaison à une étude élastique surtout pour des problèmes de grandes tailles. En outre, l'exemple à 1830 d.d.l. (section III.4.4) montre que le calcul plastique n'exige qu'une majoration de 16% du temps de calcul d'un pas asymptotique par rapport au cas élastique.

Enfin, nous notons que toutes les procédures d'amélioration du rayon de convergence des séries telles que les approximants de Padé restent applicables sans aucune difficulté supplémentaire dans l'algorithme présenté dans ce chapitre.

Conclusion générale

Au cours du présent travail, nous avons mené deux études distinctes dans le cadre de la méthode asymptotique numérique. La première concerne l'application de la MAN aux coques élastiques en grandes rotations ; la deuxième étude, quant à elle, a été consacrée à l'adaptation de la MAN pour résoudre des problèmes de coque utilisant des lois de comportement non linéaire.

Dans le cadre de la première étude, nous avons choisi une formulation de coque proposée par Büchter et al. en 1994. Elle est bien adaptée aux coques en grandes rotations en utilisant uniquement des variables de type déplacement. Cela nous a permis d'éviter l'utilisation des matrices des grandes rotations et nous a permis également de formuler le problème dans un cadre quadratique de manière à utiliser des algorithmes semblables à ceux déjà présentés par Azrar et al. [7] et Cochelin et al. [26].

Grâce à la déformation additionnelle introduite au moyen du concept EAS, la formulation résultante utilise une loi de comportement tridimensionnelle sans condensation permettant ainsi d'étendre facilement notre étude aux coques dont le matériau a un comportement non linéaire. Dans ce cadre, nous avons proposé trois types de lois représentatives de la réponse non linéaire des matériaux. Comme ces lois présentaient des points singuliers, elles ont été régularisées pour permettre leur développement sous forme de séries. En outre, comme nous ne savons pas prendre en compte la décharge élastique, nous nous sommes limité au cadre de la théorie de la déformation totale, c'est-à-dire que toutes les lois développées dans ce travail sont considérées comme des lois élastiques non linéaires.

D'après les tests que nous avons réalisés, la MAN s'avère beaucoup plus efficace

qu'une méthode itérative classique et ceci pour la classe de problèmes traités dans le présent travail. En effet, elle décompose moins de matrices de rigidité tangente ; de plus, elle est fiable et simple à utiliser car les pas asymptotiques s'adaptent automatiquement en fonction de la non-linéarité locale des courbes de réponse. Cette qualité de la MAN se manifeste clairement en présence de points limites (voir le problème de l'arc profond II.6.5) ou d'une quasi-bifurcation (voir le problème de flambage latéral de poutre II.6.3).

Notons qu'une analyse fine de bifurcation à l'aide de la méthode asymptotique numérique est simple à mettre en oeuvre. En effet, les travaux présentés par Boutyour [15] ou Vannucci [80] utilisant les indicateurs de bifurcation peuvent être étendus au cadre de la formulation étudiée dans le chapitre II sans aucune difficulté. En outre, toutes les techniques d'amélioration du domaine de validité de la représentation polynomiale restent valables et applicables de manière simple dans les algorithmes présentés dans ce travail [53] [45].

A court terme, il serait souhaitable d'étendre notre analyse à la résolution des problèmes de coques en plasticité utilisant une vraie loi de comportement qui tient compte de la décharge élastique. Ceci nous permettra d'aborder les problèmes de flambage plastique de manière plus réaliste et de mener des calculs de mise en forme des matériaux (les algorithmes sur le contact unilatéral par la MAN sont disponibles dans le travail d'Elhage [45]).

ANNEXE A

Matrices servant à la discrétisation
de l'élément de coque étudié dans
le chapitre I

$$[G] = \begin{bmatrix} N_{k,1} & 0 & 0 & \theta^3 N_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,1} & 0 & 0 & \theta^3 N_{k,1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,1} & 0 & 0 & \theta^3 N_{k,1} \\ N_{k,2} & 0 & 0 & \theta^3 N_{k,2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,2} & 0 & 0 & \theta^3 N_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,2} & 0 & 0 & \theta^3 N_{k,2} \\ 0 & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \dots k = 1, 8$$

$$[R] = \begin{bmatrix} g_1^x & g_1^y & g_1^z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2^x & g_2^y & g_2^z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_3^x & g_3^y & g_3^z \\ g_2^x & g_2^y & g_2^z & g_1^x & g_1^y & g_1^z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3^x & g_3^y & g_3^z & g_2^x & g_2^y & g_2^z \\ g_3^x & g_3^y & g_3^z & 0 & 0 & 0 & g_1^x & g_1^y & g_1^z \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} S^{11} & 0 & 0 & S^{12} & 0 & 0 & S^{31} & 0 & 0 \\ 0 & S^{11} & 0 & 0 & S^{12} & 0 & 0 & S^{31} & 0 \\ 0 & 0 & S^{11} & 0 & 0 & S^{12} & 0 & 0 & S^{31} \\ S^{12} & 0 & 0 & S^{22} & 0 & 0 & S^{23} & 0 & 0 \\ 0 & S^{12} & 0 & 0 & S^{22} & 0 & 0 & S^{23} & 0 \\ 0 & 0 & S^{12} & 0 & 0 & S^{22} & 0 & 0 & S^{23} \\ S^{31} & 0 & 0 & S^{23} & 0 & 0 & S^{33} & 0 & 0 \\ 0 & S^{31} & 0 & 0 & S^{23} & 0 & 0 & S^{33} & 0 \\ 0 & 0 & S^{31} & 0 & 0 & S^{23} & 0 & 0 & S^{33} \end{bmatrix}$$

$$[B_\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta^3 & \theta^3\xi & \theta^3\eta & \theta^3\xi\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ANNEXE B

Modules tangents de comportement D_t et les contraintes résiduelles S^{res}

Il s'agit dans cette annexe d'explicitier, pour chaque loi de comportement développée dans le chapitre III, l'expression des modules tangents de comportement représentés par la matrice D_t et de définir les contraintes résiduelles notées S_p^{res} qui apparaissent à l'ordre p des développements asymptotiques.

B.1 Loi élastique parfaitement plastique régularisée

À l'ordre 1 nous avons la relation suivante:

$$S_1 = D_t : \gamma_1 \quad (\text{B.1})$$

Nous avons vu dans le chapitre III que cette équation est formulée comme suit:

$$S_1 = C_1 \gamma_1 + C_2 (\gamma_1 : I) I + C_3 (\gamma_1 : S_0^d) S_0^d \quad (\text{B.2})$$

$$S_1 = [C_1 \mathfrak{I} + C_2 I I + C_3 S_0^d S_0^d] : \gamma_1 \quad (\text{B.3})$$

où \mathfrak{I} est un tenseur identité d'ordre quatre et C_1, C_2 et C_3 sont des constantes définies par:

$$C_1 = \frac{E}{1 + \nu + \zeta_0}$$

$$C_2 = \frac{E(\nu + \frac{\zeta_0}{3})}{(1 - 2\nu)(1 + \nu + \zeta_0)}$$

$$C_3 = \frac{-3 \zeta_0 E}{(1 + \nu + \zeta_0)[(1 + \nu + \zeta_0)(\sigma_y^2 - s_0^{eq}) + 3 \zeta_0 S_0^d : S_0^d]}$$

A l'ordre p , la relation de comportement s'écrit sous la forme suivante:

$$S_p = D_t : \gamma_p + S_p^{res} \quad (\text{B.4})$$

La matrice D_t est exactement la même à tous les ordres; les contraintes résiduelles à l'ordre p s'écrivent comme suit:

$$S_p^{res} = \frac{1}{1 + \nu + \zeta_0} \left[C_4 \left[\vartheta S_0^d : S_0^d + \left(\sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r S_{p-r}^d \right) : S_0^d \right] - \vartheta \right] S_0^d - \frac{1}{1 + \nu + \zeta_0} \sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r S_{p-r}^d$$

avec

$$C_4 = \frac{3 \zeta_0}{(1 + \nu + \zeta_0)(\sigma_y^2 - s_0^{eq}) + 3 \zeta_0 S_0^d : S_0^d}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sigma_y^2 - s_0^{eq}} \left[\frac{3 \zeta_0}{2} \sum_{r=1}^{p-1} S_r^d : S_{p-r}^d + \sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r s_{p-r}^{eq} \right]$$

B.2 Loi de type puissance régularisée

Dans le cas de la loi puissance, nous retrouvons les mêmes équations B.1 et B.4 mais avec des coefficients différents. Ainsi les coefficients de l'équation B.3 s'écrivent maintenant comme suit:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{E (1 + \alpha \eta^n)}{1 + \nu + \kappa_0} \\ C_2 &= \frac{(3 \nu + \kappa_0) C_1}{3 (1 - 2 \nu)} \\ C_3 &= \frac{-K C_1}{1 + \nu + \kappa_0 + K S_0^d : S_0^d} \end{aligned}$$

avec

$$K = \frac{3 (n - 1) \kappa_0}{2 \sigma_0^2 \zeta_0^2}$$

A l'ordre p , les contraintes résiduelles s'écrivent comme suit:

$$S_p^{res} = \frac{1}{1 + \nu + \kappa_0} \left[C_5 \left[\vartheta S_0^d : S_0^d + \left(\sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r S_{p-r}^d \right) : S_0^d \right] - \vartheta \right] S_0^d - \frac{1}{1 + \nu + \kappa_0} \sum_{r=1}^{p-1} \kappa_r S_{p-r}^d$$

où

$$C_5 = \frac{K}{1 + \nu + \kappa_0 + K S_0^d : S_0^d}$$

$$\vartheta = \sum_{r=1}^{p-1} \frac{(p-r)(n-1) - r}{p \zeta_0} \zeta_{p-r} \kappa_r + \frac{3 (n-1) \kappa_0}{4 \sigma_0^2 \zeta_0^2} \sum_{r=1}^{p-1} S_r^d : S_{p-r}^d - \frac{(n-1) \kappa_0}{2 \zeta_0^2} \sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r \zeta_{p-r}$$

B.3 Loi élasto-plastique avec écrouissage linéaire régularisée

En ce qui concerne cette présente loi, nous avons utilisé une régularisation semblable à celle relative à la loi élastique parfaitement plastique. Nous nous intéressons particulièrement aux deux équations suivantes:

$$\bullet \quad E \gamma = (1 + \nu) A^d - (1 - 2\nu) P_A I + \zeta A^d \quad (\text{B.5})$$

$$\bullet \quad S = A + \frac{h}{E} \zeta A^d \quad (\text{B.6})$$

L'équation (B.6) permet d'écrire, à l'ordre p , la relation suivante:

$$A_p = \overline{D}_t : \gamma_p + A_p^{res} \quad (\text{B.7})$$

Cette expression est identique à celle rencontrée dans le cas de la loi élastique parfaitement plastique. \overline{D}_t est exactement la même matrice que D_t de l'équation (B.4). A_p^{res} a la même expression que S_p^{res} de (B.4) avec A à la place de S . Pour expliciter la matrice des modules tangents, nous utilisons la relation (B.6) qui nous donne S en fonction de A :

$$S_p = \left(1 + \frac{h}{E} \zeta_0\right) A_p + \frac{3 \zeta_0 h}{E (\sigma_0^2 - s_0^{eq})} (A_0^d : A_p) A_0^d - \frac{h \zeta_0}{3 E} (A_p : I) I + \overline{S}_p^{res} \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\overline{S}_p^{res} = \frac{h}{E} \sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r A_{p-r}^d + \frac{h}{E (\sigma_0^2 - s_0^{eq})} \left[\frac{3 \zeta_0}{2} \sum_{r=1}^{p-1} A_r^d : A_{p-r}^d + \sum_{r=1}^{p-1} \zeta_r s_{p-r}^{eq} \right] A_0^d \quad (\text{B.9})$$

Nous pouvons écrire l'équation (B.8) sous la forme suivante:

$$S_p = \overline{A} : A_p + \overline{S}_p^{res} \quad (\text{B.10})$$

Si nous injectons l'équation (B.7) dans (B.10), nous obtenons enfin la relation de comportement suivante:

$$S_p = \overline{A} \overline{D}_t : \gamma_p + \overline{A} \overline{A}_p^{res} + \overline{S}_p^{res} = D_t : \gamma_p + S_p^{res} \quad (\text{B.11})$$

ANNEXE C

Tableaux de valeurs: analyse du temps de calcul et de la taille mémoire

Les tableaux de cette section présentent les valeurs numériques des graphiques de la section 2 du chapitre I.

Largeur Bande	Taille mémoire relative					
	Ordre 10	Ordre 15	Ordre 20	Ordre 30	Ordre 40	Ordre 60
126.	3.2427	4.1885	5.1357	7.0340	8.9377	12.7613
246.	2.2956	2.8415	3.3879	4.4817	5.5771	7.7726
306.	2.0691	2.5196	2.9703	3.8725	4.7757	6.5852
366.	1.9100	2.2933	2.6769	3.4445	4.2128	5.7518
486.	1.7011	1.9965	2.2919	2.8831	3.4747	4.6592
606.	1.5702	1.8104	2.0506	2.5313	3.0122	3.9750
726.	1.4805	1.6828	1.8852	2.2902	2.6954	3.5063
846.	1.4151	1.5900	1.7648	2.1147	2.4647	3.1651
966.	1.3654	1.5193	1.6733	1.9812	2.2893	2.9057
1086.	1.3264	1.4638	1.6013	1.8763	2.1514	2.7018
1206.	1.2948	1.4190	1.5432	1.7916	2.0401	2.5373
1806.	1.1988	1.2825	1.3663	1.5337	1.7013	2.0364
3606.	1.1005	1.1429	1.1852	1.2699	1.3546	1.5241
7206.	1.0505	1.0718	1.0931	1.1357	1.1783	1.2635
12006.	1.0304	1.0432	1.0560	1.0816	1.1072	1.1584

TAB. C.1 – Tableau donnant le rapport entre la taille mémoire MAN sur celle de la méthode itérative en fonction de la largeur de bande et pour différents ordres de troncature des séries

Temps de calcul relatif T1				
Ordre	Larg.Bande 72	Larg.Bande 192	Larg.Bande 372	Larg.Bande 612
1	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.00	1.07	1.02	1.01
5	1.22	1.21	1.11	1.06
8	1.44	1.38	1.20	1.11
10	1.55	1.5	1.25	1.13
15	1.92	1.78	1.40	1.22
20	2.33	2.07	1.55	1.30
30	3.22	2.69	1.87	1.48
40	4.22	3.35	2.21	1.68

TAB. C.2 - Tableau donnant le rapport de temps d'un pas asymptotique sur celui d'une simple prédiction de Newton-Raphson en fonction de l'ordre de troncature des séries et pour différentes largeurs de bandes

Temps de calcul relatif T2				
Ordre	Larg.Bande 72	Larg.Bande 192	Larg.Bande 372	Larg.Bande 612
1	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.11	1.06	1.03	1.02
5	1.54	1.33	1.14	1.07
8	2.0	1.68	1.34	1.18
10	2.5	1.96	1.51	1.25
15	3.5	2.81	2.03	1.53
20	4.85	3.77	2.65	1.87
30	7.37	5.90	4.12	2.77
40	9.78	8.12	5.78	3.83

TAB. C.3 - Tableau donnant le rapport de temps d'un pas asymptotique de la formulation cubique sur celui d'un pas asymptotique de la formulation quadratique en fonction de l'ordre de troncature des séries et pour différentes largeurs de bandes

Bibliographie

- [1] Abaqus. *Theory and users' manuals (version 5.5)*. Hibbitt, Karlsson and Sorenson, Inc., 1080 Main Street, Pawtucket, RI 02860, USA, 1995.
- [2] S. Ahmad, B.M. Irons, and O.C. Zienkiewicz. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2:419–451, 1970.
- [3] S. Ammar. Méthode asymptotique numérique perturbée appliquée à la résolution des problèmes non linéaires en grande rotation et grand déplacement. *Thèse, Université Laval Québec, Faculté des sciences et de génie, département de génie civil*, 1996.
- [4] U. Andelfinger and E. Ramm. EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36:1311–1337, 1993.
- [5] J. Argyris. An excursion into large rotations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32:85–155, 1982.
- [6] S.N. Atluri and A. Cazzani. Rotations in computational solid mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2(1):49–138, 1995.
- [7] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 36:1251–1277, 1993.
- [8] G.A. Baker and P. Graves Morris. *Padé Approximants, Encyclopaedia of Mathematics and its applications, 2nd edition*, volume 59. Cambridge University Press, 1996.
- [9] Y. Basar and W.B. Krätzig. *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985.
- [10] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Engewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.
- [11] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 3. Eds Hermès, Paris, 1992.
- [12] H. De Boer and F. Van Keulen. Padé approximants applied to a nonlinear finite element solution strategy. In *Numerical Methods in Engineering 96*, pages

- 171–176, 1996. Proceedings of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering, 9-13 September 1996, Paris, France.
- [13] H. Shakourzadeh Bolouri. Modélisation des structures poutres tridimensionnelles à parois minces et simulation du comportement non linéaire géométrique et élasto-plastique. *Thèse, Université de Technologie de Compiègne*, 1994.
- [14] E.H. Boutyour. Méthode Asymptotique-Numérique pour le calcul de bifurcations: Application aux structures élastiques. *Thèse de l'Université de Metz, France*, 1994.
- [15] E.H. Boutyour, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Calculs des points de bifurcation par une méthode asymptotique numérique. In *Compte rendu du premier Congrès National de Mécanique au Maroc*, pages 371–378, 1993.
- [16] B. Braikat. Méthode asymptotique-numérique et fortes non linéarités. *Thèse, Université Hassan II, Faculté des sciences Ben M'sik, Casablanca*, 1995.
- [17] N. Büchter. Zusammenführung von degenerationskonzept und schalentheorie bei endlichen rotationen. *Thèse, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*, 1992.
- [18] N. Büchter and E. Ramm. Shell theory versus degeneration- a comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 34:39–59, 1992.
- [19] N. Büchter, E. Ramm, and D. Roehl. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the Enhanced Assumed Strain Concept. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37:2551–2568, 1994.
- [20] B. Budiansky. Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures. *Advances in Applied Mechanics*, 14:1–65, 1974.
- [21] J.M. Cadou. Méthode asymptotique numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure. *Thèse, Université de Metz*, 1997.
- [22] J.M. Cadou, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. The asymptotic numerical method: Application to fluid-structure interaction. In *Computational Fluid Dynamics 96*, pages 131–138, 1996. Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, 9-13 September 1996, Paris, France.
- [23] M. Carrive-Bédouani, P. Le Tallec, and J. Mouro. Approximations par éléments finis d'un modèle de coques minces géométriquement exact. *Revue européenne des éléments finis*, 4(5-6):633–661, 1995.
- [24] W. F. Chen. *Constitutive Equations for Engineering Materials*. Elsevier, 1994. Volume 2: Plasticity and modeling.
- [25] B. Cochelin. Méthode asymptotique-numérique pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques. *Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, France*, 1994.

- [26] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Comp. and Struct.*, 53(5):1181–1192, 1994.
- [27] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. The asymptotic-numerical method: an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics. *Revue européenne des éléments finis*, 3(2):281–297, 1994.
- [28] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Asymptotic-numerical methods and padé approximants for nonlinear elastic structures. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37:1187–1213, 1994.
- [29] M.A. Crisfield. A fast incremental/iteration solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, 13:55–62, 1981.
- [30] M.A. Crisfield. An arc-length method including line search and acceleration. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 19:1269–1289, 1983.
- [31] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. John Wiley & Sons, 1991.
- [32] D.A. Dadeppo and R. Schmidt. Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. *J. Appl. Mech.*, 97:894–896, 1975.
- [33] N. Damil and M. Potier-Ferry. A new method to compute perturbed bifurcation: Application to the buckling of imperfect elastic structures. *Int. J. Eng. Sci.*, 26(9):943–957, 1990.
- [34] F.B. Damjanić, B. Brank, and D. Perić. Elasto-plasticity in the non-linear thin shell modelling. *Computational plasticity, Fundamentals and Applications*, 1:1890–1897, 1997. D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton (Eds.), Barcelona 1997.
- [35] J. Descamps, H.-L. Cao, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to solve large strain viscoplastic problems. *Computational plasticity, Fundamentals and Applications*, 1:393–400, 1997. D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton (Eds.), Barcelona 1997.
- [36] E. Domissy. Formulation et évaluation d'éléments finis volumiques modifiés pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques. *Thèse, Université de Technologie de Compiègne*, 1997.
- [37] E.N. Dvorkin and K.J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88, 1984.
- [38] R.H. Gallagher. Perturbation procedures in nonlinear finite element structural analysis. *Computational Mechanics-Lecture Notes in Mathematics*, 461:75–89, 1975. Springer-Verlag, Berlin.
- [39] M. Géradin and D. Rixen. Parametrization of finite rotations in computational dynamics: a review. *Revue européenne des éléments finis*, 4(5-6):497–553, 1995.

- [40] W. Graf, T.Y. Chang, and A.F. Saleeb. On the numerical performance of three-dimensional thick shell elements using a hybrid/mixed formulation. *F.E.A.D.*, 2:357–375, 1986.
- [41] A. E. Green and P. M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 18:251–281, 1965.
- [42] S. Hadji. Méthode de résolution pour les fluides incompressibles. *Thèse, Université de Technologie de Compiègne*, 1995.
- [43] B. Halphen and J. Salençon. *Elasto-plasticité*. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1987.
- [44] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford (G. B.), 1950.
- [45] A. Elhage Hussein, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical algorithm for frictionless contact problems. *Revue européenne des éléments finis*, 1997. submitted.
- [46] T. Kerber. Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes. *La recherche aérospatiale*, 3:45–76, 1990.
- [47] W.T. Koiter. On the stability of elastic equilibrium. *Thèse, Delft, English translation NASA Techn. Trans., F. 10,883,1967*, 1945.
- [48] P. Ladevèze. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, 300(2):41–44, 1985.
- [49] P. Ladevèze. New advances in the large time increment method. *New advances in Computational Structural Mechanics P.Ladevèze - O.C. Zienkiewicz Eds, Elsevier*, pages 3–21, 1991.
- [50] M. Al Makdad and A. Ibrahimbegović. Interpolation non linéaire pour un élément fini de poutre en grandes rotations tri-dimensionnelles. *Revue européenne des éléments finis*, 4(5-6):555–576, 1995.
- [51] G. A. Maugin. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, 1992.
- [52] A. Najah. Calcul non-linéaire des structures par des méthodes asymptotiques numériques et accélération de la convergence. *Thèse, Université Hassan II, Faculté des sciences BEN M'SIK, Casablanca*, 1997.
- [53] A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. A critical review of asymptotic numerical methods. à apparaître, 1996.
- [54] A.K. Noor. Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Computers and Structures*, 13:31–44, 1981.

- [55] A.K. Noor and J.M. Peters. Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal*, 18(4), 1980. Article No. 79-0747R.
- [56] A.K. Noor and J.M. Peters. Tracing post-limit-point paths with reduced basis technique. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 28:217–240, 1981.
- [57] H. Parish. A continuum-based shell theory for non-linear applications. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 38:1855–1883, 1995.
- [58] T.H.H. Pian and K. Sumihara. Rational approach for assumed stress finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 20:1685–1695, 1984.
- [59] T.H.H. Pian and P. Tong. Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 22:173–181, 1986.
- [60] W. Pietraszkiewicz and J. Badur. Finite rotations in the description of continuum deformation. *Int. J. Eng. Sci.*, 21:1097–1115, 1983.
- [61] M. Potier-Ferry. Foundations of elastic post-buckling theory. in *Buckling and Post-buckling, Lecture Notes in Physics*, 288:1–82, 1987. Springer-Verlag, Berlin.
- [62] M. Potier-Ferry, N. Damil, B. Braikat, J. Descamps, J.M. Cadou, H.L. Cao, and A. Elhage Hussein. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *C. R. Acad. Sci. Paris, t.324, Série II b*, pages 171–177, 1997.
- [63] E. Ramm. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. *Non-linear finite element analysis in structural mechanics*, edited by E. Wunderlich, E. Stein and K.J. Bathe, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [64] E. Riks. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 47:219–259, 1984.
- [65] A.F. Saleeb, T.Y. Chang, and W. Graf. A quadrilateral shell element using a mixed formulation. *Computers and Structures*, 26(5):787–803, 1987.
- [66] A.F. Saleeb, T.Y. Chang, W. Graf, and S. Yingyeunyong. A hybrid/mixed model for non-linear shell analysis and its applications to large-rotation problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 29:407–446, 1990.
- [67] Signorini. Sulle deformazioni termoelastiche finite. in *Proc 3rd International Congress Applied Mechanics*, 2:80–89, 1930.
- [68] J.C. Simo and F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 33:1413–1449, 1992.
- [69] J.C. Simo and D.D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 72:267–304, 1989.

- [70] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. part ii: the linear theory; computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 73:53–92, 1989.
- [71] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 79:21–70, 1990.
- [72] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 37:1595–1636, 1990.
- [73] J.C. Simo, M.S. Rifai, and D.D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iv: variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 81:91–126, 1990.
- [74] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. A three-dimensional finite-strain rod model. part ii: Computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 58:79–116, 1986.
- [75] H. Stolarski and T. Belytschko. Membrane locking and reduced integration for curved elements. *Journal of Applied Mechanics*, 49:172, 1982.
- [76] H. Stolarski and T. Belytschko. Shear and membrane locking in curved c^0 elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 41:279–296, 1983.
- [77] J.M.T. Thompson and A.C. Walker. The non-linear perturbation analysis of discrete structural systems. *Int. J. Solids Structures*, 4:757–768, 1968.
- [78] A. TRI. Méthode asymptotique-numérique pour les fluides visqueux incompressibles et la détection de la bifurcation de Hopf. *Thèse de l'Université de Metz, France*, 1996.
- [79] A. Tri, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une Méthode Asymptotique Numérique. *Revue européenne des éléments finis*, 5(4):415–442, 1996.
- [80] P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches. à apparaître, 1996.
- [81] A.C. Walker. A non-linear fea of shallow circular arches. *International Journal of Solids and Structures*, 5:97–102, 1969.
- [82] P. Wriggers and U. Hueck. A formulation of the QS6 element for large elastic deformation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39:1437–1454, 1996.
- [83] S. T. Yeo and B. C. Lee. Equivalence between Enhanced Assumed Strain method and assumed stress hybrid method based on the Hellinger-Reissner principle. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39:3083–3099, 1996.
- [84] H. Zahrouni, B. Cochelin, and M. Potier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1997. Submitted.

- [85] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company, fourth edition, 1991.

Liste des figures

I.1	Maillage de plaque avec l'élément DKT18. La numérotation des noeuds est effectuée suivant l'axe x pour faire varier la largeur de bande en fonction du nombre d'éléments suivant x. Deux éléments seulement sont considérés selon l'axe y	19
I.2	Courbes représentant l'évolution du rapport de la taille mémoire MAN sur celle de la méthode itérative en fonction de la largeur de bande et pour différents ordres de troncature des séries	19
I.3	Courbes représentant l'évolution du temps relatif T1 en fonction de l'ordre de troncature des séries et pour différentes largeurs de bande. T1 correspond au rapport entre le temps d'un pas asymptotique et celui d'une simple prédiction de Newton-Raphson	21
I.4	Courbes représentant l'évolution du temps relatif d'un pas asymptotique basé sur une formulation cubique par rapport à celui basé sur une formulation quadratique en fonction de l'ordre de troncature et pour différentes largeurs de bande	22
I.5	Description géométrique de la coque	27
I.6	Toit : description géométrique	39
I.7	Toit : courbes charge / déplacement du point central M et du point B situé au milieu du bord libre (toit mince $h=6.35$)	39
I.8	Toit : courbes charge/déplacement du point central M, comparaison entre l'élément DKT18 et celui proposé par Büchter (toit mince $h=6.35$)	40
I.9	Toit : courbes charge/déplacement, du point central M, comparaison entre l'élément DKT18 et celui proposé par Büchter (toit épais $h=12.7$)	40
I.10	Toit en configuration déformée pour différents niveaux de chargement ($h = 6.35 \text{ mm}$). Les images sont tournées dans l'espace pour mieux percevoir la déformée	41
I.11	Description géométrique de la poutre	42
I.12	Courbe charge/déplacement vertical d'un point situé au bord chargé .	42
II.1	Configuration déformée de la coque cylindrique soumise à l'action d'une pression axiale uniforme $P=981 \text{ N/mm}$	59
II.2	Processus de continuation avec la Méthode Asymptotique Numérique pour différents ordres de troncature. Courbe charge/déplacement radial du point milieu du bord vertical de l'ouverture	60
II.3	Poutre en grandes rotations: diagramme charge/déplacement du point d'application de la force F. Un seul pas de calcul est présenté avec différents ordres de troncature	62

II.4	Poutre en grandes rotations: diagramme du résidu relatif/flèche pour différents ordres de troncature	63
II.5	Flambage latéral de poutre: configurations initiale et déformée. La géométrie initiale est perturbée par une imperfection initiale avec une valeur maximale de $h/10$ dont la forme est donnée par le premier mode de bifurcation.	65
II.6	Flambage latéral de poutre: diagramme charge/déplacement U_2 du noeud d'application de la force	65
II.7	Flambage latéral de poutre: diagramme charge/déplacement U_3 du noeud d'application de la force	66
II.8	Description géométrique de l'hémisphère pincé	68
II.9	Configuration déformée de l'hémisphère	68
II.10	Hémisphère pincé: courbe charge/déplacement	69
II.11	Description géométrique de l'arc circulaire profond	70
II.12	Configurations déformées de l'arc pour différents niveaux de chargement. u est le déplacement vertical du point d'application de la force F	71
II.13	Flambage de l'arc profond: courbe charge/déplacement du point d'application de la force F	72
II.14	Description géométrique du cylindre pincé	73
II.15	Courbe charge/déplacement radial du point d'application de la force, les points sur la courbe désignent les fins de pas de la MAN	74
II.16	Etats déformés du cylindre pincé pour différents niveaux de chargement (charges: 378, 634, 1105, 1622, 2738), soit un déplacement final de 40 suivant la direction radiale du point chargé	76
III.1	Courbe de traction uniaxiale: loi élastique parfaitement plastique régularisée avec différentes valeurs de η	82
III.2	Loi élasto-plastique avec écrouissage linéaire. La courbe contraintes / déformations présente deux pentes correspondant au module d'Young élastique E ainsi qu'au module tangent E_t	87
III.3	Courbe charge / déplacement d'une poutre en traction uniaxiale avec la loi régularisée (hyperbolique) pour différentes valeurs de η	97
III.4	Courbe représentative d'un pas asymptotique pour différents ordres de troncature des séries	98
III.5	Courbes charge / déplacement d'une poutre en traction uniaxiale avec la loi élastique parfaitement plastique régularisée: comparaison entre la solution itérative et celle de la MAN	99
III.6	Courbes représentant la qualité de la solution asymptotique dans le cas de la plaque en traction uniaxiale avec la loi élastique parfaitement plastique régularisée	99
III.7	Courbes charge / déplacement d'une poutre en traction uniaxiale avec la loi de type puissance régularisée: comparaison entre la solution itérative et celle de la MAN	100

III.8 Courbes charge / déplacement pour différentes valeurs de η d'une poutre en traction uniaxiale: loi régularisée de type élasto-plastique avec un écrouissage linéaire	101
III.9 Courbe charge / déplacement de la plaque en flexion avec une loi de comportement élastique parfaitement plastique régularisée	103
III.10 Courbes montrant l'évolution de la contrainte équivalente au cours du chargement pour différentes valeurs de ϵ	104
III.11 Courbe charge / déplacement de la plaque en flexion pour le cas de la loi de type puissance	105
III.12 Courbe charge / déplacement de la poutre en flexion avec la loi de type puissance: comparaison entre deux solutions utilisant respectivement $\epsilon = 10^{-5}$ et $\epsilon = 10^{-2}$	106
III.13 Courbe donnant l'évolution du résidu relatif en fonction du déplacement pour deux solutions utilisant différents paramètres de précision $\epsilon = 10^{-5}$ et $\epsilon = 10^{-2}$ (plaque en flexion, loi de comportement de type puissance)	106
III.14 Courbe charge / déplacement de la poutre en flexion (la loi élasto-plastique avec écrouissage linéaire)	107
III.15 Description géométrique du toit	108
III.16 Courbe charge / déplacement vertical du point d'application de la force: loi élastique parfaitement plastique régularisée	110
III.17 Courbe représentant l'évolution de la réponse contraintes équivalente en fonction de la déformation équivalente en un point situé au centre de la coque: loi élastique parfaitement plastique régularisée	110
III.18 Courbe charge / déplacement vertical du point d'application de la force: loi puissance régularisée	111
III.19 Courbe donnant l'évolution, au point central de la coque, de la contrainte équivalente en fonction de la flèche: loi puissance	112
III.20 Courbe contrainte équivalente en fonction de la déformation équivalente dans le cas de la loi puissance: les points représentent les fins de pas asymptotiques	112
III.21 Courbe charge / déplacement vertical du point d'application de la force: loi régularisée de type élasto-plastique avec un écrouissage linéaire	113
III.22 Configuration déformée de la coque cylindrique soumise à l'action d'une pression axiale uniforme $P=981$. N/mm	115
III.23 Cylindre troué, loi puissance. Courbe charge / déplacement radial du point milieu du bord vertical de l'ouverture limité à 10	116
III.24 Cylindre troué, loi élastique parfaitement plastique. Courbe charge / déplacement radial du point milieu du bord vertical de l'ouverture limité à 8	117

Liste des tableaux

II.1	Flambage de la coque cylindrique avec deux ouvertures. Temps de calcul pour la MAN (machine utilisée: HP 9000 K 200).	61
II.2	Flambage latéral de poutre encastree: comparaison entre le parametre de precision basé sur le critere déplacement et celui basé sur le critere résidu	66
III.1	Loi de type hyperbolique: étude de l'influence du parametre η sur le nombre de décompositions de matrices de rigidité tangente	98
III.2	Traction simple, loi puissance: analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (le résidu relatif admissible est de 10^{-3})	100
III.3	Traction simple, loi élastique parfaitement plastique: analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (le résidu relatif admissible est de 10^{-3})	102
III.4	Flexion, loi élastique parfaitement plastique: analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson	104
III.5	Flexion, loi puissance: analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson	105
III.6	Flexion, loi élastoplastique avec écrouissage linéaire: analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson	107
III.7	Toit, loi élastique parfaitement plastique: analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (résidu relatif max admissible est de 10^{-3})	111
III.8	Toit, loi puissance: analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (résidu relatif max admissible est de 10^{-3})	111
III.9	Analyse du nombre de décompositions de la matrice de rigidité tangente en fonction de la longueur d'arc imposée dans le cas de l'algorithme de Newton-Raphson (résidu relatif max admissible est de 10^{-3})	113

III.10	Flambage de la coque cylindrique avec deux ouvertures. Temps de calcul MAN : loi de type puissance (machine utilisée : HP 9000 K 200).	116
III.11	Flambage de la coque cylindrique avec deux ouvertures. Temps de calcul MAN : loi élastique parfaitement plastique (machine utilisée : HP 9000 K 200).	116
III.12	Flambage de la structure de toit épais. Temps de calcul MAN : loi de type puissance (machine utilisée : HP 9000 K 200).	117
III.13	Flambage de la structure de toit épais. Temps de calcul MAN : loi élastique parfaitement plastique (machine utilisée : HP 9000 K 200).	117
C.1	Tableau donnant le rapport entre la taille mémoire MAN sur celle de la méthode itérative en fonction de la largeur de bande et pour différents ordres de troncature des séries	127
C.2	Tableau donnant le rapport de temps d'un pas asymptotique sur celui d'une simple prédiction de Newton-Raphson en fonction de l'ordre de troncature des séries et pour différentes largeurs de bandes	128
C.3	Tableau donnant le rapport de temps d'un pas asymptotique de la formulation cubique sur celui d'un pas asymptotique de la formulation quadratique en fonction de l'ordre de troncature des séries et pour différentes largeurs de bandes	128